Министерство образования Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

С.Д. Шапорев

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Допущено научно-методическим советом по математике вузов Северо-Запада в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальностям 220200 «Автоматизированные системы обработки информации и управления», 654600 «Информатика и вычислительная техника», 071900 «Информационные системы и технологии»

Санкт-Петербург

2004

УДК 510.22: 519.1
Ш 24

Шапорев С.Д. Дискретная математика: учебное пособие / Балт. гос. техн. ун-т «Военмех». СПб., 2004. ??? с.

В книге рассмотрены три раздела курса дискретной математики: теория множеств, комбинаторика и теория графов. Автор уделил особое внимание доступности материала. Основной текст снабжен большим количеством примеров.

Во второй части книги приведены решения практически всех задач, предложенных на практических занятиях, причем развернутые решения некоторых из них дополняют основной курс, изложенный в первой части данной книги.

Книга полезна для знакомства с основными направлениями и методами дискретной математики и предназначена для студентов технических вузов и читателей, интересующихся данными проблемам.

Р е ц е н з е н т ы: кафедра высшей математики ПГУПС (проф. каф. доктор техн. наук, проф. В.Г. Дегтярев), доктор техн. наук, проф. М.С. Попов.

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

© ШАПОРЕВ С.Д., 2004
© БГТУ, СПб., 2004

ЧАСТЬ I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества и действия над ними

Первичным понятием теории множеств является понятие самого множества.

Множество - это совокупность некоторых (произвольных) объектов, объединенных по какому-либо признаку. Элементы множества при этом должны быть различными. Множество обозначается парой скобок $\{...\}$, внутри которых либо просто перечисляются элементы, либо описываются их свойства. Например, $A = \{x \in N / x + 2 = 1\}$ - множество натуральных чисел, удовлетворяющих условию $x + 2 = 1$, очевидно, пусто. $B = \{$ сложение, умножение $\}$ - множество основных арифметических операций. Если необходимо указать, что объект a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ (a принадлежит A), наоборот запись $a \notin A$ говорит о том, что a не принадлежит A.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$ и говорят, что множество A является подмножеством множества B. Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными, то есть $A = B$, в противном случае $A \neq B$. Очевидно, что $A = B \Leftrightarrow \forall x((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)) = \forall x[(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)] = (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$; итак, $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$. Если $M \subseteq A$ и $M \neq \varnothing$, $M \neq A$, то множество M называется собственным подмножеством множества A. Подмножества $\varnothing$ - пустое и A множества A называются несобственными. Если A есть подмножество множества B, причем $A \neq B$, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Совокупность всех подмножеств множества A называется его булеаном или множеством - степенью и обозначается через $P(A)$ или 2^A. С помощью скобок и операций над множествами можно построить новые множества, более сложные чем исходные.

1) Объединение (или сумма). Эта операция над множествами обозначается $A \cup B$, определяется как $C = A \cup B = \{x \in C / (x \in A) \vee (x \in B)\}$. Все операции над множествами можно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера*- Венна**. Если за некоторое универсальное множество, содержащее как подмножества все другие множества, обозначить U (или Ω) и

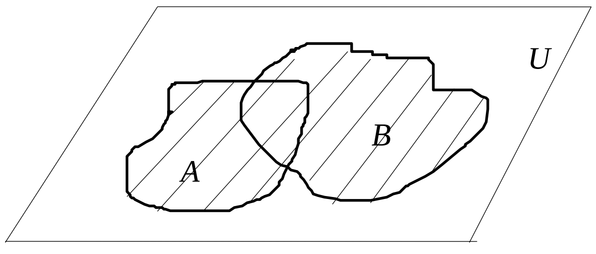


Рис 1.1. Объединение множеств A и B.

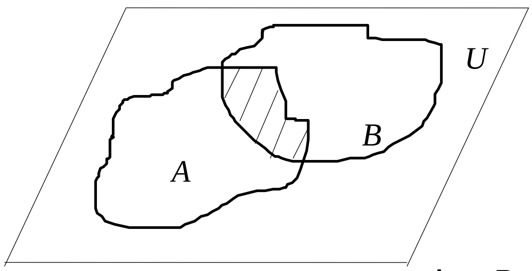


Рис 1.2. Пересечение множеств A и B.

изобразить его в виде всей плоскости, то любое множество $A \subset U$ можно изобразить в виде части плоскости, то есть в виде некоторой фигуры, лежащей на плоскости. Множество C объединение множеств A и B, C на рис. 1.1 заштриховано. $C = A \cup B$.

2) Пересечением (или произведением) двух множеств называется такое множество C, которое состоит из элементов, принадлежащим одновременно обоим множествам, то есть $C = A \cap B = \{x \in C / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$. Пересечение множеств A и B заштриховано и изображено на рис. 1.2.

---

* Леонард Эйлер (1707 - 1783) - швейцарский математик.

** Джон Венн (1834 - 1923) - английский математик и логик.

3) Разностью двух множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят в A и одновременно не входят в B, то есть $C = A \setminus B = \{x \in C / (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \overline{B}$ (см. рис 1.3). Если, в частности, A подмножество U, то разность $U \setminus A$ обозначается $\overline{A}$ и называется дополнением множества A (см. рис 1.4).

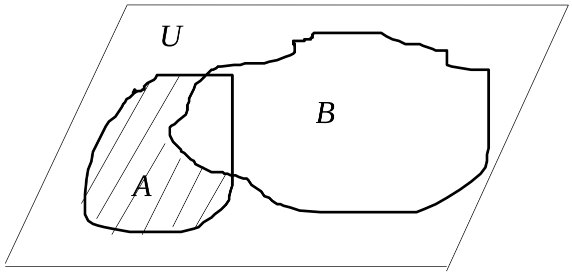


Рис 1.3. Разность множеств A и B.

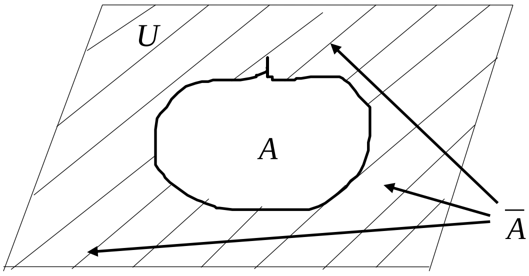


Рис 1.4. Дополнение множества A.

4) Симметрической разностью или кольцевой суммой множеств A и B называется множество $C = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (см. рис 1.5). Очевидно, что $C = A \oplus B = \{x \in C / ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))\}$. Если $a \in A$ и $b \in B$, то пару элементов (a, b) называют упорядоченной парой, причем пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

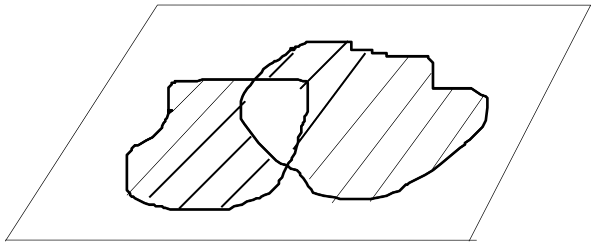


Рис 1.5. Симметрическая разность множеств A и B.

5) Множество, элементами которого являются все упорядоченные пары (a, b), $a \in A$, $b \in B$ называется **прямым или декартовым произведением** множеств A и B и обозначается $A \times B$. Например, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\} \to A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$, а $B \times A = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$. Таким образом, декартово произведение не подчиняется коммутативному закону и $A \times B = B \times A$ справедливо, если $A = B$. Произведение $A \times A$ называется декартовым квадратом.

Свойства операций объединения, пересечения и дополнения иногда называются законами алгебры множеств. Эти законы таковы:

1) коммутативный: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

2) ассоциативный: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

3) дистрибутивный: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \end{cases}$

4) законы идемпотентности: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, в частности $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$;

5) законы поглощения: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$;

6) законы де Моргана* (двойственности): $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

7) закон двойного дополнения: $\overline{\overline{A}} = A$;

8). закон включения: $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$;

9). закон равенства: $A = B \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow (A \cap B) \vee (\overline{A} \cap \overline{B}))$.

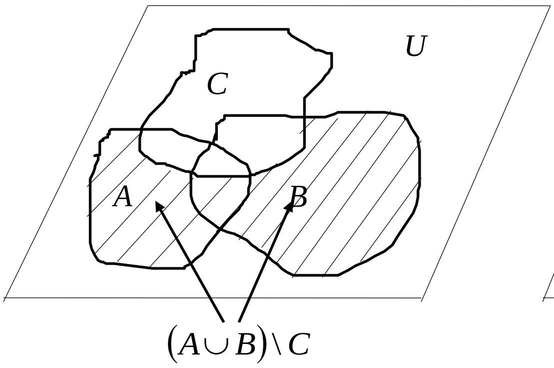
Конечно, этим кратким перечнем количество законов алгебры множеств не исчерпывается. Другие соотношения между множествами могут быть выведены на основе вышеприведенных законов по правилам алгебры логики.

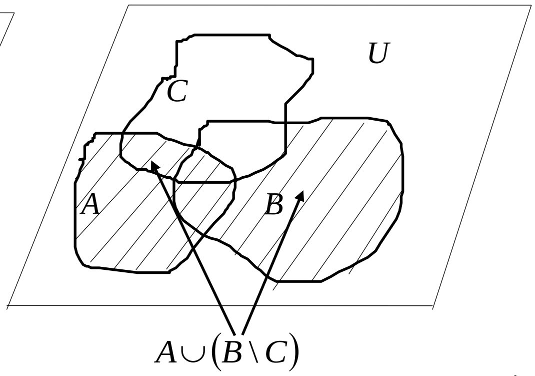
Пример 1. Доказать включения $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$.

---

* Огастес де Морган (1806 – 1871) – шотландский математик и логик.

Легче всего сделать это по диаграмме Эйлера - Венна.





Пример 2. Пусть $A = \{x \in N / 2 < x \le 6\}$, $B = \{x \in N / 1 < x < 4\}$, $C = \{x \in N / x^2 - 4 = 0\}$. Из каких элементов состоит множество $(A \cap B) \cup (B \cup C)$, $C \times B$?

Перепишем множества A, B и C, перечислив их элементы. $A = \{3,4,5,6\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{2\}$. Тогда $A \cap B = \{3\}$, $B \cup C = \{2,3\}$, $(A \cap B) \cup (B \cup C) = \{2,3\}$. $C \times B = \{(2,2),(2,3)\}$, а $B \times C = \{(2,2),(3,2)\}$.

1.2. Отношения и функции. Специальные бинарные отношения

Часто элементы разных множеств связаны различными соотношениями, например, соотношениями порядка.

n-местным отношением или n-местным предикатом P на множествах $A_1, A_2, ..., A_n$ называется любое подмножество декартова произведения $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Обозначение n-местного отношения $P(x_1, x_2, ..., x_n)$. При $n = 1$ отношение P называется унарным и является подмножеством множества A_1. Бинарным (или двуместным при $n = 2$) отношением называется множество упорядоченных пар. Элементы $x_1, x_2, ..., x_n$ называются координатами или компонентами отношения P.

Для любого множества A отношение $id_A = \left\{ (x,x) \big/ x \in A \right\}$ называется тождественным отношением или диагональю, а $U_A = A^2 = A \times A = \left\{ (x,y) \big/ x \in A, y \in A \right\}$ полным отношением или полным квадратом.

Пусть P - некоторое бинарное отношение. Тогда областью определения бинарного отношения P называется множество $D = \left\{ x \big/ (x,y) \in P \text{ для некоторого } y \right\}$, а областью значений множество $R = \left\{ y \big/ (x,y) \in P \text{ для некоторого } x \right\}$. Аналогично вводится еще несколько определений. Обратным к P отношением называется множество $P^{-1} = \left\{ (y,x) \big/ (x,y) \in P \right\}$. Композицией бинарных отношений $P \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$ называется множество $P \circ Q = \left\{ (x,y) \big/ x \in A, y \in C, \exists z \in B \text{ т тако что } (x,z) \in P, (z,y) \in Q \right\}$ (см. рис 1.6). Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

1) $(P^{-1})^{-1} = P$;
2) $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$;
3) $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ - ассоциативность композиции.

Пример 1. Пусть $A=\left\{x \big/ x\text{ - арабская цифра}\right\}$, $P=\left\{(x,y) \big/ x,y\in A, x-y=5\right\}$. Отношение P можно записать в виде $P=\{(5,0),(6,1),(7,2),(8,3),(9,4)\}$. Тогда для этого отношения имеем $D=\{5,6,7,8,9\}$, $R=\{0,1,2,3,4\}$, $P^{-1}=\{(0,5),(1,6),(2,7),(3,8),(4,9)\}$.

Пример 2. Пусть $P=\left\{(x,y) \big/ x,y\in\left[-\pi/2,\pi/2\right], y\ge \sin x\right\}$. Найдем для этого отношения D, R, P^{-1}, $P\circ P$, $P^{-1}\circ P$, $P\circ P^{-1}$ отношения.

Очевидно, что $D\left[-\pi/2,\pi/2\right]$, $R=\left[-1,\pi/2\right]$. По определению $P^{-1}=\left\{(y,x) \big/ (x,y)\in P\right\}=$
$=\left\{(y,x) \big/ y,x\in\left[-\pi/2,\pi/2\right], x\ge \sin y\right\}$. Аналогично для композиции $P\circ Q=\left\{(x,y) \big/ x\in A, y\in C,\right.$ $\exists z\in B$ такой, что $\left.(x,z)\in P,(z,y)\in Q\right\}$, где $P\subseteq A\times B$, а $Q\subseteq B\times C$. В нашем случае $P=A\times B$, $A=\left[-\pi/2,\pi/2\right]$, $B=\left\{(x,y) \big/ \sin x\le y\right\}$, $Q=P=B\times C$, $C=\left[-\pi/2,\pi/2\right]$. Тогда

$P\circ P=\left\{(x,y) \big/ x\in\left[-\pi/2,\pi/2\right], y\in\left[-\pi/2,\pi/2\right], \exists z\right.$ т тако что $(x,z)\in\left\{x,z\in\left[-\pi/2,\pi/2\right], z\ge\sin x\right\}$,

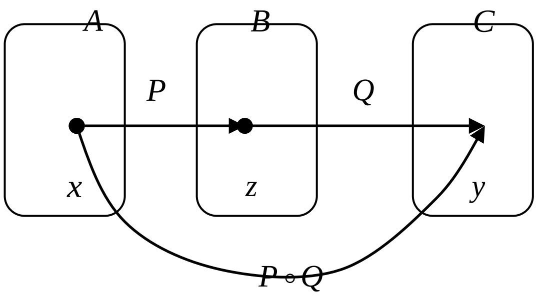


Рис. 1.6. Графическое представление композиции $P\circ Q$.

$\left.(z,y)\in\left\{y,z\in\left[-\pi/2,\pi/2\right], y\ge\sin z\right\}\right\}=$
$=\left\{(x,y) \big/ \sin\sin x\le y\right\}$. Далее таким же образом получим $P\circ P^{-1}=\left\{(x,y) \big/ x\in\left[-\pi/2,\pi/2\right],\right.$ $y\in\left[-\pi/2,\pi/2\right], \exists z$ такой, что $(x,z)\in\left\{x,z\in\left[-\pi/2,\pi/2\right],\right.$ $\left.z\ge\sin x\right\},(z,y)\in\left\{z,y\in\left[-\pi/2,\pi/2\right], y\ge\sin x\right\}\}=$
$=\left\{(x,y) \big/ x\in\left[-\pi/2,\pi/2\right], y\in\left[-\pi/2,\pi/2\right]\right\}=\left[-\pi/2,\pi/2\right]^2$.

$P^{-1}\circ P=\left\{(x,y) \big/ x\in\{x/\sin x\le y\}, y\in\{y/\sin x\le y\}, \exists z\right.$ т тако что $(x,z)\in\left\{(z,x)/z,x\in\left[-\pi/2,\pi/2\right],\right.$ $\left.x\ge\sin z\right\},(z,y)\in\left\{(z,y)/z,y\in\left[-\pi/2,\pi/2\right], y\ge\sin z\right\}\}=\left\{(x,y) \big/ x,y\in\left[-1,\pi/2\right]\right\}$.

Бинарное отношение $f\subseteq A\times B$ называется функцией или отображением из множества A в множество B, если $D_f=A, R_f\subseteq B$ и из $(x,y_1)\in f,(x,y_2)\in f$ следует, что $y_1=y_2$. Область определения функции обозначается D_f, область значений - R_f. Определяются они так же, как для бинарных отношений. Если же вместо $D_f=A$ выполняется $D_f\subseteq A$, то f называется частичной функцией.

Говорят, что функция f задана на множестве A со значениями во множестве B и осуществляет отображение множества A во множество B. Функция f из A в B

обозначается через $f: A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Тождественное отношение $id_A(x) = \left\{ (x,x) \middle/ x \in A \right\}$ является функцией $id_A : A \to A$, для которой $id_A(x) = x$ для всех $x \in A$.

Функция f называется инъективной (разнозначной), если отношение f^{-1} является частичной функцией, т. е. для любых элементов $x_1, x_2 \in D_f$ из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. Функция $f: A \to B$ называется функцией A на B или сюръективной функцией, если $R_f = B$. Для сюръективной функции для любого $y \in B$ существует $x \in A$ такой, что $f(x) = y$.

Функция f называется биективной, если она одновременно сюръективна и инъективна. В этом случае говорят, что f осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами A и B. Биекция $f: A \leftrightarrow A$ называется подстановкой множества A. Простейшим примером подстановки является функция id_A.

На рис. 1.7 показаны функции $f_j : A \to B$, $i = \overline{1,4}$. Функция f_1 сюръективна, но не инъективна, функция f_2 инъективна, но не сюръективна, функция f_3 биективна и является подстановкой (если $A = B$), функция f_4 не инъективна и не сюръективна.

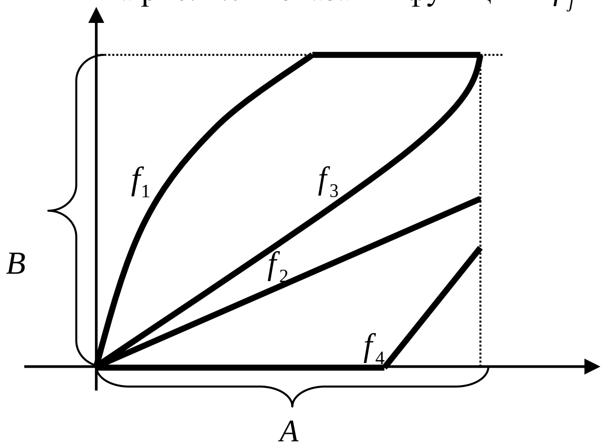


Рис. 1.7. Виды функций.

Функции обладают несколькими легко доказываемыми свойствами.

1) Композиция двух функций есть функция, т. е. если $f: A \to B$, $g: B \to C$, то $f \circ g : A \to C$.

2) Композиция двух биективных функций есть биективная функция: если $f: A \leftrightarrow B$, $g: B \leftrightarrow C$, то $f \circ g : A \leftrightarrow C$.

3) Отображение $f: A \to B$ имеет обратное отображение $f^{-1}: B \to A$ тогда и только тогда, когда f - биекция, т. е. если $f: A \leftrightarrow B$, то $f^{-1}: B \leftrightarrow A$, $f \circ f^{-1} = id_A$, $f^{-1} \circ f = id_B$.

В теории множеств важную роль играют два вида специальных бинарных отношений: отношения эквивалентности и отношения порядка. Прообразами этих отношений служат интуитивные понятия равенства, предшествования и предпочтения.

Рассмотрим два конечных множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ и бинарное отношение $P \subseteq A \times B$. Введем матрицу $\|P\| = (p_{i,j})$ бинарного отношения P следующим образом: $p_{i,j} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in P, \\ 0, & (a_i, b_j) \notin P. \end{cases}$ Эта матрица содержит полную информацию о связях между элементами множеств A и B и позволяет представить эту информацию в графическом виде.

Матрица любого бинарного отношения обладает следующими свойствами:

1) если $P, Q \subseteq A \times B$ и $\|P\| = (p_{i,j})$, $\|Q\| = (q_{i,j})$, то $\|P \cup Q\| = \|P\| + \|Q\| = (p_{i,j} + q_{i,j})$; $\|P \cap Q\| = \|P\| * \|Q\| = (p_{i,j} \cdot q_{i,j})$, причем сложение элементов матрицы осуществляется по правилам 0+0=0, 1+1=1, 1+0=0+1=1, а умножение почленно обычным образом, т. е. по правилам $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$;

2) если $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$, то $\|P \circ Q\| = \|P\| \cdot \|Q\|$ и умножение матриц производится по обычному правилу умножения матриц, но произведение и сумма элементов при перемножении матриц находится по правилам пункта 1;

3) $\|P^{-1}\| = \|P\|^T$, где $\|P^{-1}\|$ - матрица обратного отношения P^{-1};

4) если $P \subseteq Q$, то $\|P\| = (p_{i,j})$, $\|Q\| = (q_{i,j})$ и $p_{i,j} \le q_{i,j}$.

Пример 3. Бинарное отношение $P \subseteq A^2$, $A = \{1,2,3\}$ изображено на рис. 1.8. Его матрица имеет вид $\|P\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть $\|Q\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $\|P \cup Q\| = \|P\| + \|Q\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

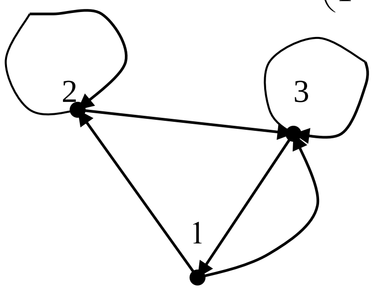


Рис. 1.8.

$\|P \cap Q\| = \|P\| * \|Q\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\|P \circ Q\| == \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть P - бинарное отношение на множестве A, $P \subseteq A^2$. Отношение P на множестве A называется рефлексивным, если $\forall x \in A,\ (x,x) \in P$, т. е. $id_A = P$, $\|P\| = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ * & 1 & * & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}$, где звездочкой обозначены нули или единицы. Отношение P называется иррефлексивным, если $\forall x \in A,\ (x,x) \notin P$. Отношение P на множестве A называется симметричным, если $\forall x, y \in P$ из условия $(x,y) \in P$ следует, что $(y,x) \in P$. Это значит, что $\|P\|^T = \|P\|$. Отношение P называется антисимметричным, если из условий $(x,y) \in P$ и $(y,x) \in P$ следует, что $x = y$, т. е. $P \cap P^{-1} \subseteq id_A$ или $\|P \cap P^{-1}\| = \|P\| * \|P\|^T$. Это свойство приводит к тому, что у матрицы $\|P \cap P^{-1}\|$ все элементы вне главной диагонали будут нулевыми (на главной диагонали тоже могут быть нули). Отношение P называется транзитивным, если из $(x,y) \in P$ и $(y,z) \in P$ следует, что $(x,z) \in P$, т. е. $P \circ P \subseteq P$.

Пример 4. Рассмотрим все свойства следующего отношения P, если $\|P\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Здесь на главной диагонали матрицы $\|P\|$ стоят все единицы, следовательно, P рефлексивно, т. е. $id_A \subseteq P$. Матрица $\|P\|$ не симметрична, тогда не симметрично и отношение P.
$\|P \cap P^{-1}\| = \|P\| * \|P\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Эта матрица нужна для проверки антисимметричности. Так как не все элементы, стоящие вне главной диагонали, нулевые, то отношение P не антисимметрично. Из этого примера видно, что свойство несимметричности не совпадает со свойством антисимметричности.

Наконец, $\|P \circ P\| = \|P\| \cdot \|P\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. $P \circ P \not\subset P$, следовательно, отношение P не транзитивно.

Рефлексивное, транзитивное и симметричное отношение на множестве A называется эквивалентностью на A. Эквивалентность обозначается символами E или ~, например, xEy, $x \sim y$.

Классом эквивалентности (смежным классом) элемента $x \in A$ называется множество $E(x) = \left\{ y \middle/ x \sim y \right\}$. Множество классов эквивалентности элементов множества A по эквивалентности E называется фактор-множеством A по E и обозначается $A/E = \left\{ E(x) \middle/ x \in A \right\}$.

Пример 5. Докажем, что на множестве $N \times N$ отношение Q является отношением эквивалентности, если $\{(a,b),(c,d)\} \in Q \Leftrightarrow a + d = b + c$.

Если отношение Q рефлексивно на A, то $\forall x \in Q$ $(x,x) \in Q$. В нашем случае роль A играет множество $N \times N$, а роль элемента x играет пара (x,y). Тогда отношение Q рефлексивно на $N \times N$, если $\forall (x,y) \in Q$ $\{(x,y),(x,y)\} \in Q$. По определению $Q : a + d = b + c$, но $a + b = b + a$, следовательно, Q рефлексивно.

Аналогично, если $\{(a,b),(c,d)\} \in Q$, то и $\{(c,d),(a,b)\} \in Q$, так как из $a + d = b + c$ следует, что $c + b = d + a$. Таким образом, Q симметрично.

Наконец, если $\{(a,b),(c,d)\} \in Q$, $\{(c,d),(f,g)\} \in Q$, то $\{(a,b),(f,g)\} \in Q$, так как $a + d = b + c$ и $c + g = d + f$. Тогда $(a+d)+(c+g) = (b+c)+(d+f) \Rightarrow a + d + c + g = = b + c + d + f \Rightarrow a + g = b + f$, т. е. Q транзитивно.

Разбиением множества A называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств A таких, что каждый элемент множества A принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

Теорема 1.1. **Фактор-множество A/E является разбиением множества A. Наоборот, если $R = \{A_i\}$ - некоторое разбиение множества A, то можно задать соответствующее ему отношение эквивалентности E по правилу $xEy \Leftrightarrow x, y \in A_i$ для некоторого i.**

Если E - эквивалентность на конечном множестве A, то $E(x_i)$ - классы эквивалентности, а $A/E = \{E(x_1), E(x_2), \ldots, E(x_n)\}$ и $E(x_i) = \{b_1^i, b_2^i, \ldots, b_{m_i}^i\}$, $i = \overline{1,n}$. Если множество A пронумеровано в следующем порядке $b_1^1, b_2^1, \ldots, b_{m_1}^1, b_1^2, b_2^2, \ldots, b_{m_2}^2, \ldots, b_1^n, b_2^n, \ldots, b_{m_n}^n$, то матрица отношения эквивалентности $\|E\|$ имеет блочно-диагональный вид:

$$\|E\| = \begin{array}{r} \\ m_1\{ \\ m_2\{ \\ \vdots \\ m_n\{ \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{}^{m_1} & \overbrace{}^{m_2} & & \overbrace{}^{m_n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

, где блоки 1 состоят из единиц, а остальные элементы равны нулю. Если же множество A пронумеровано произвольным образом, то матрица $\|E\| = (e_{i,j})$ приводится к блочно-диагональному виду перестановкой строк и столбцов.

Отношение $P \subseteq A^2$ называется предпорядком, если оно рефлексивно и транзитивно. Очевидно, что симметричный предпорядок является отношением эквивалентности.

Пример 6. Пусть $A = \{1,2,3,4\}$. Тогда отношение $P = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(3,2),(4,1)\}$ - предпорядок.

Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение на множестве A называется частичным порядком на A. Частичный порядок обозначается символом $\leq$, а обратное ему отношение $\leq^{-1}$ символом $\geq$. Отношение $<$ называется строгим порядком и определяется таким образом $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ и $x \neq y$. Это отношение не является частичным порядком, так как не удовлетворяет условию рефлексивности $x < x$.

Если во множестве A есть элементы x и y, о которых нельзя сказать, что $x \leq y$ или $y \leq x$, то такие элементы называются несравнимыми. Частичный порядок называется линейным порядком, если любые два элемента x и y из множества A сравнимы, т. е. $x \leq y$ или $y \leq x$.

Непустое множество A, на котором зафиксирован некоторый частичный (линейный) порядок, называется частично (линейно) упорядоченным множеством. Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества A называется максимальным (минимальным), если для $\forall x \in A$ из того, что $a \leq x$ $(x \leq a)$ следует $a = x$. Элемент $a \in A$ называется наибольшим (наименьшим), если $x \leq a$ $(a \leq x)$ для всех $\forall x \in A$. Наибольший элемент обозначается $\max A$, наименьший - $\min A$. Этих элементов у множества может и не быть, например, линейно упорядоченное множество рациональных чисел $(0,1]$ не имеет наименьшего элемента, наибольший элемент равен единице.

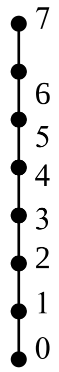
Верхней (нижней) гранью подмножества B частично упорядоченного множества A называется всякий элемент $a \in A$ и такой, что $b \leq a$ $(a \leq b)$ для всех $b \in B$. Точной верхней (нижней) гранью подмножества $B \subseteq A$ называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань для B. Точная верхняя и точная нижняя грани множества $B \subseteq A$ обозначаются через $\sup B$ (супремум) и $\inf B$ (инфимум) соответственно.

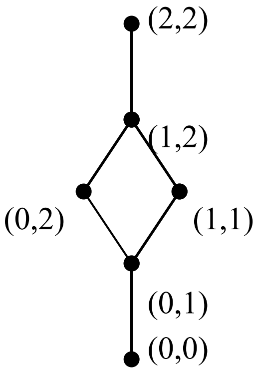
Линейный порядок $\leq$ на множестве A называется полным, если каждое непустое подмножество множества A имеет наименьший элемент. В этом случае множество A называется вполне упорядоченным.

Рассмотрим непустое конечное частично упорядоченное множество A. Говорят, что элемент y покрывает элемент x, если $x \leq y$ и не существует такого элемента z, что $x < z < y$. Если $x < y$, то существуют такие элементы $x_1, x_2, ..., x_n$, что $x = x_1 < x_2 < ... < x_n = y$, где x_{i+1} покрывает x_i.

Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости, и если y покрывает элемент x, то точки x и y соединяются отрезком, причем точку, соответствующую x располагают ниже y. Такие схемы называются диаграммами Хассе*.

Пример 7. Пусть $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ линейно упорядоченное множество с обычным отношением порядка на множестве натуральных чисел, не превосходящих семи. Его диаграмма Хассе изображена на рис. 1.9. Элементы этого отношения упорядочены обычным от-





ношением частичного порядка $\leq$.

Рассмотрим еще одно отношение: $P = \{(x, y) / x, y \in Z,\ x - y < 1,\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$. Элементы этого отношения – пары чисел будут упорядочены отношением включения $(a,b) \subseteq (c,d) \Leftrightarrow (a \leq c) \wedge (b \leq d)$. Проверим теперь будет ли это множество частично упорядоченным. $P = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,2)\}$. Так как $x - x = 0 < 1$ для всех возможных x, то отношение P рефлексивно. $(1,2) \in P$ и $(2,1) \notin P$, следовательно, P не симметрично. Однако, если $x - y < 1$ и $y - x < 1$, то $x = y$, иначе из $x \neq y$ следует

* Хельмут Хассе (1898 – 1979) – немецкий математик.

Рис. 1.9. Рис. 1.10. $|x-y|\ge 1$. Таким образом, отношение P антисимметрично. Пусть теперь $(x,y)\in P$, $(y,z)\in P$ и $x-y<1$ и $y-z<1$. Тогда $x<y$ и $y<z$ и, следовательно, $x<z$, т. е. $x-z<1$ и $(x,z)\in P$. Отношение P транзитивно, тогда P есть частично упорядоченное множество. Его диаграмма Хассе изображена на рис. 1.10.

1.3. Практическое занятие № 1. Операции над множествами. Отношения и функции

1.3.1. Доказать равенства:
а) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$; б) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$; в) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$.

1.3.2. Пусть $A=\left\{x\in N \big/ 2<x\le 6\right\}$, $B=\left\{x\in N \big/ 1<x<4\right\}$, $C=\left\{x\in N \big/ x^2-4=0\right\}$. Из каких элементов состоят множества: а) $B\cup C$; б) $A\cap B\cap C$; в) $A\cup B\cup C$; г) $B\times C$; д) $C\times B$?

1.3.3. Доказать включения: а) $A\cup(B\setminus C)\supset(A\cup B)\setminus C$; б) $(A\cup C)\setminus B\subset(A\setminus B)\cup C$.

1.3.4. Пусть $A\subset U,\ B\subset U$. Найти множество $X\subset U$, удовлетворяющее уравнению $\overline{(X\cup A)}\cup\overline{(X\cup \overline{A})}=B$.

1.3.5. Доказать, что а) если $A\subseteq B\cap C$, то $A\subseteq B$ и $A\subseteq C$; б) если $A\cap B\subseteq C$, то $A\subseteq \overline{B}\cup C$; в) если $A\cup B\subseteq C$, то $A\subseteq C$ и $B\subseteq C$; г) если $A\subseteq B\cup C$, то $A\cap\overline{B}\subseteq C$.

1.3.6. Решить систему уравнений $\begin{cases} A\cap X=B, \\ A\cup X=C, \end{cases}$ где $B\subseteq A\subseteq C$.

1.3.7. Доказать, что: а) если $A\subseteq B$, то $\overline{B}\subseteq\overline{A}$; б) если $A\subseteq B$, то $A\cup C\subseteq B\cup C$;
в) если $A\subseteq B$, то $A\cap C\subseteq B\cap C$.

1.3.8. Решить систему уравнений $\begin{cases} A\setminus X=B, \\ X\setminus A=C, \end{cases}$ $B\subseteq A,\ A\cap C=\varnothing$.

1.3.9. Доказать, что система уравнений $\begin{cases} A\cap X=\varnothing, \\ B\cap\overline{X}=\varnothing \end{cases}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $B\subseteq\overline{A}$, при этом условии решением системы является любое множество X такое, что $B\subseteq X\subseteq\overline{A}$.

1.3.10. Пусть $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $P_1\subseteq A\times B,\ P_2\subseteq B^2$. Изобразить P_1 и P_2 графически, найти $\left\|(P_1\circ P_2)^{-1}\right\|$. Проверить с помощью матрицы $\|P_2\|$ является ли отношение P_2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

а) $\begin{cases} P_1=\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,1),(c,4)\}, \\ P_2=\{(1,1),(2,3),(2,2),(3,4),(1,4),(2,4),(4,2)\}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} P_1=\{(b,2),(a,3),(b,1),(b,4),(c,1),(c,2),(c,4)\}, \\ P_2=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(3,4),(4,4)\}. \end{cases}$

1.3.11. Найти область определения, область значений отношения P. Является ли отношение P рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?
а) $P\subseteq R^2,(x,y)\in P\Leftrightarrow x^2+y^2=1$; б) $P\subseteq Z^2,(x,y)\in P\Leftrightarrow x-y$ четно.

1.3.12. Найти $D_P, R_P, P^{-1}, P \circ P, P \circ P^{-1}, P^{-1} \circ P$ для отношений:

а) $P = \left\{ (x, y) \middle/ x, y \in N \text{ и } x \text{ делит } y \right\}$; б) $P = \left\{ (x, y) \middle/ x, y \in R \text{ и } 2x \geq 3y \right\}$.

1.3.13. Пусть A и B - конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно.

а) Сколько существует бинарных отношений между элементами множеств A и B?

б) Сколько имеется функций из A в B?

1.3.14. Построить бинарное отношение:

а) рефлексивное, симметричное, не транзитивное;

б) рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное;

в) рефлексивное, не симметричное, транзитивное;

г) не рефлексивное, антисимметричное, транзитивное.

1.3.15. На множествах N и $N \times N$ определим P_m и S следующим образом:

а) $(a, b) \in P_m \Leftrightarrow (a - b)$ делится на $m (m > 0)$;

б) $\{(a, b), (c, d)\} \in S \Leftrightarrow [((a \cdot d = b \cdot c) \text{ и } b \neq 0 \text{ и } d \neq 0) \text{ или } (a = c, b = 0, d = 0)]$.

Доказать, что P_m и S являются отношениями эквивалентности.

1.3.16. а) доказать, что всякое частично упорядоченное множество содержит не более одного наибольшего (наименьшего) элемента; б) построить пример частично упорядоченного множества, имеющего точно один минимальный элемент, но не имеющего наименьшего элемента.

1.4. Эквивалентные, конечные и бесконечные множества

Множества A и B называются эквивалентными, если существует биекция $f : A \leftrightarrow B$. Как известно, биекция осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами множеств A и B. Эквивалентные или равномощные множества обозначаются $A \sim B$. По определению эквивалентность обладает свойствами:

1) рефлексивности $A \sim A$ $(id_A : A \leftrightarrow A)$;

2) симметричности: если $A \sim B$, то $B \sim A$ (так как если $f : A \leftrightarrow B$, то $f^{-1} : B \leftrightarrow A$);

3) транзитивности: если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$ (так как если $f : A \leftrightarrow B$ и $g : B \leftrightarrow C$, то $f \circ g : A \leftrightarrow C$, см. подразд. 1.2).

При сравнении множеств по числу содержащихся в них элементов возникает понятие мощности множества. Мощностью множества A называется класс всех множеств, эквивалентных множеству A. Обозначение мощности $|A|$.

Множество A называется конечным, если существует $n \in N$ такое, что $A \sim \{1, 2, ..., n\}$. Тогда $|A| = n$. Таким образом, мощностью конечного множества является число его элементов. Если $A \sim B$, то множества A и B имеют одинаковую мощность.

Множество, не являющееся конечным, называется бесконечным. Если $A \sim N$, то множество A называется счетным. Счетное множество – это такое множество A, все элементы которого могут быть занумерованы в бесконечную последовательность $a_1, a_2, ..., a_n ...$ так, чтобы при этом каждый элемент получил лишь один номер n и каждое натуральное число n было бы номером лишь одного элемента множества A. Таким образом, счетное множество это множество значений какой-нибудь последовательности $f : N \rightarrow B$. Пустое множество по определению относится к счетным. Мощность счетных множеств принято обозначать через $\aleph_0$*. Мощности произвольных множеств называются кардинальными числами. Кардинальные числа конечных множеств называются конечными, для бесконечных множеств – бесконечными.

Рассмотрим некоторые результаты, относящиеся к счетным множествам.

Теорема 1.2. **Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.**

Доказательство. Пусть A - счетное множество, $B \subseteq A$. Если $B = \varnothing$, то оно счетно по определению. Пусть $B \neq \varnothing$. На основании определения счетного множества все элементы множества A занумерованы, а само множество может быть представлено в виде бесконечной последовательности $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Если $B \subseteq A$, то a_{n_1} - первый элемент множества B,

являющийся одновременно членом последовательности $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, a_{n_2} - второй элемент и так далее.

Возможны два случая, либо после конечного числа шагов все элементы множества B будут исчерпаны, либо получится бесконечная последовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}, ...$ В первом случае множество B будет конечным, во втором – счетным.

Теорема 1.3. **Объединение счетного числа счетных множеств счетно.**

Пример 1. Пусть дан некоторый алфавит $\mathbf{A}$, т. е. набор знаков, называемых буквами. Любая конечная последовательность букв называется словом. Пустое слово обозначается символом Λ. Если алфавит конечен, то множество B всех слов алфавита $\mathbf{A}$ счетно.

Пусть $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, ..., A_k\}, k \geq 1$. Определим последовательность $f: N \to B$ таким образом: $f(0) = \Lambda$, если $m > 0$, то $f(m) = A_{n_m} A_{n_{m-1}} ... A_{n_2} A_{n_1}$, где A_{n_i} - i-й разряд записи слова в k-ичной системе счисления. Очевидно, что произвольное слово $A_{n_m} A_{n_{m-1}} ... A_{n_2} A_{n_1}$ является значением функции $f(m)$ при значении аргумента $n_1 + n_2 \cdot k^1 + ... + n_{m-1} \cdot k^{m-1} + n_m \cdot k^m$, т. е. $R_f = B$. Итак, $f: N \to B$, $R_f = B$, следовательно, множество B счетно, так как B эквивалентно счетному множеству N.

Пример 2. Множество всех рациональных чисел Q счетно.

Всякое рациональное число записывается в виде несократимой дроби m/n, где m - целое число, n - положительное целое число. Следовательно, множество Q эквивалентно множеству таких дробей. Множество дробей вида m/n является, в свою очередь, подмножеством всех слов в алфавите $\{0,1,2,...,9,-,/\}$. Таким образом, Q, являясь подмножеством счетного множества, счетно.

Теорема 1.4. **Всякое бесконечное множество A содержит счетное множество B, притом такое, что $A \setminus B$ есть бесконечное множество.**

Теорема 1.5. **Всякое бесконечное множество A содержит подмножество $B \sim A$, причем $A \setminus B$ есть бесконечное множество.**

Так как никакое конечное множество не содержит части, эквивалентной всему множеству, то последняя теорема выражает свойство, присущее лишь бесконечным множествам и только им и может служить условием, поясняющим определение бесконечных множеств. В случае бесконечных множеств понятие мощности является обобщение понятия количества элементов конечного множества. Однако любые количества либо равны, либо одно из них больше другого, поэтому возникает вопрос о сравнимости мощностей.

Пусть даны два множества A и B. При их сравнении возможны следующие случаи:

а) существует взаимно однозначное соответствие между A и B;

---

* $\aleph$ - первая буква древнееврейского алфавита, называется «алеф», выражение $\aleph_0$ читается: «алеф-нуль».

б) существует взаимно однозначное соответствие между A и $C \subseteq B$ и нет взаимно однозначного соответствия между B и $D \subseteq A$;

в) существует взаимно однозначное соответствие между A и $C \subseteq B$, а также взаимно однозначного соответствия между B и $D \subseteq A$.

Третий случай невозможен, если A и B - конечные множества, для счетных множеств этот случай может осуществляться.

Теорема 1.6. (Кантора – Бернштейна**)* **Если из двух множеств A и B каждое эквивалентно части другого, то эти два множества эквивалентны между собой, т. е. если**
$|A| \le |B|$ и $|B| \le |A|$, то $|A| = |B|$.

Доказательство. Пусть $A \sim B_1 \subset B$ и $B \sim A_1 \subset A$. Тогда, если $A \sim B_1$, то $B_1 \sim A_2$ и $A \supset A_1 \supset A_2$ в силу взаимно однозначного соответствия при эквивалентности. Одновременно $B \sim A_1$. Таким образом, показав, что $A \sim A_1$, докажем, что $A \sim B$, так как $A_1 \sim B$. Итак, рассмотрим какое-нибудь взаимно однозначное отображение f. Так как $A \sim B_1$, $B_1 \sim A_2$, $A \overset{f}{\leftrightarrow} A_2$ и $A \sim A_2$. Аналогично $A_1 \subset A \overset{f}{\leftrightarrow} A_3 \subset A_2$ и $A_1 \sim A_3$, $A_2 \subset A_1 \overset{f}{\leftrightarrow} A_4 \subset A_3$ и $A_2 \sim A_4$ и так далее.

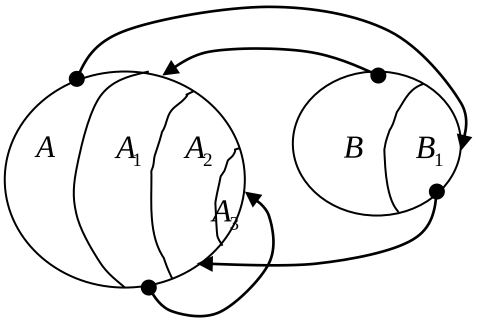


Рис. 1.11.

В силу того же взаимно однозначного соответствия $A \setminus A_1 \overset{f}{\leftrightarrow} A_2 \setminus A_3$, $A_1 \setminus A_2 \overset{f}{\leftrightarrow} A_3 \setminus A_4$, $A_2 \setminus A_3 \overset{f}{\leftrightarrow} A_4 \setminus A_5$ (см. рис 1.11). Но тогда $(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots \sim$ $\sim (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup (A_6 \setminus A_7) \cup \ldots$ Введем вспомогательное множество $D = A \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$, тогда $A = D \cup (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup \ldots$, $A_1 = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots$, так как $A = (A \cap A_1 \cap A_2 \cap \ldots) \cup (A \cap \overline{A_1}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup \ldots =$
$= \left((A \cup A_1) \cap (A \cup A_2) \cap (A \cup A_3) \cap \ldots \cap (A_1 \cup \overline{A_1}) \cap (A_2 \cup \overline{A_1}) \cap (A_3 \cup \overline{A_1}) \cap \ldots\right) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup \ldots =$
$= \left(A \cap (A_2 \cup \overline{A_1}) \cap (A_3 \cup \overline{A_1}) \cap \ldots\right) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup \ldots = \left((A \cup A_1) \cap (A_2 \cup \overline{A_1} \cup A_1) \cap (A_3 \cup \overline{A_1} \cup A_1) \cap \ldots\right.$
$\left.\ldots \cap (A \cup \overline{A_2}) \cap (A_2 \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \cap (A_3 \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \cap \ldots\right) \cup \ldots = \left(A \cap (A_3 \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \cap \ldots\right) \cup \ldots = A,$
аналогично выражается A_1. Но равенства для A и A_1 можно переписать следующим образом
$A = \left(D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots\right) \cup \left((A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots\right)$, $A_1 = \left(D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup\right.$ $\left.\cup \ldots\right) \cup \left((A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots\right)$. В этих выражениях первые скобки в правых частях одинаковы, а во вторых скобках стоят эквивалентные множества. Устанавливая между элементами множеств $(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots$ и $(A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots$ взаимно однозначное соответствие и заставляя соответствовать самому себе каждый элемент множества $D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots$, получим взаимно однозначное соответствие между элементами множеств A и A_1, т. е. $A \sim B$ и $|A| = |B|$.

Мы уже упоминали о том, что мощности бесконечных множеств должны быть сравнимы между собой, т. е. должны существовать различные бесконечные мощности. Это действительно так, для каждого множества A существует множество, мощность которого больше мощности множества A.

---

* Георг Кантор (1845 – 1918) – немецкий математик.

** Сергей Натанович Бернштейн (1880 – 1966) – советский математик.

Теорема 1.7. **Множество всех подмножеств произвольного непустого множества A имеет мощность большую, чем мощность множества A.**

Эта теорема верна и для пустого множества A. Для $A=\varnothing$ множество всех подмножеств имеет вид $\{\varnothing\}$, т. е. имеет мощность 1, в то время как $|\varnothing|=0$.

Рассмотрим множество всех отображений множества N в множество $M=\{0,1\}$. Всякое такое отображение, ставя каждому натуральному числу в соответствие 0 или 1, приводит к построению бесконечной последовательности $i_1,i_2,...,i_n,...$, где $i_n=0$ или 1, т. е. бесконечной десятичной дроби $0,i_1,i_2,...,i_n,...$ Таким образом, множество всех бесконечных двоичных дробей имеет мощность, равную мощности всех подмножеств множества N. Так как $|N|=\aleph_0$, тогда мощность множества всех бесконечных двоичных дробей равна $2^{\aleph_0}$ (см. задачу 1.3.13 б).

Множество A называется несчетным, если его мощность больше мощности множества N. Нам известно, что множество всех рациональных чисел счетно (пример 2), далее мы покажем, что множество всех действительных чисел несчетно. Если $A\sim 2^{\aleph_0}$, то множество A называется континуальным или континуумом* и обозначается через c. Эта мощность несчетна ($2^{\aleph_0}>\aleph_0$).

Теорема 1.8. **Множество всех действительных чисел имеет мощность континуума $\mathsf{c}=2^{\aleph_0}$ и, следовательно, несчетно.**

Доказательство. Сначала докажем, что множество действительных чисел R находится во взаимно однозначном соответствии с действительными числами интервала $(0,1)$.

Рассмотрим две функции $f_1(x)=tgx$ и $f_2(x)=a+(b-a)x$. Очевидно, что $\left(-\pi/2,\pi/2\right)\overset{f_1(x)=tgx}{\leftrightarrow}R$, аналогично, $(0,1)\overset{f_2(x)=a+(b-a)x}{\leftrightarrow}\left(-\pi/2,\pi/2\right)$ при $a=-\pi/2$, $b=\pi/2$. Таким образом, $R\sim\left(-\pi/2,\pi/2\right)$, $\left(-\pi/2,\pi/2\right)\sim(0,1)$, т. е. $R\sim(0,1)$.

Обратим еще раз внимание на процесс разложения действительных чисел в двоичные дроби. Нами уже показано, что мощность множества всех бесконечных двоичных дробей равна мощности всех подмножеств множества N, т. е. мощности континуума (см. комментарий к теореме 1.7).

Рассмотрим процесс последовательного разбиения интервала $(0,1)$ на две равные части $\left(0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right);\left(0,\frac{1}{4}\right],\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right],\left[\frac{3}{4},1\right);...$ Длины этих отрезков, равные $\frac{1}{2^n}$, обозначим через $\Delta_{i_1,i_2,...,i_n}$, где $i_1,i_2,...,i_n$ независимо друг от друга принимают значение 0 или 1, при этом $\Delta_{i_1,i_2,...,i_{n-1},0}$ и $\Delta_{i_1,i_2,...,i_{n-1},1}$ - левая и правая половина $\Delta_{i_1,i_2,...,i_{n-1}}$. Возьмем любое $x\in(0,1)$. Пусть сначала x не равен $\frac{m}{2^n},m\in N$, т. е. не совпадает с концом или началом какого-нибудь отрезка. Тогда x представимо в виде $i_1,i_2,...,i_n...$, где $i_k=0$ или 1, а последовательность $i_1,i_2,...,i_n...$ есть последовательность двоичных знаков числа x.

Пусть теперь $x\in(0,1)$ и $x=\frac{m}{2^n}$, где дробь $\frac{m}{2^n}$ несократима. Тогда x является общим концом двух отрезков, следовательно, x можно представить в виде двух последовательностей двоичных знаков $i_1,i_2,...,i_{n-1},0,1,1,1,...$ и $i_1,i_2,...,i_{n-1},1,0,0,0,...$

* Continuum – непрерывное (лат.), поэтому мощность всех действительных чисел $\mathsf{c}=2^{\aleph_0}$ называется мощностью континуума.

Таким образом, каждое действительное число $x \in (0,1)$ имеет либо одно двоичное разложение $0.i_1 i_2 ... i_n ...$, либо два двоичных разложения $0.i_1 i_2 ... i_{n-1} 0111...$ и $0.i_1 i_2 ... i_{n-1} 1000...$, причем второй случай наступает тогда и только тогда, когда число x двоично-рационально.

Так как $R \sim (0,1)$, а множество двоично- рациональных чисел счетно (см. пример 2), то достаточно доказать, что множество всех не двоично-рациональных чисел интервала $(0,1)$ имеет мощность $\mathbf{c}$ (см. задачу 1.5.?). Но это множество находится во взаимно однозначном соответствии с множеством непериодических бесконечных двоичных дробей вида $0.i_1 i_2 ... i_n ...$, которое имеет мощность континуума. Таким образом, $|R| = \mathbf{c}$.

1.5. Практическое занятие № 2. Кардинальные числа

1.5.1. Доказать, что
а) всякое подмножество конечного множества конечно;
б) объединение конечного числа конечных множеств конечно.

1.5.2. Доказать, что множество тогда и только тогда бесконечно, когда оно эквивалентно некоторому собственному подмножеству.

1.5.3. Доказать, что
а) если A бесконечно и B - конечное или счетное множество, то $A \cup B \sim A$;
б) если A бесконечно и несчетно, B конечно или счетно, то $A \setminus B \sim A$.

1.5.4. Доказать, что множество целых чисел счетно.

1.5.5. Доказать, что множество многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.

1.5.6. Доказать, что
а) $(0,1) \sim [0,1] \sim (0,1] \sim [0,1)$;
б) $[a,b] \sim [c,d]$, где $a < b,\ c < d$.

1.5.7. Доказать, что множества точек двух окружностей эквивалентны.

1.5.8. Доказать, что множество всех подмножеств $P(A)$ множества A имеет мощность, большую чем A.

1.5.9. Доказать, что не существует множества, содержащего все множества.

1.5.10. Пусть A - счетное множество точек на действительной прямой. Можно ли выбрать a так, чтобы $\left\{ x + a \middle/ x \in A \right\} \cap A = \varnothing$?

1.6. Аксиомы теории множеств

Теория множеств является универсальным фундаментом для сего здания математики. Область исследования каждой математической дисциплины можно представить в виде набора множеств заданной структуры. Однако свободное использование понятий интуитивного теоретико-множественного универсума иногда приводит к противоречиям.

Приведем в качестве примера два из них. Парадокс Рассела* заключается в следующем. Пусть R есть множество всех множеств, которые не являются элементами самих себя, т. е. $R = \left\{ x \middle/ x \notin x \right\}$. Тогда для любого множества x будет $x \in R \leftrightarrow x \notin x$. Если

* Бертран Артур Уильям Рассел (1872 – 1970) – английский математик.

подставить R вместо x, получится противоречие: оказывается $R \in R$ выполняется тогда и только тогда, когда $R \notin R$.

Парадокс Кантора также связан с множеством всех множеств. Обозначим его A, тогда $P(A)$ - семейство всех подмножеств данного множества A и $P(A) \subseteq A$, т. е. $|P(A)| \leq |A|$. Но с другой стороны для любого множества A $|P(A)| \geq |A|$. Тогда по теореме Кантора – Бернштейна должно быть $|P(A)| = |A|$, что противоречит теореме 1.7.

Во многом эти парадоксы следствие аксиоматической теории множеств. Как известно, в любой аксиоматической теории сначала выбирают основные понятия, которые лишь поясняются, ибо должны быть интуитивно понятны, а затем составляются аксиомы для этих понятий. Основным понятием теории множеств является понятие самого множества. Множество образуется путем отбора определенных объектов и полностью ими определяется, при этом элементами множеств могут быть объекты любой природы. Можно конкретизировать первичное понятие элемента множества и наложить на него некоторые ограничения, которые
позволят избежать парадоксов.

Например, парадоксов можно избежать, если ввести совокупности объектов двух сортов, одну из них называть классами, другую – множествами, причем множествами будут только те из классов, которые сами могут быть элементами других классов. Кроме того, следует считать, что множества строятся по шагам. Для каждого текущего шага предшествующие шаги, если они имеются, осуществляются раньше (в логическом, а не во временном смысле) текущего шага. Таким образом, отношение «раньше» упорядочивает шаги. Каждое множество будет построено после некоторого количества шагов и лишь после этого может быть использовано. Когда же множество еще строится путем выбора его элементов, то оно еще не готово как объект и его нельзя использовать в качестве элемента, например, самого себя.

Ограничения подобного рода позволяют избежать парадоксов, однако целесообразнее ограничиться рассмотрением только тех множеств, существование которых может быть доказано на основе некоторой системы аксиом.

Такая система предложена Э. Цермело* в 1908 году, затем она была несколько расширена А. Френкелем** и носит название системы аксиом Цермело-Френкеля (ZF).

В систему ZF входят следующие аксиомы.

1) *Аксиома объемности (экстенсиональности).* Всякое множество полностью определяется своими элементами. Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых элементов: $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = B$.

2) *Аксиома объединения (суммы).* Объединение всех элементов любого множества A есть множество, т. е. для любого множества A существует множество $\cup A$, состоящее в точности из всех элементов, принадлежащим элементам множества A. Если $\exists A$, то $\exists \cup A = \{a / a \in b$ для некоторого $b \in A\}$.

3) *Аксиома степени (аксиома множества всех подмножеств).* Совокупность всех подмножеств произвольного множества A является множеством. Если $\exists A$, то $\exists P(A) = \left\{ B / B \subseteq A \right\}$.

4) *Аксиома подстановки (замены).* Для каждого множества A и функции f, определенной на A, существует множество, содержащее в точности объекты $f(x)$ для $x \in A$ $\exists B = \left\{ y / x \in A \wedge y = f(x) \right\}$.

---

* Эрнст Фридрих Фердинанд Цермело (1871 – 1953) – немецкий математик.

** Абрахам Адольф Френкель (1891 – 1965) – израильский математик.

5) *Аксиома регулярности (фундирования).* Множество A называется фундированным, если каждое множество, содержащее A, имеет минимальный элемент. Всякое непустое множество A имеет элемент $a \in A$, для которого $a \cap A = \varnothing$, т. е. этот элемент минимален. Действительно, пусть $a \in A$; если a и A не пересекаются, то a и есть искомый минимальный элемент множества A. Эту аксиому можно сформулировать и таким образом: не существует бесконечно убывающей последовательности множеств $a_1 \supseteq a_2 \supseteq \ldots$

6) *Аксиома бесконечности.* Она гарантирует существование бесконечного множества – множества натуральных чисел $\exists N = \{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$, где $0 = \varnothing$, $n+1 = n \cup \{n\}$.

7) *Аксиома выделения.* Для любого множества A и свойства F такого, что для любого $a \in A$ утверждение $F(x)$ либо истинно, либо ложно, существует множество $B = \left\{ a \middle/ a \in A \wedge F(a) = 1 \right\}$, состоящее в точности из тех элементов множества A, для которых F истинно. Название аксиомы объясняется тем, что мы выделяем такие $a \in A$, которые удовлетворяют $F(x)$, из всех элементов множества A.

Иногда вместо аксиомы выделения в систему аксиом включают две аксиомы: а) *аксиому существования пустого множества* $\exists \varnothing$ и б) *аксиому существования пары:* если $\exists A$ и $\exists B$, то $\exists \{A, B\}$. Эти две аксиомы можно легко вывести из приведенных семи основных аксиом. Например, $\varnothing = \left\{ x \middle/ x \neq x \right\}$. Пусть A - произвольное множество. Оно существует по аксиоме бесконечности. Тогда $\forall x (x \neq x \to x \in A)$ и по аксиоме выделения $\exists \varnothing = \left\{ x \middle/ x \neq x, x \in A \right\}$.

Для того, чтобы система аксиом теории множеств была полной, т. е. адекватно формализовала все известные приемы математических рассуждений, необходимо к аксиомам системы ZF добавить еще одну из двух конкурирующих друг с другом аксиом: а) аксиому выбора (AC) или б) аксиому детерминированности (AD). Система аксиом ZF с добавленной аксиомой выбора называется системой аксиом ZFC.

Аксиома выбора предложена Э. Цермело в 1904 году. Пусть для каждого $x \in X$ задано множество $A_x \neq \varnothing$. Выбрав в каждом из множеств A_x некоторый элемент $y \in A_x$, получим функцию f, определенную на X и такую, что $f(x) \in A_x$ для всех $x \in X$, т. е. $f(x) = y$. Эта функция называется функцией выбора.

Аксиома выбора. **Для всякого семейства непустых множеств A_x существует функция выбора, т. е. $\forall A_x \neq \varnothing \ \exists f : P(A_x) \to A_x$, что $f(X) \in X$ для $\forall X \subseteq A_x, X \neq \varnothing$.**

Наиболее «прозрачная» формулировка аксиомы выбора такова: для любого непустого множества A_x попарно непересекающихся множеств существует некоторое множество, содержащее в качестве своих аргументов ровно по одному элементу из каждого элемента множества A_x.

Эта аксиома вызвала много споров и серьезные возражения крупных математиков. Основные возражения касались неконструктивного характера самой аксиомы: о функции выбора, существование которой постулируется аксиомой, в общем случае ничего не известно, и нельзя сказать, чему равно значение $f(x)$ для конкретных $x \in X$. Тем не менее, аксиома выбора играет ключевую роль в системе аксиом. Кроме того, она неявно присутствует в доказательстве многих важных утверждений из математического анализа и теории меры, например, в таком: если x - предельная точка множества действительных чисел X, то существует последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ точек множества X, сходящихся к x. Этот пример показывает, что два стандартных определения предельной точки (одно через окрестности, а другое через последовательности) не будут эквивалентными, если нет аксиомы выбора.

Альтернативной аксиоме выбора является предложенная в 1962 году Мычельским* и Штейнгаузом** аксиома детерминированности (AD).

Рассмотрим множество A бесконечных последовательностей натуральных чисел, определяющих следующую бесконечную игру G_A для двух игроков. Игрок I пишет натуральное число n_0, затем игрок II пишет натуральное число n_1 и так далее по очереди. Если получающаяся в результате игры последовательность $n_0, n_1, ..., n_k, ...$ принадлежит множеству A, то выигрывает игрок I, в противном случае игрок II. Игра G_A называется детерминированной, если либо игрок I, либо игрок II имеют выигрывающую стратегию.

Аксиома детерминированности. **Всякое множество $A \subseteq I$ детерминировано.** Здесь I - бэровское*** пространство (множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел).

Аксиома детерминированности создана с целью получить более привлекательные следствия, чем те, что дает аксиома выбора. В целом эти две конкурирующие аксиомы дают противоположные следствия в тех областях, где они применимы.

---

* Ян Мычельский (р.????) –польско-американский математик.

** Гуго Дионисий Штейнгауз (1887 - 1972) – австрийско-польский математик.

*** Рене Луи Бэр (1874 – 1932) – французский математик.

Аксиома выбора имеет ряд следствий, являющихся в определенной степени нежелательными, или приводят к «парадоксальным» примерам множеств, противоречащим нашей
интуиции, вроде парадокса Банаха* – Тарского**: используя аксиому выбора, можно разбить шар на конечное число частей, которые затем можно переставить так, что получится два шара такого же размера, как и исходный шар. Однако эта аксиома оказывает четкое организующее влияние на бесконечные мощности, делает более «регулярной» структуру бесконечных множеств, сравнивая их по величине и располагая такие мощности в иерархию алефов. Ее роль особенно важна при изучении наиболее общих топологических пространств, произвольных множеств и порядковых чисел, где она становится органически включенной в структуру большинства рассуждений и построений.

Аксиома детерминированности (AD) противоречит аксиоме выбора (AC). В свою очередь AD в отличие от AC не дает ясной картины бесконечных мощностей и почти не используется в топологии. Зато многие следствия AD укладываются в естественный эвристический принцип: если нет «индивидуальных» примеров множеств с каким-либо свойством, то AD влечет отсутствие множеств, обладающих этим свойством. Кроме того, эта аксиома широко применяется в задачах из теории проективных множеств, неразрешимых с помощью AC.

Выбор между аксиомой детерминированности и аксиомой выбора возможен, очевидно, лишь со временем, путем сравнения красоты и богатства теорий, построенных на этих аксиомах.

ЧАСТЬ II. КОМБИНАТОРИКА

2.1. Основные определения комбинаторного анализа

Бытует мнение, что комбинаторные задачи элементарны. Конечно, это не так. Число комбинаторных задач и их разнообразие быстро растет. К их решению прямо или косвенно приводят многие практические задачи. При этом оказывается, что, несмотря на заманчивую простоту постановки, комбинаторные задачи в большинстве очень трудны; многие из них не поддаются решению до сих пор. К числу современных задач, решаемых комбинаторными методами, относятся:

1) задачи на размещения. Это задачи о расположении, например, на плоскости предметов, обладающих свойствами дальнодействия;

2) задачи о покрытиях и заполнениях. Это задачи, например, о заполнении заданных пространственных фигур меньшими телами заданных форм и размеров;

3) задачи о маршрутах. К ним относятся задачи на отыскание кратчайшего пути и тому подобное. Это задачи оптимального плана;

4) комбинаторные задачи теории графов. Это задачи сетевого планирования, например, задачи транспортных и электрических сетей, задачи об окрашивании графов, задачи о перечислении вершин и тому подобные задачи;

5) перечислительные задачи. В таких задачах речь идет о числе предметов, составляемых из данного набора элементов при соблюдении определенных правил.

В задачах комбинаторного анализа исследуются дискретные множества, то есть множества, составленные из отдельных обособленных элементов. В большинстве случаев эти множества конечные, но не исключается и рассмотрение множеств, состоящих из бесконечного числа элементов. Особенностью комбинаторных задач является то, что в них преимущественное внимание уделяется двум видам операций: отбору подмножеств и упорядочению элементов. Эти две операции и являются основными комбинаторными.

---

* Стефан Банах (1892 – 1945) – польский математик.

** Альфред Тарский (1902 – 1983) – польский математик.

С операцией отбора множеств связано понятие выборки. С этим понятием можно связать как осуществление операции отбора, так и ее результат - само выбранное подмножество.

Подмножество из r элементов, выбранное из множества S_n, состоящего из n элементов, называется (n,r)- выборкой, а r - объемом этой выборки. Если (n,r)- выборки рассматриваются с учетом порядка элементов в них, то они называются (n,r)-перестановками. Если же порядок элементов в выбранных подмножествах не важен, то соответствующие выборки называются (n,r)- сочетаниями.

В выборках могут допускаться и не допускаться повторения элементов. Упорядоченная (n,r)- выборка, в которой элементы могут повторяться, называется перестановкой с повторениями из n элементов по r или (n,r)- перестановкой с повторениями. Если элементы упорядоченной (n,r)- выборки попарно различны, то она называется (n,r)- перестановкой без повторений. Число (n,r)- перестановок обозначается символом $P_{n,r}$ или $P(n,r)$, а число перестановок с повторениями $\hat{P}_{n,r}$ или $\hat{P}(n,r)$. P - первая буква французского слова Permutation - перестановка. До сих пор во многих учебниках (n,r)-перестановки называются размещениями и обозначаются символом A_n^r, собственно же перестановками называются упорядоченные (n,n)- выборки. A - первая буква французского слова Arrangement - размещение, приведение в порядок. Неупорядоченная (n,r)- выборка, в которой элементы могут повторяться, называется сочетанием с повторениями из n элементов по r.

Число сочетаний без повторений обозначается символами $C(n,r)$, C_n^r, $\binom{n}{r}$, с повторениями $\hat{C}(n,r)$ или $\hat{C}_n^r$. C - первая буква французского слова Combination - сочетание. Наиболее употребительным является обозначение C_n^r. Символ $\binom{n}{r}$ называется символом Аппеля*.

Пример 1. Пусть $A=\{a,b,c\}$, $r=2$. Указать все упорядоченные и неупорядоченные выборки с повторениями и без повторений из трех элементов по два.

1) $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$ - девять перестановок с повторениями, $\hat{P}_{3,2}=9$.

2) ab, ac, ba, bc, ca, cb - шесть перестановок без повторений, $P_{3,2}=6$.

3) ab, ac, bc - три сочетания без повторений, $C_3^2=3$.

4) aa, ab, ac, bb, bc, cc - шесть сочетаний с повторениями, $\hat{C}_3^2=6$.

2.2. Правило суммы и правило произведения

Основной комбинаторной задачей является подсчет числа (n,r)- выборок при различных условиях. Опыт выполнения комбинаторных операций отбора подмножеств привел к следующим двум логическим правилам.

1) Правило суммы. **Если из множества S подмножество A (которое может состоять и из одного элемента) можно выбрать n способами, а подмножество B, отличное от A, m способами, и при этом выборы A и B таковы, что взаимно исключают друг друга и не могут быть получены одновременно, то выбор из множества S множества $A \cup B$ можно получить $n+m$ способами.**

---

* Поль Эмиль Аппель (1855 - 1930) - французский математик.

Прокомментируем это правило подробнее. Если $A \cap B = \varnothing$, то A и B называются непересекающимися множествами, в частности, если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при всех $i, j = 1,2,...,r,\ i \neq j,$ то $S = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r$ называется разбиением множества S на непересекающиеся подмножества или просто разбиением. Правило суммы можно сформулировать и в терминах теории множеств: если даны n - множество A и m - множество B, то при $A \cap B = \varnothing$ объединение $A \cup B$ будет $n+m$ - множеством. Если дано разбиение $S = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_r$, где $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i, j = 1,2,...,r,\ i \neq j$ и если A_i есть n_i - множество $(i = 1,2,...,r)$, то множество S есть $\sum_{i=1}^{r} n_i$ - множество.

2) Правило произведения. **Если из множества S подмножество A может быть выбрано n способами, а после каждого такого выбора подмножество B можно выбрать m способами, то выбор A и B в указанном порядке можно осуществить $n \times m$ способами.**

В терминах теории множеств это правило соответствует понятию декартова произведения множеств: если A является n - множеством, а B m - множеством, то $A \times B$ окажется $n \cdot m$ - множеством. Пусть A_i суть n_i - множества, $i = 1,2,...,r$. Построим множества: $M_1 = A_1,\quad M_2 = A_1 \times A_2 = M_1 \times A_2,\ M_3 = M_2 \times A_3, ..., M_r = M_{r-1} \times A_r$. Тогда M_r будет $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r$ множеством.

При решении практических задач правило произведения часто употребляется при подсчете числа вариантов при проведении (n, r) - выборок. В этом случае его формулировка может выглядеть, например, так.

2а) Правило произведения. **Пусть требуется выполнить одно за другим r действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие - n_2 способами и так до r-го действия, которое можно выполнить n_r способами, то все r действий вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r$ способами.**

Пример 1. В классе изучают 10 предметов. В понедельник шесть уроков, причем все уроки различные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

Речь в задаче идет о 6 - перестановках без повторения из 10 элементов. Первый урок можно поставить в расписание десятью способами, второй девятью, третий - восемью и так далее. По правилу произведения число способов составления расписания будет равно $A_{10}^{6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$.

Пример 2. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на пять?

Вспомним признаки делимости. Число делится на пять, если оно оканчивается на нуль или на пять. В задаче речь идет о (n, r) - перестановках с повторениями. Первая цифра может быть выбрана из множества 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Нуль не может участвовать в выборке, ибо при его выборе число будет четырехзначным, а не пятизначным. Итого, девять вариантов выбора для первой цифры. Вторая, третья и четвертая цифры могут быть любыми из набора 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Последняя пятая цифра выбирается только из 0 и 5. Таким образом, $N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$.

2.3. Формулы для расчета перестановок и сочетаний без повторений и с повторениями

Найдем сначала число всех возможных (n, r) - перестановок, то есть размещений. Задача сводится к последовательному применению правила произведения. В самом деле, в n - множестве S_n имеется n возможностей для выбора первого элемента (n, r) - перестановки; для выбора второго элемента останется $n-1$ возможностей, так как речь сейчас идет о перестановках без повторения, то есть один раз выбранный элемент уже не участвует в дальнейшей выборке. Аналогично рассуждая, получим, что для выбора r-го элемента останется $n-r+1$ возможностей. Тогда

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \qquad (2.3.1)$$

Действительно, $\dfrac{n!}{(n-r)!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-r)\cdot (n-r+1)\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-r)} = (n-r+1)\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n.$

Здесь принято $0! = 1! = 1.$ Итак, доказана следующая теорема

Теорема 2.1. **Число упорядоченных r - элементных подмножеств множества S_n, состоящего из n элементов равно $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.**

В частном случае, когда $n = r$, получаем $A_n^n = P_{n,n} = P_n = \dfrac{n!}{0!} = n!$ Это число способов упорядочения n- элементного подмножества.

Подсчитаем теперь число всех возможных (n,r) - перестановок с повторениями. В этом случае после выбора любого элемента (n,r) - перестановки остаются все те же n возможностей для выбора следующего элемента. Следовательно, по правилу произведения число (n,r) - перестановок с повторениями равно:

$$\hat{A}_n^r = \underbrace{n\cdot n\cdot ...\cdot n}_{r\text{ раз}} = n^r. \qquad (2.3.2)$$

Подсчитаем теперь число (n,r) - сочетаний. Пусть имеется ряд неупорядоченных (n,r) - выборок без повторения элементов. Обозначим количество элементов множества, состоящего из всех возможных (n,r) - сочетаний через C_n^r. Сравним числа C_n^r и A_n^r. A_n^r - число упорядоченных выборок из n элементов по r; C_n^r - число неупорядоченных выборок из n элементов по r. Очевидно, что каждую неупорядоченную выборку объема r можно упорядочить $r!$ различными способами, то есть $r!C_n^r = A_n^r$. Тогда

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad (2.3.3)$$

Полученный результат формулируется в виде теоремы.

Теорема 2.2. **Число всех неупорядоченных r - элементных подмножеств множества S_n, состоящего из n элементов равно $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.**

Рассмотрим более сложную задачу о числе $(r_1, r_2, ..., r_k)$- разбиений n - множества S_n, то есть разбиений вида $S_n = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 1,2,...,k,$ причем A_i есть r_i - подмножество множества S_n. Очевидно, $\sum_{i=1}^{k} r_i = n.$ Рассуждаем аналогично тому, как это делалось при нахождении числа A_n^r. Для выбора r_1 - подмножества A_1 из S_n имеется $C_n^{r_1}$ возможностей, после этого r_2 - подмножество A_2 можно выбирать только из оставшихся $n-r_1$ элементов, так как $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Этот выбор можно осуществить $C_{n-r_1}^{r_2}$ способами и так далее. Применяя правило произведения, получим, что искомое число $(r_1, r_2, ..., r_k)$- разбиений n - множества S_n равно

$$C_n^{r_1} C_{n-r_1}^{r_2} C_{n-r_1-r_2}^{r_3} ... C_{n-\sum_{i=1}^{k-1} r_i}^{r_k} = \frac{n!}{r_1!\, r_2! ... r_k!}. \qquad (2.3.4)$$

Действительно, $\dfrac{n!}{r_1!(n-r_1)!}\cdot \dfrac{(n-r_1)!}{r_2(n-r_1-r_2)!}\cdot ...\cdot \dfrac{(n-r_1-r_2-...-r_{k-1})!}{r_k!(n-r_1-r_2-...-r_k)!} = \dfrac{n!}{r_1!\, r_2! ... r_k!}.$

Итак, число способов, которыми можно представить множество S_n из n элементов в виде суммы k неупорядоченных множеств $A_1, A_2, ..., A_k$, число элементов которых составляет соответственно $r_1, r_2, ..., r_r$, равно $\frac{n!}{r_1! r_2! ... r_k!}$.

Пример 1. Найти число различных слов (бессмысленных), которое можно получить, переставляя буквы слова «математика».

Разные буквы слова математика представляют собой множества $A_1, A_2, ..., A_k$, на которые можно разбить исходное слово и различные объединения которых будут давать новые бессмысленные слова. Здесь $k = 6,\ A_1 = \{a, a, a\},\ A_2 = \{m, m\},\ A_3 = \{м, м\},$ $A_4 = \{e\},\ A_5 = \{u\},\ A_6 = \{к\}.$ Отсюда $r_1 = 3,\ r_2 = 2,\ r_3 = 2,\ r_4 = r_5 = r_6 = 1.$ Исходное множество $S_n = \{м, a, m, e, м, a, m, u, к, a\},\ n = 10.$ Тогда по формуле (2.3.4)

$$N = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 151200.$$

Подсчитаем, наконец, число (n, r) - сочетаний с повторениями из множества S_n. Пусть элементы множества S_n занумерованы числами $1, 2, ..., n.$ Так как множество S_n конечно или счетно, то эта операция всегда возможна. Тогда вместо (n, r) - сочетаний множества S_n можно рассматривать (n, r) - сочетания из эквивалентного ему множества $S' = \{1, 2, ..., n\}$ в силу взаимно однозначного соответствия.

Всякая (n, r) - выборка из S' может быть записана в виде $\{n_1, n_2, ..., n_r\}$, где $n_1 \le n_2 \le ... \le n_r$, причем равенство возможно в силу того, что рассматриваются выборки с повторениями. r- выборке $\{n_1, n_2, ..., n_r\}$ поставим в соответствие r- множество $\{n_1, n_2 + 1, n_3 + 2, ..., n_r + r - 1\}$, в котором все элементы, очевидно, различны. Соответствие между $\{n_1, n_2, ..., n_r\}$ и $\{n_1, n_2 + 1, n_3 + 2, ..., n_r + r - 1\}$ опять взаимно однозначное, причем r- множества $\{n_1, n_2 + 1, n_3 + 2, ..., n_r + r - 1\}$ являются r- сочетаниями без повторений из $n + r - 1$- множества $S' \cup \{1, 2, ..., r - 1\}$. По формуле (2.3.3) число $(n + r - 1, r)$ - сочетаний без повторения равно C_{n+r-1}^r. Тогда

$$\hat{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n + r - 1)!}{r!(n - 1)!} = \frac{n(n + 1)...(n + r - 1)}{r!}. \qquad (2.3.5)$$

2.4. Бином Ньютона* и полиномиальная теорема

а) Бином Ньютона. Исторически название «бином Ньютона» несправедливо, ибо формулу $(a + b)^n$ знали еще среднеазиатские математики, начиная с Омара Хайяма** (около 1100 г.); в Европе до Ньютона ее знал Паскаль***. Заслуга Ньютона в том, что он обобщил эту формулу для нецелого показателя n. Итак,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 a^0 b^k + C_n^1 a^1 b^{n-1} + ... + C_n^l a^l b^{n-l} + ... + C_n^n a^n b^0. \quad (2.4.1)$$

Формула (2.4.1) легко доказывается методом математической индукции. Действительно, при $n = 1$: $(a + b)^1 = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a + b.$ Далее, предположив, что формула верна для $n - 1$, получаем

---

* Исаак Ньютон (1643 - 1727) - английский физик, астроном и математик.

** Гийас ад-Дин Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям (около 1048 - после 1122) - иранский математик, астроном и поэт.

*** Блез Паскаль (1623 - 1662) - французский математик.

$(a+b)^n=(a+b)^{n-1}(a+b)=a\cdot(a+b)^{n-1}+b\cdot(a+b)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k a^{k+1}b^{(n-1)-k}+\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k a^k b^{(n-1)-k+1}$. Проведем замену индекса суммирования $k=j-1,\ j=k+1$. Тогда $\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k a^{k+1}b^{(n-1)-k}=$ $=\sum_{j=1}^{n}C_{n-1}^{j-1}a^j b^{n-j}$. Отсюда $(a+b)^n=\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}a^k b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k a^k b^{n-k}$. Выровняем пределы изменения индексов суммирования в обеих суммах. Для этого введем дополнительно $C_{n-1}^{-1}=0,\ C_{n-1}^{n}=0,$ тогда $\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}a^k b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_{n-1}^{k-1}a^k b^{n-k}$ и $\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k a^k b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_{n-1}^k a^k b^{n-k}$. Отсюда

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\left(C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k\right)a^k b^{n-k}=\left\langle \begin{array}{c} C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k= \\ =\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!}+\dfrac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}= \\ =\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=C_n^k \end{array}\right\rangle=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Для n нецелого формула имеет вид $(1+x)^\alpha=1+\alpha\,x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\ldots$ при $|x|<1$. Биномиальное разложение служит основой для многих комбинаторных формул. Например,

1) $a=b=1$. Получим $\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$. Это число равно числу всех возможных неупорядоченных подмножеств множества S_n, состоящего из n элементов. Действительно, так как C_n^k число k- элементных подмножеств ((n,k) - сочетаний) множества S_n, то сумма в левой части есть число всех подмножеств.

2) $a=1,\ b=-1$. Отсюда $\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k=0$. Из этого равенства вытекает, что суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных и на нечетных местах, равны между собой, и каждая равна 2^{n-1}.

б) Полиномиальная теорема. Эта теорема является обобщением формулы бинома на случай k слагаемых.

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n=\sum_{\begin{cases} r_1\ge0,\,r_2\ge0,\ldots,\,r_k\ge0, \\ r_1+r_2+\ldots+r_k=n. \end{cases}}\frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot\ldots\cdot r_k!}a_1^{r_1}a_2^{r_2}\ldots a_k^{r_k}\ , \qquad (2.4.2)$$

где суммирование проводится по всем решениям уравнения $r_1+r_2+\ldots+r_k=n$ в целых неотрицательных числах, т. е. выражение $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n$ равно сумме всех возможных слагаемых вида $\frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot\ldots\cdot r_k!}a_1^{r_1}a_2^{r_2}\ldots a_k^{r_k}$, где $r_1+r_2+\ldots+r_k=n.$

Пример 1. Вычислим $(x+y+z)^3$. Раскрывая скобки последовательно, производя умножение многочлена на многочлен и приводя подобные члены, получим $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz.$ Всего в выражении десять членов. Этот же результат легко получается по полиномиальной формуле (2.4.2) при $n=3,\ k=3$. Система условий суммирования здесь имеет вид $\begin{cases} r_1\ge0,r_2\ge0,r_3\ge0, \\ r_1+r_2+r_3=3. \end{cases}$ Различных числовых коэффициентов тоже три: $\frac{3!}{3!\cdot 0!\cdot 0!}=1$, $\frac{3!}{2!\cdot 1!\cdot 0!}=3$, $\frac{3!}{1!\cdot 1!\cdot 1!}=6$. Для более удобного написания конечного результата лучше составить таблицу всех возможных комбинаций индексов r_1, r_2 и r_3.

r_1	r_2	r_3
3	0	0
0	3	0
0	0	3
2	1	0
2	0	1
1	2	0
0	2	1
1	0	2
0	1	2
1	1	1

Тогда $(x+y+z)^3 = 1\cdot\left(x^3+y^3+z^3\right)+3\cdot\left(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+xz^2+yz^2\right)+6\cdot xyz$, что то же самое, что было получено раньше.

2.5. Практическое занятие № 3. Правила суммы и произведения. Перестановки и сочетания. Свойства биномиальных коэффициентов

2.5.1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую из этих цифр можно использовать не более одного раза?

2.5.2. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на 5?

2.5.3. На одной из боковых сторон треугольника взято n точек, на другой m - точек. Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с точками, взятыми на противоположной стороне. а) Сколько точек пересечения этих прямых образуется внутри треугольника? б) На сколько частей делят треугольник эти прямые?

2.5.4. Сколько есть двузначных чисел, у которых обе цифры четные?

2.5.5. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

2.5.6. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется: а) хотя бы один туз; б) ровно один туз; в) не менее двух тузов г) ровно два туза?

2.5.7. Дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

2.5.8. В соревнованиях по гимнастике две команды имели одинаковое число участников. В итоге общая сумма баллов, полученных всеми участниками, равна 156. Сколько было участников, если каждый из них получил оценки только 8 или 9 баллов?

2.5.9. Расстояние от A до B - 999 км. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых расстояние от A до B записаны так:

| 0 | 999 |, | 1 | 998 |, | 2 | 997 |,…, | 999 | 0 |. Сколько среди этих столбов таких, на которых есть только две различные цифры?

2.5.10. В некотором царстве каждые два человека отличаются набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения царства (максимальное количество зубов у человека – 32).

2.5.11. В роте имеется три офицера и сорок солдат. Сколькими способами может быть выделен наряд, состоящий из одного офицера и трех солдат?

2.5.12. На рояле 88 клавиш. Сколько существует последовательностей из шести попарно различных звуков? (В последовательности звуки идут один за другим). Сколько существует аккордов из шести звуков? (Аккорд получается, если любые 6 клавиш нажаты одновременно).

2.5.13. Сколько членов получится после раскрытия всех скобок в выражении $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)(g+1)$?

2.5.14. Сколько существует чисел от 0 до 10^n, в которые не входят две подряд идущие друг за другом одинаковые цифры?

2.5.15. Сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, содержащей 52 карты, так, чтобы среди них были карты каждой масти?

2.5.16. Какова вероятность, купив один билет, угадать в спортлото (из 49): а) k номеров ($k = 1,2,...,6$); б) хотя бы k номеров?

2.5.17. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

2.5.18. Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет различного достоинства?

2.5.19. Сколько различных делителей имеет число а) 2310; б) 10!?

2.5.20. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дадут не более трех имен, а общее число имен равно 300?

2.5.21. На перекрестке A автомобилист разбил стекло левой фары (см. рис. 2.1), и теперь ему надо кратчайшим путем попасть в ремонтную мастерскую B, не попав при этом в пункт M. Сколькими способами он может выбрать маршрут?

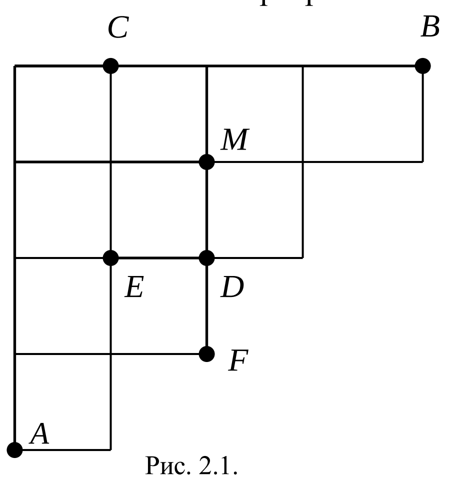


Рис. 2.1.

2.5.22. Международная комиссия состоит из 9 человек. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них нужно изготовить и как их разделить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся не менее 6 членов комиссии.

2.5.23. Определить сколько рациональных членов содержится в разложении: а) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{20}$; б) $\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{2}\right)^{100}$.

2.5.24. Найти коэффициент при t^k в разложении: а) $\left(2+t^4+t^7\right)^{15},\ k=17$; б) $\left(2+t-2t^3\right)^{20},\ k=10$.

2.5.25. Какое число больше $99^{50}+100^{50}$ или 101^{50}?

2.5.26. Пусть n и m - целые положительные числа. Доказать а) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n\cdot 2^{n-1}$; б) $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}$; в) $\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1)C_n^k=(n+1)\cdot 2^n$.

2.5.27. Доказать, что для любого $m=0,1,2,\ldots,n$ справедливо тождество $C_n^r=\sum\limits_{k=0}^{n} C_{n-m}^k\cdot C_m^{r-k}$.

2.5.28. Доказать, что $\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2i}\cdot 2^{n-2i}=\dfrac{3^n+1}{2}$.

2.5.29. Доказать тождества: а) $C_{2n-1}^{n-1}=\sum\limits_{i=1}^{n} C_{2n-i-1}^{n-1}$; б) $C_{2n}^{n-1}=\sum\limits_{i=1}^{n} C_{2n-i}^{n}$.

2.5.30. Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{C_{n-1}^{i-1}}{C_{2n-1}^{i}}=\dfrac{2}{n+1},\ n\ge 1$.

2.6. Метод рекуррентных соотношений

В комбинаторном анализе существует целый ряд подходов для изучения комбинаторных объектов и чисел.

1) **Теоретико - множественный подход.** Он связан с вычислениями мощностей конечных множеств. Для решения таких вопросов необходима дополнительная информация, т. е. надо заранее знать мощности некоторых подмножеств. К этому пункту относится, например, теорема и формула включения и исключения.

2) **Алгебраический подход.** Он основан на использовании вспомогательных просто получаемых комбинаторных тождеств для нахождения интересующих исследователя комбинаторных чисел. Пример - метод рекуррентных соотношений.

3) **Применение формул обращения.** Формулы обращения связывают между собой различные комбинаторные числа. Эти формулы могут быть получены самыми различными способами.

4) **Метод производящих функций.** Этот метод используется для перечисления комбинаторных чисел и установления комбинаторных тождеств.

Рассмотрим один пример алгебраического подхода - метод рекуррентных соотношений. Он состоит в том, что решение комбинаторной задачи с n предметами выражается через решение аналогичной задачи с меньшим числом предметов с помощью некоторого соотношения, которое называется рекуррентным (recurrence - возвращение). Пользуясь этим соотношением, искомую величину можно вычислить, исходя из того, что для небольшого количества предметов (одного, двух) решение задачи обычно очевидно или легко находится.

В качестве примера получим число сочетаний из n по r с повторениями. Соответствующая формула уже получена ранее, она имеет вид $\hat{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$. Получим ее теперь методом рекуррентных соотношений.

Докажем вначале вспомогательную формулу, выражающую одно из многочисленных свойств биномиальных коэффициентов:

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + C_{n-3}^{r-1} + ... + C_{r-1}^{r-1}. \qquad (2.6.1)$$

Покажем, что справедливо равенство $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$. Здесь C_n^r - общее число (n,r)- выборок из множества S_n с n элементами, C_{n-1}^r - число $(n-1,r)$- выборок, т. е. число выборок, не содержащих один (например, первый) элемент из множества S_n с n элементами (см. рис. 2.2). В этом случае n - множество S_n становится $n-1$ - множеством, так как первый элемент не выбирается, он фиксирован. C_{n-1}^{r-1} - число r - выборок из n - множества, содержащих первый элемент. Этот элемент в r множестве содержится всякий раз, т. е. фактически выбираются из $r-1$ элементов, кроме того первый элемент опять фиксирован и в множестве S_n, как в предыдущем случае, и он не выбирается из n - множтва, которое становится $n-1$ - множеством.

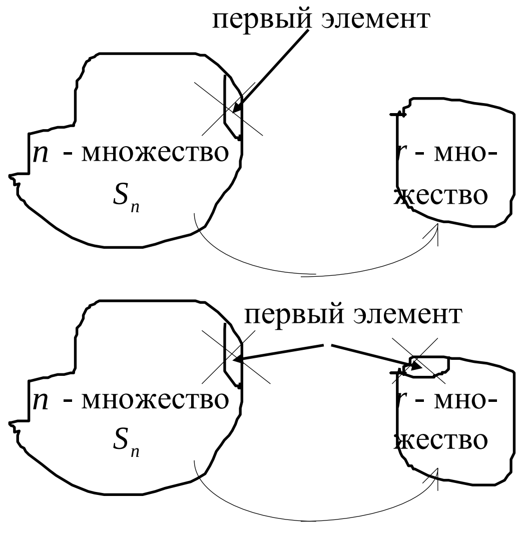


Рис. 2.2.

По правилу суммы $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$. Применим эту формулу последовательно $n-r$ раз. Получим $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$, $C_{n-1}^r = C_{n-2}^r + C_{n-2}^{r-1}$, $C_{n-2}^r = C_{n-3}^r + C_{n-3}^{r-1}, ...,$ $C_{r+1}^r = C_r^r + C_r^{r-1}$. Но $C_r^r = C_{r-1}^{r-1} = 1$, тогда окончательно $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + C_{n-3}^{r-1} + ... + C_r^{r-1} + C_{r-1}^{r-1}$.

Вернемся к доказательству исходного соотношения $\hat{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$. Зададим начальные условия. Для этого рассмотрим число сочетаний с повторениями для малых значений индексов. Очевидно, что $\hat{C}_n^1 = n$ и $\hat{C}_1^r = 1$. Действительно, $\hat{C}_n^1$ - число 1 - сочетаний из n элементов. Ясно, что из n элементов можно выбрать ровно n различных выборок, состоящих из одного элемента. $\hat{C}_1^r$ - число r - сочетаний из одного элемента. Для любого $r > 0$ из одного элемента можно получить только одно r - сочетание, именно выборку, составленную из r одинаковых элементов. Элементы здесь могут быть одинаковыми, так как рассматриваются выборки с повторениями.

Для вывода общей формулы нам потребуется еще одно вспомогательное соотношение $\hat{C}_n^r = \hat{C}_{n-1}^r + \hat{C}_n^{r-1}$. Иллюстрацией дальнейших рассуждений служит тот же рисунок 2.2, изображенный выше. Зафиксируем в S_n некоторый элемент. Тогда при выборе каждое r - сочетание либо содержит этот элемент, либо не содержит его. Если r - сочетание не содержит этот элемент, то он не должен вообще попасть в r - сочетание, следовательно, его надо исключить из множества S_n, т. е. в S_n остаются для выбора $n-1$ элементов. Отсюда число r - сочетаний с повторениями из $n-1$ элементов равно $\hat{C}_{n-1}^r$. Если r - сочетание уже содержит этот элемент, тогда остальные $r-1$ элементов этого сочетания можно выбрать из тех же n элементов множества S_n, так как допускаются любые повторения. Число способов такого выбора равно $\hat{C}_n^{r-1}$.

По правилу суммы $\hat{C}_n^r = \hat{C}_{n-1}^r + \hat{C}_n^{r-1}$. Применим теперь эту формулу для получения доказываемого исходного соотношения $\hat{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$. Именно $\hat{C}_n^2 = \hat{C}_{n-1}^2 + \hat{C}_n^1,\ \hat{C}_{n-1}^2 = \hat{C}_{n-2}^2 + \hat{C}_{n-1}^1,\ \hat{C}_{n-2}^2 = \hat{C}_{n-3}^2 + \hat{C}_{n-2}^1, ...,\ \hat{C}_2^2 = \hat{C}_1^2 + \hat{C}_2^1$. Отсюда получим $\hat{C}_n^2 = \hat{C}_n^1 + \hat{C}_{n-1}^1 + \hat{C}_{n-2}^1 + ... + \hat{C}_2^1 + \hat{C}_1^2 = \underbrace{n + (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1}_{\text{арифметическая прогрессия},\, d=1} = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2$.

Аналогично $\hat{C}_n^3 = \hat{C}_{n-1}^3 + \hat{C}_n^2,\ \hat{C}_{n-1}^3 = \hat{C}_{n-2}^3 + \hat{C}_{n-1}^2,\ \hat{C}_{n-2}^3 = \hat{C}_{n-3}^3 + \hat{C}_{n-2}^2, ...,\ \hat{C}_3^3 = \hat{C}_2^3 + \hat{C}_3^2,\ \hat{C}_2^3 = \hat{C}_1^3 + {}$ $+ \hat{C}_2^2$. Отсюда можно получить формулу для $\hat{C}_n^3$. Выполним аналогичные подстановки как в предыдущем случае, получим $\hat{C}_n^3 = \hat{C}_n^2 + \hat{C}_{n-1}^2 + \hat{C}_{n-2}^2 + ... + \hat{C}_2^2 + \hat{C}_1^3$. В данном случае лучше не суммировать отрезок числового ряда, а воспользоваться только что полученной формулой для предыдущего индекса $\hat{C}_n^2 = C_{n+1}^2$. Тогда $\hat{C}_n^3 = C_{n+1}^2 + C_n^2 + C_{n-1}^2 + ... + C_3^2 + C_2^2$, так как $\hat{C}_1^3 = 1 = C_2^2$. Но $C_{n+1}^2 + C_n^2 + ... + C_3^2 + C_2^2 = C_{n+2}^3$ по выведенной формуле (2.6.1). Таким образом, получена очередная формула $\hat{C}_n^3 = C_{n+2}^3$. Формулы для последующих индексов получаются совершенно аналогично. Видно, что доказательства с помощью рекуррентных соотношений весьма громоздкое и утомительное занятие.

2.7. Метод производящих функций

Этот метод не является элементарным, так как при его использовании приходится иметь дело с некоторыми понятиями теории функциональных рядов. Метод производящих функций является одним из самых развитых теоретических методов комбинаторного анализа и одним из самых сильных в приложениях. Главные идеи этого метода были высказаны в конце восемнадцатого века в работах Лапласа* по теории вероятностей. Для случаев с конечным числом исходов аппарат теории вероятностей чисто комбинаторный.

Рассмотрим произведение конечного числа линейных биномов $\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$.

Коэффициенты a_k в правой части равенства имеют вид $a_k = \sum_{\substack{i_1, i_2, ..., i_k = 1, \\ i_1 < i_2 < ... < i_k}}^{n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot ... \cdot x_{i_k}$. Это легко проверить, например, для случая малых n. Пусть $n = 2$. Тогда $(1 + x_1 t)(1 + x_2 t) = 1 + \underbrace{x_1 t}_{i_1 = 1,\, i_2 \text{ нет}} + \underbrace{x_2 t}_{\substack{i_2 = 1,\, i_1 \text{ нет}, \\ \text{так как нет } i_1 < 1}} + \underbrace{x_1 x_2 t^2}_{\substack{i_1 = 1,\, i_2 = 2, \\ i_1 < i_2}}$. Для $n > 2$ проверяется аналогично. В частном случае, когда $x_k = 1,\ k = \overline{1, n}$ в качестве коэффициентов a_k получим числа k - сочетаний, т. е.

$$(1 + t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k. \qquad (2.7.1)$$

В выражении (2.7.1) функция $f(t) = (1 + t)^n$ и числа C_n^k связаны взаимно однозначно. Функцию $f(t) = (1 + t)^n$ есть производящая функция последовательности C_n^k. Производящей функцией последовательности $\{a_k\}$ называется сумма степенного ряда $f_a(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$.

Оперировать с такой функцией гораздо удобнее и проще, особенно когда ее можно представить в простой аналитической форме. В то же время эти операции доставляют (производят) необходимую информацию о последовательности r - сочетаний. Идея применения метода производящих функций такова: необходимо вычислить все члены

---

* Пьер Симон Лаплас (1749 - 1827) - французский математик, механик и астроном.

некоторой последовательности $\{a_k\}$. С помощью рекуррентного соотношения для a_k или непосредственно из некоторых комбинаторных соображений вычисляют производящую функцию $f_a(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k$. Раскладывая затем $f_a(t)$ в ряд и находя коэффициенты при t^k, тем самым находят a_k.

Пример 1. Из формулы бинома Ньютона $f_a(t)=(1+t)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k t^k$. Таким образом, последовательность биномиальных коэффициентов имеет производящую функцию $(1+t)^n$, т. е.

$$\{C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n\}\to(1+t)^n. \qquad (2.7.2)$$

Пример 2. Пусть $a_k=a^k,\ k=0,1,...$ Тогда $\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k=\sum_{k=0}^{\infty}a^k t^k=1+at+a^2t^2+...+a^k t^k+$ $+...=1+(at)+(at)^2+...+(at)^k+...$. Это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q=at.$ Если $|q|=|at|<1$, то ряд сходится и его сумма $S=f_a(t)=\frac{1}{1-at}$. Итак,

$$\{1, a, a^2, a^3, ..., a^k, ...\}\to\frac{1}{1-at}\ \text{при}\ |at|<1. \qquad (2.7.3)$$

Пример 3. Рассмотрим формулу бинома Ньютона при действительном показателе $\alpha\in R.$ $(1+t)^\alpha=1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)}{k!}t^k+...$. Пусть $t=-t$ и $\alpha=-1$, тогда $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+...+t^k+...,$ т. е. $\{1,1,1,...,1,...\}\to\frac{1}{1-t}$. (2.7.4)

Если $t=-t$ и $\alpha=-n,$ то $\frac{1}{(1-t)^n}=1+nt+\frac{n(n+1)}{2!}t+...+\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!}t^k+...$. Но $n=C_n^1,\ \frac{n(n+1)}{2}=C_{n+1}^2,\ \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!}=C_{n+k-1}^k$ и так далее. Тогда $\frac{1}{(1-t)^n}=1+C_n^1 t+C_{n+1}^2 t^2+C_{n+2}^3 t^3...+C_{n+k-1}^k t^k+...$, т. е.

$$\{1, C_n^1, C_{n+1}^2, C_{n+2}^3, ..., C_{n+k-1}^k, ...\}\to\frac{1}{(1-t)^n}. \qquad (2.7.5)$$

Пример 4. Пусть $a_k=\begin{cases}0,\ 0\le k<r,\\ C_k^r,\ k\ge r.\end{cases}$ Тогда $f_a(t)=\frac{t^r}{(1-t)^{r+1}}$. Действительно,

$$f_a(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k=\sum_{k=r}^{\infty}a_k t^k=\sum_{k=r}^{\infty}C_k^r t^k=\left\langle\begin{matrix}k=r+i,\\ k=r,\ i=0.\end{matrix}\right\rangle=\sum_{i=0}^{\infty}C_{r+i}^r t^{r+i}=t^r\sum_{i=0}^{\infty}C_{r+i}^r t^i=\left\langle\begin{matrix}C_k^r=C_k^{k-r},\\ C_{r+i}^r=C_{r+i}^i.\end{matrix}\right\rangle=$$

$$=t^r\sum_{i=0}^{\infty}C_{r+i}^i t^i=\left\langle\begin{matrix}\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^k t^k=\frac{1}{(1-t)^n},\\ \sum_{i=0}^{\infty}C_{r+i}^i t^i=\frac{1}{(1-t)^{r+1}}.\end{matrix}\right\rangle=\frac{t^r}{(1-t)^{r+1}}.$$

Итак, для такой числовой последовательности получена производящая функция.

В комбинаторном анализе чаще всего используют три вида производящих функций: 1) обычные степенные; 2) экспоненциальные; 3) функции Дирихле*. Обычные производящие функции, несколько примеров которых только что разобрано, представляемые в виде

* Петер Густав Дирихле (1805 – 1859) – немецкий математик.

$f_a(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, соответствуют семействам последовательностей, элементы которых являются числами неупорядоченных (n,k)- выборок или функциями от них.

Введем несколько операций в классе производящих функций: $\{f_a(t)\}$ - класс обычных производящих функций $f_a(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$.

Суммой последовательностей $\{a\}=\{a_0,a_1,...\}$ и $\{b\}=\{b_0,b_1,...\}$ называется последовательность $\{c\}=\{a+b\}=\{a_0+b_0,a_1+b_1,...\}=\{c_0,c_1,...\}$, а суммой производящих функций $f_a(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ и $f_b(t)=\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ производящую функцию

$$f_c(t)= f_a(t)+ f_b(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k. \tag{2.7.6}$$

Произведением (или сверткой) последовательностей $\{a\}$ и $\{b\}$ называется последовательность $\{d\}=\{a\times b\}=\{d_0,d_1,...\}$, у которой

$$d_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + ... + a_r b_0,\ r=0,1,2,..., \tag{2.7.7}$$

а произведением (сверткой) производящих функций $f_a(t)$ и $f_b(t)$ - производящую функцию

$$f_d(t)= f_a(t)\times f_b(t)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k. \tag{2.7.8}$$

Формулы (2.7.7) нуждаются в пояснении. Эти коэффициенты получаются при перемножении рядов следующим образом

$$\begin{cases} r=0,\ d_0=a_0b_0, \\ r=1,\ d_1=a_0b_1+a_1b_0, \\ r=2,\ d_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0, \\ .... \\ r=k,\ d_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+...+a_{k-1}b_1+a_kb_0, \\ .... \end{cases} \tag{2.7.9}$$

Нуль в классе производящих функций $\{f_a(t)\}$ это $f_0(t)=0$; ей соответствует нулевая последовательность $\{0,0,0,...,0,...\}$.

Единица в классе производящих функций $\{f_a(t)\}$ это $f_e(t)=1$; ей соответствует единичная последовательность $\{1,0,0,...,0,...\}=e$.

Обратный относительно сложения (противоположный) элемент в классе производящих функций есть следующая функция $-f_a(t)= f_{-a}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-a_k)t^k$. Этой функции соответствует последовательность $\{-a_0,-a_1,...,-a_k,...\}$.

Обратный элемент относительно умножения в классе производящих функций есть функция $f_a^{-1}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{a}_k t^k$, ей соответствует последовательность $\{\tilde{a}\}=\{\tilde{a}_0,\tilde{a}_1,...\}$, причем $a\cdot\tilde{a}=e,\ a\neq 0.$ Так как $a\cdot\tilde{a}=e,\ a\neq 0$, то, учитывая формулы (2.7.9), получим систему

$$\begin{cases} a_0\tilde{a}_0 = 1, \\ a_1\tilde{a}_0 + a_0\tilde{a}_1 = 0, \\ a_2\tilde{a}_0 + a_1\tilde{a}_1 + a_0\tilde{a}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_k\tilde{a}_0 + a_{k-1}\tilde{a}_1 + a_{k-2}\tilde{a}_2 + \dots + a_0\tilde{a}_k = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Неизвестные здесь $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k, \dots$, количество неизвестных равно количеству уравнений.

Умножение производящей функции на действительное число α определяется по формуле

$$\alpha\ f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) t^k. \qquad (2.7.10)$$

2.8. Производящие функции для некоторых схем выбора

Производящая функция для (n, r)- сочетаний с ограниченным числом повторений. В этом случае для получения производящей функции нельзя воспользоваться произведением биномов вида $1 + x_k t$, то есть формулой $\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, поскольку всякий такой бином отражает лишь две возможности: элемент x_k множества либо не появляется в r- сочетании, либо появляется ровно один раз.

Пусть элемент x_k появляется в r- сочетаниях с повторениями $0, 1, 2, \dots, j$ раз, тогда точно i появлениям элемента x_k будет соответствовать одночлен $x_k^i t^i$, а по правилу суммы появления элемента x_k либо 0, либо 1,..., либо j раз должен соответствовать многочлен $1 + x_k t + x_k^2 t^2 + x_k^3 t^3 + \dots + x_k^j t^j$. Тогда производящая функция будет иметь вид

$$f(t) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + x_k t + x_k^2 t^2 + \dots + x_k^j t^j\right). \qquad (2.8.1)$$

Если нужно найти лишь число a_r соответствующих (n, r)- сочетаний, то необходимо положить $x_1 = x_2 = \dots = x_j = 1$ и

$$f(t) = \left(1 + t + t^2 + \dots + t^j\right)^n = \sum_{k=1}^{l} a_k t^k. \qquad (2.2.2)$$

Коэффициенты a_k будут здесь равны числу сочетаний из n элементов по k с j повторениями.

Пример 1. Рассмотрим сочетания из трех предметов 1, 2, 3; причем 1 и 2 могут встречаться не более двух раз, а 3 - не более одного раза.

Составим производящую функцию по формуле (2.8.1). Она будет равна

$$f(t) = \left(1 + x_1 t + x_1^2 t^2\right)\left(1 + x_2 t + x_2^2 t^2\right)\left(1 + x_3 t\right) = 1 + \left(x_1 + x_2 + x_3\right)t + \left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \right.$$
$$\left. + x_2^2\right)t^2 + \left(x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3\right)t^3 + \left(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3\right)t^4 + x_1^2 x_2^2 x_3 t^5.$$

Если положить $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, то получим $f(t) = 1 + 3t + 5t^2 + 5t^3 + 3t^4 + t^5$. Здесь коэффициент a_1 равен числу сочетаний из трех по одному элементу не более чем с двумя повторениями, a_2 - из трех элементов по два не более чем с двумя повторениями, a_3 - из трех по три элемента с ограничениями, что первый и второй элемент могут встречаться не более двух раз, а третий не более одного раза. Если же не приравнивать $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, то, например, коэффициент при t^3 равный $x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$ показывает «качественный» состав r- сочетаний с указанными повторениями: 112, 113, 122, 123, 223.

Аналогично коэффициент при t^5 - число r- сочетаний из трех элементов по пять, но с повторениями, тогда такое возможно. Именно, $a_5 = x_1^2 x_2^2 x_3$: 11223.

Производящая функция для (n,r)- сочетаний с неограниченным числом повторений. Найдем производящую функцию для (n,r)- сочетаний с условием, что хотя бы один элемент каждого вида появится в выборке. Очевидно, что $f_a(t)$ в этом случае будет иметь вид $f_a(t) = (t + t^2 + \ldots + t^k + \ldots)^n = [t(1 + t + \ldots + t^{k-1} + \ldots)]^n = t^n(1-t)^{-n} = t^n \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^k$. (2.8.3)

Упростим полученную формулу, сделав в ней замену индекса суммирования $n + k = r$, получим $f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k t^{n+k} = \sum_{r=n}^{\infty} C_{r-1}^{r-n} t^r = \left\langle \begin{matrix} \text{так как} \\ C_n^r = C_n^{n-r} \end{matrix} \right\rangle = \sum_{r=n}^{\infty} C_{r-1}^{(r-1)-(r-n)} t^r = \sum_{r=n}^{\infty} C_{r-1}^{n-1} t^r = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} t^k$.

Здесь $\sum_{k=0}^{n-1} C_{k-1}^{n-1} t^k = 0$. Следовательно, число искомых r- сочетаний равно нулю при $r < n$ и C_{r-1}^{n-1} при $r \geq n$. Подобным же образом в производящей функции можно учесть и другие требования, налагаемые на (n,r)- выборки.

2.9. Применение производящих функций для получения комбинаторных чисел

Применим теорию производящих функций и получим явные выражения чисел Фибоначчи*. Числа Фибоначчи B_n есть число способов расположить n знаков, из которых каждый нуль или единица, в последовательность, не содержащую двух нулей подряд. Эта последовательность задается рекуррентной формулой

$$\begin{cases} B_0 = 1,\ B_1 = 2, \\ B_n = B_{n-1} + B_{n-2},\ n \geq 2. \end{cases} \qquad (2.9.1)$$

Рассмотрим производящую функцию последовательности чисел Фибоначчи $f_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k \to \{B_0, B_1, \ldots, B_k, \ldots\}$. Умножим рекуррентное уравнение в формуле (2.9.1) на t^k и просуммируем полученное выражение от двух до бесконечности. Два числа B_0 и B_1 известны из начальных данных, поэтому необходимо отбросить индексы $k = 0$ и $k = 1$. В результате получим уравнение

$$\sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k = \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^k + \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^k \text{ или } \sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k = t\sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^{k-1} + t^2 \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^{k-2}.$$ Так как

$f_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \ldots + B_k t^k + \ldots$, то $\sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k = f_B(t) - B_0 - B_1 t = f_B(t) - 1 - 2t$.

$\sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^{k-1} = \left\langle \begin{matrix} k-1 = n, \\ k = 2, n = 1. \end{matrix} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} B_n t^n = f_B(t) - B_0 = f_B(t) - 1$. Аналогично $\sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^{k-2} =$
$= \left\langle \begin{matrix} k-2 = n, \\ k = 2, n = 0. \end{matrix} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n = f_B(t)$. Тогда $f_B(t) - 1 - 2t = t(f_B(t) - 1) + t^2 f_B(t)$ или $f_B(t)(1 - t - t^2) = 1 + 2t - t = 1 + t$. Окончательно производящая функция последовательности чисел Фибоначчи равна

$$f_B(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}. \qquad (2.9.2)$$

Так как обычный степенной ряд, представляющий производящую функцию, есть ряд

* Леонардо Фибоначчи Пизанский (1180 – 1240) – итальянский математик.

Тейлора* в окрестности точки $t = 0$, то полученное выражение можно разложить по общему правилу в ряд Тейлора и получить формулу общего члена B_k. При этом выгоднее использовать замены переменных и уже существующие разложения функций в степенные ряды. Поступим именно таким образом. Разложим дробь $\frac{1}{1-t-t^2}$ на простые слагаемые, для чего найдем сначала корни знаменателя. $1-t-t^2=0,\ t_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\ t_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ t_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Тогда

$$\frac{1}{1-t-t^2}=-\frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)}=\left(-\frac{1}{t-t_1}+\frac{1}{t-t_2}\right)\cdot\frac{1}{t_1-t_2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{t_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{t_1}}-\frac{1}{t_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{t_2}}\right).$$

Теперь воспользуемся известным разложением $\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k$. Итак, $\frac{1}{1-\frac{t}{t_1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_1}\right)^k,\left|\frac{t}{t_1}\right|<1$; $\frac{1}{1-\frac{t}{t_2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_2}\right)^k,\left|\frac{t}{t_2}\right|<1$. Тогда $\frac{1}{t_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{t_1}}=\frac{1}{t_1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_1}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)t^k$. Точно таким же образом $\frac{1}{t_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{t_2}}=\frac{1}{t_2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}\right)t^k$. Теперь можно записать разложение исходной дроби

$$\frac{1}{1-t-t^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}\right)t^k-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)t^k\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}-\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)t^k.$$

Умножим полученное выражение на $1+t$, тогда $\frac{1+t}{1-t-t^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}-\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)t^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}-\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)t^{k+1}\right]$. Поэтому коэффициент при t^k в разложении будет иметь вид $B_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1}{t_2^{k+1}}-\frac{1}{t_1^{k+1}}\right)+\left(\frac{1}{t_2^{k}}-\frac{1}{t_1^{k}}\right)\right]$.

Упростим эту формулу, подставив числовые значения t_1 и t_2.

$$\frac{1}{t_2^{k+1}}-\frac{1}{t_1^{k+1}}=\frac{t_1^{k+1}-t_2^{k+1}}{(t_1t_2)^{k+1}}=\frac{\frac{\left(-1-\sqrt{5}\right)^{k+1}}{2^{k+1}}-\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)^{k+1}}{2^{k+1}}}{(-1)^{k+1}}=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{k+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{k+1}}{2^{k+1}},$$ аналогично

$\frac{1}{t_2^{k}}-\frac{1}{t_1^{k}}=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{k}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{k}}{2^{k}}$. Отсюда

$$B_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{k+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{k+1}}{2^{k+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)^{k}-2\left(1-\sqrt{5}\right)^{k}}{2^{k+1}}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{k}\left(1+\sqrt{5}+2\right)-\left(1-\sqrt{5}\right)^{k}\left(1-\sqrt{5}+2\right)}{2^{k+1}}\right]=$$

$$=\left\langle\begin{array}{c}\left(1-\sqrt{5}\right)^2=1-2\sqrt{5}+5=\\=6-2\sqrt{5}=2\left(3-\sqrt{5}\right)\end{array}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{k}\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\left(1-\sqrt{5}\right)^{k}\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{2^{k+1+1}}\right]=$$

---

* Брук Тейлор (1685 – 1731) – английский математик.

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right].$$

Итак, окончательно $B_0=1,\ B_1=2,\ B_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right].$ (2.9.3)

2.10. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}, n=0,1,2,\ldots$. Последовательность $\{a_n\}$ называется возвратной, если для некоторого k и всех n выполняется соотношение вида

$$a_{n+k}+p_1a_{n+k-1}+p_2a_{n+k-2}+\ldots+p_ka_n=0, \tag{2.10.1}$$

где постоянные коэффициенты $p_i, i=1,2,\ldots,k$ не зависят от n. Многочлен

$$P(t)=t^k+p_1t^{k-1}+\ldots+p_k \tag{2.10.2}$$

называется характеристическим многочленом для возвратной последовательности $\{a_n\}$.

Перепишем (2.10.1) следующим образом

$$a_{n+k}=c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\ldots+c_ka_n,\ c_i=-p_i,\ i=\overline{1,k} \tag{2.10.3}$$

Выражение (2.20.3) позволяет вычислять очередной член последовательности по предыдущим k членам. Если задать начальные значения $a_0,a_1,\ldots,a_{k-1}$, то можно определить все другие члены последовательности. Соотношение (2.10.3) часто называют однородным линейным рекуррентным соотношением.

Найдем формулу общего члена a_n из уравнения (2.10.3). Для этого достаточно найти производящую функцию последовательности $\{a_n\}$ - функцию $f_a(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k$. Введем вспомогательный многочлен $L(t)=1-c_1t-c_2t^2-\ldots-c_kt^k$ и рассмотрим произведение $f_a(t)\cdot L(t)=C(t)$. Так как $f_a(t)\cdot L(t)=(a_0+a_1t+\ldots+a_kt^k+\ldots+a_nt^n+\ldots)(1-c_1t-c_2t^2-\ldots-c_kt^k)=$ $=a_0+(a_1-c_1a_0)t+(a_2-c_1a_1-c_2a_0)t^2+\ldots+(a_k-c_1a_{k-1}-c_2a_{k-2}-\ldots-c_ka_0)t^k+\ldots+(a_n-c_1a_{n-1}-$ $-c_2a_{n-2}-\ldots-a_ka_{n-k})t^n+\ldots$, то видно, что степень $C(t)$ не превышает $k-1$, так как коэффициенты при $t^{n+k}, k=0,1,\ldots$ будут равны нулю в силу уравнения (2.10.3).

Пусть характеристическое уравнение (2.10.2) имеет простые (может быть кратные) корни, т. е. допускает разложение вида $P(t)=(t-t_1)^{\alpha_1}(t-t_2)^{\alpha_2}\ldots(t-t_k)^{\alpha_k}, \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=k$.

Тогда $P\left(\frac{1}{t}\right)\cdot t^k=\left[\left(\frac{1}{t}\right)^k+p_1\left(\frac{1}{t}\right)^{k-1}+\ldots+p_{k-1}\frac{1}{t}+p_k\right]t^k=1-c_1t-\ldots-c_kt^k=L(t)$. Отсюда

$L(t)=t^k\left(\frac{1}{t}-t_1\right)^{\alpha_1}\left(\frac{1}{t}-t_2\right)^{\alpha_2}\ldots\left(\frac{1}{t}-t_k\right)^{\alpha_{k1}}=(1-t_1t)^{\alpha_1}(1-t_2t)^{\alpha_2}\ldots(1-t_kt)^{\alpha_k}, \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=k$ и характеристическую функцию можно представить в виде

$$f_a(t)=C(t)/L(t)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\alpha_i}\frac{\beta_{i,n}}{(1-t_it)^n}. \tag{2.10.4}$$

Так как по формуле (2.7.5) $\frac{1}{(1-t)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k}t^k$, то $\frac{1}{(1-t_it)^n}=\beta\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k}t_i^kt^k$, и, следовательно,

$$f_a(t)=C(t)/L(t)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\alpha_i}\beta_{i,n}\sum_{j=0}^{\infty}C_{n+j-1}^{j}t_i^jt^j. \tag{2.10.5}$$

Формула (2.10.5) дает разложение производящей функции последовательности $\{a_n\}$. Для нахождения формулы общего члена a_n необходимо найти коэффициент при t^n в разложении (2.10.5).

Пример 1. Найти общий член последовательности $\{a_n\}$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0, a_0 = 2, a_1 = 1$.

Перепишем исходное рекуррентное соотношение в виде (2.10.3) $a_{n+1} = 4a_{n+1} - 3a_n, n = 0,1,2,...$ Характеристический многочлен $L(t)$ имеет вид $L(t) = 1 - 4t + 3t^2$. Найдем $C(t)$. $C(t) = f_a(t) \cdot L(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n + ... - 4a_0 t - 4a_1 t^2 - ... - 4a_n t^{n+1} - ... + 3a_0 t^2 + + 3a_1 t^3 + ... + 3a_n t^{n+2} + ... = a_0 + (a_1 - 4a_0)t = 2 - 7t$, так как $a_0 = 2$ и $a_1 = 1$.

Тогда $f_a(t) = C(t) \big/ L(t) = \dfrac{2-7t}{(1-t)(1-3t)} = \dfrac{A}{1-t} + \dfrac{B}{1-3t}$. Методом неопределенных коэффициентов получим $(A+B) + (-3A - B) \equiv 2 - 7t \rightarrow \begin{cases} A + B = 2, \\ 3A + B = 7 \end{cases} \rightarrow A = 2.5, B = -0.5$.

$f_a(t) = \dfrac{2.5}{1-t} - \dfrac{0.5}{1-3t} = 2.5\sum_{k=0}^{\infty} t^k - 0.5\sum_{k=0}^{\infty} 3^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(2.5 - 0.5 \cdot 3^k\right)t^k$. Отметим, что этот пример может быть решен методом, изложенным в подразд. 2.9. Действительно, если $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$, то $\dfrac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} t^{n+2} - \dfrac{4}{t}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$, $\dfrac{1}{t^2}\sum_{j=2}^{\infty} a_j t^j - \dfrac{4}{t}\sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$, $\dfrac{1}{t^2}\left(f_a(t) - a_0 - a_1 t\right) - \dfrac{4}{t}\left(f_a(t) - a_0\right) + 3f_a(t) = 0$, $f_a(t) - 2 - t - 4tf_a(t) + 8t + 3t^2 f_a(t) = 0$, $f_a(t) = \dfrac{2-7t}{1-4t+3t^2} = \dfrac{2-7t}{(1-t)(1-3t)}$, т. е. получен тот же самый результат.

Докажем теперь несколько положений, позволяющих находить общее решение рекуррентных соотношений.

Во-первых, очевидно, что возвратная последовательность (2.10.1) полностью определяется заданием ее первых k членов. Действительно, если $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ уже заданы, то $a_k = -p_1 a_{k-1} - p_2 a_{k-2} - ... - p_k a_0$, $a_{k+1} = -p_1 a_k - p_2 a_{k-1} - ... - p_k a_1, \ldots,$ $a_{k+n} = -p_1 a_{n+k-1} - p_2 a_{n+k-2} - ... - p_k a_n$.

Во-вторых, если t является корнем характеристического многочлена (2.10.2), то последовательность $\{t^n\}$ удовлетворяет соотношению (2.10.1), т. е. $ct^{n+k} + p_1 ct^{n+k-1} + ... + p_k ct^n = 0$. Но $ct^n\left(t^k + p_1 t^{k-1} + ... + p_k\right) = 0$, ибо t есть корень многочлена (2.10.2) и тогда $t^k + p_1 t^{k-1} + ... + p_k = 0$.

В-третьих, рассмотрим $t_1, t_2, ..., t_k$ простые (не кратные) корни характеристического многочлена (2.10.2). Тогда общее решение рекуррентного соотношения (2.10.1) имеет вид

$$a_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n + ... + c_k t_k^n, \tag{2.10.6}$$

где $c_1, c_2, ..., c_k$ - подходящие константы. В самом деле, то, что $a_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n + ... + c_k t_k^n$ удовлетворяет (2.10.1) следует из того, что $t_i, i = \overline{1,k}$ является корнем характеристического уравнения и, следовательно, удовлетворяет (2.10.1) и из того, что если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют (2.10.1), то и последовательность $\{d_n\}, d_n = \alpha a_n + \beta b_n$ ему удовлетворяет при любых α и β.

Кроме того, любая последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая (2.10.1) может быть представлена в виде (2.10.6). Эта последовательность полностью определяется своими первыми членами $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$, тогда, если для любых $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ существует единственный набор чисел $c_1, c_2, ..., c_k$ таких, что

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + ... + c_k = a_0, \\ c_1 t_1 + c_2 t_2 + ... + c_k t_k = a_1, \\ .... \\ c_1 t_1^{k-1} + c_2 t_2^{k-1} + ... + c_k t_k^{k-1} = a_{k-1}, \end{cases} \qquad (2.10.7)$$

то a_n может быть представлена в виде (2.10.6).

Определитель системы (2.10.7) есть определитель Вандермонда*. Он равен $\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ t_1 & t_2 & ... & t_k \\ ... & ... & ... & ... \\ t_1^{k-1} & t_2^{k-1} & ... & t_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod\limits_{1 \le i < j \le k} (t_i - t_j)$ и не равен нулю, если $t_i \ne t_j$ при $i \ne j$, что в нашем случае выполняется. Таким образом, система линейных уравнений (2.10.7) имеет единственное решение относительно $c_1, c_2, ..., c_k$.

Наконец, в-четвертых, можно показать, что если t_i есть корень многочлена (2.10.2) кратности α_i, то общее решение рекуррентного соотношения (2.10.1) имеет вид

$$a_n = \sum_{i=1}^{r} \left(c_{i,1} + c_{i,2} n + ... + c_{i,\alpha_i} n^{\alpha_i - 1} \right) t_i^n, \qquad (2.10.8)$$

где $c_{i,j}, i = \overline{1,r}, j = \overline{1,\alpha_i}$ произвольные константы, r - количество кратных корней.

Пример 2. Найдем общее решение для примера 1. Характеристический многочлен $P(t) = t^2 - 4t + 3$ имеет корни $t_1 = 1, t_2 - 3$. Тогда по формуле (2.10.6) получаем $a_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n = c_1 + c_2 \cdot 3^n$.

Неоднородное линейное рекуррентное соотношение имеет вид

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n + b_n, \qquad (2.10.9)$$

где b_n есть функция от n. Как и в теории линейных дифференциальных уравнений общее решение соотношения (2.10.9) есть сумма любого частного его решения и общего решения уравнения (2.10.1). Общих способов определения частного решения нет, можно решить уравнение (2.10.9) лишь для некоторых специальных значений b.

Способ решения реконструирует производящую функцию последовательности $\{a_n\}$ и похож на способ, изложенный в подразд. 2.9.

Пример 3. Решить неоднородное рекуррентное соотношение $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = (-1)^n$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} t^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} t^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^t, \qquad \frac{1}{t^2}\sum_{j=2}^{\infty} a_j t^j - \frac{3}{t}\sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^t.$$

$$\frac{1}{t^2}\left(f_a(t) - a_0 - a_1 t\right) - \frac{3}{t}\left(f_a(t) - a_0\right) + 2 f_a(t) = \frac{1}{1+t}, \qquad f_a(t) - 1 - 2t - 3t\left(f_a(t) - 1\right) + 2t^2 f_a(t) = \frac{t^2}{1+t},$$

$$f_a(t) = \frac{1}{(1+t)(1 - 3t + 2t^2)} = \frac{1}{(1+t)(t-1)(t-0.5)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-0.5}, \quad A - 3At + 2At^2 + Bt^2 +$$

---

* Александр Теофиль Вандермонд (1735 - 1796) – французский математик.

$$+0.5Bt-0.5B+Ct^2\equiv 1\to\begin{cases}A-0.5B-C=1,\\-3A+0.5B=0,\\2A+B+C=0\end{cases}\to A=\frac{1}{12},B=\frac{1}{2},C=-\frac{2}{3}.$$

$$f_a(t)=\frac{1}{12(t+1)}+\frac{1}{2(t-1)}-\frac{2}{3(t-0.5)}=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}t^n+\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}2^n t^n=$$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{12}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{2^{n+2}}{3}\right]t^n$. Отсюда $a_n=\dfrac{(-1)^n+6+2^{n+4}}{12}$.

2.11. Экспоненциальные производящие функции

Они соответствуют упорядоченным (n,r)- выборкам или (n,r)- перестановкам. Из определения упорядоченных и неупорядоченных (n,r)- выборок ясно, что первых в $r!$ раз больше чем вторых. Поэтому производящая функция в этом случае записывается в виде

$$(1+t)^n=\sum_{k=0}^{n}P(n,k)\frac{t^k}{k!},\qquad (2.11.1)$$

где $P(n,r)$ - число (n,k)- перестановок из n элементов, то есть $P(n,k)=A_n^k$ в принятых обозначениях.

В случаях, когда допускаются повторения элементов необходимо в левой части формулы (2.11.1) биномы $(1+t)$ заменить на соответствующие многочлены вида $1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+...,$ если никакие ограничения на повторные появления не наложены, или многочлены вида $\left(1+\frac{t_1}{1!}+...+\frac{t_1^{k_1}}{k_1!}\right)\left(1+\frac{t_2}{1!}+...+\frac{t_2^{k_2}}{k_2!}\right)...\left(1+\frac{t_l}{1!}+...+\frac{t_l^{k_l}}{k_l!}\right)=$ $=\prod_{j=1}^{l}\left(1+\frac{t_j}{1!}+...+\frac{t_j^{k_j}}{k_j!}\right)$, если соответствующий элемент допускает $k_1,k_2,...,k_l$ повторений в выборках. Представление этого произведения в виде ряда по степеням t дает в качестве коэффициентов при $\frac{t^k}{k!}$ числа k- перестановок, допускающих указанные выше повторения.

Название экспоненциальная применяется в силу того, что производящая функция для k- перестановок с неограниченным числом повторений из n элементов имеет вид

$$\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...\right)^n=\left(e^t\right)^n=e^{nt}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nt)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}n^k\frac{t^k}{k!}.\qquad (2.11.2)$$

Так как производящие функции (и простая и экспоненциальная) представляют собой степенной ряд, то в области его сходимости $(-R,R)$ этот ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать и, следовательно, получать новые степенные ряды и новые производящие функции. Например, возьмем $1+t+t^2+...=\sum_{k=0}^{\infty}t^k=\frac{1}{1-t}.$ Почленным интегрированием этого ряда в области $|t|<1$ получаем выражение для производящей функции

$$-\ln(1-t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k},\qquad (2.11.3)$$

то есть $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{k},...\right\}\to-\ln(1-t).$

2.12. О приложениях теории производящих функций к теории вероятностей

Исторически сложилось так, что прежде всего комбинаторные методы нашли применение в теории вероятностей и математической статистике. В современной аксиоматической теории вероятностей сами вероятности мыслятся лишь в связи с пространствами элементарных событий. Комбинаторные методы находят себе место в теории вероятностей именно в той ее части, когда пространства элементарных событий дискретны. Можно даже говорить о теоретико - вероятностных интерпретациях определенной части комбинаторного анализа.

В самом деле (n, r)- выборки могут быть интерпретированы различными урновыми схемами. Случаи, когда допускаются повторения элементов в выборках, соответствуют урновым схемам с возвращением. Одна из простейших производящих функций в теории вероятностей связана с бросанием монеты и другими событиями с двумя исходами: $q + pt,\ p + q = 1$. Для n независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли*) производящей функцией будет $f(t) = (q + pt)^n,\ p + q = 1$.

Производящая функция бросания одной шестигранной кости с равновероятными выпадениями очков имеет вид: $f(t) = \frac{1}{6}\left(t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6\right) = \frac{t}{6} \cdot \frac{1 - t^6}{1 - t}$.

Комбинаторные задачи о размещениях в их теоретико - вероятностной трактовке приводят к введению различных моментов и функций накопления. Это также верно и для теоретико - числовых интерпретаций и для задач технической автоматики.

2.13. Практическое занятие № 4. Производящие функции и рекуррентные соотношения

2.13.1. Найти производящие функции следующих последовательностей:

а) $a_n = n\alpha^n, n = 0,1,2,...$; б) $a_n = \begin{cases} 0, n = 0, \\ \dfrac{\alpha^n}{n!}, n = 1,2,... \end{cases}$; в) $a_n = n^2, n = 0,1,2,...$;

г) $a_n = \begin{cases} 1, n = 0,1,...N, \\ 0, n > N \end{cases}$; д) $a_n = \sin \alpha n, n = 0,1,2,...$

2.13.2. Найти производящую функцию последовательности $\{a_n\}$ через производящую функцию последовательности $\{b_n\}$, если

а) $a_n = \begin{cases} 0, n = 0, \\ b_{n-1}, n = 1,2,... \end{cases}$; б) $a_n = \sum_{i=0}^{n} b_i, n = 0,1,2,...$; в) $a_n = \begin{cases} 0, n = 0,1,...,k-1, \\ b_{n-k}, n \ge k \end{cases}$;

г) $a_n = b_{n+1} - b_n, n = 0,1,2,...$

2.13.3.Найти производящую функцию последовательности $\{2(n-5) + 7^{n+2}\}$.

2.13.4. Найти экспоненциальную производящую функцию последовательности $\{a_n\}$, выраженную через производящую функцию последовательности $\{b_n\}$, если

а) $a_n = b_{n+1}, n = 0,1,2,...$; б) $a_n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \cdot b_{n-r} \cdot g_r$;

2.13.5. С помощью тождеств, связывающих производящие функции, вывести следующие тождества для биномиальных коэффициентов:

---

* Яков Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик.

а) $(1+t)^n \cdot (1+t)^m = (1+t)^{n+m}$, $\sum_{r=0}^{k} C_n^r \cdot C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$; б) $(1-t)^{-1-n} \cdot (1-t)^{-1-m} = (1-t)^{-2-n-m}$, $\sum_{r=0}^{k} C_{n+r}^n \cdot C_{m+k-r}^m = C_{n+m+k+1}^k$.

2.13.6. Найти общий член a_n последовательности, для которой функция $f_a(t)$ является производящей:

а) $f_a(t)=(q+pt)^m$; б) $f_a(t)=\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-m}$; в) $f_a(t)=arctgt$; г) $f_a(t)=\int_0^t e^{-x^2}dx$.

2.13.7. Применить технику производящих функций для нахождения суммы чисел:

а) $1^2+2^2+...+n^2=\sum_{i=0}^{n} i^2$; б) $1^3+2^3+...+n^3=\sum_{i=0}^{n} i^3$.

2.13.8. Сколькими способами можно разменять 10-копеечную монету монетами 1, 2, 3 и 5 копеек при условии, что каждая из разменных монет присутствует в двух экземплярах?

2.13.9. Сколькими способами выпуклый $(n+2)$-угольник можно разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри $(n+2)$-угольника? Вывести рекуррентное соотношение для $\{a_n\}$, где a_n - число способов разбиения $(n+2)$-угольника и разрешить это соотношение.

2.13.10. Решить рекуррентные соотношения:

а) $a_{n+3}=3a_{n+2}-a_{n+1}+3a_n$, $a_0=1,\ a_1=3,\ a_2=8$.

б) $a_{n+3}+a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0,\ a_0=1,\ a_1=2,\ a_2=3$;

в) $a_{n+2}\pm 9a_n=0,\ a_0=1,\ a_1=0$.

2.13.11. Решить неоднородные рекуррентные соотношения:

а) $a_{n+1}=a_n+n,\ a_0=1$; б) $a_{n+2}=a_{n+1}-\frac{1}{4}a_n+2^{-n},\ a_0=1,\ a_1=\frac{3}{2}$.

2.13.12. Найти общее решение рекуррентных соотношений:

а) $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$; б) $a_{n+2}=a_{n+1}-\frac{1}{4}a_n$.

2.13.13. Пусть $f_a(t)$ и $f_b(t)$ - производящие функции последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно, и пусть $f_a(t)\cdot f_b(t)=1$. Найти $\{b_n\}$ и $f_b(t)$, если $a_n=C_m^n$.

2.13.14. Найти производящую функцию $f_a(t)$ для последовательности $\{a_n\}$, если a_n - число решений в целых неотрицательных числах уравнения $2x+3y+5z=n$.

2.13.15. Пусть $a_n=\sum_{j=0}^{n} C_{n+j}^{2j}$, $b_n=\sum_{j=0}^{n-1} C_{n+j}^{2j+1}$, $n=0,1,2,...$, а $f_a(t)$ и $f_b(t)$ - соответствующие производящие функции. Показать, что а) a_n и b_n связаны соотношениями вида $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_{n+1}, \\ b_{n+1}=b_n+a_n,\ a_0=1,\ b_0=0; \end{cases}$ б) $f_a(t)$ и $f_b(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} f_a(t)-1=tf_a(t)+f_b(t), \\ f_b(t)=tf_a(t)+tf_b(t) \end{cases}$$ и найти $f_a(t)$ и $f_b(t)$.

2.14. Метод включений и исключений

Содержание комбинаторного анализа не исчерпывается подсчетом числа решений соответствующих задач. Не менее важное место в нем занимают проблемы возможности или невозможности осуществления требуемых выборок или расположений элементов. Логическая сущность метода включения и исключения определяется тем, что он применяется к важной задаче разделения множеств на подмножества в зависимости от того, обладают ли их элементы определенной совокупностью свойств или нет.

Подсчет числа элементов объединения множеств. Рассмотрим сначала простую задачу о нахождении числа элементов объединения множеств. Будем обозначать через $n(A)$ количество элементов множества A. Основная формула, которой пользуются при нахождении числа элементов объединения двух множеств такова (см. рис 2.3):

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B). \qquad (2.14.1)$$

Эта формула совершенно очевидна из диаграммы Эйлера - Венна. С помощью формулы (2.14.1) можно получить формулу для числа элементов объединения любого числа множеств. Например, для трех элементов имеем

$$\begin{aligned} N(A\cup B\cup C)&=N\{A\cup(B\cup C)\}=N(A)+\\ &+N(B\cup C)-N\{A\cap(B\cup C)\}=N(A)+\\ &+N(B\cup C)-N\{(A\cap B)\cup(A\cap C)\}=N(A)+\\ &+N(B)+N(C)-N(B\cap C)-\{N(A\cap B)+\\ &+N(A\cap C)-N((A\cap B)\cap(A\cap C))\}=N(A)+\\ &+N(B)+N(C)-N(B\cap C)-N(A\cap B)-\\ &-N(A\cap C)+N(A\cap B\cap A\cap C)=N(A)+\\ &+N(B)+N(C)-N(A\cap B)-N(A\cap C)-\\ &-N(B\cap C)+N(A\cap B\cap C). \end{aligned}$$

Эту формулу тоже еще можно изобразить с помощью диаграммы (см. рис. 2.3). Для случая n слагаемых аналогичная формула доказывается методом математической индукции.

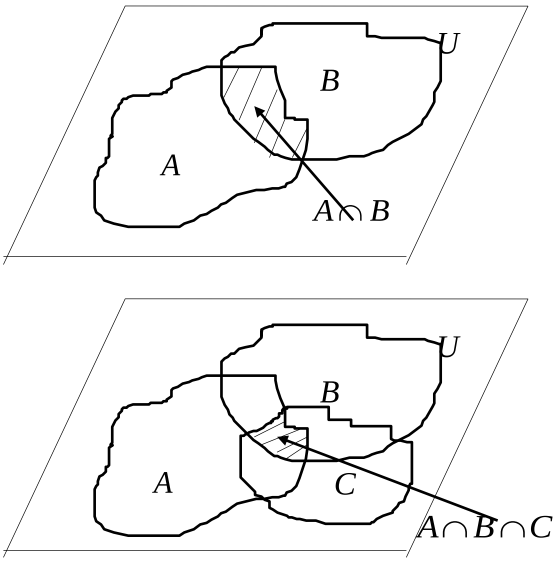


Рис. 2.3.

Теорема 2.3. **Если** $A_1, A_2,..., A_n$ **- некоторые множества и** $N(A_1)=|A_1|, N(A_2)=|A_2|,..., N(A_n)=|A_n|$, **то** $N(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)=N(A_1)+N(A_2)+...$
$+N(A_n)-\{N(A_1\cap A_2)+N(A_1\cap A_3)+...+N(A_{n-1}\cap A_n)\}+\{N(A_1\cap A_2\cap A_3)+N(A_1\cap A_2\cap A_4)+...$
$...+N(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)\}+...+(-1)^{n-1}N(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n).$ (2.14.2)

Формулу (2.14.2) можно обобщить и подсчитывать не только количество элементов данных множеств. Пусть дано n - множество S_n некоторых элементов и k - множество свойств: $p_1, p_2,..., p_k$, которыми элементы множества S_n могут как обладать, так и не обладать. Выделим какую-либо r - выборку свойств $(p_{i_1}, p_{i_2},..., p_{i_r})$.

Число элементов $s\in S_n$, обладающих всеми r выбранными свойствами обозначим через $n(p_{i_1}, p_{i_2},..., p_{i_r})$. Отсутствие у элемента какого-либо свойства p_i будем обозначать $\overline{p_i}$. Тогда, например, запись $n(p_1, \overline{p_2}, p_3)$ означает число элементов, обладающих свойствами p_1 и p_3 и не обладающих свойством p_2.

а) Пусть имеется одно свойство p, тогда $n(\overline{p}) = n - n(p)$.

б) Имеется конечное число свойств $p_1, p_2, ..., p_k$, несовместимых друг с другом. Тогда опять $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_k}) = n - \sum_{i=1}^{k} n(p_i)$.

в) Элементы обладают комбинациями различных свойств. Тогда справедлива теорема, аналогичная теореме 2.3.

Теорема 2.4. **Если даны n - множество элементов и k - множество свойств p_i, $i = \overline{1, k}$ совместимых между собой, тогда**

$$n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_k}) = n - \sum_{i=1}^{k} n(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le k} n(p_i, p_j) - \sum_{1 \le i < j < l \le k} n(p_i, p_j, p_l) + ... + (-1)^k n(p_1, p_2, ..., p_k). \tag{2.14.3}$$

Доказательство. Теорема может быть доказана с помощью простейших рассуждений, состоящих в попеременном отбрасывании и возвращении подмножеств. Применим, однако, метод математической индукции.

$k = 1$, $n(\overline{p}) = n - n(p)$. Эта формула очевидна. Пусть теорема верна для $k-1$ свойств, т. е.

$$n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_{k-1}}) = n - \sum_{i=1}^{k-1} n(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le k-1} n(p_i, p_j) - \sum_{1 \le i < j < l \le k-1} n(p_i, p_j, p_l) + ... + (-1)^{k-1} n(p_1, p_2, ..., p_{k-1}). \tag{2.14.4}$$

Перейдем к случаю, когда имеется k свойств. Так как $n(\overline{p}) = n - n(p)$, то по аналогии можно написать $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_{k-1}}, \overline{p_k}) = n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_{k-1}}) - n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_{k-1}}, p_k)$. Применим соотношение (2.14.4) для числа $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_{k-1}}, p_k)$. Получим следующую формулу, которую обозначим (2.14.5)

$$n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_{k-1}}, p_k) = n(p_k) - \sum_{i=1}^{k-1} n(p_i, p_k) + \sum_{1 \le i < j \le k-1} n(p_i, p_j, p_k) + ... + (-1)^{k-1} n(p_1, p_2, ..., p_{k-1}, p_k).$$

Прокомментируем эту формулу. В ней $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_{k-1}}, p_k)$ - число элементов, обладающих свойством p_k и одновременно не обладающих свойствами $p_1, p_2, ..., p_{k-1}$; $n(p_k)$ - число элементов, обладающих только свойством p_k. $\sum_{i=1}^{k-1} n(p_i, p_k)$ - число элементов, обладающих свойствами p_i и p_k одновременно и так далее. Ясно, что для того чтобы получить $n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_{k-1}}, p_k)$ из общего числа элементов со свойством p_k надо вычесть сначала число элементов, обладающих свойствами p_i и p_k. Однако при этом элементы, имеющие три свойства: именно p_k и, скажем, p_i и p_j будут исключены дважды (сначала как элементы со свойствами p_i и p_k, затем как элементы со свойствами p_j и p_k). Значит надо возвратить все элементы, обладающие тремя свойствами, то есть прибавить $\sum_{1 \le i < j \le k-1} n(p_i, p_j, p_k)$ и так далее. Вычтем теперь из (2.14.4) формулу (2.14.5), получим

$$n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_{k-1}}) - n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_{k-1}}, p_k) = n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_k}) = n - \left[\sum_{i=1}^{k-1} n(p_i) + n(p_k) + \right]$$
$$+ \left[\sum_{1 \le i < j \le k-1} n(p_i, p_j) + \sum_{i=1}^{k-1} n(p_i, p_k)\right] + ... - (-1)^{k-1} n(p_1, p_2, ..., p_{k-1}, p_k) =$$
$$= n - \sum_{i=1}^{k} n(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le k} n(p_i, p_j) + ... + (-1)^k n(p_1, p_2, ..., p_{k-1}, p_k).$$

Характер доказательства этой теоремы таков, что его можно применить для любой комбинации свойств, как выполняющихся, так и не имеющих места. Таким образом, в левой части доказанной формулы может стоять не только $n\left(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_k}\right)$, но и, например, $n\left(p_1, \overline{p_2}, p_3, \overline{p_4}\right)$. Теорема формулируется при этом относительно совокупности свойств p_2 и p_4 с обязательным выполнением свойств p_1 и p_3 следующим образом:

$$n\left(p_1, \overline{p_2}, p_3, \overline{p_4}\right) = n(p_1, p_3) - n(p_1, p_3, p_2) - n(p_1, p_3, p_4) + n(p_1, p_3, p_2, p_4). \qquad (2.14.6)$$

Пример 1. В комнате несколько человек, знающих хотя бы один из трех языков. Шестеро знают английский, шестеро - немецкий, семеро - французский. Четверо знают английский и немецкий, трое - немецкий и французский, двое - французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек в комнате? Сколько из них знают только английский язык?

Задачу можно решить традиционным способом «вычерпывания» множеств без применения формулу включений и исключений. Перепишем условие задачи более компактно в виде таблицы

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
6	6	7	4	3	2	1

Пусть из комнаты ушел человек, знающий все три языка, тогда получим

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
5	5	6	3	2	1	0

Пусть теперь ушли три человека (из оставшихся), знающие одновременно английский и немецкий языки; число людей, знающих другие пары языков, не изменится.

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
2	2	6	0	2	1	0

Пусть уйдут двое, знающие немецкий и французский.

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
2	0	4	0	0	1	0

Наконец, уходит человек, знающий французский и английский языки. Окончательно получим

А	Н	Ф	АН	НФ	ФА	АНФ
1	0	3	0	0	0	0

Итак, в комнате остался один человек, знающий только английский язык, и трое, знающих только французский язык. Кроме того, вышло семь человек, значит, сначала в комнате было одиннадцать человек.

Решим теперь эту же задачу методом включений и исключений. Пусть свойство p_A - знать английский язык, аналогично p_H и p_Φ - свойства, характеризующие знание немецкого и французского языков. По условию задачи общее число людей составляют все, знающие хотя бы один язык; не знающих хотя бы один язык в задаче нет. По формуле (2.14.2) имеем

$$n = n(p_A) + n(p_H) + n(p_\Phi) - n(p_A, p_H) - n(p_A, p_\Phi) - n(p_H, p_\Phi) + n(p_A, p_H, p_\Phi) =$$
$$= 6 + 6 + 7 - (4 + 3 + 2) + 1 = 19 - 9 + 1 = 11.$$

Число людей, знающих только английский язык, это $n\left(p_A, \overline{p}_H, \overline{p}_Ф\right)$. По формуле (2.14.6) $n\left(p_A, \overline{p}_H, \overline{p}_Ф\right) = n(p_A) - n(p_A, p_H) - n(p_A, p_Ф) + n(p_A, p_H, p_Ф) = 6 - 4 - 2 + 1 = 1$. Так же легко может быть найдет ответ и на другие подобные вопросы.

2.15. Учет весов элементов в формуле включения и исключения

Дальнейшие усложнения метода связаны с введением весов элементов. Как и прежде, будем считать, что веса это числовые характеристики элементов рассматриваемых множеств.

Итак, пусть задано n - множество S_n и каждому элементу $s_i \in S_n, i = 1,2,...,n$ приписан вес $\omega(s_i)$ из k- множества свойств $p_1, p_2,..., p_k$. Тогда $p_j(s_i) = \begin{cases} 1, \text{ если э элемен } s_i \text{ обладает свойством } p_j, \\ 0, \text{ если э элемен } s_i \text{ не обладает свойством } p_j, \end{cases}$ а $\omega(p_j) = \sum_{s_i \in S} p_j(s_i) \cdot \omega(s_i)$ - сумма весов элементов со свойством p_j. Произведем r - выборку свойств $p_{i_1}, p_{i_2},..., p_{i_r}$ и обозначим сумму весов элементов, обладающих всеми r выбранными свойствами, через $\omega\left(p_{i_1}, p_{i_2},..., p_{i_r}\right)$, т. е. $\omega\left(p_{i_1}, p_{i_2},..., p_{i_r}\right)$ это сумма весов элементов множества S_n, которые обладают каждым из свойств $p_1, p_2,..., p_k$. Сумму, распространенную на все возможные r - выборки свойств, обозначим $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le k} \omega\left(p_{i_1}, p_{i_2},..., p_{i_r}\right) = \omega(r)$. Здесь суммирование распространяется на все сочетания $(i_1, i_2,..., i_r)$ длины r из k свойств, количество сочетаний равно C_k^r. Таким образом, в $\omega(r)$ суммируются веса только тех элементов, которые имеют как минимум r свойств. Пусть элемент $s_i \in S_n$ обладает t свойствами и $t \ge r$, тогда его вес $\omega(s_i)$ в $\omega(r)$ войдет C_t^r раз. Например, $\omega(1) = \sum_{i_1} \omega(p_{i_1}) = \omega(p_1) + \omega(p_2) + ... + \omega(p_k)$ содержит $C_k^1 = k$ членов, а $\omega(2) = \sum_{(i_1, i_2)} \omega(p_{i_1}, p_{i_2}) = \omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + ... + \omega(p_{k-1}, p_k)$ содержит $C_k^2 = \frac{k(k+1)}{2}$ членов и так далее. Через $\omega(0)$ обозначим сумму весов всех элементов множества S_n. Данное определение $\omega(0)$ корректно, так как сумма $\omega(0)$ должно включать элементы, обладающие нуль свойствами и более. Действительно, любой из элементов множества S_n удовлетворяет этим условиям. Положим $\omega_k(r)$ - сумма весов элементов, обладающих равно r свойствами из k имеющихся, тогда $\omega_k(0)$ - сумма весов элементов, которые не имеют ни одного из указанных свойств. При таких обозначениях теорема включений и исключений с учетом весов будет формулироваться следующим образом.

Теорема 2.5. **Сумма весов элементов, обладающих точно r свойствами из k свойств $p_1, p_2,..., p_k$ равна**

$$\omega_k(r) = C_r^0 \omega(r) - C_{r+1}^1 \omega(r+1) + C_{r+2}^2 \omega(r+2) + ... + (-1)^{k-r} C_{r-(k-r)}^r \omega(r + (k-r)) =$$
$$= C_r^0 \omega(r) - C_{r+1}^1 \omega(r+1) + C_{r+2}^2 \omega(r+2) + ... + (-1)^{k-r} C_k^r \omega(k) = \qquad (2.15.1)$$
$$= \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i C_{r+i}^r \omega(r+i) = \sum_{i=r}^{k} (-1)^{i-r} C_i^r \omega(i).$$

Доказательство. Покажем, что вклад веса $\omega(s_i)$ произвольного элемента $s_i \in S_n$ в правую и левую часть формулы (2.15.1) одинаковый. Пусть $s_i \in S_n$ обладает точно t свойствами. Тогда а) если $t < r$, то $\omega(s)$ не входит в $\omega_k(r)$ и не входит в $\omega(r+i)$, т. е. равенство (2.15.1) примет вид 0=0;

б) если $t = r$, то $\omega(s)$ входит один раз в $\omega_k(r)$ и один раз в $\omega(r+i)$;

в) если $t > r$, то в $\omega_k(r)$ $\omega(s)$ не входит и левая часть формулы (2.15.1) в этом случае равна нулю. В $\omega(r+i)$ вес $\omega(s)$ входит C_t^{r+i} раз, $r+i \le t$. Правая часть формулы (2.15.1) для веса $\omega(s)$ одного элемента $s_i \in S_n$ примет вид $C_r^r\omega(r) - C_{r+1}^r\omega(r+1) + \ldots + (-1)^{t-r}C_t^{t-r}\omega(t) =$ $= C_r^r\omega(s)C_t^r - C_{r+1}^r\omega(s)C_t^{r+1} + \ldots + (-1)^{t-r}C_t^{t-r}\omega(s)C_t^t = \omega(s)\sum_{i=0}^{t-r}(-1)^i C_{r+i}^r C_t^{r+i}$. Но $C_{r+i}^r C_t^{r+i} =$ $= \dfrac{(r+i)!}{r!i!}\cdot\dfrac{t!}{(r+i)!(t-r-i)!} = \dfrac{t!}{r!(t-r)!}\cdot\dfrac{(t-r)!r}{i!(t-r-i)!} = C_t^r C_{t-r}^i$, тогда $\omega(s)\sum_{i=0}^{t-r}(-1)^i C_{r+i}^r C_t^{r+i} =$ $= \omega(s)\sum_{i=0}^{t-r}(-1)^i C_t^r C_{t-r}^i = \omega(s)C_t^r\sum_{i=0}^{t-r}(-1)^i C_{t-r}^i = \omega(s)C_t^r(1-1)^{t-r} = 0$. Таким образом, и в этом случае формула (2.15.1) верна.

Если все элементы $s_i \in S_n, i = 1,2,\ldots,n$ имеют единичный вес, т. е. $\omega(p_i) = 1$, то $\omega(k) = n(k)$ и сумма весов равна числу слагаемых в сумме $\omega(r) = n(r)$, тогда формула (2.15.1) превращается в

$$n_k(r) = C_r^r n(r) - C_{r+1}^r n(r+1) + \ldots + (-1)^{k-r}C_k^r n(k) = \sum_{i=r}^{k}(-1)^{i-r}C_i^r n(i). \qquad (2.15.2)$$

Следующая теорема является, по сути, следствием теоремы 2.5.

Теорема 2.6. **Если даны n - множество S_n, каждый элемент которого имеет вес, и k- множества свойств, то сумма $\omega_k(0)$ весов элементов, не удовлетворяющих ни одному из заданных свойств, определяется по формуле**

$$\omega_k(0) = \omega(0) - \omega(1) + \omega(2) + \ldots + (-1)^k\omega(k) = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m \sum_{1\le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le k}\omega\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}\right). \qquad (2.15.3)$$

Итак, сумма весов множества из n элементов, не удовлетворяющих ни одному из k свойств, равна сумме весов всех элементов множества $\omega(0)$ минус сумма весов элементов, обладающих хотя бы одним свойством, плюс сумма весов элементов, имеющих не менее двух свойств и так далее.

Если все элементы $s_i \in S_n, i = 1,2,\ldots,n$ имеют единичный вес, то $\omega(k) = n(k)$ и сумма весов равна числу слагаемых в сумме. В этом случае $\omega(0) = n$, $\omega_k(0)$ равно числу элементов множества S_n, не удовлетворяющих ни одному из указанных k свойств. Тогда формула (2.15.3) переходит в формулу

$$\begin{aligned} n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_k}) &= n - \sum_{i=1}^{k} n(p_i) + \sum_{1\le i<j\le k} n(p_i, p_j) - \sum_{1\le i<j<l\le k} n(p_i, p_j, p_l) + \ldots \\ &+ (-1)^k n(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le k} n\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}\right). \end{aligned} \qquad (2.15.4)$$

Метод включения и исключения применяется везде, где речь идет о разделении дискретных множеств, производимых в зависимости от наличия (или отсутствия) у элементов определенных свойств. К числу задач, решаемых с помощью этого метода, относятся, например, задачи о встречах или беспорядках, разновидности задач теории чисел и ее приложений, где применяются специальные функции Эйлера и Мебиуса*.

Пример 1. Задача о беспорядках или задача о встречах. Пусть имеется конечное упорядоченное множество чисел $1,2,\ldots,n$. Для них могут быть образованы перестановки $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Число всех перестановок, очевидно, $n!$. Среди этих перестановок имеются такие, где ни один из элементов не сохранил своего первоначального места:

---

* Август Фердинанд Мебиус (1790 - 1868) - немецкий математик.

$a_i \neq i,\ i = 1,2,...,n.$ Такие перестановки называются беспорядками. Найдем число беспорядков.

Множество n элементов рассматривается по отношению к множеству свойств элементов оставаться на своих местах $p_i : \{a_i = i,\ i = 1,2,...,n\}.$ Очевидно, что если k элементов закрепляются на своих местах, то число $N(k)$ соответствующих перестановок равно $(n-k)!$ Число способов, которыми можно выбрать k закрепленных элементов из общего количества n элементов равно C_n^k. Число беспорядков, где ни один элемент не сохранил своего первоначального места, тогда находится по формуле, аналогичной формуле (2.15.3)

$$N(0) = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! + ... + (-1)^k C_n^k(n-k)! + ... + (-1)^n C_n^n(n-n)! =$$
$$= n! - n(n-1)! + \frac{n(n-1)}{2!}(n-2)! + ... + (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}(n-k)! + ... = \quad (2.15.5)$$
$$= n!\left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^k \frac{1}{k!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right] \approx \left[\frac{n!}{e}\right].$$

Здесь выражение $[...]$ обозначает целую часть заданного числа, а e - основание натуральных логарифмов.

Пример 2. Задача о числе перестановок, в которых остаются на своих местах k элементов. В этой задаче из n элементов k должно быть неподвижных. Число способов, которыми можно выбрать эти k неподвижных элементов равно C_n^k. Оставшиеся $n-k$ элементов могут образовывать беспорядки, их число подсчитаем по формуле (2.15.5). Тогда по правилу произведения

$$N(k) = C_n^k(n-k)!\left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right] = \frac{n!}{k!}\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k!)}\right].$$
$$(2.15.6)$$

2.16. Функция Эйлера

Функцией Эйлера называется функция $\varphi(n)$, определенная на множестве N, значения которой равны числу k натуральных может быть и составных целых чисел, взаимно простых с n и не превосходящих n, то есть $0 < k < n,\ (k,n) = 1.$ Для $n = 1$ полагают $\varphi(1) = 1$.

Знаком (a,b) обозначается наибольший общий делитель натуральных чисел a и b. Взаимно простыми называются числа, наибольший общий делитель которых равен единице. Например, натуральные числа 5 и 7 взаимно просты, так как $(5,7) = 1.$ Таким образом, взаимно простые числа друг на друга нацело не делятся.

Функция Эйлера аналитически выражается следующим образом

$$\varphi(n) = n - \sum_{1 \le i \le k} \frac{n}{q_i} + \sum_{1 \le i < j \le k} \frac{n}{q_i q_j} + ... + (-1)^k \frac{n}{q_1 q_2 ... q_k}, \qquad (2.16.1)$$

где k - есть число простых делителей q_i числа $n,\ i = 1,2,...,k.$ Чаще функция Эйлера приводится в несколько другом виде

$$\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = n\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{q_k}\right),\ n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k}. \quad (2.16.2)$$

Формулы (2.16.1) и (2.16.2) получим позже, а сейчас посчитаем значения $\varphi(n)$ для $n = 1,2,...,10.$ Разложим числа с 1 до 10 на простые делители.

$1 = 1^1$	$6 = 2^1 \cdot 3^1$

$2 = 2^1$	$7 = 7^1$
$3 = 3^1$	$8 = 2^3$
$4 = 2^2$	$9 = 3^2$
$5 = 5^1$	$10 = 2^1 \cdot 5^1$

1) $\varphi(1) = 1$ по определению.

2) $\varphi(2) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1,\ (1,2) = 1$. Это число 1.

3) $\varphi(3) = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2,\ (1,3) = 1,\ (2,3) = 1$. Два числа не превосходят 3 и взаимно просты с числом 3; это числа 1 и 2.

4) $\varphi(4) = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2,\ (1,4) = 1,\ (3,4) = 1$. Это числа 1 и 3.

5) $\varphi(5) = 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4,\ (1,5) = 1,\ (2,5) = 1,\ (3,5) = 1,\ (4,5) = 1$. Четыре числа удовлетворяют условию существования функции Эйлера. Это числа 1, 2, 3 и 4.

6) $\varphi(6) = 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2,\ (1,6) = 1,\ (5,6) = 1$. Это числа 1 и 5.

7) $\varphi(7) = 7 \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 6,\ (1,7) = 1,\ (2,7) = 1,\ (3,7) = 1,\ (4,7) = 1,\ (5,7) = 1,\ (6,7) = 1$. Значение функции Эйлера в этом случае равно шести, так как шесть чисел удовлетворяют условию существования функции Эйлера. Это числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

8) $\varphi(8) = 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4,\ (1,8) = 1,\ (3,8) = 1,\ (5,8) = 1,\ (7,8) = 1$. Значение функции Эйлера равно четырем. Это числа 1, 3, 5 и 7.

9) $\varphi(9) = 9 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6,\ (1,9) = 1,\ (2,9) = 1,\ (4,9) = 1,\ (5,9) = 1,\ (7,9) = 1,\ (8,9) = 1$. Это числа 1, 2, 4, 5, 7 и 8.

10) $\varphi(10) = 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4,\ (1,10) = 1,\ (3,10) = 1,\ (7,10) = 1,\ (9,10) = 1$. Это числа 1, 3, 7 и 9.

Таким образом, функция Эйлера для первых десяти значений аргумента может быть задана следующей таблицей.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

Выведем теперь формулы, представляющие функцию Эйлера. Для этого решим сначала такую вспомогательную задачу. Пусть $a_1, a_2, ..., a_k$ - взаимно простые натуральные числа, то есть $(a_i, a_j) = 1,\ i \neq j$, а n - некоторое натуральное число. Найдем число натуральных чисел, не превышающих n и не делящихся ни на одно из чисел $a_1, a_2, ..., a_k$. Пусть A_i - множество натуральных чисел, не превышающих n и делящихся на a_i. Тогда количество чисел, делящихся по крайней мере на одно из чисел $a_1, a_2, ..., a_k$ равно $n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)$.

Очевидно $n(A_i)=\left[\dfrac{n}{a_i}\right]$, где опять $[x]$ - наибольшая целая часть x, не превосходящая x. Множество $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}$ - это множество тех чисел, которые делятся на $a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}$, то есть $n\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right)=\left[\dfrac{n}{a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}}\right]$, поскольку числа $a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}$ взаимно простые. По формуле (2.14.2) получим

$$n(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=\sum_{1\le i_1\le k}n(A_{i_1})-\sum_{1\le i_1<i_2\le k}n(A_{i_1}\cap A_{i_2})+\ldots+(-1)^{k-1}n(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k).$$

Тогда количество чисел, не превышающих n и делящихся, по крайней мере, на одно из чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ равно

$$n(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=\sum_{1\le i_1\le k}\left[\frac{n}{a_{i_1}}\right]-\sum_{1\le i_1<i_2\le k}\left[\frac{n}{a_{i_1}a_{i_2}}\right]+\ldots+(-1)^{k-1}\left[\frac{n}{a_1a_2\ldots a_k}\right].$$

Количество чисел, не превышающих n и не делящихся ни на одно из чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ равно $n-n(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=n-\sum\limits_{1\le i_1\le k}\left[\dfrac{n}{a_{i_1}}\right]+\sum\limits_{1\le i_1<i_2\le k}\left[\dfrac{n}{a_{i_1}a_{i_2}}\right]+\ldots+(-1)^{k}\left[\dfrac{n}{a_1a_2\ldots a_k}\right]$. Эта формула аналогична формуле (2.14.3) и представляет собой по сути формулу включений и исключений. Ее можно было сразу написать, если ввести $\dfrac{n}{a_{i_1}}=p_{i_1}$ - свойство числа n делиться на a_{i_1}. Тогда $\left[\dfrac{n}{a_{i_1}}\right]$ - количество чисел не превосходящих n и обладающих свойством p_{i_1}. Пусть теперь n - натуральное число, разложение которого на простые множители имеет вид $n=q_1^{\alpha_1}\cdot q_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot q_k^{\alpha_k}$, где $q_1,q_2\ldots,q_k$ - простые числа. Если $\varphi(n)$ - число натуральных целых чисел, взаимно простых с n, то по только что полученной формуле имеем

$$\varphi(n)=n-\sum_{1\le i_1\le k}\frac{n}{q_{i_1}}+\sum_{1\le i_1<i_2\le k}\frac{n}{q_{i_1}q_{i_2}}+\ldots+(-1)^k\frac{n}{q_1q_2\ldots q_k}=n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q_k}\right)=$$
$$=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{q_i}\right).$$

Преобразования сумм в произведения очень громоздки и связаны с разложением многочлена на множители. Например, для $k=2$ соответствующие преобразования будут иметь вид

$$n-\left(\frac{n}{q_1}+\frac{n}{q_2}\right)+\frac{n}{q_1q_2}=n\left[1-\frac{q_2+q_1}{q_1q_2}+\frac{1}{q_1q_2}\right]=n\left[\frac{q_1q_2-q_1-q_2+1}{q_1q_2}\right]=$$
$$=n\frac{(q_1-1)(q_2-1)}{q_1q_2}=n\frac{q_1-1}{q_1}\cdot\frac{q_2-1}{q_2}=n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right).$$

Перечислим в заключение без доказательства свойства функции Эйлера.

1. Если $(a,b)=1$, то $\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$. Например, $(3,7)=1$, $\varphi(3\cdot 7)=\varphi(21)=$ $=21\cdot\prod\limits_{i=1}^{2}\left(1-\dfrac{1}{q_i}\right)=21\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{7}\right)=21\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{6}{7}=12$. $\varphi(21)=\varphi(3)\cdot\varphi(7)=2\cdot 6=12$.

2. $\varphi(q^{\alpha}) = q^{\alpha} - q^{\alpha-1} = q^{\alpha}\left(1-\frac{1}{q}\right)$. Возьмем $n=8,\ n=2^3$, $\varphi(8)=4=2^3-2^2=$ $=2^3\left(1-\frac{1}{2}\right)=4$.

3. $\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k}\varphi\left(q_i^{\alpha_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_1}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)$.

4. $\sum_{d\backslash n}\varphi(d)=\prod_{i=1}^{k}\sum_{d\backslash q_i^{\alpha_i}}\varphi(d)=\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}=n$, где d - различные делители числа n.

Например, если $n=10=2^1\cdot 5^1$, то $\sum_{d\backslash 10}\varphi(d)=\prod_{i=1}^{2}q_i^{\alpha_i}=2\cdot 5=10$. Выражение $\sum_{d\backslash 10}\varphi(d)$ означает, что суммирование ведется по сем делителям числа 10, т. е. $\sum_{d\backslash 10}\varphi(d)=\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(5)+\varphi(10)=\ =1+1+4+4=10$.

5. $x^{\varphi(n)}\equiv 1(\operatorname{mod} n)$, где $n>0$ и $(x,n)=1$. Например, $x=3,\ n=7$, $3^{\varphi(7)}=3^6=$ $=729=104\cdot 7+1=1(\operatorname{mod} 7)$ или $x=3,\ n=10$, $3^{\varphi(10)}=3^4=81=8\cdot 10+1=1(\operatorname{mod} 10)$.

Пример 1. Найти число способов разложения n шаров по m ящикам так, чтобы $r\ (0\le r<m)$ ящиков остались пустыми.

Рассмотрим простейший пример. Пусть $m=3,\ n=5,\ r=1$. Из рисунка сразу ясно, что порядок, т. е. номер шаров важен, следовательно, речь идет о n - перестановках. В данном опыте выбирается ящик. Это выборка с повторениями, так как ящики могут повторяться, например, первый шар положен в первый ящик, второй шар положен в первый ящик и так далее. На основе такого простого примера ясно, что речь идет о выборке m ящиков n раз (n шаров) с повторениями (см. рис.2.4). Таким образом, число способов, которыми можно разместить n шаров по m ящикам равно m^n.

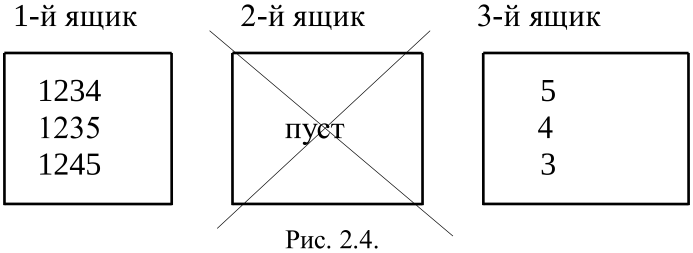


Рис. 2.4.

Пусть $p_i\ (i=1,2,..,m)$ свойство, состоящее в том, что при данной раскладке ящик с номером i остался пустым. Тогда количество раскладок, обладающих свойствами $p_{i_1}, p_{i_2},..., p_{i_r}\ (1\le i_1<i_2<...<i_r\le m)$ при одном способе выбора r пустых ящиков равно $n\left(p_{i_1}, p_{i_2},..., p_{i_r}\right)=(m-r)^n$, а общее количество раскладок, распространенное на все возможные способы выбора пустых ящиков, будет равно $\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_r\le m}n\left(p_{i_1}, p_{i_2},..., p_{i_r}\right)=C_m^r(m-r)^n$.

Применим теперь формулу включений и исключений типа (2.15.2), получим

$$n_m(r)=\sum_{k=r}^{m}(-1)^{k-r}C_k^r\omega(k)=\sum_{k=r}^{m}(-1)^{k-r}C_k^rC_m^k(m-k)^n=\left\langle\begin{array}{c}k=r+l,\\ k=r,l=0,\\ k=m,l=m-r.\end{array}\right\rangle=$$

$$=\sum_{l=0}^{m-r}(-1)^l C_{r+l}^rC_m^{r+l}(m-r-l)^n=\left\langle\begin{array}{c}C_{r+l}^rC_m^{r+l}=\dfrac{m!}{r!\,l!\,(m-r-l)!},\\ C_m^rC_{m-r}^l=\dfrac{m!}{r!\,l!\,(m-r-l)!}.\end{array}\right\rangle=\sum_{l=0}^{m-r}(-1)^l C_m^rC_{m-r}^l(m-r-l)^n=$$

$$=C_m^r\sum_{l=0}^{m-r}(-1)^l C_{m-r}^l(m-r-l)^n.$$

2.17. Функция Мебиуса

Функция Мебиуса $\mu(n)$ определяется для всех $n \in N$ и равна

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ если } n = 1, \\ 0, \text{ если } n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k} \text{ и } \exists \alpha_i > 1, \\ (-1)^k, \text{ если } n = q_1 q_2 \ldots q_k, \end{cases} \qquad (2.17.1)$$

где $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$ - разложение аргумента на простые сомножители, такое же как для функции Эйлера (см. подразд. 2.16).

Функция Мебиуса для первых десяти значений аргумента задается следующей таблицей.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Рассмотрим некоторые свойства функции $\mu(n)$ и ее связь с функцией Эйлера.

1) $$\sum_{d \backslash n} \mu(d) = \begin{cases} 0, \text{ если } n > 1, \\ 1, \text{ если } n = 1, \end{cases} \qquad (2.17.2)$$

причем суммирование идет по всем делителям d числа n. Итак, если $n = 1$, то $\sum_{d \backslash n} \mu(d) = \mu(1) = 1$. Если же $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k} \neq 1$, тогда $\sum_{d \backslash n} \mu(d) = \sum_{d \backslash n, \mu(d) \neq 0} \mu(d) = \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-1)^i =$ $= (1-1)^k = 0$, так как все делители d, для которых $\mu(d) \neq 0$, имеют по формуле (2.17.1) вид $q_{i_1} q_{i_2} \ldots q_{i_r}$, т. е. $\mu(q_{i_1} q_{i_2} \ldots q_{i_r}) = (-1)^r$. Количество таких делителей $q_{i_1} q_{i_2} \ldots q_{i_r}$, выбираемых из $q_1 q_2 \ldots q_k$ равно C_k^r.

2) Если $f(n) = \sum_{d \backslash n} g(d)$, то $g(n) = \sum_{d \backslash n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$, $\qquad (2.17.3)$

где $f(n)$ и $g(n)$ определены на множестве N. Формула (2.17.3) называется формулой обращения Мебиуса.

3) $$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d \backslash n} \frac{\mu(d)}{d}. \qquad (2.17.4)$$

Формула (2.17.4) устанавливает связь между функциями Эйлера и Мебиуса. Если $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$, то $\sum_{d \backslash n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right)$.

2.18. Практическое занятие № 5. Формула включений и исключений

2.18.1. Из урны, содержащей m различных шаров, одновременно извлекают s $(1 \leq s \leq m)$ шаров, записывают их номера, а затем шары возвращаются обратно в урну. Можно составить $\left(C_m^s\right)^d$ различных наборов, получающихся в результате d извлечений. Найти число наборов, в которых а) встречаются все шары; б) ровно r $(0 \leq r \leq m)$ шаров не встречается.

2.18.2. Вычислить $S = \sum_{k'} \left(1 / 2^{k'} \right)$, где суммирование проводится по всем натуральным k', не кратным 2, 3 и 5.

2.18.3. Четыре человека сдают свои шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что в точности k человек получат свои шляпы назад. Рассмотреть все значения k $\left(0 \le k \le 4\right)$.

2.18.4. При обследовании читательских вкусов оказалось, что 60% студентов читают журнал A, 50% - журнал B, 50% - журнал C, 30% - журналы A и B, 20% - журналы B и C, 40% - журналы A и C, 10% - журналы A, B и C. Сколько процентов студентов:

а) не читает ни одного журнала;

б) читает в точности два журнала;

в) читает не менее двух журналов.

2.18.5. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 100 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.

2.18.6. Показать, что если $n = 30m$, то количество целых положительных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15, равно $22m$.

2.18.7. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 - физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический и физический кружок? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

2.18.8. Сколькими способами можно расположить за круглым столом n супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

2.18.9. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И.С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую не менее чем по одному экземпляру каждого из этих романов?

2.18.10. Вычислить: а) $\varphi(100)$; б) $\varphi(1000)$; в) $\varphi(p)$, где p - простое число.

ЧАСТЬ III. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

3.1. Основные понятия и определения

Теория графов применяется при анализе функционирования сложных систем, таких как сети железных дорог, телефонных или компьютерных сетей, ирригационных систем. Эта теория традиционно является эффективным аппаратом формализации задач экономической и планово – производственной практики, применяется в автоматизации управления производством, в календарном и сетевом планировании.

Основным понятием теории является граф. Пусть S - непустое множество, $V^{(2)}$ - множество всех его двухэлементных подмножеств, $U \subset V^{(2)}$. Тогда пара (S,U) называется неориентированным графом. Элементы множества S называются вершинами графа, а элементы множества U - ребрами. Итак, $G = (S,U)$ граф - это конечное множество вершин S и множество ребер U.

Вершины графа обозначают по-разному: или большими буквами, или малыми с индексами; для ребер наиболее употребительное обозначение - u с индексом, например, $u_1, u_2, ..., u_n$. Взаимное расположение, форма и длина ребер значения не имеют. Важно лишь то, что они соединяют две данные вершины множества S.

Если в паре вершин x_i и x_j указано направление связи, т. е. какая из вершин является первой, то соединяющий их отрезок u_k называется дугой, а вершины, определяющие дугу u_k, называют концевыми вершинами. Если концевые вершины совпадают, то дугу называют петлей. В графе G могут существовать дуги (ребра) с одинаковыми концевыми вершинами. Такие дуги называются параллельными.

Если в графе $G = (S,U)$ все элементы множества U изображаются дугами, то граф называется ориентированным или орграфом, если ребрами, то неориентированным. Два ребра называются смежными, если они имеют общий конец.

Вершина x_1 и ребро u_1 называются инцидентными, если x_1 является концом ребра u_1 и не инцидентными в противном случае. Таким образом, смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность является отношением между разнородными элементами.

Число вершин графа называется его порядком. Степенью $P(x_i)$ вершины x_i называется число дуг (ребер) графа G, инцидентных данной вершине. Вершина степени нуль называется изолированной, а если степень равна единице, то такая вершина называется висячей.

Граф G называется простым, если он не содержит петель и параллельных дуг. Простой граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется полным. Граф, содержащий хотя бы две параллельные дуги (ребра), называется мультиграфом. Граф, содержащий петли, называется псевдографом.

Граф называется двудольным, если существует такое разбиение множества его вершин на две части (доли), что концы каждого ребра принадлежат разным частям. Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется полным двудольным. Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и q вершин, обозначается символом $K_{p,q}$.

Графы удобно изображать в виде рисунков, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. На рисунке 3.1 изображены полные графы порядка

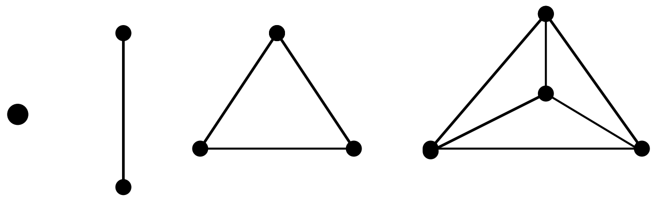


Рис 3.1.

1, 2, 3 и 4. Они обозначаются K_n. Число ребер в полном графе C_n^2. На рис. 3.4 изображены двудольные графы $K_{1,4}$ и $K_{3,3}$. Два графа G и G_1 называются изоморфными, если между множеством их вершин существует такое взаимно однозначное соответствие, при котором в одном из графов ребрами соединены вершины в том и только в том случае, если в другом графе ребрами соединены те же вершины. Для орграфов ориентация дуг должна быть также одинаковой.

Очевидно, что отношение изоморфизма графов является эквивалентностью, т. е. оно симметрично, транзитивно и рефлексивно. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны.

Способов задания графов - великое множество. Самый простой способ – задание множеств S и U. Граф также может быть задан просто рисунком. В силу изоморфизма один и тот же граф может быть изображен разными рисунками. Например, слева на рисунке 3.2

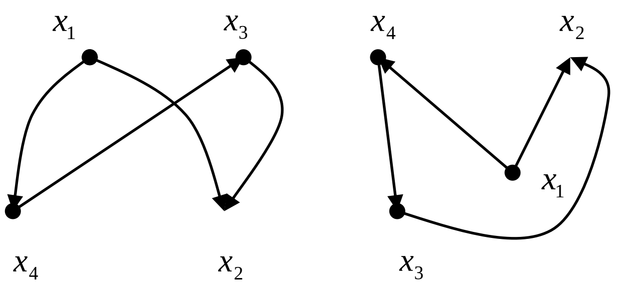


Рис. 3.2.

изображение одного и того же графа, так как в обоих случаях содержится одна и та же информация о вершинах и дугах графа и их взаимном расположении. В некоторых случаях все же приходиться различать изоморфные графы, тогда полезно понятие помеченный граф.

Граф G_n порядка n называется помеченным, если его вершинам присвоены некоторые метки, например, 1, 2, 3… Пусть $n = 3$, тогда, например, на рисунке 3.3 изображены три разных графа. Строго говоря, абстра-

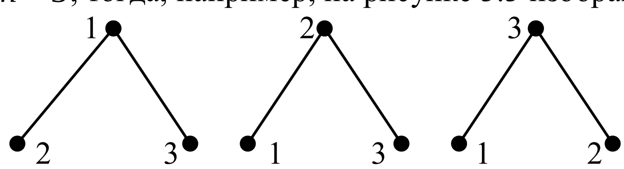


Рис. 3.3.

ктный или непомеченный граф – это класс изоморфных графов. Число g_n непомеченных графов порядка n определяется очень сложно. Известна формула Пойа*

* Дьердь Пойа (1887 – 1985) – американский математик.

$$g_n \cong \frac{2^{C_n^2}}{n!}, \qquad (3.1.1)$$

дающая лишь асимптотику числа g_n, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(n)}{f(n)}=1$, где $g(n)=g_n$, $f(n)=\dfrac{2^{C_n^2}}{n!}$.

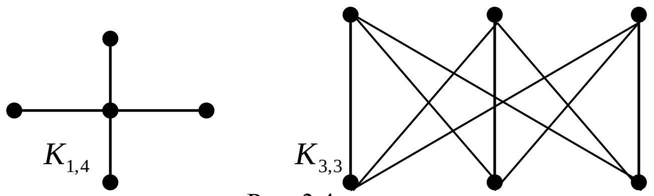


Рис. 3.4.

Граф называется плоским (планарным), если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются его вершинами.

Для произвольного графа $G=(S,U)$ следующим образом определяется дополнительный граф (дополнение) $\tilde{G}=(S,\tilde{U})$. В этом графе $\tilde{G}$ вершин столько же, сколько в графе G, причем любые две несовпадающие вершины смежны в $\tilde{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в G (см. рис. 3.5). Граф, изоморфный своему дополнению, называется самодополнительным. Пусть $G=(S,U)$. Граф $G'=(S',U')$ называется подграфом графа G, если $S'\subset S$ и $U'\subset U$.

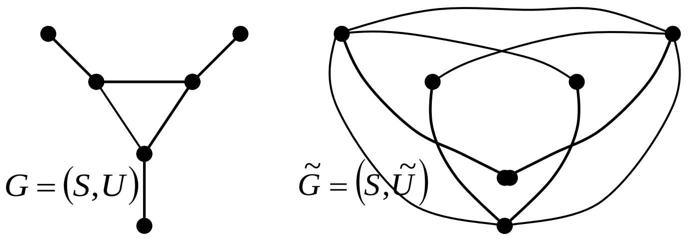


Рис. 3.5.

3.2. Операции над графами

Определим операции, позволяющие из имеющихся графов получать другие графы с большим или меньшим числом элементов.

1) Операция объединения графов. Граф $G=(S,U)$ называется объединением (или наложением) графов $G_1=(S_1,U_1)$ и $G_2=(S_2,U_2)$, если $S=S_1\cup S_2$ и $U=U_1\cup U_2$. Объединение $G=G_1\cup G_2$ называется дизъюнктным, если $S_1\cap S_2=\varnothing$.

2) Произведение графов. Пусть даны графы $G_1=(S_1,U_1)$ и $G_2=(S_2,U_2)$. Граф $G=(S,U)$ называется произведением $G_1\times G_2$ графов G_1 и G_2, причем $S=S_1\times S_2$ - декартово произведение множеств вершин исходных графов, а множество ребер получается следующим образом: вершины (x_1,x_2) и (y_1,y_2) смежны в графе G тогда и только тогда, когда

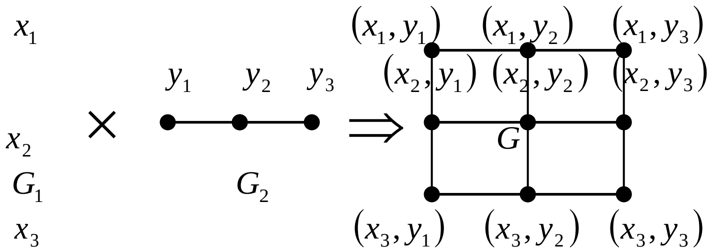


Рис. 3.6.

или $x_1=y_1$, а x_2 и y_2 смежны в G_2, или $x_2=y_2$, а x_1 и y_1 смежны в G_1 (см. рис. 3.6). С помощью операции произведения вводятся n-мерные кубы – один из классов графов.

n-мерный куб Q_n вводится рекуррентно:

$$Q_1=K_2,\ Q_n=K_2\times Q_{n-1},\ n>1. \qquad (3.2.1)$$

Таким образом, Q_n - граф порядка 2^n, вершины которого можно представить векторами длины n, причем такими, что векторы, смежные одной вершине, будут различаться ровно в одной координате. На рисунке 3.7 представлены кубы Q_2 и Q_3. Видно, что каждая вершина n-мерного куба инцидентна n ребрам, следовательно, число ребер n-мерного куба равно $n\cdot 2^{n-1}$.

3) Слияние (отождествление) вершин. Пусть x_1 и x_2 - две произвольные вершины

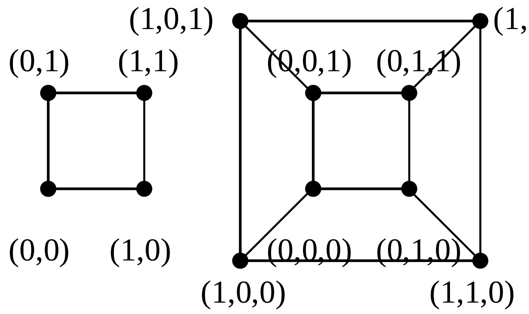


Рис. 3.7.

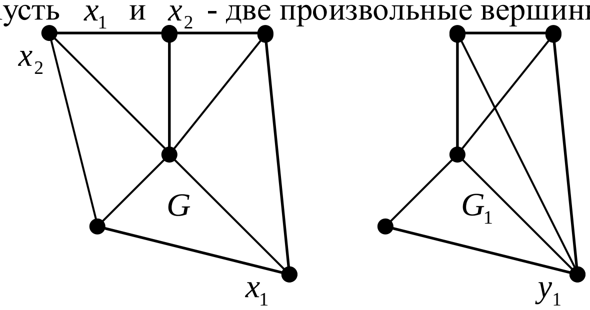


Рис. 3.8.

графа G, а $G_1 = G \setminus \{x_1\} \setminus \{x_2\}$. К графу G_1 присоединим новую вершину y_1, соединив ее ребром с каждой из вершин, входящих в объединение окружений вершин x_1 и x_2 в графе G. Построенный граф G_1 получен из G отождествлением вершин x_1 и x_2 (см. рис. 3.8).

Операция стягивания ребра означает отождествление двух смежных вершин. Граф G называется стягиваемым к графу G_1, если G_1 получается из G в результате некоторой последовательности стягиваний ребер.

4) Расщепление вершин. Пусть x_1 - одна из вершин графа G. Разобьем ее окружение на две части N_1 и N_2; удалим вершину x_1 вместе с инцидентными ей ребрами; добавим новые вершины x_2 и x_3, соединяющее их ребро (x_2, x_3); вершину x_2 соединим с каждой вершиной из множества N_1, а вершину x_3 с каждой вершиной из множества N_2. В результате получим граф $\tilde{G}$. Этот граф построен из исходного графа G расщеплением вершины x_1 (см. рис. 3.9).

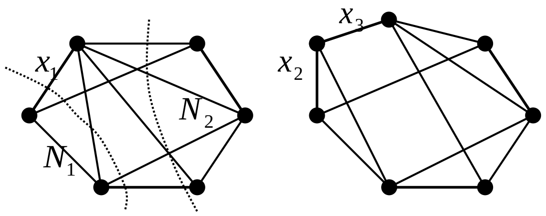


Рис. 3.9.

3.3. Маршруты, цепи, циклы

Чередующая последовательность $x_1, u_1, x_2, u_2, ..., x_k, u_k, x_{k+1}$ вершин и ребер графа, такая что $u_i = x_i x_{i+1},\ i = \overline{1,k}$, называется маршрутом, соединяющим вершины x_1 и x_{k+1}. Очевидно, что маршрут можно задать последовательностью его вершин $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ или последовательностью ребер $u_1, u_2, ..., u_k$. Маршрут называется цепью, если все его ребра различны, и простой цепью, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны. Гамильтоновой цепью называется простая цепь, содержащая все вершины графа.

Маршрут называется циклическим, если $x_1 = x_{k+1}$. Циклическая цепь называется циклом, а циклическая простая цепь – простым циклом. Число ребер в маршруте называется длиной маршрута. Гамильтоновым циклом называется простой цикл, содержащий все вершины графа. Длина всякого цикла не менее трех в графе без петель и кратных ребер. Минимальная из длин циклов графа называется его обхватом.

Важным понятием теории графов является связность. Граф называется связным, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом. Для орграфа существует еще понятие сильной связности. Для этого определим понятие пути. Путь – это ориентированный маршрут. Поэтому, если для установления простой (или слабой) связности графа ориентацию его дуг при-

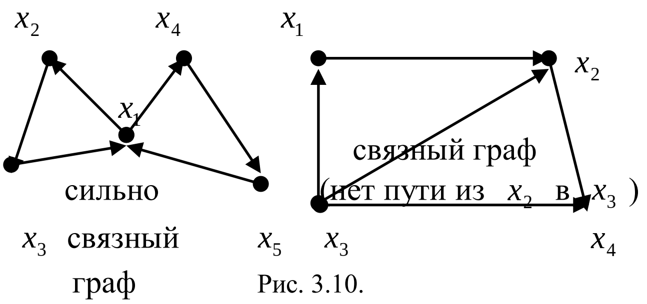


Рис. 3.10.

нимать в расчет не следует, то для установления сильной связности это необходимо (см. рис. 3.10). Орграф называется сильно связным, если для любых двух вер шин $x_i, x_j \in S$ найдется путь с началом в x_i и концом в x_j. Для неориентированного графа понятие пути и маршрута совпадают.

Теорема 3.1. **Для любого графа G либо он сам, либо его дополнение является связным.**

Доказательство. Пусть G - несвязный граф (см. рис. 3.11), A - одна из его областей связности и $B = G \setminus A$. Тогда для $\forall x \in A$ и $\forall y \in B$ в дополнительном графе $\tilde{G}$ есть ребро (x, y), т. е. произвольная вершина из B соединена с x маршрутом единичной длины, а произвольная вершина из A, отличная от x, соединена с x маршрутом не более чем два, т. е. граф $\tilde{G}$ связен.

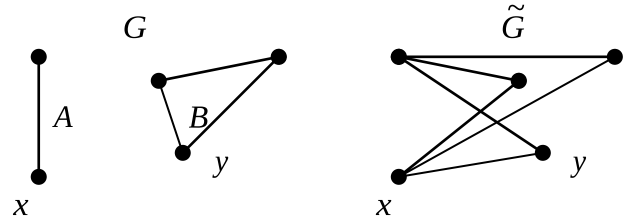


Рис. 3.11.

Рассмотрим $S = \bigcup_i S_i$ разложение множества вершин графа $G = (S, U)$ на попарно непересекающиеся подмножества, причем такое, что все вершины в каждом S_i связаны, а вершины из различных S_i не связаны. Тогда можно написать разложение $G = \bigcup_i G_i(S_i, U_i)$ графа G на непересекающиеся связные подграфы $G_i(S_i, U_i)$. Такое разложение называется прямым, а сами подграфы называются компонентами связности графа G.

Теорема 3.2. **Любой граф представляется в виде объединения непересекающихся связных (сильно связных) компонент. Разложение графа на связные (сильно связные) компоненты определяется однозначно.**

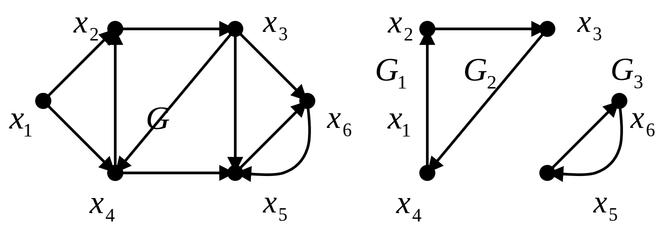


Рис. 3.12.

На рисунке 3.12 изображен орграф, разлагающийся на три сильно связных компоненты: подграфы G_1, G_2 и G_3.

Теорема 3.3. **Пусть $G = (S, U)$ является n-вершинным неориентированным графом с k компонентами связности. Тогда число ребер в таком графе $m(G)$ удовлетворяет условию** $n - k \le m(G) \le C_{n-k+1}^2$**,**

(3.3.1)

причем обе эти оценки достижимы.

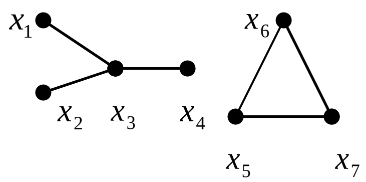


Рис. 3.13.

Например, на рисунке 3.13 изображен неориентированный граф, у которого $n = 7,\ m = 6,\ k = 2$. Тогда $7 - 2 = 5 < 6 < C_6^2 = 15$, т. е. оценка теоремы 3.3 справедлива.

В различных приложениях теории графов дугам (ребрам) графов, моделирующих реальные процессы, обычно сопоставляются какие-либо числовые характеристики. Например, если дугами изображаются транспортные магистрали, то числовой характеристикой дуги может быть пропускная способность соответствующей магистрали и тому подобное. В таких случаях говорят, что дугам графа приписаны определенные веса.

Пусть $G = (S, U)$ - орграф. Если каждой дуге $(x_i, x_j) \in U$ поставлено в соответствие некоторое число $\omega(x_i, x_j)$, то граф G называется графом со взвешенными дугами или сетью.

При этом вершины графа называются узлами сети. Число $\omega(x_i, x_j)$ называется весом дуги (x_i, x_j).

Весом пути μ (длиной, стоимостью и так далее в зависимости от контекста) сети G_ω называется число
$$\omega(\mu) = \sum_{(x_i, x_j)\in\mu} \omega(x_i, x_j). \qquad (3.3.2)$$
Понятие сети и веса маршрута для неориентированного графа определяется аналогично.

3.4. Способы задания графов

В подавляющем большинстве случаев граф задается матрицей. Для расчетов на ЭВМ- это единственный способ. Существует редко применяемый сейчас метод задания графа в виде латинской матрицы. В этом способе направление дуг задается порядком букв в их названии. Например, рассмотрим граф, изображенный на рисунке 3.14. Для него латинская матрица имеет следующий вид. Если граф неориентированный, то в латинской матрице просто штрихуют соответствующую клеточку в таблице. Наиболее часто граф задают с

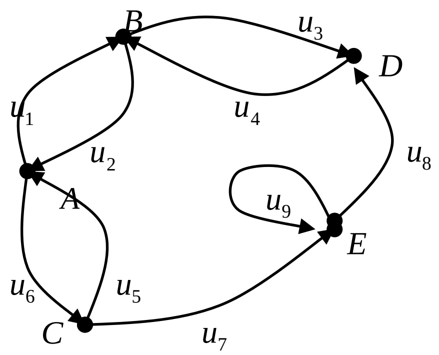


Рис. 3.14.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A		*AB*	*AC*		
B	*BA*			*BD*	
C	*CA*				*CE*
D		*DB*			
E				*ED*	*EE*

помощью матриц смежности и инциденций. Рассмотрим изображенный на рисунке 3.14 граф. Как для орграфов, так и для неориентированных графов можно определить матрицу смежности вершин. Это квадратная матрица

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$n \times n$ порядка, где n - число вершин. Ее строки и столбцы соответствуют вершинам графа. Элементы p_{ij} матрицы смежности вершин равны числу дуг, идущих из i - той вершины в j - ю вершину. Если орграф не содержит параллельных дуг, то матрица является бинарной и состоит только из нулей и единиц. В случае неориентированного графа ему вместе с ребром $x_i x_j$ принадлежит и ребро $x_j x_i$, поэтому матрица смежности вершин будет симметрической. Матрица смежности вершин однозначно определяет структуру графа.

Теорема 3.4. **Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности вершин получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов (т. е. одновременно с перестановкой i-й и j-й строк переставляются i-й и j-й столбцы).**

Доказательство. Рассмотрим два графа G и G_1, отличающихся лишь нумерацией вершин. Это значит, что в этих графах существует подстановка s на множестве вершин, сохраняющая их смежность: вершины x_1 и x_2 тогда и только тогда смежны в G, когда их образы $y_1 = s(x_1)$ и $y_2 = s(x_2)$ смежны в G_1. Тогда, если $P(G) = P$ и $P(G_1) = P^{(1)}$, то $p^{(1)}_{s(i)s(j)} = p_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Из доказанной теоремы следует, что ранги матриц смежности изоморфных графов равны. Это позволяет ввести для графа следующее определение ранга: рангом графа называется ранг его матрицы смежности вершин. Обозначается ранг графа - $\operatorname{rank} G$.

Аналогично можно определить и матрицу смежности дуг. Это также квадратная матрица $m \times m$ порядка, где m - число дуг. Рассмотрим тот же граф без петли u_9. Элементы q_{ij} этой матрицы равны единице, если дуга u_i непосредственно предшествует дуге u_j и равны нулю в остальных случаях. Для неориентированного графа элемент q_{ij} равен единице, если u_i и u_j смежны и нулю в остальных случаях.

$$Q = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Определим для рассматриваемого графа матрицу инциденций. Это прямоугольная матрица размерности $n \times m$, где n - число вершин, а m - число дуг. Элементы r_{ij} этой матрицы равны плюс единице, если дуга u_j исходит из i-й вершины (начальная вершина), минус единице, если дуга u_j входит в i-ю вершину (конечная вершина), нулю, если дуга не инцидентна i-й вершине. В случае неориентированного графа элементами матрицы будут числа единица и нуль, т. е. $r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{вершина } x_i \text{ инцидентна ребру } u_j, \\ 0, & \text{вершина } x_i \text{ не инцидентна ребру } u_j. \end{cases}$ Строки матрицы инциденций называют векторами инциденций графа G. Матрица инциденций также одно-

$$R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

значно определяет структуру графа. Для матрицы инциденций справедлива теорема, аналогичная теореме 3.4.

Теорема 3.5. **Графы (орграфы) изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инциденций получаются друг из друга произвольными перестановками строк и столбцов.**

Простой взвешенный граф (сеть) может быть представлен также своей матрицей весов $\Omega = (\omega_{ij})$, где ω_{ij} - вес ребра, соединяющего вершины x_i и x_j. Веса несуществующих ребер полагают равными нулю или бесконечности в зависимости от приложений. Очевидно, что матрица весов является простым обобщением матрицы смежности вершин.

Определим, теперь, матрицу Кирхгофа*. Матрицей Кирхгофа графа G называется матрица $B_{n\times n}$, $n=|S|$, если $b_{ij}=\begin{cases} -1, & x_i \text{ и } x_j \text{ смежны},\\ 0, & x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны и } i\neq j,\\ P(x_i), & i=j.\end{cases}$ Сумма элементов в каждой строке и каждом столбце этой матрицы равна нулю, т. е. $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}=0,\ j=\overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}=0,\ i=\overline{1,n}$. Кроме того, из этого следует, что алгебраические дополнения всех элементов матрицы B равны между собой.

Определим матрицы связности и достижимости. Пусть $P(G)$ - матрица смежности вершин графа $G=(S_n,U)$, а $B=E+P+P^2+\ldots+P^n$. Введем матрицу $C=(c_{ij}),\ i,j=\overline{1,n}$ по правилу $c_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{если } b_{ij}\neq 0,\\ 0, & \text{если } b_{ij}=0.\end{cases}$ Матрица C называется матрицей связности, если G - неорграф, и матрицей достижимости, если G - орграф. Это значит, что в графе G тогда и только тогда существует маршрут из вершины x_i в вершину x_j, когда $c_{ij}=1$. Таким образом, в матрице C содержится информация о существовании связей между различными элементами графа G посредством маршрутов.

Матрица контрдостижимости $L=(l_{ij}),\ i,j=\overline{1,n}$ определяется следующим образом: $l_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ достижима из вершины } x_j,\\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ не достижима из вершины } x_j.\end{cases}$ Можно показать, что $L=C^{\mathrm{T}}$. Матрицы C и L используются для нахождения сильных компонент графа. Пусть $F=C*L$, где операция * означает поэлементное произведение матриц C и L: $f_{ij}=c_{ij}\cdot l_{ij}$ (см. подразд. 1.2). Элемент f_{ij} матрицы F равен единице тогда и только тогда, когда вершины x_i и x_j взаимно достижимы, т. е. x_i достижима из x_j, а x_j достижима из x_i. Таким образом, сильная компонента орграфа, содержащая вершину x_i, состоит из элементов x_j, для которых $f_{ij}=1$.

Пример 1. Матрицы достижимости C и контрдостижимости L для графа, изображенного на рис. 3.12, равны

* Густав Роберт Кирхгоф (1824 – 1887) – немецкий физик.

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},\qquad P^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&2&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad P^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&2&1\\0&0&1&0&1&2\\0&0&0&1&2&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$P^4=\begin{pmatrix}0&0&0&1&2&1\\0&0&1&0&1&2\\0&0&0&1&3&2\\0&1&0&0&2&2\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad P^5=\begin{pmatrix}0&1&0&0&2&2\\0&0&0&1&3&2\\0&1&0&0&3&3\\0&0&1&0&2&2\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},\qquad P^6=\begin{pmatrix}0&0&1&0&2&2\\0&1&0&0&3&3\\0&0&1&0&3&3\\0&0&0&1&3&3\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$B=E+P+P^2+P^3+P^4+P^5+P^6=\begin{pmatrix}1&3&2&2&7&6\\0&3&2&2&10&9\\0&2&3&2&13&12\\0&2&2&3&10&9\\0&0&0&0&4&3\\0&0&0&0&3&4\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix},$$

$$L=C^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\end{pmatrix},\quad F=C*L=\begin{array}{c}\\x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}x_1&x_2&x_3&x_4&x_5&x_6\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}\end{array}.$$ По матрице F легко определить состав вершин трех подграфов, образующих сильно связные компоненты исходного графа.

3.5. Метрические характеристики графа

Рассмотрим связный граф $G=(S,U)$, пусть x_1 и x_2 - две его вершины. Длина кратчайшего (x_1,x_2)- маршрута называется расстоянием между вершинами x_1 и x_2 обозначается через $d(x_1,x_2)$. Очевидно, что расстояние между вершинами является простой цепью и $d(x_i,x_i)=0$. Для любой вершины x величина

$$e(x)=\max_{y\in S} d(x,y) \qquad (3.5.1)$$

называется эксцентриситетом вершины x. Максимальный из всех эксцентриситетов вершин называется диаметром графа и обозначается $d(G)$, т. е.

$$d(G)=\max_{x\in S} e(x)=\max_{x\in S}\max_{y\in S} d(x,y). \qquad (3.5.2)$$

Минимальный из эксцентриситетов вершин графа называется его радиусом и обозначается через $r(G)$:

$$r(G)=\min_{x\in S} e(x)=\min_{x\in S}\max_{y\in S} d(x,y). \qquad (3.5.3)$$

Вершина x называется периферийной, если ее эксцентриситет равен диаметру графа, т. е. $e(x)=d(G)$. Простая цепь, расстояние между концами которой равно $d(G)$, называется диаметральной цепью.

Теорема 3.6. **Для любого связного графа G справедливо неравенство $d(G)\le \operatorname{rank} G$.**

Доказательство. Пусть $d(G)=d$ и $x_1, x_2, ..., x_{d+1}$ - одна из диаметральных цепей графа G. Рассмотрим матрицу смежности вершин $P(G)$ и выберем нумерацию вершин так, чтобы вершины $x_1, x_2, ..., x_{d+1}$ имели номера $1, 2, ..., d+1$ соответственно. Так как цепь $x_1, x_2, ..., x_{d+1}$ является подграфом $G^{/} \subset G$, то $P(G)=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ представляет собой клеточную матрицу, в левом верхнем углу которой из-за выбранной нумерации вершин расположена матрица смежности подграфа $G^{/}$. Этот подграф является простой цепью, т. е.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

симметрическая матрица порядка $d+1$, все элементы которой, за исключением двух ближайших к главной диагонали полос, равны нулю. Минор порядка d матрицы A, остающийся после вычеркивания первого столбца и последней строки, равен единице. Следовательно, $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} P(G) \ge \operatorname{rank} A \ge d = d(G)$, т. е. $\operatorname{rank} G \ge d(G)$.

Вершина x называется центральной, если $e(x)=r(G)$. Множество всех центральных вершин графа называется его центром. Центром может быть единственная вершина графа или несколько вершин (см. рис. 3.15). Здесь $e(x_1)=e(x_2)=e(x_4)=e(x_6)=3$, $e(x_3)=e(x_7)=4$, $e(x_5)=2$. Таким образом, $d(G)=4,\ r(G)=2$. Периферийные вершины x_3 и x_7, диаметральные цепи : $x_3-x_2-x_5-x_6-x_7$ и $x_3-x_2-x_5-x_6-x_7$, центральная вершина x_5.

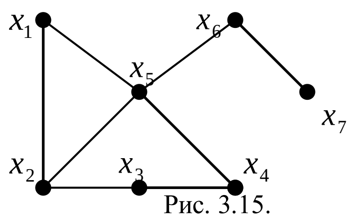


Рис. 3.15.

3.6. Упорядочивание дуг и вершин орграфа

Расчеты в задачах, связанных с графами, заметно упрощаются, если их элементы упорядочены. Под упорядочиванием вершин связного орграфа без контуров, то есть циклических цепей понимают такое разбиение его вершин на группы, при котором:

1) вершины первой группы не имеют предшествующих вершин, а вершины последней группы последующих;

2) вершины любой другой группы не имеют предшествующих в следующей группе;

3) вершины одной и той же группы дугами не соединяются.

Такое разбиение всегда возможно. В результате подобного упорядочивания получается граф, изоморфный исходному графу. Упорядочивание элементов выполняется графическим или матричным способом. Графический способ носит название алгоритма Фалкерсона* и состоит из следующих шагов.

1. Находят вершины графа, в которые не входит ни одна дуга. Они образуют первую группу. Нумеруют вершины группы в произвольном порядке.

---

* Рей Фалкерсон (???? - ????) – американский математик.

2. Вычеркивают все пронумерованные вершины и дуги, из них исходящие. В получившемся графе найдется, по крайней мере, одна вершина, в которую не входит ни одна дуга. Этой вершине, входящей во вторую группу, присваивают очередной номер и так далее. Второй шаг повторяется до тех пор, пока не будут упорядочены все вершины.

Аналогичным образом упорядочиваются дуги орграфа. Рассмотрим несколько примеров. Упорядочим вершины графа изображенного слева. На рисунке графа вершина B не содержит входящих дуг, отнесем ее к первой группе. Вычеркиваем все дуги, исходящие из B. Получим следующий граф (см. рис. 3.16). В нем опять находим одну вершину, в которую не заходит ни одна дуга. Это вершина D. Вычеркиваем дуги, исходящие из D. Появится еще одна вершина – вершина E, в которую не заходит ни одна дуга. После вычеркивания дуг EC и EA получим вершину A, которая входит, таким образом, в четвертую группу, а вершина C - в пятую. Изоморфный граф с упорядоченными вершинами изображен на рисунке 3.17.

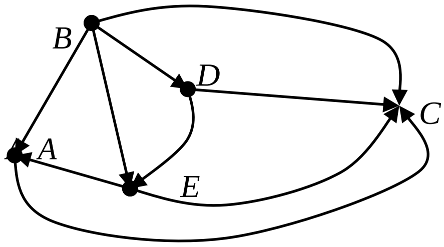


Рис. 3.16 а)

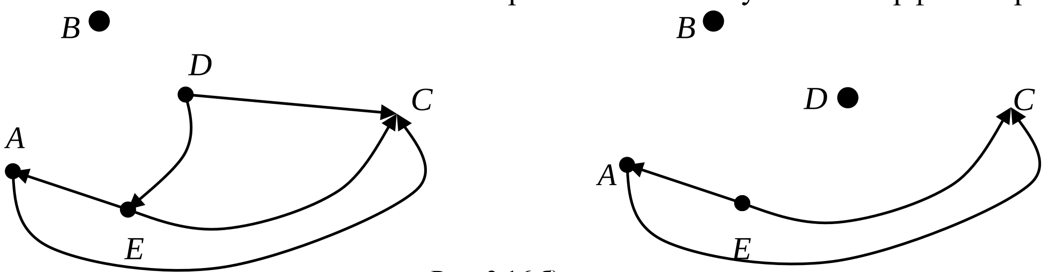
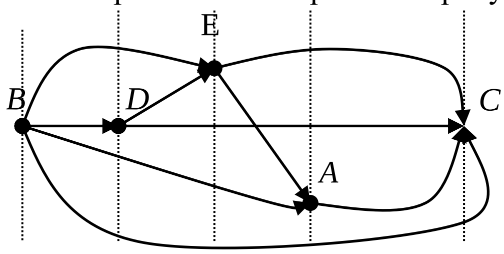


Рис. 3.16 б).

В данном примере в каждую группу входит только по одной вершине. Однако в общем случае в каждую такую группу могут входить несколько вершин, если граф большой и содержит много вершин.



1-я 2-я 3-я 4-я 5-я группа

Рис. 3.17.

Упорядочим теперь вершины этого графа матричным способом. Для этого составим матрицу смежности вершин P. Вычислим компоненты вектора $v_1 = \sum_{i=1}^{5} P^+(x_i)$, представляющие собой полустепени захода вершин графа. Для орграфов различают полустепень захода $P^+(x_i)$ вершины x_i (количество дуг, заходящих в x_i) и полустепень выхода $P^-(x_i)$ (количество дуг, исходящих из x_i). Полустепень захода вершины B

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

	A	B	C	D	E
v_1	2	0	4	1	2
v_2	1	-	3	0	1
v_3	1	-	2	-	0
v_4	0	-	1	-	-
v_5	-	-	0	-	-
Группа	4	1	5	2	3

оказалась равной нулю. Это значит, что в эту вершину не заходит ни одна дуга, и вершина B образует первую группу. Исключим из рассмотрения вершину B и дуги, из нее исходящие, вычеркнув соответствующую строку матрицы P. Затем вычислим компоненты вектора

$v_2 = v_1 - v_B$. Нулевая компонента теперь будет соответствовать вершине D, т. е. вершина D образует вторую группу.

Так продолжается до получения вектора v_i, у которого будет часть только нулевых компонент, а остальные вычеркнуты. В нашем случае это вектор v_5 и вершина C, которая образует последнюю пятую группу.

При упорядочивании дуг получается та же картина, а сами дуги нумеруются подобным же образом. Используем опять граф, изображенный на рис. 3.16 а).

1. Найдем дуги, не имеющие непосредственно предшествующих дуг (они образуют первую группу).

2. Вычеркнем найденные дуги. После этого найдется, по крайней мере, одна новая дуга, не имеющая непосредственно предшествующей (в графе без дуг первой группы). Эти дуги составят вторую группу. Второй шаг повторяется до тех пор, пока все дуги не будут разбиты на группы. На рисунке 3.18 изображен граф с упорядоченными по описанному алгоритму дугами. Штрихованными линиями показаны связи между дугами, существующие в исходном орграфе.

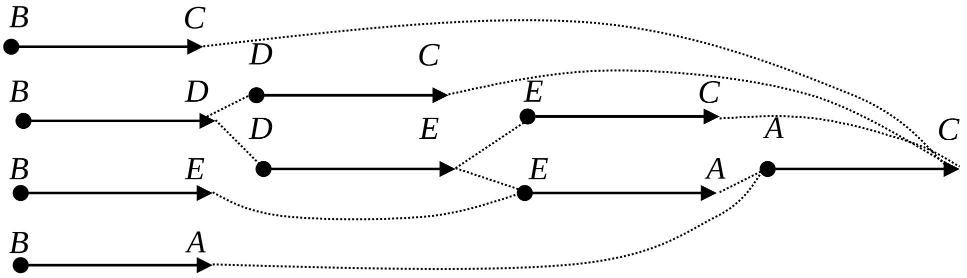


Рис. 3.18.

3.7. Выявление маршрутов с заданным количеством ребер

С помощью матрицы смежности вершин можно найти все маршруты, содержащие заданное количество ребер (дуг). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.7. **Для определения количества маршрутов, состоящих из k ребер (дуг), необходимо возвести в k-ю степень матрицу смежности вершин. Тогда элемент $p_{ij}^{(k)}$ даст количество маршрутов длины k (состоящих из k ребер) из вершины x_i в вершину x_j.**

Пример 1. Рассмотрим неориентированный граф, изображенный на рис. 3.19. Составим матрицу смежности вершин и возведем ее в квадрат. Результат возведения изображен прямо под графом. Рассмотрим первую строку. Элемент $p_{11}^{(2)} = 3$. Это значит, что существуют три маршрута из A в A длиной два ребра. Действительно, это маршруты Au_1Bu_1A, Au_2Cu_2A, Au_3Du_3A. Из A в B существуют два маршрута: Au_2Cu_5B, Au_3Du_4B. Если использовать числовую матрицу сме-

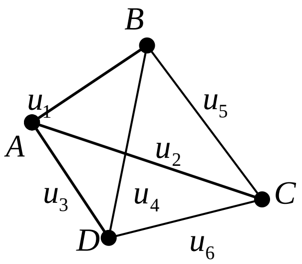


Рис. 3.19.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

жности вершин, то для нахождения самих маршрутов необходимо работать с графом. Если же воспользоваться модифицированной матрицей смежности, в ячейки которой записаны названия ребер, то можно получить не только количество маршрутов, но и сами маршруты. Действительно, для данного примера имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & u_5 & u_4 \\ u_2 & u_5 & 0 & u_6 \\ u_3 & u_4 & u_6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & u_5 & u_4 \\ u_2 & u_5 & 0 & u_6 \\ u_3 & u_4 & u_6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 & u_2u_5 + u_3u_4 & u_1u_5 + u_3u_6 & u_1u_4 + u_2u_6 \\ u_5u_2 + u_4u_3 & u_1u_1 + u_5u_5 + u_4u_4 & u_1u_2 + u_4u_6 & u_1u_3 + u_5u_6 \\ u_5u_1 + u_6u_3 & u_1u_2 + u_6u_4 & u_2u_2 + u_5u_5 + u_6u_6 & u_2u_3 + u_5u_4 \\ u_4u_1 + u_2u_6 & u_3u_1 + u_5u_6 & u_3u_2 + u_4u_5 & u_3u_3 + u_4u_4 + u_6u_6 \end{pmatrix}.$$

Аналогично обстоит дело и с орграфом. У него матрица смежности вершин несимметрическая. Рассмотрим следующий орграф (см. рис. 3.20) и определим все маршруты с тремя ребрами. Матрица смежности и результаты ее возведения в квадрат и куб находятся

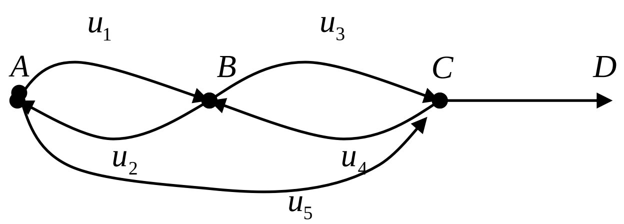


Рис. 3.20.

ниже. Рассмотрим элемент $p_{22}^{(2)}$ после возведения матрицы смежности вершин в квадрат. $p_{22}^{(2)} = 2$, т. е. из вершины B в вершину B есть два маршрута длиной две дуги. Это маршруты Bu_3Cu_4B и Bu_2Au_1B. После возведения матрицы в куб сохраняется та же картина. Например, $p_{12}^{(3)} = 2$; это значит, что есть два маршрута длиной три дуги из вершины A в вершину B. Это маршруты $Au_1Bu_2Au_1B$ и $Au_1Bu_3Cu_4B$. Для получения цепей (маршрутов, в которых каждое ребро встречается один раз) нужно в модифицированной матрице P^3 вычеркнуть те слагаемые, в которых какой-либо сомножитель встречается более одного раза.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 3.7 следуют да важных следствия, позволяющие определять наличие маршрутов и циклов в графе.

Следствие 1. **В графе** G **мощности** n **тогда и только тогда существует** (x_i, x_j)**-маршрут** $(x_i \neq x_j)$**, когда** (i, j)**-й элемент матрицы** $P + P^2 + \ldots + P^{n-1}$ **не равен нулю.**

Следствие 2. **В графе** G **мощности** n **тогда и только тогда существует цикл, содержащий вершину** x_i**, когда** (i,i)**-й элемент матрицы** $P + P^2 + \ldots + P^n$ **не равен нулю.**

В рассмотренном примере 1 имеем $n=4$, $P^4=\begin{pmatrix}2&3&3&2\\1&4&3&2\\2&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $A=P+P^2+P^3=$

$$=\begin{pmatrix}2&4&4&2\\3&3&4&2\\1&3&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ B=P+P^2+P^3+P^4=\begin{pmatrix}4&7&7&4\\4&7&7&4\\3&4&4&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим элементы матрицы A. Например, $a_{24}=2\neq 0$. Это значит, что в исходном графе (см. рис. 3.20) существуют маршруты из вершины B в вершину D. Это маршруты: $BCD,\ BACD,\ BCBACD$. Аналогично, $b_{22}=7\neq 0$. Таким образом, существуют циклы, проходящие через вершину B. Это, например, циклы $BACB,\ BAB$ и BCB. Так как $b_{44}=0$, то через вершину D не приходит ни один цикл. Это хорошо видно на рис. 3.20.

3.8. Определение экстремальных путей на графах. Метод Шимбелла*

Введем, следуя Шимбеллу, специальные операции над элементами матрицы смежности вершин, позволяющие находить кратчайшие или максимальные пути между вершинами,
состоящие из заданного количества ребер. Эти операции таковы.

1) Операция умножения двух величин a и b при возведении матрицы в степень соответствует их алгебраической сумме, то есть

$$\begin{cases}a\cdot b=b\cdot a\Rightarrow a+b=b+a,\\ a\cdot 0=0\cdot a=0\Rightarrow a+0=0.\end{cases}\qquad(3.8.1)$$

2) Операция сложения двух величин a и b заменяется выбором из этих величин минимального (максимального) элемента, то есть

$$a+b=b+a=\min(\max)\ \{a,b\},\qquad(3.8.2)$$

нули при этом игнорируются. Минимальный или максимальный элемент выбирается из ненулевых элементов. Нуль в результате операции (3.8.2) может быть получен лишь тогда, когда все элементы из выбираемых – нулевые.

С помощью этих операций длины кратчайших или максимальных путей между всеми вершинами определяется возведением в степень весовой матрицы Ω, содержащей веса ребер. Например, элементы матрицы Ω^2 определяются следующим образом $\omega_{ij}^{(2)}=\min(\max)\ \left\{\left(\omega_{i1}^{(1)}+\omega_{1j}^{(1)}\right),\left(\omega_{i2}^{(1)}+\omega_{2j}^{(1)}\right),\ldots,\left(\omega_{in}^{(1)}+\omega_{nj}^{(1)}\right)\right\}$ Аналогично определяются элементы k-й степени матрицы Ω Рассмотрим пример. Составим для указанного на рис. 3.21 графа матрицу весов. Она определяет все маршруты, состоящие из одного ребра. Найдем кратчайшие пути из двух ребер, для этого возведем эту матрицу в квадрат с учетом операций Шимбелла (min – кратчайшие пути).

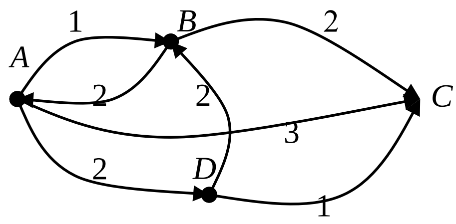


Рис. 3.21.

$$P^2=\begin{pmatrix}0&1&3&2\\2&0&2&0\\0&0&0&0\\0&2&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&3&2\\2&0&2&0\\0&0&0&0\\0&2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&3&0\\0&2&5&4\\0&0&0&0\\4&0&4&0\end{pmatrix}.$$

* Шимбелл (???? - ????) – американский математик.

Например, $$\omega_{11}^{(2)} = \min\left\{\left(\omega_{11}^{(1)}+\omega_{11}^{(1)}\right),\left(\omega_{12}^{(1)}+\omega_{21}^{(1)}\right),\left(\omega_{13}^{(1)}+\omega_{31}^{(1)}\right),\left(\omega_{14}^{(1)}+\omega_{41}^{(1)}\right)\right\}=$$
$$=\min\{(0+0),(1+2),(3+0),(2+0)\}=\min\{0,3,0,0\}=3.$$

Аналогично, кратчайшие пути из трех ребер будут
$$P^3=\begin{pmatrix}3&4&2&0\\0&2&5&4\\0&0&0&0\\4&0&4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&3&2\\2&0&2&0\\0&0&0&0\\0&2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4&6&5\\4&6&4&0\\0&0&0&0\\0&5&7&6\end{pmatrix}$$ и так далее. Например, длина кратчайшего пути из трех ребер из вершины D в вершину C равна семи. Это путь $DBAC$.

3.9. Практическое занятие № 6. Способы задания графов. Операции над графами. Метрические характеристики графов. Упорядочение элементов орграфов

3.9.1 Показать, что для произвольного графа $G=(S,U)$ справедливо равенство $\sum\limits_{x\in S}P(x)=2|U|$.

3.9.2. Для данных графов (см. рис. 3.22) составить матрицы смежности вершин, смежности дуг и инциденций:

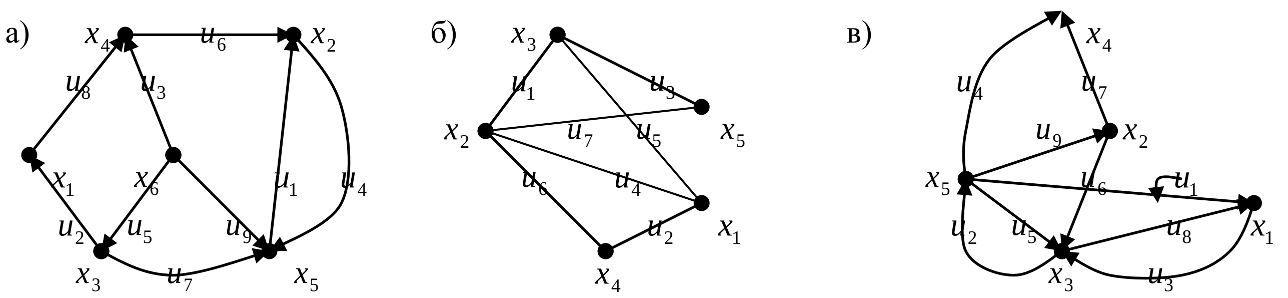
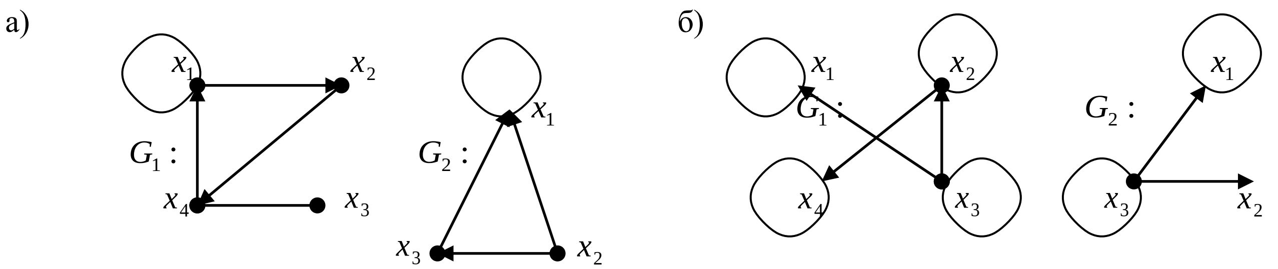


Рис. 3.22.

3.9.3. По матрице смежности вершин построить наглядные изображения графов:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}1&1&2&0&0\\1&0&1&3&0\\2&1&1&0&2\\0&3&0&1&1\\0&0&2&1&0\end{pmatrix};\ \text{б)}\begin{pmatrix}0&2&1&0&0&2\\2&0&1&1&0&0\\1&1&1&0&2&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&2&1&1&2\\2&0&1&1&2&0\end{pmatrix};\ \text{в)}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\\1&0&1&1&1\end{pmatrix};\ \text{г)}\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&1\\1&0&0&1&1&0\end{pmatrix}.$$

3.9.4. На рисунке 3.23 даны графы G_1 и G_2. Найти $G_1\cup G_2$ и $G_1\times G_2$ если:



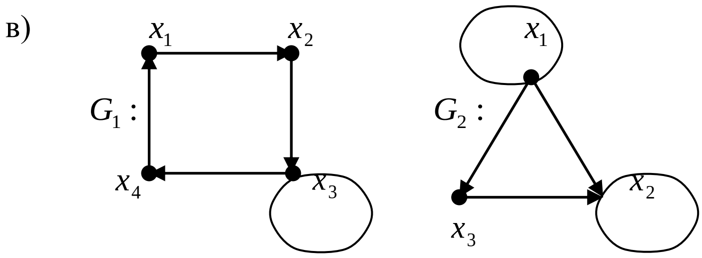


Рис. 3.23.

3.9.5. Найти матрицы сильных компонент и маршрутов длины три, исходящих из вершины x_1 для графов, изображенных на рисунке 3.24:

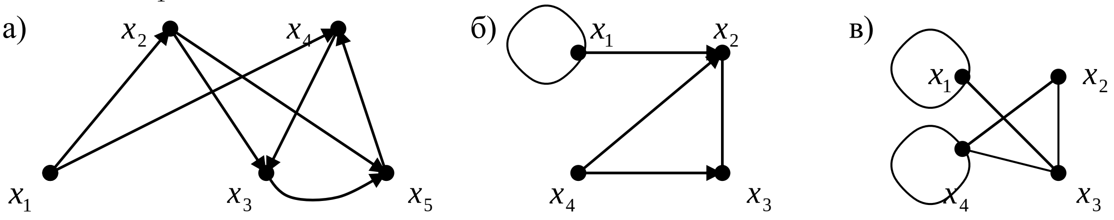
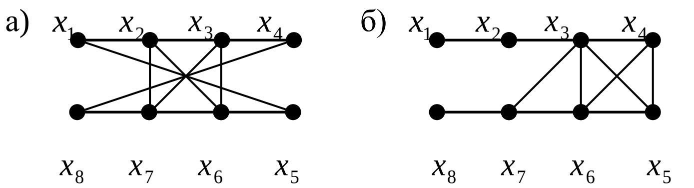


Рис. 3.24.

3.9.6. Найти эксцентриситеты вершин, радиусы и диаметры графов, периферийные, центральные вершины и диаметральные цепи следующих графов (см. рис. 3.25):



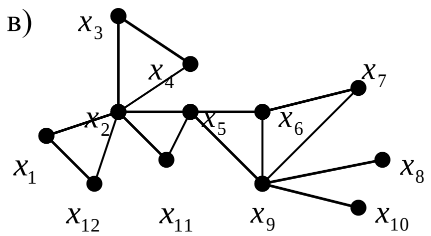


Рис. 3.25.

3.9.7. Упорядочить вершины и дуги орграфов, изображенных на рисунке 3.26, графическим и матричным способом (дуги – только графическим способом).

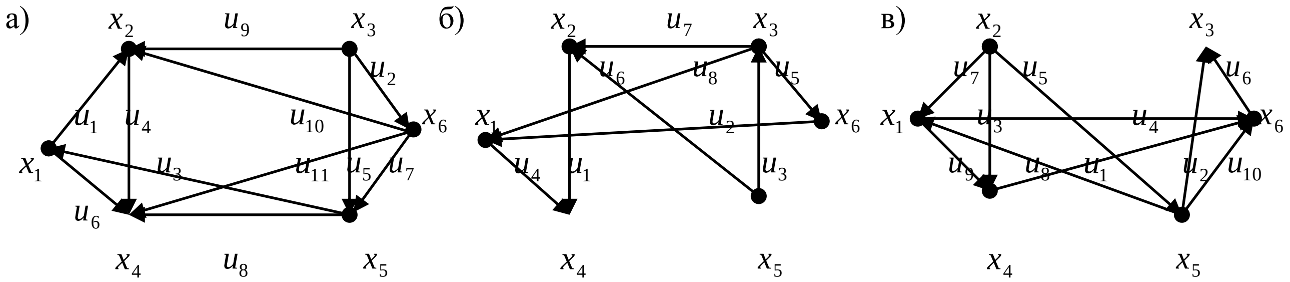


Рис. 3.26.

3.9.8. Доказать, что три графа, изображенных на рисунке 3.27, изоморфны, а графы на рисунке 3.28 не изоморфны.

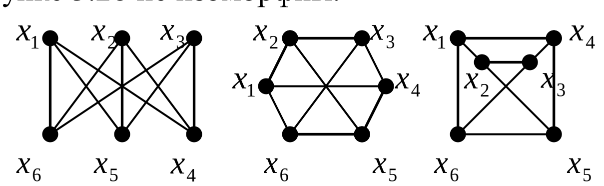


Рис. 3.27.

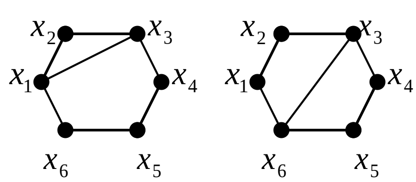


Рис. 3.28.

3.9.9. Построить граф, центр которого:

а) состоит ровно из одной вершины;

б) состоит ровно из трех вершин и не совпадает с множеством всех вершин;

в) совпадает с множеством всех вершин.

3.9.10. Показать, что в любом графе без петель и кратных ребер, содержащем не менее двух вершин, найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

3.10. Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры*

Рассмотрим еще несколько алгоритмов нахождения кратчайшего пути между двумя заданными вершинами в ориентированной сети. Пусть $G = \{S, U, \Omega\}$ - ориентированный граф со взвешенными дугами. Обозначим s - вершину - начало пути и t - вершину – конец пути.

Общий подход к решению задачи о кратчайшем пути был развит американским математиком Ричардом Беллманом**, который предложил название динамическое программирование. Задача о кратчайшем пути частный случай следующей задачи: найти в заданном графе пути, соединяющие две заданные вершины и доставляющие минимум или максимум некоторой аддитивной функции, определенной на путях. Чаще всего эта функция трактуется как длина пути и задача называется задачей о кратчайших путях. Алгоритм Дейкстры одна из реализаций этой задачи. Его часто называют алгоритмом расстановки меток. В процессе работы этого алгоритма узлам сети $x_i \in S$ приписываются числа (метки) $d(x_i)$, которые служат оценкой длины (веса) кратчайшего пути от вершины s к вершине x_i. Если вершина x_i получила на некотором шаге метку $d(x_i)$, это означает, что в графе G существует путь из s в x_i, имеющий вес $d(x_i)$. Метки могут находиться в двух состояниях – быть временными или постоянными. Превращение метки в постоянную означает, что кратчайшее расстояние от вершины s до соответствующей вершины найдено.

Алгоритм Дейкстры содержит одно ограничение – веса дуг должны быть положительными. Сам алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе находится длина кратчайшего пути, на втором – строится сам путь от вершины s к вершине t.

Этап 1. Нахождения длины кратчайшего пути.

Шаг 1. Присвоение вершинам начальных меток.

Полагаем $d(s) = 0^*$ и считаем эту метку постоянной (постоянные метки помечаются сверху звездочкой). Для остальных вершин $x_i \in S,\ x_i \neq s$ полагаем $d(x_i) = \infty$ и считаем эти метки временными. Пусть $\tilde{x} = s,\ \tilde{x}$ - обозначение текущей вершины.

Шаг 2. Изменение меток.

Для каждой вершины x_i с временной меткой, непосредственно следующей за вершиной $\tilde{x}$, меняем ее метку в соответствии со следующим правилом:

$$d_{нов.}(x_i) = \min\{d_{стар.}(x_i), d(\tilde{x}) + \omega(\tilde{x}, x_i)\}. \qquad (3.10.1)$$

Шаг 3. Превращение метки из временной в постоянную.

Из всех вершин с временными метками выбираем вершину x_j^* с наименьшим значением метки

$$d(x_j^*) = \min\left\{ d(x_j) \big/ x_j \in S,\ d(x_j) - \text{временная} \right\} \qquad (3.10.2)$$

Превращаем эту метку в постоянную и полагаем $\tilde{x} = x_j^*$.

Шаг 4. Проверка на завершение первого этапа.

Если $\tilde{x} = t$, то $d(\tilde{x})$ - длина кратчайшего пути от s до t. В противном случае происходит возвращение ко второму шагу.

---

* Едсгер Дейкстра (1930 - 2002) – нидерландский математик.

** Ричард Эрнест Беллман (1920 – 1984) – американский математик.

Этап 2. Построение самого кратчайшего пути.

Шаг 5. Последовательный поиск дуг кратчайшего пути.

Среди вершин, непосредственно предшествующих вершине $\tilde{x}$ с постоянными метками, находим вершину x_i, удовлетворяющую соотношению

$$d(\tilde{x}) = d(x_i) + \omega(x_i, \tilde{x}). \qquad (3.10.3)$$

Включаем дугу $(x_i, \tilde{x})$ в искомый путь и полагаем $\tilde{x} = x_i$.

Шаг 6. Проверка на завершение второго этапа.

Если $\tilde{x} = s$, то кратчайший путь найден – его образует последовательность дуг, полученных на пятом шаге и выстроенных в обратном порядке. В противном случае возвращаемся к пятому шагу.

Пример 1. Задана весовая матрица Ω сети G. Найти минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_6 по алгоритму Дейкстры.

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\
\infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\
\infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\
\infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

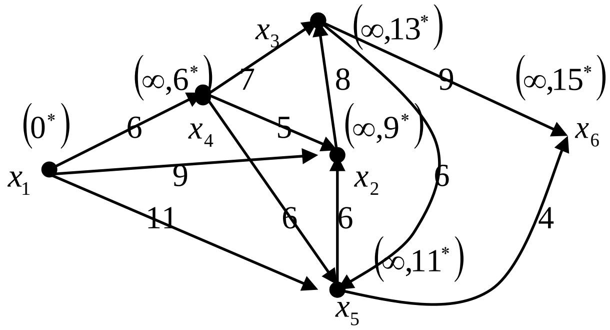


Рис. 3.29.

На рисунке 3.29 изображен сам граф по данной матрице весов. Поскольку в данном графе есть цикл между вершинами x_2, x_3 и x_5, то вершины графа нельзя упорядочить по алгоритму Фалкерсрна. На рисунке графа ременные и постоянные метки указаны над соответствующей вершиной. Итак, распишем подробно работу алгоритма Дейкстры по шагам.

Этап 1. *Шаг 1.* Полагаем $d(x_1) = 0^*, \tilde{x} = x_1$, $d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = d(x_5) = d(x_6) = \infty.$

1-я итерация. Шаг 2. Множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{x} = x_1$ с временными метками $\tilde{S} = \{x_2, x_4, x_5\}$. Пересчитываем временные метки этих вершин $d(x_2) = \min\{\infty, 0^* + 9\} = 9$, $d(x_4) = \min\{\infty, 0^* + 6\} = 6$, $d(x_5) = \min\{\infty, 0^* + 11\} = 11$.

Шаг 3. Одна из временных меток превращается в постоянную $\min\{9, \infty, 6, 11, \infty\} = 6^* = d(x_4)$, $\tilde{x} = x_4$.

Шаг 4. $\tilde{x} = x_4 \neq t = x_6$, происходит возвращение на второй шаг.

2-я итерация. Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_2, x_3, x_5\}$, $d(x_2) = \min\{9, 6^* + 5\} = 9$, $d(x_3) = \min\{\infty, 6^* + 7\} = 13$, $d(x_5) = \min\{11, 6^* + 6\} = 11$.

Шаг 3. $\min\{d(x_2), d(x_3), d(x_5), d(x_6)\} = \min\{9, 13, 11, \infty\} = 9^* = d(x_2)$, $\tilde{x} = x_2$.

Шаг 4. $x_2 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

3-я итерация. Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_3\}$, $d(x_3) = \min\{13, 9^* + 8\} = 13$.

Шаг 3. $\min\{d(x_3), d(x_5), d(x_6)\} = \min\{13, 11, \infty\} = 11^* = d(x_5)$, $\tilde{x} = x_5$.

Шаг 4. $x_5 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

4-я итерация. Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_6\}$, $d(x_6) = \min\{\infty, 11^* + 4\} = 15$.

Шаг 3. $\min\{d(x_3), d(x_6)\} = \min\{13, 15\} = 13^* = d(x_3)$, $\tilde{x} = x_3$.

Шаг 4. $x_3 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

5-я итерация. Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_6\}$, $d(x_6) = \min\{15, 13^* + 9\} = 15$.

Шаг 3. $\min\{d(x_6)\} = \min\{15\} = 15^*$, $\tilde{x} = x_6$.

Шаг 4. $x_6 = t = x_6$, конец первого этапа.

Этап 2. *Шаг 5.* Составим множество вершин, непосредственно предшествующих $\tilde{x} = x_6$ с постоянными метками $\tilde{S} = \{x_3, x_5\}$. Проверим для этих двух вершин выполнение равенства (3.10.3).

$d(\tilde{x}) = 15 = 11^* + 4 = d(x_5) + \omega(x_5, x_6)$, $d(\tilde{x}) = 15 \neq 13^* + 9 = d(x_3) + \omega(x_3, x_6)$. Включаем дугу (x_5, x_6) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_5$.

Шаг 6. $\tilde{x} \neq s = x_1$, возвращение на пятый шаг.

2-я итерация. Шаг 5. $\tilde{S} = \{x_1, x_4\}$.

$d(\tilde{x}) = 11 = 0^* + 11 = d(x_1) + \omega(x_1, x_5)$, $d(\tilde{x}) = 11 \neq 6^* + 6 = d(x_4) + \omega(x_4, x_5)$. Включаем дугу (x_1, x_5) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_1$.

Шаг 6. $\tilde{x} = s = x_1$, завершение второго этапа.

Итак, кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_6 построен. Его длина (вес) равна 15, сам путь образует следующая последовательность дуг $\mu = (x_1, x_5) - (x_5, x_6)$.

3.11. Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Беллмана - Мура*

Если веса – произвольные числа и граф G не содержит ориентированных циклов отрицательного веса, то минимальный путь может быть найден алгоритмом Беллмана – Мура, похожим на алгоритм Дейкстры. Этот алгоритм часто называют алгоритмом корректировки меток. Как и в алгоритме Дейкстры всем вершинам приписываются метки, однако здесь нет деления меток на временные и постоянные. Корректировка меток осуществляется по старому правилу (3.10.1), однако выполнение условия (3.10.2) теперь не гарантирует, что длина кратчайшего пути от s до x_j найдена, так как наличие в графе G дуг с отрицательными весами может уменьшить эту метку на последующих шагах. Поэтому в алгоритме Беллмана – Мура вместо процедуры превращения временной метки в постоянную формируется очередь вершин, которые нужно просмотреть для анализа возможности уменьшения по правилу (3.10.1) меток вершин, не находящихся в данный момент в очереди, но достижимых из нее за один шаг. В процессе работы алгоритма одна и та же вершина может несколько раз вставать в очередь, а затем покидать ее.

Алгоритм Беллмана – Мура состоит из двух этапов. На первом этапе находятся длины кратчайших путей от вершины s до всех остальных вершин графа. Этот этап заканчивается при отсутствии вершин в очереди.

Второй этап – построение кратчайшего пути от s до t совпадает с соответствующим этапом в алгоритме Дейкстры и выполняется по формуле (3.10.3). Опишем подробно все шаги алгоритма.

Этап 1. Нахождение длин кратчайших путей от вершины s до всех остальных вершин графа.

Шаг 1. Присвоение начальных значений. $d(s) = 0$, $d(x_j) = \infty$, $x_j \in S$, $\tilde{x} = s$, $Q = \{\tilde{x}\}$ - множество вершин в очереди.

Шаг 2. Корректировка меток и очереди.

---

* Элиаким Гастингс Мур (1862 – 1932) – американский математик.

Удаляем из очереди Q вершину, находящуюся в самом начале очереди. Для каждой вершины x_i, непосредственно достижимой из $\tilde{x}$, корректируем ее метку по формуле (3.9.1). Если при этом $d_{нов.}(x_i) < d_{стар.}(x_i)$, то корректируем очередь вершин, иначе продолжаем перебор вершин и корректировку временных меток.

Корректировка очереди. Если x_i не была ранее в очереди и не находится в ней в данный момент, то вершину x_i ставим в конец очереди. Если же x_i уже была когда-нибудь ранее в очереди или находится там в данный момент, то переставляем ее в начало очереди.

Шаг 3. Проверка на завершение первого этапа. Если $Q \neq \varnothing$, то возвращаемся к началу второго шага, если же $Q = \varnothing$, то первый этап закончен, то есть минимальные расстояния от s до всех вершин графа найдены.

Рассмотрим подробный **пример 1.** Пусть граф G задан весовой матрицей Ω.

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 7 & -8 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -7 & 5 \\ \infty & \infty & 8 & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

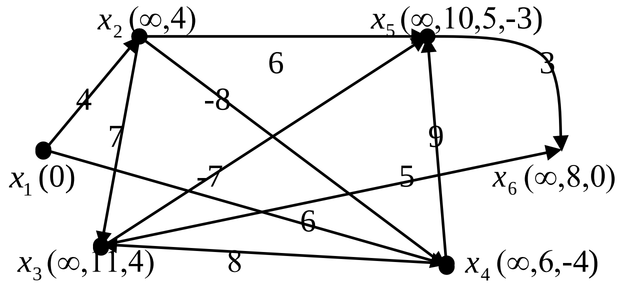


Рис. 3.30.

На рисунке 3.30 изображен исходный граф по матрице весов. Рассчитаем кратчайший путь от узла x_1 до узла x_6.

Этап 1. *Шаг 1.* $\tilde{x} = x_1,\ d(x_1) = 0,\ d(x_j) = \infty,\ j = \overline{2,6},\ Q = \{x_1\}.$

Шаг 2. $\tilde{x} = x_1,\ Q = Q \setminus \{x_1\} = \varnothing.$ Пусть $\tilde{S}$ - множество вершин непосредственно достижимых из вершины $\tilde{x}$. $\tilde{S} = \{x_2, x_4\},\ d(x_2) = \min\{\infty, 0+4\} = 4.$

4<∞? Да. $Q = \{x_2\}$, x_2 надо было поставить в конец очереди, но Q было пусто, поэтому конец очереди совпал с началом.

$d(x_4) = \min\{\infty, 0+6\} = 6.$

$6 < \infty$? Да. $Q = \{x_2, x_4\}.$

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет. Переход на начало второго шага.

<u>Вт</u>орая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_2,\ Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_4\},\ \tilde{S} = \{x_3, x_4, x_5\}.$

$d(x_3) = \min\{\infty, 4+7\} = 11.$

11< ∞? Да. $Q = \{x_4, x_3\}.$

$d(x_4) = \min\{6, 4-8\} = -4.$

-4<6? Да. 2бв). $Q = \{x_4, x_3\}.$ Вершину x_4 надо поставить в начало очереди, но она уже стоит там.

$d(x_5) = \min\{\infty, 4+6\} = 10.$

10<∞? Да. $Q = \{x_4, x_3, x_5\}.$

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет, переход на третью итерацию второго шага.

Третья итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_4,\ Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_3, x_5\},\ \tilde{S} = \{x_3, x_5\}.$

$d(x_3) = \min\{11, -4+8\} = 4.$

4<11? Да. $Q = \{x_3, x_5\}.$ Вершину x_3 надо поставить в начало очереди, но она уже там.

$d(x_5) = \min\{10, -4+9\} = 5.$

5<10? Да. $Q = \{x_5, x_3\}.$ Вершину x_5 передвигаем из конца очереди в начало.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет, переход на четвертую итерацию второго шага.

Четвертая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_5$, $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_3\}$, $\tilde{S} = \{x_6\}$.

$d(x_6) = \min\{\infty, 5+3\} = 8$.

8< ∞? Да. $Q = \{x_3, x_6\}$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

Пятая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_3$, $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_6\}$, $\tilde{S} = \{x_5, x_6\}$.

$d(x_5) = \min\{5, 4-7\} = -3$.

-3<5? Да. $Q = \{x_5, x_6\}$.

$d(x_6) = \min\{8, 4+5\} = 8$.

9<8? Нет.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

Шестая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_5$, $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \{x_6\}$, $\tilde{S} = \{x_6\}$.

$d(x_6) = \min\{8, -3+3\} = 0$.

0<8? Да. $Q = \{x_6\}$. Q содержало только вершину x_6 и она встала в начало очереди.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

Седьмая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_6$, $Q = Q \setminus \{\tilde{x}\} = \varnothing$. $\tilde{S} = \varnothing$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$. Конец первого этапа. Найдены минимальные расстояния до всех вершин от первой вершины. Эти расстояния таковы: $d(x_2) = 4,\ d(x_3) = 4,\ d(x_4) = -4,\ d(x_5) = -3,\ d(x_6) = 0.$

Второй этап. *Шаг 4.* Полагаем $\tilde{x} = x_6$. Пусть $\tilde{S}$ - множество вершин, непосредственно предшествующих $\tilde{x}$. $\tilde{S} = \{x_3, x_5\}$.

Первая итерация. $\begin{array}{l} d(\tilde{x}) = d(x_6) = 0 \neq 4 + 5 = d(x_3) + \omega(x_3, x_6), \\ d(\tilde{x}) = d(x_6) = 0 = -3 + 3 = d(x_5) + \omega(x_5, x_6). \end{array}$ Включаем дугу (x_5, x_6) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_5$. Возвращаемся на четвертый шаг.

Вторая итерация. $\tilde{x} = s$? Нет.
$\tilde{S} = \{x_2, x_3, x_4\}$. $d(\tilde{x}) = d(x_5) = -3 = 4 - 7 = d(x_3) + \omega(x_3, x_5)$,
$d(\tilde{x}) = d(x_5) = -3 \neq 4 + 6 = d(x_2) + \omega(x_2, x_5)$,
$d(\tilde{x}) = d(x_5) = -3 \neq -4 + 9 = d(x_4) + \omega(x_4, x_5)$. Включаем дугу (x_3, x_5) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_3$. Возвращаемся на четвертый шаг.

Третья итерация. $\tilde{x} = s$? Нет. $\tilde{S} = \{x_2, x_4\}$.
$d(\tilde{x}) = d(x_3) = 4 \neq 4 + 7 = d(x_2) + \omega(x_2, x_3)$,
$d(\tilde{x}) = d(x_3) = 4 = -4 + 8 = d(x_4) + \omega(x_3, x_4)$. Включаем дугу (x_3, x_4) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_4$. Возвращаемся на четвертый шаг.

Четвертая итерация. $\tilde{x} = s$? Нет. $\tilde{S} = \{x_1, x_2\}$.
$d(\tilde{x}) = d(x_4) = -4 \neq 0 + 6 = d(x_1) + \omega(x_1, x_4)$,
$d(\tilde{x}) = d(x_4) = -4 = 4 - 8 = d(x_2) + \omega(x_2, x_4)$. Включаем дугу (x_2, x_4) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_2$. Возвращаемся на четвертый шаг.

Пятая итерация. $\tilde{x} = s$? Нет. $\tilde{S} = \{x_1\}$.
$d(\tilde{x}) = d(x_2) = 4 = 0 + 4 = d(x_1) + \omega(x_1, x_2)$. Включаем дугу (x_1, x_2) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_1$. Возвращаемся на четвертый шаг.

Шестая итерация. $\tilde{x} = s$? Да. Задача закончена. Искомый кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_6 имеет нулевой вес и состоит из следующих дуг $(x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6)$.

3.12. Алгоритм нахождения максимального пути

Для нахождения максимального пути граф G (сеть) должен быть ациклическим, ибо в противном случае может оказаться, что длины некоторых путей не ограничены сверху. Если G_n - ациклический граф, то для любых двух его вершин $x_i \neq x_j$ выполняется одно из трех условий:

1) x_i предшествует x_j, $x_i \in S_{предш.}(x_j)$;

2) x_i следует за x_j, $x_i \in S_{след.}(x_j)$;

3) нет пути между x_i и x_j.

Первое и второе условия одновременно не выполнимы из-за требуемой ацикличности графа.

Перед вычислением максимального пути в орграфе необходимо упорядочить вершины графа по алгоритму Фалкерсона. Сам алгоритм вычисления максимального пути чисто перечислительный. Он перебирает все возможные пути от текущей вершины до всех последующих вершин, достижимых из текущей вершины.

Пусть d_j - длина максимального пути от вершины x_1 до вершины x_j, тогда величина d_j удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{cases} d_1 = 0, \\ d_j = \max\left(d_i + \omega_{ij} \big/ x_i \in S_{предш.}(x_j) \right), \; j = 2,3,\ldots,k+1 \\ d_j = \infty, \; j = k+2, k+3, \ldots, n \end{cases} \qquad (3.12.1)$$

Соотношения (3.12.1) позволяют легко вычислить длины максимальных путей от $s = x_1$ до вершин, достижимых из вершины s. Сами пути могут быть построены методом последовательного возвращения (второй этап в алгоритме Дейкстры).

Пример 1. Граф (сеть, см. рис. 3.31) задан матрицей весов. Найти длину максимального пути из вершины x_1 в x_6 и сам этот путь.

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 7 & 8 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 7 & 5 \\ \infty & \infty & 8 & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

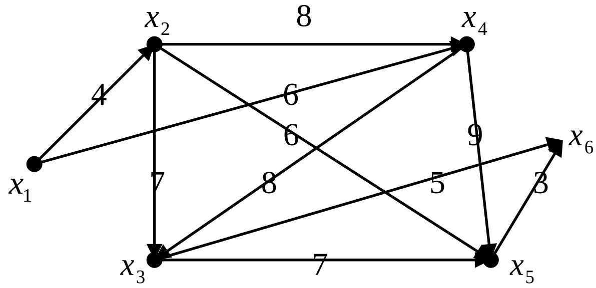


Рис. 3.31.

Этот граф ациклический, поэтому возможно упорядочение его вершин по алгоритму Фалкерсона. Сделаем это графическим способом.

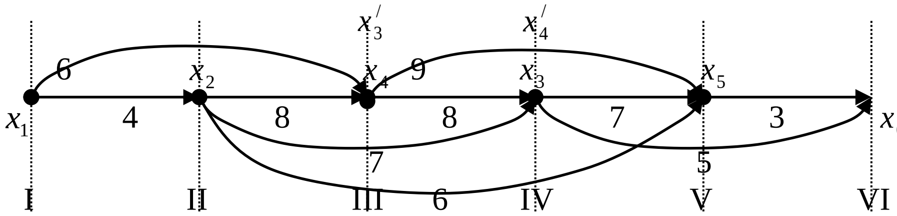


Рис. 3.32.

Переобозначим две вершины: x_4 назовем $x_3^{/}$, а x_3 - $x_4^{/}$ и применим рекуррентные формулы (3.12.1). Тогда

Этап 1. $d_1 = 0$,

$d_2 = \max(d_1 + 4) = 4$,

$d_3^{/} = \max(d_1 + 6, d_2 + 8) = \max(0 + 6, 4 + 8) = 12$,

$d_4^{/} = \max(d_3^{/} + 8, d_2 + 7) = \max(12 + 8, 4 + 7) = 20$,

$d_5 = \max(d_4^{/} + 7, d_3^{/} + 9, d_2 + 6) = \max(20 + 7, 12 + 9, 4 + 6) = 27$,

$d_6 = \max(d_5 + 3, d_4^{/} + 5) = \max(27 + 3, 20 + 5) = 30$.

Итак, длина максимального пути из x_1 в x_6 равна 30.

Этап 2. x_6: $d_6 = 30 = d_5 + 3 = 27 + 3$ - включаем дугу (x_5, x_6) в максимальный путь,

$d_6 = 30 \neq d_4^{/} + 5 = 20 + 5$.

x_5: $d_5 = 27 = d_4^{/} + 7 = 20 + 7$ - включаем дугу $(x_4^{/}, x_5)$ в максимальный путь,

$d_5 = 27 \neq d_3^{/} + 9 = 12 + 9$,

$d_5 = 27 \neq d_2 + 6 = 4 + 6$.

$x_4^{/}$: $d_4^{/} = 20 = d_3^{/} + 8 = 12 + 8$ - включаем дугу $(x_3^{/}, x_4^{/})$ в максимальный путь,

$d_4^{/} = 20 \neq d_2 + 7 = 4 + 7$.

$x_3^/ :\ d_3^/ = 12 = d_2 + 8 = 4 + 8$ - включаем дугу $\left(x_2, x_3^/\right)$ в максимальный путь,

$d_3^/ = 12 \neq d_1 + 6 = 0 + 6$.

$x_2 :\ d_2 = 4 = d_1 + 4 = 0 + 4$ - включаем дугу $\left(x_1, x_2\right)$ в максимальный путь.

Итак, искомый путь таков: $\mu_{\max} = \left(x_1, x_2\right) - \left(x_2, x_3^/\right) - \left(x_3^/, x_4^/\right) - \left(x_4^/, x_5\right) - \left(x_5, x_6\right)$ или в старых обозначениях $\mu_{\max} = \left(x_1, x_2\right) - \left(x_2, x_4\right) - \left(x_4, x_3\right) - \left(x_3, x_5\right) - \left(x_5, x_6\right)$.

3.13. Особенности алгоритмов теории графов

Рассмотрение предыдущих задач позволяет сформулировать следующие свойства алгоритмов теории графов.

1) Каждый алгоритм состоит из совокупности конечного числа правил и предписаний. Действия над графом (матрицей), производимые в соответствии с правилами, должны быть достаточно просты.

2) Применение алгоритма совершается в дискретном времени; правила алгоритма применяются по шагам, число шагов – конечно.

3) Какое из правил будет применено на данном шаге или какое действие будет совершено в соответствии с некоторым правилом зависит только от результатов предыдущих шагов.

4) Алгоритмы обладают свойством локальности: действие в соответствии с правилом или установление непротиворечивости некоторого действия правилам алгоритма происходит на основе анализа дуг, инцидентных данной вершине, или вершин, смежных с данной.

5) Алгоритмы обладают свойством массовости: применяются либо для всех, либо для некоторого бесконечного множества графов.

3.14. Практическое занятие № 7. Нахождение минимальных и максимальных путей на орграфах

3.14.1. По заданной матрице весов Ω графа G найти величину минимального пути и сам путь от вершины $s = x_1$ до вершины $t = x_6$ или $t = x_7$ по алгоритму Дейкстры, а затем величину максимального пути и сам путь между теми же вершинами:

1) $$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

2) $$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 11 & \infty & 14 & 15 & \infty \\ \infty & - & 13 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 13 \\ \infty & 7 & 11 & - & 9 & \infty \\ \infty & 11 & 10 & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

3) $$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 5 & 8 & 7 & 18 & \infty \\ \infty & - & 11 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 17 \\ \infty & 10 & 12 & - & 6 & \infty \\ \infty & 7 & 8 & \infty & - & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

4) $$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 6 & 8 & 11 & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 9 & 7 & 15 \\ \infty & 8 & - & 7 & 4 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & 6 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

5) $$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & \infty & 11 & 15 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 14 & 18 & \infty \\ \infty & 9 & - & 13 & 7 & 11 & 22 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 23 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 19 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

6) $$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 3 & \infty & 14 \\ \infty & 3 & - & 3 & 4 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$7)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 7 & 9 & \infty & 11 & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & \infty & 13 \\ \infty & 6 & - & 5 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 \\ \infty & 4 & \infty & 6 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$8)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 7 & 15 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & - & 7 & 16 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 19 & \infty & 21 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 17 \\ \infty & 13 & 14 & 15 & - & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$9)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 10 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 11 & 9 & \infty & 19 \\ \infty & \infty & - & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty & 13 & - & 11 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$10)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 7 & 19 & 20 & \infty & 15 & \infty \\ \infty & - & \infty & 11 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & 9 & \infty & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 8 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$11)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 7 & 2 & \infty & 13 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 6 & \infty \\ \infty & 2 & - & 1 & 3 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$12)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 10 & 11 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & 8 & 11 & 17 \\ \infty & \infty & - & 5 & 6 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$13)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 6 & \infty & 9 & 12 & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ \infty & 4 & 8 & - & 6 & 14 \\ \infty & 7 & 5 & \infty & - & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$14)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 4 & 9 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 2 & 4 & - & 6 & \infty \\ \infty & 2 & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$15)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 5 & \infty & 10 & 8 & 12 & \infty \\ \infty & - & 7 & \infty & 4 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & \infty & 6 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 14 \\ \infty & \infty & 6 & \infty & - & 13 & 21 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$16)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 6 & 9 & 13 & 12 & \infty \\ \infty & - & 5 & 9 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$17)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 8 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 10 & 9 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & - & 10 & 12 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$18)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 11 & 14 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 10 & 15 & \infty \\ \infty & \infty & - & 11 & 16 & 20 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 11 & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$19)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 9 & 7 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 15 & \infty \\ \infty & 5 & - & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 6 & 7 & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$20)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 11 & 5 & 10 & \infty \\ \infty & 4 & - & 3 & 6 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & - & 5 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$21)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 4 & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 3 & \infty & 10 \\ \infty & 3 & - & 4 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ \infty & 2 & \infty & 5 & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$22)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 5 & 4 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 8 & \infty & 13 \\ \infty & 6 & - & 5 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & - & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$23)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 12 & 10 & \infty & 11 & \infty \\ \infty & - & \infty & 10 & 7 & 15 \\ \infty & 8 & - & 7 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & - & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$24)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 15 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 12 & 18 \\ \infty & 10 & - & 9 & 12 & 19 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 13 \\ \infty & \infty & \infty & 11 & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$25)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & \infty & 7 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 6 & 13 & \infty \\ \infty & 5 & - & 4 & 5 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & - & 5 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 26)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 7 & 8 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 9 & 7 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & 7 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 27)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 4 & 5 & 10 & 11 & \infty \\ \infty & - & 11 & 3 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & 7 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$28)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 8 & \infty & 5 & 10 & \infty \\ \infty & - & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 8 \\ \infty & 4 & 6 & - & 5 & 11 \\ \infty & 5 & 5 & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 29)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 4 & 6 & 8 \\ \infty & 8 & - & 5 & 6 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & - & 5 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 30)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 3 & 5 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 8 & \infty & 9 & 15 \\ \infty & \infty & - & 4 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 8 & - & 3 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

3.14.2. По заданной матрице весов Ω графа G найти минимальный путь по алгоритму Беллмана – Мура между начальной вершиной $s = x_1$ и конечной вершиной $t = x_6$ или $t = x_7$:

$$1)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 15 & \infty & 12 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & - & 4 & -6 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -4 & 2 & -3 \\ \infty & \infty & 10 & - & 7 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 2)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 3 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & 5 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & - & -4 & -6 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 6 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 3)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 2 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & -7 & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & -4 & \infty & 8 & - & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & -3 & -5 & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$4)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 3 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 7 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 4 & - & \infty & 7 & 6 & 10 \\ \infty & \infty & -5 & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & -9 & \infty & 12 & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 5)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 8 & 7 & 11 & \infty & \infty \\ \infty & - & -10 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 5 & - & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & -6 & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 6)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & -3 & 7 & \infty & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & 11 & \infty & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 6 & 4 \\ \infty & \infty & 7 & 9 & - & -6 & 12 \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$7)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 4 & 7 & 14 & -6 & 11 & \infty \\ \infty & - & -3 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -8 & 7 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & \infty \\ \infty & 12 & \infty & 5 & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 8)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & \infty & 6 & 9 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 7 & 10 & \infty \\ \infty & 3 & - & \infty & \infty & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty \\ \infty & \infty & -6 & 8 & - & 4 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 9)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & \infty & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & -6 & 10 & 12 \\ \infty & 4 & - & -4 & \infty & -7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 7 & 10 & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$10)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 11 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & 7 & 6 \\ \infty & -5 & - & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & -4 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$11)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 15 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 9 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 4 & - & 10 & -6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 16 \\ \infty & -18 & 7 & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$12)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 12 & 16 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & \infty & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ \infty & -7 & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$13)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 3 & 11 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ \infty & - & -5 & 15 & \infty & 18 & \infty \\ \infty & \infty & - & 7 & -7 & 8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & 10 & 8 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 21 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$14)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 9 & 10 & 11 & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & 8 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty & 12 \\ \infty & \infty & -4 & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 14 & - & 5 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$15)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & \infty & -8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & -9 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & -4 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$16)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 3 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ \infty & - & \infty & 8 & 5 & -10 & \infty \\ \infty & 4 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & -5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 13 \\ \infty & \infty & 7 & 6 & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$17)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 15 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & 11 & 18 & 20 \\ \infty & \infty & - & -4 & -10 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$18)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & - & 6 & -6 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & -5 & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$19)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & 15 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & 7 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & -7 & \infty \\ \infty & -8 & \infty & - & \infty & 5 & 6 \\ \infty & \infty & 5 & 9 & - & 4 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$20)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & -4 & - & 5 & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & - & -5 & 7 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$21)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & -11 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 12 & 8 & 15 & \infty \\ \infty & 5 & - & 17 & -9 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 16 & 27 \\ \infty & \infty & \infty & -8 & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$22)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 15 & \infty & 9 & 22 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ \infty & -6 & - & 4 & -7 & -8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & - & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 11 & \infty & - & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$23)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & 12 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & -8 & 9 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$24)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 3 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & - & -4 & 6 & -8 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 7 & \infty & 9 & - & 4 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$25)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 8 \\ \infty & -6 & 4 & - & 10 & \infty \\ \infty & 8 & -5 & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$26)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 9 & \infty & 7 & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 13 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & -6 & - & 4 & -8 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 10 & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & -7 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$27)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & \infty & 15 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & -8 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 10 & \infty & - & -9 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & \infty & - & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

28) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 12 & \infty & \infty & 15 & \infty \\ \infty & - & 6 & 10 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 10 & -8 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 11 & - & 7 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$ 29) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty \\ \infty & - & 4 & 10 & \infty & 15 & \infty \\ \infty & \infty & - & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ \infty & -8 & 7 & 11 & - & -6 & \infty \\ \infty & \infty & -8 & 7 & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$ 30) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & 5 & \infty & 9 & \infty \\ \infty & - & -8 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & -4 & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$

3.15. Деревья (основные определения)

Существует один простой и важный тип графов, которому разные авторы дали одинаковое название – деревья. Деревья отличаются предельной простотой строения. Существует несколько определений дерева.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф без циклов называется лесом. Таким образом, деревья являются компонентами леса.

Пусть $G = (S, U)$ и $|S| = n,\ |U| = m.$ Тогда справедлива эквивалентность следующих утверждений (см. рис. 3.33):

1) G - дерево;

2) G - связный граф и $m = n - 1$;

3) G - ациклический граф и $m = n - 1$;

4) любые две несовпадающие вершины графа соединяет единственная простая цепь;

5) G - ациклический граф, обладающий тем свойством, что если какую- либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Ориентированный граф называется ориентированным деревом (ордеревом), если: 1) существует ровно одна вершина $x_1 \in S$, называемая корнем, которая не имеет предшествующих вершин, т. е. $P(x_1) = 0$; 2) любой вершине $x_j \neq x_1$ в графе G непосредственно предшествует ровно одна вершина, т. е. $P(x_j) = 1$. Неориенторованное дерево можно превратить в ориентированное, выбрав в качестве корня произвольную вершину.

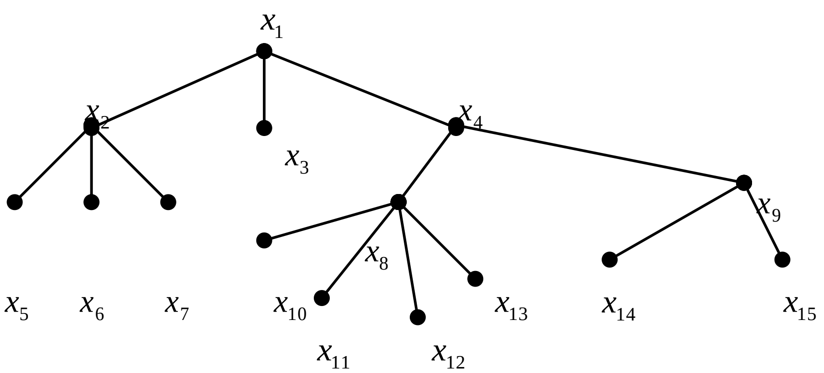


Рис. 3.33.

На рисунке 3.34 корень графа – вершина x_6. Подграф $G' = (S', U)$ графа $G = (S, U)$ называется остовным подграфом, если $S' = S$. Подграф G' графа G называется остовным поддеревом (остовным каркасом), если $S' = S$ и G - дерево.

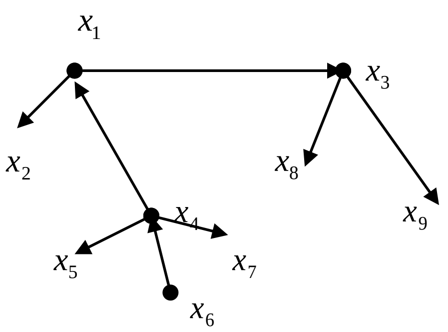


Рис. 3.34.

Теорема 3.8 (Теорема Кэли).* **Число различных деревьев, которые можно построить на n различных вершинах, равно $t_n = n^{n-2}$.**

* Артур Кэли (Кейли) (1821 – 1895) – английский математик.

В этой формуле подсчитывается число всех деревьев с данными n вершинами. Многие из этих деревьев изоморфны, и возникает вопрос о числе не изоморфных деревьев среди них. Это более трудная задача, она решается для каждого конкретного случая по алгоритму теории Пойа. Для подсчета числа остовов в графе используется матрица Кирхгофа.

Теорема 3.9 (Теорема Кирхгофа). **Число остовных деревьев в связном графе G порядка $n \geq 2$ равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа $B(G)$.**

Подсчитаем, например, по этой теореме число всех остовов графа, изображенного на рисунке 3.15 (стр. 59). Напомним, что матрица Кирхгофа B определяется следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & x_i \text{ и } x_j \text{ смежны}, \\ 0, & x_i \text{ и } x_j \text{ не смежны и } i \neq j, \\ P(x_i), & i = j. \end{cases}$$

Тогда

$$B = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

. Определим алгебраическое дополнение элемента b_{11}.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3(12 + 0 + 0 - 0 - 2 - 3) +$$

$+(-1-4+0+1-0-0)+(-6-1+0-0+1-1)=11$. Таким образом, у этого графа существует 11 различных остовов. Все они изображены на рисунке 3.35.

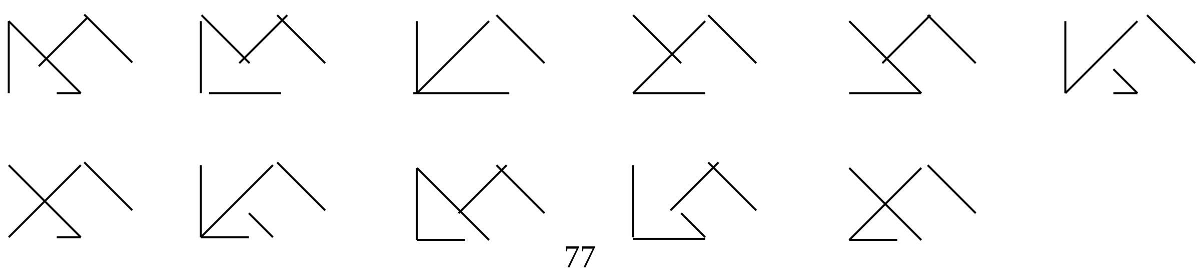


Рис. 3.35.

Из определения дерева вытекает следующая теорема:

Теорема 3.10. **Число ребер произвольного неориентированного графа G, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно $m-n-k$, где m - число ребер, n - число вершин и k - число компонент связности графа G.**

Доказательство. Рассмотрим i-ю компоненту связности G_i графа G. Пусть G_i содержит n_i вершин. Тогда остов G_i^* графа G_i, являясь деревом, содержит n_i-1 ребро. Следовательно, для получения G_i^* из компоненты G_i нужно удалить $m_i-(n_i-1)$ ребер, где m_i - число ребер в G_i.

Просуммируем удаляемые ребра по всем компонентам связности, получим $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $\sum_{i=1}^{k}(m_i-n_i+1)=m-n+k$.

Число $v(G)=m-n+k$ называется цикломатическим числом или циклическим рангом графа G, число $v^*(G)=n-k$ называется коциклическим рангом или корангом. $v^*(G)$ равно числу ребер, ходящим в любой остов графа G. Очевидно, что $v(G)+v^*(G)=m$.

Из теоремы 3.10 вытекают два следующих следствия.

Следствие 1. **Неориентированный граф G является лесом тогда и только тогда, когда $v(G)=0$.**

Следствие 2. **Неориентированный граф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда $v(G)=1$.**

3.16. Задача об остове экстремального веса

Пусть $G=(S,U)$ - связная сеть. В приложениях часто возникает задача о построении остова графа G, имеющего наименьший вес. Пусть, например, $G=(S,U,\Omega)$ служит моделью железнодорожной сети, соединяющей пункты $x_1,x_2,...,x_n \in S$, а $\omega(x_i,x_j)$ - расстояние между пунктами x_i и x_j. Требуется проложить сеть телеграфных линий вдоль линий железнодорожной сети так, чтобы все пункты $x_1,x_2,...,x_n$ были связаны между собой телеграфной сетью и общая протяженность линий телеграфной сети была наименьшей.

Известно несколько алгоритмов построения экстремального остовного дерева. Рассмотрим алгоритм Прима* (алгоритм ближайшего соседа), представляющий собой итерационную процедуру, состоящую из двух шагов и выполняющуюся $n-1$ раз на графе G с n вершинами. Алгоритм может получать минимальное или максимальное по весу дерево, разница заключается лишь в том, что в формуле (3.16.1) находится либо максимум, либо минимум.

Пусть $S' \subset S$, $S'' \subset S$ и $S=S' \cup S''$, $S' \cap S'' = \varnothing$, т. е. S' и S'' - разбиение множества узлов сети G на два непересекающихся подмножества. Определим пошаговое расстояние между множествами S' и S'' следующим образом:

$$d(S',S'')=\min\left\{\omega(x_i,x_j) \,/\, x_i \in S',\ x_j \in S''\right\}, \qquad (3.16.1)$$

---

* Прим (???? - ????) – американский математик.

где (x_i, x_j) - дуга, соединяющая вершины x_i и x_j.

В алгоритме Прима остовное дерево строится в результате последовательного расширения исходного поддерева. На каждой итерации число вершин и ребер поддерева увеличивается на единицу. Основные шаги алгоритма таковы.

Шаг 1. (Присвоение начальных значений).

Полагают $S^{/} = \{x_1\}$, где x_1 - произвольная вершина, $S^{//} = S \setminus S^{/}$, $U^{/} = \varnothing$.

Шаг 2. (Обновление данных).

Находится ребро (x_i, x_j) такое, что $x_i \in S^{/},\ x_j \in S^{//}$ и $\omega(x_i, x_j) = \min\left\{ \omega(x_i, x_j) \big/ x_i \in S^{/},\ x_j \in S^{//} \right\}$. Полагают $S^{/} = S^{/} \cup \{x_j\}$, $S^{//} = S \setminus S^{/}$, $U^{/} = U^{/} \cup \{(x_i, x_j)\}$.

Шаг 3. (Проверка на завершение).

Если $S^{/} = S$, то $G^{/} = (S^{/}, U^{/})$ - искомый остов. В противном случае переходят ко второму шагу.

Пример 1. Построить остов с наименьшим весом для сети, заданной матрицей весов Ω. Построим по этой матрице сеть. Поскольку матрица симметрическая, то граф дан неориентированный. Исходный граф изображен на рисунке 3.36 слева.

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 14 & \infty & \infty \\ 5 & - & 5 & 6 & \infty & \infty \\ 10 & 5 & - & 7 & 8 & 9 \\ 14 & 6 & 7 & - & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 4 & - & 12 \\ \infty & \infty & 9 & \infty & 12 & - \end{pmatrix} \end{array}.$$ *Шаг1.* $S^{/} = \{x_1\}$, $S^{//} = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $U^{/} = \varnothing$.

Первая итерация. Шаг 2. $d(S^{/}, S^{//}) = \omega(x_1, x_2) = 5$, $S^{/} = \{x_1, x_2\}$, $S^{//} = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$,

$U^{/} = \{(x_1, x_2)\}$.

Шаг 3. $S^{/} \neq S$, переход на начало второго шага.

Вторая итерация. Шаг 2. $d(S^{/}, S^{//}) = \omega(x_2, x_3) = 5$, $S^{/} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $S^{//} = \{x_4, x_5, x_6\}$,

$U^{/} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\}$.

Шаг 3. $S^{/} \neq S$, переход на начало второго шага.

Третья итерация. Шаг 2. $d(S^{/}, S^{//}) = \omega(x_2, x_4) = 6$, $S^{/} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $S^{//} = \{x_5, x_6\}$,

$U^{/} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4)\}$.

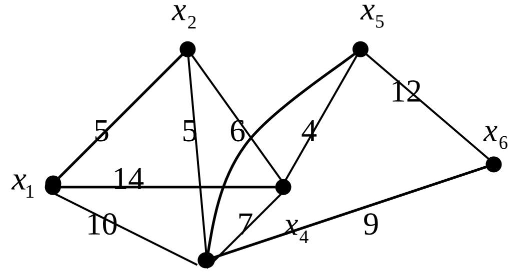
Шаг 3. $S^{/} \neq S$, переход на начало второго шага.

Четвертая итерация. Шаг 2. $d(S^{/}, S^{//}) = \omega(x_4, x_5) = 4$, $S^{/} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $S^{//} = \{x_6\}$,

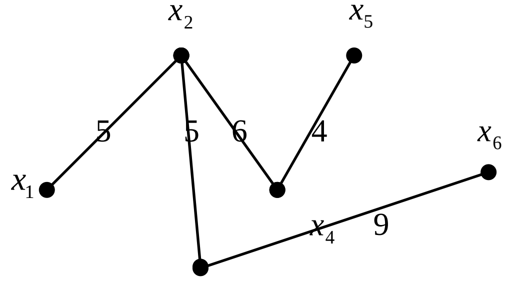
$U^{/} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_5)\}$.

Шаг 3. $S^{/} \neq S$, переход на начало второго шага.

Исходный граф



Остовный граф



x_3 x_3

Рис. 3.36.

Пятая итерация. Шаг 2. $d\left(S^{/},S^{//}\right)=\omega\left(x_3,x_6\right)=9,\ S^{/}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\},\ S^{//}=\varnothing,$

$U^{/}=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_4,x_5),(x_3,x_6)\}.$

Шаг 3. $S^{/}=S$. Итак, получен остовный граф. $G^{/}=\left(S^{/},U^{/}\right)$ изображен на рисунке 3.36 справа, его вес $\omega\left(G^{/}\right)=5+5+6+4+9=29.$

3.17. Обходы графов. Фундаментальные циклы

Рассмотрим опросы, связанные с существованием в графе эйлеровых или гамильтоновых цепей и циклов. При решении прикладных задач часто возникает необходимость отбора вершин или ребер графа, связанная с поисками элемента с определенным свойством.

Напомним, что связный граф называется эйлеровым, если он содержит цикл, содержащий все ребра графа. Такой граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий. Граф называется гамильтоновым, если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа.

Задачи о нахождении эйлеровых и гамильтоновых циклов в графе внешне похожи, однако вторая задача значительно сложнее первой. Принадлежность графа к классу эйлеровых графов легко устанавливается следующей теоремой:

Теорема 3.11. **Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.**

Доказательство. 1. Необходимость Пусть G - эйлеров граф. Тогда цикл этого графа проходит через каждую вершину, причем входит в нее по одному ребру, а выходит по другому. Это значит, что каждая вершина инцидентна четному числу ребер. Таким образом, степени всех вершин четны, так как эйлеров цикл должен содержать все ребра графа G.

2. Достаточность. Пусть степени всех вершин графа четны. Начнем построение цепи P_1 из произвольной вершины x_1 (см. рис. 3.37). Попав в очередную вершину x_i, мы всегда можем из нее выйти по другому ребру, так как степени всех вершин четны. Продолжая таким образом, мы закончим цепь P_1 в вершине x_1, т. е. P_1 будет циклом. Если при этом окажется, что P_1 содержит все вершины, то граф будет эйлеровым.

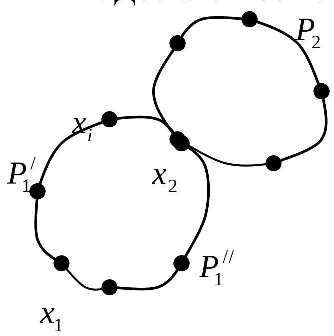


Рис. 3.37.

Если P_1 содержит не все вершины графа G, то удалим из G все ребра цикла P_1. Граф $G_1=G\setminus P_1$ также будет эйлеровым. Кроме того, так как G - связный граф, то графы G_1 и P_1 будут иметь хотя бы одну общую вершину x_2 (см. рис. 3.37). Повторим процедуру построения цикла, начав с вершины x_2. Получим новый цикл $P_3=P_1^{/}\cup P_2\cup P_1^{//}$, который, начиная с x_1 проходит по ребрам цепи $P_1^{/}$ до x_2, затем обходит все ребра цепи P_2 и возвращается в x_1 по ребрам цепи $P_1^{//}$.

Если P_3 не эйлеров цикл, то повторяя описанную процедуру, получим еще больший цикл и так далее до тех пор, пока не получится эйлеров цикл.

Для эйлеровых графов существует процедура, называемая алгоритмом Флери*, которая позволяет очень быстро построить один из существующих эйлеровых циклов. Этот алгоритм задается следующими правилами.

* Флери (???? - ????) – французский математик.

1) Произвольно выбирается некоторая вершина x_1 и ребро u_1 инцидентное x_1. Этому ребру присваивается номер 1. Вычеркиваем это ребро u_1 и переходим в вершину x_2 по ребру $u_1 = (x_1, x_2)$.

2) Находясь в вершине x_i, следует не выбирать ребро, соединяющее x_i с x_1, если имеется возможность иного выбора.

3) Находясь в вершине x_i, следует не выбирать ребро, которое является перешейком (т. е. ребром, при удалении которого граф, образованный не вычеркнутыми ребрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру).

4) После того, как в графе будут занумерованы все ребра, образуется эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода ребер.

Пример 1. Построить эйлеров цикл в графе G, изображенным на рисунке 3.38. Граф G - эйлеров, ибо $P(x_1) = P(x_4) = P(x_5) = P(x_8) = 2$, $P(x_2) = P(x_3) = P(x_6) = P(x_7) = 4$.

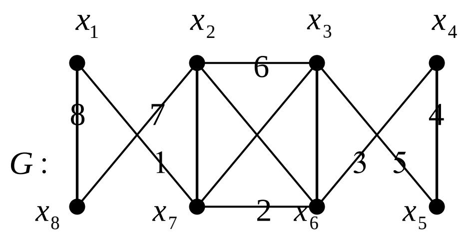


Рис. 3.38.

1) Выберем x_1 и ребро $u_1 = (x_1, x_7)$ и присвоим ему номер 1, затем перейдем в вершину $x_i = x_7$.

2) находясь в x_7, не выбираем вычеркнутое ребро 1. Из оставшихся трех ребер ни одно не является перешейком, поэтому выбираем любое, например, $u_2 = (x_7, x_6)$, присваиваем ему номер 2 и переходим в вершину $x_i = x_6$.

3) После восьми шагов опять приходим в вершину x_1. Построенный цикл: $(x_1, x_7)-$ $-(x_7, x_6)-(x_6, x_4)-(x_4, x_5)-(x_5, x_3)-(x_3, x_2)-(x_2, x_8)-(x_8, x_1)$.

Если каждое ребро графа G входит в одну из существующих реберно-непересекающихся цепей этого графа, то говорят, что набор таких цепей покрывает граф G. Пусть связный граф G содержит k вершин нечетной степени. Заметим, что по лемме о рукопожатиях (см. задачу 3.9.1) число k четно. В этом случае справедлива теорема о минимальном числе реберно-непересекающихся цепей.

Теорема 3.12. **Если связный граф содержит ровно k вершин нечетной степени, то минимальное число покрывающих его реберно-непересекающихся цепей равно $k/2$.**

Вопрос о принадлежности графов к классу гамильтоновых решается, как правило, очень трудно. Рассмотрим несколько теорем такого рода (достаточных условий гамильтоновости).

Теорема 3.13. **Граф со степенной последовательностью (списком степеней его вершин) $P_1 \le P_2 \le \ldots \le P_n$ является гамильтоновым, если для всякого k, удовлетворяющего неравенствам $1 \le k < n/2$, истинна импликация $(P_k \le k) \Rightarrow (P_{n-k} \ge n-k)$.**

На основе теоремы 3.13 были получены другие достаточные условия гамильтоновости. Эти условия проще в практическом применении, но слабее теоремы 3.13.

Теорема 3.14 (теорема Оре).* **Если для любой пары x и y несмежных вершин графа G порядка $n \ge 3$ выполняется условие $P(x) + P(y) \ge n$, то G - гамильтонов граф.**

Из этой теоремы вытекает следующее следствие:

---

* Ойстин Оре (1899 - 1968) – норвежский математик.

Следствие 1. **Если $|G| = n \geq 3$ и для любой вершины x графа G выполняется неравенство $P(x) \geq n/2$, то G - гамильтонов граф.**

Все эти теоремы дают достаточные условия гамильтоновости. На практике для построения примеров не гамильтоновых графов с заданными свойствами были бы полезны необходимые условия гамильтоновости. Однако для графов общего вида необходимые условия неизвестны за исключением некоторых особых типов графов.

Для ориентированных эйлеровых и гамильтоновых графов получены результаты, похожие на вышеприведенные. Следующие две теоремы характеризуют эйлеровы орграфы.

Теорема 3.15. **Для связного ориентированного графа G следующие утверждения равносильны:**

1) **граф $G = (S, U)$ эйлеров;**
2) **для любой вершины $x \in S$ верно равенство $P^+(x) = P^-(x)$;**
3) **граф G является объединением контуров, попарно не имеющих общих ребер.**

Теорема 3.16. **Связный орграф G содержит открытую эйлерову цепь тогда и только тогда, когда в нем есть две такие вершины x и y, что $P^-(x) = P^+(x) + 1$, $P^-(y) = P^+(y) - 1$ и $P^+(z) = P^-(z)$ для любой вершины z, отличной от x и y.**

Вопросы, связанные с распознаванием гамильтоновости орграфа и построением гамильтоновых контуров или путей, являются столь же сложными, как и аналогичные вопросы для неориентированных графов. Следующая теорема дает достаточные условия гамильтоновости неориентированного графа.

Теорема 3.17. **Пусть G - сильно связный орграф порядка $n > 1$ без петель и параллельных дуг. Если для любой пары x и y его несовпадающих несмежных вершин справедливо неравенство $P(x) + P(y) \geq 2n - 1$, то в G есть гамильтонов контур.**

Пусть $G = (S, U)$ - неориентированный граф, содержащий n вершин, m ребер и k компонент связности, $G^{/}$ - остов графа G. $G^{/}$ имеет $v^*(G) = n - k$ ребер $u_1, u_2, ..., u_{n-k}$. Эти ребра называются ветвями остова $G^{/}$. Оставшиеся $m - n + k$ ребер $v_1, v_2, ..., v_{m-n+k}$, не входящие в $G^{/}$, называются хордами остова $G^{/}$.

По определению дерева, если к остову $G^{/}$ добавить произвольную хорду v_i, то в полученном графе $G^{/} \cup \{v_i\}$ найдется ровно один цикл C_i, состоящий из хорды v_i и некоторых ветвей остова $G^{/}$. Цикл C_i называется фундаментальным циклом графа G относительно хорды v_i остова $G^{/}$. Множество $C = \{C_1, C_2, ..., C_{m-n+k}\}$ всех фундаментальных циклов относительно хорд остова $G^{/}$ называется фундаментальным множеством циклов графа G относительно остова $G^{/}$. Ясно, что $|C| = v(G) = m - n + k$.

Пусть $w_1, w_2, ..., w_m$ последовательность $v_1, v_2, ..., v_{m-n+k}, u_1, u_2, ..., u_{n-k}$ всех ребер графа G. Фундаментальному циклу C_i соответствует вектор $\bar{c} = (c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{im})$, определенный следующим образом: $c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } w_j \in C_i, \\ 0, \text{ если } w_j \notin C_i. \end{cases}$ Тогда фундаментальное множество циклов C задается матрицей фундаментальных циклов $C^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{v(G),1} & c_{v(G),2} & ... & c_{v(G),m} \end{pmatrix}$, которая имеет вид $C^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{1,\nu(G)+1} & c_{1,\nu(G)+2} & \dots & c_{1,m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{2,\nu(G)+1} & c_{2,\nu(G)+2} & \dots & c_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{\nu(G),\nu(G)+1} & c_{\nu(G),\nu(G)+2} & \dots & c_{\nu(G),m} \end{pmatrix} = \left(C_1^* \middle| C_2^*\right)$, где C_1^* - единичная матрица порядка $\nu(G)$ содержит лишь хорды фундаментальных циклов C_i.

Пример 2. Найти матрицу фундаментальных циклов графа G, изображенного на рисунке 3.39. Здесь $m=10$, $n=7$, $k=1$. Так как цикломатическое число равно $\nu(G)=10-7+1=4$, то для получения остова G' необходимо удалить четыре ребра. Пусть это будут ребра 1, 2, 3 и 4 (остов на рис. 3.39 выделен жирными линиями). Остальные ребра графа G занумеруем цифрами от 5 до 10. Из рисунка видно, что фундаментальный цикл C_1, соответствующий хорде 1, состоит из ребер 1, 6, 7, 8, цикл C_2 - из ребер 2, 7, 9, цикл C_3 - из ребер 3, 5, 7, цикл C_4 - из ребер 4, 5, 7, 10. Тогда C^* имеет вид

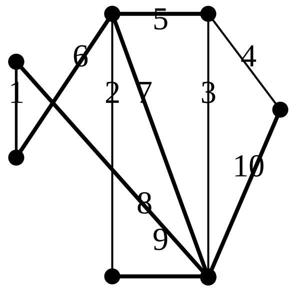


Рис. 3.39.

$$C^* = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

3.18. Клики, независимые множества

Множество вершин графа называется независимым (внутренне устойчивым), если никакие две вершины из этого множества не смежны. Очевидно, что граф, порожденный вершинами независимого множества, будет пустым.

Независимое множество называется максимальным, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого независимого множества. Наибольшее по мощности независимое множество называется наибольшим.

Как установил Шеннон*, теория независимых множеств в графе имеет большое значение для фундаментальных проблем теории информации. Сам процесс передачи информации может быть представлен в виде графа, причем максимальное число безошибочных сигналов соответствует максимальному независимому множеству графа.

Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G называется числом (вершинной) независимости или неплотностью этого графа и обозначается $\alpha_0(G)$. Для графа, изображенного на рисунке 3.40, наибольшими независимыми множествами будут: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и $\{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, максимальными независимыми $\{x_1, x_8, x_7, x_6\}$, $\{x_2, x_{10}, x_7, x_6\}$ и так далее. Задачи отыскания наибольшего независимого множества и определения числа независимости, как правило, очень трудны, поэтому полезны оценки их величин.

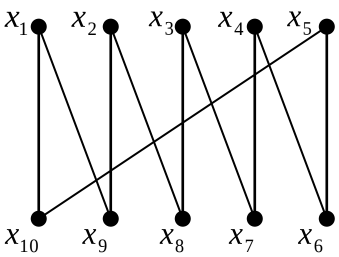


Рис. 3.40.

Теорема 3.18. **Для любого графа $G=(S,U)$ верно неравенство $\alpha_0(G) \geq \sum_{x\in S}(1+P(x))^{-1}$.**

---

* Клод Элвуд Шеннон (1916 – 2001) – американский математик.

Доказательство теоремы 3.18, которое здесь опущено, дает алгоритм построения независимого множества M, такого что $|M| \geq \sum_{x \in S} \left(1 + P(x)\right)^{-1}$. Множество M строится следующим образом: всякий раз в графе G выбирается вершина минимальной степени и заносится в множество M, после чего эта вершина и все смежные с ней удаляются из графа. Далее процесс повторяется. Построенное таким способом множество M иногда принимают в качестве первого приближения при отыскании наибольшего независимого множества вершин графа.

С понятием независимости в графе связано понятие доминирования. Подмножество $S' \subset S$ вершин графа $G = (S, U)$ называется доминирующим (внешне устойчивым), если каждая вершина из $S \setminus S'$ смежна с некоторой вершиной из S', т. е. каждая вершина графа находится на расстоянии в одно ребро от доминирующего множества. Доминирующее множество называется минимальным, если никакое его собственное подмножество не является доминирующим. Доминирующее множество, имеющее наименьшую мощность, называется наименьшим.

Число доминирования $\delta(G)$ графа G есть наименьшее число вершин, составляющих минимальное доминирующее множество. Отыскание наименьшего доминирующего множества является содержанием многих прикладных задач. Например, задача размещения предприятий в ряде населенных пунктов при условии, чтобы расстояние от каждого из населенных пунктов до какого-либо предприятия не превосходило заданной величины, сводится к построению наименьшего доминирующего множества, если предположить, что вершины графа – предприятия смежны тогда и только тогда, когда расстояние между соответствующими пунктами не превышает заданной величины.

Теорема 3.19. **Независимое множество максимально тогда и только тогда, когда оно доминирующее.**

Доказательство. Пусть $S' \subseteq S$ - максимальное независимое множество. Тогда не может быть вершины $k \in S \setminus S'$, не соединенной с ребром, так как в противном случае множество $k \cup S'$ также было бы независимым, но S' - максимальное по условию. Отсюда но S' - доминирующее множество.

Пусть теперь S' - независимое доминирующее множество. Тогда никакую вершину k нельзя перевести из $S \setminus S'$ в S' так, чтобы множество $k \cup S'$ осталось независимым. Следовательно, S' - максимальное множество.

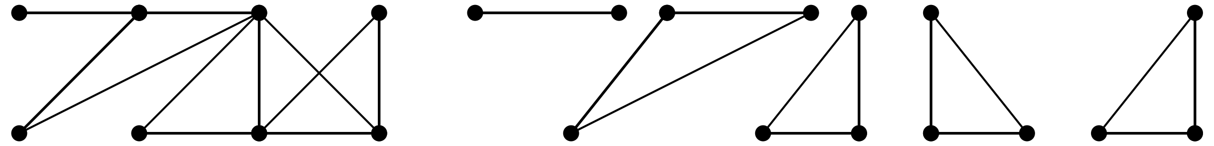
Антиподом понятия независимого множества является понятие клики. Подмножество S' вершин графа $G = (S, U)$ называется кликой, если любые две входящие в него вершины смежны. Это значит, что подграф $G' = (S', U')$ является полным. Определение клик графа полезно в кластерном анализе, при информационном поиске и так далее.

Клика называется максимальной, если она не содержится в клике с большим числом вершин, и наибольшей, если число вершин в ней наибольшее среди всех клик. Число вершин в наибольшей клике графа называется кликовым числом или плотностью графа и обозначается через $\varphi(G)$.

Практически очевидна следующая теорема.

Теорема 3.20. **Подмножество вершин графа G является кликой тогда и только тогда, когда оно независимо в дополнительном графе $\overline{G}$, т. е. $\varphi(G) = \alpha_0(\overline{G})$.**

Клика графа представляет «естественные» группировки вершин в максимально полные подграфы. На рисунке 3.41 представлен граф и все его клики.



x_8 x_7 x_6 x_5 x_8 x_7 x_6 x_6 x_5 x_6 x_5

Рис. 3.41. Граф и его клики.

Опишем алгоритм выделения клик в графе. Этот алгоритм представляет собой метод поиска с возвращением по специальному дереву поиска. Каждый узел этого дерева соответствует полному подграфу исходного графа, а само дерево поиска строится следующим образом. Корень дерева поиска – пустое начальное множество $S = \varnothing$. Пусть теперь S - произвольная вершина дерева поиска какого-либо уровня. Тогда вершиной следующего уровня дерева будет вершина $S \cup \{x\}$, если $x \notin S$ и x смежна с каждой вершиной из S. В дереве поиска вершины S и $S \cup \{x\}$ соединяются ребром, которое соответствует вершине x. На рисунке 3.42 показано дерево поиска для графа G, изображенного на рис. 3.41 (вершины обозначены только цифрами, буква x - опущена).

Каждая клика мощностью n порождается в дереве поиска $n!$ раз. При построении дерева все тонкие ребра можно оборвать, они не приводят к новым кликам. При этом необходимо руководствоваться двумя правилами:

1) если все поддеревья узла $S \cup \{x\}$ в дереве поиска клик уже исследованы, то необхо-

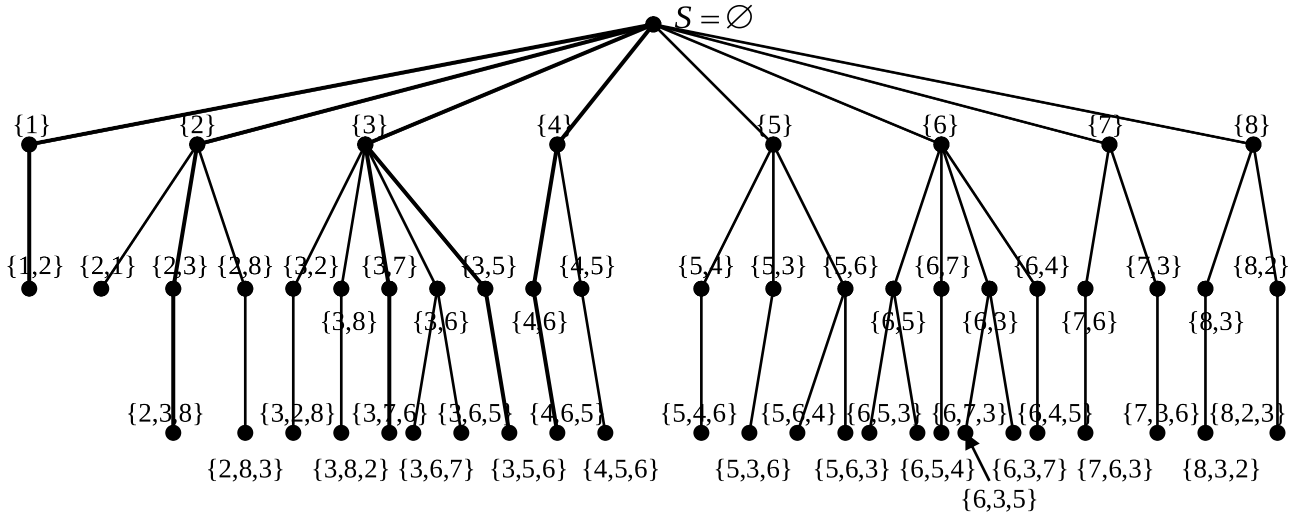


Рис. 3.42. Дерево поиска клик.

димо лишь исследовать только те вершины из $S \cup \{y\}$, для которых вершина y не смежна с x;

2) если S - узел в дереве поиска, а $\tilde{S}$ - узел предыдущего уровня, и все поддеревья узла $\tilde{S} \cup \{x\}$ уже исследованы, то все неисследованные поддеревья узла $S \cup \{x\}$ можно опустить.

Иногда полезно понятие матрицы клик. Пусть $G = (S,U)$ - произвольный граф, $Q = \{Q_1, Q_1, ..., Q_p\}$ - множество всех его максимальных клик и $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Определим бинарную $p \times n$ - матрицу $C = C(G)$, строки которой соответствуют кликам из множества Q, а столбцы – вершинам графа G, причем $c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_j \in Q_i, \\ 0, \text{ если } x_j \notin Q_i. \end{cases}$ Матрица $C(G)$ называется матрицей клик графа G. Для графа, изображенного на рис. 3.41, матрица клик имеет следующий вид:

$$C(G)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{array} \\ \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3.19. Практическое занятие № 8. Остовы графов, фундаментальные циклы. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Доминирующие множества и клики

3.19.1. Для графа G, заданного матрицей весов, построить минимальный по весу остов $G^{/}$ и найти его вес $\omega(G^{/})$.

$$1)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & \infty & 5 & \infty & \infty & 14 \\ 10 & - & 6 & 2 & 4 & 8 & \infty \\ \infty & 6 & - & 3 & 1 & 1 & \infty \\ 5 & 2 & 3 & - & 6 & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 1 & 6 & - & 5 & \infty \\ \infty & 8 & 1 & \infty & 5 & - & 2 \\ 14 & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$2)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & 15 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ 7 & - & 13 & 9 & \infty & \infty & 8 \\ 15 & 13 & - & 7 & 15 & 7 & \infty \\ 12 & 9 & 7 & - & 9 & \infty & 11 \\ \infty & \infty & 15 & 9 & - & 10 & \infty \\ 10 & \infty & 7 & \infty & 10 & - & 12 \\ \infty & 8 & \infty & 11 & \infty & 12 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$3)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & 11 & \infty & 14 & \infty & 12 \\ 10 & - & 10 & 9 & \infty & \infty & 7 \\ 11 & 10 & - & 12 & 10 & \infty & 6 \\ \infty & 9 & 12 & - & 9 & 12 & \infty \\ 14 & \infty & 10 & 9 & - & 11 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 12 & 11 & - & \infty \\ 12 & 7 & 6 & \infty & 12 & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$4)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 3 & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ 3 & - & 10 & 6 & 8 & \infty & 4 \\ 5 & 10 & - & 5 & 7 & \infty & 9 \\ \infty & 6 & 5 & - & 8 & 7 & \infty \\ 6 & 8 & 7 & 8 & - & 9 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & 9 & - & \infty \\ \infty & 4 & 9 & \infty & 11 & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$5)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 8 & \infty & 10 & 13 & \infty & 11 \\ 8 & - & 7 & 8 & \infty & 15 & \infty \\ \infty & 7 & - & \infty & 19 & 10 & 15 \\ 10 & 8 & \infty & - & 9 & \infty & 6 \\ 13 & \infty & 19 & 9 & - & 8 & \infty \\ \infty & 15 & 10 & \infty & 8 & - & 12 \\ 11 & \infty & 15 & 6 & \infty & 12 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$6)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 8 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 6 & - & 11 & 12 & 9 & \infty & 5 \\ 8 & 11 & - & 7 & 8 & \infty & 9 \\ \infty & 12 & 7 & - & 6 & 5 & 10 \\ \infty & 9 & 8 & 6 & - & 8 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 5 & 8 & - & 7 \\ \infty & 5 & 9 & 10 & \infty & 7 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$7)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 3 & 8 & \infty & 3 & 6 & \infty \\ 3 & - & 7 & 6 & \infty & \infty & 4 \\ 8 & 7 & - & 4 & 6 & \infty & 10 \\ \infty & 6 & 4 & - & 5 & 7 & \infty \\ 3 & \infty & 6 & 5 & - & 8 & 9 \\ 6 & \infty & \infty & 7 & 8 & - & \infty \\ \infty & 4 & 10 & \infty & 9 & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$8)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 9 & 10 & 15 & \infty & \infty & 11 \\ 9 & - & 14 & 12 & \infty & 8 & 15 \\ 10 & 14 & - & 10 & 9 & \infty & 6 \\ 15 & 12 & 10 & - & 11 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & 9 & 11 & - & 12 & 11 \\ \infty & 8 & \infty & 12 & 12 & - & \infty \\ 11 & 15 & 6 & \infty & 11 & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$9)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 8 & 9 & \infty & \infty & \infty & 6 \\ 8 & - & 7 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ 9 & 7 & - & 6 & 10 & 5 & \infty \\ \infty & 6 & 6 & - & 8 & 7 & \infty \\ \infty & 9 & 10 & 8 & - & 4 & 5 \\ \infty & \infty & 5 & 7 & 4 & - & 6 \\ 6 & \infty & \infty & \infty & 5 & 6 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$10)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 8 & 4 & 9 & \infty & 6 & \infty \\ 8 & - & 11 & 6 & 10 & \infty & 8 \\ 4 & 11 & - & 7 & \infty & 9 & \infty \\ 9 & 6 & 7 & - & 5 & 6 & \infty \\ \infty & 10 & \infty & 5 & - & 7 & 6 \\ 6 & \infty & 9 & 6 & 7 & - & 8 \\ \infty & 8 & \infty & \infty & 6 & 8 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$11)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty \\ 10 & - & 6 & 1 & 4 & \infty & 5 \\ \infty & 6 & - & 3 & 1 & 2 & \infty \\ 5 & 1 & 3 & - & 3 & \infty & 5 \\ \infty & 4 & 1 & 3 & - & 4 & 2 \\ 6 & \infty & 2 & \infty & 4 & - & \infty \\ \infty & 5 & \infty & 5 & 2 & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$12)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 11 & 14 & \infty & \infty & 8 \\ 5 & - & 5 & 7 & \infty & \infty & 8 \\ 11 & 5 & - & 4 & 8 & 6 & \infty \\ 14 & 7 & 4 & - & 7 & \infty & 11 \\ \infty & \infty & 8 & 7 & - & 3 & 5 \\ \infty & \infty & 6 & \infty & 3 & - & 6 \\ 8 & 8 & \infty & 11 & 5 & 6 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$13)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 5 & \infty & 8 & \infty & 10 \\ 6 & - & 9 & 7 & 6 & \infty & \infty \\ 5 & 9 & - & 8 & 9 & \infty & 11 \\ \infty & 7 & 8 & - & 5 & 6 & \infty \\ 8 & 6 & 9 & 5 & - & 7 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 7 & - & \infty \\ 10 & \infty & 11 & \infty & 9 & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$14)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 8 & \infty & \infty & 8 & \infty \\ 5 & - & 7 & 10 & \infty & 8 & \infty \\ 8 & 7 & - & 4 & 7 & 7 & \infty \\ \infty & 10 & 4 & - & 6 & 9 & 4 \\ \infty & \infty & 7 & 6 & - & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 & 9 & 3 & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 5 & 6 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$15)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & 5 & \infty & 10 & 9 & \infty \\ 6 & - & 4 & 5 & 3 & \infty & 6 \\ 5 & 4 & - & 6 & 7 & \infty & 8 \\ \infty & 5 & 6 & - & 3 & 6 & \infty \\ 10 & 3 & 7 & 3 & - & 8 & 7 \\ 9 & \infty & \infty & 6 & 8 & - & 5 \\ \infty & 6 & 8 & \infty & 7 & 5 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$16)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & 8 & \infty & 6 & \infty & 4 \\ 7 & - & 8 & \infty & 5 & 10 & \infty \\ 8 & 8 & - & 6 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & - & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & \infty & 3 & - & 8 & 7 \\ \infty & 10 & 3 & 9 & 8 & - & \infty \\ 4 & \infty & \infty & 4 & 7 & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$17)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 12 & 10 & \infty & 11 & \infty & 18 \\ 12 & - & 13 & 14 & \infty & \infty & 7 \\ 10 & 13 & - & 9 & 13 & \infty & 16 \\ \infty & 14 & 9 & - & 15 & 14 & \infty \\ 11 & \infty & 13 & 15 & - & 15 & 14 \\ \infty & \infty & \infty & 14 & 15 & - & \infty \\ 18 & 7 & 16 & \infty & 14 & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$18)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 4 & 11 & \infty & 6 & \infty \\ 5 & - & 8 & 9 & \infty & 9 & \infty \\ 4 & 8 & - & \infty & 5 & \infty & 7 \\ 11 & 9 & \infty & - & \infty & 5 & 3 \\ \infty & \infty & 5 & \infty & - & 7 & 8 \\ 6 & 9 & \infty & 5 & 7 & - & 6 \\ \infty & \infty & 7 & 3 & 8 & 6 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$19)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 8 & 9 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 8 & - & 6 & 5 & 9 & \infty & 7 \\ 9 & 6 & - & 11 & 7 & 12 & \infty \\ \infty & 5 & 11 & - & 3 & 5 & 4 \\ 10 & 9 & 7 & 3 & - & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 12 & 5 & 4 & - & 9 \\ \infty & 7 & \infty & 4 & \infty & 9 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$20)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 11 & 5 & 8 & \infty & 8 & \infty \\ 11 & - & 6 & 13 & \infty & 10 & \infty \\ 5 & 6 & - & \infty & 7 & \infty & 9 \\ 8 & 13 & \infty & - & 3 & 5 & 8 \\ \infty & \infty & 7 & 3 & - & 9 & 7 \\ 8 & 10 & \infty & 5 & 9 & - & \infty \\ \infty & \infty & 9 & 8 & 7 & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$21)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 11 & \infty & 8 & \infty & 10 \\ \infty & - & \infty & 12 & 5 & 8 & \infty \\ 11 & \infty & - & \infty & 6 & 4 & 3 \\ \infty & 12 & \infty & - & 5 & \infty & 7 \\ 8 & 5 & 6 & 5 & - & 7 & 4 \\ \infty & 8 & 4 & \infty & 7 & - & \infty \\ 10 & \infty & 3 & 7 & 4 & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$22)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & 10 & 11 & \infty & 6 \\ \infty & - & \infty & 12 & 10 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & 3 & \infty & 8 \\ 10 & 12 & 3 & - & 6 & \infty & 7 \\ 11 & 10 & 3 & 6 & - & 9 & \infty \\ \infty & 5 & \infty & \infty & 9 & - & 11 \\ 6 & \infty & 8 & 7 & \infty & 11 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$23)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 12 & 10 & 14 & \infty & \infty \\ \infty & - & 12 & \infty & 5 & \infty & 7 \\ 5 & 12 & - & 7 & 6 & 8 & \infty \\ 10 & \infty & 7 & - & 4 & 9 & 9 \\ 14 & 5 & 6 & 4 & - & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 9 & 8 & - & 7 \\ \infty & 7 & \infty & 9 & \infty & 7 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$24)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 3 & 8 & 12 & 7 & \infty & 16 \\ 3 & - & 4 & \infty & 9 & \infty & \infty \\ 8 & 4 & - & 5 & 7 & 11 & \infty \\ 12 & \infty & 5 & - & 10 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 7 & 10 & - & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 6 & 5 & - & 5 \\ 16 & \infty & \infty & 4 & 8 & 5 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$25)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & 7 & \infty & \infty & 11 & \infty \\ \infty & - & \infty & 17 & 8 & 15 & \infty \\ 7 & \infty & - & 5 & 6 & \infty & 10 \\ \infty & 17 & 5 & - & 12 & 5 & 3 \\ \infty & 8 & 6 & 12 & - & 4 & 9 \\ 11 & 15 & \infty & 5 & 4 & - & \infty \\ \infty & \infty & 10 & 3 & 9 & \infty & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$26)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & 9 & 5 & 8 & 11 \\ \infty & 6 & - & 2 & 5 & 6 & 6 \\ \infty & 9 & 2 & - & \infty & 4 & \infty \\ 7 & 5 & 5 & \infty & - & 4 & 12 \\ \infty & 8 & 6 & 4 & 4 & - & 3 \\ \infty & 11 & 6 & \infty & 12 & 3 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$27)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 3 & 8 & \infty & 9 & \infty & \infty \\ 3 & - & \infty & 11 & 6 & \infty & 15 \\ 8 & \infty & - & 4 & 5 & 7 & 10 \\ \infty & 11 & 4 & - & 13 & 8 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 13 & - & 6 & 12 \\ \infty & \infty & 7 & 8 & 6 & - & 3 \\ \infty & 15 & 10 & 7 & 12 & 3 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$28)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & \infty & 7 & \infty & 20 \\ 4 & - & 3 & \infty & 5 & 14 & 15 \\ \infty & 3 & - & 6 & 7 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & - & 12 & 10 & 4 \\ 7 & 5 & 7 & 12 & - & 8 & \infty \\ \infty & 14 & 11 & 10 & 8 & - & 5 \\ 20 & 15 & \infty & 4 & \infty & 5 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$29)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 2 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & - & 1 & 8 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 1 & - & \infty & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & \infty & - & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 4 & 5 & \infty & - & 4 & 10 \\ \infty & \infty & 6 & 3 & 4 & - & 4 \\ \infty & 10 & 9 & \infty & 10 & 4 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$30)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & 5 & 2 & 16 & \infty & \infty \\ 10 & - & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 4 & - & 8 & 15 & 13 & \infty \\ 2 & \infty & 8 & - & 8 & 5 & 7 \\ 16 & \infty & 15 & 8 & - & 11 & 18 \\ \infty & \infty & 13 & 5 & 11 & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & 18 & 4 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

3.19.2. Используя матричную теорему Кирхгофа, найти число остовных деревьев в полном двудольном графе $K_{m,n}$.

3.19.3. Найти матрицы фундаментальных циклов, радиусы и диаметры графов, изображенных на рисунке 3.43. Являются ли изображенные графы эйлеровыми или гамильтоновыми?

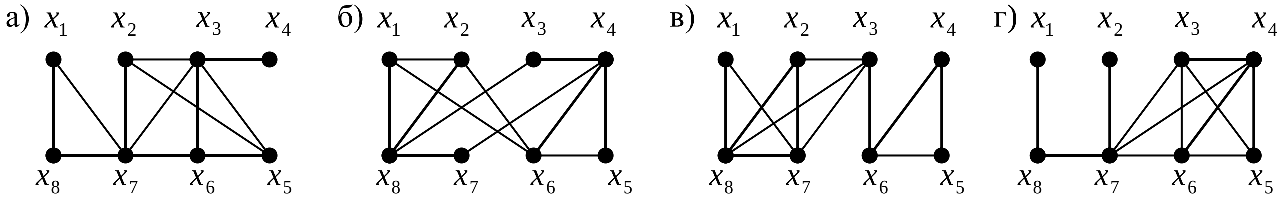


Рис. 3.43.

3.19.4. Доказать, что если для любых двух несмежных вершин x и y связного n-вершинного графа выполняется условие $P(x)+P(y) \geq n$, то граф имеет гамильтонов цикл.

3.19.5. По алгоритму Флери найти эйлеров цикл в графах, изображенных на рисунке 3.44.

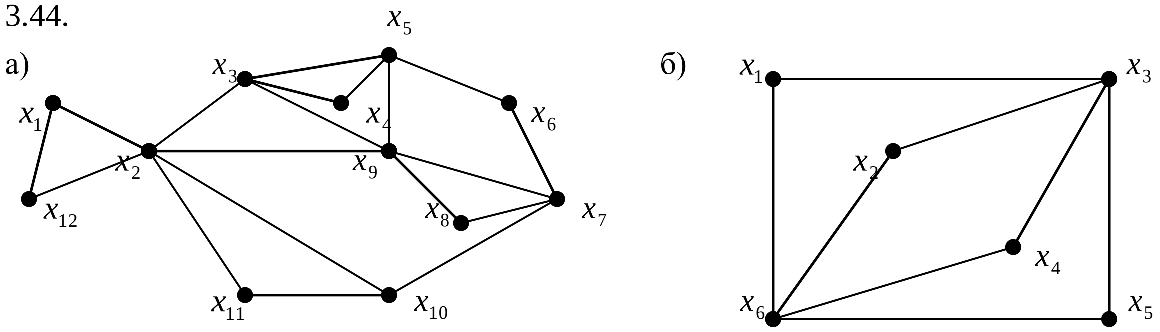


Рис. 3.44.

3.19.6. Найти наибольшее независимое множество вершин в графе Петерсена* (см. рис. 3.45).

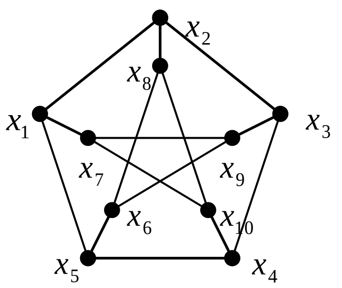


Рис. 3.45. Граф Петерсена.

3.19.7. Показать, что граф Петерсена негамильтонов.

3.19.8. Найти число доминирования $\delta(G)$ и наименьшее доминирующее множество следующих графов:

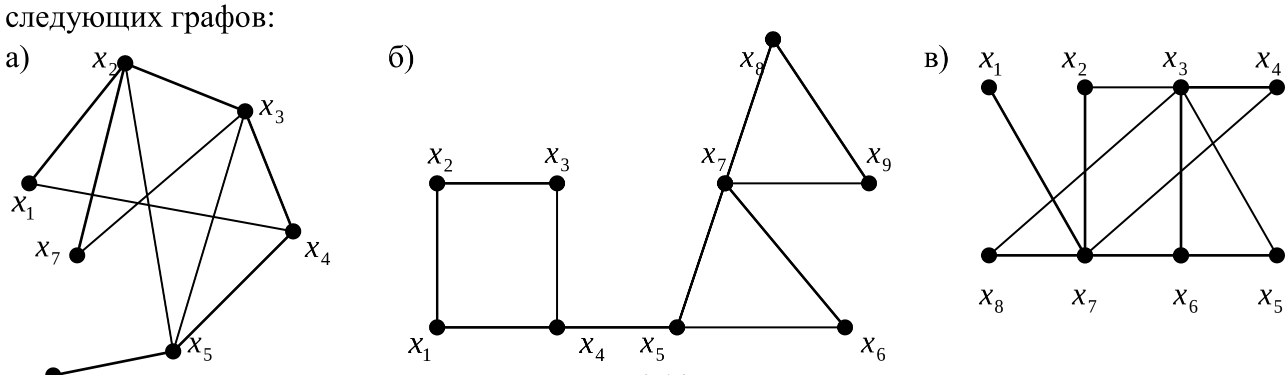


Рис. 3.46.

3.19.9. Построить дерево поиска клик, матрицу клик и найти наибольшие клики графов, изображенных на рисунках 3.44 а), 3.45 и 3.46 б), в).

---

* Джулиус Петер Христиан Петерсен (1839 - 1910) – датский математик

3.19.10. Приведите пример графа, в котором наименьшее доминирующее множество не является независимым.

3.20. Планарность графов

Ранее уже отмечалось, что возможно несколько изображений одного графа, поскольку все изоморфные графы несут одну и ту же информацию. На практике при изготовлении микросхем необходимо выяснить можно ли схему радиоэлектронного устройства, которая представляет собой граф, изобразить на плоскости без пересечений проводников. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

Таким образом, возникает задача построения и исследования плоского графа. Плоским графом называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным.

Все планарные графы укладываются на плоскости (имеют плоскую укладку). На рисунке 3.47 изображен планарный граф G и его плоская укладка $\widetilde{G}$.

Очевидно, что 1) всякий подграф планарного графа планарен и 2) граф планарен тогда и только тогда, когда каждая связная компонента этого графа – планарный граф.

Гранью планарного графа называется множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена плоской кривой, не пересекающей ребер этого графа. Границей грани называется множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани. Например, граф

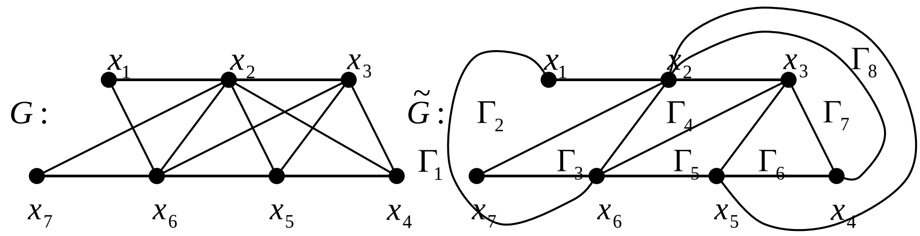


Рис. 3.47.

$\widetilde{G}$ на рисунке 3.47 имеет восемь граней: $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_8$. Неограниченная грань Γ_1 называется внешней, а остальные грани $\Gamma_2, \Gamma_3, ..., \Gamma_8$ - внутренними.

Пусть n, m, f - соответственно число вершин, ребер и граней планарного графа.

Теорема 3.21 (теорема Эйлера). **Для всякого связного планарного графа верно равенство** $$n - m + f = 2. \qquad (3.20.1)$$

Доказательство. Пусть G - связный планарный n- вершинный граф. Рассмотрим некоторый остов $G^{/}$ этого графа. Остов имеет всего одну внешнюю грань, n вершин и $n-1$ ребер, поэтому формула (3.20.1) для остова $G^{/}$ выполняется. Будем поочередно добавлять к остову $G^{/}$ недостающие ребра графа G. При каждом добавлении число вершин не изменится, число ребер увеличится на единицу, так же как и число граней, поскольку при добавлении к остову ребра, связывающего две несмежные вершины, получается цикл, разделяющий текущую грань на две грани.

Таким образом, формула (3.20.1) будет верна для всякого графа, получающегося в результате таких операций, а поскольку графом G заканчивается вся эта процедура, то формула (3.20.1) будет верна и для него.

Имеется несколько критериев планарности и найдены эффективные алгоритмы, осуществляющие плоскую укладку планарного графа. Для формулировки критерия планарности ведем понятие гомеоморфизма графов. Рассмотрим операцию подразбиения ребра в графе $G=(S,U)$. После подразбиения ребра $(x,y)\in U$ получается граф $G'=(S',U')$, где $S'=S\cup\{xy\}$, $U'=(U\setminus\{(x,y)\})\cup\{(x,xy),(xy,y)\}$, т. е. ребро (x,y) заменяется на (x,y) - цепь

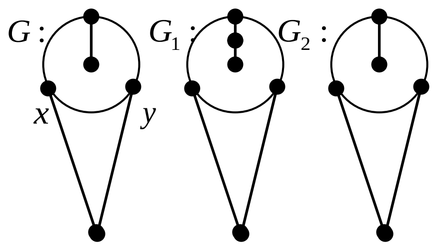


Рис. 3.48.

длины два. Два графа называются гомеоморфными, если они оба могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер. На рисунке 3.48 изображены исходный граф G и два гомеоморфных графа G_1 и G_2.

Теорема 3.22 (теорема Понтрягина-Куратовского**)* **Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.**

Эквивалентная форма критерия планарности описана в следующей теореме.

Теорема 3.23. **Граф планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, стягиваемых (т. е. получаемых последовательностью отождествлений вершин, связанных ребрами) к графам K_5 или $K_{3,3}$.**

Для непланарных графов вводятся характеристики, представляющие ту или иную меру непланарности. Если граф непланарен, то для его геометрической реализации удаляют отдельные ребра (переносят их на другую плоскость). Наименьшее число ребер, удаление которых приводит к планарному графу, называется числом планарности или искаженностью $sk(G)$ графа G. Для числа планарности полного графа справедлива следующая формула

$$sk(G)=C_n^2-3n+6,\ n\ge 3. \qquad (3.20.2)$$

Важнейшей характеристикой непланарного графа является его толщина $t(G)$. Это наименьшее число планарных подграфов графа G, объединение которых дает сам граф. Толщина графа равна минимальному числу плоскостей l, при котором граф G разбивается на плоские части $G_1,G_2,...,G_l$. Очевидно, что толщина планарного графа равна единице. Для толщины связанного (n,m)- графа справедливы такие оценки

$$t(G)\ge \left]\frac{m}{3n-6}\right[,\ t(G)\ge\left[\frac{m+3n-7}{3n-6}\right], \qquad (3.20.3)$$

где $[...]$ - целая часть числа, а $]...[=[...]+1$.

3.21. Алгоритм укладки графа на плоскости

Критерии планарности в практическом применении не всегда просты и не дают информации о том, как строить укладку графа на плоскости, если он планарен. Все это вызвало появление алгоритмов, которые проверяют граф на планарность и строят его плоскую укладку. Рассмотрим один из таких алгоритмов.

Этот алгоритм представляет собой процесс последовательного присоединения к некоторому уложенному подграфу $\tilde{G}$ графа G новой цепи L, оба конца которой принадлежат G. После этого в качестве подграфа $\tilde{G}$ выбирается любой простой цикл графа G и процесс присоединения новых цепей продолжается до тех пор, пока не будет построен плоский граф, изоморфный G или присоединение новой простой цепи на некотором этапе окажется невозможным, что свидетельствует о непланарности исходного графа G.

---

* Лев Семенович Понтрягин (1908 – 1988) – советский математик.

** Казимеж Куратовский (1896 – 1980) – польский математик.

Введем несколько определений. Пусть имеется некоторая плоская укладка подграфа $\tilde{G}$ графа G. Сегментом G_i относительно $\tilde{G}=\left(\tilde{S},\tilde{U}\right)$ называется подграф графа $G=(S,U)$ следующих двух видов:

1) ребро $u=(x,y)\in U$ такое, что $u\notin\tilde{U},\ x,y\in\tilde{S}$;
2) связная компонента графа $G\setminus\tilde{G}$, дополненная всеми ребрами графа G, инцидентными вершинам взятой компоненты, и концами этих ребер.

Вершина u сегмента G_i называется контактной, если $u\in\tilde{S}$. Граф $\tilde{G}$ - плоский, следовательно, он разбивает плоскость на грани. Допустимой гранью для сегмента G_i относительно $\tilde{G}$ называется грань Γ графа $\tilde{G}$, содержащая все контактные вершины сегмента G_i. Обозначим через $\Gamma(G_i)$ - множество допустимых граней для G_i. Для непланарных графов может быть $\Gamma(G_i)=\varnothing$. Рассмотрим простую цепь L, сегмента G_i, соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин. Такие цепи называются α-цепями. Всякая α-цепь может быть уложена в любую грань, допустимую для данного сегмента.

Два сегмента G_1 и G_2 относительно $\tilde{G}$ называются конфликтующими, если

1) $\theta=\Gamma(G_1)\cap\Gamma(G_2)\neq\varnothing$,

2) существуют две α-цепи $L_1\in G_1$ и $L_2\in G_2$, которые без пересечений нельзя уложить одновременно ни в какую грань $\Gamma\in\theta$.

Пусть $\tilde{G}$ - плоская укладка некоторого подграфа графа G. Для каждого сегмента G_i относительно $\tilde{G}$ находим множество допустимых граней. Тогда могут осуществляться только следующие три случая.

1) Существует сегмент G_i, для которого $\Gamma(G_i)=\varnothing$. В этом случае исходный граф G непланарен.

2) Для некоторого сегмента G_i существует единственная допустимая грань Γ. Тогда можно расположить любую α-цепь сегмента G_i в грани Γ. При этом грань Γ разобьется на две грани.

3) $\Gamma(G_i)\geq 2$ для Γ_i. В этом случае можно расположить α-цепь в любой допустимой грани.

Сам алгоритм укладки планарного графа G на плоскость состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Выбирается любой простой цикл C графа G. Этот цикл укладывается на плоскости и полагается $\tilde{G}=C$.

Шаг 2. Находятся все грани графа $\tilde{G}$ и все сегменты G_i относительно $\tilde{G}$. Если множество сегментов пусто, происходит переход на шаг 7.

Шаг 3. Для каждого сегмента G_i определяется множество допустимых граней $\Gamma(G_i)$. Если найдется сегмент G_i, для которого $\Gamma(G_i)=\varnothing$, то исходный граф G непланарен; конец алгоритма, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Если существует сегмент G_i, для которого имеется единственная допустимая грань Γ, то происходит переход на шаг 6, иначе на шаг 5.

Шаг 5. Для некоторого сегмента G_i, для которого $\Gamma(G_i)>1$, выбирается произвольная допустимая грань.

Шаг 6. Произвольная α-цепь L сегмента G_i помещается в грань Γ, $\tilde{G}$ заменяется на $\tilde{G}\cup L$ и происходит переход к шагу 1.

Шаг 7. Построена укладка $\tilde{G}$ графа G на плоскости. Конец алгоритма.

Пример 1. Пусть граф G изображен на рисунке 3.49. *Шаг 1.* Выберем простой цикл $C=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, который разбивает плоскость на две грани Γ_1 и Γ_2. Положим $\tilde{G}=C$.

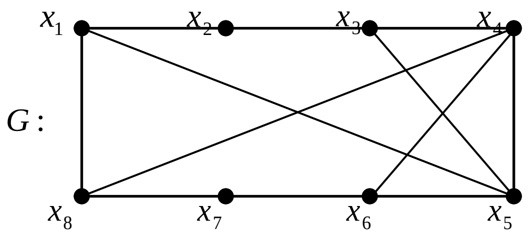


Рис. 3.49.

Шаг 2. На рисунке 3.50 изображен граф $\tilde{G}=C$ и сегменты G_1,G_2 исходного графа G относительно $\tilde{G}$. Контактные вершины обведены кружками. $\Gamma(G_i)=\{\Gamma_1,\Gamma_2\},i=1{,}2$.

Шаг 3. $\Gamma(G_i)\neq\varnothing,i=1{,}2$.

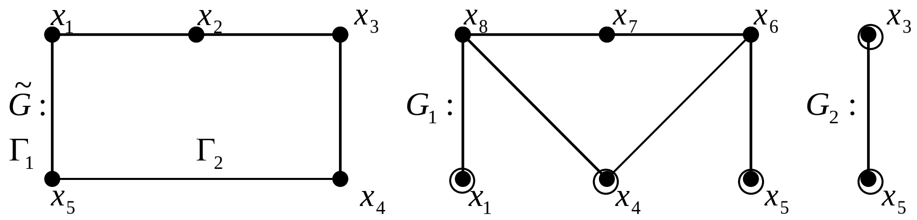


Рис. 3.50.

Шаг 4. Нет сегмента, для которого бы существовала единственная допустимая грань.

Шаг 5. Любую α-цепь можно уложить в Γ_1 или в Γ_2. Выберем для укладки грань Γ_1.

Шаг 6. Пусть $L=\{x_1,x_8,x_7,x_6,x_5\}$. Поместим эту α-цепь в Γ_1. Возникает новый граф $\tilde{G}$ и его сегменты (см. рис. 3.51) G_1,G_2,G_3. Появляется и новая грань Γ_3. Переходим к первому шагу.

Шаг 1. Новых сегментов три: G_1,G_2,G_3.

Шаг 2. $\Gamma(G_1)=\{\Gamma_1\}$, $\Gamma(G_2)=\{\Gamma_1\}$, $\Gamma(G_3)=\{\Gamma_1,\Gamma_3\}$.

Шаг 3. $\Gamma(G_i)\neq\varnothing,i=1{,}2{,}3$.

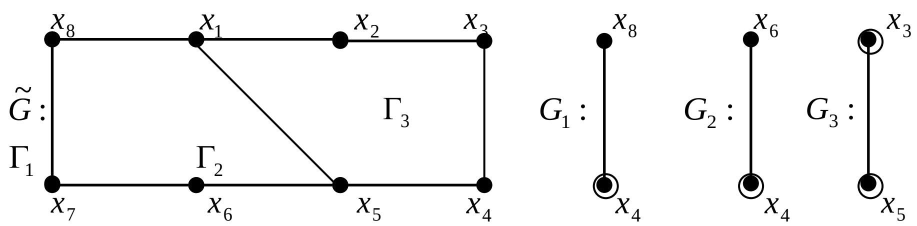


Рис. 3.51.

Шаг 4. $\Gamma(G_1)=\Gamma(G_2)=\{\Gamma_1\}$, переход на шаг 6.

Шаг 6. α-цепь $L_1=\{x_4,x_8\}$ поместим в грань Γ_1, α-цепь $L_2=\{x_4,x_6\}$ также помещаем в эту же грань. В результате возникает новый граф $\tilde{G}$, изображенный на рисунке 3.52. Этот граф имеет пять граней и один сегмент.

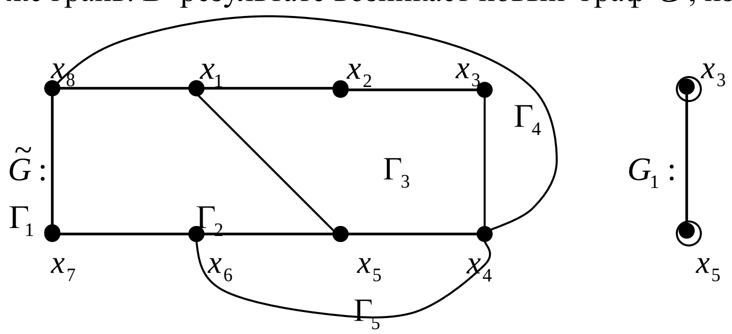


Рис. 3.52.

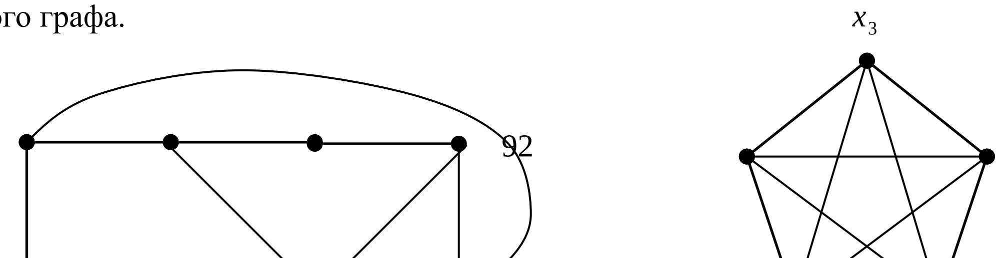
Шаг 1. G_1 - ребро (x_3,x_5).

Шаг 2. $\Gamma(G_1)=\{\Gamma_3\}$.

Шаг 3. $\Gamma(G_1)\neq\varnothing$.

Шаг 4. $\Gamma(G_1)=\{\Gamma_3\}$, переход на шестой шаг.

Шаг 6. α-цепь $L_1=\{x_3,x_5\}$ поместим в грань Γ_3. Новый граф $\tilde{G}$ на рисунке 3.53 является плоской укладкой исходного планарного графа.



x_8 x_1 x_2 x_3 K_5 :

Γ_6 x_2 x_4

$\tilde{G}$: Γ_3

Γ_1 Γ_2 Γ_4

x_7 x_6 x_5 x_4 x_1 x_5

Γ_5 Рис. 3.54.

Рис. 3.53.

Пример 2. Попытаемся получить плоскую укладку графа K_5, изображенного на рисунке 3.54. Поскольку известно, что граф непланарен, алгоритм должен закончить работу на третьем шаге.

Шаг 1. Выберем простой цикл $C = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $\tilde{G} = C$.

Шаг 2. Граней у графа $\tilde{G}$ две: Γ_1 и Γ_2, сегментов пять, все они показаны на рис. 3.55.

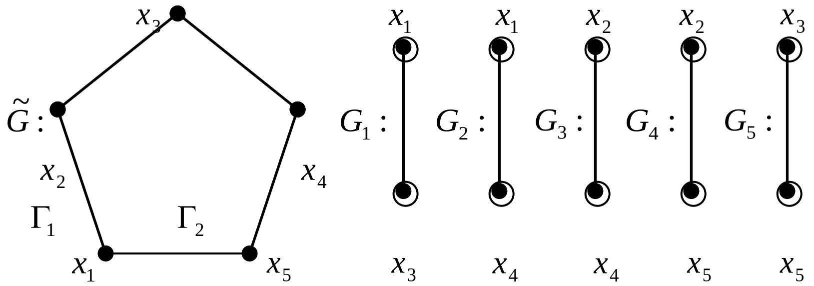


Рис. 3.55.

Шаг 3. $\Gamma(G_i) = 2, i = \overline{1,5}$.

Шаг 4. $\Gamma(G_i) \neq 1, i = \overline{1,5}$.

Шаг 5. Выберем для G_1 и G_5 грань Γ_2 в качестве допустимой грани.

Шаг 6. α-цепи $L_1 = \{x_1, x_3\}$ и $L_2 = \{x_3, x_5\}$ присоединим к графу $\tilde{G}$. Получим новый граф $\tilde{G}$ и три сегмента G_1, G_2, G_3. (см. рис. 3.56).

Шаг 1-2. Новых граней у графа $\tilde{G}$ четыре: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

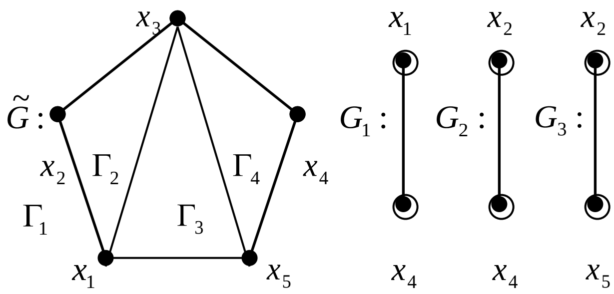


Рис. 3.56.

Шаг 3. $\Gamma(G_1) = \{\Gamma_1\}$, $\Gamma(G_2) = \{\Gamma_1\}$, $\Gamma(G_3) = \{\Gamma_1\}$.

Шаг 4. Для G_1 и G_2 выберем грань Γ_1.

Шаг 6. α-цепи $L_1 = \{x_1, x_4\}$ и $L_2 = \{x_2, x_4\}$ поместим в грань Γ_1 и присоединим к $\tilde{G}$.

Шаг 1. $\tilde{G}$ и сегмент G_1 показаны на рис. 3.57.

Шаг 2. Граней у графа $\tilde{G}$ теперь шесть: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$.

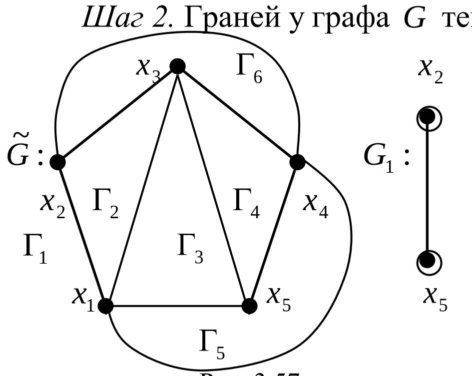


Рис. 3.57.

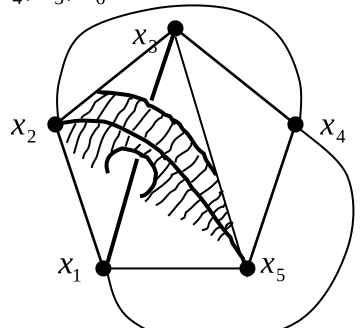


Рис. 3.58.

Шаг 3. $\Gamma(G_1) = \varnothing$. Исходный граф G непланарен, конец алгоритма.

В заключение найдем число планарности и толщину полного графа K_5. По формуле (3.20.2) $sk(K_5) = C_5^2 - 3 \cdot 5 + 6 = 10 - 15 + 6 = 1$. Это соответствует действительности, у графа $\tilde{G}$ остался один не присоединенный сегмент G_1 (см. рис. 3.57).

Для толщины полного графа модификация формул (3.20.3) дает точную оценку $t(K_5) = \left[\dfrac{n+7}{6}\right] = \left[\dfrac{5+7}{6}\right] = 2$. Таким образом, этот граф можно представить в виде объединения планарных графов на двух плоскостях (см. рис. 3.58).

3.22. Хроматические графы. Раскраски графов

Пусть $G = (S, U)$ - неориентированный граф. Раскраской графа называется такое приписывание цветов его вершинам, что никакие две смежные вершины не получают одинакового цвета. Таким образом, множество вершин одного цвета является независимым множеством. Хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется минимальное число цветов, требующееся для раскраски G. Если $\chi(G) = k$, то граф называется k-хроматическим.

Задачи раскраски вершин и ребер графа занимают важное место в истории развития теории и в самой теории графов. К построению раскрасок сводится целый ряд практических задач, например, задачи составления расписаний, распределения оборудования, проектирования некоторых технических изделий.

В теории хроматических графов существует так называемая гипотеза четырех красок, которую некоторые авторы с полным основанием называют «болезнью четырех красок». Попытки обосновать эту гипотезу привели к ряду интересных результатов не только по раскраске графов, но и в ряде других разделов теории графов.

Легко найти хроматические числа некоторых известных графов, например, $\chi(K_n) = n$, $\chi(\overline{K_n}) = 1$, $\chi(K_{n,m}) = 2$, $\chi(T) = 2$, где $\overline{K}$ - дополнительный граф, а T - дерево. Однако эффективные методы определения хроматического числа произвольных графов до сих пор не найдены. В такой ситуации актуальны оценки хроматического числа, выражаемые в терминах более или менее просто вычислимых параметров графа.

Обозначим через $P(G)$ наибольшую из степеней вершин графа G.

Теорема 3.24. **Для любого неориентированного графа G выполняется неравенство** $\chi(G) \le P(G) + 1$.
(3.22.1)

Следующая теорема связывает хроматическое число графа с количеством его вершин и ребер.

Теорема 3.25. **Для любого связного (n, m)- графа G верны неравенства**

$$-\left[-n \Bigg/ \left[\frac{n^2 - 2m}{n}\right] \left(1 - \left\{\frac{n^2-2m}{n}\right\} \Bigg/ \left(1 + \left[\frac{n^2-2m}{n}\right] \right) \right) \right] \le \chi(G) \le \left[\frac{3 + \sqrt{9 + 8(m-n)}}{2} \right], \quad (3.22.2)$$

где $[\ldots]$- целая часть, а $\{\ldots\}$- дробная часть числа.

Наконец, теорема 3.26 оценивает хроматическое число в терминах числа независимости $\alpha_0(G)$ графа G.

Теорема 3.26. **Для любого n- вершинного графа G верно неравенство**

$$\frac{n}{\alpha_0(G)} \le \chi(G) \le n - \alpha_0(G) + 1. \quad (3.22.3)$$

Проблема раскраски планарных графов является одной из самых знаменитых проблем теории графов. Она возникла из задачи раскраски географической карты, при которой любые две соседние страны должны быть окрашены в различные цвета. Эта задача легко сводится к задаче раскраски планарного графа.

В 1879 году английский математик Кэли четко сформулировал гипотезу четырех красок.

Гипотеза четырех красок. **Всякий планарный граф 4-раскрашиваем.**

Попытки доказать эту гипотезу привели в 1890 году к появлению теоремы Хивуда*.

Теорема 3.27. **Всякий планарный граф 5-раскрашиваем.**

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по числу вершин графа. Совершенно очевидно, что если у графа не более пяти вершин, то теорема справедлива. Предположим, что она верна для графов порядка $n, n \geq 5$.

Рассмотрим планарный граф G с $n+1$ вершиной и докажем сначала несколько вспомогательных соотношений. Во-первых, из теоремы 3.21 вытекает, что если в связном плоском (n,m) - графе граница каждой грани является r-циклом, $r \geq 3$, то $m(r-2) = r(n-2)$.

Действительно, так как каждая грань графа ограничена r-циклом, то каждое ребро принадлежит дум граням, т. е. $f \cdot r = 2m$, где f - число граней, но $f = 2 - n + m$ из теоремы 3.21, тогда $(2-n+m) \cdot r = 2m$ и $m(r-2) = r(n-2)$. При $r = 3$ получим $m = 3n - 6$.

Далее убедимся в том, что если число вершин у максимального плоского графа не менее четырех, то степень каждой вершины не менее трех (см. рис. 3.59). Рассмотрим вершину x_1. Пусть x_3 - смежная с ней вершина. Ребро (x_1, x_3) принадлежит дум граням - треугольникам (x_1, x_3, x_2) и (x_1, x_3, x_4), причем $x_2 \neq x_4$, так как число вершин не менее четырех. Таким образом, x_1 смежна по крайней мере с тремя вершинами x_2, x_3 и x_4 (см. рис. 3.59).

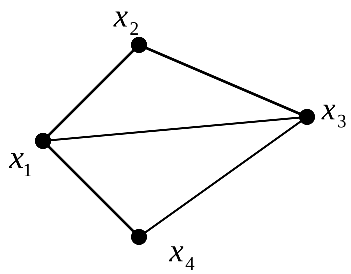
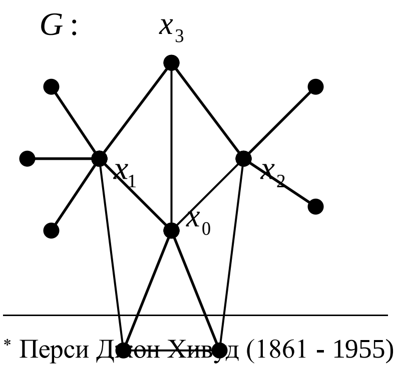


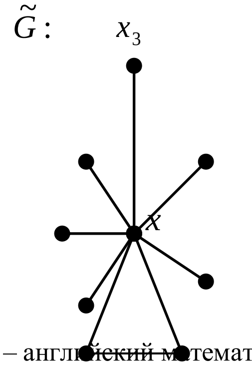
Рис. 3.59.

Итак, для максимального плоского графа с учетом двух предыдущих замечаний и лемме о рукопожатиях (см.задачу 3.9.1) будем иметь $m = 3n - 6$, $2m = 2(3n-6) = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \ldots \geq 3(n_3 + n_4 + n_5) + 6\sum_{i \geq 6} n_i$, где n_i - число вершин степени i у максимального плоского графа. Но $n = \sum_{i \geq 3} n_i = n_3 + n_4 + n_5 + \sum_{i \geq 6} n_i$, тогда $6n - 12 = 6(n_3 + n_4 + n_5) + 6\sum_{i \geq 6} n_i - 12 \geq 3(n_3 + n_4 + n_5) + 6\sum_{i \geq 6} n_i$. Отсюда $n_3 + n_4 + n_5 \geq 4$, т. е. всякий планарный граф с $n \geq 4$ вершинами имеет, по крайней мере, четыре вершины со степенями, не превосходящими пяти.

Максимальный плоский граф G' отличается от исходного графа G лишь наличием дополнительных ребер, соединяющих не смежные вершины без пересечения с прочими ребрами. Если в графе G' имеется по крайней мере четыре вершины со степенями не больше пяти, то в исходном графе G такие вершины и подавно имеются.

Вернемся теперь к основному доказательству. В графе порядка $n+1$ содержится вершина x_0, степень которой не превосходит пяти. Пусть $S = S(x_0)$ - окружение вершины x_0 в графе G (см. рис. 3.60). Возможны два случая.





1) $|S| = 4$. В этом случае граф $G \setminus \{x_0\}$ 5-раскрашиваем по индуктивному

* Перси Джон Хивуд (1861 - 1955) – английский математик.

x_4 x_5 x_4 x_5

Рис. 3.60.

предположению. Раскрасим вершины графа $G \setminus \{x_0\}$ пятью цветами, а вершину x_0 окрасим в тот цвет, который не был использован при раскраске вершин из S.

2) $|S| = 5$. В множестве S существуют две не смежные вершины x_1 и x_2, иначе $G(S) = K_5$ и граф G не будет планарным (см. рис. 3.60). Граф $\tilde{G}$, полученный из $G \setminus \{x_0\}$ слиянием вершин x_1 и x_2 в вершину x, плоский и 5-раскрашиваемый по индуктивному предположению.

Рассмотрим какую-либо из его 5-раскрасок. В графе G окрасим вершины x_1 и x_2 в цвет вершины x, а остальные отличные от x вершины – в те же цвета, что и соответствующие вершины графа $\tilde{G}$. Затем припишем вершине x_0 цвет, не используемый при раскраске вершин из S. Таким образом, получится правильная 5-раскраска графа G.

Трудность проблемы четырех красок привела к появлению большого числа равносильных ей формулировок. В конце 60-х годов прошлого века эта проблема была сведена к исследованию большого, но конечного множества так называемых неустранимых конфигураций, число которых оказалось равно 1482.

В 1976 году научному коллективу под руководством К. Аппеля* и В. Хейкена** удалось с использованием ЭВМ правильно раскрасить все графы из множества неустранимых конфигураций, затратив на это около 2000 часов машинного времени. Таким образом, хотя такое доказательство очень сложно повторить, можно считать, что формально гипотеза четырех красок доказана.

В заключение рассмотрим очень простой алгоритм последовательной раскраски графа. Этот алгоритм в общем случае не приводит к минимальной раскраске. Только для некоторых классов графов, например, полных k-дольных последовательная раскраска является минимальной.

* Кеннет Аппель (???? - ????) – математик.

** В. Хейкен (???? - ????) – математик.

Алгоритм последовательной раскраски содержит два правила.

1) Произвольной вершине x графа G присваивается цвет 1.

2) Если вершины $x_1, x_2, ..., x_i$ раскрашены k цветами $1,3,...,k, k \le i$, то новой произвольно взятой вершине x_{i+1} приписывается минимальный цвет, не использованный при раскраске вершин из ее окружения.

Пример 1. Оценить и найти хроматическое число графа, изображенного на рисунке 3.61 б) и раскрасить его вершины по алгоритму последовательной раскраски. Является ли полученная раскраска минимальной?

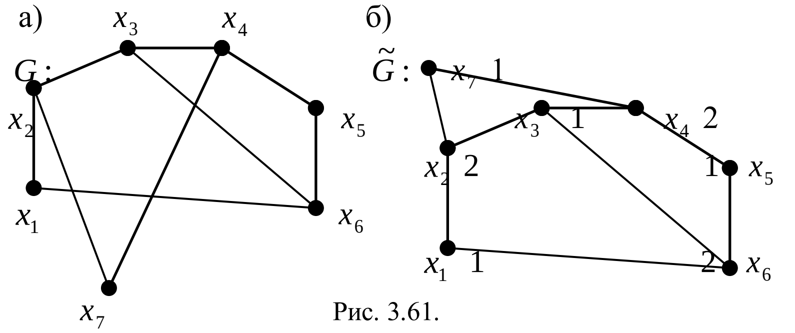


Рис. 3.61.

Плоская укладка этого графа, полученная по описанному в подразд. 3.21 алгоритму, изображена на рис. 3.61 б). Исходный граф G - планарный.

Оценим его хроматическое число. Формула (3.22.1) дает $n = 7$, $m = 9$, $P(G) = 3$, $\chi(G) \le 3 + 1 = 4$. Аналогично, по (3.22.2) получим

$$\left[\frac{7}{\left[\frac{49-18}{7}\right]}\cdot\frac{1-\left\{\frac{49-18}{7}\right\}}{1+\left[\frac{49-18}{7}\right]}\right] \le \chi(G) \le \left[\frac{3+\sqrt{9+8\cdot 2}}{2}\right],$$

т. е. $0 \le \chi(G) \le 4$. Наконец, так как $\alpha_0(G) = 4$, по формуле (3.22.3) будем иметь $\frac{7}{4} \le \chi(G) \le 7 - 4 + 1$, т. е. $1.75 \le \chi(G) \le 4$.

На самом деле $\chi(G) = 2$. Раскрасим вершины этого графа по алгоритму последовательной раскраски. Выберем в качестве начальной вершину x_7 и присвоим ей цвет 1. $S(x_7) = \{x_2, x_4\}$, поэтому обеим вершинам присваиваем цвет 2. Далее выберем, например, вершину x_3. Ее окружение $S(x_3) = \{x_2, x_4, x_6\}$. Вершины x_2 и x уже окрашены, вершина x_6 еще нет. Минимальным цветом, не использованным при раскраске вершин из окружения вершины x_3 является цвет 1, поэтому вершине x_3 присвоим этот цвет.

После нескольких этапов работы алгоритма получится раскраска, показанная на рис. 3.61 б). Эта раскраска минимальна, так как граф G двуцветен и представляет собой неполный двудольный граф (см. рис. 3.62). Двуцветные графы удовлетворяют следующей теореме.

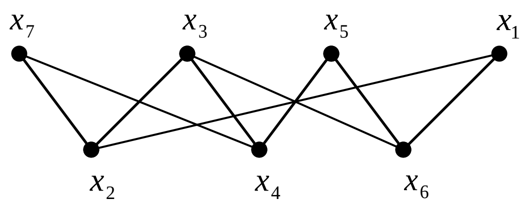


Рис. 3.62.

Теорема 3.28 (теорема Кенига)* **Граф двуцветен тогда и только тогда, когда он не содержит нечетных простых циклов.**

Это условие выполняется для графа $\widetilde{G}$ (см. рис. 3.61 б).

3.23. Практическое занятие № 9. Планарные и хроматические графы

3.23.1. Определим графы G_n следующим образом. Пусть G_n - граф, множество вершин которого совпадает с отрезком натурального ряда $\{1,2,...,10\}$, а множество ребер определяется следующим условием: не совпадающие вершины x и y смежны тогда, когда

* Денез Кёниг (1884 - 1944) – венгерский математик.

числа x и y взаимно просты. При каких значения n графы G_n планарны?

3.23.2. Доказать, что любой граф можно уложить в трехмерном пространстве R^3.

3.23.3. Какие из графов, изображенных на рисунке 3.63 являются планарными?

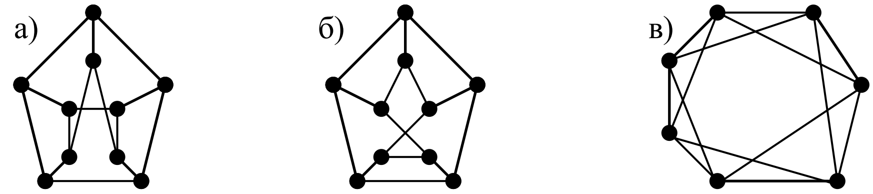


Рис. 3.63.

3.23.4. При каких n графы порядка $2n$, изображенные на рисунке 3.64, являются планарными?

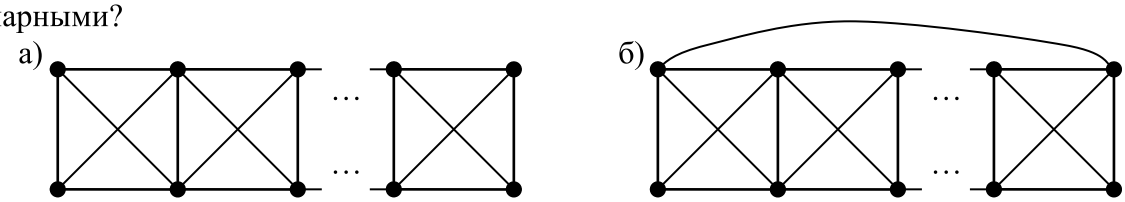


Рис. 3.64.

3.23.5. С помощью алгоритма укладки графа на плоскость построить плоские укладки или установить не планарность графов, изображенных на рисунке 3.65.

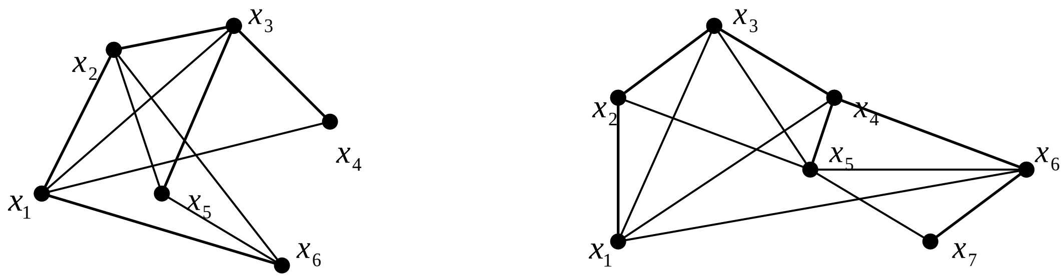


Рис.3.65.

3.23.6. Найти число планарности и толщину графов а) K_5; б) $K_{3,3}$ и в) графа Петерсена.

3.23.7. Уложить графы а) K_5 и б) $K_{3,3}$ на торе.

3.23.8. Определить хроматические числа графов, изображенных на рисунке 3.66.

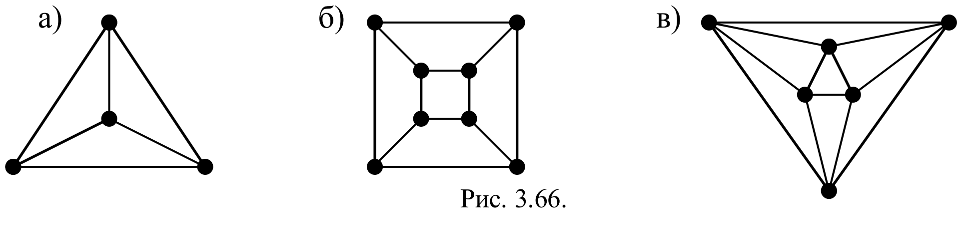


Рис. 3.66.

3.23.9. Граф называется критическим, если удаление любой из его вершин приводит к графу с меньшим хроматическим числом. Показать, что K_n является критическим графом при $n > 1$, а C_n - тогда и только тогда, когда n - нечетно. C_n - простой цикл, содержащий n вершин.

3.23.10. Приведите пример графа, последовательная раскраска вершин которого не является минимальной.

3.24. Потоки в сетях

Функциональное назначение большинства физически реализованных сетей состоит в том, что они служат носителями систем потоков, то есть систем, в которых некоторые объекты текут, движутся или транспортируются по системе каналов (дуг сети) ограниченной пропускной способности. Примерами могут служить поток автомобильного транспорта по сети автодорог, поток грузов по участку железнодорожной сети, поток воды в городской сети водоснабжения, поток электрического тока в электросети, поток телефонных или телеграфных сообщений по каналам связи, поток программ в вычислительной сети. Ограниченная пропускная способность означает, что интенсивность перемещения соответствующих предметов по каналу ограничена сверху определенной величиной.

Наиболее часто в сети решается задача о максимальном потоке и минимальном разрезе. При этом граф $G=(S,U)$ должен удовлетворять следующим условиям:

1) G - связный граф без петель;

2) существует ровно одна вершина, не имеющая предшествующих; эта вершина называется источником и обозначается s;

3) существует ровно одна вершина, не имеющая последующих; эта вершина называется стоком и обозначается t;

4) каждой дуге $(x_i, x_j)\in U$ поставлено в соответствие неотрицательное число $c(x_i, x_j)$, $c(x_i, x_j)\in\Omega$, называемое пропускной способностью дуги.

Функция $\varphi(x_i, x_j)$, определенная на множестве дуг сети $G=(S,U,\Omega)$, называется потоком, если $0\le\varphi(x_i, x_j)\le c(x_i, x_j)\ \forall(x_i, x_j)\in U$ и $\sum\limits_{x_i\in S_{пр}(x_j)}\varphi(x_i, x_j)=\sum\limits_{x_j\in S_{сл}(x_i)}\varphi(x_i, x_j)$ для любой вершины $x_i\in S$ и $x_i\notin\{s,t\}$. Последнее условие называется условием сохранения потока, в промежуточных вершинах потоки не создаются и не исчезают.

Величина $\Delta(x_i, x_j)=c(x_i, x_j)-\varphi(x_i, x_j)$ называется остаточной пропускной способностью дуги (x_i, x_j). Если $\varphi(x_i, x_j)=c(x_i, x_j)$, то дуга называется насыщенной.

Максимальный поток определяется с помощью одного из основных понятий теории сетей – разреза. Разрез может быть определен как множество дуг, исключение которых из сети отделило бы некоторое множество узлов от остальной сети. Предположим, что множество вершин сети S разбито на два непустых непересекающихся подмножества $S=S^{/}\cup S^{//}$ и $S^{/}\cap S^{//}=\varnothing$. Множество дуг, начала которых лежат в $S^{/}$, а концы в $S^{//}$, называется ориентированным разрезом и обозначается $(S^{/}\to S^{//})$. Следовательно,

$$\left(S^{/}\to S^{//}\right)=\left\{(x_i, x_j)\big/ x_i\in S^{/},\ x_j\in S^{//}\right\}. \qquad (3.24.1)$$

Пропускной способностью или величиной разреза $(S^{/}\to S^{//})$ называется сумма пропускных способностей входящих в него дуг, то есть

$$c\left(S^{/}\to S^{//}\right)=\sum_{x_i\in S^{/},\, x_j\in S^{//}} c(x_i, x_j). \qquad (3.24.2)$$

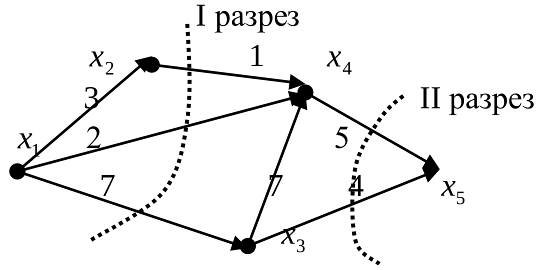


Рис. 3.67.

На рисунке 3.67 изображена сеть, на которой около каждого ребра указана его пропускная способность. Произведены два разреза I и II. При разрезе I вершины оказались разбиты на подмножества $S^{/}=\{x_1, x_2\}$ и $S^{//}=\{x_3, x_4, x_5\}$, а ребрами, образующими разрез стали ребра $(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_4)$. При разрезе II $S^{/}=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а $S^{//}=\{x_5\}$, разрез образуют ребра $(x_3, x_5), (x_4, x_5)$.

3.25. Теорема Форда* – Фалкерсона

Теорема 3.29. **Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока в сети от источника к стоку равна пропускной способности минимального разреза.**

Доказательство. Алгоритм Форда – Фалкерсона построения максимального потока и минимального разреза основан на следующих обстоятельствах.

1. Предположим, что в сети имеется некоторый поток и путь из s в t, состоящий из ненасыщенных дуг. Тогда очевидно, что поток в сети можно увеличить на величину Δ, равную минимальной из остаточных пропускных способностей дуг, входящих в этот путь. Перебирая все возможные пути из s в t и проводя такую процедуру увеличения потока, пока это возможно, получим в результате полный поток, т. е. такой поток, для которого каждый путь из s в t содержит по крайней мере одну насыщенную дугу.

2. Рассмотрим произвольный маршрут (неориентированный путь) из s в t. Дуги, образующие этот маршрут, естественным образом делятся на два типа: прямые (ориентированные от s к t) и обратные (ориентированные от t к s). Пусть существует путь, в котором прямые дуги не насыщены, а потоки на обратных дугах положительны. Пусть Δ_1 - минимальная из остаточных пропускных способностей прямых дуг, а Δ_2 - минимальная из величин потоков обратных дуг. Тогда поток в сети можно увеличить на величину $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$, прибавляя Δ к потокам на прямых дугах и вычитая Δ из потоков на обратных дугах (см. рис. 3.68). Очевидно, что при этом условие баланса (условие сохранения потока) $\sum\limits_{x_i \in S_{пр}(x_j)} \varphi(x_i, x_j) = \sum\limits_{x_j \in S_{сл}(x_i)} \varphi(x_i, x_j)$ для узлов, входящих в рассматриваемый маршрут, не нарушится. Ясно, что если множество обратных дуг не пусто, то при такой процедуре увеличения потока в сети фактического перемещения объектов вдоль рассматриваемого маршрута не происходит, так как оно в принципе невозможно. Однако эта процедура уменьшает потоки на некоторых дугах, которые, возможно, были перед этим насыщенными, образуя таким образом новые пути из ненасыщенных дуг, вдоль которых и происходит фактическое перемещение потока величины Δ.

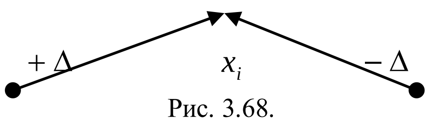


Рис. 3.68.

Ясно также, что первая процедура является частным случаем второй.

Пример 1. Пропускные способности дуг заданы следующей матрицей. Построить максимальный поток от s к t и указать минимальный разрез, отделяющий s от t.

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ s \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} s & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 12 & - & 13 & - & - \\ - & - & 11 & 14 & 15 & - \\ - & - & - & - & - & 8 \\ - & - & - & - & 7 & 15 \\ - & - & 8 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}.$$

Этап 1. Путь $s \xrightarrow{12} x_1 \xrightarrow{14} x_3 \xrightarrow{15} t.$

$\delta = \min(12, 14, 15) = 12.$ Увеличим по этому пути поток до 12 единиц, ребро (s, x_1) становится насыщенным. Поставим величину потока на дугах (x_1, x_3) и (x_3, t).

Путь $s \xrightarrow{13} x_3 \xrightarrow{12(15)} t.$ $\delta = \min(13, 15-12) = 3.$ Поток можно увеличить на три

---
* Лестер Форд (???? - ????) – американский математик.

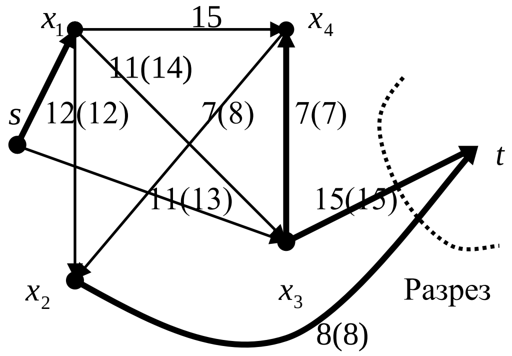


Рис. 3.69.

единицы. Дуга (x_3, t) станет насыщенной. Путь $s \xrightarrow{3(13)} x_3 \xrightarrow{7} x_4 \xrightarrow{8} x_2 \xrightarrow{8} t.$ Можно увеличить поток на семь единиц; дуга (x_3, x_4) станет насыщенной, потоки на дугах примут вид (см. рис. 3.69):
$s \xrightarrow{10(13)} x_3 \xrightarrow{7(7)} x_4 \xrightarrow{7(8)} x_2 \xrightarrow{7(8)} t.$
Больше путей нет. Конец первого этапа.

Этап 2. Рассмотрим теперь маршруты, содержащие противоположные дуги. Маршрут $s \xrightarrow{10(13)} x_3 \xleftarrow{12(14)} x_1 \xrightarrow{11} x_2 \xrightarrow{7(8)} t.$ Поток можно увеличить на единицу на дуге (x_2, t). Тогда потоки по дугам этого маршрута станут такими $s \xrightarrow{11(13)} x_3 \xleftarrow{11(14)} x_1 \xrightarrow{1(11)} x_2 \xrightarrow{8(8)} t.$ Дуга (x_2, t) стала насыщенной.

Больше маршрутов нет. Поток максимален. Делаем разрез вокруг t по насыщенным дугам и получаем его величину 15+8=23 единицы.

3.26. Поток минимальной стоимости

Рассмотрим задачу определения потока, заданной величины θ от s к t в сети $G = (S, U, \Omega, D)$, в которой каждая дуга (x_i, x_j) характеризуется пропускной способностью $c(x_i, x_j) \in \Omega$ и неотрицательной стоимостью $d(x_i, x_j) \in D$ пересылки единичного потока из x_i в x_j вдоль дуги (x_i, x_j).

Если $\theta > \varphi_{\max}$, где $\varphi_{\max}$ - величина максимального потока в сети G от s к t, то решения нет. Если же $\theta \le \varphi_{\max}$, то может быть определено несколько различных потоков величины θ от s к t. Математическая модель задачи выглядит следующим образом. Минимизировать

$$\sum_{(x_i, x_j) \in U} d(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_i, x_j), \qquad (3.26.1)$$

где $\varphi(x_i, x_j)$ - поток по дуге (x_i, x_j) при ограничениях:

1) $0 \le \varphi(x_i, x_j) \le c(x_i, x_j) \;\; \exists (x_i, x_j) \in U$;

2) для начальной вершины $s \in S$ $\sum\limits_{x_i \in S} \varphi(s, x_i) - \sum\limits_{x_i \in S} \varphi(x_i, s) = \theta$ - уравнение истока;

3) для конечной вершины $t \in S$ $\sum\limits_{x_i \in S} \varphi(t, x_i) - \sum\limits_{x_i \in S} \varphi(x_i, t) = -\theta$ - уравнение стока;

4) для любой другой вершины $x_j \ne s, t$ $\sum\limits_{x_i \in S} \varphi(x_j, x_i) - \sum\limits_{x_i \in S} \varphi(x_i, x_j) = 0$ - условие сохранения потока.

Если μ^* - кратчайший путь от s к t в сети $G = (S, U, D)$, $c_{\min}(\mu^*)$ - минимальная из пропускных способностей дуг, входящих в путь μ^*, и если $\theta < c_{\min}(\mu^*)$, то задача имеет тривиальное решение – весь поток θ направляется вдоль пути μ^*. Общее решение задачи о потоке минимальной стоимости строится следующим образом. Сначала находится кратчайший путь μ^* от s к t и величина $\varphi_{\max}(\mu^*)$ максимально возможного потока вдоль этого пути. Если окажется, что $\theta \le \varphi_{\max}(\mu^*)$, то задача решена. В противном случае сеть модифицируют специальным образом. Затем опять находят кратчайший путь от s к t и максимально возможный поток вдоль этого пути в модифицированной сети. Процедуры модификации сети и нахождения кратчайшего пути в ней повторяются до тех пор, пока либо нужное количество θ не будет переправлено, либо возникнет сеть, в которой нет пути от s к t, что означает отсутствие решения у исходной задачи.

Модификация сети допускается только определенного порядка. Пусть $G=(S,U,\Omega,D)$ - исходная сеть, S - множество вершин, U - множество ребер, Ω - множество весов (пропускных способностей дуг), D - набор стоимостей пересылки единичного потока из x_i в x_j вдоль дуги (x_i,x_j).

Модифицированная относительно данного потока φ сеть $\tilde{G}=(\tilde{S},\tilde{U},\tilde{\Omega},\tilde{D})$ строится следующим образом.

1) $\tilde{S}=S$, то есть число и набор вершин в модифицированной сети не меняется.

2) $\tilde{U}=U\cup V$, где V - некоторое множество фиктивных дуг. Таким образом, после модификации число дуг сети увеличивается.

3) Если $(x_j,x_i)\in S$ и $\varphi(x_j,x_i)>0$, то дуга (x_i,x_j) включается в множество V. При этом полагается $\tilde{c}(x_i,x_j)=\varphi(x_j,x_i)$, $\tilde{d}(x_i,x_j)=-d(x_j,x_i)$. Этот пункт применяется только к дугам, по которым проходит поток φ, относительно которого происходит модификация сети.

4) Для всех ненасыщенных дуг, где нет противоположного потока, в том числе и для ненасыщенных дуг с потоком, относительно которого происходит модификация сети, то есть для $(x_i,x_j)\in S,\ \varphi(x_i,x_j)<c(x_i,x_j)$ и $\varphi(x_j,x_i)=0$ полагают $\tilde{c}(x_i,x_j)=c(x_i,x_j)-\varphi(x_i,x_j)$, $\tilde{d}(x_i,x_j)=d(x_i,x_j)$.

5) Для всех насыщенных дуг $(x_i,x_j)\in S,\ \varphi(x_i,x_j)=c(x_i,x_j)$ и $\varphi(x_j,x_i)=0$ полагают $\tilde{c}(x_i,x_j)=0,\ \tilde{d}(x_i,x_j)=\infty$.

Это довольно сложный и «длительный» алгоритм. Нахождение кратчайшего пути как в исходной, так особенно в модифицированной сети может потребовать использования алгоритма Беллмана – Мура. Кроме того решение типичных учебных задач требует три – четыре итерации алгоритма.

Пример 1. Пусть матрицами Ω и D заданы пропускные способности дуг сети и стоимости транспортировки единичного потока вдоль всех дуг. Требуется: 1) построить максимальный поток от s к t и указать минимальный разрез, отделяющий s от t;

2) построить поток величины $\theta=\left[\frac{3}{4}\varphi_{\max}\right]$, имеющий минимальную стоимость, здесь $[...]$ - целая часть числа.

Построим рисунок соответствующей сети (см. рис. 3.70). Первое число на дугах соответствует стоимости транспортировки единичного потока вдоль этой дуги; второе число – пропускная способность дуги.

Найдем максимальный поток от вершины s к вершине t по алгоритму Форда – Фалкерсона.

$$\Omega=\begin{array}{c} \\ s\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ t\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} s & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & t\end{array}\\ \begin{pmatrix} - & 13 & 11 & - & - & -\\ - & - & 11 & 6 & - & -\\ - & - & - & 11 & 13 & 17\\ - & - & - & - & 9 & -\\ - & - & - & - & - & 10\\ - & - & - & - & - & -\end{pmatrix}\end{array},\quad D=\begin{array}{c} \\ s\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ t\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} s & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & t\end{array}\\ \begin{pmatrix} - & 9 & 10 & - & - & -\\ - & - & 12 & 9 & - & -\\ - & - & - & 7 & 9 & 13\\ - & - & - & - & 14 & -\\ - & - & - & - & - & 9\\ - & - & - & - & - & -\end{pmatrix}\end{array}.$$

Этап 1. Путь $s\xrightarrow{11}x_2\xrightarrow{17}t.\ \delta=\min(11,17)=11$. Увеличим по этому пути поток

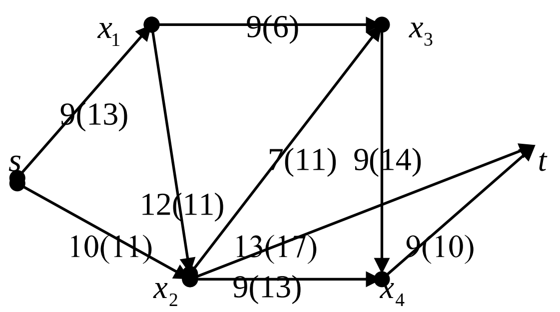


Рис. 3.70.

до 11 единиц, ребро (s,x_2) станет насыщенным. Второй возможный путь $s \xrightarrow{13} x_1 \xrightarrow{11} x_2 \xrightarrow{13} x_4 \xrightarrow{10} t$. $\delta = \min(13,11,13,10) = 10$. Поток по этому пути равен 10 единицам. Дуга (x_4,t) станет насыщенной. Третий путь, по которому возможен ненулевой поток – это путь $s \xrightarrow{3} x_1 \xrightarrow{1} x_2 \xrightarrow{6} t$. Здесь $\delta = \min(3,1,6) = 1$. По этому пути можно увеличить поток лишь на единицу, при этом дуга (x_1,x_2) станет насыщенной. Больше путей нет.

Этап 2. Рассмотрим маршруты с противоположными ребрами. Маршрут $s \xrightarrow{2} x_1 \xrightarrow{6} x_3 \xleftarrow{11} x_2 \xrightarrow{5} t$. Поток можно увеличить на две единицы на дуге (s,x_1). Эта дуга станет насыщенной. Тогда потоки по этому маршруту будут такими: $s \xrightarrow{13(13)} x_1 \xrightarrow{6(2)} x_3 \xleftarrow{11(-2)} x_2 \xrightarrow{17(14)} t$. Больше маршрутов нет. Поток максимален. На

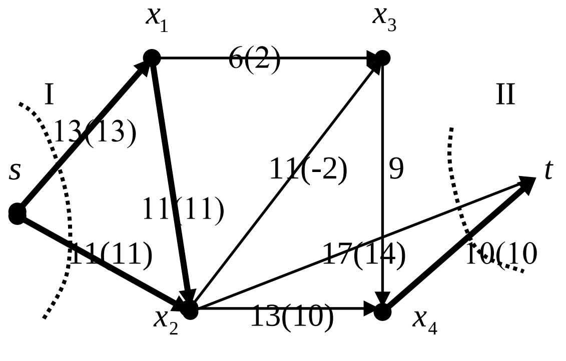


Рис. 3.71.

рисунке 3.71 на дугах графа стоят две цифры: первая – пропускная способность дуги, вторая - поток по дуге (насыщенные дуги выделены). Теперь можно сделать несколько разрезов, например, отделяя исток и сток. И по первому I, и по второму II разрезу поток одинаков $\varphi_{\max} = 24$

Построим теперь поток величины $\theta = \left[\frac{3}{4}\varphi_{\max}\right] = \left[\frac{3}{4}\cdot 24\right] = 18$ единиц. По рассмотренному алгоритму для этого надо построить кратчайший путь от s к t на графе $G = (S,U,D)$. Этот граф изображен на рисунке 3.72, веса всех дуг в нем положительны, можно использовать алгоритм Дейкстры.

Этап 1. *Шаг 1.* $d(s) = 0^*$, $d(x_1) = d(x_2) = ... = d(t) = \infty$, $\tilde{x} = s$.

Первая итерация. Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_1, x_2\}$, $d(x_1) = \min(\infty, 0^* + 9) = 9$,

$d(x_2) = \min(\infty, 0^* + 10) = 10$.

Шаг 3. $\min(9,10,\infty,\infty,\infty) = 9^* = d(x_1)$. $\tilde{x} = x_1$.

Шаг 4. $\tilde{x} = t$? Нет. Переход на начало второго шага.

Вторая итерация. Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_2, x_3\}$, $d(x_2) = \min(10, 9^* + 12) = 10$.

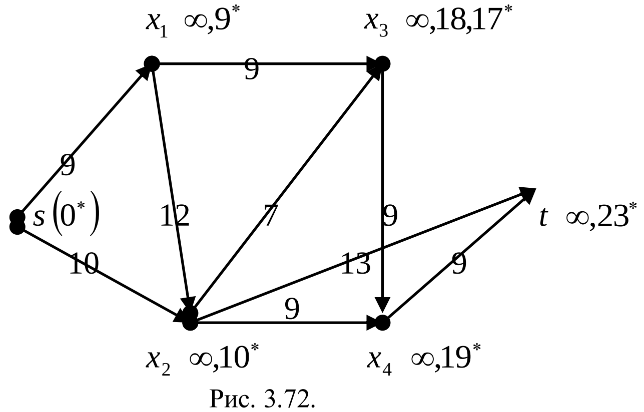


Рис. 3.72.

$d(x_3) = \min(\infty, 9^* + 9) = 18$.

Шаг 3. $\min(10,18,\ \infty,\infty) = 10^* = d(x_2)$.

$\tilde{x} = x_2$. Шаг 4. $\tilde{x} = t$? Нет.

Третья итерация. Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_3, x_4, t\}$,

$d(x_3) = \min(18, 10^* + 7) = 17$,

$d(x_4) = \min(\infty, 10 + 9) = 19$,

$d(t) = \min(\infty, 10 + 13) = 23$.

Шаг 3. $\min(17,19,\ 23) = 17^* = d(x_3)$. $\tilde{x} = x_3$.

Шаг 4. $\tilde{x} = t$? Нет. Переход на начало второго шага

Четвертая итерация. Шаг 2. $\tilde{S} = \{x_4\}$, $d(x_4) = \min(19, 17^* + 14) = 19$, *Шаг 3.* $\min(19, 23) = 19^* = d(x_4)$, $\tilde{x} = x_4$.

Шаг 4. $\tilde{x} = t$? Нет. Переход на начало второго шага

Пятая итерация. Шаг 2. $\tilde{S} = \{t\}$, $d(t) = \min(23, 19^* + 9) = 23$.

Шаг 3. $\min(23) = 23^* = d(t)$, $\tilde{x} = t$.

Шаг 4. $\tilde{x} = t$? Да. Конец первого этапа.

Этап 2. Кратчайший путь здесь очевиден, это путь $\mu_1^* = (s, x_2) - (x_2, t)$. Максимальный поток по этому пути $\varphi_{\max} = c_{\min}(\mu_1^*) = \min(11, 17) = 11$. Так как $\theta = 18$, то $\varphi_{\max} < \theta$; требуется модификация сети.

Положим $\varphi(s, x_2) = \varphi(x_2, t) = 11$ и $\varphi(x_i, x_j) = 0$ для остальных дуг. Тогда по третьему пункту правил модификации сети включим обратные дуги (x_2, s) и (t, x_2). При этом $\tilde{c}(x_2, s) = 11$, $d(x_2, s) = -10$, $\tilde{c}(t, x_2) = 11$, $\tilde{d}(t, x_2) = -13$.

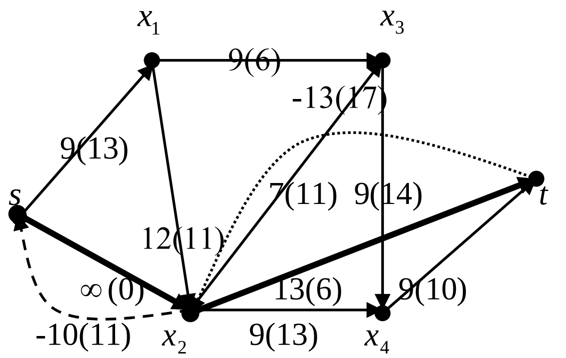


Рис. 3.73.

По четвертому пункту правил характеристики всех дуг, где нет потока останутся без изменений, для дуг потока $\varphi = 11$, т. е. только для дуги (x_2, t) изменятся характеристики $\tilde{d}(x_2, t) = 13$, $\tilde{c}(x_2, t) = 17 - 11 = 6$, . По пятому пункту правил для насыщенной дуги (s, x_2) $\tilde{c}(s, x_2) = 0$, $\tilde{d}(s, x_2) = \infty$. В результате имеем новую сеть $G = (S, U, D)$ (см. рис. 3.73). Необходимо найти кратчайший путь между s и t в этой сети. Так как теперь есть дуги с отрицательным весом, следует применить алгоритм Беллмана – Мура.

Этап 1. $d(s) = 0$, $d(x_1) = d(x_2) = ... = d(t) = \infty$, $Q = \{s\}$.

Первая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = s$, $Q = \varnothing$, $\tilde{S} = \{x_1, x_2\}$,

$d(x_1) = \min(\infty, 0 + 9) = 9$,

$9 < \infty$? Да, корректировка очереди. $Q = \{x_1\}$.

$d(x_2) = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty$,

$\infty < \infty$?. Нет, корректировка очереди не проводится.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

Вторая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_1$, $Q = Q / \{x_1\} = \varnothing$, $\tilde{S} = \{x_2, x_3\}$,

$d(x_2) = \min(\infty, 9 + 12) = 21$,

$21 < \infty$? Да, корректировка очереди. $Q = \{x_2\}$.

$d(x_3) = \min(\infty, 9 + 9) = 18$,

$18 < \infty$?. Да. $Q = \{x_2, x_3\}$.

Ш*аг 3.* $Q = \varnothing$? Нет.

Третья итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_2$, $Q = \{x_3\}$, $\tilde{S} = \{s, x_3, x_4\}$,

$0 < 0$? Нет, корректировка очереди не проводится.

$d(x_3) = \min(18, 21 + 7) = 18$,

$18 < 18$? Нет.

$d(x_4) = \min(\infty, 21 + 9) = 30$,

$30 < \infty$? Да, корректировка очереди. $Q = \{x_3, x_4\}$.

$d(t) = \min(\infty, 21 + 13) = 34$,

$34 < \infty$? Да, корректировка очереди. $Q = \{x_3, x_4, t\}$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

Четвертая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_3$, $Q = \{x_4, t\}$, $\tilde{S} = \{x_4\}$.

$d(x_4) = \min(30, 18 + 13) = 30$,

$30 < 30$? Нет, очередь не корректируется.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

Пятая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_4$, $Q = \{t\}$, $\tilde{S} = \{t\}$.

$d(t) = \min(34, 30 + 9) = 34$,

$34 < 34$? Нет, очередь не корректируется.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Нет.

Шестая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = t$, $Q = \varnothing$, $\tilde{S} = \varnothing$.

Шаг 3. $Q = \varnothing$? Да. Конец первого этапа алгоритма Беллмана – Мура.

Итак, кратчайший путь найден. Это путь $\mu_2^* = (s, x_1) - (x_1, x_2) - (x_2, t)$. Его вес $d(\mu_2^*) = 9 + 12 + 13 = 34$. $\varphi_{\max} = c_{\min}(\mu_2^*) = \min(13, 11, 6) = 6$. Общий поток по двум уже рассмотренным путям равен $\varphi_{общ} = 11 + 6 = 17 < 18 = \theta$, т. е. требуется еще одна модификация сети.

Положим опять $\varphi(s, x_1) = \varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_2, t) = 6$, $\varphi(s, x_2) = 11$ и $\varphi(x_i, x_j) = 0$ для остальных дуг. По третьему пункту правил включаем обратные дуги (x_1, s), (x_2, x_1) и (t, x_2), причем последняя дуга уже присутствует. Полагаем $\tilde{c}(x_1, s) = 6$, $\tilde{d}(x_1, s) = -9$, $\tilde{c}(x_2, x_1) = 6$, $\tilde{d}(x_2, x_1) = -12$, $\tilde{c}(t, x_2) = 17$, $\tilde{d}(t, x_2) = -13$. По четвертому пункту правил все ненасыщенные дуги, где нет потока, остаются без изменений, кроме дуг с потоком (x_1, s), (x_1, x_2). Здесь $\tilde{c}(s, x_1) = 13 - 6 = 7$, $\tilde{d}(s, x_1) = 9$, $\tilde{c}(x_1, x_2) = 11 - 6 = 5$, $\tilde{d}(x_1, x_2) = 12$. По пункту пять правил для насыщенной дуги (x_2, t) $\tilde{c}(x_2, t) = 0$, $\tilde{d}(x_2, t) = \infty$. В полученной после второй модификации сети $G = (S, U, D)$ необходимо найти кратчайший путь между вершинами s и t. Так как опять имеются отрицательные веса, то снова придется применить алгоритм Беллмана – Мура (см. рис. 3.74).

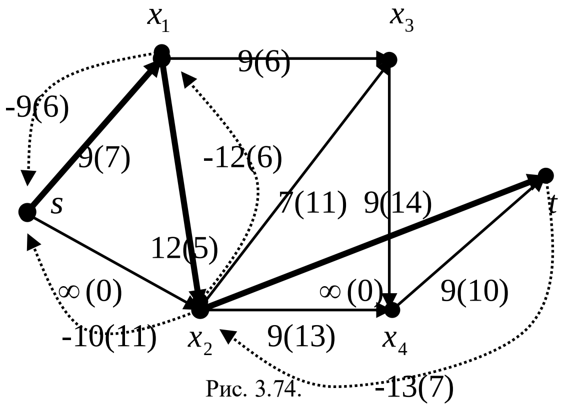


Рис. 3.74.

Этап 1. *Шаг 1.* $d(s) = 0$, $d(x_1) = \ldots = d(t) = \infty$. $Q = \{s\}$.

Шаг 2. $\tilde{x} = s$, $Q = \varnothing$, $\tilde{S} = \{x_1, x_2\}$,

$d(x_1) = \min(\infty, 0 + 9) = 9$, $9 < \infty$? Да. $Q = \{x_1\}$,

$d(x_2) = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty$,

Шаг 3. $Q \neq \varnothing$. Переход на второй шаг.

Вторая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_1$, $Q = \varnothing$, $\tilde{S} = \{s, x_2, x_3\}$, $d(s) = \min(0, 9 - 9) = 0$,

$0 < 0$?, нет корректировки очереди.

$d(x_2) = \min(\infty, 9 + 12) = 21$, $21 < \infty$? Да. $Q = \{x_2\}$.

$d(x_3) = \min(\infty, 9 + 9) = 18$, $18 < \infty$? Да. $Q = \{x_2, x_3\}$.

Шаг 3. $Q \neq \varnothing$. Переход на второй шаг.

Третья итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_2$, $Q = \{x_3\}$, $\tilde{S} = \{s, x_1, x_3, x_4, t\}$.

$d(s) = \min(0, 21 - 10) = 0$, нет корректировки очереди,

$d(x_1) = \min(9, 21 - 12) = 9$, нет корректировки очереди,

$d(x_3) = \min(18, 21 + 7) = 18$, нет корректировки очереди,

$d(x_4) = \min(\infty, 21+9) = 30,\ Q = \{x_3, x_4\},$

$d(t) = \min(\infty, 21+\infty) = \infty,$ нет корректировки очереди.

Шаг 3. $Q \neq \varnothing$. Переход на второй шаг.

Четвертая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_3,\ Q = \{x_4\},\ \tilde{S} = \{x_4\}.$

$d(x_4) = \min(30, 18+14) = 30,$ нет корректировки очереди.

Шаг 3. $Q \neq \varnothing$.

Пятая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = x_4,\ Q = \varnothing,\ \tilde{S} = \{t\},$

$d(t) = \min(\infty, 30+9) = 39,\ Q = \{t\}.$

Шаг 3. $Q \neq \varnothing$.

Шестая итерация. Шаг 2. $\tilde{x} = t,\ Q = \varnothing,\ \tilde{S} = \varnothing.$

Шаг 3. $Q = \varnothing$. Конец первого этапа. Критический путь найден.

$\mu_3^* = (s, x_1) - (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, t).$ Его вес $d(\mu_3^*) = 9+12+9+9 = 39.$ $\varphi_{\max} = c_{\min}(\mu_3^*) = \min(7, 5, 13, 10) = 5.$ Таким образом, по этому пути можно пустить поток в пять единиц. Тогда общий поток будет равен $\varphi_{общ} = 17+5 = 22 > \theta = 18.$ Для того, чтобы сформировать поток требуемой величины $\theta = 18$, необходимо по пути μ_3^* направить поток величиной всего в одну единицу.

Тогда $\varphi(s, x_1) = 7,\ \varphi(x_1, x_2) = 7,\ \varphi(x_2, x_4) = 1,\ \varphi(x_4, t) = 1.$ Кроме того два предыдущих потока дали $\varphi(s, x_2) = 11,\ \varphi(x_2, t) = 17.$ Таким образом, минимальная стоимость всего потока $\theta = 18$ равна $\sum\limits_{(x_i, x_j) \in S} d(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_i, x_j) = 9 \cdot 7 + 12 \cdot 7 + 10 \cdot 11 + 13 \cdot 17 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 496.$

3.27. Элементы сетевого планирования. Критические пути, работы, резервы

При планировании и управлении сложными комплексами работ используются их графические модели – сетевые графики. С математической точки зрения сетевой график – это связный орграф без петель и контуров. Основными понятиями сетевого планирования являются понятия работы и события.

Последовательность работ		
Исходная работа	Опирается на работу	Продолжи-тельность работ
a_1	-	3
a_2	-	6
a_3	-	4
a_4	a_1	5
a_5	a_2	1
a_6	a_2	9
a_7	a_3, a_5	6
a_8	a_4, a_6, a_7	8

Работа – это любые действия, сопровождающиеся затратами ресурсов и времени и приводящие к определенным результатам. Событие – это результат завершения одной или нескольких работ. Событие является предпосылкой для выполнения работ, следующих за ним. Любая работа на сети может быть определена двумя событиями, между которыми она находится. Событием может начинаться или заканчиваться несколько работ. Работы на сети изображают дугами, а события – вершинами сети.

Сетевой график обладает рядом особенностей, в частности он имеет только одно исходное событие (исток сети) и только одно завершающее событие – окончание всех работ. Рассмотрим пример построения сети по приведенной ранее таблице последовательности работ.

Работы a_1, a_2 и a_3 не имеют предшествующих, поэтому реализация проекта начинается с этих работ, и изобразятся они дугами, выходящими из одной вершины – события x_1. Работе a_4 предшествует работа a_1, поэтому дуга a_4 на сети изображена вслед за дугой a_1. То же самое с дугами a_5 и a_6. Далее надо изобразить дуги a_7 и a_8. Работа a_7 опирается на работы a_3 и a_5. Итоговая работа a_8 опирается на a_4, a_6 и a_7. На рисунках сети не рекомендуется во избежания путаницы изображать одновременно выполняемые работы параллельными дугами. Однако можно вводить дополнительные события и фиктивные работы (нулевой продолжительности), которые изображаются штриховыми линиями. Если бы, к примеру, работа a_5 опиралась бы еще на a_1, то между событиями x_2 и x_3 пришлось бы ввести штриховую дугу (см. рис. 3.75).

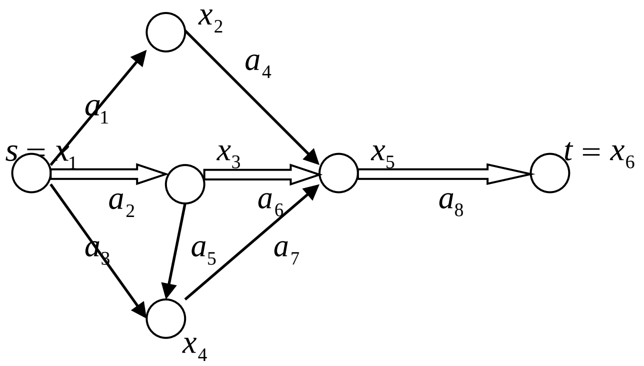


Рис. 3.75.

Имея сеть работ некоторого проекта можно посчитать время выполнения всего проекта и различных его частей, состоящих из разного набора работ. Для этого введем еще несколько определений. Определим сначала минимальное время, за которое можно выполнить все работы комплекса. Для этого найдем продолжительность $t(\mu_i)$ всех полных путей μ_i. В нашем случае таких путей четыре: $\mu_1: 1-2-5-6$; $\mu_2: 1-3-5-6$; $\mu_3: 1-4-5-6$; $\mu_4: 1-3-4-5-6$. Их продолжительности $t(\mu_1)=16$, $t(\mu_2)=23$, $t(\mu_3)=18$, $t(\mu_4)=21$. Наиболее продолжителен второй путь. Такой путь называют критическим. Этот путь определяет минимальное время выполнения всех работ комплекса. Минимальное время называют критическим сроком и обозначают $t_{кр.}$. Итак, в рассматриваемом примере $t_{кр.}=23$.

Все работы и события, лежащие на критическом пути, называют критическими, все остальные работы и события – некритическими. Задержка любой критической работы вызывает задержку выполнения всего комплекса. Следовательно, чтобы уменьшить время выполнения комплекса работ, надо сократить сроки критических работ. Некритические работы допускают некоторое запаздывание их выполнения без нарушения критического срока. Это запаздывание измеряется резервом времени событий и работ.

Свершением события называется момент, к которому заканчиваются все входящие в него работы, и может быть начата любая выходящая работа. Некоторые события можно совершать в разные моменты, то есть варьировать свершение этих событий. Например, событие x_2 может свершиться через три дня (по окончании работы a_1), но может наступить и позже на срок до семи дней, поскольку на пути μ_1, где лежит это событие, есть резерв времени $t_{кр.} - t(\mu_1) = 23 - 16 = 7$ дней. Поэтому для событий различают ранний и поздний сроки свершения.

Ранним сроком $t_p(x_j)$ свершения события x_j называется самый ранний момент времени, к которому завершатся все работы, предшествующие этому событию. Ранние сроки для всех событий могут быть рассчитаны по формуле

$$t_p(x_j) = \max_{(x_i, x_j) \in U_j^+} \left(t_p(x_i) + t(x_i, x_j)\right), \qquad (3.27.1)$$

где U_j^+ - множество работ, входящих в x_j событие, $t_p(x_i)$ - ранний срок свершения начального события работы (x_i, x_j), $t(x_i, x_j)$ - продолжительность работы (x_i, x_j).

Поздним сроком $t_n(x_i)$ свершения события x_i называется самый поздний момент времени, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием.

В нашем случае $t_n(x_6) = 23$. Чтобы не нарушался критический срок, событие x_5 должно произойти, в крайнем случае, на восемь дней раньше, поэтому $t_n(x_5) = 23 - 8 = 15$. Аналогично, $t_n(x_2) = 15 - 5 = 10$. Таким образом, поздние сроки событий рассчитываются по формуле

$$t_n(x_i) = \min_{(x_i, x_j) \in U_i^-} \left(t_n(x_j) - t(x_i, x_j)\right), \qquad (3.27.2)$$

где U_i^- - множество работ, выходящих из x_i события, $t_n(x_j)$ - поздний срок свершения конечного события работы (x_i, x_j).

Разности между поздним и ранним сроками свершения события x_i составляет резерв времени $R(x_i)$ этого события

$$R(x_i) = t_n(x_i) - t_p(x_i). \qquad (3.27.3)$$

Резерв показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события x_i без изменения срока наступления итогового события t. У критических событий ранние и поздние сроки совершения совпадают, ибо резерв времени у них равен нулю.

Зная сроки свершения событий, можно найти ранние и поздние сроки начала и окончания работы (x_i, x_j). Очевидно, что

$$\begin{cases} t_{р.н.}(x_i, x_j) = t_{р.}(x_i), \; t_{р.о.}(x_i, x_j) = t_{р.}(x_i) + t(x_i, x_j), \\ t_{п.о.}(x_i, x_j) = t_{п.}(x_j), \; t_{п.н.}(x_i, x_j) = t_{п.}(x_j) - t(x_i, x_j). \end{cases} \qquad (3.27.4)$$

Для работ определяются два резерва времени. Полный резерв времени работы – это максимальное количество времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность, не нарушая критический срок

$$R_{п.}(x_i, x_j) = t_{п.}(x_j) - t_{р.}(x_i) - t(x_i, x_j). \qquad (3.27.5)$$

Формулу (3.275) можно проиллюстрировать следующим рисунком.

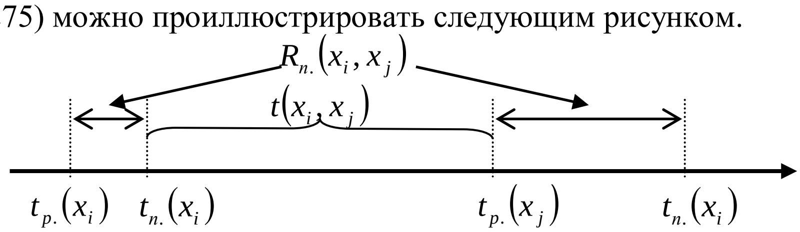


Рис. 3.76.

Отдельные работы, помимо полного резерва, имеют свободный резерв времени, составляющий часть полного резерва, остающуюся после исключения резерва времени $R(x_j)$ конечного события x_j данной работы

$$R_{с.}(x_i, x_j) = t_{р.}(x_j) - t_{р.}(x_i) - t(x_i, x_j). \qquad (3.27.6)$$

Свободный резерв времени – это запас времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что она начнется в свой ранний срок и при этом ранние сроки начала последующих работ не изменятся. Понятно, что все резервы критических работ равны нулю.

Рассчитаем все резервы времени для событий и работ исходного примера.

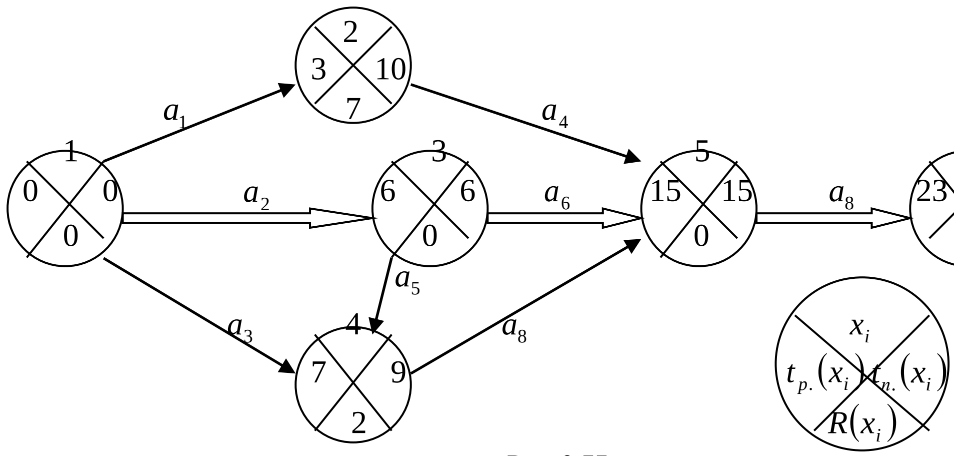


Рис. 3.77.

Все расчеты проводятся в четыре этапа: 1) вычисляют $t_{p.}(x_i)$; 2) $t_{n.}(x_i)$; 3) $R(x_i)$; 4) критический путь.

Этап 1. При вычислении $t_{p.}(x_i)$ перемещаются по сети от события $s = x_1$ к событию t в порядке возрастания номеров. Именно, $t_{p.}(x_1) = 0$. Для события x_2 по формуле (3.27.1) $t_{p.}(x_2) = t_{p.}(x_1) + t(x_1, x_2) = 0 + 3 = 3$. Аналогично, $t_{p.}(x_3) = t_{p.}(x_1) + t(x_1, x_3) = 0 + 6 = 6$. Для вершин x_4 и x_5 формулу (3.27.1) необходимо применять в полном объеме, то есть

$$t_{p.}(x_4) = \max_{\substack{(x_1,x_4),\\(x_3,x_4)}} \left(t_{p.}(x_1) + t(x_1, x_4), t_{p.}(x_3) + t(x_3, x_4)\right) = \max(0+4, 6+1) = 7,$$

$$t_{p.}(x_5) = \max_{\substack{(x_2,x_5),\\(x_3,x_5),\\(x_4,x_5)}} \left(t_{p.}(x_2) + t(x_2, x_5), t_{p.}(x_3) + t(x_3, x_5), t_{p.}(x_4) + t(x_4, x_5)\right) = \max(3+5, 6+9, 7+6) = 15.$$

Наконец, $t_{p.}(x_6) = t_{p.}(x_5) + t(x_5, x_6) = 15 + 8 = 23$. Получили критический срок. Итак, $t_{кр.} = t_{p.}(x_6) = 23$.

Этап 2. При вычислении поздних сроков свершения событий перемещаются по сети от t к s в порядке убывания номеров. Так как $t_{n.}(x_6) = t_{p.}(x_6)$, то исходное значение $t_{n.}$ известно. Далее используем формулу (3.27.2).

Например, $t_{n.}(x_5) = t_{n.}(x_6) - t(x_5, x_6) = 23 - 8 = 15$. Аналогично, $t_{n.}(x_4) = t_{n.}(x_5) - t(x_4, x_5) = 15 - 6 = 9$, $t_{n.}(x_2) = t_{n.}(x_5) - t(x_2, x_5) = 15 - 5 = 10$. Из события x_3 выходят две работы a_5 и a_6, поэтому

$$t_{n.}(x_3) = \min_{\substack{(x_3,x_5),\\(x_3,x_4)}} \left(t_{n.}(x_5) - t(x_3, x_5), t_{n.}(x_4) - t(x_3, x_4)\right) = \min(15-9, 9-1) = 6.$$

Наконец, из события x_1 выходят сразу три работы a_1, a_2 и a_3. Поэтому здесь

$$t_{n.}(x_1) = \min_{\substack{(x_1,x_2),\\(x_1,x_3),\\(x_1,x_4)}} \left(t_{n.}(x_2) - t(x_1, x_2), t_{n.}(x_3) - t(x_1, x_3), t_{n.}(x_4) - t(x_1, x_4)\right) = \min(10-3, 6-6, 9-4) = 0.$$

Этап 3. Для вычисления резервов времени событий достаточно вычесть числа, записанные в правых и левых секторах кружков, друг из друга.

Этап 4. У критических событий резерв времени равен нулю. В нашем примере критическими являются события x_1, x_3, x_5 и x_6. Они и определяют критические работы и критический путь 1-3-5-6.

Резервы времен работ сети вычисляются по формулам (3.27.4), (3.27.5) и (3.27.6). Например, $t_{р.о}(x_1, x_2) = t_{р.}(x_1) + t(x_1, x_2) = 0 + 3 = 3$, $t_{р.н.}(x_1, x_2) = t_{р.}(x_1) = 0$, $t_{п.о.}(x_1, x_2) = t_{п.}(x_2) = 10$, $t_{п.н.}(x_1, x_2) = t_{п.}(x_2) - t(x_1, x_2) = 10 - 3 = 7$, $R_{п.}(x_1, x_2) = t_{п.}(x_2) - t_{р.}(x_1) - t(x_1, x_2) = 10 - 0 - 3 = 7$, $R_{с.}(x_1, x_2) = t_{р.}(x_2) - t_{р.}(x_1) - t(x_1, x_2) = 3 - 0 - 3 = 3$.

В заключение заметим, что критических путей на сети может быть несколько. Они могут включать в себя и фиктивные работы.

3.28. Линейные графики

Наряду с сетевым графиком при анализе и оптимизации комплекса работ применяется и линейный график. Построим его для нашего примера. На дугах исходного линейного графика проставлены в скобках интенсивности потребления ресурса. Найдем по этому линейному графику критический путь, критический срок, критические работы и резервы временни некритических работ. На присунке 3.78 вначале изображен исходный сетевой график для того, чтобы яснее были видны последовательности работ. Ниже – линейный график. Он имеет две шкалы - шкалу времени и шкалу потребления ресурса. Проанализируем линейный график. Наибольшей отметки времени на на нем $t = 23$ соответствует работа (5, 6), значение $t = 23$ и является критическим сроком. Ясно, что будучи заключительной работой комплекса, работа (5, 6) является критической. Непосредственно ей предшествует работа (3, 5) а этой работе (1, 3); обе эти работы также являются критическими. Все остальные работы – некритические. Критические работы на линейном графике выделены жирной чертой.

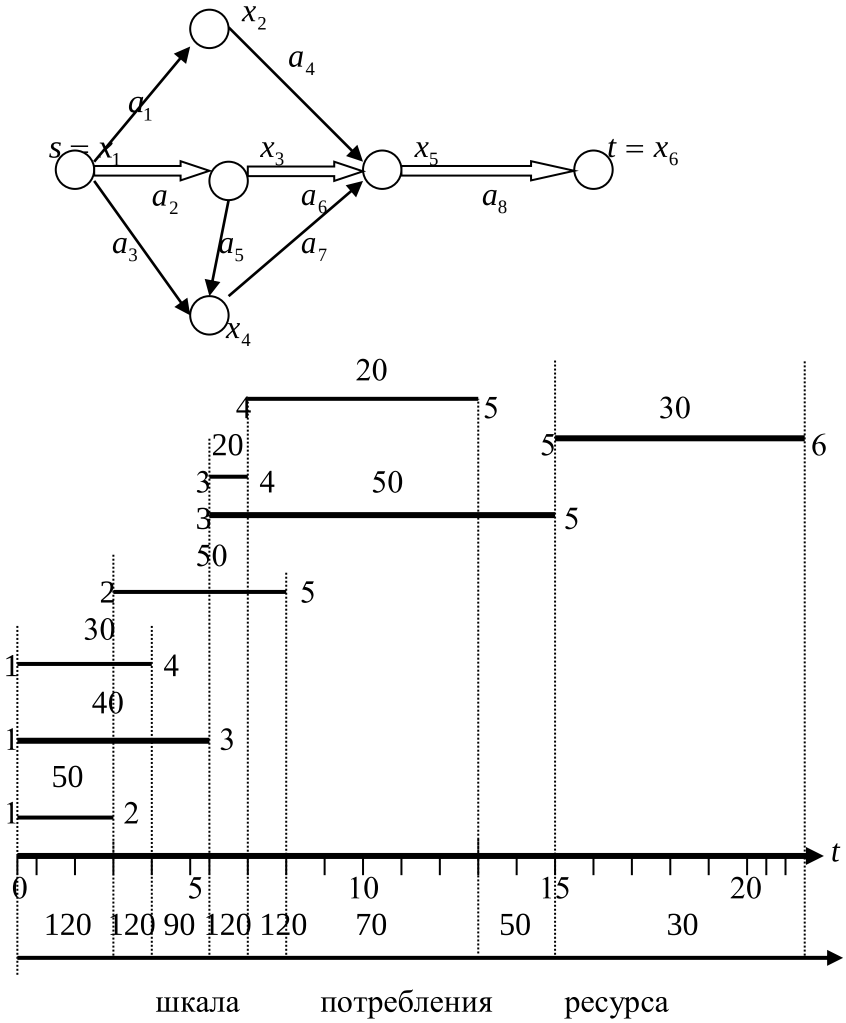


Рис. 3.78.

По линейному графику можно легко найти резервы времени $R_n(i, j)$ некритических работ. Например, работу (4, 5) в случае необходимости можно отсрочить или увеличить время ее выполнения на два дня. То же самое касается и работы (1, 4). Ее можно сдвинуть на три дня. Таким образом, $R_{п.}(4, 5) = 2$, $R_{п.}(1, 4) = 5$. Определяя $R_{п.}(1, 4)$, мы учли возможность сдвига работы (4, 5). Если же оперировать только с работой (1, 4) и не затрагивать последующие работы, то найдется свободный резерв времени данной работы. У работы (1, 4) свободный резерв три дня, то есть $R_{с.}(1, 4) = 3$.

Аналогично из линейного графика получим $R_{п.}(2,5)=7$, $R_{п.}(1,2)=7$, $R_{c.}(2,5)=7$, $R_{c.}(1,2)=0$. Для построения шкалы потребления ресурса в ходе работ, спроектируем на ось Ot начальные и конечные точки работ. В полученных промежутках нужно просуммировать интенсивности всех работ, расположенных над этими промежутками. Например, для $t\in[6,7]$ интенсивность равна 50+50+20=120 единиц.

Одной из самых распространенных оптимизационных задач сетевого планирования является задача о сохранении срока выполнения комплекса работ при ограниченных ресурсах. Она возникает в случаях, когда для реализации комплекса работ в плановой срок имеющихся ресурсов недостаточно.

Когда работ мало (одна, две) ответить на вопрос об отсрочке работ, об их очередности и тому подобное можно с точки зрения здравого смысла. Если же работ много, придется упорядочить эти работы и следить какая из них вызывает превышение ресурса. Пусть в условиях разобранного ранее примера требуется установить время начала и окончания работ так, чтобы завершить комплекс в возможно меньшее время, при условии, что расход ресурса в любой момент не должен превышать 100 единиц.

Первый шаг.

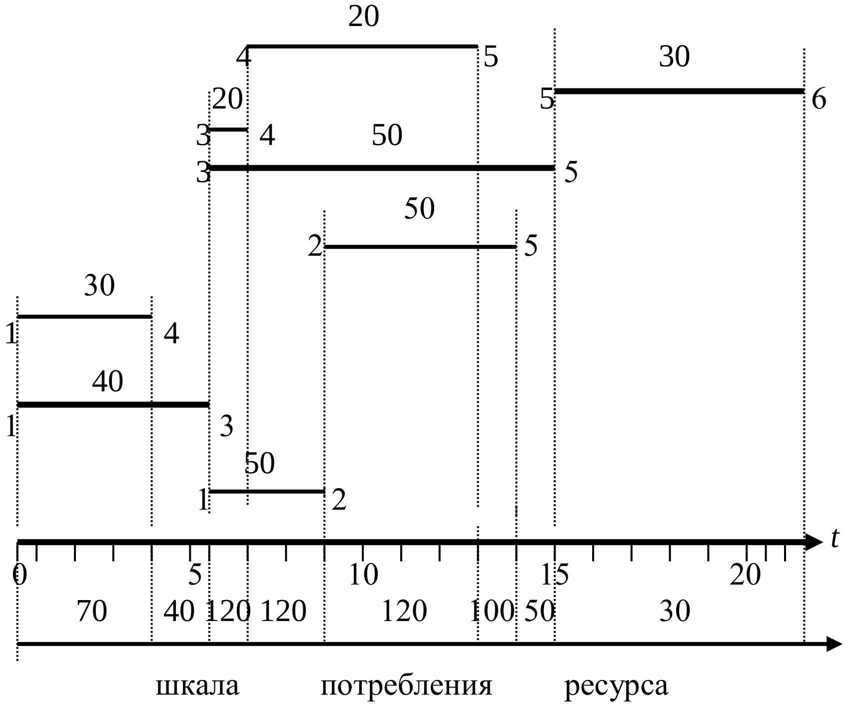


Рис. 3.79.

Рассмотрим промежуток $t\in[0,6]$. Здесь расположено четыре работы: (1,2), (1, 3), (1, 4) и (2,5). Для выявления работ, подлежащих отсрочке, прежде всего упорядочим их. Выпишем полные резервы времени: $R_{п.}(1,2)=7$, $R_{п.}(1,4)=5$, $R_{п.}(1,3)=0$, $R_{п.}(2,5)=7$. В порядке возрастания полного резерва времени присвоим номера работам (1, 3) - № 1, (1, 4) - № 2, (1, 2) - № 3, (2, 5) - № 4. В отведенный ресурс укладываются только две работы № 1 и № 2. Поэтому работу № 3, т. е. работу (1, 2), а след за ней и работу (2, 5) сдвигаем до момента $t=6$; ресурс времени это позволяет, критический срок от этого не увеличится. Положение работ после первого шага показано на рисунке 3.79.

Второй шаг.

Рассмотрим отрезок $t\in[6,7]$. Здесь $R_{п.}(1,2)=1$, $R_{п.}(3,4)=2$, $R_{п.}(4,5)=2$, $R_{п.}(3,5)=0$. Номера работ по возрастанию полного резерва времени: (3, 5) - № 1, (1, 2) - № 2, (3, 4) - № 3, (4, 5) - № 4. Предел ресурса полностью выбирают первая и вторая работы. Таким образом, следует сдвинуть работу (3,4), а вместе с ней и работу (4, 5) на один день вправо. Положение работ комплекса после второго шага показано на рисунке 3.80.

Третий шаг.

$t\in[7,8]$. Полные резервы времени работ на этом отрезке равны $R_{п.}(1,2)=1$, $R_{п.}(3,5)=0$, $R_{п.}(3,4)=1$. Работа (1, 2) уже длится, следовательно, сдвигать надо работу (3, 4) и следующую за ней работу (4, 5).

Четвертый шаг.

$t\in[8,9]$. Работы (1, 2) и (3, 5) уже длятся, у работы (3, 4) полный резерв времени ра-

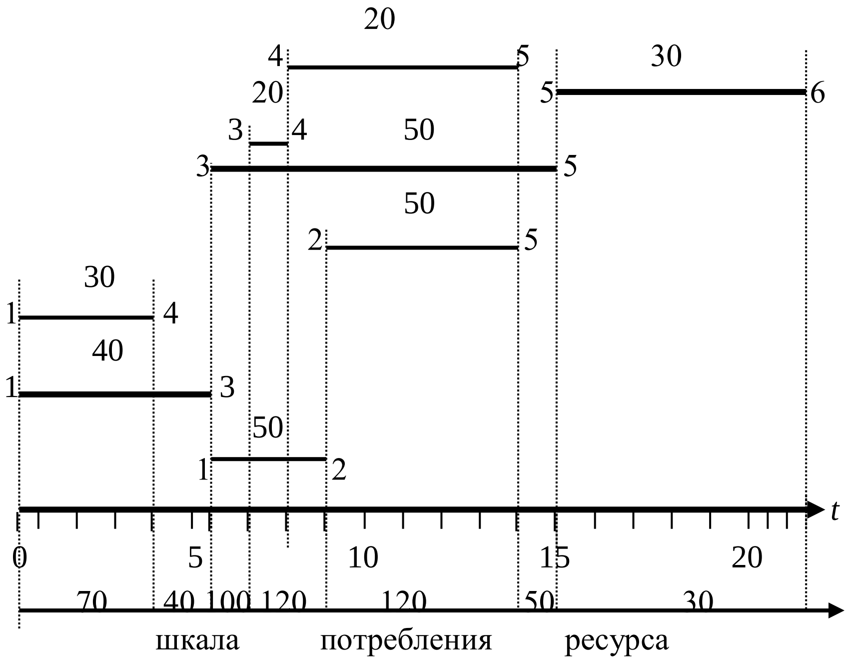


Рис. 3.80.

вен нулю. Тем не менее именно эту работу необходимо сдвигать на один день вправо. Вместе с ней сдвинутся работы (4, 5) и (5, 6), тем самым критический срок будет увеличен на один день. Положение работ комплекса после четвертого шага изображено на рисунке 3.81.

Пятый шаг.

$t \in [9,10]$. Полные резервы работ на этом отрезке времени таковы: $R_{п.}(2,5)=2$, $R_{п.}(3,5)=0$, $R_{п.}(3,4)=0$, Сдвигаем на два дня вправо работу (2, 5).

Шестой шаг.

$t \in [11,15]$. Работы (3, 5) и (4, 5) уже длятся, необходимо сдвигать на четыре дня вправо работу (2, 5). При этом на четыре дня увеличится критический срок. Теперь ресурс нигде не превышен, планирование работ комплекса закончено. Итоговое положение работ изображено на рисунке 3.82. $t_{кр.}=28$ дней.

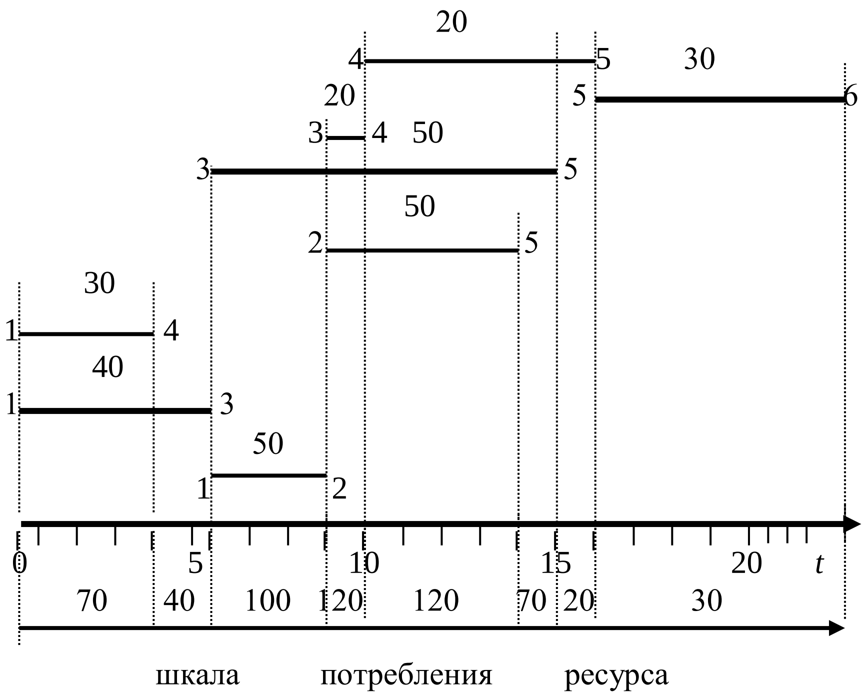


Рис. 3.81.

По последнему линейному графику составлена следующая таблица со сроками начала $t_{н.}$ и окончания $t_{о.}$ работ комплекса.

Рассмотренный метод - эвристический, он не обеспечивает всегда точную минимизацию времени выполнения работ, но дает хорошее приближение к этому. Его

Сроки	Работы							
	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 5)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 6)
$t_{н.}$	7	0	0	15	6	6	10	20
$t_{о.}$	10	6	4	20	7	15	15	28

основные этапы таковы.

1) Анализируется шкала потребления ресурса, и выделяются отрезки, где это потребление превышает установленный предел.

2) Определяются на первом временном интервале, где есть превышение ресурса, работы, подлежащие отсрочке. Для этого все работы упорядочиваются по возрастанию полных резервов времени. Первые номера отдают работам, начатым ранее анализируемого про-

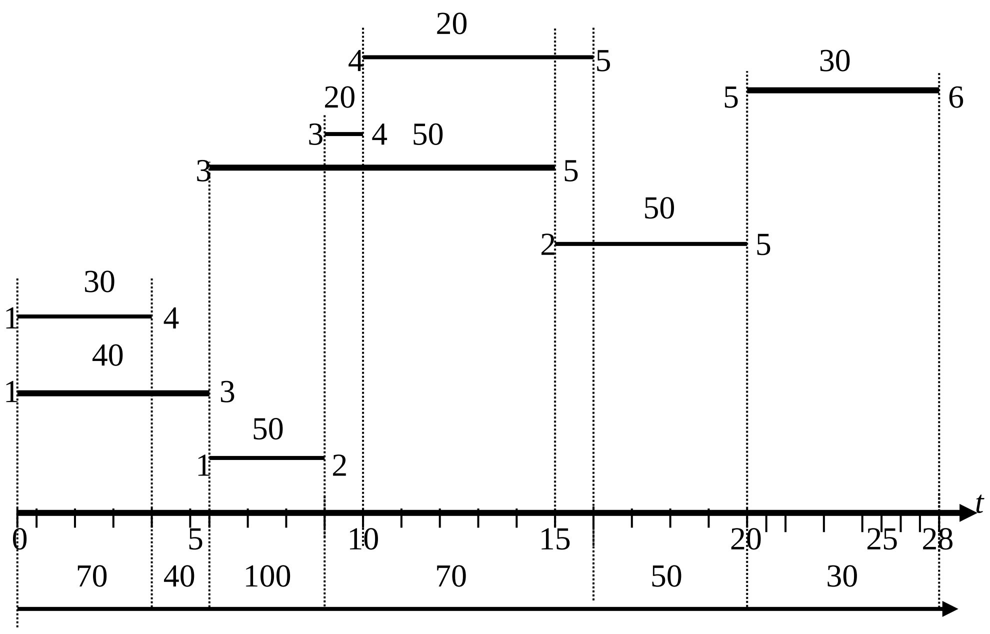


Рис. 3.82.

межутка.

3) Производят последовательное (по возрастанию номеров) суммирование интенсивностей потребления ресурса. Как только суммарная интенсивность превысит установленный предел, слагаемое, вызвавшее превышение, отбрасывают, а соответствующую ему работу назначают к отсрочке и так далее до полного перебора всех работ на данном промежутке.

4) Производят преобразование линейного графика: сдвигают назначенные к отсрочке работы и работы, следующие за ними. Строят новую шкалу потребления ресурса.

5) Если на преобразованной шкале вновь имеются промежутки, где суммарная потребность в ресурсе превышает предел, то алгоритм повторяется, начиная с пункта два до тех пор, пока не останется промежутков, в которых наблюдается превышение предела ресурса.

После завершения процесса оптимизации получают линейный график, по которому можно выделить критический путь. Он, как правило, отличается от критического пути исходного графика составляющими его работами. Изменится (увеличится) и продолжительность нового критического пути, то есть критический срок. Это неизбежное следствие ограничения ресурса, используемого при производстве работ комплекса.

В нашем примере работы, входящие в новый критический путь, есть:
(1, 3)-(3, 5)-(2, 5)-(5, 6), а его продолжительность увеличилась на пять дней. На практике обычно возникают еще более сложные задачи с дополнительными ограничениями на состав и сроки проведения работ. Для их решения разработаны более сложные алгоритмы сетевого планирования и составления расписаний.

3.29. Практическое занятие № 10. Потоки в сетях. Сетевые и линейные графики

3.29.1. По данной матрице пропускных способностей дуг Ω графа G найти максимальный поток от вершины $s = x_1$ до вершины $t = x_7$ и указать минимальный разрез, отделяющий s от t.

$$1)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 18 & 16 & - & - & 9 & - \\ - & - & 8 & 11 & 7 & - & 13 \\ - & - & - & - & 13 & - & 19 \\ - & - & 10 & - & - & 15 & - \\ - & - & - & 17 & - & 28 & - \\ - & - & - & - & - & - & 14 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$2)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 9 & - & 11 & - & 17 & - \\ - & - & 6 & - & 8 & - & 12 \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & 5 & - & - & - & 5 & 4 \\ - & - & - & - & - & 7 & - \\ - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$3)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & 5 & - & - & 8 & - \\ - & - & - & 3 & 3 & - & 4 \\ - & - & - & 4 & 5 & 10 & - \\ - & - & - & - & 4 & - & 9 \\ - & - & - & - & - & 5 & 6 \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$4)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 5 & - & 15 & 9 & - \\ - & - & - & - & 6 & - & 7 \\ - & 3 & - & 4 & - & 7 & - \\ - & - & - & - & - & 8 & 3 \\ - & - & - & - & - & 9 & 18 \\ - & - & - & - & - & - & 5 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$5)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & - & - & 9 & - & 26 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & 7 & - & - & 11 & - & - \\ - & - & 8 & - & - & 12 & 11 \\ - & - & - & 13 & - & 10 & - \\ - & - & 14 & - & - & - & 8 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$6)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & - & 8 & - & - & - \\ - & - & 8 & 12 & 10 & - & 6 \\ - & - & - & - & - & 5 & 11 \\ - & - & - & - & 4 & 12 & - \\ - & - & 5 & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & 6 & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$7)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 12 & 14 & - & 11 & - & 7 \\ - & - & 17 & 17 & - & 20 & - \\ - & - & - & 10 & 12 & - & 16 \\ - & - & - & - & 9 & - & 11 \\ - & - & - & - & - & 12 & - \\ - & - & 15 & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$8)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 10 & 18 & 8 & - & - \\ - & - & 6 & - & 11 & 15 & 19 \\ - & - & - & - & 12 & - & 13 \\ - & - & - & - & - & - & 5 \\ - & - & - & 16 & - & 7 & - \\ - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$9)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & 9 & - & - & 8 & - \\ - & - & 11 & 14 & 10 & - & 6 \\ - & - & - & - & 9 & 11 & 19 \\ - & - & - & - & - & 12 & - \\ - & - & - & 8 & - & 14 & - \\ - & - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$10)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 8 & 18 & - & - & - \\ - & - & - & - & 9 & 17 & - \\ - & 6 & - & - & 10 & - & 24 \\ - & - & - & - & 15 & - & 6 \\ - & - & - & - & - & 8 & 12 \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$11)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 12 & 9 & - & - & 11 & - \\ - & - & 12 & 7 & - & - & - \\ - & - & - & 12 & 10 & - & 18 \\ - & - & - & - & 12 & 15 & 6 \\ - & 8 & - & - & - & 12 & 15 \\ - & - & - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$12)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 11 & 20 & 9 & - & - \\ - & - & 7 & - & 10 & - & - \\ - & - & - & - & - & 9 & 10 \\ - & 15 & - & - & 13 & - & - \\ - & - & - & - & - & 6 & 14 \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$13)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & 8 & - & - & 11 & - \\ - & - & 10 & 14 & - & 19 & - \\ - & - & - & 10 & 8 & - & 7 \\ - & - & - & - & 4 & - & 12 \\ - & 8 & - & - & - & 7 & - \\ - & - & - & - & - & - & 13 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$14)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 8 & 15 & - & 14 & - \\ - & - & - & - & 7 & 13 & 19 \\ - & 6 & - & - & 9 & - & 15 \\ - & - & - & - & - & 8 & 11 \\ - & - & - & - & - & 5 & - \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$15)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 15 & 17 & - & - & 11 & - \\ - & - & 20 & 20 & - & 33 & - \\ - & - & - & 13 & 15 & - & 16 \\ - & - & - & - & - & 12 & 19 \\ - & 17 & - & 12 & - & - & 8 \\ - & - & - & - & 2 & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$16)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & - & 11 & 7 & - & - \\ - & - & - & - & 6 & - & - \\ - & 6 & - & - & - & 9 & 11 \\ - & - & 4 & - & - & - & 4 \\ - & - & 8 & - & - & 5 & - \\ - & - & - & 7 & - & - & 6 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$17)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 9 & 11 & - & - & 18 & - \\ - & - & 8 & 10 & - & - & 13 \\ - & - & - & 11 & - & 20 & - \\ - & - & - & - & 8 & - & 11 \\ - & - & - & - & - & 14 & 6 \\ - & - & - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$18)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 17 & - & - & 11 & - & - \\ - & - & - & - & 13 & - & - \\ - & - & - & - & - & 9 & - \\ - & - & - & - & - & - & 11 \\ - & - & 8 & 12 & - & - & 18 \\ - & - & 10 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$19)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 15 & - & - & 8 & - & - \\ - & - & - & - & - & 15 & - \\ - & 6 & - & - & - & - & 18 \\ - & - & - & - & - & - & 4 \\ - & 7 & - & 13 & - & - & - \\ - & - & 10 & - & - & - & 8 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 20)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 10 & 12 & - & - & 16 & - \\ - & - & 9 & 11 & 13 & - & - \\ - & - & - & - & 12 & - & 17 \\ - & - & - & - & - & 14 & - \\ - & - & - & - & - & 16 & 18 \\ - & - & 11 & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 21)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 18 & - & 15 & - & - & - \\ - & - & 11 & - & 14 & - & 16 \\ - & - & - & - & - & 14 & - \\ - & - & 14 & - & 19 & - & 7 \\ - & - & - & - & - & 26 & - \\ - & - & - & - & - & - & 19 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$22)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 13 & - & - & 21 & - & - \\ - & - & - & 10 & 7 & - & - \\ - & - & - & 11 & 12 & - & 14 \\ - & - & - & - & 10 & - & 15 \\ - & - & - & - & - & 4 & 8 \\ - & 12 & 11 & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 23)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 12 & - & 10 & - & 11 & - \\ - & - & 9 & - & 13 & - & 11 \\ - & - & - & 7 & - & 8 & - \\ - & - & - & - & - & 6 & 13 \\ - & - & 8 & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & 15 & - & 6 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 24)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 20 & 22 & - & - & - & - \\ - & - & 17 & 15 & - & 21 & 20 \\ - & - & - & 9 & 11 & - & - \\ - & - & - & - & 9 & - & 16 \\ - & - & - & - & - & 8 & 13 \\ - & - & 17 & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$25)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & - & 9 & 11 & - & 15 & - \\ - & - & 14 & 17 & 13 & - & 8 \\ - & - & - & 14 & 16 & - & 18 \\ - & - & - & - & 8 & - & 15 \\ - & - & - & - & - & 17 & - \\ - & 20 & - & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 26)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 5 & 8 & - & 11 & - & - \\ - & - & - & - & 7 & - & - \\ - & - & - & - & - & 9 & - \\ - & - & 7 & - & - & - & 4 \\ - & - & 6 & 10 & - & - & 6 \\ - & - & - & 4 & - & - & 5 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 27)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & - & 15 & 12 & - & 11 & - \\ - & - & - & 17 & 12 & - & 14 \\ - & - & - & - & 17 & 15 & 21 \\ - & - & - & - & 16 & 25 & - \\ - & - & - & - & - & 13 & - \\ - & 13 & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$28)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & - & 16 & - & 9 & - & - \\ - & - & - & - & 6 & - & - \\ - & 3 & - & - & - & 6 & - \\ - & - & - & - & - & 5 & 3 \\ - & - & - & 17 & - & - & 18 \\ - & 11 & - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 29)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 10 & - & 13 & 15 & - & - \\ - & - & 11 & 13 & - & 18 & - \\ - & - & - & - & 15 & - & 18 \\ - & - & - & - & - & 9 & 13 \\ - & 11 & - & - & - & 15 & - \\ - & - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 30)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 5 & 11 & - & - & 25 & - \\ - & - & - & - & 14 & - & 29 \\ - & - & - & 3 & - & 16 & - \\ - & - & - & - & - & - & 6 \\ - & - & - & 17 & - & - & - \\ - & - & - & - & 8 & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

3.29.2. По матрице пропускных способностей дуг, взятой из задачи 3.29.1, и матрице стоимости транспортировки единичного потока D вдоль дуг сети, взятой из текущей задачи, построить поток величины $\theta = \left[\frac{2}{3}\varphi_{\max}\right]$, имеющий минимальную стоимость. Здесь $[...]$ - целая часть числа.

$$1)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 3 & 4 & - & - & 5 & - \\ - & - & 2 & 6 & 4 & - & 2 \\ - & - & - & - & 5 & - & 8 \\ - & - & 3 & - & - & 6 & - \\ - & - & - & 7 & - & 9 & - \\ - & - & - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 2)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 4 & - & 6 & - & 12 & - \\ - & - & 3 & - & 3 & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & 2 \\ - & 3 & - & - & - & 3 & 1 \\ - & - & - & - & - & 2 & - \\ - & - & - & - & - & - & 5 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array} \quad 3)\ \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} - & 7 & 2 & - & - & 5 & - \\ - & - & - & 1 & 2 & - & 3 \\ - & - & - & 3 & 3 & 7 & - \\ - & - & - & - & 1 & - & 6 \\ - & - & - & - & - & 3 & 4 \\ - & - & - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

4) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 7 & - & 17 & 11 & - \\ - & - & - & - & 8 & - & 9 \\ - & 5 & - & 6 & - & 9 & - \\ - & - & - & - & - & 10 & 5 \\ - & - & - & - & - & 11 & 20 \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

5) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & - & - & 4 & - & 19 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & 2 & - & - & 6 & - & - \\ - & - & 3 & - & - & 7 & 6 \\ - & - & - & 8 & - & 5 & - \\ - & - & 9 & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

6) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & - & 7 & - & - & - \\ - & - & 10 & 6 & 7 & - & 12 \\ - & - & - & - & - & 11 & 5 \\ - & - & - & - & 15 & 4 & - \\ - & - & 11 & - & - & - & 6 \\ - & - & - & - & 10 & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

7) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & 9 & - & 6 & - & 6 \\ - & - & 10 & 10 & - & 15 & - \\ - & - & - & 5 & 4 & - & 8 \\ - & - & - & - & 4 & - & 6 \\ - & - & - & - & - & 7 & - \\ - & - & 7 & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

8) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 5 & 9 & 4 & - & - \\ - & - & 12 & - & 5 & 7 & 10 \\ - & - & - & - & 6 & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & 8 & - & 14 & - \\ - & - & - & - & - & - & 18 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

9) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 7 & - & - & 6 & - \\ - & - & 9 & 12 & 8 & - & 4 \\ - & - & - & - & 7 & 9 & 15 \\ - & - & - & - & - & 10 & - \\ - & - & - & 6 & - & 10 & - \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

10) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 3 & 4 & 9 & - & - & - \\ - & - & - & - & 11 & 13 & - \\ - & 8 & - & - & 5 & - & 6 \\ - & - & - & - & 10 & - & 3 \\ - & - & - & - & - & 5 & 8 \\ - & - & - & - & - & - & 5 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

11) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 4 & 3 & - & - & 3 & - \\ - & - & 4 & 2 & - & - & - \\ - & - & - & 4 & 3 & - & 6 \\ - & - & - & - & 4 & 5 & 2 \\ - & 2 & - & - & - & 4 & 5 \\ - & - & - & - & - & - & 1 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

12) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 15 & 24 & 13 & - & - \\ - & - & 11 & - & 14 & - & - \\ - & - & - & - & - & 13 & 14 \\ - & 19 & - & - & 17 & - & - \\ - & - & - & - & - & 10 & 18 \\ - & - & - & - & - & - & 11 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

13) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 4 & - & - & 6 & - \\ - & - & 5 & 7 & - & 9 & - \\ - & - & - & 5 & 4 & - & 3 \\ - & - & - & - & 2 & - & 6 \\ - & 4 & - & - & - & 3 & - \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

14) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 5 & 12 & - & 11 & - \\ - & - & - & - & 4 & 10 & 15 \\ - & 2 & - & - & 5 & - & 10 \\ - & - & - & - & - & 4 & 7 \\ - & - & - & - & - & 2 & - \\ - & - & - & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

15) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & 6 & - & - & 4 & - \\ - & - & 7 & 7 & - & 11 & - \\ - & - & - & 4 & 5 & - & 5 \\ - & - & - & - & - & 4 & 5 \\ - & 6 & - & 4 & - & - & 3 \\ - & - & - & - & 1 & - & 2 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

16) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 2 & - & 6 & 3 & - & - \\ - & - & - & - & 3 & - & - \\ - & 3 & - & - & - & 4 & 5 \\ - & - & 2 & - & - & - & 2 \\ - & - & 4 & - & - & 2 & - \\ - & - & - & 3 & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

17) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 13 & 9 & - & - & 7 & - \\ - & - & 15 & 10 & - & - & 6 \\ - & - & - & 10 & - & 5 & - \\ - & - & - & - & 15 & - & 10 \\ - & - & - & - & - & 6 & 18 \\ - & - & - & - & - & - & 20 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

18) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 4 & - & - & 7 & - & - \\ - & - & - & - & 9 & - & - \\ - & - & - & - & - & 15 & - \\ - & - & - & - & - & - & 7 \\ - & - & 16 & 8 & - & - & 5 \\ - & - & - & 7 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

19) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 5 & - & - & 13 & - & - \\ - & - & - & - & - & 5 & - \\ - & 18 & - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - & - & 25 \\ - & 15 & - & 7 & - & - & - \\ - & - & 10 & - & - & - & 13 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

20) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 20 & 24 & - & - & 32 & - \\ - & - & 18 & 22 & 26 & - & - \\ - & - & - & - & 24 & - & 34 \\ - & - & - & - & - & 28 & - \\ - & - & - & - & - & 32 & 36 \\ - & - & 22 & - & - & - & 14 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

21) $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 36 & - & 30 & - & - & - \\ - & - & 22 & - & 28 & - & 32 \\ - & - & - & - & - & 28 & - \\ - & - & 28 & - & 38 & - & 14 \\ - & - & - & - & - & 52 & - \\ - & - & - & - & - & - & 38 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$22)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & - & - & 8 & - & - \\ - & - & - & 10 & 15 & - & - \\ - & - & - & 9 & 8 & - & 6 \\ - & - & - & - & 10 & - & 5 \\ - & - & - & - & - & 20 & 12 \\ - & 8 & 9 & - & - & - & 13 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$23)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 6 & - & 5 & - & 6 & - \\ - & - & 4 & - & 6 & - & 5 \\ - & - & - & 3 & - & 4 & - \\ - & - & - & - & - & 3 & 7 \\ - & - & 4 & - & - & - & 5 \\ - & - & - & - & 8 & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$24)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 7 & 8 & - & - & - & - \\ - & - & 6 & 5 & - & 7 & 7 \\ - & - & - & 3 & 4 & - & - \\ - & - & - & - & 3 & - & 5 \\ - & - & - & - & - & 3 & 4 \\ - & - & 6 & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$25)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 12 & 9 & - & 7 & - \\ - & - & 8 & 5 & 9 & - & 13 \\ - & - & - & 6 & 5 & - & 5 \\ - & - & - & - & 13 & - & 7 \\ - & - & - & - & - & 4 & - \\ - & 3 & - & - & - & - & 15 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$26)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & 16 & - & 22 & - & - \\ - & - & - & - & 14 & - & - \\ - & - & - & - & - & 18 & - \\ - & - & 14 & - & - & - & 8 \\ - & - & 12 & 20 & - & - & 12 \\ - & - & - & 8 & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$27)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 3 & 4 & - & 3 & - \\ - & - & - & 6 & 4 & - & 5 \\ - & - & - & - & 6 & 5 & 7 \\ - & - & - & - & 5 & 8 & - \\ - & - & - & - & - & 4 & - \\ - & 4 & - & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$28)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 8 & - & 4 & - & - \\ - & - & - & - & 3 & - & - \\ - & 1 & - & - & - & 3 & - \\ - & - & - & - & - & 2 & 1 \\ - & - & - & 6 & - & - & 7 \\ - & 4 & - & - & - & - & 2 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$29)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & - & 7 & 5 & - & - \\ - & - & 9 & 7 & - & 4 & - \\ - & - & - & - & 5 & - & 4 \\ - & - & - & - & - & 14 & 7 \\ - & 9 & - & - & - & 5 & - \\ - & - & - & - & - & - & 10 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$30)\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 10 & 10 & - & - & 7 & - \\ - & - & - & - & 8 & - & 11 \\ - & - & - & 6 & - & 12 & - \\ - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & 5 & - & - & - \\ - & - & - & - & 12 & - & 20 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

3.29.3. По данному перечню работ и их взаимной последовательности построить сетевой график, определить критический срок, ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий, ранние и поздние сроки начала и окончания всех работ, а также полные и свободные резервы времени всех работ.

1)

Основные работы	Работы, предшеству-ющие основной	Длитель-ность ос-новных работ
I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	8
a_3	-	11
a_4	a_1	6
a_5	a_1, a_2	12
a_6	a_1, a_2, a_3	18
a_7	a_4, a_5, a_6	7

2)

Основные работы	Работы, предшеству-ющие основной	Длитель-ность ос-новных работ
I	II	III
a_1	-	9
a_2	-	5
a_3	a_1	11
a_4	a_1, a_2	7
a_5	a_1, a_2	4
a_6	a_3, a_4	13
a_7	a_1, a_5	15

3)

I	II	III
a_1	-	7
a_2	-	11
a_3	-	5
a_4	a_1	10
a_5	a_1, a_2, a_3	4
a_6	a_3	13
a_7	a_3, a_4, a_5	12
a_8	a_4	8

4)

I	II	III
a_1	-	3
a_2	-	2
a_3	-	4
a_4	a_1	3
a_5	a_1	5
a_6	a_2, a_3	9
a_7	a_3	6
a_8	a_2, a_3, a_4	8
a_9	a_3, a_5, a_6	4
a_{10}	a_7	6

5)

I	II	III
a_1	-	6
a_2	-	9
a_3	-	8
a_4	a_1	5
a_5	a_3	3
a_6	a_3	7
a_7	a_3, a_4	9
a_8	a_1, a_2, a_5, a_6	11
a_9	a_6	10

6)

I	II	III
a_1	-	11
a_2	-	9
a_3	-	7
a_4	a_2	5
a_5	a_1	6
a_6	a_3, a_4	8
a_7	a_2, a_3, a_4, a_5	10
a_8	a_6	13
a_9	a_1, a_7, a_8	15

7)

I	II	III
a_1	-	3
a_2	-	6
a_3	-	4
a_4	a_1	6
a_5	a_1, a_2, a_3	4
a_6	a_3	7
a_7	a_3, a_4, a_5	5

8)

I	II	III
a_1	-	10
a_2	-	12
a_3	-	9
a_4	a_1	6
a_5	a_1, a_3	7
a_6	a_2, a_4	9
a_7	a_1, a_2, a_4, a_5	5

9)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	6
a_3	a_1	9
a_4	a_1, a_2	11
a_5	a_1, a_2	4
a_6	a_3	6
a_7	a_3	10
a_8	a_1, a_4, a_6	8
a_9	a_1, a_4, a_5, a_6	12

10)

I	II	III
a_1	-	10
a_2	-	9
a_3	-	12
a_4	a_1	7
a_5	a_1, a_2	8
a_6	a_1, a_2, a_3	13
a_7	a_6	15
a_8	a_4, a_5, a_7	11
a_9	a_6	9

11)

I	II	III
a_1	-	8
a_2	a_1	4
a_3	-	10
a_4	-	13
a_5	a_1, a_3	3
a_6	a_2, a_4	6
a_7	a_1, a_4, a_5	5

12)

I	II	III
a_1	-	4
a_2	-	6
a_3	a_1, a_2	12
a_4	a_1, a_2	4
a_5	a_2	5
a_6	a_3, a_4, a_5	10
a_7	a_3	7

13)

I	II	III
a_1	-	8
a_2	-	11
a_3	a_1	10
a_4	a_1	6
a_5	a_1, a_2	12
a_6	a_1, a_2	14
a_7	a_3	9
a_8	a_4, a_5	6
a_9	a_3, a_4, a_5, a_6	5

14)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	6
a_3	-	8
a_4	a_1, a_2	11
a_5	a_2, a_3	7
a_6	a_2	6
a_7	a_4, a_5	5
a_8	a_6	9
a_9	a_2, a_3	7

15)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	7
a_3	-	10
a_4	a_1, a_2	5
a_5	a_2, a_3	7
a_6	a_3	10
a_7	a_3, a_4, a_5	5

16)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	6
a_3	a_1	8
a_4	a_1, a_2	10
a_5	a_2, a_3	7
a_6	a_1, a_3, a_4	5
a_7	a_4	7

17)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	7
a_3	-	8
a_4	a_3	5
a_5	a_2, a_4	10
a_6	a_1, a_2, a_3	12
a_7	a_2, a_5	4

18)

I	II	III
a_1	-	8
a_2	-	10
a_3	a_1	8
a_4	a_1, a_2	12
a_5	a_2	6
a_6	a_3, a_4, a_5	9
a_7	a_3, a_4	7

19)

I	II	III
a_1	-	4
a_2	-	4
a_3	a_2	6
a_4	a_1, a_2	7
a_5	a_1, a_3	10
a_6	a_2, a_4, a_5	5
a_7	a_2	8

20)

I	II	III
a_1	-	8
a_2	-	5
a_3	-	6
a_4	a_1, a_2	10
a_5	a_2	10
a_6	a_2, a_3	8
a_7	a_3, a_4, a_5	5

21)

I	II	III
a_1	-	6
a_2	-	10
a_3	a_2	10
a_4	a_1, a_2	8
a_5	a_3	6
a_6	a_2, a_4, a_5	4
a_7	a_2	3

22)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	7
a_3	-	8
a_4	a_3	8
a_5	a_2, a_4	10
a_6	a_1, a_2, a_3	5
a_7	a_2, a_5	7

23)

I	II	III
a_1	-	11
a_2	-	13
a_3	-	10
a_4	a_1,a_2	8
a_5	a_2,a_3	6
a_6	a_2,a_3	15
a_7	a_1,a_2	7
a_8	a_2,a_4,a_5	9
a_9	a_6	12

24)

I	II	III
a_1	-	3
a_2	-	2
a_3	a_1	5
a_4	a_1	6
a_5	a_1,a_2	4
a_6	a_3	4
a_7	a_4,a_5	6
a_8	a_6,a_7	7
a_9	a_4,a_5	5

25)

I	II	III
a_1	-	10
a_2	-	12
a_3	a_1	14
a_4	a_1,a_2	11
a_5	a_1,a_2	7
a_6	a_1,a_4	9
a_7	a_3	15
a_8	a_1,a_4	13
a_9	a_5,a_6	8

26)

I	II	III
a_1	-	7
a_2	-	9
a_3	a_1,a_2	11
a_4	a_2	6
a_5	a_3,a_4	8
a_6	a_2	10
a_7	a_3,a_4,a_6	12
a_8	a_2,a_5	13

27)

I	II	III
a_1	-	5
a_2	-	4
a_3	a_1	6
a_4	a_1,a_2	5
a_5	a_2,a_3	7
a_6	a_2,a_3,a_4	9
a_7	a_4	4
a_8	a_5,a_6	7

28)

I	II	III
a_1	-	10
a_2	-	11
a_3	-	13
a_4	a_1	9
a_5	a_1,a_2	7
a_6	a_1,a_2,a_3	15
a_7	a_4	6
a_8	a_4,a_5,a_6	12
a_9	a_1,a_7,a_8	5

29)

I	II	III
a_1	-	6
a_2	-	8
a_3	a_2	12
a_4	a_1, a_2	5
a_5	a_1, a_3	7
a_6	a_2, a_4, a_5	7
a_7	a_2	10

30)

I	II	III
a_1	-	7
a_2	-	5
a_3	-	10
a_4	a_3	14
a_5	a_2, a_4	8
a_6	a_1, a_2, a_3	10
a_7	a_2, a_5	6

3.19.4. По сетевым графикам, приведенным в задаче 3.19.3, и объемам потребления ресурса для каждой работы, взятым из текущей задачи, построить линейный график с учетом ресурсных ограничений. Максимальный расход ресурса в любой момент времени для данного проекта указан в строке $\mathrm{Re}\,s_{\max}$.

1)

Работы	Интенсивность потребления ресурса
I	II
a_1	20
a_2	40
a_3	50
a_4	30
a_5	30
a_6	70
a_7	80
$\mathrm{Re}\,s_{\max}$	100

2)

Работы	Интенсивность потребления ресурса
I	II
a_1	70
a_2	30
a_3	50
a_4	30
a_5	30
a_6	40
a_7	50
$\mathrm{Re}\,s_{\max}$	100

3)

Работы	Интенсивность потребления ресурса
I	II
a_1	30
a_2	40
a_3	60
a_4	20
a_5	40
a_6	30
a_7	70
a_8	20
$\mathrm{Re}\,s_{\max}$	100

4)

I	II
a_1	10
a_2	20
a_3	30
a_4	20
a_5	30
a_6	40
a_7	10
a_8	20
a_9	50
a_{10}	10
$\mathrm{Re}\,s_{\max}$	50

5)

I	II
a_1	10
a_2	20
a_3	30
a_4	20
a_5	10
a_6	30
a_7	30
a_8	30
a_9	10
$\mathrm{Re}\,s_{\max}$	50

6)

I	II
a_1	20
a_2	30
a_3	60
a_4	50
a_5	40
a_6	30
a_7	60
a_8	60
a_9	90
$\mathrm{Re}\,s_{\max}$	100

7)

I	II
a_1	10
a_2	30
a_3	40
a_4	20
a_5	20
a_6	30
a_7	40
$\mathrm{Re}\, s_{\max}$	50

8)

I	II
a_1	30
a_2	20
a_3	30
a_4	10
a_5	20
a_6	30
a_7	10
$\mathrm{Re}\, s_{\max}$	50

9)

I	II
a_1	60
a_2	40
a_3	50
a_4	20
a_5	60
a_6	20
a_7	30
a_8	40
a_9	80
$\mathrm{Re}\, s_{\max}$	100

10)

I	II
a_1	20
a_2	30
a_3	70
a_4	40
a_5	50
a_6	50
a_7	70
a_8	90
a_9	20
$\mathrm{Re}\, s_{\max}$	100

11)

I	II
a_1	20
a_2	30
a_3	20
a_4	60
a_5	10
a_6	40
a_7	50
$\mathrm{Re}\, s_{\max}$	100

12)

I	II
a_1	30
a_2	30
a_3	20
a_4	30
a_5	20
a_6	50
a_7	10
$\mathrm{Re}\, s_{\max}$	50

13)

I	II
a_1	30
a_2	60
a_3	20
a_4	40
a_5	50
a_6	30
a_7	30
a_8	40
a_9	60
$\mathrm{Re}\, s_{\max}$	100

14)

I	II
a_1	20
a_2	20
a_3	20
a_4	20
a_5	30
a_6	30
a_7	30
a_8	10
a_9	40
$\mathrm{Re}\, s_{\max}$	50

15)

I	II
a_1	30
a_2	20
a_3	30
a_4	10
a_5	50
a_6	20
a_7	30
$\mathrm{Re}\, s_{\max}$	50

16)

I	II
a_1	10
a_2	40
a_3	20
a_4	50
a_5	30
a_6	20
a_7	30
$\mathrm{Re}\, s_{max}$	50

17)

I	II
a_1	30
a_2	20
a_3	70
a_4	50
a_5	30
a_6	40
a_7	80
$\mathrm{Re}\, s_{max}$	100

18)

I	II
a_1	10
a_2	40
a_3	10
a_4	30
a_5	40
a_6	30
a_7	10
$\mathrm{Re}\, s_{max}$	50

19)

I	II
a_1	40
a_2	50
a_3	100
a_4	20
a_5	40
a_6	80
a_7	60
$\mathrm{Re}\, s_{max}$	100

20)

I	II
a_1	60
a_2	40
a_3	30
a_4	50
a_5	30
a_6	50
a_7	70
$\mathrm{Re}\, s_{max}$	100

21)

I	II
a_1	20
a_2	40
a_3	20
a_4	20
a_5	30
a_6	50
a_7	30
$\mathrm{Re}\, s_{max}$	50

22)

I	II
a_1	20
a_2	30
a_3	20
a_4	40
a_5	40
a_6	20
a_7	30
$\mathrm{Re}\, s_{max}$	50

23)

I	II
a_1	20
a_2	60
a_3	40
a_4	10
a_5	40
a_6	50
a_7	30
a_8	20
a_9	60
$\mathrm{Re}\, s_{max}$	100

24)

I	II
a_1	70
a_2	10
a_3	20
a_4	60
a_5	30
a_6	20
a_7	50
a_8	80
a_9	40
$\mathrm{Re}\, s_{max}$	100

25)

I	II
a_1	30
a_2	80
a_3	70
a_4	50
a_5	50
a_6	60
a_7	20
a_8	40
a_9	110
$\operatorname{Re} s_{\max}$	120

26)

I	II
a_1	20
a_2	40
a_3	30
a_4	20
a_5	20
a_6	10
a_7	20
a_8	30
$\operatorname{Re} s_{\max}$	50

27)

I	II
a_1	40
a_2	20
a_3	50
a_4	10
a_5	30
a_6	20
a_7	20
a_8	30
$\operatorname{Re} s_{\max}$	50

28)

I	II
a_1	30
a_2	40
a_3	60
a_4	30
a_5	20
a_6	50
a_7	40
a_8	70
a_9	90
$\operatorname{Re} s_{\max}$	100

29)

I	II
a_1	40
a_2	50
a_3	10
a_4	10
a_5	40
a_6	50
a_7	40
$\operatorname{Re} s_{\max}$	50

30)

I	II
a_1	30
a_2	20
a_3	50
a_4	40
a_5	10
a_6	40
a_7	40
$\operatorname{Re} s_{\max}$	50

3.19.5. Построить фрагмент сетевого графика по следующим данным: а) имеется пять работ $a_1, a_2, ..., a_5$. Работы a_2 и a_3 начаты одновременно; работа a_4 может быть начата после выполнения работ a_1, a_2, a_3; работа a_5 может быть начата после выполнения работы a_3;
б) имеется семь работ $a_1, a_2, ..., a_7$. Работа a_3 выполняется после работ a_1 и a_4; работа a_4 начинается после выполнения работы a_2; работа a_6 может быть выполнена после работ a_4 и a_5; работа a_7 выполняется после работ a_3 и a_6.

3.19.6. По сетевому графику, изображенному на рисунке 3.83, установить, как повлияет на срок выполнения комплекса увеличение продолжительности работы a_{10}, работы a_{16}. Можно ли использовать полный резерв времени работы a_{10} для увеличения продолжительности работы a_{15}? Можно ли увеличивать продолжительность работы a_{10} за счет свободного резерва времени работы

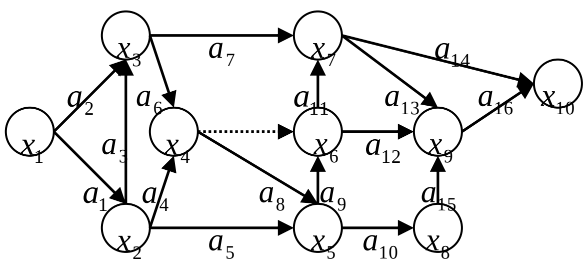


Рис. 3.83.

a_{15}? Изменится ли полный резерв времени работы a_5, если срок выполнения комплекса возрастет за счет увеличения продолжительности работы a_{16}? Продолжительности всех работ следующие: a_1 - 18, a_2 - 17, a_3 - 5, a_4 - 23, a_5 - 19, a_6 - 10, a_7 - 17, a_8 - 10, a_9 - 18, a_{10} - 16, a_{11} - 16, a_{12} - 5, a_{13} - 7, a_{14} - 10, a_{15} - 9, a_{16} - 5.

3.19.7. По сетевому графику, изображенному на рисунке 3.84, установить, можно ли полный резерв времени работы a_4 распределить на работы a_{13}, a_{16}, не нарушив срок завершения комплекса. Можно ли полный резерв времени работы a_8 распределить на работы a_4, a_5, не влияя на продолжительность критического пути? Можно ли свободный резерв времени работы a_4 передать на последующие работы, не изменив их раннего начала? Продолжительности всех работ таковы: a_1 - 1, a_2 - 1, a_3 - 2, a_4 - 2, a_5 - 5, a_6 - 4, a_7 - 5, a_8 - 2, a_9 - 3, a_{10} - 10, a_{11} - 1, a_{12} - 5, a_{13} - 1, a_{14} - 1, a_{15} - 10, a_{16} - 2.

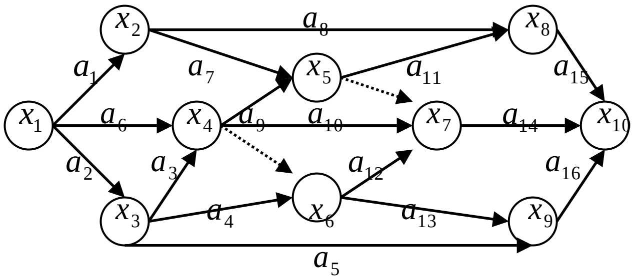


Рис. 3.84.

3.19.8. Для комплекса работ, представленного сетевым графиком на рисунке 3.85, определить сроки свершения событий, критический путь, сроки начала и окончания работ, резервы времени работ. Продолжительности работ следующие: a_1 - 11, a_2 - 12, a_3 - 10, a_4 - 12, a_5 - 10, a_6 - 7, a_7 - 10, a_8 - 7, a_9 - 10, a_{10} - 4, a_{11} - 8, a_{12} - 11.

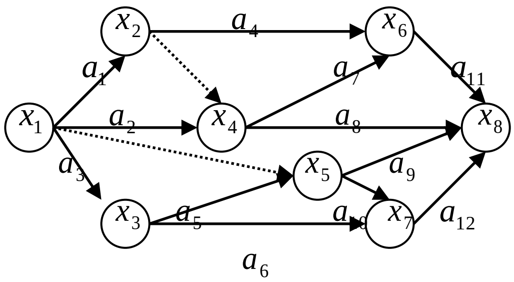


Рис. 3.85.