O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

RENESSANS TA’LIM UNIVERSITETI

SH.I.SHARIPOVA

Geometriyadan eng katta va eng kichik qiymatlarga oid masalalar

Tashkent 2024

Uslubiy qo‘llanmada tekislikda uchburchak, to‘rtburchak, ko‘pburchaklarda, aylana elementlarida eng katta va eng kichik qiymatlarga oid, shuningdek fazoviy jismlarda eng katta va eng kichik qiymatlarga oid masalalar, hamda geometrik tengsizliklarni yechish usullari tahlil qilingan.

Tuzuvchi: Renessans ta’lim universiteti Matematika va axborot texnologiyalari kafedrasi katta o‘qituvchisi Sh.I.Sharipova

Taqrizchilar:

Renessans ta’lim universiteti Matematika va axborot texnologiyalari kafedrasi mudiri, dotsent G‘.G‘.Yunusov

TDPU Matematika va uni o‘qitish metodikasi kafedrasi dotsenti, p.f.n. A.A. Akmalov

Uslubiy qo‘llanma Renessans ta’lim universiteti “Matematika va axborot texnologiyalari” kafedrasining 2024 yil ____________№___majlisida va universitet kengashining 2024 yil ___________dagi №___yig‘ilishida muhokama etilgan va chop etishga tavsiya qilingan.

MUNDARIJA

KIRISH

Ma’lumki, ko’plab tekislikdagi figuralarga oid masalalarni ishlayotganimizda berilgan figurani uchburchaklarga ajratib, uchburchak elementlaridan foydalanamiz. Uchburchaklarda eng katta va eng kichik qiymatlarga oid masalalar asosan geometrik tengsizliklardan yoki funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topishdan yoki bitta nuqtadan tushirilgan perpendikulyar va og’madan yoki uchburchakning mavjud bo’lishlik tengsizligidan yoki uchburchaklarning o’tkir burchaklilik shartidan yoki o’tmas burchakli bo’lish shartidan foydalanib echiladi. Uchburchaklarga oid tengsizliklarni isbotlashda shuningdek balandlik, mediana va bissektrisalar orasidagi munosabatlarni ifodalovchi tengsizlikdan bir nechta musbat kattaliklar o’rta arifmetigi haqidagi teoremalardan foydalangan holda har xil turdagi masalalar echib ko’rsatiladi.

Hayotiy ehtiyojlardan kelib chiqib, ayrim masalalarga to’rtburchak va uni tashkil qiluvchi elementlarning eng katta va eng kichik qiymatlarga oid masalalarga duch kelamiz. Bu yerning ma’lum maydonidan eng katta va eng kichik yuzaga ega bo’lgan to’rtburchak ajratib olish yoki ma’lum uzunlikdan foydalanib eng katta yoki eng kichik perimetrli qavariq to’rtburchak yasash masalalasi, shuningdek qavariq to’rtburchak shakldagi figurani boshqa figuraga joylashtirish uchun uning elementlari kattaliklarining eng katta va eng kichik qiymatlari qanday bo’lishi kerakligiga oid va boshqa masalalardir. Bunda to’rtburchaklarning diagonallari va tomonlari orasidagi munosabatlar, burchaklari va tomonlari hamda diagonallari orasidagi burchaklarning munosabatlarini ifodalovchi tengsizliklardan foydalaniladi.

Aksariyat hollarda ko’pburchaklarga oid masalalarga biz aylana elementlari bilan bog’liq eng katta va eng kichik qiymatlarga oid masalalarga duch kelamiz.

Eng katta va eng kichik qiymatlarga oid masalalar geometrik tengsizliklar bilan chambarchas bog'liq, geometrik tengsizliklarni isbotlashga esa bevosita algebraik tengsizliklarning xossalaridan foydalanamiz. Aylanadagi eng katta va eng kichik qiymatlarga oid masalalarga, aylanalarning o'zaro vaziyatlarini, markazlari orasidagi masofalar va radiuslar yig'indisini taqqoslovchi, nuqtadan aylanagacha bo'lgan eng qisqa va eng uzoq masofalarni ifodalovchi munosabatlardan, aylana markazidan kesuvchigacha masofalarni taqqoslovchi munosabatlardan foydalanildi. Mazkur qo'llanmada aylana va doirada eng katta va eng kichik qiymatlarga oid bir nechta masalalar echilishlari va ba'zilariga tegishli chizmalar keltirilgan.

Stereometriyaga oid eng katta va eng kichik qiymatlar. Planimetriya masalalari kabi stereometriyadan ham eng katta, eng kichik, maksimum va minimum qiymatlarga oid masalalar muhim tatbiqiy ahamiyatga egadir.

Stereometriyadan aksariyat eng katta va eng kichik qiymatlarga oid masalalar tengsizliklarning xossalaridagi va trigonometrik funksiyalarning xossalaridan foydalanib echiladi. Ko'pchilik hollarda biror o'zgaruvchi kiritilib, analitik usulda echiladi, ya'ni funksiya tuzilib argumentning o'zgarish chegaralari aniqlanadi. Hosil qilingan funksiya elementar usulda yoki hosila yordamida tekshiriladi.

Musbat sonlar ko'paytmasi va yig'indisining ekstremumlarini topishga olib keladigan masalalar stereometriyada ham uchraydi. Koshi tengsizligida tenglik $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ bo'lganda bajarilishidan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

Agar n-ta musbat sonning yig'indisi o'zgarmas bo'lsa, ularning yig'indisi bu sonlar o'zaro teng bo'lganda eng kichik bo'ladi.

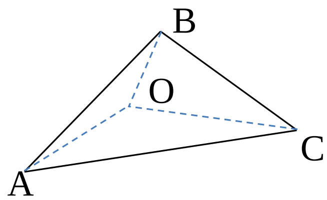
Mazkur qo'llanma oliy ta'lim muassasalari talabalari, AL va KHK o'quvchilari uchun geometriyani chuqurroq o'rganishida samarali foydalanishlari mumkin.

UCHBURCHAKLARDA ENG KATTA VA ENG KICHIK QIYMATLARNI TOPISHGA DOIR MASALALAR

2.1-masala. Uchburchak perimetri uning ichidan olingan ixtiyoriy nuqtadan uchlarigacha bo’lgan masofalar yig’indisidan katta, bu masofalar kvadratlari yig’indisidan kichikligini isbotlang.

Isboti. O uchburchak ichidagi ixtiyoriy nuqta bo’lsin, u holda

$$\begin{aligned} AO + BO > AB \\ AO + CO > AC \\ BO + CO > BC \end{aligned} \quad (1)$$



1-чизма

(1) tengsizliklarni hadlab qo’shamiz:

$AB + AC + BC > 2(\ AO + BO + CO)$ (2)

Quyidagi tengsizlik o’rinli:

$$\begin{cases} AB + BC > \ AO + CO \\ BC + AC > \ BO + AO \\ AB + AC > BO + CO \end{cases} \quad (3)$$

(3) tengsizliklarni hadlab qo’shamiz:

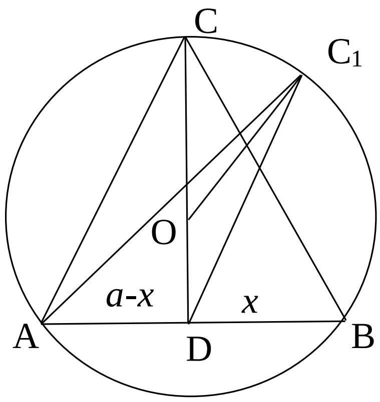
$2(AB + AC + BC) > 2(\ AO + BO + CO)$ yoki

$$AB + AC + BC > \ AO + BO + CO \qquad (4)$$

(2) va (4) dan isbot kelib chiqadi.

2.2-masala. Berilgan asosga va uchidagi burchagiga ko’ra uchburchaklarning teng yonlisi eng katta medianaga ega. Shuni isbotlang.

Isbot. Izlanayotgan uchburchakning AB asosida berilgan o'tkir burchakka tiralgan segment yasaymiz. ΔCB teng yonli, ΔAC_1D esa ixtiyoriy uchburchak bo'lsin. C va C_1 nuqtalar AB yoyda yotadi. D nuqta CD mediananing asosi bo'lsin. Chizmadan $OC = OC_1$ va $OC_1 + OD > DC_1$. Bu ikkita ifodani hadlab qo'shamiz va $OC + OC_1 + OD > DC_1 + OC_1$ yoki $OC + OD > DC$ yoki $DC > DC_1$ni hosil qilamiz.



2.2-масала чизмаси

2.3-masala. Uchidagi burchaklari $\boldsymbol{\varphi}$ ga teng va $\boldsymbol{\varphi}$ ga yopishgan tomonlari yig'indisi 2***a*** bo'lgan barcha uchburchaklar ichidan eng katta yuzalisini toping.

Echish. Izlanayotgan uchburchakning yon tomonlari $\boldsymbol{a+\alpha}$ va $\boldsymbol{a-\alpha}$ bo'lsin. U holda uchburchak yuzi $S = \frac{1}{2}(a+\boldsymbol{\alpha})(a-\boldsymbol{\alpha})sin\varphi = \frac{1}{2}(a^2 - \propto^2)sin\varphi$. Bundan ko'rinadiki S miqdor $\boldsymbol{\alpha=0}$ bo'lganda maksimumga erishadi. Demak, izlanayotgan uchburchak teng yonli uchburchak bo'ladi.

2.4-masala. Uchburchak ichida olingan ixtiyoriy nuqtadan uchburchak tomonlarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi, uchburchakning eng kichik balandligidan katta, eng katta balandligidan kichik bo'lishini isbotlang.

Isboti. Uchburchak tomonlarini ***a,b,c*** lar bilan belgilaymiz. Aniqlik ***a≥b≥c*** uchun bo'lsin. Bunda ularga mos balandliklar orasidagi munosabat $h_a \leq h_b \leq h_c$ bo'ladi.

Agar uchburchak ichida olingan ixtiyoriy nuqtadan tomonlarigacha bo'lgan masofalar mos ravishda l_a, l_b, l_c larga teng bo'lcin. U holda uchburchakning ikkilangan yuzasi quyidagiga teng bo'ladi:

$2S = al_a + bl_b + cl_c$ (5).

$s \leq a, c \leq b$ ekanligidan va (5) dan $sl_a + sl_b + cl_c \leq 2S$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan $l_a + l_b + l_c \leq \frac{2S}{s}$ bo'ladi.

Ammo $\frac{2S}{s} = h_c$ ekanligidan$l_a + l_b + l_c \le h_c$ (6) ekanligi kelib chiqadi. $2S = al_a + bl_b + cl_c$ va $s \le a, c \le b$ larni e'tiborga olsak, $al_a + al_b + al_c \ge 2S$ munosabat o'rinli. Bundan

$$al_a + bl_b + cl_c \ge 2S = h_a \quad (7).$$

(6) va (7) dan $h_c \le l_a + l_b + l_c \le h_c$ ga ega bo'lamiz.

2.5-masala. To'g'ri to'rtburchakning yuzi $\boldsymbol{S}$ bo'lganda tomonlari yig'indisining eng kichik qiymatini toping.

Echish. To'g'ri to'rtburchakning tomonlari a va b bo'lsin. Shartga ko'ra $ab = S$. Demak, $2ab = 2S$. Shunday qilib $2a + b$ miqdor $2a = b$ bo'lganda eng kichik bo'lar ekan. Bulardan $\begin{cases} 2ab = 2S \\ 2a = b \end{cases}$ sistemani echib $b = \sqrt{2S}$, $2a = \sqrt{2S}$ larni topishimiz mumkin.

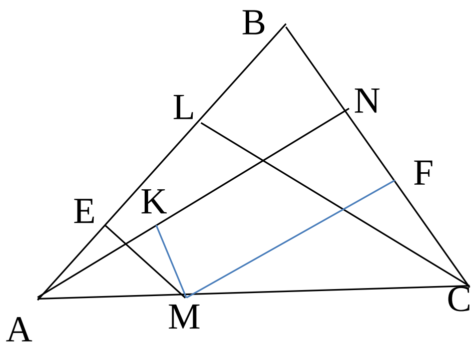
2.6-masala. Uchburchak ichida shunday nuqtani topingki, bu nuqtadan tomonlargacha bo'lgan masofalar ko'paytmasi eng katta bo'lsin.

Echish. Izlanayotgan nuqta M bo'lsin. Bu nuqtadan uchburchak tomonlarigacha bo'lgan masofalar x, y, z bo'lsin. U holda uchburchak AVS yuzi $S = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}$ bo'ladi.

Bundan $2S = ax + by + cz$ ekanligi kelib chiqadi. xyz ko'paytma $ax \cdot by \cdot cz$ miqdor eng katta qiymatga erishganda, eng katta qiymatga erishadi. Oxirgi ko'paytma $ax = by = cz = \frac{2S}{3}$ da o'rinli. Bundan $x = \frac{2S}{3a} = \frac{ah_a}{3a} = \frac{h_a}{3}$; $y = \frac{h_b}{3}$; $z = \frac{h_c}{3}$, bunda h_a, h_b, h_c lar uchburchak balandliklari. Bu tengsizliklarda izlangan nuqta, uchburchakning medianalari kesishgan nuqtasi ekanligi kelib chiqadi.

2.7-masala. Uchburchak tomonida shunday nuqta topingki, bu nuqtadan qolgan ikki tomonlargacha bo'lgan masofalar yig'indisi eng kichik bo'lsin.

Echish. ABC uchburchakning AC tomonida ixtiyoriy M nuqtalarni olamiz. Aniqlik uchun A burchak C burchakdan katta bo'lsin. U holda A nuqtadan BC tomongacha masofa AN, C nuqtadan AB tomongacha masofa CL dan kichik bo'ladi. Endi M dan BC va AB tomonlargacha bo'lgan masofalar yig'indisi MF + ME ni AN bilan taqqoslash kerak. M nuqtadan AN ga AK perpendikulyar tushiramiz. Bundan AK va ME larni taqqoslash etarli, chunki $KN=$ MF.

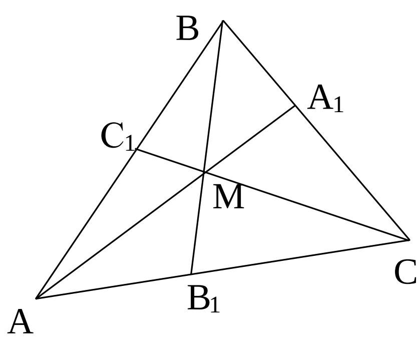


2.7-масала чизмаси

To'g'ri burchakli AKM va AEM uchburchaklarda AK katet ME katetdan kichik. Demak, AK + KN < MF + ME yoki AN < MF + ME, ya'ni katta burchak uchi A izlanayotgan nuqta bo'ladi.

2.8-masala. ABC uchburchakning ichida M nuqta olingan. M nuqtadan AM, BM, CM to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlar mos tomonlarini A_1, B_1,C_1 nuqtalarda kesadi. $\frac{AM}{A_1M}\cdot\frac{BM}{B_1M}\cdot\frac{CM}{C_1M}$ ko'paytmaning eng kichik qiymatini toping.

Echish. AVS va MVS uchburchaklar umumiy asosga ega bo'lgani uchun $\frac{AA_1}{MA_1}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_1}$. Quyidagi proporsiyalarni tuzamiz: $\frac{AA_1-MA_1}{MA_1}=\frac{S_2+S_3}{S_1}$ yoki $\frac{MA}{MA_1}=\frac{S_2+S_3}{S_1}=\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_3}{S_1}$.



2.8-масала чизмаси

Xuddi shunday $\frac{MB}{MB_1}=\frac{S_3+S_1}{S_2}=\frac{S_3}{S_2}+\frac{S_1}{S_2}$ va $\frac{MC}{MC_1}=\frac{S_1+S_2}{S_3}=\frac{S_1}{S_3}+\frac{S_2}{S_3}$.

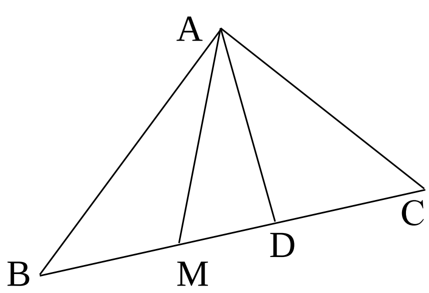
Bu tengliklarni hadlab ko'paytiramiz:

$$\frac{MA}{MA_1}\cdot\frac{MB}{MB_1}\cdot\frac{MC}{MC_1}=\frac{(S_2+S_3)(S_3+S_1)(S_1+S_2)}{S_1\cdot S_2\cdot S_3}\geq\frac{2\sqrt{S_2\cdot S_3}\cdot 2\sqrt{S_1\cdot S_3}\cdot 2\sqrt{S_1\cdot S_2}}{S_1\cdot S_2\cdot S_3}=8$$

Bu tengsizlikdagi (=) belgisi M nuqta uchburchak medianalari kesishgan nuqta bo'lganda bajariladi.

2.8(a)-masala. Uchburchak asosida shunday nuqtani topingki, bu nuqtadan uchburchak uchlarigacha bo'lgan masofalar kvadratlari yig'indisi eng kichik bo'lsin.

Echish. ABC uchburchakning *AD* balandligini *h* orqali belgilaymiz. *AD* balandlikning asosdan ajratgan kesmalari BD va CD ni a va b lar bilan belgilaymiz. Izlanayotgan nuqta M bo'lsin. MD kesma uzunligini topamiz. MD kesma uzunligini *x* bilan belgilaylik. U holda



2.8(а)-масала чизмаси

$$AM^2=AD^2+MD^2=h^2+x^2$$
$$BM^2=\left(BD-MD\right)^2=\left(a-x\right)^2$$
$$CM^2=(CD+MD)^2=(b+x)^2$$

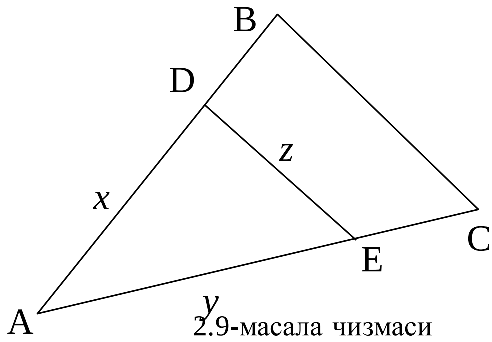
$y=AM^2+BM^2+CM^2$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$$y=3x^2-2(a-b)^2x+a^2+b^2+h^2.$$

Ma'lumki, mx^2+nx+p kvadrat uchhad $m>0$ bo'lganda $x=-\frac{n}{2m}$ da eng kichik qiymatga erishadi. Bu qiymat $\frac{4mp-n^2}{4m}$ ga teng bo'ladi.

Bizning masalada bu qiymat $y=\frac{3h^2+2(a^2+b^2+ab)}{3}$ ga teng bo'lib, bu qiymatga $x=\frac{a-b}{3}$ da erishadi.

2.9-masala. Tomoni $\boldsymbol{a}$ ga teng bo'lgan muntazam uchburchakning yuzini teng ikkiga bo'luvchi eng kichik kesma (uchburchak tomonlari orasidagi) uzunligi $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ga tengligini va u asosga parallelligini isbotlang.



2.9-масала чизмаси

Echish. *DE*=z – izlanayotgan kesma bo'lsin.

AD=*x*, *AE*=*y* belgilashlar kiritamiz. AVS uchburchak yuzi $\frac{a^2}{2}sin60^0$ ga teng bo'lganligidan ADE uchburchak yuzi $\frac{a^2}{4}sin60^0$ ga teng bo'ladi.

Boshqa tomondan, hosil bo'lgan uchburchak yuzi $\frac{xy}{2}sin60^0$ ga tengdir.

Bulardan $\frac{a^2}{2} = xy$ ga ega bo'lamiz. Bundan $y = \frac{a^2}{2x}$. ADE uchburchakdan kosinuslar teoremasiga asosan:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xycos60^0 = x^2 + y^2 - xy.$$

$y = \frac{a^2}{2x}$ ekanligini e'tiborga olsak: $z^2 = x^2 + \frac{a^4}{4x^2} - \frac{a^2}{2}$.

$(-\frac{a^2}{2})$ – o'zgarmas miqdor bo'lgani uchun $y = x^2 + \frac{a^4}{4x^2}$ funksiyaning minimumini topamiz.

$x^2 \cdot \frac{a^4}{4x^2} = \frac{a^2}{4}$ ko'paytma o'zgarmas bo'lgani uchun, *u* o'zgaruvchi $x^2 \cdot \frac{a^4}{4x^2}$ bo'lganda, ya'ni $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ da minimumga erishadi. x ning bu qiymatini $z^2 = x^2 + \frac{a^4}{4x^2} - \frac{a^2}{2}$ ga qo'yib, $z^2_{min} = \frac{a^2}{2}$ ga ega bo'lamiz. Demak, $z_{min} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Xuddi shunday $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ni topamiz. Bulardan ADE uchburchakning teng tomonli ekanligi va DE ning AS ga parallelligi kelib chiqadi.

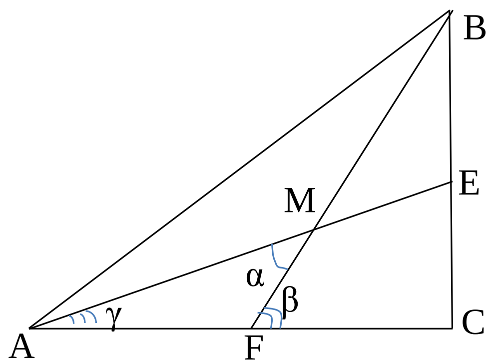
2.10-masala. Berilgan ABC uchburchakning AB va AC tomonlari davomlarida yig'indisi uchinchi tomonga teng bo'lgan BD va CE kesmalarni qo'yamiz. DE kesmaning eng kichik bo'lishini isbotlang.

Echish. Ma'lumki, a va b tomoni va ular orasidagi φ burchagi berilgan bo'lib, $a+b$ – o'zgarmas bo'lgan ($a+b$=m) uchburchaklar orasida teng yonli ($a = b = \frac{m}{2}$) uchburchak eng kichik uchinchi tomonga ega bo'ladi.

Masala shartiga ko'ra $BC = BD + CE$. Shuning uchun $AD + AE = AB + AC + BC$. Ammo, yuqoridagiga asosan DE eng kichik qiymat qabul qiladi. Bu esa $AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$ bo'lganda bajariladi.

2.11-masala. Agar to'g'ri burchakli uchburchakning katetlariga o'tkazilgan medianalari orasidagi o'tkir burchak α bo'lsa $tg\alpha$ ning eng katta qiymatini toping.

Echish. ABC uchburchakning AE va BF medianalari kesishgan nuqtasi M bo'lsin. Shartga ko'ra $\angle AMF = \alpha$, $\angle BFC = \beta$, $\angle EAC = \gamma$, $BC = a, AC = b, AB = c$ belgilashlarni kiritamiz.



2.11-масала чизмаси

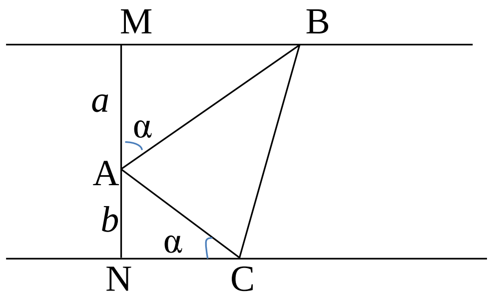
Uchburchakning tashqi burchagi unga qo'shni bo'lmagan ikkita ichki burchaklarning yig'indisiga teng bo'lgani uchun $\alpha = \beta - \gamma$. BCF to'g'ri burchakli uchburchakdan $tg\beta = \frac{2a}{b}$ ni, ACE to'g'ri burchakli uchburchakdan esa $tg\beta = \frac{a}{2b}$ ni topamiz. Demak,

$$tg\alpha = tg(\beta-\gamma) = \frac{tg\beta - tg\gamma}{1+tg\beta\cdot tg\gamma} = \frac{\frac{2a}{b}-\frac{a}{2b}}{1+\frac{2a}{b}\cdot\frac{a}{2b}} = \frac{3ab}{2c^2}$$

$sinA = \frac{a}{c}, cosA = \frac{b}{c}$ ekanligidan, $tg\alpha = \frac{3}{2}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c} = \frac{3}{2}sinAcosA = \frac{3}{4}sin2A$.

Ma'lumki, $sin2A \leq 1$ u holda, $tg\alpha \leq \frac{3}{4}$. Bunda tenglik $sin2A = 1$, ya'ni $A = 45^0$ da bajariladi.

2.12-masala. Ikkita parallel to'g'ri chiziq orasida A nuqta olingan. Bu nuqtadan parallel to'g'ri chiziqlargacha masofalar a va b ga teng. A nuqtani to'g'ri burchakli ABC (B – parallel to'g'ri chiziqlardan birida yotadi, C – boshqasida) uchburchakning to'g'ri burchagining uchi deb olamiz. Bunday hosil qilingan uchburchaklar yuzalarining eng kichik qiymati nimaga teng bo'ladi.



2.12-масала чизмаси

Echish. ABC – shart bo'yicha hosil qilingan uchburchaklardan biri bo'lsin. $\angle ACN = \alpha$ belgilash kiritamiz. U holda $\angle MAB = \alpha$ bo'ladi. AMB uchburchakdan $AB = \frac{a}{cos\alpha}$ ga ega bo'lamiz. ANC uchburchakdan esa $AC = \frac{b}{sin\alpha}$ ni topamiz. AVS uchburchakning yuzi $S = \frac{1}{2}AB\cdot AC = \frac{ab}{2sin\alpha\cdot cos\alpha} = \frac{ab}{sin2\alpha}$.

$\frac{ab}{sin2\alpha}$ ifoda, $sin2\alpha$ ning qiymati eng katta bo'lganda eng kichik qiymat qabul qilgani uchun, $sin2\alpha = 1$ deymiz. U holda $S_{min} = \frac{ab}{1} = ab$ bo'lib, bu tenglik $\alpha = 45^0$ bo'lganda bajariladi.

TO’RTBURCHAKLARDA ENG KATTA VA ENG KICHIK QIYMATLARGA DOIR MASALALAR.

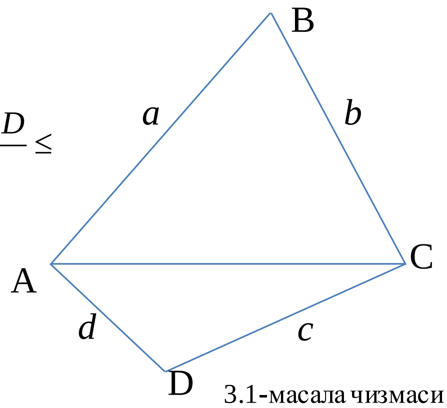
3.1-masala. To’rtburchakning yuzi ***S***, tomonlari kvadratlari yig’indisining to’rtdan biridan katta bo’la olmasligini isbotlang.

Echish. ABCD to’rtburchak tomonlarini $AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d$ deb belgilaymiz.

$$S = S_{ABC} + S_{DAC} = \frac{ab\sin B}{2} + \frac{cd\sin D}{2} = \frac{2ab\sin B}{4} + \frac{2cd\sin D}{4} \le$$

$$\le \frac{(a-b)^2 + 2ab}{4} + \frac{(c-d)^2 + 2cd}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$$

(=) belgisi ABCD – kvadrat bo’lganda bajariladi.



3.1-масала чизмаси

3.2-masala. Agar kvadratning va uchburchakning yuzalari teng bo’lsa, u holda uchburchak perimetri kvadrat perimetridan katta bo’lishini isbotlang.

Echish. Kvadrat tomonini *a* bilan belgilaymiz, u holda $S_{êâ} = \grave{a}^2$. Ma’lumki, berilgan yuzali barcha uchburchaklar ichidan teng tomonlisi eng kichik perimetrga ega. Shuning uchun uchburchakni teng tomonli qilib olishimiz mumkin. Teng tomonli uchburchak tomoni b ga teng bo’lsin. $P_\Delta = 3b, \quad S_\Delta = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ bo’ladi. Shartga ko’ra $a^2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

Demak, $a^2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ bo’lib, $3b > 4a$ ekanligini isbotlash kerak. $3b - 4a$ ayirmani qaraymiz. $3b - 4a = 3b - 2b\sqrt[4]{3} = b\sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{27} - \sqrt[4]{16}) > 0$. Demak, $3b > 4a$ tengsizlik o’rinli ekan.

3.3-masala. Qavariq to’rtburchakning diagonallari o’rtalarini tutashtiruvchi kesma uzunligi qarama-qarshi tomonlari ayirmasi modulidan kichik emasligini isbotlang.

Echish. M va N ABCD to’rtburchak diagonallarining o’rtalari bo’lsin.(mos ravishda AC va BD diagonallarning).

Bunda shuni e’tiborga olish kerakki M, N va E nuqtalar bir to’g’ri chiziqda yotmasin. MNE uchburchakni yasaymiz, bunda E –AD tomonning o’rtasi.

$NE = \frac{AB}{2}$, $ME = \frac{DC}{2}$ larni ABD va ACD uchburchaklarning o’rta chiziqlari sifatida topamiz. M va N nuqtalar ustma-ust tushmasin.

Ma’lumki, uchburchakning tomoni qolgan ikkita tomoni ayirmasining modulidan katta. MNE uchburchakdan $MN > |NE - ME| = \left|\frac{AB}{2} - \frac{DC}{2}\right| = \frac{|AB - DC|}{2}$

Agar ikkita diagonalning o’rtalari diagonallar kesishish nuqtasi bilan ustma-ust tushsa, bu to’rtburchak parallelogramm bo’ladi. U holda quyidagi tengsizlik o’rinli. $MN = \frac{|AB - CD|}{2} = 0$

Bu munosabatlardan $MN \geq \frac{|AB - DC|}{2}$ kelib chiqadi.

3.4-masala. Tengdosh to’g’ri to’rtburchaklardan kvadrat eng kichik perimetrga ega bo’lishini isbotlang.

Echish. To’g’ri to’rtburchakning tomonlari x va y ga teng bo’lsin. To’g’ri to’rtburchakka tengdosh kvadrat tomoni z bo’lsin. Demak, biz $4z < 2(x + y)$, ya’ni $z < \frac{x + y}{2}$ ekanligini isbotlashimiz kerak.

$z^2 = xy$ ga ko’ra $z = \sqrt{xy}$ bo’ladi. Bundan $\sqrt{xy} < \frac{x + y}{2}$ kelib chiqadi.

3.5-masala. Berilgan P perimetrli to'g'ri to'rtburchaklar ichida kvadrat eng katta yuzaga teng ekanligini isbotlang.

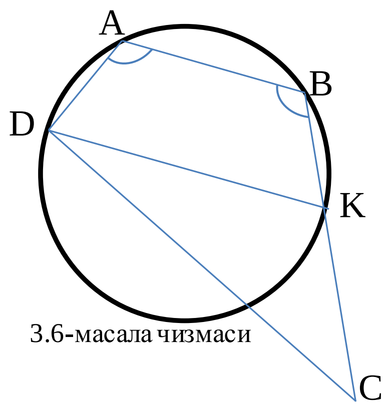
Isbot. To'g'ri to'rtburchak tomonlari $\frac{P}{4}+x$ va $\frac{P}{4}-x$ ga teng bo'lsin. (P - perimetr), u holda to'g'ri to'rtburchak yuzi $S=(\frac{P}{4}+x)(\frac{P}{4}-x)=\frac{P^2}{16}-x^2$ bo'ladi.

x^2 - nomanfiy bo'lgani uchun, (-x^2) musbat emas. U holda S yuza x miqdor nolga teng bo'lganda eng katta qiymatga ega bo'ladi. Ya'ni to'g'ri to'rtburchakning barcha tomonlari $\frac{P}{4}$ ga teng bo'ladi. Demak izlanayotgan to'rtburchak kvadrat ekan.

3.6-masala. Agar $ABCD$ to'rtburchakning A va B burchaklari o'zaro teng bo'lsa va D burchagi S burchagidan katta bo'lsa, u holda $BC>AD$ bo'lishini isbotlang.

Isbot. A_1B va D nuqtalardan aylana o'tkazamiz. Bu aylana BC o'g'ri chiziqni K nuqtada kesib o'tadi.

DABK to'g'ri to'rtburchak trapesiya bo'ladi. Bunda $BK=AD$. To'rtburchak ichki burchaklari yig'indisi *4d* ga teng. U holda $\angle A+\angle C<2d$ bo'ladi.



3.6-масала чизмаси

Shuning uchun *S* uch aylanadan tashqarida yotadi. Bundan *K* nuqtaning *V* va *S* nuqtalari orasida yotishi kelib chiqadi, ya'ni $BK>BK=AD$.

2-usul. *DA* va CB tomonlari kesishgunicha davom ettiramiz va kesishgan nuqtasini *S* bilan belgilaymiz. *DSC* uchburchakni hosil qilamiz. Bu uchburchakda *CS*>*DS*. *ASB* uchburchakda *A* va *B* burchaklari teng bo'lgani uchun *AS*=*BS* bo'ladi. Shuning uchun *CB*>*DA*.

3.7-masala. Teng yonli trapesiyada kichik asosi yon tomoniga teng. Bu trapesiyaning o'tkir burchagi 60^0 bo'lganda yuzi eng katta bo'lishini isbotlang.

Isbot. ABCD trapesiyada BE – balandlik, $\angle BAE = x$. $AE = a\cos x$, $AD = a + 2AE = a + 2a\cos x$, $BE = a\sin x$ larga egamiz. Trapesiya yuzi $S = (AD + BC)\cdot\frac{BE}{2} = (a + 2a\cos x + a)\cdot\frac{a\sin x}{2} = a^2(1+\cos x)\cdot\sin x.$

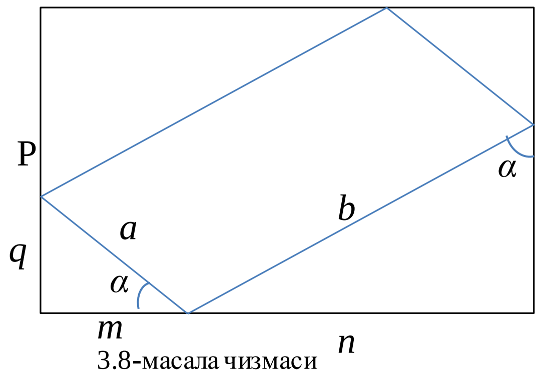
$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ larga asosan $S = 4a^2\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$. $4a^2$ o'zgarmas miqdor bo'lgani uchun, trapesiyaning yuzi *S*, *x* ning shunday qiymatida erishadi, bu qiymatida $\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ ifoda ham eng katta qiymatga erishadi. Shuning uchun *x* ning shunday qiymatini topish kerakki, bu qiymatda $\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ ham eng katta qiymatga erishadi.

$$\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\cos^6\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}} = \sqrt{27\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}\cdot\sin^2\frac{x}{2}}\,.$$

$\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}+\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}+\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}+\sin^2\frac{x}{2}=1$ - o'zgarmas miqdor bo'lgani uchun $\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ ifoda $\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3} = \sin^2\frac{x}{2}$ bo'lganda eng katta qiymatga erishadi. Bunda $tgx = \sqrt{3}$ bo'lib, $x = 60^0$ ekanligi kelib chiqadi.

3.8-masala. Tomonlari *a* va *b* ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak berilgan. Bu to'g'ri to'rtburchakka tashqi chizilgan to'g'ri to'rtburchaklar ichidan yuzi eng katta bo'ladiganini va bu yuzani toping.

Echish. Chizmadan $m = a\cos\alpha,\quad n = b\sin\alpha,\quad p = b\cos\alpha,\quad q = a\sin\alpha$ larga egamiz.



3.8-масала чизмаси

Tashqi chizilgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi:

$$S = (m+n)(p+q) = (a\cos\alpha + b\sin\alpha)(b\cos\alpha +$$
$$+a\sin\alpha) = a^2\sin\alpha\cos\alpha + b^2\sin\alpha\cos\alpha +$$
$$+ab\sin^2\alpha + ab\cos^2\alpha =$$
$$= (a^2+b^2)\sin\alpha\cos\alpha + ab = \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2\alpha + ab$$

Demak, S yuza $\sin 2\alpha$ bilan bir vaqtda eng katta qiymatga erishadi, ya'ni $\sin 2\alpha = 1$ da. Shunday qilib, $S_{\max} = \frac{a^2+b^2}{2} + ab$.

3.9-masala. To'rtburchakning yuzi diagonallari kvadratlari yig'indisining to'rtdan biridan katta emasligini isbotlang.

Isbot. To'rtburchakning diagonallarini d_1 va d_2 orqali, ular orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz. Ma'lumki, to'rtburchakning yuzi diagonallari ko'paytmasining yarmi bilan, ular orasidagi burchak sinusi ko'paytmasiga teng.

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2} = \frac{2d_1 d_2 \sin\alpha}{4} \le \frac{(d_1-d_2)^2 + 2d_1 d_2}{4} = \frac{d_1^2 + d_2^2}{4}.$$

AYLANA VA DOIRADA ENG KATTA VA ENG KICHIK QIYMATLARGA DOIR MASALALAR

4.1-masala. Aylanaga ichki chizilgan barcha uchburchaklar ichidan, aylana markazidan uchburchak tomonlariga masofalar kvadratlari yig'indisi eng kichik bo'lganini toping.

Echish. *ABC* –izlanayotgan uchburchak, *a,b,s* tomonlari, *x,y,z*-tashqi chizilgan aylana markazidan uchburchak tomonlarigacha masofalar, R- tashqi chizilgan aylana radiusi.

$x = R\cos A,\ y = R\cos B,\quad z = R\cos C$ larga egamiz.

$x^2+y^2+z^2 = R^2(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C) = R^2(3-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)) =$

$= 3R^2 - R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2(A+B))$ yig'indini qaraymiz. Ravshanki, $x^2+y^2+z^2$ yig'indi, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2(A+B)$ ifodaning eng katta qiymat qabul qilganda eng kichik bo'ladi. Quyidagi shakl almashtirishlarni bajaramiz:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2(A+B) = \frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2(A+B) =$$
$$= \frac{4-\cos 2A-\cos 2B-2\cos^2(A+B)}{2} = 2-(\cos(A+B)\cdot\cos(A-B)+\cos^2(A+B)) =$$
$$= 2-(\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B))^2+\frac{1}{4}\cos^2(A-B).$$

Bundan $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2(A+B)$ ifoda eng katta qiymatga erishishi uchun, $cos^2(A-B)$ ning eng katta qiymat qabul qilishi zarurligi kelib chiqadi, ya'ni $cos(A-B)=1$ bo'lib, bundan $(cos(A+B)+\frac{1}{2}cos(A-B))^2$ ifoda eng kichik qiymat qabul qilishi zarur. Demak, biz quyidagi sistemaga ega bo'ldik:

$$\begin{cases} cos(A-B)=1 \\ cos(A+B)+\frac{1}{2}cos(A-B)=0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} cos(A-B)=1 \\ cos(A+B)=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Bundan $A\text{-}B=0$, $A+B=120^0$ yoki $A=B$, $A+B=120^0$. Nihoyat, $A=B=60^0$ ekanligini topamiz. Demak, izlanayotgan uchuburchak muntazam uchburchak ekan.

4.2-masala. Doira ichida nuqta berilgan. Bu nuqtadan o'tkazilgan eng kichik vatarni toping.

Echish. Berilgan R nuqtadan ikkita vatar o'tkazamiz. Bu vatarlarni AB va A_1B_1 orqali belgiaymiz. AB vatar diametriga perpendikulyar bo'lsin. A_1B_1 ixtiyoriy vatar bo'lsin. A_1B_1 vatarga OR_1 perpendikulyar o'tkazamiz va OR_1R to'g'ri burchakli uchburchak hosil qilamiz. Bu uchburchakla OR gipotenuza OR_1 katetdan katta, demak, AB vatar A_1B_1 vatardan kichik. Bundan shunday xulosa chiqadiki doiradagi berilgan R nuqtadan o'tkazilgan eng kichik vatar bu – shu nuqtadan diametrga perpendikulyar qilib o'tkazilgan vatardir.

4.3-masala. $2r$ o'zgarmas perimetrga ega bo'lgan uchburchakka aylana ichki chizilgan. Bu aylanaga uchburchak tomoniga parallel urinma o'tkazilgan. Bu urinmaning uchburchak tomonlari orasidagi kesmasining qabul qilishi mumkin bo'lgan eng kichik qiymatini toping.

Echish. ABC – berilgan uchburchak. Bu uchburchakka ichki chizilgan aylana uning AB, BC, AC tomonlariga mos ravishda E, F, D nuqtalarda urinsin. MN urinma aylana bilan umumiy K nuqtaga ega. $MK=ME$, $NF=NK$ bo'ladi. Demak $MN=ME+NF$. Xuddi shunday $AC=AE+CF$. Bularga asosan MBN uchburchakning perimetri $2p\text{-}2AC$ ga teng. MBN va ABC uchburchaklar o'xshash bo'lgani uchun $\frac{MN}{AC}=\frac{p-AC}{P}$. $MN=y$, $AC=x$ belgilashlar kiritamiz. Bularga asosan $\frac{y}{x}=\frac{p-x}{p}$. Bu tenglamani u ga nisbatan echamiz va $y=\frac{1}{p}x(p-x)$ ga ega bo'lamiz. $\frac{1}{p}$ o'zgarmas miqdor bo'lgani uchun, u o'zgaruvchi $x(p-x)$

ko'paytma bilan bir vaqtda eng katta qiymat qabul qiladi. $x(p-x)$ ko'paytma esa $x=(p-x)$, ya'ni $x=\frac{p}{2}$ bo'lganda eng katta qiymat qabul qiladi. Demak, biz izlayotgan urinma kesmasi, asosi perimetrining to'rtdan biriga teng bo'lgan uchburchaklarda eng katta qiymat qabul qiladi. Ravshanki bunday uchburchaklar cheksiz ko'p. *u* o'zgaruvchining eng katta qiymatini topamiz: $y_{\max}=\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{2}(p-\frac{p}{2})=\frac{p}{4}$. Bundan masala shartidagi uchburchaklarda izlanayotgan kesma o'rta chiziq ekanligi kelib chiqadi.

4.4-masala. Berilgan doirada shunday vatar o'tkazilganki, bu vatar uzunligining va doira markazidan vatargacha masofa uzunligining yig'indisi eng katta bo'lsin.

Echish. 1-usul. Izlanayotgan vatar *AB=2a*, *O* – markazdan vatargacha masofa *OD=d* bo'lsin.

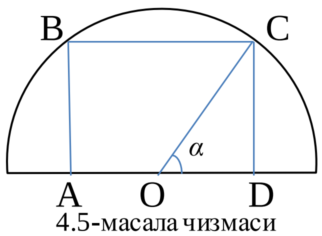
c=2a+d ifodaning eng katta qiymatini topish talab etiladi. Doira radiusi R, $\angle BOD=\alpha$ bo'lsin. *BDO* to'g'ri burchakli uchburchakdan $\begin{cases} a=R\sin\alpha \\ d=R\cos\alpha \end{cases}$ ni topamiz. Bu sistemadagi *a* va *d* ning qiymatlarini *c=2a+d* ga qo'yib, $c=R(2\sin\alpha+\cos\alpha)$ ni hosil qilamiz.

Agar 2 ni $tg\varphi$ orqali belgilasak, u holda quyidagiga ega bo'lamiz. $c=\frac{R}{\cos\varphi}(\sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha\cos\varphi)$, yoki $c=\frac{R}{\cos\varphi}\cos(\alpha-\varphi)$. s o'zgaruvchi $\cos(\alpha-\varphi)=1$ bo'lganda maksimumga erishadi, ya'ni $\alpha-\varphi=0\Rightarrow\alpha=\varphi$ da. $tg\varphi=2$ bo'lgani uchun $\cos\alpha=\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Shunday qilib, $c_{\max}=\frac{R}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\cdot 1=R\sqrt{5}$ bo'lib, izlanayotgan vatar uzunligi $2a=2R\sin\alpha=2R\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{4R\sqrt{5}}{5}$ ga teng.

2-usul. 1-usuldagi belgilashlarga asosan $d=\sqrt{R^2-a^2}$, $d+2a=c$ lardan $c=2a+\sqrt{R^2-a^2}$ yoki $5a^2-4ac+c^2-R^2=0$ bo'ladi. Bu oxirgi tenglamaning diskriminanti nolga teng bo'lganda *s* maksimumga erishadi, ya'ni $4c^2-5c^2+5R^2=0$ da. Bundan $c_{\max}=R\sqrt{5}$. *s* ning qiymatidan foydalanib *a* ni topsak $2a=\dfrac{4R\sqrt{5}}{5}$ ga teng bo'ladi.

4.5-masala. Yarim doiraga to'g'ri to'rtburchak ichki chizilgan. Bu to'g'ri to'rtburchakning ikkita uchi diametrda yotadi, qolgan ikkitasi esa yarim aylanada. Tomonlarining nisbati qanday bo'lgan to'g'ri to'rtburchak eng katta yuzaga ega bo'ladi.

Echish. *OC* – yarim aylananing radiusi, *α* – *OS* va diametr orasidagi o'tkir burchak. *COD* to'g'ri burchakli uchburchakdan $CD=OC\sin\alpha$, $OD=OC\cos\alpha$ larni topamiz. *AVSD* to'g'ri to'rtburchak yuzi

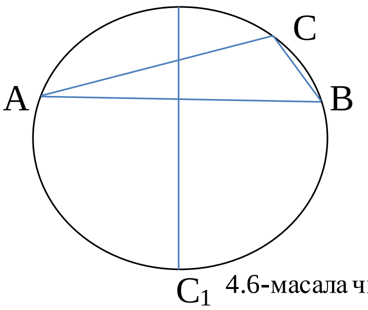


4.5-масала чизмаси

$S=2OD\cdot CD=2OC\cos\alpha\cdot OC\sin\alpha=OC^2\sin 2\alpha$ ga teng bo'ladi. *S* yuzaning eng katta qiymati $\sin 2\alpha=1$ bo'lganda, OS^2 ga teng bo'ladi, ya'ni $\alpha=45^0$. Demak, $\dfrac{AD}{CD}=2$.

4.6-masala. Aylanada ikkita *A* va *B* nuqtalar berilgan. Shunday C nuqtani topingki, vatarlarning $AC\cdot VC$ ko'paytmasi eng katta bo'lsin.

Echish. Agar izlanayotgan C nuqtalarni *AB* vatardan bir tomonda olsak, *ABC* burchak bir xil qiymatlar qabul qiladi, bu qiymatni *α* orqali belgilaymiz. S nuqtaning vaziyati har qanday o'zgarsa ham (AB dan bir tomonda) $\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\alpha$ ifoda *ABC* uchburchakning yuzini beradi. Bu yuza $AC\cdot BC$ kattalikdan, o'zgarmas ko'paytuvchi $\frac{1}{2}\sin\alpha$ bilan farq qiladi.



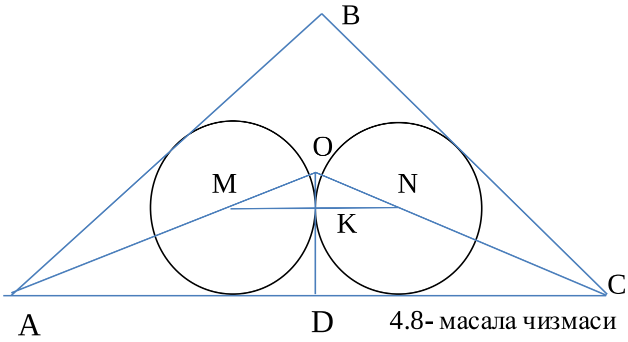
4.6-масала чизмаси

ACB uchburchak yuzi, $AC \cdot BC$ ko'paytma bilan bir vaqtda maksimal qiymatga erishadi. Ammo *AB* o'zgarmas asosga ega bo'lgan *ACB* uchburchak yuzining maksimal qiymati, bu asosga tushirilgan balandlikning eng katta qiymatida bo'ladi. Bundan *S* nuqta aylana va *AB* vatarning o'rta perpendikulyarining kesishgan nuqtasi ekanligi kelib chiqadi. Bu o'rta perpendikulyar va aylana ikkita nuqtada kesishadi. Bu nuqtalardan *AB* ga nisbatan uzoqda turgani izlangan nuqta bo'ladi. Bizning chizmada bu S_1 nuqta bo'ladi.

4.7-masala. Doiraviy sektorning perimetri berilgan. Shu sektor yuzining eng katta qiymatini toping.

Echish. Sektorning markaziy α burchagi bo'lsin, radiusini R orqali belgilaymiz. U holda sektor yoyining uzunligi $l = R\alpha$ ga, sektor yuzi esa $S = \frac{R^2\alpha}{2}$ ga teng bo'ladi. Demak, quyidagi sistemaga ega bo'lamiz: $\begin{cases} 2R + R\alpha = 2p \\ S = \frac{R^2\alpha}{2} \end{cases}$ Bu sistemaning birinchi tenglamasidan $\alpha = \frac{2p - 2R}{R}$ ni topamiz. α ning bu qiymatini sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yamiz va $S = R(p - R)$ ga ega bo'lamiz. $R + (p - R) = p$ o'zgarmas bo'lgani uchun, S yuza maksimumga erishishi uchun $R = p - R$ bo'lishi kerak. Bundan $R = \frac{p}{2}$ kelib chiqadi. $2R + R\alpha = 2p$ va $R = \frac{p}{2}$ lardan $\alpha = 2$ topiladi. Demak, $S_{\max} = \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^2 \cdot 2}{2} = \frac{p^2}{4}$.

4.8-masala. Berilgan uchburchakdan eng katta radiusli ikkita doira qirqib oling.



4.8- масала чизмаси

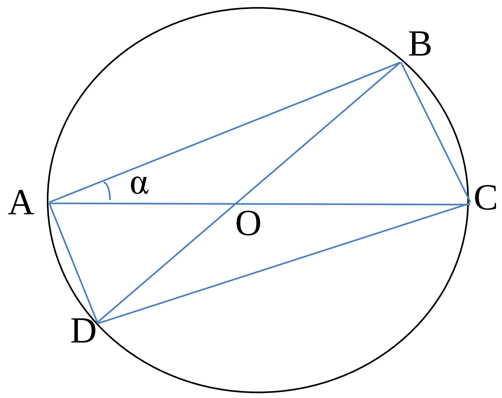
Echish. Ravshanki, izlanayotgan doiralar o'zaro va uchburchakning ikkita tomoniga urinishi kerak, aks holda ular eng katta bo'lmay qoladi. Demak, bu doiralarning markazlari uchburchak bissektrisalarida yotishi kerak. A va S burchaklar bissektrisalari kesishgan nuqta O nuqta bo'lsin.

$OD = R$ - berilgan uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi, r izlanayotgan doiralar radiuslari. M va N lar bu doiralar markazlari. $MN \cap OD = K$. AOS va MON uchburchaklar o'xshashligidan $\frac{OK}{MN} = \frac{OD}{AC}$, yoki $\frac{R-r}{2r} = \frac{R}{AC}$. Bundan $\frac{1}{r} = \frac{2}{AC} + \frac{1}{R}$.

$\frac{1}{R}$ - o'zgarmas kattalik ekanligidan, AS kattalashsa $\frac{1}{r}$ kichrayadi. Demak, r-radius, AS eng katta bo'lganda eng katta qiymatga erishadi, ya'ni ikkala doira ham uchburchakning katta tomoniga urinishlari kerak.

4.9-masala. Berilgan doiraga ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchaklar ichidan, eng katta yuzaga ega bo'lgani kvdrat ekanini isbotlang.

Echish. 1-usul. Doira radiusini R orqali, to'g'ri to'rtburchak tomonlaridan birini x orqali belgilaymiz. U holda ikkinchi tomoni $\sqrt{4R^2 - x^2}$ ga teng bo'ladi. To'g'ri to'rtburchak yuzi $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ ga teng. S va S^2 lar x ning bir xil qiymatida maksimumga erishadi. Shuning uchun $S^2 = x^2(4R^2 - x^2)$ ifoda maksimumga erishadigan x ning qiymatini topamiz. $x^2 + (4R^2 - x^2) = 4R^2$ yig'indi o'zgarmas bo'lgani uchun S^2 va S ham, x^2 va $4R^2 - x^2$ o'zaro teng bo'lganda maksimumga erishadi.



4.9-масала чизмаси

Demak, $x^2 = 4R^2 - x^2 \Rightarrow x = R\sqrt{2}$. Shunday qilib, to'g'ri to'rtburchakning ikkita qo'shni tomonlari $R\sqrt{2}$ ga teng ekan, ya'ni to'g'ri to'rtburchak – kvadrat.

2-usul. R – ABCD to'g'ri to'rtburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi, $\angle BAC = \alpha$ bo'lsin. U holda $AB = 2R\cos\alpha$, $BC = 2R\sin\alpha$, $S_{ABCD} = 2R^2\sin 2\alpha.$

S_{ABCD} yuza $\sin 2\alpha = 1$ bo'lganda eng katta qiymatga erishadi, ya'ni $\alpha = \frac{\pi}{4}$ da.

Unda $AB = 2R\cos\frac{\pi}{4} = 2R\sin\frac{\pi}{4} = BC$, ya'ni $ABCD$ – kvadrat.

PLANIMETRIYADAGI BA'ZI TENGSIZLIKLARGA DOIR MASALALAR

5.1-misol. To'g'ri burchakli uchburchak uchun $c < a + b \le c\sqrt{2}$ tengsizlikni isbotlang. Bunda a,b-katetlar, c-gipotenuza.

Echish: $a + b > c$ tengsizlik ixtiyoriy uchburchakda o'rinli. $a + b \le c\sqrt{2}$ ni isbotlaymiz. Uchburchak o'tkir burchagini α orqali belgilaymiz. U holda $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$ bo'lib, $a + b = c(\sin\alpha + \cos\alpha) = c\sqrt{2}\sin(\alpha + 45^0)$ kelib chiqadi.

$\sin(\alpha+45^0)$ ning eng katta qiymati 1 ga teng bo'lgani uchun $a+b\le c\sqrt{2}$ ga ega bo'lamiz.

$a+b\le c\sqrt{2}$ tengsizlikni boshqacha ham isbotlash mumkin. *h*-gipotenuzaga tushirilgan balandlik bo'lsin. $a^2+b^2=c^2$ pifagor teoremasi o'rinli. $4S=2ab=2ch.$ Bulardan $(a+b)^2=c^2+2ch.$ Ammo $h\le\frac{c}{2}$, u holda $(a+b)^2\le 2c^2$. Bundan $a+b\le c\sqrt{2}$.

5.2-masala. Ixtiyoriy uchburchak uchun $S>2\sqrt{Rr^3}$ tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang. *S* –uchburchak yuzi, *R*-tashqi, *r*-ichki chizilgan aylana radiuslari.

Echish: 1-usul. Ravshanki, $h_a>2r, h_b>2r, h_c>2r.$ Bu tengsizliklarni *2R* ga ko'paytiramiz. $2Rh_a>4Rr, 2Rh_b>4Rr, 2Rh_c>4Rr.$ Ma'lumki, $\frac{abc}{4S}=R,$ yoki $\frac{abc}{4ah_a}=R.$ Bundan $bc=2Rh_a$. Xuddi shunday $ac=2Rh_b$ va $ab=2Rh_c$. U holda $bc>4Rr, ac>4Rr, ab>4Rr.$ Bu uchta tengsizlikdan $\frac{abc}{4R}>2\sqrt{Rr^3}$ ni hosil qilamiz. $\frac{abc}{4R}=S$ ekanligidan $S>2\sqrt{Rr^3}$.

2-usul: $R=\frac{abc}{4S}$ va $r=\frac{2S}{a+b+c}$ lardan $S>2\sqrt{\frac{abc}{4S}\cdot\frac{8S^3}{(a+b+c)^3}}$ yoki $(a+b+c)^3>8abc$, yoki $a+b+c>2\sqrt[3]{abc}$ yoki $\frac{a+b+c}{3}>\frac{2}{3}\sqrt[3]{abc}$. $\frac{a+b+c}{3}>\sqrt[3]{abc}$ dan foydalanamiz. U holda $\frac{a+b+c}{3}>\sqrt[3]{abc}>\frac{2}{3}\sqrt[3]{abc}$, ya'ni $\frac{a+b+c}{3}>\frac{2}{3}\sqrt[3]{abc}$.

5.3-masala. Ixtiyoriy uchburchakda $p^2\ge 27r^2$ munosabat o'rinli ekanini isbotlang. *p*-yarim peremetr, *r*-ichki chizilgan aylana radiusi.

Echish: Ma'lumki, musbat sonlarning o'rta arifmetigi, ularning o'rta geometrigidan kichik emas. Shunga asosan

$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$ yoki

$\frac{3p-(a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ tengsizliklar o'rinli. Uchburchak yuzi

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$ ga teng bo'lgani uchun $\frac{3p-2p}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}=\sqrt[3]{\frac{p^2r^2}{p}}=\sqrt[3]{pr^2}$

yoki $\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{pr^2}$ yoki $\frac{p^3}{27} \geq pr^2$ bo'lib, bundan $p^2 \geq 27r^2$ kelib chiqadi.

5.4-masala. To'g'ri burchakli uchburchak uchun $R+r \geq \sqrt{2S}$ tengsizlik o'rinli ekanligini isbotlang, bunda R-tashqi chizilgan, r-ichki chizilgan aylana radiusi, S-yuzi.

Echish: To'g'ri burchakli uchburchakda $R=\frac{c}{2}$ va $r=\frac{S}{p}$. Bunda c-gipotenuza, p-yarim peremetr. U holda $R+r=\frac{c}{2}+\frac{S}{p}=\frac{c}{2}+\frac{ab}{a+b+c}$, bunda a va b lar katetlar.

$$R+r=\frac{ac+bc+c^2+2ab}{2(a+b+c)}=\frac{c(a+b)+(a+b)^2}{2(a+b+c)}=\frac{(a+b)(a+b+c)}{2(a+b+c)}=\frac{a+b}{2} .$$

O'rta arifmetik va o'rta geometrik orasidagi munosabatga ko'ra $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}=\sqrt{2S}$. Bundan $R+r \geq \sqrt{2S}$. Tenglik uchburchak teng yonli bo'lganda bajariladi.

5.5-masala. Agar a, b, c – uchburchak tomonlari , S – yuza bo'yicha quyidagi tengsizlik $2(ab+bc+ac) \geq 4S\sqrt{3}+a^2+b^2+c^2$ o'rinli ekanini isbotlang.

Echish: $p-a>0, \quad p-b>0, \quad p-c>0 \quad (p=\frac{a+b+c}{2})$ ekanligidan va $xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)} \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ tengsizlikka ko'ra:

$$(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a) \geq \sqrt{3(p-a)(p-b)(p-c)}$$ yoki

$3p^2-2p(a+b+c)+ab+ac+bc \geq \sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}$ tengsizliklar o'rinli. Bundan

$ab+ac+bc \geq S\sqrt{3}+p^2$, ya’ni $4(ab+ac+bc) \geq 4S\sqrt{3}+4p^2$. Shakl almashtirishlardan keyin quyidagi tengsizlikka ega bo’lamiz.

$$2(ab+ac+bc) \geq 4S\sqrt{3}+a^2+b^2+c^2.$$

Muntazam uchburchak bo’lgan holda tenglik bajariladi.

5.6-masala. $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ tengsizlikni isbotlang.

Echish: Dastlab $m>0, n>0$ sonlar uchun $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \geq \frac{4}{m+n}$ tengsizlik o’rinli ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan, $(m-n)^2 \geq 0$ yoki

$m^2-2mn+n^2 \geq 0,\ m^2+2mn+n^2-4mn \geq 0,\ (m+n)^2-4mn \geq 0,\ (m+n)^2 \geq 4mn$.

$\frac{m+n}{mn} \geq \frac{4}{m+n},\ \frac{1}{m}+\frac{1}{n} \geq \frac{4}{m+n}$. Bu tengsizlikka asosan, $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a)+(p-b)}=$ $=\frac{4}{2p-a-b}=\frac{4}{c},\ \frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{2p-b-c}=\frac{4}{a},\ \frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{2p-a-c}=\frac{4}{b}$ yuqoridagi tengsizliklarni hadlab qo’shamiz va quyidagi tengsizliklarga ega bo’lamiz:

$$\frac{2}{p-a}+\frac{2}{p-b}+\frac{2}{p-c} \geq \frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c} \text{ yoki } \frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \text{ isbotlandi.}$$

5.7-masala. Agar Agar *a, b, c* – uchburchak tomonlari, *p*-yarim perimetr bo’lsa quyidagi tengsizlikni isbotlang. $p\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right) \geq \frac{9}{4}$

Echish: Koshi tengsizligiga asosan

$(a+b)+(a+c)+(b+c) \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}$ ga ega bo’lamiz. Bundan

$$a+b+c \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)} \qquad (1)$$

kelib chiqadi. Shuningdek,

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}=\frac{1}{(a+b)(b+c)(a+c)}\left((a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)+(b+c)(a+c)\right)\geq$$

$$\geq\frac{3}{(a+b)(b+c)(a+c)}\sqrt[3]{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2} \qquad (2)$$

(1) va (2) tengsizliklarni hadma-had ko'paytiramiz:

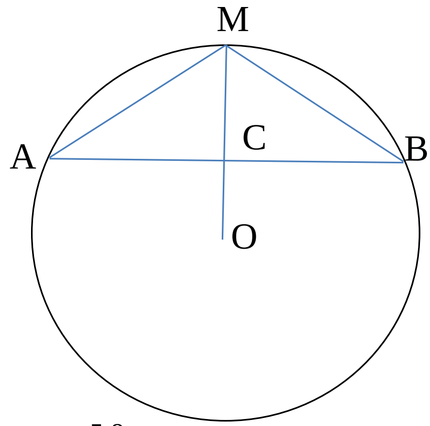
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}\cdot\frac{3}{(a+b)(a+c)(b+c)}\cdot\sqrt[3]{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2}=\frac{9}{2}$$

Oxirgi tengsizlikning ikkala tomonini ikkiga bo'lamiz va quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz: $\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\geq\frac{9}{4}$, yoki $p\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\geq\frac{9}{4}$.

Isbotlandi.

5.8-masala. $a_{2n}<\frac{2}{3}a_n$ tengsizlikni isbotlang. Bunda a_n - muntazam *n*-burchakning , a_{2n} - muntazam *2n* - burchakning tomonlari bo'lib, bu ko'pburchaklar bitta aylanaga ichki chizilgan.

Ecish: $AB=a_n, AM=a_{2n}$ bo'lsin. $C-AB$ ning o'rtasi. AMB yoy kattaligi $\frac{180^0}{n}$ ga teng. U holda



5.8-масала чизмаси

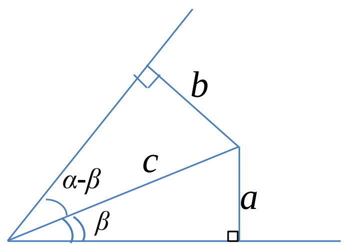
$AM=a_{2n}=\frac{AC}{cos(\angle MAB)}=\frac{AB}{2cos(\angle MAB)}=\frac{a_{2n}}{2cos(\angle MAB)}$. Demak, $a_{2n}=\frac{a_{2n}}{2cos(\angle MAB)}$.

$n \geq 3$ bo'lgani uchun $a_{2n} \leq \frac{a_{2n}}{2cos30^0} = \frac{a_{2n}}{\sqrt{3}}$.

$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{3}$ ekanligidan $a_{2n} < \frac{2}{3} a_n$ tengsizlik o'rinli.

5.9-masala. α o'tkir burchak ichida olingan nuqtadan burchak tomonlarigacha masofalar a va b, burchak uchigacha masofa c bo'lsa $\sin\frac{\alpha}{2} \geq \frac{a+b}{2c}$ tengsizlikni isbotlang.

Echish: c kesma burchak tomonlari bilan β va α-β burchaklar hosil qilsin. U holda $a = c\sin\beta, b = c\sin(\alpha - \beta)$. Demak,



5.9-масала чизмаси

$$a + b = c\left(\sin\beta + \sin(\alpha - \beta)\right) = 2c\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right).$$

$\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) \leq 1$ ekanligidan $a + b \leq 2c\sin\frac{\alpha}{2}$

bo'lib, bundan $\sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{a+b}{2c}$ kelib chiqadi.

5.10-masala. Agar ABC uchburchakning a, b tomonlari va h_c balandligi $\frac{1}{h_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ munosabat bilan bog'langan bo'lsa, $\angle C \leq 120^0$ ekanligini isbotlang.

Yechish: $\frac{1}{h_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ tenglikning ikkala tomonini $2S$ (S- uchburchak yuzi)ga ko'paytiramiz va quyidagilarga ega bo'lamiz: $\frac{2S}{h_c} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b}$.

$c = \frac{2S}{h_c}$, $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$ ekanligidan $c = h_a + h_b$ tenglik o'rinli.

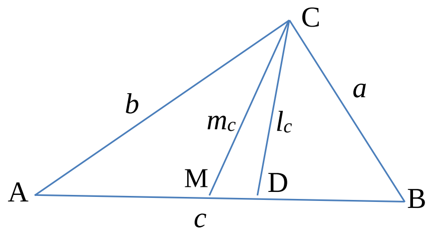
Ikkinchi tomondan $h_a = c\sin B, h_b = c\sin A$ tengliklar o'rinli. Bularni $c = h_a + h_b$ ga qo'yamiz va $c\sin A + c\sin B = c$ yoki $\sin A + \sin B = 1$ ni hosil qilamiz.

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=1.$$

$A+B+C=180^0$ dan $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$. Shunday qilib, $2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}=1$ bo’ladi va $\cos\frac{A-B}{2}\le 1$ ekanini e’tiborga olsak, $\cos\frac{C}{2}\ge\frac{1}{2}$ kelib chiqadi. Bundan $\frac{C}{2}\le 60^0$ va $C\le 120^0$ ning isboti kelib chiqadi.

5.11-masala. Agar *ABC* uchburchakning a, b tomonlari va m_c medianasi orasida $\frac{1}{m_c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ tenglik o’rinli bo’lsa $\angle C\ge 120^0$ ekanligini isbotlang.

Echish: Agar *ABC* uchburchakning ikkita a va b tomonlari va ular orasidagi S burchagi berilgan bo’lsa, bu uchdan chiqqan l_c bissektrisa uzunligini $l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$ formuladan hisoblash mumkin.



5.11-масала чизмаси

Masala shartiga ko’ra $m_c=\frac{ab}{a+b}$.

$l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$ va $m_c=\frac{ab}{a+b}$ tengliklardan

$m_c=\frac{l_c}{2\cos\frac{C}{2}}$ ekanligi kelib chiqadi. $l_c\le m_c$ tengsizlikdan $2\cos\frac{C}{2}=\frac{l_c}{m_c}\le 1$, demak,

$\cos\frac{C}{2}\le\frac{1}{2}$. Bundan esa, $\frac{C}{2}\ge 60^0$ va $\angle C\ge 120^0$ ga ega bo’lamiz.

5.12-masala. $x^3+px^2+qx+r=0$ tenglamaning uchta x_1, x_2, x_3 ildizlari musbat. Uzunliklari x_1, x_2, x_3 ga teng bo’lgan kesmalardan uchburchak yasash mumkinligining zarur va etarli sharti $p^3-4pq+8r>0$ ekanligini isbotlang.

Echish. Dastlab, bu tengsizlikning zaruriyligini isbotlaymiz. Tomonlari x_1, x_2, x_3 bo’lgan uchburchakning yarim perimetrini l orqali belgilaymiz. Bu uchburchak yuzini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\sqrt{l(l-x_1)(l-x_2)(l-x_3)}=\sqrt{l\left(l^3-(x_1+x_2+x_3)l^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)l-x_1x_2x_3\right)}=$$

$$=\sqrt{l}\cdot\sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^3-(-p)\left(-\frac{p}{2}\right)^2+q\left(-\frac{p}{2}\right)-(-r)}=\sqrt{l}\cdot\sqrt{-\frac{p^3}{8}+\frac{p^3}{4}-\frac{pq}{2}+r}=\sqrt{\frac{l}{8}}\cdot\sqrt{p^3-4pq+8r}.$$

Ravshanki, $p^3-4pq+8r>0$ tengsizlikning bajarilishi zaruriydir, aks holda uchburchak yuzi mavjud bo'lmaydi.

Shunday qilib, tomonlari x_1, x_2, x_3 bo'lgan kesmalardan uchburchak yasash uchun $p^3-4pq+8r>0$ tengsizlik bajarilishi zarurligi isbotlandi.

Uzunliklari x_1, x_2, x_3 ga teng bo'lgan kesmalardan uchburchak yasash uchun $\begin{cases} x_1+x_2-x_3>0 \\ x_2+x_3-x_1>0 \\ x_3+x_1-x_2>0 \end{cases}$ tengsizlikning bajarilishi etarlidir.

Bu tengsizliklarni ko'paytirib $(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)(x_3+x_1-x_2)>0$ (3) tengsizlikni hosil qilamiz. Hosil qilingan tengsizlikning chap tarafdagi ko'paytuvchilarining uchalasi ham musbat bo'lganda, yoki bittasi musbat, ikkitasi manfiy bo'lganda o'rinli bo'ladi. $x_1>0, x_2>0, x_3>0$ bo'lgani uchun ikkinchi hol o'rinli bo'lmasligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, faraz qilaylik chap tarafdagi faqat bitta ko'paytuvchimusbat, qolgan ikkitasi manfiy bo'lsin, masalan, $x_1+x_2-x_3<0$ va $x_2+x_3-x_1<0$ bo'lsin. Bu teng tengizliklarni qo'shamiz $2x_2<0$, ya'ni $x_2<0$ hosil qilamiz. Bu esa ziddiyatdir.

Viet formulasiga ko'ra: $x_1+x_2+x_3=-p,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q,\ x_1x_2x_3=-r$ (4)

(4) ni e'tiborga olib (3)tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$(-p-2x_3)(-p-2x_1)(-p-2x_2)>0,$$

$$-p^3-2p^2(x_1+x_2+x_3)-4p(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-8x_1x_2x_3>0.$$

Viet formulasiga ko’ra: $p^3 - 4pq + 8r > 0$.

STEREOMETRIYADAGI BA'ZI TENGSIZLIKLARGA DOIR MASALALAR

6.1-masala. To'g'ri burchakli parallelepipedning to'la sirtining eng katta qiymati $\frac{L^2}{24}$ ga tengligini isbotlang, bunda L parallelepiped barcha qirralari yig'indisi.

Echish. Parallelepipedning chiziqli o'lchovlari a, b, c bo'lsa, uning to'la sirti $S = 2(ab + bc + ac)$ ga teng bo'ladi. Bizga ma'lum bo'lgan $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$ tengsizlik va $2(ab + bc + ac) = 2(ab + bc + ac)$ ayniyatlarni hadma-had qo'shsak, $3(ab + bc + ac) \leq (a + b + c)^2$ yoki $S \leq \frac{2}{3}(a + b + c)^2$.

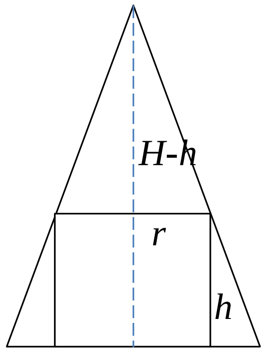
$a + b + c = \frac{1}{4}$ bo'lgani uchun $S \leq \frac{2}{3}\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{L^2}{24}$. Ya'ni, $S_{max} = \frac{L^2}{24}$. Demak, maksimum qiymatga $a = b = c$ bo'lganda, ya'ni kub bo'lganda erishadi.

6.2-masala. Agar to'g'ri burchakli parallelepipedning to'la sirti S bo'lsa, u holda barcha qirralari yig'indisining eng kichik qiymati $2\sqrt{6S}$ ga teng bo'lishini isbotlang.

Echish. 6.1-masalaga ko'ra $S \leq \frac{L^2}{24}$ edi. Bundan $L \geq 2\sqrt{6S}$ kelib chiqadi, ya'ni $L_{\min} = 2\sqrt{6S}$ bo'lib bu tenglik parallelepiped kub bo'lganda bajariladi.

6.3-masala. Agar berilgan konusga eng katta hajmli silindr ichki chizilgan bo'lsa, u holda silindr asosi radiusining konus asosining radiusiga nisbati 2:3 kabi bo'lishini isbotlang.

Echish. Konus asosining radiusini R bilan, balandligini H bilan, silindr asosining radiusini r bilan, silindr balandligini h bilan belgilaymiz. U holda $\frac{H-h}{H}=\frac{r}{R}$ tenglik uchburchaklar o'xshashligidan kelib chiqadi. Bundan $h=\frac{H}{R}(R-r)$.



6.3-масала чизмаси

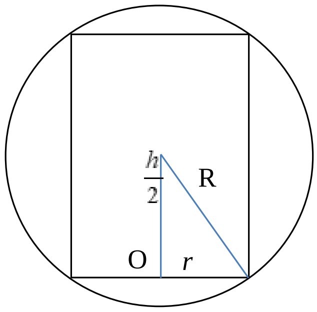
Silindr hajmi

$$V=\pi r^2 h=\pi r^2\frac{H}{R}(R-r)=\frac{4\pi H}{R}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}(R-r).$$

$\frac{4\pi H}{R}$ - o'zgarmas kattalik bo'lgani uchun V hajmi maksimumga $y=\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}(R-r)$ funksiya bilan bir vaqtda erishadi. $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{2}$ va $(R-r)$ ko'paytuvchilarning yig'indisi o'zgarmas va u $\boldsymbol{R}$ ga teng bo'ladi. U holda u funksiya $\frac{r}{2}=R-r$ da eng katta bo'ladi. Demak, $\frac{r}{R}=\frac{2}{3}$ tenglik o'rinli.

6.4-masala. Agar berilgan R radiusli sharga eng katta hajmli silindr ichki chizilgan bo'lsa silindr asosi radiusining shar radiusiga nisbati $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ ga tengligini isbotlang.

Echish. Silindr asosining radiusini r bilan, balandligini h bilan belgilaymiz. U holda $\frac{h^2}{4}=R^2-r^2$ bo'ladi. Bundan $h=2\sqrt{R^2-r^2}$ ga egamiz.



6.4-масала чизмаси

Silindr hajmi $V=\pi r^2 h=2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$.

2π - o'zgarmas miqdor bo'lgani uchun V hajm $y=r^2\sqrt{R^2-r^2}$ funksiya bilan bir vaqtda maksimumga erishadi. y va y^2 o'zgaruvchilar r o'zgaruvchining bitta qiymatida bir xil maksimumga erishadi.

Shuning uchun r ning y^2 maksimumga erishadigan qiymatini topamiz.

$y^2 = r^4(R^2 - r^2)$, $y^2 = 4 \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (R^2 - r^2)$.

Uchta $\frac{r^2}{2}$, $\frac{r^2}{2}$ va $R^2 - r^2$ ko'paytuvchilarning yig'indisi o'zgarmas kattalik bo'lgani uchun y^2 va y ham bu ko'paytuvchilar o'zaro teng bo'lganda eng katta qiymatga erishadi, ya'ni $\frac{r^2}{2} = R^2 - r^2$ bo'lganda. Bundan $\frac{3r^2}{2} = R^2$, nihoyat $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. Agar ikkita uchburchakning gipotenuzalari teng bo'lsa, u holda birinchi uchburchakning kateti ikkinchi uchburchakning katetidan mos ravishda katta bo'lmasligini isbotlang.
2. Qavariq beshburchakning diagonallari uzunliklari yig'indisi uning perimetridan katta bo'lishini isbotlang.
3. Agar kvadrat yuzi uchburchak yuziga teng bo'lsa, u holda uchburchakning perimetri kvadrat perimetridan katta bo'lishini isbotlang.
4. To'rtburchakning yuzi S uning tomonlari kvadratlari yig'indisining to'rtdan biridan katta emasligini isbotlang.
5. Ixtiyoriy uchburchakda katta tomon qarshisida kichik balandlik(mediana, bissektrisa) yotishini isbotlang.
6. Berilgan segmentga ichki chizilgan eng katta yuzali to'g'ri to'rtburchak yuzini toping.
7. To'rtyoqli burchakning bitta tekis burchagi qolgan uchta tekis burchaklari yig'indisidan kichik bo'lishini isbotlang.
8. ***r*** radiuisli sharga ichki chizilgan konuslardan eng kichik hajmlisining hajmini toping.

9. Sharga ichki chizilgan silindrlar ichidan o'q kesimi kvadrat bo'lgani eng katta yon sirtga ega bo'lishini isbotlang.
10. ***r*** radiuisli sharga ichki chizilgan silindrlardan eng katta hajmlisining hajmini toping.

ADABIYOTLAR

1. Shk l ya r s k i y D. O., Ch e n s o v N. N., Ya g l o m I. M. Geometricheskie neravenstva i zadachi na maksimum i minimum.—M.: Nauka, 1970.

2. B o l t ya n s k i y V. G., Ya g l o m I. M. Geometricheskie zadachi na maksimum i minimum // Ensiklopediya elementarnoy matematiki. Kn. 4.—M.: Nauka, 1966. S. 307—348.

3. Ponarin Ya. P. Elementarnaya geometriya: V 2 t.—T. 1: Planimetriya, preobrazovaniya ploskosti. — M.: MSNMO, 2004.— 312 s.

4. Saparboev J., Egamov M. Akademik lisey o'quvchilarining fazoviy tasavvurini va matematik tafakkurini rivojlantirishda ba'zi masalalar.//Tabiiy fanlarni o'qitishni gumanitarlashtirish. Universitet ilmiy-amaliy konferensiya materiallari. 2012y. TDPU.