.. каким бы я был теперь несчастным человеком, если бы смолоду не приобрел известный запас знаний и вкус к ним.

Честерфилд «Письма к сыну»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Я.М. ЕРУСАЛИМСКИЙ

Я.М. ЕРУСАЛИМСКИЙ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА:
теория, задачи, приложения

Москва
«Вузовская книга»
2000

УДК 519.1

Ерусалимский Я.М.

Дискретная математика: теория, задачи, приложения. 3-е издание. — М.: Вузовская книга, 2000. — 280 с.

ISBN 5—89522—034—7

Учебное пособие по дискретной математике. Содержит разделы: алгебра высказываний, алгебра предикатов и множеств, отображения, элементы комбинаторики, отношения, булевы функции, элементы теории графов. Отдельный раздел составляют задачи и упражнения.

Для студентов и преподавателей вузов, инженеров-системотехников, программистов.

ISBN 5—89522—034—7

Введение

Памяти моего брата посвящаю

Дискретная математика — бурно развивающаяся в XX веке ветвь математики. Ее роль и место определяются в основном тремя факторами:

— дискретную математику можно рассматривать как теоретические основы компьютерной математики;

— модели и методы дискретной математики являются хорошим средством и языком для построения и анализа моделей в различных науках, включая химию, биологию, генетику, физику, психологию, экологию и др.;

— язык дискретной математики чрезвычайно удобен и стал фактически метаязыком всей современной математики.

Математика как наука, естественно, от рождения делится на дискретную и континуальную математику. Что мы относим к континуальной математике? Все, что явно или неявно содержит идеи теории пределов и непрерывности. Все остальное — дискретная математика (т. е. арифметика, алгебра, теория множеств и общая теория отображений, математическая логика, комбинаторный анализ, теория алгоритмов и многое другое).

В учебный предмет «Дискретная математика» включают только тот круг вопросов, который можно озаглавить «Теоретические основы компьютерной математики».

Прообраз этого пособия — курс дискретной математики, читаемый в течение ряда лет автором студентам первого курса специальности 01.02 — «Прикладная математика» и направления подготовки 51.02 — «Прикладная математика и информатика». Это и определило его содержание и характер изложения.

Учебный курс дискретной математики на механико-математическом факультете Ростовского государственного университета читается в первых двух семестрах и включает в себя 70 часов лекционных и 35 часов лабораторных занятий. Главных задач у этого учебного предмета две: первая — дать элементарное введение в теорию множеств, отображений, комбинаторику, язык предикатов и кванторов; вторая — стать теоретической основой для дисциплин компьютерного цикла.

Существенным отличием этого пособия от других является систематическое использование языка множеств и отображений (в том числе при изложении элементов комбинаторики). Это позволило сделать курс дискретной математики достаточно цельным, несмотря на разнообразие и внешнюю неоднородность изначального материала. Такой подход к изложению материала сложился на кафедре алгебры и дискретной математики РГУ со дня ее основания в 1972 г. и отражает методические воззрения заведующего кафедрой проф. Симоненко И. Б. и его учеников. Нам представляется, что главная задача учебных курсов — не сообщение всех фактов, известных лектору, а привитие математической культуры мышления с помощью тщательно отобранного материала.

Учебное пособие является по существу третьим вариантом (переработанным и дополненным) учебного пособия Я. М. Ерусалимского и И. Б. Симоненко «35 лекций по дискретной математике» (Гаудеамус XXI, Ростов н/Д, 1991) Второе издание этого пособия, рекомендованное Госкомитетом РФ по высшему образованию в качестве учебного пособия по дискретной математике для направлений подготовки «Прикладная математика и информатика» и «Математика», по не зависящей от авторов причине не увидело свет. В настоящем издании существенно расширен раздел «Введение в теорию графов». Изложены наиболее распространенные и применяемые алгоритмы на графах, уделено больше внимания матрицам графов.

Ответим на некоторые вопросы, которые могут возникнуть у читателя:

Какие предварительные знания необходимы изучающему дискретную математику по этому пособию? Достаточным и необходимым является знание школьного курса математики.

Для изучения каких предметов будут полезны знания, полученные из этого курса? Перечислим основные учебные курсы: математический анализ, алгебра, теория вероятностей, функциональный анализ и все предметы компьютерного цикла дисциплин.

Какие источники необходимо дополнительно привлечь для изучения курса дискретной математики? Учебное пособие замкнуто в себе и одновременно открыто. Что это означает? Все сведения и факты, составляющие содержание пособия, приведены в нем самом. В пособии содержатся задачи и упражнения, что позволит обойтись без специальных задачников. Каждый раздел снабжен вопросами и замечаниями для самоконтроля усвоения материала. Открытость курса обеспечена наличием списка литературы, позволяющей заинтересованному читателю продвинуться дальше.

Что можно посоветовать лектору, избравшему это пособие в качестве основного к своему курсу? Небольшой объем материала и подробные доказательства в тексте пособия позволят лектору:

а) не требовать обязательного конспектирования лекций;

б) уделить на лекциях большее внимание обсуждению существа дела, оставив выкладки, а порой и доказательства целых теорем на самостоятельное изучение.

Что можно посоветовать ассистенту? Следует уделить особое внимание упражнениям по комбинаторике. Изложение этого раздела существенно отличается от традиционного. Это должно сказаться и на подходах к решению задач и необходимых комментариях преподавателя.

Перечислим имена крупных математиков, внесших существенный вклад в современную дискретную математику: английский математик и философ Б. Рассел, английский математик А. Тьюринг, американские математики А. Чёрч, К. Гёдель, Э. Пост, С. Клини, польские математики Л. Лукасевич, С. Мостовской, советские математики А. А. Марков, И. И. Жегалкин, П. С. Новиков, В. М. Глушков. Активно работают в бурно развивающейся области дискретной математики — математической кибернетике — российские ученые С. В. Яблонский, О. Б. Лупанов, Ю. И. Журавлев.

Мы постарались снабдить пособие биографическими ссылками, считая, что, изучая предмет, нельзя не уделять внимания и его истории, и людям, которым принадлежат основополагающие результаты. Большинство биографических ссылок подготовлено по книге: Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. Пер. с укр. К.: Радяньска школа, 1979. 607 с.

В заключение считаю необходимым выразить благодарность:

— моему учителю и научному руководителю профессору И. Б. Симоненко, поставившему курс дискретной математики в Ростовском государственном университете. Этот курс и составил основу пособия.

— профессору М. А. Фальковичу, рецензировавшему рукопись;

— моим коллегам по кафедре алгебры и дискретной математики Ростовского государственного университета;

— международному научному фонду Дж. Сороса, его образовательной программе в области естественных наук, трижды присудившей мне звание Соросовского доцента и соответствующий грант. Это явилось моральным и материальным стимулом к работе;

— моей семье — за понимание важности этой работы;

— заместителям декана механико-математического факультета РГУ И. А. Чернявской, В. Д. Кряквину, А. В. Наседкину, Г. Г. Мермельштейну, С. В. Ревиной, взявшим на себя часть работы декана, что позволило автору завершить задуманное;

— Ю. А. Ждановой, выполнившей набор и компьютерный дизайн текста;

— студентам механико-математического факультета Ростовского государственного университета, слушавшим в разные годы мой аурс лекций по дискретной математике. Их вопросы, ошибки, заинтересованность и увлеченность существенно влияли и влияют как на содержание курса, так и на самого автора.

Глава 1

Алгебра высказываний

1.1 Высказывания. Операции над высказываниями

Как и во всей математике, в нашем курсе, в каждом его разделе существуют основные понятия, с которых все начинается. Основные понятия не определяются. Считается, что у каждого из нас существуют интуитивные представления о них. В этих интуитивных представлениях спрессован исторический опыт человечества в области математических знаний. Основные понятия не определяются, для них даются квазиопределения, как правило содержащие отсылки к другим неопределенным понятиям и объектам. В первой главе таким основным неопределяемым понятием является *высказывание*.

Высказывание — связное повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Пример 1.1. «$2 \times 2 = 4$». (Дважды два равно четырем.)
Пример 1.2. «$2 < 3$».
Пример 1.3. Река Дон в 1998 году н. э. впадает в Каспийское море.
Пример 1.4. «$x < 2$, $x \in R$». (Вещественное число x меньше двух.)
Пример 1.5. Площадь отрезка меньше длины куба.
Пример 1.6. Является ли $x = 3$ корнем уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$?
Пример 1.7. Меньше один в является два при.

Пример 1.8. Слава российским студентам!
Пример 1.9. $3 \geq 5$.

В приведенных примерах высказываниями являются 1.1, 1.2, 1.3, 1.9. Причем 1.1 и 1.2 — истинные высказывания, а 1.3 и 1.9 — ложные. Пример 1.5 — это пример связного повествовательного предложения, которое не является высказыванием, так как о нем нельзя сказать, истина оно или ложь (из-за отсутствия в этом предложении какого-либо смысла). 1.6 и 1.8 не являются высказываниями, так как не являются повествовательными предложениями. 1.7 не является высказыванием, несмотря на его повествовательность (в конце его стоит точка), по причине его несвязности, а значит, и отсутствия смысла.

Предложение примера 1.4 не является высказыванием, несмотря на свою повествовательность, связность и осмысленность. В нем содержится переменная, и из-за ее присутствия это предложение обладает свойством превращаться в высказывание при фиксации значения этой переменной. Если через $P(x)$ обозначить предложение примера 1.4, то $P(-1)$ — истинное высказывание, $P(3)$ — ложное высказывание. Ясно, что объекты такого типа являются обобщением понятия высказывания. К изучению этих объектов мы приступим позже в главе 2.

В дальнейшем нас будет интересовать не то, о чем идет речь в высказывании (его содержательная часть), а лишь какое значение истинности («истина», «ложь») оно имеет. В алгебре высказываний все высказывания, имеющие одинаковые значения истинности, взаимно заменяемы, т. е. мы имеем два класса высказываний: класс истинных высказываний и класс ложных высказываний.

Введем следующие обозначения: если a — высказывание, то через $\widehat{a}$ будем обозначать его значение истинности.

Если a — истинное высказывание, то $\widehat{a} = 1$ (и, t).

Если a — ложное высказывание, то $\widehat{a} = 0$ (л, f).

(Здесь и далее в скобках приводятся другие встречающиеся обозначения.)

Таким образом, $\widehat{\ }$ может рассматриваться как отображение множества высказываний в двухэлементное множество $\{0; 1\}$.

Определение 1.1 *Два высказывания a и b будем называть равносильными (и писать $a \equiv b$), если $\widehat{a} = \widehat{b}$, т. е.*

$$a \equiv b \iff \widehat{a} = \widehat{b}$$

(знак $\iff$ используется нами как символ метаязыка, заменяющий «тогда и только тогда, когда»).

Логические операции над высказываниями

В русском языке (как и в любом другом) из простых связных повествовательных предложений с помощью некоторых стандартных связок (конструкций) можно образовывать новые (составные) повествовательные предложения. В алгебре высказываний этим конструкциям соответствуют логические операции. Так как нас интересует не содержательный смысл высказывания, а только его значение истинности, то для определения (задания) операции достаточно определить значение истинности результата применения операции.

Отрицание

Отрицание — унарная логическая операция (т. е. применяемая к одному высказыванию), соответствующая конструкциям: «Не ...», «Не верно, что ...».

Определение 1.2 *Отрицание высказывания a — высказывание, обозначаемое $\overline{a}$ $(\neg a)$ и определяемое следующей таблицей:*

$\widehat{a}$	$\widehat{\overline{a}}$
0	1
1	0

Очевидно, имеет место свойство

$$\overline{\overline{a}} \equiv a.$$

Оно называется законом двойного отрицания.

Перейдем теперь к определению бинарных (т. е. применяемых к паре высказываний) операций алгебры высказываний.

Конъюнкция

Конъюнкция (логическое умножение) соответствует союзу «и» в русском языке, т. е. конструкции «... и ...».

Определение 1.3 *Конъюнкцией высказываний a и b называется высказывание, обозначаемое $a \wedge b$ ($a \cdot b$, ab, $a\&b$) и определяемое следующей таблицей:*

$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{a \wedge b}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

т. е. конъюнкция $a \wedge b$ истинна тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания a, b.

Имеют место следующие свойства:

а) $a \wedge b \equiv b \wedge a$ — коммутативный закон

$\left.\begin{array}{l}\text{б) } a \wedge 1 \equiv a \\ \text{в) } a \wedge 0 \equiv 0\end{array}\right\}$ — законы «0» и «1» для конъюнкции

г) $a \wedge a \equiv a$ — закон идемпотентности.

Дизъюнкция

Дизъюнкция (логическое сложение) соответствует неразделительному «или» в русском языке, т. е. конструкции «... или $\times\times\times$».

Определение 1.4 *Дизъюнкцией высказываний a, b называется высказывание, обозначаемое $a \vee b$ и определяемое следующей таблицей:*

$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{a \vee b}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

т. е. дизъюнкция $a \vee b$ ложна тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания a, b.

Имеют место следующие свойства:

а) $a \vee b \equiv b \vee a$ — коммутативный закон

$\left.\begin{array}{l}\text{б) } a \vee 1 \equiv 1 \\ \text{в) } a \vee 0 \equiv a\end{array}\right\}$ — законы «0» и «1» для дизъюнкции

г) $a \vee a \equiv a$ — закон идемпотентности.

Эквиваленция

Эквиваленция (равносильность) соответствует конструкции «... равносильно $\times\times\times$» («... тогда и только тогда, когда $\times\times\times$»).

Определение 1.5 *Эквиваленцией высказываний a, b называется высказывание, обозначаемое $a \sim b$ ($a \leftrightarrow b$) и определяемое следующей таблицей:*

$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{a \sim b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

т. е. эквиваленция $a \sim b$ истинна тогда и только тогда, когда образующие ее высказывания a, b имеют одинаковые значения истинности.

Очевидно, имеют место следующие свойства:

а) $a \sim b \equiv b \sim a$ — коммутативный закон; в) $a \sim 1 \equiv a$;

б) $a \sim b \equiv \overline{a} \sim \overline{b}$; г) $a \sim 0 \equiv \overline{a}$.

Импликация

Импликация соответствует конструкции «Если ..., то $\times\times\times$» («Из ... следует $\times\times\times$.»)

Определение 1.6 *Импликацией высказываний a, b называется высказывание, обозначаемое $a \to b$ ($a \supset b$, $a \Rightarrow b$) и определяемое следующей таблицей:*

$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$a \widehat{\to} b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

т. е. импликация $a \to b$ ложна тогда и только тогда, когда a — истина, а b — ложь.

Высказывания, образующие импликацию $a \to b$, имеют специальные названия: a — посылка (гипотеза, антецедент), b — заключение (вывод, консеквент).

При первоначальном знакомстве с логическими операциями кажется, что все они, кроме импликации, введены довольно естественно, а восприятию введенного определения импликации наше сознание сопротивляется. Однако, можно привести пример, показывающий, что такое определение импликации соответствует нашей интуитивной логике и конструкции «Если ..., то $\times\times\times$», которой мы пользуемся в математике очень часто. Вспомним одну теорему из арифметики — $Q(x)$ = «Если натуральное число x делится на 4, то оно (натуральное число x) делится на 2.». В справедливости этой теоремы мы не сомневаемся, т. е. какое натуральное число x мы ни зафиксируем в $Q(x)$, мы получим истинное высказывание. Обозначим $A(x)$ = «Натуральное число x делится на 4.», $B(x)$ = «Натуральное число x делится на 2.».

Тогда имеем

$$Q(x) \equiv A(x) \to B(x). \tag{1.1}$$

Фиксируя в (1.1) значения $x = 8,\ 2,\ 3$, мы реализуем строки $1 \to 1$, $0 \to 1$, $0 \to 0$. Ясно, что не удается для (1.1) подобрать такое значение x, чтобы реализовалась ситуация $1 \to 0$ (так как справедлива приведенная теорема, т. е. $Q(x) \equiv A(x) \to B(x) \equiv 1$).

Очевидно, имеют место свойства:

а) $a \to b \not\equiv b \to a$; в) $0 \to a \equiv 1$ д) $a \to 1 \equiv 1$;

б) $a \to a \equiv 1$; г) $1 \to a \equiv a$; е) $a \to 0 \equiv \overline{a}$.

Заметим, что в обычном языке в предложении вида «Если A, то B.» A и B содержательно (контекстно) связаны. Это совершенно необязательно

в нашем определении импликации, т. е. мы имеем право рассматривать импликации вида: «Если сегодня четверг, то $2 \times 2 = 5$.», которая истинна во все дни, кроме четверга, а в четверг ложна.

В большинстве алгоритмических языков имеется логический оператор «if P then S», использование которого несколько отличается от определения импликации, а именно, если P — истина, то отрезок S программы выполняется, а если P — ложь, то отрезок S программы опускается (не выполняется).

Пример 1.10. Каково значение переменной x после выполнения следующего фрагмента программы

$$\text{if } x < 2 \text{ then } x := 3x,$$

если до начала его выполнения а) $x = 1$; б) $x = 4$?

Ответ: а) $x = 3$; б) $x = 4$.

С импликацией $a \to b$ связывают еще две импликации: $b \to a$, $\overline{b} \to \overline{a}$. Первую из них называют обращением $a \to b$, вторую — контрапозицией $a \to b$.

Пример 1.11. Найти обращение и контрапозицию следующей импликации:

«Если сегодня четверг, то $2 \times 2 = 4$.»

Решение. Обращение исходной импликации имеет вид: «Если $2\times 2 = 4$, то сегодня четверг.», а контрапозиция: «Если $2 \times 2 \neq 4$, то сегодня не четверг.».

Зависимости между операциями

Введенные операции не являются независимыми, одни из них могут быть выражены через другие.

Теорема 1.1 *Справедливы следующие равносильности:*

$$a \to b \equiv \overline{a} \vee b;$$

$$a \sim b \equiv (a \to b)(b \to a) \equiv (\overline{a} \vee b) \cdot (a \vee \overline{b}) \equiv (a \cdot b) \vee (\overline{a} \cdot \overline{b})$$

(Всюду в дальнейшем знак ► означает начало доказательства, решения примера и т. д., а знак ◄ — окончание.)

► Любую из этих равносильностей можно доказать с помощью таблицы истинности (см. «Замечания и вопросы в конце параграфа», п. 2). ◄

Из приведенных равносильностей видно, что $\to$ и $\sim$ выражаются через $\vee$, $\wedge$ и $\neg$. В дальнейшем будет показано, что через $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ можно выразить любую операцию алгебры высказываний. Поэтому мы основное внимание уделим изучению свойств этих операций, которые принято называть булевскими[1] (булевыми) операциями алгебры высказываний.

Теорема 1.2 *Справедливы следующие 19 равносильностей для булевых операций алгебры высказываний:*

$$0.\ \overline{\overline{a}} \equiv a \quad \text{— } \textit{закон двойного отрицания}$$

$$\left.\begin{aligned} &1.\ a \vee b \equiv b \vee a \\ &2.\ a \wedge b \equiv b \wedge a \end{aligned}\right\} \text{ — } \textit{коммутативные законы}$$

$$\left.\begin{aligned} &3.\ a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c \\ &4.\ a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c \end{aligned}\right\} \text{ — } \textit{ассоциативные законы}$$

$$\left.\begin{aligned} &5.\ a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ &6.\ a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}\right\} \text{ — } \textit{дистрибутивные законы}$$

$$\left.\begin{aligned} &7.\ a \vee a \equiv a \\ &8.\ a \wedge a \equiv a \end{aligned}\right\} \text{ — } \textit{законы идемпотентности}$$

$$\left.\begin{aligned} &9.\ \overline{a \vee b} \equiv \overline{a} \wedge \overline{a} \\ &10.\ \overline{a \wedge b} \equiv \overline{a} \vee \overline{b} \end{aligned}\right\} \text{ — } \textit{законы де Моргана}^{2}$$

[1] Буль Джордж (1815–1864) — английский математик-самоучка. В 1848 г. опубликовал «The Mathematical Analysis of Logic» — первую работу по символической логике. С 1849 г. — профессор в Queen's College (Ирландия). В 1854 публикует «The Laws of Thought» — наиболее известную из своих работ. Здесь он впервые определил то, что теперь называют булевыми алгебрами. Дж. Буль — автор учебника по дифференциальным уравнениям, использовавшегося в Великобритании до конца XIX в.

[2] Де Морган Август (1806–1871) — английский математик. Окончил Trinity College (Кембридж) в 1827 г. В 1828 г. избран на должность в University College (Лондон), но занял ее только в 1836 г. Известен как преподаватель, ставивший идеи выше техники. Среди его учеников много известных математиков, в т. ч. Ада Августа де Лавлайс — основатель программирования.

Де Морган опубликовал свыше тысячи работ, в т. ч. несколько учебников. Ему принадлежит строгое изложение принципа (метода) математической индукции и первое четкое определение предела.

$$\left.\begin{aligned} &11.\ a \vee 1 \equiv 1 \\ &12.\ a \wedge 0 \equiv 0 \\ &13.\ a \vee 0 \equiv a \\ &14.\ a \wedge 1 \equiv a \end{aligned}\right\} \text{ — } \textit{законы нуля и единицы}$$

$$\left.\begin{aligned} &15.\ a \vee (a \wedge b) \equiv a \\ &16.\ a \wedge (a \vee b) \equiv a \end{aligned}\right\} \text{ — } \textit{законы поглощения}$$

$$17.\ a \vee \overline{a} \equiv 1 \quad \text{— } \textit{закон исключенного третьего}$$

$$18.\ a \wedge \overline{a} \equiv 0 \quad \text{— } \textit{закон противоречия}$$

► Любую из них можно доказать с помощью таблицы истинности. ◄

Логические и битовые операции

В компьютерах основной единицей информации является *бит*. Бит принимает два возможных значения 0 или 1, иными словами, бит — одноразрядное двоичное число. Для обозначения значения истинности высказывания мы также использовали 0, 1. Таким образом, если a — высказывание, то его значение истинности $\widehat{a}$ — бит информации. Переменная, принимающая значения во множестве $\{0, 1\}$, обычно называется булевой переменной. Т. е. булева переменная — это такая переменная, задание значения которой определяет один бит информации.

Компьютерные битовые (или логические) операции соответствуют операциям над высказываниями (вернее, над их значениями истинности). Приведем таблицы, определяющие операции $\neg$, or ($\vee$), and (&, $\wedge$), xor ($\oplus$):

x	$\neg x$
0	1
1	0

or	0	1
0	0	1
1	1	1

and	0	1
0	0	0
1	0	1

xor	0	1
0	0	1
1	1	0

Определение 1.7 *Битовой строкой длины n ($n \in N$) называется последовательность длины n, элементами которой являются биты.*

Например, 0110010 — битовая строка длины 7. Битовые операции естественным образом (поэлементно) распространяются на битовые строки равной длины. Их обозначения: bitwise $\neg$, bitwise or, bitwise and, bitwise xor.

Пример 1.12. bitwise $\neg$ (0110010) = 1001101

0110010	
1101010	
1111010	— bitwise or
0100010	— bitwise and
1011000	— bitwise xor

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. У нас встречались записи типа: «$a \vee 0$», «$a \to 1$», ... Повсюду в них 0 и 1 — символы ложного и истинного высказывания соответственно.

2. При задании логических операций мы пользовались таблицами

$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$a\widehat{\square}b$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

где $\square$ — символ определяемой операции, в первых столбцах таблиц перечислены возможные наборы значений истинности высказываний a, b. Всевозможные наборы значений истинности порождают строки таблицы. Каждый такой набор значений истинности может рассматриваться как двоичная запись неотрицательного целого числа. Наборы мы всегда будем располагать сверху вниз в порядке возрастания неотрицательных целых чисел $00_2 = 0_{10}$, $01_2 = 1_{10}$, $10_2 = 2_{10}$, $11_2 = 3_{10}$. Такое расположение наборов называется лексикографическим порядком, которого мы будем всегда придерживаться.

3. Приведите примеры теорем, имеющих конструкцию эквиваленции, импликации; посмотрите, какие строки таблицы, определяющей операцию, можно реализовать, а какие нет.

4. Постройте примеры неверных математических утверждений, имеющих конструкцию эквиваленции, импликации. Какие строки таблицы, определяющей операцию, удастся реализовать, показывая, что утверждение неверно?

5. Сколько всего различных бинарных операций над высказываниями можно определить?

1.2 Формулы алгебры высказываний

Будем считать, что существует некоторое множество элементарных высказываний (типа «$2 \times 2 = 4$»). Как правило, их будем обозначать первыми буквами латинского алфавита, а также 0, 1. Введем в рассмотрение высказывательные переменные — символы, вместо которых можно подставлять высказывания. Высказывательные переменные, как правило, обозначают последними буквами латинского алфавита (x, y, z, t, w, ...). Мы ввели также знаки (обозначения) логических операций. Введем еще два служебных символа «(» — открывающая скобка и «)» — закрывающая скобка.

Под формулами алгебры высказываний будем понимать осмысленные выражения, полученные из символов элементарных высказываний, символов высказывательных переменных, знаков операций (конечного числа) и скобок, определяющих порядок действий.

Пример 1.13. $((a \to \overline{x}) \vee a) \sim (x \wedge \overline{y})$.
Пример 1.14. $((a \vee 0) \wedge ((\overline{c}) \vee a)) \to \overline{\overline{x}}$.
Пример 1.15. $(a \to) \sim (c \vee \overline{x}))$.
Пример 1.16. $(\to x \vee \overline{y}) \sim$.

1.13, 1.14 — формулы, 1.15, 1.16 не являются формулами (проверьте, почему).

Дадим более четкое определение формулы алгебры высказываний.

Определение 1.8

► 1. Элементарные высказывания, символы логических переменных — формулы.

2. Если F_1 и F_2 — формулы алгебры высказываний, то

$$\overline{F_1}, \quad (F_1 \vee F_2), \quad (F_1 \wedge F_2), \quad (F_1 \sim F_2), \quad (F_1 \to F_2)$$

— формулы алгебры высказываний.

3. Других формул алгебры высказываний нет. ◄

Замечание 1. Из определения 1.8 видно, что любая формула, отличная от перечисленных в п. 1, должна быть заключена в наружные скобки. Поэтому выражения из примеров 1.13 и 1.14 также не являются формулами в смысле определения 1.8

Каковы же функции наружных скобок? Они нужны для будущего — для подготовки формулы к образованию из нее новых формул (с помощью п. 2).

Замечание 2. Определение формулы таково, что формулы насыщены скобками и трудночитаемы, поэтому мы примем соглашения об упрощении записи формул:

а) наружные скобки в записи формул можно опускать;

б) условимся, что конъюнкция «сильнее» дизъюнкции, а обе они «сильнее» $\to$ и $\sim$, поэтому часть скобок, определяющих порядок действий, можно опускать;

в) скобки, определяющие порядок действий, в ассоциативном случае можно опускать;

г) конъюнкцию будем обозначать знаком «$\cdot$» или знак конъюнкции опускать.

Пример 1.17. Дана формула

$$((((a \wedge b) \wedge \bar{c}) \vee c) \to ((a \vee \bar{b}) \wedge a)).$$

Ее упрощенная запись имеет вид:

$$ab\bar{c} \vee c \to (a \vee \bar{b}) \cdot a.$$

Приведем теперь без доказательства три важнейшие теоремы алгебры высказываний.

Теорема о фиксации значений в формуле

Теорема 1.3 (теорема о фиксации значений в формуле)
Если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формула алгебры высказываний, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — высказывательные переменные формулы, то при фиксации значений всех высказывательных переменных (т. е. при подстановке вместо них высказываний) формула алгебры высказываний превращается в высказывание. Т. е. формула алгебры высказываний является отображением множества наборов значений высказывательных переменных в высказывания. Можно также говорить о функции истинности формулы — $\widehat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — отображении множества наборов высказывательных переменных во множество $\{0; 1\}$.

Теорема о подстановке формул в формулу

Определение 1.9 *Пусть $F(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формулы алгебры высказываний. Подстановкой формул f_i в формулу F будем называть следующую конструкцию:*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(F|_{y_i \leftarrow f_i}\right)(x_1, x_2, \ldots, x_m) \stackrel{\text{def}}{\equiv}$$
$$\equiv F\left(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right).$$

Последняя запись означает, что все вхождения y_1 заменяются на $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y_2 на $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, y_m на $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Теорема 1.4 (теорема о подстановке формул в формулу) *Если F и f_i — формулы алгебры высказываний, то $(F|_{y_i \leftarrow f_i})(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формула алгебры высказываний. При этом говорят, что она получена из формулы F подстановкой формул f_i вместо ее переменных.*

Равносильность формул. Теорема о равносильной подстановке

Определение 1.10 *Две формулы алгебры высказываний $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ называют равносильными (пишут $f_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv f_2(x_1, \ldots, x_n)$), если*

$$\widehat{f_1}(x_1, \ldots, x_n) = \widehat{f_2}(x_1, \ldots, x_n).$$

В высказываниях нас не интересует содержательная часть, а интересуют только значения истинности; множество всевозможных наборов значений истинности высказывательных переменных конечно (состоит из 2^n наборов) и функцию $\widehat{f}(x_1, \ldots, x_n)$ можно задать таблично. Такая таблица называется таблицей истинности формулы.

Дадим второе определение равносильности формулы.

Определение 1.10′. *Две формулы $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ равносильны, если столбцы $\widehat{f}_1$ и $\widehat{f}_2$ их таблиц истинности совпадают.*

Теорема 1.5 (теорема о равносильной подстановке) *Пусть* $F(y_1, y_2, \ldots, y_m) \equiv G(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $f_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv g_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, \ldots, x_n) \equiv g_2(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_m(x_1, \ldots, x_n) \equiv g_m(x_1, \ldots, x_n)$, *тогда*

$$\left(F|_{y_i \leftarrow f_i}\right)(x_1, \ldots, x_n) \equiv \left(G|_{y_i \leftarrow g_i}\right)(x_1, \ldots, x_n).$$

Слушатель, интересующийся длинными и скучными доказательствами, может обратиться к книге С. Клини «Математическая логика». М.: Мир, 1973.

Определение 1.11 *Формулы алгебры высказываний, при образовании которых не использовались операции, отличные от $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, называют булевыми формулами алгебры высказываний.*

Теорема 1.6 *Для любой формулы алгебры высказываний существует равносильная ей булева формула алгебры высказываний.*

► Прежде чем начать доказательство теоремы, дадим определение ранга формулы.

Определение 1.12 *Рангом формулы называется число логических операций, встречающихся в формуле, причем каждая операция считается столько раз, сколько встречается.*

Пример 1.18. $a \cdot \overline{b} \cdot (a \to b) \vee \overline{c}$ — формула ранга 6.

Доказательство теоремы проведем индукцией по рангу формулы.

0^0 **(случай формул нулевого ранга).** $\operatorname{rang}(f) = 0$. Все формулы ранга 0 перечислены в п. 1 определения формулы (определение 1.8) — все это булевы формулы (т. к. в них нет небулевых операций).

1^0 **(случай формул ранга** 1**).** Все формулы ранга 1 имеют конструкции

$$1)\ \neg\Delta, \quad 2)\ \Delta \vee \Box, \quad 3)\ \Delta \wedge \Box, \quad 4)\ \Delta \to \Box, \quad 5)\ \Delta \sim \Box,$$

где Δ и $\Box$ — формулы нулевого ранга, и значит (см 0^0), булевы формулы. Тогда 1–3 также булевы формулы. Очевидно, в случае 4 и 5 имеет место:

$$\Delta \to \Box \equiv \overline{\Delta} \vee \Box, \quad \Delta \sim \Box \equiv \Delta \cdot \Box \vee \overline{\Delta} \cdot \overline{\Box},$$

при этом справа стоят булевы формулы.

2^0 **(индуктивный переход).** Допустим, утверждение теоремы справедливо для любой формулы ранга меньшего или равного n_0. Докажем, что тогда утверждение теоремы справедливо и для любой формулы ранга $n_0 + 1$.

Пусть $\operatorname{rang}(f) = n_0 + 1$. Выделим в f последнюю операцию, тогда f имеет одну из следующих конструкций: 1) $\neg\Delta$, 2) $\Delta \vee \Box$, 3) $\Delta \wedge \Box$, 4) $\Delta \to \Box$, 5) $\Delta \sim \Box$, где Δ и $\Box$ формулы ранга меньшего или равного n_0. Для Δ и $\Box$ справедливо предположение индукции, т. е. $\Delta \equiv \Delta_б$, $\Box \equiv \Box_б$, где $\Delta_б$ и $\Box_б$ — булевы формулы алгебры высказываний, тогда

$$\neg\Delta \equiv \neg\Delta_б, \quad \Delta \vee \Box \equiv \Delta_б \vee \Box_б, \quad \Delta \wedge \Box \equiv \Delta_б \wedge \Box_б$$
$$\Delta \to \Box \equiv \overline{\Delta}_б \vee \Box_б, \quad \Delta \sim \Box \equiv \Delta_б \cdot \Box_б \vee \overline{\Delta}_б \cdot \overline{\Box}_б,$$

так как справа стоят булевы формулы, то индуктивный переход доказан, а вместе с этим и вся теорема. ◄

Вопрос в конце параграфа

При доказательстве последней теоремы мы неявно пользовались теоремой о равносильной подстановке. Самостоятельно разберитесь, в каких местах доказательства используется эта теорема.

1.3 Двойственность в алгебре высказываний. Принцип двойственности. Закон двойственности

Определение 1.13 *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формула алгебры высказываний. Двойственной к ней будем называть формулу $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенную следующим:*

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}$$

Из закона двойного отрицания следует, что $(f^*)^* \equiv f$.

Пример 1.19. $(0)^* \equiv \overline{0} \equiv 1$; $(1)^* \equiv \overline{1} \equiv 0$; $(x)^* \equiv \overline{\overline{x}} \equiv x$; $(x \vee y)^* \equiv \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})} \equiv x \cdot y$; $(x \wedge y)^* \equiv \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})} \equiv x \vee y$.

Теорема 1.7 (закон двойственности) *Формулы* $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *равносильны тогда и только тогда, когда равносильны* $f_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $f_2^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *т. е.*

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \iff$$
$$f_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f_2^*(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Для доказательства закона двойственности установим связь между таблицами истинности формулы и двойственной к ней.

Утверждение. *Столбец значений* $\widehat{f^*}$ *может быть получен из столбца* $\widehat{f}$ *с помощью инвертирования — т. е. симметрией относительно середины и отрицания.*

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\widehat{f}$	$\widehat{f^*}$
0	0	$\ldots$	0	α	$\overline{\delta}$
0	0	$\ldots$	1	β	$\overline{\gamma}$
.	.	$\ldots$	.	.	.
1	1	$\ldots$	0	γ	$\overline{\beta}$
1	1	$\ldots$	1	δ	$\overline{\alpha}$

► Пусть $f_1 \equiv f_2$, тогда столбцы $\widehat{f_1}$ и $\widehat{f_2}$ совпадают, тогда инвертированные столбцы, т. е. столбцы для $\widehat{f_1^*}$ и $\widehat{f_2^*}$, совпадают. Это означает, что мы доказали, что $f_1 \equiv f_2 \Longrightarrow f_1^* \equiv f_2^*$, но тогда $f_1^* \equiv f_2^* \Longrightarrow (f_1^*)^* \equiv (f_2^*)^* \Longrightarrow f_1 \equiv f_2$. ◄

Теорема 1.8 (общий принцип двойственности) *Пусть*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \left(F|_{y_i \leftarrow f_i}\right)(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

тогда

$$\Phi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \left(F^*|_{y_i \leftarrow f_i^*}\right)(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

$$\Phi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \left(\left(F|_{y_i \leftarrow f_i}\right)(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)^* \equiv$$
$$\equiv \left(F\left(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)\right)^* \equiv$$
$$\equiv \overline{F\left(f_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n), \ldots f_m(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)\right)} \equiv$$
$$\equiv \overline{F\left(\overline{\overline{f_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}}, \ldots \overline{\overline{f_m(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}}\right)} \equiv$$
$$\equiv \overline{F\left(\overline{f_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \ldots \overline{f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right)} \equiv$$
$$\equiv \left(F^*|_{y_i \leftarrow f_i^*}\right)(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

◄

Теорема 1.9 (принцип двойственности для булевых формул) *Двойственная к булевой формуле может быть получена заменой констант* 0 *на* 1, 1 *на* 0, $\vee$ *на* $\wedge$, $\wedge$ *на* $\vee$ *и сохранением структуры формулы (т. е. соответствующего порядка действий).*

Пример 1.20. $(x \cdot \overline{y} \vee z)^* \equiv (x \vee \overline{y}) \cdot z$

Скобка в правой части поставлена для сохранения структуры формулы.

► Доказательство теоремы проведем индукцией по рангу формулы.

0-й шаг (случай ранга 0). Все формулы 0-го ранга описаны в п. 1 определения формулы (см. определение 1.8). Это формулы 0, 1, x. Мы знаем из примеров, что $0^* \equiv 1$, $1^* \equiv 0$, $x^* \equiv x$, т. е. утверждение теоремы выполнено.

1-й шаг (случай ранга 1). Все булевы формулы имеют вид: $\neg\triangle$, $\triangle \vee \square$, $\triangle \wedge \square$, где $\triangle$, $\square$ — булевы формулы ранга 0. Применим общий принцип двойственности

$$(\neg\triangle)^* \equiv \left(\neg y_1|_{y_1 \leftarrow \triangle}\right)^* \equiv \neg y_1|_{y_1 \leftarrow \triangle^*} \equiv \neg\triangle^*;$$

$$(\triangle \vee \square)^* \equiv \left(y_1 \vee y_2|_{\substack{y_1 \leftarrow \triangle \\ y_2 \leftarrow \square}}\right)^* \equiv y_1 \wedge y_2|_{\substack{y_1 \leftarrow \triangle^* \\ y_2 \leftarrow \square^*}} \equiv \triangle^* \wedge \square^*;$$

$$(\triangle \wedge \square)^* \equiv \left(y_1 \wedge y_2|_{\substack{y_1 \leftarrow \triangle \\ y_2 \leftarrow \square}}\right)^* \equiv y_1 \vee y_2|_{\substack{y_1 \leftarrow \triangle^* \\ y_2 \leftarrow \square^*}} \equiv \triangle^* \vee \square^*.$$

Очевидно, во всех случаях в правой части получилось то, что нужно.

Индуктивный переход. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для любой формулы ранга меньшего либо равного n_0, докажем, что тогда оно справедливо и для формулы ранга n_0+1.

Пусть $\operatorname{rang}(f) = n_0 + 1$. Выделим в f последнюю операцию, тогда f имеет один из следующих видов: $\neg\triangle$, $\triangle\vee\square$, $\triangle\wedge\square$, где $\triangle$, $\square$ — булевы формулы ранга меньшего или равного n_0, тогда по предположению индукции $\triangle^*$ и $\square^*$ получаются из $\triangle$ и $\square$ по предписанным теоремой правилам.

Тогда, повторяя рассуждения первого шага, имеем:

$$(\neg\triangle)^* \equiv \triangle^*; \quad (\triangle\vee\square)^* \equiv \triangle^*\wedge\square^*; \quad (\triangle\wedge\square)^* \equiv \triangle^*\vee\square^*.$$

Индуктивный переход доказан, а вместе с ним и вся теорема ◄

Замечание в конце параграфа

[!] Закон двойственности облегчает нашу жизнь вдвое, т. е. если мы, например, с помощью таблиц истинности или равносильными преобразованиями доказали, что $f_1 \equiv f_2$, то автоматически мы доказали, что $f_1^* \equiv f_2^*$.

В теореме 1.2 о девятнадцати основных равносильностях для булевых операций мы располагали их, начиная с первой, двойственными парами, поэтому достаточно с помощью таблиц истинности доказать равносильности $0, 1, 3, 5, \ldots, 17$, а $2, 4, 6, \ldots, 18$ будут выполнены по закону двойственности.

1.4 Нормальные формы. СДНФ. СКНФ. Понятие о показателе степени. Показательные уравнения

Определение 1.14 *Пусть $\sigma \in \{0,1\}$, x — высказывательная переменная. Определим*

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1 \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0 \end{cases}$$

Удобство введенного показателя степени состоит в том, что однотипно обозначаются x и $\overline{x}$.

Рассмотрим уравнение:

$$x^\sigma \equiv 1, \tag{1.2}$$

где x — неизвестное, σ — параметр. Очевидно, уравнение (1.2) имеет единственное решение $x \equiv \sigma$ ($\widehat{x} = \sigma$).

Рассмотрим уравнение:

$$x_1^{\sigma_1}\cdot x_2^{\sigma_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma_n} \equiv 1, \tag{1.3}$$

где x_i — неизвестные, σ_i — параметры. Очевидно, уравнение (1.3) имеет единственное решение

$$x_1 \equiv \sigma_1, \quad x_2 \equiv \sigma_2, \ \ldots, \ x_n \equiv \sigma_n.$$

Рассмотрим уравнение:

$$\bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in\Sigma} x_1^{\sigma_1}\cdot x_2^{\sigma_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma_n} \equiv 1, \tag{1.4}$$

Очевидно, множеством решений уравнения (1.4) является множество Σ.

Лемма 1.1 (о разложении по переменной) *Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — формула алгебры высказываний, $1\le i\le n$, тогда*

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) &\equiv x_i f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)\vee \\ &\vee\overline{x}_i f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n) \equiv \\ &\equiv \bigvee_{\sigma_i\in\{0,1\}} x_i^{\sigma_i} f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},\sigma_i,x_{i+1},\ldots,x_n) \end{aligned} \tag{1.5}$$

► Множество всевозможных наборов значений истинности высказывательных переменных разобьем на два множества I, II, отнеся к I все такие наборы $\overline{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, в которых $\alpha_i = 1$, к II — все такие наборы $\overline{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, в которых $\alpha_i = 0$.

Пусть $\overline{\alpha}\in I$. Подставляя его в правую часть (1.5), получим

$$\begin{aligned} &1\cdot f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)\vee \\ &\vee\overline{1}\cdot f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)\equiv \\ &\equiv 1\cdot f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)\vee 0\equiv \\ &\equiv f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n). \end{aligned}$$

Пусть $\overline{\alpha} \in H$. Подставляя его в правую часть (1.5), получим

$$0 \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \vee$$

$$\vee \overline{0} \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \equiv$$

$$0 \vee f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \equiv f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \blacktriangleleft$$

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формула алгебры высказываний. Применяя лемму о дизъюнктивном разложении по переменной x_1, получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \bigvee_{\sigma_1 \in \{0;1\}} x_1^{\sigma_1} \cdot \underline{f(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n)}. \quad (1.6)$$

Применяя к подчеркнутым множителям в (1.6) лемму о разложении по переменной x_2, получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_{\sigma_1 \in \{0,1\}} x_1^{\sigma_1} \cdot \left(\bigvee_{\sigma_2 \in \{0;1\}} x_2^{\sigma_2} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \ldots, x_n) \right). \quad (1.7)$$

Применим в правой части (1.7) дистрибутивный закон для конъюнкции относительно дизъюнкции (п. 6 теоремы 1.2), тогда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \bigvee_{\sigma_1 \in \{0;1\}} \bigvee_{\sigma_2 \in \{0;1\}} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Продолжая последовательное разложение по пераменным, получаем:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_{\sigma_1 \in \{0,1\}} \bigvee_{\sigma_2 \in \{0;1\}} \cdots \bigvee_{\sigma_n \in \{0;1\}} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \equiv$$
$$\stackrel{\text{def}}{\equiv} \bigvee_{\sigma_i \in \{0;1\}} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n). \quad (1.8)$$

Полученное в правой части (1.8) представление формулы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ее полным дизъюнктивным разложением.

Множители $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ не содержат переменных, т. е. являются высказываниями. Опуская в (1.8) все слагаемые, в которых $\widehat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$, получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \bigvee_{\sigma_i \in \{0;1\} \mid \widehat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}. \quad (1.9)$$

т. е. мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.10 *Для любой формулы алгебры высказываний, отличной от тождественно ложной, существует ее представление в виде (1.9), которое называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой.*

Докажем единственность СДНФ, т. е. если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}, \quad (1.10)$$

то правая часть (1.10) совпадает с правой частью (1.9) с точностью до порядка слагаемых.

Рассмотрим уравнение:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 1. \quad (1.11)$$

В силу (1.10) оно равносильно уравнению

$$\bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} \equiv 1, \quad (1.12)$$

а в начале этого параграфа мы доказали, что множеством решений такого уравнения является множество Σ.

Таким образом, Σ — это множество всех тех наборов значений переменных, на которых $\widehat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$, это же множество фигурирует в правой части (1.9). Единственность доказана. Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 1.11 *Для любой отличной от тождественно ложной формулы алгебры высказываний существует и единственное ее представление в виде СДНФ — дизъюнкции полных совершенных элементарных конъюнкций (слагаемых вида $x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}$).*

Теорема 1.12 *Для любой отличной от тождественно истинной формулы алгебры высказываний существует и единственное ее представление в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ) — конъюнкции полных совершенных элементарных дизъюнкций (т. е. сомножителей вида $(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n})$).*

► $$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv (f^*(x_1, x_2, \dots, x_n))^* \equiv (\text{СДНФ}(f^*))^* \equiv$$

$$\equiv \left(\bigvee_{\tau_i \in \{0;1\} \mid \hat{f}^*(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = 1} x_1^{\tau_1} \cdot x_2^{\tau_2} \cdots x_n^{\tau_n} \right)^* \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\tau_i \in \{0,1\} \mid \hat{f}^*(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = 1} (x_1^{\tau_1} \vee x_2^{\tau_2} \vee \dots \vee x_n^{\tau_n}) \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\sigma_i \in \{0;1\} \mid \hat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0} \left(x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n} \right).$$

Существование СКНФ доказано.

Докажем единственность СКНФ. Будем доказывать от противного, т. е. предположим, что существует такая формула $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, у которой по крайней мере две СКНФ ($\text{СКНФ}(\varphi)_1$ и $\text{СКНФ}(\varphi)_2$), тогда

$$\varphi^* \equiv \begin{cases} (\text{СКНФ}(\varphi)_1)^* \equiv \text{СДНФ}(\varphi^*)_1, \\ (\text{СКНФ}(\varphi)_2)^* \equiv \text{СДНФ}(\varphi^*)_2, \end{cases}$$

что противоречит единственности СДНФ для φ^*. ◄

Таким образом, мы показали, что для формул алгебры высказываний существуют равносильные им, однозначно определенные ими канонические представления — СДНФ и СКНФ.

Пример 1.21. Рассмотрим формулу $x_1 \to x_2 \equiv (\overline{x}_1 \vee x_2)$. Мы получили СКНФ для импликации. Продолжим преобразования, опустим внешние скобки.

$$x_1 \to x_2 \equiv \overline{x}_1 \vee x_2 \equiv \overline{x}_1 \cdot 1 \vee 1 \cdot x_2 \equiv \overline{x}_1 \cdot (x_2 \vee \overline{x}_2) \vee (x_1 \vee \overline{x}_1) \cdot x_2 \equiv$$
$$\equiv \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 \equiv \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2$$

— СДНФ импликации.

На этом примере покажем связь между таблицей истинности формулы и ее совершенными нормальными формами:

x_1	x_2	$\widehat{x_1 \to x_2}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$x_1 \to x_2 \equiv x_1^0 x_2^0 \vee x_1^0 x_2^1 \vee x_1^1 x_2^1 \equiv$$
$$\equiv \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \text{ — СДНФ}$$
$$x_1 \to x_2 \equiv (x_1^{\overline{1}} \vee x_2^{\overline{0}}) \equiv (x_1^0 \vee x_2^1)$$
$$\equiv (\overline{x}_1 \vee x_2) \text{ — СКНФ.}$$

Дадим серию определений.

Определение 1.15 *Пусть* $V_n = \{x_1; \overline{x}_1; x_2; \overline{x}_2; \dots; x_n; \overline{x}_n\}$ *и пусть* $v (\neq \varnothing) \subset V_n$.

Элементарной конъюнкцией, порожденной подмножеством v, *называется конъюнкция всех элементов* v.

Определение 1.16 *Элементарная конъюнкция называется совершенной, если в нее не входит никакая из переменных одновременно с отрицанием этой переменной.*

Определение 1.17 *Элементарная конъюнкция называется полной, если в ней представлены все переменные.*

Аналогично с ЭК, СЭК и ПСЭК определяются ЭД (элементарная дизъюнкция), СЭД, ПСЭД.

Определение 1.18 *Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.*

Определение 1.19 *Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.*

Ясно, что СДНФ является ДНФ, СКНФ является КНФ. Сформулируем и докажем основную теорему для нормальных форм.

Теорема 1.13 *Для любой формулы алгебры высказываний существуют равносильные ей ДНФ и КНФ.*

► Приведем конструктивное доказательство, опишем алгоритм перехода к ДНФ (КНФ).

Рассмотрим отдельно случай формул ранга 0:

$$\underset{\text{ДНФ}}{1} \equiv \underset{\text{КНФ}}{x \vee \overline{x}} \equiv (x \vee \overline{x}), \quad \underset{\text{ДНФ}}{0 \equiv x \cdot \overline{x}} \equiv \underset{\text{КНФ}}{(x) \cdot (\overline{x})}.$$

Формула x является одновременно и ДНФ, и КНФ.

Случай формулы $r \geq 1$. Опишем шаги алгоритма, приводящие к цели:

1. Пользуясь формулами $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$ и $x \sim y \equiv x \cdot y \vee \overline{x} \cdot \overline{y}$, перейти к равносильной булевой формуле

2. Пользуясь законами де Моргана, перейти к формуле с тесными отрицаниями, т. е. содержащей отрицание не выше, чем над переменными (пропустить отрицание внутрь формулы).

3. Пользуясь дистрибутивными законами, сделать дизъюнкцию (конъюнкцию) внешней операцией. ◄

Пример.

$$(x \sim y) \to \overline{(z \sim xy)} \equiv \overline{(xy \vee \overline{x} \cdot \overline{y})} \vee \overline{(xyz \vee \overline{xy} \cdot \overline{z})} \equiv$$
$$\equiv \overline{xy} \cdot (\overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}) \vee \overline{(xyz)} \cdot \overline{(\overline{xy} \cdot \overline{z})} \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee \overline{y})(x \vee y) \vee (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(xy \vee z) \equiv$$
$$\stackrel{1}{\equiv} x \cdot \overline{x} \vee x\overline{y} \vee \overline{x}y \vee y\overline{y} \vee \overline{x} \cdot xy \vee xy \cdot \overline{y} \vee xy \cdot \overline{z} \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \vee z\overline{z} \equiv$$
$$\stackrel{2}{\equiv} x\overline{y} \vee \overline{x}y \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv (x\overline{y} \vee xy\overline{z}) \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv$$
$$\equiv x(\overline{y} \vee y\overline{z}) \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv x(\overline{y} \vee y\overline{z}) \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv$$
$$\equiv x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv$$
$$\stackrel{3}{\equiv} x\overline{y} \vee x\overline{z} \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv (x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee \overline{x}(y \vee z)) \vee \overline{y}z \equiv$$
$$\equiv (x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee \overline{x}) \cdot ((x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee (y \vee z)) \vee \overline{y}z \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\,((x \vee y \vee z)(y \vee z \vee \overline{y} \vee \overline{z})) \vee \overline{y}z \equiv$$
$$\equiv ((\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(x \vee y \vee z) \vee \overline{y})\,((\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(x \vee y \vee z) \vee z) \equiv$$
$$\stackrel{4}{\equiv} (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{y})(x \vee y \vee z \vee \overline{y})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee z)(x \vee y \vee z \vee z) \equiv$$
$$\stackrel{5}{\equiv} (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(x \vee y \vee z).$$

Выражения после $\stackrel{1}{\equiv}$, $\stackrel{2}{\equiv}$, $\stackrel{3}{\equiv}$ являются ДНФ, после $\stackrel{4}{\equiv}$, $\stackrel{5}{\equiv}$ являются КНФ; выражение после $\stackrel{5}{\equiv}$ — СКНФ.

Замечания в конце параграфа

1. Как видно из примера, ДНФ и КНФ, в отличие от СДНФ и СКНФ, не обладают свойством единственности (однако это не всегда является недостатком).

2. Пункт 3 алгоритма для построения ДНФ психологически выполнять легче (раскрыть скобки), чем п. 3 для КНФ, поэтому можно предложить обходной маневр: после выполнения п. п. 1, 2 перейти к двойственной формуле, выполнить для нее п. 3 построения ДНФ и выписать для полученной ДНФ двойственную (это и будет КНФ исходной формулы, т. к. $(f^*)^* = f$).

1.5 Основные проблемы алгебры высказываний. Критерий тождественной истинности и тождественной ложности

Формулы алгебры высказываний обычно делят на три типа: тождественно истинные (тавтологии), тождественно ложные (противоречия) и нетривиально выполнимые (остальные). Наибольший интерес для математики представляют собой тождественно истинные формулы — они представля-
.представляют собой логически безупречных рассуждений.
ют собой скелеты (схемы) логически безупречных рассуждений.

Класический пример такой схемы рассуждений дает следующая тождественно истинная формула:

$$x(x \to y) \to y \quad \text{(modus penens)}$$

Эта формула — схема рассуждения вида: «Известно, что из x следует y и x — выполнено, значит, выполнено y».

В алгебре высказываний выделяют три основные проблемы: разрешения, равносильности, представимости. Сформулируем их.

Проблема разрешения

Существует ли алгоритм, позволяющий с помощью равносильных преобразований для произвольной формулы алгебры высказываний выяснить, является ли она тождественно истинной, тождественно ложной или нетривиально выполнимой?

Проблема равносильности

Существует ли алгоритм, позволяющий с помощью равносильных преобразований для произвольных формул выяснить, равносильны ли они?

Проблема представления

Можно ли двузначную 0-1 функцию n двузначных переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ реализовать формулой алгебры высказываний $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ так, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \widehat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)?$$

Ответ положителен. Причем для двух последних проблем его можно получить, применяя теорию СДНФ-СКНФ, что касается первой проблемы, для нее проще обойтись ДНФ и КНФ.

Теорема 1.14 (критерий тождественной истинности формулы)
Для того, чтобы формула алгебры высказываний была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы в равносильной ей КНФ были тождественно истинны все элементарные дизъюнкции.

► Справедливость критерия очевидна. ◄

Теорема 1.15 (критерий тождественной истинности элементарной дизъюнкции) *Для того, чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинна, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала хотя бы для одной переменной пара — переменная и ее отрицание.*

► Достаточность очевидна, так как

$$\cdots \vee x \vee \overline{x} \vee \cdots \equiv 1.$$

Необходимость.

Докажем ее от противного, т. е. предположим, что существует тождественно истинная элементарная дизъюнкция, для которой не выполнены условия теоремы. Высказывательные переменные с помощью этой ЭД разобьем на три типа: «+», «−», «∅».

К типу «+» отнесем переменные, которые вошли в ЭД сами (без отрицания), к типу «−» отнесем переменные, которые входят в ЭД своими отрицаниями, к типу «∅» — те переменные, которые вовсе не представлены в ЭД.

Сформируем $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — набор значений переменных, полагая

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \in «+»; \\ 1, & \text{если } x_i \in «-» \cup «\varnothing» \end{cases}$$

и подставим этот набор в нашу ЭД. Получим

$$0 \vee 0 \vee \cdot \vee 0 \equiv 0,$$

что противоречит тождественной истинности ЭД. ◄

Теорема 1.16 (критерий тождественной ложности формулы)
Для того, чтобы формула алгебры высказываний была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в равносильной ей ДНФ все ЭК были тождественно ложны.

Теорема 1.17 (критерий тождественной ложности ЭК)
Для того, чтобы ЭК была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала хотя бы для одной переменной пара — переменная и ее отрицание.

Ясно, что две последние теоремы — двойственные результаты для предыдущих.

Пример 1.22. Дана формула $x\overline{y} \cdot (x \to z) \sim \overline{z}$. Классифицировать ее.

► Построим ДНФ:

$$\begin{aligned} x\overline{y} \cdot (x \to z) \sim \overline{z} &\equiv x\overline{y} \cdot (x \to z) \cdot \overline{z} \vee \overline{x\overline{y} \cdot (x \to z)} \cdot z \equiv \\ &\equiv x\overline{y}(\overline{x} \vee z) \cdot \overline{z} \vee \left(\overline{x} \vee y \vee \overline{(\overline{x} \vee z)}\right) \cdot z \equiv \\ &\equiv x\overline{y} \cdot \overline{x} \cdot \overline{z} \vee x\overline{y} \cdot z \cdot \overline{z} \vee \overline{x}z \vee yz \vee x\overline{z} \cdot z \equiv \\ &\equiv \overline{x} \cdot z \vee y \cdot z. \end{aligned}$$

По критерию получаем, что формула не является тождественно ложной.

Построим КНФ:

$$x\overline{y} \cdot (x \to z) \sim \overline{z} \equiv \overline{x} \cdot z \vee y \cdot z \equiv (\overline{x} \vee y) \cdot z.$$

По критерию получаем, что формула не является тождественно истинной.

Вывод: формула нетривиально выполнима. ◄

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Ясно, что для проблемы разрешения можно обойтись только совершенными нормальными формами.
2. Попробуйте в терминах СДНФ (СКНФ) для формулы от n переменных дать решение проблемы разрашения.

1.6 Релейно-контактные схемы и схемы из функциональных элементов

Рассмотрим электромагнитные реле, состоящие из катушки индуктивности, контактной группы и вспомогательных элементов (пружина, корпус и т. п.). Реле бывают двух типов: нормально-разомкнутые (рис. 1.1) и нормально-замкнутые (рис. 1.2).

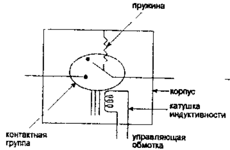


Рис. 1.1.

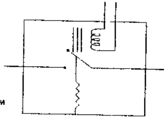


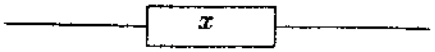
Рис. 1.2.

Условимся, что если по катушке индуктивности течет ток, то значение управляющего сигнала равно 1, если нет тока, то значение управляющего сигнала равно 0. Если контактная группа находится в замкнутом положении, то значение функции проводимости реле равно 1, если в разомкнутом — 0. Работа реле описывается таблицами:

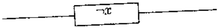
Управ. сигнал	Функция проводимости норм.-разомкн. реле
0	0
1	1

Управл. сигнал	Функция проводимости норм.-замкн. реле
0	1
1	0

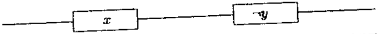
т. е. нормально-разомкнутое реле имеет тождественную функцию проводимости, а нормально-замкнутое — отрицание управляющего сигнала. Если управляющий сигнал обозначить x, то нормально-разомкнутое реле будем обозначать:



нормально-замкнутое:

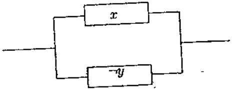


Рассмотрим схему:



Очевидно, ее функция проводимости — $x \cdot \overline{y}$, т. е. последовательное соединение реле реализует конъюнкцию.

Рассмотрим схему:



Очевидно, ее функция проводимости — $x \vee \overline{y}$, т. е. параллельное соединение реле реализует дизъюнкцию.

Определение 1.20 *Функцией проводимости схемы называется способность проводить или не проводить ток через схему соединения контактных групп реле в зависимости от комбинации управляющих сигналов, поданной на обмотки всех реле, образующих схему.*

Сформулируем основные задачи теории релейно-контактных схем.

1. Задача синтеза. Построить схему, реализующую заданную функцию проводимости.

Эта задача разрешима — достаточно построить формулу алгебры высказываний типа СДНФ или СКНФ (очевидно, что формулы такого типа реализуемы схемами).

2. Задача упрощения. По данной схеме построить более простую схему, имеющую такую же функцию проводимости (равносильную схему).

Сразу заметим, что единого критерия простоты схемы нет, а пример упрощения будет приведен позже (машина голосования).

3. Задача анализа схемы. Не включая схему в работу, проанализировав соединения контактных групп, найти функцию проводимости схемы.

(Задачи такого типа — одна из составляющих промышленного шпионажа.)

В качестве примера решения задач 1 и 2 рассмотрим построение машины голосования.

Пример. Комитет состоит из трех человек (x, y, z) и принимает решения простым большинством голосов. Построить схему машины голосования для этого комитета так, чтобы в случае принятия решения загоралась лампочка.

Очевидно, если договориться о том, что в случае голосования **«За»** управляющий сигнал равен 1, а **«Против»** — 0, то функция проводимости имеет следующий вид:

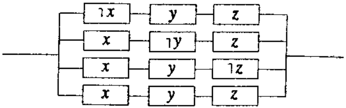
x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
Функция проводимости	0	0	0	1	0	1	1	1

Выпишем по таблице СДНФ —

$$\overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz.$$

Задача синтеза уже решена.

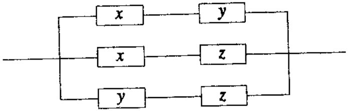
Нарисуем схему для полученной формулы:



Перейдем к задаче упрощения.

$$\overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz \equiv$$
$$\equiv \overline{x}yz \vee xyz \vee x\overline{y}z \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee xyz \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee x)yz \vee x(\overline{y} \vee y)z \vee xy(\overline{z} \vee z) \equiv$$
$$\equiv xy \vee xz \vee yz.$$

Нарисуем схему полученной формулы:

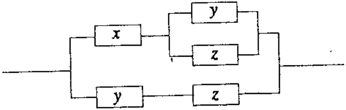


Мы сэкономили 6 реле (!). Можно продолжить упрощения

$$xy \vee xz \vee yz \equiv x(y \vee z) \vee yz.$$

Сэкономлено еще одно реле, но схема стала менее технологичной (потеряна симметричность).

Нарисуем схему для полученной формулы:



Двоичный сумматор

Перейдем к построению схемы основного элемента арифметического процессора любой ЭВМ — n-разрядного двоичного сумматора.

n-разрядный сумматор будем строить из n штук одноразрядных двоичных сумматоров.

Управляющими сигналами одноразрядного сумматора i-го разряда являются x_i, y_i — значения i-го разряда слагаемых и p_i — перенос в i-й разряд из предыдущего ($p_1 = 0$). В результате работы сумматора должны быть сформированы: z_i — значимые суммы в i-ом разряде и p_{i+1} — значение переноса в $i + 1$ разряд

Ясно, что работа сумматора описывается таблицей

x_i	y_i	p_i	z_i	p_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

z_i — функция проводимости для суммы

p_{i+1} — функция проводимости для переноса

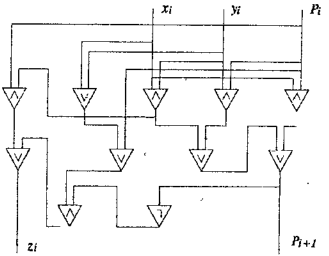
Очевидно, $p_{i+1} = x_iy_i \vee x_ip_i \vee y_ip_i$ (см. машину голосования), $z_i = \overline{p}_{i+1}(x_i \vee y_i \vee p_i) \vee x_iy_ip_i$.

Построим схему одноразрядного сумматора как схему из функциональных элементов, используя такие элементы:

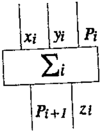
 — дизъюнкция;  — конъюнкция;  — отрицание

(вверху входы (упр. сигналы), внизу выход).

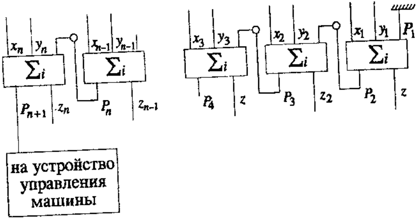
Тогда схема сумматора имеет вид:



Полученную схему одноразрядного сумматора можем считать функциональным элементом с тремя входами и двумя выходами.



Построим теперь схему n-разрядного сумматора:



○ — элементы задержки, запирающие сумматор до того, как прошло суммирование в предыдущем разряде. p_{n+1} подается на устройство управления для выработки сигнала о переполнении сумматора в случае, когда $p_{n+1} = 1$. Вход p_1 заземлен.

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Ясно, что в современной вычислительной технике используются не электромеханические реле, однако смысл от этого не меняется.
2. Для чего необходим в ЭВМ датчик частоты?
3. Почему с увеличением разрядности уменьшается быстродействие?
4. Почему заземлен вход p_1 в n-разрядном сумматоре?

Глава 2

Алгебры предикатов и множеств. Отображения

2.1 Предикаты. Логические операции над предикатами. Кванторы

Предметом изучения в этой главе будут предикаты — отображения произвольных множеств во множество высказываний. Фактически, мы совершаем переход на новый уровень абстракции, переход такого типа, какой был совершен в школе — от арифметики вещественных чисел к алгебре числовых функций.

Определение 2.1 *Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — символы переменных произвольной природы. Эти переменные будем называть предметными. Пусть наборы переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принадлежат (выбираются из) множеству Ω, которое будем называть предметной областью. Предикатом местности n (n-местным предикатом), определенным на предметной области Ω, называют отображение Ω во множество высказываний.*

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, дадим квазиопределение n-местного предиката:

Определение. «Связное повествовательное предложение, содержащее n переменных и обладающее следующим свойством: при фиксации значений всех переменных о нем (предложении) можно сказать, истинно оно или ложно».

Пример 2.1. $D(x_1, x_2) =$ «Натуральное число x_1 делится (без остатка) на натуральное число x_2.» — двуместный предикат, определенный на множестве пар натуральных чисел $N \times N$.
Очевидно, $\widehat{D}(4,2) = 1$, $\widehat{D}(3,5) = 0$.
Пример 2.2. $Q(x) =$«$x^2 < -1$, $x \in R$.» — одноместный предикат, определенный на R.
Ясно, что $\widehat{Q}(-1) = 0$, $\widehat{Q}(\sqrt{3}) = 0$, и вообще предикат $Q(x)$ — тождественно ложен, т. е. $\widehat{Q}(x) \equiv 0$.
Пример 2.3. $R(x,y,z) =$«$x^2 + y^2 \leq z$; $x, y, z \in R$.» — трехместный предикат, определенный на R^3.

$$\widehat{R}(1,1,-2) = 0, \quad \widehat{R}(1,1,2) = 1.$$

Пример 2.4. $S(x,y) =$«$\sin 2xy > -3$; $x, y \in R$.» — тождественно истинный двуместный предикат.

Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — n-местный предикат, определенный на Ω. Свяжем с ним два множества (подмножества Ω), определенные следующим:

$$P^{-1}(\{1\}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega | \widehat{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}$$

— множество истинности предиката P,

$$P^{-1}(\{0\}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega | \widehat{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0)$$

— множество ложности предиката P.

Определение 2.2 *Предикат P, определенный на Ω, называется тождественно истинным, если*

$$P^{-1}(\{1\}) = \Omega \, (P^{-1}(\{0\}) = \varnothing);$$

тождественно ложным, если

$$P^{-1}(\{0\}) = \Omega \, (P^{-1}((1)) = \varnothing);$$

нетривиально выполнимым, если

$$P^{-1}(\{1\}) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad P^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing.$$

Изобразим в R^3 множества $R^{-1}(\{1\})$, $R^{-1}(\{0\})$ (см. рис. 2.1) для предиката $R(x,y,z)$ примера 2.3.

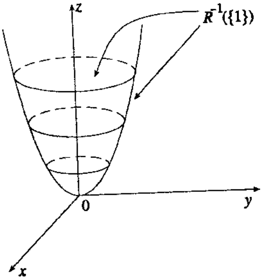


Рис. 2.1: Поверхность и внутренность изображенного параболоида вращения — $R^{-1}(\{1\})$, внешность — $R^{-1}(\{0\})$.

Логические операции над предикатами

Поскольку предикаты — это отображения со значениями во множестве высказываний, где введены логические операции, то эти операции естественно определяются и для предикатов.

Определение 2.3 *Пусть P — предикат, определенный на Ω. Отрицанием предиката P называется предикат, обозначаемый $\neg P$ ($\bar{P}$), определенный на Ω следующим образом:*

$$(\neg P)(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{=} \overline{P(x_1, \ldots, x_n)}$$
$$\left((\widehat{\neg P})(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{=} \overline{\widehat{P(x_1, \ldots, x_n)}} \right).$$

Пусть P и Q — предикаты, определенные на Ω.

Дизъюнкцией (конъюнкцией, импликацией, эквиваленцией) предикатов P и Q называется предикат, определенный на Ω, обозначаемый $P \vee Q$ $(P \wedge Q (P \cdot Q, P\&Q, PQ))$, $P \to Q$, $P \sim Q$) и определяемый следующим:

$$(P \vee Q)(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{\equiv} P(x_1, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\Big((P \wedge Q)(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{\equiv} P(x_1, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

$$\Big((P \to Q)(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{\equiv} P(x_1, \ldots, x_n) \to Q(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

$$\Big((P \sim Q)(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{\equiv} P(x_1, \ldots, x_n) \sim Q(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

Определение 2.4 *Предикаты P и Q, определенные на Ω, называются равносильными (пишут $P \equiv Q$), если*

$$P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, \ldots, x_n)$$

для любого набора $(x_1, \ldots, x_n)$ предметных переменных из Ω.

Теорема 2.1 *Множество n-местных предикатов, определенных на Ω, образует булеву алгебру предикатов, т. е. для них справедливы 19 основных равносильностей булевой алгебры:*

0. $\neg\neg P \equiv P$.
1. $P \vee Q \equiv Q \vee P$
2. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
3. $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R \overset{def}{\equiv} P \vee Q \vee R$
4. $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R \overset{def}{\equiv} P \wedge Q \wedge R$
5. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
6. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
7. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
8. $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
9. $P \vee P \equiv P$
10. $P \wedge P \equiv P$
11. $P \vee 1 \equiv 1$
12. $P \wedge 0 \equiv 0$
13. $P \vee 0 \equiv P$
14. $P \wedge 1 \equiv P$
15. $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
16. $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
17. $P \vee \neg P \equiv 1$
18. $P \wedge \neg P \equiv 0$

Здесь 1 — обозначение тождественно истинного предиката на Ω, 0 — обозначение тождественно ложного предиката на Ω.

► Справедливость этой теоремы очевидна, так как операции над предикатами вводились с помощью операций над высказываниями, а высказывания образуют булеву алгебру (теорема 1.2). ◄

2.2 Кванторы, их свойства и применение

В этом параграфе мы познакомимся с двумя операциями, уменьшающими местность (т. е. количество переменных) предиката — фиксацией значений переменной и навешиванием кванторов (квантификацией). Эти операции принципиально отличаются от изученных ранее логических операций, которые сохраняли местность предикатов. Наиболее важными с точки зрения приложений в других областях математики являются операции навешивания кванторов, они широко используются для записи определений, особенно в математическом анализе.

Операции, уменьшающие местность предикатов

1. Фиксация значений переменных

Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ — n-местный предикат, определенный на Ω. Зафиксируем $x_i = a$, $1 \le i \le n$. Обозначим Ω_a^i — множество значений переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, определяемое следующим:

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \Omega_a^i \iff$$
$$\iff (x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \Omega.$$

Определим на Ω_a^i $(n-1)$-местный предикат $Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ следующим:

$$Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \equiv P(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Говорят, что предикат $Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ получен из предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$ фиксацией значения i-й переменной $x_i = a$.

Пример 2.5. Зафиксировав в предикате $R(x, y, z)$ примера 2.3 значение третьей переменной $z = 3$, получим двуместный предикат

$$«x^2 + y^2 \le 3; \quad x, y \in R.»$$

2. Кванторы

Приведенные ниже конструкции очень распространены в математике (особенно в математическом анализе), и, вероятно, вам уже приходилось с ними встречаться. Обратите особое внимание на приведенные ниже определения, так как при интуитивном пользовании неаккуратно введенными объектами у вас могли уже выработаться «вредные привычки и дурной тон».

Определение 2.5 *Пусть $P(x)$ — одноместный предикат. Поставим ему в соответствие высказывание, обозначаемое $\forall x\ P(x)$ (читается «для любого x $P(x)$»), которое истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ — тождественно истинный предикат. О высказывании $\forall x\ P(x)$ говорят, что оно получено из предиката P навешиванием квантора всеобщности по переменной x.*

Определение 2.6 *Пусть $P(x)$ — одноместный предикат. Поставим ему в соответствие высказывание, обозначаемое $\exists x\ P(x)$ (читается «существует x $P(x)$»), которое ложно тогда и только тогда, когда $P(x)$ — тождественно ложный предикат. О высказывании $\exists x\ P(x)$ говорят, что оно получено из предиката P навешиванием квантора существования по переменной x.*

Замечание 2.1. Обозначения $\forall$ и $\exists$ для кванторов — это перевернутые латинские буквы A и E соответственно, которые являются первыми буквами в английских словах *all* — все, *exist* — существовать.

Замечание 2.2. Высказывания можно считать предикатами, не содержащими переменных, т. е. 0-местными предикатами (или предикатами любой местности).

Замечание 2.3. В силу замечания 2.2 кванторы можно рассматривать как отображения множества одноместных предикатов во множество высказываний (0-местных предикатов), т. е. отображения, уменьшающие местность на 1.

Замечание 2.4. Формулы алгебры высказываний от n высказывательных переменных можно рассматривать как n-местные предикаты от этих переменных.

Основные равносильности, содержащие кванторы. Кванторы как обобщение логических операций

Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ — n-местный предикат, определенный на Ω. Зафиксируем в нем значения переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, на полученный одноместный предикат $Q(x_i)$ навесим квантор всеобщности (существования), получим высказывание. Тем самым фиксированному набору значений переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ с помощью квантора всеобщности (существования) поставлено в соответствие высказывание. Сопоставление любому набору значений переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ вполне определенного высказывания — это отображение из множества наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ во множество высказываний, т. е. предикат от этих переменных. Говорят, что этот $(n-1)$-местный предикат переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ получен из исходного предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$ навешиванием квантора всеобщности (существования) по i-й переменной. Этот предикат обозначают:

$$\forall x_i\ P(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(\exists x_i\ P(x_1, \ldots, x_n)).$$

Об i-й переменной (которой уже нет) говорят, что она связана квантором всеобщности (существования).

Пример 2.6. Пусть $D(x_1, x_2)$ — предикат примера 2.1. Навесим последовательно на его переменные кванторы. Ясно, что

$$1)\ \forall x_1\ \forall x_2\ D(x_1,x_2) \equiv 0. \quad 2)\ \forall x_2\ \forall x_1\ D(x_1,x_2) \equiv 0$$
$$3)\ \exists x_1\ \exists x_2\ D(x_1,x_2) \equiv 1. \quad 4)\ \exists x_2\ \exists x_1\ D(x_1,x_2) \equiv 1$$
$$5)\ \forall x_1\ \exists x_2\ D(x_1,x_2) \equiv 1. \quad 6)\ \exists x_2\ \forall x_1\ D(x_1,x_2) \equiv 1$$
$$7)\ \exists x_1\ \forall x_2\ D(x_1,x_2) \equiv 0. \quad 8)\ \forall x_2\ \exists x_1\ D(x_1,x_2) \equiv 1$$

Таким образом (сравнением 7 и 8 в последнем примере) мы доказали теорему:

Теорема 2.2 *Разноименные кванторы, вообще говоря, не коммутируют.*

Теорема 2.3 (основные равносильности, содержащие кванторы)
Имеют место следующие равносильности:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \overline{\forall x\ P(x)} \equiv \exists x\ \overline{P(x)} \\ 2.\ \overline{\exists x\ P(x)} \equiv \forall x\ \overline{P(x)} \end{array}\right\} \text{Законы де Моргана для кванторов}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ \forall x\ \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y\ \forall x\ P(x,y) \\ 4.\ \exists x\ \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y\ \exists x\ P(x,y) \end{array}\right\} \text{Коммутация одноименных кванторов}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ \forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x P(x) \land \forall x Q(x) \\ 6.\ \exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv \exists x P(x) \lor \exists x Q(x) \end{array}\right\} \text{Дистрибутивные законы для кванторов}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7.\ \forall x(P(x) \lor Q(y)) \equiv \forall x P(x) \lor Q(y) \\ 8.\ \exists x(P(x) \land Q(y)) \equiv \exists x P(x) \land Q(y) \end{array}\right\} \text{Законы ограничения действия кванторов}$$

9. $\exists y \forall x P(x,y) \to \forall x \exists y P(x,y) \equiv 1$ — *каков бы ни был двуместный предикат* $P(x,y)$.

▶ ^{1} ▶ Пусть P такой предикат, что левая часть в (1) ложна $\iff \forall x P(x)$ — истина $\iff P(x)$ — тождественно истинный предикат Llra $\overline{P(x)}$ — тождественно ложный предикат $\iff \exists x \overline{P(x)}$ — ложь.

Таким образом, мы доказали, что левая и правая часть в (1) ложны одновременно, значит, и истинны они тоже только одновременно. ◀$_1$

^{2} ▶ $\overline{\exists x P(x)} \equiv \overline{\exists x \overline{\overline{P(x)}}} \stackrel{1}{\equiv} \overline{\overline{\forall x \overline{P(x)}}} \equiv \forall x \overline{P(x)}$. ◀$_2$

^{3} ▶ Пусть $P(x,y)$ — такой двуместный предикат, что левая часть в (3) — истина $\iff \forall y P(x,y)$ — тождественно истинный предикат переменной $x \iff$ зафиксировав произвольное x_0, мы получим, что $\forall y P(x_0,y)$ — истина $\iff$ зафиксировав произвольное x_0, мы получим $P(x_0,y)$ — тождественно истинный предикат переменной $y \iff$ зафиксировав произвольно x_0 и y_0 в $P(x,y)$, мы получим $P(x_0,y_0)$ — истина, т. е. $P(x,y)$ – тождественно истинный предикат.

Очевидно, истинность правой части в (3) равносильна тому же самому — тождественной истинности предиката $P(x,y)$. ◀$_3$

^{4} ▶ $\exists x\exists y P(x,y) \equiv \exists x\exists y \overline{\overline{P(x,y)}} \stackrel{1}{\equiv} \exists x \overline{\forall y \overline{P(x,y)}} \stackrel{1}{\equiv} \overline{\forall x\forall y \overline{P(x,y)}} \stackrel{3}{\equiv} \overline{\forall y\forall x \overline{P(x,y)}} \stackrel{1}{\equiv} \exists y\overline{\forall x \overline{P(x,y)}} \stackrel{1}{\equiv} \exists y\exists x\overline{\overline{P(x,y)}} \equiv \exists y\exists x P(x,y)$. ◀$_1$

^{5} ▶ Пусть левая часть в (5) — истина $\iff P(x) \land Q(x)$ — тождественно истинный предикат $\iff P(x)$ — тождественно истинный предикат и $Q(x)$ — тождественно истинный предикат $\iff$ ($\forall x P(x)$ — истина) и ($\forall x Q(x)$ — истина) $\iff \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$ — истина, т. е. мы доказали, что левая часть в (5) — истина тогда и только тогда, когда правая часть в (5) — истина, значит, и ложны они только одновременно. ◀$_5$

^{6} ▶ $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv \overline{\overline{\exists x(P(x)\lor Q(x))}} \equiv \overline{\forall x\overline{(P(x)\lor Q(x))}} \equiv \overline{\forall x(\overline{P(x)}\land\overline{Q(x)})} \equiv \overline{\forall x\overline{P(x)}\land\forall x\overline{Q(x)}} \equiv \overline{\forall x\overline{P(x)}}\lor\overline{\forall x\overline{Q(x)}} \equiv \exists x\overline{\overline{P(x)}}\lor\exists x\overline{\overline{Q(x)}} \equiv \exists x P(x)\lor\exists x Q(x)$. ◀$_6$

Равносильности (7) и (8) докажите самостоятельно.

^{9} ▶ Допустим противное, т. е. что существует такой двуместный предикат $P_0(x,y)$, что $\exists y\forall x P_0(x,y) \to \forall x\exists y P_0(x,y)$ — ложь

$$\iff \begin{cases} \exists y\forall x P_0(x,y) \text{ — истина;} \\ \forall x\exists y P_0(x,y) \text{ — ложь.} \end{cases}$$

Разберемся отдельно с верхней и нижней строками последнего соотношения.

$\exists y\forall x P_0(x,y)$ — истина $\iff \forall x P_0(x,y)$ — не тождественно ложный предикат переменной $y \iff$ можно зафиксировать такое значение y_0, что $P_0(x,y_0)$ — тождественно истинный предикат переменной x (α).

$\forall x\exists y P_0(x,y)$ — ложь $\iff \exists y P_0(x,y)$ не тождественно истинный предикат $x \iff$ можно зафиксировать такое значение x_0, что $\exists y P_0(x_0,y)$ — ложь $\iff$ можно зафиксировать такое значение x_0, что $P_0(x_0,y)$ — тождественно ложный предикат y (β).

Зафиксировав в (α) значение x_0, найденное в (β), получим $P_0(x_0,y_0)$ — истина (1), а зафиксировав в (β) значение y_0 из (α), получим $P_0(x_0,y_0)$ — ложь (2).

(1) и (2) противоречат друг другу. ◀$_9$ ◀

Теорема 2.4 (кванторы как обобщение логических операций)
Пусть $P(x)$ *— одноместный предикат, определенный на конечном множестве* $\Omega = \{x_1; x_2; \ldots; x_N\}$*, тогда*

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_N);$$
$$\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_N).$$

Доказательство теоремы очевидно следует из определения кванторов и логических операций, а смысл теоремы состоит в том, что квантор всеобщности обобщает конъюнкцию, а квантор существования — дизъюнкцию в случае предикатов, определенных на бесконечных множествах.

Применение языка предикатов и кванторов для записи математических утверждений

В качестве примера рассмотрим определение того, что вещественное число a является пределом числовой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Образуем следующие предикаты:

«$n > N$» — двуместный предикат переменных n и N (переменные принимают натуральные значения);

«$|x_n - a| < \varepsilon$» — двуместный предикат переменных n и ε (n — натуральное число, ε — положительное вещественное число);

«$(n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon)$» — трехместный предикат переменных n, N, ε, порожденный парой: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, a — вещественное число.

Навесим на этот трехместный предикат кванторы

$$\forall\varepsilon\exists N\forall n((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon)).$$

Мы получим высказывание. Утверждение, что a является пределом числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, равносильно истинности полученного высказывания. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon\exists N\forall n((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon)) \equiv 1. \qquad (2.1)$$

Разберемся, что означает, что a не является пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Это означает, что истинным высказыванием является отрицание последнего высказывания в равносильности (2.1), т. е.

$$\overline{\forall\varepsilon\exists N\forall n((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon))} \equiv 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists\varepsilon\overline{\exists N\forall n((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon))} \equiv 1$$
$$\Longleftrightarrow$$

$$\exists\varepsilon\forall N\overline{\forall n((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon))} \equiv 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists\varepsilon\forall N\exists n\overline{((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon))} \equiv 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists\varepsilon\forall N\exists n\overline{(\overline{(n > N)} \vee (|x_n - a| < \varepsilon))} \equiv 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists\varepsilon\forall N\exists n(\overline{\overline{(n > N)}}) \cdot (\overline{|x_n - a| < \varepsilon})) \equiv 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists\varepsilon\forall N\exists n((n > N) \cdot (|x_n - a| \geq \varepsilon)) \equiv 1,$$

n, N — натуральные числа, ε — положительное вещественное число.

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Доказав, что $\exists y\forall x P(x,y) \to \forall x\exists y P(x,y) \equiv 1$, мы доказали, в частности, что если функция равномерно непрерывна на множестве, то она и непрерывна на множестве.
Разберитесь, почему.

2. Имеет место следующее:

$$\forall x P(x) \equiv \forall y P(y), \quad \exists x P(x) \equiv \exists y P(y),$$

т. е. все равно, как обозначена переменная, по которой навешен квантор (Аналогия: $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt$.)

3. Дайте самостоятельно определение формулы алгебры предикатов (по аналогии с определением формулы алгебры высказываний).

2.3 Алгебра множеств

Основными понятиями этого параграфа являются понятия множества и элемента множества (и значит, они не определяются).

Понятие об универсальном и пустом множестве

Будем считать, что мы выбрали и зафиксировали достаточно широкое множество, за пределы которого не будем выходить. Элементы всех множеств, которые будем рассматривать, одновременно являются элементами этого широкого фиксированного множества, называемого универсальным множеством. Для этого множества будем применять обозначение I.

Пусть A — некоторое множество. Говорят, что A задано, если относительно любого элемента $x \in I$ можно сказать, принадлежит или не принадлежит он множеству A.

Таким образом, с каждым множеством A связан одноместный предикат $P_A(x)$, определенный на универсальном множестве.

$$P_A(x) \equiv «x \in A».$$

Ясно, что $P_I(x)$ — тождественно истинный предикат.

Наряду с универсальным множеством удобно иметь дело с его противоположностью — не содержащим элементов множеством — пустым множеством, обозначаемым $\varnothing$. Ясно, что $P_\varnothing(x)$ — тождественно ложный предикат.

Определение 2.7 *Два множества A и B называются равными (пишут $A = B$) тогда и только тогда, когда*

$$P_A(x) \equiv P_B(x).$$

Пример 2.7. Пусть A — множество неотрицательных целых чисел, не превосходящих 9, B — множество цифр, используемых в десятичной записи чисел. Ясно, что $A = B = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Операции над множествами

Очевидно, что любой одноместный предикат $P(x)$, определенный на I, можно считать предикатом, порожденным множеством. Действительно, если положить

$$A_p = P^{-1}(\{1\}), \text{ то } P_{A_p}(x) \equiv P(x).$$

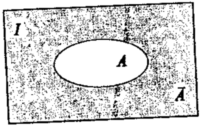
Последнее позволяет вводить операции над множествами, используя операции над предикатами.

Булевы операции над множествами

Определение 2.8 *Дополнением ко множеству A относительно универсального множества I называется множество, обозначаемое $\overline{A}$ (см. рис. 2.2[1]), определяемое следующим:*

$$P_{\overline{A}}(x) \equiv \overline{P_A(x)}.$$

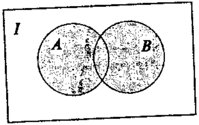
Рис. 2.2:



Определение 2.9 *Объединением множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cup B$ (см. рис. 2.3), определяемое следующим:*

$$P_{A \cup B}(x) \equiv P_A(x) \vee P_B(x).$$

Рис. 2.3:



— $A \cup B$

Определение 2.10 *Пересечением множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cap B$ (см. рис. 2.4), определяемое следующим:*

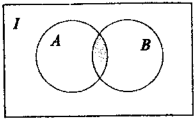
---

[1]Картинки, интерпретирующие операции над множествами, называют диаграммами Виенна.

Виенн Диего (1834–1923) — английский математик, получил ученую степень в области математики в 1857 г. в Кембридже, где и работал всю жизнь. Помимо математики интересовался историей и теологией.

Широко известна работа Виенна по символической логике, являющаяся хорошим изложением идей Дж. Буля. В этой книге впервые используются диаграммы, получившие затем имя Виенна. Диего Виенн написал и широко известный учебник по теории вероятностей.

$P_{A\cap B}(x) \equiv P_A(x)\cdot P_B(x)$. *Рис. 2.4:*



— $A\cap B$

Теорема 2.5 *Множества относительно операций дополнения, объединения, пересечения образуют булеву алгебру множеств, т. е. для них выполнены 19 основных равенств:*

0. $\overline{\overline{A}} = A$ — *Закон двойного дополнения*

1. $A\cup B = B\cup A$
2. $A\cap B = B\cap A$

Коммутативные законы

3. $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C \overset{def}{=} A\cup B\cup C$
4. $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C \overset{def}{=} A\cap B\cap C$

Ассоциативные законы

5. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
6. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

Дистрибутивные законы

7. $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$
8. $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

Законы де Моргана

9. $A\cup A = A$
10. $A\cap A = A$

Законы идемпотентности

11. $A\cup I = I$
12. $A\cap\varnothing = \varnothing$
13. $A\cup\varnothing = A$
14. $A\cap I = A$

Законы $\varnothing$ и I

15. $A\cup(A\cap B) = A$
16. $A\cap(A\cup B) = A$

Законы поглощения

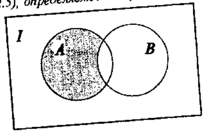
17. $A\cup\overline{A} = I$
18. $A\cap\overline{A} = \varnothing$.

Справедливость 0–18 следует из определения операций над множествами и того, что предикаты относительно $\neg$, $\vee$ и $\wedge$ образуют алгебру предикатов.

Другие операции над множествами

Определение 2.11 *Разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое $A\setminus B$ $(A - B)$ (см. рис. 2.5), определяемое следующим:*

$P_{A\setminus B}(x) \equiv P_A(x)\cdot\overline{P_B(x)}$. *Рис. 2.5:*



— $A\setminus B$

Очевидно, имеет место равенство:

$$A\setminus B = A\cap\overline{B}. \tag{2.2}$$

▶ $P_{A\setminus B}(x) \equiv P_A(x)\cdot\overline{P_B(x)} \equiv P_A(x)\cdot P_{\overline{B}}(x) \equiv P_{A\cap\overline{B}}(x)$. ◀

Ясно, что разность множеств — некоммутативная операция. Действительно, пусть $A = \{1;2;3\}$; $B = \{1;2;5;7\}$.

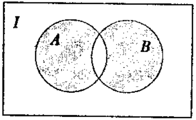
$$A\setminus B = \{3\};\quad B\setminus A = \{5;7\}.$$

Имеют место следующие равенства:

1. $A\setminus\varnothing = A$.
2. $\varnothing\setminus A = \varnothing$.
3. $A\setminus I = \varnothing$.
4. $I\setminus A = \overline{A}$.
5. $A\setminus A = \varnothing$.

Определение 2.12 *Симметрической разностью множеств A и B называют множество, обозначаемое $A \triangle B$ ($A \dot{-} B$) (см. рис. 2.6), определяемое следующим:*

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. *Рис. 2.6:*



— $A \triangle B$

Имеет место равенство:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \tag{2.3}$$

► $$P_{A\triangle B}(x) \equiv P_{A\setminus B}(x) \vee P_{B\setminus A}(x) \equiv P_A(x)\cdot\overline{P_B(x)} \vee P_B(x)\cdot\overline{P_A(x)} \equiv$$
$$\equiv P_A(x)\cdot\overline{P_B(x)} \vee P_B(x)\cdot\overline{P_B(x)} \vee P_A(x)\cdot\overline{P_A(x)} \vee P_B(x)\cdot\overline{P_A(x)} \equiv$$
$$\equiv (P_A(x) \vee P_B(x))\cdot\overline{P_B(x)} \vee (P_A(x) \vee P_B(x))\overline{P_A(x)} \equiv$$
$$\equiv P_{A\cup B}(x)\cdot\overline{P_B(x)} \vee P_{A\cup B}(x)\cdot\overline{P_A(x)} \equiv$$
$$\equiv P_{A\cup B}(x)\cdot(\overline{P_B(x)} \vee \overline{P_A(x)}) \equiv P_{A\cup B}(x)\cdot\overline{P_B(x)\cdot P_A(x)} \equiv$$
$$\equiv P_{A\cup B}(x)\cdot\overline{P_{A\cap B}(x)} \equiv P_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)}(x).$$ ◄

Имеют место следующие равенства:
1. $A \triangle B = B \triangle A$ — коммутативность.
2. $A \triangle I = \overline{A}$.
3. $A \triangle \varnothing = A$.

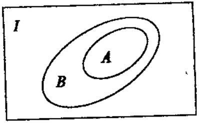
Подмножество

Важным понятием является понятие подмножества. Понятие подмножества — понятие относительное, то есть применяется к паре множеств.

Определение 2.13 *Говорят, что множество A является подмножеством множества B (пишут $A \subset B$) тогда и только тогда, когда каждый элемент множества A является элементом множества B (см. рис. 2.7), то есть*

$A \subset B \Longleftrightarrow P_A(x) \to P_B(x) \equiv 1$

Рис. 2.7:



Теорема 2.6 *Для того, чтобы множество A являлось подмножеством множества B, необходимо и достаточно, чтобы*

$$A \setminus B = \varnothing.$$

► $$A \subset B \Longleftrightarrow P_A(x) \to P_B(x) \equiv 1 \Longleftrightarrow \overline{P_A(x) \to P_B(x)} \equiv 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \overline{\overline{P_A(x)} \vee P_B(x)} \equiv 0 \Longleftrightarrow \overline{\overline{P_A(x)}}\cdot\overline{P_B(x)} \equiv 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow P_A(x)\cdot\overline{P_B(x)} \equiv 0 \Longleftrightarrow P_{A\setminus B}(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow A \setminus B = \varnothing.$$ ◄

Свойства «$\subset$»

Теорема 2.7 *Имеют место соотношения:*
1. $A \subset A$ — *рефлексивность.*
2. $(A \subset B)\&(B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$ — *транзитивность.*
3. $(A \subset B)\&(B \subset A) \Longleftrightarrow A = B$ — *антисимметричность.*

► 1. Составим разность $A \setminus A = \varnothing \Longleftrightarrow A \subset A$.

2.

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \Longleftrightarrow P_A(x) \to P_B(x) \equiv 1 \\ B \subset C \Longleftrightarrow P_B(x) \to P_C(x) \equiv 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (P_A(x) \to P_B(x))\cdot(P_B(x) \to P_C(x)) \equiv 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\overline{P_A(x)} \vee P_B(x))\cdot(\overline{P_B(x)} \vee P_C(x)) \equiv 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \overline{P_A(x)}\cdot\overline{P_B(x)} \vee P_B(x)\cdot\overline{P_B(x)} \vee \overline{P_A(x)}P_C(x) \vee P_B(x)\cdot P_C(x) \equiv 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \overline{P_A(x)}\cdot\overline{P_B(x)} \vee \overline{P_A(x)}\cdot P_C(x) \vee \overline{P_A(x)}P_C(x) \vee P_B(x)\cdot P_C(x) \equiv 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \overline{P_A(x)}\underbrace{(\overline{P_B(x)} \vee P_C(x))}_{\equiv 1 \text{ по усл.}} \vee \underbrace{(\overline{P_A(x)} \vee P_B(x))}_{\equiv 1 \text{ по усл.}}\cdot P_C(x) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \overline{P_A(x)} \vee P_C(x) \equiv 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow P_A(x) \to P_C(x) \equiv 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow A \subset C.$$

3. $$\left.\begin{array}{l} A \subset B \Longleftrightarrow A \setminus B = \varnothing \\ B \subset A \Longleftrightarrow B \setminus A = \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing \Longleftrightarrow A \triangle B = \varnothing \Longleftrightarrow A = B. \quad ◀$$

Множество всех подмножеств множества A обозначают 2^A. Ясно, что $\varnothing \in 2^A$ и $A \in 2^A$. Они называются несобственными подмножествами множества A. Остальные подмножества (если они есть) называются собственными.

Пример 2.8. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Ясно, что
$2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Докажите самостоятельно, что $A = B \Longleftrightarrow A \triangle B = \varnothing$.
2. Докажите, что пустое множество единственно.
3. Докажите, что нельзя выразить $\setminus$ через $\triangle$.
4. Диаграммы Венна являются лишь хорошей иллюстрацией и способом построения контрпримеров, а не методом доказательства равенств в теории множеств.

2.4 Отображения. Образ и прообраз множества при отображении. Свойства образов и прообразов

Отображение (синоним — функция) — термин, знакомый по средней школе. В этом параграфе мы уточним понятие отображения как тройки объектов: двух множеств и правила, сопоставляющего элементам первого множества элементы второго множества, и определим два новых понятия, связаных с отображениями, — образ и прообраз множества при отображении.

Пусть X и Y — множества, f — отображение X в Y, т. е. правило, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ вполне определенный элемент $f(x) \in Y$. Если задано отображение из X в Y, будем писать $f : X \to Y$.

Последняя запись «$f : X \to Y$» и означает, что под отображением мы понимаем тройку (X, Y, f).

Напомним, что два отображения $f_1 : X_1 \to Y_1$ и $f_2 : X_2 \to Y_2$ считают равными, если
$$X_1 = X_2, \ Y_1 = Y_2$$
и $f_1 = f_2$ (т. е. для любого $x \in X_1 (= X_2)$ имеет место равенство $f_1(x) = f(x_2)$).

Определение 2.14 *Пусть $f : X \to Y$, $B \subset Y$. Прообразом множества B при отображении f называется множество $f^{-1}(B) (\subset X)$, определяемое следующим:*
$$x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B.$$

Определение 2.15 *Пусть $f : X \to Y$, $A \subset X$. Образом множества A при отображении f называют множество $f(A)$ $(\subset Y)$, определяемое следующим: $y \in f(A) \Longleftrightarrow f^{-1}(\{y\}) \cap A \neq \varnothing$.*

Пример 2.9. Рассмотрим отображение синус: $R \to R$. Ясно, что
$$\sin^{-1}([0; 2]) = \{[2\pi n; \pi + 2\pi n]; \ n \in \mathbb{Z}\},$$
$$\sin((0; \pi/4)) = (0; \sqrt{2}/2);$$
$$\sin^{-1}((-3; -2]) = \varnothing.$$

Теорема 2.8 (свойства образов и прообразов) *Пусть $f : X \to Y$; $A_1, A_2 \subset X$; $B_1, B_2 \subset Y$; тогда имеют место соотношения:*

1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

▶ 1 ▶ Пусть $y \in f(A_1 \cup A_2) \Longleftrightarrow f^{-1}(\{y\}) \cap (A_1 \cup A_2) \neq \varnothing$
$$\Longleftrightarrow \left(f^{-1}(\{y\}) \cap A_1\right) \cup \left(f^{-1}(\{y\}) \cap A_2\right) \neq \varnothing \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left(f^{-1}(\{y\}) \cap A_1 \neq \varnothing\right) \vee \left(f^{-1}(\{y\}) \cap A_2 \neq \varnothing\right) \Longleftrightarrow$$
$$(y \in f(A_1)) \vee (y \in f(A_2)) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2). \ ◀_1$$

[2] ► Пусть $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \iff$

$$\iff (f(x) \in B_1) \vee (f(x) \in B_2) \iff$$
$$\iff (x \in f^{-1}(B_1)) \vee (x \in f^{-1}(B_2)) \iff$$
$$\iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \blacktriangleleft_2$$

[3] ► Пусть $y \in f(A_1 \cap A_2) \iff f^{-1}(\{y\}) \cap (A_1 \cap A_2) \neq \varnothing \iff$

$$\iff (f^{-1}(\{y\}) \cap A_1) \cap (f^{-1}((y)) \cap A_2) \neq \varnothing \overset{(!)}{\Longrightarrow}$$
$$\Longrightarrow (f^{-1}(\{y\}) \cap A_1 \neq \varnothing) \wedge (f^{-1}(\{y\}) \cap A_2 \neq \varnothing) \iff$$
$$\iff (y \in f(A_1)) \wedge (y \in f(A_2)) \iff$$
$$\iff y \in f(A_1) \cap f(A_2). \blacktriangleleft_3$$

[4] ► Пусть $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \iff$

$$\iff (f(x) \in B_1) \wedge (f(x) \in B_2) \iff$$
$$\iff (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge (x \in f^{-1}(B_2)) \iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \blacktriangleleft_4$$

Приведем пример такого отображения, для которого $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ (т. е. когда $\subset$ строгое):

$$\sin : R \to R; \quad A_1 = [0; \pi/2]; \quad A_2 = [2\pi; 2\pi + \pi/2];$$
$$\sin(A_1) = [0; 1]; \quad \sin(A_2) = [0; 1];$$
$$\sin(A_1) \cap \sin(A_2) = [0; 1]; \quad \sin(A_1 \cap A_2) = \sin(\varnothing) = \varnothing;$$
$$\varnothing \subset [0; 1].$$ ◄

Композиция отображений

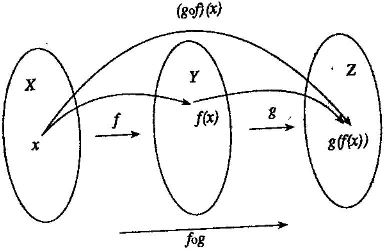
Определение 2.16 *Пусть $f : X \to Y$, $Y \to Z$. Композицией отображений f и g (сложным отображением) называется отображение $g \circ f : X \to Z$, определяемое следующим:*

$$(g \circ f)(x) \overset{def}{=} g(f(x)).$$

Теорема 2.9 (ассоциативность композиции) *Если $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$, то $\forall x (\in X)$*

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x). \tag{2.4}$$

Рис. 2.8: иллюстрирует определение 2.16



►

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)));$$
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$ ◄

т. е. левая часть (2.4) равна правой части.

Замечания и вопросы в конце параграфа

? !

1. Запись $f^{-1}(B)$ нужно воспринимать как цельный символ и не путать с обратным отображением (которое не всегда существует). Однако когда f — обратимое отображение, прообраз B при отображении f совпадает с образом B при отображении f^{-1}.

2. Приведите пример такого отображения, для которого образ пересечения множеств равен пересечению образов множеств

2.5 Типы отображений. Обратимость и односторония обратимость

Сделаем в начале этого параграфа одно существенное замечание. Типы отображений, введенные в нем — инъективные, сюръективные, биективные, — не дают полной классификации отображений. Существуют отображения, являющиеся «никакими», т. е. неинъективными, несюръективными, небиективными. Однако свойства, связанные с выделенными типами отображений — инъективность, сюръективность, биективность, — чрезвычайно полезны и важны при изучении отображений.

Выделяют три основных типа отображений: сюръективные, инъективные, биективные.

Определение 2.17 *Отображение $f:\ X \to Y$ называется сюръективным, если $\forall y(\in Y)\ f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.*

Определение 2.18 *Отображение $f:\ X \to Y$ называется инъективным, если $\forall x_1(\in X)\ \forall x_2(\in X)\ ((x_1 \neq x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.*

Определение 2.19 *Отображение $f:\ X \to Y$ называется биективным, если оно сюръективно и инъективно.*

Пример 2.10. $\sin : R \to [-1;1]$ — сюръективное отображение, но не инъективное (?).
Пример 2.11. $\sin :\ [-\pi/2;\pi/2] \to R$ — инъективное отображение, но не сюръективное (?).
Пример 2.12. $\sin :\ [-\pi/2;\pi/2] \to [-1;1]$ — биективное отображение.

Теорема 2.10 (о композиции инъективных отображений)
Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — инъективные отображения, то $g \circ f : X \to Z$ — инъективное отображение.

► Пусть $x_1 \neq x_2$, т. к. f — инъективно, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, так как g — инъективно, то $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Последнее означает, что $(g\circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$.

Инъективность композиции доказана. ◀

Теорема 2.11 (о композиции сюръективных отображений)
Если $f:\ X \to Y$ и $g:\ Y \to Z$ — сюръективные отображения, то $g \circ f : X \to Z$ — сюръективное отображение.

► Пусть z — произвольный элемент Z. Так как $g : Y \to Z$ сюръективно, то $g^{-1}(\{z\}) \neq \varnothing \iff$ существует $y_0 \in g^{-1}(\{z\})$ (или, что то же самое, $g(y_0) = z$). Так как f — сюръективное отображение, то $f^{-1}(\{y_0\}) \neq \varnothing$ $\iff$ существует $x_0 \in f^{-1}(\{y_0\})$ (или, что то же самое, $f(x_0) = y_0$). Ясно, что $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0) = z$. Значит, $x_0 \in (g \circ f)^{-1}(\{z\}) \iff$ $(y \circ f)^{-1}(\{z\}) \neq \varnothing$, а это и означает сюръективность $g \circ f$. ◀

Теорема 2.12 (о композиции биективных отображений)
Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — биективные отображения, то $g \circ f : X \to Z$ — биективное отображение.

Ясно, что эта теорема — следствие предыдущих.

Удобно пользоваться (и мы это уже неявно делали при доказательстве теоремы 2.11), следующим равносильным определением сюръективности.

Определение 2.20 *Отображение $f:\ X \to Y$ сюръективно, если уравнение $f(x) = y$, где x — неизвестное, y — параметр, имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра $y \in Y$.*

Определение 2.21 *Пусть X — множество. Тождественным на X отображением называется отображение $e_X :\ X \to X$, определяемое следующим:*

$$e_X(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

Ясно, что тождественные отображения играют роль нейтральных элементов в композиции, т. е. для любого $f : X \to Y$ имеет место

$$f(x) = (e_Y \circ f)(x) = (f \circ e_X)(x), \quad \forall x \in X,$$
$$\text{т. е. } f = e_Y \circ f = f \circ e_X.$$

Определение 2.22 *Отображение $f : X \to Y$ называется обратимым слева (справа), если существует отображение $f_л^{-1} : Y \to X$ ($f_п^{-1} : Y \to X$) такое, что*

$$f_л^{-1} \circ f = e_X \tag{2.5}$$
$$(f \circ f_п^{-1} = e_Y). \tag{2.6}$$

Определение 2.23 *Отображение $f : X \to Y$ называется обратимым, если существует отображение $f^{-1} : Y \to X$ такое, что*

$$f^{-1} \circ f = e_X; \quad f \circ f^{-1} = e_Y. \tag{2.7}$$

Критерии односторонней обратимости и критерий обратимости

Теорема 2.13 (критерий обратимости слева)
Для того, чтобы отображение $f : X \to Y$ было обратимым слева, необходимо и достаточно, чтобы f было инъективным.

► Необходимость. ►

Докажем ее от противного, т. е. предположим, что существует неинъективное отображение $f : X \to Y$, которое обратимо слева. Неинъективность f означает, что существуют такие x_1 и x_2 ($\in X$), что $x_1 \neq x_2$, а $f(x_1) = f(x_2)$

Применим к обеим частям последнего равенства отображение $f_Л^{-1}$ (существование которого мы предположили), тогда

$$f_Л^{-1}(f(x_1)) = f_Л^{-1}(f(x_2)) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (f_Л^{-1} \circ f)(x_1) = (f_Л^{-1} \circ f)(x_2) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow e_X(x_1) = e_X(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

Последнее противоречит выбору x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$). ◄ Необходимость.

Достаточность. ►

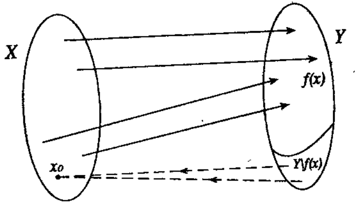
Представим Y в виде $Y = f(X) \cup (Y \setminus f(X))$ и зададим отображение $g : Y \to X$ правилом

$$g(y) = \begin{cases} x \text{ такое, что } f(x) = y, \text{ если } y \in f(X), \\ x_0 \text{ — произвольный фиксированный элемент } X, \\ \quad \text{если } y \in Y \setminus f(X). \end{cases}$$

Ясно, что отображение g и есть левое обратное к f ◄ Достаточность ◄

Суть дела проясняет следующая картинка (см рис 2.9)

Рис. 2.9. Точкам, в которых заканчиваются стрелки, сопоставляются начала стрелок, а точкам, не покрытым стрелками, — произвольная точка x_0 из X



Теорема 2.14 (критерий обратимости справа)
Для того, чтобы отображение $f : X \to Y$ было обратимым справа, необходимо и достаточно, чтобы оно было сюръективно.

► Необходимость. ►

Докажем ее от противного, т. е. предположим, что существует такое несюръективно, не является обратиотображение $f : X \to Y$, которое означает, что существует мым справа. Несюръективность отображения f $y_1 = e_Y(y_1) =$ $y_1 \in Y$ такое, что $f^{-1}((y)) = \varnothing$. С другой стороны, $(f \circ f_П^{-1})(y_1) = f(f_П^{-1}(y_1))$. Последняя цепочка равенства означает, что $x_1 = f_П^{-1}(y_1)$ ($\in X$) принадлежит $f_П^{-1}(\{y_1\})$, а это противоречит тому, что $f_П^{-1}(\{y_1\}) = \varnothing$. ◄ Необходимость.

Достаточность. ►

Сюръективность f означает (см. определение 2.20), что уравнение

$$f(x) = y \tag{2.8}$$

имеет хотя бы одно решение при любом $y \in Y$. Рассмотрим отображение $g : Y \to X$, заданное правилом $g(y) = x$, где x — какое-то решение уравнения (2.8) (которое существует). Очевидно, что это и есть правое обратное к f. ◄ Достаточность. ◄

Теорема 2.15 (критерий обратимости) *Для того, чтобы отображение $f : X \to Y$ было обратимым, необходимо и достаточно, чтобы f было биективным.*

► Необходимость очевидна, так как обратимость отображения означает правую и левую обратимость, а значит, сюръективность и инъективность отображения (см. предыдущие теоремы), т. е. биективность.

Достаточность. ►

Так как отображение f биективно, то оно, в частности, инъективно, и значит, имеет левое обратное отображение $f_Л^{-1} : Y \to X$ такое, что $f_Л^{-1} \circ f = e_X$, а так как f биективно, то оно, в частности, сюръективно, а значит, имеет правое обратное отображение $f_П^{-1} : Y \to X$ такое, что $f \circ f_П^{-1} = e_Y$.

Покажем, что в этом случае

$$f_Л^{-1} = f_П^{-1},$$

что и завершит доказательство достаточности

$$f_Л^{-1} = f_Л^{-1} \circ e_Y = f_Л^{-1} \circ (f \circ f_П^{-1}) =$$

$$(f_Л^{-1} \circ f) \circ f_П^{-1} = e_X \circ f_П^{-1} = f_П^{-1}. \quad ◄ \text{ Достаточность.}$$ ◄

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Покажите, что теоремы, обратные к теоремам о композиции, не верны.
2. Приведите пример, показывающий, что $f_Л^{-1}$ может быть не единственным.
3. То же самое, что и 2, только для $f_П^{-1}$.
4. Возможны ли варианты построения $f_Л^{-1}$, отличные от приведенного в доказательстве критерия обратимости слева?
5. Приведем мнемоническое правило, позволяющее запомнить, за обратимость с какой стороны отвечает инъективность, а с какой стороны — сюръективность. Для этого выпишем алфавитное упорядочение слов «инъективность» и «сюръективность». То, что оказалось слева, отвечает за обратимость слева, а то, что оказалось справа, отвечает за обратимость справа.

2.6 Семейства множеств и операции над семействами

В этом параграфе операции над множествами — дополнение, объединение и пересечение — будут распространены на случай, когда мы имеем дело с бесконечными наборами (семействами) множеств. Средством для этого являются операции навешивания кванторов, так как они являются обобщением $\wedge$ и $\vee$ (см. теорему 2.5)

Определение 2.24 *Пусть I — некоторое универсальное множество, J ($\neq \varnothing$) — множество, называемое множеством индексов. (Оно может и не являться подмножеством универсального множества I.)*

Семейством множеств над универсальным множеством I, индексированным множеством индексов J, называется отображение множества J в 2^I. (Здесь 2^I — множество всех подмножеств множества I.)

Таким образом, задать семейство — значит указать правило, сопоставляющее каждому индексу i из J вполне определенное подмножество универсального множества I.

Для обозначения семейства используется запись, аналогичная обозначениям, применяемым для последовательностей. А именно: подмножество, соответствующее индексу i, обозначают не $f(i)$, а A_i, а все семейство обозначают не $f : J \to 2^I$, а $\{A_i\}_{i \in J}$.

Пример 2.13. Пусть $J = R_+ = [0; \infty)$, $I = \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел). Рассмотрим семейство $\{A_r\}_{r \in R_+}$ над $\mathbb{C}$, заданное правилом

$$A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}.$$

Множества A_0 и A_r ($r \neq 0$) изображены на рис. 2.10.

Пример 2.14. Пусть $J = [0; 2\pi)$, $I = \mathbb{C}$. Рассмотрим семейство $\{B_\alpha\}_{\alpha \in [0, 2\pi)}$ над $\mathbb{C}$, заданное правилом

$$B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \alpha\}, \quad (\arg 0 \text{ — любой}).$$

На рис. 2.11 изображены множества B_0 и B_α ($\alpha \neq 0$).

Пример 2.15. Пусть $J = [0;1]$; $I = C([0;1])$ — множество непрерывных на отрезке функций. Рассмотрим семейство $\{C_i^0([0;1])\}_{i \in [0,1]}$ над $C([0;1])$, заданное правилом

$$C_i^0([0;1]) = \{f \in C([0;1]) \mid f(i) = 0\}.$$

На рисунке 2.12 условно изображено множество $C_{1/2}^0([0;1])$ — «паучок» всех графиков непрерывных на $[0;1]$ функций, обращающихся в 0 в точке $x = 1/2$.

Пример 2.16. Пусть $X (\neq \varnothing)$ — произвольное множество, $J = I = X$. Рассмотрим семейство $(\{x\})_{x \in X}$ (семейство всех одноэлементных подмножеств X.

Операции над семействами

Сейчас мы определим три операции над семействами множеств: дополнение к семейству, объединение семейства, пересечение семейства. Эти операции над семействами будем вводить, как и операции над множествами, используя связь между множествами и предикатами.

Пусть задано семейство $\{A_i\}_{i \in J}$ над универсальным множеством I.

Рассмотрим предикат $P_{A_i}(x) :=$ «$x \in A_i$, $x \in I$, $i \in J$». Это двуместный предикат переменных x и i, т. е. семейство множеств — то же самое, что двуместный предикат, где одна переменная — из множества индексов, а другая — из универсального множества.

Определение 2.25 *Дополнением к семейству $\{A_i\}_{i \in J}$ над I называется семейство над I, обозначаемое $\{\bar{A}_i\}_{i \in J}$, определяемое предикатом*

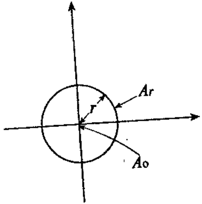
$$P_{\bar{A}_i}(x) \overset{def}{\equiv} \overline{P_{A_i}(x)}.$$

Вернемся к примеру 2.5. Ясно, что $\overline{A_r} = \{z \in C \mid |z| \neq r\}$.

Определение 2.26 *Объединением семейства $\{A_i\}_{i \in J}$ над J называется множество, обозначаемое $\bigcup_{i \in J} A_i$, определяемое следующим*

$$P_{\bigcup\limits_{i \in J} A_i}(x) \overset{def}{\equiv} \exists i \; P_{A_i}(x).$$

Рис 2.10:



Ясно, что в примере 2.13

$$\bigcup_{r \in R_+} A_r = C.$$

В примере 2.14

$$\bigcup_{\alpha \in [0,2\pi)} B_\alpha = C.$$

В примере 2.15

$$\bigcup_{i \in [0,1]} C_i^0([0;1]) = C^0([0;1]).$$

Здесь $C^0([0;1])$ — множество всех непрерывных на $[0;1]$ функций, обращающихся в ноль хотя бы в одной точке отрезка $[0;1]$.

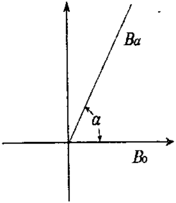
В примере 2.16

$$\bigcup_{x \in X} \{x\} = X.$$

Определение 2.27 *Пересечением семейства $\{A_i\}_{i \in J}$ над I называется множество, обозначаемое $\bigcap_{i \in J} A_i$, определяемое следующим:*

$$P_{\bigcap\limits_{i \in J} A_i}(x) \overset{def}{\equiv} \forall i \; P_{A_i}(x).$$

Рис. 2.11:



Ясно, что в примере 2.13

$$\bigcap_{r\in R_1} A_r = \varnothing.$$

В примере 2.14

$$\bigcap_{\alpha\in[0;2\pi)} B_\alpha = \{0\}.$$

В примере 2.15

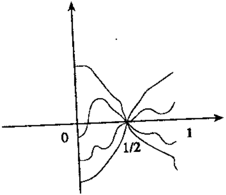
$$\bigcap_{i\in[0;1]} C_i^0([0;1]) = \{0|_{[0,1]}\},$$

где через $0|_{[0;1]}$ обозначена функция, тождественно равная 0 во всех точках отрезка $[0;1]$.

В примере 2.16

$$\bigcap_{x\in X}{}^{,} = \begin{cases} X, & \text{если } X \text{ — одноэлементное множество;} \\ \varnothing, & \text{если } X \text{ содержит более одного элемента.} \end{cases}$$

Рис. 2.12:



Теорема 2.16 (законы де Моргана для семейств) *Для любого семейства справедливо:*

1) $\overline{\bigcup_{i\in J} A_i} = \bigcap_{i\in J} \overline{A_i}$;

2) $\overline{\bigcup_{i\in J} A_i} = \bigcap_{i\in J} \overline{A_i}$.

Замечания и вопросы в конце параграфа

[?] [!]

1. Самостоятельно докажите законы де Моргана для семейств.
2. Пусть у нас есть конечный набор $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (все они подмножества одного и того же универсального множества). Рассмотрим множество $J = [1;n]_N = \{1;2;\ldots;n\}$. Тогда набор множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно рассматривать как семейство $(A_i)_{i\in J}$. При этом, очевидно (см. теорему 2.4), выполнено

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i\in J} A_i;$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i\in J} A_i.$$

3. Из замечания 2 следует, что операции пересечения и объединения семейств обобщают обычные операции пересечения и объединения на случай семейств индексированных бесконечным множеством.

4. Пусть $\{A_i\}_{i\in N}$ — семейство множеств, и $A_1 \supset A_2 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$.
Докажите, что

$$\bigcap_{i\in N} A_i = \bigcap_{i\in N} A_{2i} = \bigcap_{i\in N} A_{3i} = \dots .$$

5. Справедливы ли равенства.

а) $A \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \setminus A_i)$;

б) $A \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \setminus A_i)$;

в) $\bigcup_{i\in J}\left(\bigcap_{i\in J} A_{ij}\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{i\in I} A_{ij}\right)$;

г) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \bigcup B_j)$;

д) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \bigcap B_j)$.

Глава 3

Элементы комбинаторики

Спросил меня голос
В пустыне дикой:
— Много ли в море
Растет земляники?
— Столько же, сколько
Селедок соленых
Растет на березах
И елках зеленых.

3.1 Что такое комбинаторика? Число элементов во множестве. Правило суммы

Основным вопросом этой главы является вопрос «Сколько?» в различных варивнтах, а основным способом ответа на этот вопрос является установление взаимно однозначного соответствия (осуществляемого биективным отображением) между множеством, в котором нам предстоит подсчитать количество элементов (т. е. ответить на вопрос «Сколько?»), и множеством, в котором количество элементов нам известно. Этот принцип подсчета — основной принцип комбинаторики — прекрасно изложен С. Я. Маршаком в его переводах из английской детской поэзии. Эти строки мы и предпослали главе «Элементы комбинаторики» в качестве эпиграфа.

Комбинаторика — раздел математики, посвященный способам подсчета числа элементов в конечных множествах, — имеет широкий круг приложений: теория вероятностей, теория информации, теория надежности, алгебраическая топология и алгебра и, наконец, математический анализ. Особенно полезными являются сами комбинаторные рассуждения. Они позволяют обойтись без излишнего формализма, и там, где эти принципы срабатывают, получаются красивые и понятные результаты. Ярким примером эффективности комбинаторного подхода является теория бинома Ньютона. Все красивые результаты — различные соотношения между биномиальными коэффициентами — имеют простое комбинаторное истолкование. Некоторые из этих соотношений будут приведены в нашем курсе.

Число элементов в конечном множестве. Основной принцип комбинаторики

В качестве утверждений, принимаемых без доказательства, возьмем следующие:

1. Отрезок натурального ряда $[1;n]_N = \{1;2;3;\ldots,n\}$ содержит n элементов.

2. Если A и B — множества и существует биективное отображение

$$\varphi:\ A \to B, \text{то } |A| = |B|,$$

где $|A|$ — обозначение числа элементов во множестве A.

3. $|\varnothing| = 0$.

Вторая аксиома носит название «Основной принцип комбинаторики» и является главным рабочим инструментом комбинаторики (соответственно искусство решения комбинаторных задач и состоит в определении множеств A, B и построении биективного отображения φ, реализующего основной принцип комбинаторики).

Определение 3.1 *Говорят, что отрезок натурального ряда $[1;n]_N$ нумерует множество A, если существует биективное отображение φ : $[1;n]_N \to A$.*

Если задана нумерация φ множества A, то применяют следующие обозначения:

$$\varphi(1) \stackrel{def}{=} a_1;\ \varphi(2) \stackrel{def}{=} a_2; \ldots; \varphi(n) \stackrel{def}{=} a_n.$$
$$A = \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n\}.$$

Утверждение 3.1 *Если отрезок $[1;n]_N$ нумерует множество A, то $|A| = n$.*

Ясно, что оно является прямым следствием определения нумерации и основного принципа комбинаторики.

Определение 3.2 *Говорят, что множество A конечно, если существует такое натуральное число n_A, что отрезок $[1;n_A]_N$ нумерует A, при этом $|A| = n_A$.*

Утверждение 3.2 *Число элементов в конечном множестве определено однозначно.*

► Нам нужно показать, что число n_A, фигурирующее в определении 3.2, для каждого конечного множества A единственно. Доказательство проведем от противного, т. е. предположим, что существует такое множество A, для которого существует по крайней мере два различных нумерующих отрезка

$$\varphi_1:\ [1;(n_A)_1]_N \to A;$$
$$\varphi_2:\ [1;(n_A)_2]_N \to A,$$

где φ_1, φ_2 — биективные отображения и

$$(n_A)_1 \neq (n_A)_2.$$

Не нарушая общности, будем считать, что

$$(n_A)_1 < (n_A)_2.$$

Так как φ_2 — биективное отображение, то оно обратимо, и обратное отображение φ_2^{-1} : $[1;(n_A)_2]_N$ — биективно.

Рассмотрим биективное отображение

$$\psi:\ [1;(n_A)_1]_N \to [1;(n_A)_2]_N; \quad \psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1.$$

Обозначим через

$$M_1 = \max\{\psi(1); \psi(2); \dots; \psi((n_A)_1)\}.$$

Возможны два случая:

$$\text{а) } M_1 = (n_A)_2; \quad \text{б) } M_1 < (n_A)_2.$$

В случае б) $\psi^{-1}(\{(n_A)_2\}) = \varnothing$, и мы получаем противоречие с биективностью отображения ψ.

В случае а) обозначим через $i_{M_1} (\in [1; (n_A)_1]_N)$ такой номер, что $\psi(i_{M_1}) = M_1 = (n_A)_2$, и рассмотрим отображение

$$\psi: \ [1; (n_A)_1]_N \setminus \{i_{M_1}\} \to [1; (n_A)_2 - 1]_N,$$

равное

$$\psi|_{[1;(n_A)_1]_N \setminus \{i_{M_1}\}}.$$

Очевидно, отображение ψ_1 биективно. Применив к ψ_1 те же рассуждения, что мы применили к ψ, мы либо получим противоречие, либо построим биективное отображение

$$\psi_2: \ [1; (n_A)_1]_N \setminus \{i_{M_1}; i_{M_2}\} \to [1; (n_A)_2 - 2]_N$$

и т. д. Тогда мы за $(n_A)_1 - 1$ шагов либо получим противоречие, либо построим биективное отображение $\psi_{(n_A)_1 - 1}: \ X \to Y$, где

$$X = [1; (n_A)_1]_N \setminus \{i_{M_1}; i_{M_2}; \dots; i_{M_{(n_A)_1 - 1}}\}$$
$$Y = [1; (n_A)_2 - (n_A)_1 + 1]_N.$$

Очевидно, $|X| = 1$; $|Y| \geq 2$, что противоречит биективности $\psi_{(n_A)_1 - 1}$. ◄

3.1.1 Правило суммы

Теорема 3.1 *Пусть A и B — конечные непересекающиеся множества (т. е. $A \cap B = \varnothing$), тогда*

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{3.1}$$

► Зафиксируем $\varphi_A: \ [1; |A|]_N \to A$, $\varphi_B: \ [1; |B|]_N \to B$ нумерации A и B соответственно и рассмотрим отображение

$$\varphi_{A \cup B}: \ [1; |A| + |B|]_N \to A \cup B,$$

заданное правилом:

$$\varphi_{A \cup B}(i) = \begin{cases} \varphi_A(i), & \text{если } 1 \leq i \leq |A|, \\ \varphi_B(i - |A|), & \text{если } |A| < i \leq |A| + |B|. \end{cases}$$

Очевидно, $\varphi_{A \cup B}$ — биективное отображение, тогда на основании основного принципа комбинаторики получаем

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$ ◄

Теорема 3.2 (следствие предыдущей) *Пусть A, B — конечные множества, тогда*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{3.2}$$

► Очевидно, $|A \cup B| = A \cup (B \setminus A)$, и множества A и $B \setminus A$ не пересекаются, тогда из равенства (3.1) получим

$$|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|. \tag{3.3}$$

Очевидно, $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, и множества $A \cap B$ и $B \setminus A$ не пересекаются, тогда из равенства (3.1) получаем

$$|B| = |A \cap B| + |B \setminus A|, \tag{3.4}$$

подставляя выражение для $|B \setminus A|$ из (3.4) в (3.3), получаем

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$ ◄

Теорема 3.3 (правило включении-исключения) *Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — конечные множества, тогда*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + \\ &+ |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + \\ &+ |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - \dots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = \\ &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

В правой части формулы (3.5), *называемой формулой включения-исключения, стоят с чередующимися знаками скобки, содержащие всевозможные попарные пересечения множеств* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *пересечения троек множеств и т. д.*

► Докажем формулу включения-исключения по индукции.

Справедливость ее для случая $n = 2$ доказана в предыдущей теореме Рассмотрим индуктивный переход, т. е. предположим, что формула верна для любых $(n-1)$ множеста и покажем, что тогда она верна и для n множеств.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n| =$$

$$\overset{\text{теорема 3.2}}{=} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}| + |A_n| -$$

$$-|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n-1} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-2}|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| +$$

$$|A_n| - \Bigg|\underbrace{(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)}_{\text{здесь } (n-1) \text{ скобка}}\Bigg| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n-1} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-2}|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| -$$

$$\Bigg(\sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| - \sum_{|(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n)|} +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n) \cap (A_k) \cap A_n| - \ldots$$

$$+(-1)^{n-2}|(A_1 \cap A_n) \cap (A_2 \cap A_n) \cap \cdots \cap (A_{n-1} \cap A_n)|\Bigg) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Здесь мы воспользовались равенствами:

$$(A_1 \cap A_n) \cap (A_2 \cap A_n) = A_1 \cap A_2 \cap A_n$$

$$(A_1 \cap A_n) \cap (A_2 \cap A_n) \cap (A_3 \cap A_n) = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_n$$

$$\ldots$$

$$(A_1 \cap A_n) \cap (A_2 \cap A_n) \cap \cdots \cap (A_{n-1} \cap A_n) = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n. \quad ◄$$

Теорема 3.4 (правило суммы) *Если* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *— конечные попарно непересекающиеся множества (т. е.* $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$*), то*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|. \tag{3.6}$$

Ясно, что это тривиальное следствие из предыдущей теоремы.

Замечания и вопросы в конце параграфа

? !

1. Дайте определение бесконечного множества (т. е. не являющегося конечным).

2. В конце доказательства утверждения 3.2 мы привели без доказательства утверждение о том, что не существует биективного отображения $\varphi : X \to Y$, если $|X| = 1$, а $|Y| \geq 2$. Докажите его самостоятельно.

3. Справедливо ли следующее утверждение: «Отображение $|\ |$, действующее из множества конечных множеств во множество Z_+ неотрицательных целых чисел, сопоставляющее конечному множеству число элементов в нем, сюръективно»?

4. В студенческой группе 25 человек, 13 из них знают английский язык, 12 — немецкий, 13 — французский, 4 человека знают английский и французский, 6 — английский и немецкий, 5 — немецкий и французский.

Сколько студентов знают все три языка?

3.2 Декартово произведение множеств; множество степень

Определение 3.3 *Декартовым*[1] *произведением множеств X и Y называется множество, обозначаемое $X \times Y$, элементами которого являются упорядоченные пары $(x; y)$, где $x \in X$, $y \in Y$. Равенство упорядоченных пар понимается в следующем смысле:*

пусть

$$z_1 = (x_1; y_1) \text{ и } z_2 = (x_2; y_2)\ (z_1, z_2 \in X \times Y)$$
$$z_1 = z_2 \overset{def}{\iff} (x_1 = x_2) \& (y_1 = y_2).$$

Теорема 3.5 *Если X и Y — конечные множества, то $X \times Y$ — конечное множество и*

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| \tag{3.7}$$

► Ясно, что в случае, когда одно из множеств X, Y пусто, то и $X \times Y$ пусто и (3.7) тривиально выполнено. Рассмотрим случай, когда X и Y — непустые множества. Зафиксируем в X нумерацию

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}\}.$$

Ясно, что $X \times Y = \bigcup_{i=1}^{|X|} \{x_i\} \times Y$ и множества $\{x_i\} \times Y$ попарно не пересекаются, тогда по правилу суммы имеем:

$$|X \times Y| = \sum_{i=1}^{|X|} |\{x_i\} \times Y|. \tag{3.8}$$

[1] Декарт Рене (1596–1650) — выдающийся французский математик и философ, сын судьи из провинциального городка на юго-западе Франции. Окончил иезуитский колледж, после чего посвятил два года изучению математики. Затем путешествовал и пытался стать военным, однако слабое здоровье не позволило осуществить ему эти юношеские мечты. После окончания небольшой военной карьеры и путешествия по Европе Декарт провел несколько лет в Париже, где занимался изучением математики и философии, а также конструированием оптических приборов. После этого периода обучения Декарт провел свыше 20 лет в Голландии, где им были сделаны основные математические и философские открытия. Основным для нас в трудах Декарта является метод координат, а значит, все то, что теперь включают в аналитическую геометрию и линейную алгебру. В 1649 г. Р. Декарт был приглашен в Швецию королевой Кристиной для обучения ее философии. Климат Швеции — земли между скалами и льдами (по выражению Декарта) — оказался для него неподходящим. Суровой зимой 1650 г. Р. Декарт скончался от пневмонии.

Рассмотрим отображение $f_i : \{x_i\} \times Y \to Y$, действующее по правилу

$$f_i((x_i; y)) = y.$$

Ясно, что f_i — биективное отображение, тогда по основному принципу комбинаторики получаем

$$|\{x_i\} \times Y| = |Y|. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в (3.8), получим:

$$|X \times Y| = \sum_{i=1}^{|X|} |Y| = |X| \cdot |Y|.$$

◄

Определение 3.4 *Пусть X — множество и $n \in N$. Определим декартовы степени множества X следующим:*

$$X^1 = X;$$
$$X^2 = X \times X;$$
$$\ldots \qquad X^n = X^{n+1} \times X.$$

Замечание. Традиционно n-я декартова степень множества $R(\mathbb{C}, \mathbb{Z})$ обозначается не $R^n(C^n, \mathbb{Z}^n)$, а $R_n(\mathbb{C}_n, \mathbb{Z}_n)$; в последнее время входят в употребление обозначения $R^n(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}^n)$, соответствующие определению 3.4. •

Теорема 3.6 *Если X — конечное множество, то*

$$|X^n| = |X|^n. \tag{3.10}$$

Ясно, что теорема 3.6 — следствие теоремы 3.5.

Задача 3.1. Из города A в город B ведет три дороги, а из города B в город C — 4 дороги. Сколькими способами можно добраться из A в C через B?

► Задача, конечно, очень проста. Однако она демонстрирует особенности задач по комбинаторике, которые создают трудности при решении. Укажем на главную из этих особенностей.

Задача первоначально формулируется не как математическая, а как задача реальной жизни, и поэтому требуется ее переработка в математическую задачу. При этом нужно отделить существенные факторы от несущественных. (Как правило, нужно четко уяснить, что понимается под способом.) Действительно, если при подсчете способов мы будем учитывать время суток, скорость и способ перемещения (пешком, на автомобиле, велосипеде и т. п.), то задача становится чрезвычайно простой, а ответ ее вряд ли устроит составителя задачи. Ясно, что при учете указанных факторов ответ задачи: «Имеется бесконечное множество способов». Если же отвлечься от всех указанных факторов и под способом попасть из A в C через B понимать упорядоченную пару (дорога, по которой перемещаемся из A в B; дорога, по которой перемещаемся из B в C), то решение задачи можно получить, используя понятие декартова произведения. Обозначим:

AB — множество дорог, ведущих из A в B;

BC — множество дорог, ведущих из B в C.

Тогда математическая задача, к которой свелась исходная задача, выглядит так: «Найти число элементов в декартовом произведении $AB \times BC$».

Ясно, что

$$|AB \times BC| = |AB| \cdot |BC| = 3 \cdot 4 = 12.$$

Ответ: 12 способов. ◄

Задача 3.2. Из города A в город B ведет три дороги, из города B в город C — четыре; имеется также пять дорог из A в C, не проходящих через B.

Сколькими способами можно попасть из A в C, используя указанные дороги?

► Множество всех способов добраться из A в C разобьем на непересекающиеся подмножества I и II, отнеся к первому способы добраться из A в C через B, а ко второму — способы добраться из A в C, минуя B. Тогда по правилу суммы «число способов попасть из A в C» =

$$= |I| + |II| = |AB \times BC| + |II| = 3 \cdot 4 + 5 = 17.$$

Ответ: 17 способов. ◄

Определение 3.5 *Пусть X и Y — непустые множества. Обозначим через Y^X множество отображений, действующих из X в Y, т. е.*

$$f \in Y^X \iff f : X \to Y.$$

Множество Y^X называют множеством степень.

Мы хотим доказать теорему о числе элементов во множестве степень, когда X и Y — конечные множества. Доказательство опирается на две леммы.

Лемма 3.1 *Пусть X и Y — конечные непустые множества и $|X| = 1$, тогда*

$$|Y^X| = |Y|. \tag{3.11}$$

► Зафиксируем в X и Y нумерации —

$$X = \{x_1\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{|Y|}\}.$$

Занумеруем элементы множества Y^X условием:

$$f_1(x_1) = y_1, \; f_2(x_1) = y_2, \; \ldots, \; f_{|Y|}(x_1) = y_{|Y|}.$$

Ясно, что нумерующий отрезок — $|1; |Y||_N$. ◄

Лемма 3.2 *Пусть X, Y — конечные непустые множества, $|X| \geq 2$, $x \in X$, тогда*

$$|Y^X| = |Y| \cdot |Y^{X \setminus \{x\}}|. \tag{3.12}$$

► Зафиксируем в X и Y нумерации, выбрав такую нумерацию множества X, при которой $x = x_{|X|}$.

Множество Y^X представим в виде объединения попарно непересекающихся множеств A_i $(i = 1, 2, \ldots, |Y|)$, отнеся f $(\in Y^X)$ ко множеству A_i, если

$$f(x_{|X|}) = y_i.$$

По правилу суммы (равенство (3.6)) получаем:

$$|Y^X| = |\bigcup_{i=1}^{|Y|} A_i| = \sum_{i=1}^{|Y|} |A_i|. \tag{3.13}$$

Рассмотрим одно из множеств A_i. Каждое отображение $f \in A_i$ однозначно определяется своим ограничением (сужением) на множество $X \setminus \{x_{|X|}\}$. (Стрелочная диаграмма любого отображения $f \in A_i$ содержит стрелку, ведущую из $x_{|X|}$ в y_i) (см. рис. 3.1).

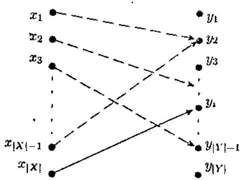


Рис. 3.1: Стрелки, указанные пунктиром, — ограничение f на $X \setminus \{x_{|X|}\}$.

Ясно, что

$$|A_i| = |Y^{X \setminus \{x_{|X|}\}}| = |Y^{X \setminus \{x\}}|. \tag{3.14}$$

Подставляя (3.14) в (3.13), получаем

$$|Y^X| = \sum_{i=1}^{|Y|} |A_i| = \sum_{i=1}^{|Y|} |Y^{X \setminus \{x\}}| = |Y| \cdot |Y^{X \setminus \{x\}}|.$$

◀

Теорема 3.7 *Пусть X и Y — конечные непустые множества, тогда Y^X — конечное множество и*

$$|Y^X| = |Y|^{|X|}. \tag{3.15}$$

► Проведем доказательство методом математической индукции, взяв в качестве параметра индукции число элементов во множестве X.

1-й шаг (случай $|X = 1|$). Применяя лемму 3.1, имеем:

$$|Y^X| = |Y| = |Y|^1 = |Y|^{|X|}.$$

2-й шаг (индуктивный переход). Допустим, что утверждение теоремы справедливо для любого n-элементного множества. Докажем, что в этом случае оно справедливо и для множества X такого, что $|X| = n + 1$. Зафиксируем в X произвольный элемент x и применим лемму 3.2.

$$|Y^X| = |Y| \cdot |Y^{X \setminus \{x\}}|.$$

Множество $X \setminus \{x\}$ содержит n элементов и к $Y^{X \setminus \{x\}}$ применимо предположение индукции, тогда

$$|Y^X| = |Y| \cdot |Y^{X \setminus \{x\}}| = |Y| \cdot |Y|^{|X \setminus \{x\}|} = \\ = |Y| \cdot |Y|^{|X|-1} = |Y|^{|X|}.$$

Индуктивный переход, а значит, и вся теорема доказаны. ◀

Задача 3.3. В НИИ работает 4 курьера — A, B, C, D. Сколько существует способов разослать 7 писем в 7 различных организаций, если доставка осуществляется только курьерами, работающими в НИИ?

► Ясно, что мы не учитываем время суток, погодные условия, скорость доставки и т. п. Каждый способ доставки однозначно определяется указанием для каждого письма, какой из курьеров его доставляет. Т. е. способ доставки — отображение из множества писем П во множество курьеров К. Тогда «число способов доставки писем» =

$$= |К^П| = |К|^{|П|} = 4^7 = 16384 \text{ способа}.$$ ◀

Задача 3.4. В кабину лифта 9-этажного дома вошло 3 пассажира: A, B, C, каждый из которых может выйти на любом из 8 этажей. Сколькими способами может осуществиться разгрузка лифта?

► Способ разгрузки — это указание, на каком этаже выходит пассажир A, на каком — B, на каком — C, т. е. сопоставление пассажиру этажа, на котором он выходит.

Обозначим через П множество пассажиров, Э — множество этажей выхода. Значит, «число способов осуществления разгрузки лифта» =

$$|Э^П| = |Э|^{|П|} = 8^3 = 512.$$ ◀

Вопросы в конце параграфа

1. Попробуйте самостоятельно составить комбинаторные задачи, сводящиеся к нахождению числа элементов в декартовом произведении множеств и во множестве степень.

2. Справедливы ли теоремы, обратные к теоремам 1–3 этого параграфа, и как они формулируются?

3. Попробуйте доказать коммутативность сложения и умножения натуральных чисел, используя комбинаторный подход.

3.3 Множества инъективиых и биективных отображений. Размещения, перестановки

В этом параграфе мы продолжим изучение множества Y^X, вернее, его подмножеств: множества инъективных отображений — $In\, Y^X$ и множества биективных отображений — $Bi\, Y^X$ (в случае, когда $|X| = |Y|$). Затем будут введены основные комбинаторные понятия — размещения и перестановки.

Множество инъективых отображений

Определение 3.6 *Пусть X, Y — непустые множества. Обозначим через $In\, Y^X$ множество инъективных отображений из X в Y, т. е.*

$$f \in In\, Y^X \Longleftrightarrow f : X \to Y$$

— инъективное отображение.

Теорема 3.8 (критерий непустоты в случае конечных множеств) *Пусть X, Y — конечные непустые множества. Для того, чтобы $In\, Y^X$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы $|Y| \geq |X|$.*

► Необходимость. ►

Так как $In\, Y^X$ непусто, то существует $f : X \to Y$ инъективное отображение. Представим Y в виде

$$Y = f(X) \cup (Y \setminus f(X)).$$

Очевидно,

$$|f(X)| = |X|.$$

Действительно, если рассмотреть отображение $f_1 : X \to f(X)$, заданное правилом $f_1(x) = f(x)$ $(\forall x \in X)$, то f_1 биективно. Тогда на основании основного принципа комбинаторики получаем, что $|X| = |f_1(X)| = |f(X)|$. Множества $f(X)$ и $Y \setminus f(X)$ не пересекаются, поэтому

$$|Y| = |f(X)| + |Y \setminus f(X)| =$$
$$= |X| + |Y \setminus f(X)| \geq |X|. \quad ◄ \text{ Необходимость}$$

Достаточность ►

По условию теоремы, $1 \leq |X| \leq |Y| < \infty$. Зафиксируем нумерации множеств X и Y, т. е.

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_{|X|}\}, \quad Y = \{y_1; y_2; \ldots; y_{|Y|}\}.$$

Рассмотрим отображение $\varphi : X \to Y$, порожденное этими нумерациями, — $\varphi(x_i) = y_i$.

Ясно, что это отображение инъективно, и значит, множество $In\, Y^X$ непусто. ◄ Достаточность ◄

Лемма 3.3 *Пусть X, Y — непустые конечные множества и $1 = |X| \leq |Y| < \infty$, тогда*

$$|In\, Y^X| = |Y|. \tag{3.16}$$

► Очевидно, в случае $|X| = 1$ любое отображение $f : X \to Y$ инъективно, т. е. $In\, Y^X = Y^X$, тогда, используя лемму 3.1 из предыдущего параграфа, получаем

$$|In\, Y^X| = |Y^X| = |Y|. \quad ◄$$

Лемма 3.4 *Пусть X, Y — непустые конечные множества, $1 < |X| \leq |Y| < \infty$ и $x \in X$, тогда*

$$|In\, Y^X| = |Y| \cdot |In\,(Y \setminus \{y\})^{X \setminus \{x\}}|, \tag{3.17}$$

где $y \in Y$.

► Как и при доказательстве леммы 3.2 предыдущего параграфа, зафиксируем в X такую нумерацию, что $x = x_{|X|}$. Представим $In\,Y^X$ в виде объединения попарно непересекающихся множеств B_i $(i = 1, 2, \dots, |Y|)$, отнеся f $(\in In\,Y^X)$ ко множеству B_i, если

$$f(x_{|X|}) = y_i.$$

Используя правило суммы (равенство (3.6)), получаем

$$|In\,Y^X| = \left|\bigcup_{i=1}^{|Y|} B_i\right| = \sum_{i=1}^{|Y|}|B_i|. \tag{3.18}$$

Рассмотрим одно из множеств B_i.

Каждое отображение $f \in B_i$ однозначно определяется своим ограничением на множество $X \setminus \{x_{|X|}\}$. Ясно, что $y_i \notin f(X \setminus \{x_{|X|}\})$ из-за инъективности f. При этом

$$f|_{X\setminus\{x\}} : X \setminus \{x_{|X|}\} \to Y \setminus \{y_i\}$$

— инъективно.

Стрелочная диаграмма любого отображения $f \in Bi$ содержит стрелку, ведущую из $x_{|X|}$ в y_i, а стрелки, ведущие из $X \setminus \{x\}$, ведут в $Y \setminus \{y_i\}$ «инъективно» (см. рис. 3.2).

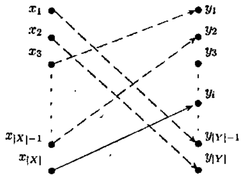


Рис. 3.2: Стрелки, указанные пунктиром, — ограничение f на $X \setminus \{x_{|X|}\}$.

Тогда

$$|B_i| = |In\,(Y \setminus \{y_i\})^{X\setminus\{x_{|X|}\}}|. \tag{3.19}$$

Поскольку нумерация в Y зафиксирована произвольно, а эти рассуждения можно повторить для любой нумерации, можно записать

$$|Bi| = |In\,(Y \setminus \{y_i\})^{X\setminus\{x\}}|, \tag{3.20}$$

где $x \in X$, $y \in Y$.

Подставляя (3.20) в (3.18), получаем

$$|In\,Y^X| = \sum_{i=1}^{|Y|}|Bi| = \sum_{i=1}^{|Y|}|In\,(Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}| = $$
$$= |Y|\cdot|In\,(Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}|, \quad x \in X,\ y \in Y.$$ ◄

Теорема 3.9 *Пусть X, Y — конечные непустые множества, $1 \le |X| \le |Y| < \infty$, тогда*

$$|In\,Y^X| = |Y|\cdot(|Y|-1)\cdot(|Y|-2)\dots(|Y|-|X|+1) = $$
$$= \frac{|Y|!}{(|Y|-|X|)!} \tag{3.21}$$

(В средней части формулы (3.21) содержится $|X|$ сомножителей, первый из которых — наибольший, а каждый следующий меньше предыдущего на 1.)

► Проведем доказательство методом математической индукции, взяв в качестве параметра индукции число элементов во множестве X.

1-й шаг (Случай $|X| = 1$). Применяя лемму 3.3, имеем

$$|In\,Y^X| = |Y|.$$

В правой части, как и требует в этом случае формула 3.21, один сомножитель — $|Y|$.

2-й шаг (индуктивный переход). Допустим, что утверждение теоремы справедливо для любого n-элементного множества. Докажем, что оно справедливо и для множества X такого, что $|X| = n + 1$. Зафиксируем в X произвольный элемент x и применим лемму 3.4.

$$|In\,Y^X| = |Y|\cdot|In\,(Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}|, \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Множество $X \setminus \{x\}$ содержит n элементов, и к $In(Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}$ в последнем равенстве применимо предположение индукции, тогда

$$|In\,Y^X| = |Y| \cdot |In(Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}| =$$
$$= |Y| \cdot (|Y \setminus \{y\}| \cdot (|Y \setminus \{y\}| - 1) \dots (|Y \setminus \{y\}| - |X \setminus \{x\}| + 1)) \overset{|X\setminus\{x\}|=|X|-1}{=} |Y| \cdot ((|Y| - 1) \cdot (|Y| - 2) \dots (|Y| - 1 - |X| + 1 + 1)) =$$
$$= |Y| \cdot ((|Y| - 1) \cdot (|Y| - 2) \dots (|Y| - |X| + 1)).$$

Индуктивный переход, а значит, и вся теорема доказаны. ◄

Задача 3.5. Имеется 15 различных книг и книжная полка, вмещающая 12 книг. Сколько способов заполнить книжную полку, используя имеющиеся книги ?

► Ясно, что мы не учитываем время суток, толщину книг и т. п., однако можно считать, что на полке имеются места (отсеки) для книг — 1-е место, 2-е место, ..., 12-е место. Заполнить полку — это значит сопоставить месту на полке книгу, его (место) заполняющую, т.е заполнить полку — это значит задать отображение из множества мест во множество книг, при этом, поскольку любая книга не может заполнить более одного места, отображения инъективны. Значит, «число способов заполнения книжной полки» =

$$= |In\,K^M| = |K| \cdot (|K| - 1) \dots (|K| - |M| + 1) = 15 \cdot 14 \dots 5 \cdot 4 = \tfrac{15!}{3!} =$$
$$= 217\,945\,728\,000 \text{ способов}$$

Здесь K — множество книг, M — множество мест на книжной полке ◄

Задача 3.6. В кабину лифта 9-этажного дома вошло 3 пассажира, каждый из них может выйти на любом из 8-ми этажей. Сколько способов разгрузки лифта, при которых на каждом этаже выходит не более одного пассажира?

► Ясно, что «число способов разгрузки» =

$$= |In\,Э^{П}| = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

(Обозначения см. в задаче 3.4.) ◄

Определение 3.7 *Пусть X и Y — множества, обозначим через $Bi\,Y^X$ множество биективных отображений множества X во множество Y, т. е.*

$$f \in Bi\,Y^X \Longleftrightarrow f : X \to Y$$

— биективное отображение.

Теорема 3.10 (критерий непустоты $Bi\,Y^X$) *Пусть X, Y — непустые конечные множества. Для того чтобы $B : Y^X \neq \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|X| = |Y|.$$

► Необходимость ►

Пусть $f \in Bi\,Y^X$, тогда, так как f сюръективно, то $f(X) = Y$, а так как f — инъективно, то $|f(X)| = |X|$. Значит, $|X| = |Y|$. ◄ Необходимость

Достаточность ►

Зафиксируем нумерации в X и Y.

$$X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}, \quad Y = \{y_1; y_2; \dots; y_n\},$$

где $n = |X| = |Y|$. Рассмотрим $f : X \to Y$, заданное правилом $f(x_i) = y_i$. Ясно, что f биективно, т. е. $Bi\,Y^X \neq \varnothing$. ◄ Достаточность ◄

Теорема 3.11 *Пусть X, Y — конечные непустые множество и $|X| = |Y|$. Имеет место формула*

$$|Bi\,Y^X| = |X|! = |Y|!, \tag{3.22}$$

где

$$|X|! = |X| \cdot (|X| - 1)(|X| - 2) \dots 2 \cdot 1.$$

► Очевидно, в случае, когда $|X| = |Y|$, имеет место $Bi\,Y^X = In\,Y^X$, значит, по теореме 3.10 имеем:

$$|Bi\,Y^X| = |In\,Y^X| = |Y| \cdot (|Y| - 1) \dots 1 = |Y|! = |X|!. \quad ◄$$

Основные комбинаторные понятия

Определение 3.8 *Пусть X — непустое конечное множество, $|X| = n$, $1 \le m \le n$. Размещениями длины m элементов множества X называют инъективные отображения множества $[1;m]_N$ в X. Обозначим через $\mathbb{A}_X^m$ множество размещений длины m элементов множества X, т. е.*

$$\mathbb{A}_X^m = In\, X^{[1;m]_N}, \tag{3.23}$$

а через $A_{|X|}^m$ — число размещений длины m элементов множества X, т. е.

$$A_{|X|}^m = |\mathbb{A}_X^m| \tag{3.24}$$

Теорема 3.12 *Пусть $1 \le m \le n$, тогда*

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Замечание 1. $0! \stackrel{def}{=} 1$.

► Ясно, что теорема 3.10 — переформулировка теоремы 3.9. ◄

Определение 3.9 *Пусть X — конечное непустое множество, $n = |X|$.*

Перестановками элементов множества X называют биективные отображения множества $[1;n]_N$ в X. Множество перестановок элементов X обозначают $\mathbb{P}_X$, а число перестановок элементов X — через $P_{|X|}$, т. е.

$$P_{|X|} \stackrel{def}{=} |\mathbb{P}_X|. \tag{3.25}$$

Теорема 3.13 *Пусть $1 \le n < \infty$, тогда*

$$P_n = n!. \tag{3.26}$$

► Ясно, что теорема 3.13 — переформулировка теоремы 3.11 ◄

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. В обозначении $A_{|X|}^m$ есть формальный след множества X, в записи A_n^m этот след исчез, можно в этом случае в качестве порождающего множества X такого, что $|X| = n$, взять $X = [1;n]_N$.
2. То же самое, что и замечание 1, только для случая P_n.
3. Сколькими способами можно заполнить полку, вмещающую 17 книг, если она используется студентом, у которого 17 различных книг?
4. Коробка для хранения 12 дискет имеет нумерованные отсеки, вмещающие каждый по одной дискете. Сколько способов заполнения коробки 12-ю различными дискетами? 11-ю различными дискетами? 10-ю дискетами?
5. У студента 15 дискет с различной информацией. Для хранения дискет он приобрел коробку (см. 4). Сколькими способами он может заполнить коробку (так, что в ней все отсеки заполнены)? То же самое, только студент может хранить в коробке $12, 11, 10, \dots, 1, 0$ дискет?
6. У студента 15 дискет с различной информацией. Для хранения дискет он приобрел синюю и красную коробки (см. 4) Сколько способов размещения всех дискет на хранение?

3.4 Бином Ньютона. Сочетания. Сочетания с повторениями

Этот параграф посвящен перечислению подмножеств конечных множеств и приложениям полученных результатов в теории бинома Ньютона.

Начнем этот параграф с бинома Ньютона, т. е. с разложения по степеням a, b бинома $(a+b)^n$ $(n \in Z_+)$.

Ясно, что $(a+b)^0 = 1$;

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m \quad (n \in N). \tag{3.27}$$

Коэффициенты C_n^i называются биномиальными коэффициентами (для них применяют и другие обозначения: $C(n,i)$ и $\binom{n}{k}$). Какой комбинаторный смысл имеют эти коэффициенты? Правая часть формулы (3.27) получается после возведений $a+b$ в n-ю степень (т. е. перемножения скобок $(a+b)$ и приведения подобных членов), т. е. мы имеем произведение скобок

$$(a+b)_1 \cdot (a+b)_2 \cdot \dots \cdot (a+b)_n$$

и должны раскрыть скобки, привести подобные и расположить слагаемые по убывающим степеням a. Коэффициент C_n^m стоит при выражении $a^{n-m}b^m$, слагаемые такого вида получаются при раскрытии скобок в тех случаях, когда из m скобок берется b, из оставшихся $n-m$ скобок — a. Т. е. C_n^m — это число способов выбора m скобок из имеющихся n скобок. Выбирая m скобок из имеющихся n скобок, мы выделяем m-элементное подмножество из n-элементного множества.

Заметим, что из этого комбинаторного истолкования коэффициентов бинома мы, еще не зная формулы для числа m-элементных подмножеств данного n-элементного множества, получаем следующее свойство:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad 0 \le m \le n. \tag{3.28}$$

► a и b входят в разложения бинома равноправно, тогда

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m =$$
$$= (b+a)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m b^{n-m} a^m.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в двух разложениях одного и того же бинома, получаем равенство (3.28). ◄

Определение 3.10 *Пусть X — конечное непустое множество, $0 \le m \le n = |X|$.*

Сочетаниями длины m из элементов множества X называют m-элементные подмножества X. Множество сочетаний длины m из элементов множества X обозначают $\mathbb{C}_X^m$, а их число — $C_{|X|}^m$, т. е.

$$|\mathbb{C}_X^m| = C_n^m.$$

Теорема 3.14 *Пусть $n \ge 1$ и $0 \le m \le n$, тогда*

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{3.29}$$

► Пусть X — какое-нибудь n-элементное множество. Рассмотрим множество

$$In\, X^{[1;m]_N}.$$

Разобьем его на непересекающиеся подмножества по следующему принципу: два инъективных отображения $f, g : [1;m]_N \to X$ относятся к одному и тому же подмножеству разбиения тогда и только тогда, когда

$$f([1;m]_N) = g([1;m]_N)$$

(т. е. если образы области определения совпадают).

Образ области определения — отрезка натурального ряда $[1;m]_N$ при инъективном отображении является m-элементным подмножеством X.

Ясно, что любое m-элементное подмножество X является образом хотя бы одного инъективного отображения отрезка натурального ряда $[1;m]_N$ в X, т. е. множеств разбиения множества $In\, X^{[1;m]_N}$ мы получим столько, сколько существует m-элементных подмножеств X, т. е. C_n^m.

Займемся одним из множеств разбиения. В нем находятся все инъективные отображения отрезка $[1;m]_N$ в X, дающие один и тот же образ области определения. Ясно, что их столько, сколько биективных отображений из $[1;m]_N$ в этот образ, т. е. P_m. Тогда, применяя правило суммы, получим:

$$A_n^m = |\mathbb{A}_X^m| = \left|\sum_{i=1}^{C_n^m} B_i\right| = \sum_{i=1}^{C_n^m} |B_i| = \sum_{i=1}^{C_n^m} P_m = C_n^m \cdot P_m,$$

или

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$ ◄

Замечание. Ясно, что $C_n^0 = |\{\varnothing\}| = 1$, если положить $A_n^0 = 1$, $P_0 = 1$, то формула (3.29) будет справедлива и для случая $m = 0$.

Задача 3.7. В студенческой группе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать из них 3-х человек для участия в профсоюзной конференции факультета?

► Ясно, что представители, выбранные на конференцию, — трехэлементное подмножество множества студентов группы, тогда «число способов выбора» $= \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300$. ◄

Напомним, что если X множество, то 2^X — множество всех его подмножеств. (Напомним, что обозначение «2^X» введено в конце § 2.4.)

Теорема 3.15 *Для любого конечного множества X имеет место равенство*

$$|2^X| = 2^{|X|}. \tag{3.30}$$

► Ясно, что в случае, когда $X = \varnothing$ ($\Longleftrightarrow |X| = 0$), формула (3.30) верна.

Рассмотрим случай, когда X — непустое множество, т. е. когда $n = |X| \geq 1$. Зафиксируем нумерацию X, т. е.

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}.$$

Каждому $A \in 2^X$ ($\Longleftrightarrow A \subset X$) сопоставим $|X|$-разрядное двоичное число

$$d_A = (d_{1A} d_{2A} \ldots d_{|X|A})_2,$$

положив

$$d_{iA} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in A, \\ 0, & \text{если } x_i \notin A. \end{cases}$$

Ясно, что отображение $\varphi : 2^X \to$ «множество $|X|$-разрядных двоичных чисел», действующее по правилу

$$\varphi(A) = d_A,$$

является биективным отображением. Тогда, по основному принципу комбинаторики,

$$|2^X| = |\text{«множество } |X|\text{-разрядных двоичных чисел»}| = 2^{|X|}. \quad ◄$$

Проведем еще одно доказательство теоремы 3.15 в случае $n = |X| \geq 1$.

► Рассмотрим множество $\{0; 1\}^X$ — множество отображений из множества X в двухэлементное множество $\{0; 1\}$ и сопоставим каждому $A \in 2^X$ ($A \subset X$) отображение

$$\chi_A : X \to \{0; 1\} \ (\Longleftrightarrow \chi_A \in \{0; 1\}^X),$$

заданное правилом:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Ясно, что $F : 2^X \to \{0; 1\}$, действующее по правилу

$$F(A) = \chi_A,$$

является биективным отображением, тогда по основному принципу комбинаторики

$$2^X = |\{0; 1\}^X| \overset{\text{теорема 3.7}}{=} |\{0; 1\}|^{|X|} = 2^{|X|}. \quad ◄$$

Некоторые свойства биномиальных коэффициентов

Теорема 3.16 *Пусть $0 \leq m \leq n$. Имеют место следующие свойства:*

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2) $C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m$;

3) $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$.

► 1) ► Соотношение 1 мы уже доказали (см. формулу (3.28)). Используя симметрию бинома, его можно легко доказать и воспользовавшись формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Действительно, тогда

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m.$$

Приведем еще одно (третье!) комбинаторное доказательство. Зафиксируем X — n-элементное множество и рассмотрим $\mathbb{C}_X^m$ — множество m-элементных подмножеств X. Рассмотрим отображение

$$\varphi : \mathbb{C}_X^m \to \mathbb{C}_X^{n-m},$$

заданное правилом

$$\varphi(A) = X \setminus A.$$

Ясно, что φ — биективное отображение из $\mathbb{C}_X^m$ в $\mathbb{C}_X^{n-m}$.

Тогда, по основному принципу комбинаторики,

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \quad ◄_1$$

2) ► Зафиксируем в $(n+1)$-элементном множестве X нумерацию, т. е.

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n; x_{n+1}\}.$$

Разобьем множество $\mathbb{C}_X^{m+1}$ на два непересекающихся множества I и II, отнеся ко множеству I такие $(m+1)$-элементные подмножества X, которые не содержат x_{n+1}, а ко второму такие $(m+1)$-элементные подмножества X, которые содержат x_{n+1}. Ясно, что

$$C_{n+1}^{m+1} = |\mathbb{C}_X^{m+1}| = |I| + |II|;$$
$$|I| = |\mathbb{C}^{m+1}_{X\setminus\{x_{n+1}\}}| = C_n^{m+1}; \quad |II| = |\mathbb{C}^{m}_{X\setminus\{x_{n+1}\}}| = C_n^{m}.$$

В пояснении нуждается только последнее равенство. Действительно, любое $(m+1)$-элементное подмножество X, содержащее x_{n+1}, может быть получено добавлением к m-элементному подмножеству множества $X \setminus \{x_{n+1}\}$ элемента x_{n+1}. ►2

3) ► Пусть X — n-элементное множество, тогда

$$2^X = \bigcup_{m=0}^{n} \mathbb{C}_X^m.$$

Множества $\mathbb{C}_X^m$ не пересекаются, т. е.

$$\mathbb{C}_X^i \bigcap \mathbb{C}_X^j = \varnothing, \text{ если } i \neq j.$$

Тогда, по правилу суммы

$$2^n = |2^X| = \sum_{m=0}^{n} |\mathbb{C}_X^m| = \sum_{m=0}^{n} C_n^m. \ ◄3$$

Приведем еще одно доказательство соотношения 3 и теоремы 3.15 (ее третье доказательство).

Если X — произвольное n-элементное множество, то

$$|2^X| = \left|\bigcup_{m=0}^{n} \mathbb{C}_X^m\right| = \sum_{m=0}^{n} C_n^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m 1^{n-m} \cdot 1^m = \overset{(3.27)}{=} (1+1)^n = 2^n.$$

Соотношение

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m \tag{3.31}$$

для бинома Ньютона означает, что коэффициент C_{n+1}^{m+1} в биноме степени $n+1$ получается суммированием двух соседних коэффициентов в биноме n-ой степени. На этом свойстве основана конструкция знаменитого треугольника Паскаля[2] (см. рис. 3.3*а*, рис. 3.3*б*). Равенство (3.31) называют соотношением Паскаля.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & & & \searrow + \swarrow & & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
 & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
\ldots\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Рис. 3.3*а*.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & \searrow + \swarrow & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\ldots\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Рис. 3.3*б*. ◄

[2] Паскаль Блез (1623–1662) — знаменитый французский математик, известен вместе с Декартом и Ферма как основоположник аналитической геометрии, ему принадлежат основные результаты в теории конических сечений. Результаты Паскаля стали основополагающими для раздела «Геометрическая вероятность»

Теорема 3.17 (тождество Вандермонда[3]) *Пусть* $m, n, r \in Z_+$ *и* $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$, *тогда*

$$C(m+n, r) = \sum_{i=0}^{r} C(m, r-i) \cdot C(n, i). \tag{3.32}$$

► Возьмем произвольное $m+n$-элементное множество X и зафиксируем в нем произвольную нумерацию

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_m; x_{m+1}; \ldots; x_{m+n}\}.$$

Множество $\mathbb{C}_X^r$ r-элементных подмножеств множества X разобьем на непересекающиеся подмножества S_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, r)$, отнеся A $(\in \mathbb{C}_X^r)$ ко множеству S_i тогда и только тогда, когда

$$\left|A \bigcap \{x_{m+1}; x_2; \ldots; x_{m+n}\}\right| = i. \tag{3.33}$$

Ясно, что при этом

$$\left|A \bigcap \{x_1; x_2; \ldots; x_m\}\right| = r - i. \tag{3.34}$$

Мы получили, что

$$\mathbb{C}_X^r = \bigcup_{i=0}^{r} S_i, \tag{3.35}$$

а так как множества S_i попарно не пересекаются, по правилу суммы (теорема 3.6) получаем

$$C_{n+m}^r = |\mathbb{C}_X^r| = \sum_{i=0}^{r} |S_i| \tag{3.36}$$

[3] Вандермонд Александр-Теофил (1735–1796). Родители прочили сыну музыкальную карьеру, однако, несмотря на музыкальное образование, он развил в себе и математические способности, опубликовав в 1771–1772 гг. четыре работы по математике, внеся существенный вклад в теорию алгебраических уравнений, теорию определителей (в т. ч. знаменитый определитель Вандермонда) и др. Математическое творчество Вандермонда было кратким, но ярким. Он опубликовал также работы по музыкальной гармонии, путешествовал, активно занимался политикой, особенно во время Французской революции, занимал различные посты в республиканском правительстве.

Займемся одним из множеств S_i (напомним, что S_i состоит из таких r-элементных подмножеств множества X, для которых выполнено (3.33) и (3.34)).

Разобьем множество S_i на попарно непересекающиеся подмножества S_{ik} по следующему правилу: два подмножества A и B из S_i относятся к одному S_{ik} тогда и только тогда, когда

$$A \bigcap \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = B \bigcap \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}. \tag{3.37}$$

Пересечения, стоящие в левой и правой части (3.37), являются (см. (3.34)) $r - i$-элементными подмножествами множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Таких подмножеств C_m^{r-i}. Тем самым мы доказали, что существует $\mathbb{C}_m^{r-i}$ множеств S_{ik} (т. е. k принимает значения от 1 до C_m^{r-i}).

По правилу суммы получим

$$|S_i| = \left|\bigcup_{k=1}^{C_m^{r-i}} S_{ik}\right| = \sum_{k=1}^{C_m^{r-i}} |S_{ik}|. \tag{3.38}$$

Рассмотрим множество S_{ik} (k фиксировано). Ясно, что

$$|S_{ik}| = |\mathbb{C}^i_{\{x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}\}}| = C_n^i. \tag{3.39}$$

Подставляя (3.39) в (3.38), получаем

$$|S_i| = \sum_{k=1}^{C_m^{r-i}} C_n^r = C_m^{r-i} C_n^i. \tag{3.40}$$

Подставляя теперь (3.40) в (3.36), получаем

$$C_{m+n}^r = \sum_{i=0}^{r} C_m^{r-i} C_n^i.$$

◄

Следствие. В теореме 3.17 m и n фигурируют равноправно, поэтому справедливо

$$C_{m+n}^r = \sum_{m}^{r-i} C_n^r = \sum_{n}^{r-i} C_m^i, \tag{3.41}$$

где $m, n \in Z_+$, $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$.

Сочетания с повторениями

Задача 3.8. В кондитерской продаются пирожные 5-ти видов (бисквитные, корзиночки, буше, эклеры, трубочки). Сколькими способами можно купить 12 пирожных?

► Покупка взаимно однозначно определяется набором неотрицательных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_5)$, где x_i — количество приобретаемых пирожных i-го вида ($x_2 = 0$ означает, что мы решили не покупать «корзиночки»). Тогда наша задача равносильна задаче о числе решений уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \quad x_i \in Z_+. \tag{3.42}$$

Сделаем взаимно однозначную замену $y_i = x_i + 1$, тогда наша задача равносильна задаче о числе решений уравнения

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 17, \quad y_i \in N. \tag{3.43}$$

На прямой отметим 17 точек. Каждому решению уравнения (3.43) сопоставим картинку из отмеченных точек и разделяющих черточек, которая строится следующим образом. Если $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_5^0)$ — решение уравнения (3.43), т. е. набор из пяти натуральных чисел, сумма которых равна 17 (например $(1, 2, 7, 1, 6)$), то отсчитаем слева направо y_1^0 отмеченных точек и за последней отсчитанной точкой ставим вертикальную разделяющую черточку. Затем отсчитываем от полученной черточки y_2^0 точек и ставим следующую разделяющую черточку и т. д.

Какое бы решение уравнения (3.43) мы ни брали, последняя (пятая) черточка будет стоять за последней (семнадцатой) отмеченной точкой

Договоримся последнюю черточку не рисовать.

Решению $(1, 2, 7, 1, 6)$ соответствует рис 3.4.

Рис 3.4.

Ясно, что соответствие между решениями и картинками биективное. Подсчитаем количество картинок Каждая картинка взаимно однозначно определяется набором из четырех промежутков между точками, в которых проставляются разделяющие черточки.

Число способов выбора четырех промежутков из имеющихся 16 равно C_{16}^4.

Таким образом, число способов покупки двенадцати пирожных, если имеется 5 видов пирожных, равно

$$C_{16}^4 = C_{12+5-1}^{5-1} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1820.$$

◄

Определение 3.11 *Задачами на сочетания с повторениями длины n из m видов называют задачи, сводящиеся к нахождению числа решений уравнений*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n, \quad x_i \in Z_+. \tag{3.44}$$

Теорема 3.18 *Число сочетаний с повторениями длины n из m видов равно C_{n+m-1}^{m-1}.*

► Можно дословно повторить решение задачи о пирожных, начиная с уравнения (3.44). ◄

Вопросы в конце параграфа

1. Приведите комбинаторное доказательство того факта, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах в разложении бинома $(a+b)^n$ по степеням a, b, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах.
2. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «арбуз»?
3. То же самое для слова «математика».
4. Сравнивания задачи 3 и 4, попробуйте ввести понятие «перестановка с повторениями» и получить формулу для числа перестановок с повторениями.

3.5 Число сюръективных отображений

В этом параграфе мы получим формулу (к сожалению, не очень компактную) для числа сюръективных отображений и некоторые следствия из нее.

Обозначим через $\mathrm{sur}\,Y^X$ множество сюръективных отображений, действующих из X в Y. Через $\neg\mathrm{sur}\,Y^X$ обозначим множество отображений, действующих из X в Y и не обладающих свойством сюръективности. Ясно, что

$$\mathrm{sur}\,Y^X = Y^X \setminus (\neg\mathrm{sur}\,Y^X) \tag{3.45}$$

и. если X и Y конечные множества, то

$$|\mathrm{sur}\,Y^X| = |Y^X| - |\neg\mathrm{sur}\,Y^X|. \tag{3.46}$$

Попробуем вычислить $|\neg\mathrm{sur}\,Y^X|$. Зафиксируем в Y произвольную нумерацию — $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{|Y|}\}$. Пусть

$$A_M \overset{def}{=} \{f \in Y^X \mid f^{-1}(M) = \varnothing,\ M \subset Y\}$$

тогда

$$\neg\mathrm{sur}\,Y^X = \bigcup_{M\in\mathbf{C}^1_Y} A_M. \tag{3.47}$$

К сожалению, множества A_M не являются попарно непересекающимися, и мы не можем воспользоваться правилом суммы и вынуждены применить формуну включения-исключения:

$$|\neg\mathrm{sur}\,Y^X| = |\bigcup_{M\in\mathbf{C}^1_Y} A_M| = \sum_{M\in\mathbf{C}^1_Y}|A_M| - \sum_{M\in\mathbf{C}^2_Y}|A_M| + \\ + \sum_{M\in\mathbf{C}^3_Y}|A_M| - \cdots + (-1)^{|Y|-2}\sum_{M\in\mathbf{C}^{|Y|-1}_{|Y|}}|A_M| + (-1)^{|Y|-1}|A_Y|.$$

Ясно, что

$$A_Y = \varnothing; \tag{3.48}$$

$$A_M = |(Y\setminus M)^X| = (|Y| - |M|)^{|X|} = \\ = |(Y\setminus\{y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}\})^X| = (|Y| - k)^{|X|}. \tag{3.49}$$

Учитывая (3.49), получаем

$$\sum_{M\in\mathbf{C}^k_Y}|A_M| = \mathbb{C}^k_{|Y|}(|Y| - k)^{|X|}. \tag{3.50}$$

Воспользуемся (3.48) и (3.50) и вернемся к вычислению $|\neg\mathrm{sur}\,Y^X|$.

$$|\neg\mathrm{sur}\,Y^X| = C^1_{|Y|}(|Y|-1)^{|X|} - C^2_{|Y|}(|Y|-2)^{|X|} + \ldots \\ + (-1)^{|Y|-3}C^{|Y|-2}_{|Y|}(|Y| - (|Y|-2))^{|X|} + \\ + (-1)^{|Y|-2}C^{|Y|-1}_{|Y|}(|Y| - (|Y|-1))^{|X|} + \\ + C^1_{|Y|}(|Y|-1)^{|X|} - C^2_{|Y|}(|Y|-2)^{|X|} + \cdots + \\ + (-1)^{|Y|-3}C^{|Y|-2}_{|Y|}2^{|X|} + (-1)^{|Y|-2}C^{|Y|-1}_{|Y|}. \tag{3.51}$$

Из (3.46) и (3.51) получаем следующую теорему.

Теорема 3.19 *Пусть X, Y — конечные непустые множества. Тогда*

$$|\mathit{sur}\,Y^X| = |Y|^{|X|} - C^1_{|Y|}(|Y|-1)^{|X|} + C^2_{|Y|}(|Y|-2)^{|X|} - \cdots + \\ + (-1)^{|Y|-2}C^{|Y|-2}_{|Y|}2^{|X|} + (-1)^{|Y|-1}C^{|Y|-1}_{|Y|}. \tag{3.52}$$

Ясно, что в случае, когда $|X| = |Y|$, $\mathrm{sur}\,Y^X = \mathrm{Bi}\,Y^X$, и мы получаем

Следствие 3.1 *Имеет место формула:*

$$n! = n^n - C^1_n(n-1)^n + C^2_n(n-2)^n - \\ - C^3_n(n-3)^n + \cdots + (-1)^{n-1}C^{n-1}_n. \tag{3.53}$$

Если $1 \le |X| < |Y|$, множество $\mathrm{sur}\,Y^X = \varnothing$, и мы получаем

Следствие 3.2 *Пусть $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда справедлива формула:*

$$n^m = C^1_n(n-1)^m - C^2_n(n-2)^m + \cdots + (-1)^{n-3}C^{n-2}_n2^m + \\ + (-1)^{n-2}C^{n-1}_n. \tag{3.54}$$

Формулы (3.53) и (3.54) неожиданны и непривычны. Проверим их на конкретных n и m. Подставим в (3.53) $n = 4$:

$$24 = 4! = 4^4 - C^1_4\cdot 3^4 + C^2_4 2^4 - C^3_4 = \\ = 256 - 4\cdot 81 + 6\cdot 16 - 4 = \\ = 256 - 324 + 96 - 4 = 24.$$

Подставим в (3.54) $n = 4$, $m = 3$:

$$64 = 4^3 = C^1_4\cdot 3^3 - C^2_4\cdot 2^3 + C^3_4 = \\ = 4\cdot 27 - 6\cdot 8 + 4 = 108 - 48 + 4 = 64.$$

Вопросы в конце параграфа

Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$.

1. Проверьте, что $|\operatorname{sur} Y^X| = 6$.
2. Найдите множество $\operatorname{sur} Y^X$.
3. Найдите множество $\neg\operatorname{sur} Y^X$.
4. Формулы (3.53) и (3.54), может быть, и не так важны, однако мы привели их из-за необычной «техники» их доказательства.

Глава 4

Отношения

Эта небольшая глава посвящена отношениям и операциям над ними. С отношениями мы имеем дело каждый день, таковыми являются отношение равенства на произвольном множестве, отношения $\leq, <, \geq, >$ на множестве вещественных чисел, отношения подобия фигур на плоскости и т. п. Оказывается, что и числовые функции можно рассматривать как частный случай отношений. При этом легче понять, что означает обратимость функции и т. п. В этом введении все упомянутые отношения двуместны. Можно рассматривать и n-местные ($n > 2$) отношения, однако наибольшее внимание мы уделим двуместным отношениям.

4.1 n-местные отношения. Булевы алгебры отношений и матриц

1. n-местные отношения

Определение 4.1 *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — непустые множества, n-местным отношением, заданным на $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, называют подмножество S декартова произведения $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Об n-ке $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ говорят, что она связана отношением S, если $(x_1; x_2; \ldots, x_n) \in S$, или не связана отношением S, если $(x_1; x_2; \ldots; x_n) \notin S$.*

Пример 4.1. Рассмотрим на декартовой плоскости $R^2 = R \times R$ множество S — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Ясно, что пара (x_1, x_2) связана двуместным отношением S тогда и только тогда, когда

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Пример 4.2. Рассмотрим трехместное отношение на R^3, заданное следующим

$$(x_1, x_2, x_3) \in S \Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = x_3.$$

Ясно, что S — параболоид вращения с вершиной в начале координат и осью вращения $0x_3$ (см. рис. 4.1).

Пример 4.3. Рассмотрим двуместное ($\Leftrightarrow$ бинарное) отношение на R^2, заданное следующим $(x_1, x_2) \in S \Leftrightarrow x_1 \le x_2$. Ясно, что S — полуплоскость, лежащая выше биссектрисы I-го и III-го координатных углов, и сама биссектриса (см. рис. 4.2).

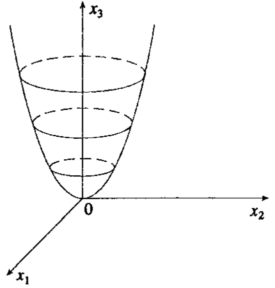


Рис. 4.1

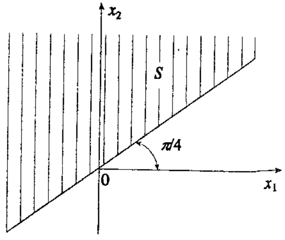


Рис. 4.2

Для двуместных (бинарных) отношений вместо записи $(x, y) \in S$ принята запись $x\alpha_s y$, а если ясно, о каком S идет речь, то пишут $x\alpha y$ (за наиболее распространенными отношениями закреплены обозначения «=», «≤», «<», «≥», «>», «⊂»)

2. Булева алгебра отношений

Зафиксируем X, Y — непустые множества и рассмотрим множество $R(X \times Y)$ — множество бинарных отношений на $X \times Y$. Введем на $R(X \times Y)$ операции дополнения, объединения, пересечения.

Определение 4.2 *Дополнением по отношению α_s, порожденному множеством S, называется отношение $\overline{\alpha}_s$, порожденное множеством $\overline{S}$ — дополнением S относительно $X \times Y$, т. е.*

$$x\overline{\alpha}_s y \Longleftrightarrow x\alpha_{\bar{s}} y.$$

Определение 4.3 *Объединением (пересечением) отношений α_S и α_T называется отношение $\alpha_S \cup \alpha_T$ ($\alpha_S \cap \alpha_T$), порожденное множеством $S \cup T$ ($S \cap T$), т. е.*

$$x\alpha_S \cup \alpha_T y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x\alpha_{S\cup T} y$$
$$\left(x\alpha_S \cap \alpha_T y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x\alpha_{S\cap T} y\right).$$

Пример 4.4. Рассмотрим на R^2 отношения $\leq$ и $\geq$, тогда

$$x\overline{\leq}y \Longleftrightarrow x > y,$$
$$x \leq \cap \geq y \Longleftrightarrow x = y,$$

$x \leq \cup \geq y$ — тривиальное отношение, которое связывает между собой любые два вещественных числа.

Теорема 4.1 *Множество $R(X \times Y)$ образует относительно операций дополнения, объединения, пересечения булеву алгебру, т. е. для них (отношений) выполняется 19 основных равенств булевой алгебры. (Доказательство следует из определения операций над отношениями и теоремы о том, что множества относительно операции дополнения, объединения и пересечения образуют булеву алгебру.)*

3. Булева алгебра матриц

Пусть X и Y — конечные непустые множества. Зафиксируем нумерацию в X и в Y, т. е.

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_{|X|}\}; \quad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{|Y|}\}.$$

Рассмотрим на $X \times Y$ бинарное отношение α. Поставим ему в соответствие матрицу A_α размера $|X| \times |Y|$ с элементами $(A_\alpha)_{ij} (\in \{0; 1\})$, определенную следующим

$$(A_\alpha)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \alpha y_j; \\ 0, & \text{если } x_i \overline{\alpha} y_j. \end{cases}$$

Справедливо и обратное: если X и Y — конечные непустые нумерованные множества и A — произвольная $|X| \times |Y|$«0–1» матрица ($\Leftrightarrow (A)_{ij} \in \{0; 1\}$), то существует бинарное отношение α на $X \times Y$ такое, что

$$A_\alpha = A.$$

Таким образом, между множеством $R(X \times Y)$ бинарных отношений на $X \times Y$ (X и Y — непустые конечные нумерованные множества) и множеством «0–1» матриц размера $|X| \times |Y|$ существует взаимно однозначное соответствие — сопоставление бинарному отношению его матрицы. Значит, булевы операции над «0–1» матрицами размера $m \times n$ можно вводить, используя булевы операции над бинарными отношениями, положив

$$X = [1; m]_N, \quad Y = [1; n]_N$$

с их естественной нумерацией.

Пример 4.5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,1 \\ 1\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,1 \end{pmatrix}, \quad A \cup B = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1 \end{pmatrix}, \quad A \cap B = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}$$

Замечание 4.1. Ясно, что в битовых операциях имеют место равенства:

$$\begin{aligned} (\overline{A})_{ij} &= \overline{(A)}_{ij} \\ (A \cup B)_{ij} &= (A)_{ij} \vee (B)_{ij} \\ (A \cap B)_{ij} &= (A)_{ij} \wedge (B)_{ij} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Теорема 4.2 *Множество $B(m \times n)$ — «0–1» матриц (булевых матриц) размера $m \times n$ образует булеву алгебру относительно операций дополнения, объединения, пересечения, т. е. для булевых матриц выполнено 19 основных соотношений булевой алгебры.*

4. Композиция бинарных отношений. Булево произведение матриц

Определение 4.4 *Пусть α — бинарное отношение на $X \times Y$, β — бинарное отношение на $Y \times Z$. Определим композицию бинарных отношений $\alpha \circ \beta$ как бинарное отношение на $X \times Z$, заданное следующим:*

$$x\alpha \circ \beta z \Longleftrightarrow \exists y((x\alpha y)(y\beta z)) \equiv 1.$$

Очевидно, что композиция ассоциативна, т. е.

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$$

и, вообще говоря, не коммутативна, т. е. существуют α и β такие, что $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

Отмеченное выше соответствие между бинарными отношениями на конечных множествах и булевыми матрицами порождает операцию булева умножения «0–1» матриц. (Композиции отношений соответствует булево произведение матриц.) Ясно, что оно определено следующим правилом:

Определение 4.5 *Пусть A — булева матрица размера $m \times p$ с элементами $(A)_{ij}$, B — булева матрица размера $p \times n$ с элементами $(B)_{ij}$.*

Булевым произведением матриц A, B называется булева матрица $A \boxtimes B$ размера $m \times n$ с элементами $(A \boxtimes B)_{ij}$, определенными равенством

$$(A \boxtimes B)_{ij} = \bigvee_{k=1}^{p} (A)_{ik} \wedge (B)_{kj}.$$

Пример 4.6. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 0\,1\,1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда } A \boxtimes B = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что булево умножение матриц ассоциативно, т. е.

$$(A \boxtimes B) \boxtimes C = A \boxtimes (B \boxtimes C) \qquad (4.2)$$

и, вообще говоря, не коммутативно, т. е. существуют такие матрицы A и B, для которых

$$A \boxtimes B \neq B \boxtimes A. \qquad (4.3)$$

Замечания и вопросы в конце параграфа.

1. Мы определили булевы операции для двуместных отношений. Ясно, что они определяются точно так же для отношений любой местности.

2. Как сказывается на матрице A_α бинарного отношения α на $X \times Y$ изменение нумерации X; изменение нумерации Y?

3. Приведите пример таких отношений, для которых

$$\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha.$$

4. Приведите пример таких булевых матриц, для которых

$$A \boxtimes B \neq B \boxtimes A.$$

5. Приведите пример таких отношений, для которых

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha.$$

6. Приведите пример таких булевых матриц, для которых

$$A \boxtimes B = B \boxtimes A.$$

7. Пусть A — квадратная $n \times n$ булева матрица. Определим ее булевы натуральные степени, положив

$$A^{\boxed{1}} = A; \; A^{\boxed{2}} = A \boxtimes A; \; A^{\boxed{3}} = A^{\boxed{2}} \boxtimes A; \; \ldots; A^{\boxed{k+1}} = A^{\boxed{k}} \boxtimes A.$$

Докажите, что

$$A^{\boxed{m}} \boxtimes A^{\boxed{n}} = A^{\boxed{m+n}}.$$

8. Докажите, что для любой $n \times n$ булевой матрицы A имеет место:

$$(I \cup A)^{\boxed{n-1}} = (I \cup A)^{\boxed{n}} = \ldots; \quad \text{где } I \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \ldots 0 \\ 0\,1\,0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\,0\,0 \ldots 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

4.2 Бинарные отношения на множестве. Свойства бинарных отношений

Определение 4.6 *Бинарным отношением на множестве X называется бинарное (двуместное) отношение на $X \times X$.*

Пример 4.7. Пусть $X = R$. Рассмотрим бинарное отношение α, заданное правилом:

$$x\alpha y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x^2 = y^2.$$

Пример 4.8. Пусть $X = R$. Рассмотрим бинарное отношение β, заданное правилом:

$$x\beta y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x^2 < y^2.$$

Пример 4.9. Пусть $X = \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел). Рассмотрим бинарное отношение γ, заданное правилом:

$$z_1\gamma z_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} |z_1| = |z_2|.$$

Пример 4.10. Рассмотрим на $\mathbb{C}$ бинарное отношение δ, заданное правилом:

$$z_1\delta z_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\mathrm{Re}\, z_1 \le \mathrm{Re}\, z_2)\&(\mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2).$$

Выделяют следующие основные свойства бинарных отношений: рефлексивность, транзитивность, симметричность, антисимметричность, а затем с помощью присутствия определенной комбинации этих свойств выделяют два важнейших типа бинарных отношений: отношения порядка и отношения эквивалентности.

Определение 4.7 *Бинарное отношение α на X называется рефлексивным, если*

$$\forall x \quad (x\alpha x) \equiv 1.$$

Т. е. бинарное отношение α, порожденное множеством S_α, называется рефлексивным, если множество S_α, порождающее α, содержит целиком

диагональ декартова квадрата $X \times X$ —

$$diag(X \times X) = \bigcup_{x \in X} \{(x;x)\}.$$

Определение 4.8 *Бинарное отношение α на X называется транзитивным, если*

$$\forall x \forall y \forall z\, ((x\alpha y)\&(y\alpha z) \longrightarrow (x\alpha z)) \equiv 1.$$
$$(\forall x \forall y \forall z\, ((x\alpha y)\&(y\alpha z) \Longrightarrow (x\alpha z))).$$

Определение 4.9 *Бинарное отношение α на X называется симметричным, если*

$$\forall x \forall y\, ((x\alpha y) \longrightarrow (y\alpha x)) \equiv 1.$$
$$(\forall x \forall y\, ((x\alpha y) \Longrightarrow (y\alpha x))).$$

Т. е. бинарное отношение α на X симметрично, если множество S_α, его порождающее, расположено симметрично относительно $diag(X \times X)$ (см. рис. 4.3).

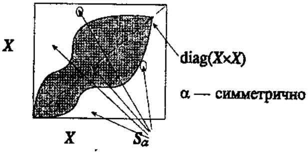


Рис. 4.3

Определение 4.10 *Бинарное отношение α на X называется антисимметричным, если*

$$\forall x \forall y\, ((x\alpha y)\&(y\alpha x) \longrightarrow (x = y)) \equiv 1.$$
$$(\forall x \forall y\, ((x\alpha y)\&(y\alpha x) \Longrightarrow (x = y)))$$

Т. е. бинарное отношение α на X антисимметрично, если множество S_α, его порождающее, не содержит ни одной пары различных точек, симметричных относительно $diag(X \times X)$ (см. рис. 4.4).

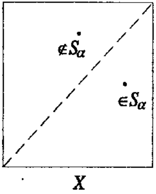


Рис. 4.4

Пример 4.11. Рассмотрим таблицу:

	рефл.	симметр.	транз.	антисимм
α	+	+	+	−
β	−	−	+	+
γ	+	+	+	−
δ	+	−	+	+
$=$	+	+	+	+
$\leq$	+	−	+	+
$x \leq \lvert y\rvert$, $x, y \in R$	+	−	−	−

Здесь «+» означает, что соответствующее свойство присутствует, а «−» отсутствует. α, β, γ, δ — отношения из примеров 4.7–4.10.

Вопросы в конце параграфа

1. Приведите примеры рефлексивных отношений.
2. Приведите примеры отношений, не являющихся рефлексивными.
3. Приведите примеры симметричных отношений.
4. Приведите примеры отношений, не являющихся симметричными.
5. Приведите примеры транзитивных отношений.
6. Приведите примеры отношений, не являющихся транзитивными.
7. Приведите примеры антисимметричных отношений.
8. Приведите примеры отношений, не являющихся антисимметричными.
9. Для приведенных вами в вопросах 1–8 отношений проверьте наличие и отсутствие остальных, выделенных определениями 4.6–4.10 свойств.

4.3 Отношение порядка и доминирование

Определение 4.11 *Бинарное отношение α на X называется отношением порядка на X, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.*

Классическим примером отношения порядка является отношение $\leq$ на R. Ясно, что отношение δ (см. пример 4.2) является отношением порядка на $\mathbb{C}$.

Отношение порядка α на X называется отношением линейного порядка на X (линейным порядком на X), если

$$\forall x \forall y\,((x\alpha y) \vee (y\alpha x)) \equiv 1.$$

В противном случае порядок называется частичным.

То есть отношение порядка на X является линейным порядком, если любые два элемента множества X сравнимы этим отношением.

Ясно, что отношение $\leq$ на R является отношением линейного порядка, а отношение δ на $\mathbb{C}$ — частичного порядка, так как $1 + i \not\delta 2 - 2i$ и $2 - 2i \not\delta 1 + i$.

Пример 4.12. Рассмотрим произвольное множество A и на множестве 2^A — бинарное отношение $\subset$. Ясно, что $\subset$ является отношением порядка, причем если $|A| \leq 1$ — порядок линейный, а если $|A| \geq 2$ — частичный.

Пара (X, α), где α — бинарное отношение на X, называется упорядоченным множеством, если α — отношение порядка на X; линейно-упорядоченным множеством, если α — линейный порядок; частично-упорядоченным множеством, если α — частичный порядок.

Ясно, что $(R, \leq)$ — линейно-упорядоченное множество, а (C, δ) (см. пример 4.2) — частично-упорядоченное множество.

Пусть (X, α) — упорядоченное множество, определим на X еще одно бинарное отношение d_α — доминирование.

Определение 4.12 *Говорят, что y $(\in X)$ доминирует над x $(\in X)$ по отношению порядка α (пишут $xd_\alpha y$), если*

1) $x \neq y$; 2) $x\alpha y$; 3) $\forall z\,((x\alpha z)\&(z\alpha y) \longrightarrow (x = z) \vee (z = y)) \equiv 1$.

Пример 4.13. Рассмотрим $(N, \leq)$. Ясно, что 4 доминирует над 3, 5 над 4.

Пример 4.14. Пусть $\zeta = \{1; 2; 3\}$. На множестве $2^\zeta = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \zeta\}$ рассмотрим отношения $\subset$, $d_\subset$. Элементы множества 2^ζ изобразим точками, а пару точек x, y соединим стрелкой от x к y, если $xd_\subset y$. Тогда мы получим (см. рис. 4.5):

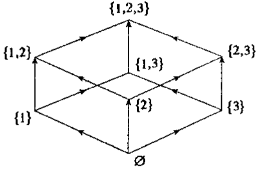


Рис. 4.5

Этот рисунок ($\Leftrightarrow$ граф) называется диаграммой Хассе, или диаграммой доминирования.

Определение 4.13 *Пусть (X, α) — упорядоченное множество. Последовательность $\{x_i\}_{i=0}^n$ $(x_i \in X)$ называется цепью доминирующих элементов длины n, соединяющей x с y, если выполнены два условия:*

1) $x = x_0$, $y = x_n$; 2) $x_{i-1} d_\alpha x_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 4.3 *(о цепях доминирующих элементов). Пусть (x, α) — конечное $(|X| < \infty)$ упорядоченное множество, $x, y \in X$, $x \neq y$ и $x\alpha y$, тогда существует цепь доминирующих элементов, соединяющая x с y.*

► Для каждой пары (x, y) такой, что $x\alpha y$, $x \neq y$, в конечном упорядоченном множестве (X, α) можно ввести характеристику $\theta(x, y)$ — «число элементов, лежащих между x и y (говорят, что z лежит между x и y, если

$$(x\alpha z)\&(z\alpha y)\&(z \neq x)\&(z \neq y))».$$

Теораму будем доказывать индукцией по $\theta(x, y)$.

Шаг I. $x\alpha y$, $x \neq y$. $\theta(x, y) = 0$. Это означает, что y доминирует над x. Положим $x_0 = x$, $x_1 = y$ — искомая цепь построена.

Индуктивный переход. Допустим, утверждение теоремы справедливо для любых двух элементов ν и ω множества X таких, что $\theta(\nu, \omega) \leq n_0$. Докажем, что тогда теорема справедлива для любых x, y таких, что

$$\theta(x, y) = n_0 + 1.$$

Зафиксируем какой-либо элемент z, лежащий между x и y. Ясно, что

$$\theta(x, z) \leq n_0; \quad \theta(z, y) \leq n_0.$$

Тогда по предположению индукции существуют: цепь доминирующих элементов $\{x_i^{(1)}\}_{i=0}^{n_{xz}}$, соединяющая x с z, и цепь $\{x_i^{(2)}\}_{i=0}^{n_{zy}}$, соединяющая z с y. Рассмотрим последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{n_{xz}+n_{zy}}$, заданную правилом:

$$x_i = \begin{cases} x_i^{(1)}, & \text{если } 0 \leq i \leq n_{xz} \\ x_{i-n_{xz}}^{(2)}, & \text{если } n_{xz} < i \leq n_{xz} + n_{zy}. \end{cases}$$

Ясно, что $\{x_i\}_{i=0}^{n_{xz}+n_{zy}}$ — искомая цепь доминирующих элементов. Индуктивный переход, а значит, и вся теорема доказаны. ◄

Смысл доказанной теоремы 4.3 состоит в том, что в конечном упорядоченном множестве (X, α) порядок полностью восстанавливается цепями доминирующих элементов

Вопросы в конце параграфа

1. Прежде чем сформулировать вопросы, определим важные понятия, связанные с отношением порядка:

— пусть (X, α) упорядоченное множество и $A \subset X$. Элемент $a_M \in A$ ($a_m \in A$) называется наибольшим (наименьшим) элементом множества A, если для любого элемента $a \in A$ выполнено $a \alpha a_M$ ($a_m \alpha a$);

— элемент $a' \in A$ называется максимальным (минимальным) элементом в A, если для любого элемента $a \in A$ выполнено

$$a'\alpha a \Longrightarrow a' = a, \quad (a\alpha a' \Longrightarrow a' = a).$$

Ясно, что если рассмотреть $(R, \leq)$ во множестве $(0; 1]$, то элемент 1 является и наибольшим, и максимальным, а наименьшего и минимального элемента нет.

2. Рассмотрим упорядоченное множество $(2^{\{1,2,3\}}, \subset)$ (пример 4.3) и $A = \{\{1\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$. В нем $\{1,2,3\}$ — наибольший элемент, $\{1,2,3\}$ — максимальный элемент, $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$ — минимальные элементы, наименьшего элемента нет.

3. Рассмотрим $(\mathbb{C}, \delta)$ (см пример 4.2). Пусть A — множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

а) $z \in A \iff |z| \leq 1$;

б) $z \in A \iff (1 < \mathrm{Re}\, z \leq 2) \& (-i < \mathrm{Im}\, z \leq i)$.

Найдите в A наибольший, наименьший, максимальные, минимальные элементы.

4. Докажите самостоятельно, что если во множестве существует наибольший элемент, то он единственен и является при этом единственным максимальным элементом То же самое справедливо и для наименьшего элемента.

5. Справедливы ли утверждения, обратные к утверждениям из вопроса 4?

4.4 Отношение эквивалентности

Определение 4.14 *Бинарное отношение α на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Пример 4.15. Отношение "=" на любом множестве X является отношением эквивалентности.

Пример 4.15. Отношения α и γ примеров 4 7 и 4.9 являются отношениями эквивалентности.

Определение 4.15 *Пусть α — отношение эквивалентности на X, $x \in X$ Рассмотрим множество $[x]_\alpha \overset{def}{=} \{y \in X | x\alpha y\}$, это множество называется классом эквивалентности (смежности) элемента x по отношению эквивалентности α.*

Пример 4.13. $[x]_= = \{x\}$; $[1]_\alpha = \{-1; 1\}$; $[2 - i]_\gamma$—множество точек на комплексной плоскости, образующих окружность радиуса $\sqrt{5}$ с центром в начале координат (α из примера 4.2, γ из примера 4.9).

Теорема 4.4 *Пусть α — отношение эквивалентности на X. Множества $[x]_\alpha$ обладают свойствами:*

1) $[x]_\alpha \neq \varnothing \ \forall x \in X$; 2) $\forall x \forall y \ ([x]_\alpha \cap [y]_\alpha \neq \varnothing \Longrightarrow [x]_\alpha = [y]_\alpha)$;

3) $\bigcup\limits_{x \in X} [x]_\alpha = X$.

► 1) Так как α рефлексивно, то $x\alpha x \Leftrightarrow x \in [x]_\alpha$, значит, $[x]_\alpha \neq \varnothing$.

3) Так как $x \in [x]_\alpha$, то $\{x\} \subset [x]_\alpha$, тогда

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup_{x \in X} [x]_\alpha \subset X \tag{4.4}$$

(последнее — $\bigcup\limits_{x \in X} [x]_\alpha \subset X$ выполнено, так как $[x]_\alpha \subset X$). Мы получили, что в (4.4) слева и справа стоит множество X, значит, в этой цепочке все знаки $\subset$ тривиальны, т е. заменяются на знак $=$.

2) Пусть $[x]_\alpha \cap [y]_\alpha \neq \varnothing$. Покажем, что в этом случае $[x]_\alpha = [y]_\alpha$ Тривиальным является случай, когда $x = y$. Рассмотрим случай $x \neq y$. Зафиксируем произвольную точку $z \in [x]_\alpha \cap [y]_\alpha$ и возьмем произвольную точку $t \in [y]_\alpha$, тогда мы имеем:

а) $x\alpha z$ ($z \in [x]_\alpha$); б) $y\alpha z$ ($z \in [y]_\alpha$), в) $y\alpha t$ ($t \in [y]_\alpha$)

Так как α симметрично, то $y\alpha z \Leftrightarrow$ б') $z\alpha y$. Из а) и б') по транзитивности α получаем г) $x\alpha y$. Из в) и г) по транзитивности α получаем, что $x\alpha t \Leftrightarrow$ д) $t \in [x]_\alpha$.

Так как t — произвольная точка $[y]_\alpha$, то мы доказали, что из $[x]_\alpha \cap [y]_\alpha \neq \varnothing \Longrightarrow [y]_\alpha \subset [x]_\alpha$.

Но условие $[x]_\alpha \cap [y]_\alpha \neq \varnothing \Leftrightarrow [y]_\alpha \cap [x]_\alpha \neq \varnothing$, значит, по доказанному и $[x]_\alpha \subset [y]_\alpha$, но тогда мы доказали, что

$$[x]_\alpha = [y]_\alpha. \quad ◄$$

Определение 4.16 *Пусть α — отношение эквивалентности на X. Фактор-множеством множества X по отношению α называется множество, обозначаемое X/α, элементами которого являются классы эквивалентности — $[x]_\alpha$.*

Пример 4.19. Пусть γ — отношение эквивалентности на $\mathbb{C}$, заданное правилом $z_1\gamma z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ (пример 4.9), тогда $\mathbb{C}/\gamma$ — множество концентрических окружностей с центром в начале координат, включая и вырожденную — $|z| = 0$.

Пример 4.20. Пусть w — отношение эквивалентности на $\mathbb{C}$, заданное правилом:

$$z_1wz_2 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

$\mathbb{C}/w$ — множество горизонтальных прямых на плоскости.

Мы видим, что при переходе от X к X/α происходит изменение «природы» объектов (были точки комплексной плоскости — стали концентрические окружности (пример 4.19), горизонтальные прямые (пример 4.20)).

Важным понятием, позволяющим вернуться к объектам исходной природы, является система различных представителей (СРП).

Определение 4.17 *Пусть α — отношение эквивалентности на X. $X'(\subset X)$ называется СРП по отношению эквивалентности α, если для любого x из X выполнено $|X' \cap [x]_\alpha| = 1$.*

Пример 4.21. Ясно, что в качестве СРП примера 4.4 можно взять множество таких комплексных чисел z, у которых $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Пример 4.22. Ясно, что в качестве СРП примера 4.20 можно взять множество таких комплексных чисел z, у которых $\operatorname{Re} z = 0$.

Теорема 4.5 *Если α — отношение эквивалентности на X, то между X' СРП по α и X/α можно установить биективное соответствие, в частности, если $|X/\alpha| < \infty$, то $|X'| = |X/\alpha|$.*

Вопросы в конце параграфа

1. Постройте другие СРП для примеров 4.4 и 4.4.
2. Постройте пример множества X и отношения эквивалентности α на нем, для которых имеет место $|X| = \infty$, $|X/\alpha| < \infty$.
3. Докажите, что если α — отношение эквивалентности на конечном множестве X, $|X| = |X/\alpha|$, то α — отношение равенства на X.

Глава 5

Булевы функции

В этой главе мы возвращаемся к началу нашего курса. Мы знаем, что с каждой формулой алгебры высказываний $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ связана функция $\hat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, сопоставляющая каждому фиксированному набору высказывательных переменных значение истинности формулы ($\in \{0, 1\}$). Поскольку в самих высказываниях нас интересует не содержательная часть, а только значение истинности, то фактически $\hat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — отображение множества $\{0, 1\}^n$ в $\{0, 1\}$. Сейчас мы отойдем от схемы формула—функция и займемся изучением множества булевых функций — отображений $\{0, 1\}^n$ в $\{0, 1\}$. Особенностью этого множества является следующее: все переменные и значения функций одной природы ($\{0, 1\}$), что создает «широкий» простор для построения суперпозиций, так как вместо любой переменной можно подставить в булеву функцию булеву функцию.

5.1 Функция алгебры логики. Многочлены Жегалкина

Множества $P_2(n)$, P_2

Определение 5.1 *Пусть $E_2 = \{0; 1\}$. Булевой функцией (функцией алгебры логики (0–1 функцией) от n переменных называется отображение*

$f : E_2^n \to E_2$. *Напомним, что*

$$E_2^n = \underbrace{E_2 \times E_2 \times \cdots \times E_2}_{n\ раз}.$$

Множество булевых функций от n переменных обозначим $P_2(n)$, т. е.

$$P_2(n) = E_2^{E_2^n},$$

а множество всех булевых функций обозначим через P_2, т. е.

$$P_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_2(n).$$

Теорема 5.1

$$|P_2(n)| = 2^{2^n}.$$

► Применим теоремы о $|Y^X|$ и $|X^n|$ (теоремы 3.6, 3.7):

$$|P_2(n)| = |E_2^{E_2^n}| = |E_2|^{|E_2^n|} = 2^{|E_2|^n} = 2^{2^n}$$ ◄

Заметим, что множества $P_2(n)$ конечны, но число элементов в них быстро растет в зависимости от n. Действительно,

$$|P_2(0)| = 2, \quad |P_2(1)| = 4, \quad |P_2(2)| = 16,$$
$$|P_2(3)| = 2^{2^3} = 256, \quad |P_2(4)| = 65536.$$

Уже для небольших n (3, 4, 5) множество $P_2(n)$ становится «необозримым».

Выпишем все функции из множества $P_2(2)$, задав их своими таблицами. Столбцы значений функций из $P_2(2)$ будем рассматривать как четырехразрядные двоичные числа и будем их располагать (и нумеровать) в лексикографическом порядке (таблица 5.1).

Среди этих функций много наших «хороших знакомых»:

$$f_0 = 0, \quad f_{15} = 1, \quad f_1(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$
$$f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2, \quad f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2,$$
$$f_9(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2, \quad f_3(x_1, x_2) = x_1, \quad f_3(x_1, x_2) = x_5,$$
$$f_{12}(x_1, x_2) = \overline{x_1}, \quad f_{10}(x_1, x_2) = \overline{x_2},$$
$$f_6(x_1, x_2) = \overline{x_1 \sim x_2} = x_1 \oplus x_2, \quad f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \to x_1.$$

Таблица 5.1: $P_2(2)$

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x_1	x_2	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция $f_8 = \overline{x_1 \vee x_2}$ называется функцией Пирса и обозначается $x_1 \uparrow x_2$ (стрелка Пирса), а функция $f_{14}(x_1, x_2) = \overline{x_1 \cdot x_2}$ называется функцией Шеффера и обозначается $x_1 | x_2$ (штрих Шеффера). Как мы увидим в дальнейшем, каждая из двух последних функций обладает удивительной способностью порождать все множество булевых функций.

В этом и следующем параграфах мы более подробно изучим множество булевых функций, а вернее, алгебру булевых функций, т. е. множество этих функций, оснащенное операцией суперпозиции функций. Множество 0–1 функций уже возникало в наших рассмотрениях в связи с изучением формул алгебры высказываний (таковыми были $\hat{f}$, где f — формула алгебры высказываний). Более того, мы уже знаем (после изучения теории нормальных форм), что любая функция из P_2 реализуема в виде высказывательной функции булевой формулы алгебры высказываний, т. е. использующей только $\neg$, $\vee$, $\wedge$.

Главной задачей, которую мы ставим на ближайшее время, является получение ответа на вопрос «Каким условиям должен удовлетворять набор функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$, чтобы любая функция алгебры логики могла быть реализована в виде формулы над набором $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$?». Исчерпывающий ответ на этот вопрос дает теорема Поста, доказательство которой и составит основную содержательную часть этой главы.

Алгебра булевых функций интересна с двух точек зрения — чисто математической и прикладной

С математической точки зрения это алгебра с «богатой» внутренней структурой, которая возникает из-за того, что все переменные и множество значений функций имеют одну природу, поэтому в P_2 можно вместо любой переменной подставлять функцию из P_2 (суперпозиция) и отождествлять переменные (т. е. осуществлять суперпозицию с тождественной функцией одной и той же переменной).

С прикладной точки зрения интерес к 0–1 функциям основан на том, что вся современная электроника (в т. ч. компьютерная) — цифровая 0–1 электроника. Успехи, достигнутые в этой области, позволили применять 0–1 электронику и там, где, казалось, должна была вечно господствовать континуальная электроника — в радиовещании и в телевидении. Аудио- и видеозапись высокого качества, в том числе и системы телевидения высокого разрешения, лазерные проигрыватели и т. п. — это тоже системы 0–1 электроники.

Многочлены Жегалкина

В качестве «строительного материала» для построения многочленов Жегалкина[1] используют константы 0 и 1 и символы переменных, в качестве «связующего материала» — операции конъюнкции (&) и сложения по mod 2 ($\oplus$, см. f_6 в табл. 5.1).

Определение 5.2 *Многочленом Жегалкина от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение, полученное из 0; 1; x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) путем применения конечного числа операций &, $\oplus$ и скобок, определяющих порядок действий.*

Пример 5.1.

$$P(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2 \oplus 1) \cdot (x_1 \oplus 0 \cdot x_2 \cdot x_3 \oplus 1) \oplus 1.$$

Замечание. Так как конъюнкция — идемпотентная операция ($xx = x$), в алгебре логики нет степеней переменных.

[1] Жегалкин В. И. (1869–1947) — профессор МГУ, основатель первого в стране научного семинара по математической логике, в котором работали П. С. Новиков, В. М. Гливенко, А. А. Ляпунов. Основные труды относятся к математической логике, теории множеств, основаниям математики, теории функций действительного переменного.

Определение 5.3 *Каноническим многочленом Жегалкина от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется многочлен вида:*

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \cdots \oplus a_n x_n \oplus \\ &\oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus \cdots \oplus a_{n-1,n} x_{n-1} x_n \oplus \oplus \ldots \\ &\oplus \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \oplus \cdots \oplus a_{12\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n, \end{aligned}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ldots, a_{123\ldots n} \in \{0, 1\}$.

Замечание. Считается, что «$\cdot$» сильнее, чем «$\oplus$».

Теорема 5.2 *Любой многочлен Жегалкина может быть приведен к каноническому виду.*

Доказательство следует из существования дистрибутивного закона

$$a \cdot (b \oplus c) = a \cdot b \oplus ac \tag{5.1}$$

и правила приведения подобных

$$\underbrace{a \oplus a \oplus \cdots \oplus a}_{k \text{ раз}} = \begin{cases} 0, \text{ если } k = 2n, \ n \in N; \\ a, \text{ если } k = 2n - 1, \ n \in N. \end{cases} \tag{5.2}$$

Имея дистрибутивный закон (5.1) и правило приведения подобных (5.2), помня об идемпотентности конъюнкции, для получения канонического многочлена Жегалкина нужно раскрыть скобки и привести подобные.

Пример 5.2. Вернемся к примеру 5.1.

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 x_2 \oplus 1) \cdot (x_1 \oplus 0 x_2 x_3 \oplus 1) \oplus 1 = \\ &= x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 0 \cdot x_1 x_2 x_3 \oplus 0 \cdot x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus 1 \oplus 1 = \\ &0 \oplus 1 \cdot x_1 \oplus 0 \cdot x_2 \oplus 0 \cdot x_3 \oplus 0 \cdot x_1 x_2 \oplus 0 \cdot x_1 x_3 \oplus \cdot x_2 x_3 \oplus \\ &\oplus 0 \cdot x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Получен канонический многочлен Жегалкина для исходного многочлена $p(x_1, x_2, x_3)$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{123} = 0$.

Для канонического многочлена часто используют сокращенную запись, в которой слагаемые с нулевыми коэффициентами опущены, а единичные коэффициенты не написаны, тогда

$$p(x_1, x_2, x_3) = x_1.$$

Теорема 5.3 *Для любой функции алгебры логики существует ее представление в виде многочлена Жегалкина.*

► Мы уже знаем (см. § 1.5), что любая функция алгебры логики может быть реализована (представлена) булевой формулой (например, СДНФ или СКНФ). потому для доказательства теоремы достаточно доказать существование многочлена Жегалкина для функции, реализованной булевой формулой, а для этого достаточно доказать, что операции $\vee$ и $\neg$ выражаются через жегалкинские операции. Очевидно, справедливы формулы:

$$\neg a = a \oplus 1; \tag{5.3}$$

$$a \vee b = ab \oplus a \oplus b. \tag{5.4}$$

Справедливость (5.3) следует из определения операции $\oplus$. Докажем (5.4):

$$a \vee b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}} = (a \oplus 1)(b \oplus 1) \oplus 1 =$$
$$= a \cdot b \oplus b \oplus a \oplus 1 \oplus 1 = ab \oplus a \oplus b.$$

Если теперь в булевой формуле исключить с помощью (5.3) и (5.4) отрицание и дизъюнкцию. то будет получен многочлен Жегалкина. ◄

Теорема 5.4 *Для любой функции $f \in P_2(n)$ существует единственное представление каноническим многочленом Жегалкина.*

► Существование представления каноническим многочленом следует из теорем 5.2 и 5.3. Докажем единственность. Обозначим через $\mathcal{G}(n)$ множество канонических многочленов от n переменных.

Каждый канонический многочлен порождает свой набор коэффициентов. Поэтому

$$|\mathcal{G}(n)| = |\text{«множество наборов коэффициентов»}|.$$

Если мы докажем, что

$$|\text{«множество наборов коэффициентов»}| = 2^{2^n} = |P_2(n)|, \tag{5.5}$$

то это будет означать, что для каждой булевой функции от n переменных существует точно по одному представлению каноническим многочленом Жегалкина.

Каждому набору индексов у коэффициентов многочлена поставим в соответствие (биективно) множество по следующему правилу:

$$0 \to \varnothing,\ 1 \to \{1\},\ 2 \to \{2\}, \dots \{n\} \to \{n\},$$
$$1\ 2 \to \{1;2\}, \dots, n-1,\ n \to \{n-1;n\}, \dots$$
$$1, 2, \dots, n \to \{1;2;\dots;n\}.$$

Эти множества — подмножества $[1;n]_N$, т. е. элементы множества $2^{[1;n]_N}$. Тогда

$$|\text{«множество индексов коэффициентов»}| = |2^{[1;n]_N}| = 2^{|[1;n]_N|} = 2^n.$$

Таким образом, набор коэффициентов канонического многочлена Жегалкина от n переменных можно рассматривать как 2^n-разрядное двоичное число, а их количество равно 2^{2^n}.

Соотношение (5.5) и вся теорема доказаны. ◄

Следствие из теоремы 5.4. Различные канонические многочлены Жегалкина различны и как функции из $P_2(n)$.

Пример 5.3. Найти канонический многочлен Жегалкина для

$$(x_1 \vee \overline{x_2}) \to x_1 x_2.$$

► **1-й способ (равносильные преобразования).**

$$(x_1 \vee \overline{x_2}) \to x_1 x_2 = \overline{x_1 \vee \overline{x_2}} \vee x_1 x_2 = \overline{x_1} x_2 \vee x_1 x_2 = x_2.$$

2-й способ (метод неопределенных коэффициентов).

$$(x_1 \vee \overline{x_2}) \to x_1 x_2 = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2.$$

Подставляя последовательно в левую и правую части наборы значений переменных (0, 0). (0, 1). (1, 0). (1, 1). получаем

$$(0 \vee 1) \to 0 \cdot 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_{12} 0 \cdot 0$$
$$0 = a_0$$

$$(0 \vee 0) \to 0 \cdot 1 = 0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_{12} 0 \cdot 1$$
$$1 = a_2$$
$$(1 \vee 1) \to 1 \cdot 0 = 0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus a_{12} 1 \cdot 0$$
$$0 = a_1$$
$$(1 \vee 0) \to 1 \cdot 1 = 0 \oplus 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus a_{12} 1 \cdot 1$$
$$1 \to 1 = 1 \oplus a_{12};\ 1 = 1 \oplus a_{12},\ a_{12} = 0.$$ ◄

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Мы перестали в этой главе использовать знак $\equiv$ («равносильно»), так как объектами нашего рассмотрения являются 0–1 функции, а формулы алгебры высказываний мы теперь рассматриваем как один из способов задания этих функций.
2. Существенным «недостатком» канонического многочлена Жегалкина по сравнению с СДНФ и СКНФ является отсутствие простых алгоритмов восстановления по многочлену таблицы значений и по таблице значений многочлена.
3. Пусть $f \in P_2(n)$, $1 \le i \le n$. Говорят, что функция не зависит от переменной x_i (x_i — фиктивная переменная для f), если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \overline{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Докажите, что x_i — фиктивная переменная для f тогда и только тогда, когда канонический многочлен Жегалкина для функции f не содержит в своей сокращенной записи переменную x_i.

5.2 Полнота и замкнутость. Классы Поста P_0 и P_1

Полнота и замкнутость

Определение 5.4 *Пусть $\mathfrak{M} \subset P_2$. Замыканием множества $\mathfrak{M}$ называется множество, обозначаемое $[\mathfrak{M}]$, которое состоит из функций множества $\mathfrak{M}$ и функций, которые могут быть получены из функций множества $\mathfrak{M}$ путем отождествления переменных и суперпозиций (конечным их числом).*

Пример 5.4. $\mathfrak{M} = \{0, 1\}$, $[\mathfrak{M}] = \{0; 1\} = \mathfrak{M}$.
Пример 5.5. $\mathfrak{M} = P_2$, $[\mathfrak{M}] = P_2 = \mathfrak{M}$.
Пример 5.6. $\mathfrak{M} = \{\neg, \vee, \wedge\}$, $[\mathfrak{M}] \stackrel{?}{=} P_2 \neq \mathfrak{M}$.

Определение 5.5 *Множество $\mathfrak{M}$ называется замкнутым, если $[\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$.*

Определение 5.6 *Множество $\mathfrak{M}$ называется полным, если $[\mathfrak{M}] = P_2$.*

Очевидно, $\{0; 1\}$ замкнуто и неполно, P_2 замкнуто и полно, $\{\neg, \vee, \wedge\}$ незамкнуто и полно.

Теорема 5.5 *Имеют место следующие свойства:*
1. $\mathfrak{M} \subset [\mathfrak{M}]$ $\forall \mathfrak{M} \subset P_2$.
2. $[[\mathfrak{M}]] = [\mathfrak{M}]$ $\forall \mathfrak{M} \subset P_2$.
3. $\mathfrak{M}_1 \subset M_2 \Longrightarrow [\mathfrak{M}_1] \subset [\mathfrak{M}_2]$ $\forall \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \subset P_2$.

► Справедливость теоремы следует из определения замыкания (определение 5.4). ◄

Теорема 5.6 *Если $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$, то:*
1) если $\mathfrak{M}_1$ полно, то $\mathfrak{M}_2$ полно;
2) если $\mathfrak{M}_2$ неполно, то $\mathfrak{M}_1$ неполно.

► Очевидно, эта теорема следует из предыдущей и определения полноты (определение 5.6). ◄

Класс P_0 и его свойства

Определение 5.7 *Пусть $f \in P_2(n)$. Говорят, что функция сохраняет ноль, если $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.*

Обозначим через $P_0(n)$ множество функций от n переменных, сохраняющих ноль, а через P_0 — множество всех функций, сохраняющих ноль, т. е.

$$P_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_0(n).$$

Таблица 5 2: $*$ — любой набор из 0 и 1

x_1	x_2	...	x_n	f
0	0	...	1	0
0	0	...	1	$*$
...	...	...	...	$*$
1	1	...	1	$*$

Пример 5.7. $0 \in P_0$, $1 \notin P_0$; $x_1 \vee x_2 \in P_0$, $x_1 \cdot x_2 \in P_0$, $x_1 \to x_2 \notin P_0$.

Теорема 5.7

$$|P_0(n)| = 2^{2^n-1} = \frac{2^{2^n}}{2} = \frac{|P_2(n)|}{2}.$$

► Любая функция алгебры логики может быть задана таблицей. Таблица функции из P_0 характерна тем, что в столбце значений функции вверху (в строке, соответствующей нулевому набору значений переменных, см. табл. 5.2) стоит 0.

Столбец значений функции, сохраняющей 0, можно понимать как 2^n-разрядное двоичное число, у которого в старшем разряде стоит 0, или как $(2^n - 1)$-разрядное двоичное число, а таких чисел

$$2^{(\text{число разрядов})} = 2^{2^n-1}$$ ◄

Теорема 5.8 *Класс P_0 замкнут и неполон, т е.*

$$[P_0] = P_0 \neq P_2.$$

► Так как тождественная функция сохраняет 0, а отождествление переменных — суперпозиция с тождественной функцией (подстановка тождественной функции на места отождествляемых переменных), то для доказательства замкнутости достаточно показать, что суперпозиция функций, сохраняющих ноль, сохраняет ноль. Пусть

$$\Phi(y_1, \dots, y_m), f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in P_0.$$

Докажем, что $F(x_1, \dots, x_n) = \left(\Phi|_{y_i \leftarrow f_i}\right)(x_1, \dots, x_n) \in P_0$

$$F(0,0,\dots,0) = \Phi(f_1(0,\dots,0), f_2(0,\dots,0), \dots, f_m(0,\dots,0)) = \overset{f_i \in P_0}{=} \Phi(0,0,\dots,0) \overset{\Phi \in P_0}{=} 0.$$

Теперь, когда замкнутость P_0 доказана, неполнота P_0 следует из существования функций, не сохраняющих 0 (см пример 5.7). ◄

Лемма 5.1 (о функции, не сохраняющей ноль) *Если $f \notin P_0$, то отождествлением всех ее переменных из нее получается константа 1 или $\neg x$.*

► Пусть $f \notin P_0$, т. е. $f(0,0,\dots,0) = 1$. Рассмотрим $\varphi(x) = f(x,x,\dots,x)$. Ясно, что $\varphi(0) = f(0,0,\dots,0) = 1$. Найдем $\varphi(1)$. Если $\varphi(1) = 1$, то $\varphi(x) = 1$ — константа, если $\varphi(1) = 0$, то $\varphi(x) = \neg x$. ◄

Класс P_1 и его свойства

Определение 5.8 *Пусть $f \in P_2(n)$. Говорят, что функция сохраняет единицу, если* $f(1,1,\dots,1) = 1$.

Обозначим через $P_1(n)$ множество функций от n переменных, сохраняющих единицу, а через P_1 — множество всех функций, сохраняющих единицу, т. е.

$$P_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_1(n).$$

Пример 5.8.

$$1 \in P_1,\ 0 \notin P_1,\ x \in P_1,\ \neg x \notin P_1,\ x_1 \vee x_2 \in P_1,$$
$$x_1 \cdot x_2 \in P_1,\ x_1 \to x_2 \in P_1,\ x_1 \oplus x_2 \notin P_1.$$

Очевидно, имеют место следующие теоремы и лемма.

Теорема 5.9

$$|P_1(n)| = 2^{2^n-1} = \frac{|P_2(n)|}{2}.$$

Теорема 5.10 *Класс P_1 замкнут и неполон, т. е.*

$$[P_1] = P_1 \neq P_2.$$

Лемма 5.2 (о функциях, не сохраняющих единицу) *Если $f \notin P_1$, то отождествлением всех ее переменных из нее получается константа 0 или $\neg x$.*

Вопросы в конце параграфа

1. Самостоятельно докажите теоремы 5.9, 5.10 и лемму о функции, не сохраняющей единицу.
2. Чему равно $|P_0(n) \cap P_1(n)|$, $|P_0(n) \cup P_1(n)|$?
3. Какие из множеств функций замкнуты: $P_2(0)$, $P_2(1)$, $P_2(2)$, $P_1(0)$, $P_1(1)$, $P_1(2)$, $P_0(0)$, $P_0(1)$, $P_0(2)$, $P_0 \cap P_1$, $P_0 \cup P_1$?
4. Какие из множеств функций полны: $P_2(0)$, $P_2(1)$, $P_2(2)$, $P_1(0)$, $P_1(1)$, $P_1(2)$, $P_0(0)$, $P_0(1)$, $P_0(2)$, $P_0 \cap P_1$, $P_0 \cup P_1$?
5. Является ли объединение (пересечение) замкнутых множеств замкнутым множеством?
6. Является ли объединение (пересечение) полных множеств полным множеством?
7. Докажите, что $[\mathfrak{M}_1] \cup [\mathfrak{M}_2] \subset [\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2]$.
8. Приведите пример, когда $[\mathfrak{M}_1] \cup [\mathfrak{M}_2]$ является собственным подмножеством $[\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2]$.

5.3 Классы Поста L и S

Класс L и его свойства

Определение 5.9 *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2(n)$. Говорят, что функция f линейна, если ее канонический многочлен Жегалкина не содержит произведений переменных (т. е. коэффициенты при слагаемых, содержащих произведения переменных, равны нулю).*

Обозначим через $L(n)$ множество линейных функций от n переменных, а через L — множество всех линейных функций, т. е

$$L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L(n).$$

Пример 5.9.

$$1 \in L,\ 0 \in L,\ \neg x = x \oplus 1 \in L,$$
$$x_1 \cdot x_2 \notin L,\ x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \notin L,$$
$$x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2 = (x_1 \oplus 1) \cdot x_2 \oplus (x_1 \oplus 1) \oplus x_2 =$$
$$= x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \notin L,\ x_1 \oplus x_2 \in L.$$

Теорема 5.11

$$|L(n)| = 2^{n+1}.$$

► Линейный канонический многочлен Жегалкина от n переменных имеет вид

$$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \cdots \oplus a_n x_n.$$

Он взаимно однозначно определяется набором своих коэффициентов $a_0 a_1 \ldots a_n$. Так как коэффициенты принимают значения во множестве $E_2 = \{0; 1\}$, то набор коэффициентов можно рассматривать как $(n+1)$-разрядное двоичное число, а их

$$2^{(\text{число разрядов})} = 2^{n+1}. \qquad ◄$$

Теорема 5.12 *Класс L замкнут и неполон, т. е.*

$$[L] = L \neq P_2.$$

► Так как тождественная функция линейна, то для доказательства замкнутости нужно доказать, что суперпозиция линейных функций — линейная функция.

Пусть

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m) = b_0 \oplus b_1 y_1 \oplus b_2 y_2 \oplus \cdots \oplus b_m y_m,$$
$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0^1 \oplus a_1^1 x_1 \oplus a_2^1 x_2 \oplus \cdots \oplus a_n^1 x_n,$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0^2 \oplus a_1^2 x_1 \oplus a_2^2 x_2 \oplus \cdots \oplus a_n^2 x_n,$$
$$\ldots$$
$$f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0^m \oplus a_1^m x_1 \oplus a_2^m x_2 \oplus \cdots \oplus a_n^m x_n,$$

Образуем

$$
\begin{aligned}
F(x_1,\ldots,x_n) &= (\Phi|_{y_i \leftarrow f_i})(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \\
&= b_0 \oplus b_1(a_0^1 \oplus a_1^1 x_1 \oplus a_2^1 x_2 \oplus \cdots \oplus a_n^1 x_n) \oplus \\
&\quad \oplus b_2(a_0^2 \oplus a_1^2 x_1 \oplus a_2^2 x_2 \oplus \cdots \oplus a_n^2 x_n) \oplus \\
&\quad \oplus \cdots \oplus \\
&\quad \oplus b_m(a_0^m \oplus a_1^m x_1 \oplus a_2^m x_2 \oplus \cdots \oplus a_n^m x_n) = \\
&= c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \cdots \oplus c_n x_n,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
c_0 &= b_0 \oplus b_1 a_0^1 \oplus b_2 a_0^2 \oplus \cdots \oplus b_m a_0^m, \\
c_1 &= b_1 a_1^1 \oplus b_2 a_1^2 \oplus \cdots \oplus b_m a_1^m, \\
c_2 &= b_1 a_2^1 \oplus b_2 a_2^2 \oplus \cdots \oplus b_m a_2^m, \\
&\ldots, \\
c_n &= b_1 a_n^1 \oplus b_2 a_n^2 \oplus \cdots \oplus b_m a_n^m.
\end{aligned}
$$

Значит, $F(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in L$ и замкнутость L доказана. После того как замкнутость L доказана, неполнота L следует из существования нелинейных функций (см. пример 5.9). ◄

Лемма 5.3 (о нелинейной функции) *Из произвольной нелинейной функции с помощью подстановки констант и отрицания можно получить конъюнкцию двух переменных.*

► Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \notin L$, значит, в ее каноническом многочлене Жегалкина присутствуют слагаемые, содержащие произведения каких-то переменных. Не нарушая общности, будем считать, что нелинейность проявилась за счет присутствия слагаемых, содержащих x_1x_2 (и, может быть, и другие переменные в качестве сомножителей в этих слагаемых). Представим тогда нашу функцию в виде:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = &\underbrace{a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \cdots \oplus a_nx_n}_{\text{линейная часть канонического многочлена}} \oplus \\
&\oplus x_1x_2f_1(x_3,x_4,\ldots,x_n) \oplus x_1f_2(x_3,x_4,\ldots,x_n) \oplus \\
&x_2f_3(x_3,x_4,\ldots,x_n) \oplus f_4(x_3,x_4,\ldots,x_n).
\end{aligned}
$$

Слагаемое $x_1x_2f_1(x_3,\ldots,x_n)$ получилось группировкой в нелинейной части всех слагаемых, содержащих x_1x_2, и вынесением x_1x_2 за скобки, слагаемое $x_1f_2(x_3,\ldots,x_n)$ получилось группировкой в нелинейной части всех слагаемых, содержащих x_1 и не содержащих x_2, и вынесением x_1 за скобки, аналогично получается $x_2f_3(x_3,x_4,\ldots,x_n)$, а $f_4(x_3,x_4,\ldots,x_n)$ остается от нелинейной части после выделения $x_1x_2f_1$, x_1f_2, x_2f_3. По нашему предположению, $f_1(x_3,x_4,\ldots,x_n) \neq 0$. Это означает, что существует такой набор значений переменных $x_3,\ldots,x_n$ — $\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_n$, что $f_1(\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_n) = 1$. Подставляя константы $\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ из этого набора в функцию f, получаем

$$
\varphi(x_1,x_2) = f(x_1,x_2,\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_n) = a_0' \oplus a_1'x_1 \oplus a_2'x_2 \oplus x_1x_2, \tag{5.6}
$$

где

$$
\begin{aligned}
a_0' &= a_0 \oplus a_3\alpha_3 \oplus a_4\alpha_4 \oplus \cdots \oplus a_n\alpha_n \oplus f_4(\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_n), \\
a_1' &= a_1 \oplus f_2(\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_n), \\
a_2' &= a_2 \oplus f_3(\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_n).
\end{aligned}
$$

Покажем, что пользуясь средствами, разрешенными условиями леммы, можно избавиться в (5.6) от слагаемых первой степени.

Образуем функцию $\psi(x_1,x_2) = \varphi(x_1 \oplus \alpha, x_2 \oplus \beta)$, где $\alpha,\beta \in \{0;1\}$ (если $\alpha = 0$, то $x_1 \oplus \alpha = x_1$, если $\alpha = 1$, то $x_1 \oplus \alpha = \overline{x}_1$, если $\beta = 0$, то $x_2 \oplus \beta = x_2$, если $\beta = 1$, то $x_2 \oplus \beta = \overline{x}_2$).

$$
\begin{aligned}
\psi(x_1,x_2) &= a_0' \oplus a_1'(x_1 \oplus \alpha) \oplus a_2'(x_2 \oplus \beta) \oplus (x_1 \oplus \alpha)(x_2 \oplus \beta) = \\
&(a_0' \oplus a_1'\alpha \oplus a_2'\beta \oplus \alpha\beta) \oplus (a_1' \oplus \beta)x_1 + (a_2' \oplus \alpha)x_2 \oplus x_1x_2.
\end{aligned}
$$

Полагая $\alpha = a_2'$, $\beta = a_1'$, получаем

$$
\psi(x_1,x_2) = (a_0' \oplus a_1'a_2') \oplus x_1x_2,
$$

если $a_0' \oplus a_1' \cdot a_2' = 0$, то лемма доказана, а если $a_0' \oplus a_1'a_2' = 1$, то $\psi(x_1,x_2) = x_1x_2 \oplus 1 = \overline{x_1x_2}$.

Рассмотрим функцию

$$
\psi_1(x_1,x_2) = \overline{\psi(\overline{x_1},\overline{x_2})} = \overline{\overline{x_1 x_2}} = x_1x_2. \quad ◄
$$

Класс S и его свойства

Определение 5.10 *Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_2$. Говорят, что функция f самодвойственна, если*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, x_n) \stackrel{def}{=} \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}.$$

Обозначим через $S(n)$ множество самодвойственных функций от n переменных, а через S — множество всех самодвойственных функций, т. е.

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S(n).$$

Пример 5.10. $0 \notin S,\ 1 \notin S,\ x \in S, \overline{x} \in S,\ x_1 \vee x_2 \notin S,\ x_1 \cdot x_2 \notin S.$

Теорема 5.13

$$|S(n)| = 2^{2^{n-1}}$$

► Таблица самодвойственной функции характерна тем, что столбец ее значений переходит сам в себя при инвертировании (см. § 1.3). Тогда задание верхней половины столбца значений самодвойственной функции однозначно определяет нижнюю половину столбца функции

x_1	x_2	$\dots$	x_n	$f = f^*$
0	0	...	0	$\square$
0	0	...	1	$\triangle$
...	...	...	...	...
1	1	...	0	$\overline{\triangle}$
1	1	...	0	$\overline{\square}$

Верхнюю половину столбца значений можно рассматривать как 2^{n-1}-разрядное двоичное число, а таких чисел

$$2^{(\text{число разрядов})} = 2^{2^{n-1}}.$$ ◄

Теорема 5.14 *Класс самодвойственных функций замкнут и неполон, т. е.*

$$[S] = S \neq P_2.$$

► Так как тождественная функция самодвойственна, то для доказательства замкнутости нужно доказать, что суперпозиция самодвойственных функций является самодвойственной функцией.

Пусть $\Phi(y_1, \dots, y_m), f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in S$. Образуем $F(x_1, \dots, x_n) = (\Phi_{y_i \leftarrow f_i})(x_1, \dots, x_n)$. Найдем F^*. По общему принципу двойственности (§ 1.3) имеем:

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\Phi^*|_{y_i \leftarrow f_i^*})(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\Phi=\Phi^*,\ f_i=f_i^*}{=}$$
$$= (\Phi|_{y_i \leftarrow f_i})(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n).$$

Самодвойственность F доказана.

Теперь, когда замкнутость S доказана, неполнота S следует из существования несамодвойственных функций (см. пример 5.10). ◄

Лемма 5.4 (о несамодвойственной функции) *Из любой несамодвойственной функции с помощью отрицания и отождествления переменных можно получить константы 0 и 1.*

► Пусть $f \notin S$. Это означает, что $f(x_1, \dots, x_n) \neq f^*(x_1, \dots, x_n)$; значит, существует такой набор значений переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, что

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq f^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ или}$$
$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq \overline{f(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n})}.$$

Значит,

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}). \tag{5.7}$$

Рассмотрим $\varphi(x) = f(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n})$. Тогда

$$\varphi(0) = f(0^{\alpha_1}, 0^{\alpha_2}, \dots, 0^{\alpha_n}) = f(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}),$$
$$\varphi(1) = f(1^{\alpha_1}, 1^{\alpha_2}, \dots, 1^{\alpha_n}) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Учитывая (5.7), получаем, что $\varphi(0) = \varphi(1)$, т. е. $\varphi(x)$ — константа, $\overline{\varphi(x)}$ — вторая константа. ◄

Пример 5.11. Продемонстрируем теперь «работу» этой леммы на примере функции $x_1 \vee x_2$. Набор (α_1, α_2), о котором идет речь в лемме, — $(0, 1)$, тогда $\varphi(x) = \overline{x} \vee x = 1$.

Вопросы в конце параграфа

1. Чему равно $|S(n) \cap P_0(n)|$, $|S(n) \cup P_0(n)|$, $|S(n) \cap P_1(n)|$, $|S(n) \cup P_1(n)|$?
2. Рассмотрите «работу» леммы о нелинейных функциях на примере функции $x_1 \to x_2$, леммы о несамодвойственных функциях на примере $x_1 \cdots x_2 \vee x_3$.
3. Докажите, что $P_2(0) = L(0)$, $P_2(1) = L(1)$, $P_2(2) \neq L(2)$.

5.4 Класс Поста M

Определение 5.11 *Введем на множестве E_2^n бинарное отношение «$\preccurlyeq$» следующим:*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \Longleftrightarrow \forall i\ (\alpha_i \leq \beta_i). \qquad (5.8)$$

Пример 5.12.

$$(0,1) \preccurlyeq (1,1),\ (0,0,0) \preccurlyeq (1,0,1),\ (0,1) \not\preccurlyeq (1,0),$$
$$(1,0) \not\preccurlyeq (0,1),\ (1,1) \preccurlyeq (1,1).$$

Теорема 5.15 *Бинарное отношение $\preccurlyeq$ на множестве E_2^n является отношением порядка, причем при $n \geq 2$ $\preccurlyeq$ — частичный порядок*

► ◄

Определение 5.12 *Пусть $f \in P_2(n)$. Говорят, что f монотонна, если для любых наборов значений переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ таких, что $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, выполняется*

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Обозначим через $M(n)$ множество монотонных функций от n переменных, а через M — множество всех монотонных функций, т. е.

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M(n).$$

Пример 5.13. Рассмотрим множество $P_2(2)$ и определим, какие функции из $P_2(2)$ монотонны. f_0 =«0», f_1 =«$\wedge$», f_3 =«x_1», f_5 =«x_2», f_7 =«$\vee$». $f_{15} = 1 \in M$; f_2, f_4, f_6, f_8, f_9, f_{10}, f_{12}, f_{13}, $f_{14} \notin M$.

Теорема 5.16 *Класс M замкнут и неполон, т. е.*

$$[M] = M \neq P_2.$$

► Так как тождественная функция монотонна, то для доказательства замкнутости достаточно показать, что суперпозиция монотонных функций монотонна. Пусть $\Phi \in P_2(m)$, $f_i \in P_2(n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Докажем, что

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\Phi|_{y_i \leftarrow f_i})(x_1, \ldots, x_n) \in M.$$

Возьмем $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — два произвольных набора значений переменных таких, что

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

тогда

$$\xi_1 = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f_1(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \eta_1,$$
$$\xi_2 = f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f_2(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \eta_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi_m = f_m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f_m(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \eta_m.$$

Тогда $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \preccurlyeq (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$, а так как

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in M,$$

то

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \leq \Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m),$$

но

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$
$$\Phi(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) = F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Монотонность $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ доказана, а значит, доказана и замкнутость M. После того как замкнутость M доказана, неполнота M следует из существования немонотонных функций (см. пример 5.13). ◄

Лемма 5.5 (о немонотонной функции) *Из произвольной немонотонной функции с помощью подстановки констант и отождествления переменных можно получить отрицание.*

► Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin M$. Это означает, что существуют такие наборы значений переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, что $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, а $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) > f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Последнее означает, что $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$, $f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0$. Из того, что $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ следует, что $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Выделим подпоследовательность индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ такую, что $\alpha_{i_1} = \beta_{i_1}, \alpha_{i_2} = \beta_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k} = \beta_{i_k}$. $\alpha_i \neq \beta_i$, $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_k$. Последнее в сочетании с тем, что $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ означает, что $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_k$. Образуем функцию $\varphi(x)$, подставив на места $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ соответственно, а в остальные позиции — x. Тогда

$$\varphi(0) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1,$$
$$\varphi(1) = f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0,$$

т. е. $\varphi(x) = \overline{x}$. ◄

Пример 5.14. Рассмотрим «работу» этой леммы на примере функции $x_1 \to x_2$. В качестве набора (α_1, α_2) возьмем набор $(0, 0)$, а набора (β_1, β_2) — набор $(1, 0)$, тогда, следуя лемме,

$$\varphi(x) = x \to 0 = \overline{x} \vee 0 = \overline{x}.$$

Мы рассмотрели пять классов функций — P_0, P_1, L, S, M. Они называются классами Поста в честь американского математика Эмиля Поста[2] — крупнейшего специалиста в области дискретной математики. Ему принадлежит и следующая теорема — критерий полноты, которой мы посвятим следующий параграф. Заметим, что для каждого класса Поста мы доказали его замкнутость и неполноту (это потребуется нам при доказательстве необходимости в теореме Поста) и лемму о функциях, не

[2] Пост Эмиль (1897–1954) — родился в Польше, работал в США. Основные труды Э. Поста относятся к математической логике (в том числе по m-значным логикам) и основаниям математики.

принадлежащих классу (эти леммы будут работать при доказательстве достаточности).

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Заметим, что монотонными мы назвали только монотонно возрастающие функции. Ясно, что можно определить и монотонно убывающие функции, однако если монотонными назвать и те, и другие, то для такого монотонного класса пропадет свойство замкнутости.
2. Докажите самостоятельно утверждение, сформулированное в замечании 1.

5.5 Критерий полноты (теорема Поста)

Мы знаем, что множества функций $\{\neg, \vee, \wedge\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$ полны. Сейчас мы сформулируем и докажем общий критерий полноты.

Теорема 5.17 (теорема Поста — критерий полноты)

1-я формулировка.

Для того, чтобы множество $\mathfrak{M}$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы оно не являлось подмножеством ни одного из классов Поста: P_0, P_1, L, S, M.

2-я формулировка.

Для того, чтобы множество $\mathfrak{M}$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого класса Поста P_0, P_1, L, S, M среди функций из $\mathfrak{M}$ нашлась функция, не принадлежащая этому классу Поста.

Чтобы дать третью формулировку теоремы, определим, что такое таблица Поста для множества $\mathfrak{M}$. Столбцы таблицы соответствуют классам Поста: P_0, P_1, L, S, M. Строки — функциям из $\mathfrak{M}$. В клетках таблицы проставляются «+» или «−» в зависимости от того, принадлежит ли функция соответствующему классу или не принадлежит.

3-я формулировка.

Для того, чтобы множество $\mathfrak{M}$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце таблицы Поста множества $\mathfrak{M}$ был хотя бы один минус.

► **Необходимость** ►

Докажем ее от противного, т. е. предположим, что существует такое полное множество $\mathfrak{M}'$, которое является подмножеством хотя бы одного из классов Поста. Обозначим этот класс П. Тогда $\mathfrak{M}' \subset П$.

Перейдем к замыканиям. Тогда (см. теорему 5.5)

$$[\mathfrak{M}'] \subset [П]. \qquad (5.9)$$

Но, по нашему предположению, $[\mathfrak{M}'] = P_2$, а по свойствам класса Поста $[П] = П \neq P_2$ и из (5.9) мы получаем, что

$$P_2 \subset П \neq P_2.$$

Так как $П \subset P_2$, получаем $P_2 \underset{\text{строго}}{\subset} P_2$.

Полученное противоречие и доказывает необходимость. ◄ Необходимость

Достаточность ►

Прежде чем провести доказательство достаточности, введем условные обозначения для доказанных лемм (см. рис. 5.1).

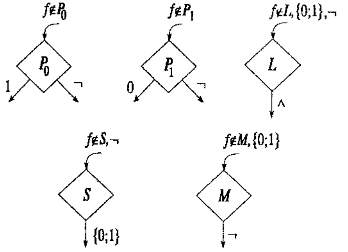


Рис. 5.1.

Смысл обозначений становится ясным, если еще раз вспомнить соответствующие леммы: на входе указано, что необходимо иметь, чтобы можно было применить лемму; на выходе – то, что может быть получено в результате применения леммы.

Обозначим через f_0 функцию из $\mathfrak{M}$, которая не принадлежит P_0; через f_1 — функцию из $\mathfrak{M}$, которая не принадлежит P_1; через f_L — функцию из $\mathfrak{M}$, которая не принадлежит L; через f_S — функцию из $\mathfrak{M}$, которая не принадлежит S; через f_M — функцию из $\mathfrak{M}$, которая не принадлежит M. Покажем, что используя леммы, из них можно будет построить $\neg$ и $\wedge$, т. е. что в $[\mathfrak{M}] \supset \{\neg, \wedge\}$, что и будет означать полноту $\mathfrak{M}$ (см. теорему 5.6). Построение задается следующей схемой (см. рис. 5.2).

◄ Достаточность ◄

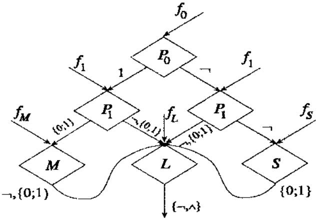


Рис. 5.2.

Следствие 5.1 *В любом полном множестве существует полное подмножество, состоящее не более чем из пяти функций.*

► Очевидно, множество функций $\{f_0; f_1; f_L; f_S; f_M\}$, с которым приходится работать при доказательстве достаточности, подходит для доказательства этого следствия. ◄

Следствие 5.2 *В любом полном множестве существует полное подмножество, состоящее не более чем из четырех функций.*

► Покажем, что во множестве $\{f_0; f_1; f_L; f_S; f_M\}$ в случае, когда $|\{f_0; f_1; f_L; f_S; f_M\}| = 5$, можно произвести «сокращение штатов». Рассмотрим функцию f_0 и вычислим ее значение на единичном наборе. Если $f_0(1, 1, \ldots, 1) = 0$, то $f_0 \notin P_1$, и набор $\{f_0; f_L; f_S; f_M\}$ образует полное подмножество.

Если $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$, то $f_0 \notin S$ и $\{f_0; f_1; f_L; f_M\}$ образует полное подмножество. ◄

Замечания и вопросы в конце пáраграфа

1. Основным критерием истинности в математике является логическая безупречность доказательства. Однако автор этого курса смеет утверждать, что существует еще одно необходимое условие истинности математического утверждения. Это условие эстетическое — «верным» в математике может быть только «красивый результат», а «справедливым» — только «красивое доказательство». Если доказательство некрасиво, то либо оно неверно, либо есть другое, «красивое», доказательство. Ярким примером этого является теорема Поста и ее доказательство. Эстетическому условию удовлетворяет даже приведенная на рисунке 5.2 схема доказательства достаточности.
Наличие эстетического начала в содержании и в методах математики выделяют ее в ряду других наук (как естественных, так и гуманитарных) и придают ей особый характер. Красота и гармония математики (вплоть до самых ее абстрактных разделов) вдохновляла и вдохновляет не только математиков, но и поэтов, композиторов, художников, скульпторов. Более того, в течение тысячелетий продолжаются попытки (к счастью, бесплодные) обратить утверждение о красоте математики, получив математические критерии эстетичности (теория золотого сечения, математические основы стихосложения и т. п.). Ясно, что сводимость эстетического к математическому не может быть доказана, однако отрицать наличие связей между ними не приходится и, значит, имеют право на жизнь математические живопись, музыка, поэзия, как и живописная, музыкальная, поэтичная математика.

2. Проверьте с помощью теоремы Поста на полноту следующие системы функций:

$$\{\uparrow\},\quad \{\sim, \vee, \neg\},\quad \{|\},\quad \{\to, \neg\},\quad \{\vee, \wedge, \circ\}.$$

3. Базисом в P_2 называется полная система функций, у которых никакое собственное подмножество не является полной системой.
Докажите, что любой базис в P_2 содержит не более пяти функций; приведите примеры базисов, состоящих из одной, двух, трех, четырех, пяти функций.

5.6 Предполные классы и их свойства

Вспомним, что изучая классы P_0, P_1, L, S, M, мы получали утверждения одного типа для этих внешне различных классов. Оказывается (и об этом пойдет речь дальше), эти классы связаны между собой близким родством — все они охватываются одним общим определением, их порождающим, и других родственников такого типа у них нет. Все результаты, о которых мы будем говорить сейчас, не имеют конкретных приложений, однако они завершают этот красивый раздел, придавая ему математически завершенный характер. Обращаем ваше внимание на необычную структуру изложения и получения результатов, которая характерна более для «чистой», нежели для прикладной математики: исходное определение порождает объект — предполные классы, и априори не ясно, существуют ли они. Затем, отправляясь от определения, мы изучаем свойства этих классов (оставляя открытым вопрос об их существовании). Полученные свойства позволяют понять, где их искать. Последней идет теорема о существовании этих классов, в которой доказывается, что эти объекты (предполные классы) существуют и их список исчерпывается классами P_0, P_1, L, S, M.

Определение 5.13 $P(\subset P_2)$ *называется предполным классом, если*

1) P неполон, т. е. $[P] \neq P_2$;

2) $\forall f (f \notin P \Longrightarrow [P \cup \{f\}] = P_2)$, т. е. добавление к предполному классу любой функции, ему не принадлежащей, приводит к образованию полного множества.

Таким образом, определение 5.13 дает описание неполного множества, максимально близкого по вложению к полному множеству.

Свойства предполных классов

1. Предполный класс замкнут.

► Предположим противное, т. е. что существует $\mathbb{P}$ — незамкнутый предполный класс. Значит, $\mathbb{P} \underset{\text{строго}}{\subset} [\mathbb{P}]$.

Следовательно, существует функция $f \in [\mathbb{P}]$ и $f \notin \mathbb{P}$ (расположенная в «зазоре» между $\mathbb{P}$ и $[\mathbb{P}]$). Тогда, по п. 2 определения 5.13, $\mathbb{P} \cup \{f\}$ — полное множество, т. е. $[\mathbb{P} \cup \{f\}] = P_2$. С другой стороны, так как $f \in [\mathbb{P}]$, то $[\mathbb{P} \cup \{f\}] = [\mathbb{P}] \neq P_2$ (см. п. 1 определения 5.13). Полученное противоречие и доказывает требуемое. ◄

2. Предполный класс не может быть строго вложен ни в один из классов Поста: P_0, P_1, L, S, M.

► Допустим противное, т. е. что существует такой предполный класс Q, для которого среди классов Поста P_0, P_1, L, S, M найдется такой (обозначим его Π, т. е. $\Pi \in (P_0, P_1, L, S, M\})$, что $Q \underset{\text{строго}}{\subset} \Pi$. Выберем f из «зазора» между Q и Π, т. е. $f \in \Pi$ и $f \notin Q$, тогда

$$P_2 = [Q \cup \{f\}] \subset [\Pi] = \Pi \neq P_2.$$

Эта цепочка и дает требуемое противоречие. Для записи самой цепочки мы воспользовались п. 2 определения 5.13, а также замкнутостью и неполнотой любого класса $\Pi \in \{P_0, P_1, L, S, M)$. ◄

3. Любой предполный класс (если таковые существуют) совпадает с одним из классов Поста.

► Предположим противное, т. е. что существует предполный класс R такой, что

$$R \neq P_0,\ R \neq P_1,\ R \neq L,\ R \neq S,\ R \neq M.$$

Объединяя это со свойством 2, получим:

$$R \neq P_0 \text{ и } R \underset{\text{строго}}{\not\subset} P_0;\ R \neq P_1 \text{ и } R \underset{\text{строго}}{\not\subset} P_1;\ R \neq L \text{ и } R \underset{\text{строго}}{\not\subset} L;$$
$$R \neq S \text{ и } R \underset{\text{строго}}{\not\subset} S;\ R \neq M \text{ и } R \underset{\text{строго}}{\not\subset} M.$$

Значит, R удовлетворяет условиям теоремы Поста (1-я формулировка), и значит, R — полное множество, что противоречит п. 1 определения 5.13. ◄

Теорема 5.18 *Предполными классами являются P_0 P_1, L, S, M. Других предполных классов нет.*

► Нам нужно доказать, что классы P_0, P_1, L, S, M предполны. Это можно сделать, используя таблицу Поста для функций 1, 0, $\neg x$, $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, $x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$.

	P_0	P_1	L	S	M
0	+	−	+	−	+
1	−	+	+	−	+
$\neg x$	−	−	+	+	−
$x_1 \cdot x_2$	+	+	−	−	+
$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	+	+	+	+	−
$x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$	+	+	−	+	+

Покажем, как работает эта таблица при доказательстве предполноты P_0. Мы знаем, что P_0 неполон, поэтому нам осталось доказать, что если $f \notin P_0$, то $P_0 \cup \{f\}$ — полная система. Воспользуемся теоремой Поста. Покажем, что в таблице Поста для $P_0 \cup (f)$ в каждом столбце есть хотя бы один минус. Функция f дает минус в столбце P_0, минусы для остальных столбцов будем искать с помощью выписанной таблицы в P_0. Действительно, $0 \in P_0$ и дает минусы по столбцам P_1 и S, $x_1 x_2 \in P_0$ и дает минус по столбцу L, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \in P_0$ и дает минус по столбцу M.

Аналогично доказывается с помощью выписанной таблицы предполнота P_1, L, S, M. ◄

В конце параграфа еще раз отметим совершенство изложенной теории предполных классов — все на своем месте и результаты таковы, что «ни убавить, ни прибавить».

Вопросы в конце параграфа

1. Докажите самостоятельно предполноту P_1, L, S, M.
2. Какими из свойств (замкнутость, полнота, предполнота) обладают множества:

$$P_0 \cup P_1; \quad P_0 \cup S, \quad P_0 \cup L, \quad P_0 \cup M,$$
$$P_1 \cup S, \quad \ldots. \quad S \cup M, \quad P_0 \cap P_1,$$
$$P_0 \cap S, \quad P_0 \cap L, \cap P_0 \cap M, \ldots$$
$$P_1 \cap S, \quad \ldots, \quad S \cap M?$$

Глава 6

Элементы теории алгоритмов

6.1 Что такое алгоритм? Вводиые понятия

Этот раздел курса не выглядит привычной математической теорией, которая выстроена в соответствии со своей внутренней логикой. Он рожден приложениями математики, саязанными с решениями различных вычислительных задач.

Что значит «вычислить»? Какими возможностями для этого мы располагаем? Всегда ли возможно решить задачу? Что такое задача? Что такое процесс ее решения?

Здесь будет изложен подход к теории алгоритмов как к теории абстрактной вычислительной машины (абстрактной машины Тьюринга[1]). Существуют и другие равносильные подходы к теории алгоритмов (теория рекурсивных функций, теория нормальных алгорифмов), однако их мы касаться не будем.

Теория алгоритмов представляет собой теоретические основы всей прикладной математики, особенно ее компьютерной части, так как она дает

[1]Тьюринг Алан (1912–1954) — английский математик и инженер, член Лондонского Королевского общества, возглавлял работы по созданию первых английских ЭВМ; математические работы по логике, теории алгоритмов, основам кибернетики; автор книги «Может ли машина мыслить?», переведенной на русский язык в 1960 г

ответы на вопросы, поставленные в самом начале параграфа (см. 2-й абзац сверху).

Абстрактная машина Тьюринга может рассматриваться как простейшая и одновременно всеохватывающая модель любой реальной ЭВМ. Простота ее устройства и принцип работы не оставляет даже места для возникновения вопроса «Может ли машина мыслить?».

1. Понятие об алгоритме

Алгоритм — первичное, неопределяемое понятие. Чтобы извлечь его из нашего подсознания, вспомним алгоритм нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел — a, b:

1) разложить a на простые множители;

2) повторить п. 1 для b и перейти к п. 3;

3) составить произведение общих простых множителей из разложений a и b с показателями, равными наименьшим из показателей вхождения в разложения.

Проанализировав этот пример, отметим важнейшие черты (свойства) алгоритма:

1. **Массовость** — применимость алгоритма не к одной задаче, а к классу задач.

2. **Дискретность** — четкая разбивка на отдельные этапы (шаги) алгоритма.

3. **Детерминированность** — такая организация этапов выполнения, при которой для перехода от одного этапа к другому не приходится прибегать к датчикам случайных чисел, гаданию на кофейной гуще и т. п.

4. **Конечность** — для получения результата при применении алгоритма к решению конкретной задачи выполняется конечная последовательность шагов алгоритма.

Вопросы «Что такое алгоритм?», «Что такое алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы?» стали особенно актуальными в XX веке в связи с развитием ЭВМ и естественной потребностью в анализе их возможностей. Теория алгоритмов была создана совместными (параллельными) усилиями, в основном американских, английских и советских математиков. Осмысление понятия алгоритм потребовало и пересмотра многих философских воззрений на мышление как творческий процесс. Всегда ли, когда человек работает «головой», он думает? Если часть «головной» работы переложена на машину, то следует ли считать, что машина думает? Решение этих философских проблем принадлежит одному из крупнейших математиков XX в., основоположнику кибернетики Н. Винеру и А. Тьюрингу

2. Алфавит, буквы, слова. Операции над словами, запись слова на бесконечной ленте

Определение 6.1 *Алфавит — непустое конечное (как правило) множество, элементы алфавита — буквы.*

Определение 6.2 *Словом длины n ($n \in \mathbb{N}$) над алфавитом A (в алфавите A) называется отображение $u : [1; n]_{\mathbb{N}} \to A$.*

Пример 6.1. Пусть $A = \{|; *\}$, $n = 5$. $u(1) = |$, $u(2) = |$, $u(3) = *$, $u(4) = |$, $u(5) = *$, $u = |\,|\,*\,|\,*$.

Определение 6.3 *Пусть u и v — слова над алфавитом A длины n_1 и n_2 соответственно. Упорядоченной склейкой слов u и v называется слово uv длины $n_1 + n_2$, заданное следующим правилом:*

$$uv(i) = \begin{cases} u(i), & \text{если } 1 \le i \le n_1, \\ v(i - n_1), & \text{если } n_1 < i \le n_1 + n_2. \end{cases}$$

Пример 6.2. $A = \{|; *\}$, $u = |\,|\,*\,|\,*$, $v = *\,*\,|$, тогда $uv = |\,|\,*\,|\,*\,*\,*\,|$, $vu = *\,*\,|\,|\,|\,*\,|\,*$.

Пусть A — алфавит и $\wedge \notin A$. Назовем $\wedge$ пустым символом, а $A \cup \{\wedge\}$ — алфавитом с пустым символом.

Определение 6.4 *Бесконечной записью конечного слова над алфавитом A в алфавите с пустым символом называется отображение $f : \mathbb{Z} \to A \cup \{\wedge\}$, удовлетворяющее следующим условиям: существуют $n_1 < n_2$ (n_1, $n_2 \in \mathbb{Z}$) такие, что*

1) $f((-\infty; n_1)_{\mathbb{Z}}) = f((n_2; +\infty)_{\mathbb{Z}}) = \{\wedge\}$.

2) $f([n_1; n_2]_{\mathbb{Z}}) \subset A$.

Длиной слова называется величина $n_2 - n_1 + 1$. $f(n_1)$ называется первой буквой слова, $f(n_1 + 1)$ — второй буквой, ..., $f(n_2)$ — последней ($(n_2 - n_1 + 1)$-й) буквой.

Бесконечная запись конечного слова называется еще записью слова на бесконечной ленте. (Заметим, что запись слова привязана к конкретному участку ленты — $[n_1; n_2]_{\mathbb{Z}}$.)

Определение 6.5 *Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Сдвигом τ_n называется отображение $\tau_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, заданное правилом:*

$$(\tau_n)(i) = i + n.$$

Теорема 6.1 *Множество сдвигов $\{\tau_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ относительно операции $\circ$ — композиции образует коммутативную (абелеву) группу.*

► Очевидно, $\tau_n \circ \tau_m = \tau_{n+m}$, тогда отображение, сопоставляющее сдвигу τ_n целое число n, есть гомоморфизм множества сдвигов $\{\tau_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ с операцией $\circ$ во множество $\mathbb{Z}$ с операцией $+$, а целые числа относительно сложения образуют абелеву группу. ◄

Пусть $A \cup \{\wedge\}$ — алфавит с пустым символом. На множестве бесконечных записей конечных слов над A введем отношение $\sim$ следующим:

$$u \sim v \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n (\in \mathbb{Z})\ (u \circ \tau_n = v) \equiv 1.$$

Теорема 6.2 *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.*

► Докажите самостоятельно. ◄

Обозначим через $v(A)$ множество бесконечных записей конечных слов над алфавитом A.

Рассмотрим $v(A)/\sim$. Элементы этого множества и называются записями слов на бесконечной ленте.

Вопросы в конце параграфа

1. Докажите, что склейка слов — коммутативная операция над словами тогда и только тогда, когда $|A| = 1$.
2. Приведите пример унарной операции над словами.

2 Машина Тьюринга. Описание. Примеры машин

Машина Тьюринга имеет три алфавита:

1. Внешний алфавит с пустым символом — $A \cup \{\wedge\}$.
2. Внутренний алфавит, или алфавит состояний $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$. Состояние q_0 называется заключительным состоянием, q_1 — начальным состоянием, состояния $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — рабочими состояниями.
3. Алфавит сдвигов $S = \{-1, 0, +1\}$.

В конструкции машины имеются:

а) бесконечная лента (разбитая на ячейки), предназначенная для размещения бесконечных записей конечных слов над алфавитом A (по одной букве в ячейке);

б) считывающе-записывающее устройство (СЗУ). СЗУ обладает способностью обозревать одну ячейку ленты, считывать букву, записанную в ячейке, заносить на место считываемой буквы любую другую из $A \cup \{\wedge\}$, передвигаться вдоль ленты влево и вправо на одну ячейку;

в) устройство управления (УУ), которое управляет с помощью программы машины ее работой;

г) программа машины, определяющая переходы машины от одной конфигурации к другой.

Под конфигурацией машины понимают пару: слово с отметкой и состояние машины.

Словом с отметкой называют слово, записанное на ленте с указанием обозреваемой СЗУ ячейки.

Программа машины — отображение $\Pi : A \cup \{\wedge\} \times Q \setminus \{q_0\} \to A \cup \{\wedge\} \times Q \times S$, т. е. правило, сопоставляющее любой паре (a, q_i) — буква-состояние тройку: (b, q, s) — буква-состояние-сдвиг.

Так как A, Q — конечны, то программу машины можно задать таблицей (см. табл. 6.1).

Правила работы машины (правила обращения УУ с программой и СЗУ)

Машина работает дискретно (пошагово). На каждом шаге происходит переход от одной конфигурации к другой. Перед началом работы машина

Таблица 6.1:

$A \cup \{\wedge\}$	$Q \setminus \{q_0\}$				
	q_1	$\ldots$	q_j	$\ldots$	q_n
a_1					
a_2					
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_i			$(b; q; s)$		
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_m					
$\wedge$					
$(b; q; s) = \Pi((a_i, q_j))$.					

находится в начальной конфигурации: СЗУ обозревает первую букву слова, а машина находится в начальном состоянии q_1. СЗУ считывает букву, находящуюся в обозреваемой ячейке. УУ обращается к программе машины: находит клетку, соответствующую считанной букве и состоянию машины. Пусть в этой клетке находится тройка $(a; q; s)$, тогда буква a заносится в обозреваемую ячейку, машина переводится в состояние q, а СЗУ совершает сдвиг на одну ячейку влево, если $s = -1$, на одну ячейку вправо, если $s = +1$, и остается на месте, если $s = 0$. На этом завершена работа машины на первом шаге, и она готова к выполнению следующего аналогичного шага и т. д.

Работа машины продолжается до тех пор, пока на каком-то из шагов машина не придет в состояние q_0. Устройство управления в этом случае останавливает машину. Возникшая конфигурация называется заключительной, а полученное слово — результатом применения машины к исходному слову.

Если u — исходное слово, T — машина, то через $T(u)$ обозначают результат.

Определение 6.6 *Говорят, что машина T не применима к слову u, если в процессе применения ее к слову она ни на каком из шагов не приходит в заключительное состояние.*

Пример 6.3. Построим машину Тьюринга, складывающую натуральные числа, записанные в унарной системе счисления.

▶ Напомним, что $5_{10} = |||||_{\text{унарн.}}$. Рассмотрим алфавит $A \cup \{\wedge\} = \{|, +, \wedge\}$.

Необходимо построить машину T, удовлетворяющую условию:

$$T\left((m)_{\text{унарн.}} + (n)_{\text{унарн.}}\right) = (m+n)_{\text{унарн.}}$$

Ясно, что такая машина определяется следующей программой:

	q_1	q_2	q_3
$\vert$	$\vert\, q_1\ +1$	$\wedge\, q_3\ -1$	$\vert\, q_3\ -1$
$+$	$\vert\, q_1\ +1$		
$\wedge$	$\wedge\, q_2\ -1$		$\wedge\, q_0\ +1$

Выпишем последовательно возникающие при работе этой машины конфигурации на исходном слове $||+|||$. При записи конфигурации будем использовать следующее соглашение: состояние, в котором находится машина, записывается в круглых скобках справа за обозреваемой буквой.

0) $\cdots\wedge|(q_1)|+|||\wedge\ldots$
1) $\cdots\wedge||(q_1)+|||\wedge\ldots$
2) $\cdots\wedge||+(q_1)|||\wedge\ldots$
3) $\cdots\wedge||||(q_1)||\wedge\ldots$
4) $\cdots\wedge|||||(q_1)|\wedge\ldots$
5) $\cdots\wedge||||||(q_1)\wedge\ldots$
6) $\cdots\wedge||||||\wedge(q_1)\ldots$
7) $\cdots\wedge||||||(q_2)\wedge\ldots$
8) $\cdots\wedge|||||(q_3)\wedge\ldots$
9) $\cdots\wedge||||(q_3)|\wedge\ldots$
10) $\cdots\wedge|||(q_3)||\wedge\ldots$
11) $\cdots\wedge||(q_3)|||\wedge\ldots$
12) $\cdots\wedge|(q_3)||||\wedge\ldots$
13) $\cdots\wedge(q_3)|||||\wedge\ldots$
14) $\cdots\wedge|(q_0)||||\wedge\ldots$

◀

Замечание 6.1. Условимся составлять программы так, чтобы «останов» происходил на первой букве результата.

Замечание 6.2. В программе могут быть пустые клетки. Можно считать, что при выходе на такие клетки происходит «останов» ($\Leftrightarrow$, что внутри таких клеток написаны тройки, содержащие заключительное состояние).

Пример 6.4. Построить машину Тьюринга, удваивающую натуральные числа, записанные в унарной системе счисления.

► Расширим исходный алфавит $A = \{|\}$ до $A' = \{|; \alpha\}$. Искомую машину построим в алфавите $A' \cup \{\wedge\}$. Ясно, что программа такой машины может выглядеть так:

	q_1	q_2	q_3
$\mid$	$\alpha\, q_1\ +1$	$\mid q_2\ -1$	$\mid q_3\ +1$
α		$\mid q_3\ +1$	
$\wedge$	$\wedge\, q_2\ -1$	$\wedge\, q_0\ +1$	$\mid q_2\ -1$

Применим полученную машину к слову $||$.

$0)\ \cdots \wedge |(q_1)| + \ldots$ $\quad 1)\ \cdots \wedge \alpha|(q_1) \wedge \ldots$ $\quad 2)\ \cdots \wedge \alpha\alpha \wedge (q_1) \ldots$

$3)\ \cdots \wedge \alpha\alpha(q_2) \wedge \ldots$ $\quad 4)\ \cdots \wedge \alpha| \wedge (q_3) \ldots$ $\quad 5)\ \cdots \wedge \alpha|(q_2)| \wedge \ldots$

$6)\ \cdots \wedge \alpha|(q_2)| \wedge \ldots$ $\quad 7)\ \cdots \wedge \alpha(q_2)|| \wedge \ldots$ $\quad 8)\ \cdots \wedge |(q_3)|| \wedge \ldots$

$9)\ \cdots \wedge |(q_2)||| \wedge \ldots$ $\quad 13)\ \cdots \wedge |(q_2)||| \wedge \ldots$ $\quad 14)\ \cdots \wedge (q_2)|||| \wedge \ldots$

$15)\ \cdots \wedge |(q_0)||| \wedge \ldots$

◄

Введение новой буквы α и замена исходных $|$ на α позволяет различить исходные $|$ и новые (приписанные) $|$. Состояние q_1 обеспечивает замену $|$ на α, состояние q_2 обеспечивает поиск α, предназначенных для замены на $|$, и останов машины в случае, когда α не обнаружено, q_3 обеспечивает дописывание $|$ в случае, когда произошла замена α на $|$.

Введем в рассмотрение стандартные машины:

1. Тождественная машина E — применима к любому слову над алфавитом A и $E(u) = u$.

2. Пусть A — алфавит и $\blacktriangle \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Копирующей машиной K_n называется машина, применимая к любому слову u над A, причем

$$K_n(u) = u\blacktriangle \underbrace{u\blacktriangle \ldots \blacktriangle u}_{n \text{ раз}}$$

3. Пусть A — алфавит и α, β $(\alpha \neq \beta) \in A$. Машиной, заменяющей α на β, называется машина $З_{\alpha \leftarrow \beta}$, применимая к любому слову u так, что $\forall i \in \mathbf{Z}$:

$$(З_{\alpha \leftarrow \beta} u)\,(i) = \begin{cases} u(i), & \text{если } u(i) \neq \alpha; \\ \beta, & \text{если } u(i) = \alpha. \end{cases}$$

4. Пусть A — алфавит и $\blacktriangle \notin A$. Машиной-проектором $\Pi_{1\blacktriangle}$ $(\Pi_{\blacktriangle 2})$ называют машину, применимую к любому слову $u\blacktriangle v$, где u, v — слова над алфавитом A, причем

$$(\Pi_{1\blacktriangle})\,(u\blacktriangle v) = u; \quad (\Pi_{\blacktriangle 2})\,(u\blacktriangle v) = v.$$

Теорема 6.3 *Тождественная, копирующая, заменяющая машины и машины проекторы существуют.*

Вопросы в конце параграфа

1. Докажите самостоятельно последнюю теорему.
2. Приведите пример такого алфавита A и такой машины, которая не применима ни к одному слову над алфавитом A.

6.3 Сочетания машин Тьюринга: композиция и объединение. Машины с полулентами, разветвление и итерация машин

Перечисленные в заголовке типы сочетаний машин позволяют при конструировании машин использовать стандартные приемы, аналогами которых в реальном программировании являются подпрограммы, циклы, разветвления, модульное программирование.

1. Композиция машин

Композиция машин — последовательное их применение.

Определение 6.7 *Пусть T_1 — машина с внешним алфавитом A_1 и алфавитом состояний Q_1. T_2 — с алфавитами A_2 и Q_2 соответственно, причем $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$.*

Композицией T_1, T_2 называется машина, обозначаемая $T_2 \circ T_1$, с внешним алфавитом $A_1 \cup A_2$, алфавитом состояний $(Q_1 \cup Q_2) \setminus \{q_{10}\}$ (q_{10} — заключительное состояние T_1), и работающая по правилу:

$$(T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u)).$$

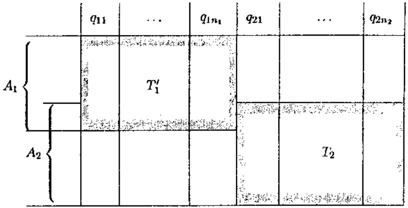
Теорема 6.4 *Композиция машин существует.*

► Пусть программы машин T_1 и T_2 выглядят следующим образом:

	q_{11}	....	q_{1n1}
A_1		T_1	

	q_{21}	....	q_{2n2}
A_2		T_2	

Программа композиции $T_2 \circ T_1$ может быть написана в виде:



Блок T_1' получен из блока T_1 следующим образом: все клетки вида $\alpha q_{10} s$ программы T_1 заменены на клетки вида $\alpha q_{21} s$ (что и обеспечивает включение в работу машины T_2 после окончания работы машины T_1). ◄

Пример 6.5. Пусть T_1 — машина, складывающая числа в унарной системе счисления (пример 6.2), T_2 — машина Тьюринга, удваивающая числа, записанные в унарной системе счисления (пример 6.2). Тогда $T_2 \circ T_1$ — машина, проводящая вычисления по формуле $2(a+b)$, в частности

$$(T_2 \circ T_1)(||+|||) = ||||||||||$$

2. Машины с полулентами

Прежде чем перейти к объединению, разветвлению, итерации машин, нам потребуется изучить класс машин Тьюринга с полулентами.

Под машиной с правой (левой) полулентой понимают следующее: в одной из ячеек бесконечной ленты содержится символ ▲ — неподвижный ограничитель, СЗУ машин с правой (левой) полулентой может находиться только на правой (левой) полуленте, состоящей из ячейки, содержащей неподвижный ограничитель, и ячеек, находящихся справа (слева) от нее. При выходе СЗУ на ячейку с неподвижным ограничителем машина не имеет права менять ее содержимое. Так как теория машин с левой полулентой — зеркальное отражение теории машин с правой полулентой, мы в дальнейшем будем рассматривать подробно только машины с правыми полулентами.

Теорема 6.5 *Пусть $\blacktriangle T$ — машина с правой полулентой, тогда существует обычная машина, ей эквивалентная, т. е. для любого слова u над алфавитом A имеет место следующее:*

$$\blacktriangle T(\blacktriangle u) = v \implies T(u) = v.$$

► Искомую машину построим в виде композиции трех машин:

$$T_2 \circ \blacktriangle T \circ T_1,$$

где $T_1(u) = \blacktriangle u$ для любого слова u над A, $T_2(\blacktriangle v) = v$ для любого слова $\blacktriangle v$. ◄

Оказывается (!), что наряду с этой теоремой справедлива и обратная к ней.

Теорема 6.6 *Для любой машины Тьюринга с обычной лентой существует равносильная ей машина с правой (левой) полулентой* $\blacktriangle T$ $(T\blacktriangle)$, *т. е. для любого слова u над A справедливо следующее:*

$$T(u) = v \quad \Longrightarrow \quad \blacktriangle T(\blacktriangle u) = \blacktriangle v. \\ (T\blacktriangle(u\blacktriangle)) = v\blacktriangle).$$

► Расширим исходный алфавит двумя символами: $\blacktriangle$ — неподвижный ограничитель, $\triangle$ — подвижный ограничитель. Искомую машину $\blacktriangle T$ построим в виде композиции

$$\blacktriangle T = T_4 \circ T' \circ T_3.$$

Опишем работу машин T_3 и T_4. Машина T_3 применима к любому слову $\blacktriangle u$ и $T_3(\blacktriangle u) = \blacktriangle u\triangle$. Ясно, что T_3 существует. T_4 применима к любому слову $w = \blacktriangle \wedge \wedge \cdots \wedge v\triangle$ и $T_4(w) = \blacktriangle v$. Ясно, что и T_4 существует. Участок ленты между $\blacktriangle$ и $\triangle$ назовем рабочей зоной. Машина T' строится по машине T следующим образом: внутри рабочей зоны она работает так же, как машина T, в случае выхода СЗУ на $\triangle$ она перемещает подвижный ограничитель на одну ячейку вправо, помещая в освободившуюся ячейку $\wedge$, и продолжает работу, возвращаясь на одну ячейку влево в том же состоянии, в котором СЗУ вышло на $\triangle$. Эта возможность расширения рабочей зоны обеспечивается введением для каждого рабочего состояния q машины T состояния $\tilde{q}$ машины T'.

«Хуже» обстоит дело в случае, когда СЗУ выходит на $\blacktriangle$, так как неподвижный ограничитель нельзя перемещать. В этот момент работа машины T' как машины T должна прерваться для того, чтобы побуквенно переместить слово на одну ячейку вправо, заполнив освободившуюся ячейку пустым символом $\wedge$; после чего машина T' может вернуться к освободившейся ячейке и продолжить работу как машина T. Сложность такой «модернизации» T к T' состоит в том, что машина Тьюринга не обладает внутренней памятью, а запоминать нужно рабочее состояние, в котором произошел выход СЗУ на неподвижный ограничитель и перекладываемые буквы (какую поместить в ячейку из предыдущей и какую запомнить, чтобы переложить в следующую). Такое расширение рабочей зоны обеспечивается введением для каждого рабочего состояния q машины T целого шлейфа состояний машины T' (длина шлейфа зависит от $|A|$). Выпишем программу машины T' в случае, когда $A = \{\alpha; \beta\}$ (табл 6.2)

Таблица 6.2:

	α	β	$\wedge$	$\blacktriangle$	$\triangle$
q_1					
...					
q		T		$\blacktriangle q_\triangle + 1$	$\wedge\tilde{q} + 1$
...					
q_n					
...					
$q_\triangle$	$\wedge q_\alpha + 1$	$\wedge q_\beta + 1$	$\wedge q_\wedge + 1$		$\triangle q_\triangle + 1$
q_α	$\alpha q_\alpha + 1$	$\alpha q_\beta + 1$	$\alpha q_\wedge + 1$		$\alpha q_\triangle + 1$
q_β	$\beta q_\alpha + 1$	$\beta q_\beta + 1$	$\beta q_\wedge + 1$		$\beta q_\triangle + 1$
$q_\wedge$	$\wedge q_\alpha + 1$	$\wedge q_\beta + 1$	$\wedge q_\wedge + 1$		$\wedge q_\triangle + 1$
$q_\triangle$			$\triangle q' - 1$		
q'	$\alpha q' - 1$	$\beta q' - 1$	$\wedge q' - 1$	$\blacktriangle q + 1$	
$\tilde{q}$			$\triangle q - 1$		
...					

Очевидно, построение программы T' возможно в случае любого конечного алфавита A. ◄

Доказанные две теоремы означают, что класс машин с полулентами эквивалентен классу обычных машин Тьюринга.

3. Объединение машин

Определение 6.8 *Пусть T_1 и T_2 — машины Тьюринга с общим или различными внешними алфавитами A_1, A_2 и пусть $\blacktriangle \notin A_1 \cup A_2$.*

Объединением машин T_1, T_2 называется машина, обозначаемая $T_1 \cup T_2$, работающая по правилу

$$T_1 \cup T_2(u\blacktriangle v) = T_1(u)\blacktriangle T_2(v)$$

Теорема 6.7 *Объединение машин существует.*

► Объединение построим в виде композиции четырех машин:

$$T_{+\blacktriangle} \circ {}_{\blacktriangle}T_2 \circ T_{\blacktriangle +} \circ T_{1\blacktriangle},$$

где $T_{1\blacktriangle}$ — аналог машины T_1 на левой полуленте, ${}_{\blacktriangle}T_2$ — аналог машины T_2 на правой полуленте, машина $T_{\blacktriangle +}$, отправляясь от первой буквы слова $w\blacktriangle z$, останавливается на первой букве после символа $\blacktriangle$, оставляя на ленте слово $w\blacktriangle z$. Машина $T_{+\blacktriangle}$, отправляясь от первой справа за $\blacktriangle$ буквы слова $w\blacktriangle z$, останавянвается на первой букве слова w, оставляя на ленте слово $w\blacktriangle z$. Очевидно, машины $T_{\blacktriangle +}$ и $T_{+\blacktriangle}$ существуют. ◄

4. Разветвление машин

Пусть T_1 и T_2 — две машины Тьюринга с общим внешним алфавитом A и алфавитами состояний Q_1 и Q_2 ($Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$) и пусть 0 и 1 не принадлежат A.

Пусть Φ — машина-предикат, т. е. машина с внешним алфавитом $A \cup \{0; 1\}$, применимая к любому слову u над алфавитом A и $\Phi(u) \in \{0; 1\}$.

Определение 6.9 *Разветвлением машин T_1, T_2, управляемым предикатом Φ, называется машина, обозначаемая $T_1 \overset{10}{Y}_{\Phi} T_2$, которая работает по правилу*

$$\left(T_1 \overset{10}{Y}_{\Phi} T_2\right)(u) = \begin{cases} T_1(u), & \text{если } \Phi(u) = 1; \\ T_2(u), & \text{если } \Phi(u) = 0. \end{cases}$$

Теорема 6.8 *Разветвление машин существует.*

► Построим разветвление в виде композиции трех машин

$$T_1 \overset{10}{Y}_{\Phi} T_2 = \left(\Pi \begin{smallmatrix}\xrightarrow{1} T_1 \\ \xrightarrow{0} T_2\end{smallmatrix}\right) \circ (\Phi \cup E) \circ K_1,$$

где машина $\Pi \begin{smallmatrix}\xrightarrow{1} T_1 \\ \xrightarrow{0} T_2\end{smallmatrix}$ имеет программу, представленную в виде табл. 6.3:

Начальным состоянием машины $\Pi \begin{smallmatrix}\xrightarrow{1} T_1 \\ \xrightarrow{0} T_2\end{smallmatrix}$ является состояние q_1, а заключительными — заключительные состояния q_{10}, q_{20} — машин T_1 и T_2 соответственно. ◄

Таблица 6.3:

	q_1	q_2	q_3	q_{11}	…	q_{1n_1}	q_{21}	…	q_{2n_2}
a_1									
⋮					T_1			T_2	
a_n									
1	$\wedge q_2 + 1$								
0	$\wedge q_3 + 1$								
Δ		$\wedge q_{11} + 1$	$\wedge q_{21} + 1$						

5. Итерация машины

Пусть T — машина Тьюринга с внешним алфавитом A и Φ — машина-предикат (см. предыдущий пункт).

Определение 6.10 *Итерацией машины T по предикату Φ называется машина, обозначаемая $T\circlearrowleft$, работа которой описывается следующим:*

1. К слову u применяется предикат Φ, если $\Phi(u) = 1$, то переход к 2, если $\Phi(u) = 0$, то переход к 3.

2. $u := T(u)$, переход к 1.

3. $(T\circlearrowleft)(u) := u$, останов.

Теорема 6.9 *Итерация машины T по предикату Φ существует.*

► Построим машину $T \overset{10}{Y}_{\Phi} E$. Обозначим через $(T \overset{10}{Y}_{\Phi} E)'$ машину, программа которой получается из программы $T \overset{10}{Y}_{\Phi} E$ следующей модернизацией: асе клетки, содержащие тройки $\alpha q_{0T} s$, где q_{0T} — заключительное состояние машины T, заменяются на клетки, содержащие тройки $\alpha q_{1T \overset{10}{Y}_{\Phi} E}\, s$, где $q_{1T \overset{10}{Y}_{\Phi} E}$ — начальное состояние всего агрегата $T \overset{10}{Y}_{\Phi} E$.

Очевидно, $T\circlearrowleft = (T \overset{10}{Y}_{\Phi} E)'$. ◄

6. Машина Тьюринга, переводящая запись числа из унарной системы счисления в троичную

В заключение приведем пример еще одной машины Тьюринга, переводящей унарную запись натурального числа в троичную систему счисления.

Идея алгоритма, реализуемого машиной, состоит в последовательном уменьшении унарной записи переводимого числа на единицу и увеличении формируемой троичной записи на единицу до тех пор, пока на месте унарной записи переводимого числа ничего не останется. Программа такой машины задается таблицей:

	q_1	q_2	q_3	q_4
$\mid$	$\mid q_1+1$	$\wedge q_4-1$		$\mid q_4-1$
0	$0q_1+1$	$0q_30$	$0q_3-1$	$1q_1+1$
1	$1q_1+1$	$1q_30$	$1q_3-1$	$2q_1+1$
2	$2q_1+1$	$2q_30$	$2q_3-1$	$0q_4-1$
$\wedge$	$\wedge q_2-1$		$\wedge q_0+1$	$1q_1+1$

Решим контрольный пример. Вычислим $T(|||||) \stackrel{?}{=} (12)_3$.

0) $\cdots\wedge|(q_1)||||\wedge\ldots$
1) $\cdots\wedge||(q_1)|||\wedge\ldots$
2) $\cdots\wedge|||(q_1)||\wedge\ldots$
3) $\cdots\wedge||||(q_1)|\wedge\ldots$
4) $\cdots\wedge|||||(q_1)\wedge\ldots$
5) $\cdots\wedge|||||\wedge(q_1)\ldots$
6) $\cdots\wedge|||||(q_2)\wedge\ldots$
7) $\cdots\wedge||||(q_4)\wedge\wedge\ldots$
8) $\cdots\wedge|||(q_4)|\wedge\wedge\ldots$
9) $\cdots\wedge||(q_4)||\wedge\wedge\ldots$
10) $\cdots\wedge|(q_4)|||\wedge\wedge\ldots$
11) $\cdots\wedge(q_4)||||\wedge\wedge\ldots$
12) $\cdots\wedge 1(q_1)||||\wedge\wedge\ldots$

$\ldots$

25) $\cdots\wedge 2|||(q_2)\wedge\ldots$
26) $\cdots\wedge 2||(q_4)\wedge\wedge\ldots$

$\ldots$

28) $\cdots\wedge(q_4)2||\wedge\ldots$
29) $\cdots\wedge(q_4)0||\wedge\ldots$
30) $\cdots\wedge 10(q_1)||\wedge\ldots$

$\ldots$

35) $\cdots\wedge 10||\wedge(q_1)\ldots$
36) $\cdots\wedge 10||(q_2)\wedge\ldots$
37) $\cdots\wedge 10|(q_4)\wedge\wedge\ldots$
38) $\cdots\wedge 10(q_4)|\wedge\wedge\ldots$
39) $\cdots\wedge 11|(q_1)\wedge\wedge\ldots$
40) $\cdots\wedge 11|\wedge(q_1)\wedge\ldots$
41) $\cdots\wedge 11|(q_2)\wedge\ldots$

16) $\cdots\wedge 1||||\wedge(q_1)\wedge\ldots$
17) $\cdots\wedge 1||||(q_2)\wedge\wedge\ldots$
18) $\cdots\wedge 1|||(q_4)\wedge\wedge\wedge\ldots$

$\ldots$

21) $\cdots\wedge 1|(q_4)||\wedge\wedge\wedge\ldots$
22) $\cdots\wedge 2(q_1)|||\wedge\wedge\wedge\ldots$

$\ldots$

24) $\cdots\wedge 2|||\wedge(q_1)\wedge\wedge\ldots$

42) $\cdots\wedge 11(q_4)\wedge\wedge\ldots$
43) $\cdots\wedge 12\wedge(q_1)\wedge\ldots$
44) $\cdots\wedge 12(q_1)\wedge\wedge\ldots$
45) $\cdots\wedge 12(q_3)\wedge\wedge\ldots$
46) $\cdots\wedge 1(q_3)2\wedge\wedge\ldots$
47) $\cdots\wedge(q_3)12\wedge\wedge\ldots$
48) $\cdots\wedge 1(q_0)2\wedge\ldots$

Вопросы в конце параграфа

1. Чему равны $K_m \circ K_n$ и $K_n \circ K_m$?
2. Постройте машину K_1 для алфавита $A = \{\alpha;\beta\}$.
3. Сколько рабочих состояний у машины T' в теореме 6.6, если у машины T четыре рабочих состояния, а внешний алфавит $A = \{\alpha;\beta;\gamma\}$?
4. Постройте машины $T_{+\blacktriangle}$ и $T_{\blacktriangle+}$ к последней теореме (теорема 6.7).
5. При построении $T_2 \circ T_1$ мы полагали, что $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Почему это ограничение несущественно?
6. Постройте машину, переводящую двоичную запись числа в троичную.
7. Постройте соответствующую машину-предикат Φ и машину T, увеличивающую троичную запись числа на 1 так, чтобы перевод из унарной системы счисления в троичную осуществлялся с помощью машины T_6.

6.4. Тьюрингов подход к понятию «алгоритм». Алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы

Вернемся к тем вопросам, с которых мы начали изучение этого раздела. Главным из них был следующий: «Что такое алгоритм?» Тьюрингов подход к ответу на этот вопрос прост и естественен: «Алгоритм — это машина Тьюринга».

Определение 6.11 *Говорят, что существует тьюрингов алгоритм решения класса задач Z, если существует такая машина Тьюринга T с внешним алфавитом A, что:*

1) для условия любой задачи $z \in Z$ существует слово u_z над A, кодирующее условие задачи z ($\Leftrightarrow$ дающее его запись на ленте машины);

2) машина T применима к слову u_z;

3) $v_z = T(u_z)$ является словом, кодирующим ответ задачи z.

Сама работа машины T над словом u_z называется применением алгоритма, заданного машиной T, к задаче z.

Класс задач Z, для которого существует решающий его тьюрингов алгоритм, называется алгоритмически разрешимой по Тьюрингу проблемой Z.

Проанализировав содержание предыдущих параграфов этой главы, мы можем сказать, что разрешимыми по Тьюрингу проблемами являются:

1. Проблема сложения натуральных чисел.
2. Проблема удвоения натурального числа.
3. Проблема перевода унарной записи натурального числа в троичную запись.

Возникает естественный вопрос: «Существуют ли алгоритмически неразрешимые но Тьюрингу проблемы?» Оказывается, есть (к нашему счастью, так как иначе математика была бы достаточно скучной наукой и сводилась бы к тьюрингову программированию). «Поставщиком» таких проблем является и сама теория машин Тьюринга.

1. Универсальный алфавит; универсальная кодировка

Каждая машина Тьюринга имеет три алфавита: внешний A, внутренний Q и алфавит сдвигов S. Все три алфавита — конечные множества, и можно считать, что

$$A \cap Q = A \cap S = Q \cap S = \varnothing.$$

Тогда любое слово над $A \cup Q \cup S$ однозначно разбивается на слоги (подслова) (возможно, и однобуквенные) над алфавитами A, Q, S. В частности, любую клетку программы машины как отображения $A \cup \{\wedge\} \times Q \setminus \{q_0\} \to A \cup \{\wedge \times Q \times S$ можно закодировать как пятибуквенное слово над $A \cup \{\wedge\} \cup Q \cup S$, задающее соответствие $(\alpha; q_i) \to (\beta; q_j; s)$. Если условиться, что программа выписывается последовательно по столбцам

Таблица 6.4:

Буква		Код (слово) над $\{0; 1\}$
Сдвиги	-1	101
	0	1001
	$+1$	10001
Буквы	$\wedge$	100001
	a_1	10000001
	a_2	10000001
	...	...
Состояния	q_0	1000001
	q_1	100000001
	q_2	10000000001
	...	...
	q_j	$1\underbrace{0\ldots0}_{2j+5}1$
	...	...

сверху вниз, то мы получим стандартную запись программы в виде «длинного» слова над алфавитом $A \cup \{\wedge\} \cup Q \cup S$. Поставим следующий вопрос: «Нельзя ли выбрать достаточно простой алфавит, с помощью слов которого можно будет кодировать все буквы, а значит, и слова над $A \cup \{\wedge\} \cup Q \cup S$ (т. е. внешние слова и программу машины)?» Оказывается, в качестве такого простого алфавита, называемого универсальным, можно взять двубуквенный алфавит $\{0; 1\}$. Опишем стандартную кодировку букв алфавита $A \cup \{\wedge\} \cup Q \cup S$ словами над $\{0; 1\}$ с помощью таблицы кодирования (см. табл. 6.4).

Кодировка с помощью этой таблицы называется стандартной. (Ясно, что стандартная кодировка допускает однозначное декодирование для любых A, Q, S. Поэтому можно считать, что всегда применяется кодировка с помощью $\{0; 1\}$ и что все машины работают со словами над $\{0; 1\}$.

Определение 6.12 *Машина Тьюринга T называется самоприменимой, если она применима к слову u_T — стандартной записи на ленте своей программы.*

Это определение разбило все множество машин Тьюринга МТ на два класса: $\mathbf{MT}_s$ — класс самоприменимых и $\mathbf{MT}_{ns}$ — класс несамоприменимых машин.

Сформулируем проблему распознавания самоприменимости: «Существует ли такая машина Тьюринга S, которая умеет распознавать самоприменимость, т. е. по слову u_T, кодирующему программу машины T, сообщать, является ли машина T самоприменимой или нет?» Оказывается, имеет место следующая теорема.

Теорема 6.10 *Проблема распознавания самоприменимости является алгоритмически неразрешимой по Тьюрингу проблемой.*

► Допустим противное, т. е. что существует машина S, решающая проблему самоприменимости, причем

$$S(u_T) = \begin{cases} 1, & \text{если } T \text{ — самоприменима,} \\ 0, & \text{если } T \text{ — несамоприменима.} \end{cases}$$

Если машина S существует, то ее можно перестроить в машину $\tilde{S}$, которая в случае, когда u_T — кодировка программы несамоприменимой машины, перерабатывает u_T в слово «0» и останавливается, а в случае, когда u_T — кодировка программы самоприменимой машины, «выпечатывает», уходя вправо, бесконечный хвост «1». Покажем, что существование машины $\tilde{S}$, а значит и S, ведет к противоречиям. Для этого применим $\tilde{S}$ к слову $u_{\tilde{S}}$. Возможны два исхода:

а) после применения $\tilde{S}$ к $u_{\tilde{S}}$ машина напечатает 0 и остановится, но, с одной стороны, это означает (0) — несамоприменимость, а с другой (остановка машины) — самоприменимость;

б) в результате применения $\tilde{S}$ к $u_{\tilde{S}}$ идет без остановки печать бесконечного хвоста единиц. Хвост единиц означает теперь самоприменимость, а это противоречит тому, что машина не останавливается.

Полученное противоречие и доказывает теорему. ◄

Вопросы в конце параграфа

1. Предложите свою, более простую, чем стандартная, кодировку программы (возможно не пятерками, а тройками со стандартным расположением).
2. Докажите, что универсальный алфавит не может состоять из одной буквы.
3. Попробуйте найти оценку

$$m\left(|A|, |Q|\right) \le \ell\left(u_T\right) \le M\left(|A|, |Q|\right),$$

где $\ell\left(u_T\right)$ — длина слова над алфавитом $\{0; 1\}$, однозначно кодирующим (не обязательно стандартно) программу машины T с алфавитами A, Q, S.

6.5 Универсальная машина Тьюринга

В заключительном параграфе этого раздела эскизно опишем, что такое универсальная машина Тьюринга. В обычной машине Тьюринга программа «зашита» в устройство управления, а входная информация (условия задачи) записывается на бесконечной ленте. В универсальной машине в устройстве управления записана программа, реализующая алгоритм подражания, т. е. программную реализацию правил работы любой машины (см. § 6.2), вернее, правила обращения с ее программой. Тогда входной информацией для универсальной машины является пара — слово u_T, стандартно кодирующее машину-алгоритм, решающий данный класс задач Z; и слово v_z, кодирующее условие задачи $z \in Z$. Универсальная машина, используя u_T, перерабатывает v_z в $T(v_z)$.

Ясно, что для построения универсальной машины потребуется использование техники машин с полулентами и универсального алфавита. Эта машина будет работать очень «вяло», теряя очень много времени на переходы от обрабатываемого слова к программе и обратно, однако ясно, что справедлива следующая теорема.

Теорема 6.11 *Универсальная машина Тьюринга существует.*

Доказательство этой теоремы и более подробно об универсальной машине Тьюринга см. Б. А. Трахтенброт «Алгоритмы и вычислительные автоматы». М., Сов. радио, 1974.

А теперь еще раз обратимся к истории, а вернее, к биографии Алана Матиссона Тьюринга, члена Лондонского Королевского общества, руководителя работ по созданию первых английских ЭВМ и Национальной физической лаборатории в Теддингтоне. Свои замечательные результаты в области машин, носящих его имя, А. Тьюринг получил в 1936–1937 гг., будучи 25-летним, молодым (по нынешним понятиям) человеком. Изумляет не только четкость и математическая строгость подходов Тьюринга, но и глубочайшее понимание необходимости такого рассмотрения для дальнейшего развития прикладной математики. Результаты Тьюринга (а также параллельно работавших с ним в этой области А. А. Маркова, Э. Поста, А. А. Ляпунова, К. Геделя) — вклад не только в математику, но и в современную философию, ее важнейшую отрасль — теорию познания.

В результате изучения этого раздела нашего курса каждый слушатель стал владельцем персональной вычислительной машины (ПВМ) — машины Тьюринга, обладающей неограниченной памятью и широчайшими возможностями, быстродействие которой зависит от пользователя.

Автор отмечает, что программирование для машин Тьюринга (после приобретения некоторых навыков) достаточно занимательное занятие, так как требует лишь алгоритмических навыков, а не удержания в голове стандартных конструкций, характерных для программирования на алгоязыках высокого уровня. Здесь нет фактически программистских проблем, а есть только алгоритмические проблемы. Решение задач по программированию для машин Тьюринга позволяет выработать и развить приемы алгоритмизации (чему человек обучается значительно труднее, чем «голому» программированию).

Какими бы высокими материями или какими бы серьезными приложениями математики вы в дальнейшем ни занимались, рано или поздно вы так или иначе придете к работе со школьниками (факультатив, математический кружок, популярные лекции) и перед вами обязательно возникнет проблема выбора материала для ваших занятий. Наш опыт показывает — займитесь с ними машиной Тьюринга и вы не ошибетесь. Это будет и интересно, и полезно.

Глава 7

Элементы теории графов

7.1 Введение, общее определение графа. Локальные характеристики

Эта глава нашего курса посвящена графам — математическим объектам, интересным во всех отношениях. Приведем обширную цитату из введения к книге Ф. Харари «Теория графов» (М.: Мир, 1973): «Существует несколько причин нарастания интереса к теории графов. Неоспорим тот факт, что теория графов применяется в таких областях, как физика, химия, теория связи, проектирование ЭВМ, электротехника, машиностроение, архитектура, исследование операций, генетика, психология, социология, экономика, антропология и лингвистика. Эта теория тесно связана также со многими разделами математики, среди которых — теория групп, теория матриц, численный анализ, теория вероятностей, топология и комбинаторный анализ.

Графы действуют притягательно и обладают эстетической привлекательностью... Хотя в теории графов много результатов, элементарных по своей природе, в ней также громадное изобилие весьма тонких комбинаторных проблем, достойных внимания самых искушенных математиков».

Теория графов — тот редкий раздел математики, о котором доподлинно известно, когда он родился и кто был его основоположником. Родилась она на берегах Невы, в Санкт-Петербурге, ее «отцом» (так же, как и алгебраической топологии) является Леонард Эйлер[1], опубликовавший в 1736 г. решение задачи о Кенигсбергских мостах (приведем название и координаты этой работы: Euler L. Solutio problematis ad geometrian sitis pertinents, Comment. Academiae Sci I. Petropolitanue, 8, 1736, p. 128–140).

Следующие шаги в развитии теории графов принадлежат Г. Кирхгофу, применившему теорию графов в 1847 г. к теории электрических цепей (законы Кирхгофа) и А. Келли, разработавшему в 1857 г. теорию деревьев и применившему ее к теории химических изомеров.

Родившись при решении головоломок и занимательных задач, в XX веке теория графов стала мощным средством решения проблем многих наук, широкая применимость стала дополнительным стимулом её бурного развития. Сам термин «граф» ровно на 200 лет моложе этой теории, он введен в употребление в 1936 г. выдающимся венгерским математиком Д. Кёнигом.

Определение графа. Локальные характеристики

Графы бывают двух типов — неориентированные и ориентированные. В нашем курсе мы будем в основном заниматься ориентированными графами (они чаще встречаются в приложениях).

Определение 7.1 *Ориентированным графом* ($\Leftrightarrow$ *орграфом* $\Leftrightarrow$ *графом*) *будем называть тройку* $G(X, U, f)$, *где* X ($\neq \varnothing$) — *множество, называемое множеством вершин графа,* U — *множество (возможно, и пустое), называемое множеством дуг,* f — *отображение, действующее из* U *в* $X \times X$, *называемое отображением инцидентности.*

[1] Эйлер Леонард (1707–1783) родился в Базеле (Швейцария). В возрасте 13 лет начал учебу в университете Базеля на отделении теологии. Одновременно проходил математическую подготовку у И. Бернулли. Под его влиянием и происходит отход от теологии к математике. Магистерская диссертация защищена Л. Эйлером в возрасте 16 лет. В 1727 г. в 20-летнем возрасте Эйлер приглашен в созданную Петром I Санкт-Петербургскую академию наук, в 1746 г. он переезжает в Берлин, где до 1766 г. работает в Берлинской академии наук, а затем возвращается в Санкт-Петербург, где активно работает, несмотря на постигшую его в последние 17 лет жизни слепоту.

Л. Эйлер относится к величайшим ученым, трудами которых основаны целые научные направления и науки. Им написано около 700 научных работ по теории чисел, математическому анализу, математической физике, комбинаторике, вариационному исчислению и многочисленным приложениям математических методов.

Пример 7.1. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 7.1

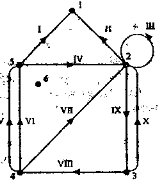


Рис. 7.1

$X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
$U = \{I; II; \dots ; X\}$
$f(I) = (5; 1);$
$f(II) = (2; 1),$
$f(III) = (2; 2);$
$f(IV) = (5; 2),$
$f(V) = (4; 5);$
$f(VI) = (4; 5),$
$f(VII) = (4; 2);$
$f(VIII) = (3; 4),$
$f(IX) = (2; 3);$
$f(X) = (3; 2).$

Введем в рассмотрение стандартные отображения

$$p_1 : X \times X \to X \quad \text{и} \quad p_2 : X \times X \to X$$

следующим правилом:

$$p_1((x; y)) = x; \qquad p_2((x; y)) = y.$$

Определение 7.2 *Пусть* $G(X, U, f)$ — *граф,* u ($\in U$) — *дуга. Назовем вершину* $(p_1 \circ f)(u)$ *началом дуги* u, *вершину* $(p_2 \circ f)(u)$ — *концом дуги* u.

Дуги u ($\in U$) *и* v ($\in U$) *называются параллельными (кратными), если* $f(u) = f(v)$.

Дуги u ($\in U$) *и* w ($\in U$) *называются противоположными, если*

$$f(u) = ((p_2 \circ f)(w); (p_1 \circ f)(w)).$$

Дуги t ($\in U$) *называется петлей в вершине* x, *если*

$$(p_1 \circ f)(t) = (p_2 \circ f)(t) = x.$$

Если $f(u) = (x; y)$, *то говорят, что дуга* u *инцидентна вершинам* x *и* y. *Вершина* x ($x \in X$) *называется изолированной, если*

$$f^{-1}((X \setminus \{x\}) \times \{x\}) = f^{-1}(\{x\} \times (X \setminus \{x\})) = \varnothing.$$

Для графа на рис. 7.1 дуги V и VI параллельны, IX и X — противоположны, III — петля в вершине 2, вершина 6 — изолированная вершина. Вершина 2 инцидентна дугам II, III, IV, X, XI и VII.

Пример 7.2. Граф шахматной игры.
Множество вершин этого графа — множество позиций шахматной игры (позиция — диаграмма расположения фигур и указание, чей ход предстоит). Дуги графа шахматной игры — такие упорядоченные пары позиций, в которых вторая может быть получена из первой по правилам шахматной игры за один ход. Отображение инцидентности — это отображение вложения множества дуг в декартово произведение вершин.

Сама шахматная игра может рассматриваться как игра двух лиц на графе шахматной игры. «Белые» находятся в вершине, отвечающей началу игры (исходная расстановка, ход белых), и совершают ход, т. е. выбирают одну из дуг, выходящих из этой вершины. «Черные» получают ход в вершине, соответствующей концу этой дуги, и т. д. Цель игры — «загнать» противника в такую вершину x, что $f^{-1}(\{x\} \times X) = \varnothing$, т. е. в безвыходное положение.

3. Локальные характеристики графа

Определение 7.3 *Граф $G(X,U,f)$ называют конечным, если $|X| < \infty$, $|U| < \infty$.*

В дальнейшем мы будем рассматривать только конечные графы (не оговаривая это дополнительно).

Определение 7.4 *Пусть x $(\in X)$ — вершина графа $G(X,U,f)$, поставим ей в соответствие три числа: deg_+x, deg_-x, $deg\,x$:*

$$\begin{aligned} deg_+x &= |f^{-1}(X \times \{x\})| \text{ — число входящих в } x \text{ дуг,} \\ deg_-x &= |f^{-1}(\{x\} \times X)| \text{ — число выходящих из } x \text{ дуг,} \\ deg\,x &= deg_+x + deg_-x. \end{aligned}$$

deg_+x называют полустепенью захода в вершину x, deg_-x — полустепенью исхода из вершины x, $deg\,x$ называют степенью вершины x.

Очевидно, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1 *Для любого графа $G(X,U,f)$, у которого $|U| < \infty$, имеют место соотношения*

$$\sum_{x\in X} deg_+x = \sum_{x\in X} deg_-x = |U|, \quad (7.1)$$

$$\sum_{x\in X} deg\,x = 2|U|. \quad (7.2)$$

► $$|U| = |f^{-1}(X\times X)| = \left|f^{-1}\left(\bigcup_{x\in X}(X\times\{x\})\right)\right| = $$
$$= \left|\bigcup_{x\in X} f^{-1}(X\times\{x\})\right| = \sum_{x\in X}|f^{-1}(X\times\{x\})| =$$
$$= \sum_{x\in X} \deg_+x = \text{аналогично} = \sum_{x\in X}\deg_-x.$$

(Соотношение (7.2) — это следствие соотношения (7.1).) ◄

Замечание 1. Множества $f^{-1}(X\times\{x\})$ попарно не пересекаются.

Теорема 7.2 (теорема Эйлера о рукопожатиях) *В любом конечном графе $G(X,U,f)$ число вершин нечетной степени четно или равно нулю.*

► Представим множество вершин X в виде $X = X_2 \cup X_1$, отнеся к X_2 такие вершины x, у которых $\deg x = 2\cdot k_x$, $k_x \in \mathbb{Z}_+$; а к X_1 — такие вершины x, у которых $\deg x = 2\cdot k_x + 1$, $k_x \in \mathbb{Z}_+$.

Тогда, воспользовавшись соотношением (7.2) теоремы 7.1, получаем

$$2\cdot|U| = \sum_{x\in X}\deg x = \sum_{x\in X_2}\deg x + \sum_{x\in X_1} =$$
$$= 2\cdot\sum_{x\in X_2}k_x + 2\cdot\sum_{x\in X_1}k_x + \sum_{x\in X_1}1 = 2\cdot\sum_{x\in X}k_x + |X_1| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |X_1| = 2|U| - 2\sum_{x\in X}k_x = 2\left(|U| - \sum_{x\in X}k_x\right).$$

Правая часть кратна двум или равна нулю, значит, $|X_1|$ кратно двум или равно нулю. ◄

Возможная интерпретация данной теоремы такова: на любом мероприятии (приеме, банкете и т. п.) число лиц, совершивших нечетное число рукопожатий, четно или таких лиц нет вовсе.

Графы принято интерпретировать (изображать) рисунками, состоящими из точек, соответствующих вершинам, и линий со стрелками, изображающих дуги.

Приведем в качестве заключительного в этом параграфе примера граф нашего курса (см. рис. 7.2). Вершины графа будут соответствовать разделам: алгебра высказываний (АВ), алгебра предикатов (АП), алгебра множеств и отношений (АМО), отображения и комбинаторика (ОК), отношения (О), булевы функции (БФ), элементы теории алгоритмов (А), введение в теорию графов (ТГ). Дуги графа — стрелки, ведущие от разделов, материал которых используется при изучении данного раздела, к вершине, соответствующей данному разделу:

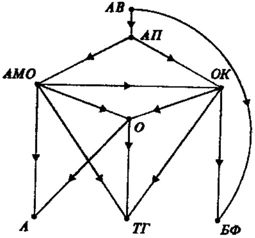


Рис. 7.2

Вопросы в конце параграфа

1. Сравните условия теорем 7.1 и 7.2. Почему условия теоремы 7.1 слабее?

2. Оцените сверху количество дуг графа с n вершинами, на котором нет петель, противоположных и параллельных дуг.

7.2 Изоморфизм графов. Геометрические графы. Плоские и неплоские графы. Реализуемость в R_3. Пути, цепи, контуры, циклы

Изоморфизм графов

Похожесть и непохожесть однотипных объектов в математике определяется понятием «изоморфизм».

Определение 7.5 *Графы $G_1(X_1, U_1, f_1)$ и $G_2(X_2, U_2, f_2)$ называются изоморфными (пишут $G_1 \simeq G_2$), если существуют биективные отображения $\varphi: X_1 \to X_2$ и $\psi: U_1 \to U_2$ такие, что*

$$(p_i \circ f_2 \circ \psi)(u) = (\varphi \circ p_i \circ f_1)(u), \quad \forall u \in U, \ i = 1, 2.$$

(Иначе $p_1 \circ f_2 \circ \psi = \varphi \circ p_1 \circ f_1$ и $p_2 \circ f_2 \circ \psi = \varphi \circ p_2 \circ f_1$.)

Пример 7.3. Рассмотрим графы G_1, G_2, G_3, G_4, изображенные на рис. 7.3:

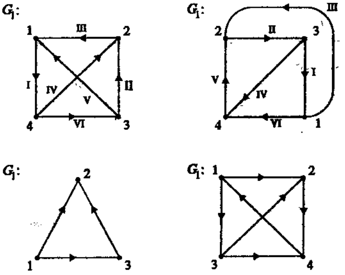


Рис. 7.3

Очевидно, $G_1 \simeq G_2$, $G_1 \not\simeq G_3$, $G_1 \not\simeq G_4$.

Изоморфизм $G_1 \simeq G_2$ реализуют отображения φ и ψ, заданные следующими соотношениями:

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 4, \quad \varphi(3) = 1, \quad \varphi(4) = 3.$$
$$\psi(\mathrm{I}) = \mathrm{II}, \ \psi(\mathrm{II}) = \mathrm{VI}, \ \psi(\mathrm{III}) = \mathrm{V}, \ \psi(\mathrm{IV}) = \mathrm{IV},$$
$$\psi(\mathrm{V}) = \mathrm{III} \ \psi(\mathrm{VI}) = \mathrm{I}.$$

Теорема 7.3 *Изоморфизм — отношение эквивалентности на множестве графов $\mathcal{G}$, т. е. оно рефлексивно, симметрично, транзитивно:*

1. $\forall G \ (\in \mathcal{G}) \quad G \simeq G$;
2. $\forall G_1 \, \forall G_2 \quad (G_1 \simeq G_2 \implies G_2 \simeq G_1)$;
3. $\forall G_1 \, \forall G_2 \, \forall G_3 \quad ((G_1 \simeq G_2) \& (G_2 \simeq G_3) \implies (G_1 \simeq G_3))$.

► Доказательство теоремы основано на том, что

а) тождественное отображение биективно;

б) биективные отображения обратимы и обратные к ним биективны;

в) композиция биективных отображений биективна. ◄

Геометрические графы. Реализуемость графов

Определение 7.6 *Геометрическим графом называется граф, у которого множество вершин — множество отмеченных точек в R_2 или R_3, множество дуг — множество параметризованных отрезков непрерывных кривых в R_2 или в R_3, концами которых являются соответствующие им вершины графа.*

Все графы, приведенные раньше на рисунках, можно считать геометрическими.

Теорема 7.4 *Для любого графа существует изоморфный ему геометрический граф (и в R_2, и в R_3), называемый его геометрической реализацией.*

► Вершинам графа поставим в соответствие помеченные точки плоскости или пространства, а дуги изобразим параметризованными отрезками прямых или дуг окружностей. ◄

Определение 7.7 *Геометрический граф называется правильно реализованным (или правильным), если его дуги не имеют общих точек, отличных от вершин графа.*

Пример 7.4. Рассмотрим графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 7.4:

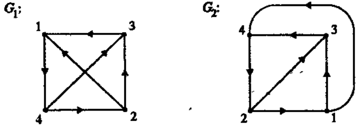


Рис. 7.4

Граф G_1 не является правильно реализованным, граф G_2 — правильный. (Заметим, что $G_1 \simeq G_2$, т. е. G_2 — правильная реализация G_1.)

Теорема 7.5 *Для любого графа существует его правильная реализация в R_3.*

► Опишем конструкцию, позволяющую построить правильную реализацию. Возьмем в R_3 произвольную прямую ℓ. Вершинам графа $G(X, U, f)$ поставим в соответствие отмеченные точки на этой прямой (точки будем обозначать теми же буквами, что и вершины графа G).

Каждой дуге графа G будет соответствовать своя плоскость, проходящая через ℓ. Если дуга $u \in U$ такова, что $f(u) = (x; y)$, $x \neq y$, то в соответствующей плоскости построим на отрезке $[x; y]$ как на диаметре полуокружность, параметризованную от x к y; если $w \in U$ и $f(w) = (z; z)$, то в соответствующей плоскости изобразим единичную окружность, касательную к ℓ в точке z, параметризованную произвольно (см. рис. 7.5).

Очевидно, эта конструкция дает правильную реализацию. ◄

Определение 7.8 *Граф называется плоским ($\Leftrightarrow$ планарным), если у него существует правильная реализация в R_2.*

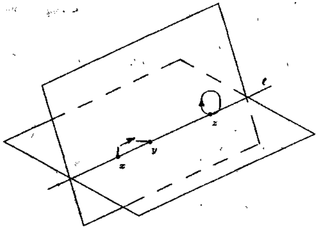


Рис. 7.5

Определение 7.9 *Полным графом* K_n $(n \in \mathbb{N})$ *называется граф с* n *вершинами без петель, кратных и противоположных дуг (ориентация безразлична), у которого любые две вершины соединены дугой (см. рис. 7.6).*

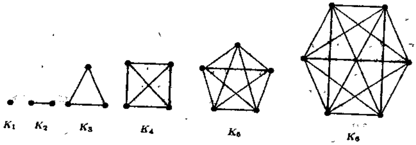


Рис. 7.6

Определение 7.10 *Полным двудольным графом* $K_{n,m}$ $(n \leqslant m)$ *называется граф с* $n + m$ *вершинами без петель, кратных и противоположных дуг (ориентация безразлична), у которого множество вершин разбито на два непересекающихся подмножества с* n *и* m *вершинами, так что*

любые две вершины различных подмножеств соединены дугой и никакие две вершины одного подмножества не соединены дугой (см. рис. 7.7).

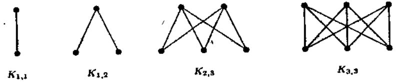


Рис. 7.7

Оказывается (и это доказали почти одновременно и независимо российский математик Л. С. Понтрягин и польский математик К. Куратовский), не являются плоскими графы K_5 и $K_{3,3}$ и графы, части которых устроены «подобно» K_5 и $K_{3,3}$. (Подробно и точно о критерии планарности Понтрягина-Куратовского см. в книге Ф. Харари «Теория графов». М.: Мир, 1973.) Смысл и значение этого факта и теоремы 7.7 о правильной реализуемости графов в R_3 для микроэлектроники трудно переоценить. Фактически, из-за графов K_5 и $K_{3,3}$ пришлось создавать технологию многослойных печатных плат или микросхем в виде сэндвичей. С графом $K_{3,3}$ связана и головоломка о трех домах и трех колодцах (см. Л. Кэролл, «Алиса в стране чудес»).

Пути, цепи, контуры, циклы

Определение 7.11 *Путем длины* n $(n \in \mathbb{N})$ *на графе* $G(X, U, f)$ *называется отображение* $\mu: [1; n]_{\mathbb{N}} \to U$ *такое, что*

$$(p_2 \circ f \circ \mu)(i - 1) = (p_1 \circ f \circ \mu)(i), \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Вершина $(p_1 \circ f \circ \mu)(1)$ *называется началом пути* μ, *вершина* $(p_2 \circ f \circ \mu)(n)$ *— концом пути* μ.

Если $(p_1 \circ f \circ \mu)(1) = (p_2 \circ f \circ \mu)(n)$, *то путь называется контуром.*

Если отображение μ *инъективно, то путь (контур) называется простым.*

Определение 7.12 *Цепью длины* n $(n \in \mathbb{N})$ *на графе* $G(X, U, f)$ *называется отображение* $\eta: [1; n]_{\mathbb{N}} \to U$ *такое, что у любой дуги* $\eta(i)$ $(i =$

$2, 3, \ldots, n-1$) *одна инцидентная вершина общая с дугой* $\eta(i-1)$, *а другая — общая с дугой* $\eta(i+1)$.

Вершина дуги $\eta(1)$, *не являющаяся общей с дугой* $\eta(2)$, *называется началом цепи, вершина дуги* $\eta(n)$, *не являющаяся общей с дугой* $\eta(n-1)$, *называется концом цепи.*

Если начало цепи совпадает с ее концом, цепь называется циклом.

Если отображение η *инъективно, то цепь (цикл) называется простым.*

Пример 7.5. Рассмотрим граф, приведенный на рис. 7.8, и отображение $\mu\ :\ [1;9]_{\mathbb{N}} \to U$, заданное таблицей 7.1.

Таблица 7.1:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu(i)$	VI	VIII	III	IX	II	IV	V	II	I

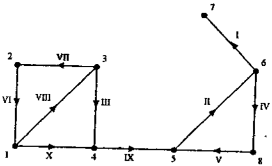


Рис. 7.8

Ясно, что μ — путь длины 9 из 2-й вершины в 7-ю вершину. Рассмотрим отображение η, заданное правилом

$$\eta(1) = \mathrm{VII}; \quad \eta(2) = \mathrm{III}; \quad \eta(3) = \mathrm{IX}; \quad \eta(4) = \mathrm{V}.$$

Ясно, что η — цепь длины 4 из 2-й в 8-ю вершину.

$$\mu_1(1) = \mathrm{VI}; \quad \mu_1(2) = \mathrm{VIII}; \quad \mu_1(3) = \mathrm{VII} \text{ — контур длины 3.}$$

$$\eta_1(1) = \mathrm{VI}; \quad \eta_1(2) = \mathrm{X}; \quad \eta_1(3) = \mathrm{III}; \quad \eta_1(4) = \mathrm{VII} \text{ — цикл длины 4}$$

Лемма 7.1 (лемма о простом пути) *Пусть* $G(X,U,f)$ *— граф,* $x;y$ ($\in X$) *— такие вершины, что существует путь* μ_{xy} *длины* n_{xy} *с началом в вершине* x *и концом в вершине* y, *тогда существует простой путь* μ'_{xy} *длины* n'_{xy} *с началом в вершине* x *и концом в вершине* y, *причем*

$$n'_{xy} \leqslant n_{xy}.$$

► Возможны два случая:

а) отображение μ_{xy} инъективно, тогда $\mu'_{xy} = \mu_{xy}$, $n'_{xy} = n_{xy}$ и утверждение леммы доказано (тривиально).

б) отображение μ_{xy} не является инъективным, значит, существует такая дуга $\overline{u} \in U$, что

$$\left|\mu_{xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| \geqslant 2.$$

Упорядочим элементы множества $\mu_{xy}^{-1}(\{\overline{u}\})$ в порядке возрастания, т. е.

$$\mu_{xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right) = \{i_1; i_2; \ldots; i_k\} \ (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n_{xy}).$$

Образуем путь $\mu_{1\,xy}$ длины $n_{1\,xy} = n_{xy} - (i_k - i_1)$, соединяющий x с y, положив

$$\mu_{1\,xy}(i) = \begin{cases} \mu_{xy}(i), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant i_1; \\ \mu_{xy}\left(i + (i_k - i_1)\right), & \text{если } i_1 < i \leqslant n_{xy} - (i_k - i_1). \end{cases}$$

При этом

$$\left|\mu_1^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| = 1; \quad \mu_{1\,xy}^{-1}(\{u\}) \subset \mu_{xy}^{-1}(\{u\})$$

для любой дуги u, отличной от $\overline{u}$. Тогда, если $\mu_{1\,xy}$ инъективно, полагаем $\mu'_{xy} = \mu_{1\,xy}$; $n'_{xy} = n_{1\,xy}$, а если $\mu_{1\,xy}$ не является инъективным отображением, то к нему применимы приведенные выше рассуждения. Мы получим путь $\mu_{2\,xy}$ длины $n_{2\,xy} < n_{1\,xy}$ и т. д. За конечное число шагов процесс оборвется (т. к. длина пути — натуральное число) и требуемый простой путь будет построен. ◄

Лемма 7.2 (лемма о простой цепи) *Пусть* $G(X,U,f)$ *— граф,* x,y ($\in X$) *— такие вершины, что существует цепь* η_{xy} *длины* n_{xy}, *соединяющая* x *с* y. *Тогда существует простая цепь* η'_{xy} *длины* n'_{xy}, *соединяющая* x *с* y, *причем*

$$n'_{xy} \leqslant n_{xy}.$$

► Возможны два случая:

а) отображение $\eta_{xy}:[1;n_{xy}]_{\mathbb{N}} \to U$ инъективно, тогда $\eta'_{xy} = \eta_{xy}$, $n'_{xy} = n_{xy}$ и утверждение леммы тривиально доказано.

б) отображение $\eta_{xy}:[1;n_{xy}]_{\mathbb{N}} \to U$ не является инъективным. Значит, существует такая дуга $\overline{u} \in U$, что

$$\left|\eta_{xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| \geqslant 2.$$

Упорядочим элементы множества $\eta_{xy}^{-1}(\{\overline{u}\})$ в порядке возрастания, т. е.

$$\eta_{xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right) = \{i_1; i_2; \ldots; i_k\} \ (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n_{xy}).$$

Для трассы цепи η_{xy} возможны четыре случая (см. рис. 7.9):

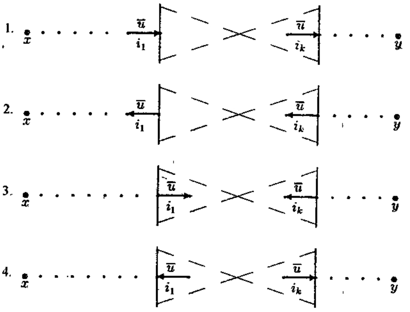


Рис. 7.9

Построим цепь $\eta_{1\,xy}$, соединяющую x с y, в случаях 1 и 2 по правилу

$$\eta_{1\,xy}(i) = \begin{cases} \eta_{xy}(i), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant i_1; \\ \eta_{xy}\left(i + (i_k - i_1)\right), & \text{если } i_1 < i \leqslant n_{xy} - (i_k - i_1), \end{cases}$$

а в случаях 3 и 4 — по правилу

$$\eta_{1\,xy}(i) = \begin{cases} \eta_{xy}(i), & \text{если } 1 \leqslant i < i_1; \\ \eta_{xy}\left(i + (i_k - i_1) + 1\right), & \text{если } i_1 \leqslant i \leqslant n_{xy} - (i_k - i_1) - 1. \end{cases}$$

При этом в случаях 1 и 2

$$\left|\eta_{1\,xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| = 1, \quad \eta_{1\,xy}^{-1}\left(\{u\}\right) \subset \eta_{xy}^{-1}\left(\{u\}\right)$$

для любой дуги u, отличной от $\overline{u}$, а в случаях 3 и 4

$$\left|\eta_{1\,xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| = \varnothing, \quad \eta_{1\,xy}^{-1}\left(\{u\}\right) \subset \eta_{xy}^{-1}\left(\{u\}\right)$$

для любой дуги u, отличной от $\overline{u}$. Тогда, если $\eta_{1\,xy}$ инъективно, полагаем $\eta'_{xy} = \eta_{1\,xy}$; $n'_{xy} = n_{1\,xy}$, а если $\eta_{1\,xy}$ не является инъективным отображением, то к нему применимы приведенные выше рассуждения. Мы получим цепь $\eta_{2\,xy}$ длины $n_{2\,xy} < n_{1\,xy}$ и т. д. Зн конечное число шагов процесс оборвется и искомая простая цепь η'_{xy} будет построена. ◄

Лемма 7.3 (лемма об инвертировании цепи) *Пусть $G(X,U,f)$ — граф; x, y $(\in X)$ — вершины такие, что существует цепь η_{xy} длины n_{xy}, соединяющая x с y, тогда существует цепь η_{xy}^{-} длины n_{xy}, ведущая из y в x.*

► Очевидно, отображевне $\eta_{xy}^{-}:[1;n_{xy}]_{\mathbb{N}} \to U$, заданное равенством

$$\eta_{xy}^{-}(i) = \eta_{xy}\left(n_{xy} - i + 1\right),$$

является искомой цепью из y в x. Говорят, что цепь η_{xy}^{-} получена инвертированием цепи η_{xy}. ◄

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Очевидно, что всякий путь является цепью и не всякая цепь является путем.

2. Докажите, что если $G_1(X_1, U_1, f_1) \simeq G_2(X_2, U_2, f_2)$ и φ, ψ — пара биективных отображений, реализующих этот изоморфизм, то для любой вершины $x \in X_1$ справедливо:

$$\deg_+ x = \deg_+ \varphi(x); \quad \deg_- x = \deg_- \varphi(x);$$
$$\deg x = \deg \varphi(x).$$

(Характеристики $\deg_+$, $\deg_-$, $\deg$ в левой части равенств вычисляются для графа G_1, а в правой части — для графа G_2.)

3. Проверьте, что η^-_{zy} в лемме 7.3 действительно является цепью.

7.3 Части графа: подграф, частичный граф. Связность и сильная связность, компоненты. Мосты графа

Части графа

В задачах теории графов иногда приходится изучать не весь граф в целом, а какие-то его части.

Определение 7.13 *Пусть $G(X, U, f)$ — граф, $U' \subset U$. Частичным графом графа G, порожденным U', называется граф $G\left(X, U', f\Big|_{U'}\right)$. (Здесь $f\Big|_{U'}$ — ограничение отображения $f : U \to X \times X$ на множество U', т. е. $f\Big|_{U'} : U' \to X \times X$ по правилу*

$$\left(\left(f\Big|_{U'}\right)(u) = f(u) \quad \forall u \in U'\right).$$

Пример 7.6. Пусть G — схема дорог Ростовской области. Схема дорог Ростовской области с асфальтовым покрытием — частичный граф графа G.

Определение 7.14 *Пусть $G(X, U, f)$ — граф, X' $(\neq \varnothing) \subset X$. Подграфом графа G, порожденным множеством X', называется граф*

$$G\left(X', U_{X'}, f\Big|_{U_{X'}}\right), \quad где\ U_{X'} = f^{-1}(X' \times X').$$

Пример 7.7. Схема дорог Багаевского района Ростовской области — подграф схемы дорог Ростовской области.

Сам граф G по отношению к своим подграфам и частичным графам называется надграфом (суграфом или суперграфом).

Компоненты связности и сильной связности

Определение 7.15 *Пусть x — вершина графа $G(X, U, f)$. Свяжем с ней множество C_x, определенное следующим:*

$$y \in C_x \iff (y = x) \vee (существует\ цепь,\ ведущая\ из\ x\ в\ y).$$

Теорема 7.6 (свойства множеств C_x) *Множества C_x обладают следующими свойствами:*

1. $\forall x\ (\in X) \quad C_x \neq \varnothing$;
2. $\forall x \forall y \quad (C_x \cap C_y \neq \varnothing \implies C_x = C_y)$;
3. $\bigcup\limits_{x \in X} C_x = X$.

► Нетрудно проверить, что отношение α, заданное следующим:

$$x \alpha y \iff (y = x) \vee (\text{существует цепь, ведущая из } x \text{ в } y),$$

является отношением эквивалентности на множестве X — вершин графа. Действительно, его рефлексивность очевидна, симметричность следует из леммы об инвертировании цепи, а транзитивность следует из возможности склейки цепей, первая из которых заканчивается там, где начинается вторая.

Пусть η_{xy} — цепь длины n_{xy}, ведущая из x в y, η_{yz} — цепь длины n_{yz}, ведущая из y в z. Тогда отображение $\eta_{xz} \; : \; [1; n_{xy} + n_{yz}]_{\mathbb{N}} \to U$, заданное правилом

$$\eta_{xz}(i) = \begin{cases} \eta_{xy}(i), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n_{xy}; \\ \eta_{yz}(i - n_{xy}), & \text{если } n_{xy} < i \leqslant n_{xy} + n_{yz}, \end{cases}$$

— цепь, ведущая из x в z.

Ясно, что $C_x = [x]_\alpha$, тогда эта теорема — частный случай теоремы 4.4 о свойствах множеств $[x]_\alpha$. ◀

Определение 7.16 *Компонентой связности вершины x графа $G(X, U, f)$ называется подграф, порожденный C_x.*

Определение 7.17 *Числом связности графа $G(X, U, f)$ называется число его различных компонент связности. Число связности обозначается $c(G)$.*

Пример 7.8.

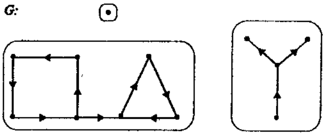


Рис. 7.10

Для графа G, заданного рис. 7.10, $c(G) = 3$. Обведены три различных компоненты связности графа G.

Определение 7.18 *Граф G называется связным, если $c(G) = 1$, и несвязным, если $c(G) > 1$.*

Определение 7.19 *Пусть x — вершина графа $G(X, U, f)$. Свяжем с ней множество sC_x, определенное следующим:*

$$y \in {}_sC_x \iff (y = x) \vee ((\text{существует путь, ведущий из } x \text{ в } y) \;\&\; \text{существует путь, ведущий из } y \text{ в } x)).$$

Теорема 7.7 (свойства множеств sC_x) *Множества sC_x обладают следующими свойствами:*

1. $\forall x \, (\in X) \quad sC_x \neq \varnothing$;
2. $\forall x \, \forall y \quad (sC_x \cap sC_y \neq \varnothing \implies sC_x = sC_y)$;
3. $\bigcup\limits_{x \in X} sC_x = X$.

► Нетрудно доказать, что бинарное отношение β на множестве вершин, определенное частью, стоящей за «$\iff$» в определении 7.19, является отношением эквивалентности, $sC_x = [x]_\beta$, тогда эта теорема — частный случай теоремы 4.4. ◀

Определение 7.20 *Компонентой сильной связности вершины x графа $G(X, U, f)$ называется подграф, порожденный множеством sC_x — $G\left(sC_x, U_{sC_x}, f\Big|_{U_{sC_x}}\right)$.*

Определение 7.21 *Числом сильной связности графа G называется число его различных компонент сильной связности. Число сильной связности графа G обозначается $sc(G)$.*

Пример 7.9.

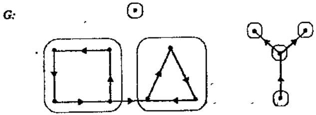


Рис. 7.11

Для графа G, заданного рис. 7.11, $sc(G) = 7$. На рис. 7.11 обведены различные компоненты сильной связности графа G.

Теорема 7.8 *Для любой вершины x графа $G(X,U,f)$ имеет место*

$$_sC_x \subset C_x.$$

► Справедливость этого утверждения следует из того, что всякий путь является цепью. ◄

Следствие 7.1 *Для любого конечного графа $G(X,U,f)$ имеет место:*

$$1 \leqslant c(G) \leqslant sc(G) \leqslant |X|.$$

► Крайние оценки очевидны, а внутренняя следует из теоремы 7.8. ◄

Мосты графа

Определение 7.22 *Дуга u графа $G(X,U,f)$ называется мостом, если*

$$c(G) < c(G'_u), \quad где\ G'_u = G\left(X, U\setminus\{u\}, f\Big|_{U\setminus\{u\}}\right).$$

Пример 7.10. На рис. 7.12 обозначен надписью мост графа G.

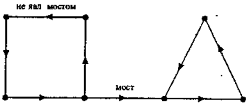


Рис. 7.12

Теорема 7.9 (теорема о мостах)

Мы с тобой два берега
у одной реки.

Если u_0 — мост графа $G(X,U,f)$, то

$$C(G)+1 = c\left(G'_{u_0}\right).$$

► Так как каждая дуга графа находится внутри компоненты связности, то при удалении моста «разваливается» только та компонента связности, которой он принадлежал. Значит, достаточно показать, что при удалении моста из компоненты, которой он принадлежал, получается ровно два «осколка», т. е. нужно доказать следующую теорему: ◄

Теорема 7.10 *Если u_0 — мост графа $G(X,U,f)$ и $c(G) = 1$, то $c\left(G'_{u_0}\right) = 2$.*

► Предположим противное, т. е. что существует такой граф G и мост u_0 на нем, что

$$c(G) = 1, \quad а \quad C\left(G'_{u_0}\right) \geqslant 3.$$

Последнее означает, что в графе G'_{u_0} существуют вершины x, y, z, лежащие в разных компонентах связности. Исходный граф был связен, значит, на нем существовала цепь η_{xy}, ведущая из x в y, и цепь η_{xz}, ведущая из x в z. Можно считать (по лемме 7.2), что эти цепи простые. На графе G'_{u_0} вершины x, y, z лежат в разных компонентах связности, значит, на нем нет цепей, соединяющих x с y и x с z, следовательно, цепи η_{xy} и η_{xz} «разорвались», а так как переход от G к G'_{u_0} осуществлен удалением дуги u_0, то эти цепи проходили через дугу u_0. Возможные комбинации трасс цепей таковы (см. рис. 7.13):

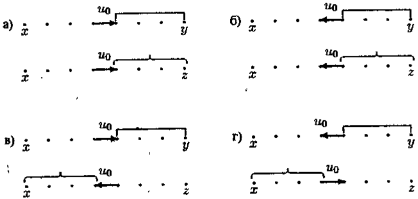


Рис. 7.13

«Куски» цепей, спрятанные за …, не содержат дуги u_0 (так как цепи простые), и значит, не пострадают при удалении дуги u_0. Тогда из инвертированного фрагмента «| |» на цепи η_{xy} и фрагмента «   »

на цепи η_{xz} в случаях а), б) склеивается цепь, соединяющая вершину y с вершиной z. Это противоречит тому, что эти вершины лежат в разных компонентах связности графа G'_{u_0}. В случаях в), г) из фрагментов «$\overbrace{\qquad}$» и «$\overline{\qquad}$» склеивается цепь, соединяющая вершину x с вершиной y. Это противоречит тому, что эти вершины лежат в разных компонентах графа G'_{u_0}. Полученные противоречия доказывают теорему 7.10 и 7.9. ◀

Вопросы в конце параграфа

1. Почему в определениях 7.17 и 7.21 слово «различных» подчеркнуто?
2. Докажите, что каждая дуга графа лежит внутри какой-то компоненты связности (т. е. ее начальная и конечная вершины находятся в одной компоненте связности).
3. Постройте граф $G(X, U, f)$ такой, что

$$|X| = 10, \quad c(G) = 3, \quad sc(G) = 5.$$

4. Докажите, что

$$sc(G) = c(G) \iff \forall x\,(\in X)\; C_x = {}_sC_x.$$

7.4 Эйлеровы графы, критерий эйлеровости

В этом параграфе мы возвращаемся к истокам теории графов и задачам, которыми занимался великий Леонард Эйлер. Отправной точкой для него послужила знаменитая задача о Кенигсбергских мостах, которая теперь стала неотъемлемой принадлежностью любого учебника по теории графов. Семь мостов города Кенигсберг (ныне Калининград) расположены на реке Прегель так, как изображено на рис. 7.14, соединяя его (города) части A, B, C, D. Задача состоит в следующем: «Найти такую точку города, выйдя из которой можно пройти по всем мостам города по одному разу и вернуться в нее обратно». Эйлер показал, что эта задача не имеет решения. Каждый мост Эйлер заменил линией, соединяющей точки, со-

ответствующие берегам. В результате получился граф, изображенный на рис. 7.15 (ориентация дуг не имеет значения).

! Заметим, что ни одна из дуг графа на рис. 7.15 не является мостом в смысле определения 7.22.

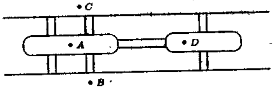


Рис. 7.14

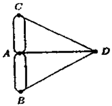


Рис. 7.15

Определение 7.23 *Связный граф называется эйлеровым, если на нем существует простой цикл, проходящий через все дуги графа (простой, проходящий через все дуги, т. е. проходящий по одному разу через каждую дугу).*

Лемма 7.4 *Если степень каждой вершины конечного графа четна, то на графе существует хотя бы один простой цикл.*

▶ Наличие хотя бы одной петли делает лемму тривиальной. Осталось рассмотреть графы без петель. Возьмем произвольную вершину графа. Так как ее степень четна, то существует по крайней мере две дуги, для которых она является граничной. Выйдем по одной из этих дуг из этой вершины (не обязательно по ее ориентации). Вершина, в которую мы придем, так же имеет четную степень, и значит, кроме дуги, по которой мы пришли, есть еще хотя бы одна, по которой можно из этой вершины уйти. «Уничтожим» после прохождения через вершину дуги «прихода» и «ухода». При этом степень пройденной вершины уменьшилась на 2, а значит, осталась четной. Таким образом, мы показали, что условие четности степеней вершин — это условие «незастревания» в них, и оно наследуется при уничтожении пройденных дуг. Двигаясь таким образом по конечному графу, не застревая в его вершинах, мы не можем все время оказываться в вершинах, в которых мы не побывали ранее (так как в конечном графе конечное число вершин). Тогда на каком-то из шагов такого «путешествия» мы окажемся в вершине графа, в которой уже были до этого. Отрезок простой цепи, заключенный между первым и вторым прохождением через такую вершину, является простым циклом на исходном графе. ◄

Теорема 7.11 (критерий эйлеровости графа) *Для того, чтобы конечный связный граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его вершин были четными числами.*

► **Необходимость** ►

Она очевидна, так как, двигаясь по эйлеровому циклу, войдя в вершину по одной дуге, мы выходим из нее по другой дуге, т. е. каждой «дуге входа» соответствует «дуга выхода». Каждая такая пара дуг дает вклад, равный двум, в степень вершины, а поскольку эйлеров цикл содержит все дуги, то степень каждой вершины представлена суммой двоек, и значит, четна. ◄ Необходимость.

Достаточность ►

Достаточность будем доказывать по индукции, взяв в качестве параметра индукции число дуг графа.

Шаг 1. $|U| = 1$. Единственный граф, удовлетворяющий условиям теоремы, изображен на рис. 7.16. Очевидно, его единственная дуга и образует эйлеров цикл.

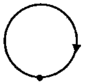


Рис. 7.16

Индуктивный переход. Предположим, что утверждение теоремы (ее достаточной части) справедливо для любого графа, у которого $|U| \leqslant n_0$. Докажем, что тогда оно справедливо и для графа, у которого $|U| = n_0 + 1$. Так как степени всех его вершин четны, то по лемме 7.4 на этом графе существует простой цикл η. Если этот цикл проходит через все дуги графа G, то он и есть искомый эйлеров цикл, и индуктивный переход доказан. В противном случае рассмотрим граф, полученный из G удалением дуг цикла η — G'_η. Каждая его компонента связности — конечный связный граф с четными степенями вершин и числом дуг, меньшим либо равным n_0. Тогда, по предположению индукции, на каждой компоненте связности существует эйлеров цикл. Обозначим эйлеровы циклы компонент η_1, η_2, …, η_k соответственно. Поскольку исходный граф связен, то цикл η имеет хотя бы по одной общей вершине с компонентами графа G'_η. Выберем по одной общей с циклом вершине на каждой компоненте — $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Искомый эйлеров цикл на графе G построим следующим образом: отправившись по циклу η из произвольной его вершины, движемся по нему до тех пор, пока не встретим вершину x_i из множества $\{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$, тогда от вершины x_i пройдем по эйлерову циклу η_i на соответствующей компоненте графа G'_η, после чего продолжим движение по циклу η до тех пор, пока не встретим вершину $x_j \in \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$, опять прервем движение по η и пройдем по эйлерову циклу η_j соответствующей компоненты и т. д. В результате движения по циклу η мы побываем во всех вершинах множества $\{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$, а значит, пройдем по всем циклам $\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_k$ (см. рис. 7.17).

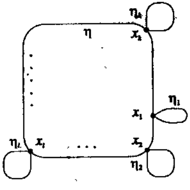


Рис. 7.17

(Процесс склейки эйлерова цикла из цикла η и циклов $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ похож на сборку ожерелья с подвесками.)

Индуктивный переход, а вместе с ним и вся теорема, доказан. ◄ Достаточность. ◄

Определение 7.24 *Связный граф называется квазиэйлеровым, если на нем существует простая цепь, проходящая через все дуги графа.*

Теорема 7.12 (критерий квазиэйлеровости) *Для того чтобы конечный связный граф был квазиэйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его вершин были четными числами или степени всех его вершин, за исключением равно двух, были четными числами, причем в первом случае эйлерова цепь является эйлеравым циклом, а во втором случае эйлерова цепь начинается в одной из вершин нечетной степени, а заканчивается в другой вершине нечетной степени.*

► Ясно, что теорема 7.12 является следствием теоремы 7.11. Случай 2-х вершин нечетной степени и построение эйлеровой цепи можно свести к эйлерову циклу на графе, полученном из G добавлением дуги, соединяющей две вершины нечетной степени. ◄

Вопросы в конце параграфа

1. Можно ли нарисовать фигуру, называемую саблями Магомеда (см. рис. 7.18), не отрывая карандаш от бумаги и не проходя по отрезкам линий дважды (за исключением помеченных точек)?

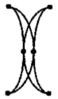


Рис. 7.18

2. Можно ли нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги и не проходя ни по одному из отрезков дважды, домик с крышей вида а), б), в), г), д) (см. рис. 7.19)?

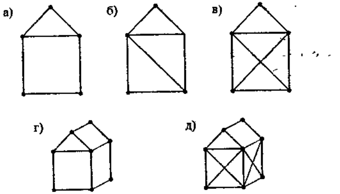


Рис. 7.19

3. Какие из графов, приведенных на рисунке 7.20, являются эйлеровыми, квазиэйлеровыми?

Рис. 7.20

7.5 Деревья и леса

В этом параграфе мы изучим простой и очень важный своими приложениями класс графов — деревья. О широком применении этого класса говорят такие термины: «дерево поиска», «древовидные структуры», «ветвление» и др.

Лемма 7.5 *Для любого конечного графа $G(X, U, f)$ справедливо*

$$|X| - c(G) \leqslant |U|. \tag{7.3}$$

► Проведем доказательство индукцией по параметру $m = |U|$.

1 шаг. $m = 0$. Любой граф, у которого $|U| = 0$ ($\Leftrightarrow U = \varnothing$), имеет вид, изображенный на рис. 7.21.

Рис. 7.21

Тогда $c(G) = |X|$. Значит,

$$|X| - c(G) = |X| - |X| = 0 \leqslant 0 = |U|.$$

Соотношение (7.3) выполнено.

Индуктивный переход. Предположим, что соотношение (7.3) справедливо для любого графа, у которого $|U| \leqslant m_0$. Докажем, что тогда оно справедливо и для графа, у которого $|U| = m_0 + 1$. Для такого графа возможны два случая: 1) на нем нет мостов; 2) на нем есть хотя бы один мост.

В первом случае удалим произвольную дугу u графа G, т. е. перейдем к графу G'_u. Для него соотношение (7.3) выполнено (по предположению), значит,

$$|X| - c(G'_u) \leqslant |U \setminus \{u\}|,$$

но $c(G'_u) = c(G)$, тогда

$$|X| - c(G) \leqslant |U - \{u\}| = |U| - 1 < |U|.$$

Соотношение (7.3) доказано.

Во втором случае обозначим через u_0 мост графа G и выпишем соотношение (7.3) для графа G'_{u_0} :

$$|X| - c\left(G'_{u_0}\right) \leqslant |U \setminus \{u_0\}|,$$

по теореме 7.9 о мостах $c\left(G'_{u_0}\right) = c(G) + 1$, тогда

$$|X| - c(G) - \cancel{1} \leqslant |U \setminus \{u_0\}| = |U| - \cancel{1}.$$

Соотношение (7.3) выполнено и в этом случае. Индуктивный переход доказан. ◄

Лемма 7.6 *Конечный граф $G(X, U, f)$, у которого*

$$|U| \leqslant |X| - 2, \tag{7.4}$$

не является связным.

► Предположим противное, т. е. что существует конечный связный граф $G_0(X_0, U_0, f_0)$, у которого $|U_0| \leqslant |X_0| - 2$. По предыдущей лемме для него выполнено

$$|X_0| - 1 \leqslant |U_0|. \tag{7.5}$$

Из (7.5) и (7.4) получим

$$|X_0| - 1 \leqslant |X_0| - 2 \quad \text{или} \quad -1 \leqslant -2.$$

Полученное противоречие и доказывает лемму. ◄

Определение 7.25 *Деревом называется конечный связный граф без циклов.*

Пример 7.11.

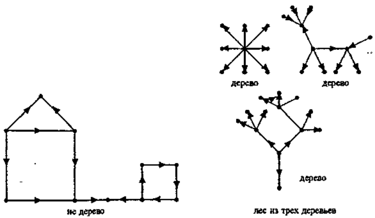


Рис. 7.22

Определение 7.26 *Лесом из k деревьев называется граф G без циклов, у которого $c(G) = k$, $k > 1$.*

На рис. 7.22 справа изображен лес из 3-х деревьев.

Теорема 7.13 (основная теорема о деревьях) *Для конечного графа $G(X, U, f)$ следующие 6 утверждений эквивалентны:*

1. G — дерево, т. е. связный граф без циклов.

2. G не содержит циклов и $|U| = |X| - 1$.

3. G связен и $|U| = X - 1$.

4. G связен и каждая его дуга является мостом.

5. Любые две вершины можно соединить, и причем единственной простой цепью.

6. G — не содержит циклов, добавление к нему любой дуги приводит к к образованию единственного простого цикла.

► Докажем, что из 1) следует 4). Доказательство проведем от противного, т. е. предположим, что существует такое дерево G, на котором есть дуга u_0, не являющаяся мостом. Обозначим через x_0 ее конец, через y_0 — ее начало. Образуем граф G'_{u_0}. Так как он по нашему предположению связен, то на нем существует простая цепь $\eta_{x_0y_0}$, ведущая из x_0 в y_0,

тогда $\eta_{x_0y_0} \cup \{u_0\}$ — простой цикл на G, что противоречит тому, что G — дерево.

Докажем, что из 1) следует 2), но так как то, что из 1) следует 4), уже доказано, то можно доказывать, что из 1) и 4) следует 2). На самом деле достаточно доказать, что из 1) и 4) следует, что $|U| = |X| - 1$. Докажем это по индукции, взяв в качестве параметра индукции $m = |U|$.

1-й шаг. $m = 0$. Единственное дерево имеет вид, приведенный на рис. 7.23. Ясно, что для него $|X| = 1$, $|U| = 0$, и значит, $|U| = |X| - 1$.

Рис. 7.23

Индуктивный переход. Предположим, что соотношение $|U| = |X| - 1$ справедливо для любого дерева, у которого $|U| \leqslant m_0$. Докажем, что тогда оно справедливо и для дерева, у которого $|U| = m_0 + 1$. Удалим произвольную дугу u дерева, т. е. перейдем к графу G'_u. Так как 4) для G выполнено, то u — мост и G'_u состоит из 2-х компонент связности (теорема 7.10), каждая из которых — дерево с числом дуг, меньшим либо равным m_0. Тогда для каждой компоненты связности выполнено предположение индукции

$$|U_1| = |X_1| - 1, \quad |U_2| = |X_2| - 1.$$

Складывая последние равенства, получаем

$$\begin{aligned} \underbrace{|U_1| + |U_2|}_{=|U|-1} &= \underbrace{|X_1| + |X_2|}_{=|X|} - 2; \\ |U| - 1 &= |X| - 2; \\ |U| &= |X| - 1. \end{aligned}$$

Индуктивный переход доказан.

Докажем теперь, что из 2) следует 3). На самом деле достаточно доказать, что из 2) следует «G — связен». Доказывать это будем от противного, т. е. предположим, что существует граф G, который не содержит циклов и у которого $|U| = |X| - 1$, но G не является связным. Тогда он состоит по крайней мере из k ($k \geqslant 2$) компонент связности, каждая из которых не содержит циклов, и значит, является деревом. Переход $1 \Longrightarrow 2$ уже доказан, значит, для каждой компоненты

$$|U_i| = |X_i| - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Суммируя по i, получаем

$$\sum_{i=1}^{k} |U_i| = \sum_{i=1}^{k} (|x_i| - 1) \quad \text{или} \quad |U| = |X| - k.$$

Это противоречит тому, что $|U| = |X| - 1$.

Докажем, что из 3) следует 4). Будем доказывать от противного, т. е. предположим, что существует граф G, который связен и у которого $|U| = |X| - 1$, но 4) для него не выполнено, т. е. не каждая дуга является мостом. Пусть $u_0 \in U$ не является мостом, тогда G'_{u_0} — связный граф, у которого число дуг равно $|X| - 2$, а это противоречит лемме 7.6.

Докажем, что из 4) следует 5). Доказывать будем от противного, т. е. предположим, что существует такой связный граф, у которого каждая дуга является мостом, но для которого 5) не выполнено. Так как на графе G условие 5) не выполнено, то на нем есть такие две вершины, которые можно соединить двумя простыми цепями — η_1 и η_2. Ясно, что $\eta_1 \cup \eta_2$ является либо простым циклом, либо содержит простой цикл. А дуги простого цикла не являются мостами. Получено противоречие с 4).

Докажем, что из 5) следует 6). Добавим к графу G дугу w, соединяющую y с x. На исходном графе по условию существует простая цепь η_{xy}, соединяющая x с y, тогда $\eta_{xy} \cup \{w\}$ — простой цикл. Докажем единственность образовавшегося простого цикла. Доказывать единственность будем от противного. Предположим, что существуют такие вершины x_0 и y_0 и добавленная дуга w_0, соединяющая y_0 с x_0, что на графе $G \cup \{w_0\}$ существует два простых цикла, проходящих через w_0: η_1 и η_2. Но тогда $\eta_1 \setminus \{w_0\}$ и $\eta_2 \setminus \{w_0\}$ — две простые цепи, соединяющие x_0 с y_0 на G, а это противоречит 5).

Докажем, что из 6) следует 1). Докажем отдельно, что:

а) из 6) следует — «G связен»;

б) из 6) следует — «G без циклов».

Докажем а) от противного, т. е. предположим, что существует несвязный граф, для которого выполнено 6). Возьмем на этом графе две вершины x_0 и y_0, лежащие в разных компонентах связности, и добавим к графу дугу w_0, их соединяющую. Ясно, что при этом не образуется простой цикл, а это противоречит 6).

Докажем б) тоже от противного, т. е. предположим, что существует граф, содержащий цикл, для которого выполнено 6) — добавление любой дуги приводит к образованию единственного простого цикла. Существование на графе цикла означает и существование на нем простого, проходящего через все свои вершины (кроме начала и конца) по одному разу ($\Leftrightarrow$ элементарного) цикла. Зафиксируем на нем две вершины x_0 и y_0 и добавим к графу дугу w, их соединяющую. Ясно, что при этом образуется два простых цикла (см. рис. 7.24).

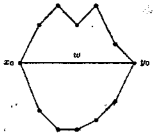


Рис. 7.24

Получено противоречие с 6). ◄

Следствие 7.1 *Если $G(X, U, f)$ — лес из k деревьев, то*

$$|U| = |X| - k.$$

Определение 7.27 *Вершина x графа $G(X, U, f)$ называется висячей, если* $\deg x = 1$.

Следствие 7.2 *Если $G(X, U, f)$ — дерево и $|X| \geqslant 2$, то на нем есть по крайней мере две висячие вершины.*

► Допустим противное, т. е. что существует дерево $G(X, U, f)$, у которого $|X| \geqslant 2$ и не более одной висячей вершины.

Представим X в виде $X = (X \setminus X_b) \cup X_b$, где X_b — множество висячих вершин. Обозначим $b = |X_b| \leqslant 1$. По теореме Эйлера (теорема 7.1) имеем

$$2|U| = \sum_{x\in X} \deg x = \sum_{x\in X\setminus X_b} \deg x + \sum_{x\in X_b} \deg x =$$
$$= \sum_{x\in X\setminus X_b} \deg x + \delta \geqslant \sum_{x\in X\setminus X_b} 2 + \delta = 2(|X| - \delta) + \delta = 2|X| - \delta.$$

Учтем, что $|U| = |X| - 1$, тогда

$$2(|X| - 1) \geqslant 2|X| - \delta \quad \text{или} \quad -2 \geqslant -\delta.$$

Последнее дает противоречие и при $\delta = 0$, и при $\delta = 1$. ◄

Вопросы в конце параграфа

1. Докажите самостоятельно следствие 7.1 к теореме о деревьях.
2. Диаметром связного графа называется самая длинная простая цепь. Докажите, что любые два диаметра графа имеют общую вершину.

7.6 Помеченные графы. Перечисление помеченных деревьев. Матрицы графов

Помеченные графы

Определение 7.28 *Гроф с n вершинами называется помеченным, если его множество вершин $X = [1; n]_{\mathbb{N}}$.*

Определение 7.29 *Помеченные графы G_1 и G_2 с n вершинами называются изоморфными, если существует биективное отображение ψ: $U_1 \to U_2$ такое, что*

$$(p_i \circ f_2 \circ \psi)(u) = (p_i \circ f_1)(u) \quad \forall u \in U_1, \quad i = 1, 2.$$

Это определение похоже на определение изоморфизма графов (см. определение 7.5), отличие состоит в том, что изоморфизм графов реализуется парой биективных отображений $\varphi : X_1 \to X_2$, $\psi : U_1 \to U_2$, а здесь φ — тождественное отображение.

Пример 7.12.

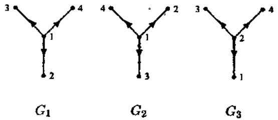


Рис. 7.25

Рассмотрим графы G_1, G_2, G_3, приведенные на рис. 7.25. G_1 изоморфен как помеченный графу G_2 и не изоморфен как помеченный графу G_3. Ясно, что в обычном смысле G_1, G_2, G_3 изоморфны.

Перейдем теперь к решению одной комбинаторной задачи: «Сколько существует не изоморфных между собой неориентированных помеченных деревьев с n вершинами?»

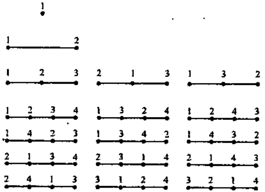
Обозначим число неизоморфных помеченных деревьев через $T(n)$. Ясно, что

$T(1) = 1$

$T(2) = 1$

$T(3) = 3$

$T(4) = 16$



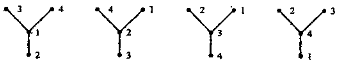


Рис. 7.26

Теорема 7.14 (теорема Келли[2])

$$T(n) = n^{n-2}.$$

► Обозначим через $T(n,k)$ число неизоморфных помеченных деревьев с n вершинами, у которых $\deg 1 = k$. Тогда

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k).$$

Выведем формулу для нахождения $T(n,k)$. Для этого найдем соотношение, связывающее $T(n,k)$ и $T(n,k+1)$. Возьмем произвольное помеченное дерево A такое, что $\deg 1 = k$. Перестроим его в дерево B такое, у которого $\deg 1 = k+1$. Для этого удалим из A любую из $n-1-k$ дуг, не инцидентных вершине «1». Обозначим граничные вершины этой дуги x и y. При удалении дуги дерево A разваливается на два куска: один из них содержит вершину «1» и одну из $\{x;y\}$; а второй — оставшуюся из $\{x;y\}$ (см. рис. 7.27, левая часть).

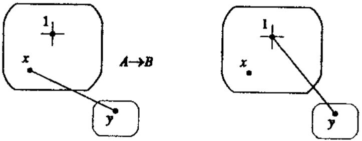


Рис. 7.27

[2]Келли А. (1821–1895) — английский математик. Его математические способности проявились уже в раннем возрасте. Окончил Тринити-Колледж (Кембридж) в возрасте 17 лет. Занимался n-мерной геометрией и многомерным анализом. Основным источником существования А. Келли являлась с 1841 г. по 1863 г. юридическая практика, однако Келли не оставлял занятий математикой и опубликовал за эти годы около 300 математических работ. С 1863 г. Келли переходит не должность математика в Кембриджском университете, несмотря на заметную потерю в доходах.

Переход от дерева A к дереву B показан на правой части рис. 7.27, т. е. мы «пришиваем» отвалившуюся часть новой дугой, соединяющей «1» и «y». Пару полученных графов $(A;B)$ назовем связкой. Ясно, что одно дерево A порождает $n-1-k$ связок, тогда количество связок $(A;B)$ равно $(n-1-k)\cdot T(n,k)$.

Возьмем теперь произвольное дерево B, у которого $\deg 1 = k+1$. Подсчитаем, сколько связок $(A;B)$ порождает дерево B.

Удаление любой дуги u_i $(i = 1,2,\ldots,k+1)$, инцидентной вершине «1», разваливает дерево B на две части, одна из которых содержит вершину «1», а другая — вторую инцидентную удаленной дуге вершину (обозначим ее x_i). «Отпавший лепесток» можно прикреплть, соединив дугой вершину x_i с любой вершиной другого лепестка (см. рис. 7.28, правая часть).

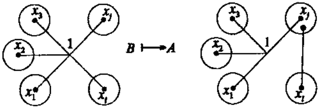


Рис. 7.28

Одна дуга u_i дает нам $n-1-n_i$ возможностей (n_i — число вершин на i-м лепестке). Тогда всего деревьев A, порождаемых B, будет

$$\sum_{i=1}^{k+1}(n-1-n_i) = (n-1)(k+1) - \sum_{i=1}^{k+1} n_i =$$
$$= (n-1)(k+1) - (n-1) = (n-1)k.$$

Таким образом, одно дерево B порождает $(n-1)k$ связок $(A;B)$. Тогда количество связок $(A;B)$ равно $(n-1)\cdot k\cdot T(n,k+1)$. Приравнивая дважды вычисленное количество связок $(A;B)$, получаем

$$(n-1-k)T(n,k) = (n-1)kT(n,k+1). \tag{7.6}$$

Выпишем теперь серию соотношений типа (7.6):

$$\begin{aligned}
(n-1-k)T(n,k) &= (n-1)kT(n,k+1)\\
(n-1-k-1)T(n,k+1) &= (n-1)(k+1)T(n,k+2)\\
\ldots\ \ldots &\quad \ldots\ldots\ \ldots\\
1\cdot T(n,n-2) &= (n-1)(n-2)T(n,n-1)
\end{aligned}$$

Перемножая их и сокращая на общие множители, получаем:

$$T(n,k)\cdot(n-1-k)! = (n-1)^{(n-1-k)}\cdot\frac{(n-2)!}{(k-1)!}\cdot\underbrace{T(n,n-1)}_{=1}.$$

Окончательно

$$T(n,k) = C_{n-2}^{k-1}(n-1)^{(n-1-k)}.$$

Тогда

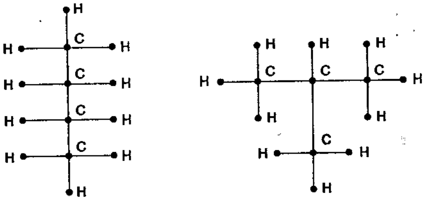
$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1}(n-1)^{(n-1-k)} = \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^{i}(n-1)^{(n-2-i)} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^{i}(1)^{i}(n-1)^{(n-2-i)} \overset{\text{ф-ла бинома}}{=}$$

$$= (1+(n-1))^{(n-2)} = n^{(n-2)} \qquad ◄$$

Свои результаты по перечислению деревьев А. Келли успешно применил в химии для определения количества химических изомеров углеводородов — C_nH_{2n+2}. Структурные формулы молекул таких соединений (вершины — атомы, дуги — валентные связи) представляют собой деревья. Структурные формулы двух таких изомеров — бутана и изобутана — приведены на рис. 7.29.

Методы теории графов в XX веке нашли широкое приложение в химии (см., например, «Химические приложения топологии и теории графов»: Пер. с англ. / Под ред. Р. Кинга. М.: Мир, 1987. 560 с., илл.).



бутан изобутан

Рис. 7.29

Важным для приложений классом ориентированных деревьев являются корневые, или растущие деревья, т. е. такие, у которых существует вершина, называемая корнем, из которой существуют простые пути во все остальные вершины (в силу общих свойств деревьев путь из корня в каждую вершину — единственный). Вершины корневого дерева, отличные от корня и висячих называют промежуточными. Такие структуры принято использовать для организации систем хранения информации, в частности, таковыми являются компьютерные файловые системы. Корневое дерево файловой системы обычно называют деревом директорий, в котором корень — корневая директория, промежуточные вершины — поддиректории, а висячие вершины — отдельные файлы или пустые поддиректории.

Матрицы графов

Во многих задачах теории графов (особенно решаемых на ЭВМ) графы удобно описывать матрицами. Пусть $G(X,U,f)$ — помеченный конечный граф с n вершинами и m дугами (дуги тоже занумерованы). Матрицей смежности графа G называется матрица $A(G)$ размера $n\times n$, определенная следующим:

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если существует дуга из } i\text{-й вершины в } j\text{-ю;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицей инцидентности графа называется матрица $B(G)$ размера $n \times m$, определяемая следующим:

$$(B(G))_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-я дуга заканчивается в } i\text{-й вершине;} \\ -1, \text{ если } j\text{-я дуга начинается в } i\text{-й вершине;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

В случае неориентированного графа матрица $B(G)$ определяется следующим:

$$(B(G))_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-я дуга инцидентна } i\text{-й вершине;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 7.15 *Двоичный ранг (т. е. вычисленный в арифметике по* $0\dot{+}0 = 0$, $0\dot{+}1 = 1$, $1\dot{+}1 = 0$*) матрицы* $B(G)$ *конечного неориентированного графа равен* $|X| - c(G)$.

► Если выбрать покомпонентную нумерацию вершин и дуг, то матрица $B(G)$ имеет блочную структуру — блоки соответствуют компонентам. Ранг такой матрицы равен сумме рангов блоков. Для доказательства теоремы осталось доказать, что в случае связного графа двоичный ранг равен $|X| - 1$. Если к последней строке матрицы прибавить все остальные строки, мы получим нулевую строку (двоичная арифметика), значит,

$$\operatorname{drang} B(G) \le |X| - 1. \qquad (7.7)$$

У любого связного графа существует частичнмй граф, являющийся деревом (попрывающее дерево). Тогда

$$\operatorname{drang} B(G) \ge \operatorname{drang} B(\text{покр. дерева}). \qquad (7.8)$$

Покажем, что

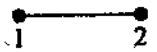
$$\operatorname{drang} B(G) = |X| - 1, \qquad (7.9)$$

если G — дерево.

Последнее равенство будем доказывать по индукции, взяв в качестве параметра индукции $m = |U|$.

1-й шаг. $m = 1$

G :



$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \operatorname{drang} B(G) = 1 = 2 - 1 = |X| - 1,$$

т. к. $|X| = 2$.

Индуктивный переход. Предположим, утверждение справедливо для любого дерева с m дугами.

Докажем, что оно справедливо и для дерева, у которого $|U| = m + 1$. Мы знаем, что на таком дереве есть висячая вершина (следствие 2 теоремы 7.13). Будем считать, что она имеет последний номер и инцидентная ей дуга имеет последний номер. Тогда матрица $B(G)$ имеет следующую структуру:

$$B(G) = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & B\left(G'_{U_{m+1}}\right) & 1 \\ & & 0 \\ 0\,0 & \dots & 0\,1 \end{pmatrix}.$$

Но тогда

$$\operatorname{drang} B(G) = \operatorname{drang} B\left(G'_{U_{m+1}}\right) + 1.$$

Граф $G'_{U_{m+1}}$ — дерево с m дугами, полученное из дерева G удалением висячей вершины и инцидентной ей дуги.

Для него выполнено предположение индукции

$$\operatorname{drang} B\left(G'_{U_{m+1}}\right) = (|X| - 1) - 1,$$

тогда

$$\operatorname{drang} B(G) = |X| - 1 - 1 + 1 = |X| - 1.$$

Индуктивный переход доказан. Из (7.7), (7.8) и (7.9) получаем, что если G — связный граф, то

$$\operatorname{drang} B(G) = |X| - 1,$$

а это завершает доказательство всей теоремы. ◄

7.7 Взвешенные графы. Задача о кратчайшем соединении. Кратчайшие пути

Завершая эту главу и весь курс, рассмотрим взвешенные графы, т. е. такие, у которых дугам поставлены в соответствие вещественные (как правило неотрицательные) числа, называемые весами. В качестве весов могут выступать длины дуг, пропускная способность, стоимость эксплуатации и т. п.

Задача о кратчайшем соединении

Известны точки, в которых будут расположены населенные пункты (города) и известны трассы дорог, которые можно построить, а также стоимость их строительства.

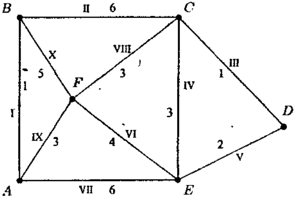


Рис. 7.30

На рис. 7.30 указаны населенные пункты A, B, C, D, F; арабские цифры около проектируемых участков дорог — стоимость их строительства; римские цифры — номера дуг. Требуется определить, какие из дорог следует построить, чтобы полученная схема дорог позволяла попасть из любого города в любой и из всех возможных схем имела наименьшую стоимость строительства.

Ясно, что сформулированная задача может быть формализована с помощью теории графов.

Определение 7.30 *Взвешенным графом (графом с весами на дугах) будем называть четверку $G(X, U, f, \rho)$, где $G(X, U, f)$ — граф, $\rho : U \to (0, +\infty)$.*

Отображение ρ называется весовым отображением. Если $u \in U$, то $\rho(u)$ называют весом дуги u. Если $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ — путь или цепь на графе G, то ее весом называют величину

$$\rho(\{u_i\}_{i=1}^{n}) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \rho(u_i).$$

Весом графа $G(X, U, f, \rho)$ называют величину

$$\rho(G) \stackrel{def}{=} \sum_{u \in U} \rho(u).$$

Аналогично определяется вес подграфа и частичного графа.

Сформулируем задачу о соединении городов на языке теории графов.

Дан конечный связный взвешенный граф $G(X, U, f, \rho)$. Требуется найти связный частичный граф минимального веса.

Определение 7.31 *Покрывающим деревом связного графа называется его частичный граф, который является деревом. Если G не является связным графом, то говорят о покрывающем лесе, т. е. о деревьях, покрывающих его компоненты связности.*

Теорема 7.16 *Решение задачи о соединении городов — покрывающее дерево.*

► Предположим противное, т. е. что решение задачи — $G\left(X, U', f|_{U'}, \rho|_{U'}\right)$ не является деревом. Тогда на нем по основной теореме о деревьях существует хотя бы одна дуга, которая не является мостом. Обозначим ее u_0. Рассмотрим граф $G\left(X, U' \setminus \{u_0\}, f|_{U'\setminus\{u_0\}}, \rho|_{U'\setminus\{u_0\}}\right)$. Очевидно, он связен и

$$\rho\left(G\left(X, U' \setminus \{u_0\}, f\Big|_{U'\setminus\{u_0\}}\right)\right) =$$

$$= \rho\left(G\left(X, U', f\Big|_{U'}, \rho|_{U'\setminus\{u_0\}}\right)\right) - \rho(u_0) < \rho\left(G\left(X, U', f\Big|_{U'}, \rho|_{U'}\right)\right).$$

Последнее противоречит тому, что $G\left(X, U', f|_{U'}, \rho|_{U'}\right)$ является решением задачи о соединении городов. ◄

Теорема 7.17 (алгоритм Краскала[3]) *Последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1}$ дуг покрывающего дерева минимального веса может быть найдена с помощью следующего алгоритма:*

1) *u_1 — дуга минимального веса из множества U, не являющаяся петлей;*

2) *если уже определен начальный отрезок последовательности u_1, u_2, $\ldots$, u_{k-1}, то дуга u_k выбирается из множества $U \setminus (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$ так, что выполнено два условия:*

а) *добавление дуги u_k к $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ не приводит к образованию циклов;*

б) *из дуг, удовлетворяющих условию а), дуга u_k обладает наименьшим весом.*

► Ясно, что последовательность, построенная по алгоритму, определяет покрывающее дерево. Очевидно, что $\rho(u_1) \le \rho(u_2) \le \cdots \le \rho\left(u_{|X|-1}\right)$. Это дерево обозначим T_{K_p}. Покажем, что T_{K_p} является решением задачи о

[3]Краскал Джозеф Бернард (род 1928 г.). Родился в Нью-Йорке, окончил университет г. Чикаго, получил степень доктора философии в Принстонском университете в 1954 г. Преподавал в Принстоне и университетах штатов Висконсин и Мичиган. С 1959 г. — научный сотрудник Bell Laboratories. Изложенный в этой книге алгоритм был предложен Краскалом еще на 2-м курсе университета.

соединении городов. Предположим противное, т. е. что существует другое покрывающее дерево $T = G\left(X, V, f|_V, \rho|_V\right)$, при этом

$$\rho(T) < \rho\left(T_{K_p}\right). \tag{7.10}$$

Упорядочим последовательность дуг дерева T так, что $V = \{v_i\}_{i=1}^{|X|-1}$ и $\rho(v_1) \le \rho(v_2) \le \cdots \le \rho\left(v_{|X|-1}\right)$. Ясно, что $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1} \ne \{v_i\}_{i=1}^{|X|-1}$. Обозначим через k такой индекс, что $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $\ldots$, $u_{k-1} = v_{k-1}$, $u_k \ne v_k$. Тогда $\rho(u_k) \le \rho(v_k)$, так как v_k по отношению к $\{u_i\}_{i=1}^{k-1}$ удовлетворяет подпункту а) пункта 2) алгоритма Краскала. Добавим к дереву T дугу u_k. По основной теореме о деревьях это привело к образованию единственного простого цикла, содержащего дугу u_k. Очевидно, этот простой цикл содержит хотя бы одну дугу v_j, $j > k$. Мы имеем $\rho(u_k) \le \rho(v_k) \le \rho(v_j)$. Разорвем этот цикл, удалив дугу v_j. Полученное дерево обозначим T_1. Занумеруем его последовательность дуг $\{v_i^1\}_{i=1}^{|X|-1}$ так, что $\rho(v_1^1) \le \rho(v_2^1) \le \cdots \le \rho(v_{|X|-1}^1)$. Ясно, что

$$\rho(T_1) \le \rho(T). \tag{7.11}$$

Возможны два случая:

1) $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1} = \{v_i^1\}_{i=1}^{|X|-1}$. Тогда $T_1 = T_{K_p}$ и мы имеем

$$\rho\left(T_{K_p}\right) \le \rho(T). \tag{7.12}$$

Последнее противоречит (7.10).

2) $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1} \ne \{v_i^1\}_{i=1}^{|X|-1}$. Обозначим через $k1$ такой индекс, для которого

$$u_1 = v_1^1,\ u_2 = v_2^1,\ \ldots,\ u_{k1-1} = v_{k1-1}^1,\ u_{k1} \ne v_{k1}^1.$$

Из построения T_1 следует, что $k_1 > k$. Тогда, применяя рассуждения, приведенные для пары T_{K_p}, T, к паре T_{K_p}, T_1, мы получим граф T_2 ($k2 > k1$), для которого опять возможны два случая: 1), 2). Но случай 1) приводит к противоречию, а случай 2) приведет к графу T_3 и $k3 > k2$. Ясно. что мы можем лишь конечное число раз выходить на случай 2), так как $k1 < k2 < \cdots < |X| - 1$, а выход на случай 1) приводит к тому, что

$$\rho\left(T_{K_p}\right) \le \rho(T_1) \le \rho(T_2) \le \cdots \le \rho(T),$$

а это противоречит (7.10). ◄

Пример 7.13. Применим алгоритм Краскала к графу, приведенному на рис. 7.30, — схеме дорог. На первом шаге выбирается дуга u_1 = III, затем u_2 = I, u_3 = V (далее отпадает возможность выбора дуги IV), u_4 = VIII (далее отпадает возможность выбора дуги VI), u_5 = IX (далее отпадает возможность выбора дуг II, X, VII). Процесс выбора дуг автоматически оборвался. Покрывающее дерево минимального веса приведено на рис. 7.31.

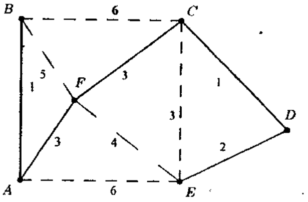


Рис. 7.31

Пунктиром обозначены дуги, не вошедшие в это дерево. $\rho\left(T_{K_p}\right) = 10$.

Задача о кратчайших путях

Пусть дан граф с неотрицательными весами на дугах. Нас будут интересовать две задачи:

1) Какова длина кратчайшего пути, ведущего из одной выделенной вершины к другой? Каков этот путь?

2) Каковы длины кратчайших путей от выделенной вершины до всех остальных вершин графа? Каковы эти пути?

Задачи 1) и 2) очень похожи, и решение задачи 1) получается в результате прерывания в нужном месте решения задачи 2).

Приведенный ниже алгоритм Дейкстры[4] — один из первых известных динамических алгоритмов — основан на двух идеях:

— присвоении вершинам графа меток и правиле пересчета меток, при этом окончательные метки — длины кратчайших путей;

— экстремальном свойстве кратчайшего пути, состоящем в следующем: если кратчайший путь из вершины x в вершину y проходит через вершину z, то его отрезок от вершины x до вершины z — кратчайший путь от x до z, а его отрезок от z до y — кратчайший путь от z до y.

Опишем шаги алгоритма Дейкстры нахождения длин кратчайших путей из вершины s до всех вершин графа.

0^0. Начальная установка меток и массивов (метку вершины будем обозначать $m(x)$:)

$$m(s) := 0, \quad m(x) := \infty \quad \text{для всех } x \neq s;$$
$$S : \{s\}, \quad T := X \setminus S.$$

1^0. Правило пересчета меток и изменения массивов. Пересчитываются только метки вершин $t \in T$, для которых существуют дуги, ведушие из множества S

$$m(t) := \min_{y \in S} \left(m(t), m(y) + \rho\left(u_{yt}\right)\right), \tag{7.13}$$

где u_{yt} — дуга из вершины y в вершину t.

2^0. Из вершин, метки которых пересчитались, выбрать вершину t, имеющую наименьшую метку

$$S' := S \cup \{t\}, \quad T' := X \setminus S'.$$

3^0. Правило выхода из алгоритма. Если $S' = S$, то переход на 4^0, иначе $S := S'$, $T := T'$ и переход на 1^0.

4^0. $m(x)$ — длина кратчайшего пути из вершины s в вершину x, если $m(x) = \infty$, то пути из вершины s в вершину x на графо не существует.

[4] Дейкстра Еусгер (1930) родился в Нидерландах. Программированием начал заниматься в 1950 г., когда учился на отделении теоретической физики Лейденского университета. Лицензию программиста получил в 1957 г. Е. Дейкстра — один из основоположников программирования как учебной дисциплины, включающей алгоритмические языки, структурное программирование, алгоритмизацию. С 1984 г. возглавляет отделение программирования в университете штата Техас.

Восстановление кратчайшего пути

Кратчайший путь от вершины s к вершине t восстанавливается по известным меткам вершин, полученным с помощью алгоритма Дейкстры, пошагово от вершины t до возврата в вершину s. Восстановление основано на экстремальном свойстве кратчайшего пути. Опишем один шаг возвращения.

Для вершины t среди вершин $y \in f^{-1}(X \times \{t\})$ найти такую, для которой выполнено условие:

$$m(t) = m(y) + \rho(u_{yt}). \tag{7.14}$$

Условие (7.14) восстанавливает последнюю дугу кратчайшего пути: $y \xrightarrow{u_{yt}} t$. После чего выполняется шаг возвращения от вершины y и т. д.

Пример 7.14. Для графа, приведенного на рисунке 7.32, найти длины кратчайших путей от вершины x_1 ко всем остальным и восстановить кратчайший путь от x_1 к x_7.

► Решение задачи сведем в таблицу 7.1 (окончательные метки обведены квадратом):

Таблица 7.1:

№ шага пересчета меток	Метки вершин								
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	3	∞	2	4	∞	∞	∞
2	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	3	4	$\boxed{2}$	3	∞	∞	2
3	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	3	3	$\boxed{2}$	3	7	3	$\boxed{2}$
4	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	3	$\boxed{2}$	3	7	3	$\boxed{2}$
5	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	3	4	3	$\boxed{2}$
6	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	3	$\boxed{2}$
7	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$
8	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$

Проведем восстановление пути из x_1 в x_7. Ясно, что

$$\begin{aligned} m(x_9) &= m(x_8) + \rho(u_{x_8x_7}), \\ m(x_8) &= m(x_9) + \rho(u_{x_9x_8}), \\ m(x_9) &= m(x_2) + \rho(u_{x_2x_9}), \\ m(x_2) &= m(x_1) + \rho(u_{x_1x_2}). \end{aligned}$$

Таким образом, кратчайший путь из x_1 в x_7 имеет длину 4 и трассу:

$$x_1 \xrightarrow{1} x_2 \xrightarrow{1} x_9 \xrightarrow{1} x_8 \xrightarrow{1} x_7. \quad ◄$$

Следует отметить высокую эффективность алгоритма Дейкстры и его широкую применимость в окружающем нас мире. Бортовые компьютеры современных автомобилей позволяют находить трассу кратчайшего пути, и делают это они с помощью алгоритма Дейкстры. Маршрутизаторы, являющиеся важнейшими элементами глобальной компьютерной сети Интернет, определяя маршрут доставки сообщения с одного сервера на другой, используют алгоритм Дейкстры.

Таким образом, графы и алгоритмы на графах все более и более (незаметно для нас самих) входят в нашу жизнь и становятся такими же привычными ее элементами, как электричество, радио и телевидение.

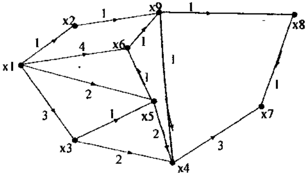


Рис. 7.32

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Если граф не связен, то алгоритм Краскала дает минимальный покрывающий лес.
2. Если граф не взвешен, то, присваивая всем дугам веса, равные 1, мы можем применить алгоритм Краскала для нахождения покрывающего дерева (леса).
3. Доказанная теорема о двоичном ранге (т. е. в арифметике $0+0=0$, $1+0=1$, $1+1=0$) матрицы $B(G)$ конечного неориентированного графа позволяет предложить матричный вариант реализации алгоритма Краскала.
4. Кратчайший путь из вершины x в вершину y на графе может быть не единственным.
5. Приведите пример графа и таких вершин x и y на нем, для которых существует несколько кратчайших путей из x в y.
6. Предложите модернизацию алгоритма Дейкстры, позволяющую находить все кратчайшие пути из одной вершины в другую.
7. Как модернизировать алгоритм Дейкстры, чтобы можно было находить все пути из одной вершины в другую в порядке убывания их длин?

Глава 8

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

8.1 Алгебра высказываний

Таблицы истинности

Каждая формула алгебры высказываний обладает свойством превращаться в высказывание при фиксации в ней значений всех высказывательных переменных, т. е. если мы зафиксируем в формуле значения всех высказывательных переменных, то, пользуясь определениями логических операций, мы можем вычислить значение истинности формулы.

Таблица истинности формулы алгебры высказываний содержит столько строк, сколько всевозможных наборов значений истинности переменных можно образовать. Так как каждая высказывательная переменная может принимать только два значения (0 и 1), то в случае n переменных таблица истинности содержит 2^n строк.

При построении таблицы истинности наборы значений переменных располагают сверху вниз в лексикографическом порядке (каждый набор понимают как двоичную запись неотрицательного целого числа и располагают в порядке возрастания от $(0\,0\,0\ldots0)$ до $(1\,1\,1\ldots1)$.

Если у вас возникают трудности с использованием двоичной системы счисления, можно применить метод «последовательного половинного деления столбцов» — столбец первой переменной делят пополам и заполняют верхнюю половину нулями, а нижнюю половину — единицами, затем каждую половину второго столбца делят пополам и опять заполняют полученные половины нулями и единицами, и т. д. Последовательность такого заполнения приведена ниже:

<table>
<tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th></tr>
<tr><td rowspan="4">0</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
</table>

Здесь в соответствии с порядком действий последовательно заполняют столбцы значений подформул, из которых образуется формула. Последними заполняется столбец значений истинности формулы.

Пример 8.1. Построить таблицу истинности формулы:

$$x_1\overline{x_2} \to (x_1 \vee x_2)\,\overline{x_3}.$$

Таблица 8.1

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$x_1 \cdot \overline{x_2}$	$x_1 \vee x_2$	$\overline{x_3}$	$(x_1 \vee x_2)\overline{x_3}$	$x_1\overline{x_2} \to (x_1 \vee x_2)\overline{x_3}$
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

► 1. Определим порядок действий в формуле:

$$x_1 \underset{2}{\cdot} \underset{1}{\overline{x_2}} \underset{6}{\to} (x_1 \underset{3}{\vee} x_2) \underset{5}{\cdot} \underset{4}{\overline{x_3}}.$$

2. Пользуясь определениями операций $\neg$, &, $\vee$ и $\to$, заполним таблицу 8.1. ◄

Замечание 1. По мере приобретения навыков можно опускать построение промежуточных столбцов.

Составить таблицы истинности для следующих формул:

8.1) $x \vee \overline{y}$; **8.2)** $x \wedge \overline{y}$; **8.3)** $x \to (y \vee x)$; **8.4)** $x \to (x \wedge y)$;
8.5) $(x \vee y) \to (\overline{x} \vee \overline{y})$; **8.6)** $x \to ((x \vee y) \vee z)$; **8.7)** $x \to (y \to z)$;
8.8) $(x \to y) \to z$; **8.9)** $x \sim (y \sim z)$; **8.10)** $(x \sim y) \sim z$;
8.11) $(x \vee (y \vee z)) \to (\overline{x} \wedge (\overline{y} \wedge \overline{z}))$;
8.12) $(x \to (y \wedge z)) \to (x \to (y \wedge z))$;
8.13) $\left(x \sim \overline{(y \vee z)}\right) \sim (x \sim (y \vee z))$;
8.14) $(x \vee \overline{y}) \to ((y \wedge \overline{z}) \to (x \vee (y \sim z)))$;
8.15) $((x \sim y) \sim ((z \to (\overline{x} \vee \overline{y})) \to \overline{z})) \sim (x \vee y)$;
8.16) $(x \sim y) \to (((y \sim z) \to (z \sim x)) \to (x \sim z))$.

Пусть x_i $(i = 1, 2, 3)$ — символы булевых переменных (т. е. принимающих два значения: 0, 1). Построить таблицы истинности:

8.17) $(x_1 = x_2) \vee (x_2 = x_3)$; **8.18)** $(x_1 > x_2) \to (x_2 = x_3)$;
8.19) $(x_1 \neq x_2) \vee (x_2 \neq x_3)$;
8.20) $((x_1 > x_2) \wedge (x_2 = x_3)) \to (x_1 > x_3)$.

Применяя таблицы истинности, доказать тождественную истинность формул:

8.21) $x \sim x$; **8.22)** $x \vee \overline{x}$; **8.23)** $\overline{(x \wedge \overline{x})}$; **8.24)** $\overline{\overline{x}} \sim x$;
8.25) $x \to (y \to x)$; **8.26)** $\overline{x} \to (x \to y)$; **8.27)** $((x \to y) \wedge x) \to y$;
8.28) $((x \to y) \wedge \overline{y}) \to \overline{x}$; **8.29)** $((x \vee y) \wedge \overline{x}) \to y$;
8.30) $((x \sim y) \wedge \overline{x}) \to \overline{y}$; **8.31)** $(x \to y) \sim (\overline{y} \to \overline{x})$;
8.32) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$;
8.33) $(x \to (y \to z)) \to ((x \wedge y) \to z)$;
8.34) $((x \to z) \wedge (y \to z)) \to ((x \vee y) \to z)$;
8.35) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

Применяя таблицы истинности, доказать равносильность формул:

8.36) $x \vee y \equiv y \vee x$; 8.37) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$;
8.38) $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$; 8.39) $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$;
8.40) $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$; 8.41) $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

8.42) $\overline{(x \vee y)} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$
8.43) $\overline{(x \wedge y)} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$ — законы де Моргана;

8.44) $x \vee x \equiv x$
8.45) $x \wedge x \equiv x$ — законы идемпотентности;

8.46) $x \vee 0 \equiv x$; 8.47) $x \wedge 1 \equiv x$; 8.48) $\overline{\overline{x}} \equiv x$;
8.49) $x \sim y \equiv y \sim x$; 8.50) $x \sim (y \sim z) \equiv (x \sim y) \sim z$;
8.51) $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$; 8.52) $x \sim y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$.

Порядок действий и упрощениая запись формул

При записи формул приняты соглашения об упрощении записи формул (см. § 1.2, замечание 2).

Учитывая соглашения о порядке выполнения операций, опустить «лишние» скобки и знак «∧» в формулах:

8.53) $x \wedge (y \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}))$; 8.54) $(x \wedge y) \vee ((y \wedge z) \vee ((\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{z})))$;
8.55) $((x \vee y) \vee z) \to ((x \wedge \overline{y}) \vee z)$;
8.56) $((x \vee y) \wedge (x \vee (y \wedge z))) \to ((\overline{x} \wedge \overline{y}) \to \overline{z})$;
8.57) $((x \vee y) \vee (x \vee ((y \wedge (x \vee z)) \wedge (y \to z))) \sim \overline{z})$;
8.58) $((x \vee y) \to (x \wedge y)) \vee ((\overline{x} \wedge y) \vee (\overline{x} \vee y))$;
8.59) $((x \vee y) \wedge z) \to (((x \vee \overline{y}) \vee z) \sim (\overline{x} \vee y))$;
8.60) $(x \wedge (y \vee z)) \wedge ((x \to (y \to z)) \sim (x \wedge y))$.

Восстановить скобки и знак «∧» в формулах:

8.61) $x \vee y \to z$; 8.62) $x \vee y \to xy$; 8.63) $\overline{xy} \vee x\overline{y}\overline{(y \vee z)}$;
8.64) $x \vee y(xy \vee z)$; 8.65) $xy \vee x\overline{yz} \to \overline{x} \vee yz$;
8.66) $(x \to x \vee yz) \sim (x \vee y \to z)$; 8.67) $(x \vee y)\overline{z} \to (xy \sim \overline{y} \vee \overline{z})$;
8.68) $x \vee y \to x \vee y(x \to z) \vee x(y \sim z)$;
8.69) $xyz \to (x \sim yz) \vee x \vee y(x \to (y \sim z))$;
8.70) $xy \sim x(y \to z)(x \sim y) \vee xz \vee yz$.

Равносильные преобразования и упрощение формул

Ключом к решению примеров на равносильные преобразования и упрощение формул являются 19 основных равносильностей булевой алгебры высказываний (теорема 1.2), поэтому первым шагом при решении таких примеров является переход к булевым операциям с помощью формул:

$$a \to b \equiv \overline{a} \vee b,$$
$$a \sim b \equiv (a \to b)(b \to a) \equiv ab \vee \overline{a}\overline{b} \equiv (\overline{a} \vee b)\left(a \vee \overline{b}\right).$$

Успешное решение примера зависит от умелого, эффективного применения основных равносильностей.

Следует иметь в виду, что буквы, использованные при записи основных равносильностей, могут означать как символы высказывательных переменных, так и формулы алгебры высказываний, т. е. основная равносильность

$$a \vee \overline{a} \equiv 1$$

означает, в частности, что

$$x_1 \vee \overline{x_1} \equiv 1,$$
$$1 \vee \overline{1} \equiv 1,$$
$$(x_1 \to x_2)\overline{x_2} \vee \overline{(x_1 \to x_2)\overline{x_3}} \equiv 1.$$

Полезными при решении примеров на упрощение формул являются законы кодупоглощения:

$$1)\ a \vee \overline{a}b \equiv a \vee b; \qquad 1')\ \overline{a} \vee ab \equiv \overline{a} \vee b;$$
$$2)\ a \cdot (\overline{a} \vee b) \equiv ab; \qquad 2')\ \overline{a}(a \vee b) \equiv \overline{a}b,$$

которые мы сейчас докажем.

$$a \vee \overline{a} \cdot b \overset{\text{дист. зак.}}{\equiv} (a \vee \overline{a})(a \vee b) \equiv 1(a \vee b) \equiv a \vee b.$$
$$a(\overline{a} \vee b) \overset{\text{дист. зак.}}{\equiv} a \cdot \overline{a} \vee a \cdot b \equiv 0 \vee ab \equiv ab.$$

Пример 8.2. С помощью равносильных преобразований упростить формулу

$$x_1\overline{x_2} \to (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})\overline{x_3}.$$

▶ $$x_1\overline{x_2}\to(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})\,\overline{x_2}\ \underset{\text{булев. операциям}}{\overset{\text{переход к}}{\equiv}}\ \overline{x_1\overline{x_2}}\vee(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})\,\overline{x_2}\equiv$$

$$\underset{\text{дистр. закон}}{\overset{\text{закон де Моргана}}{\equiv}}\ \overline{x_1}\vee\overline{\overline{x_2}}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_3}\vee\overline{\overline{x_2}}\,\overline{x_3}\ \underset{\text{двойного отриц.}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}}$$

$$\equiv\underbrace{\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_1}}\cdot\overline{x_3}\vee\overline{x_2}\,\overline{x_2}\ \underset{\text{поглощения}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}}$$

$$\equiv\overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3}\equiv\begin{cases}\text{а) } \overline{x_1}\vee(x_2\vee\overline{x_3})\equiv x_1\to(x_2\vee\overline{x_3}).\\ \text{б) } \overline{x_3}\vee(\overline{x_1}\vee x_2)\equiv x_3\to(x_1\vee x_2).\\ \text{в) } x_2\vee\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\equiv x_2\vee\overline{x_1x_3}.\\ \text{г) } \overline{x_1}\vee\overline{x_3}\vee x_2\equiv\overline{x_1x_3}\vee x_2\equiv x_1x_3\to x_2.\\ \text{д) } \overline{x_1}\vee x_2\vee\overline{x_3}\equiv\overline{x_1\cdot\overline{x_3}\cdot x_3}\end{cases}$$

◀

! **Замечание 2.** Любую запись а)-д) можно считать ответом.

Следующий тип примеров — доказательство равносильности двух заданных формул с помощью равносильных преобразований. Существуют три основных схемы решения таких примеров. Каждая из них предполагает выполнение перехода к булевым операциям в исходных формулах.

Далее, по первой схеме предполагается, начиная с левой формулы, провести цепочку равносильных преобразований, завершив ее на правой формуле.

Вторая схема — зеркальное отражение первой.

Третья схема предполагает проведение параллельных цепочек равносильных преобразований левой и правой формул до тех пор, пока в этих цепочках не обнаружится совпадение каких-то звеньев (одного звена верхней цепочки с одним звеном нижней).

Пример 8.3. Доказать, что

$$(x_1\to x_3)(x_2\to x_3)\equiv(x_1\vee x_2)\to x_3.$$

▶ Перейдем к булевым операциям

$$(\overline{x_1}\vee x_3)\,(\overline{x_2}\vee x_3)\equiv\overline{x_1\vee x_2}\vee x_3.$$

1-я схема.

$$(\overline{x_1}\vee x_3)\,(\overline{x_2}\vee x_3)\ \underset{\text{закон}}{\overset{\text{дистр.}}{\equiv}}\ \overline{x_1}\,\overline{x_3}\vee x_3\overline{x_2}\vee\underbrace{\overline{x_1}x_3\vee x_3}_{\text{закон поглощения}}\equiv$$

закон поглощения

$$\equiv\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee x_3\ \underset{\text{де Моргана}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}}\ \overline{x_1\vee x_2}\vee x_3.$$

2-я схема.

$$\overline{x_1\vee x_2}\vee x_3\ \underset{\text{де Моргана}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}}\ \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\vee x_3\ \underset{\text{закон}}{\overset{\text{дистр.}}{\equiv}}\ (\overline{x_1}\vee x_3)\,(\overline{x_3}\vee x_3).$$

3-я схема.

$$(\overline{x_1}\vee x_2)\,(\overline{x_2}\vee x_3)\ \underset{\text{закон}}{\overset{\text{дистр.}}{\equiv}}\ \overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee x_2\overline{x_2}\vee\overline{x_1}x_3\vee x_3\equiv\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee x_3.$$

$$\overline{x_1\vee x_2}\vee x_3\ \underset{\text{де Моргана}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}}\ \overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee x_3.$$ ◀

! **Замечание 3.** Следует иметь в виду, что среди примеров на доказательство равносильности формул есть примеры с отрицательным ответом. В этом случае ни одна из схем не приводит к получению ответа. Однако, неудача при использовании схем 1–3 может говорить и о недостаточно высокой технике равносильных преобразований. В случае неудачных попыток применения схем 1–3 следует для обеих формул построить таблицы истинности. Совпадение столбцов значений формул будет означать их равносильность, а несовпадение — неравносильность.

Применяя равносильные преобразования, доказать следующие соотношения:

8.71) $x\vee y\equiv\overline{\overline{x}\cdot\overline{y}}$; **8.72)** $xy\equiv\overline{\overline{x}\vee\overline{y}}$; **8.73)** $x\to y\equiv\overline{x\cdot\overline{y}}$;
8.74) $x\to y\equiv\overline{y}\to\overline{x}$; **8.75)** $xy\vee x\overline{y}\equiv x$; **8.76)** $x\vee xy\equiv x$;
8.77) $x(x\vee y)\equiv x$; **8.78)** $x\vee\overline{x}y\equiv x\vee y$; **8.79)** $x(\overline{x}\vee y)\equiv xy$;
8.80) $(x\to y)\to y\equiv x\vee y$; **8.81)** $(x\vee y)(x\vee\overline{y})\equiv x$;

8.82) $\overline{x} \vee \overline{y} \equiv y \to \overline{x}$; 8.83) $x \sim y \equiv \overline{x} \sim \overline{y}$;
8.84) $xy \vee \overline{x}y \vee \overline{xy} \equiv x \to y$; 8.85) $x \to (y \to z) \equiv (x \vee z)(y \vee z)$;
8.86) $x \to (y \to z) \equiv y \to (x \to z)$;
8.87) $\overline{x} \vee xy \vee xz \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \equiv x \to y \vee z$.

Применяя равносильные преобразоваиня, доказать тождественую истинность формул:

8.88) $x \to x \vee y$; 8.89) $xy \to x$; 8.90) $\overline{x} \to (x \to y)$;
8.91) $(x \to y) \to (\overline{x} \vee y)$; 8.91,a) $(x \vee \overline{x}y) \sim (x \vee y)$;
8.92) $(\overline{x} \to y) \to (\overline{y} \to x)$; 8.93) $(\overline{x} \to \overline{y}) \to (y \to x)$;
8.94) $(x \to y) \vee (y \to x)$; 8.95) $(x \to y) \vee (x \to \overline{y})$;
8.96) $x \to (y \to xy)$; 8.97) $(x \to y)x \to y$;
8.98) $(x \to y)\overline{y} \to \overline{x}$; 8.99) $(x \vee y)\overline{x} \to y$;
8.100) $(x \vee\vee y)x \to \overline{y}$; «$\vee\vee$» – альтернативная дизъюнкция: $(x \vee\vee y) \equiv \overline{x \sim y})$; 8.101) $(x \to y)(y \to z) \to (x \to z)$;
8.102) $(x \to (y \to z)) \to (xy \to z)$;
8.103) $(x \to z)(y \to z) \to (x \vee y \to z)$;
8.104) $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

Применяя равносиьнме преобразования, «упростить»:

8.105) $\overline{\overline{xy}} \vee (x \to y)x$; 8.106) $(\overline{\overline{x} \vee y} \to x \vee y)\, y$;
8.107) $\overline{(x \to y)(y \to \overline{x})}$; 8.108) $(x \vee y)(x \sim y)$;
8.109) $(x \to y)(y \to z) \to (z \to x)$; 8.110) $xz \vee x\overline{z} \vee yz \vee \overline{x}yz$;
8.111) $\overline{xy(x \to y)}$; 8.112) $xy(x \sim y)$;
8.113) $(x \to \overline{y})(x \sim y)$; 8.114) $(x \to \overline{y}) \vee \overline{(x \vee y)}$.

Следующие формулы преобразовать так, чтобы они содержали только «$\wedge$» и «$\neg$»:

8.115) $x \vee y$; 8.116) $x \to y$; 8.117) $x \sim y$; 8.118) $x \vee y \vee z$;
8.119) $x \to (y \to z)$; 8.120) $x \vee (x \sim y)$; 8.121) $\overline{x \to y} \vee (\overline{x} \to \overline{y})$;
8.122) $x \vee\vee y$; 8.123) $x\overline{y} \to (\overline{y} \to x)$; 8.124) $x \vee y \to (\overline{x} \to z)$.

Следующие формулы преобразовать так, чтобы они содержали только «$\vee$» и «$\neg$»:

8.125) xy; 8.126) xyz; 8.127) $x \sim y$; 8.128) $x \vee\vee y$;
8.129) $x(y \sim z)$; 8.130) $x \sim y \sim z$; 8.131) $(x \sim y)(y \sim z)$;
8.132) $xy \sim xz$.

Преобразовать следующие формулы так, чтобы знак отрицания был отнесен только к переменным высказываниям:

8.133) $\overline{\overline{x} \vee y}$; 8.134) $\overline{xy \vee z}$; 8.135) $\overline{xy \vee \overline{z}} \to \overline{xyz}$;
8.136) $\overline{x \to (y \to z)}$; 8.137) $\overline{x \to y \to (\overline{x} \to \overline{z})}$;
8.138) $\overline{(x \sim y)(y \sim z)}$.

Преобразовать формулы так, чтобы они содержали только операции «$\vee$», «$\wedge$», «$\neg$»:

8.139) $x \sim y$; 8.140) $(x \to y) \sim (y \to z)$;
8.141) $(x \sim y) \to (y \to z)$; 8.142) $(x \sim y) \to (y \sim z)$;
8.143) $(x \sim y)(y \sim z) \to (x \sim z)$;
8.144) $(x \sim y) \vee (y \sim z) \to (x \sim y \sim z)$;
8.145) $x \sim y \sim z \sim v$; 8.146) $(x \to y) \sim (z \to (x \sim \overline{z}))$.

8.2 Двойственность в алгебре высказываний

Построение двойственных формул основано на общем и булевом принципах двойственности (теоремы 1.8, 1.9).

Общий принцип двойственности состоит в следующем: если исходная формула представляет собой подстановку формул в формулу, то двойственная формула — аналогичная подстановка двойственных формул в двойственную формулу.

Пример 8.4. Пусть

$$F(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \to \overline{x_2}x_3) \vee (x_1 \sim x_3).$$

Найти двойственную формулу F^*.

► Очевидно.

$$F(x_1, x_2, x_3) = y_1 \vee y_2 \Big|_{\substack{y_1 \leftarrow x_1 \to \overline{x_2}x_3 \\ y_2 \leftarrow x_1 \sim x_3}}$$

Найдем двойственные формулы для подставляемых формул и формулу, в которую осуществляется подстановка:

$$(y_1 \vee y_2)^* \equiv \overline{\overline{y_1} \vee \overline{y_2}} \equiv \overline{\overline{y_1}} \cdot \overline{\overline{y_2}} \equiv y_1 \cdot y_2;$$

$$(x_1 \to \overline{x_2}x_3)^* \equiv \overline{x_1} \to \overline{\overline{x_2}x_3} \equiv \overline{\overline{\overline{x_1}} \vee x_2\overline{x_3}} \equiv$$

$$\equiv \overline{x_1 \vee x_2\overline{x_3}} \equiv \overline{x_1} \cdot \overline{x_2 \cdot \overline{x_3}} \equiv$$

$$\equiv \overline{x_1}\,(\overline{x_2} \vee x_3) \equiv \overline{x_1}(x_2 \to x_3);$$

$$(x_1 \sim x_3)^* \equiv \overline{\overline{x_1} \sim \overline{x_3}} \equiv \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \vee \overline{\overline{x_1}} \cdot \overline{\overline{x_3}}} \equiv$$

$$\equiv \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1x_3} \equiv \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_3}} \cdot \overline{x_1 \cdot x_3} \equiv$$

$$\equiv (x_1 \vee x_3)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \equiv \overline{x_1}x_3 \vee x_1\overline{x_3} \equiv x_1 \sim \overline{x_3}.$$

Применим теперь общий принцип двойственности:

$$F^*(x_1, x_2, x_3) \equiv y_1 \cdot y_2 \Big|_{\substack{y_1 \leftarrow \overline{x_1}(x_2 \to x_3) \\ y_2 \leftarrow x_1 \sim \overline{x_3}}} \equiv \overline{x_1}(x_2 \to x_3)\,(x_1 \sim \overline{x_3}). \qquad ◄$$

Булев принцип двойственности состоит в следующем: двойственная к булевой формуле получается заменой $\vee$ на $\wedge$, $\wedge$ на $\vee$, 0 на 1, 1 на 0 и сохранением структуры формулы.

Пример 8.5. Найти двойственную к формуле примера 8.2, пользуясь булевым принципом двойственности.

► $$((x_1 \to \overline{x_2}x_3) \vee (x_1 \sim x_3))^* \equiv$$

$$\equiv ((\overline{x_1} \vee \overline{x_3}x_3) \vee (x_1x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}))^* \underset{\text{двойственности}}{\overset{\text{булев принцип}}{\equiv}}$$

$$\equiv \overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} \vee x_3) \cdot ((x_1 \vee x_3)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})) \underset{\text{закон}}{\overset{\text{дистр.}}{\equiv}}$$

$$\equiv \overline{x_1}(x_2 \to x_3)\,(x_1\overline{x_3} \vee x_3\overline{x_1}) \equiv \overline{x_1}(x_2 \to x_3)\,(x_1 \sim \overline{x_3}). \qquad ◄$$

Найти двойственные формулы:

8.147) $x\,(\overline{y} \vee z)$; **8.148)** $xy \vee xz$; **8.149)** $\overline{(x \vee y)}\,(x \vee \overline{yz})$;
8.150) $(xy \vee yz \vee zv)\overline{(x \vee y \vee z)}$; **8.151)** $x\left(y \vee z\overline{(x \vee y)}\right)$;
8.152) $\overline{xyz} \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz$;
8.153) $\left((x \vee y)\overline{(x \vee z)} \vee xy\right) \vee \left(\overline{(x \vee y)z} \vee x\right)$;
8.154) $xy\left(\overline{yz} \vee xyz\overline{(xz \vee yz)} \vee \overline{xy}\right)(x \vee y \vee z)$.

Применить закон двойственности к следующим равносильностям:

8.155) $xx \equiv x$; **8.156)** $x \vee 0 \equiv x$; **8.157)** $xy \equiv yx$;
8.158) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$; **8.159)** $\overline{xy} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$;
8.160) $x(x \vee y) \equiv x$; **8.161)** $x \vee \overline{x}y \equiv x \vee y$;
8.162) $x \vee xy \vee yz \vee \overline{x}z \equiv x \vee z$.

8.3 Нормальные формы: ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ

Нормальные формы формул алгебры высказываний бывают двух типов: дизъюнктивные и конъюнктивные, в каждом из этих типов выделен класс совершенных форм.

Алгоритм построения ДНФ:

1. Перейти к булевым операциям.
2. Перейти к формуле с тесными отрицаниями, т. е. к формуле, в которой отрицания находятся не выше, чем над переменными.
3. Раскрыть скобки.
4. Повторяющиеся слагаемые взять по одному разу.
5. Применить законы поглощения и полупоглощения.

Пример 8.6. Найти ДНФ формулы

$$(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3).$$

► $$(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3) \equiv \overline{(\overline{x}_1 \to x_2\overline{x_3})} \vee (x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3) \equiv$$

$$\equiv x_1 \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3) \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \equiv x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \equiv$$

$$\equiv x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3. \qquad ◄$$

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) — двойственное для ДНФ понятие, поэтому ее легко построить по схеме:

$$f \equiv (f^*)^* \equiv (\text{ДНФ} f^*)^* \equiv \text{КНФ}(f).$$

Пример 8.7. Найти КНФ формулы примера 8.3.

▶

$$(x_1 \to x_2\overline{x}_3)(x_1 \sim x_3) \equiv \left(((x_1 \to x_2\overline{x}_3)(x_1 \sim x_3))^*\right)^* \equiv$$

$$\left(((\overline{x}_1 \vee x_2\overline{x}_3)(x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3))^*\right)^* \equiv$$
$$\equiv (\overline{x}_1 \cdot (x_2 \vee \overline{x}_3) \vee (x_1 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3))^* \equiv$$
$$\equiv (\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_3)^* \equiv (\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_3)^*$$

$$m \equiv (\overline{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_3).$$ ◀

Совершенную дизъюнктивную нормаьную форму СДНФ можно строить, используя следующий алгоритм:

1. = 1. алгоритма ДНФ
2. = 2. алгоритма ДНФ
3. = 3. алгоритма ДНФ
4. = 4. алгоритма ДНФ
5. Опустить тождественно ложные слагаемые, т. е. слагаемые вида $\cdots x_i \cdots \overline{x}_i \cdots$.
6. Пополнить оставшиеся слагаемые недостающими переменными

   (Пример на пополнение (переменные x_1, x_2, x_3)
   $\ldots \vee x_1\overline{x}_3 \vee \ldots \equiv$
   $\equiv \ldots \vee x_1(x_2 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3 \vee \ldots \equiv$
   $\equiv \ldots \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \ldots)$
7. Повторить пункт 4.

Пример 8.8. Найти СДНФ формулы примера 8.3.

▶

$$(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3) \overset{1}{\equiv}$$

$$\equiv \overline{\overline{x}_1 \to x_2\overline{x_3}} \vee (x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3) \overset{2}{\equiv}$$
$$\equiv x_1 \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3) \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \overset{3}{\equiv}$$
$$\equiv x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \overset{4}{\equiv}$$
$$\equiv x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \overset{6}{\equiv}$$
$$\equiv x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \overset{7}{\equiv}$$

$$\equiv x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3.$$ ◀

Для построения СКНФ можно пользоваться следующей схемой:

$$f \equiv (f^*)^* \equiv ((f^*))^* \equiv (f).$$

Пример 8.9. Найти СКНФ для формулы примера 8.3.

▶

$$(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3) \equiv$$
$$\equiv \left(\left(\overline{(\overline{x}_1 \to x_2\overline{x_3})} \vee (x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3)\right)^*\right)^* \equiv$$
$$\equiv \left((x_1 \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3) \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3)^*\right)^* \equiv$$
$$((x_1 \vee \overline{x}_2x_3) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3))^* \equiv$$
$$\equiv ((x_1 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_2x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3))^* \equiv$$
$$\equiv (\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3)^* \equiv (\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3)^* \equiv$$
$$\equiv (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3).$$ ◀

Известно (теоремы 1.11, 1.12), что СДНФ и СКНФ определены формулой однозначио и, значит, их можно строить по таблице истинности формулы.

Схема построения СДНФ и СКНФ по таблице истинности приведена ниже, для формулы $(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3)$:

x_1	x_2	x_3	$(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3)$		
0	0	0	1	$\longrightarrow$	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
0	0	1	0	$\longrightarrow$	$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$
0	1	0	1	$\longrightarrow$	$\overline{x}_1 x_2\overline{x}_3$
0	1	1	0	$\longrightarrow$	$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$
1	0	0	1	$\longrightarrow$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
1	0	1	1	$\longrightarrow$	$x_1\overline{x}_2 x_3$
1	1	0	0	$\longrightarrow$	$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$
1	1	1	1	$\longrightarrow$	$x_1 x_2 x_3$

$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee$
$\vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee$
$\vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee$
$\vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee$
$\vee x_1 x_2 x_2$ СДНФ;
$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_2})$
$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2})$
$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$ СКНФ.

Привести к дизъюнктивной нормвльной форме (ДНФ):

8.163) $x \to (y \to z)$ **8.164)** $\overline{xy} \vee (x \to y)$ **8.165)** $(x \vee y \vee z)(x \to y)$
8.166) $(x \vee y)(y \vee z) \to (x \vee z)$ **8.167)** $x \sim y$ **8.168)** $x \vee \vee y$
8.169) $x \sim y \sim z$ **8.170)** $(x \to y) \sim \overline{(x \to (y \to z))}$
8.171) $(x \sim y)(y \sim z) \to (x \sim z)$ **8.172)** $(x \sim y)(y \sim z)(z \sim x)$

Привести к конъюнктивной нормальной форме (КНФ):

8.173) $x \vee yz$ **8.174)** $xy \vee yz \vee \overline{z}$ **8.175)** $x \vee yz \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
8.176) $x \to yz$ **8.177)** $x \to yzv$ **8.178)** $x \sim yz$
8.179) $xy \sim \overline{x}\,\overline{y}$ **8.180)** $x \sim y \sim z$ **8.181)** $x \vee y \sim x \sim z$
8.182) $x \vee \vee (y \vee \vee z)$

Приведением к нормальной форме выяснить, какие из формул являются тождественно истинными, тождественно ложными, выполнимыми:

8.183) $xy \to x \vee y$ **8.184)** $x \vee y \to xy$ **8.185)** $\overline{x}y \to x\overline{y}$
8.186) $(x \to y)x \to x \vee y \vee z$ **8.187)** $x \vee y \to x \vee z$
8.188) $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$
8.189) $(x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$
8.190) $\overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ **8.191)** $xy \vee \overline{x}\,\overline{y} \sim (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$

Для каждой из следующих формул найти дизъюнктивное и конъюнктивное разложение:

8.192) $x \vee y$ **8.193)** xy **8.194)** $x \to y$ **8.195)** $x \sim y$
8.196) $x \vee \vee y$ **8.197)** $x \to (y \to x)$ **8.198)** $\overline{x}y(x \to y)$

8.199) $x \vee y \to z$ **8.200)** $xy \to z$

Привести к совершенной ДНФ (СДНФ) форме следующие формулы:

8.201) $\overline{x} \vee \overline{y}$ **8.202)** $(\overline{x} \to y) \to x$ **8.203)** $x \to (y \to x)$
8.204) $x \to (y \to z)$ **8.205)** $(x \to y)(y \to z) \to (x \to z)$
8.206) $(x \to y)(y \to z)(z \to x)$ **8.207)** $(x \vee y)(y \vee z)(z \sim x)$
8.208) $(x \to y)(y \to z)(z \to v)$

Привести к совершенной КНФ (СКНФ) следующие формулы:

8.209) $(x \to y) \to x \vee \overline{y}$ **8.210)** $x\overline{x} \cdot \overline{y}$ **8.211)** $x\overline{y}(x \to y)$
8.212) $x \to yz$ **8.213)** xyz **8.214)** $(x \vee y)(y \to z)(z \sim x)$
8.215) $x \vee y \to (x \to z)$ **8.216)** $((x \to y) \sim (y \to \overline{x}))z$
8.217) $x \vee y \vee z \to (x \vee y)z$ **8.218)** $xy \to zv$

Приведением к совершенным нормальным формам доказать неравносильность следующих формул:

8.219) $x \vee y$ и $x \to y$ **8.220)** $x \to y$ и $x \sim y$
8.221) $x \vee y$ и $x \oplus y$ **8.222)** $x \to (y \to z)$ и $(x \to y) \to z$
8.223) $xy \vee z$ и $x(y \vee z)$ **8.224)** $(x \to y) \vee z$ и $x \vee y \to z$
8.225) $(x \to y)z$ и $x \to yz$ **8.226)** $(x \to y) \sim z$ и $(x \sim y) \to z$
8.227) $(x \vee y) \sim z$ и $(x \sim y) \vee z$ **8.228)** $xy \sim z$ и $(x \sim y)z$

Следующие формулы разложить по переменным x, y, z:

8.229) xy **8.230)** $x \vee y$ **8.231)** x **8.232)** $(x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$
8.233) $xy \vee \overline{x}y \vee \overline{x}\overline{y}$

Определение 8.1 *Формула F называется логическим следствием формул (посылок) $f_1, \ldots, f_n$, если $f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n \to F \equiv 1$.*

Выяснить, является ли первая формула логическим следствием остальных:

8.234) y; $x \to y$, x **8.235)** x; $x \to y$, y
8.236) $\overline{x}$; $x \to y$, $\overline{y}$ **8.237)** $\overline{y}$; $x \to y$, $\overline{x}$ **8.238)** y; $x \vee y$, $\overline{x}$
8.239) y; $x \vee \vee y$, x **8.240)** $x \to z$; $x \to y$, $y \to z$
8.241) $x \vee y \to z$; $x \to z$, $y \to z$ **8.242)** $z \to x$; $x \to y$, $\overline{y} \to \overline{z}$
8.243) $x \vee y$; $x \to y$, $\overline{y} \to \overline{x}$, $\overline{x} \vee \overline{y}$ **8.244)** $\overline{x}$; $x \sim y$, $y \vee \overline{z}$, z
8.245) z; $x \to y$, $\overline{y} \vee z$, x **8.246)** $\overline{y} \vee \overline{z}$; $x \vee \overline{z}$, $y \to x \cdot z$, x
8.247) $z \to y$; $x \to y$, $\overline{x}$, z **8.248)** $\overline{z} \to \overline{x}$; $x \to y$, xy, $\overline{z} \to \overline{y}$

8.249) $x \vee t$: $x \to y,\ y \to \overline{z},\ x \vee z \to yt$
8.250) xt; $x \to z,\ \overline{y} \vee z,\ z \to y \vee t,\ z \vee t$

Найти все (с точностью до равносильности) логические следствия из посылок:

8.251) $x,\ x \to y$ **8.252)** $\overline{x},\ x \sim y$ **8.253)** $x,\ \overline{y},\ x \vee y$
8.254) $x \to (y \to z),\ y \to z$ **8.255)** $x \to (y \to z),\ y \to \overline{z}$
8.256) $x \to y,\ y \to z$ **8.257)** $x \vee y,\ y \vee z,\ z \vee x$
8.258) $x,\ x \vee y,\ x \vee y \vee z$ **8.259)** $x \to (y \to (z \to t)),\ x \to (y \to z)$
8.260) $x \to (y \to z),\ y \to (z \to t)$

Найти все (с точностью до равносильности) посылки, логическим следствием которых являются формулы:

8.261) $x \cdot y$ **8.262)** $x \sim y$ **8.263)** $x \vee y$ **8.264)** $x \to y$
8.265) $x \vee y \to x \cdot y$ **8.266)** $x \cdot y \cdot z$ **8.267)** $(x \vee y) \cdot z$
8.268) $(x \to y) \cdot z$ **8.269)** $x \to y \cdot z$ **8.270)** $x \to (y \to \overline{z})$

Определение 8.2 *Умозаключение вида*

$$\begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ \hline F \end{array}$$

называется правильным, если формула F является логическим следствием формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Докажите правильность умозаключений:

8.271) $\begin{array}{l} a \to b \\ a \\ \hline b \end{array}$ **8.272)** $\begin{array}{l} a \to b \\ \overline{b} \\ \hline \overline{a} \end{array}$ **8.273)** $\begin{array}{l} a \vee b \\ \overline{a} \\ \hline b \end{array}$ **8.274)** $\begin{array}{l} a \vee\vee b \\ a \\ \hline \overline{b} \end{array}$

8.275) $\begin{array}{l} a \vee\vee b \\ \overline{a} \\ \hline b \end{array}$ **8.276)** $\begin{array}{l} a \to b \\ b \to c \\ \hline a \to c \end{array}$ **8.277)** $\begin{array}{l} a \vee b \\ a \to b \\ \hline b \end{array}$ **8.278)** $\begin{array}{l} a \to b \\ b \to c \\ \overline{c} \\ \hline \overline{a} \end{array}$

8.279) $\begin{array}{l} a \to b \\ b \to c \\ a \\ \hline b \end{array}$ **8.280)** $\begin{array}{l} a \vee\vee b \\ a \to b \\ \hline b \end{array}$ **8.281)** $\begin{array}{l} a \vee\vee b \\ b \vee\vee c \\ \hline a \to c \end{array}$ **8.282)** $\begin{array}{l} a \to b \\ b \to c \\ c \to a \\ \hline a \to bc \end{array}$

Выяснить, правильны ли следующие умозаключения:

8.283) $\begin{array}{l} a \to b \\ b \\ \hline a \end{array}$ **8.284)** $\begin{array}{l} a \to b \\ \overline{a} \\ \hline \overline{b} \end{array}$ **8.285)** $\begin{array}{l} a \to b \\ \overline{a} \to \overline{b} \\ \hline a \sim b \end{array}$ **8.286)** $\begin{array}{l} a \to b \\ \overline{b} \to \overline{a} \\ \hline a \sim b \end{array}$

8.287) $\begin{array}{l} a \to b \\ a \vee b \\ \hline a \end{array}$ **8.288)** $\begin{array}{l} a \to b \\ b \to a \\ a \vee b \\ \hline a \cdot b \end{array}$ **8.289)** $\begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ (a \to b) \to c \\ \hline b \to c \end{array}$

8.290) $\begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ (a \to b) \to c \\ \hline a \to c \end{array}$ **8.291)** $\begin{array}{l} a \to bc \\ b \to ac \\ c \to ab \\ a \vee b \vee c \\ \hline a \cdot b \cdot c \end{array}$ **8.292)** $\begin{array}{l} a \vee b \to c \\ a \vee c \to b \\ b \vee c \to a \\ a \vee b \vee c \\ \hline a \cdot b \cdot c \end{array}$

8.4 Релейно-контактные схемы и схемы из функциональных элементов

Задачи синтеза можно решать, используя связь совершенных нормальных форм с таблицами истинности.

Пример 8.10. Построить схему машины экзаменатора, в которой студенту предлагается вопрос и четыре варианта ответа на него, только один из которых правильный. В случае, когда ответ правильный, должно зажигаться табло «ответ верен».

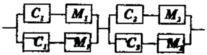
► Закодируем номера ответов двухразрядными двоичными числами 00, 01, 10, 11. Студент и машина должны генерировать двухразрядные управляющие сигналы. Функция проводимости схемы задается таблицей

C_1	C_2	M_1	M_2	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$f \equiv \overline{C}_1\overline{C}_2\overline{M}_1\overline{M}_2 \vee \overline{C}_1 C_2\overline{M}_1 M_2 \vee C_1\overline{C}_2 M_1\overline{M}_2 \vee C_1C_2M_1M_2 \equiv$$
$$\equiv \overline{C}_1(\overline{C}_2\overline{M}_2 \vee C_2M_2)\overline{M}_1 \vee C_1(\overline{C}_2\overline{M}_2 \vee C_2M_2)M_1 \equiv$$
$$\equiv (\overline{C}_2\overline{M}_2 \vee C_2M_2)(\overline{C}_1\overline{M}_1 \vee C_1M_1).$$

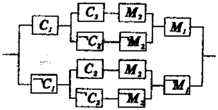
Схема имеет вид:

а)



или

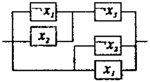
б)



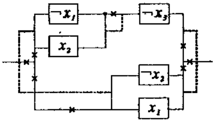
Ясно, что схема а) предпочтительней схемы б). ◄

Анализ схем

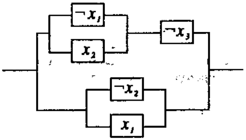
Пример 8.11. Найти функцию проводимости схемы



► При решении задач такого типа следует помнить, что последовательное соединение реле соответствует конъюнкции, а параллельное — дизъюнкции. Полезным является умение преобразовать топологию схемы так, чтобы явно были видны последовательные и параллельные участки схемы. Преобразуем топологию схемы (добавленные участки обозначены пунктиром, удаляемые участки помечены «×»):



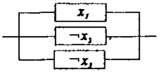
Получаем схему:



Ее функция проводимости задается формулой

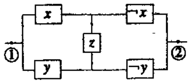
$$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee (\overline{x}_1 \vee x_2)\overline{x}_3 \equiv x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3 \equiv x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3.$$

Значит, более простая схема имеет вид:

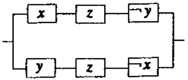


◄

Замечание 4. Существуют схемы, в которых преобразование топологии не приводит к нужному результату (или такое преобразование трудно провести). Например, рассмотрим схему:



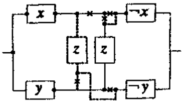
Анализ всевозможных путей прохождения по этой схеме от точки 1 до точки 2 показывает, что эквивалентная схема имеет следующий вид:



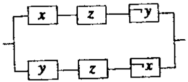
Функция проводимости исходной схемы задается формулой:

$$xz\overline{y} \vee \overline{x}yz.$$

Приведем теперь преобразование топологии схемы (здесь будут добавляться и удаляться не только проводники, но и реле)



Пересечение проводников, не отмеченное жирной точкой, означает их изоляцию друг от друга. Изобразим оставшееся на последней схеме.



Составить схемы, реализующие следующие функции:

8.293) $x \to y$; **8.294)** $x \sim y$; **8.295)** $x \vee \vee y$;
8.296) $(x \to y)(y \to z)$; **8.297)** $(x \to y) \to \overline{x}(y \vee z)$;
8.298)

x	y	z	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

8.299) Имеется одна лампа в лестничном пролете двухэтажного дома. Построить схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было гасить и зажигать лампу независимо от положения другого выключателя.

8.300) По установленному сигналу каждый игрок замыкает или размыкает выключатель, находящийся под его управлением. Если оба делают одно и то же, то выигрывает А, в противном случае — В. Построить схему так, чтобы в случае выигрыша А зажигалась лампочка.

8.301) Комитет из 5 человек принимает решения большинством голосов. Председатель пользуется правом «вето». Построить схему так, чтобы голосование происходило нажатием кнопок и в случае принятия решения загоралась лампочка.

8.302) Построить схему, управляющую спуском лифта со второго этажа на первый. Условия, определяющие работу лифта, следующие:

дверь лифта на первом этаже закрыта,

дверь лифта на втором этаже закрыта,

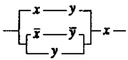
пассажир находится в кабине лифта,

кнопка вызова на первом этаже нажата,

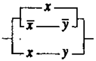
кнопка спуска на первый этаж в кабине нажата.

Найти функции проводимости следующих схем, если возможно, упростить схемы:

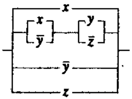
8.303)



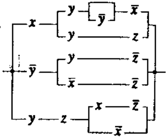
8.304)



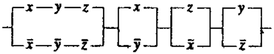
8.305)



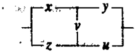
8.306)



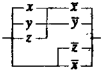
8.307)



8.308)



8.309)



8.5 Предикаты и кванторы, множества, отображения

При решении примеров на доказательство равносильности формул алгебры предикатов следует обращать внимание на следующее:

1. Области определения предикатов, стоящих слева и справа от знака «$\equiv$», должны совпадать.

2. Связанная квантором переменная может обозначаться любой буквой, т. е.

$$\forall x\ P(x) \equiv \forall y\ P(y) \equiv \forall t\ P(t) \equiv \ldots$$

3. Основные равносильности, содержащие кванторы, имеют место в более широком смысле, чем они описаны в теореме 2.4.

Например:

$$\forall x \forall y \exists z P(x, y, z) \equiv \forall y \forall x \exists z P(x, y, z);$$
$$\forall x \forall y \forall z \Phi(x, y, z) \equiv \forall z \forall x \forall y P(x, y, z).$$

Какие из следующих предложений являются предикатами?

8.310) x делится на 3 ($x \in N$). **8.311)** x делится на 5.
8.312) $y = x^2$; $x \in R$. **8.313)** $x^2 + x + 1$; $x \in R$.
8.314) $x^2 + y^2 = 0$; $x, y \in R$. **8.315)** $x^2 + y^2 \geq 0$; $x, y \in R$.
8.316) $x^2 + y^2 = z$; $x, y, z \in R$. **8.317)** $x < y$; $x, y \in R$.
8.318) Для всякого $x \in R$ найдется $y \in R$ такой, что $x = y + 1$.
8.319) $x^2 + y^2 < -2$; $x, y \in R$.

8.320) Какие из предикатов в примерах 8.310–8.319 тождественно истинны, тождественно ложны, выполнимы?

Выделить свободные переменные следующих предикатов:

8.321) $\forall x\ (x - y \equiv x + (-y);\ x, y \in R)$;
8.322) $(x < y;\ x, y \in R) \to \exists z\ ((x \wedge z) \wedge (z < y);\ z \in R)$;
8.323) $\forall y\ ((y \in R,\ y > 0) \to \exists z\ (x = yz;\ x, z \in R))$;
8.324) $\forall x\ (\exists y\ P(x, y) \to Q(x, y, z))$;
8.325) $\exists u \forall v\ \Phi(u, v) \to \exists t\ \Phi(t, u)$.

8.326) Из предикатов примеров 8.310–8.319 образовать с помощью кванторов высказывания, найти их значения истинности.

Доказать следующие равносильности:

8.327) $\overline{\forall x\, P(x,y)} \equiv \exists x\, \overline{P(x,y)}$; **8.328)** $\overline{\exists x\, P(x,y)} \equiv \forall x\, \overline{P(x,y)}$;
8.329) $\forall x \forall y P(x,y,z) \equiv \forall y \forall x P(x,y,z)$;
8.330) $\exists x \exists y P(x,y,z) \equiv \exists y \exists x P(x,y,z)$;
8.331) $\forall x\,(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \equiv \forall x\, P(x,y) \wedge \forall x\, Q(x,y)$;
8.332) $\exists x\,(P(x,y) \vee Q(x,y)) \equiv \exists x\, P(x,y) \vee \exists x\, Q(x,y)$;
8.333) $\forall x\,(P(x,z) \vee Q(y,z)) \equiv \forall x\, P(x,z) \vee Q(y,z)$;
8.334) $\exists x\,(P(x,z) \wedge Q(y,z)) \equiv \exists x\, P(x,z) \wedge Q(y,z)$;
8.335) $\exists x \forall y\; P(x,y,z) \to \forall y \exists x\; P(x,y,z) \equiv 1$.

Ввести необходимые предикаты и с помощью кванторов записать следующие определения, с помощью законов де Моргана получить их отрицания:

8.336) определение предела числовой последовательности;
8.337) определение фундаментальной по Коши последовательности;
8.338) определение предела функции в точке;
8.339) определение непрерывности функции в точке;
8.340) определение непрерывной на интервале функции;
8.341) определение равномерно непрерывной на интервале функции.

8.342) Почему из равномерной непрерывности на (a,b) следует непрерывность функции на (a,b)?

8.343) Доказать, что существуют предикаты Φ, Q и P такие, что

а) $\forall x\; (\Phi(x) \vee Q(x)) \not\equiv \forall x \Phi(x) \vee \forall x Q(x)$;

б) $\exists x\; (\Phi(x) \wedge Q(x)) \not\equiv \exists x \Phi(x) \wedge \exists x Q(x)$;

в) $\forall y \exists x\; P(x) \to \exists x \forall y P(x) \not\equiv 1$.

8.344) Какие из следующих формул тождественно истинны?

а) $\forall x\; (\Phi(x) \to P(x)) \to (\forall x\; \Phi(x) \to \forall x\; P(x))$;

б) $\forall x\; (\Phi(x) \to P(x)) \to (\exists x\; \Phi(x) \to \exists x\; P(x))$;

в) $\exists x\; (\Phi(x) \to P(x)) \to (\forall x\; \Phi(x) \to \forall x\; P(x))$;

г) $\exists x\; (\Phi(x) \to P(x)) \to (\exists x\; \Phi(x) \to \exists x\; P(x))$;

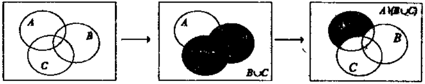
д) $\forall x\; (\Phi(x) \to P(x)) \sim (\exists x\; \Phi(x) \to \forall x\; P(x))$.

Основным типом примеров следующего пункта является «Доказать равенство множеств, заданных формулами алгебры множеств». Решение таких примеров следует начинать с построения диаграмм Виенна для левой и правой части. Если картинки не совпали, то вы уже решили пример и доказали, что равенство не имеет места. В противном случае вам рекомендуется перейти к формулам алгебры предикатов, определяющим эти множества, и вычислить, равносильны ли они, или, оставаясь в формулах алгебры множеств, перейти к булевым формулам алгебры множеств и воспользоваться основными равенствами булевой алгебры множеств.

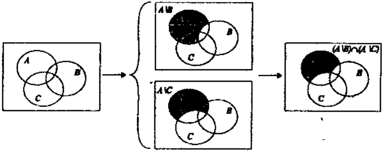
Пример 8.12. Доказать, что $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

► Построим диаграммы Виенна левой и правой частей:

левая часть



правая часть



Перейдем к булевым формулам алгебры множеств

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) =$$
$$= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \quad ◄$$

Особое внимание следует уделить решению примеров § 2.5, содержащих семейства множеств, так как операции над семействами множеств (см. § 2.5) вводятся с помощью кванторов («картинку» в таких примерах не нарисуешь и многоточиями не обойдешься).

Пример 8.13. Доказать, что

$$A\bigcap\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i).$$

► $$x\in A\cap\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) \equiv (x\in A)\wedge\Big(x\in\bigcup_{i\in I} B_i\Big)\equiv$$

$$\equiv (x\in A)\wedge(\exists i\,(x\in B_i))\equiv \exists i\,((x\in A)\wedge(x\in B_i))\equiv$$

$$\exists i\,(x\in(A\cap B_i))\equiv x\in\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i).$$ ◄

8.345) Доказать, что множество A всех четных чисел равно множеству B целых чисел, представимых в виде суммы двух нечетных целых чисел.

8.346) Доказать, что множество $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z},\ x$ делится на $6\}$ равно множеству $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z},\ (x$ делится на $2),\ (x$ делится на $3)\}$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

8.347) Доказать, что $\mathbb{Z}=\{x\,|\,\exists m\,\exists n(\subset\mathbb{Z})x=3m+5n\}$.

8.348) Привести пример таких множеств A, B, C, что $A\in B$, $B\in C$, но $A\notin C$.

8.349) Привести пример множеств A, B таких, что $A\in B$ и $A\subset B$.

8.350) Доказать, что если $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset A_1$, то $A_1=A_2=\cdots=A_n$.

8.351) Доказать, что $A\subset B$ тогда и только тогда, когда $A\setminus B=\varnothing$.

8.352) Доказать, что $A=B$ тогда и только тогда, когда $A\Delta B=\varnothing$.

Доказать равенства:

8.353) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

8.354) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$; **8.355)** $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$;

8.356) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(C\setminus C)$; **8.357)** $A\Delta B=B\Delta A$;

8.358) $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$;

8.359) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$; **8.360)** $A\Delta(A\Delta B)=B$.

8.361) Выразить операции $\cup$, $\cap$, $\setminus$ через Δ, $\cap$.

8.362) Выразить операции $\cup$, $\cap$, $\setminus$ через Δ, $\cup$.

8.363) Выразить операции $\cup$, $\cap$, $\setminus$ через Δ, $\setminus$.

8.364) Доказать, что нельзя выразить $\setminus$ через $\cup$ и $\cap$.

8.365) Доказать, что нельзя выразить $\cup$ через $\cap$ и $\setminus$.

8.366) Пусть $A=\{1,4,5\}$, $B=\{2,4,6\}$. Найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$.

8.367) Перечислить все подмножества множества $\{1,2,3\}$; все собственные подмножества.

8.368) Доказать, что $2^{A\cap B}=2^A\cap 2^B$, где 2^A — множество всех подмножеств множества A.

8.369) Пусть имеется последовательность множеств $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\subset\cdots$. Доказать, что $\bigcap\limits_{n\in N}A_n=\bigcap\limits_{n_k\in N}A_{n_k}$ для любой неограниченной подпоследовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Пусть nZ есть множество всех целых чисел, делящихся на n. Найти:

8.370) $nZ\cap mZ$; **8.371)** $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}nZ$; **8.372)** $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}nZ$;

8.373) $\bigcup\limits_{p\in P}pZ$, где P — множество простых чисел;

8.374) $\bigcup\limits_{n\in N}[1/n;1-1/n]$; **8.375)** $\bigcap\limits_{n\in N}[-1/n;1+1/n]$.

8.376) Пусть $C([a;b])$ — множество всех непрерывных функций, определенных на сегменте $[a;b]$,

$$C_x^3([a;b])=\{f\in C([a;b])\,|\,f(x)=3\}.$$

Найти $\bigcup\limits_{x\in[a;b]}C_x^3([a;b])$; $\bigcap\limits_{x\in[a;b]}C_x^3([a;b])$.

Доказать:

8.377) $B\bigcap\Big(\bigcup\limits_{i\in I}A_i\Big)=\bigcup\limits_{i\in I}(B\cap A_i)$. **8.378)** $B\bigcup\Big(\bigcap\limits_{i\in I}A_i\Big)=\bigcap\limits_{i\in I}(B\bigcup A_i)$.

Отображения

При решении примеров этого раздела следует помнить, что отображение (функция) f, действующее из X в Y, мы понимаем как тройку (X,Y,f), где X, Y — непустые множества, а f — правило, сопоставляющее каждому элементу x из множества X элемент $f(x)$ из множества Y. Равенство отображений — это равенство троек.

Наибольшую сложность вызывают примеры на нахождение композиции отображений, заданных правилами, содержащими разветвления.

Пример 8.14. Пусть $f, g : R \to R$ действует по правилам:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } |x| > 1; \\ -x, & \text{если } |x| \leq 1. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x > 8; \\ 2 - x, & \text{если } |x| \leq 8; \\ 2 + x, & \text{если } x < -8. \end{cases}$$

Найти $g \circ f$.

► Композиция — это последовательное применение отображений. В нашем примере первым действует отображение f, вторым — g. Поэтому нужно четко представить, что получится из области определения под действием отображения f, т. е. множество $f(X)$. Полученное множество заданием g разбивается на части, но не только оно, а и область определения f.

Перепишем еще раз задание f, убрав знак модуля:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x > 1; \\ -x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ x^3, & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

1) Если $x \in (1, \infty)$, то отображение f действует по правилу x^3 и множество $(1, \infty)$ отображается во множество $(1, \infty)$. На полученном множестве действие отображения g определяется как верхней, так и средней строкой, чтобы четко определить, когда какая строка действует. Исходное множество разобьем точкой $x = 2$ на два подмножества: $(1; 2]$ и $(2; \infty)$, тогда $f((1; 2]) = (1; 8]$ и $(1, 8]$ целиком попадает в среднюю строку определения отображения g, а $f((2; \infty)) = (8; \infty)$, что соответствует верхней строке определения g. Таким образом, мы получили, что

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \in (2, \infty); \\ 2 - x^3, & \text{если } x \in (1; 2]. \end{cases}$$

2) Если $x \in [-1; 1]$, то $f([-1; 1]) = [-1; 1]$, а это множество целиком попадает в среднюю строку определения g. Значит,

$$(g \circ f)(x) = 2 - (-x) = 2 + x, \quad \text{если } x \in [-1; 1].$$

3) Если $x \in (-\infty, -1)$, то $f((-\infty, -1)) = (-\infty, -1)$. На этом множестве отображение g определяется как своей средней, так и нижней строкой. Разобьем множество $(-\infty, -1)$ на две части: $(-\infty; -2)$ и $[-2; -1)$. Рассмотрим каждую из этих частей отдельно.

а) Ясно, что $f((-\infty; -2)) = (-\infty; -8)$. На этом множестве отображение g определяется своей нижней строкой, значит,

$$(g \circ f)(x) = 2 + x^3, \quad \text{если } x \in (-\infty, -2).$$

б) $f([-2; -1)) = [-8; -1)$. На этом множестве отображение g определяется своей средней строкой, значит,

$$(g \circ f)(x) = 2 - x^3, \quad \text{если } x \in [-2; -1).$$

Окончательно, получаем

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \in (2, \infty); \\ 2 - x^3, & \text{если } x \in [-2; -1) \cup (1; 2]; \\ 2 + x, & \text{если } x \in [-1; 1]; \\ 2 + x^3, & \text{если } x \in (-\infty, -2). \end{cases}$$ ◄

Пусть $f : X \to Y$ — произвольное отображение, B, B_1, B_2 — произвольные подмножества множества Y. Доказать, что:

8.379) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
8.380) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
8.381) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$;
8.382) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$;
8.383) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

8.384) Привести пример, показывающий, что импликация

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \Longrightarrow B_1 \subset B_2,$$

вообще говоря, не имеет места.

8.385) Доказать, что если $f : X \to Y$ и $A \subset X$, то

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x (\in X)\ (x \in A) \wedge (y = f(x))\}.$$

(Сравните с определением 2.15.)

Пусть $f : X \to Y$ — произвольное отображение, A_1, A_2 — произвольные подмножества множества X. Доказать, что:

8.386) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
8.387) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

8.388) Привести пример, показывающий, что включение

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2),$$

вообще говоря, не имеет места.

8.389) Доказать, что $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$.

8.390) Привести пример, показывающий, что включение

$$f(A_1 \setminus A_2) \subset f(A_1) \setminus f(A_2),$$

вообще говоря, не имеет места.

8.391) $(A_1 \subset A_2) \Longrightarrow (f(A_1) \subset f(A_2))$.

8.392) Привести пример, показывающий, что включение

$$(f(A_1) \subset f(A_2)) \Longrightarrow (A_1 \subset A_2),$$

вообще говоря, не имеет места.

Доказать, что для произвольного подмножества B области действия Y отображения $f : X \to Y$ выполняются соотношения:

8.393) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$; **8.394)** $f^{-1}(B) = \varnothing \Longleftrightarrow B \cap f(X) = \varnothing$.

8.395) Доказать, что для произвольного подмножества A области определения X отображения $f : X \to Y$ имеет место соотношение

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

Пусть $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Доказать, что:

8.396) $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$;
8.397) $f(A) \cap B = \varnothing \Longleftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$;
8.398) $f(A) \subset B \Longleftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.

Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $A \subset X$, $C \subset Z$. Доказать, что:

8.399) $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$; **8.400)** $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

8.401) Доказать, что если $A \subset X$, $B \subset X$, $i_A : A \to X$ — отображение включения, то

$$i_A^{-1}(B) = A \cap B.$$

8.402) Пусть $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$, $g = f|_A : A \to Y$ сужение отображения f на A. Доказать, что

$$g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B).$$

Доказать, что если $f : X \to Y$ — инъективное отображение, то для любых подмножеств A, A_1, A_2 его области определения X имеют место соотношения:

8.403) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$; **8.404)** $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$;
8.405) $A_1 \subset A_2 \Longleftrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$; **8.406)** $f^{-1}(f(A)) = A$.

8.407) Пусть для отображения $f : X \to X$ и для некоторого натурального числа n $f^n = e_x$. Доказать, что отображение f биективно.

8.408) Доказать, что если отображение $f \circ g$ инъективно, то g также инъективно.

8.409) Доказать, что если отображение $f \circ g$ сюръективно, то f также сюръективно.

8.410) Пусть заданы множества A, B, C, D и отображения $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Доказать, что если отображения $g \circ f$ и $h \circ g$ биективны, то и f, g, h — биективны.

8.411) Пусть заданы множества A, B, C и отображения $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to A$. Доказать, что если среди отображений $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ два являются инъективными (сюръективными), а третье — сюръективно (инъективно), то отображения f, g, h — биективны.

Для следующих отображений $f, g : R \to R$ найти композицию $f \circ g$, $g \circ f$.

8.412)

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x\geq 0\\ 1-x, & x<0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1+x, & x\geq 1\\ 2x, & x<1.\end{cases}$$

8.413)

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 1\\ x, & x<1,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}|x|, & x<2\\ 4-x, & x\geq 2.\end{cases}$$

8.414) Пусть отображение $f: R\to R$ действует по правилу

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x\geq 0\\ 1-x, & x<0,\end{cases}$$

$f([0;1])=?$, $f([-1;2])=?$ $f^{-1}([0;1])=?$, $f^{-1}([-1;2])=?$

8.415) Для отображения $f: R\to R$, $f(x)=\sin x$ найти $f((0;\pi))$, $f\left(\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)\right)$, $f^{-1}((-1/2;1/2))$, $f^{-1}([0;2))$.

8.416) Является ли отображение

$$f_n: N\to N,\quad f_n(k)=\begin{cases}n-k, & k<n\\ n+k, & k\geq n\end{cases}$$

инъективным, сюръективным, биективным?

Пусть $C(R)$ — множество всех вещественных непрерывных функций. Проверить, являются ли следующие отображения $F: C(R)\to C(R)$ инъективными, сюръективными, биективными, и найти обратные к ним с соответствующей стороны.

8.417) $[F(f)](x)=f(e^x)$; **8.418)** $[F(f)](x)=e^{f(x)}$;
8.419) $[F(f)](x)=(x^2-1)\cdot f(x)$; **8.420)** $[F(f)](x)=(x^2+1)\cdot f(x)$;
8.421) $[F(f)](x)=f(2x-1)$; **8.422)** $[F(f)](x)=f^3(x)$;
8.423) $[F(f)](x)=f(x^{1/3})$.

8.424) Найти композицию отображений из задач 8.419, 8.420 и 8.422, 8.423.

8.6 Элементы комбинаторики. Отношения

При решении комбинаторных примеров следует помнить, что:

1. успех в решении зависит от того, насколько верно понято условие;
2. почти не существует «чистых примеров», т. е. таких, в которых срабатывает «готовая» формула.

Пример 8.15. В купе с 8 сидячими местами (по 4 на каждом диване) вошло 6 пассажиров, один из которых (N1) согласен сидеть только у окна, двое (N2, N3) — только рядом, один (N4) — по ходу поезда, а двум (N5, N6) безразлично, где сидеть. Сколько способов рассадить пассажиров с учетом их пожеланий?

► Множество всех способов разобьем на два непересекающихся множества A и B, отнеся к A те способы, когда N1 сидит у окна по ходу поезда, а к B — остальные. Ясно, что ответ задачи —

$$|A|+|B|. \tag{8.1}$$

Займемся множеством A. Разобьем его на непересекающиеся подмножества I, II, III, IV в зависимости от того, какие два места занимают N2 и N3.

Ясно, что

$$|A|=|I|+|II|+|III|+|IV|+|V|. \tag{8.2}$$

Места N2 и N3 можно занять двумя способами. В случае I и II N4 занимает единственное свободное место на этом диване, N5 занимает любое место из оставшихся 4-х, а N6 — любое из оставшихся 3-х мест. Тогда

$$|I|=|II|=2\cdot 4\cdot 3=24 \tag{8.3}$$

В случаях III, IV, V пассажир N4 занимает любое из 3-х свободных мест на диване, где сидит N1, N5 — любое из оставшихся 4-х мест, N6 — любое из оставшихся 3-х свободных мест. Тогда

$$|III|=|IV|=|V|=2\cdot 3\cdot 4\cdot 3=72. \tag{8.4}$$

Из (8.2), (8.3), (8.4) получаем

$$|A|=24+24+72+72+72=264.$$

Аналогично для множества B

$$|VI| = |VII| = |VIII| = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 48,$$
$$|IX| = |X| = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96,$$
$$|B| = 3 \cdot 48 + 2 \cdot 96 = 192 + 144 = 336.$$

Из (8.1) получаем ответ задачи: $264 + 336 = 600$ (способов). ◄

Пример 8.16. На собрании должны выступить ораторы A, B, C, D. Сколько способов составить список выступающих так, чтобы C выступал позже B, но не сразу после него?

► Количество списков выступающих, когда сняты все ограничения, равно количеству перестановок длины 4, т. е. $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Разобьем множество списков на пары так, что второй список получается из первого переменой мест ораторов B и C (например, $ABDC$ и $ACDB$). Количество пар равно $\frac{24}{2} = 12$. В каждой такой паре один список, в котором B выступает раньше C, а другой — где C выступает раньше B. Значит, списков, в которых B выступает раньше C, столько же, сколько получилось пар, — 12.

Если мы определим количество списков, в которых C выступает сразу за B (их количество обозначим |«BC»|), то ответ задачи:

$$12 - |«BC»|. \tag{8.5}$$

Подсчитаем |«BC»|. Для этого склеим BC в одного оратора и рассмотрим, сколько списков можно составить, имея трех ораторов: A, BC и D. Ясно, что количество списков из трех ораторов равно

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6. \tag{8.6}$$

Окончательно из (8.5) и (8.6) получаем ответ задачи: $12 - 6 = 6$ (способов).

Проверка. Выпишем все допустимые списки:

$$BACD; \quad BDCA; \quad BADC; \quad BDAC; \quad ABDC; \quad DBAC.$$ ◄

8.425) Найти $A \times B$, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$.

8.426) Доказать, что если $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, то $A \times B = B \times A$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

8.427) Равны ли множества $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$?

8.428) Пусть $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ и $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$. Доказать, что $A = B = C = D$.

8.429) Пусть $A_i = [a_i; b_i] \times [c_i; d_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($[a; b]$ — сегмент вещественных чисел). Доказать, что если $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ для любых $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$.

Доказать равенства:

8.430) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

8.431) $\left(\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \times \left(\bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}} B_j\right) = \bigcup\limits_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} (A_i \times B_j)$;

8.432) $\left(\bigcap\limits_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \times \left(\bigcap\limits_{j \in \mathcal{J}} B_j\right) = \bigcap\limits_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} (A_i \times B_j)$.

Задачи

8.433) Из города А в город В ведет 5 дорог, а из города В в город С — 4 дороги. Сколько путей проходящих через В, ведет из А в С?

8.434) У Тани — 20 марок, у Наташи — 30. Сколькими способами можно осуществить обмен одной Таниной марки на одну Наташину? Двух Таниных на три Наташиных?

8.435) На ферме 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу? Одну свинью? Двух животных — одну овцу и одну свинью?

8.436) Из А в В ведет 5 дорог. Сколькими способами можно съездить из А в В и обратно, если путешествие туда и обратно совершается по разным дорогам?

8.437) В библиотеке 5 учебников геометрии, 7 — тригонометрии, 4 — алгебры. Сколько полных комплектов учебников можно составить? Сколько способов комплектования? (Все экземпляры считаются различными.)

8.438) Сколькими способами можно выбрать три различные краски из пяти?

8.439) Сколькими способами можно составить трехцветный трехполосный флаг, если имеется материя пяти различных цветов? То же самое, если средняя полоса должна быть синей?

8.440) Сколько различных флагов из трех полос можно составить, если имеется материал пяти цветов? (Сравните с предыдущей задачей.)

8.441) Надо послать 6 писем. Сколькими способами это можно сделать, если для доставки писем имеется 3 курьера?

8.442) Сколькими способами можно расставить 7 различных книг на книжной полке?

8.443) На собрании должны выступить 5 человек — А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно составить список выступающих? То же самое при условии, что В выступает непосредственно перед Г?

8.444) В месткоме выбрано 9 человек, из них нужно выбрать председателя, заместителя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

8.445) В зрительном зале 120 мест. Сколькими способами могут занять места в нем 120 зрителей; 80 зрителей?

8.446) Сколькими способами можно наклеить 5 различных марок на 5 различных конвертов?

8.447) Сколькими способами на пять различных конвертов можно наклеить по одной марке, если на почте имеется 7 различных видов марок?

8.448) Сколько слов можно получить, переставляя буквы слова «факел»; «математика»?

8.449) Сколькими способами можно выбрать открытки для поздравления пяти лиц, если имеется 7 различных открыток?

8.450) Сколькими способами можно купить 5 открыток, если в продаже имеются открытки 7 различных видов?

8.451) В лифт сели 8 человек. Сколькими способами они могут выйти на 4-х этажах, если на каждом этаже должен выйти хотя бы один человек?

8.452) Пять различных грузов нужно доставить на этажи строящегося дома. Сколькими способами это можно сделать, если каждый груз можно доставить на любой из пяти этажей?

8.453) У мамы три одинаковых яблока и четыре одинаковых груши. Каждый день, начиная с понедельника и заканчивая воскресеньем, она выдает ребенку по одному плоду в день. Сколькими способами это можно сделать? То же самое, но при условии, что ни в какие два соседних дня не выдается одноименный плод?

8.454) Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по двум карманам?

8.455) Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по двум карманам так, чтобы оба кармана не были пусты?

8.456) Сколько способов разложить 10 различных монет по двум карманам?

8.457) Сколько способов разложить 10 различных монет по двум карманам так, чтобы оба кармана не были непусты?

8.458) Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по трем карманам?

8.459) Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по трем карманам так, чтобы ни один из карманов не был пустым?

8.460) Сколько способов разложить 10 различных монет по трем карманам?

8.461) Сколько способов разложить 10 различных монет по трем карманам, так чтобы ни один из карманов не был пустым?

8.462) На карусели четыре одинаковых места для пассажиров. Сколько способов рассадки 4-х пассажиров для катания на карусели?

8.463) То же самое, что в задаче 8.462, если пассажир В должен кататься, имея непосредственно перед собой пассажира А?

8.464) Найти все отношения на множестве $\{0; 1\}$.

8.465) Привести пример отношения симметричного, транзитивного, но не рефлексивного.

Выяснить, какими из основных свойств — рефлексивностью, симметричностью, антисимметричностью — обладают следующие отношения на множестве натуральных чисел:

8.466) $S = \{(m,n) | m$ и n взаимно просты$\}$;
8.467) $S = \{(m,n) | m$ делится на $n\}$; **8.468)** $S = \{(m,n) | m = n^2\}$;
8.469) $S = \{(m,n) | m < n\}$; **8.470)** $S = \{(m,n) | m \leq n\}$;
8.471) $S = \{(m,n) | m - n$ делится на $2\}$;
8.472) $S = \{(m,n) | m - n = 2\}$.

8.473) Пусть дано отображение $f : X \to Y$. Доказать, что отношение $S = \{(x,x') \in X \times X) | f(x) = f(x')\}$ является отношением эквивалентности.

Доказать, что следующие отношения являются эквивалентностями, найти фактор множества и установить взаимно однозначные соответствия между ними и указанными множествами:

8.474) $S = \{(x,y) | x, y \in Z,\ x - y$ четное$\}$, $Z/\alpha_s \simeq \{0;1\}$;

8.475) $S = \{(x,y) | x, y \in R,\ x^2 = y^2\}$ $R/\alpha_s \simeq R_+$, где R — множество вещественных чисел, $R_+ = [0; \infty)$;

8.476) $S=\{(x,y)|\,x,y\in R,\ x-y\in\mathbb{Z}\}$, $R/\alpha_s\simeq[0,1)$;

8.477) $S=\{(x,y)|\,x,y\in R,\ \sin x=\sin y\}$, $R/\alpha_s\simeq[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$;

8.478) $S_n=\{(x,y)|\,x,y\in\mathbb{Z},\ x-y$ делится на n, $n\in N\}$, $\mathbb{Z}/\alpha_{s_n}\simeq\{0;1;2;\dots;n-1\}$;

8.479) $S=\{(x,y)|\,x,y\in\mathbb{C},\ x-y\in R\}$, $\mathbb{C}/\alpha_s\simeq R$, где $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

8.480) $S=\{(x,y)|\,x,y\in\mathbb{C},\ |x|=|y|\}$, $\mathbb{C}/\alpha_s\simeq R_+=[0;\infty)$;

8.481) $S=\{(x,y)|\,x,y\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\ \arg x=\arg y\}$, $\mathbb{C}\setminus\{0\}/\alpha_s=[0;2\pi)$;

8.482) $S=\{(x,y)|\,x,y\in N,\ (x=y)\vee(x\geq 10)\cdot(y\geq 10)\}$, $N/\alpha_s\simeq\{1;2;3;\dots;10\}$;

8.483) $S=((x,y)|\,x,y\in N,\ x=\sum\limits_{i=0}^{\infty}x_i\cdot 10^i,\ y=\sum\limits_{i=0}^{\infty}y_i\cdot 10^i\ x_i,y_i\in\{0;1;\dots;9\},\ x_0=y_0\}$, $N/\alpha_s\simeq\{0,1,\dots,9\}$;

8.484) $S=\{(x,y)|\,x,y\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,x=\mathrm{Re}\,y\}$, $\mathbb{C}/\alpha_s\simeq R$;

8.485) $S=\{(A,B)|\,A,B\in M_{2\times2},\ \mathrm{tr}\,A=\mathrm{tr}\,B\}$, $M_{2\times2}/\alpha_s\simeq R$, где $M_{2\times2}$ — множество вещественных матриц размера 2×2, $\mathrm{tr}\,A$ — след матрицы A, $\mathrm{tr}\,A=(A)_{11}+(A)_{22}$.

На множестве всех бесконечных последовательностей вещественных чисел заданы следующие отношения. Выяснить, какие из них являются эквивалентностями и какие — частичным порядком.

8.486) $S=\{(\{a_n\},\{b_n\})|\,\forall n\,(a_n\leq b_n)\equiv 1\}$;

8.487) $S=\{(\{a_n\},\{b_n\})|\,\exists n\,\forall k\ ((k>n)\to(a_k=b_k))\equiv 1\}$;

8.488) $S=\{(\{a_n\},\{b_n\})|\,\exists n\,\forall k\ ((k>n)\to(a_k\leq b_k))\equiv 1\}$;

8.489) $S=\{(\{a_n\},\{b_n\})|\,\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\}$;

8.490) $S=\{(\{a_n\},\{b_n\})|\,\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}b_n\}$.

8.491) На множестве $N^2\setminus\{(1;1)\}$ введено отношение

$$S=\{((m,n),(p,q))|\,(m\leq p)(n\leq q)\}.$$

Доказать, что α_s — частичный порядок, и найти все минимальные элементы.

8.492) На множестве $N\setminus\{1\}$ введено отношение $S=\{(m,n)|\,n$ делится на $m\}$. Доказать, что α_s — отношение частичного порядка, но не линейного порядка.

8.493) На множестве $M=\{\varnothing,\{1\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ введено отношение $S=\{(X,Y)|\,X,Y\in M,\ X\subset Y\}$. Показать, что α_s — отношение частичного, но не линейного порядка.

8.494) На множестве $B_{m\times n}$ булевых матриц (т. е. матриц с элементами из множества $\{0,1\}$) размера $m\times n$ введено отношение

$$S=\left\{(A,B)|\,\exists i_0\forall i\forall k\left(\left(((i\neq i_0)\Longrightarrow(a_{ik}=b_{ik}))\ \&\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\&\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i_0k}2^{k-1}\leq\sum_{k=1}^{n}b_{i_0k}2^{k-1}\right)\right)\right)\vee(A=B)\right\}.$$

Доказать, что α_s — отношение линейного порядка, и найти наибольший и наименьший элементы.

8.7 Функции алгебры логики

Напомним, что булевы операции $\neg$, $\wedge$, $\vee$ образуют полную систему функций. Это означает, что любая функция алгебры логики ($\Leftrightarrow$ булева функция) может быть задана формулой над $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

В частности, $x|y\equiv\overline{x\cdot y}$, $x\uparrow y\equiv\overline{x\vee y}$, $x\oplus y\equiv x\overline{y}\vee\overline{x}y$.

Еще одной полной системой функций является $\{0,1,\oplus,\&\}$. Формулы над $\{0,1,\oplus,\&\}$ называют **многочленами Жегалкина**.

Каноническим многочленом Жегалкина называют многочлен Жегалкина, в котором раскрыты скобки и приведены подобные.

Переменная x_i функции $f(x_1,\dots,x_n)$ называется **фиктивной**, если

$$f(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n).$$

Можно доказать, что переменная x_i в функции $f(x_1,\dots,x_n)$ фиктивна тогда и только тогда, когда канонический многочлен Жегалкина функции f не содержит переменной x_i.

8.496) Найти канонические многочлены Жегалкина следующих булевых функций:

а) всех булевых функций из $P_2(1)$, $P_2(2)$; **б)** $(x_1\to x_2)\sim(x_2\sim x_3)$; **в)** $(x_1\to x_3)\cdot(x_2\oplus x_3)$; **г)** $\overline{x_1\cdot x_3}\vee x_2\cdot\overline{x}_4)$; **д)** $(z_1\sim z_2)\to z_3$;

е) (10101100) — столбец значений функции f в ее таблице;
е') (11000100); ж) $(\overline{x}_1|x_2) \uparrow x_3$.

8.497) Найти все фиктивные переменные следующих булевых функций:

а) $x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2$; б) $x_1\overline{x}_2 \vee x_2$; в) $x_1\overline{x}_2 \vee x_1$;
г) $(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))$;
д) $(x_1 \to x_2)((x_2 \to x_3) \to (x_1 \to x_3))$;
е) $(x_1 \to x_2) \to (\overline{x}_2 \to \overline{x}_1)$; ж) $(x_1 \to x_2) \to x_1$.

8.498) Сколько функций содержится во множестве:
а) $P_0(n) \cap P_1(n)$; б) $P_0(n) \cup P_1(n)$; в) $P_0(n) \backslash P_1(n)$; г) $P_0(n) \cap S(n)$;
д) $P_0(n) \cup S(n)$; е) $P_0(n) \backslash S(n)$; ж) $S(n) \backslash P_0(n)$.

8.499) Из функций примеров 8.496 и 8.497 выделить все функции, входящие в P_0; в P_1.

8.500) Какие из следующих функций самодвойственны:

а) $(x_1 \to x_2) \to x_1x_3$; б) $(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_1)x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$;
в) $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$; г) (0001001001100111);
д) $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2m+1}) = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_{2m+1} \oplus \delta$, $\delta \in \{0; 1\}$;
е) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$; ж) $(x_1|\overline{x}_1) \uparrow x_2$.

8.501) Из несамодвойственной функции f с помощью отождествления переменных и $\neg$ получить константу:

а) (00111001); б) $(x_1|x_2) \to (x_1 \oplus x_3)$; в) $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \oplus \overline{x}_1x_2x_3$;
г) $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4$.

8.502) Какие из функций примеров 8.496, 8.497. 8.500 монотонны?

8.503) Из немонотонных функций примеров 8.500 и 8.501 с помощью подстановки констант получить $\neg x$.

8.504) Какие из следующих функций монотонны:

а) $x_1 \to (x_2 \to x_3)$; б) (00110111); в) $x_1x_3 \cdot (x_1 \oplus x_3)$;
г) $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1$; д) (01100111).

8.505) Какие из функций примеров 8.496, 8.497, 8.500, 8.504 линейны?

8.506) Из нелинейных функций примера 8.505 с помощью 0, 1 и $\neg$ получить $\wedge$.

8.507) Выразить с помощью суперпозиций:

а) $\wedge$ и $\to$ через $\neg$, $\vee$; б) $\vee$ и $\to$ через $\neg$, $\wedge$; в) $\wedge$ и $\vee$ через $\neg$, $\to$;
г) $\neg$ через 0, $\to$; д) $\neg$ через 1, $\oplus$; е) $\vee$ через $\to$;
ж) $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\sim$ через $\uparrow$; з) $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\oplus$ через $|$; и) $\uparrow$ через $|$;
к) $|$ через $\uparrow$.

8.508) Доказать полноту следующих систем функций сведением к заведомо полным системам:

а) $\{x_1 \uparrow x_2\}$; б) $\{x_1|x_2\}$; в) $\{x_1 \to x_2; \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}\}$;
г) {(1011); (1100001100111100)}.

8.509) С помощью теоремы Поста проверить на полноту следующие системы функций:

а) x_1x_2; $x_1 \vee x_2$; б) $x_1 \to x_2$; $x_1 \to \overline{x}_2x_3$; в) $x_1\overline{x}_2$; $\overline{x}_1 \sim x_2x_3$;
г) 0; 1; $x_1(x_2 \sim x_3) \vee \overline{x}_1(x_2 \oplus x_3)$; д) $\neg x$; (0010); (0101110011100011);
е) 1; $x_1 \oplus x_2$; $(x_1 \to x_2) \uparrow (x_2 \sim x_3)$; $(x_3|(x_1 \cdot x_2)) \to \overline{x}_3$;
ж) $x_1 \to x_2$; $\overline{x}_1$; з) x_1x_2; $x_1 \vee x_2$; $x_1 \to x_2$;
и) $x_1 \sim x_2$; $\overline{x}_1$; $\overline{x}_1 \to \overline{x}_2$; к) $x_1 \to x_2$; 0; $x_1 \sim x_2$; л) $x_1 \oplus x_2$; $\overline{x}_1$;
м) $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$; 0; 1; н) $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$; $\overline{x}_1$; $\overline{x}_1 \to x_2$.

8.510) Из полных систем примера 8.509 выделить все возможные базисы, т. е. такие полные подсистемы, у которых ни одна собственная подсистема не является полной.

8.511) Доказать, что если система функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ полна, то и система $\{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*\}$ также полна.

8.512) Какие из указанных систем функций являются замкнутыми:

а) $P_2(1)$; б) $P_2(2)$; в) P_2; г) $P_0 \cap P_1$; д) $P_0 \cup P_1$; е) $P_0 \backslash P_1$.

8.513) Доказать, что пересечение функционально замкнутых классов является функционально замкнутым классом.

8.514) Доказать, что если множество $\mathcal{M}$ функционально замкнутый класс, то $\mathcal{M}^*$ — множество, состоящее из функций, двойственных к функциям из $\mathcal{M}$, также является функционально замкнутым классом.

8.515) Доказать, что если $\mathcal{M} \neq \oslash$ и $\mathcal{M} \neq P_2$ и $[\mathcal{M}] = \mathcal{M}$, то $P_2 \backslash \mathcal{M}$ незамкнуто.

8.516) Обозначим M^- — множество монотонно убывающих булевых функций. Доказать, что M^- и $M \cup M^-$ незамкнуты.

8.517) Доказать, что для монотонности функции, отличной от константы, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде суперпозиции конъюнкций и дизъюнкций ($\Longleftrightarrow f \in [\vee, \wedge]$).

8.518) Доказать, что $f \in M \Longleftrightarrow f^* \in M$.

8.519) Найти $M \cap (P_2 \backslash P_0)$, $M \cap (P_2 \backslash P_1)$.

8.520) К какому наименьшему числу переменных можно свести немонотонную функцию с сохранением немонотонности, отождествляя ее переменные?

8.521) Найти $P_2(2) \backslash (P_0 \cup P_1 \cup L \cup S \cup M)$.

8.522) Найти все функции, которые можно получить, отождествляя переменные, из следующих функций:

а) (10010110); б) (11111101); в) $x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$;
г) $x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

8.8 Машина Тьюринга

В этом небольшом разделе содержатся задачи двух главных типов:

— по заданной машине Тьюринга найти результат ее применения к заданному слову u, т. е. $T(u)$;

— построение машины, решающей данный класс задач.

Естественные трудности возникают при решении задач второго типа. Мы рекомендуем до составления программы машины, т. е. до заполнения таблицы, задающей программу, тщательно продумать алгоритм, который должен быть реализован программой. В конце решения, т. е. когда программа составлена, не забудьте применить ее к тестовому примеру.

По заданной машине T с внешним алфавитом $A = \{\mid, \wedge\}$ и слову u найти слово $T(u)$:

8.523)

	q_1	q_2
$\mid$	$\wedge\, q_2 + 1$	$\mid q_2 - 1$
$\wedge$	$\mid q_0 0$	$\wedge\, q_1 + 1$

$u_1 = \mid\mid\mid\mid$
$u_2 = \mid \wedge \wedge \mid$

8.524)

	q_1	q_2	q_3
$\mid$	$\mid q_2 + 1$	$\mid q_2 0$	$\mid q_1 + 1$
$\wedge$	$\mid q_2 + 1$	$\mid q_3 + 1$	$\mid q_0 0$

$u_1 = \mid\mid\mid$
$u_2 = \mid \wedge \wedge \mid$
$u_3 = \mid\mid \wedge \wedge \wedge \mid$

Выяснить, применима ли машина T с внешним алфавитом $\{\mid; \wedge\}$ к слову u, и в случае применимости найти результат:

8.525)

	q_1	q_2
$\mid$	$\mid q_1 + 1$	$\wedge\, q_2 - 1$
$\wedge$	$\wedge\, q_2 - 1$	$\mid q_0 + 1$

$u_1 = \mid\mid\mid$
$u_2 = \mid\mid \wedge \mid$

8.526)

	q_1	q_2	q_3
$\mid$	$\mid q_1 + 1$	$\mid q_1 - 1$	$\mid q_2 + 1$
$\wedge$	$\wedge\, q_3 + 1$	$\wedge\, q_3 + 1$	$\wedge\, q_0 0$

$u_1 = \mid\mid \wedge \mid$
$u_2 = \mid \wedge \mid\mid\mid\mid$

8.527) Построить машину K_2 над алфавитом $\{\mid\}$.

8.528) Построить машину K_1 над алфавитом $\{\alpha; \beta\}$.

8.529) Какую функцию натурального аргумента вычисляет машина, заданная программой:

	q_1	q_2
$\mid$	$\mid q_3 + 1$	$\mid q_2 + 1$
$\wedge$	$\mid q_0 0$	$\mid q_0 0$

Упростите эту машину.

8.530) Постройте машину, распознающую четность натурального числа.

8.531) Постройте машину R_m, вычисляющую остаток от деления натурального числа на m.

8.532) Постройте машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции, заданные на $N \times N$:

а) $x + y$; б) $x + 2y$; в) $x \cdot y$; г) $x^2 + 3y$.

8.533) Постройте машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции, определенные на N:

а) $3x$; б) x^2; в) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x = 2n; \\ 2x, & \text{если } x = 2n + 1. \end{cases}$

8.534) Постройте машину над алфавитом $\{\mid\}$, применимую к любому слову четной длины и не применимую к словам нечетной длины.

Постройте в алфавите $\{0; 1\}$ машину T, работающую по правилу:

8.535) $T(1^n) = 1^n01^n$, $n \in N$, $a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{aa\cdots a}_{n}$;

8.536 $T(0^n1^n) = (01)^n$, $n \in N$;

8.537 $T(1^n) = 1^n01^{2n}01^{3n}$, $n \in N$;

8.538 $T(1^n01^m) = 1^m01^n$, $n, m \in N$;

8.539 $T(1^n0^m) = \begin{cases} 1^{2n}, & \text{если } n > m; \\ (01)^n, & \text{если } n = m; \\ 0^m, & \text{если } n < m. \end{cases}$

8.540) Какую функцию натурального аргумента вычисляет машина T?

а)

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
$\mid$	$\mid q_1+1$	$0q_3+1$	$0q_3+1$	$\mid q_5-1$	$\mid q_5-1$
Λ	Λq_2+1	Λq_1-1	Λq_4-1	Λq_4-1	Λq_0+1

б)

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
$\mid$	Λq_2+1	$\mid q_4+1$	$\mid q_3-1$	$\mid q_4+1$	$\mid q_4+1$	$\mid q_6+1$	Λq_8-1	$\mid q_8-1$	$\mid q_9+1$
Λ	Λq_2+1	Λq_3+1	$\mid q_0 0$	Λq_5+1	Λq_3-1	Λq_7-1		Λq_9-1	Λq_1+1

8.541) Какие одноместные функции натурального аргумента в алфавите $\{|, \Lambda\}$ могут вычислять машины, программы которых содержат только команды q_0 и q_1?

По словесному описанию машин $T_3, T_4, \ldots$ построить их программы. Внешний алфавит $\{0; 1; \Lambda\}$.

8.542) T_3 — начиная с последней единицы массива из единиц, «сдвигает» его на одну ячейку влево и останавливается на первой единице;

8.543) T_4 — при заданном $l \geq 1$ СЗУ машины, начав с произвольной ячейки, заполненной единицей, движется вправо, не меняя содержимого ячеек, до тех пор пока не пройдет массив из $l+1$ нуля; СЗУ останавливается на следующей ячейке, поместив туда единицу;

8.544) T_5 — при заданном $l \geq 1$ СЗУ, начав с произвольной ячейки и двигаясь вправо, проставляет подряд l единиц и останавливается на последней из них;

8.545) T_6 — машина начинает работу с крайней слева непустой ячейки произвольного слова, при заданном $l \geq 1$ отыскивает в слове первый слева массив из $l+1$ нуля, останавливается на последнем из них (содержимое ячеек не меняется);

8.546) T_7 — начав работу с самой левой непустой ячейки, машина отыскивает единицу, примыкающую слева к первому слева массиву из трех нолей, «окаймленному» единицами, СЗУ останавливается на найденной единице (содержимое ячеек не меняется);

8.547) T_8 — в исходной ячейке печатает ноль, СЗУ сдвигается на одну ячейку влево и машина останавливается.

8.548) T_9 — СЗУ машины сдвигается на две ячейки вправо от начальной, машина останавливается в состоянии q_0, если эта ячейка содержит ноль, в состоянии q_0', если эта ячейка содержит единицу.

8.549) T_{10} — СЗУ передвигается на одну ячейку влево и машина останавливается;

8.550) T_{11} — отправляясь от начальной ячейки, находит первую единицу и останавливается на следующей за ней ячейке.

8.551) Найдите композиции машин: $T_4 \circ T_3$, $T_6 \circ T_7$, $T_{11} \circ T_{10} \circ T_5$. (Машины $T_3, T_4, \ldots$ см. в примерах 8.542–8.550.)

8.9 Графы и их матрицы

Задачи, приведенные в этом разделе, разнообразны и трудно классифицируются как по типам, так и по степени сложности. Наряду с тривиальными встречаются и задачи, содержание которых — известные теоремы теории графов. Эти задачи помечены «*».

8.552) Для графов, приведенных на рисунках, найти матрицу смежности $A(G)$ и матрицу инцидентности $B(G)$:

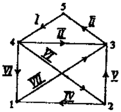


Рис. 8.10

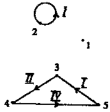


Рис. 8.11

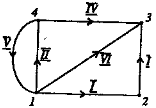


Рис. 8.12

8.553) Изобразить графы, заданные матрицами $A(G)$ или $B(G)$:

а) $A(G) = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1 \\ 1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$ б) $B(G) = \begin{pmatrix} 0&0&1&-1&0&-1&-1&0 \\ -1&0&0&0&-1&1&0&-1 \\ 1&-1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&-1&-1&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$

$$\text{в) } A(G) = \begin{pmatrix} 01000000 \\ 00010000 \\ 00000000 \\ 10000000 \\ 01000010 \\ 00000001 \\ 00000101 \\ 10100000 \end{pmatrix} \qquad \text{д) } B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.554) Дана матрица $A(G)$ или $B(G)$. Найти матрицу $B(G)$ или $A(G)$:

$$\text{а) } A(G) = \begin{pmatrix} 1011 \\ 0101 \\ 1101 \\ 0010 \end{pmatrix} \qquad \text{б) } B(G) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } A(G) = \begin{pmatrix} 0000 \\ 0001 \\ 0001 \\ 1010 \end{pmatrix} \qquad \text{г) } B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.555) Найти компоненты связности и сильной связности графов, изображенных на рисунках, и их числа связности и сильной связности — $c(G)$ и $sc(G)$.

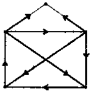


Рис. 8.13

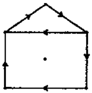


Рис. 8.14

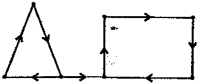


Рис. 8.15

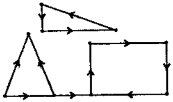


Рис. 8.16

8.556) Найти компоненты связности и сильной связности графов, заданных матрицами $A(G)$ или $B(G)$, и их числа связности и сильной связности — $c(G)$ и $sc(G)$:

$$\text{а) } A(G) = \begin{pmatrix} 01101 \\ 00111 \\ 10010 \\ 10000 \\ 00000 \end{pmatrix} \qquad \text{б) } B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } A(G) = \begin{pmatrix} 01000000 \\ 00010000 \\ 00000000 \\ 00001000 \\ 10000000 \\ 01000010 \\ 00000001 \\ 00000010 \end{pmatrix} \qquad \text{г) } B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$д)\ A(G) = \begin{pmatrix} 0001100 \\ 0001100 \\ 0000010 \\ 0000100 \\ 0000000 \\ 0000010 \\ 0010000 \end{pmatrix}$$

8.557) Для графов примеров 8.555, 8.556 найти матрицы достижимости и сильной достижимости вершин и компоненты связности и сильной связности.

Матрицей достижимости графа $G(X,U,f)$ $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется матрица $D(G) = (d_{ij})$ размера $n \times n$ $(n = |X|)$, определенная следующим

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ находятся в одной компоненте связности;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицей сильной достижимости называется матрица $sD(G) = (sd_{ij})$ размера $n \times n$, определяемая следующим

$$sd_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ находятся} \\ & \text{в одной компоненте сильной связности;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

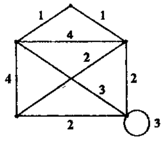
8.558) Для графов примеров 8.553, 8.554, 8.556 найти deg_+x, deg_-x, $degx$; $x \in X$.

8.559) Для графов примеров 8.555, 8.556 найти конденсацию, т. е. граф, вершины которого — компоненты сильной связности исходного графа, а дуги — дуги исходного графа, ведущие из одной его сильной компоненты в другую.

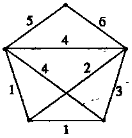
8.560) Найти мосты, блоки и точки сочленения графов примеров 8.553, 8.555, 8.556.

8.561) Пользуясь алгоритмом Краскала, найдите легчайшее покрывающее дерево графов, заданных рисунками (цифры около дуг — веса дуг):

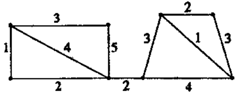
а)



б)



в)



8.562*) Доказать, что любые два диаметра (простая цепь максимальной длины) связного графа имеют хотя бы одну общую вершину.

8.563*) Каково максимальное количество висячих вершин дерева с n вершинами?

8.564) Нарисуйте все неизоморфные между собой неориентированные деревья с 3-мя, 4-мя вершинами.

8.565) Нарисуйте все неизоморфные между собой ориентированные деревья с 3-мя вершинами.

8.566) Нарисуйте все неизоморфные между собой помеченные неориентированные деревья с 3-мя вершинами.

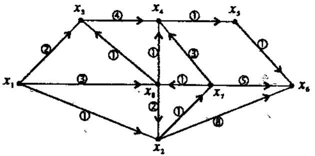
8.567) Нарисуйте все неизоморфные между собой помеченные ориентированные деревья с 3-мя вершинами.

8.568*) Докажите, что если B_1, B_2 — блоки графа G, то

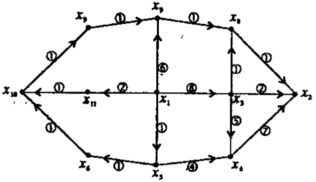
$$B_1 \cap B_2 = \varnothing \vee (\{x\} \mid x \in X \text{ и } x \text{ — точка сочленения } G).$$

8.569) Для графов, приведенных на рисунках а), б), в) найти длины кратчайших путей от вершины x_1 до всех остальных (около дуги в кружке — ее вес).

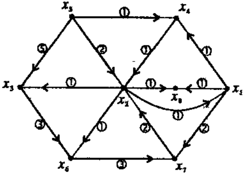
а)



б)



в)



8.570) Для графов задачи 8.569 восстановить кратчайшие пути из x_1 в x_6; из x_1 в x_7.

8.571*) Докажите, что конденсация любого графа (определение конденсации см. задачу 8.559) — граф, не содержащий циклов.

Раскраской неориентированного графа без петель в k цветов называется отображение r, действующее из множества вершин графа в $[1,k]_N$, удовлетворяющее условию «x, y — смежные вершины» $\Longrightarrow r(x) \neq r(y)$.

Хроматическим числом графа G называется наименьшее k, при котором существует хотя бы одна раскраска. Хроматическое число обозначают $\chi(G)$.

Хроматической функцией графа называют отображение $f_G : N \to Z_+$, определенное следующим

$$f_G(x) = \text{«число способов раскраски графа } G \text{ в } x \text{ цветов»}.$$

8.572*) Докажите, что $\chi(G) \leq |X|$. X — множество вершин графа G.

8.573*) Докажите, что

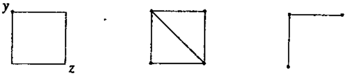
$$f_{K_n}(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1). \qquad (8.7)$$

8.574*) Докажите, что если y, z — несмежные вершины графа G, то

$$f_G(x) = f_{G_{y-z}}(x) + f_{G_{y=z}}(x). \qquad (8.8)$$

G_{y-z} — граф, полученный из G добавлением дуги, соединяющей y и z.

$G_{y=z}$ — граф, полученный из G отождествлением вершин y и z (см. рис. 8.10).



G $\qquad$ G_{y-z} $\qquad$ $G_{y=z}$

8.575*) Докажите с помощью утверждений задач 8.573 и 8.574, что хроматическая функция графа с n вершинами — многочлен n-ой степени с целыми коэффициентами.

8.576*) Докажите, что в разложении хроматического многочлена графа $f_G(x)$ по степеням x старший коэффициент равен 1, а свободный член — 0.

8.577*) Докажите, что если граф G содержит K_m в качестве подграфа, то хроматический многочлен $f_G(x)$ делится на $f_{K_m}(x)$.

Рекомендуемая литература

1. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т.1 под ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. М.: Наука, 1974.
3. Карпов В. Г., Мощенский В. А. Математическая логика и дискретная математика. Минск: Вышейшая школа, 1977.
4. Горбатов В. А. Основы дискретной математики. М.: ВШ, 1986.
5. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988.
6. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. М.: Мир, 1976.
7. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. М.: Наука, 1990.
8. Фудзисава Т., Касами Т. Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур. М.: Радио и связь, 1984.
9. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1979.
10. Трахтенброт Б. А. Алгоритмы и вычислительные машины. М.: Советское радио, 1974.
11. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ, 1992. 264 с.

12. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

13. Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.

14. Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977.

15. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977.

16. Хейфиц А. И. Элементы комбинаторики. Ростов-на-Дону, ИРУ, 1984.

17. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

18. Берж К. Теория графов и ее применения. М.: ИЛ, 1962.

19. Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987.

20. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети, алгоритмы. М.: Мир, 1984.

21. Татт У. Теория графов. М.: Мир, 1988.

22. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977.

23. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир. 1973.

24. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. А., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука. 1990.

25. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977.

26. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. М.: Наука, 1972.

27. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 1975.

28. Сборник задач по математической логике и теории множеств. Саратов: Изд. СГУ, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЕРУСАЛИМСКИЙ ЯКОВ МИХАЙЛОВИЧ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА:
теория, задачи, приложения

Компьютерная верстка в системе $\LaTeX - 2_\varepsilon$ *Ю.А. Жданова*
Корректор *М.А. Вторникова*

Лицензия на издательскую деятельность ЛП № 071370 от 30.12.1996 г.
Подписано в печать 25.08.2000
Печать офсетная. Формат 60 x 84 1/16.
Печ.л.17,5. Тираж 1000.

Издательство «Вузовская книга»
125871, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
Т/ф 158-02-35
E-mail: vbook @ mai. ru