GEODEZIYA va GEOINFORMATIKA

M.X.Rajapboev
A.N.Jumanov

Geodezik o'lchashlarni matematik hisoblash nazariyasi

$$M_T = M\left[\frac{X - M_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X} M[X - M_X]$$

$$= \frac{1}{\sigma_X}(M_X - M_X) = 0$$

M.X.RAJAPBOEV A.N.JUMANOV

Geodezik o’lchashlarni matematik hisoblash nazariyasi

(o’quv qullanma)

TOSHKENT 2023
O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM,
FAN VA INNOVATSIYaLAR VAZIRLIGI

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI

M.X.Rajapboev A.N.Jumanov

Geodezik o'lchashlarni matematik hisoblash nazariyasi (o'quv qullanma)

TOSHKENT 2023

Mualliflarning so'zboshi M.X.Rajapboev A.N.Jumanov **Geodezik o'lchashlarni matematik hisoblash nazariyasi** (o'quv qullanma). Toshkent, TIQXMMI MTU, 2023, bet.

O'quv qullanma o'quv dasturiga muvofiq tuzilgan bo'lib, unda ehtimollar nazariyasi (xatolar nazariyasini tushunish uchun zarur bo'lgan darajada) va matematik statistika, xatolar nazariyasi, eng kichik kvadratlar usuli yordamida geodezik konstruksiyalarni tuzatish, geodezik konstruksiyalarni loyihalash elementlari mavjud.

Kitob respublikamiz Oliy o'quv yurtlarining "Geodeziya va geoinformatika", "Masofadan zondlash" bakalavriatura ta'lim yo'nalishlarining talabalari O'quv qullanma bo'lajak mutaxassislarga geodezik o'lchovlarni qayta ishlash tamoyillari, shuningdek, tegishli yo'nalishlar va mutaxassisliklar bo'yicha Oliy ta'lim standartlarida nazarda tutilgan kasbiy va umumiy madaniy vakolatlar haqida aniq tushuncha berishga mo'ljallangan. Barcha bo'limlarda nazariy materiallar, xulosalar va amaliy rasmlar, nazorat savollari ro'yxati, hisoblash misollari va individual topshiriqlar mavjud. Har bir talaba uchun tuzatish vazifalari nafaqat modellashtirilgan va kiritilgan o'lchov xatolarida, balki o'lchov qiymatlarining o'zida ham farqlanadi.

Tarmoqni tuzatishni tekislash bo'yicha vazifalarda tarmoqning geometriyasi ham individualdir. Vazifalar orasida ikkita aniq nuqtaga ega chiziqli burchakli tarmoqni tuzatish vazifasi paydo bo'ldi. Etakchi o'qituvchining ixtiyoriga ko'ra, bu vazifa har qanday o'lchovlarni olib tashlash orqali teskari bitta, ko'p, birlashtirilgan seriflarga aylantirilishi mumkin. Oxirgi bo'lim aniqlik oldindan hisoblash va geodezik tarmoqlarni loyihalashga bag'ishlangan. Oldindan hisoblashning qat'iy va taxminiy usullari ko'rib chiqiladi. Standart og'ish va standart xato tushunchalari o'rtasidagi ularning oldindan hisoblangan qiymatlaridan farqiga urg'u beriladi

Taqrizchilar: O.R.Allanazarov – TDTU, "Marksheyderlik ishi va geodeziya" kafedrasi dotsenti, PhD (turdosh OTM).

N.Yuldoshev.-TIQXMMI MTU "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti, fizika-matematika nomzodi.

A.N.Inamov.-TIQXMMI MTU "Geodeziya va geoinformatika" kafedrasi dotsenti, texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori.

KIRISH

Kundalik hayotiy masalalarni yechishda bajariladigan geodezik ishlar bilan bir qatorda yer shakli va uning o’lchamlari haqida ham ilmiy fikrlar paydo bo’la boshladi. Dastlabki, yerni shar shaklida degan shaxs miloddan V asr ilgari yashagan grek fayla sufi Aristotel (384-322) bo’lgan. Yerning o’lchamlarini birinchi bo’lib Eratosfen (276-194) hisoblagan. Nyuton yer shar shaklida emas, balki sferoid shaklida ekanligini nazariy jihatdan isbotlagan. Bu xulosa to’g‘ri bo’lib chiqdi va keyinroq yerning o’lchamlari aniqlandi. Bu borada Xorazmlik ensiklopedist olim Abu Rayxon Beruniyning (973-1048) ham hissasi katta. U o’zining 40 dan ortiq asarlarida geodeziya fani tarixiga oid boy va qimmatli ma’lumotlar bergan.

O’lchashlar yer yuzasini kartografik va geodezik o’rganish maqsadida olib boriladigan barcha ishlaming asosiy mazmunini tashkil qiladi. Fan va texnika, xususan, geodeziya sohasining rivojlanishi bilan olchashlaming aniqligi ortib, ulami matematik qayta ishlash usullari takomillashtirildi. Geodeziya, amaliy astronomiya, gravimetriya, fotogrammetriya, kartografiya, kosmik geodeziya va boshqa fanlarda Yerni o’rganish bilan bogiiq usullar yaratilmoqda va zamonaviy oichov asboblari ishlab chiqilmoqda.Har qanday miqdomi oichash ikki nuqtayi nazardan ko’rib chiqiladi: oichangan miqdoming son qiymatini ifodalovchi miqdor va oichash aniqligini tavsiflovchi sifat.

Geodezik ishlarda o’lchashlar katta o’rin to’tadi. O’lchashlar natijasi esa ma’lum sabablarga ko’ra xatolik bilan olinadi. Xatoliklarning kelib chiqish, taqsimlanish qonuniyatlarini o’rganish, o’lchash natijalari xatosining yo’l ko’yilgan chekdan oshgan va oshmaganligini aniqlash va o’lchashlarni matematik qayta ishlash natijasida aniqlanayotgan qiymatni shu xaqiqiy miqdorini aniqlashni uchun juda zarur.

Hozirgi paytda xatoliklar nazariyasini o’rganish va tadqiq qilish extimollar nazariyasi va matematik statistikaning zamonaviy ilmiy yutuqlaridan foydalangan xolda olib borish kerakligini ko’zda tutmoqda. Shuning uchun fanning birinchi qismi extimollar nazariyasi va matematik statistika bo’limlarini o’rganishdan boshlanadi.

Tajribadan ma’lumki, eng ehtiyotkorlik va aniqlik bilan oichamlaridan har qanday doimiy qiymatning ko’p marta (takroriy) o’lchashlari har doim bir oz boshqacha natijalar beradi va matematik jihatdan o’h liash natijalari nomuvofiqliklami hosil qiladi. Qo’pol xatolar bo’limagan tag’dirda ham, takroriy o’lichashlar natijalari har doim ma'lum chegalardu farq qilishi, har qanday o’lchashlar doimo muqarrar bo’lishi, o’lchashlar natijalaridagi og‘ishlar bolishi bilan izohlanadi.

O’lchash usullari va natijalarini matematik qayta ishlashda hamda geodezik tayanch tarmoqlarini barpo etish va rejalash ishlarini bajarishda turli xil asbob-uskunalar qo’llaniladi. Hozirgi kunda injener geodezik ishlarni bajarish uchun zamonaviy hisoblash texnikasi, lazer qurilmalari, elektron asboblar, hamda GRS- tizimlari keng qo’llanilmoqda.

O’lchashlarning aniqligi va ulami matematik qayta ishlash masalasida bitta muhim holatga e'tibor qaratish lozim. Ammo o’lchash natijalarini sifatini raqamli baholash usullariga o’tayotganda, shuni aytish kichikroq xatolarini o’z ichiga olgan natijalar iste'molchi uchun ko’proq ma'qul keladi. Geodezik o’lchashlarni matematik qayta ishlash nazariyasi, shuningdek, geodezik o’lchashlaming sifatini, muqarrar kichik xatolarning paydo bolishi va ishlash qonuniyatlarini o’rganish, o’lchashlaming talab qilinadigan aniqligini baholash va hisoblash qoidalarini, shuningdek usullarini ishlab chiqish bilan shugiillanadi hamda hisoblash mehnatining tejamkor narxida eng yaxshi yakuniy natijalami olish imkonini beruvchi hisob-kitob usullari.

Nazariy va amaiiy astronomiya va geodeziya vazifaiari oichov natijalarini matematik qayta ishlashning ilmiy asoslangan usulini yaratishni qat’iy talab qildi. Ilrn-fan va amaliyot talablariga javob beradigan olimiar bir qator likrlarni ilgari surdiiar oichov natijalarirti matematik qayta ishlash bo’yicha takiiflar berdiiar.

Fanni o’qitishdan maqsad talabalarda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlarini o’rganish va ulami geodezik oichash natijalari sifatini baholashda qoilash, geodezik oichashlar aniqligini oldindan baholash, oichashni sifatli va kam xarajat bilan bajarishni mos bilirn va malakasini shakllantirishdir.

Fanning vazifasi – o’lchash xatoliklari nazariyasi va eng kichik kvadratlar usullarini oichashlar aniqligini rejalashtirish va baholashda qoilash oichanayotgan kattaliklaming eng islionchli qiymatini tadqiqot maqsadlarida foydalanishning samaradorligini oshirish yoilarini aniqlash.

Shuning uchun ushbu fan geodeziya, geoinformatika, kartografiya,va kadastr sohasida ilmiy rivojlanishni o’rganishdan, ilm-fan yutuqlari va ilg‘or tajribalarga asoslanib, nazariy va uslubiy asoslarini ishlab chiqish sohasida asosiy o’rin kasb etadi. “Geodezik o’lchash natijalarini matematik qayta ishlash” darsligi asosiy umumkasbiy fan hisoblanib uni o’rganish uchun geodeziya, fotogrammetriya, topografik chizmachilik, davlat kadastrlari, yer kadastri va monitoringi, geoaxborot tizimi hamda texnologiyalari, oliy, sferik, astronomik geodeziya fanlaridan yetarli bilim va ko’nikmalarga ega boiishlikni talab etadi.

O’quv qullanmani yaratishda o’z yordami va foydali maslahatlari uchun “Toshkent Irrigatsiya va qishloq xo’jaligini mexanizatsiyalash muhandislari instituti” milliy tadqiqot universiteti “Geodeziya va Geoinformatika” kafedrasi jamoalariga muallif o’z minnatdorchiligini bildiradi.

1-Bob Ehtimollar nazariyasi asoslari

§1.1. Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari. Klassik ehtimollik formulasi

Ko’chada biz ko’pincha tanish va notanish odamlarni uchratamiz. Tasodifiy mashina o’tib ketdi, kimdir avtobusni o’tkazib yubordi va hokazo. Bu tasodif dunyosida hech qanday muntazamlik yo’qdek tuyuladi, lekin ehtimollik nazariyasi ularni topadi.

Ehtimollar nazariyasi - tasodifiy hodisalarni o’rganadigan va ularning ommaviy ko’rinishlarida qonuniyatlarini o’rnatadigan matematik fan.

Ehtimollar nazariyasida tasodifiy hodisaning ma'lum sharoitlarda kuzatilishini tajriba, tajriba yoki sinov deb atash qabul qilinadi va bu tajribaning natijasi hodisa yoki natijadir. Voqealar odatda lotin alifbosining A, B, C, D va hokazo bosh harflari bilan belgilanadi. yoki A_1, A_2, ..., An indeksli harflar , masalan, tanga otishda (otish - bu tajriba), hodisalar sodir bo’lishi mumkin: A - "burgut" ning paydo bo’lishi (1.1-rasm), B - "dumlar" paydo bo’lishi (1.2-rasm).

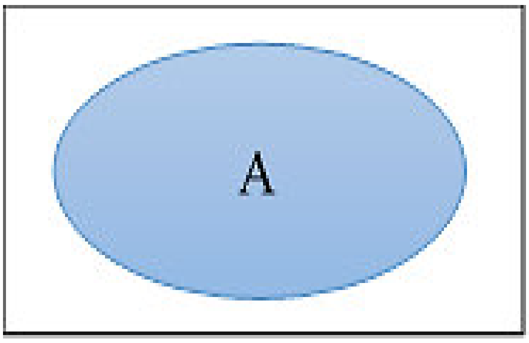
Hodisalar to’plam nazariyasi asosida talqin qilinishi mumkin. Masalan, agar tanga ikki marta tashlansa, u holda quyidagi hodisalar yuz berishi mumkin: $S_1 = \{A_1, A_2\}$; $C_2 = \{A_1, B_2\}$; $C_3 = \{B_1, A_2\}$; $C_4 =\{ B_1, B_2\}$. Bu yerda Ai hodisasi i-tanga uloqtirishda “burgut”ning paydo bo‘lishi; Bi - i-tanga otishda "dumlar" paydo bo’lishi; Ci - bir vaqtning o’zida ikkita hodisa paydo bo’lishidan iborat bo’lgan voqea: ikkita "burgut" yoki "bosh" va "dumlar" yoki "dumlar" va "boshlar" yoki ikkita "dum " . Bunda Ai va Bi hodisalari boshqa hodisalar birikmasidan foydalanib tasvirlab bo’lmaydigan hodisalardir. Bunday hodisalar oddiy va (elementar va) deb ataladi. C_i hodisalari boshqa hodisalarning kombinatsiyasi sifatida ifodalanishi mumkin bo’lgan hodisalardir. C_i hodisalari bir nechta hodisalarni o’z ichiga olgan voqealar to’plamidan iborat.

Bunday hodisalar murakkab deb ataladi. Keling, yana bir misolni ko’rib chiqaylik. Zar tashlanadi. Hodisalar hisobga olinadi Ai - tushirilgan ballar soni: A_1 - yo’qotish 1; A_2 - tomchi 2; A_3 - tomchi 3; A_4 - 4 tomchi; A_5 - rulon 5; A_6 - tomchi 6. Bu erda A_i hodisalari oddiy. Lekin $C = \{A_2, A_4, A_6\}$ bo’lgani uchun juft sonli nuqtalarning paydo bo’lishi bo’lgan S hodisasi murakkab.

Hodisalar grafik tarzda ayrim sohalar ko’rinishida ifodalanishi mumkin. Masalan, barcha mumkin bo’lgan hodisalar to’plami to’rtburchaklar mintaqasiga mos keladi (1.3-rasm), A hodisasi esa ellipsga mos keladi (ular aytadilar: agar A hodisasi sodir bo’lgan bo’lsa, biz mintaqaga kirdik. ellipsdan). Hodisalarni boshqa parametrlarga ko’ra tasniflash mumkin. Farqlash

Rasm. 1.1. "Burgut" ning paydo bo’lishi - voqea A

Rasm. 1.2. "Quyruq" ning paydo bo’lishi - B hodisasi



Rasm. 1.3. Hodisaning grafik tasviri

bog'liq va mustaqil hodisalar. Hodisalar mustaqil deb ataladi, agar ulardan birining paydo bo’lishi ikkinchisining paydo bo’lish imkoniyatini o’zgartirmasa (ya'ni, tajriba o’tkazish shartlarini o’zgartirmasa, natijasi boshqa hodisaning paydo bo’lishi bo’ladi) va shu bilan sodir bo’ladi. boshqasining ko’rinishiga ta'sir qilmaydi.

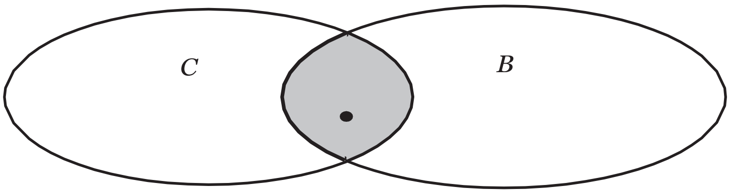
Masalan, agar siz tashqariga chiqsangiz (A hodisasi), bu ma'lum bir vaqtda avtobus o’z to’xtash joyiga kelishiga ta'sir qilmaydi (B hodisasi). Agar siz ko’chaga chiqib, ushbu avtobusning harakatiga xalaqit bersangiz va uni kechiktirsangiz, avtobus boshqa vaqtda to’xtash joyiga keladi. Bunday vaziyatda A hodisasining yuzaga kelishi B hodisasining yuzaga kelishiga ta'sir qiladi (avtobus bekatga boshqa vaqtda keladi). Bunday hodisalar bog'liq deb ataladi.

Yana bir misol. D va E hodisalarini ko’rib chiqing: poezd stantsiyaga keldi (D hodisasi); o’qituvchi sinfga kirdi (E hodisasi). Voqealarning mustaqil ekanligi aniq. Ammo, agar o’qituvchi ushbu poezdda ishlash uchun kelgani ma'lum bo’lsa, unda voqealar bog'liq bo’ladi. Hodisalar qo’shma va mos kelmasligi mumkin. Qo’shma hodisalar - bu kesishish maydoniga ega bo'lgan hodisalar (birgalikda sodir bo'lishi mumkin). Masalan, agar B hodisasi = {A1, A2, A3} (A1, A2, A3 hodisalar to'plamidan iborat bo'lsa) va C = {A2, A3, A4} hodisasi bo'lsa, u holda ular kesishish maydoni D = {A2 bo'ladi. , A3}. Bu shuni anglatadiki, agar A2 yoki A3 hodisasi sodir bo'lgan bo'lsa, u holda B hodisasi va C hodisasi sodir bo'lgan (1.4-rasm).

Misol. Kartalar to'plamidan tasodifiy ravishda bitta kartani oling. B hodisalarini ko'rib chiqing - ace ko'rinishi va C - olmos kostyumining ko'rinishi. Bunday sharoitda ular birgalikda paydo bo'lishi mumkin, agar chizilgan karta olmos ace bo'lsa . Bu hodisa B va C hodisalarining kesishish maydonidir. Shuning uchun B va C hodisalari qo'shma .

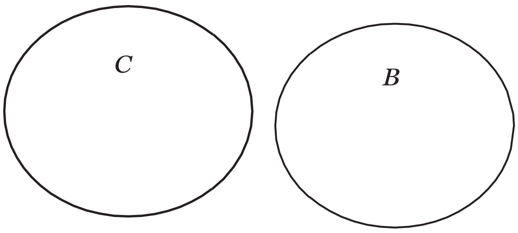
Mos kelmaydigan hodisalar - kesishish maydoniga ega bo'lmagan hodisalar (1.5-rasm). Ular birgalikda paydo bo'lolmaydi. Boshqacha qilib aytganda, ularning kesishish maydoni bo'sh to'plamdir.

Misol. Kartalar to'plamidan tasodifiy ravishda bitta kartani oling. B hodisasi - olmos kostyumining ko'rinishi va C hodisasi - yurak hisoblanadi. Ko'rinib turibdiki, bunday sharoitlarda, faqat bitta karta tortilganda, B va C hodisalari kesishish maydoniga ega emas. Shuning uchun bu hodisalar bir-biriga mos kelmaydi.



D

Rasm. 1.4. Qo'shma tadbirlar



Rasm. 1.5. Mos kelmaydigan hodisalar

Voqealar teng darajada bo'lishi mumkin yoki bo'lmasligi mumkin. Muayyan sharoitlarda sodir bo'lish ehtimoli bir xil bo'lgan hodisalarning ehtimoli bir xil. Misol uchun, oldingi misol sharoitida, A va B hodisalarining paydo bo'lishi, olmos yoki yurak kartasini olish uchun bir xil imkoniyatga ega (paketda har bir kostyumning 9 ta kartasi mavjud). Ammo, xuddi shu sharoitda, C hodisasi - asning paydo bo’lishi (faqat to’rtta bunday kartalar mavjud) va D hodisasi - olmos kostyumining kartasining paydo bo’lishi turli xil imkoniyatlarga ega. Bunday hodisalar teng emas .

Misol. Tanga besh marta tashlansin. B hodisasi hisobga olinadi - gerbning kamida to’rt marta paydo bo’lishi:

B					*4*	*5*

Keyin B ning teskari hodisasi gerbning uch martadan ko’p bo’lmagan ko’rinishidan iborat voqea bo’ladi:

$\overline{\text{B}}$	*0*	*1*	*2*	*3*		

E'tibor bering, B va B hodisalari kesishish maydoniga ega emas va to’liq guruhni tashkil qiladi, bu qarama-qarshi hodisalarda bo’lishi kerak.

Ehtimollar nazariyasida holatlar sxemasi tushunchasi kiritiladi. Bu to’liq guruhni tashkil etuvchi teng darajada mumkin bo’lgan, mos kelmaydigan hodisalar to’plami.

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bu qandaydir hodisaning yuzaga kelish ehtimolidir. Bu hodisaning yuzaga kelish ehtimoli darajasini ob'ektiv aniqlash imkonini beruvchi raqamli funktsiya. Odatda qandaydir A hodisaning yuzaga kelish ehtimoli P(A) bilan belgilanadi. Ishlar sxemasi uchun uni klassik ehtimollik formulasi bilan aniqlash mumkin

$$\text{P (A)} = \frac{\text{M}}{N}\ ; \qquad (1.1)$$

bu erda N - barcha mumkin bo’lgan natijalar soni; M - A hodisasiga kiritilgan natijalar soni.

Shunday qilib, oldingi sport loto misolida N - barcha mumkin bo’lgan kombinatsiyalar soni, shu jumladan mumkin bo’lgan 36 tadan istalgan beshta raqam; M - A hodisasiga kiritilgan natijalar soni. Demak, agar sport loto misolida A hodisasi sifatida g'alabani beshdan uchta raqamni taxmin qilishga to’g'ri keladigan deb hisoblasak, M - beshta raqam kombinatsiyasi soni , ulardan uchtasi o’yin davomida tanlangan beshta raqamga kiritilgan . Qolgan ikkitasi bu beshlikka kiritilmagan (qur'a paytida ko’rinmagan raqamlar).

Misol. "Urn" tarkibida ikkita oq va uchta qora shar bo'lsin. Bitta to'p tasodifiy chiziladi. Oq sharning paydo bo'lish ehtimolini aniqlang. Bu erda N - "urn"dagi to'plarning umumiy soniga to'g'ri keladi. Ulardan har biri paydo bo'lishi mumkin N = 5. M - oq sharlar soni. Aynan shu raqam A hodisasining yuzaga kelishiga yordam beradigan imkoniyatlar sonini aniqlaydi

$$\mathrm{P}\ (\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{M}}{N} = \frac{2}{5}.$$

Misol. Ikki xonali raqam ishlab chiqilgan. Ikki urinishda bu raqamni taxmin qilish ehtimoli qanday? Bu erda N - barcha ikki xonali sonlar soni. Bu 10 dan 99 gacha bo'lgan raqamlar soniga teng. 90 ta bunday raqamlar mavjud M raqami mo'ljallangan raqamni taxmin qilish urinishlari soniga mos keladi (M = 2), ya'ni. P (A) = M / N = 2/90.

Misol. Ikkita zar tashlanadi. Tushgan yuzlardagi nuqtalar yig'indisi 8 ga teng bo'lish ehtimolini aniqlang (A hodisa). Keling, mumkin bo'lgan kombinatsiyalarning umumiy sonini aniqlaylik.

Birinchi o'limda 1 bo'lsin. Ikkinchisida 1 dan 6 gacha bo'lgan har qanday raqam bo'lishi mumkin, ya'ni. 6 ta kombinatsiya. Agar birinchi qolip 2 ta aylansa, yana 6 ta kombinatsiya mumkin. Ushbu mulohazalarni davom ettirsak, biz 36 ta mumkin bo'lgan N = 36 kombinatsiyani olamiz.

Ballar yig'indisi 8 ga teng bo'lgan kombinatsiyalar sonini hisoblaymiz. Bunday kombinatsiyalar soni 5 ta:

$$\left.\begin{array}{r} 2+6=8 \\ 3+5=8 \\ 4+4=8 \\ 5+3=8 \\ 6+2=8 \end{array}\right\} \quad \mathrm{M}=5;\ \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{M}}{N} = \frac{5}{36}.$$

Ta'rif va berilgan misollardan ehtimollikning quyidagi xossalari kelib chiqadi: ehtimollik 0 dan 1 gacha bo'lgan qiymatlarni qabul qilishi mumkin, ya'ni. 0 P(A) 1.\

Agar ehtimollik nolga teng bo'lsa, bu hodisa sodir bo'lish ehtimoli yo'qligini anglatadi. Bunday holda, hodisa mumkin emasligi aytiladi. Odatda, imkonsiz hodisa U harfi bilan belgilanadi. Agar ehtimollik 1 bo'lsa, ya'ni. M = N, keyin A hodisasi albatta paydo bo'ladi. Bunday hodisa aniq deb ataladi. U V harfi bilan belgilanadi.

Ko’pincha M va N raqamlarini aniqlash uchun kombinatorikadan ba'zi tushunchalarni bilish talab qilinadi. Keling, ulardan eng zarurini ko’rib chiqaylik. Bular almashtirishlar, kombinatsiyalar va joylashtirish tushunchalari. Ushbu tushunchalarni uchta elementdan (a, b, c) tashkil topgan to’plam asosida ko’rib chiqing.

Permutatsiyalar bu elementlarning kombinatsiyasi bo’lib, faqat har bir kombinatsiya ichidagi elementlarning joylashishi bilan farqlanadi. Bunday holda, bu quyidagi kombinatsiyalar bo’ladi: (a, b, c); (a, c, b); (b, a, c); (b, c, a); (kabina); (c, b, a). Hammasi bo’lib oltita kombinatsiya mavjud. Umumiy holatda n ta elementdan iborat to’plam mavjud. Bu holda almashtirishlar soni Rn = n formula bilan aniqlanadi! Shunday qilib, bizning holatimizga mos keladigan n = 3 uchun kombinatsiyalar soni 3 ga teng bo’ladi! = 6.

Misol. K, A , P, T, A harflari beshta kartochkaga yozilsin.Kartochkalar sochilib, bir vaqtning o’zida tasodifiy ravishda chiqariladi. Kartochkalarni paydo bo’ladigan tartibda qo’shish orqali biz KARTA so’zini olish ehtimoli qanday ? Bu erda mumkin bo’lgan kombinatsiyalarning umumiy soni N = n! = 5! = 120. So’z kartasini tashkil etuvchi birikmalar soni 2 ta, chunki Kartochkalarda ikkita A harfi yozilgan va ularni qayta tartibga solish mumkin. Shuning uchun, MAP so’zini tashkil etuvchi ushbu besh harfning ikkita kombinatsiyasi mumkin. Shunday qilib, P (A) = 2/120 = 1/60.

Kombinatsiyalar barcha n ta elementning kombinatsiyasi, har bir guruhdagi k. Guruh ichidagi elementlarning joylashishi befarq. Agar elementlarni a, b, c, har biri ikkita elementdan iborat guruhlarga birlashtirsak, quyidagi guruhlarni olamiz: (a, b); (a, c); (b, c), ya'ni. bu sharoitda uchta kombinatsiya mumkin. Umuman olganda, agar siz har bir guruhda n ta elementdan iborat guruhlarni tuzsangiz, u holda kombinatsiyalar soni formula bo’yicha hisoblanadi.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad Bizning\ holatda, \quad C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$$

Misol. *Aytaylik, urnada ikkita oq shar va uchta qora shar bor. Idishdan tasodifiy ikkita to’p olinadi. Ikkalasining ham qora bo’lish ehtimolini toping. Shunday qilib, urnada 5 ta to’p bor. Ular ikkitasini chiqaradilar, ya'ni. ikkita to’pning kombinatsiyasini ko’rib chiqing. N=5!/2!(5-2)!=120/24 =5 ta mumkin bo‘lgan kombinatsiyalar bo‘ladi. M* *soni uchta (mavjud qora to'plar) ikkita kombinatsiyalar soniga teng, ya'ni. M=3!/2!(3-2)!=6/2=3. Kerakli ehtimollik P(A)=3/5..*

Joylashuvlar - bu barcha n ta elementning kombinatsiyasi, har bir guruhdagi k, guruhdagi elementning o'rnini o'zgartirish yangi guruhning shakllanishiga olib keladi.

Ikki elementdan iborat guruhlarni tashkil etuvchi bir xil uchta element (a, b, c) uchun biz quyidagi kombinatsiyalarni olamiz:

(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b).

Hammasi bo'lib oltita kombinatsiya mavjud. E'tibor bering, guruh ichida elementlar takrorlanmaydi. Umumiy holda, bunday birikmalar soni Ak formulasi bilan hisoblanadi

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.\ Bizning\ holatda \qquad A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Misol. Abonent oxirgi uchta raqamni unutgan. Faqat ular boshqacha ekanligini unutmang. Ularni tasodifiy terish orqali u to'g'ri raqamni terishi ehtimoli qanday ? Bu erda shuni yodda tutish kerakki, abonent raqamlarni (ularning o'ntasi bor) uchta elementdan iborat guruhlarga birlashtiradi. Bundan tashqari, elementlar guruh ichida takrorlanmaydi. Abonent bu raqamlar boshqacha ekanligini eslaydi, shuning uchun.

$$N = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \times 9 \times 10 = 720$$

M = 1, chunki faqat bitta urinish va faqat bitta to'g'ri raqam mavjud, shuning uchun P (A) = l/720.

Takrorlashlar bilan joylashtirishlar, shuningdek, guruhdagi elementlarni takrorlash mumkin bo'lganda, har bir guruhdagi barcha n ta elementning kombinatsiyasi deb ataladi.

Ikki elementdan iborat guruhlarni tashkil etuvchi bir xil uchta element uchun biz quyidagi kombinatsiyalarni olamiz:

(a, b), (b, a), (a, a), (a, c), (c, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c),

Hammasi bo'lib to'qqizta kombinatsiya mavjud. Umumiy holatda bunday birikmalar soni $\overline{A}_n^k = n^k$ formulasi bilan hisoblanadi . Guruhda ikkitadan uchta elementdan iborat guruh uchun bunday kombinatsiyalar soni $\overline{A}_n^k = n^k$=3^2=9

Nazorat savollari.

1. *Tasodifiy hodisani.*
2. *Ehtimollar nazariyasi nimani o’rganadi?*
3. *Sizni o’rab turgan tasodifiy hodisalarga misollar keltiring?*
4. *Sizningcha, tasodifiy bo’lmagan hodisalarga misollar keltiring.*
5. *Voqea nima?*
6. *Bog'liq va mustaqil hodisalarni aniqlang.*
7. *Bir xil ehtimoliy hodisalarni aniqlang.*
8. *Hodisalarning to’liq guruhini va vaziyat sxemasini aniqlang.*
9. *Qarama-qarshi hodisalarni aniqlang.*
10. *Ehtimolning klassik ta'rifi formulasini yozing va u qanday elementlarni o’z ichiga olishini tushuntiring.*
11. *Ehtimollik nima?*
12. *Ehtimollikning xususiyatlari qanday?*
13. *Mumkin bo’lmagan hodisani aniqlang.*
14. *To’plam elementlarining qanday birikmalariga almashtirishlar deyiladi?*
15. *To’plam elementlarining qanday birikmalari kombinatsiyalar deyiladi?*
16. *To’plam elementlarining qanday birikmalariga joylashtirish deyiladi?*

YECHIMLAR BILAN BOG'LIQ MUAMMOLAR.

Vazifa 1. Ikki tanga tashlandi. Ikki bosh paydo bo’lish ehtimolini aniqlang.

Yechim. Bunday holda, ikkita tanga bo’yicha natijalarning quyidagi kombinatsiyasi mumkin: "burgut" - "burgut", "burgut" - "dumlar", "dumlar" - "boshlar", "dumlar" - "dumlar". Faqat 4 ta kombinatsiya. N=4. Kerakli A hodisasi bitta "burgut" - "burgut" kombinatsiyasiga mos keladi. M =1. Shunday qilib, P (A) \=1/4 =0,25.

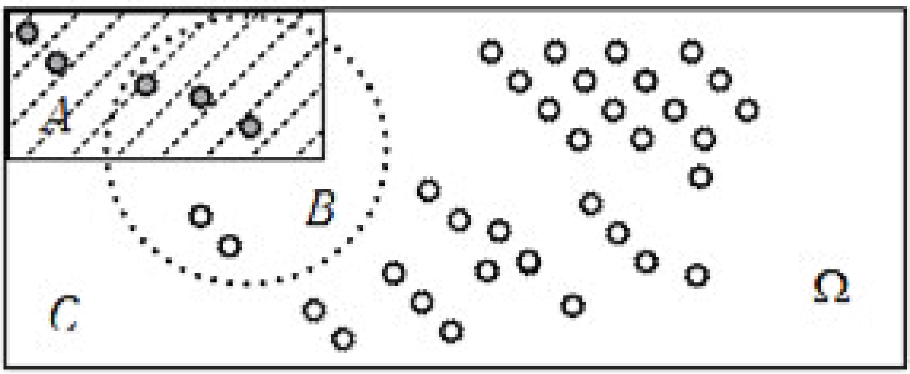
Vazifa 2. Uchta o’lchov olinadi (masalan, burchak). Bunday holda, xatolar paydo bo’lishi mumkin: ijobiy (+) yoki salbiy (–). Barcha uch o’lchamda salbiy xatolar yuzaga kelishi ehtimoli qanday?

Yechim. Uchta o’lchov bilan quyidagi ijobiy va salbiy xatolar kombinatsiyasi mumkin: (– – –), (+ – –), (– + –), (– – +), (+ + –), (+ – +) , (– + +), (+ + +). Bunday kombinatsiyalarning umumiy soni N = 8. Ulardan bizni qiziqtirgan kombinatsiyalarni tanlashimiz kerak, ularning soni M ga teng. Bunday kombinatsiya faqat bitta (– – –) mavjud. M = 1. Kerakli ehtimollik: P = M/N = 1/8.

Vazifa 6. 36 tadan 5 tasi sport lottosini o'ynaganda bitta chiptada aynan uchta raqamni taxmin qilish ehtimoli qanday?

Yechim. 36 ta sondan iborat Ω to'plamni to'g'ri to'rtburchak shaklida tasvirlaymiz (1.6-rasm). Undagi 5 ta raqamdan iborat A kichik to'plamini (kichik, soyali to'rtburchaklar shaklida) ajratamiz, ular aylanmada tushib qolgan va belgi bilan ko'rsatilgan.

Ellips chiptada chizilgan B raqamlari to'plamini bildiradi. Belgilar kichik to'plamidagi raqamlarni bildiradi C - chizish paytida tushmagan raqamlar. Hammasi bo'lib 36 ta raqam mavjud.Ulardan 5 tasi A kichik to'plamga kiritilgan. Bu holda A va C kichik to'plam hodisalari umumiy elementlarga ega emas (kesishmaydi). Demak, C =Ω – A. Shunday qilib, C kichik to'plam 31 ta sondan iborat. Biz R(A) = M/N klassik ehtimollik formulasidan foydalanamiz. N - 36 dan 5 gacha bo'lgan kombinatsiyalar soni: $N = C_{36}^5$; M - A kichik to'plamidan har qanday uchta raqam va C kichik to'plamdan ikkita raqamni o'z ichiga olgan kombinatsiyalar soni. M ni hisoblash uchun A kichik to'plam raqamlaridan kombinatsiyalar sonini, har biri 3 ta elementni va sonini aniqlash kerak. C kichik to'plamidan kombinatsiyalar, har biri 2 ta element. Bunday kombinatsiyalar soni kombinatsiyalar soni bilan belgilanadi: C_5^3 va C_{31}^2 . Ammo A kichik to'plamdagi har uchta raqam C kichik to'plamdagi istalgan ikkita raqam bilan birlashtirilishi mumkin, shuning uchun M soniga mos keladigan kombinatsiyalarning umumiy soni $M = C_5^3 C_{31}^2$ mahsulotiga teng, demak ,



Rasm. 1.6. Muammo shartlarining geometrik tasviri 6

$$P(A)\frac{C_5^3 C_{31}^2}{C_{36}^5}=\frac{\frac{5!}{3!\,(5-3)!}\cdot\frac{31!}{2!\,(31-2)!}}{\frac{36!}{5!\,(36-5)!}}=\frac{\frac{5!}{3!\,2!}\cdot\frac{31!}{2!\,29!}}{\frac{36!}{5!\,31!}}$$

$$=\frac{10\,\frac{31\cdot 30}{2}}{\frac{32\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{5!}}=\frac{10\cdot 31\cdot 15}{\frac{32\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}}=0{,}012$$

Vazifa 7. Harflar alohida kartalarga yoziladi: GEOID. Kartalar aralashtiriladi va keyin birma-bir chiqariladi. Agar kartalar paydo bo’lish tartibida yig'ilsa, GEOID so’zining hosil bo’lish ehtimoli qanday?

Yechim. Beshta element (kartalar) mavjud. Agar barcha elementlar tashqi ko’rinish tartibida tasodifiy tanlangan bo’lsa, unda bunday kombinatsiyalar almashtirish hisoblanadi. Kombinatsiyalarning umumiy soni N = n! = 5! = 120. GEOID so’zini tashkil etuvchi birikmalar soni bittaga teng (M = 1). P (A) = M / N = 1/120.

Masala 8. 7-masala sharoitida tasodifiy uchta kartochkani tanlab, ularni ko’rinish tartibida joylashtirish orqali GID so’zining hosil bo’lish ehtimolini aniqlang?

Yechim. Beshta element (kartalar) mavjud. Agar ba'zi elementlar tashqi ko’rinish tartibida tasodifiy tanlangan bo’lsa, unda bunday kombinatsiyalar joylashtirishdir. Kombinatsiyalarning umumiy soni N = n!/ (n – k)! == 5!/ (5 - 3)! = 60. GID so’zini tashkil etuvchi birikmalar soni bittaga teng (M = 1). P (A)=M/N=1/60.

§1.2. QO’SHISH VA KO’PAYTIRISH TEOREMALARI

Klassik ehtimollik formulasi faqat holatlar sxemasi sharoitida ishlaydi. Bundan tashqari, ehtimolliklarni to’g'ridan-to’g'ri hisoblash ko’pincha vaqt talab qiladigan formulalar bilan bog'liq. Bunday sharoitda ehtimollar nazariyasining bir qator teoremalari, xususan, biz ushbu bo’limda ko’rib chiqiladigan qo’shish va ko’paytirish teoremalari yordamga keladi. Lekin birinchi navbatda, biz quyidagi ta'riflarda kerak bo’ladigan bir qator ta'riflarni beramiz.

Ai hodisalaridan kamida bittasi paydo bo’lishidan iborat , ya'ni. B hodisasi shundan iboratki , A_1 yoki A_2 hodisasi yoki, ..., A_n yoki qo’shma hodisa paydo bo’ladi. voqea, iborat dan har qanday kombinatsiyalar voqealar A_i, bular. $A_1 A_2$, yoki $A_1 A_3$ yoki, $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$.

Analitik tarzda, B hodisasi yig'indi sifatida ham yozilishi mumkin

$$B = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

yoki, foydalanish tushunchalar to'plamlar

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

bu erda ⋃ - birlashma operatsiyasining belgisi.

B hodisasiga geometrik talqin berilishi mumkin. Ushbu talqin bilan birinchi ellipsda ma'lum bir nuqtaga urish hodisaning ko'rinishini bildiradi A_1, ikkinchi ellipsda - A_2 (1.7-rasm, *a*). Ushbu ellipslarning har qandayiga tegish *B* hodisasining sodir bo'lishini anglatadi (1.7-rasmdagi butun kulrang maydon, *b*).

A_1 va A_2 hodisalarining ehtimolliklariga teng bo'ladigan tarzda tanlanadi.

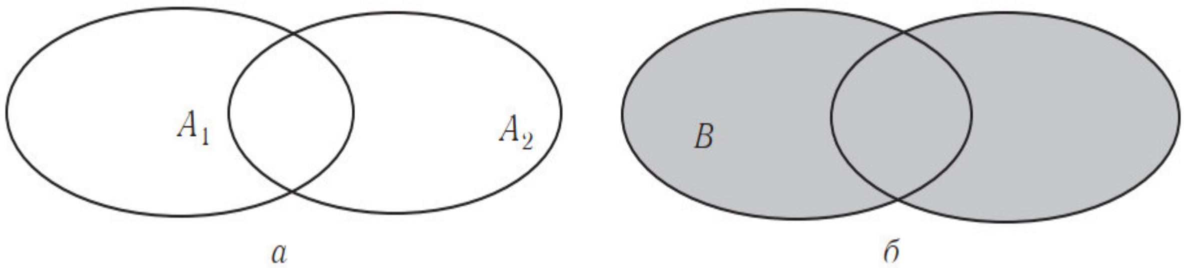
Misol. *Nishonga 3 ta o'q uziladi. A_i -hodisalari hisobga olinadi i-o'q paytida nishonga tegish. Ai hodisalari orqali nishonga kamida bir marta urishdan iborat bo'lgan B hodisasini ifodalash talab qilinadi. Ta'rifga ko'ra, B hodisasini A_i hodisalarining yig'indisi (birlashmasi) deb aytishimiz mumkin, ya'ni. $B = A_1 + A_2 + A_3$ yoki $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.*

Ikki yoki undan ortiq hodisaning mahsuloti (kesishmasi) A_i bo'g'indan iborat murakkab hodisa *C* deyiladi ko'rinish ma'lumotlar voqealar:

$$C = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

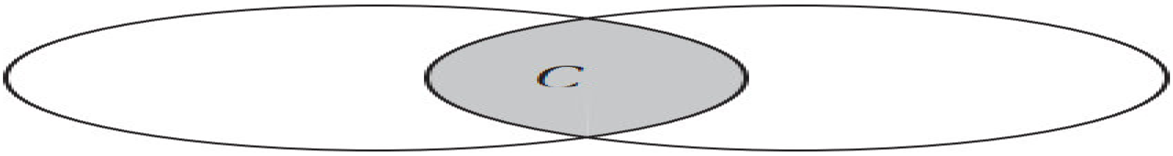
A_i yoki, tushunchasidan foydalanish to'plamlar,

$$C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$



Rasm. 1.7. Hududlar voqealar A_1 va A_2 (*a*) Va mintaqa voqealar *B* (*b*)

Ai hodisalarining birgalikda sodir bo'lishidan iborat hodisadir . Geometrik jihatdan ikkita hodisa uchun buni quyidagicha ifodalash mumkin. (1.8-rasm). Bu erda kulrang rang bilan belgilangan ikkita hodisaning kesishish hududi A1 va A2 mahsulotiga mos keladi, ya'ni. voqea C



Rasm. *1.8. Ikki hodisaning hosilasi (kesishmasi)ning geometrik talqini.*

Misol. Nishonga uchta o'q uzilsin. Voqealarni ko'rib chiqing

Ai - i-o'q bilan nishonga tegish. Nishonga aniq ikki marta urishdan iborat bo'lgan D murakkab hodisani Ai hodisalarining yig'indisi va mahsuloti shaklida ifodalang . Uchta zarba bilan ikkita zarba quyidagi kombinatsiyalarda bo'lishi mumkin:

birinchi va ikkinchi zarbalarda urish, uchinchisida o'tkazib yuborish ;

birinchi va uchinchi zarbada, ikkinchi o'tkazib yuborishda;

birinchi o'tkazib yuborilgan ikkinchi va uchinchi zarbada.

A_i va $\bar{A}_i$ ning turli kombinatsiyalarining mahsuloti sifatida ifodalanishi mumkin. Shunday qilib, birinchi kombinatsiya $C_1 = A_1 \cdot A_2\,\bar{A}_3$ hodisasi, ikkinchisi - $C_2 = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$, uchinchisi - $C_2 = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$,

D hodisasi sodir bo'ladi, agar S_i hodisalaridan kamida bittasi sodir bo'lsa, ya'ni. yoki birinchi kombinatsiya sodir bo'ladi, yoki ikkinchi yoki uchinchi. Unday bo `lsa

$$D = C_1 + C_2 + C_3 = A_1 \cdot A_2\,\bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3, + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3.$$

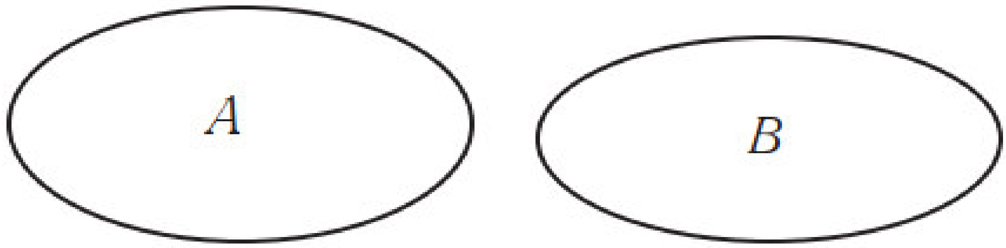
Hodisalar yig'indisi va mahsuloti ta'riflarini bilib, ehtimollar nazariyasi teoremalarini ko'rib chiqishimiz mumkin.

Teorema 1. Ikki yoki undan ortiq mos kelmaydigan hodisalar yig'indisining ehtimoli A_i bu hodisalarning ehtimolliklari yig'indisiga teng.

$$P(A_1 + A_2+ \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Biz bu teoremaning isbotini ikkita A va B hodisaning yig'indisi uchun keltiramiz. Bu hodisalar bir-biriga mos kelmaydi (1.9-rasm).

A hodisaning ro'y berishi r tasodif bilan, B hodisasi esa t tasodifiy bo'lsin. K jami mumkin bo'lgan natijalar mavjud. Yig'indi (kombinatsiya) ta'rifini va A va B hodisalarning mos kelmasligini hisobga olsak, $C=A+B$ hodisasi $r+t$ qulay imkoniyatlarga mos keladi, deb aytishimiz mumkin.



Rasm. 1.9. Mos kelmaydigan hodisalarning geometrik talqini

Demak, C hodisaning ehtimoli teng bo'ladi

$$P (C) = (r + t)/k = r/k + t/k = P(A) + P(B).$$

Ushbu xulosani n ta hodisa yig'indisiga kengaytirib, biz quyidagilarni olamiz:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (1.2)$$

Misol. Bir urnada ikkita oq shar bo'lsin, bitta ko'k, uchta qizil va to'rtta sariq. Bitta to'p urnadan tasodifiy ravishda olinadi. To'pning rangli bo'lish ehtimolini aniqlang . Keling, hodisani belgilaymiz - B harfi bilan rangli to'pning paydo bo'lishi. Bu holda, rangli to'p ko'k, yoki qizil yoki sariq deb tushuniladi. Ko'rib turganingizdek, bu erda "yoki" birlashmasi ishlatiladi. Boshqacha qilib aytadigan bo'lsak, rangli to'p - bu nomdagi ranglardan kamida bittasi. Bu hodisalar yig'indisining ta'rifiga mos keladi. bular. $B=A_1 + A_2 + A_3$, bu erda A_1 - ko'k to'pning ko'rinishi; A_2 - qizil; A_3 - sariq. Bu hodisalar mos kelmaydi. Shuning uchun, mos kelmaydigan hodisalar uchun qo'shish teoremasidan foydalanish mumkin.

$$P (B) = P (A_1 + A_2 + A_3) = P (A_1) + P (A_2) + P (A_3).$$

Ai hodisalarining ehtimolliklarini klassik ehtimollik formulasi yordamida aniqlash oson:

$$P(A_1) = M/N = 1/10;\ P(A_2) = M/N = 3/10;\ P(A_3) = M / N = 4/10.$$

Demak, $P(B) = 0,1 + 0,3 + 0,4 = 0,8.$

1-teoremadan xulosa. *To'liq guruhni tashkil etuvchi mos kelmaydigan hodisalar yig'indisining ehtimoli birga teng. Darhaqiqat, voqealarning to'liq guruhi uchun,*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1.$$

A_i hodisalar mos kelmasligi uchun

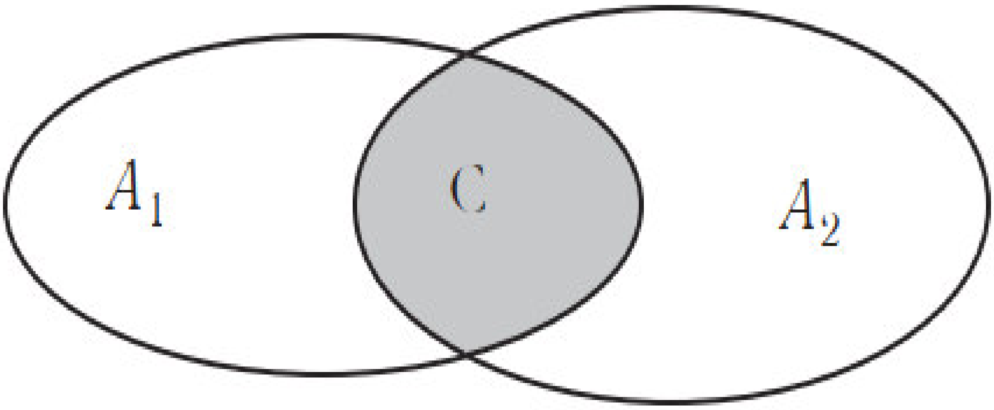
$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + R(A_n) = 1 \text{ bo'ladi.}$$

Ai ko'paytmasi ehtimoli A_1 hodisaning yuzaga kelish ehtimoli keyingi A_2, A_3 va hokazo hodisalarning shartli ehtimolliklari ko'paytmasiga teng.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A1) \cdot R(A2|A1) \cdot \ldots \cdot P(An|A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}).\ (1.3)$$

Bu yerda $P(A_2|A_1)$ - A_1 hodisasi ilgari sodir bo'lgan bo'lsa, A_2 hodisasining yuzaga kelish ehtimoli;

$P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$ - boshqa barcha A_1, A_2, …, A_{n-1} hodisalar sodir bo'lgan bo'lsa, An hodisasining yuzaga kelish ehtimoli .



Rasm. 1.10. Hodisalar kesishuvining geometrik talqini

Shaklda. 1.10 A_1 va A_2 ikkita hodisaning kesishishining geometrik talqinini ko'rsatadi. A_1 hodisasining yuzaga kelishi r imkoniyat, A_2 hodisasi - s imkoniyat va voqea C - m imkoniyat bo'lsin. Natijalarning umumiy soni k.

Bu sharoitda $P(A_1) = r/k$, $P(A_2) = s/k$. $P(A_2|A_1)$ shartli ehtimolni toping. Agar A_1 hodisasi sodir bo'lganligi ma'lum bo'lsa, u holda A_2 hodisasining yuzaga kelishi uchun qulay imkoniyatlar soni kesishish maydoniga mos keladigan m imkoniyatga kamayadi (1.10-rasmga qarang). Shunday qilib, $P(A_2|A_1) = m/r$.

Demak, $P(C) = P(A_1)\, P(A_2|A_1) = (r/k)\, (m/r) = m/k$.

Misol. Kartochkalarga K, A , P, T, A harflari yoziladi.Kartochkalar "urna"ga joylashtiriladi, aralashtiriladi va tasodifiy birma-bir olinadi. Harflarni paydo bo'lish tartibida qo'shsangiz, KARTA so'zini olish ehtimoli qanday? Birinchi K harfining paydo bo'lish ehtimoli $P\,(A_1) = 1/5$.

A harfining paydo bo'lish ehtimolini "urn" da faqat 4 ta karta qolganiga qarab hisoblash kerak, ulardan ikkitasi A, shuning uchun . A harfining paydo bo'lish ehtimoli - $P\,(A_2|A_1) = 2/4$. *Xuddi shunday, shartni belgilash mumkin qolgan harflarning paydo bo'lish ehtimoli. Harflar P* $P(A_3|A_1A_2) = 1/3$, *T harfi uchun -* $P(A_4|A_1A_2A_3) = 1/2$ *va A harfi uchun -* $P(A_5|A_1A_2A_3A_4) =1$.

Ushbu ehtimollarni bog'liq hodisalar uchun ko'paytirish teoremasiga muvofiq ko'paytirib, biz hosil bo'lamiz

P(КАРТА\=(1/5) (2/4) (1/3) (1/2) 1 \=2/120=1/60.

Teorema 3. Ikki yoki undan ko'p mustaqil hodisalar Ai ko'paytmasining ehtimolligi ushbu hodisalarning ehtimolliklari ko'paytmasiga teng.

Darhaqiqat, mustaqil hodisalar shundan farq qiladiki, ulardan birining paydo bo'lishi ikkinchisining paydo bo'lish ehtimolini o'zgartirmaydi. Shunday qilib, mustaqil hodisalar uchun shartli ehtimolliklar shartsiz $P(A_2|A_1) = P(A_2)$ ga teng. Demak,

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(An). \quad (1.4)$$

A_i bir xil p ehtimolga ega bo'lgan ko'paytma ehtimoli

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) = p^n.$$

Misol. Nishonga uchta mustaqil o'q uzilsin. Har bir o'q bilan nishonga tegish ehtimoli 0,7 ga teng. Uch marta nishonga tegish ehtimolini aniqlang.

Istalgan hodisa - nishon uch marta ham uriladi. Bu shuni anglatadiki, birinchi zarbada, ikkinchisida va uchinchisida zarbalar bo'lishi kerak. Voqealarning bir-birining ustiga chiqishi. Shuning uchun biz voqealar mahsuli haqida gapiramiz. Bunday holda, hodisalar mustaqildir, chunki nishonga tegish ehtimoli tajribadan tajribaga qadar, nishon avvalroq urilganmi yoki yo’qmi, o’zgarmaydi. Shuning uchun mustaqil hodisalar uchun ko’paytirish teoremasidan foydalanish mumkin.

$$P\ (A_1\ A_2\ A_3)=P(A_1)\ P(A_2)\ P\ (A_3)=0{,}7\ 0{,}7\ 0{,}7=0{,}7^3=0{,}343.$$

Teorema 4. Ikki yoki undan ortiq qo’shma hodisalar yig'indisining ehtimoli A_i qarama-qarshi hodisalarning ko’paytmasi ehtimolini ayirib tashlashga teng.

$$P(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+\cdots+\cdots\mathrm{A}_n)=1-P\left(\prod_{i=1}^{n}\bar{A}_i\right) \qquad (1.5)$$

A_i hodisalari mustaqil bo’lsa, u holda

$$P(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+\cdots+\cdots\mathrm{A}_n)=1-\prod_{i=1}^{n}P\left(\bar{A}_i\right) \qquad (1.6)$$

P($\bar{A}_i$) ehtimolliklari tajribadan tajribaga o’zgarmasa va ***q*** ga teng bo’lsa, formula ko’rinishga ega bo’ladi.

$$P(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+\cdots+\cdots\mathrm{A}_n)=1-(q^n) \qquad (1.7)$$

Isbot. Hodisalar yig'indisi murakkab B hodisasi sifatida tushuniladi, bu Ai ning kamida bittasi paydo bo’lishidan iborat (1.11-rasmdagi yorug'lik maydoni).

Bunday hodisaning qarama-qarshi tomoni $\bar{B}_i$ hodisasidir, ya'ni $\bar{A}_i$ hodisalarining hech biri sodir bo’lmaydi. (1.11-rasmdagi qorong'u joy). $\bar{A}_i$ hodisalari sodir bo’ladi . Demak,

$$\bar{B}=\prod_{i=1}^{n}\bar{A}_i$$

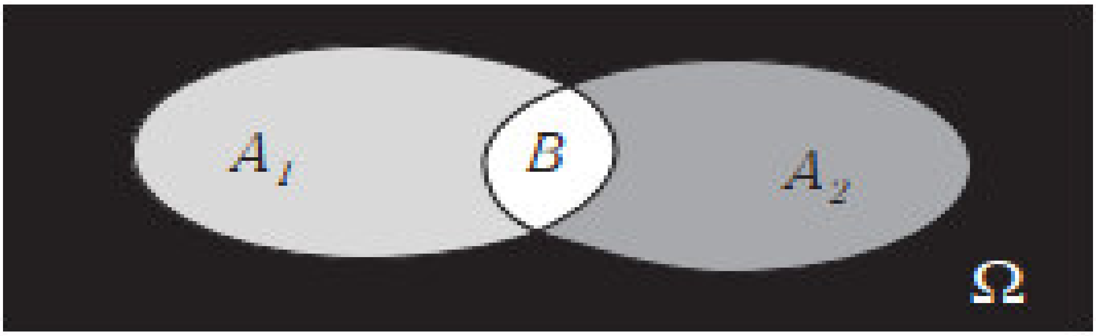
Ehtimollarga murojaat qilsak, biz olamiz

$$P(\bar{B})=P\prod_{i=1}^{n}\bar{A}_i$$

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-P\prod_{i=1}^{n}\bar{A}_i$$

Ikki hodisa uchun siz bu ehtimolni boshqa yo’l bilan hisoblashingiz mumkin . A_1 va A_2 hodisalarning yuzaga kelishiga mos keladigan ellips maydonlari ushbu hodisalarning yuzaga kelish ehtimoliga teng bo’lsin. Anjirdan. 1.11 dan ko’rinib turibdiki, agar siz ellips maydonlarini qo’shsangiz, kesishish maydonining maydoni ikki marta yig'indiga kiritiladi. Shuning uchun P(A_1 + A_2) ellipslari bilan chegaralangan figuraning maydonini aniqlash uchun $P(A_1 \cdot A_2)$ sohalari yig'indisidan kesishish mintaqasining maydonini ayirish kerak. bu ellipslar $P(A_1)+R(A_2)$. Oling

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2))$$



Rasm. 1.11. Qo’shma hodisalar yig'indisining geometrik talqini

Misol. Tanga ikki marta tashlanadi. Boshning kamida bir marta paydo bo’lish ehtimolini aniqlang. "Burgut" birinchi otishda ham, ikkinchisida ham paydo bo’lishi mumkin. Bu shuni anglatadiki, bu voqealar umumiydir.

Qo’shma hodisalar uchun qo’shish teoremasidan foydalanib, biz quyidagilarni olamiz:

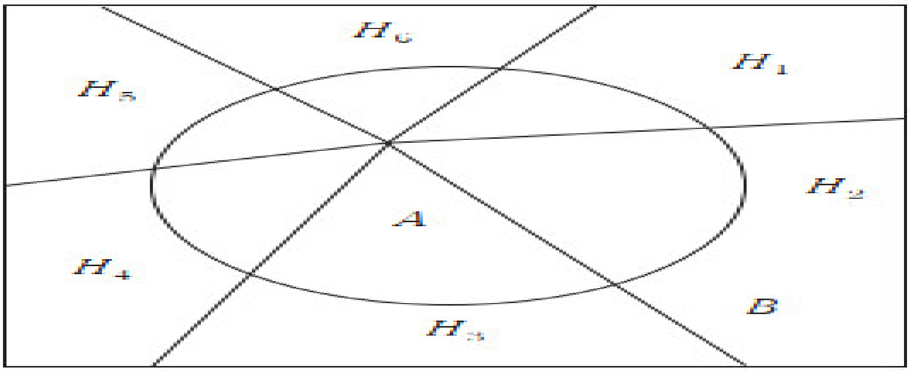
$$P(A1 + A2) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) = 1 - 0,5\ 0,5 =\cdot 0,75.$$

Bu yerda $\bar{A}_1$ va $\bar{A}_2$ hodisalari tangani birinchi va ikkinchi otishda mos ravishda “dumlar” paydo bo‘lishini anglatadi. Xuddi shu muammoni ikkinchi formula yordamida hal qilish mumkin:

$$P (A_1 + A_2)= P (A_1)+P(A_2)-P (A_1A_2)=0,5+0,5-0,5\ 0,5=0,75.$$

Umumiy ehtimollik formulasi

Ni hodisalardan biri bilan birga paydo bo’lishi mumkin bo’lgan vaziyatni ko’rib chiqaylik . Bunda Ni hodisalari (ularni gipoteza deb ham yuritiladi) bir-biriga mos kelmaydi va to’liq guruh hosil qiladi. Bunday sharoitlarda A hodisasining yuzaga kelish ehtimolini aniqlash talab qilinadi (1.12-rasm). Bu erda B - maydon hodisalarning to'liq guruhi (bu hududga tushish ehtimoli birga teng).



Rasm. 1.12. Umumiy ehtimollik formulasining tasviri

Rasm. 1.12. ko'rinib turibdiki, A kerakli hodisa, uni quyidagi hodisalar yig'indisi sifatida ifodalash mumkin. voqealar:

$$A = H_1A + H_2A + .. + H_nA.$$

Ni hodisalari mos kelmasligi sababli, qo'shish teoremasidan foydalanib, biz umumiy ehtimollik formulasini olamiz:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\,(H_iA) = \sum_{i=0}^{n} P\,(H_i)P(A/H_i)$$

Misol. Dekan tasodifan uchta sinfdan biriga kirib, talaba yoki talaba qizni chaqirsin. Shu bilan birga, birinchi auditoriyada 10 o'g'il va 15 qiz, ikkinchisida 5 o'g'il va 20 qiz, uchinchisida 18 o'g'il va 7 qiz borligi ma'lum. Qizning tanlanishi ehtimolini aniqlash talab qilinadi (A hodisasi).

Yechim. Keling, faraz sifatida qabul qilaylik Ni - tomoshabinlarni tanlashdan iborat voqealar. Shubhasiz, tomoshabinlarni tanlash ehtimoli teng. Demak, R(Ni) = 1/3. Birinchi, ikkinchi, uchinchi auditoriyadan qizni chaqirish ehtimolini hisoblang:

P (A/H1) = 15/25 = 0,6; P (A/H2) = 20/25 = 0,8; P (A/H3) = 7/25 = 0,28.

Olingan ma'lumotlardan foydalanib, biz qizni chaqirish ehtimolini topamiz:

$$P(A) = P(\ H_i)\cdot(P(A/H_1) + P(A/H_2) + P(A/H_3))$$

$$P(A)=1/3\cdot(0,6 + 0,8 + 0,28)=0,56.$$

Nazorat savollari

1. Hodisalar yig'indisi nima deyiladi?
2. Hodisalar yig'indisining geometrik talqinini bering.

3. Ikkita hodisa ko'rib chiqiladi: A va B. B hodisasi A hodisasining alohida holati. Bu hodisalarning mahsuli nima?
4. Ikkita hodisa ko'rib chiqiladi: A va B. B hodisasi A hodisasining maxsus holati. Bu hodisalarning yig'indisi qancha?
5. Shartli ehtimollik nima?
6. Ko'paytirish teoremasini qo'llashda hodisalarning bog'liqligini hisobga olish kerakmi?
7. Ikki qo'shma hodisa yig'indisining ehtimolini aniqlash formulasini yozing. Qarama-qarshi hodisalar ehtimolidan foydalanmang.
8. Uchta qo'shma hodisa yig'indisining ehtimolini aniqlash formulasini yozing. Qarama-qarshi hodisalar ehtimolidan foydalanmang.

Yechimlar bilan bog'liq muammolar

Vazifa 1. Ikki tanga tashlandi. Ehtimollikni aniqlang ko'paytirish teoremasi yordamida ikkita "burgut" paydo bo'lishi.

Yechim. Bu holda ikkita "burgut" (B hodisasi) paydo bo'lishi birinchi tangada (A1 hodisasi) va ikkinchisida (A2 hodisasi) "burgut" ning birgalikda ko'rinishidir. Binobarin, hodisalar mahsuloti mavjud: $B = A_1A_2$. A_1 va A_2 hodisalari mustaqildir.

$$P\ (B)\ \backslash=(1/2\ )\times(1/2)=0{,}25.$$

Vazifa 2. Ikki tanga tashlandi. Bitta bosh va bitta dumning ehtimolini aniqlang.

Yechim. Bu holda "boshlar" va "dumlar" (B hodisasi) paydo bo'lishi birinchi tangada "burgutlar" (A_1 hodisasi) va ikkinchisida ($\bar{A}_2$ hodisasi) yoki "dumlar" ning qo'shma ko'rinishidir. birinchi tanga (voqea $\bar{A}_1$) va ikkinchi tangadagi "burgut" (voqea A_2). Istalgan hodisani quyidagicha ifodalash mumkin: $B=A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2$.

$A_1\bar{A}_2$ va $\bar{A}_1A_2$ birikma hodisalari mos kelmaydi. Shuning uchun biz mos kelmaydigan hodisalar uchun qo'shish teoremasidan foydalanishimiz mumkin:

$$P(B) = P(\ A_1\bar{A}_2)+P(A_1A_2).$$

Birinchisini tashlash natijasida yuzaga keladigan hodisalar tangalar ikkinchi tanga otish natijasiga ta'sir qilmaydi. Shuning uchun, A_1 va $\bar{A}_2$ hodisalari, shuningdek, $\bar{A}_1$ va A_2 juftliklari mustaqil. Bu yerdan

$$P(B)= P(\ A1\ A2) + P(A1\ A2)=P(A1)\ P(A2)+P(A1)\ P(A2)=$$

$$=0{,}5\times0{,}5+0{,}5\times0{,}5=0{,}5.$$

Vazifa 4. Uchta o'lchov olinadi (masalan, burchak). Bunday holda, xatolar paydo bo'lishi mumkin: ijobiy (+) yoki salbiy (–). Barcha uch o'lchamda salbiy xatolar yuzaga kelishi ehtimoli qanday?

Yechim. Xatolarning keyingi birikmasi (– – –) hodisasi ehtimolini aniqlash talab qilinadi B. Har bir o'lchovdagi manfiy xatolik ehtimoli 0,5 ga teng. Barcha o'lchovlarda salbiy xatolar paydo bo'lganda kombinatsiya ko'rib chiqiladi (Ai hodisasi).

Demak, B = $A_1A_2A_3$. Ai hodisalarning mustaqil ekanligini hisobga olib, mustaqil hodisalar uchun ko'paytirish teoremasidan foydalanamiz. *P (B)=P(A_1) P(A_2) P(A_3) = 0,5 0,5 0,5 = 0,125.*

§1.3. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun taqsimot qonunlari

Yagona taqsimlash

Tarqatish bir xil deb ataladi, uning zichligi quyidagi shaklga ega (1.41-rasm):

$$\varphi(x) = \begin{cases} c & unda\ \ \alpha \le X < \beta \\ 0 & unda\ \ X > \alpha\ va\ X < \beta \end{cases}$$

c ni ma'lum α va β bilan aniqlaymiz. Tarqatish zichligining xususiyatlariga ko'ra, soyali maydon bittaga teng. Boshqa tomondan, soyali to'rtburchakning maydoni c(β-α) mahsulotiga teng. Demak, s = S /(β-α) =1/(β-α).

Yagona taqsimotning matematik kutilishi va dispersiyasini aniqlang

$$M_X = \int_{\alpha}^{\beta} x\varphi(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x\frac{1}{\beta-\alpha}dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{x^2}{2}\bigg|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

α = –β bilan, ya'ni nosimmetrik taqsimot bilan matematik kutish nolga teng qiymatni oladi.

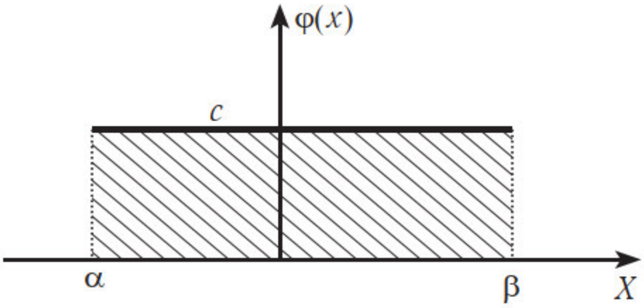
Hisob-kitoblarni soddalashtirish uchun ushbu tasodifiy o'zgaruvchining dispersiyasi α = –β bo'lgan holat uchun aniqlanadi.

$$D_X = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \alpha_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta-\alpha} - x^2dx = \frac{1}{\beta+\beta}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-\beta}^{\beta} = \frac{1}{2\beta}\frac{\beta^3+\beta^3}{3} = \frac{\beta^2}{3}$$

Bu yerda $\sigma_X = \frac{\beta}{\sqrt{3}}$.

Yaxlitlash xatolari yagona taqsimot qonuniga bo’ysunadi. Yaxlitlashda xatoliklar yaxlitlanayotgan raqamning oxirgi raqamining -0,5 dan +0,5 birligiga teng. Yaxlitlash xatolari uchun β=0,5:

$$D_X = \frac{0{,}5^2}{3} = \frac{1}{12} \; va \; \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$



Rasm. 1.3.1. Yagona taqsimlash zichligi grafigi

Oddiy taqsimot.

Normallashtirilgan tasodifiy miqdor tushunchasini kiritamiz.

M_X va D_X ma'lum bo’lgan X tasodifiy o’zgaruvchilari berilsin. Normallashtirilgan tasodifiy o’zgaruvchi shaklning funktsiyasidir $T = \frac{X - M_X}{\sigma_X}$. Normallashtirilgan tasodifiy miqdor ikki xususiyatga ega: $M_T = 0$, $D_T = 1$.

Keling, bu xususiyatlarni isbotlaylik. Konstantaning matematik kutilishi sifatida $M_{M_X} = M_X$ va doimiyning dispersiyasi nolga teng $D_{M_X} = 0$ ekanligini hisobga olamiz, u holda,

$$M_T = M\left[\frac{X - M_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X} M[X - M_X] = \frac{1}{\sigma_X}(M_X - M_X) = 0$$

1.3.1

$$D_T = D\left[\frac{X - M_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X^2} D[X - M_X] = \frac{1}{\sigma_X^2}\left(D_X + D_{M_X}\right) = 1$$

Normallashtirilgan tasodifiy miqdorning normal taqsimoti zichligi bo’lgan taqsimotdir

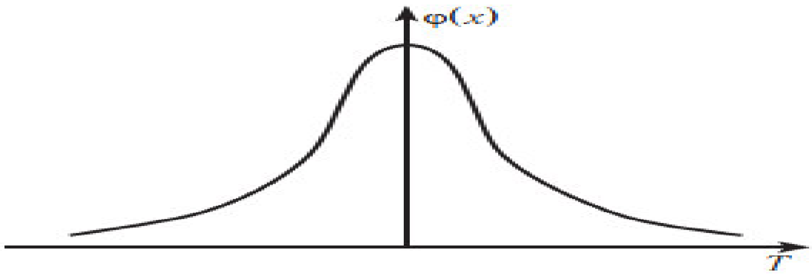
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \qquad (1.3.4)$$

z (t) zichligi grafigi rasmda ko’rsatilgan. 1.42.

Normallashtirilgan tasodifiy o’zgaruvchining taqsimot funktsiyasi quyidagi ko’rinishga ega:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad (1.3.5)$$

Oddiy taqsimot qonuniga bo’ysunuvchi T tasodifiy o’zgaruvchisi odatda quyidagicha belgilanadi: T ∈ N(0, 1), bu erda N - normal taqsimotning ramzi, 0 va 1 - mos ravishda taqsimot parametrlari, M(T) va σ_T .



1.3.2-rasm. Normallashtirilgan tasodifiy miqdorning normal taqsimotining zichlik grafigi T bilan chiziqli bog‘liqlik bilan bog‘langan: X ∈ N(α, σ^2) ga chiziqli bog'liqlik bilan bog'langan tasodifiy o’zgaruvchini ko’rib chiqaylik :$X = \sigma T + \alpha$.

Bu holda taqsimot zichligini aniqlash uchun quyidagi teoremadan foydalanish mumkin.

Agar ikkita tasodifiy X va Y tasodifiy o’zgaruvchilar bo’lsa, ular orasida Y=f(X) funktsional bog'liqlik o’rnatiladi, bu erda f(X) monoton ortib boruvchi uzluksiz differentsiallanuvchi funktsiya bo’lsa, u holda

$$\varphi_Y(x) = \varphi_Y(f^{-1}(x)) \frac{d(f^{-1}(x))}{dx}. \qquad (1.3.6)$$

Isbot. Bu teorema sharoitida *f(X*) funksiya teskari $f^{1}(Y)$ ga ega. Y tasodifiy miqdorning $\varphi_Y(x)$ zichligini aniqlash talab qilinadi, agar X tasodifiy miqdorning $\varphi_X(x)$zichligi ma'lum bo’lsa, bu erda x haqiqiy sonlar to’plamidir.zichligi ma'lum bo’lsa, bu erda x haqiqiy sonlar to’plamidir.

Y tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini yozamiz:

$$F_Y(x) = F_{f(X)}(x) = P(f(X) < x) = P(x < f^{-1}(x)) = F_X(f^{-1}(x)).$$

X va *Y* tasodifiy miqdorlarning zichliklariga o'tamiz. Buning uchun bu tenglikning chap va o'ng qismlarining hosilalarini olamiz va nihoyat formulani olamiz.

$$\varphi_Y(x) = \varphi_Y(f^{-1}(x))\frac{d(f^{-1}(x))}{dx}.$$

(1.3.6) formuladan foydalanib, agar $X = \sigma T + M_x$ bo'lsa, T ning funktsiyasi bo'lgan X tasodifiy o'zgaruvchisi uchun zichlik funksiyasini topamiz.

$$\varphi_Y(x) = \varphi_Y(f^{-1}(x))\frac{d(f^{-1}(x))}{dx}.$$

Bu yerga

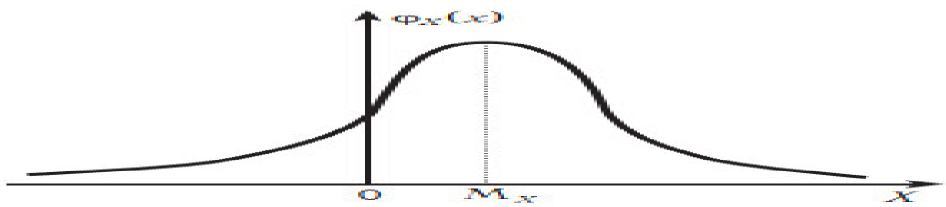
$$f^{-1}(x))\frac{x - M(x)}{\sigma_x}$$

$f^{-1}(x)$ ning x ga nisbatan qisman hosilasini aniqlaymiz:

$$\frac{d(f^{-1}(x))}{dx} = \frac{1}{\sigma_x}$$

$\varphi_T\big(f^{-1}(x)\big),$ zichligini aniqlaymiz , T o'rniga (1.3.5) ni qo'yib, qiymatni $\frac{x-M_X}{\sigma_X}$ olamiz

$$\varphi_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-M_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$



Rasm. 1.3.3. Oddiy taqsimot zichligi grafigi

Olingan natijalarni (1.27) ga almashtirib, X tasodifiy miqdor uchun normal taqsimot zichligini olamiz:

$$\varphi_T(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-M_X)^2}{2\sigma_X^2}} \qquad (1.3.7)$$

M_X va D_X parametrlari bilan normal taqsimot qonuniga bo'ysunuvchi X tasodifiy o'zgaruvchisi quyidagicha belgilanadi: $X \in N(M_X, D_X)$. Zichlik grafigi (1.3.7) rasmda ko'rsatilgan. 1.3.3.

Oddiy taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy o'zgaruvchining berilgan oralig'iga tushish ehtimoli

X∈N(M_X, D_X) normal taqsimotiga bo'ysunsin . *X* ning *P(x_1< X< x_2)* intervaliga tushish ehtimolini aniqlash talab qilinadi .

Intervalga tushish ehtimoli taqsimot funksiyasi yordamida aniqlanadi

$$P(\,x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(\,x)dx = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-M_X)^2}{2\sigma_X^2}} \qquad (1.3.8)$$

Bu ehtimollik son jihatdan shakldagi soyali maydonga teng. Rasm1.3.3.

Biroq, ehtimollikni aniqlashning bu usuli ancha mashaqqatli, chunki bunday ehtimollikni aniqlash uchun integral (1.3.8) har safar hisoblanishi kerak. Bunday integral uchun jadvallarni tuzish mumkin emas, chunki bu *M_X, D_X, x* uchta argumentga bog'liq bo'lib, ularning diapazoni haqiqiy sonlarning butun to'plamini o'z ichiga olishi mumkin. Bu muammoni normallashtirilgan tasodifiy o'zgaruvchiga o'tish orqali osonlikcha hal qilish mumkin. E'tibor bering, funktsiya $T = \frac{X-M_X}{\sigma_X}$ X va T tasodifiy o'zgaruvchilar qiymatlari to'plami o'rtasida birma-bir yozishmalarni o'rnatadi, shuning uchun,

$$P(\,x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = F(t_2) - F(t_1)$$

Bu erda $t_1 = \frac{x_1-M_X}{\sigma_X}$; $t_2 = \frac{x_2-M_X}{\sigma_X}$

Ushbu holatda

$$F(t_2) - F(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_2} e^{-\frac{z^2}{2}}dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_1} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Har bir bunday integral faqat bitta argumentga ega *t*. Unga faqat bitta sahifani egallagan jadvallarni yaratish oson. *T* va *X* qiymatlari birma-bir mos kelishini hisobga olsak, rasmdagi soyali joylar. Intervalga tushish ehtimoliga mos keladigan 1,3.3 va 1,3.4 bir-biriga teng.

Misol. Parametrlari M_X = 2 va $\sigma_X = 5$ bo'lgan normal taqsimotga bo'ysunuvchi X tasodifiy miqdor bo'lsin. –10<X<10 oralig'iga tushish ehtimolini aniqlang.

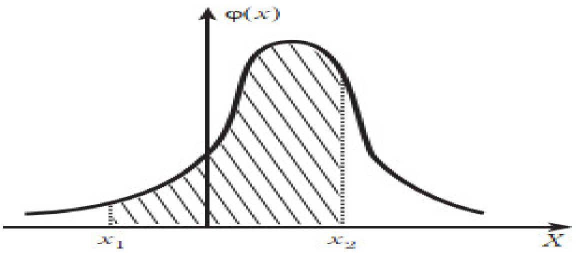
Yechim. Grafikda (1.46-rasm) kerakli ehtimollikni ko'rsatamiz

$$P(\,x_1 < X < x_2) = P(-10 < X < 10)$$

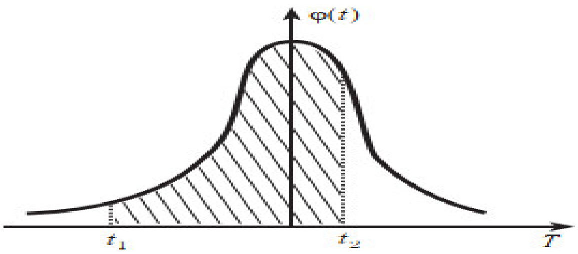
Ammo bu ehtimollik

$$P(\,x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = F(t_2) - F(t_1)$$

Bu erda: $t_1 = \frac{x_1 - M_X}{\sigma_X} = \frac{(-10-2)}{5} = -2{,}4;\ t_2 = \frac{x_2 - M_X}{\sigma_X} = \frac{10-2}{5} = 1.6$

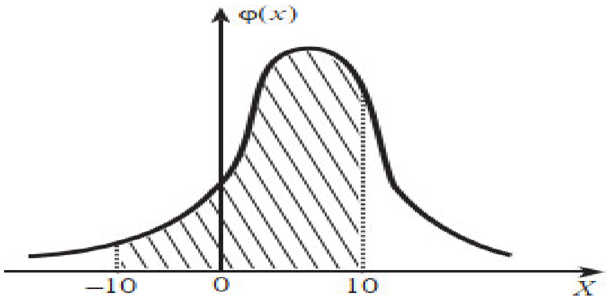


Rasm. 1.3.4. Grafik tasvir intervalga tushish ehtimoli tasodifiy o'zgarmaydigan $X \in N(M_X, D_X)$

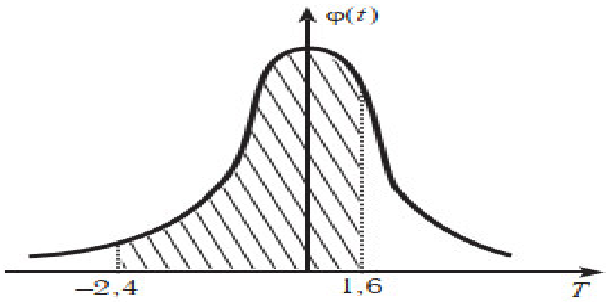


Rasm. 1.3.5. Grafik tasvir normallashtirilgan tasodifiy miqdor oralig'iga tushish ehtimoli $X \in N(0, 1)$

F(–10) – F(10) = F(1,6) – F(–2,4). Grafik jihatdan, uchun intervalga tushish ehtimoli normallashtirilgan tasodifiy o'zgaruvchi shaklda ko'rsatilgan. 1.3.7. Jadvallar bo'yicha *F(t)* *F*(t_1) va *F*(t_2) qiymatlarini topamiz: *F*(t_1) = 0,008*;* *F* (t_2)=0,945. Shunday qilib, kerakli ehtimollik $P(\,x_1 < X < x_2) = F(t_2) - F(t_1) = F(t_2) - F(t_1) = 0{,}945 - 0{,}008 = 0{,}937$ ga teng bo'ladi .



Rasm. 1.3.6. P(–10<X<10) ehtimolligining grafik tasviri



Rasm. 1.3.7. uchun $P(t_1<T<t_2)$ ehtimolining grafik tasviri normallashtirilgan tasodifiy miqdor

Ehtimollar integrali. Laplas funktsiyasi.

Ehtimollik integrali shaklning normalangan taqsimot zichligining integralidir

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \qquad (1.3.9)$$

Φ(t)=P(–t < T < t) ehtimolligi yoki *T* ning mutlaq qiymati t dan kichik bo’lish ehtimoli: F(t)=P(|T| < t).

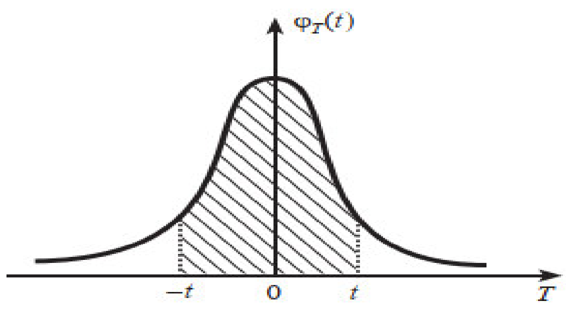
T o’rniga uning ifodasini X orqali almashtiramiz:

$$\Phi(t) = P(|T| < t) = P\left(\frac{|X - M_X|}{\sigma_X} < t\right) = P(|X - M_X|) < t\sigma_X) \qquad (1.3.10)$$

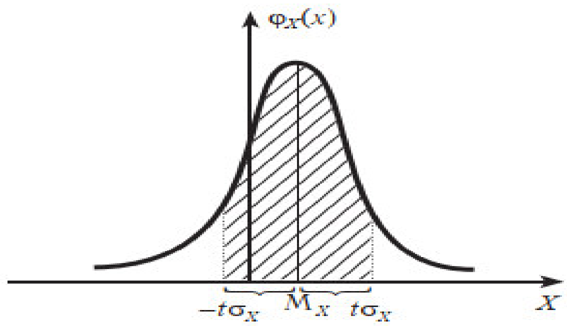
yoki $\Phi(t) = P(M_X - t\sigma_X < X < M_X + t\sigma_X) = P(-t < T < t)$

F(t) ning ehtimollik ma’nosi shundan iboratki, bu funksiya X tasodifiy miqdorning normal taqsimot qonuniga bo’ysunib, matematik kutilmaga nisbatan simmetrik intervalga tushish ehtimolidir (1.48 va 1.49-rasm).

Grafik jihatdan, ehtimollik integrali T va X qiymatlari uchun normal taqsimot zichligi grafiklaridagi soyali maydonlardir.



Rasm. 1.3.8. F(t) ning stut (t) grafigida grafik tasviri.



Rasm. 1.3.9. ϕX (x) grafigida F(t) ning grafik tasviri

Ehtimollar integrali va taqsimot funksiyasi o’rtasidagi bog'liqlik

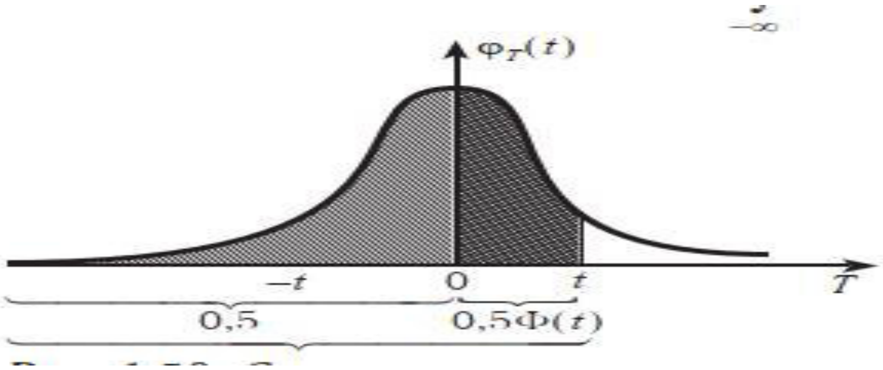
Tasodifiy T ning taqsimot funksiyasi integral sifatida ifodalanishi mumkin

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

F(t) ikkita integral yig‘indisi sifatida ifodalanishi mumkin:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$\varphi_T(t)$ nolga nisbatan simmetrik bo’lgani $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$ uchun va zichlik xususiyatini hisobga olgan holda biz integralni olamiz. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0{,}5$



Rasm. 1.3.10. Ehtimollar integrali va taqsimot funksiyasi o'rtasidagi bog'liqlik

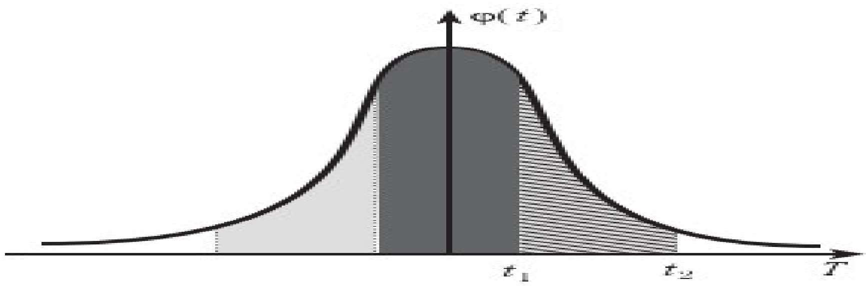
Ikkinchi integral 0,5F(t), demak $F(t) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(t)$ (1.3.11)

Grafik jihatdan, bu munosabatlar rasmda ko'rsatilgan. 1.50.

Ehtimollar va munosabat (1.3.2) integralidan foydalanib, oraliqga tushish ehtimoli uchun tenglik zanjirini davom ettiramiz:

$$P(\, x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = F(t_2) - F(t_1) = 0{,}5\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) \qquad (1.3.12)$$

Ehtimollar integrali bilan bog'liq bo'lgan (1.33) formulaning grafik ma'nosi shaklda ko'rsatilgan. 1.51 (soyali maydon).



Rasm. 1.3.11. Tasodifiy urish ehtimolining grafik tasviri intervaldagi qiymatlar.

Shunday qilib, tasodifiy miqdorning berilgan oraliqga tushish ehtimolini taqsimlash funksiyasi yoki ehtimollik integrali yordamida aniqlash mumkin.

Ehtimollar nazariyasi o'quv qullanmalarida ikkala funksiya uchun ham mos jadvallar berilgan. Shu bilan birga, ehtimollik integrali jadvallari taqsimot funksiyasi jadvallaridan kichikroq hajmga ega, chunki ehtimollik integrali toq funksiyadir.

Haqiqatan ham,

$$\Phi(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(-t)}^{-t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(-t) - F(t) = -\Phi\,(t)$$

$\Phi(t)$ uchun jadvallarni faqat t ning ijobiy qiymatlari uchun tuzish mumkin. T ning manfiy qiymatlari uchun $\Phi(t)$ musbat t bilan bir xil qiymatlarga ega bo'ladi, ammo minus belgisi bilan.

Misol. Oldingi misol uchun X tasodifiy miqdor oralig'iga tushish ehtimolini ehtimollar integrali orqali aniqlaymiz. X parametrlari $M_X = 2$ va $\sigma_X = 5$ bo'lgan normal taqsimotga bo'ysunuvchi tasodifiy o'zgaruvchi bo'lsin. – 10< X < 10 segmentiga tushish ehtimolini aniqlaymiz .

$$P(\,x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = 0{,}5\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) = 0{,}5(\Phi(1{,}6) - \Phi(-2{,}4))$$
$$= 0{,}5(\Phi(1{,}6) + \Phi(2{,}4)) = 0{,}5(0{,}890 + 0{,}984) = 0{,}937$$

Oldingi misoldagi kabi natija olinadi. 0,890 va 0,984 qiymatlari ehtimollik integrali jadvallaridan olingan (2-ilovaga qarang). Ehtimollik integrali
integralni quyidagi shakl qatoriga kengaytirish orqali aniqlash mumkin:

$$\Phi(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \cdots$$

Nazorat savollari.

1. Qanday taqsimot bir xil deb ataladi?
2. Yagona taqsimot zichligi grafigi qanday ko'rinishga ega?
3. Qanday qiymat normalangan deb ataladi? Uning xususiyatlari qanday?
4. Qanday taqsimot normal deyiladi?
5. Normallashtirilgan tasodifiy miqdorning normal taqsimlanish zichligi qanday ko'rinishga ega?
6. Normallashtirilgan tasodifiy miqdorning normal taqsimlanish zichligi grafigi qanday ko'rinishga ega?
7. $X\in N(\,M_X, D_X\,)$ tasodifiy miqdorning normal taqsimlanish zichligi qanday ko'rinishga ega?
8. Oddiy taqsimot uchun taqsimot funktsiyasi qanday ko'rinishga ega?
9. Tasodifiy miqdorning intervalga tushish ehtimoli taqsimot funksiyasi orqali qanday hisoblanadi?
10. Ehtimollar integralini aniqlang.

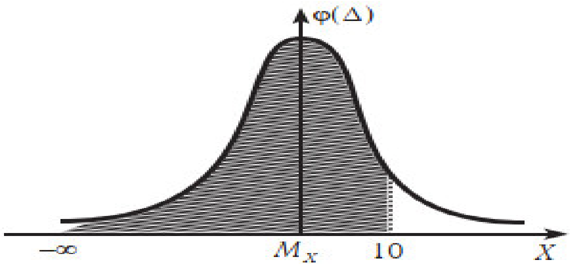
11. Ehtimollik integrali yordamida normal taqsimotga bo’ysunuvchi tasodifiy miqdorni intervalga olish ehtimoli qanday hisoblanadi?

12. Ehtimollar integrali va taqsimot funksiyasi qanday bog‘langan?

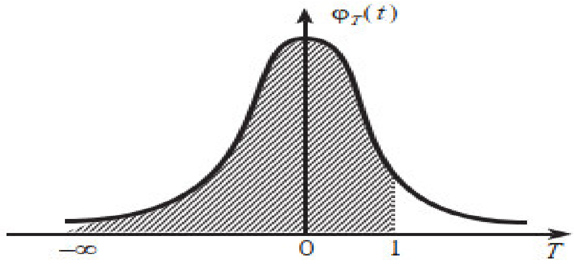
YECHIMLAR BILAN BOG'LIQ MUAMMOLAR

og'ish σ_X=10″ bilan o’lchanadi . O’lchov xatolarining matematik kutilishi M(Δ)=0 ga teng. Raqamli qiymatni aniqlang va taqsimot zichligi grafigida P(Δ<10) ehtimolligini ko’rsating.

Yechim. P(Δ<10) ehtimollikni zichlik grafigida tasvirlaymiz (1.52-rasm).



Rasm. 1.3.12. Ehtimollik P(Δ<10) yoqilgan ϕ (Δ) grafigi



Rasm. 1.3.13. Ehtimollik Ft (1)= P(t<1) ϕ(t) grafigida

P(Δ<10) = F (10) yoki normallashtirilgan tasodifiy miqdorga o’tish, bunda t= (Δ – M(Δ))/σ_X =(10 – 0)/10=1, Φ(1) = 0,68 ni olamiz,

$$P(\,x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = F(t_2) - F(t_1)$$

$$P(\,\Delta< 10) = F_\Delta(10) = F_t(1) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(t) = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}68 = 0{,}84$$

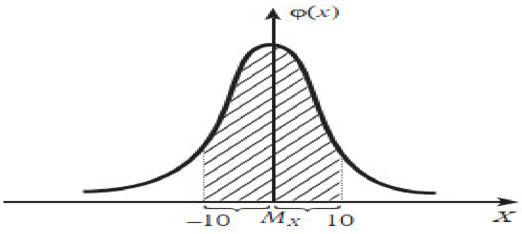
Ushbu ehtimollik rasmdagi soyali joylarga to’g'ri keladi. 1.3.12 (X tasodifiy o’zgaruvchining taqsimlanish zichligi grafigi) va shakl. 1.3.13 (T tasodifiy miqdorning taqsimlanish zichligi grafigi).

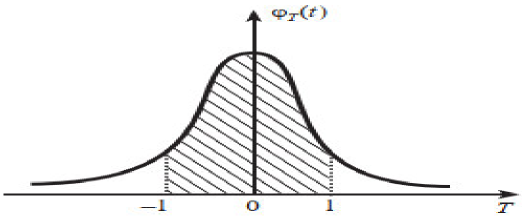
Vazifa 2. Burchak o’lchovlari standart og'ish σ_X=10″ bilan bajariladi . O’lchov xatolarining matematik kutilishi M(Δ)=0. Raqamli qiymatni aniqlang va taqsimot zichligi grafigida P(|Δ|<10) ehtimolligini ko’rsating.

Yechim. Istalgan ehtimollikni zichlik grafigida (1.54-rasm) soyali maydon sifatida ifodalaymiz. Ko’rinib turibdiki, bu ehtimollik X tasodifiy o’zgaruvchining matematik kutishga nisbatan simmetrik intervalga tushishi ehtimolidir.

Shuning uchun kerakli ehtimollik ehtimollik integralidir. P(|Δ|<10) = F(t)= F((10–0)/10) = F(1). Yoki F(1) =0,68 ehtimollik integrali jadvallari bo’yicha. Rasm. 1.55

normallashtirilgan tasodifiy o’zgaruvchining taqsimlanish zichligini ko’rsatadi T. Bu erda soyali maydon ham kerakli ehtimollikka mos keladi.





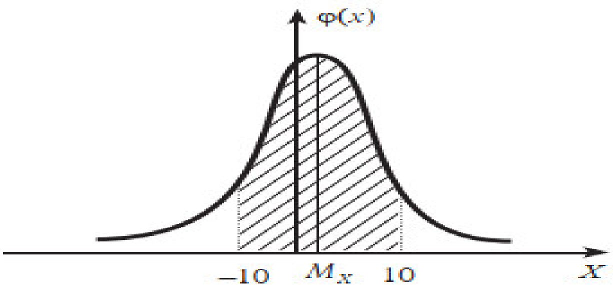
Rasm. 1.3.14. Ehtimollik integrali F(t)= P(|Δ|<10)

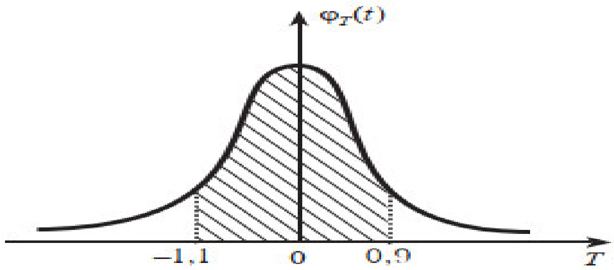
Rasm. 1.3.15. F(1) ehtimollik integrali

Vazifa 3. D chizig'i standart og'ishi 5 sm (σ_X= 5 sm) bo’lgan yorug'lik masofasini o’lchagich bilan o’lchanadi . O’lchov xatosining sistematik komponenti +1 sm (M(Δ) =1 sm). Haqiqiy o’lchov xatosi mutlaq qiymatda 10 sm dan oshmasligi ehtimolini aniqlang, ya'ni. P(|Δ|<10) ehtimolligini aniqlang.

Yechim. X=D tasodifiy miqdorning tarqalish zichligi grafigida kerakli ehtimollikni ifodalaymiz (1.56-rasm). Haqiqiy xato $t_1 = (-10-1)/10 = -1{,}1$ *va* $t_2 = (10-1)/10 = 0{,}9$ chegara qiymatlariga mos keladigan normallashtirilgan tasodifiy miqdorning chegara qiymatlarini aniqlaymiz. Shaklda. 1.57 - normallashtirilgan tasodifiy o’zgaruvchi T ning tarqalish zichligi grafigi, bu erda soyali maydonning maydoni kerakli ehtimollikka teng. t ning topilgan qiymatlarini hisobga olgan holda kerakli ehtimollik uchun tengliklar zanjirini yozamiz:

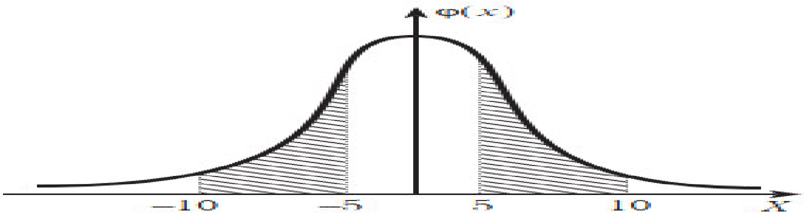
$$P(\, x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = F(t_2) - F(t_1) = 0{,}5(\Phi(t_2) - \Phi(t_1))$$
$$= 0{,}5(\Phi(0{,}9) - \Phi(-1{,}1)) = 0{,}5(\Phi(0{,}9) + \Phi(1{,}1)) = 0{,}5(0{,}63 + 0{,}73) = 0{,}68$$





Rasm. 1.3.16. Ehtimollik P(|Δ|<10)

Rasm. 1.3.17. P(|Δ|<10) ehtimolligi normallashtirilgan zichlik grafigi tasodifiy o’zgaruvchi



Rasm. 1.3.18. P(5<|Δ|<10) ehtimolligining grafik talqini

4-topshiriq. Chiziq standart og'ish σ_X=5 sm va M(Δ)=0 bo'lgan yorug'lik masofasi o'lchagich bilan o'lchanadi. Mutlaq qiymat bo'yicha haqiqiy o'lchov xatosi 5 dan 10 sm gacha bo'lgan oraliqda bo'lish ehtimolini aniqlang, ya'ni. P(5<|Δ|<10) ehtimolligini aniqlang.

Yechim. Rasmdagi X=D tasodifiy miqdorning taqsimlanish zichligi grafigida kerakli ehtimollikni ifodalaymiz. 1.3.18. Soyali maydonning maydoni kerakli ehtimollikka teng. Ko'rib turganingizdek, soyali maydon bir xil hududning ikkita maydonidan iborat. *P(5<|Δ|<10) = P(–10<Δ<–5) + P(5<Δ<10)= 2 P(5<Δ<10)* ni aniqlash talab qilinadi . $t_1 = (5 – 0)/10 = 0,5$ *va* $t_2 = (10 – 0)/10 = 1,0$ normallashtirilgan tasodifiy miqdorga o'tamiz. Biz tenglik zanjirini davom ettiramiz

P(5<|Δ|<10)= F(t2) - F(t1) = F(1,0) - F(0,5) = 0,68 - 0,38 = 0,30.

P (5<Δ<10) ga teng .

Vazifa 5. Burchak o'lchovlari amalga oshiriladi. O'lchov xatolarining matematik kutilishi *M(Δ) =0. Agar P(|Δ|<10) = 0,954* bo'lsa, standart og'ish sΔ ni aniqlang.

Yechim. M(Δ)=0 ekanligini hisobga olsak , kerakli ehtimollik matematik kutishga nisbatan simmetrik mintaqaga tushish ehtimoli, ya'ni. ehtimollar integraliga teng

$$P(|\Delta|<10) = P(|\Delta|< t\sigma_\Delta \Delta) = F(t)= 0,954.$$

F(t) =0,954 funksiya qiymati bo'yicha ehtimollik integrali jadvallaridan t = 2 argumentning qiymatini topamiz. Demak, $t\sigma_\Delta\Delta = 2\sigma_\Delta = 10$ va σ_Δ= 10/t =10/ 2. =5.

2-BOB. MATEMATIK STATISTIKANING ELEMENTLARI. O’LCHOV XATOLAR NAZARIYASI

Matematik statistika - matematikaning statistik ma'lumotlarni tizimlashtirish, qayta ishlash va ilmiy va amaliy maqsadlarda foydalanishning matematik usullariga bag'ishlangan bo’limi. Statistikaning matematik apparati ehtimollar nazariyasidir. Matematik statistika turli sohalarda qo’llaniladi. Ushbu o’quv qullanmada geodeziya, kadastr va unga aloqador sohalarda statistikadan foydalanish masalalari muhokama qilinadi.

Matematik statistikaning geodezik o’lchovlarni qayta ishlash usullari bilan shug'ullanadigan va o’lchangan qiymatlarni, o’lchash xatolarini va ularning funktsiyalarini tasodifiy o’zgaruvchilar sifatida ko’rib chiqadigan bo’limi o’lchov xatoliklari nazariyasi deb ataladi. Shuning uchun bu erda xatolarni o’rganish uchun zarur bo’lgan matematik statistika bo’limlari ko’rib chiqiladi.

O’lchovlar, o’lchov natijalarini qayta ishlash va shu asosda o’lchov xatolar nazariyasi taqdim etiladi.

§2.1. Matematik statistikaning asosiy tushunchalari

Umumiy aholi tushunchasi matematik statistikaning asosiy tushunchalariga kiradi. Bu tasodifiy o’zgaruvchining barcha mumkin bo’lgan qiymatlari to’plami. Kuzatishlar natijasida olingan uning $x_1,\ x_2, \dots\dots, x_n,$ chekli to‘plamining har qanday qismi umumiy yig‘ma to‘plamdan tanlanma deyiladi, bunda *n* tanlama kattaligidir. Ko’rinib turibdiki, *n* - namunani tashkil etuvchi qiymatlar soni (namuna hajmi) har doim cheklangan. Namuna, agar uning elementlari mustaqil va teng taqsimlangan bo’lsa (masalan, urnadan chiqarilgan to’pning soni, agar to’p qaytarilsa), takroriy emas, agar uning elementlari bog'liq bo’lsa (masalan, to’p) takroriy deyiladi. urnaga qaytarilmaydi).

Agar uning elementlari *X* tasodifiy o’zgaruvchining mavjudligining butun diapazoni bo’ylab tasodifiy tanlangan bo’lsa, namuna reprezentativ (vakil) deb ataladi. Muayyan hodisani o’rganish uchun tanlama, albatta, reprezentativ bo’lishi kerak.

Kuzatilgan qiymatlarning har qanday funktsiyasi $f(x_1,\ x_2, \dots\dots, x_n)$ statistik deyiladi, masalan, o’rtacha arifmetik $\bar{x} = \frac{[X]}{n}$, ildiz o’rtacha kvadrat xatosi $m = \sqrt{\frac{[(x-\bar{x})^2]}{n-1}}$.

O’lchov natijalari va ularning funktsiyalari tasodifiy o’zgaruvchilar bo’lib, ularning xatti-harakatlari taqsimot qonunlari bilan tavsiflanadi.

Matematik statistikaning asosiy vazifalari tanlov hajmining har doim cheklanganligi bilan bog'liq. Tabiiyki, tanlanma tasodifiy o’zgaruvchining taqsimlanishi haqida to’liq tasavvurni bermaydi. Shu sababli, o’rganilayotgan tasodifiy o’zgaruvchining xatti-harakatlariga xos bo’lgan, kuzatishlardagi xatolar va tanlanmaning cheklangan hajmidan kelib chiqadigan barqaror xususiyatlarni aniqlash kerak bo’ladi.

Tasodifiy o’zgaruvchilarning turi va miqdoriy xarakteristikalari ko’pincha aniq ma'lum emas, shuning uchun ular amalda ularning xususiyatlarini eng aniq va to’liq aks ettiruvchi tasodifiy o’zgaruvchilar harakatining matematik modellarini tanlashga intiladi. Bu tasodifiy o’zgaruvchilarning taqsimlanish qonunlariga va ularning miqdoriy xususiyatlariga taalluqlidir. Shu munosabat bilan bir qator muammolar paydo bo’ladi. Ba'zan tasodifiy o’zgaruvchining taqsimlanish parametrlarining ba'zi taxminiy qiymatlarini (baholarini) aniqlash va ushbu baholarning aniqligi xususiyatlarini hisoblash uchun eksperimental ma'lumotlardan (namunadan) foydalanish kifoya. Matematik statistikaning bunday masalalari tasodifiy miqdorlar parametrlarini baholash deb ataladi.

Boshqa hollarda, tasodifiy o’zgaruvchining xatti-harakati haqida to’liqroq bilim talab etiladi. Bunday holda, tanlanmadan tasodifiy o’zgaruvchining xatti-harakatlarining matematik modeli tanlanadi, bu uning taqsimlanishini eng to’liq tavsiflaydi. Shu munosabat bilan, matematik taqsimot modelini tanlash va foydalanilgan modelning izchilligini va tanlama natijalarini tekshirish muammolari paydo bo’ladi, ya'ni. o’lchangan qiymatlarni taqsimlashning matematik model bo’lgan taqsimotga muvofiqligini tekshirish. Ushbu muammo bilan chambarchas bog'liq bo’lgan eksperimental ma'lumotlarni tenglashtirish muammosi mavjud bo’lib, u berilgan statistik taqsimotni eng yaxshi tavsiflovchi nazariy taqsimot zichligi ϕX (x) egri chizig'ini moslashtirishdan iborat.

Matematik statistikada muhim o’rinni turli gipotezalarni tekshirish muammolari egallaydi. Masalan, turli namunalardagi matematik taxminlarning (o’rtacha) tengligi haqidagi farazlar yoki dispersiyalarning tengligi haqidagi farazlar. Oxirgi muammo dispersiya tahlili yordamida hal qilinadi. Tasodifiy o'zgaruvchining harakatini bashorat qilish vazifasi korrelyatsiya va regressiya tahlili usullari bilan hal qilinadi.

Odatda, namuna taqsimot seriyasining analogi bo'lgan statistik qator Rasmida tuziladi.

Ta'riflar	Interval chegaralari.			
	$\boldsymbol{x_i \div x_2}$	$\boldsymbol{x_2 \div x_3}$	......	$\boldsymbol{x_N \div x_{N\neq 2}}$
Mutlaqo $\boldsymbol{m_i}$	$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{k_2}$	......	$\boldsymbol{k_N}$
Nisbatan$\boldsymbol{Q_i = m_i/n}$	$\boldsymbol{Q_1}$	$\boldsymbol{Q_2}$	......	$\boldsymbol{Q_N}$

Bunday holda, namunaning barcha qiymatlari tushgan maydon N oraliqlarga bo'linadi. Bunday holda, har bir i-oraliq uchun k_1 (mutlaq chastota) qiymatlari soni hisoblanadi, ular uchun nisbiy chastota (chastota) $Q_i = k_i/n$ hisoblanadi.

N oraliqlar soni 10 - 20 tartibida tanlanadi va uzunligi, qoida tariqasida, bir xil va ki kamida besh bo'lishi kerak. Namuna elementlarining soni kamida bo'lishi kerak 50. Ko'pincha amaliyotda model sifatida, ya'ni. nazariy taqsimot normalni tanlaydi (masalan, markaziy chegara teoremasining barcha shartlari bajarilganda).

Empirik taqsimot funktsiyasi bu hodisaning nisbiy chastotasi bo'lib, namunaviy qiymatlar ba'zi sobit x dan oshmaydi, ya'ni.

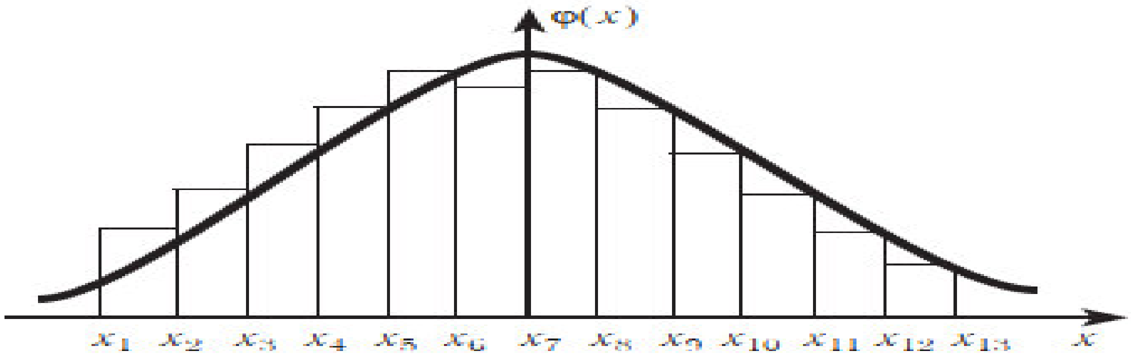
$$F^*(x) = Q(X < x) = \frac{k}{n} \qquad (2.1.1)$$

Bu erda: k −namunaviy qiymatlar soni x_i, x dan kichik.

Namuna taqsimoti diskret bo'lgani uchun, empirik taqsimot zichligi funktsiyasi mavjud emas, ammo taqsimot zichligi egri chizig'ining grafik analogi statistik taqsimot seriyasi (2.1-rasm) asosida qurilgan gistogramma deb ataladigan narsadir. namuna qiymatlari intervallarga guruhlangan $(x_1,\ x_2,);(x_2,\ x_3)$, va boshqalar. Har bir bunday intervalda balandligi bilan to'rtburchaklar qurilgan

$$h_i = \frac{k_i}{n(x_{i+1} - x_i)}$$

bu yerda $(x_{i+1} - x_i)$ − uzunligi i-oraliq interval.



Rasm. 2.1. Gistogramma va tekislash egri chizig'i

Q_i oralig'iga tushishning nisbiy chastotasiga teng. Bunda, bu $Q_i \frac{k_i}{n\to\infty} P_i$,

Bu yerda Ri tasodifiy o'zgaruvchining i-chi intervalga tushish ehtimoli bo'lib, ular $\boldsymbol{\phi}$(x) nazariy taqsimotning zichligi munosabati bilan bog'liq $P_i = \int_{x_n}^{x_{i+1}} \varphi(x)dx$.

Geometrik jihatdan P_i x_i dan x_{i+1} gacha bo'lgan oraliqdagi zichlik egri chizig'i ϕ(x) va x o'qi orasidagi maydonga mos keladi.

Nazariy taqsimot zichligining empirik analogi zichlik egri chizig'i s(x) bo'lib, u butun gistogrammaga eng yaxshi yaqinlashadi. Ushbu egri chiziq tenglashtirish egri chizig'i deb ataladi (2.1-rasmga qarang).

§2.2. XATOLAR NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI VA VAZIFALARI TASODIFIY VA TIZIMLI XATOLAR

Amalda, asboblarning mukammallik darajasidan va foydalanilgan texnikadan qat'i nazar, o'lchov xatolaridan butunlay qochish mumkin emas. O'lchov xatolari - bu o'lchangan qiymatlarning haqiqiy qiymatlaridan chetga chiqishi. Qo'pol, tizimli va tasodifiy xatolar mavjud. Kuzatish xatolari nazariyasi ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullaridan foydalangan holda ommaviy o'lchovlardagi tasodifiy va sistematik xatolarning xatti-harakatlarini o'rganish bilan shug'ullanadi. Shuni ta'kidlash kerakki, hozirda ehtimollar va matematik statistika nazariyasiga kiritilgan ko'plab qoidalar birinchi navbatda xatolar va kuzatishlar nazariyasi doirasida ishlab chiqilgan.

Qo'pol xatolar - kuzatuvchining har qanday noto'g'ri hisob-kitoblari, asboblarning noto'g'ri ishlashi, o'lchash vaqtida ularning siljishi, noto'g'ri usullar, tashqi sharoitlarning keskin yomonlashishi va boshqa sabablar. Xatolar nazariyasi kuzatuvlarning qo'pol xatolarini o’rganmaydi. Ammo xatolar nazariyasi muammolaridan biri bu savol bilan chambarchas bog'liq - qo’pol xatolarni o’z ichiga olgan o’lchovlarni rad etish.

Tasodifiy va tizimli o’lchash xatolar elementar xatolardan iborat bo’lib, ular quyidagilarni o’z ichiga oladi: asboblar qismlarini ishlab chiqarish va yig'ishdagi noaniqliklar, shaxsiy xatolar, tashqi sharoitdagi xatolar. Ikkinchisi sinishi, shamol ta'siri, konveksiya havo oqimlari va boshqalar tufayli yuzaga keladi. Shaxsiy xatolar ma'lum bir kuzatuvchiga xosdir va, masalan, uning ko’rish keskinligiga va hokazolarga bog'liq.

Tasodifiy xatolar nolga teng bo’lgan matematik kutishga ega, tizimli xatolar esa nolga teng bo’lmagan.

Harakatning tabiati bo’yicha doimiy tizimli xatolar ajralib turadi, ular belgi va kattalikni saqlaydi, bir tomonlama harakat qiladi, kattaligi o’zgaradi, lekin belgini saqlaydi, funktsional, qandaydir qonunga muvofiq o’zgaradi. Tizimli xatolar ham o’lchash shartlariga bog'liq. Tizimli xatolarning kattaligi ko’p jihatdan foydalanilgan metodologiyaga bog'liq. Tizimli xatolarning o’lchovlarning aniqligiga ta'sirini kamaytirish uchun ularning paydo bo’lish xususiyatini o’rganish kerak. Demak, agar ular shaxsiy xatolardan kelib chiqqan bo’lsa, kuzatishlar davomida kuzatuvchilarni almashtirish kerak, agar bu xatolar ishlatiladigan asbob turiga qarab o’zgarib tursa, u holda o’lchovlarni ketma-ket bajarish kerak, ularning har biri turli xil asboblar bilan amalga oshiriladi va hokazo. O’lchov texnikasini tanlashning asosiy maqsadi tizimli xatolarning matematik kutilishining nolga tengligiga erishishdir, chunki tizimli xatolar tasodifiy deb hisoblanishi mumkin.

Tasodifiy xatolar ko’pincha tizimli xatolarga qaraganda kattaroqdir, ammo o’zaro kompensatsiya tufayli ularning yakuniy natijalarga ta'siri zaifroq bo’lishi mumkin. Bu, ayniqsa, yuqori aniqlikdagi o’lchovlarda seziladi. O’lchovlarda ma'lum bir aniqlik bilan yakuniy natijalarni olish uchun tizimli xatolarning ta'sirini imkon qadar kamaytirish juda muhimdir. Bu ehtimollik nazariyasi qonunlari asosida o’rnatilgan va olingan o’lchov natijalari va ularning funktsiyalarining ushbu miqdorlarning haqiqiy qiymatlaridan og'ishlarini tavsiflovchi ma'lum raqamli mezonlar bilan ifodalanadi.

O’lchov xatolar nazariyasining asosiy vazifalari - bu mezonlarni aniqlash (ishlab chiqish va ularning bahosini olish); o’lchash va hisoblash xatolarining paydo bo’lishi va taqsimlanishi qonuniyatlarini o'rganish; tolerantliklarni o'rnatish (qo'pol xatolar mavjudligini ko'rsatadigan mezonlar); o'lchangan miqdorlarning ehtimollik qiymatlari va ularning funktsiyalari bo'yicha eng aniq hisoblash; kutilgan aniqlikni oldindan hisoblash va natijalarning to'g'riligini baholash.

O'lchovlarni matematik qayta ishlash masalalarida zaruriy va ortiqcha o'lchangan kattaliklar kabi tushunchalar muhim ahamiyatga ega.

Barcha etishmayotganlarni aniqlashingiz mumkin bo'lgan o'lchangan qiymatlarning minimal soni kerakli o'lchovlar soni deb ataladi. Ushbu raqamga kiritilgan o'lchovlarning o'zi zarur deb ataladi, qolganlari ortiqcha deb ataladi. Ular geodezik o'lchovlarda juda muhim rol o'ynaydi va majburiydir, chunki ular o'lchov va hisob-kitoblardagi qo'pol xatolarni aniqlashga, barcha o'lchangan va hisoblangan qiymatlarning to'g'riligini baholashga va ularni aniqlashning aniqligini oshirishga imkon beradi.

Tasodifiy o'lchash xatosi quyidagi formula bilan aniqlanadi:$\theta_i = x_i - M_X$, bu erda $x_i - i$ X ning i-o'lchov natijasi, uning matematik kutilishi M_X.

O'lchov xatolar nazariyasining eng muhim tushunchasi o'lchangan X kattalikning haqiqiy qiymati va miqdordir.

$$\Delta_i = x_i - X \tag{2.2.1}$$

Bu haqiqiy o'lchov xatosi deb ataladi. Tasodifiy thi va tizimli o'lchov xatosi bilan ifodalanishi mumkin C , ya'ni. $\Delta_i = x_i - M_X + M_X - X = \theta_i + C$, bu erda $C = M_X - X$.

Klassik xatolar nazariyasida $M_X = X$ deb taxmin qilinadi, ya'ni. o'lchovlarda tizimli xatolar yo'q yoki ular maxsus o'lchov texnikasi bilan qoplanadi. Bu holda $\Delta_i = \theta_i$ va

$$M_{\Delta_i} = M_{X_i} - M_X = 0$$

Shuning uchun, keyingi holatlarda, maxsus belgilangan holatlar bundan mustasno, haqiqiy xato Δ uning tasodifiy komponenti $\boldsymbol{\theta}$ sifatida tushuniladi.

Tasodifiy xatolarni taqsimlash

Tasodifiy o'lchash xatolar, yuqorida aytib o'tilganidek, taxminan bir xil dispersiyalarga ega bo'lgan bir qator elementar xatolardan iborat. Shuning uchun ularni Ляпунова teoremasi o'rinli bo'lgan to'liq tasodifiy miqdor deb hisoblash mumkin.

Binobarin, tasodifiy o’lchash xatolari normal taqsimotga bo’ysunadi, bu ko’plab eksperimental ma'lumotlar bilan tasdiqlangan.

$M_\Delta = 0$ ekanligini hisobga olsak, o’lchov xatosining taqsimlanish zichligi Rasmga ega

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \mathrm{e}^{\frac{-\Delta^2}{2\sigma^2}} \qquad (2.2.2)$$

bu erda σ - o’lchovlarning o’rtacha standart og'ishi (СКО).

СКО tushunchasi o’rtacha kvadrat o’lchov xatosi tushunchasi bilan chambarchas bog'liq (ilgari klassik ta'rifda o’rtacha kvadrat xato m haqiqiy xatoning ikkinchi boshlang'ich momenti sifatida tushunilgan $\alpha_2 = M_{\Delta_2}$, lekin $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$, va $\alpha_2 = \alpha_1 = M_\Delta = 0$, u holda m va σ tushunchalari mos keladi). Biroq, hozirgi vaqtda o’rtacha kvadrat xatosi m deb Gauss formulasi bilan aniqlanadigan o’lchov natijalaridan olingan o’rtacha kvadrat og'ishning taxmini tushuniladi.

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \qquad (2.2.3)$$

yoki Bessel formulasi bo’yicha

$$m^2 = \frac{[\Delta^2]}{n-1} \qquad (2.2.4)$$

Agar standart og'ish standart xato bilan almashtirilsa, (2.3) formula quyidagi Rasmni oladi:

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \mathrm{e}^{\frac{-\Delta^2}{2m^2}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}. \qquad (2.2.5)$$

Bu tenglama Gauss egri chizig'i tenglamasi (o’lchov xatosi egri chizig'i) deb ataladi (2.2-rasm). Bu erda h qiymati aniqlik o’lchovi deb ataladi, $h = \frac{1}{\sqrt{2m}}$.

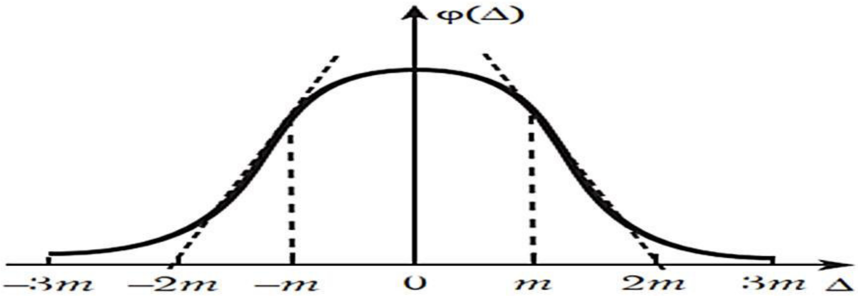
Gauss egri chizig'ining xususiyatlari.

1. Egri chiziq y o’qiga nisbatan simmetrikdir, chunki ϕ(Δ) funksiyasi juft, ya’ni, ϕ(Δ) = ϕ (–Δ). Haqiqatan ham,

$$\varphi(-\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \mathrm{e}^{\frac{-(-\Delta)^2}{2m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \mathrm{e}^{\frac{-\Delta^2}{2m^2}} = \varphi(\Delta).$$

2. Gauss egri chizig'i x o'qidan yuqorida yotadi, bu uning taqsimlanishining zichlik xususiyati bilan bog'liq.

3. Egri chiziq Δ=0 nuqtada maksimalga ega. Gauss egri chizig'ining maksimalini aniqlash uchun hosilani aniqlaymiz va uni nolga tenglaymiz.



Rasm. 2.1.2. Gauss egri chizig'i

$$\varphi'(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}m} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} \left(\frac{2\Delta}{2m}\right) = 0$$

Demak, $\varphi'(\Delta)$ = 0 da ϕ′(Δ) = 0. Zichlik Δ=0 nuqtada maksimal qiymatga etadi, ya'ni. $\varphi(\Delta = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}m}$.

4. Egri chiziq Δ o'qiga asimptotik tarzda yaqinlashadi, ikkita burilish nuqtasiga ega - biri o'ngga, ikkinchisi ϕ(Δ) o'qning chap tomoniga va burilish nuqtalarining abscissalari Δ = ±m ga teng.

Burilish nuqtasi - bu botiqlikning qavariqlikka o'tish nuqtasi. Shuning uchun undagi ikkinchi hosila nolga teng, ya'ni.

$$\varphi''(\Delta) = (\varphi'(\Delta))' = \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}m^3} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}}\right)' = -\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}m^3} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} \left(\frac{\Delta}{m^2}\right) = -\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}m^3} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} \left(-1 + \frac{\Delta^2}{m^2}\right) = 0$$

Birinchi omil nolga teng bo'lmagani uchun $\Delta^2 = m^2$ yoki Δ = ± m bo'ladi.

5. Burilish nuqtalarida egri chiziqqa teglar abtsissa o'qini Δ = ±2m nuqtalarda kesib o'tadi.

Δ = m nuqtadagi tangens tenglama quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varphi(\Delta) = \left(-\frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta}\right)_m (\Delta - \Delta_m) + \varphi(\Delta)_m ,$$

bu yerda m nuqtadagi Δ qiymati Δm = m.

Xuddi shunday,

$$\varphi(\Delta)_m = \varphi(m) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}m}e^{-0,5} \text{ и}$$

$$\left(\frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta}\right)_m = \varphi'(\Delta)_m = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}m^2}e^{-0,5}$$

Tangensning x o’qi bilan kesishishini aniqlash mumkin ikkita tenglama sistemasini yechish natijasida:qayerda

$$\begin{cases} \varphi(\Delta) = 0; \\ \varphi(\Delta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}m^2}e^{-0,5}(\Delta - m) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}m}e^{-0,5}, \end{cases}$$

Bu erda $\frac{1}{\sqrt{2\pi}m}e^{-0,5}\left(\frac{m-\Delta}{m} + 1\right) = 0$

Qavslar tarkibini nolga tenglashtirib, m – Δ + m = 0 yoki Δ = 2m ni olamiz.

Gauss egri chizig'ining simmetriyasini hisobga olsak, Δ = –m nuqtadagi tangens abscissa o’qini Δ = –2m nuqtada kesib o’tadi.

Ommaviy kuzatishlarning tasodifiy xatolarining xususiyatlari:

1) berilgan P ehtimolli absolyut qiymatdagi tasodifiy xatolar Δ ma'lum chegaradan oshmaydi. Masalan, |Δ| ≤ m ehtimolligi P=0,67, |Δ| ≤ 2m, ehtimolligi R=0,95. Bu gap ehtimollik integralining xossalaridan kelib chiqadi,

R(|Δ| ≤ m) = Φ(1) = 0,67 va P(|Δ| ≤ 2m) = Φ(2) = 0,95;

2) y o’qiga nisbatan xato egri chizig'ining simmetriyasi tufayli ijobiy va salbiy tasodifiy xatolar teng darajada mumkin, ya'ni.

P{ Δ>0} = P{Δ<0} = 0,5;

3) Chebishev teoremasi tufayli (tasodifiy xatolarning matematik kutilishi MΔ=0 bo‘lgani uchun) kuzatishlar sonining cheksiz ko‘payishi bilan tasodifiy xatoning o‘rtacha arifmetik qiymati nolga intiladi, ya’ni.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n} = 0 \qquad (2.2.6)$$

4) mutlaq qiymati kichik bo’lgan tasodifiy xatolar kattalarga qaraganda tez-tez uchraydi, chunki Oddiy taqsimot zichligi chizmasidan ko’rinib turibdiki, Δ qiymatlari nolga qanchalik yaqin bo’lsa, zichlik qiymatlari shunchalik katta bo’ladi.

Nazorat savollari

1. Umumiy aholini aniqlang.

2. Umumiy aholidan tanlab olishni aniqlang.

3. Statistik taqsimot qatorining ta'rifini bering.

4. Statistik taqsimot funksiyasini aniqlang.

5. Gistogrammaning geometrik ma'nosini tushuntiring.

6. Matematik statistika nima qiladi?

7. Matematik statistikaning asosiy vazifalari nimalardan iborat?

8. O'lchov xatoliklari nazariyasining asosiy vazifalarini ayting.

9. O'rtacha kvadrat xatosini aniqlang.

10. O'rtacha kvadrat xatolik qanday va standart og'ish?

11. Haqiqiy o'lchov xatosini aniqlang.

12. Ehtimoliy chetlanishni aniqlang.

13. Haqiqiy, tasodifiy va tizimli o'lchash xatolari qanday bog'liq?

14. O'lchov xatolarining taqsimlanishi qanday?

15. Tasodifiy, sistematik va yalpi o'lchash xatolarini aniqlang.

16. O'lchov xatosi egri chizig'ining xususiyatlarini sanab o'ting.

17. O'lchov xatolarining xossalari qanday?

18. 2m va 3m qoidalarining mohiyati nimada?

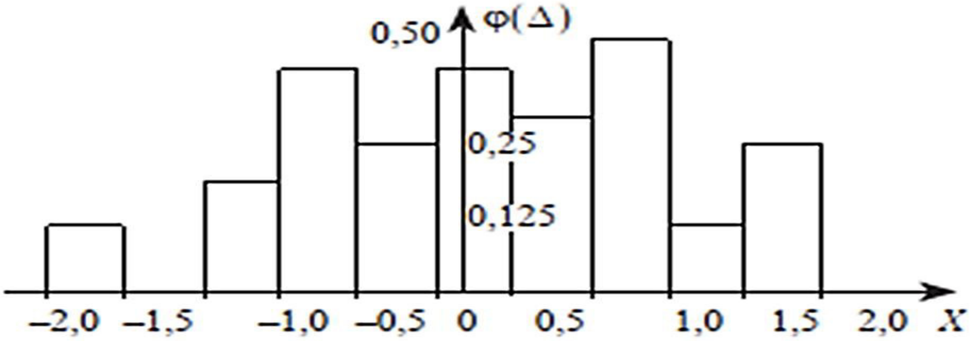
Yechimlar bilan bog'liq muammolar

Vazifa 1. Umumiy populyatsiyadan namuna berilgan, tanlama hajmi n=40: 0,70; -0,79; 1,06; 0,61; 1,40; 0,40; 1,36; 0,89; 0,59; -0,81; 0,09; 0,43; -0,04; -0,58; -0,31; -0,71; 0,85; 0,64; -1,25; 0,28; -1,89; 1,60; -0,20; -0,45; -0,10; -1,15; -1,20; -2,10; -0,90; -0,71; -0,09; 0,35; 1,33; 0,45; 0,61; 0,49; 0,64; -0,89; 0,02; -0,08. Statistik taqsimot qatorini tuzing.

Yechim. Ushbu namunaning diapazoni -2,10 dan 1,60 gacha. Keling, bu diapazonni teng uzunlikdagi 10 intervalga ajratamiz - 0,37. Keling , namunadagi qancha ki qiymatlari har bir intervalga tushganligini va $Q_i = k_i/n$ nisbiy chastotasining qiymatlarini hisoblaylik.

Частота	Interval chegaralari.									
	-2,10÷ -1,74	-1,73÷ -1,37	-1,36÷ -1,00	-0,99÷ -0,63	-0,62÷ -0,26	-0,25÷ 0,11	0,12÷ 0,48	0,49÷ 0,85	0,86÷ 1,22	1,23÷ 1,60
$\boldsymbol{k_i}$	2	0	3	6	4	6	5	8	2	4
$\boldsymbol{Q_i = k_i/n}$	0,05	0	0,075	0,15	0,10	0,15	0,125	0,20	0,05	0,10

Vazifa 2. *1-topshiriqda statistik taqsimot qatori aniqlanadi.* Berilgan statistik taqsimot qatori uchun gistogramma tuzing.



2.1.3-rasm. ustunli diagramma

Yechim. Gistogramma statistik taqsimot qatori asosida qurilgan taqsimot zichligining geometrik analogidir. Har bir oraliqda to'rtburchaklar qurilgan, uning maydoni $Q_i = k_i/n$ nisbiy chastotasiga teng . Har bir to'rtburchakning balandligi uning maydoniga teng, ya'ni. Q_i interval uzunligiga bo'linadi $h_i = \frac{Q_i}{x_{i+1} - x_i}$.

Частота	Interval chegaralari.									
	-2,10÷ -1,74	-1,73÷ -1,37	-1,36÷ -1,00	-0,99÷ -0,63	-0,62÷ -0,26	-0,25÷ 0,11	0,12÷ 0,48	0,49÷ 0,85	0,86÷ 1,22	1,23÷ 1,60
$\boldsymbol{k_i}$	2	0	3	6	4	6	5	8	2	4
$\boldsymbol{Q_i = k_i/n}$	0,05	0	0,075	0,15	0,10	0,15	0,125	0,20	0,05	0,10
$\boldsymbol{h_i}$	0,14	0	0,20	0,40	0,27	0,40	0,34	0,54	0,14	0,27

Nihoyat, gistogramma Rasmda ko'rsatilgan Rasmni oladi. 2.3.

Masala 3. Statistik taqsimot qatori berilgan. (2-muammoga qarang). Intervallarning chegara nuqtalarida statistik funktsiyani hisoblang.

Yechim.

F(-1,74)= Q (X <-1,74)=0,05;* *F *(-1,37)= Q (X <-1,37)=0,05;*

F(-1, 00)= Q(X<-1,00)=0,125;* *F*(-0,63)=Q(X<-0,63)=0,275;*

F(-0, 26)= Q(X<-0,26)=0,375;* *F*(0,11)=Q(X<0,11)=0,525;*

F(0,48)=Q(X<0,48)=0,65;* *F*(0,85)=Q(X<0,85)=0,85;*

F(1,22)=Q(X<1,22)=0,90;* *F*(1,61)=Q(X<1.61)=1,00.*

Muammo 4. Umumiy aholidan namuna berilgan. Namuna hajmi n=40:

0,70; -0,79; 1,06; 0,61; 1,40; 0,40; 1,36; 0,89; 0,59; -0,81; 0,09; 0,43; -0,04; -0,58; -0,31; -0,71; 0,85; 0,64; -1,25; 0,28; -1,89; 1,60; -0,20; -0,45; -0,10; -1,15; -1,20; -2,10; -0,90; -0,71; -0,09; 0,35; 1,33; 0,45; 0,61; 0,49; 0,64; -0,89; 0,02; -0,08.

Berilgan namunadan o'rtacha qiymatni va standart xatoni aniqlang .

Yechim. Namuna elementlarining o'rtacha arifmetik qiymati $\bar{x} = \frac{[x]}{n} = 0{,}54.$

O'rtacha kvadrat xato Bessel formulasi bilan aniqlanadi $m = \sqrt{\frac{[x-\bar{x})^2]}{n}} = 0{,}89.$

§2.3. TENG BO'LMAGAN O'LCHOVLARNING ANIQLIGINI QAYTA ISHLASH VA BAHOLASH OG'IRLIKLAR HAQIDA TUSHUNCHA

Teng bo'lmagan o'lchovlar - dispersiyalari bir-biriga teng bo'lmagan o'lchovlar. Bularga turli xil aniqlikdagi asboblar yoki sezilarli darajada boshqacha sharoitlarda qilingan o'lchovlar kiradi. Shu bilan birga, teng yoki teng bo'lmagan o'lchovlar modelini tanlash, birinchi navbatda, umumiy fikrlar bilan belgilanadi va to'plangan tajribaga asoslanadi. Masalan, turli kuzatuvchilar tomonidan o'lchangan, ammo bir xil aniqlikdagi teodolitlar bilan o'lchangan burchaklarning qiymatlari teng darajada aniq hisoblanadi.

Kvadrat xatolaridan tashqari , aniqlikning nisbiy o'lchovi bo'lgan og'irliklar bilan tavsiflanadi. Og'irlik dispersiyalarning nisbati sifatida aniqlanadi : standart sifatida butun seriya uchun olingan o'lchov va vazni hisoblangan o'lchov, ya'ni.

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \qquad (2.3.1)$$

bu erda σ_i - standart og'ish i-o'lchov; P_i - bu o'lchovning og'irligi; σ_0 - mos yozuvlar o'lchovining standart og'ishi.

Shunday qilib, og'irlik mos yozuvlar va i-o'lchovlarning aniqligi nisbatini aniqlaydi. Malumot va i-o'lchovlarning standart og'ishlari teng bo'lganda, og'irlik P_i =1. Demak, σ_0^2 - og'irligi bittaga teng bo'lgan o'lchov dispersiyasi (og'irlik birligining dispersiyasi). Agar standart og'ishlarning qiymatlari noma'lum bo'lsa, ularning taxminlari qo'llaniladi, ya'ni. kvadrat xatolarni anglatadi va keyin

$$P_i \approx \frac{\mu^2}{m_i^2}. \qquad (2.3.2)$$

Formula (2.3.2) bo'yicha aniqlangan og'irlik taxminiydir.

Shuni ta'kidlash kerakki, og'irligi birga teng bo'lgan mos yozuvlar o'lchovi haqiqatda ham, xayoliy ham bo'lishi mumkin. Malumot o'lchovini tanlash o'zboshimchalik bilan amalga oshiriladi va hisob-kitoblarning qulayligi asosida aniqlanadi.

Ko'pincha, σ_0 va μ ni tanlash erkinligidan foydalanib, o'lchovlarning og'irliklari σ_i yoki m_i ni bilmasdan o'rnatilishi mumkin. Og'irliklarni hisoblashda ikkita muhim raqamni hisobga olish kifoya.

Misollar. 1. Xuddi shu qurilma S_i uzunlikdagi n chiziqni o'lchasin. O'lchovlarning og'irliklarini aniqlang.

Yechim. Chiziqning har bir kilometrini o'lchash bir xil standart og'ish bilan amalga oshirilgan deb hisoblasak, biz mos yozuvlar o'lchovi sifatida 1 km uzunlikdagi chiziqning o'lchamini tanlaymiz. Keyin $\sigma_{1km} = \sigma_0$. Biz har bir o'lchangan S_i chizig'ini k segmentlarning yig'indisi $S_i = 1\ km$ sifatida ifodalash mumkinligini taxmin qilamiz, ya'ni $S_i = S_1 + S_2 + \cdots + \cdots S_k$, keyin yozishimiz mumkin

$$\sigma_{S_i}^2 = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{dS_i}{dS_j}\right)_0^2 \sigma_{S1km}^2 = \sum_{j=1}^{k} (1)^2 \sigma_0^2 = \sigma_0^2 k$$

Bu erda j - S_i chiziqdagi kilometr segmentining soni; k - S_i chizig'idagi kilometr segmentlari soni. Shuning uchun bu chiziqning o'lchamining og'irligi

$$P_{S_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 k} = \frac{1}{k}.$$

Ushbu hisob-kitoblarda uzunligi *1 km* bo'lgan chiziqning xayoliy o'lchovi og'irligi birga teng bo'lgan o'lchov sifatida qabul qilinadi.

2. Bitta qurilma bilan bir nechta burchaklar o'lchandi, qadamlar soni har birida n_i. Har bir burchakning o'rtacha qiymatlarining og'irliklarini toping.

Yechim. Burchak o'lchovining standart og'ishini n_i dan bir qadamda belgilab, biz bor

$$\sigma_{i_{cp}}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n}; \quad P_i = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{i_{cp}}^2} = \frac{\sigma_1^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_i}} = \frac{\sigma_0^2}{\frac{\sigma_0^2}{n_i}} = n_i$$

Og'irligi birga teng bo'lgan mos yozuvlar o'lchovi uchun burchakni o'lchash bir qadamda olinadi, shuning uchun $\sigma_0 = \sigma_1$. Biz $P_i = n_i$ oldik . Agar mos yozuvlar o'lchovi sifatida C qadamlardan burchakning o'rtacha qiymatini olsak, u holda $\sigma_0^2 = \frac{\sigma_1^2}{C}$ u holda bu holda *i*-burchakning o'rtacha qiymatining n_i qadamlardan og'irligi bo'ladi .

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{i_{cp}}^2} = \frac{\sigma_1^2/C}{\sigma_1^2/n_i} = \frac{n_i}{C}$$

3. Xuddi shu asbob bilan o'lchangan n_i -gon burchaklarining yig'indisi hisoblandi, masalan, uchburchakdagi burchaklar yig'indisi ($n_i = 3$ topildi. Yig'indining og'irligini toping.

Yechim. n_i -gondagi bir burchak o'lchamining standart og'ishini σ_1 bilan belgilab, burchaklar yig'indisining standart og'ishini $\sigma_i = \sigma_1\sqrt{n_i}$, og'irlik $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2 n_i}$. Rasmida ifodalaymiz.

Agar $\sigma_0 = \sigma_1$bo'lsa, $P_i = 1/n_i$. bo'ladi. Agar $u = x\sqrt{P},$ funksiya mavjud bo'lsa, bu erda *x*-o'lchash natijasi va *P* - uning og'irligi, u holda bunday funktsiyaning og'irligi $P_i = (\sqrt{P})^2 \frac{1}{P} = 1$ formula bilan aniqlanadi.

Shuning uchun, o'lchov natijasini uning og'irligining kvadrat ildiziga ko'paytirganda, mahsulotning og'irligi bir ga teng bo'ladi. Ushbu printsipga ko'ra, teng bo'lmagan o'lchovlarni teng bo'lganlarga kamaytirish amalga oshiriladi.

(1.22) formulani hisobga olgan holda $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. mustaqil argumentlar funksiyasining teskari vaznini aniqlash oson. Darhaqiqat, (1.22) ifodadagi chap va o'ng qismlarni σ_0^2 ga bo'lish orqali funktsiyaning teskari og'irligini hisoblash mumkin.

$$\frac{1}{P_Y} = \sum \left(\frac{df}{dX_i}\right)_0^2 \frac{1}{P_{X_i}}. \qquad (2.3.3)$$

Misollar. 1. Uchburchakda uchta burchak β_i o'lchanadi, bir o'lchovning o'rtacha kvadrat xatolari va qadamlar soni mos ravishda $m_1 = 3''$ ga teng; $n_i = 4$; $m_2 = 4''$ $n_2 = 9$; $m_1 = 5''$; $n_3 = 12$. Har bir burchakning o'rtacha qiymatining og'irliklarini va qoldiqning og'irligini toping, $\mu = m_1$ xatolikni og'irlik birligi xatosi sifatida qabul qiling.

Yechim. Burchaklarning o'rtacha qiymatlarining og'irliklari $P_i = \frac{\mu}{M_i^2}$ formulasi bilan aniqlanadi, bu erda $M_i = m_i/\sqrt{n_i}$, ni va $\mu = m_i$. Bizda ... bor:

$$P_1 = \frac{m_1^2}{m_1^2} n_1 = 4;\ P_2 = \frac{m_1^2}{m_1^2} n_2 = \frac{9}{16} \cdot 9 = 5{,}1;\ \ P_3 = \frac{m_1^2}{m_1^2} n_3 = \frac{9}{25} \cdot 12 = 4{,}3;$$

Biz (2.53) formuladan foydalanib, nomuvofiqlikning og'irligini topamiz, bu erda $u = \Sigma\beta_i - 180^\circ$, ya'ni

$$1/P_u = 1/P_1 + 1/P_2 + 1/P_3 = 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}23 = 0{,}68;$$

keyin $P_u = 1{,}47$

2. μ og'irlikning birlik xatosi sifatida m_S ni qabul qilib, Δx = Scosα koordinatali o'sishning og'irligini toping.

Yechim. Bizda ... bor

$$\frac{1}{P_{\Delta x}} = \frac{1}{P_S}\cos^2\alpha + \frac{1}{P_S} S^2 \sin^2\alpha;\ \ P_S = \frac{\mu^2}{m_S^2} = 1; \quad P_S = \frac{\mu^2}{m_S^2} = 1;\ P_\alpha = \frac{m_S^2}{m_\alpha^2}.$$

Bunday holda, m_α xatosi radianlarda ifodalanishi kerak, ya'ni. m_α *p* ga bo'linadi.

3. Funksiyaning og'irligini toping

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}. \qquad (2.3.4)$$

Bu erda x_i - o'lchov natijalari, P_i - ularning og'irliklari.

Yechim. Ma'lumki, $\frac{d\bar{x}}{dx_i} = \frac{P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$ shuning uchun

$$\frac{1}{P_{\Delta x}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}\right)^2 \frac{1}{P_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} P_i};\ P_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} P_i\,. (2.55)$$

Formulalar (2.51) yoki (2.52) yordamida bir hil o'lchov natijalarining og'irliklarini hisoblashda $\text{C} = \sigma_0^2$ (yoki μ^2 o'lchami σ_0^2 $\left(m_i^2\right)$ o'lchamiga teng qabul qilinadi. Bunday holda, vazn o'lchovsiz miqdordir.

Agar o'lchovlar bir hil bo'lmasa, unda og'irliklar shunday tanlanishi kerakki, bir hil bo'lmagan o'lchovlardan ba'zi bir hil qiymatlarni hisoblagandan so'ng, ikkinchisining og'irliklari bir xil o'lchamda bo'ladi.

Masalan, geometrik va trigonometrik nivelirlashdan olingan etalon belgisining o'rtacha og'irlik qiymatini aniqlash talab etilsin, B asosida qurilmaning bir sozlamasi bilan bajarilgan. Vaziyatni soddalashtirish uchun, biz nishab burchagi v=0° deb taxmin qilishimiz mumkin. $m_v = 5''$bo'lsin va geometrik nivelirlashdan olingan balandlikning o'rtacha kvadrat xatosi, $m_H^\Gamma = 5\,\text{мм}$. Keling, bu xatoni og'irlik birligining o'rtacha kvadrat xatosi sifatida qabul qilaylik.

Bu muammoni (1.22) formulalar yordamida hal qilish mumkin. v=0° ekanligini hisobga olsak, o'rtacha kvadrat xato m_H^Γ quyidagicha ifodalanishi mumkin

$$m_H^\text{T} = \sqrt{\left(\frac{dH}{dv}\right)^2 \frac{m_v^2}{\rho^2}} = \frac{B}{\cos^2 v}\frac{m_v}{\rho} = \frac{B}{\rho} m_v \qquad (2.3.5)$$

Bu erda $H^T = H_{\text{исх}} + Btgv.$

$$P_H^\text{T} = \frac{(m_H^\Gamma)^2}{(m_H^\text{T})^2} = \frac{(m_H^\Gamma)^2}{m_v^2}\frac{\rho^2}{B^2} = \frac{\rho^2}{B^2} \qquad (2.3.6)$$

(2.56) formula bo'yicha va geometrik nivelirlashdan bir jinsli kattaliklar bo'lgan nuqta belgilarining o'rtacha kvadrat xatolari olinadi. μ = mHΓ uchun PH va PHO og'irliklari o'lchamsiz kattaliklardir. Bundan tashqari, belgining o'rtacha og'irlik qiymatini aniqlash uchun siz (2.3.4) formuladan foydalanishingiz mumkin. Xuddi shu muammoni (2.3.5) formula yordamida hal qilish mumkin, buning uchun bir xil bo'lmagan o'lchovlarning og'irliklarini belgilash kerak. Shunday qilib

$$P_H^\Gamma = 1;\ P_v = \frac{(m_H^\Gamma)^2}{m_v^2/\rho^2} = \frac{S^2}{S^2}\rho^2 = \rho^2.$$

Keyinchalik

$$\frac{1}{P_H^T} = \left(\frac{dH}{dv}\right)^2 \frac{1}{P_v} = \frac{B^2}{\cos^2 v}\frac{1}{\rho^2} = \frac{B^2}{\rho^2}$$

va P_H^T (2.57) ga to'g'ri keladi.

B asosi bilan to'g'ri burchakli uchburchakni tashkil etuvchi m_H^{T} va m_v nisbatiga asoslanib , P_H^T ga og'irlik belgilasak, xuddi shunday natijaga erishish mumkin :

$$m_H^{\text{T}} = \frac{m_v}{\rho}B; \qquad P_H^{\Gamma} = \frac{(m_H^{\Gamma})^2}{m_v^2 B^2}\rho^2 = \frac{\rho^2}{B^2} \qquad (2.3.7)$$

Bunday holda, og'irlik taxminiy bo'ladi, chunki oldingi usullardan farqli o'laroq, *v* burchakning qiymati hisobga olinmaydi. Natijalar faqat egilish burchagi *v* nolga teng bo'lganligi sababli mos keldi. Amalda (2.58) formuladan foydalangan holda olingan natijalar qoniqarli deb hisoblanadi. Shuni ta'kidlash kerakki, chiziqli burchakli konstruktsiyalarni tuzatishda burchakning og'irligi odatda formula bo'yicha hisoblanadi.

$$P_\beta = \frac{m_S^2}{m_\beta^2} \qquad (2.3.8)$$

Bu yuqoridagi mulohazalarga zid emas, chunki tuzatishda *p* qiymati tuzatish tenglamalari koeffitsientlariga va *l* erkin terminiga kiritiladi.

ANIQLASH UCHUN UMUMLASHTIRILGAN ANIQLIKNI BAHOLASH FORMULASI VEKTOR FUNKSIYASINING TESKARI OG'IRLIK MATRITSASI.

(1.60), (1.61) yoki (1.62), (1.63) formulalarini hisobga olgan holda $Y=f(X_1, X_2,\ldots,Xn)$ funksiyaning teskari vaznini aniqlash oson.

Darhaqiqat, (1.60) va (1.61) ifodalardagi chap va o'ng qismlarni σ_0^2 ga bo'lish va (2.51) ni hisobga olgan holda, argument funktsiyasining teskari og'irligini quyidagi formula bo'yicha hisoblash mumkin: O'zaro bog'liqlik uchun

$$\frac{1}{P_Y} = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0^2 \frac{1}{P_{X_i}} + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0 \frac{r_{x_i x_j}}{\sqrt{P_{x_i}P_{x_j}}}; \qquad (2.3.9)$$

o'zaro bog'liq bo'lmagan dalillar uchun

$$\frac{1}{P_Y} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0^2 \frac{1}{P_{X_i}} \tag{2.3.10}$$

(2.60) formula zarur bo’lganda umumiy holatga keltirilishi mumkin vektor funksiya hosil qiluvchi bir necha funksiyalar to’plamining og‘irliklarini aniqlang (ko’p o’lchovli holat). Buning uchun teskari og'irlik matritsasi tushunchasi kiritilgan bo’lib, u korrelyatsiya matritsasi bilan quyidagi munosabat bilan bog'liq:

$$P_X^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{K}_X \tag{2.3.11}$$

Qayerda

$$P_X^{-1} = Q_X = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \cdots & Q_{2n} \end{pmatrix} \tag{2.3.12}$$

Korrelyatsiya matritsasi va formulasining ta'rifidan (2.62) matritsa bo’lgan teskari og'irlik matritsasi elementlarining ma'nosi aniq bo’ladi,

$$P_X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m_{x_1}^2}{\mu^2} & \frac{K_{x_1x_2}}{\mu^2} & \cdots & \frac{K_{x_1x_n}}{\mu^2} \\ \frac{K_{x_1x_2}}{\mu^2} & \frac{m_{x_1}^2}{\mu^2} & \cdots & \frac{K_{x_2x_n}}{\mu^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{K_{x_1x_n}}{\mu^2} & \frac{K_{x_2x_n}}{\mu^2} & \cdots & \frac{m_{x_n}^2}{\mu^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_{X_i}} & \frac{r_{x_ix_j}}{\sqrt{P_{x_i}P_{x_j}}} & \cdots & \frac{r_{x_1x_n}}{\sqrt{P_{x_1}P_{x_n}}} \\ \frac{r_{x_1x_2}}{\sqrt{P_{x_1}P_{x_2}}} & \frac{1}{P_{X_2}} & \cdots & \frac{r_{x_2x_n}}{\sqrt{P_{x_2}P_{x_n}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{r_{x_1x_n}}{\sqrt{P_{x_1}P_{x_n}}} & \frac{r_{x_2x_n}}{\sqrt{P_{x_2}P_{x_n}}} & \cdots & \frac{1}{P_{X_n}} \end{pmatrix}$$

Keyinchalik (1.59) formulada chap va o’ng qismlarni og'irlik birligining dispersiyasiga bo’linib, biz olishimiz mumkin.

$$\frac{1}{\sigma_0^2}\mathrm{K}_Y = \frac{1}{\sigma_0^2}A\mathrm{K}_Y A^T \tag{2.3.13}$$

Y vektor funktsiyasining teskari og'irlik matritsasi qaerdan olinadi:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{Y}}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{\mathrm{X}}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \tag{2.3.14}$$

yoki

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\mathrm{X}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \tag{2.3.15}$$

Formula (2.66) teskari og'irlik matritsasiga qo’llaniladigan aniqlikni baholash uchun umumlashtirilgan formuladir.

Bir qator teng bo'lmagan o'lchovlarni qayta ishlash

Agar og'irliklari mos ravishda (*P_1, P_2, ..., P_n*) ga teng bo'lgan bir qator mustaqil o'lchovlar (x_1, x_2, ..., x_n) mavjud bo'lsa, bu holda M(X) matematik kutish uchun eng yaxshi baho.) (va sistematik xatolar bo'lmasa, X ning haqiqiy qiymati uchun) umumiy arifmetik o'rtacha (o'rtacha vaznli) hisoblanadi.

$$\bar{x} = \frac{[P_x]}{[P]} \tag{2.3.16}$$

Og'irlik birligining dispersiyasi uchun o'rtacha kvadrat xatosining kvadrati

$$\mu^2 = \frac{[Pv^2]}{n-1} \tag{2.3.17}$$

(Teng bo'lmagan o'lchovlar uchun Bessel formulasi). Bunda, avvalgidek, umumiy arifmetik o'rtachadan $u_i = x_i - \bar{x}$ og'ishlar quyidagi xossalarga ega: [Pυ]=0; [P$υ^2$] = min.

Buni maksimal ehtimollik usuli yordamida isbotlash mumkin. x_i normal taqsimotga bo'ysunganligi sababli , ehtimollik funktsiyasi Rasmga ega

$$L = L(x_1, x_2, \dots x_n, a_1, a_2) = \prod_{i=1}^{n} L(x_1, a_1, a_2), \tag{2.3.18}$$

bu yerda $a_1 =$ M(X); $a_2 = \sigma_0^2$; x_i - og'irligi bilan *i*- o'lchov qiymati $P_i = \sigma_0^2/\sigma_i^2$. Shuning uchun *L* ni formula bilan aniqlash mumkin

$$L = L(x_1, a_1, a_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x_i - a_1)^2}{2\sigma_i^2}} \tag{2.3.19}$$

yoki $\sigma_i^2 = \sigma_0^2/P_i$,ekanligini hisobga olsak ,

$$L(x_1, a_1, a_2) = \frac{\sqrt{P_i}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a_2}} e^{-\frac{(x_i - a_1)^2 P_i}{2a_2}} \tag{2.3.20}$$

Qayerda

$$L = \prod_{i=1}^{n} L\,(x_i, a_1, a_2) = \frac{\sqrt{P_1 P_2 \dots P_n}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} a_2^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i (x_i - a_1)^2}{2a_2}} \tag{2.3.21}$$

(2.72) ifodaning logarifmi formula bilan aniqlanadi

$$\ln L = \ln \frac{\sqrt{P_1 P_2 \dots P_n}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} - \frac{n}{2} \ln a_2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i\,(x_i - a_1)^2}{2a_2} \tag{2.3.22}$$

Ushbu funktsiyaning maksimalini aniqlash uchun ikkita tenglama tuzish va yechish kerak: $\frac{\partial \ln L}{\partial a_1} = 0$; $\frac{\partial \ln L}{\partial a_2} = 0$; yoki

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_1} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i\,(x_i - a_1^*)}{a_2^*} \qquad (2.3.24)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_1} = -\frac{n}{2a_2^*} + \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i\,(x_i - a_1^*)^2}{2(a_2^*)^2} \qquad (2.3.25)$$

(2.74) tenglama shuni bildiradi $\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = a_1^* \sum_{i=1}^{n} P_i$ Keyin matematik kutishning taxmini bo’ladi $a_1^* = \frac{[P_x]}{[P]} = \bar{x}$.

(2.75) tenglamadan birlik og'irligining dispersiyasini taxmin qilish mumkin

$a_2^* = \frac{[Pv^2]}{[n]}$, bu yerda $v_i = x_i - \bar{x}$.

§2.3-bo’limda teng darajada aniq o’lchovlar bo’lsa, taxminlar ko’rsatilgan $a_1^* = \bar{x}$ va $\frac{n-1}{n} a_2^*$ yaxshi sifatga ega.

Xuddi shunday, teng bo’lmagan o’lchovlar uchun ushbu bayonotning to’g'riligini isbotlash mumkin. Demak, xolis baholovchi a_2^* μ^2 miqdori bo’lib, u Bessel formulasi bilan aniqlanadi. $\mu = \sqrt{\frac{Pv^2}{n-1}}$.

(2.74) tenglama $[Pv^2]$ = 0 ekanligini bildiradi.

Eng kichik kvadratlar usuli $[Pv^2]$=min sharti bajarilganda L funksiyaning maksimal darajasiga erishiladi . Shuning uchun , normal taqsimotga bo’ysunadigan bir qator o’lchovlar holatida maksimal ehtimollik va eng kichik kvadratlar usuli bilan olingan taxminlar bir xil bo’ladi.

X qiymati xato bilan aniqlanadi $m_{\bar{x}} = M = \mu/\sqrt{[P]}$ va sistematik xatolar mavjud bo’lganda, $M = \sqrt{\frac{\mu^2}{[P]} + c^2}$. Xatolarning o’rtacha kvadrat xatolarini aniqlash uchun formulalar qo’llaniladi. $m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}$; $m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[P]}}$.

X ning haqiqiy qiymati va birlik og'irligining dispersiyasi uchun ishonch oraliqlari bir xil aniq o’lchovlarni qayta ishlashda bo’lgani kabi quriladi. Ular shunday ko’rinadi:

$$\bar{x} - t_a m_{\bar{x}} < X < \bar{x} + t_a m_{\bar{x}};\ \gamma_1^2 \mu^2 \le \sigma_0^2 \le \gamma_2^2 \mu^2.$$

σ_0 va $\sigma_{\bar{x}}$ uchun ishonch oraliqlari quyidagicha bo'ladi:

$$\gamma_1\mu \leq \sigma_0 \leq \gamma_2\mu; \quad \gamma_1 m_{\bar{x}} \leq \sigma_{\bar{x}} \leq \gamma_2 m_{\bar{x}}$$

Agar $\Delta_i = x_i - X$, haqiqiy o'lchov xatolari ma'lum bo'lsa, u holda muammo Gauss formulasi yordamida o'lchov aniqligini baholashga tushiriladi. $\mu^2 = \sqrt{\frac{P\Delta^2}{n}}$

Bir qator teng bo'lmagan o'lchovlarni qayta ishlashda hisob-kitoblar quyidagi tartibda amalga oshiriladi.

1. (2.54) ifoda o'rniga $\bar{x} = x' + [P_\varepsilon]/[P]$, formulasi qo'llaniladi, bu erda $\varepsilon_i = x_i - x'$; x' - X uchun taxminiy qiymat.

2. υ_i sapmalar aniqlanadi va nazorat $[P\upsilon] = -\Delta_{\text{окр}}[P]$ bajariladi, bunda $\bar{x}$ ni hisoblashda yaxlitlash xatosi $\Delta_{\text{окр}} = \bar{x}_{\text{окр}} - \bar{x}$ bo'ladi.

3. Nazorat bilan $[P\upsilon^2]$ ni hisoblang

$$[P\upsilon^2] = [P\varepsilon^2] - \frac{[P\varepsilon]^2}{[P]}, \tag{2.3.26}$$

xatolar μ, M, m_μ, m_M yoki ishonch oraliqlarini qurish. Natija $x_{\text{окр}} \pm M$ ifoda yoki ishonch oralig'i sifatida yoziladi.

$[P\upsilon]$ va $[P\upsilon^2]$ uchun nazorat tengligini isbotlaylik. Hisob-kitoblarda yaxlitlangan qiymat $\bar{x}_{\text{окр}}$ ga ko'ra qo'llaniladi bunga $\upsilon_i = x_i - \bar{x} - \Delta_{\text{окр}}$. Shunday qilib, $[P\upsilon] = [Px] - [P]\bar{x} - [P]\Delta_{\text{окр}}$, chunki $[Px] = [P]\bar{x}$, keyin $[P\upsilon] = -\Delta_{\text{окр}}[P]$.

Agar biz $\upsilon_i$farq hosil qilsak $\upsilon_i - \varepsilon_i = x_i - \bar{x} - x_i + x' = -\frac{[P\varepsilon]}{[P]}$, u holda $\varepsilon_i = \upsilon_i + \frac{[P\varepsilon]}{[P]}$,

Ushbu tengliklarning chap va o'ng qismlarini ko'targandan keyin kvadrat, P_i ga ko'paytirib, ularni ***i*** ga qo'shib olish mumkin: $[P\varepsilon^2] = [P\upsilon^2] + 2[P\upsilon]\frac{[P\varepsilon]}{[P]} + [P]\left(\frac{[P\varepsilon]}{[P]}\right)^2$.

Chunki $[P\upsilon] = 0$, keyin $[P\upsilon^2] = [P\varepsilon^2] - \frac{[P\varepsilon]^2}{[P]}$.

Misol. Turli xil n_i qadamlar soni bilan o'lchangan bir x_i burchakning o'rtacha qiymatlarini matematik ishlov berish. Hisob-kitoblarning qulayligi uchun $P_i = n_i/$

3 formulasini qo'llash tavsiya etiladi. Hisob-kitoblar jadvalda amalga oshiriladi.

Yechim

O'lchov raqami	x_i	n_i	p_i	ε_i	$p_i\varepsilon_i$	$p_i\varepsilon_i^2$	v_i	p_iv_i	$p_iv_i^2$
1	89°47′16″	6	2	+10	+20	200	+6	+12	72
2	09	18	6	+3	+18	54	-1	-6	6
3	06	3	1	0	0	0	-4	-4	16
4	10	15	5	+4	+20	80	0	0	0
5	23	6	2	+7	+14	98	+3	+6	18
6	08	12	4	+2	+8	16	-2	-8	16
x′ = 89°47′06″			Σ=20		Σ=80	Σ=448		Σ=0	Σ=128

$\frac{[P\varepsilon]}{[P]} = 4{,}0$ x′ = 89°47′10,0″; $\Delta_{\text{окр}} = 0$; $\mu = \sqrt{\frac{125}{5}} = 5{,}1''$; $M = \frac{5{,}1}{\sqrt{29}} = 1{,}1''$

O'rta kvadrat xatolar ham tasodifiy o'zgaruvchilardir.Shuning uchun ular uchun quyidagi formulalar yordamida o'rtacha kvadrat xatolar (xatolar)ni ham topish mumkin:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{5{,}1}{\sqrt{10}} 1{,}6''; \ m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[P]}} = 0{,}36''$$

Shunday qilib, natija 89°47′10,0″+1,1″. α =0,95 da ishonch oralig'i 89°47'07,2″ <X< 89°47'12,8″. α=0,95 va erkinlik darajalari soni r=6-1=5 uchun Talabalar taqsimoti jadvallaridan (2-ilova) t_a=2,57 koeffitsienti tanlanadi. Ishonchni Rasmlantirish uchun erkinlik darajalari soni bo'yicha $\sigma_{\bar{x}}$ taqsimot jadvallari bo'yicha χ^2uchun interval *r=n-1* va ehtimollik α=0,95 γ_1=0,624 ni topamiz; γ_2=2,45. Keyin 3.18″ < σ_0^2 < 12.45″. Keyinchalik, 1,8″<σ_0 <3,5″ va 0,40″<$\sigma_{\bar{x}}$ <0,78″ ishonch oraliqlarini yaratamiz.

IKKI TOMONLAMA EKVIVALENTNING FARQLARI BO'YICHA ANIQLIKNI BAHOLASH VA TENG BO'LMAGAN O'LCHOVLAR

Amalda, bir hil miqdorlarning har biri ikki marta o'lchanganda, ko'pincha ikki tomonlama o'lchovlar amalga oshiriladi. Shu bilan birga, ularning aniqligi bir xil miqdorning o'lchangan qiymatlaridagi farqlar bilan baholanadi.

Ba'zi bir jinsli kattaliklarni $X_1, X_2, ... X_n$ ikki marta o'lchab, natijalarni oling:

birinchi o'lcham $x_1, x_2, ... x_n$;

ikkinchi o'lcham $x'_1, x'_2, ... x'_n$.

Tizimli xatolar bo'lmasa, ikki tomonlama o'lchovlarning hisoblangan farqlari

$$d_i = x_i - x_i' \tag{2.3.27}$$

haqiqiy qiymati nolga teng bo’lgan *d* qiymatining haqiqiy xatolari sifatida qaralishi mumkin. d ning aniqligini baholash uchun siz Gauss formulasidan foydalanishingiz mumkin. Bir xil darajada aniq o’lchovlar uchun

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \tag{2.3.28}$$

(2.77) formulani hisobga olgan holda $m_d^2 = 2m_x^2$ Binobarin, o’rtacha bir o’lchovning kvadratik xatosi quyidagicha ifodalanishi mumkin

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}, \tag{2.3.29}$$

Ikki marta teng darajada aniq o’lchovlar uchun keyingi ishlov berish ikkita kuzatuvning o’rtacha qiymatini o’z ichiga oladi $\bar{x}_i = \frac{x_i + x_i'}{2}$, ularning o’rtacha kvadrat xatosi.

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \tag{2.3.30}$$

Agar x_i o’lchovlarida doimiy tizimli xatolar mavjud bo’lsa, u holda

$$M(d_i) = M(X_i) - M(\mathrm{X_i'}) = X_i + C - X_i - \mathrm{C_i'} = C_i - \mathrm{C_i'}, \tag{2.3.31}$$

Farqlarning matematik kutilishi d_i ikki tomonlama o’lchovlardagi tizimli xatolarning farqiga teng, bu qoldiq qismni chiqarib tashlash mumkin. Uni aniqlash uchun Δ_i haqiqiy xatolar o’rniga d_i farqlari qiymatlarini qo’yib, (2.48) mezonidan foydalaniladi,

$$|[d]| \le 2{,}5\frac{[|d|]}{\sqrt{n}}, \tag{2.3.32}$$

Agar bu tengsizlik qanoatlansa, sistematik xatoning qoldiq komponenti yo’q deb hisoblanadi va aniqlikni baholash (2.78) - (2.80) formulalari bo’yicha amalga oshiriladi. Agar (2.82) shart bajarilmasa, chiqarib tashlash kerak farqlarning sistematik komponenti $d_{i.}$ Bu erda $\vartheta_{d_i} = d_i - \bar{d}$, bu erda $\bar{d} = [d]/n$ dan og'ish sifatida ko’rib chiqilishi mumkin arifmetik o’rtacha va shuning uchun aniqlikni baholash uchun Bessel formulasini qo’llash kerak.

$$m_d = \sqrt{\frac{[\vartheta_d^2]}{n-1}}, \tag{2.3.33}$$

m_x va $m_{\bar{x}}$ uchun formulalar (2.79) va (2.80) ifodalarga o’xshaydi:

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[\vartheta_d^2]}{2(n-1)}}, \tag{2.3.34}$$

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[\vartheta_d^2]}{2(n-1)}}, \tag{2.3.35}$$

Nazorat tengliklari quyidagilarga ham ega bo’lishi kerak:

$$[\vartheta_{\mathrm{d}}] = -\mathrm{n}\Delta_{\text{окр}} \tag{2.3.36}$$

Bu erda $\Delta_{\text{окр}} = \bar{d}_{\text{окр}} - \bar{d}$;

$$[\vartheta_d^2] = [d^2] - \frac{[d^2]}{n} \tag{2.3.37}$$

Ba'zan, tengsizlik (2.82) o’rniga, qattiqroq ishlatiladi mezon |[d]|<0,25[|d|].

Misol. Darajaning ikkita pozitsiyasidagi nuqtalar orasidagi tekislash natijalari berilgan. Bitta o’lchovning o’rtacha kvadrat xatolarini va ikki barobarning o’rtachasini hisoblang. Yechim.

O’lchash nomeri	x_i	$x_i{}'$	d	ϑ_d	ϑ_d^2
1	+1,273	+1,270	+3	+1	1
2	+0,987	+0,988	–1	–3	9
3	+1,069	+1,065	+4	+2	4
4	+0,542	+0,542	0	–2	4
5	+0,768	+0,766	+2	0	0
6	+0,895	+0,891	+4	+2	4
7	+1,166	+1,166	–1	–3	9
8	+1,304	+1,304	+2	0	0
9	+1,198	+1,194	+4	+2	4
10	+0,484	+0,481	+3	+1	1
		Σ [|d|]	+20 24	0	36

Biz (2.82) mezondan foydalanamiz. Bizda $20 \geq 2{,}5\frac{2{,}4}{10}$ ≈19,0. Binobarin, (2.3.32) tengsizlik qanoatlanmaydi, shuning uchun hisob-kitoblar uchun Bessel formulasidan foydalanamiz. $\bar{d} = \frac{[d]}{n} = +\frac{20}{10} = 2{,}0$ mm va m_d ni (2.83) formula bilan aniqlaymiz.

Darajaning bir pozitsiyasidagi balandlikning o'rtacha kvadrat xatosi:

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[\vartheta_d^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{36}{18}} = 1{,}4\,mm$$

Qurilmaning ikkita pozitsiyasida tekislash natijalarining o'rtacha qiymati sifatida olingan ortiqcha miqdorning o'rtacha kvadrat xatosi quyidagicha bo'ladi.$m_{\bar{x}} = \frac{1{,}4}{\sqrt{2}} = 1{,}0\,mm$ Ko'pincha, amalda, har bir juftlik ichidagi o'lchovlar bir xil darajada aniq bo'lganda, teng bo'lmagan o'lchovlar mavjud, ya'ni. *i≠j* uchun x_i va x_j miqdorlari teng emas, x_i va $x_i^{'}$ esa teng. Shunday qilib, x_i va $x_i^{'}$ miqdorlari bir xil P_i og'irligiga ega deb aytishimiz mumkin.

Shubhasiz, farq og'irlik $\frac{1}{P_{d_i}} = \frac{1}{P_i} + \frac{1}{P_i} = \frac{2}{P_i}$. Bu yerdan $P_{d_i} = \frac{P_i}{2}$ Shuning uchun, tizimli xatolar bo'lmasa, o'rtacha og'irligi bir ga teng bo'lgan kvadratik o'lchov xatosi, sifatida ifodalanishi mumkin.

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_d d^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[Pd^2]}{2n}} \qquad (2.3.38)$$

Keyin i-o'lchovning o'rtacha kvadrat xatosi bo'ladi formula bo'yicha hisoblanadi $m_{x_i} = {}^{\mu}\!/\!_{\sqrt{P_i}}$, va o'rtacha qiymatlarning ildiz o'rtacha kvadrat xatolari $\bar{x}_i = x_i - x_i^{'}/2$,

$$m_{x_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2P_i}} \qquad (2.3.39)$$

chunki $P_{\bar{x}_i} = 2P_i$.

Agar farqlar tizimli xatolarni o'z ichiga olgan bo'lsa va $\bar{d} = [pd]/[p]$, noldan sezilarli farq qiladi, keyin

$$\mu = \sqrt{\frac{[Pv_d^2]}{2(n-1)}} \qquad (2.3.40)$$

(2.48) va (2.47) mezonlariga o'xshab, teng bo'lmagan o'lchovlar uchun tizimli komponent mavjudligi mezonini qurish mumkin.

$$\left|\bar{d}\right| \leq t_\alpha m_{\bar{d}} = \frac{|[P_d d]|}{P_d} \leq t_\alpha \frac{\mu}{\sqrt{[P_d]}} \qquad (2.3.41)$$

m ni o'rtacha xatolik μ=*1,25v** bilan almashtiramiz, bu erda $v^* = M^* = \left(\left|\bar{d}\right|\right)$. Momentlar usuli bo'yicha matematik kutishning bahosi namunaning o'rtacha qiymati sifatida aniqlanadi, ammo o'lchovlar teng bo'lmaganligi sababli, matematik kutishni o'rtacha og'irlik bilan almashtirish kerak.

$$v^* = M\left(\left|\bar{d}\right|\right) = {[|P_d d|]}/{[P_d]} \qquad (2.3.42)$$

$$\frac{[|P_d d|]}{P_d} \leq t_\alpha \frac{1{,}25[|P_d d|]}{[P_d]\sqrt{P_d}}.$$

$t_a = 2$ ni olib, doimiy sistematik xatoning mavjudligi mezonini olamiz

$$[|P_d d|] \leq 2{,}5 \frac{[|P_d d|]}{[P_d]} \qquad (2.93)$$

(2.82) ga o'xshash. Tengsizlik (2.93) bu holda P_{d_i} o'rniga $\frac{P_i}{2}$ o'lchov og'irliklarini qo'yish orqali qayta yozilishi mumkin. $[|P_d d|] \leq 3{,}5 \frac{[|P_d d|]}{[P_d]}$. Hisob-kitoblarni nazorat qilish formulalar bo'yicha amalga oshiriladi.$[pv_d] = -[p]\Delta_{okp}\ va\ [Pv_d^2] = [pd^2] - \frac{[pd]^2}{[p]}$. bu yerda Δ_{okp} yaxlitlash xatosi $\bar{d} = {[Pd]}/{[P]}$; $v_{d_i} = d_i - \bar{d}.m_{\bar{x}_i}$ uchun formula (2.89) tizimli xatolar mavjud bo'lganda ham qo'llaniladi.

Misol. Ikki o'lchamdagi d_i farqlar va ularning og'irliklari berilgan. Aniqlikni baholash talab qilinadi.

d_i	$P_{x_i} = P_i$	$P_i d_i$	d_i^2	$P_i d_i^2$	$m_{\bar{x}_I}$
+2,4	1,11	2,67	5,8	6,4	1.1
-6,2	0,28	-1,74	38,4	10,7	2,3
-2,2	0,62	-1,36	4,8	3,0	1,5
+1,3	0,32	0,41	1,7	0,5	2,1
-0,6	0,27	-0,16	0,4	0,1	2,3
+2,1	0,71	1,49	4,4	3,1	1,4
-4,0	0,43	-1,72	16,0	6,9	1,8
+1,4	0,45	0,63	2,0	0,9	1,8
+7,5	0,48	3,60	56.2	27,0	1,7
-1,3	0,53	-0,69	1,7	0,9	1,7
Σ=0,4	Σ=5,20	Σ=3,13	Σ=131,4	Σ=59,5	

Yechim. Mezon yordamida tizimli komponent mavjudligini tekshiramiz

$$[|P_d d|] \leq 3{,}5\frac{[|P_d d|]}{[P_d]}: \qquad 3{,}13 < 3{,}5\frac{11{,}93}{2{,}28} = 18{,}3$$

Tengsizlik qondirilganligi sababli, biz tizimli xatolarning yo'qligi haqidagi gipotezani qabul qilamiz. Shuning uchun, vazn birligining o'rtacha kvadrat xatosi

$$\mu = \sqrt{\frac{[Pv_d^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{59{,}4}{20}} = 1{,}7$$

Oxirgi ustundagi $m_{\overline{x}_i}$ qiymatlari (2.89) formula bo'yicha hisoblanadi.

Nazorat savollari

1. Og'irlikni aniqlang.

2. Og'irlik tushunchasi qanday maqsadda kiritilgan?

3. Agar o'rtacha kvadrat xatolar ma'lum bo'lsa, lekin s ma'lum bo'lmasa, vaznni aniqlash mumkinmi?

4. Og'irlik birligining standart og'ishi nimaga teng?

5. Tasodifiy argumentlar funksiyasining og'irligi, agar tufayli bo'lsa, qanday aniqlanadi

bu argumentlarning og'irligini bilasizmi?

6. Teng bo'lmagan o'lchovlar uchun ehtimollik funktsiyasi qanday ko'rinadi?

7. Korrelyatsiya va teskari vazn matritsasini aniqlang.

8. Korrelyatsiya matritsasining qaysi elementlari asosiyda joylashgan bu matritsaning diagonallari?

9. Korrelyatsiya va teskari vazn matritsalarining diagonaldan tashqari elementlari nima?

10. Aniqlikni baholashning umumlashtirilgan formulasini yozing.

11. Korrelyatsiya va teskari og'irlik matritsalari qanday bog'langan?

12. O'rtacha vaznning og'irligi qancha?

13. O'rtacha arifmetikning og'irligi nimaga teng?

14. Teng bo'lmagan o'lchovlar uchun matematik kutish bahosini aniqlaydigan formulani yozing.

15. Og'irlik birligining o'rtacha kvadrat xatosini aniqlash uchun Gauss va Bessel formulalarini yozing.

16. Gauss formulasi qachon, Bessel formulasi qachon ishlatiladi?

17. Parametrlarni ishonchli baholashning mohiyati nimada?

18. Teng bo'lmagan o'lchovlarda tasodifiy o'zgaruvchining va standart og'ishning matematik kutilishi uchun ishonch oraliqlari qanday quriladi?

19. Tizimli xatoning mavjudligi mezoni qanday teng o'lchovlar holati?

20. Tizimli xatoning mavjudligi mezoni qanday noto'g'ri o'lchovlar holati?

21. Aniqlikni farqlar bo'yicha baholash ketma-ketligi qanday ikki barobar o'lchovlar?

22. Aniqlikni farqlar bo'yicha baholash ketma-ketligi qanday ikki barobar tengsiz o'lchovlar?

YECHIMLAR BILAN BOG'LIQ MUAMMOLAR

Vazifa. $S=\frac{b}{2}ctg\frac{\varphi}{2}$; *tasodifiy argumentlar funktsiyasining og'irligini aniqlang agar b = 3 m, σ_b=0,02 mm, ϕ=7°12'43,5", σ_ϕ=2".*

Yechim. P_S og'irligini aniqlash uchun mos yozuvlar o'lchovi va og'irlik birligining farqini tanlash kerak. Etakchi o'lchov sifatida standart og'ish $\sigma_0=\sigma_\varphi$ bo'lgan s burchakning o'lchamini tanlaylik. Ko'rinib turibdiki, P_s=1, va $P_b=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_b^2}=\frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_b^2}=\frac{4}{9}$, o'lchami ('')^2/mm^2.

Ushbu holatda $\sigma_S^2=\left(\frac{dS}{db}\right)^2\sigma_b^2+\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)^2\sigma_\varphi^2$

bu erda $\sigma_S^2=\left(0{,}5ctg\frac{\varphi}{2}\right)^2\sigma_b^2+\left(\frac{b}{4}\frac{-1}{sin^2(\varphi/2)}\right)^2\frac{\sigma_\varphi^2}{\rho^2}$.

Ushbu ifodadagi natijaning o'lchami (mm^2) har ikki atamaning o'lchamiga mos kelishi kerak. Shuning uchun formulada soniyalarda bir radianning qiymati paydo bo'ldi. Sanoqli Rasmdagi hosilalarni almashtirib, biz hosil qilamiz

$$\sigma_S^2=\left(0{,}5ctg\frac{\varphi}{2}\right)^2\sigma_b^2+\left(\frac{b}{4}\frac{-1}{sin^2(\varphi/2)}\right)^2\frac{\sigma_\varphi^2}{\rho^2}=0{,}025+3{,}379=3{,}404\,mm^2$$

Bu erda $\sigma_S=1{,}85\ mm$. *Endi biz S masofaning og'irligini aniqlashimiz mumkin:*

$P_S=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_S^2}=\frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_S^2}=\frac{2^2}{1{,}84^2}=1{,}18.$ *E'tibor bering, biz turli o'lchamlarga ega bo'lgan heterojen miqdorlar bilan shug'ullanayotganimiz sababli, vazn ham o'lchamga ega bo'ladi. Bunday holda, P_S o'lchami ('')^2/mm^2 bo'ladi.*

3-BOB. ENG KICHIK KVADRAT USULI

§3.1. UMUMIY TUSHUNCHALAR

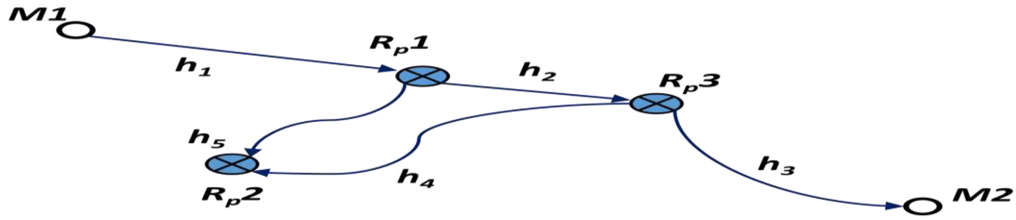
Ushbu bo'lim eng kichik kvadratlar usuli yordamida ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorning o'lchovlarini qayta ishlashga bag'ishlangan. Geodeziyada ko'p o'lchovli tasodifiy o'zgaruvchilarga yagona geodezik tarmoqqa birlashtirilgan miqdorlar kiradi. Bular triangulyatsiya, trilateratsiya , chiziqli burchakli konstruktsiyalar, er va sun'iy yo'ldosh o'lchovlarining birlashtirilgan tarmoqlari. Geodeziyada o'lchovlarni talab qilinganidan ko'proq miqdorda bajarish odatiy holdir, shuning uchun zarur, ortiqcha va barcha o'lchovlar tushunchalari ajralib turadi. Keyinchalik, barcha o'lchovlar sonini n, zarur o'lchovlar sonini k va ortiqcha o'lchovlar sonini r deb belgilaymiz.

Kerakli o'lchovlar soni k deb geodezik tarmoqning barcha elementlarini hisoblashingiz mumkin bo'lgan o'lchovlarning minimal soni tushuniladi. Bunday o'lchovlarning o'zi zarur deb ataladi. Kerakli o'lchovlardan ortiqcha bajarilgan o'lchovlar ortiqcha va o'lchovlar deyiladi. Ko'rinib turibdiki, bunday o'lchovlar soni barcha o'lchovlar soni va kerakli o'lchovlar o'rtasidagi farqga teng $r = n - k$.

Ortiqcha o'lchovlar tarmoq elementlarini aniqlashda noaniqlikka olib keladi. Keling, ortiqcha o'lchovlarga misollar keltiraylik. Rasm.3.1 eng oddiy tekislash tarmog'ini ko'rsatadi.

M1 va *M2* belgilari boshlang'ich nuqtadir, *Rp1, Rp2* va *Rp3* ko'rsatkichlari aniqlanadi. Ularning belgilarini hisoblash uchun ortiqcha h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 o'lchandi. Ko'rinib turibdiki, uchta ko'rsatkichning belgilarini aniqlash uchun uchta ortiqcha o'lchovni o'lchash kifoya qiladi, shuning uchun bu holda bizda barcha o'lchovlar soni $n=5$, zarur o'lchovlar soni $k=3$, ortiqcha o'lchovlar $r=n-k=5-3=2$. Kerakli uchta ko'rsatkichning belgilarini o'lchagan balandliklarning turli kombinatsiyalari yordamida olish mumkin.

Masalan: H_{Rp1} ortiqcha yordamida hisoblanishi mumkin h_1-$H_{Rp1}=H_{M1}+h_1$;H_{Rp2} h_1 va h_5 ortiqchalari yordamida hisoblanishi mumkin - $H_{Rp2}=H_{M1}+h_1+h_5$ *va* $H_{Rp3}=H_{M2}-h_3$. Bunda h_1, h_3 va h_5 ortiqchalari zarur, h_2 va h_4 ortiqchalari ortiqcha.



Rasm. 3.1.1 Tarmoqni tekislash misoli

Ortiqcha o’lchov yo’nalishi Rasmda ko’rsatilgan. 3.1 o’q bilan, unga muvofiq "+" yoki "-" belgisi qo’yiladi. Eslatib o’tamiz, ortiqcha miqdor tugatish va boshlang'ich nuqtalari belgilari orasidagi farqga teng. Ammo benchmark belgilarini boshqa mumkin bo’lgan usullar bilan olish mumkin.

Masalan, $H'_{Rp1} = H_{M2} - h_3 - h_2$.

O’lchov xatolari tufayli H_{Rp1} va H'_{Rp1} qiymatlari mos kelmasligi aniq, ya'ni. ortiqcha o’lchovlar geodezik konstruktsiyaning qiymatlarini aniqlashda noaniqlikka olib keladi. Unda nima uchun ortiqcha o’lchovlar qilish kerak?

Ortiqcha o’lchovlarni amalga oshirish uchun bir nechta maqsadlar mavjud:

o’lchov nazorati;

geodezik tarmoqning aniqlangan elementlarining aniqligini oshirish;

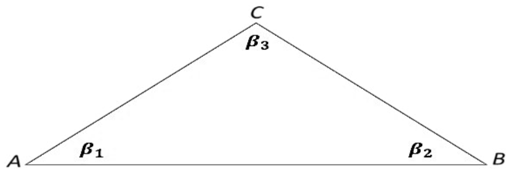
o’lchovlarning to’g'riligini baholash va geodezik konstruktsiyaning boshqa elementlari.

Yana bir misol keltiraylik. Rasmda. 3.1.2 A va B boshlang'ich nuqtalari. Ularning koordinatalari ma'lum va keyingi ishlov berishda boshlang'ich (qattiq) bo’ladi. C - nuqtasi aniqlanadi, bu nuqtaning koordinatalari boshlang'ich nuqtalarning koordinatalari va o’lchov natijalari yordamida olinishi kerak. Uchta burchak o’lchanadi, X_C va Y_C koordinatalarini aniqlash uchun faqat ikkita o’lchovni bajarish kifoya qilishi aniq, masalan, birinchi va ikkinchi burchaklar β_1 va β_2.

Bunday holda, bu burchaklarni o’lchash kerak bo’ladi. Uchinchi burchak β_3 ni o’lchash ortiqcha bo’ladi va C nuqtaning koordinatalarini aniqlashda noaniqlikka olib keladi.

Darhaqiqat, X_C koordinatasini o’lchangan burchaklarning turli kombinatsiyalari yordamida olish mumkin:

$$X_C = f(\beta_1, \beta_2);$$
$$X_C' = f(\beta_1, \beta_3);$$
$$X_C'' = f(\beta_2, \beta_3);$$



Rasm. 3.1.2. Uchburchakda burchaklarni o’lchash

O’lchov xatolari tufayli bu koordinatalar farqlanadi. Shubhasiz, tarmoq elementlarini belgilashda noaniqlikni yo’q qilish kerak, ya'ni. tarmoqni muvozanatlash. Ammo bu tenglashtirish muammolaridan faqat bittasi.

Vazifalarni tenglashtirish uchun:

tarmoq elementlarini belgilashda noaniqlikni bartaraf etish;

tenglashtirilgan tarmoq elementlarini aniqlash - yaxshi baholar;

belgilangan tarmoq elementlarining aniqligini oshirish;

hisoblangan tarmoq elementlarining aniqligini baholash.

Ikkita asosiy tuzatish usuli mavjud bo’lib, ularning farqlari noaniqlikning turli ko’rinishlari bilan bog'liq bo’lib, bu turli xil boshlang'ich tenglamalarga olib keladi. Parametrik usulda (birinchi usul) noma'lum noma'lumlar va o’lchangan miqdorlarni bog'laydigan tenglamalar tuziladi. Bunday noma'lumlar sifatida, masalan, aniqlanayotgan nuqtalarning koordinatalarini tanlash mumkin (bu usul quyida batafsilroq muhokama qilinadi). Bunday tenglamalar haqiqiy qiymatlar uchun amal qiladi. O’lchov xatolari tufayli bunday tenglamalardagi tengliklar buziladi. Tenglashtirish vazifasi tenglikni tiklashdir.

Ikkinchi yo’l o’zaro bog'liq. Haddan tashqari o’lchovlar o’lchangan qiymatlar o’rtasida matematik bog'liqliklar mavjudligiga olib keladi. Masalan, uchburchak uchun (3.2-rasmga qarang) $b_1 + b_2 + b_3 - 180 = 0$ ko’rinishdagi munosabat vujudga keladi.Uchburchakdagi burchaklar yig’indisi 180^0 bo’lishi kerak. Bu erda noaniqlik shundaki, o’lchov xatolari tufayli burchaklar yig'indisi 180^0 ga teng bo’lmaydi. Ushbu turdagi tenglamalar korrelyatsiya usulida boshlang'ich hisoblanadi .

§3.2. PARAMETRIK TUZATISH USULI

PARAMETRIK USULNING UMUMIY NAZARIYASI

Parametrik va korrelyatsion usullarda tuzatish algoritmlari geodezik qurilish turiga bog'liq emas.

Barcha turdagi tarmoqlar uchun - triangulyatsiya, trilateratsiya , chiziqli-burchakli tarmoq va boshqa konstruktsiyalar uchun parametrik usul uchun tuzatish algoritmi bir xil bo’ladi. Korrelyatsiya qilingan usul uchun tuzatish ketma-ketligi, shuningdek, algoritm ham bir xil bo’ladi. Yuqorida ta'kidlab o’tilganidek, parametrik tuzatish usulida ikki turdagi miqdorlar ko’rib chiqiladi: o’lchangan va noma'lum noma'lumlar (koordinatalar, aniqlangan nuqtalarning belgilari va boshqalar), biz ularni parametrlar va deb ataymiz. Shuning uchun, tuzatish algoritmini taqdim etish uchun biz ushbu ikki turdagi miqdorlar uchun yozuvni kiritamiz:

X_j - parametrlarning haqiqiy qiymatlari;

x_j - parametrlarning taxminiy qiymatlari;

δx_j - parametrlarning taxminiy qiymatlariga tuzatishlar;

$\bar{x}_j = x_j + \delta x_j$- parametrlarning **tuzatilgan** qiymatlari;

Y_i - o’lchangan miqdorlarning haqiqiy qiymatlari;

y_i - o’lchov natijalari;

v_i - tuzatishdan o’lchov natijalariga tuzatishlar;

$\hat{y}_i$ - o’lchangan miqdorlarning **tuzatilgan** qiymatlari, $\hat{y}_i = y_i + v_i$

Tuzatishning eng muhim bosqichi - tuzatish parametrlarini tanlash. Parametr sifatida turli qiymatlarni tanlash mumkin. Masalan, aniqlangan nuqtalarning koordinatalari, o’lchangan yoki boshqa miqdorlar. Ammo, har qanday holatda, parametrlar ikkita talabga javob berishi kerak:

1) parametrlar soni kerakli o’lchovlar soniga teng bo’lishi kerak *k*;

2) parametrlar bir-biriga bog'liq bo’lmasligi kerak, ya'ni. $X_j=f(X_1,X_2,\ldots,X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_k)$ ko‘rinishdagi funksiyalar bo‘lmasligi kerak .

Bunday sharoitlarning maqsadi har qanday geodeziya tarmog'i uchun Rasmlanadigan ba'zi metrik makonda asos yaratishdir.

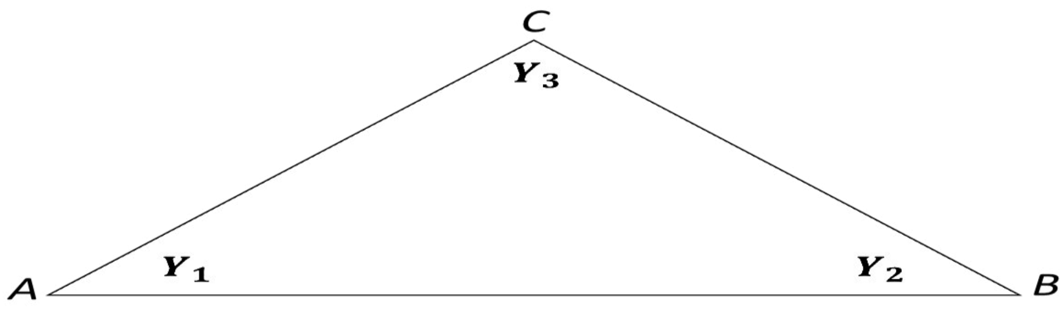
Masalan, ikki o'lchovli fazoda asosni qurish - tekislikda. Bu erda asos ikkita kollinear bo'lmagandan iborat bo'lishi kerak, ya'ni. bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan yoki bir-biriga parallel bo'lmagan vektorlar. Agar $\bar{x}_1$ va $\bar{x}_2$vektorlari bir xil to'g'ri chiziqda yotsa, u holda ular bir-biri orqali $\bar{x}_2 = k\bar{x}_1$ chiziqli birikma orqali osongina ifodalanishi mumkin. Shuning uchun bu vektorlar bog'liq va ular orqali berilgan chiziqda yotmaydigan vektorni aniqlash mumkin emas. Shuning uchun ikki o'lchovli fazoda (tekislik) asos ikkita kollinear bo'lmagan vektordan iborat bo'lishi kerak.

Shunday qilib, parametrlar orqali to'g'ri tanlash bilan - asos orqali - siz geodezik tarmoqning har qanday elementini ifodalashingiz mumkin. barcha o'lchovlarni o'z ichiga oladi.

$$Y_i = f_i(X_1, X_2, \ldots, X_k), i = 1,2, \ldots n. \qquad (3.2.1)$$

tenglamalar va ulanishlar deyiladi . Ular har bir n o'lcham uchun tuzilgan .

Burchaklari o'lchangan uchburchakni ko'rib chiqaylik (3.3-rasm). Bu yerda parametr sifatida aniqlanayotgan nuqtaning $X_1 = X_C$ va $X_2 = Y_C$ koordinatalarini ham, $X_1 = Y_1$ va $X_2 = Y_2$ burchaklarini ham tanlash mumkin. Bu ikkala juftlik ikkita zarur shartni qondiradi. Ammo koordinatalar parametr sifatida qabul qilinganda ulanish tenglamalari chiziqli bo'lmaydi. Bu holda o'lchangan burchaklar nuqtalarning koordinatalari bilan ifodalanishi kerak.



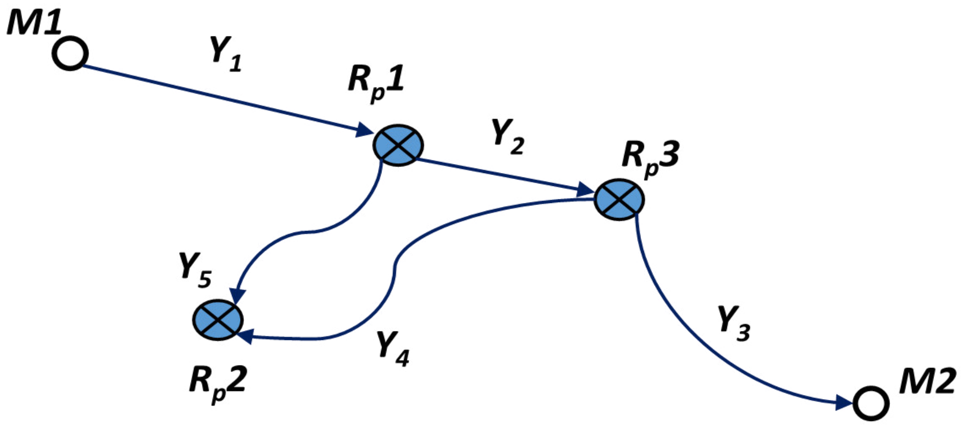
Rasm. 3.2.1. O'lchangan burchakli uchburchak

Masalan, Y_1 burchagi uchun cheklash tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$Y_1 = arctg\left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right) - arctg\left(\frac{Y_C - Y_A}{X_C - X_A}\right)$$

Bu yerda X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C - boshlang'ich A, B nuqtalari va aniqlangan C nuqtaning koordinatalari. Xuddi shunday, Y_2 va Y_3 burchaklar uchun ulanish tenglamalari tuziladi. Agar parametr sifatida $X_1=Y_1$ va $X_2=Y_2$ burchaklarni tanlasak, ulanish tenglamalari ancha sodda ko'rinadi. Bu holda ulanish tenglamalari quyidagi Rasmda bo'ladi: $Y_1=X_1$; $Y_2=X_2$; $Y_3=180–X_1–X_2$.

Nivelirlash tarmog'i uchun aloqa tenglamalarini tuzishni ko'rib chiqing (3.4-rasm). Parametrlar sifatida biz o'lchangan ortiqcha va dastlabki ma'lumotlar yordamida hisoblanishi mumkin bo'lgan uchta belgilangan benchmark belgilarini tanlaymiz:



Rasm. 3.2.2. Nivelirlash uchun parametrik ulash tenglamalarini tuzish tarmoqlar

$$X_1 = H_{Rp1} = (H_{M1} + Y_1);$$
$$X_2 = H_{Rp2} = (H_{M1} + Y_1 + Y_5); \qquad (3.2.2)$$
$$X_3 = H_{Rp3} = (H_{M2} - Y_3);$$

(3.2.2) dan biz parametrlarning taxminiy qiymatlarini qo'shimcha ravishda olamiz. Belgilash belgilari, avvalgidek, boshlang'ich hisoblanadi. Har bir ortiqcha uchun parametrik bog'lanish tenglamalari quyidagi ko'rinishda yoziladi: $Y_1=X_1$ - H_{M1} - ortiqcha boshqa ortiqcha uchun xuddi shunday tugatish va boshlang'ich nuqtalari belgilari orasidagi farq sifatida aniqlanadi: $Y_2 = X_3 - X_1$; $Y_3=H_{M2} - X_3$; $Y_4 = X_2 - X_3$; $Y_5 = X_2 - X_1$.

Parametrlar va o'lchangan miqdorlarning haqiqiy qiymatlari uchun parametrik ulanish tenglamalaridagi tengliklar bajarilishi aniq. Biroq, X_j va Y_i ning haqiqiy qiymatlari noma'lum. O'lchov natijalari y_i va parametrlarning taxminiy qiymatlari ma'lum, ularni o'lchovlarning o'zlari yordamida olish mumkin. Misol uchun, (3.2) formulalar bo'yicha oldingi misol uchun. Agar bunday qiymatlar (3.1) ga almashtirilsa, ularning tengligi $i=1,2,\dots, n$ uchun $y_i \neq fi(x_1,x_2,\dots,x_k)$ o'lchash xatolari tufayli buziladi. $l_i = f_i(x_1, x_2,\dots, x_k)-y_i$ deb belgilaymiz .

Yuqorida aytib o’tilganidek, tuzatish vazifalaridan biri cheklash tenglamalarida tenglikni tiklashdir. Buning uchun y_i va δx_j o’lchangan qiymatlarga - x_j parametrlarining taxminiy qiymatlariga v_i tuzatishlar kiritiladi :

$$y_i = y_i + v_i = f_i x + \delta x\ x + \delta x \ldots x_k + \delta x_k \qquad (3.2.3)$$

yoki

$$y_i = f_i \bar{x}\ \bar{x} \ldots \bar{x}_k$$

vi va dxj tuzatishlarni topish kerak . Ushbu vazifani soddalashtirish uchun biz (3.3) funksiyalarni Teylor qatorida kengaytirish orqali chiziqli Rasmga keltiramiz :

$$y_i + v_i = f_i(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots, x_k + \delta x_k) =$$

$$= f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) + \left(\frac{df_i}{dx_1}\right)_0 \delta x_1 + \left(\frac{df_i}{dx_2}\right)_0 \delta x_2 + .. + .. \left(\frac{df_i}{dx_k}\right)_0 \delta x_k.$$

Qisman hosilalarda nol indeksi bu hosilalarning raqamli qiymatlari ekanligini anglatadi. Ikkinchisini hisoblash uchun o’lchangan qiymatlar yordamida aniqlanadigan parametrlarning taxminiy qiymatlarini bilish kerak. Bu hisob-kitoblarning kerakli aniqligini ta'minlash uchun etarli. $\alpha_{ij} = \left(\frac{df_i}{dx_1}\right)_0$ Belgilashni kiritamiz va y_i miqdorini tenglikning o’ng tomoniga o’tkazamiz.

Parametrik tuzatish tenglamalari tizimini olamiz

$$v_i = \alpha_{i1}\delta x_1 + \alpha_{i2}\delta x_2 + .. + \alpha_{ik}\delta x_k + l_i$$

to’liq Rasmda quyidagi Rasmni oladi:

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_{11}\delta x_1 + \alpha_{12}\delta x_2 + .. + \alpha_{1k}\delta x_k + l_1 \\ v_2 &= \alpha_{21}\delta x_1 + \alpha_{22}\delta x_2 + .. + \alpha_{2k}\delta x_k + l_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.2.4) \\ v_n &= \alpha_{n1}\delta x_1 + \alpha_{n2}\delta x_2 + .. + \alpha_{nk}\delta x_k + l_n \end{aligned}$$

Uchburchak uchun parametrik aloqa tenglamalarini tuzish misollarini ko’rib chiqing (3.2.3-rasmga qarang), unda barcha burchaklar o’lchanadi va tekislash tarmog'ining misollari (3.2.4-rasm, 3.2.1-jadvalga qarang). δx_j dagi koeffitsientlar (hosilalar) cheklash tenglamalaridagi X dagi koeffitsientlarga to’g‘ri keladi. Bepul shartlarni hisoblash uchun bilish kerak.

3.2.1-jadval

Parametrik cheklash tenglamalari	Parametrik tuzatish tenglamalari	Tuzatish tenglamalarining bepul shartlari
Uchburchaklar uchun		
$\boldsymbol{Y_1 = X_1}$	$\boldsymbol{v_1 = \delta x_1 + l_i}$	$\boldsymbol{l_1 = x_1 - y_1}$
$\boldsymbol{Y_2 = X_2}$	$\boldsymbol{v_2 = \delta x_2 + l_2}$	$\boldsymbol{l_2 = x_2 - y_2}$
$\boldsymbol{Y_3 = 180^0 - X_1 - X_2}$	$\boldsymbol{v_3 = -\delta x_1 - \delta x_2 + l_3}$	$\boldsymbol{l_3 = 180^0 - x_1 - x_2 - y_3}$
Tarmoqni tekislash uchun.		
$\boldsymbol{Y_1 = X_1 - H_{M1}}$	$\boldsymbol{v_1 = \delta x_1 + l_i}$	$\boldsymbol{l_1 = x_1 - H_{M1} - y_1}$
$\boldsymbol{Y_2 = X_3 - X_1}$	$\boldsymbol{v_2 = -\delta x_1 + \delta x_3 + l_2}$	$\boldsymbol{l_2 = x_3 - x_1 - y_2}$
$\boldsymbol{Y_3 = H_{M2} - X_1}$	$\boldsymbol{v_3 = -\delta x_3 + l_3}$	$\boldsymbol{l_1 = H_{M2} - x_3 - y_3}$
4=2-3	$\boldsymbol{v_4 = \delta x_2 - \delta x_3 + l_4}$	$\boldsymbol{l_4 = x_2 - x_3 - y_4}$
$\boldsymbol{5 = 2 - 1}$	$\boldsymbol{v_5 = -\delta x_1 + \delta x_2 + l_5}$	$\boldsymbol{l_5 = x_2 - x_1 - y_5}$

o'lchov natijalari va parametrlarning taxminiy qiymatlari x_j, har qanday imkoniyatdan foydalanib hisoblanishi mumkin. Masalan, tenglik (3.2.2).

$\hat{y}_i = f_i \bar{x}\ \bar{x} \dots \bar{x}_k$ parametrik cheklovli tenglamalar tizimini chiziqli ko'rinishga keltirdik . Ushbu parametrik tuzatish tenglamalari tizimini matritsa Rasmida yozamiz:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L} \qquad (3.2.5)$$

Bu erda

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix};\ \Delta\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \dots \\ \delta x_k \end{pmatrix}; \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}; \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix}.$$

Misol uchun, ma'lumotlar jadvalda keltirilgan. 3.1, uchburchak uchun **A** matritsasi quyidagi Rasmni oladi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bu erda birinchi ustun δx_1 da koeffitsientlar, ikkinchi ustun δx_2 da.

A matritsasini tuzishni osonlashtirish uchun noma'lum δx_j ularning koeffitsientlari bilan jadvalda keltirilgan. 3.1 bir-birining ostida yoziladi, shuning uchun nivelirlash tarmog'i uchun **A** matritsasi Rasmga ega

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, $\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}$ tuzatish tenglamalari tizimida **V** va **ΔX** vektorlari noma'lum. Bu yerdagi tenglamalar soni *n,* noma'lumlarning umumiy soni n+k . Albatta, **V** tuzatishlarsiz qilish yaxshi bo'lar edi, chunki o'lchovlar juda aniqlik bilan amalga oshiriladi va ularni tuzatishlar bilan yuklash istalmaydi. Lekin, bu erda n tenglamalar soni noma'lumlar sonidan ko'p bo'lgani uchun *k*, tizim

$\mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L} = \mathbf{0}$ haddan tashqari aniqlangan, mos kelmaydigan va yechimga ega emas, shuning uchun V vektor paydo bo'ladi. $\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}$ sistema V vektorni minimallashtirish orqali echiladi.

Tuzatishlar yig'indisini minimallashtirish mumkin emasligi aniq [ʋ], chunki hatto sezilarli miqdorda tuzatishlar ijobiy va salbiy qiymatlar tufayli miqdorda qoplanishi mumkin. Buning oldini olish uchun tuzatishlarning mutlaq qiymatlarini yoki ularning kvadratlarini yig'ish kerak, ya'ni. Quyidagi shartlardan birida tuzatish tenglamalari tizimini yeching:

[|ʋ|] = min - eng kichik modulli usul;

[$ʋ^2$] = min - eng kichik kvadratlar usuli.

Bunday holda, har ikkala holatda ham yig'ish paytida kompensatsiya sodir bo'lmaydi. Eng kichik kvadratlar usuli tez-tez ishlatiladi va afzalroq ko'rinadi, chunki u soddaroq nazariya va yechim algoritmiga ega. Biz bu usuldan foydalanamiz. Oddiy Rasmda ham, birinchi matritsada ham yozilgan tuzatish tenglamalar tizimining yechimini topamiz.

Keling, odatdagidek tenglamalarni yozishdan boshlaylik. (3.4) sistemani **Φ=[$ʋ^2$]=min** sharti bilan yechamiz . Buning uchun kompleks funksiyaning hosilasini aniqlash qoidalaridan foydalanib, har bir δx_j tuzatishga nisbatan **Φ** funksiyaning qisman hosilalarini topamiz va ularni nolga tenglaymiz. Shunday qilib, δx_j ga nisbatan hosila Rasmga ega

$$\frac{d\Phi}{d\delta x_1}=\frac{d\Phi}{dv_1}\frac{dv_1}{d\delta x_1}+\frac{d\Phi}{dv_2}\frac{dv_2}{d\delta x_1}+\cdots+\frac{d\Phi}{dv_n}\frac{dv_n}{d\delta x_1}=0$$

dxj boshqa tuzatishlarga nisbatan hosilalarni topamiz :

$$\frac{d\Phi}{d\delta x_2}=\frac{d\Phi}{dv_1}\frac{dv_1}{d\delta x_2}+\frac{d\Phi}{dv_2}\frac{dv_2}{d\delta x_2}+\cdots+\frac{d\Phi}{dv_n}\frac{dv_n}{d\delta x_2}=0$$

....

$$\frac{d\Phi}{d\delta x_k}=\frac{d\Phi}{dv_1}\frac{dv_1}{d\delta x_k}+\frac{d\Phi}{dv_2}\frac{dv_2}{d\delta x_k}+\cdots+\frac{d\Phi}{dv_n}\frac{dv_n}{d\delta x_k}=0$$

$\frac{d\Phi}{dv_1}=2v_1$ va hosila ekanligini hisobga olib, $\frac{dv_1}{d\delta x_j}=\alpha_{ij}$hosil bo'lgan tengliklarni quyidagicha yozamiz: $2\alpha_{1j}v_1+\ 2\alpha_{2j}v_2+\cdots+\ 2\alpha_{nj}v_n\ =0$ bu erda *j=1,2,...,k.* Doimiy qiymat 2 ni kamaytirib, biz Gauss lemmasi deb ataladigan tengliklar tizimini olamiz:

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}\vartheta_1+\alpha_{21}\vartheta_2+\cdots+\alpha_{n1}\vartheta_n=0;\\&\alpha_{12}\vartheta_1+\alpha_{22}\vartheta_2+\cdots+\alpha_{n2}\vartheta_n=0;\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.2.6)\\&\alpha_{1k}\vartheta_1+\alpha_{2k}\vartheta_2+\cdots+\alpha_{nk}\vartheta_n=0;\end{aligned}$$

Ushbu tizimni Gauss yig'indisi belgilaridan foydalangan holda ixchamroq qayta yozish mumkin:

$$[\alpha_1\vartheta]=0$$
$$[\alpha_2\vartheta]=0$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$[\alpha_k\vartheta]=0$$

Matritsa ko'rinishida sistema ko'rinishni oladi: $\mathbf{A}^T\mathbf{V}=0$. Gauss lemmasining hosilasini matritsa Rasmida takrorlaymiz.

Matritsadagi eng kichik kvadratlar usulining sharti $\Phi=[v^2]=\mathbf{V}^T\mathbf{V}=\min$.

Tuzatish tenglamalarini (3.5) hisobga olgan holda ushbu funktsiyaning minimalini aniqlaymiz. $\frac{d\Phi}{d\Delta\boldsymbol{X}}=\frac{d\Phi}{d\boldsymbol{V}}\frac{d\boldsymbol{V}}{d\Delta\boldsymbol{X}}=2V^TA=0$ yoki $\mathbf{V}^T\mathbf{A}=0$.

Agar matritsa nolga teng bo'lsa, uning ko'chirilgan matritsasi ham nolga teng bo'ladi, shuning uchun $\mathbf{A}^T\mathbf{V} = 0$. Endi (3.6) dagi tuzatishlar o'rniga (3.5) tizimning o'ng tomonini almashtiramiz, biz quyidagilarni olamiz:

$$A^T V = A^T(A\Delta X + L) = A^T A\Delta X + A^T L = 0$$

Tizim $A^T A\Delta X + A^T L = 0$ yoki $R\Delta X + A^T L = 0$ bu yerda $R = A^T L$ normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasi bo'lib, normal tuzatish tenglamalar tizimi deyiladi. Bunday sistema k tenglamadan iborat va k nomalumga ega. Odatiy belgilarda ushbu tizim quyidagi Rasmga ega:

$$[\alpha_1\alpha_1]\delta x_1 + [\alpha_1\alpha_2]\delta x_2 + \ldots + [\alpha_1\alpha_k]\delta x_k + [\alpha_1 l] = 0$$

$$[\alpha_1\alpha_1]\delta x_1 + [\alpha_1\alpha_2]\delta x_2 + \ldots + [\alpha_1\alpha_k]\delta x_k + [\alpha_1 l] = 0$$

....

$$[\alpha_1\alpha_k]\delta x_1 + [\alpha_1\alpha_k]\delta x_2 + \ldots + [\alpha_k\alpha_k]\delta x_k + [\alpha_k l] = 0$$

Bu yerda $\left[\alpha_i\alpha_j\right] = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \ldots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$ mos ravishda δx_i va δx_j da parametrik tuzatish tenglamalari koeffitsientlari ko'paytmalari yig'indisidir .

Oddiy tenglamalar koeffitsientlari matritsasi

$$R = A^T A = \begin{pmatrix} [\alpha_1\alpha_1] & [\alpha_1\alpha_2] & \cdots & [\alpha_1\alpha_k] \\ [\alpha_1\alpha_2] & [\alpha_2\alpha_2] & \cdots & [\alpha_2\alpha_k] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\alpha_1\alpha_k] & [\alpha_2\alpha_k] & \cdots & [\alpha_k\alpha_k] \end{pmatrix}$$

ikkita xususiyatga ega:

1) asosiy diagonalga nisbatan simmetrik;

2) yig'indini ifodalovchi diagonal elementlar kvadrat koeffitsientlar $\left[\alpha_i\alpha_j\right] = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \ldots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$ har doim ijobiydir.

3.1-jadvalda keltirilgan ma'lumotlar uchun normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasini hisoblaymiz:

uchburchakda o'lchangan burchaklar uchun

$$R = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

tarmoqni tekislash uchun

$$R = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Normal tenglamalar sistemasining erkin shartlari vektori

$$A^T L = \begin{pmatrix} [\alpha_1 l] \\ [\alpha_2 l] \\ \dots \\ [\alpha_k l] \end{pmatrix}$$

Oddiy tenglamalar tizimi o’ziga xos yechimga ega, agar geodezik tarmoq fazoda o’z o’rnini belgilash uchun etarli boshlang'ich ma'lumotlarga (koordinatalarga) ega bo’lsa. Shunday qilib, agar uchburchakda (3.3-rasmga qarang) boshlang'ich nuqta sifatida faqat bitta nuqta o’rnatilgan bo’lsa, masalan, A nuqtasi, u holda uchburchak kosmosda o’rnatilmaydi. Siz uni A nuqta atrofida aylantirishingiz mumkin. Uchburchakning burchaklari o’zgarmaydi va kerakli C nuqtasi u tasvirlaydigan doiradagi istalgan koordinatalarni qabul qilishi mumkin. Ammo uchburchakning o’zi Rasmini saqlab qoladi. Shunday qilib, bu qurilishda boshlang'ich nuqta sifatida bitta nuqtaga ega bo’lish etarli emas, chunki bu holda normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasi nolga teng determinantga ega bo’ladi va tizim cheksiz echimlar to’plamiga ega bo’ladi. Agar uchburchakda ikkita sobit nuqta berilgan bo’lsa, normal tenglamalar tizimi yagona yechimga ega bo’ladi.

Odatda, geodeziya amaliyotida dastlabki ma'lumotlarning soni etarli va bu sharoitda normal tenglamalar tizimi ham o’ziga xos echimga ega bo’ladi. Dastlabki ma'lumotlarning etarli emasligi geodeziya amaliyotida, masalan, er yuzasining deformatsiyalarini kuzatishda, barcha boshlang'ich nuqtalarni almashtirish mumkin bo’lganda uchraydi. Bu holda geodezik inshootlar bepul geodezik tarmoqlar deb ataladi . Ularni tenglashtirish uchun qo’shimcha shartlar qo’llaniladi.

Ushbu kurs bunday masalalarni hal qilmaydi. Demak, normal tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega deb faraz qilamiz. Oddiy tuzatish tenglamalarining yechimidan parametrlarning taxminiy qiymatlariga tuzatishlar vektorini aniqlash mumkin. Ushbu vektorni bilib, tizimdan (3.4) o’lchov natijalariga tuzatishlar vektorini ham topish mumkin, so'ngra parametrlarning **tuzatilgan** qiymatlarini va **tuzatilgan** o'lchov natijalarini hisoblab chiqish, shu bilan asosiy tuzatish muammosini hal qilish - yaxshi sifatni olish mumkin. o'lchangan miqdorlar va parametrlarni baholash.

Parametrik tuzatish quyidagi ketma-ketlikda amalga oshiriladi.

1. Barcha o'lchovlar sonini aniqlash *n*, zarur *k* va ortiqcha r o'lchovlar.

2. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ parametrlarini tanlash, ular ikkita shartni qondirishi kerak - ularning soni *k* ga teng va ular bir-biridan mustaqil bo'lishi kerak, ya'ni. parametrlarning hech biri boshqalar bilan ifodalanmasligi kerak. $Xj = f(X_1, X_2, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_k)$ funksiya mavjud bo'lmasligi kerak.

3. $Y_i = fi(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ parametrik cheklash tenglamalarini tuzish.

4. Parametrik tuzatish tenglamalarini tuzish $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{L}$

5. $\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{0}$ tuzatishlarning normal tenglamalarini tuzish.

6. Normal tuzatish tenglamalar sistemasini yechish $\Delta X = -\boldsymbol{R}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{L}$

7. O'lchov natijalariga tuzatishlarni hisoblash $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{L}$

8. $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{\delta x}_{\boldsymbol{j}}$ parametrlarining **tuzatilgan** qiymatlarini va $\hat{y}_i = y_{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{\vartheta}_{\boldsymbol{i}}$ o'lchangan qiymatlarini hisoblash.

9. Yakuniy tuzatish nazorati. O'lchangan miqdorlarning **tuzatilgan** qiymatlarini chap tomondagi parametrik bog'lanish tenglamalariga va o'ng tomonga parametrlarning **tuzatilgan** qiymatlarini almashtirish kerak: $\hat{y}_i = f_i\ (\bar{x}_1,\ \bar{x}_2, \ldots\ldots, \bar{x}_k)$. Agar chap tomon barcha ulanish tenglamalari uchun o'ng tomonga teng bo'lsa, tarmoq o'rnatiladi.

10. Aniqlikni baholash.

3.2.1. Parametrik usul bilan teng bo'lmagan o'lchovlarni tuzatish

Ma'lumki, agar P_Y og'irligi bo'lgan Y qiymati o'z vaznining ildiziga ko'paytirilsa, biz og'irligi birga teng bo'lgan qiymatni olamiz$F = Y\sqrt{P_Y}$

Haqiqatan ham, $\frac{1}{P_F} = \left(\frac{dF}{dY}\right)^2 \frac{1}{P_Y} = \left(\sqrt{P_Y}\right)^2 \frac{1}{P_Y} = 1$ ma'lum og'irlik matritsasiga ega tasodifiy o'zgaruvchilar vektori bilan ishlayotganimizda $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_n \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ elementlarining og'irliklari birga teng bo'lgan vektorga o'tish oson: $\mathbf{F} = \mathbf{P}^{0,5}\mathbf{Y}$.

Umumlashtirilgan aniqlikni baholash formulasidan foydalanib, biz olamiz

$$\mathbf{Q}_F = \mathbf{P}^{0,5}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}^{0,5} = \mathbf{E}.$$

Shunday qilib, F vektori teng darajada aniq. Ushbu vektorning barcha elementlari bir ga teng og'irliklarga ega. Bundan biz teng bo'lmagan o'lchovlarni parametrik usulda tuzatish algoritmini olish uchun foydalanamiz.

Parametrik usul uchun boshlang'ich tenglamalar parametrik bog'lanish tenglamalari $Y = \overline{f(X)}$O'lchov vektori og'irlik matritsasi bilan bir qator mustaqil, teng bo'lmagan o'lchovlar bo'lsin $P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}$

Keyin parametrik ulanish tenglamalarining chap va o'ng qismlarini $P^{0,5}$ ga ko'paytirib, biz bir xil aniq o'lchovlar holatiga o'tamiz.

$$\mathbf{P}^{0,5}\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{0,5}\mathbf{f}(\mathbf{X}) \qquad (3.2.7)$$

Parametrik tuzatish tenglamalari bir xil cheklovchi tenglamalardir, lekin chiziqli Rasmga tushiriladi. Shu sababli, xuddi shu texnikani parametrik tuzatish tenglamalariga ham kengaytirish mumkin. Biz $P^{0,5}V = P^{0,5}(A\Delta X + L)$ olamiz.

Qavslarni ochib, yangi belgilarni yaratib, biz teng darajada aniq o'lchovlar holatiga qisqartirilgan parametrik tuzatish tenglamalari tizimini olamiz.

$$\mathbf{V}' = \mathbf{A}'\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}' \qquad (3.2.8)$$

bu yerda $\mathbf{V}' = \mathbf{P}^{0,5}\mathbf{V};\ \mathbf{A}' = \mathbf{P}^{0,5}\mathbf{A}\,;\mathbf{L}' = \mathbf{P}^{0,5}\boldsymbol{L}$

Bu holda normal tenglamalar tizimi quyidagi Rasmni oladi:

$$\mathbf{A}'^T\mathbf{A}'\Delta\mathbf{X} + \mathbf{A}'^T\mathbf{L}' = 0$$

yoki (3.8) ni hisobga olgan holda, $\mathbf{A}^T\mathbf{P}^{0,5}\mathbf{P}^{0,5}\mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}^{0,5}\mathbf{P}^{0,5}\mathbf{L} = 0.$

Nihoyat, teng bo'lmagan o'lchovlar holatida normal tuzatish tenglamalari tizimi quyidagi Rasmga ega:

$$\boldsymbol{A^T P A \Delta X + A^T P L = 0} \qquad (3.2.9)$$

Matritsa ma'lumotlarini ko'paytirish orqali biz oddiy tenglamalar tizimini olamiz:

$$[pa_1a_1]\delta x_1 + [pa_1a_2]\delta x_2 + \ldots + [pa_1a_k]\delta x_k + [pa_1l] = 0;$$
$$[pa_1a_2]\delta x_1 + [pa_2a_2]\delta x_2 + \ldots + [pa_2a_k]\delta x_k + [pa_2l] = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[pa_1a_k]\delta x_1 + [pa_2a_k]\delta x_2 + \ldots + [pa_ka_k]\delta x_k + [pa_kl] = 0.$$

(3.9) tenglamalar boshqacha tarzda chiqarilishi mumkin.

Eng kichik kvadratlar usulining asosiy shartini $\Phi = V'^T V' = min$ $\Phi = V^T P^{0,5} P^{0,5} V = V^T P V = [\,p\vartheta\vartheta\,] = min$ deb yozamiz va undan normal tenglamalar chiqarishda foydalanamiz. Parametrik tuzatish tenglamalarini hisobga olgan holda ushbu funktsiyaning minimalini topamiz

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}. \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\mathbf{X}} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{V}}\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\Delta\mathbf{X}} = 2\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = 0; \quad \mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = 0.$$

Protrapozitsiya qilib , $\mathbf{A^T P V}$=0 teng bo'lmagan o'lchovlar uchun Gauss lemmasini olamiz. Bu erda **V** ni parametrik tuzatish tenglamalarining o'ng tomonini (3.5) $\boldsymbol{A^T P(A\Delta X + L) = 0}$ almashtiramiz. $\boldsymbol{A^T P A \Delta X + A^T P L = 0}$ *yoki* $\boldsymbol{R\Delta X + A^T P L = 0}$ bir xil normal tenglamalar tizimini olamiz, bu erda $\boldsymbol{R = A^T P A}$ - teng bo'lmagan o'lchovlar holati uchun normal tenglamalarning koeffitsient matritsasi.

Keling, tekislash tarmog'ining misolini (3.4-rasmga qarang) zarba uzunligi bilan to'ldiramiz. $L_1=1,5\ km$, $L_2=1,5\ km$, $L_3=0,75\ km$, $L_4=0,75\ km$, $L= 1,5\ km$ bo'lsin. $p_i = S/L_i = 1,5/L_i$ formulasi bo'yicha o'lchangan ortiqcha og'irliklarni hisoblang, biz $p_1=1,5/1,5=1$ ni olamiz; $p_2=1,5/1,5=1$; $p_3=1,5/0,75=2$;$p_4=1,5/0,75=2$; $p_5=1,5/1,5=1$.

Keling, bu og'irliklardan diagonal Rasmga ega bo'lgan vazn matritsasi hosil qilaylik

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jadvalda keltirilgan ma'lumotlar uchun normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasini hisoblaylik. 3.1, ularni olingan og'irlik matritsasi bilan to'ldirish

$$R = A^T PA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Teng bo'lmagan o'lchovlarni parametrik usulda tuzatish tartibi bir xil aniq o'lchovlar holatidan faqat oddiy tenglamalarni tuzish orqali farqlanadi, bu erda og'irliklarni hisobga olish talab qilinadi, shuning uchun o'lchov og'irliklarini hisoblash bosqichini qo'shish kerak.

Parametrik usul bilan teng bo'lmagan o'lchovlarni tuzatishda hisob-kitoblar ketma-ketligi.

1. Barcha o'lchovlar sonini aniqlash n, zarur k va ortiqcha r o'lchovlar.

2. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ parametrlarini tanlash, ular ikkita shartni qondirishi kerak - ularning soni k ga teng va ular bir-biridan mustaqil bo'lishi kerak, ya'ni. parametrlarning hech biri boshqalar bilan ifodalanmasligi kerak. $Xj = f(X_1, X_2, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_k)$ funksiya mavjud bo'lmasligi kerak.

3. Parametrik ulanish tenglamalarini tuzish. $Y_i = f_i\ (X_1,X_2, \ldots, X_k\ )$ yoki $Y=f(X)$ matritsa Rasmida.

4. $\boldsymbol{V = ADF + L}$ tuzatishlar uchun parametrik tenglamalar tuzish.

5. O’lchovlarning og'irliklarini hisoblash **P.**

6. Oddiy tuzatish tenglamalar tizimini tuzish $R\Delta X + A^T PL = 0$, bu erda $R = A^T PA$.

7. $\Delta X = -R^{-1}A^T PL$ normal tuzatish tenglamalar tizimining yechimi.

8. O’lchov natijalariga tuzatishlarni hisoblash $V = A\Delta X + L$.

Xj = xj + dxj parametrlarining **tuzatilgan** qiymatlarini va $\hat{y}i = yi + vi$ o’lchangan qiymatlarini hisoblash . Vektor Rasmida mos ravishda x= $x + \Delta X$ *va* $\hat{y} = y + V$.

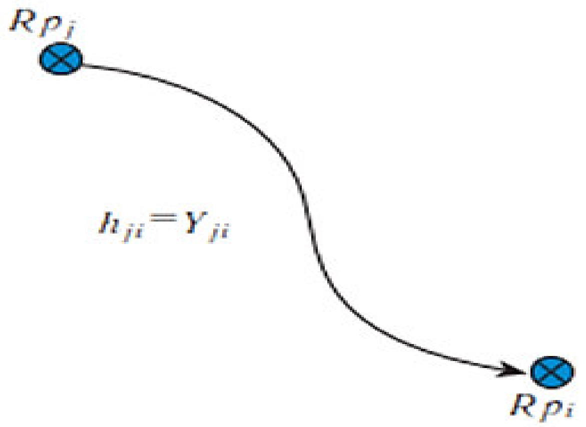
10. Yakuniy tuzatish nazorati. O’lchangan miqdorlarning tenglashtirilgan qiymatlarini parametrik aloqa tenglamalariga almashtirish kerak , chap qismda. Va parametrlarning **tuzatilgan** qiymatlari o’ng tomonda: $\hat{y}i = f_i\ (x_1, x_2, ..., x_k\ )$. Agar chap tomon barcha cheklash tenglamalari uchun o’ng tomonga teng bo’lsa, u holda tarmoq o’rnatiladi.

11. Aniqlikni baholash.

3.2.2 PARAMETRIK ULANISH TENGLAMALARINING TIPIK TURLARI VA TUZATISHLAR

Parametrik bog'lanish tenglamalarining eng tipik turlarini, ularni Rasmlantirish va parametrik tuzatish tenglamalarini tuzish qoidalarini ko’rib chiqamiz . Nivelirlash tarmog'i va rejalashtirilgan chiziqli burchakli tarmoqlar uchun bunday tenglamalar tizimini tuzish qoidalarini alohida ko’rib chiqamiz. Parametrik tenglamalar turi ulanish o’lchov turiga (masofa, balandlik, burchak va boshqalar) va tanlangan parametrlarga bog'liq. Qoida tariqasida, parametr sifatida aniqlanadigan nuqtalarning koordinatalari yoki belgilari tanlanadi. Oddiy parametrik tuzatish tenglamalarini tuzish uchun biz buni qilamiz. Eslatib o’tamiz, parametrik bog'lanish tenglamalarida o’lchangan miqdorlar va parametrlar o’rtasida bog'liqlik o’rnatiladi.

Ortiqchaliklar tekislash tarmoqlarida o’lchanadi. Umumiy holatda, ortiqcha aniqlanayotgan ballar belgilarining farqiga teng. Rasm. 3.5 j va i nuqtalari orasidagi o’lchangan balandlikni ko’rsatadi. *Xj* va *Xi* parametrlari sifatida biz ko’rsatkichlarning belgilarini tanlaymiz, ular orasida ortiqcha o’lchanadi. Bunda parametrik cheklash tenglamasi $Y_{ji} = H_{Rpi} - H_{Rp} = X_i - X_j$ ko rinishga ega bo ladi

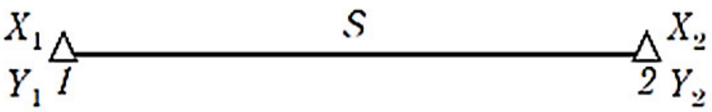


Rasm. 3.5. Nivelirlash tarmog'ining bo’lagi

Ortiqchalik yakuniy i va dastlabki j nuqtalarining belgilari orasidagi farq sifatida hisoblanadi. Tuzatish tenglamasi $vji = dxj – dxi + lji$ ko’rinishida bo’ladi , bu erda $lji = xi – xj – yji$. Agar balandliklardan birortasi boshlang'ich bo’lsa, masalan, i nuqta, u holda bu nuqtaning balandligi parametr emas va unga tuzatish aniqlanmagan $Yji = HRpi - HRp = HRpi - Xj$, $vji = - dxj + lji$, bu yerda $lji = HRpi - xj – yji$.

Rejalashtirilgan tarmoqlar uchun parametrik aloqa tenglamalari va tuzatishlarni tuzishni ko’rib chiqing. Biz geodeziyad`Wa qabul qilingan belgilarga rioya qilamiz: o’lchangan burchaklar b, tomonlar S, koordinatalar , Y va boshqalar. Bu umumiy nazariyani emas, balki o’ziga xos o’lchovni ko’rib chiqsak, qulayroqdir. Parametr sifatida aniqlanadigan nuqtalarning koordinatalarini tanlaymiz.

PARAMETRIK ULANISH TENGLAMASI VA O’LCHANGAN TOMON UCHUN TUZATISHLAR



Rasm. 3.6. 1 va 2 nuqtalar orasidagi yon uzunligini o’lchash holati

Parametrik munosabatlar tenglamasi o’lchangan qiymat S va parametrlar - masofa o’lchanadigan nuqtalarning koordinatalari o’rtasidagi munosabatni o’rnatadi (3.6-rasm). Nuqtalar orasidagi masofani koordinatalar bilan ifodalash kerak:

$$S = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}\,.$$

Parametrik tuzatish tenglamalari birlashtiruvchi tenglamalarning chiziqli ko’rinishidir. Bu holat uchun tuzatish tenglamasi $\upsilon_S = a_1\delta x_1 + a_2\delta y_1 + a_3\delta x_2 + a_4\delta y_2 + l_S$ ko’rinishga ega .

Bu erda **a**-koeffitsientlari har bir parametrga nisbatan cheklash tenglamasining qisman hosilalari, δx_i, δy_i parametrlarning taxminiy qiymatlariga mos ravishda x_i va y_i koordinatalariga tuzatishlardir .

Keling, hosilalarni topaylik

$$a_1 = \frac{\partial S}{\partial X_1} = -\cos\alpha_{12};\ a_2 = \frac{\partial S}{\partial Y_1} = -\sin\alpha_{12};$$

$$a_3 = \frac{\partial S}{\partial X_2} = \cos\alpha_{12};\ a_4 = \frac{\partial S}{\partial Y_2} = \sin\alpha_{12}.$$

$$v_S = -\cos\alpha_{12}\delta x_1 - \sin\alpha_{12}\delta y_1 + \cos\alpha_{12}\delta x_2 + \sin\alpha_{12}\delta y_2 + l_S,$$

bu erda $l_S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - S.$

O'LCHANGAN YO'NALISH BURCHAGI UCHUN PARAMETRIK ULASH VA TUZATISH TENGLAMASI

Oldingi holatda bo'lgani kabi, biz 1 va 2 nuqtalarning koordinatalarini parametr sifatida tanlaymiz (3.7-rasm). Yo'nalish burchagini koordinatalar bilan ifodalaymiz va o'lchangan yo'nalish burchagi $\alpha_{12} = \mathrm{arctg}\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ uchun parametrik munosabat tenglamasini olamiz.

Tuzatish tenglamasini yozish uchun har bir parametrga nisbatan ulanish tenglamasining hosilalarini topamiz:

Rasm. 3.7. O'rtadagi yo'nalish uchun yo'nalish burchagini o'lchash holati 1 va 2-bandlar.

$$a_1 = \frac{\partial\alpha}{\partial X_1} = \frac{1}{1 + (\Delta Y/\Delta X)^2}\Delta Y\frac{1}{\Delta X^2} = \frac{\Delta Y}{S^2} = \frac{\sin\alpha_{12}}{S} = b'_{12};$$

$$a_2 = \frac{\partial\alpha}{\partial Y_1} = \frac{1}{1 + (\Delta Y/\Delta X)^2}\frac{-1}{\Delta X} = \frac{-\Delta X}{S^2} = \frac{-\cos\alpha_{12}}{S} = -c'_{12};$$

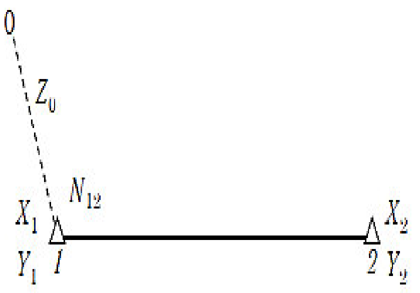
$$a_3 = \frac{\partial\alpha}{\partial X_2} = \frac{1}{1 + (\Delta Y/\Delta X)^2}\Delta Y\frac{-1}{\Delta X^2} = \frac{-\Delta Y}{S^2} = \frac{-\sin\alpha_{12}}{S} = -b'_{12};$$

$$a_4 = \frac{\partial\alpha}{\partial Y_2} = \frac{1}{1 + (\Delta Y/\Delta X)^2}\frac{1}{\Delta X^2} = \frac{\Delta X}{S^2} = \frac{\cos\alpha_{12}}{S} = c'_{12}.$$

E'tibor bering, har bir bunday lotin chiziq uzunligi S o'lchovining o'lchamiga teskari o'lchamga ega. Bu holda parametrik tuzatish tenglamasining umumiy Rasmi $v_a = a_1\delta x_1 + a_2\delta y_1 + a_3\delta x_2 + a_4\delta y_2 + la$ ekanligini hisobga olsak, har biri Bu erda atama o'lchovsiz bo'ladi. Binobarin, yo'nalish burchagiga tuzatish v o'lchovsiz bo'ladi, ya'ni. radianlarda. Tuzatishni darajalarda, masalan, soniyalarda olish uchun har bir lotinni soniyalarda r ga ko'paytirish kerak $b_{12} = pb'_{12}$, $c_{12} = pc'_{12}$. la erkin atamasi ham soniyalarda berilishi kerak. Keyin yo'nalish burchagi uchun tuzatish tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: $va = b_{12}\delta x_1 - c_{12}\delta y_1 + b_{12}\delta x_2 + c_{12}\delta y_2 + l_a$.

Ushbu tenglamaga juda o'xshash o'lchangan yo'nalish uchun tuzatish tenglamasi.

BIRLASHMANING PARAMETRIK TENGLAMASI VA O'LCHANGAN YO'NALISH UCHUN TUZATISHLAR



Rasm. 3.8. 1-banddan 2-nuqtagacha yo'nalishni o'lchash holati

Yo'nalishning o'lchangan qiymati, alidad 2 nuqtaga yo'naltirilganda, limb bo'ylab o'qish va o'qishning nol qiymati o'rtasidagi farq sifatida olinadi (3.8-rasm). Bu erda Z_0 limbdagi nol ko'rsatkichidan o'tadigan yo'nalishning yo'nalish burchagini bildiradi. Keyin N_{12} ni 1-nuqtadan 2-nuqtagacha bo'lgan yo'nalish burchagi va Z_0 yo'nalish burchagi o'rtasidagi farq sifatida talqin qilish mumkin: $N_{12} = arctg\alpha_{12} - Z_0$.

Oldingi holatda bo'lgani kabi, parametr sifatida 1 va 2 nuqtalarning koordinatalarini tanlaymiz. Z_0 nuqtadagi barcha yo'nalishlarni o'lchashda doimiy, mos yozuvlar qiymati sifatida qaralishi kerak. Z_0 ni qo'shimcha zarur o'lcham deb hisoblash mumkin , bu esa qo'shimcha parametr paydo bo'lishiga olib keladi.

O'lchangan yo'nalish uchun parametrik cheklash tenglamasi nihoyat Rasmni

$$N_{12} = \mathrm{arctg}\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right) - Z_0.$$

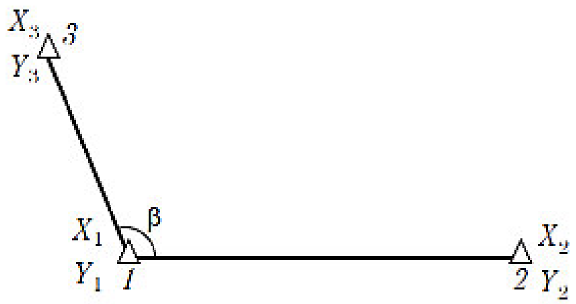
oladi

Ko'rib turganingizdek, bu tenglama o'lchangan yo'nalish burchagining munosabatlar tenglamasidan faqat Z_0 yo'naltiruvchi yo'nalish burchagi mavjudligi bilan farq qiladi, shuning uchun tuzatish tenglamalari faqat yo'nalish burchagiga tuzatish mavjudligi bilan farq qiladi. $v_N=b_{12}\delta x_1-c_{12}\delta y_1-b_{12}\delta x_2+c_{12}\delta y_2-\delta Z_0+l_N$. Har bir nuqtada δZ_0 tuzatish nuqtada o'lchangan barcha yo'nalishlar uchun bir xil bo'ladi.

PARAMETRIK ULASH VA TUZATISH TENGLAMASI O'LCHANGAN BURCHAK UCHUN.

O'lchangan burchak uchun parametrik ulanish tenglamasi b (3.9-rasm), ichida

Belgilanayotgan nuqtalarning koordinatalari parametr sifatida olinadi, 1-2 va 1-3 yo'nalishlarning yo'nalish burchaklari orasidagi farq sifatida olinishi mumkin:



Rasm. 3.9. 2 va 3 nuqtalar orasidagi 1-nuqtadagi burchakni o'lchash holati

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1}\right)$$

Yo'nalish burchak uchun tuzatish tenglamasini asos qilib olib, burchak uchun parametrik tuzatish tenglamasini yozamiz. Keling, faqat X_2 va Y_2 ga nisbatan hosilalar oldingi holatlardagi kabi bir xil bo'lishiga e'tibor qarataylik.

X_3 va Y_3 ga nisbatan hosilalar ishorani o'zgartiradi, chunki 3-bandning koordinatalarini o'z ichiga olgan arctg minus belgisiga ega. Shuni ham yodda tutingki, 1-bandning koordinatalari ham birinchi, ham ikkinchi shartlarga kiritilgan. Buni hisobga olib, o'lchangan burchak uchun tuzatish tenglamasini yozish oson

$$v_\beta = (b_{12} - b_{13})\delta X_1 + (-c_{12} + c_{13})\delta Y_1 - b_{12}\delta X_2 + c_{12}\delta Y_2 + b_{13}\delta X_3 - c_{13}\delta Y_3 + l_\beta.$$

PARAMETRIK TUZATISH USULIDA ANIQLIKNI BAHOLASH

Tuzatish vazifalaridan biri bu aniqlikni baholashdir. Ushbu vazifaga nima kiradi? O'lchovlarning to'g'riligini tuzatishdan oldin ham, tuzatishdan keyin ham baholash, **tuzatilgan** parametr qiymatlarining korrelyatsiya matritsasi va geodezik tarmoqning boshqa elementlarini aniqlash kerak.

Bir xil aniq o'lchovlar uchun, agar barcha o'lchovlar bir xil standart xatoga ega bo'lsa , tuzatishdan oldin o'lchovlarning standart xatosi Bessel formulasi bilan aniqlanadi:

$$n = \sqrt{\frac{[\vartheta^2]}{n-k}}.$$

Kerakli o’lchovlar soni birga teng bo’lgan bir kattalikdagi o’lchovlardan farqli o’laroq, bu erda formulada k ga teng bo’lgan zarur o’lchovlarning qiymati paydo bo’ladi. Ushbu holat uchun Bessel formulasini olish keyinroq, korrelyatsiya qilingan tuzatish usulini tavsiflashda beriladi.

Teng bo’lmagan o’lchovlar uchun Bessel formulasi og'irlik birligining ildiz o’rtacha kvadrat xatosini aniqlaydi, ya'ni. Og'irligi bittaga teng bo’lgan o’lchovlarning o’rtacha kvadrat xatosi:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\vartheta^2]}{n-k}} \qquad (3.10)$$

Og'irligi birlikdan farq qiladigan boshqa o’lchovlarning ildiz-o’rtacha kvadrat xatolarini aniqlash ushbu o’lchovlarning og'irliklari yordamida amalga oshiriladi p_i:$m_i = \mu/\sqrt{p_i}pi$.

Tenglashtirilgan qiymatlarning to’g'riligini baholash qiyinroq. Bunday holda, tuzatish algoritmini hisobga olgan holda, bunday qiymatlarning korrelyatsiya matritsalarini aniqlash kerak. Bunday holda, bunday miqdorlarni uch guruhga bo’lish kerak: 1) parametrlar; 2) o’lchovlar; 3) birinchi ikki guruhga aloqador bo’lmagan barcha boshqa miqdorlar.

Tuzatilgan X parametrlarining korrelyatsiya matritsasi Q_X parametr vektorining teskari vazn matritsasi hisobga olingan holda aniqlanadi:

$$\mathbf{K}_{\bar{X}} = \mu^2 \mathbf{Q}_{\bar{X}}. \qquad (3.11)$$

Tuzatilgan o’lchov qiymatlarini $KY=\mu^2 Q_F$ shunga o’xshash formuladan foydalanib hisoblash mumkin. ***F*** ning barcha boshqa qiymatlari uchun biz bir xil formuladan foydalanamiz, lekin o’zimizning teskari og'irlik matritsasi bilan:

$$\mathbf{K}_{\bar{F}} = \mu^2 \mathbf{Q}_{\bar{F}}. \qquad (3.12)$$

(3.11), (3.12) formulalardan ko’rinib turibdiki, korrelyatsiya matritsalarini aniqlash uchun teskari og'irlik matritsalarini topish kerak.

Buning uchun har doim (2.64) va (2.66) umumlashtirilgan aniqlikni baholash formulasidan foydalaniladi.

Buning uchun taxminiy vektorni teskari og'irlik matritsasi ma'lum bo’lgan vektor Rasmida ifodalash kerak. Shunday qilib, tizim (3.9) $\boldsymbol{\Delta X = -R^{-1}A^{T}P}L$ parametrlarining taxminiy qiymatlariga tuzatishlar vektorini va **tuzatilgan** parametr qiymatlari vektorini aniqlaydi.

$$\bar{\mathbf{X}} = x - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}\,\mathbf{L}. \qquad (3.13)$$

Bu erda vektor $\boldsymbol{L = f(x) - y}$, bu erda vektor y - ma'lum teskari og'irlik matritsasi $\boldsymbol{Q_y}$ bilan o’lchov vektori.

$\boldsymbol{X}$ parametrlarining taxminiy qiymatlari, shuningdek, $\boldsymbol{f(x)}$ taqribiy parametrlarining funksiyalar vektori doimiy qiymatlar vektori sifatida qaralishi mumkin. Shuning uchun $\boldsymbol{L}$ vektorning teskari og'irlik matritsasi $\boldsymbol{Y}$ vektorining teskari og'irlik matritsasiga to’g'ri keladi. Haqiqatan ham, $\boldsymbol{L = f(x) - y}$ funksiya uchun umumlashtirilgan aniqlikni baholash formulasidan foydalanib, biz $\boldsymbol{Q_L = EQ_yE^T = Q_y}$ ni olamiz , bu erda $\boldsymbol{E}$ - identifikatsiya matritsasi. (3.13) uchun biz aniqlikni baholash uchun umumlashtirilgan formuladan ham foydalanamiz

$$Q_{\bar{X}} = R^{-1}A^{T}PQ_{L}PAR^{-1} = R^{-1}A^{T}PP^{-1}PAR^{-1} = R^{-1}A^{T}PAR^{-1} = R^{-1}RR^{-1} = R^{-1}.$$

Shunday qilib, **tuzatilgan** parametrlar vektorining teskari og'irlik matritsasi Rasmga ega

$$\mathbf{Q}_{\bar{X}} = \mathbf{R}^{-1}. \qquad (3.14)$$

har bir **tuzatilgan** parametr qiymatining o’rtacha kvadrat xatolarini topish oson.

$$m_{\bar{x}_i} = \mu\sqrt{Q_{jj}} = \mu\sqrt{\frac{1}{p_{\bar{x}_i}}}. \qquad (3.15)$$

$F_j = F_j\,(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ular orqali ifodalanishi mumkin bo’lgan tarzda tanlanganligi sababli , bunday elementlarning teskari og'irlik matritsasi bitta vektorga birlashtiriladi.

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} \overline{F}_{\overline{x}_1} \\ \overline{F}_{\overline{x}_2} \\ \dots \\ \overline{F}_{\overline{x}_s} \end{pmatrix},$$

umumlashtirilgan aniqlikni baholash formulasi yordamida aniqlanishi mumkin,

$$\mathbf{Q}_{\overline{F}} = \mathbf{f}\mathbf{Q}_{\overline{x}}\mathbf{f}^T. \qquad (3.16)$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial \overline{x}_1} & \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial \overline{x}_2} & \dots & \frac{\partial \overline{F}_1}{\partial \overline{x}_k} \\ \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial \overline{x}_1} & \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial \overline{x}_2} & \dots & \frac{\partial \overline{F}_2}{\partial \overline{x}_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial \overline{x}_1} & \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial \overline{x}_2} & \dots & \frac{\partial \overline{F}_s}{\partial \overline{x}_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1k} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{s1} & f_{s2} & \dots & f_{sk} \end{pmatrix} -$$

har bir parametrga nisbatan tenglashtirilgan parametrlarning funksiyalar vektorining qisman hosilalari matritsasi. Shunday qilib, har qanday tarmoq elementining ildiz o’rtacha - kvadrat xatolar formula bilan aniqlanishi mumkin

$$m_{\overline{F}_i} = \mu\sqrt{Q_{F_{ii}}} = \mu\sqrt{\frac{1}{p_{\overline{F}_i}}}.$$

$y_j = F_j\ (x_1, x_2, .., x_k)$ **tuzatilgan** parametrlarning funksiyalari sifatida tanlaylik. Olingan tenglamalar parametrik cheklash tenglamalari bo’lib, ular uchun qisman hosilalar matritsasi parametrik tuzatish tenglamalarining koeffitsientlari matritsasi hisoblanadi. Shunday qilib, o’lchangan miqdorlarning **tuzatilgan** qiymatlarini baholash uchun (3.16) formuladagi ***f*** matritsasini **A** matritsasi bilan almashtirish kerak:

$$\mathbf{Q}_{\overline{y}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\overline{x}}\mathbf{A}^T. \qquad (3.17)$$

Tuzatilgan o’lchovlarning RMS xatolari

$$m_{\bar{y}_j} = \mu\sqrt{Q_{y_{jj}}} = \mu\sqrt{\frac{1}{p_{\bar{y}_j}}}.$$

1-misol. ***§3.2*** da barcha uch burchak o'lchanadigan uchburchak va tekislash tarmog'i uchun normal tenglamalarning koeffitsient matritsalari berilgan:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Keling, ushbu holatlarning aniqligini taxmin qilaylik. R matritsalarini teskari qilib har ikkala holat uchun teskari vazn matritsalarini aniqlaymiz.Buning uchun matematika kursida ko'rib chiqiladigan mashhur algoritmlardan foydalanish mumkin. Gauss algoritmi keyingi xatboshida beriladi. Endi biz Mathlab kabi taniqli dasturiy vositalardan foydalanamiz . Bu erda to'g'ridan-to'g'ri matritsani kiritish, uning inversiya funktsiyasini ko'rsatish va natijaga erishing. Birinchi holda, biz olamiz

$$\mathbf{Q}_{\bar{X}} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,667 & -0,333 \\ -0,333 & 0,667 \end{pmatrix}.$$

Eslatib o'tamiz, o'zaro og'irliklar bu erda asosiy diagonal bo'ylab joylashgan. $Q_{11} = \frac{1}{p_{\bar{X}_1}} = 0,667$ и $Q_{22} = \frac{1}{p_{\bar{X}_2}} = 0,667.$ uchburchakda birinchi va ikkinchi parametrlar (birinchi va ikkinchi burchaklar) uchun javobgarlik allaqachon **tuzatilgan**dan keyin .

Bunday holda, burchaklar teng darajada aniq, og'irliklari birga teng bo'lgan holda o'lchandi. Ko'rib turganingizdek, tenglashtirilgandan keyin og'irliklar 1/0,667=3/2=1,5 ga tenglasha boshladi, ya'ni. o'lchov og'irliklari bir yarim barobar oshdi. Agar bir vaqtning o'zida o'lchovlarning o'rtacha kvadrat xatolari ma'lum bo'lsa, masalan, **m=2″,** u holda **tuzatilgan** parametrlarning o'rtacha kvadrat xatolarini olish oson :

$$m_{\bar{X}_1} = m\sqrt{Q_{11}} = 2\sqrt{0,667} = 1,64''; \quad m_{\bar{X}_2} = m\sqrt{Q_{22}} = 2\sqrt{0,667} = 1,64''.$$

Shubhasiz, birinchi va ikkinchi parametrlar birinchi va ikkinchi o'lchovlar bilan bir xil bo'lganligi sababli, bu o'lchovlarning standart xatolari bir xil qiymatlarga teng bo'ladi.

Barcha **tuzatilgan** o’lchovlarning aniqligini baholash uchun (3.17) formuladan foydalanishimiz mumkin.

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\bar{x}}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,667 & -0,333 \\ -0,333 & 0,667 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,667 & -0,333 & -0,333 \\ -0,333 & 0,667 & -0,333 \\ -0,333 & -0,333 & 0,667 \end{pmatrix}.$$

Tuzatilgan burchaklarning korrelyatsiya matritsasi

$$\mathbf{K}_{\bar{y}} = m^2\mathbf{Q}_{\bar{y}} = 2^2\begin{pmatrix} 0,667 & -0,333 & -0,333 \\ -0,333 & 0,667 & -0,333 \\ -0,333 & -0,333 & 0,667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,667 & -1,333 & -1,333 \\ -1,333 & 2,667 & -1,333 \\ -1,333 & -1,333 & 2,667 \end{pmatrix}.$$

tuzatilgan o’lchovlarning o’rtacha kvadrat xatolarining kvadratlari mavjud . Demak, har uch burchak uchun $m_{yi} = 2,667 = 1,64''$.

Korrelyatsiya matritsasi taxminiy vektor elementlari orasidagi korrelyatsiya koeffitsientlarini aniqlash imkonini beradi. Bu uchburchakda barcha burchaklar bir-biridan mustaqil ravishda o’lchandi, shuning uchun tuzatishdan oldin o’lchov natijalarining dastlabki og'irlik matritsasi diagonaldir. **Tuzatilgan** o’lchovlarning korrelyatsiya matritsasi endi diagonal emas. Ko’rib turganimizdek, matritsaning barcha diagonaldan tashqari elementlari (korrelyatsiya momentlari) bir xil qiymatga ega -1,333. Shuning uchun, **tuzatilgan** burchaklar orasidagi korrelyatsiya koeffitsientlari bir xil bo’ladi

$$r_{\overline{y}_i\overline{y}_j} = \frac{k_{\overline{y}_i\overline{y}_j}}{m_{\overline{y}_i} m_{\overline{y}_j}} = \frac{-1,333}{\sqrt{2,667}\sqrt{2,667}} = -0,5.$$

2-misol. Nivelirlash tarmog'i uchun (3.4-rasmga qarang) **tuzatilgan** parametrlar vektorining teskari og'irlik matritsasi (ko’rsatkichlarning belgilangan belgilari) ni aniqlaymiz:

$$\mathbf{Q}_{\bar{X}} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,524 & 0,333 & 0,238 \\ 0,333 & 0,667 & 0,333 \\ 0,238 & 0,333 & 0,381 \end{pmatrix}.$$

Qoida tariqasida, tekislash tarmog'ida o’lchovlar teng bo’lmagan holda amalga oshiriladi , shuning uchun tuzatishda og'irlik birligining o’rtacha kvadrat xatosi ვ hisoblanadi. Og'irlik birligi ვ ning o’rtacha kvadrat xatosini hisoblash mumkin bo’lgan o’lchov natijalariga ega misollar keyinroq ko’rib chiqiladi. Bunday holda, biz o’lchov natijalarisiz misolni ko’rib chiqamiz, shuning uchun bu erda biz o’lchov aniqligini tayinlaymiz. μ=10 mm bo’lsin, keyin $m_{\bar{X}_1} = \mu\sqrt{Q_{11}} = 10\sqrt{0{,}524} = 7{,}2$ mm; $m_{\bar{X}_2} = \mu\sqrt{Q_{22}} = 10\sqrt{0{,}667} = 8{,}2$ mm; $m_{\bar{X}_3} = \mu\sqrt{Q_{33}} = 10\sqrt{0{,}381} = 6{,}2$ mm.

(2.63) formulaga muvofiq, $\boldsymbol{Q}$ matritsasining diagonaldan tashqari elementlari o’zaro bog'liqlik koeffitsienti bilan bog'liq. $Q_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{p_i p_j}}$ bu yerdan

$$r_{ij} = Q_{ij}\sqrt{p_i p_j} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{\frac{1}{p_i}\frac{1}{p_j}}} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}}.$$

Belgilangan ko’rsatkichlar belgilarining **tuzatilgan** qiymatlari o’rtasidagi korrelyatsiya koeffitsientlari ushbu formulalar yordamida hisoblab chiqiladi.

$$r_{\bar{X}_1\bar{X}_2} = \frac{Q_{12}}{\sqrt{\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_2}}} = \frac{0,333}{\sqrt{0,524\cdot 0,667}} = 0,77;$$

$$r_{\bar{X}_1\bar{X}_3} = \frac{Q_{13}}{\sqrt{\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_3}}} = \frac{0,238}{\sqrt{0,524\cdot 0,381}} = 0,53;$$

$$r_{\bar{X}_2\bar{X}_3} = \frac{Q_{23}}{\sqrt{\frac{1}{p_2}\frac{1}{p_3}}} = \frac{0,333}{\sqrt{0,667\cdot 0,381}} = 0,66.$$

Keling, **tuzatilgan** o’lchovlarning to’g'riligini taxmin qilaylik

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\bar{x}}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,524 & 0,333 & 0,238 \\ 0,333 & 0,667 & 0,333 \\ 0,238 & 0,333 & 0,381 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,524 & -0,286 & -0,238 & 0,095 & -0,190 \\ -0,286 & 0,429 & -0,143 & -0,143 & 0,286 \\ -0,238 & -0,143 & 0,381 & 0,048 & -0,095 \\ -0,095 & -0,143 & 0,048 & 0,381 & 0,238 \\ -0,190 & 0,286 & -0,095 & 0,238 & 0,524 \end{pmatrix}.$$

Mathlab muhitida amalga oshiriladi .

to’g'rilangan o’lchovlarning ildiz o’rtacha - kvadrat xatolari

$$m_{\overline{y}_1} = \mu\sqrt{Q_{11}} = 10\sqrt{0,524} = 7,2 \text{ мм}; \quad m_{\overline{y}_2} = \mu\sqrt{Q_{22}} = 10\sqrt{0,429} = 6,5 \text{ мм};$$
$$m_{\overline{y}_3} = \mu\sqrt{Q_{33}} = 10\sqrt{0,381} = 6,2 \text{ мм}; \quad m_{\overline{y}_4} = \mu\sqrt{Q_{44}} = 10\sqrt{0,381} = 6,2 \text{ мм};$$
$$m_{\overline{y}_5} = \mu\sqrt{Q_{55}} = 10\sqrt{0,524} = 7,2 \text{ мм}.$$

Ba'zi o’rnatilgan o’lchovlar juftlari orasidagi korrelyatsiya koeffitsientlarini aniqlaylik. Masalan, birinchi va to’rtinchi va ikkinchi va beshinchi o’lchovlar orasida:

$$r_{\overline{Y}_1\overline{Y}_4} = \frac{Q_{14}}{\sqrt{\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_4}}} = \frac{0,095}{\sqrt{0,524 \cdot 0,381}} = 0,24; \quad r_{\overline{Y}_2\overline{Y}_5} = \frac{Q_{25}}{\sqrt{\frac{1}{p_2}\frac{1}{p_5}}} = \frac{0,286}{\sqrt{0,429 \cdot 0,524}} = 0,36.$$

Tuzatilgan parametrlar va o’lchovlarning to’g'riligini baholashdan tashqari, boshqa miqdorlarning aniqligini, masalan, H_{Rp3} va H_{M1} belgilari o’rtasidagi farqni baholash kerak bo’lishi mumkin. Ushbu miqdorning to’g'riligini baholash uchun uni parametrlar bo’yicha ifodalash kerak, ya'ni. $F = H_{Rp3}\text{-}H_{M1} = X_3\text{-}H_{M1}$ funksiyasini tuzing. Demak, bu funksiyaning xj parametrlarga nisbatan qisman hosilalari vektori f =(001) ko`rinishga ega. Keyin (3.16) formulani qo’llaymiz va tenglashtirilgan parametrlarning ushbu funktsiyaning o’zaro og'irligini topamiz.

$$Q_{\overline{F}} = \frac{1}{P_{\overline{F}}} = fQ_{\overline{x}}f^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,524 & 0,333 & 0,238 \\ 0,333 & 0,667 & 0,333 \\ 0,238 & 0,333 & 0,381 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,381.$$

Ushbu funktsiyaning o’rtacha kvadrat xatosi (M_1 va R_{P3}) $m_{\overline{F}} = \mu\sqrt{\frac{1}{p_{\overline{F}}}} = 10\sqrt{0,381} = 6,2$ мм.

HISOBLASH ALGORITMLARI PARAMETRIK USUL BILAN TUZATISHDA

Ishlab chiqarish sharoitida tenglashtirish hisob-kitoblari maxsus dasturlar yordamida kompyuterlarda amalga oshiriladi. Bunday holda, hisoblash algoritmlari ijrochidan yashiriladi. Butun algoritmni bosqichma-bosqich kuzatish zarur bo’lgan holatlar mavjud. Bu, masalan, yangi hisoblash algoritmlarini tuzatishda, normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasi noto’g'ri shartlanganda, zarur bo’lganda, ba'zi bir oraliq natijalarni olish uchun, o’quv jarayonida va boshqa hollarda bo’lishi mumkin.

Shuning uchun talabalar uchun matritsa Rasmida taqdim etilgan tuzatish algoritmini bilish etarli emas. Quyida geodezik o'lchovlarni tuzatish bilan tanishishda muhim bo'lgan oraliq hisoblash algoritmlari keltirilgan.

NORMAL TENGLAMALARNI GAUSS USULIDA YECHISH.

Oddiy tenglamalarni yechish algoritmini ko'rib chiqing. Matematika kursida talabalar ushbu masalani hal qilish imkonini beruvchi ko'plab algoritmlar bilan tanishadilar. Bu noma'lumlarni ketma-ket yo'q qilish usullari: Cholesky , kvadrat ildizlar, Jordan , Gauss, Cramer va boshqalar. Oddiy, oson dasturlashtiriladigan algoritmga ega bo'lgan usulni tanlash muhimdir. Lekin, ichida Shu bilan birga, u o'lchov aniqligiga mos keladigan yuqori hisoblash aniqligini ta'minlashi kerak.

Bu xususiyatlar noma'lumlarni ketma-ket yo'q qilish usulining modifikatsiyasi bo'lgan Gauss usuliga ega. Oddiy tenglamalarning koeffitsient matritsasi simmetrikdir, shuning uchun normal tenglamalarni yechishda Gauss usulidan foydalanish mumkin. Uni uchta noma'lumli uchta tenglamalar tizimiga nisbatan ko'rib chiqing:

$$\begin{aligned}
&[a_1a_1]\delta x_1 + [a_1a_2]\delta x_2 + [a_1a_3]\delta x_3 + [a_1l] = 0;\\
&[a_1a_2]\delta x_1 + [a_2a_2]\delta x_2 + [a_2a_3]\delta x_3 + [a_2l] = 0;\\
&[a_1a_3]\delta x_1 + [a_2a_3]\delta x_2 + [a_3a_3]\delta x_3 + [a_3l] = 0.
\end{aligned} \qquad (3.18)$$

Ekvivalent transformatsiyalardan foydalanib, biz ushbu tizimni uchburchak Rasmga keltiramiz, shunda asosiy diagonal ostidagi koeffitsientlar nolga aylanadi. Bunga erishish uchun (3.18) dan birinchi tenglamani koeffitsientga ko'paytiring va $-\frac{[\alpha_1\alpha_2]}{[\alpha_1\alpha_1]}$ikkinchi tenglamaga qo'shing. Oling

$$\left([a_1a_2] - \frac{[a_1a_1][a_1a_2]}{[a_1a_1]}\right)\delta x_1 + \left([a_2a_2] - \frac{[a_1a_2][a_1a_2]}{[a_1a_1]}\right)\delta x_2 +$$
$$+\left([a_2a_3] - \frac{[a_1a_2][a_1a_3]}{[a_1a_1]}\right)\delta x_3 + \left([a_2l] - \frac{[a_1a_2][a_1l]}{[a_1a_1]}\right) = 0.$$

Birinchi noma'lumdagi koeffitsient nolga teng bo'lgani uchun biz bu tenglikni ko'rinishda qayta yozamiz

$$\left([a_2a_2]-\frac{[a_1a_2][a_1a_2]}{[a_1a_1]}\right)\delta x_2+\left([a_2a_3]-\frac{[a_1a_2][a_1a_3]}{[a_1a_1]}\right)\delta x_3+$$
$$+\left([a_2l]-\frac{[a_1a_2][a_1l]}{[a_1a_1]}\right)=0.$$

yoki qavslar mazmunini quyidagicha ifodalaydi: ***[a₂a₂1]; [a₂a₃1]; [a₂l1]***, biz ***$[a_2a_2\cdot 1]\delta x_2+[a_2a_3\cdot 1]\ \delta x_3+[a_2l\ 1]=0$.***

Bu belgi Gauss tomonidan kiritilgan. Bu erda nuqtadan keyingi birlik hozirda chiqarib tashlangan noma'lumlar sonini bildiradi. Birlik oldidagi koeffitsient dastlabki tenglamadagi kabi. Bu keyingi hisob-kitoblar uchun qulay.

Bu belgi yechim nazariyasini tushunishni osonlashtiradi tenglamalar tizimi, uni yechishdagi harakatlar ketma-ketligini bir xil turdagi qiladi. Bundan tashqari, ushbu algoritm hisob-kitoblarning oraliq natijalarini ishonchli nazorat qilish bilan ajralib turadi, bu usulning afzalliklaridan biri bo'lib, uni o'quv jarayonida ko'p yillar davomida muvaffaqiyatli qo'llash imkonini beradi.

Xuddi shunday, birinchi tenglamani koeffitsientga $-\frac{[\alpha_1\alpha_3]}{[\alpha_1\alpha_1]}$ ko'paytirish va tizimning uchinchi tenglamasiga (3.18) qo'shsak, uchinchi tenglamadagi birinchi noma'lumni yo'q qilishimiz mumkin:

$$\left([a_1a_3]-\frac{[a_1a_1][a_1a_3]}{[a_1a_1]}\right)\delta x_1+\left([a_2a_3]-\frac{[a_1a_2][a_1a_3]}{[a_1a_1]}\right)\delta x_2+$$
$$+\left([a_3a_3]-\frac{[a_1a_3][a_1a_3]}{[a_1a_1]}\right)\delta x_3+\left([a_3l]-\frac{[a_1a_3][a_1l]}{[a_1a_1]}\right)=0.$$

Bu erda birinchi omil nolga teng. Gauss yozuvidan foydalangan holda bu tenglama Rasmni oladi

$$[a_2a_3\cdot 1]\delta x_2+[a_3a_3\cdot 1]\delta x_3+[a_3l\cdot 1]=0.$$

Ikkinchi va uchinchi tenglamalarni ikkita tenglama tizimi sifatida yozamiz:

$$[a_2a_2 \cdot 1]\,\delta x_2 + [a_2a_3 \cdot 1]\,\delta x_3 + [a_2l \cdot 1] = 0;$$
$$[a_2a_3 \cdot 1]\,\delta x_2 + [a_3a_3 \cdot 1]\,\delta x_3 + [a_3l \cdot 1] = 0.$$

Olingan ikkita tenglama sistemasi bilan ekvivalent o’zgarishlarni davom ettiramiz. Birinchi tenglamani koeffitsientga ko’paytiring $-\frac{[\alpha_2\alpha_3 \cdot 1]}{[\alpha_2\alpha_2 \cdot 1]}$va natijani ikkinchi tenglamaga qo’shing

$$\left([a_2a_3 \cdot 1] - \frac{[a_2a_3 \cdot 1][a_2a_2 \cdot 1]}{[a_2a_2 \cdot 1]}\right)\delta x_2 + \left([a_3a_3 \cdot 1] - \frac{[a_2a_3 \cdot 1][a_2a_3 \cdot 1]}{[a_2a_2 \cdot 1]}\right)\delta x_3 +$$
$$+\left([a_3l \cdot 1] - \frac{[a_2a_3 \cdot 1][a_2l \cdot 1]}{[a_2a_2 \cdot 1]}\right) = 0.$$

Bu erda birinchi koeffitsient nolga teng va ikkinchi noma'lum chiqarib tashlanganligini hisobga olsak, $[a_3a_3 \cdot 2]\delta x_3 + [a_3l \cdot 2] = 0.$ ni yozishimiz mumkin.

Olingan tenglamalardan uchburchak tenglamalar tizimini tuzish oson

$$\begin{aligned} [a_1a_1]\delta x_1 + [a_1a_2]\delta x_2 + [a_1a_3]\delta x_3 + [a_1l] &= 0; \\ [a_2a_2 \cdot 1]\delta x_2 + [a_2a_3 \cdot 1]\delta x_3 + [a_2l \cdot 1] &= 0; \\ [a_3a_3 \cdot 2]\delta x_3 + [a_3l \cdot 2] &= 0. \end{aligned} \qquad (3.19)$$

Bunday tizimning koeffitsientlari maxsus Gauss sxemasida olinadi. Bunday sistemani olish jarayoni Gauss sxemasida normal tenglamalarni to’g'ridan-to’g'ri echish deb ataladi. (3.19) sistema oddiy tenglamalarning ekvivalent sistemasi deyiladi, u oson yechiladi. Darhaqiqat, uchinchi noma'lum uchinchi tenglamadan topiladi. Uni ikkinchi tenglamaga almashtirib, biz ikkinchi noma'lumni olamiz va bu ikki noma'lumni bilib, birinchi tenglamadan birinchi noma'lumni olamiz. Bu erda Gauss sxemasida normal tenglamalarni echishning teskari yo’nalishi amalga oshiriladi. Noma'lumlar olinadigan tenglamalarni yozamiz:

$$\delta x_1 = -\frac{[a_1a_2]}{[a_1a_1]}\delta x_2 - \frac{[a_1a_3]}{[a_1a_1]}\delta x_3 - \frac{[a_1l]}{[a_1a_1]};$$

$$\delta x_2 = -\frac{[a_2a_3\cdot 1]}{[a_2a_2\cdot 1]}\delta x_3 - \frac{[a_2l\cdot 1]}{[a_2a_2\cdot 1]}; \qquad (3.20)$$

$$\delta x_3 = -\frac{[a_3l\cdot 2]}{[a_3a_3\cdot 2]}.$$

(3.20) sistema eliminativ normal tenglamalar sistemasi deyiladi. Misol yordamida Gauss algoritmini kengaytirishning umumiy qoidasini keltiramiz

$$[a_4a_5\cdot 3] = [a_4a_5] - \frac{[a_1a_4][a_1a_5]}{[a_1a_1]} - \frac{[a_2a_4\cdot 1][a_2a_5\cdot 1]}{[a_2a_2\cdot 1]} - \frac{[a_3a_4\cdot 2][a_3a_5\cdot 2]}{[a_3a_3\cdot 2]}.$$

O'zgartirilgan Gauss algoritmi o'zgartirilmagan algoritmdan chiqarib tashlangan noma'lumlar soniga to'g'ri keladigan kasrlar soniga tengdir (odatda $\boldsymbol{k}$, bu holda uchta).

Kasrlarning maxrajlari ekvivalent tenglamalarning kvadratik koeffitsientlariga teng bo'lib, birinchidan $\boldsymbol{k^{-1}}$ tenglamalargacha ketma-ket.

Numeratorlar ikkita algoritmning ko'paytmalaridan iborat bo'lib, ularning harflari va indekslari o'zgartirilmagan algoritm va berilgan kasrning maxrajidagi algoritm birikmalaridan iborat.

Normal tenglamalarni yechish Gauss sxemasida olib boriladi, bunda ekvivalent va eliminatsion tenglamalar chiziqlari almashinadi (3.2-jadval).

$\boldsymbol{\delta x_1}$	$\boldsymbol{\delta x_2}$	$\boldsymbol{\delta x_3}$	l
$[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_1}]$	$[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2}]$	$[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_3}]$	$[\boldsymbol{\alpha_1 l}]$
-1	$-\frac{[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2}]}{[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_1}]}$	$-\frac{[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_3}]}{[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_1}]}$	$-\frac{[\boldsymbol{\alpha_1 l}]}{[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_1}]}$
	$[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\cdot 1}]$	$[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_3\cdot l}]$	$[\boldsymbol{\alpha_1\cdot l}]$
	-1	$-\frac{[\boldsymbol{\alpha_2\alpha_3\cdot 1}]}{[\boldsymbol{\alpha_2\alpha_2\cdot 1}]}$	$-\frac{[\boldsymbol{\alpha_1 l\cdot 1}]}{[\boldsymbol{\alpha_2\alpha_2\cdot l}]}$
		$[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_3\cdot 2}]$	$[\boldsymbol{\alpha_3 l\cdot 2}]$

		-1	$-\frac{[\alpha_3 l \cdot 2]}{[\alpha_3 \alpha_3 \cdot 2]}$
δx_1	δx_2	δx_3	

Tab. 3.2 yuqoridan pastgacha to’ldiriladi. Birinchi qator birinchi asl normal tenglamaning koeffitsientlaridan iborat, ikkinchisi birinchi qatorni - $[a_1a_1]$ ga bo’lish yo’li bilan olinadi. Uchinchi qatorni olish uchun kvadratik koeffitsient ustunidagi$-\frac{[\alpha_1\alpha_2]}{[\alpha_1\alpha_1]}$koeffitsienti va undan yuqori qatorning ko’paytmasi ikkinchi boshlang'ich tenglamaning koeffitsientlariga qo’shiladi. $-\frac{[\alpha_1\alpha_2]}{[\alpha_1\alpha_1]}$Keyingi ekvivalent satr minus belgisi bilan kvadrat koeffitsientiga bo’linadi. Ko’rib turganingizdek, har ikki qatordan keyin o’ngga bir ustunga siljish mavjud (noma'lumlar ketma-ket chiqarib tashlanadi). Shunga o’xshash harakatlar *2k* qatorni to’ldirish uchun bajariladi, bu erda *k* - noma'lumlar soni. Keyin noma'lumlar ketma-ket, oxirgisidan boshlab, yo’q qilish tenglamalari yordamida hisoblab chiqiladi. Noma'lumlar jadvalning oxirgi qatorida yoziladi. 3.2.

Algoritmni birlashtirish, Jadval. 3.2 quyidagi Rasmda yozilishi mumkin:

δx_1	δx_2	δx_3	l
$Э_{11}$	$Э_{12}$	$Э_{13}$	$Э_{14}$
-1	G_{12}	G_{13}	G_{14}
	$Э_{22}$	$Э_{23}$	$Э_{24}$
	-1	G_{23}	G_{24}
		$Э_{33}$	$Э_{34}$
		-1	G_{24}
δx_1	δx_2	δx_3	

$$Э_{ij}=И_{ij}+G_{1i}Э_{1j}+G_{2i}Э_{2j}+\ldots+G_{i-1,i}Э_{i-1,j}=И_{ij}+\sum_{k=1}^{i-1}G_{ki}Э_{kj};$$

***Gki* = – *Eki*/*Ekk* ; *Iij* -** *i*-boshlang'ich tenglamada j-chi noma'lum uchun koeffitsient.

Oddiy tenglamalar tizimini yechish misolini ko’rib chiqing. Oddiy tenglamalar tizimi berilgan bo’lsin:

$$3\delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - 2,5 = 0;$$
$$\delta x_1 + 3\delta x_2 - 2\delta x_3 + 3,0 = 0;$$
$$-\delta x_1 - 2\delta x_2 + 5\delta x_3 + 4,7 = 0.$$

Biz buni Gauss sxemasida hal qilamiz:

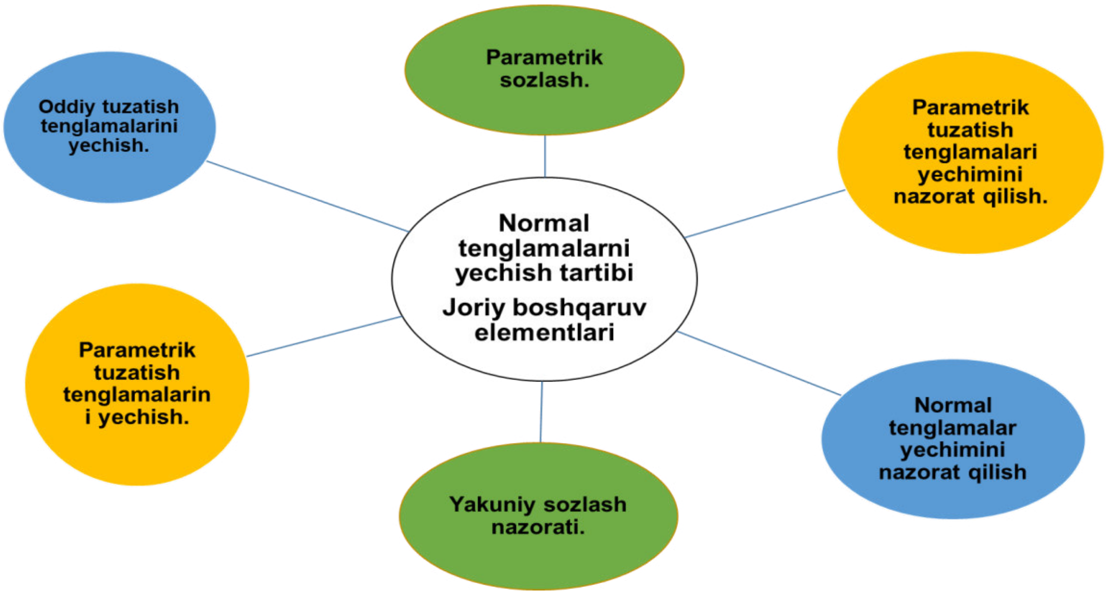
δx_1	δx_2	δx_3	l
3	1	-1	-2,5
-1	-0,3333	0,3333	0,8333
	2,6667	-1,6667	3,8333
		0,6250	-1,4375
		3,6250	6,2625
		-1	-1,7276
δx_1=1,097	δx_2=-2,517	δx_3=-1,728	

Parametrik rejimda hisoblash boshqaruvlari.

Tuzatishning har bir bosqichidagi barcha hisob-kitoblar boshqaruv elementlari bilan birga keladi (3.10-rasm). Ko’rib turganingizdek, boshqaruvni bajarish sxemasi "matryoshka" kabi tuzilgan. Har bir bosqichda bir nechta boshqaruv vositalaridan foydalanish mumkin, ammo kompyuterda maxsus tuzatish dasturlari yordamida hisob-kitoblarni bajarishda, qoida tariqasida, faqat

ba'zi boshqaruv elementlari. Yakuniy nazoratni bajarishga ishonch hosil qiling va tez-tez - parametrik tuzatish tenglamalarining echimini nazorat qiling. Boshqa turdagi boshqaruvlar maxsus dasturlardan foydalanmasdan hisob-kitoblarda qo’llaniladi, masalan, E xel muhitida , kalkulyatorlarda, shu jumladan makro kalkulyatorlar . Bu har qanday hisoblash xatosiga yo’l qo’yganda qayta hisob-kitoblardan qochadi. U ma'lum bir bosqichda tuzatiladi va xato tuzatilmaguncha keyingi bosqichlar endi bajarilmaydi. Maxsus dasturlar oldindan disk raskadrovka jarayonidan o’tkaziladi. Bu erda insonning e'tiborsizligidan kelib chiqadigan xatolar istisno qilinadi, ammo, masalan, noto’g'ri geometriyadan kelib chiqadigan muhim hisoblash xatolari paydo bo’lishi mumkin.

normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasining yomon shartliligiga olib keladigan geodezik qurilish. Shuning uchun, tuzatishning yakuniy nazorati barcha professional tarzda ishlab chiqilgan tuzatish dasturlarida taqdim etiladi. IN



Rasm. 3.10. Parametrik usulda rostlashda hisoblash boshqaruvlarining sxemasi

Dasturni disk raskadrovka qilishda barcha mumkin bo’lgan boshqaruv elementlaridan foydalanish mumkin.

Ichki bosqichlardan boshlab hisob-kitoblarni boshqarish vositalarini ko’rib chiqing. Biz yangi S = Ae + L vektorini kiritamiz , bu erda e - ustun vektori,

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$S_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{ik} + l_i$ vektorining elementlari a matritsaning i-qator elementlari yig‘indisiga va *i*-erkin hadga teng . Tenglamaning chap tomonini teng o’lchovlarda A^T matritsasiga, teng bo’lmagan o’lchovlarda esa $\mathbf{A^T P}$ matritsasiga ko’paytiramiz. Oddiy tenglamalar koeffitsientlarini tuzish to’g'riligini tekshirish uchun biz nazorat tengliklarini olamiz:

teng darajada aniq o’lchovlar uchun $\mathbf{A^T S = A^T A e + A^T L}$, ular odatiy belgilarda Rasmga ega

$$
\begin{aligned}
&[a_1 s] = [a_1 a_1] + [a_1 a_2] + \ldots + [a_1 a_k] + [a_1 l] \\
&[a_2 s] = [a_1 a_2] + [a_2 a_2] + \ldots + [a_2 a_k] + [a_2 l] \\
&\text{- -} \\
&[a_k s] = [a_1 a_k] + [a_2 a_k] + \ldots + [a_k a_k] + [a_k l]
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

teng bo'lmagan o'lchovlar uchun $\boldsymbol{A^T PS = A^T PAe + A^T PL}$.

Biz tizimga (3.21) (3.18) qo'llanilganlarga o'xshash ekvivalent transformatsiyalarni qo'llaymiz. Ekvivalent normal tenglamalar uchun nazorat tengliklari tizimini olamiz:

$$
\begin{aligned}
&[a_1 s] = [a_1 a_1] + [a_1 a_2] + \ldots + [a_1 a_k] + [a_1 l] \\
&[a_2 s \cdot 1] = [a_2 a_2 \cdot 1] + \ldots + [a_2 a_k \cdot 1] + [a_2 l \cdot 1] \\
&\text{- -} \\
&[a_k s \cdot (k-1)] = [a_k a_k \cdot (k-1)] + [a_k l \cdot (k-1)].
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Yo'q qilish tenglamalarining nazorat tengliklarini olish uchun biz har bir tenglikni (3.22) "-" belgisi bilan mos keladigan kvadrat koeffitsientga ajratamiz:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{[a_1 s]}{[a_1 a_1]} = -1 - \frac{[a_1 a_2]}{[a_1 a_1]} - \ldots - \frac{[a_1 a_k]}{[a_1 a_1]} - \frac{[a_1 l]}{[a_1 a_1]} \\
&-\frac{[a_2 s \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} = -1 - \frac{[a_2 a_3 \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} - \ldots - \frac{[a_2 a_k \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} - \frac{[a_2 l \cdot 1]}{[a_2 a_2 \cdot 1]} \\
&\text{- -} \\
&-\frac{[a_k s \cdot (k-1)]}{[a_k a_k \cdot (k-1)]} = -1 - \frac{[a_k l \cdot (k-1)]}{[a_k a_k \cdot (k-1)]}.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Nazorat tengliklari (3.22) va (3.23) Gauss sxemasida har bir qatordagi hisob-kitoblarning to'g'riligini tekshirish uchun ishlatiladi.

Oldingi misol uchun **S** vektorini kiritamiz:

Oddiy tenglamalar tizimi	S - chiziq uchun koeffitsientlar yig'indisi
$3\delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - 2{,}5 = 0$	0,5
$\delta x_1 + 3\delta x_2 - 2\delta x_3 + 3{,}0 = 0$	5,0
$-\delta x_1 - 2\delta x_2 + 5\delta x_3 + 4{,}7 = 0$	6,7

Gauss sxemasiga S ustunini qo’shamiz, unda l ustuniga o’xshash hisob-kitoblarni amalga oshiramiz:

δx_1	δx_2	δx_3	l	S	Контроль
3	1	–1	–2,5	0,5	0,5
–1	–0,3333	0,3333	0,8333	–0,1667	–0,1667
	2,6667	–1,6667	3,8333	4,8333	4,8333
	–1	0,6250	–1,4375	–1,8125	–1,8125
		3,6250	6,2625	9,8875	9,8875
		–1	–1,7276	–2,7276	–2,7276
δx_1=1,097	δx_2=–2,517	δx_3=–1,728			

"Boshqarish" ustunida birinchi ustundan l ustungacha (tengliklarning o’ng tomoni (3.22) va (3.23)) har bir satr uchun elementlar yig'indisi mavjud. S ustunida hisoblar Gauss algoritmlariga muvofiq amalga oshirildi (tengliklarning chap tomoni (3.22) va (3.23). Bu holda oxirgi va oxirgi ustunlarning barcha elementlari mos keladi. Shuning uchun barcha hisoblar xatosiz bajarildi.

Keyingi bosqichda normal tuzatish tenglamalari yechimining to’g'riligi nazorat qilinadi. Buning eng oson yo’li olingan noma'lumlarni dx1=1,097 o’rniga qo’yishdir; dx2=–2,517; dx3=–1,728 oddiy tuzatish tenglamalariga (3.18).

$$3 \cdot 1,097 - 2,517 - (-1,728) - 2,5 = 0;$$
$$1,097 + 3(-2,517) - 2(-1,728) + 3,0 = 0;$$
$$-1,097 - 2(-2,517) + 5(-1,728) + 4,7 = 0.$$

Natijada, biz nollarni oldik, shuning uchun normal tenglamalar tizimi echildi.

Asosiylaridan biri parametrik tuzatish tenglamalari yechimini nazorat qilishdir. Bu yerda Gauss lemmasining $\boldsymbol{A^T PV=0}$ tengliklaridan nazorat tengliklari sifatida foydalanish mumkin. Agar hisoblangan tuzatishlarni o’ngdagi lemmaning tengliklariga almashtirganda, biz nollarni olamiz, u holda tuzatishlar to’g'ri hisoblanadi. Parametrik tuzatish tenglamalarining yechimini quyidagi nazorat tengliklari zanjiri yordamida boshqarish mumkin:

$$[pvv]=[pvl]=[pvs]=[pll\cdot k]=[pls\cdot k]=[pss\cdot k].$$

E'tibor bering, oxirgi uchta algoritm Gauss sxemasida hisoblanadi. Bu erda biz ushbu tengliklarning ba'zilarini isbotlaymiz. Birinchi tenglikni isbotlash uchun chapdagi $\boldsymbol{V=A\Delta F+L}$ parametrik tuzatish tenglamalar sistemasini $\boldsymbol{V^TP}$ ga ko'paytiramiz, $\boldsymbol{V^TPV=V^TPA\Delta X+V^TPL}$ hosil bo'ladi. Lekin bu erda $\boldsymbol{V^TPA=0}$ Gauss lemmasi bo'yicha, bu erdan $\boldsymbol{V^TPV=V^TPL}$ yoki ***[pvv]=[pvl].*** Xuddi shunday quyidagi tenglikni isbotlashimiz mumkin. VTP ni nazorat tengliklari tizimiga ko'paytiramiz $\boldsymbol{S= Ae+L}$. Biz $\boldsymbol{V^TPS = V^TPA_e + V^TPL}$ ni olamiz .$\boldsymbol{V^TPA=0}$ ekanligini hisobga olsak, biz $\boldsymbol{V^TPS=V^TPL}$ yoki ***[pvs]=[pvl]*** ***o***lamiz.

Quyidagi tenglikni isbotlash uchun normal tenglamalar tizimiga $\boldsymbol{L^TPV=L^TPA\Delta X+L^TPL}$ tengligini beramiz:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L} = 0; \\ &\mathbf{L}^T\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{L}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}^T\mathbf{P}\mathbf{L} \end{aligned} \qquad (3.24)$$

chapdagi $\boldsymbol{L^TP}$ ni $\boldsymbol{V=A\Delta F+L}$ ga ko'paytirish orqali olinadi.

Odatiy belgilarda ushbu tizim quyidagi Rasmga ega:

$$\begin{aligned} &[pa_1a_1]\delta x_1 + [pa_1a_2]\delta x_2 + \ldots + [pa_1a_k]\delta x_k + [pa_1l] = 0 \\ &[pa_1a_2]\delta x_1 + [pa_2a_2]\delta x_2 + \ldots + [pa_2a_k]\delta x_k + [pa_2l] = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[pa_1a_k]\delta x_1 + [pa_2a_k]\delta x_2 + \ldots + [pa_ka_k]\delta x_k + [pa_kl] = 0 \\ &[pa_1l]\delta x_1 + [pa_2l]\delta x_2 + \ldots + [pa_kl]\delta x_k + [pll] = [plv]. \end{aligned}$$

Keling, (3.24) sistemaga ekvivalent o'zgarishlarni qo'llasak, barcha noma'lumlarni yo'q qilamiz. Oxirgi ekvivalent tenglama *[pll k]= [pvl]* ko'rinishini oladi.

Tuzatishning yakuniy nazorati o'lchangan kattaliklar va $y=f(\ x_1,x_2,\ldots.x_k)$ parametrlarining **tuzatilgan** qiymatlari ularga almashtirilganda ulanish tenglamalarini tekshirishdan iborat. Agar tenglik bajarilsa, tarmoq o'rnatiladi. Tuzatishning barcha bosqichlarida nazorat qilish misollari quyida keltirilgan.

GAUSS SXEMASIDA FUNKTSIYANING TESKARI OG'IRLIK MATRITSASI VA TESKARI OG'IRLIGINI HISOBLASH

$\boldsymbol{Q_x = R^{-1}}$ ekanligi ko'rsatilgan edi , bu erdan $\boldsymbol{RQ_x - E = 0}$ yoki

$$\begin{pmatrix} [a_1a_1] & [a_1a_2] & \dots & [a_1a_k] \\ [a_1a_2] & [a_2a_2] & \dots & [a_2a_k] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_1a_k] & [a_2a_k] & \dots & [a_ka_k] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

R matritsasini Q matritsasining birinchi ustuniga ko'paytirib, quyidagi tenglamalar tizimini olamiz:

Bu sistema normal tenglamalar tizimi bilan bir xil koeffitsientlarga ega, lekin erkin atamalarning boshqa vektori tufayli turli noma'lumlarga ega. Vektor o'rniga vektor $A^T PL = \begin{pmatrix} [pa_1l] \\ [pa_2l] \\ \dots \\ [pa_kl] \end{pmatrix}$ ishlatiladi $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$

Bundan ko'rinib turibdiki, ushbu tizimni Gauss sxemasida echishda $\mathbf{A^T PL}$ erkin a'zolarining asl vektorining raqamli qiymatlarini e_1 vektoriga almashtirish talab qilinadi. Shu bilan birga, Gauss sxemasiga erkin atamalarning yangi ustuni qo'shiladi va normal tenglamalar tizimini echishda erkin atamalar ustunidagi kabi hisob-kitoblar bu ustunda amalga oshiriladi. Yangi erkin shartlarga ega tizimni yechishda $\boldsymbol{Q}$ matritsasining birinchi qatorini (birinchi ustunini) noma'lumlar sifatida olamiz.

$\boldsymbol{Q}$ matritsasining ikkinchi va keyingi qatorlarini hisoblash uchun $\boldsymbol{R}$ matritsasini $\boldsymbol{Q}$ matritsasining mos ustunlariga ko'paytirish kerak. Ko'rinishning qolgan *k–1* tizimlarini olamiz: Bu tizimlarning barchasi faqat erkin shartlarda farqlanadi, bu esa boshqa noma'lumlarni keltirib chiqaradi. Erkin a'zolarning boshlang'ich vektorlari quyidagi Rasmga ega:

Bunday tizimlarni Gauss sxemasida yechish uchun har bir tizimni yechish uchun erkin atamalarning qo'shimcha ustunlarini kiritish kifoya. Keling, Gauss sxemasidan foydalanish misolini ko'rib chiqishni davom ettiramiz, bu $\boldsymbol{R}$ matritsasining inversiyasini ham o'z ichiga oladi, ya'ni $\boldsymbol{Q_{\overline{X}}}$ matritsasining elementlarini olish. Sxema (3.3-jadval) qo’shimcha ustunlarni o’z ichiga oladi, ularning har birida l bo’sh a'zolar ustunidagi kabi hisob-kitoblar amalga oshiriladi.

3.3-jadval

δx_1	δx_2	δx_3	l	S	Назорат	e_1	e_2	e_3
3	1	-1	-2,5	0,5	0,5	-1	0	0
-1	-0,3333	-1,6667	0,8333	-0,1667	-0,1667	0,3333	0	0
	2,6667	0,6250	3,8333	4,8333	4,8333	0,3333	-1	0
	-1	3,6250	-1,4375	-1,8125	-1,8125	-0,1250	0,3750	0
		-1	-1,7276	9,8875	9,8875	-0,1250	-0,6250	-1
δx_1=1,097	δx_2=-2,517	δx_3=-1,728						
$Q_{11}=0,379$	$Q_{12}=-0,103$	$Q_{13}=0,034$						
$Q_{21}=-0,103$	$Q_{22}=0,483$	$Q_{23}=0,172$						
$Q_{31}=0,034$	$Q_{32}=0,172$	$Q_{33}=0,276$						

Bunda ***Q*** matritsaning elementlari noma’lumlarni hisoblashga o’xshab, ***Q*** matritsasining elementlari satr bo’yicha hisoblab chiqiladi, ***Q*** matritsa elementlarining i-qatori dan elementlar o’rniga ei ustunidagi elementlar yordamida hisoblanadi . *l* ustuni. Hisoblash boshqaruv vositalaridan biri bu erda bajariladigan Q matritsaning simmetriya xossasi bo’lishi mumkin.

R matritsasi qo’shimcha ustunlar kiritmasdan o’zgartirilishi mumkin. Buning uchun oxirgi qatordan boshlab Q matritsasini hisoblash kerak. Bundan tashqari, simmetriya xususiyatidan foydalanish kerak $Q_{ij} = Q_{ji}$.

$\boldsymbol{Q_{kk}}$ bo’lgan 0,276 raqami va har doim –1 ni kvadratga bo’lish orqali olinadi. koeffitsienti (–1/3,625) ushbu satrda (3.3-jadvalga qarang). K-qatorda qolgan noma'lumlarni hisoblashda e_3 ustunidagi barcha erkin shartlar nolga teng, ya'ni. qo’shimcha ustunni ishlatmasdan Q_{31} Q_{32} Q_{33} noma'lumlar qatorini olamiz. Keyinchalik Q matritsasining simmetriyasidan foydalanib, $Q_{13}=Q_{31}$ va $Q_{23}=Q_{32}$ ni tenglashtiramiz.

Ikkinchi qatorning elementlarini hisoblashda faqat 0,3750 erkin atamasi qo’llaniladi, bu har doim –1 ni ushbu qatordagi kvadratik koeffitsientga bo’lish orqali olinadi. Qolgan bepul shartlar nolga teng.

Ushbu jarayonni umumlashtirib, qo'shimcha ustunlardan foydalanmasdan $\boldsymbol{Q}$ matritsasini hisoblash uchun quyidagi algoritmni yozishimiz mumkin (Gansen usuli).

1. $\boldsymbol{Q}$ matritsaning elementlari oxirgi qatordan birinchi qatorga qadar hisoblanadi.

2. Asosiy diagonal bo'yicha elementlarni hisoblashda eliminatsiya qatorlarining bo'sh a'zolari - 1 ni mos keladigan tenglamaning kvadratik koeffitsientiga bo'lish yo'li bilan hisoblanadi . Diagonal bo'lmagan elementlarni hisoblashda erkin shartlar nolga teng qabul qilinadi.

3. Faqat asosiy diagonaldagi va undan pastdagi elementlar hisoblab chiqiladi. Diagonal ustidagi elementlar $Q_{ij}=Q_{ji}$ xossasi yordamida pastdan qayta yoziladi .

Gauss sxemasida (3.16) formulani qayta qurish orqali $\bar{F}_j = \bar{F}_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$ tenglashtirilgan parametrlarning ba'zi funksiyalarining teskari og'irligini ham hisoblash mumkin. Agar bu funksiya bitta bo'lsa, $Q_F=1/P_F = fQ_xf^T$. Biz uni $1/P_F = -f\eta^T$ Rasmida yozamiz, bu erda vektor $\eta=-Q_xf^T$. Bu erdan $R+f^T=0$. Keling, ushbu tizimga $1/PF = -f\eta^T$ ni belgilaymiz,

Oxirgi tenglamadagi nolni fk+1 deb belgilaymiz, shu bilan f1, f2, ..., fk qatorlarini kengaytiramiz va ekvivalent o'zgartirishlardan foydalanib, berilgan sistemadagi barcha noma'lumlarni yo'q qilamiz. Gauss yozuvidan foydalangan holda oxirgi tenglama Rasmni oladi.

$$[f_{k+1} \cdot k] = -\frac{1}{P_F}. \qquad (3.26)$$

Agar erkin a'zolar vektori o'rniga foydalansak, bu algoritm *[pllk]* algoritmiga o'xshash tarzda ishlab chiqilgan.

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L} = \begin{pmatrix} [pa_1l] \\ [pa_2l] \\ \dots \\ [pa_kl] \end{pmatrix} \quad \text{вектор} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_k \end{pmatrix}$$

Keling, misolni Gauss sxemasi bilan davom ettiramiz, uni funktsiyaning teskari og'irligini hisoblash bilan to'ldiramiz. $F=X_2 - X_3$ funksiyani baholash talab qilinsin, u holda elementlari teng bo’lgan f vektor ko’rinishga ega bo’ladi $\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)_0$ ko’rinishi $f = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$Q matritsasini hisoblashga o’xshash tarzda Gauss sxemasiga qo’shimcha f ustunini kiritamiz (3.4-jadval).

(3.26) formulani amalga oshirib, f ustunida joylashgan quyidagi raqamlarning ko’paytmalari yig'indisi sifatida sxemadagi funktsiyaning teskari og'irligini olamiz:

$$-1/P_F = 0\cdot 0 + 0{,}667\cdot(-0{,}250) + (-0{,}583)\cdot 0{,}161 = -0{,}261.$$

Shunday qilib, Gauss sxemasida faqat bitta funktsiyaning o’zaro og'irligini hisoblash mumkin. Agar vektor funktsiyasi mavjud bo’lsa, u holda

δx_1	δx_2	δx_3	l	S	Контроль	r_1	r_2	r_3	f
3	1	−1	−2,5	0,5	0,5	−1	0	0	0
−1	−0,3333	0,3333	0,8333	−0,1667	−0,1667	0,3333	0	0	0
	2,6667	−1,6667	3,8333	4,8333	4,8333	0,3333	−1	0	0,667
	−1	0,6250	−1,4375	−1,8125	−1,8125	−0,1250	0 ,3750	0	−0,250
		3,6250	6,2625	9,8875	9,8875	−0,1250	−0,6250	−1	−0,583
		−1	−1,7276	−2,7276	−2,7276	0,0345	0,1724	0,2758	0,161
δx_1=1,097	δx_2=−2,517	δx_3=−1,728						$-1/P_f$=−0,261	
Q_{11}=0,379	Q_{12}=−0,103	Q_{13}=0,034							
Q_{21}=−0,103	Q_{22}=0,483	Q_{23}=0,172							
Q_{31}=0,034	Q_{32}=0,172	Q_{33}=0,276							

tenglashtirilgan funksiyaning teskari og'irlik matritsasi olish parametrlar bo’lsa, aniqlikni baholash uchun umumlashtirilgan formuladan foydalanish kerak (3.16).

Nazorat savollari.

1. Kerakli va ortiqcha o’lchovlarni aniqlang.

2. Parametrlar qanday sharoitlarda tanlanadi? Turli qurilishlarga misollar keltiring.

3. Parametrik cheklash tenglamalarining umumiy Rasmini yozing. Ularning ma'nosini tushuntiring. Cheklovchi tenglamalardagi tengliklar qanday kattaliklar uchun qanoatlantiriladi?

4. Parametrik tuzatish tenglamalarini yozing. Parametrik tuzatish tenglamalari qanday olinishini tushuntiring.

5. Chiziqli parametrik ulash tenglamalari va tuzatishlariga misollar keltiring.

6. Nivelirlash tarmog'i uchun parametrik ulash va tuzatish tenglamalarini yozing.

7. O'lchangan tomon uchun parametrik ulash va tuzatish tenglamalarini yozing.

8. O'lchangan yo'nalish burchagi, yo'nalishi va burchagi uchun parametrik bog'lanish va tuzatish tenglamalarini yozing.

9. Muloqot tenglamalarida tenglik qay darajada buzilgan, o'lchov natijalarini va parametrlarning taxminiy qiymatlarini ularga almashtirishda?

10. Parametrik tuzatish tenglamalari qanday shartda yechiladi?

11. Gauss lemmasi nima?

12. Oddiy tuzatish tenglamalar tizimining umumiy ko'rinishini matritsa ko'rinishida yozing. Ushbu tizimning xususiyatlari qanday?

13. Matritsa ko'rinishida yozilgan normal tenglamalar sistemasini odatiy ko'rinishga keltiring.

14. Gauss algoritmi qanday ochiladi?

15. Normal tuzatish tenglamalarini yechish usullarini ayting.

16. Normal tenglamalarni yechishning Gauss usuli qanday? Ekvivalent tizimlar qanday va Oddiy tenglamalarni yo'q qilish ?

17. Parametrlarni tuzatish va o'lchov tuzatishlar qanday hisoblanadi?

18. Geodeziya tarmoqlarini parametrik usul yordamida tuzatish ketma-ketligi qanday?

19. Rostlashda qanday hisoblash boshqaruv vositalaridan foydalaniladi?

20. Aniqlikni parametrik usulda baholash deganda nima tushuniladi? Qanday miqdorlar baholanadi?

21. Teng bo'lmagan o'lchovlar uchun geodezik konstruktsiyalarni parametrik usul bilan tuzatish ketma-ketligini keltiring.

22. Parametrik usulda rostlashda parametrlarni va ***tuzatilgan*** *o'lchovlarni baholash algoritmini keltiring.*

Yechimlar bilan bog'liq muammolar

Vazifa 1. rasmda. 3.11 da barcha birikmalarda burchaklarni o‘lchash sxemasi va o‘lchash natijalari ko‘rsatilgan: $Y_1=61°48^{|}\ 17,4$; $Y_2= 60°55^{\backslash}\ 41.9$; $Y_3= 54°43^{\backslash}38.1$; $Y_4= 122°43^{\backslash}56^{\backslash}\ 7$; $Y_6= 177\ °27\ 36,8$. Burchaklarni parametrik usulda tenglashtirish va aniqligini baholash talab qilinadi.

Yechim

1. Zarur va ortiqcha o’lchovlar sonini hisoblang. Barcha o’lchovlar soni n=6, kerakli o’lchovlar soni k=3, ortiqcha o’lchovlar soni r=n–k=6–3=3.

2. Parametrlarni tanlash: parametrlar mustaqil bo’lishi va ularning soni k=3 bo’lishi kerak, dastlabki uchta burchak bunday xususiyatlarga mos keladi. Biz ularni $X_1=Y_1$ parametr sifatida tanlaymiz; $X_2=Y_2$; $X_3=Y_3$.

3. Aloqaning parametrik tenglamalarini tuzamiz: $Y_1=X_1$; $Y_2=X_2$; $Y_3=X_3$; $Y_4=X_1+X_2$; $Y_5=X_2+X_3$; $Y_6=X_1+X_2+X_3$.

4. Parametrlarning taxminiy qiymatlarini hisoblang. Parametrlar dastlabki uchta o’lchovga teng bo’lganligi sababli, biz burchaklarning o’lchangan qiymatlariga teng parametrlarning taxminiy qiymatlarini olamiz.

$x_1=y_1=61^0 48^{/}17,4^{//}$; $x_2=y_2=60^0 55^{/}41,9^{//}$; $x_3=y_3=54^0 43^{/}38,4^{//}$;

5. Parametrik tuzatish tenglamalarini tuzing:

$\upsilon_1=\delta x_1+l_1$; $\upsilon_2=\delta x_2+l_2$; $\upsilon_3=\delta x_3+l_3$; $\upsilon_4=\delta x_1+\delta x_2+l_4$; $\upsilon_5=\delta x_2+\delta x_3+l_5$;

$\upsilon_6=\delta x_1+\delta x_2+\delta x_3+l_6$;

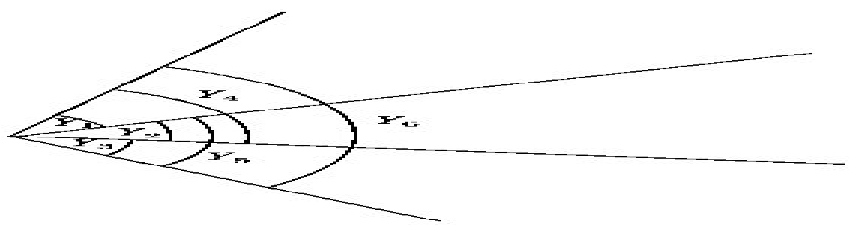
Bu erda

$l_1=x_1 - y_1$; $l_2=x_2-y_2$; $l_3=x_3 - y_3$; $l_4=x_1+x_2+y_4=+2,6$; $l_5=x_2+x_3+y_5;=+0,3$

$l_6=x_1+x_2+x_3+y_6;=+0,6$

Tuzatish tenglamalarining koeffitsient matritsasi Rasmga ega

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Rasm. 3.11. Barcha kombinatsiyalarda stantsiyada o’lchangan burchaklar

6. Normal tenglamalar sistemasini tuzamiz. Ushbu matritsani tuzatish tenglamalari koeffitsientlari jadvaliga yozamiz, unda biz erkin shartlarni, S qatorlar bo'yicha nazorat yig'indilarini va normal tenglamalar koeffitsientlarini hisoblaymiz.

O'lchash nomeri	*a1*	*a2*	*a3*	*L*	*S*
	1 0 0 1 0 1	0 1 0 1 1 1	0 0 1 0 1 1	0 0 0 +2,6 +0,3 +0,6	1 1 1 4,6 2,3 3,6
	a_1]	*a_2]*	*a_3]*	*l]*	*S]*
[a1 [a2 [a3 [l [S	3 2 1 3,2 9,2	2 4 2 3,5 11,5	1 2 3 0,9 6,9	3,2 3,5 0,9 7,21 14,81	9,2 11,5 6,9 14,81 42,4

S ustunida har bir satr uchun elementlar yig'indisi hisoblab chiqiladi, ular oddiy tenglamalarni tuzish va yechishda hisob-kitoblarni nazorat qilish uchun ishlatiladi. Jadvalning pastki qismida normal tenglamalarning koeffitsientlari hisoblanadi.

Masalan, [a_2a_3] - a_2 va a3 ustunlaridagi elementlarning ko'paytmalari yig'indisi.

$[\alpha_2\alpha_3]=\alpha_{12}\alpha_{13}+\alpha_{22}\alpha_{23}+\alpha_{32}\alpha_{33}+\alpha_{42}\alpha_{43}+\alpha_{52}\alpha_{53}+\alpha_{62}\alpha_{63}=0\cdot0+1\cdot0+0\cdot1+1\cdot1+1\cdot1=2$

Oddiy tenglamalar koeffitsientlari matritsasi matritsalarni ko'paytirish yo'li bilan ham olinishi mumkin

$$\mathbf{R}=\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

Oddiy tenglamalarni yechish uchun avvalo Gauss sxemasidan foydalanamiz. Sxema teskari og'irlik matritsasi va funktsiyaning teskari og'irligini ham hisoblaganligi sababli, biz baholash uchun **tuzatilgan** parametrlarning funktsiyasini tuzamiz. To'rtinchi burchakning aniqligini taxmin qilish talab qilinsin. Bu holda funksiya $F=Y_4=X_1+X_2$

ko'rinishida bo'ladi. Bu yerdan vektor $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$Eslatib o'tamiz, Gauss sxemasi qo'shimchani kiritadi f ustuni, unda funktsiyaning teskari og'irligi hisoblanadi. Ushbu ustundagi hisob-kitoblar erkin a'zolar ustunidagi elementlarni hisoblashga o'xshaydi.

f ustunida bu erda 0,416 ga teng funktsiyaning teskari og'irligi olinadi. Demak, funktsiyaning og'irligi (to'rtinchi burchak) P_F=1/0,416=2,40 ga teng.

Hisoblangan teskari og'irlik matritsasidan biz tuzatishdan keyin barcha parametrlarning og'irliklari P_{xj} = 1\0,5 = 2, 0 ga teng ekanligini olamiz. Bundan tashqari, boshqaruv [*llk*]= [*lSk*]=2,73 ga ega. bajarilgan.

8. Parametrlarga olingan tuzatishlarni tuzatish tenglamalariga almashtirish orqali o'lchov natijalariga tuzatishlarni hisoblang:

$v_1=\delta x_1+l_1=–0,72;\ v_2=\delta x_2+l_2=-0,72;\ v_3=\delta x_3+l_3=042;\ v4=\delta x_1+\delta x_2+l4=–1,16;$

$v_5=\delta x_2+\delta x_3+l_5=0,00;\ v_6=\delta x_1+\delta x_2+\delta x_3+l_6 = 0,18.$

Gauss lemmasi bo'yicha barcha algoritmlar [a jv] = 0 yaxlitlash xatolarigacha. Tenglik tekshirildi [vv]=[vl]=[vs]. Shuning uchun tuzatish tenglamalari tizimi to'g'ri yechilgan.

9. Jadvalda. 3.7 Parametrlarning **tuzatilgan** qiymatlari va o'lchangan burchaklar, bir vaqtning o'zida tuzatishning yakuniy nazoratini tekshirish bilan hisoblab chiqiladi.

3.7-jadval

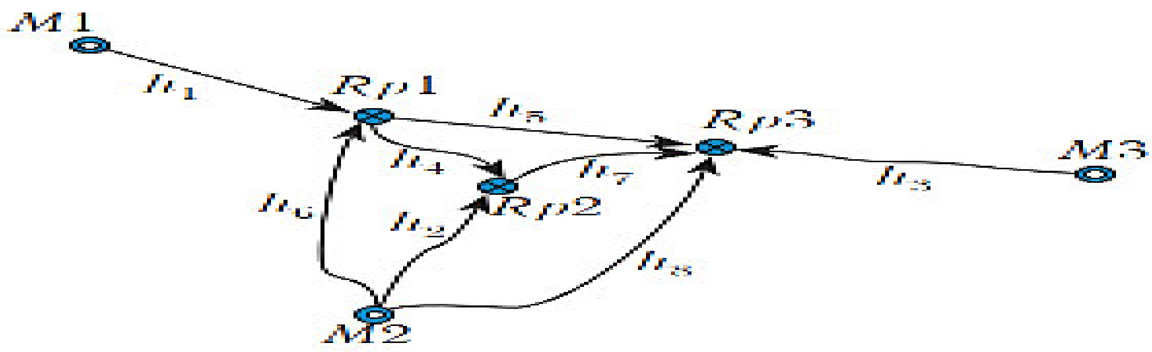
Burchaklar	Burchak qiymatlari	υ	Tuzatilgan burchaklar yi = yi +vi	Tuzatilgan parametrlar xj = xj + δxj	Cheklov tenglama-larining o'ng tomoni	O'rnatilgan parametrlar orqali hisoblangan burchak qiymatlari
y_1	61°48′17,4″	–0,72	61°48′16,7″	61°48′16,7″	X1	61°48′16,7″
y_2	60°55′41,9″	–0,72	60°55′41,2″	60°55′41,2″	X2	60°55′41,2″
y_3	54°43′38,1″	0,42	54°43′37,7″	54°43′37,7″	X3	54°43′37,7″
y_4	122°43′56,7″	1,15	122°43′57,9″		X_1+X_2	122°43′57,9″
y_5	115°39′19,7″	0	115°39′19,7″		X_2+X_3	115°39′19,7″
y_6	177°27′36,8″	–0,42	177°27′36,4″		X_1+X_2+X_1	177°27′36,4″

10. Aniqlik reytingi:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-k}} = \sqrt{\frac{2,73}{6-3}} = 0,95''; \quad m_{\overline{x}_i} = m\sqrt{Q_{ii}} = 0,95\sqrt{0,50} = 0,67'';$$

$$m_{\overline{F}} = m\sqrt{1/P_F} = 0,95\sqrt{0,416} = 0,61''.$$

Vazifa 2. rasmda. 3.12 jadvalda tekislash tarmog'ining diagrammasi ko'rsatilgan. 3.8 - boshlang'ich nuqtalari va o'lchov natijalarining belgilari. Nivelirlash tarmog'ini parametrik usulda tuzatish va aniqligini baholash talab etiladi.



Rasm. 3.12. Tarmoqni tekislash diagrammasi

3.8-jadval

Boshlanish nuqtasi belgilari	o'lchovlar	O'lchangan balandliklar h(y), m	Yunalish uzunligi L, km
H_{M1}=150,209	1	-3,567	4,00
H_{M2}=150,531	2	-0,283	6,67
H_{M3}=147,182	3	-0,126	4,00
	4	3,533	5,00
	5	0,428	1,05
	6	-3,861	1,67
	7	-3,131	5,00
	8	-3,448	3,33

Yechim. Biz matritsalarni ko'paytirish va invertatsiya qilish uchun tayyor dasturlardan foydalanib, barcha oraliq bosqichlarni batafsil tushuntirib, matritsa Rasmida tekislash tarmog'ini tuzatishni amalga oshiramiz. Gauss sxemasi bilan ishlash ko'nikmalarini mustahkamlash uchun parallel ravishda biz ushbu sxemada normal tuzatish tenglamalarining echimini taqdim etamiz. Keyinchalik, barcha misollar faqat matritsa Rasmida yechiladi.

1. Zarur va ortiqcha o'lchovlar sonini hisoblang. Barcha o'lchovlar soni n=8. Kerakli o'lchovlar soni belgilangan mos yozuvlar nuqtalari soniga teng (Rp1, Rp2, Rp3)k=3. Ortiqcha o'lchovlar soni $r=n-k=8-3=5$.

2. Parametrlarni tanlash: parametrlar mustaqil bo'lishi va ularning soni k=3 bo'lishi kerak, belgilangan etalonlarning uchta belgisi bunday xususiyatlarga mos keladi. Biz ularni parametr sifatida tanlaymiz. $X_1=H_{Rp1}$, $X_2=H_{Rp2}$, $X_3=H_{Rp3}$.

3. Nivelirlash tarmog'i sxemasidan foydalanib, parametrik bog'lanish tenglamalarini tuzamiz: $Y_1=X_1-H_{M1}$; $Y_2=X_2-H_{M2}$; $Y_3=X_3-H_{M3}$; $Y_4=X_2-X_1$; $Y_5=X_3-X_1$; $Y_6=X_1-H_{M2}$; $Y_7=X_3-X_2$; $Y_8=X_3-H_{M2}$.

4. Parametrlarning taxminiy qiymatlarini hisoblang. Parametrlarning taxminiy qiymatlarini aniqlash uchun biz haddan tashqari o'lchangan qiymatlardan va dastlabki uchta ulanish tenglamasidan foydalanamiz.

$x_1=y_1+HM_1=146{,}642$; $x_2=y_2+HM_2=150{,}248$; $x_3=y_3+HM_3=147{,}056$.

5. Parametrik tuzatish tenglamalarini tuzing va santimetrdagi erkin hadlarni hisoblang:

Tuzatish tenglamasi koeffitsienti matritsasi

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. 2 km uzunlikdagi kurs bo'ylab ortiqcha o'lchovlarni etalon o'lchov sifatida olib, o'lchovlarning og'irliklarini quyidagi formulada $P_i=C/L_i=2/Li$ aniqlaymiz,

O'lchov raqami i	L_i	$P_i=C/L_i$
1	4,00	0,50
2	6,67	0,30
3	4,00	0,50
4	5,00	0,40
5	1,05	1,90
6	1,67	1,20
7	5,00	0,40
8	3,33	0,60

7. Oddiy tuzatish tenglamalar sistemasini tuzamiz ***RΔX+A^T PL=0,*** bu yerda normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasi. normal tenglamalar sistemasining doimiy hadlari vektori $A^T PL = \begin{pmatrix} -3{,}62 \\ 5{,}36 \\ -6{,}72 \end{pmatrix}$

Agar siz normal tenglamalar tizimini Gauss sxemasida yechsangiz, normal tenglamalar tizimini tuzish uchun nazorat yig'indisi S bo'lgan jadvaldan foydalangan ma'qul.

Nihoyat, oddiy tenglamalar tizimi raqamli Rasmda olinadi ko'rinish

$$\begin{aligned} 4\delta x_1 - 0,4\delta x_2 - 1,9\delta x_3 - 3,62 &= 0; \\ -0,4\delta x_1 + 1,1\delta x_2 - 0,4\delta x_3 + 5,36 &= 0; \\ -1,9\delta x_1 - 0,4\delta x_2 + 3,4\delta x_3 - 6,72 &= 0. \end{aligned}$$

8. Q=R–1 teskari matritsani hisoblang, u ham rostlangan parametrlar vektorining teskari og'irlik matritsasi hisoblanadi.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,389 & 0,230 & 0,245 \\ 0,230 & 1,086 & 0,257 \\ 0,245 & 0,257 & 0,461 \end{pmatrix}.$$

Gauss sxemasida R matritsaning inversiyasini keltiramiz (3.9-jadval).

9. Parametrlarning taxminiy qiymatlariga tuzatishlar vektorini hisoblang

$$\Delta \mathbf{X} = -\mathbf{Q}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1,82 \\ -3,26 \\ 2,61 \end{pmatrix} \text{ (см)}.$$

10. Tuzatish tenglamalari tizimidan foydalanib, o'lchov natijalariga tuzatishlar vektorini (sm) hisoblaymiz.

11. Ushbu tuzatishlarning hisobini lemmadan foydalanib tekshiramiz Gauss $\mathbf{A^T PV=0}$ va nazorat tengligi $\mathbf{V^T PV=V^T PL}$.

Xuddi shunday, biz $\mathbf{V^T PV}$ = 12,11 va $\mathbf{V^T PL}$ = 12,11 olamiz.

Biz parametrik tuzatish tenglamalari muhim hisoblash xatolarisiz echilgan degan xulosaga keldik.

12. Yakuniy tuzatish nazoratini amalga oshiramiz (3.11-jadval).

Boshlanish nuqtalarining belgilari, m	Parametrlarning taxminiy qiymatlari, m	Parametrlarning taxminiy qiymatlariga tuzatishlar ΔX, sm	Tuzatilgan parametrlar x= x+ ΔX, m	Tuzatilgan balandliklardan olingan qiymat balandliklari	O’lchangan balandliklar, m	O’lchangan balandliklarga tuzatishlar, sm	Tenglashtirilgan ortiqcha y = y+ ΔV m
H_1=150,209	x1= 146,642	1,82	146,660	-3,549			
H_2=150,531	x2= 150,248	-3,26	150,215	-0,316			
H_3=147,182	x3= 147,056	2,61	147,082	-0,100			
				3,555	3,533	2,22	3,555
				0,422	0,428	–0,61	0,422
				-3,871	-3,861	–0,98	-3,871
				-3,133	-3,131	–0,23	-3,133
				-3,449	-3,448	–0,09	-3,449

To’g'rilangan balandliklar bo’yicha hisoblangan **tuzatilgan** ortiqcha va ularga kiritilgan tuzatishlar bilan o’lchangan ortiqchalar to’liq mos keldi. Yakuniy nazorat tekislash tarmog'i tenglashtirilganligini ko’rsatdi. Har qanday tarmoq elementlarini belgilashdagi noaniqlik bartaraf etildi.

13. Aniqlikni baholash. Og'irlik birligining ildiz o’rtacha kvadrat xatosi, ya'ni. 2 km uzunlikdagi kurs bo’ylab o’lchangan balandlik, (S=2):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}} = \sqrt{\frac{12,11}{5}} = 1,55 \text{ см};$$

1 km masofadagi o’rtacha kvadrat xato

$$m_{1\text{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{C}} = \frac{1,55}{\sqrt{2}} = 1,10 \text{ см}.$$

Tuzatilgan parametrlar vektorining korrelyatsiya matritsasi Rasmga ega

$$\mathbf{K}_{\bar{x}} = \mu\mathbf{Q}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,56 & 0,59 \\ 0,56 & 2,63 & 0,62 \\ 0,59 & 0,62 & 1,12 \end{pmatrix}.$$

aniqlangan nuqtalarning to’g'rilangan belgilarining ildiz o’rtacha kvadrat xatolari:

$$m_{\bar{x}_1} = \sqrt{0,94} = 0,94 \text{ см}; \quad m_{\bar{x}_2} = \sqrt{2,63} = 1,62 \text{ см}; \quad m_{\bar{x}_3} = \sqrt{1,12} = 1,06 \text{ см}.$$

Tuzatilgan belgilar orasidagi korrelyatsiya koeffitsientlari quyidagicha aniqlanadi:

$$r_{\bar{x}_1\bar{x}_2} = \frac{0,56}{0,94 \cdot 1,62} = 0,37; \quad r_{\bar{x}_1\bar{x}_3} = \frac{0,59}{0,94 \cdot 1,06} = 0,56; \quad r_{\bar{x}_2\bar{x}_3} = \frac{0,62}{1,06 \cdot 1,62} = 0,34.$$

Keling, **tuzatilgan** parametrlar funktsiyasining to’g'riligini taxmin qilaylik. Funksiya sifatida biz beshinchi ortiqcha $y_5 = X_3 - X_1$ ni olamiz. Nimadan hosila vektor f=(–1 0 1). Ushbu funktsiyaning teskari og'irligini aniqlaymiz Beshinchi **tuzatilgan** ortiqcha RMS xatosi

$$m_{\bar{y}_5} = \mu\sqrt{\frac{1}{\mathbf{P}_F}} = 1,55\sqrt{0,361} = 0,93 \text{ см}.$$

Agar **tuzatilgan** o’lchovlar vektorining teskari og'irlik matritsasi aniqlansa, barcha to’g'rilangan ortiqcha qiymatlarni birdaniga baholash mumkin.

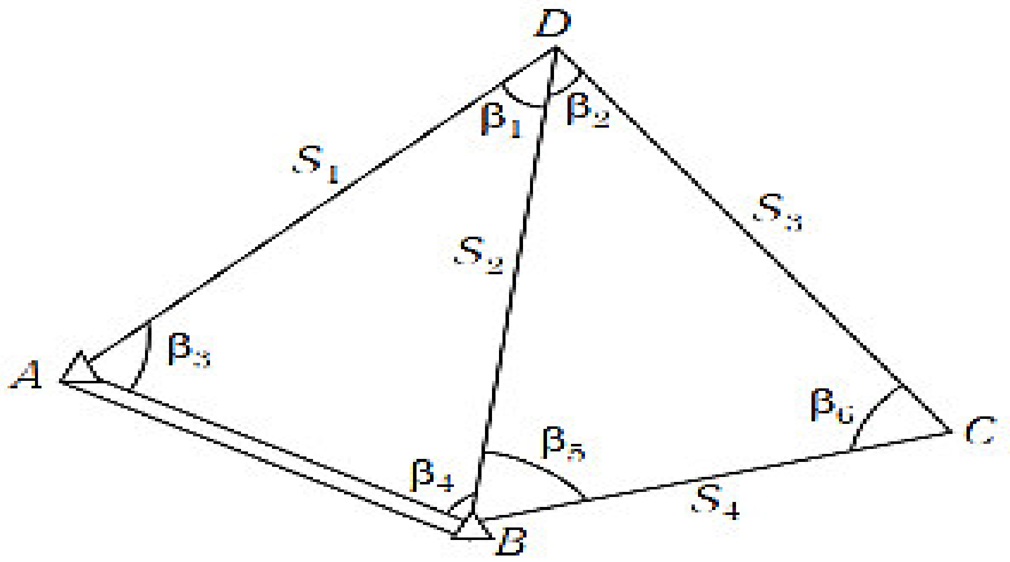
Tuzatilgan ortiqcha vektorning korrelyatsiya matritsasi

$$\mathbf{K}_F = \mu^2\mathbf{Q}_F = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,55 & 0,59 & -0,38 & -0,34 & 0,93 & 0,04 & 0,24 \\ 0,55 & 2,61 & 0,61 & 2,05 & 0,06 & 0,55 & -1,99 & 0,62 \\ 0,59 & 0,61 & 1,10 & 0,03 & 0,52 & 0,59 & 0,49 & 1,11 \\ -0,38 & 2,05 & 0,03 & 2,44 & 0,41 & -0,38 & -2,03 & 0,03 \\ -0,34 & 0,06 & 0,52 & 0,41 & 0,86 & -0,35 & 0,45 & 0,52 \\ 0,93 & 0,55 & 0,59 & -0,38 & -0,35 & 0,93 & 0,04 & 0,59 \\ 0,04 & -1,99 & 0,49 & -2,03 & 0,45 & 0,04 & 2,48 & 0,49 \\ 0,24 & 0,62 & 1,11 & 0,03 & 0,52 & 0,59 & 0,49 & 1,11 \end{pmatrix}.$$

Qayerdan, to’g'rilangan ortiqchalarning o’rtacha kvadrat xatolari:

$$m_{\bar{y}_1} = 0,96 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_2} = 1,61 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_3} = 1,05 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_4} = 1,56 \text{ см};$$

$$m_{\bar{y}_5} = 0,93 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_6} = 0,96 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_7} = 1,57 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_8} = 1,05 \text{ см}.$$



Rasm. 3.13. Chiziqli burchakli tarmoq

Vazifa 3. rasmda. 3.13 chiziqli burchakli tarmoq diagrammasini jadvalda ko'rsatadi. 3.12 boshlang'ich nuqtalarining koordinatalarini va tomonlarning burchaklari va uzunliklarini o'lchash natijalarini ko'rsatadi.

Shu bilan birga, o'lchovlar amalga oshirilgan umumiy stantsiya quyidagi aniqlikni ta'minlaganligi ma'lum. ildiz o'rtacha kvadrat burchak o'lchov og'ishi $\sigma_\beta=5''$, yon tomoni $\sigma_s = 1\ sm$.Tarmoqni parametrik tuzatish va aniqligini baholash talab etiladi.

Boshlanish nuqtalarining koordinatalari, m	O'lchangan burchaklar β_i	Tomon uzunligi, m
X_A=7821,407 Y_A=10444,703 X_B=7617,443 Y_B=11431,562	β_1=74°51′04,5″ β_2=74°05′07,9″ β_3=45°17′20,4″ β_4=59°51′34,9″ β_5=67°59′35,7″ β_6=37°55′21,2″	S_1=902,847 S_2=741,952 S_3=1119,230 S_4=1160,908

Yechim. Biz matritsalarni ko'paytirish va teskari qilish uchun tayyor dasturlardan foydalangan holda chiziqli burchakli tarmoqni tuzatishni matritsa Rasmida amalga oshiramiz, ammo biz barcha oraliq bosqichlarni batafsil tushuntiramiz.

Ushbu misolda heterojen o'lchovlar qo'llanilganligi sababli, biz geodeziyada qabul qilingan belgidan foydalanamiz. Burchaklar bi bilan, o'lchangan tomonlari S_i bilan belgilanadi .

1. Zarur va ortiqcha o'lchovlar sonini hisoblang. Barcha o'lchovlar soni *n=10,* kerakli o'lchovlar soni (aniqlangan nuqtalar koordinatalari soni) *k=4*, ortiqcha o'lchovlar soni *r=n–k=10–4=6.*

2. Variantlarni tanlang. Parametrlar mustaqil bo'lishi va ularning soni *k=4* bo'lishi kerak. Parametrlarning kerakli xossalariga mos keladigan X_D, Y_D, X_C, Y_C aniqlangan nuqtalarning koordinatalarini parametr sifatida tanlaylik.

3. Aloqaning parametrik tenglamalarini tuzamiz, ularda tomonlarning o'lchangan burchaklari va uzunliklarini nuqtalar koordinatalari orqali ifodalaymiz.

$$\beta_1 = \mathrm{arctg}\frac{Y_A - Y_D}{X_A - X_D} - \mathrm{arctg}\frac{Y_B - Y_D}{X_B - X_D}; \quad \beta_2 = \mathrm{arctg}\frac{Y_B - Y_D}{X_B - X_D} - \mathrm{arctg}\frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D};$$

$$\beta_3 = \mathrm{arctg}\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} - \mathrm{arctg}\frac{Y_D - Y_A}{X_D - X_A}; \quad \beta_4 = \mathrm{arctg}\frac{Y_D - Y_B}{X_D - X_B} - \mathrm{arctg}\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B};$$

$$\beta_5 = \mathrm{arctg}\frac{Y_C - Y_B}{X_C - X_B} - \mathrm{arctg}\frac{Y_D - Y_B}{X_D - X_B}; \quad \beta_6 = \mathrm{arctg}\frac{Y_D - Y_C}{X_D - X_C} - \mathrm{arctg}\frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C};$$

$$S_1 = \sqrt{(Y_A - Y_D)^2 + (X_A - X_D)^2}; \quad S_2 = \sqrt{(Y_B - Y_D)^2 + (X_B - X_D)^2};$$

$$S_3 = \sqrt{(Y_C - Y_D)^2 + (X_C - X_D)^2}; \quad S_4 = \sqrt{(Y_C - Y_B)^2 + (X_C - X_B)^2}.$$

4. Parametrlarning taxminiy qiymatlarini hisoblang - aniqlanayotgan nuqtalarning koordinatalari. Parametrlarning taxminiy qiymatlarini aniqlash uchun burchaklar va tomonlarning o'lchangan qiymatlaridan foydalanamiz. *D* nuqtaning koordinatalarini hisoblash uchun dastlabki *AB* tomonining yo'nalish burchagi va b3 burchakning o'lchangan qiymatidan foydalanib, *AD* tomonining yo'nalish burchagini hisoblaymiz:

$$\alpha_{AB} = \mathrm{arctg}\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \mathrm{arctg}\frac{11431{,}562 - 10444{,}703}{7617{,}443 - 7821{,}407} = 101°40'39{,}0'';$$

$$\alpha_{AD} = \alpha_{AB} - \beta_3 = 101°40'39{,}0'' - 45°17'20{,}1'' = 56°23'18{,}6''.$$

Keyinchalik, D nuqtasining taxminiy koordinatalarini hisoblaymiz:

Xuddi shunday, biz C nuqtasining taxminiy koordinatalarini hisoblaymiz :

5. Burchak uchun parametrik tuzatish tenglamalarining umumiy Rasmini hisobga olgan holda parametrik tuzatish tenglamalarini tuzing (3.2 § ga qarang):

$$v_{\beta i}=(b_{ij}-b_{ik})\delta X_i+(-c_{ij}+c_{ik})\delta Y_i-b_{ij}\delta X_j+c_{ij}\delta Y_j+b_{ik}\delta X_k-c_{ik}\delta Y_k+l_{\beta i},$$

где $b_{ij}=\sin\alpha_{ij}\dfrac{\rho}{S};\quad c_{ij}=\cos\alpha_{ij}\dfrac{\rho}{S}$

и сторон $v_S=-\cos\alpha_{12}\delta x_1-\sin\alpha_{12}\delta y_1+\cos\alpha_{12}\delta x_2+\sin\alpha_{12}\delta y_2+l_S.$

Jadvaldagi tuzatish tenglamalari koeffitsientlarining a matritsasini alifbo tartibida yozamiz . 3.13. Ushbu matritsani Rasmlantirishda har bir koeffitsientning o'lchamini kuzatish kerak. Burchaklar uchun tuzatish tenglamalarida koeffitsientlarning o'lchami bo'lishi kerak arc.s / sm , shuning uchun tomonlarning uzunligi santimetrda ifodalanishi kerak. Yon tuzatish tenglamalari o'lchovsiz koeffitsientlarga ega.

O'lchovlar номери	O'lchovlar	1	2	3	4
		δx_D	δy_D	δx_C	δy_C
1	β_1	$b_{DA}-b_{DB}$	$-c_{DA}+c_{DB}$	0	0
2	β_2	$b_{DB}-b_{DC}$	$-c_{DB}+c_{DC}$	b_{DC}	$-c_{DC}$
3	β_3	b_{AD}	$-c_{AD}$	0	0
4	β_4	$-b_{BD}$	c_{BD}	0	0
5	β_5	b_{BD}	$-c_{BD}$	$-b_{BC}$	c_{BC}
6	β_6	$-b_{CD}$	c_{CD}	$b_{CD}-b_{CB}$	$c_{CD}+c_{CB}$
7	s_1	$-\cos\alpha_{DA}$	$-\sin\alpha_{DA}$	0	0
8	s_2	$-\cos\alpha_{DB}$	$-\sin\alpha_{DB}$	0	0
9	s_3	$-\cos\alpha_{DC}$	$-\sin\alpha_{DC}$	$\cos\alpha_{DC}$	$\sin\alpha_{DC}$
10	s_4	0	0	$\cos\alpha_{BC}$	$\sin\alpha_{BC}$

Raqamli Rasmda matritsa

Erkin a'zolar vektorini parametrik bog'lanish tenglamalari yordamida hisoblaymiz, ulardagi boshlang'ich nuqtalarning koordinatalarini, aniqlangan nuqtalarning taxminiy koordinatalarini va o'lchash natijalarini almashtiramiz. Birinchi oltita bepul atamalar bu erda soniyalarda, qolganlari santimetrda ifodalangan.

6. O’lchov og'irliklarini aniqlash. Ushbu tarmoq heterojen o’lchamlarni o’z ichiga oladi, shuning uchun og'irliklar, oldingi misollardan farqli o’laroq, o’lchovga ega bo’ladi. Keling, mos yozuvlar o’lchovi uchun - burchak o’lchovini olaylik. Bu holda burchakning og'irligi birga teng, $P_\beta = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\beta^2} = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_\beta^2} = 1$.Og'irligi o’lchangan burchak o’lchovsiz kattalikdir. Yon o’lchov og'irligi $P_s = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_s^2} = \frac{25}{1} = 25\ bur\ \ c^2/sm^2$

O’lchovlar bir-biridan mustaqil ravishda amalga oshirilgan deb faraz qilsak, biz quyidagi og'irlik matritsasini olamiz:

7. ***RΔX+A^TPL=0*** normal tenglamalar koeffitsientlarining **R** matritsasini tuzish.

$$\boldsymbol{R} = \mathbf{A^T P A} = \begin{pmatrix} 47{,}431 & 8{,}419 & -1{,}529 & -4{,}019 \\ 8{,}419 & 69{,}585 & 7{,}500 & -28{,}126 \\ -1{,}529 & 7{,}500 & 16{,}037 & 12{,}268 \\ -4{,}019 & 28{,}126 & 12{,}268 & 41{,}904 \end{pmatrix}$$

Normal tenglamalar sistemasidagi erkin atamalar vektori

$$\boldsymbol{R} = \mathbf{A^T P L} = \begin{pmatrix} -45{,}758 \\ 0{,}182 \\ -10{,}533 \\ 5{,}022 \end{pmatrix}$$

8. Normal tenglamalar sistemasini yechish. Oddiy tenglamalar koeffitsientlari matritsasini teskari o’zgartiramiz va o’zgartirilgan parametrlar vektorining teskari og'irlik matritsasi (to’g'rilangan koordinatalar vektori) olamiz. Hisoblash boshqaruv vositalaridan biri bu holda bajariladigan asosiy diagonalga nisbatan matritsaning simmetriyasidir.

$$\boldsymbol{Q} = \mathbf{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 0{,}0218 & -0{,}044 & 0{,}0061 & -0{,}0026 \\ -0{,}044 & 0{,}0333 & -0{,}423 & 0{,}0343 \\ 0{,}0061 & -0{,}423 & 0{,}1340 & -0{,}0670 \\ -0{,}0026 & 0{,}0343 & -0{,}0670 & 0{,}0663 \end{pmatrix}$$

Parametrlarning taxminiy qiymatlariga tuzatishlar vektorini (sm) toping

$$\Delta \boldsymbol{X} = -\boldsymbol{Q}\mathbf{A^T P L} = \begin{pmatrix} 1{,}08 \\ -0{,}82 \\ 2{,}04 \\ -1{,}17 \end{pmatrix}$$

9. O’lchov natijalariga tuzatishlar vektorini hisoblash:

10. Tuzatish tenglamalar sistemasi yechimini nazorat qilish. Gauss lemmasidagi tengliklarning bajarilishini tekshiramiz. Buning uchun biz elementlarni hisoblaymiz Mathlab'dagi $\mathbf{A^TPV}$ vektori $\mathbf{A^TPV}\begin{pmatrix}0{,}00\\0{,}00\\0{,}00\\0{,}00\end{pmatrix}$Hisob-kitoblardan beri

14 ta raqamgacha kompyuterda yaratilgan bo'lsa, Gauss lemmasidagi tengliklarning yuqori aniqlik bilan bajarilishini kutish mumkin edi. Bizning holatlarimizda noldan farq 10-13 edi.

11. Belgilangan nuqtalar koordinatalarining **tuzatilgan** qiymatlarini hisoblash Jadvalda keltirilgan. 3.14.

Taxminiy koordinatalar, m	tuzatishlar, sm	tuzatilgan koordinatalar, m
8321,186	1,08	X_D=8321,197
11196,604	–0,82	Y_D=11196,595
8370,917	2,04	X_C=8370,938
12314,730	–1,17	Y_C=12314,718

12. O'lchangan miqdorlarning to'g'rilangan qiymatlarini hisoblash berilgan jadvalda. 3.15.

3.15-jadval

O'lchov belgisi	O'lchov natijalari	O'lchov tuzatishlari	Tutuzatilgan qiymatlar
β_1	74°51′04,5″	-2,44	74°51′02,1″
β_2	74°05′07,9″	-4,76	74°05′03,2″
β_3	45°17′20,4″	3,09	45°17′23,5″
β_4	59°51′34,9″	-0,48	59°51′34,4″
β_5	67°59′35,7″	-2,12	67°59′33,6″
β_6	37°55′21,2″	2,01	37°55′23,2″
S_1	902,847	-0,09	902,846
S_2	741,952	-0,90	741,943
S_3	1119,230	-0,16	1119,228
S_4	1160,908	0,44	1160,913

13. Yakuniy tuzatish nazorati Jadvalda amalga oshiriladi. 3.16.

3.16-jadval

O’lchov belgisi	Sozlangan o’lchangan qiymatlar. Cheklov tenglamalarining chap tomoni $\hat{y}$	Belgilangan nuqtalarning dastlabki koordinatalari va sozlangan koordinatalari	Koordinatalar orqali o’lchangan miqdorlarni aniqlash formulalari. Cheklov tenglamalarining o’ng tomoni $\hat{y}_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$	Koordinatalardan hisoblangan o’lchangan miqdorlarning sozlangan qiymatlari, $f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$
β_1	74°51′02,1″	X_A=7821,407	$\beta_1 = \mathrm{arctg}\frac{Y_A - Y_D}{X_A - X_D} - \mathrm{arctg}\frac{Y_B - Y_D}{X_B - X_D}$	74°51′02,1″
β_2	74°05′03,2″	Y_A=10444,703	$\beta_2 = \mathrm{arctg}\frac{Y_B - Y_D}{X_B - X_D} - \mathrm{arctg}\frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D}$	74°05′03,2″
β_3	45°17′23,5″	X_B=7617,443	$\beta_3 = \mathrm{arctg}\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} - \mathrm{arctg}\frac{Y_D - Y_A}{X_D - X_A}$	45°17′23,5″
β_4	59°51′34,4″	Y_B=11431,562	$\beta_4 = \mathrm{arctg}\frac{Y_D - Y_B}{X_D - X_B} - \mathrm{arctg}\frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}$	59°51′34,4″
β_5	67°59′33,6″	X_D=8321,197	$\beta_5 = \mathrm{arctg}\frac{Y_C - Y_B}{X_C - X_B} - \mathrm{arctg}\frac{Y_D - Y_B}{X_D - X_B}$	67°59′33,6″
β_6	37°55′23,2″	Y_D=11196,595	$\beta_6 = \mathrm{arctg}\frac{Y_D - Y_C}{X_D - X_C} - \mathrm{arctg}\frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C}$	37°55′23,2″
S_1	902,846	X_C=8370,938	$S_1 = \sqrt{(Y_A - Y_D)^2 + (X_A - X_D)^2}$	902,846
S_2	741,943	Y_C=12314,718	$S_2 = \sqrt{(Y_B - Y_D)^2 + (X_B - X_D)^2}$	741,943
S_3	1119,228		$S_3 = \sqrt{(Y_C - Y_D)^2 + (X_C - X_D)^2}$	1119,228
S_4	1160,913		$S_4 = \sqrt{(Y_C - Y_B)^2 + (X_C - X_B)^2}$	1160,913

Tuzatishning yakuniy nazorati amalga oshiriladi. Bog'lanish tenglamalarining chap tomoni - o’lchangan miqdorlarning **tuzatilgan** qiymatlari (3.16-jadval, 2-ustunga qarang) bog'lanish tenglamalarining o’ng tomoniga (5-ustun) to’g'ri keladi.

14. Aniqlikni baholash. $\mathbf{V^TPV}$=[pvv]=72,83 summasini hisoblang . Keling buni bajaramiz $\mathbf{V^TPL}$=[pvl]=72,83 ni hisoblash orqali ushbu miqdorni nazorat qilish . Nazorat tugallandi.

Keling, og'irlik birligining o’rtacha $\mu = m_\beta = \sqrt{\frac{[p\vartheta\vartheta]}{n-k}} = \sqrt{\frac{72.83}{6}} = 3,5''$ kvadrat xatosini va tomonlar uzunligini o’lchashning $m_S = \mu\sqrt{\frac{1}{p_s}} = 3{,}5\sqrt{\frac{1}{25}} = 0{,}7\ sm$ o’rtacha kvadrat xatosini aniqlaymiz . Bu erda tomonning og'irligi burchak o’lchamiga ega . s^2/sm^2, soniyalarda, shuning uchun m_S santimetrda.

Tuzatilgan parametrlarning teskari og'irlik matritsasi μ^2 ga ko’paytirib, asosiy diagonali bo’ylab aniqlangan nuqtalar koordinatalarining o’rtacha kvadrat xatolarining kvadratlari bo’lgan **tuzatilgan** parametrlarning korrelyatsiya matritsasini olamiz.

$$K_{\bar{x}} = \mu^2 Q_{\bar{x}} = \begin{cases} 0{,}265 & -0{,}053 & 0{,}075 & -0{,}032 \\ -0{,}053 & 0{,}405 & -0{,}513 & 0{,}417 \\ 0{,}075 & -0{,}513 & 1{,}626 & -0{,}813 \\ -0{,}032 & 0{,}417 & -0{,}813 & 0{,}804 \end{cases}$$

tenglashtirilganlarning o’rtacha kvadrat xatolarini hisoblash oson nuqtalarning koordinatalari aniqlanadi

$$m_{\bar{x}_D} = \sqrt{0{,}265} = 0{,}51\ sm; \qquad m_{\bar{y}_D} = \sqrt{0{,}405} = 0{,}64\ sm;$$

$$m_{\bar{x}_C} = \sqrt{1{,}625} = 1{,}28\ sm; \qquad m_{\bar{y}_C} = \sqrt{0{,}804} = 0{,}90\ sm;$$

O’rta Belgilangan nuqtalar pozitsiyasining kvadratik xatolari:

$$m_D = \sqrt{m^2_{\bar{X}_D} + m^2_{\bar{y}_D}} = 0{,}82\ sm; \quad m_C = \sqrt{m^2_{\bar{X}_D} + m^2_{\bar{y}_D}} = 1{,}56\ sm;$$

Ba'zan aniqlangan nuqtalarning tuzatilgan koordinatalari orasidagi korrelyatsiya koeffitsientlari qiziqish uyg'otadi. Misol tariqasida tuzatilgan X_D va Y_C koordinatalari orasidagi korrelyatsiya koeffitsientini aniqlaymiz. Demak, ular orasidagi korrelyatsiya momenti –0,513 ga teng

Aniqlikni baholash uchun umumlashtirilgan formuladan foydalanib, biz **tuzatilgan** o’lchovlar vektorining korrelyatsiya matritsasini hisoblaymiz va shu bilan o’rnatilgan o’lchovlarning o’rtacha kvadrat xatolarini olamiz:

Masalan, birinchi burchakning tuzatilgan qiymatining standart xatosi $m_{\bar{\beta}} = \sqrt{2{,}41} = 1{,}55''$, uchinchi tomonning tuzatilgan qiymatining standart xatosi $m_{\bar{S}} = \sqrt{0{,}35} = 0{,}56$ **Tuzatilgan** o’lchovlarning teskari og'irlik matritsasi hisoblang:

Asosiy diagonalda **tuzatilgan** o’lchovlarning o’zaro og'irliklari mavjud. Tenglashdan oldin barcha burchaklarning og'irliklari birga teng edi, tomonlar - 25. Tenglashdan keyin og'irliklar turli qiymatlarni oldi. Masalan, Pb1 PS3= 1 0,1985 = 5,0; = 10,0288 = 34,7.

Parametrlar va o’lchangan miqdorlar bilan bog'liq bo’lmagan elementlarning aniqligini baholash uchun parametrlar funktsiyasini tuzish kerak. Masalan, DC tomonning yo’nalish burchagining to’g'riligini baholash uchun biz koordinatalar orqali berilgan yo’nalish burchagini aniqlaydigan funktsiyani tuzamiz $\alpha_{DC} = \operatorname{arctg}\frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D}$.

Parametrlarga nisbatan bu funksiyaning qisman hosilalari qatorini aniqlaymiz. O’zaro og'irlikni hisoblang funktsiyaning o’rtacha kvadrat xatosi

$$m_F = m_{\alpha_{DC}} = \mu\sqrt{Q_F} = 3{,}5\sqrt{0{,}495} = 1{,}7\,''$$

§3.3. KORRELYATSION TUZATISH USULI

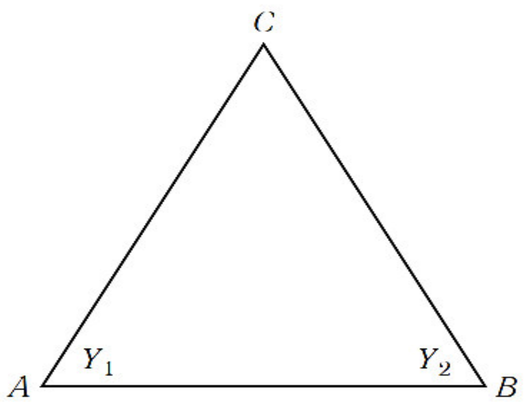
KORRELYATSIYA USULINING UMUMIY NAZARIYASI .

Korrelyativ tuzatish usuli eng kichik kvadratlarni tuzatishning ikkinchi usuli hisoblanadi. Parametrik usuldan farqli o’laroq, korrelyatsiya usulida dastlabki tenglamalar argument sifatida o’lchovlar bilan tuziladi. Ushbu usul nazariyasi taqdimotini soddalashtirish uchun uni misollar bilan boshlaylik. Ikki burchak o’lchanadigan uchburchakni ko’rib chiqaylik (3.14-rasm).

Bunday rasmda kerakli o’lchovlar soni k=2, ya'ni. ortiqcha o’lchovlar mavjud emas, tarmoqning har qanday elementlarini belgilashda noaniqlik muammosi yo’q va tuzatish muammosi paydo bo’lmaydi. Ammo uchinchi o’lchov amalga oshirilsa - ortiqcha bo’lgan Y_3 burchagini o’lchash uchun, u holda o’lchangan qiymatlar o’rtasida bog'liqlik mavjud: $Y_1+Y_2+Y_3-180=0$.

Bitta ortiqcha o’lchov o’lchangan qiymatlar o’rtasida bitta matematik munosabatga olib keldi.

Nivelirlash tarmog'ini ko’rib chiqaylik (3.15-rasm). Uchta aniqlangan benchmark, uchta o’lchov va bitta original brend mavjud.



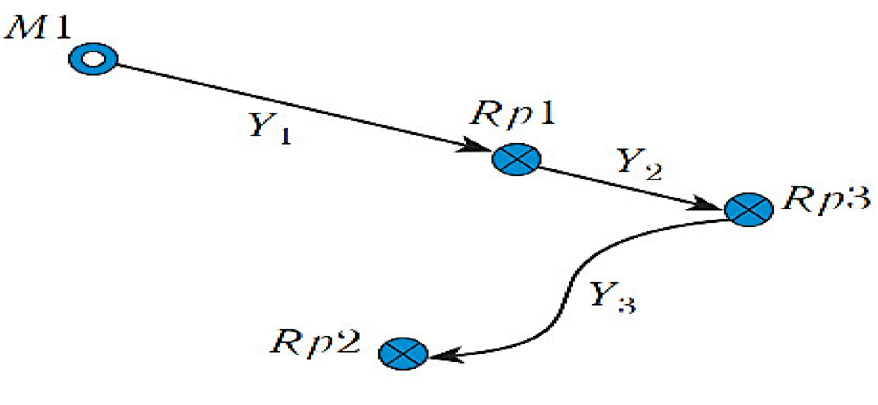
Rasm. 3.3.1. Uchburchakda burchaklarni o'lchash

Barcha o'lchovlar talab qilinadi $n=k=3$. Ortiqcha o'lchovlar yo'q r=0. Tarmoqqa bitta ortiqcha o'lcham qo'shamiz (3.16-rasm). n=4, k=3, r=1 tarmoqning quyidagi miqdoriy xarakteristikalarini oldi. Bizda bitta ortiqcha o'lchov bor, bu $Y_2+Y_3-Y_4=0$ o'lchovlari o'rtasida matematik bog'liqlikning paydo bo'lishiga olib keldi.

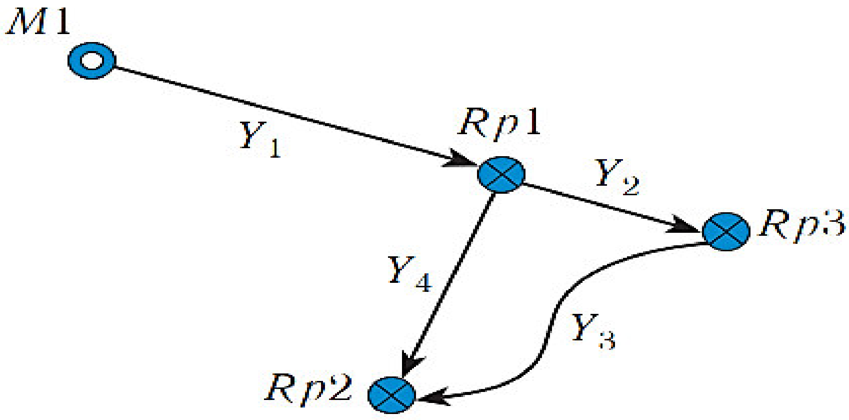
Keling, ushbu tarmoqni M2 asl belgisiga ulash orqali yana bir o'lcham qo'shamiz (3.17-rasm).

Bunda n=5, k=3, r=2. Ikkinchi ortiqcha o'lchov o'lchovlar orasidagi ikkinchi matematik munosabatlarning paydo bo'lishiga olib keldi. M_2 va M_1 asl sinflari o'rtasidagi ortiqcha miqdorlar yig'indisi ushbu asl $Y1 + Y_2 + Y_5 - (H_{M2} - H_{M1}) = 0$ belgilari orasidagi farqga teng bo'lishi kerak.

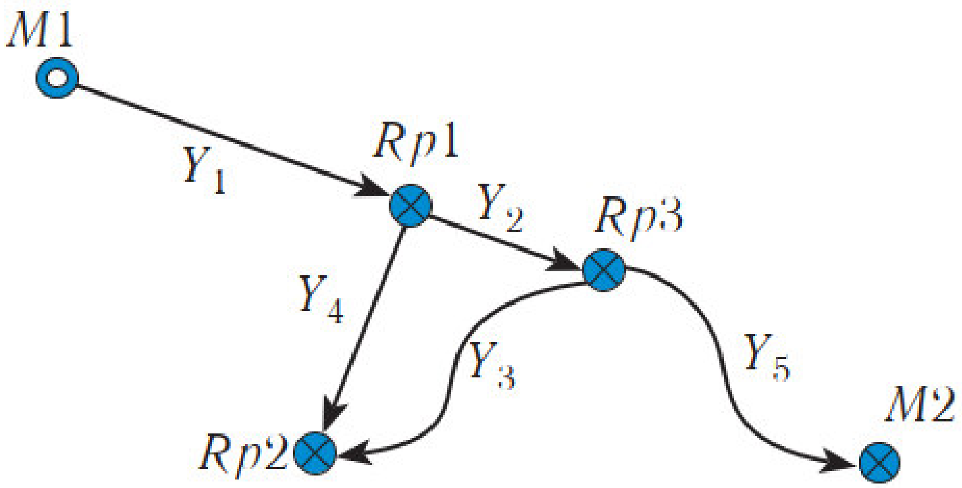
Shunday qilib, har bir ortiqcha o'lchov bitta bog'liqlikni keltirib chiqaradi. Umuman olganda, r ortiqcha o'lchovlarga ega bo'lgan tarmoqda r Rasmdagi tenglamalar mavjud:



Rasm. 3.3.2. Ortiqcha o'lchovlarsiz tekislash tarmog'iga misol



Rasm. 3.3.3. Nivelirlash tarmog'iga misol. Bitta ortiqcha o'lchov



Rasm. 3.3.4. Nivelirlash tarmog'iga misol. Ikki ortiqcha o'lchov

$$\begin{aligned} &\varphi_1(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0; \\ &\varphi_2(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_r(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

(3.27) tenglamalar shartli cheklovchi tenglamalar deyiladi. Bunday tenglamalar rostlashning korrelyatsiya usuli uchun boshlang'ich bo'lib, parametrik ulanish tenglamalariga (3.1) o'xshaydi. Matritsa Rasmida shartli bog'lanish tenglamalari φ(Y) = 0 Rasmida yoziladi.

Shubhasiz, bog'lanish tenglamalari o’lchangan miqdorlarning haqiqiy qiymatlari uchun qondiriladi. Agar biz ulardagi o’lchov natijalarini almashtirsak, o’lchash xatolari tufayli tenglik buziladi:

$$\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = w_1 \neq 0;$$
$$\varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = w_2 \neq 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_r(y_1, y_2, \ldots, y_n) = w_r \neq 0.$$

Masalan, uchburchakda o’lchangan burchaklar yig'indisi 180° $y_1+y_2+y_3-180=\omega\neq 0$ dan farq qiladi. Aslida, biz ortiqcha o’lchovlarni amalga oshirishda tarmoq elementlarini aniqlashda noaniqlikning namoyon bo’lishi bilan shug'ullanamiz, chunki o’lchovlar o’lchov xatolari bilan yuklanadi. Bu tenglamalardagi w qiymati qoldiq deyiladi.

Tuzatish vazifalaridan biri, parametrik tuzatish usulida bo’lgani kabi, shartli ulanish tenglamalarida tenglikni tiklashdir. Buning uchun o’lchangan y_i qiymatlariga vi tuzatishlar kiritiladi. qabul qilish

$$\hat{y}_i = y_i + v_i \quad \text{и}$$
$$\varphi_1(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n) = 0;$$
$$\varphi_2(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n) = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_r(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n) = 0 \qquad 3.3.2$$

yoki φ(y) = 0 matritsa Rasmida bo’ladi.

Xuddi parametrik usulda bo’lgani kabi, vi tuzatishlar ham eng kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi. (3.3.2) sistemaning yechimini soddalashtirish uchun uni Teylor qatoriga kengaytirib, chiziqli Rasmga keltiramiz.

$$\varphi_i(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n) = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2}\right)_0 v_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n}\right)_0 v_n + R =$$
$$= a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \ldots + a_{in}v_n + w_i = 0.$$

$\left(\frac{d\varphi_j}{dy_j}\right)_0$ hosilalari aij bilan belgilanadi va tafovutlar cheklash tenglamasidan aniqlanadi. R qiymati e'tiborga olinmaydi. Biz shartli tuzatish tenglamalari tizimini oldik:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n + w_1 = 0;\\
&a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n + w_2 = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{r1}v_1 + a_{r2}v_2 + \ldots + a_{rn}v_n + w_r = 0.
\end{aligned}
\qquad 3.3.3
$$

Keling, ikkita misolimiz uchun shartli tuzatish tenglamalarini topamiz - uchburchakda o'lchangan burchaklar va tekislash tarmog'ida o'lchangan balandliklar. Ikkala misolda ham cheklovchi tenglamalar tizimi chiziqli Rasmga ega, shuning uchun a_{ij} barcha koeffitsientlari *Yj* uchun *i*-tenglamadagi koeffitsientlar bilan mos keladi .

Uchburchak uchun tuzatish tenglamasi quyidagi Rasmda bo'ladi: $v_1+v_2+v_3+w=0$, bu erda nomuvofiqlik $w=y_1+y_2+y_3-180$ argumentlari sifatida o'lchangan qiymatlar bilan bog'liqlik tenglamasi bilan hisoblanadi. 3.17-rasmda ko'rsatilgan tekislash tarmog'i uchun bizda:

$$\vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + w_1 = 0 \; bu\; yerda\; w_1 = y_2 + y_3 - y_4;$$
$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_5 + w_2 = 0 \; bu\; yerda\; w_2 = y_1 + y_2 + y_5 - (H_{M2} - H_{M1});$$

(3.3.3) matritsa ko'rinishidagi sistemani $\boldsymbol{BV+W=0}$ Rasmida yozish mumkin, bunda shartli tuzatish tenglamalarining B koeffitsientlar matritsasi quyidagicha belgilanadi.

$$
\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_r \end{pmatrix}.
$$

Sistema *n* ta noma'lumli r tenglamadan iborat, chunki *r< n, u* holda (3.3.3) sistemaning cheksiz yechimlar to'plami mavjud. Barcha mumkin bo'lgan yechimlar to'plamidan eng kichik kvadratlar usuli shartini qanoatlantiradigan yechimni tanlash kerak.

$$\varphi = V^T P V = [pvv] = \min \qquad (3.3.4)$$

Parametrik usuldan farqli o'laroq, funktsiyaning mutlaq ekstremumi (3.3.4) topilganda, korrelyatsiya qilingan usulda bu ekstremum (3.3.3) shartlar bilan bog'lanadi. Matematikada bunday masalalar shartli ekstremum masalalar deb ataladi. Odatda bunday muammolar Lagrange usuli bilan hal qilinadi.

Bu holda (3.3.4) funksiya (3.3.3) shartlarni o'z ichiga olgan funksiya bilan almashtiriladi,

$$\varphi' = \varphi + p^T(BV + W) = \min \qquad (3.3.5)$$

bu erda p^T - noaniq Lagranj ko'paytiruvchilarning vektori.

(3.31) funksiyaning ekstremumini aniqlash uchun V tuzatish vektoriga nisbatan bu funksiyaning hosilasini topamiz va bu hosilani nolga tenglaymiz.$\frac{d\varphi'}{dV} 2V^T P + p^T B = 0$

Bu yerdan V vektor aniqlanadi.Tuzilishlarni soddalashtirish uchun noaniq koeffitsientlar vektorini $p^{T=}$**-2**K^T deb belgilaymiz, keyin ***2V^TP-2K^TB=0*** ni olamiz, bundan ***V^TP=K^TB.***

Tenglikning chap va o'ng qismlarini transpozitsiya qilaylik***: PV=B^TK*** (*R* matritsa simmetrik bo'lgani uchun uning ko'chirilgan matritsasiga to'g'ri keladi). Keyin biz ushbu tenglamaning chap va o'ng qismlarini P^{-1} ga ko'paytiramiz va o'lchov natijalariga tuzatishlar vektorini olamiz:

$$V = P^{-1} B^T K \qquad (3.3.6)$$

Bu yerda **K** vektori vektor korrelat deb ataladi (ilgari korrelyatsiyalar korrelyatsiya deb atalar edi),

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_r \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

O'lchov natijalarining teskari og'irlik matritsasi $\mathbf{P}^{-1}$ o'lchov natijalarining teskari og'irliklaridan iborat. Mustaqil o'lchovlar uchun u diagonaldir:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

Mashq sifatida talabalarga (3.3.6) matritsalarni ko'paytirish va tizimni olish tavsiya etiladi:

$$\begin{aligned} v_1 &= q_1(a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \ldots + a_{r1}k_r); \\ v_2 &= q_2(a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{r2}k_r); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= q_n(a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \ldots + a_{rn}k_r). \end{aligned}$$

Tizim (3.3.6) korrelyatsiya qilingan tuzatish tenglamalari tizimi deb ataladi. Tuzatishlarni korrelyatsiyalar bo'yicha ifodaladik. Ammo ular hali ham noma'lum. Korrelyatsion vektorni aniqlash uchun BV + W = 0 shartli tuzatish tenglamalari tizimiga korrelyatsion tuzatish tenglamalarining (3.3.6) o'ng tomonini V tuzatishlar o'rniga almashtiramiz, biz olamiz.

$$BP^{-1}B^TK + W = 0 \qquad (3.3.7)$$

Tizim (3.33) normal korrelyatsiyali tenglamalar tizimi deb ataladi , bu erda

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} [qa_1a_1] & [qa_1a_2] & \dots & [qa_1a_r] \\ [qa_2a_1] & [qa_2a_2] & \dots & [qa_2a_r] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [qa_ra_1] & [qa_ra_2] & \dots & [qa_ra_r] \end{pmatrix} —$$

normal tenglamalar koeffitsienti matritsasi.

Odatdagi yozuvda normal korrelyatsiyali tenglamalar tizimi (3.3.7) quyidagi Rasmga ega:

$$[qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \ldots + [qa_1a_r]k_r + w_1 = 0;$$
$$[qa_2a_1]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \ldots + [qa_2a_r]k_r + w_2 = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[qa_ra_1]k_1 + [qa_ra_2]k_2 + \ldots + [qa_ra_r]k_r + w_r = 0.$$

(3.3.7) sistema kvadrat bo'lib, r noma'lumli r tenglamadan iborat va har doim yagona yechimga ega.

$$\boldsymbol{K} = -(\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{T})^{-1}\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{W} \qquad (3.3.8)$$

(3.3.8) dan korrelyatsiyalarni aniqlab, ularni korrelyatsion tuzatish tenglamalariga (3.32) almashtirib , biz o'lchov natijalariga tuzatishlarni hisoblaymiz. Keyinchalik, o'lchov natijalariga tuzatishlar kiritamiz, ularning tenglashtirilgan qiymatlarini olamiz.

Geodeziya konstruksiyalarini korrelyatsion usulda tuzatish ketma-ketligi.

1. Barcha o'lchovlar sonini aniqlash n, zarur o'lchovlar soni k va ortiqcha o'lchovlar sonini $r=n-k$.

2. φ(Y) = 0 shartli bog`lanish tenglamalarini tuzish.

3. BV+W=0 tuzatishlarning shartli tenglamalarini tuzish.

4. NK +W=0 normal korrelyatsiya tenglamalarini tuzish .

5. Normal korrelyatsiya tenglamalarini yechish $K = -N^{-1}W$.

6. O'lchov natijalariga tuzatishlarni hisoblash $V=P^{-1}B^{T}K$.

7. Tuzatilgan o'lchangan qiymatlarni hisoblash $\hat{y} = y + V$

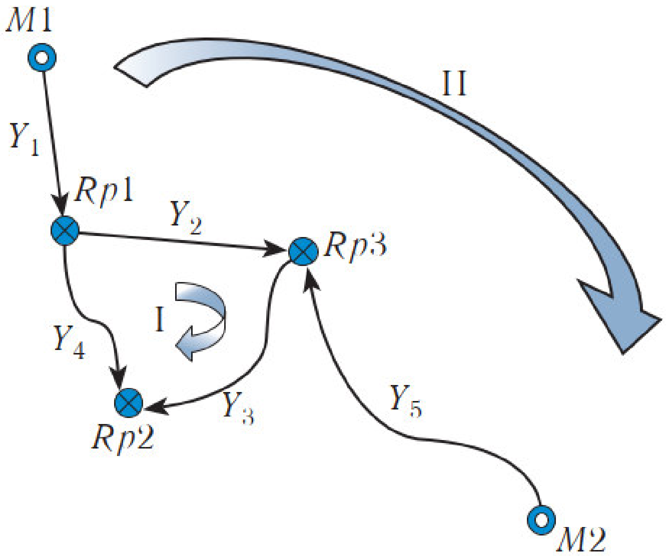
8. Yakuniy tuzatish boshqaruvi $\overline{\varphi(\bar{y})} = 0$

9. Aniqlikni baholash.

Shartli aloqa tenglamalarining turlari.

Nivelirlash va turli rejalashtirilgan geodeziya tarmoqlarida yuzaga keladigan tipik shartli aloqa tenglamalari va tuzatish tenglamalarini ko'rib chiqamiz. Nivelirlash tarmoqlarida poligonlar yordamida shartli aloqa tenglamalari quriladi. Shu bilan birga, yopiq va ochiq ko'pburchaklar farqlanadi (3.18-rasm).

Rasmda. 3.18 beshta o’lchangan ortiqcha (n = 5) va uchta belgilangan mezon (kerakli o’lchovlar soni k = 3) bo’lgan tarmoqni ko’rsatadi. Demak, ortiqcha o’lchovlar soni r=2. Shunday qilib, ikkita shartli ulanish tenglamalariga mos keladigan ikkita ko’pburchak hosil bo’lishi kerak.



Rasm. 3.18. Yopiq va ochiq ko`pburchaklarning hosil bo`lishi

Bu erda birinchi ko’pburchak yopiq kontur bilan hosil bo’ladi (uch o’lchamli I o’q bilan belgilanadi, o’qning yo’nalishi o’zboshimchalik bilan tanlanishi mumkin). Ko’rinib turibdiki, yopiq ko’pburchak ustidagi ortiqchalar yig'indisi doimo nolga teng. Bu holda $Y_2+Y_3-Y_4=0$.

Dastlabki nuqtalar orasida ochiq ko’pburchaklar hosil bo’ladi. Bunday holda, birinchi va ikkinchi belgilar orasida. Ko’rinib turibdiki, ikkita manba belgilari orasidagi ortiqcha miqdorlar yig'indisi belgilarning farqiga teng bo’lishi kerak - yakuniy belgining belgisi minus dastlabki belgining belgisi. Shunday qilib, o’lchangan ortiqchalar o’rtasida quyidagi bog'liqlik mavjud: $Y_1+Y_2-Y_5-(H_{M2}-H_{M1})= 0$.

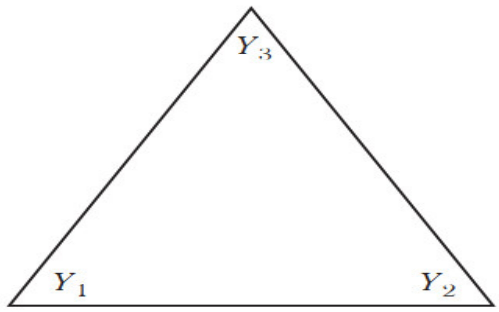
Bunday holda, agar ko’pburchakni chetlab o’tish yo’nalishi (o’qning yo’nalishi) balandlikni o’lchash yo’nalishiga to’g'ri kelsa, *Yi* oldiga ortiqcha belgisi qo’yiladi. Agar ular mos kelmasa, minus belgisi qo’yiladi. Ko’pburchak bo’ylab o’tish yo’nalishini tanlash haqiqatan ham o’zboshimchalik bilan bo’lishi mumkin, chunki yo’nalishni o’zgartirish cheklash tenglamasini *-1* ga ko’paytirishga teng bo’ladi. Shunday qilib, rasm uchun. 3.18, birinchi ko’pburchakni chetlab o’tish yo’nalishini o’zgartirib, quyidagi munosabat tenglamasini olamiz $-Y_2-Y_3+Y_4=0$, ikkinchi ko'pburchak uchun $-Y_1-Y_2+Y5-(H_{M1}-H_{M2})=0$.

Umumiy holatda, ochiq ko'pburchaklar soni boshlang'ich belgilar sonidan minus bitta $r_p=T-1$ ga teng. Ko'pburchaklarning umumiy soni ortiqcha o'lchovlar soniga teng bo'lishi kerak $r=r_p+r_z$, bu erda T - boshlang'ich nuqtalar soni; r_p - ochiq ko'pburchaklar soni; $r_z=r-r_p$ - yopiq ko'pburchaklar soni.

Rejalashtirilgan tarmoqlar uchun aloqa va tuzatishlarning odatiy shartli tenglamalarini ko'rib chiqing. Ularni ikki guruhga bo'lish mumkin:

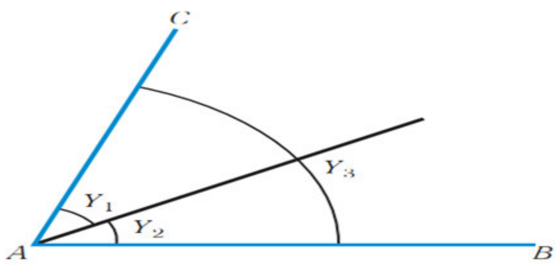
1) chiziqli cheklash tenglamalari;

2) chiziqli bo'lmagan cheklash tenglamalari.Ba'zi chiziqli cheklash tenglamalarini ko'rib chiqamiz . Uchburchakda burchaklarni o'lchashda (3.19-rasm) $Y_1+Y_2+Y_3-180=0$ figuralarning sharti deb ataladigan shart paydo bo'ladi.

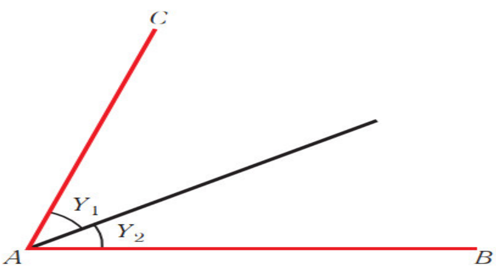


Rasm. 3.19. Rasm holati

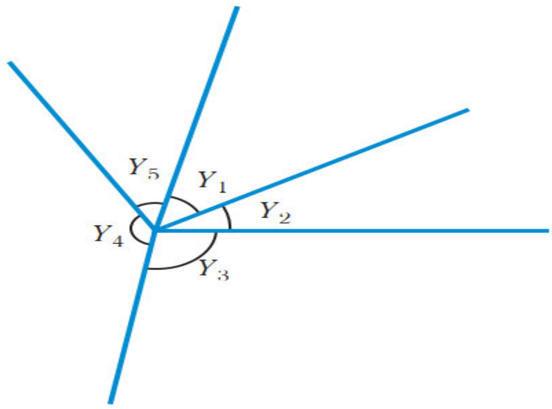
Biz bu shartni yuqorida muhokama qildik. Bog'lanish tenglamasi chiziqli Rasmga ega, shuning uchun tuzatishlar kiritilgan barcha aij koeffitsientlari bog'lanish tenglamasidagi Yj koeffitsientlariga to'g'ri keladi .



Rasm. 3.20. Stansiya holati



Rasm. 3.21. Qattiq burchak holati



Rasm. 3.22. gorizont holati

Uchburchak uchun tuzatish tenglamasi $v_1+v_2+v_3+w=0$ ko'rinishga ega bo'lib, u erda $w=y_1+y_2+y_3-180$ o'lchov natijalarini ularga almashtirishda nomuvofiqlik bog'lanish tenglamasi bilan hisoblanadi. Agar stansiyada uchta burchak o'lchansa, u holda stansiya holati yuzaga keladi (3.20-rasm) $Y_1+Y_2-Y_3=0$.

Stansiya uchun tuzatish tenglamasi $v_1+v_2-v_3+w=0$ Rasmida yoziladi, bunda nomuvofiqlik $w=y_1+y_2-y_3$ o'lchangan burchaklar bilan bog'liqlik tenglamasidan hisoblanadi.

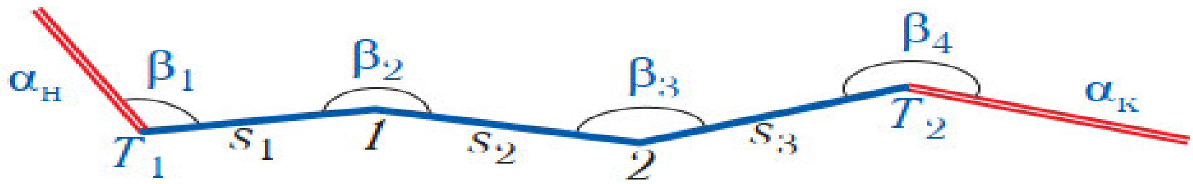
Stansiya holatining o'zgarishi qattiq burchak holatidir. Uning farqi shundaki, A nuqtadagi uchinchi, umumiy burchak o'lchanmaydi, lekin qattiq, boshlang'ichdir (3.21-rasm). Demak, $v_1+v_2-w=0$ tuzatish tenglamasi bilan $Y_1+Y_2-\angle A=0$ ulanishning quyidagi shartli tenglamasi kelib chiqadi, bunda $w=u_1+u_2-\angle A$.

Agar burchaklar gorizont yopilgan stansiyada o'lchansa (3.22-rasm), u holda $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_5-360°=0$ gorizont sharti yuzaga keladi.

Ushbu holat uchun tuzatish tenglamasi: $v_1+v_2+v_3+v_4+v_5+w=0,$

bu yerda w=y1+y2+y3+y4+y5-360°.

Poligonometrik harakatda (3.23-rasm) bitta chiziqli shartli ulanish tenglamasi - yo'nalishli burchak sharti va ikkita chiziqli bo'lmagan tenglama - koordinata shartlari paydo bo'ladi. Bunday holda, poligonometrik kursda bir xil bo'lmagan o'lchovlar amalga oshiriladi - burchak va chiziqli. Bunday holda, korrelyatsiya usulining umumiy nazariyasi allaqachon taqdim etilganligi sababli, geodeziyada qabul qilingan belgilar tizimiga qaytaylik.



Rasm. 3.23. Poligonometrik zarba:

T_1 va T_2

$\alpha_н$ va α_k

βi -

S_i

O'lchangan burchaklar barcha tomonlar uchun yo'nalishli burchaklarni olish imkonini beradi, bunda an ga asoslangan, shu jumladan, yo'nalish burchagi ak.

Shunday qilib, yozish mumkin

$$\alpha_к = \sum \beta_i - 180k + \alpha_н = \alpha_н + \beta_1 - 180 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180 + \beta_4.$$

k - o'lchangan tomonlarning soni bo'lgan Rasmni oladi .$\sum_i 180k - (\alpha_k - \alpha_H) = 0$

Keling, tuzatish tenglamasiga o'tamiz

$$\sum_i \upsilon_i + w = \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \upsilon_4 + w = 0,$$

o'lchangan burchaklar qayerda . $w = \sum \beta_i' - 180k - (\alpha_к - \alpha_н); \quad \beta_i'$

Poligonometrik harakatdagi koordinatali shartli tenglamalarni ham o'z ichiga oluvchi chiziqli bo'lmagan cheklash tenglamalarini ko'rib chiqaylik. Bunday tenglamalarning mohiyati shundan iboratki, koordinatalar o'sishlari yig'indisi boshlang'ich nuqtalar koordinatalari farqiga teng bo'lishi kerak. Poligonometrik harakat uchun (3.23-rasmga qarang).

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta X_i - (X_{T_2} - X_{T_1}) = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 - (X_{T_2} - X_{T_1}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta Y_i - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = \Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3 - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = 0.$$

Bu tenglamalardan birinchisi abscissa sharti, ikkinchisi ordinata sharti deyiladi. Ammo shartli aloqa tenglamalarida o'lchangan miqdorlar argument sifatida ishlatilishi kerak, shuning uchun tenglamalardagi koordinatalarning o'sishi o'lchangan burchaklar va tomonlar nuqtai nazaridan ifodalanishi kerak. Birinchidan, biz tenglamalarni quyidagi Rasmda yozamiz:

$$\varphi_2 = S_1 \cos\alpha_1 + S_2 \cos\alpha_2 + S_3 \cos\alpha_3 - (X_{T_2} - X_{T_1}) = 0;$$
$$\varphi_3 = S_1 \sin\alpha_1 + S_2 \sin\alpha_2 + S_3 \sin\alpha_3 - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = 0,$$

keyin yo'nalish burchaklarini o'lchangan burchaklar bilan ifodalaymiz va ph2 va ph3 funktsiyalari uchun yozuvni qoldirib, biz olamiz

$$\begin{aligned} &S_1 \cos(\alpha_1 + \beta_1) + S_2 \cos(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180) + \\ &\qquad + S_3 \cos(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180) - (X_{T_2} - X_{T_1}) = 0; \\ &S_1 \sin(\alpha_1 + \beta_1) + S_2 \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180) + \\ &\qquad + S_3 \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 - 180 + \beta_3 - 180) - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = 0. \end{aligned} \qquad 3.3.9$$

Shartli tuzatish tenglamalariga o'tish uchun, ya'ni. tenglamalarni chiziqli qilish uchun bu tenglamalarning har bir argumentga nisbatan hosilalarini topish kerak. Abscissa tenglamasining o'lchangan *Si* tomonlariga nisbatan hosilalari cos ai ga teng . Darhaqiqat, abscissalar tenglamasining hosilasi (biz uni yo'nalish burchagi shartini hisobga olgan holda, φ_2 deb belgilaymiz) $\partial\varphi_2/\varphi S_i$ i-chi hadning hosilasi (koordinatalarning i- o'sishi) bilan mos keladi . Si ga :

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial S_i} = \frac{\partial S_i \cos\alpha_i}{\partial S_i} = \cos\alpha_i,$$

unda

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial S_1} = \cos\alpha_1; \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial S_2} = \cos\alpha_2; \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial S_3} = \cos\alpha_3.$$

O'lchangan burchaklarga nisbatan hosilalarni topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta_3} &= \frac{\partial\Delta X_3}{\partial\beta_3} = -S_3 \sin(\alpha_n + \beta_1 - 180 + \beta_2 - 180 + \beta_3) \\ &= -S_3 \sin\alpha_3 = -\Delta Y_3 = -(Y_{T_2} - Y_2); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta_2} = \frac{\partial(\Delta X_2 + \Delta X_3)}{\partial\beta_2} = -S_2 \sin\alpha_2 - S_3 \sin\alpha_3 = -\Delta Y_2 - \Delta Y_3 = -(Y_{T_2} - Y_1);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta_1} &= \frac{\partial(\Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3)}{\partial\beta_1} = -S_1 \sin\alpha_1 - S_2 \sin\alpha_2 - S_3 \sin\alpha_3 = \\ &= -\Delta Y_1 - \Delta Y_2 - \Delta Y_3 = -(Y_{T_2} - Y_{T_1}). \end{aligned}$$

To'rtinchi burchak abscissaning shartli tenglamasiga kiritilmaganligi sababli $\frac{d\varphi_2}{d\beta_4}$

Tuzatish tenglamalarining umumiy Rasmi $a_{j1}v_1+a_{j2}v_2+...+ a_{jn}v_n+w_j =0$. Bu erda w_2 cheklash tenglamalari (3.35) bilan aniqlanadi, agar tomonlar va burchaklarning o'lchangan qiymatlarini ularga almashtirsak. Ko'rinib turibdiki, w_2 va w_3 qoldiqlari chiziqli o'lchamga ega bo'lishi kerak, ya'ni. santimetr, metr, millimetr va hokazolarda ifodalanishi kerak. Bu har bir atama $a_{ji}v_i$ degan ma'noni anglatadi

bu yerda $\alpha_{ji} = \frac{d\varphi_i}{d\beta_i}$ va $\alpha_{jk}\vartheta_k$ bu yerda $\alpha_{jk} = \frac{d\varphi_i}{dS_k}$ tuzatish tenglamalarida ham bir xil o'lchamda ifodalanishi kerak. Bunga erishish uchun burchak hosilalarini r'' soniga bo'lish kerak, chunki burchak tuzatishlari odatda soniyalarda ifodalanadi, shuning uchun .

$$a_{21} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta_1} = \frac{-(Y_{T_2} - Y_{T_1})}{\rho}; \quad a_{22} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta_2} = \frac{-(Y_{T_2} - Y_1)}{\rho};$$

$$a_{23} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta_3} = \frac{-(Y_{T_2} - Y_2)}{\rho}; \quad a_{24} = 0.$$

Xuddi shunday, ordinata sharti uchun shartli tuzatish tenglamasini aniqlaymiz:

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta_1} = \frac{\partial(\Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3)}{\partial\beta_1} = \frac{S_1\cos\alpha_1 + S_2\cos\alpha_2 + S_3\cos\alpha_3}{\rho} =$$

$$= \frac{\Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3}{\rho} = \frac{(X_{T_2} - X_{T_1})}{\rho};$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta_2} = \frac{\partial(\Delta Y_2 + \Delta Y_3)}{\partial\beta_2} = \frac{S_2\cos\alpha_2 + S_3\cos\alpha_3}{\rho} = \frac{\Delta X_2 + \Delta X_3}{\rho} = \frac{(X_{T_2} - X_1)}{\rho};$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta_3} = \frac{\partial\Delta Y_3}{\partial\beta_3} = \frac{S_3\cos\alpha_3}{\rho} = \frac{\Delta X_3}{\rho} = \frac{(X_{T_2} - X_2)}{\rho}; \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta_4} = 0.$$

Yon tomonlari bo'ylab ordinatalar shartli tenglamasining qisman hosilalari teng

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial S_i} = \frac{\partial S_i \sin\alpha_i}{\partial S_i} = \sin\alpha_i,$$

qayerda

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial S_1} = \sin\alpha_1; \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial S_2} = \sin\alpha_2; \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial S_3} = \sin\alpha_3.$$

Nihoyat, rasmda ko'rsatilgan poligonometrik kurs uchun uchta tuzatish tenglamasini yozamiz. 3.23:

$$
\begin{aligned}
&\upsilon_{\beta_1} + \upsilon_{\beta_2} + \upsilon_{\beta_3} + \upsilon_{\beta_4} + \omega_\alpha = 0;\\
&\cos\alpha_1 \upsilon_{S_1} + \cos\alpha_2 \upsilon_{S_2} + \cos\alpha_3 \upsilon_{S_3} -\\
&\qquad - \frac{Y_{T_2} - Y_{T_1}}{\rho''}\upsilon_{\beta_1} - \frac{Y_{T_2} - Y_1}{\rho''}\upsilon_{\beta_2} - \frac{Y_{T_2} - Y_2}{\rho''}\upsilon_{\beta_3} + \omega_X = 0;\\
&\sin\alpha_1 \upsilon_{S_1} + \sin\alpha_2 \upsilon_{S_2} + \sin\alpha_3 \upsilon_{S_3} +\\
&\qquad + \frac{X_{T_2} - X_{T_1}}{\rho''}\upsilon_{\beta_1} + \frac{X_{T_2} - X_1}{\rho''}\upsilon_{\beta_2} + \frac{X_{T_2} - X_2}{\rho''}\upsilon_{\beta_3} + \omega_Y = 0.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

(3.36) sistemadan c tuzatishlarning shartli tenglamalari koeffitsientlari matritsasi hosil qilish oson. Bu erda esda tutish kerakki, matritsa ichidagi koeffitsientlarni almashtirish mumkin emas, shuning uchun biz Jadvalga tuzatish tenglamalarining koeffitsientlari matritsasini yozamiz. 3.17, unda biz birinchi qatorda yo'nalish burchagini tuzatish uchun shartli tenglamaning koeffitsientlarini, ikkinchisida abscissalar shartlarini va uchinchisida ordinatlarni joylashtiramiz . Ustunlar o'lchangan tomonlar va burchaklarga mos keladi.

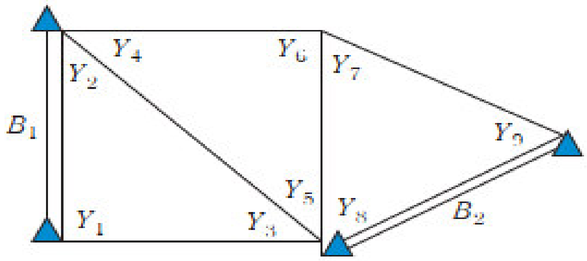
3.17-jadval

№	Vaziyat	S_1	S_2	S_3	β_1	β_2	β_3	β_4
1	Yo'nalish burchagi	0	0	0	1	1	1	1
2	Абсsiss	$\cos\alpha_1$	$\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_3$	$-\frac{Y_{T_2}-Y_{T_1}}{p}$	$-\frac{Y_{T_2}-Y_1}{p}$	$-\frac{Y_{T_2}-Y_2}{p}$	0
3	Ordinatsiya qilish	$\sin\alpha_1$	$\sin\alpha_2$	$\sin\alpha_3$	$+\frac{X_{T_2}-X_{T_1}}{p}$	$+\frac{X_{T_2}-X_1}{p}$	$+\frac{X_{T_2}-X_2}{p}$	0

Shuni e'tiborga olamizki, agar ulanish va tuzatishlar tenglamasida ma'lum bir o'lcham etishmayotgan bo'lsa, unda mos keladigan joyda matritsaga nol yoziladi. Shunday qilib, to'rtinchi burchak koordinata shartlariga kiritilmagan, shuning uchun to’rtinchi burchakka mos keladigan ustunga nollar yoziladi. Yo’nalishli burchaklar holatida o’lchangan tomonlar yo’q , shuning uchun birinchi qatorning dastlabki uchta elementi nol bilan to’ldiriladi. Keling, triangulyatsiya tarmoqlarida yuzaga keladigan shartli aloqa tenglamalarining ayrim turlarini ko’rib chiqaylik.

Ikki turdagi shartlarni o’z ichiga olgan sinus shartli ulanish tenglamalari: asosiy va qutb.Asosiy shartli cheklash tenglamasi. Bu holat ikkita baza o’lchanadigan rejalashtirilgan tarmoqlarda sodir bo’ladi. Masalan, triangulyatsiya tarmog'ida (3.24-rasm).

Asosiy shartning mohiyati shundan iboratki, ikkinchi asosning qiymati o’lchangan burchaklardan birinchi asosdan olingan ushbu asosning hisoblangan qiymatiga teng bo’lishi kerak.



rsm. 3.24. Ikkita asosli triangulyatsiya tarmog'i

$$B_2 = B_1 \frac{\sin Y_1 \sin Y_4 \sin Y_7}{\sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9}.$$

Bu tenglamani shartli cheklash tenglamalarining umumiy Rasmiga keltiramiz (3.29). Ikkita variant mavjud:

$$B_1 \frac{\sin Y_1 \sin Y_4 \sin Y_7}{\sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9} - B_2 = 0;$$

yoki B_2 ni o’ng tomonga siljiting

$$\varphi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_9) = \ln \frac{B_1 \sin Y_1 \sin Y_4 \sin Y_7}{B_2 \sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9} = 0.$$

3.3.10

yoki logarifmdan foydalaning

Logarifmik Rasmda yozilgan munosabat tenglamasi (3.37) shartli tuzatish tenglamalariga o’tish uchun qulayroqdir.

Haqiqatan ham, logarifmlarning xususiyatlarini hisobga olgan holda, biz yozamiz

$$\ln B_1 - \ln B_2 + \ln \sin Y_1 - \ln \sin Y_3 + \ln \sin Y_4 - \ln \sin Y_6 + \ln \sin Y_7 - \ln \sin Y_9 = 0. \quad (3.38)$$

Bu erdagi har bir atama faqat bitta *Yi* o'zgaruvchisini o'z ichiga oladi . Demak, cheklovchi tenglamaning o'lchangan miqdorlarga nisbatan qisman hosilalari *Yi* ga nisbatan har bir atamaning hosilalari bilan mos keladi :

$$\frac{\partial\varphi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_9)}{\partial Y_i} = \pm\frac{\partial \ln \sin Y_i}{\partial Y_i} = \pm\frac{\cos Y_i}{\sin Y_i} = \pm \operatorname{ctg} Y_i = a_i.$$

Bu erda + yoki - belgilari (3.38) dagi belgilarga mos keladi.

Ushbu tarmoq uchun tuzatish tenglamasining umumiy Rasmi quyidagicha yozilishi mumkin:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + a_5 v_5 + a_6 v_6 + a_7 v_7 + a_8 v_8 + a_9 v_9 + w_b = 0. \qquad 3.3.11$$

Bu erda v_i - i-chi burchakka tuzatish. Odatda bu tuzatishlar soniyalarda ifodalanadi. Bu radian o'lchoviga qaraganda qulayroq va tanish, ammo bu erda nomuvofiqlik

$$w_b = \ln B_1 - \ln B_2 + \ln \sin y_1 - \ln \sin y_3 + \ln \sin y_4 - \ln \sin y_6 + \ln \sin y_7 - \ln \sin y_9$$

logarifmik birliklarda ifodalanadi. Boshqacha qilib aytganda , u o'lchovsizdir, shuning uchun (3.3.10) tenglamaning har bir $a_i v_i$ atamasi ham o'lchovsiz bo'lishi kerak. Bunday holda, har bir tuzatish v_i soniyada qoldirilishi kerak. Buning uchun (3.39) tenglamani *r"=206264,8* ga ajratamiz. Bu holda (3.39) dagi atamalar ishlash uchun noqulay bo'lgan juda kichik raqamlarga aylanishi aniq, shuning uchun biz butun tenglamani 10^k ga ko'paytirish orqali koeffitsientlarni tenglashtiramiz. Shunday qilib, Y dagi koeffitsientlar $\Delta_i = \pm\frac{\mu 10^k}{p} ctgY_i$ Rasmini oladi . Bu yerda natural logarifmlar ishlatilsa μ=1, o'nlik logarifmlar ishlatilsa μ=0,4343. μ = lge=1/ln10=0.4343 o'nlik logarifmdan naturalga o'tish moduli deyiladi.

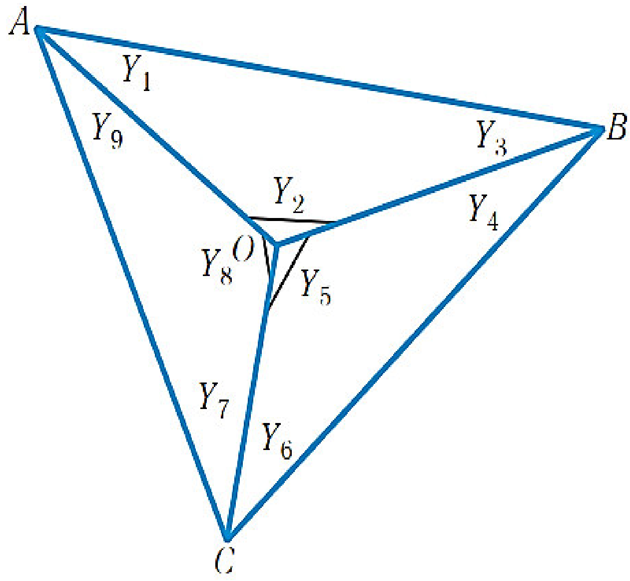
(3.38) da Y_2, Y_5, Y_8 burchaklar mavjud emasligini hisobga olsak, nihoyat, asosiy shartli tuzatish tenglamasini Rasmda yozishimiz mumkin.

$$\Delta_1 v_1 - \Delta_3 v_3 + \Delta_4 v_4 - \Delta_6 v_6 + \Delta_7 v_7 - \Delta_9 v_9 + w_b = 0. \qquad 3.3.12$$

hartli ulanish tenglamalari markaziy raqamlarda va geodezik to'rtburchakda paydo bo'ladi.

Markaziy raqam bilan ishni ko'rib chiqing. Markaziy figura umumiy uchi bo'lgan uchburchaklar konstruktsiyasidir (3.25-rasm).

Tasavvur qiling-a, *AO* tomoni asl bo'lib, unga asoslanib, birinchi uchburchakdan o'lchangan burchaklardan foydalanib, siz *OB* tomonini hisoblashingiz mumkin. *OB* tomoniga asoslanib, ikkinchi uchburchakdan biz yon *OS*ni olamiz. Va oxirgi uchburchakdan biz yana *AO* tomonini hisoblaymiz. Aslida, biz (3.37) ga o'xshash bazis shartini oldik. Biz SAO bazasidan bir xil asosga o'tdik:



Rasm. 3.25. Markaziy rasmdagi qutb holati

$$\varphi(Y_1, Y_2, \dots, Y_9) = \ln \frac{S_{AO} \sin Y_1 \sin Y_4 \sin Y_7}{S_{AO} \sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9} = 0.$$

S_{AO} tomonini qisqartirib, biz nihoyat qutb shartli cheklash tenglamasini olamiz (qutb holati):

$$\varphi(Y_1, Y_2, \dots, Y_9) = \ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_4 \sin Y_7}{\sin Y_3 \sin Y_6 \sin Y_9} = 0. \quad 3.3.13$$

Bu yerdagi tuzatish tenglamasi $\Delta_1 v_1 - \Delta_3 v_3 + \Delta_4 v_4 - \Delta_6 v_6 + \Delta_7 v_7 - \Delta_9 v_9 + w_b = 0$ asosiy shart bilan bir xil ko'rinishga ega bo'lishi aniq. Bu erda nomuvofiqlik shartli bog'lanish tenglamalari bo'yicha burchaklarning o'lchangan qiymatlarini ularga almashtirish orqali hisoblanadi. Rasmdagi markaziy O nuqta. 3.25, qutb deb ataladi, aynan shu nuqta barcha yo'nalishlarga kiradi, ular bu holatda ketma-ket hisoblab chiqiladi -S_{AO} ~ S_{BO} ~ S_{CO} ~ S_{AO}.

Geodezik to'rtburchak - rasmda ko'rsatilgan rasm. 3.26.

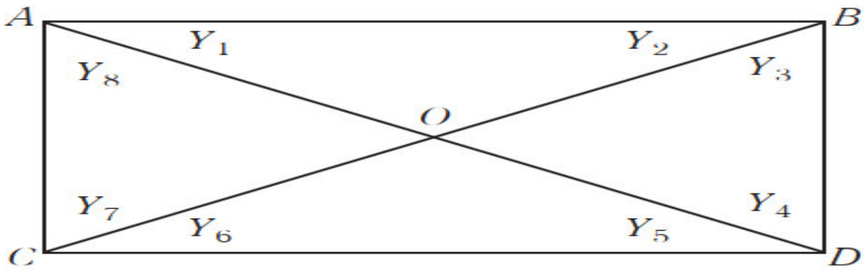
Markaziy Rasmdan farqli o'laroq, burchaklar *O* nuqtada o'lchanmaydi. Bu nuqta ko'rish nurlarining kesishishi hisoblanadi. Biroq, bu burchaklar qutb holatida ishtirok etmaydi. Haqiqatan ham, keling, S_{AO}ni shartli boshlang'ich tomon sifatida olaylik. Keling, undan ketma-ket S_{AO}, S_{BO}, S_{DO}, S_{CO} tomonlariga va yana S_{AO}ga o’tamiz. Biz qutb shartini olamiz, qutb O nuqtada :

$$\ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_3 \sin Y_5 \sin Y_7}{\sin Y_2 \sin Y_4 \sin Y_6 \sin Y_8} = 0.$$

Shartli tuzatish tenglamasi, bu holda, Rasmni oladi

$$\Delta_1 v_1 - \Delta_2 v_2 + \Delta_3 v_3 - \Delta_4 v_4 + \Delta_5 v_5 - \Delta_6 v_6 + \Delta \;\; v \;\; - \Delta_8 v_8 + w_p = 0,$$

$$w_p = \ln \frac{\sin Y_1 \sin Y_3 \sin Y_5 \sin Y_7}{\sin Y_2 \sin Y_4 \sin Y_6 \sin Y_8}.$$



Rasm. 3.26. Geodezik to’rtburchakda qutb holati

Geodezik to’rtburchakda to’rtburchakning istalgan cho’qqisini, masalan, D nuqtasini qutb sifatida tanlash mumkin.Boshlang'ich tomon sifatida S_{CD} tomonini olaylik. ACD uchburchagidan foydalanib, undan ketma-ket S_{AD} tomoniga o’tamiz. Keyin ABD uchburchagidan S_{BD} ni aniqlaymiz. Va nihoyat, BCD uchburchagidan biz S_{CD} ga qaytamiz. Biz qutb holatini olamiz, qutb D nuqtasida:

$$\ln \frac{\sin Y_{6+7} \sin Y_1 \sin Y_3}{\sin Y_8 \sin Y_{2+3} \sin Y_6} = 0.$$

Demak, shartli tuzatish tenglamasi

$$(\Delta_{6+7} - \Delta_6) v_6 + \Delta_{6+7} v_7 - \Delta_8 v_8 - \Delta_1 v_1 - \Delta_{2+3} v_2 + (-\Delta_{2+3} + \Delta_3) v_3 - \Delta_6 v_6 + w_p = 0,$$

Bu yerda

$$w_p = \ln \frac{\sin Y_{6+7} \sin Y_1 \sin Y_3}{\sin Y_8 \sin Y_{2+3} \sin Y_6}; \;\; \Delta_{6+7} = \frac{\mu 10_k}{\rho} \operatorname{ctg}(Y_6 + Y_7).$$

Xuddi shunday, burchaklar yig'indisi bilan bog'liq boshqa koeffitsientlar ham hisoblanadi.

KORRELYATSIYA QILINGAN TUZATISH USULIDA ANIQLIKNI BAHOLASH .

O’zaro bog'liq tuzatish usuli bilan olingan qoldiqlar maqbul yoki yo’qligini aniqlash kerak. Buning uchun umumlashtirilgan aniqlikni baholash formulasidan foydalanib qoldiqlarning teskari vazn matritsasi aniqlang.

Korrelyatsiya usulida boshlang‘ich tenglamalar tizimi shartli bog‘lanish tenglamalar sistemasi $\overline{\varphi(Y)} = 0$. Bu sistemani Teylor qatoriga kengaytiramiz.

$$\overline{\varphi(Y)} = \overline{\varphi(y)} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0 (Y - y) + R = \overline{\varphi(y)} + B(Y - y) + R = 0.$$

Bu yerda R - ketma-ket kengayishning qolgan qismi, chunki kengayish faqat kengayishning chiziqli shartlarini hisobga olgan holda amalga oshiriladi. O’lchovlar etarlicha aniq va o’lchov natijalari o’lchangan miqdorlarning haqiqiy qiymatlariga etarlicha yaqin ekanligiga ishonamiz. Shuning uchun R ni tashkil etuvchi kengayish darajasi yuqori bo’lgan qator shartlari e'tibordan chetda qolmoqda. Ular parchalanish natijasiga ahamiyatsiz ta'sir ko’rsatadi.

$$\overline{\varphi(Y)} = \overline{\varphi(y)} + B(Y - y) = \overline{\varphi(y)} + B(-\Delta) = 0$$

yoki $w+B\ (-\ \Delta)=\ 0,$ shundan, $w=B\Delta$. Bu yerda $\Delta=y-Y$ haqiqiy o’lchash xatolar vektori bo’lib, u o’lchov vektorining teskari og‘irlik matritsasiga to’g‘ri keladigan teskari og‘irlik matritsasiga ega.

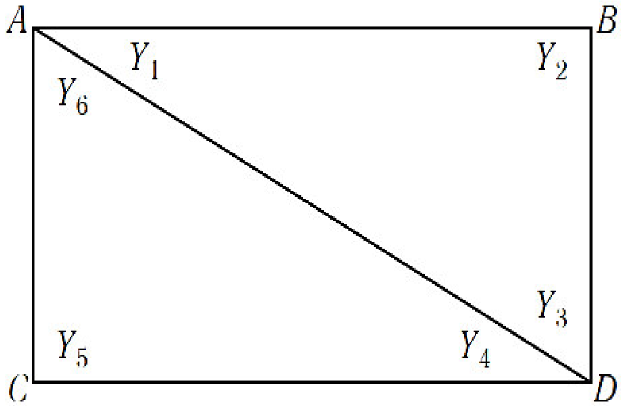
$$\mathbf{P}_\Delta^{-1} = \mathbf{P}_y^{-1} = \mathbf{P}^{-1}.$$

Q_w ni aniqlash uchun aniqlikni baholash uchun umumlashtirilgan formuladan foydalanamiz, $w=B\Delta$ ekanligini hisobga olsak, biz olamiz.

$$\mathbf{Q}_w = \mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{N}. \qquad 3.3.13$$

Shunday qilib, qoldiqlarning teskari og'irlik matritsasi normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasiga to’g'ri keladi. Ma'lumki, $Q_{wj} = 1/P_{wj}$ qoldiqlarining o’zaro og'irliklari teskari og'irlik matritsasining bosh diagonali bo’ylab joylashgan. Agar og'irlik birligining standart og'ishi s0 yoki og'irlik birligining standart xatosi з ma'lum bo’lsa, quyidagi formula yordamida ruxsat etilgan qoldiq qiymatni olish oson:bu yerda t 2 ga teng qabul qilinadi; Qabul qilingan 0,95 ehtimoliga qarab 2,5 yoki 3; 0,974 yoki 0,997 (o’lchov aniqligi mezonlari bo’limidagi 2σ, 2,5σ yoki 3σ qoidasiga qarang).

$$\omega_{j\text{доп}} = t\sigma_0\sqrt{\frac{1}{P_{\omega_j}}} = t\sigma_0\sqrt{Q_{jj}},$$



Rasm. 3.27. Uchburchaklar zanjiridagi marjinal qoldiqlarni aniqlash

Misol. Uchburchaklar zanjiri (3.27-rasm) burchaklarni σ=2,0" aniqlik bilan o’lchasin. Uchburchaklardagi qoldiqlar 7" va 9" bo’lib chiqdi. Qolgan ma'lumotlarning haqiqiyligini aniqlang.

Ushbu uchburchaklar zanjirida tuzatish tenglamalari tizimiga ega bo’lgan raqamlarning ikkita sharti paydo bo’ladi

$$v_1 + v_2 + v_3 + w_1 = 0;$$
$$v_4 + v_5 + v_6 + w_2 = 0.$$

koeffitsientlari matritsasi bilan $BB^TK+w=0$ normal tenglamalar tizimi

$$\mathbf{BB}^T = \mathbf{N} = \mathbf{Q}_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q_w matritsasining diagonal elementlari qoldiqlarning o’zaro og'irliklariga teng bo’lganligi sababli, uchburchaklar uchun ruxsat etilgan qoldiqlar ham bir xil bo’ladi. 0,997 ehtimollik bilan biz olamiz

$$\omega_{j\text{доп}} = t\sigma_0\sqrt{\frac{1}{P_{\omega_j}}} = t\sigma_0\sqrt{Q_{jj}} = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 10,4''.$$

Shunday qilib, 7"va 9" ga teng uchburchaklarning qoldiqlari joizdir.

Xuddi shunday, normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasi bilgan holda, o’zboshimchalik bilan geodezik qurilishda har qanday sharoit uchun ruxsat etilgan qoldiqlarni hisoblash oson.

haqiqiy, bog'liq xatolar vektoridan ildiz o’rtacha kvadrat xatosini aniqlash uchun formulani olamiz.

Buning uchun ortogonal matritsa tushunchasini kiritish kerak. *F* matritsa , agar quyidagi xususiyatlarga javob bersa, ortogonal deyiladi :

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^{T}=\mathrm{E};\ \mathbf{F}\mathbf{Q}\mathbf{F}^{T}=\mathbf{D};\ \mathbf{D}^{-1}=\mathbf{F}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{F}^{T},$$

Bu erda ***D*** - diagonal matritsa.

To’liq teskari og'irlik matritsasi Q_Δ bo’lgan haqiqiy xatolar vektori Δ berilsin. Q_Δ to’liq matritsa Δ vektor elementlarining bog'liqligini bildiradi.

Ortogonal matritsaga asoslanib, quyidagi $\mathbf{Z=D^{-0,5}FD}$ ko’rinishdagi o’zgartirish vektorini kiritamiz. Bu transformatsiya Z vektorining elementlarining mustaqilligiga olib keladi. Bundan tashqari, D vektorining elementlari teng bo’lmasa ham, uning elementlari tengdir . Buni $\mathbf{Q_Z=D^{-0,5}FQ_\Delta FTD^{-0,5}=D^{-0,5}DD^{-0,5}=E}$ aniqligini baholashning umumlashtirilgan formulasi yordamida isbotlaymiz. Shuning uchun **Z** vektorining elementlari mustaqil va tengdir. Keyinchalik, o’rtacha kvadrat o’lchov xatosini hisoblash uchun siz Gauss formulasidan foydalanishingiz mumkin $m=\sqrt{\frac{Z^TZ}{n}}$. Δ ning Z orqali o’zgarishini va ortogonal matritsaning xususiyatlarini hisobga olgan holda, biz topamiz.

$$\mathbf{Z^TZ=\Delta^TF^TD^{-0,5}D^{-0,5}F\Delta=\Delta^TF^TD^{-1}F\Delta=\Delta^TF^TFQ^{-1}F^TF\Delta=\Delta^TQ^{-1}\Delta}.$$

Ushbu natijani Gauss formulasiga almashtirib, biz bog'liq o’lchovlar uchun o’rtacha kvadrat xatoni aniqlash formulasini olamiz $\mu=\sqrt{\frac{\Delta^TQ^{-1}\Delta}{n}}$, bu erda n - vektor Δ dagi elementlar soni.

Keling, korrelyatsiya qilingan tuzatish usulida o’lchovlarning to’g'riligini baholash uchun ushbu formuladan foydalanamiz. Δ xato vektori sifatida qoldiq vektorni olaylik. Qoldiqlarning o’ziga xos xususiyati shundaki, ular uchun nazariy qiymat yoki matematik kutish ma'lum. U nolga teng. Shuning uchun, nomuvofiqlik qiymatining o’zi ushbu nazariy qiymatdan farq sifatida ko’rib chiqilishi va haqiqiy xato sifatida qaralishi mumkin. Bunday holda, umumiy holatda, qoldiqlar bog'liqdir, chunki ular ko’pincha bir xil o’lchovlar yordamida hisoblanadi. Shunday qilib, yuqorida olingan formulani qoldiqlardan foydalanib yozamiz haqiqiy xatolar o’rniga

$$\mu = \sqrt{\frac{\mathbf{W}^T\mathbf{Q}_W^{-1}\mathbf{W}}{r}} = \sqrt{\frac{\mathbf{W}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W}}{r}} = \sqrt{\frac{-\mathbf{W}^T\mathbf{K}}{r}}.$$

Keling, $-\mathbf{W}^T\mathbf{K} = \mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}$ ekanligini isbotlaylik.

Korrelyativ tuzatish tenglamalarini hisobga olgan holda (3.32) topamiz

$$\mathrm{V}^T\mathrm{P}\mathrm{V}=\mathrm{V}^T\mathrm{P}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}^T\mathrm{K}=\mathrm{V}^T\mathrm{B}^T\mathrm{K}.$$

Tuzatish tenglamalaridan $\mathbf{BV+W=0}$ $\mathbf{V^TB^T= -W^T}$ keladi.

Demak, $\mathbf{V^TB^TK= - W^TK = V^TPV}$.

Nihoyat, biz Bessel formulasini olamiz

$$\mu = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T\mathbf{P}\,\mathbf{V}}{r}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}}. \qquad 3.3.14.$$

Og'irlik birligiga to’g'ri keladigan o’rtacha kvadrat ildiz xatosini bilib, biz har doimgidek aniqlikni baholash uchun umumlashtirilgan formuladan foydalanib, sozlangan o’lchov qiymatlarining to’g'riligini baholaymiz. Biz o’lchangan miqdorlarning tenglashtirilgan qiymatlarini teskari og'irlik matritsasi ma'lum bo’lgan elementlar bo’yicha ifodalaymiz. $\bar{y} = y + v = y + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} = y - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W}.$

Bundan tashqari, biz ($\mathbf{W=B\Delta}$, $\mathbf{\Delta=y-Y}$ ekanligini hisobga olgan holda) olamiz.

$$\bar{y} = Y + \Delta - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\Delta = Y + (\mathbf{E} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B})\Delta = Y + \mathbf{C}\Delta.$$

Endi to’g'rilangan qiymatlar teskari og'irlik matritsasi ma'lum bo’lgan haqiqiy xatolar vektori ko’rinishida ifodalangan bo’lsa, umumiy aniqlikni baholash formulasidan foydalanish mumkin. $\mathbf{Q_\Delta=P^{-1}}$ ekanligini hisobga olamiz

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{CQ}\ \mathbf{C}^T = \ \mathbf{E} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\ \mathbf{P}^{-1}\ \mathbf{E} - \mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$$

Qavslarni ochamiz

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{P}^{-} - \mathbf{P}^{-}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-} - \mathbf{P}^{-}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-} + \mathbf{P}^{-}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-}.$$

Oxirgi muddatni ko’rib chiqing

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}.$$

$\boldsymbol{Q_y}$ formulasidagi bu atama oldingisi bilan bekor qilinadi va nihoyat biz quyidagilarni olamiz: teng bo'lmagan o'lchovlar uchun

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{-1}; \qquad 3.3.15$$

teng o'lchovlar uchun

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{E} - \mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}. \qquad 3.3.16$$

$\boldsymbol{Q_y}$ ni bilgan holda , $K_{\bar{y}} = \sigma_0^2 Q_{\bar{y}}$ korrelyatsiya matritsasi yoki uning $K_{\bar{y}} = \mu^2 Q_{\bar{y}}$bahosini olish oson , bunda diagonal elementlar to'g'rilangan o'lchov natijalarining o'rtacha kvadrat xatolari $m_{\bar{y}_i} = \mu\sqrt{Q_{jj}} = \mu\sqrt{Q_{\bar{y}_i}}$

Misol. $\boldsymbol{Y_1+Y_2+Y_3-180=0}$ figuralarning sharti B=(111) dagi tuzatish tenglamalarining koeffitsient matritsasi bilan berilsin. Barcha o'lchovlar bir xil darajada aniq amalga oshiriladi , shuning uchun tuzatilgan o'lchov qiymatlarining teskari og'irlik matritsasi aniqlash uchun biz formuladan foydalanamiz.

$$Q_{\bar{y}} = \mathbf{E} - \mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

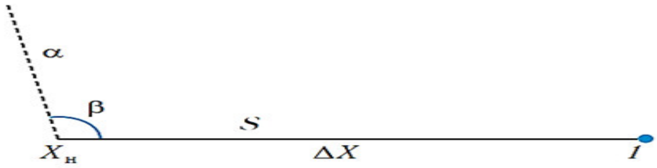
Shunday qilib, **tuzatilgan** o'lchovlarning o'zaro og'irliklari 2/3 ni tashkil qiladi. Tuzatishdan oldin o'lchovlar bir xil darajada aniq edi. Ularning vazni bittaga teng edi. Tuzatishdan keyin va tuzatishdan oldingi o'lchov og'irliklarining nisbati quyidagi ifoda bilan aniqlanadi.Shunday $\frac{P_{\bar{y}}}{P_y} = \frac{3/2}{1} = \frac{3}{2} = \frac{n}{k}$qilib, uchburchak uchun bu nisbat o'lchovlarning umumiy sonining kerakli o'lchovlar soniga nisbatiga tengdir. Umumiy holda, munosabat $\frac{P_{\bar{y}}}{P_y} = \frac{n}{k}$taxminan qondiriladi. n>k bo'lgani uchun , tuzatilgandan keyin o'lchangan qiymatlarning og'irligi tuzatishdan oldingidan kattaroq bo'ladi, shuning uchun tuzatilgan qiymatlarning aniqligi tuzatishdan oldingi bir xil qiymatlarning aniqligidan yuqori bo'ladi.

Biz tuzatilgan o'lchovlarning aniqligini baholash muammosini hal qildik. Geodeziya tarmog'ining boshqa elementlarini baholash uchun biz ushbu elementlarni o’lchangan qiymatlar bo’yicha ifodalaymiz. Masalan, ma'lum bir nuqta koordinatalarining to’g'riligini baholash uchun (3.28-rasm) biz o’lchangan qiymatlar funksiyasini tuzamiz

$\boldsymbol{X_1 = X_H + \Delta X = X_H + S\cos(\alpha + b).}$

Bu erda S va β - o’lchangan kattaliklar. X_H va a qiymatlari boshlang'ichdir. Umuman olganda, S bunday funktsiyalar uchun S o’lchovli vektorni tuzish mumkin

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} F_1(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n) \\ F_2(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_S(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n) \end{pmatrix}.$$



Rasm. 3.28. Koordinatali o’sish aniqligini baholash

Umumlashtirilgan aniqlikni baholash formulasidan foydalanib, berilgan vektorning teskari og'irlik matritsasi olinadi, bu erda $\boldsymbol{Q_F = fQ_x f^T}$

Bu yerni (3.44) va (3.45) o‘rniga qo‘ysak: teng bo’lmagan o’lchovlar uchun

…………………………………………………………………………

$$\mathbf{Q}_{\overline{F}} = \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}^T - \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}^T; \quad 3.3.17$$

teng darajada aniq o’lchovlar uchun

$$\mathbf{Q}_{\overline{F}} = \mathbf{f}\mathbf{f}^T - \mathbf{f}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{f}^T. \quad 3.3.18$$

Funktsiya vektorining korrelyatsiya matritsasi $\boldsymbol{K_F = \sigma^2_0 Q_F}$ ko’rinishini oladi. Bunday funktsiya odatda aniqlikni oldindan hisoblash uchun ishlatiladi, chunki bu erda diagonal elementlar tuzatishdan keyin funktsiyalarning dispersiyalari (geodeziya konstruktsiyasi elementlarining dispersiyalari) hisoblanadi. To’g'riligini baholash uchun og'irlik birligining dispersiyasi σ^2_0 o’rniga μ, keyin $K_F = \mu^2 Q_F$ ning ildiz o’rtacha kvadrat xatosining kvadratidan foydalanish kerak .

Bu erda diagonal elementlar sozlangan o’lchovlar natijalari bo’yicha hisoblangan har bir funktsiyaning o’rtacha kvadrat xatolarining kvadratlari, shuning uchun

$$m_{\overline{F}_j} = \mu\sqrt{Q_{\overline{F}_{jj}}} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{\overline{F}_j}}}.$$

KORRELYATSIYA VA PARAMETRIK USULLAR O'RTASIDAGI BOG'LIQLIK .

Parametrik va korrelyatsion usullar bilan rostlash natijalari bir xil natijalarga olib keladi. Keling, buni isbotlaylik**.** **V=AΔX+L** parametrik tuzatish tenglamalar tizimini ikkita quyi tizimga ajratamiz:

$$\mathbf{V}_1=\mathbf{A}_1\Delta\mathbf{X}+\mathbf{L}_1; \qquad (3.48)$$

$$\mathbf{V}_2=\mathbf{A}_2\Delta\mathbf{X}+\mathbf{L}_2, \qquad (3.49)$$

bu yerda birinchi quyi tizim *k* noma'lumli *k* tenglamadan, ikkinchisi *k* noma'lumli ***r*** tenglamadan iborat.

Oddiy yozuvda bu tizimlar quyidagicha ko'rinadi:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}\delta x_1 + a_{12}\delta x_2 + \ldots + a_{1k}\delta x_k + l_1;\\
v_2 &= a_{21}\delta x_1 + a_{22}\delta x_2 + \ldots + a_{2k}\delta x_k + l_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_k &= a_{k1}\delta x_1 + a_{k2}\delta x_2 + \ldots + a_{kk}\delta x_k + l_k;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{k+1} &= a_{k+1,1}\delta x_1 + a_{k+1,2}\delta x_2 + \ldots + a_{k+1,k}\delta x_k + l_{k+1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_n &= a_{n1}\delta x_1 + a_{n2}\delta x_2 + \ldots + a_{nk}\delta x_k + l_n.
\end{aligned}$$

$\mathbf{A}_1$ matritsasi teskari bo'lsin (aks holda, (3.48) dan ba'zi tenglamalarni 3.49 dan tenglamalar bilan o'zgartirish kerak), bunday harakatlar har doim bu shartga erishishi mumkin). (3.48) dan ΔX vektorini ifodalaymiz: $\mathbf{\Delta X = A_1^{-1}V_1 - A_1^{-1}L_1}$ va (3.49) $\mathbf{V_2 = A_2 (A_1^{-1}V1 - A_1^{-1}L_1) + L_2}$ dagi **ΔX** o'rniga o'ng tomonni qo'yamiz.

Qavslarni kengaytiring va V2 ni o'ng tomonga o'tkazing

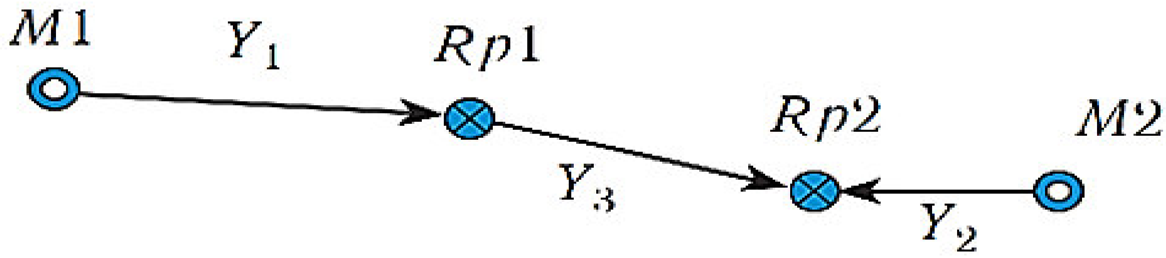
$$A_2A_1^{-1}V_1 - V_2 - A_2A_1^{-1}L_1 + L_2 = 0. \qquad (3.50)$$

Birinchi ikkita atamani blok qatorining mahsuloti sifatida qayta yozamiz

$B = (A_2A_1^{-1} - E)$ ustun uchun $V\!:\ (A_2A_1^{-1} - E)\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = BV.$

$-A_2A_1^{-1}L_1+L_2$ atamalar parametrik tuzatish tenglamalarining r×1 vektoriga aylantirilgan erkin shartlaridir. O'zgartirilgan Rasmda ularni *W* bilan belgilash va qoldiqlar vektori sifatida ko’rib chiqish mumkin, shuning uchun nihoyat, (3.50) **BV+W=0** korrelyatsiya usulidan shartli tuzatish tenglamalari ko’rinishida qayta yozilishi mumkin.

Bunday o’tishga misol sifatida tarmoq tuzatishlarini tekislash uchun parametrik tenglamalar tizimini ko’rib chiqing (3.29-rasm).



Rasm. 3.29. Parametrik va korrelyatsion usullar o’rtasidagi munosabatni ko’rsatadigan misol

Keling, ulanish tenglamalarini tuzish bosqichini chetlab o’tib, ushbu tarmoq uchun parametrik tuzatish tenglamalari tizimini tuzamiz:

1) $v_1=\delta x_1+l_1$;
2) $v_2=\delta x_2+l_2$;
3) $v_3=-\delta x_1+\delta x_2+l_3$.

Bu yerdagi dastlabki ikkita tenglama (3.48) sistemani tashkil qiladi, uchinchi tenglama esa (3.49) sistemani tashkil qiladi. Birinchi ikkita tenglamadan dx1 va dx2 ifodasini olaylik:

$$\Delta X = A_1^{-1}V_1 - A_1^{-1}L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

yoki odatdagi yozuvda $\delta x_1=v_1-l_1$; $\delta x_2=v_2-l_2$.

To’g'ri bo’laklarni uchinchi tuzatish tenglamasiga almashtiramiz, biz $v_3=-v_1+l_1+v_2-l_2+l_3$ ni olamiz. Agar $x_1=H_{M1}+y_1$ parametrlarining taxminiy qiymatlarini qabul qilsak; $x_2=H_{M2}+y_2$, u holda $l_1= x_1- H_{M1}+ y_1=0$ ekanligini tushunish oson ; $l_2= x_2- H_{M2}+ y_2=0$; $l_3= x_2- x_1- y_3$.

Ammo korrelyatsiya usulida nomuvofiqlik ko’pburchak bilan aniqlanadi. Aytaylik, ko’pburchakning yo’nalishi ikkinchi belgidan birinchi belgigacha tanlangan. Keyin ko'pburchak uchun balandliklar yig'indisiga teng bo'lgan tafovut minus dastlabki balandliklardagi farq bo'ladi.

$$w=-y_1-y_3+y_2-(H_{M1}-H_{M2})=H_{M1}-x_1-y_3+x_2-H_{M2}-(H_{M1}-H_{M2})=l_3.$$

Shunday qilib, uchinchi tenglama shartli tuzatish tenglamasidir

$$-v_3-v_1+l_1+v_2-l_2+l_3=0 \text{ или } -v_3-v_1+v_2+w=0.$$

Nazorat savollari

1. Ortiqcha o'lchovlar soni va shartli ulanish tenglamalari soni qanday bog'liq?

2. Shartli aloqa tenglamalaridagi argumentlar qanday miqdorlardan iborat?

3. Shartli bog`lanish tenglamalarining umumiy ko`rinishini yozing. Turli geodeziya inshootlari uchun ulanish tenglamalariga misollar keltiring.

4. Shartli tuzatish tenglamalari qanday olinadi? Bu tenglamalarning koeffitsientlari chiziqli cheklash tenglamalari uchun qanday hisoblanadi? Misollar keltiring.

5. Shartli tuzatish tenglamalarida qoldiqlar qanday hisoblanadi?

6. Nivelirlash tarmog'i uchun shartli bog'lanish tenglamalari va tuzatishlarning umumiy ko'rinishini yozing.

7. Poligonometrik harakatning shartli ulanish tenglamalarini va tuzatishlarni umumiy Rasmda yozing.

8. Rejalashtirilgan tarmoqlar uchun quyidagi shartli ulanish va tuzatish tenglamalarini yozing: figura holati, qattiq burchak holati, stantsiya holati, gorizont holati.

9. Asosiy shartli tenglama qanday ko'rinishga ega? Unga aloqa tenglamasini va tuzatishlar tenglamasini yozing.

10. Qutb shartli tenglama qanday ko'rinishga ega? Qanday hollarda u paydo bo'ladi? Unga aloqa tenglamasini va tuzatishlar tenglamasini yozing.

11. Koordinatali shartli bog'lanish tenglamalari qanday ko'rinishga ega? Qanday hollarda ular paydo bo'ladi? Ulanish tenglamalarini va ular uchun tuzatish tenglamalarini yozing.

12. Korrelyatsiya va parametrik tuzatish usullarida normal tenglamalar sonini qanday hisoblash mumkin?

13. Aloqa va tuzatishlarning shartli tenglamalar sistemalarining umumiy ko rinishini matritsa ko rinishida yozing. Matritsa yozuvidan oddiy belgiga o'tish.

14. Korrelyatsiya usuli uchun normal tenglamalarning umumiy Rasmini matritsa Rasmida yozing. Matritsalarni ko'paytirgandan so'ng, oddiy tenglamalarning odatiy Rasmiga o'ting.

15. Korrelyativ tuzatish tenglamalari qanday ko'rinishga ega?

16. Rostlash natijalari bo'yicha o'lchovlarning standart xatolari qanday aniqlanadi?

17. Tuzatilgan o'lchovlar vektorining teskari og'irlik matritsasi, rostlangan o'lchovlardan funksiyalar vektori qanday hisoblanadi?

18. Olingan qoldiqlarning maqbulligini qanday aniqlash mumkin?

19. Korrelyatsiya usulida yakuniy tuzatish nazorati qanday amalga oshiriladi?

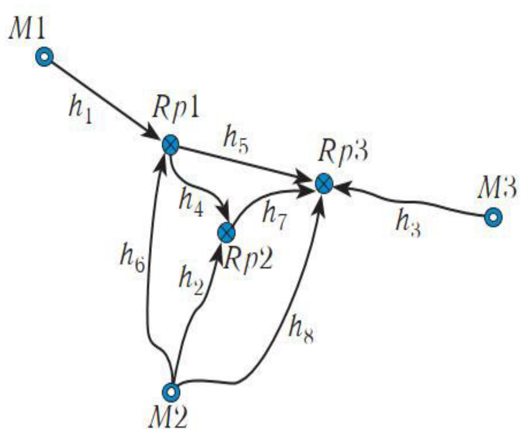
20. Teng va teng bo'lmagan o'lchovlar uchun korrelyatsiyani tuzatish ketma-ketligini yozing.

21. Parametrik va korrelyatsion usullar o'rtasidagi bog'liqlikni ko'rsating.

Yechimlar bilan bog'liq muammolar

Vazifa 1. Nivelirlash tarmog'ining to'g'riligini (3.30-rasm) o'zaro bog'liq holda tenglashtiring va baholang . §3.1 da ushbu tarmoq parametrik tuzatish uchun taklif qilingan. Dastlabki ma'lumotlar jadvalda keltirilgan. 3.18.

3.18-jadval



Boshlanish nuqtalarining belgilari, m	O'lchov raqami	O'lchangan balandliklar h(y), m	O'lchov uzunligi L, km
H_{M1}=150,209	1	-3,567	4,00
H_{M2}=150,531	2	-0,283	6,67
H_{M3}=147,182	3	-0,126	4,00
	4	3,533	5,00
	5	0,428	1,05
	6	-3,861	1,67

Rasm. 3.30. Tarmoqni tekislash diagrammasi

7	-3,131	5,00
8	-3,448	3,33

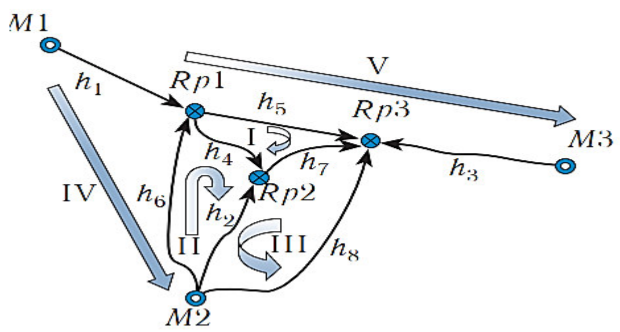
Yechim

1. Zarur va ortiqcha o’lchovlar sonini aniqlash. Raqam zarur o’lchovlar belgilangan mos yozuvlar nuqtalari soniga teng. k=3. Raqamortiqcha o’lchovlar r=n–k=8–3=5.

2. Beshta shartli aloqa tenglamalarini tuzish uchun biz diagrammada chizamiz

beshta mustaqil ko’pburchaklar tarmog'i. Ochiq ko’pburchaklar soni manba nuqtalari soni minus bittaga teng bo’lishi kerak. Bizda uchta boshlang'ich belgi bor. Shuning uchun ochiq ko’pburchaklar soni ikkitadir. Qolgan beshta ko’pburchak yopiq. Ko’pburchaklarni tanlashning bir nechta variantlari mavjud, ammo tuzatish natijalari bu tanlovga bog'liq bo’lmaydi.

Faqat ko’pburchaklar va ular bilan bog'lanish tenglamalari bir-biridan mustaqil bo’lishi muhimdir. Rasmda. 3.31 ko’pburchaklarni tanlashning mumkin bo’lgan variantlaridan birini ko’rsatadi. Rim raqamlari ko’pburchaklar sonini ko’rsatadi , o’qlar ko’pburchakni chetlab o’tish yo’nalishini ko’rsatadi, birinchi uchta ko’pburchak yopiq, qolgan ikkitasi ochiq.



Rasm. 3.31. Ko’pburchaklar bilan tekislash tarmog'ining sxemasi

Har bir ko’pburchak uchun biz shartli aloqa tenglamalarini tuzamiz. Birinchi ko’pburchak uchun, agar siz ko’pburchakni chetlab o’tish yo’nalishi bo’yicha harakat qilsangiz, ortiqcha miqdorlar yig'indisi nolga teng bo’lishi kerak. Biz $-Y_4+Y_5-Y_7=0$ ni olamiz. Xuddi shunday, biz qolgan cheklash tenglamalarini tuzamiz:

$$-Y_2 + Y_4 + Y_6 = 0$$

$$-Y_2 + Y_7 + Y_8 = 0$$

$$Y_1 - Y_6 - (N_{M2} - N_{M1}) = 0$$

$$Y_1 - Y_3 + Y_5 - (N_{M3} - N_{M1}) = 0$$

3. Olingan ulanish tenglamalari yordamida shartli tuzatish tenglamalarini tuzing va barcha ko'pburchaklar uchun qoldiqlarni hisoblang (3.19-jadval).

3.19-jadval

Dastlabki shartli cheklash tenglamalari	Qoldiqlarni hisoblash	Tuzatish tenglamalarining turi
$-Y_4+Y_5-Y_7=0$	$w_1=-y_4+y_5-y_7=-3{,}533+0{,}428+3{,}131=+2{,}6$ sm	$-v_4+v_5-v_7+2{,}6=0$
$-Y_2+Y_4+Y_6=0$	$w_2=-y_2+y_4+y_6=0{,}283+3{,}533-3{,}861=-4{,}5$ sm	$-v_2+v_4+v_6-4{,}5=0$
$-Y_2-Y_7+Y_8=0$	$w_3=-y_2-y_7+y_8=0{,}283+3{,}131-3{,}448=-3{,}4$ sm	$-v_2-v_7+v8-3{,}4=0$
$Y_1-Y_6-(H_{M2}-H_{M1})=0$	$w_4=y_1-y_6-(H_{M2}-H_{M1})=-3{,}567+3{,}861-(150{,}531-150{,}209)=-2{,}8$ sm	$v_1-v_6-2{,}8=0$
$Y_1-Y_3+Y_5-(H_{M3}-H_{M1})=0$	$w_5=y_1-y_3+y_5-(H_{M3}-H_{M1})=-3{,}567+0{,}126+0{,}428-(147{,}182-150{,}209)=+1{,}4$ sm	$v_1-v_3+v_5+1{,}4=0$

Shartli tuzatish tenglamalar sistemasini BV+W=0 yoki matritsa Rasmida yozamiz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2,6 \\ -4,5 \\ -3,4 \\ -2,8 \\ +1,4 \end{pmatrix} = 0.$$

tenglamalar tuzish .

Parametrik usul bilan tuzatishda bo'lgani kabi, S=2 deb faraz qilib , ortiqcha o'lchov og'irliklarini hisoblaymiz . $P_i = C / L_i = 2/ Li$. Biz olamiz:

O'lchov nomeri *i*	L_i	$P_i=C/L_i$
1	4,00	0,50
2	6,67	0,30
3	4,00	0,50
4	5,00	0,40
5	1,05	1,90
6	1,67	1,20
7	5,00	0,40
8	3,33	0,60

Oddiy tenglamalar tizimi korrelyatsiya NK+W=0, bu yerda N=BP–1BT.

Matritsa ma'lumotlarini ko’paytirish va qo’shish orqali biz oddiy tenglamalar tizimini raqamli Rasmda olamiz:

$$\begin{pmatrix} 5,526 & -2,500 & 2,500 & 0,000 & 0,526 \\ -2,500 & 6,667 & 3,333 & -0,833 & 0,000 \\ 2,500 & 3,333 & 7,500 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & -0,833 & 0,000 & 2,833 & 2,000 \\ 0,526 & 0,000 & 0,000 & 2,000 & 4,526 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2,6 \\ -4,5 \\ -3,4 \\ -2,8 \\ +1,4 \end{pmatrix} = 0$$

yoki

5. Normal tenglamalar sistemasini yechish:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0,146 \\ 1,034 \\ -0,055 \\ 2,213 \\ -1,304 \end{pmatrix}.$$

6. O’lchov natijalariga tuzatishlar vektorini hisoblash:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1,82 \\ -3,26 \\ 2,61 \\ 2,22 \\ -0,61 \\ -0,98 \\ -0,22 \\ -0,09 \end{pmatrix}.$$

Ushbu natijalar parametrik usuldan 1 mm dan ko’p bo’lmagan farq qiladi. Bunday farqni hisoblash jarayonining o’zi aniqligi sabab bo’lishi mumkin, shuning uchun biz tuzatish natijalari bir xil deb taxmin qilishimiz mumkin. Shartli tuzatish tenglamalar sistemasi yechimini nazorat qilamiz. Buning uchun biz **VTPV=–WTK** tengligidan foydalanamiz:

$$\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V}=[pvv]=12,12;$$

$$\mathbf{W}^T\mathbf{K}=[wk]=-12,12.$$

7. O’lchangan miqdorlarning **tuzatilgan** qiymatlarini hisoblash va tuzatishni yakuniy nazorat qilish (3.20-jadval).

3.20-jadval

O'lchangan balandliklar y, m	O'lchangan balandliklarga tuzatishlar, sm	Tuzatilgan balandliklar yi = yi +vi, m	Aloqa tenglamalari harfiy Rasmda	Raqamli Rasmdagi munosabat tenglamalari
-3,567 -0,283 -0,126 3,533 0,428 -3,861 -3,131 -3,448	1,8 -3,3 2,6 2,2 -0,6 -1,0 -0,2 -0,1	-3,549 -0,317 -0,100 3,554 0,422 -3,871 -3,132 -3,449	–Y4+Y5- Y7=0 - Y2+Y4+Y6=0 -Y2- Y7+Y8=0 Y1-Y6- (HM2- HM1)=0 Y1-Y3+Y5– -(HM3- HM1)=0	- 3,554+0,422+3,132=0,0 0,317+3,554-3,871=0,0 0,317+3,132-3,449 =0,0 -3,549+3,871– -(150,531- 150,209)=0,0 -3,549+0,100+0,422- –(147,182-150,209)=0,0

Jadvalning oxirgi ustunida. 3.20 Tuzatish amalga oshirilgandan keyin ulanish tenglamalari tenglamalarining bajarilishini nazorat qilish. Nolga tenglik qanoatlantiriladi, ya'ni. tarmoq **tuzatilgan**.

8. Aniqlikni baholash.

Og'irlikning o'rtacha kvadrat xatosi

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}} = \sqrt{\frac{12,12}{5}} = 1,55 \text{ см.}$$

O'rnatilgan o'lchovlar vektorining teskari og'irlik matritsasi hisoblanamiz:

$$\mathbf{Q}_{\overline{y}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,39 & 0,23 & 0,24 & -0,16 & -0,14 & 0,39 & 0,01 & 0,24 \\ 0,23 & 1,09 & 0,26 & 0,86 & 0,03 & 0,23 & -0,83 & 0,26 \\ 0,24 & 0,26 & 0,46 & 0,01 & 0,22 & 0,24 & 0,20 & 0,46 \\ -0,16 & 0,86 & 0,01 & 1,01 & 0,17 & -0,16 & -0,84 & 0,01 \\ -0,14 & 0,03 & 0,22 & 0,17 & 0,36 & -0,14 & 0,19 & 0,22 \\ 0,39 & 0,23 & 0,24 & -0,16 & -0,14 & 0,39 & 0,01 & 0,24 \\ 0,01 & -0,83 & 0,20 & -0,84 & 0,19 & 0,01 & 1,03 & 0,20 \\ 0,24 & 0,26 & 0,46 & 0,01 & 0,22 & 0,24 & 0,20 & 0,46 \end{pmatrix}.$$

Tuzatilgan o'lchovlar vektorining korrelyatsiya matritsasi

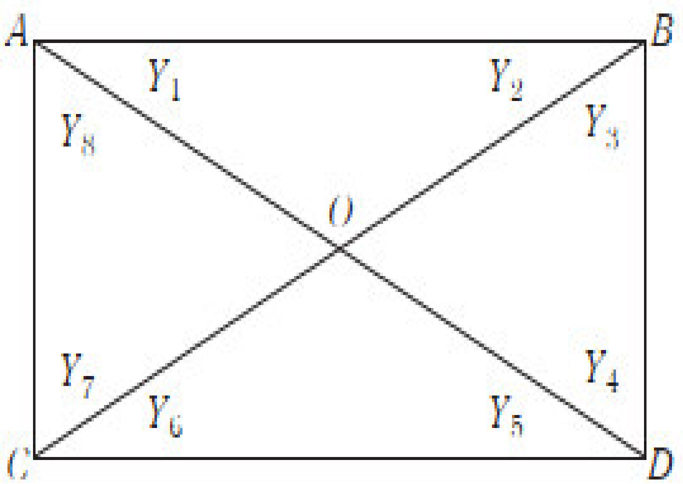
Tenglashtirilgan ortiqchalarning o'rtacha kvadrat xatolarini qayerdan olamiz :

$$m_{\bar{y}_1} = \sqrt{0,94} = 1,0 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_2} = \sqrt{2,61} = 1,6 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_3} = \sqrt{1,11} = 1,1 \text{ см};$$
$$m_{\bar{y}_4} = \sqrt{2,44} = 1,6 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_5} = \sqrt{0,87} = 0,9 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_6} = \sqrt{0,94} = 1,0 \text{ см};$$
$$m_{\bar{y}_7} = \sqrt{2,48} = 1,6 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_8} = \sqrt{1,11} = 1,1 \text{ см}.$$

Rp2 belgisining o'rtacha kvadrat xatosini aniqlaymiz . Buning uchun $F=H_{Rp2}=H_{M1}+Y_1+Y_4$ funksiyasini tuzamiz. Argumentlarga (ortiqchaliklarga) nisbatan bu funksiyaning hosilalari vektori f =(1 0 0 1 0 0 0 0) ko'rinishga ega. Ushbu belgining **tuzatilgan** qiymatining teskari og'irligi $\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_H} = fQyfT = 1.09$ m = = Rp2 belgisini boshqa brenddan, masalan, M2 markasidan aniqlasak, xuddi shunday natijaga erishamiz. HRp2=HM2+Y2. Bu holda f =(0 1 0 0 0 0 0) va biz bir xil natijaga erishamiz

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_H} = fQyfT = 1.09$$

Vazifa 2. Geodezik to'rtburchak ko'rinishidagi triangulyatsiya tarmog'ining to'g'riligini o'zaro bog'liq holda tenglashtiring va baholang (3.32-rasm). Bu erda C va D nuqtalar boshlang'ich, A va B aniqlanadi.



Rasm. 3.32. Geodezik to'rtburchakning diagrammasi

№ Burchak	O'lchangan burchak qiymati
1	46°23′07,0″
2	68°58′21,5″
3	38°40′06,5″
4	25°58′23,5″
5	22°34′43,7″
6	92°46′51,9″
7	46°37′48,3″
8	18°00′39,4″

Yechim: 1. Kerakli va ortiqcha barcha o'lchovlar sonini aniqlang: n=8, k=4 (k - aniqlanadigan nuqtalar koordinatalari soniga teng), r=n–k=4.

2. Shartli aloqa tenglamalarini tuzish.

Bunday tarmoqda to'rtta shartli ulanish tenglamalari paydo bo'ladi - raqamlarning uchta sharti va bitta qutbli shartli tenglama:

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - 180 = 0$$

$$Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 - 180 = 0$$

$$Y_1 + Y_2 + Y_7 + Y8_4 - 180 = 0$$

$$\ln \frac{sinY_1 sinY_3 sinY_5 sinY_7}{sinY_2 sinY_4 sinY_6 sinY_8} = 0$$

3. Tuzatishlarning shartli tenglamalarini tuzish. Shartlilikning umumiy ko'rinishi

Olingan birikma tenglamalari uchun tuzatish tenglamalari:

Keling, natijalarni almashtirish orqali qoldiqlarning raqamli qiymatlarini aniqlaylik aloqa tenglamasiga o'lchovlar:

va qutb shartli tuzatish tenglamasining koeffitsientlari $\Delta_i = \pm \frac{\mu 10^k}{\sigma} ctgY_i$;

Bu erda ȝ=1, chunki natural logarifmlardan foydalanamiz, *r=2,063Ǝ·105.*

$$\Delta_1 = 0{,}462;\ \Delta_2 = 0{,}186; \Delta_3 = 0{,}606; \Delta_4 = 0{,}462;$$

$$\Delta_5 = 1{,}166; \Delta_6 = 0{,}024;\ \Delta_7 = 0{,}458;\ \Delta_8 = 1{,}491;$$

Olingan qoldiq va koeffitsientlarni (3.43) ga almashtiramiz. Oling

Shartli tuzatish tenglamalarining umumiy tizimi:

Bunday holda, shartli tuzatish tenglamalarining koeffitsientlari matritsasi mavjud ko'rinish Shartli tuzatish tenglamalari matritsada BV+W=0 yoki son ko'rinishda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0,462 & -0,186 & 0,606 & -0,995 & 1,166 & 0,024 & 0,458 & -1,491 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,5 \\ +3,3 \\ -3,8 \\ +8,574 \end{pmatrix} = 0.$$

tenglamalar tuzish .

Ushbu tarmoqda barcha burchaklar teng aniqlik bilan o'lchanadi , shuning uchun normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasi

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -0,114 \\ 0 & 4 & 2 & 0,156 \\ 2 & 2 & 4 & -0,758 \\ -0,114 & 0,156 & -0,758 & 5,398 \end{pmatrix}.$$

NK+W=0 matritsali normal tenglamalar tizimining umumiy ko’rinishi.

Oddiy kirishda

$$\begin{aligned} &4k_1 + 0k_2 + 2k_3 - 0,114k_4 - 1,5 = 0; \\ &0k_1 + 4k_2 + 2k_3 + 0,156k_4 + 3,3 = 0; \\ &2k_1 + 2k_2 + 4k_3 - 0,758k_4 - 3,8 = 0; \\ &-0,114k_1 + 0,156k_2 - 0,758k_3 + 5,398k_4 + 8,574 = 0. \end{aligned}$$

Oddiy tenglamalarning koeffitsient matritsasi qoldiq vektorning teskari og'irlik matritsasiga teng. Olingan qoldiqlar maqbul yoki yo’qligini qaerdan aniqlashingiz mumkin. Biz burchaklar 2Ǝ aniqligini ta'minlovchi qurilma bilan o’lchangan deb faraz qilamiz.

Ruxsat etilgan qoldiq qiymatlarni aniqlash uchun biz formuladan foydalanamiz

$$w_{j\text{доп}} = t\sigma_0\sqrt{\frac{1}{P_{w_j}}} = t\sigma_0\sqrt{Q_{w_{jj}}}.$$

t=2 (ehtimollik 0,95) ni olaylik. Asosiy diagonalda joylashgan N matritsasining uchta qiymati 4 ga teng bo’lganligi sababli, raqamlar shartlari uchun barcha uchta ruxsat etilgan qoldiq bir xil bo’ladi.

$$w_{1\text{доп}} = w_{2\text{доп}} = w_{3\text{доп}} = t\sigma_0\sqrt{Q_{w_{jj}}} = 2\cdot 2\sqrt{4} = 8,0'', \quad w_{4\text{доп}} = 4\sqrt{5,40} = 9,3.$$

Barcha qoldiqlar 0,95 ehtimollik bilan ruxsat etilgan bo’lib chiqdi. E'tibor bering, bu erda to’rtinchi nomuvofiqlik beshinchi kasrdagi natural logarifm birliklarida olinadi.

5. Normal tenglamalar sistemasini yechish.

Oddiy tenglamalar koeffitsientlarining teskari matritsasini aniqlaymiz:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,380 & 0,133 & -0,263 & -0,033 \\ 0,133 & 0,386 & -0,268 & -0,046 \\ -0,263 & -0,268 & 0,530 & 0,077 \\ -0,033 & -0,046 & 0,077 & 0,197 \end{pmatrix}.$$

korrelyatsiyasini aniqlaymiz :

$$\mathbf{K} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W} = -\begin{pmatrix} 0,380 & 0,133 & -0,263 & -0,033 \\ 0,133 & 0,386 & -0,268 & -0,046 \\ -0,263 & -0,268 & 0,530 & 0,077 \\ -0,033 & -0,046 & 0,077 & 0,197 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1,5 \\ 3,3 \\ -3,8 \\ 8,574 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,585 \\ -1,698 \\ 1,847 \\ -1,292 \end{pmatrix}.$$

Korrelyatsiyani hisoblashni nazorat qilish olingan qiymatlarni korrelyatsiyaning normal tenglamalari tizimiga almashtirish orqali amalga oshirilishi mumkin .

6. O’lchov natijalariga tuzatishlar vektorini hisoblash. Hisob-kitoblar korrelyativ tuzatish tenglamalari yordamida amalga oshiriladi

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}^T\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0,462 \\ 1 & 0 & 1 & -0,186 \\ 1 & 0 & 0 & 0,606 \\ 1 & 0 & 0 & -0,995 \\ 0 & 1 & 0 & 1,166 \\ 0 & 1 & 0 & 0,024 \\ 0 & 1 & 1 & 0,458 \\ 0 & 1 & 1 & -1,491 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0,585 \\ -1,698 \\ 1,847 \\ -1,292 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7'' \\ 1,5'' \\ -1,4'' \\ 0,7'' \\ -3,2'' \\ -1,7'' \\ -0,4'' \\ 2,1'' \end{pmatrix}.$$

pvv]=–[wk] tengligidan foydalanib boshqaramiz . [pvv]=VTV=22,82, [hafta]=WTK=–22,82. Nazorat tugallandi. Shuning uchun tuzatish tenglamalari tizimi to’g'ri yechilgan.

7. Burchaklarning **tuzatilgan** qiymatlarini hisoblash va tuzatishni yakuniy nazorat qilish (3.21-jadval).

3.21-jadval

1	46°23′07,0″	0,7	46°23′07,7″	$Y_1+Y_2+Y_3+Y_4-180=0$	0,0
2	68°58′21,5‴	1,5	68°58′23,0″		
3	38°40′06,5″	-1,4	38°40′05,1″	$Y_5+Y_6+Y_7+Y_8-180=0$	0,1
4	25°58′23,5″	0,7	25°58′24,2″		
5	22°34′43,7″	3,2	22°34′40,5″	$Y_1+Y_2+Y_7+Y_8-180=0$	0,1
6	92°46′51,9″	-1,7	92°46′50,2″		
7	46°37′48,3‴	-0,4	46°37′47,9″	$\ln\frac{\sin Y_1 \sin Y_3 \sin Y_5 \sin Y_7}{\sin Y_2 \sin Y_4 \sin Y_6 \sin Y_8} = 0$	0,0
8	18°00′39,4‴	2,1	18°00′41,5″		

Yakuniy tuzatish nazorati 0,1" aniqlik bilan amalga oshirildi.

8. Aniqlikni baholash.

Burchak o’lchamining o’rtacha kvadrat xatosini formula bo’yicha hisoblaymiz

Bessel $m = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \sqrt{\frac{22,82}{4}} = 2,4^{"}$

To’g’rilashdan so’ng burchaklarning ildiz-o’rtacha kvadrat xatolarini hisoblash uchun biz sozlangan o’lchovlar vektorining teskari og'irlik matritsasi aniqlaymiz.

Asosiy diagonaldagi elementlarning eng yuqori qiymati 3,57 ni tashkil qiladi. Bu qiymat ikkinchi burchakka tegishli. Shuning uchun, tuzatishdan keyin ikkinchi burchakning o’rtacha kvadrat xatosi $m_{\overline{y2}} = \sqrt{3,57} = 1,9^{"}$". Sakkizinchi burchak, $-m_{\overline{y2}} = \sqrt{1,57} = 1,3^{"}$o’rtacha kvadrat xatosining eng kichik qiymatiga va shuning uchun eng yuqori aniqlik

Rasm. 3.33. poligonometrik zarba

Vazifa 3. Taqdim etilgan poligonometrik harakatning to’g'riligini tenglashtiring va baholang (3.33-rasm). Boshlanish nuqtalarining koordinatalari va o’lchov natijalari Jadvalda keltirilgan. 3.22.

3.22-jadval

№ burilish nuqtalari	X	Y	Boshlang'ich yo’nalish burchaklari α	Tomonlarning o’lchangan qiymatlari S, m	Chapga burilish burchaklarining o’lchangan qiymatlari β
T1	8638,987	10169,000	α_{T3-T1}=120°46′19,5″	S_1=501,028 S_2=895,105	137 q35′46,8″
1					138 q49′51,6″
2				S_3=756,810 S_4=606,670	139 q39′41,2″
3					142 q09′39,6″
T2	10666,645	10761,656	α_{T2-T4}=272°32′36,2″		133 q31′13,8″

Yechim

1. Barcha kerakli va ortiqcha o’lchovlar sonini aniqlash: n=9; k=6; r=3.

2. Shartli aloqa tenglamalarini tuzish.

Poligonometrik harakatda yo'nalish burchagining bitta shartli tenglamasi va ikkita koordinata tenglamasi paydo bo'ladi:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 - 180 \cdot 4 - (\alpha_{T_2-T_4} - \alpha_{T_3-T_1}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{4} \Delta X_i - (X_{T_2} - X_{T_1}) = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 + \Delta X_4 - (X_{T_2} - X_{T_1}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{4} \Delta Y_i - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = \Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3 + \Delta Y_4 - (Y_{T_2} - Y_{T_1}) = 0.$$

Yoki koordinatalarning shartli tenglamalarini yakuniy Rasmda yozib, bog'lanish tenglamalarini o'lchangan kattaliklar ko'rinishida ifodalab, olamiz.

3. Tuzatishlarning shartli tenglamalarini tuzish. Uch tomonli poligonometrik kurs uchun shartli tuzatish tenglamalari tizimi (3.36) formula bilan aniqlanadi. To'rt tomoni o'lchangan poligonometrik shpal uchun shartli tuzatish tenglamalarini yozamiz: $\boldsymbol{w_a}$ tafsilotini hisoblash Jadvalda keltirilgan. 3.23.

3.23-jadval

№ burilish nuqtalari	Boshlang'ich yo'nalish burchaklari α	Chapga burilish burchaklarining o'lchangan qiymatlari β	er	Y	X
T_1	α_{T3-T1}=120°46′19,5″	$137^0 35'46{,}8''$	$120^0 35'46{,}8''$	10169,000	8638,987
1		$138^0 49'51{,}6''$	$78^0 49'51{,}6''$		
2		$139^0 39'41{,}2''$	$37^0 39'41{,}2''$		
3		$142^0 09'39{,}6''$	$356^0 09'39{,}6''$		
T_2	α_{T2-T4}=272°32′36,2″	$133^0 31'13{,}8''$	$319^0 31'13{,}8''$ $272^0 09'39{,}6$	10761,656	10666,645

3.24-Jadvalning to'rtinchi ustunidagi yo'nalishli burchaklar. $a_{i+1} = a_i + \beta_i \pm 180$ formula bo'yicha o'lchangan burchaklardan olingan.

Yo'nalish burchagi shartining nomuvofiqligi T_2-T_4 tomonining yo'nalish burchagining hisoblangan qiymati va bu tomonning yo'nalish burchagining dastlabki, sobit qiymati o'rtasidagi farq sifatida hisoblanadi.

$$\omega_\alpha = 272°32'32{,}5'' - 272°32'36{,}2'' = -3{,}7''.$$

Undagi matritsa elementlarini hisoblash uchun yo’nalish burchaklarining sinuslari va kosinuslarini, shuningdek nuqtalarning koordinatalarini yoki har bir tomonning koordinatalarining o’sishini hisoblash kerak (3.24-jadval).

3.24-jadval

№ burilish nuqtalari	Yo’nalish burchaklari α o’lchangan tomonlardan hisoblangan	Tomonlarning o’lchangan qiymatlari S	cosα	sinα	ΔX	ΔY
T_1	$120^0 35' 46{,}8''$					
1	$78^0 49' 51{,}6''$	501,028	0,201617803	0,979464273	101,0163	490,7390
2	$37^0 39' 41{,}2''$	895,105	0,796535968	0,604591144	712,9835	541,1724
3	$356^0 09' 39{,}6''$	756,810	0,998499506	–0,054760713	755,6746	–41,4435
T_2	$319^0 31' 13{,}8''$	606,670	0,754959814	–0,655771057	458,0115	–397,8367
	$272^0 09' 39{,}6$				w_X=+2,78	w_Y=–2,48

Keyinchalik, shartli tuzatish tenglamalarining koeffitsientlari matritsasi hosil qilamiz:

4 tenglamalar sistemasini tuzish. Oddiy tenglamalar tizimini Rasmlantirish uchun o’lchov og'irliklarini hisoblash kerak. Og'irliklar $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_S^2}$. formulasi bilan aniqlanadi.

Poligonometrik harakat heterojen o’lchovlarni - burchaklar va tomonlarni o’z ichiga oladi. Dastlab, o’lchov aniqligi ishlatiladigan umumiy stansiyaning xususiyatlaridan kelib chiqqan holda aniqlanadi. Umumiy stansiya tomonidan taqdim etilgan burchak o’lchovining standart og'ishi 3", yon o’lchamining standart og'ishi 1 sm (σ_β=3", σ_S =1 sm) bo’lsin. Bir xil darajada aniq o’lchangan deb faraz qilamiz , barcha tomonlar ham bir xil standart og'ish bilan o’lchanadi .

Biz mos yozuvlar o’lchovi sifatida tanlaymiz - burchakning o’lchami, ya'ni. $\sigma_0^2 = \sigma_\beta^2$. Demak, burchaklarning o’lchangan qiymatlarining og'irliklari birga teng bo’ladi va tomonlarning o’lchangan qiymatlari og'irliklari $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_S^2} = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_S^2} = \frac{9}{1} = 9$ ga teng bo’ladi.

Shuning uchun, o’lchov natijalarining og'irlik matritsasining diagonal elementlari P ={ 9 9 9 9 1 1 1 1 1}.

Oddiy tenglamalar koeffitsienti matritsasi **N=BP^{-1}B^{T}** —

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 5 & 0{,}0692 & 2{,}7275 \\ 0{,}0692 & 0{,}4167 & -0{,}1461 \\ 2{,}7275 & -0{,}1461 & 2{,}4296 \end{pmatrix}$$

Qoldiq vektor

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} -3{,}70 \\ 2{,}78 \\ -2{,}48 \end{pmatrix}$$

Odatdagi yozuvda normal tenglamalar tizimi quyidagi Rasmga ega:

$$5{,}000k_1 + 0{,}069k_2 + 2{,}728k_3 - 3{,}7 = 0;$$

$$0{,}069k_1 + 0{,}417k_2 + 0{,}146k_3 + 2{,}78 = 0;$$

$$2,728k_1 - 0{,}146k_2 + 2{,}430k_3 - 2{,}48 = 0$$

Korrelyatsiya normal tenglamalar sistemasini yechish .

Tizimni hal qilish uchun Mathlab muhitida biz hisoblaymiz

$$\mathbf{N^{-1}} = \begin{pmatrix} 0{,}5541 & -0{,}3167 & -0{,}6410 \\ -0{,}3167 & 2{,}6326 & 0{,}5138 \\ -0{,}6410 & 0{,}5138 & 1{,}1621 \end{pmatrix}$$

va vektor korrelyatsiyasi $\mathbf{K} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1{,}444 \\ -7{,}290 \\ -1{,}079 \end{pmatrix}$.

6. O’lchov natijalariga tuzatishlar vektorini hisoblash va tuzatishlar hisobini nazorat qilish: $\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -0{,}28 \\ -0{,}72 \\ -0{,}80 \\ -0{,}53 \\ 2{,}48 \\ 0{,}80 \\ -0{,}74 \\ -0{,}20 \\ 1{,}44 \end{pmatrix}$

Shartli tuzatish tenglamalarining yechimini $\boldsymbol{V^TPV=-W^TK}$ yoki *[pvv]=-[wk]* tenglikdan foydalanib nazorat qilaylik. Hisoblash natijalari quyidagicha: *[pvv]=23,2; [wk]=–23,2.* Shuning uchun shartli tuzatish tenglamalari tizimi to’g'ri yechilgan.

7. O’lchangan miqdorlarning **tuzatilgan** qiymatlarini hisoblash jadvalda keltirilgan. 3.25.

3.25-jadval

№ burilish nuqtalari	Chapga burilish burchaklarining o’lchangan qiymatlari b	Tuza-tishlar	O’rnatilgan burchak qiymatlari	O’lchangan tomonlar	Tuzatishlar	Sozlangan yon qiymatlar
T1	137°35′46,8″	2,5	137°35′49,3″	501,028	–0,28	501,0254
1	138°49′51,6″	0,8	138°49′52,4″	895,105	–0,72	895,0980
2	139°39′41,2″	–0,7	139°39′40,5″	756,810	–0,80	756,8021
3	142°09′39,6″	–0,2	142°09′39,4″	606,670	–0,53	606,6647
T2	133°31′13,8	1,4	133°31′15,2″			

8. Yakuniy tuzatish nazorati (3.26-jadval).

3.26-jadval

№ burilish nuqtalari	Yo’nalish burchaklari a o’lchangan tomonlardan hisoblangan	Sozlangan burchak qiymatlari	Sozlangan yon qiymatlar	sinα	cosα	Tenglashtirilgan	
						ΔX	ΔY
T3	120°46′19,5″						
T1		137°35′49,3″					
	78°22′08,8″		501,0254	0,979465628	0,201611217	101,0097	490,7377
1		138°49′52,4″					
	37°12′01,2″		895,0980	0,604599501	0,796529625	712,9692	541,1796
2		139°39′40,5″					
	356°51′41,7″		756,8021	–0,054760713	0,998500133	755,6670	–41,4336
3		142°09′39,4″					
	319°01′21,1		606,6647	–0,655762056	0,754967633	458,0121	–397,8278
T2		133°31′15,2″			O’sish miqdori	2027,658	592,6559
T4	272°32′36,3″					2027,658	592,656
$\alpha_{исх}$	272°32′36,2″					w_X=–0,000	w_Y=–0,000

Koordinata shartlarini ulash tenglamalaridagi tengliklarning noldan maksimal og'ishi 1,4 mm ni tashkil qiladi, bu hisoblash xatosi tufayli yuzaga kelishi mumkin. Oxirgi nuqtaning hisoblangan yo’nalish burchagi sobit bo’lgan bilan bir xil. Tarmoq sozlandi.

9. Aniqlikni baholash.

Bessel formulasidan foydalanib, biz og'irlik birligining o'rtacha kvadrat xatosini hisoblaymiz, bu o'rtacha kvadrat burchakni o'lchash xatosi $\mu = m_\beta = \sqrt{\frac{V^T PV}{r}} = \sqrt{\frac{23,14}{3}} = 2,8''$.

Tuzatilgan tarmoq elementlarining to'g'riligini taxmin qilaylik - **tuzatilgan** o'lchovlar, ikkinchi tomonning yo'nalish burchagining **tuzatilgan** qiymati va aniqlanadigan ikkinchi nuqtaning koordinatalari. Keling, o'rnatilgan o'lchovlarning aniqligini taxmin qilishdan boshlaylik. Buning uchun tenglashtirilgan o'lchovlar vektorining teskari og'irlik matritsasi aniqlanadi:

Korrelyatsiya matritsasi

barcha o'lchovlarning o'rtacha kvadratik xatolarini aniqlashni osonlashtiradi . Asosiy diagonal bo'ylab o'rtacha kvadrat o'lchov xatolarining kvadratlari mavjud - birinchi navbatda o'lchangan tomonlarning (sm2 da), keyin o'lchangan burchaklarning (arcsec2 da).

to'g'rilangan ortiqchalarning o'rtacha kvadrat xatolari quyidagilarga teng:

$$m_{\bar{y}_1} = m_{\bar{S}_1} = \sqrt{k_{11}} = \sqrt{0,72} = 0,85 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_2} = m_{\bar{S}_2} = \sqrt{k_{22}} = \sqrt{0,61} = 0,78 \text{ см};$$
$$m_{\bar{y}_3} = m_{\bar{S}_3} = \sqrt{k_{33}} = \sqrt{0,61} = 0,78 \text{ см}; \quad m_{\bar{y}_4} = m_{\bar{S}_4} = \sqrt{k_{44}} = \sqrt{0,71} = 0,84 \text{ см};$$
$$m_{\bar{y}_5} = m_{\bar{\beta}_1} = \sqrt{k_{55}} = \sqrt{3,66} = 1,9''; \quad m_{\bar{y}_6} = m_{\bar{\beta}_2} = \sqrt{k_{66}} = \sqrt{4,93} = 2,2'';$$
$$m_{\bar{y}_7} = m_{\bar{\beta}_3} = \sqrt{k_{77}} = \sqrt{5,28} = 2,3''; \quad m_{\bar{y}_8} = m_{\bar{\beta}_4} = \sqrt{k_{88}} = \sqrt{5,03} = 2,2'';$$
$$m_{\bar{y}_9} = m_{\bar{\beta}_5} = \sqrt{k_{99}} = \sqrt{3,44} = 1,8''.$$

Ko'rib turganingizdek, burchaklarning **tuzatilgan** qiymatlarining aniqligi barcha qiymatlar uchun taxminan bir xil. Bu o'lchangan qiymatlarning aniqligidan taxminan 25% yuqori bo'lib chiqdi. **Tuzatilgan** tomonlarning o'rtacha kvadrat xatolari ham taxminan bir xil.

Kursning o'rtasida - "zaif" joyda joylashgan ikkinchi tomonning yo'nalish burchagi va ikkinchi nuqtaning koordinatalarining **tuzatilgan** qiymatlarining to'g'riligini baholaylik. Yo'nalish burchagi va nuqta koordinatalarining to'g'riligini baholash uchun ular uchun ulanish tenglamalariga o'xshash funktsiyalarni tuzish kerak:

$$\bar{F}_1 = \bar{\alpha}_2 = \alpha_{T_1-T_3} + \beta_1 + \beta_2 - 180;$$
$$\bar{F}_2 = \bar{x}_2 = X_{T_2} + \bar{s}_1 \cos(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1) + \bar{s}_2 \cos(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 - 180);$$
$$\bar{F}_3 = \bar{y}_2 = Y_{T_2} + \bar{s}_1 \sin(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1) + \bar{s}_2 \sin(\alpha_{T_1-T_3} + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 - 180).$$

Ushbu tenglamalarni chiziqli Rasmga keltiramiz:

$$\Delta F_1 = \upsilon_{\beta_1} + \upsilon_{\beta_2};$$
$$\Delta F_2 = \cos\alpha_1 \upsilon_{S_1} + \cos\alpha_2 \upsilon_{S_2} - \frac{Y_2 - Y_{T_1}}{\rho''}\upsilon_{\beta_1} - \frac{Y_2 - Y_1}{\rho''}\upsilon_{\beta_2};$$
$$\Delta F_3 = \sin\alpha_1 \upsilon_{S_1} + \sin\alpha_2 \upsilon_{S_2} + \frac{X_2 - X_{T_1}}{\rho''}\upsilon_{\beta_1} + \frac{X_2 - X_1}{\rho''}\upsilon_{\beta_2}.$$

Bu tenglamalarning koeffitsientlar matritsasi ko’rinishga ega bo’ladi

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & 0 & 0 & -(Y_2 - Y_{T_1})/\rho'' & -(Y_2 - Y_1)/\rho'' & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & 0 & 0 & (X_2 - X_{T_1})/\rho'' & (X_2 - X_1)/\rho'' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yoki raqamli Rasmda

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,20 & 0,80 & 0 & 0 & -0,50 & -0,26 & 0 & 0 & 0 \\ 0,98 & 0,60 & 0 & 0 & 0,39 & 0,35 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Xususiyat vektorining teskari vazn matritsasi

$$\mathbf{Q}_{\bar{F}} = \mathbf{f}\mathbf{Q}_{\bar{y}}\mathbf{f}^T = \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}^T - \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}^T = \begin{pmatrix} 0,367 & -0,138 & 0,059 \\ -0,138 & 0,115 & 0,007 \\ 0,059 & 0,007 & 0,092 \end{pmatrix}.$$

Xususiyat vektorining korrelyatsiya matritsasi

$$\mathbf{K}_{\bar{F}} = \mu^2\mathbf{Q}_{\bar{F}} = 7,7\begin{pmatrix} 0,367 & -0,138 & 0,059 \\ -0,138 & 0,115 & 0,007 \\ 0,059 & 0,007 & 0,092 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,82 & -1,06 & 0,45 \\ -1,06 & 0,88 & 0,05 \\ 0,45 & 0,05 & 0,71 \end{pmatrix}.$$

Shuning uchun, ikkinchi tomonning yo’nalish burchagining **tuzatilgan** qiymatining o’rtacha kvadrat xatosi m_{F1} m_2= a = 2,82 = 1,7″.

Ikkinchi nuqta koordinatalarining o’rtacha kvadrat xatolarining ildizi

$$m_{\overline{F}_2} = m_{\overline{X}_2} = \sqrt{0,88} = 0,94 \text{ см}; \quad m_{\overline{F}_3} = m_{\overline{Y}_2} = \sqrt{0,71} = 0,84 \text{ см}.$$

Ikkinchi nuqta pozitsiyasining ildiz o'rtacha kvadrat xatosi

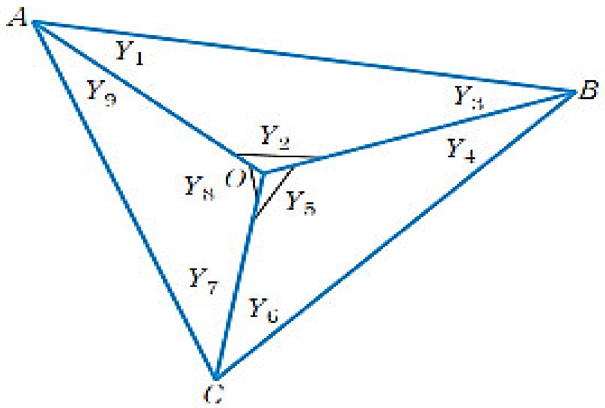
$$m_2 = \sqrt{m_{x_2}^2 + m_{y_2}^2} = 1,26 \text{ см}.$$

§3.4. IKKI GURUHNI TENGLASHTIRISH

Ikki guruhli tenglashtirish usulining umumiy nazariyasi.

Kryugerning yo'li

Keng geodezik tarmoqlarni tuzatishda birgalikda echilgan normal tenglamalar soni sezilarli bo'lishi mumkin. Bunda normal tenglamalar tizimi ikki yoki undan ortiq mustaqil normal tenglamalar tizimiga bo'linadi, har bir guruhda kamroq tenglamalar mavjud. Bunday tuzatish usullari ko'p guruh deb ataladi. Ko'p guruhli tuzatish usulining alohida holati ikki guruhdir.



Markaziy rasmdagi qutb holati

Parametrik va korrelyatsion tuzatishlar uchun ikki guruhli va ko'p guruhli usullardan foydalanish mumkin . Keling , markaziy figuraning misolidan foydalanib, korrelyatsiya qilingan usul uchun ikki guruhli tuzatishning umumiy nazariyasini ko'rib chiqaylik (Kruger usuli) (3.34-rasm).

Bunday tarmoqda beshta shartli ulanish tenglamalari paydo bo'ladi - raqamlarning uchta sharti, ufq holati va bitta qutbli shartli tenglama:

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 - 180 = 0$$

$$Y_4 + Y_5 + Y_6 - 180 = 0$$

$$Y_7 + Y_8 + Y_9 - 180 = 0$$

$$Y_2 + Y_5 + Y_8 - 360 = 0$$

$$\ln \frac{sinY_1 sinY_4 sinY_7}{sinY_3 sinY_6 sinY_9} = 0$$

quyidagi shartli tuzatish tenglamalariga olib keladi:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w_1 = 0;$$
$$v_4 + v_5 + v_6 + w_2 = 0;$$
$$v_7 + v_8 + v_9 + w_3 = 0; \qquad (3.52)$$
$$v_2 + v_5 + v_8 + w_4 = 0;$$
$$\Delta_1 v_1 - \Delta_3 v_3 + \Delta_4 v_4 - \Delta_6 v_6 + \Delta_7 v_7 - \Delta_9 v_9 + w_5 = 0.$$

Matritsa ko'rinishida (3.52) sistema **BV+W=0** ko'rinishga ega.

Keling, ushbu tizimni ikki qismga ajratamiz.

$$\mathbf{B}_1\mathbf{V}+\mathbf{W}_1=0;$$
$$\mathbf{B}_2\mathbf{V}+\mathbf{W}_2=0.$$

Birinchi qismda raqamlarning uchta shartli tenglamalari (bundan keyin birinchi guruhning shartli tenglamalari deb ataladi), ikkinchi qismda ufq holati va qutb holati (ikkinchi guruhning shartli tenglamalari) kiradi. Umuman olganda, birinchi guruhda r_1 tenglamalar, ikkinchisida - r_2 tenglamalar, $r=r_1+r_2$ bo'lsa. Bizning holatda $r_1=3$ va $r_2=2$.Birinchi uchta tuzatish tenglamalarining koeffitsientlari matritsa hosil qiladi.

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ikkinchi qismga kiritilgan boshqa ikkita tuzatish tenglamalarining koeffitsientlari - matritsa

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta_1 & 0 & -\Delta_3 & \Delta_4 & 0 & -\Delta_6 & \Delta_7 & 0 & -\Delta_9 \end{pmatrix}.$$

Qoldiq vektorlar mos ravishda

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, blok Rasmida shartli tuzatish tenglamalari tizimini quyidagicha yozish mumkin:

$$BV + W = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasi Rasmini c1 va c2 matritsalari orqali aniqlaymiz:

$$N = BP^{-1}B^T = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} B_1^T & B_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1P^{-1}B_1^t & B_1P^{-1}B_2^t \\ B_2P^{-1}B_1^T & B_2P^{-1}B_2^T \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, blok ko’rinishidagi normal tenglamalar tizimi quyidagi Rasmni oladi:

$$NK + W = \begin{pmatrix} B_1P^{-1}B_1{}^T & B_1P^{-1}B_2{}^T \\ B_2P^{-1}B_1{}^T & B_2P^{-1}B_2{}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = 0$$

yoki

$$\begin{aligned} N_{11}K_1 + N_{12}K_2 + W_1 = 0; \\ N_{21}K_1 + N_{22}K_2 + W_2 = 0, \end{aligned} \qquad (3.53)$$

$$N_{12} = B_1P^{-1}B_2{}^T = (B_2P^{-1}B_1{}^T)^T = N_{21}^T.$$

Agar ekvivalent o’zgartirishlar yordamida $\mathbf{N_{12}=0}$ ga erishsak, (3.53) sistema ko’rinishini oladi.

$$\begin{aligned} N_{11}K_1 + W_1 = 0; \\ N_{22}K_2 + W_2 = 0. \end{aligned} \qquad (3.54)$$

Ikki mustaqil tenglamalar tizimi olinadi, ularning o’lchamlari r_1 va r_2 ga teng. Bunday ikki tizimni yechish o’lchami $r=r_1+r_2$ bo’lgan bitta sistemaga (3.53) qaraganda ancha osondir. $N_{12} = N^T{}_{21} = 0$ sharti ikki guruh tenglamalar uchun mustaqillik sharti deyiladi (3.54).

BV+W=0 tizimini ikkita mustaqil tenglamalar tizimiga aylantirish algoritmini ko’rib chiqing.

$$B_1V+W_1=0;$$
$$B_2V+W_2=0.$$

hali noma'lum bo'lgan rT vektoriga ko'paytirish orqali ushbu tizimning ekvivalent o'zgarishlarini amalga oshiramiz . Natijani ikkinchi guruh shartli ulanish tenglamalari bilan qo'shamiz, biz olamiz

$$B_1V+W_1=0;$$
$$(B_2+\rho^T B_1)V+(W_2+\ \rho^T W_1)=0.$$

$\boldsymbol{B_2 = (B_2 + p^T B_1)}$ ***va*** $\boldsymbol{W_2 = (W_2 + p^T W_1)}$ ni belgilang.

Bunday holda, shartli tuzatish tenglamalari tizimini quyidagicha yozish mumkin

$$B_1V + W_1 = 0;$$
$$\overline{B_2}V + \overline{W_2} = 0.$$

Ikkinchi tizim ikkinchi guruh tuzatishlarining shartli tenglamalarining o'zgartirilgan tizimi deb ataladi. Ammo bu tizimning koeffitsientlari noma'lum, chunki r vektori noma'lum. Ikki guruh N12 = 0 mustaqillik sharti bilan uni aniqlaymiz. Bu shuni anglatadiki

$$N_{12} = B_1P^{-1}B_2' = B_1P^{-1}(B_2 + \rho' B_1)' =$$
$$= B_1P^{-1}B_2^T + B_1P^{-1}B_1^T\rho = N_{11}\rho + N_{12} = 0,$$

bu yerdan

$$\rho = -N_{11}^{-1}N_{12}. \qquad (3.55)$$

Shunday qilib, agar r vektor (3.55) formula bilan hisoblansa, u holda ikki guruhning mustaqillik sharti bajariladi va normal tenglamalar tizimi ikkita mustaqil sistemaga bo'linadi.

$$N_{11}K_1 + W_1 = 0;$$
$$\bar{N}_{22}K_2 + \bar{W}_2 = 0,$$

shundan $K_1 = -N_{11}^{-1}W_1$ shartlarning birinchi guruhiga mansub korrelyatsion vektor va ikkinchi guruh $K_2 = N_{22}^{-1}W_2$ korrelyatsiya vektori aniqlanadi.

V' (birlamchi tuzatishlar) va ikkinchi guruh V'' (ikkilamchi tuzatishlar) shartlari uchun tuzatishlar yig'indisi sifatida aniqlash oson.

$$V = P^{-1}B^{T}K = P^{-1}\begin{pmatrix} B_1^{T} & \overline{B_2}^{T} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} =$$

$$= P^{-1}B_1^{T}K_1 + P^{-1}\overline{B_2}^{T}K_2 = V' + V''. \qquad (3.56)$$

Yuqoridagilarga asoslanib, siz quyidagi tuzatish ketma-ketligini ikki guruhli tarzda yozishingiz mumkin - Kruger usuli .

1. O’lchovlarning umumiy sonini aniqlash n, zarur k va ortiqcha o’lchovlar soni r.

0 shartli ulash tenglamalar tizimini tuzish .

3. **BV+W=0** tuzatishlar uchun shartli tenglamalar tizimini tuzish.

4. Shartli tuzatish tenglamalar tizimini ikki guruhga bo’lish: $\mathbf{B_1V+W_1=0}$ - tenglamalar soni r_1 va $\mathbf{B_2V+W_2=0}$ — tenglamalar soni r_2 bilan, bu erda $r=r_1+r_2$.

5. Birinchi guruh normal tenglamalar sistemasini tuzish va yechish: $\mathbf{N_{11}K_1+W_1=0,}$ bundan $\mathbf{K_1 = -N_1^{-11}W_1.}$

6. Birlamchi tuzatishlar vektorini hisoblash $\mathbf{V' = P^{-1}B_1^{T}K_1.}$

7. **y' = y+V'** o’lchovlarning birinchi guruhi shartlari uchun avval **tuzatilgan** vektorni hisoblash .

8. Ikkinchi guruh $\mathbf{B_2=B_2+r^{T}B_1}$ tuzatish tenglamalarining o’zgartirilgan koeffitsientlari matritsasi va ikkinchi guruhning o’zgartirilgan qoldiqlari vektori $\mathbf{W_2 = W_2 + p^{T}W_1}$, bu erda $\mathbf{p = - N_1^{-1}N12-}$ ni hisoblash.

9. Ikkinchi guruh normal tenglamalar sistemasini tuzish va yechish $N_{22}K_2 + W_2 = 0$, bundan $K_2 = -N_2^{-2}1W_2$.

10. Ikkilamchi tuzatishlarni hisoblash $V'' = P^{-1}B_2^{T}K_2$ va tenglashtirilgan o’lchovlar $y = y' +V''$.

11. Yakuniy tuzatish boshqaruvi s(y) = 0.

12. Aniqlikni baholash.

yǫ o’lchangan miqdorlarning oldindan **tuzatilgan** qiymatlari shartlarning birinchi guruhiga kiritilgan ulanish tenglamalaridagi tenglikni qondirishi kerak s1(y') = 0. Shuning uchun, agar ikkinchi guruh shartlarning qoldiqlari hisoblansa oldindan **tuzatilgan** burchaklar yordamida $W_2 = \delta_2$ (y'), keyin $W_1 = \delta_1$(y) = 0. Demak, $W_2 = W_2 + r^{T}W_1 = W_2 = \delta_2$ (y).

3.4.1. KRYUGER USULIDA ANIQLIKNI BAHOLASH

Bessel formulasida ishlatiladigan kvadratik Rasmni ko'rib chiqing

$$V' P V = (V' + V'')' P(V' + V'') =$$
$$= V'^T P V' + V'^T P V'' + V''^T P V' + V''^T P V'' =$$
$$= [pv'v'] + [pv'v''] + [pv''v'] + [pv''v''] = [pvv],$$

здесь $V'^T P V'' = K_1^T B_1 P^{-1} P P^{-1} \overline{B}_2^T K_2 = K_1^T \overline{N}_{12} K_2 = 0.$

Shubhasiz, V″TPV′ = KT2N21K1 = 0 ham.

Shunday qilib,

$$V^T P V' = V'^T P V' + V''^T P V'' = [pv'v'] + [pv''v''] = [pvv].$$

Shuning uchun og'irlik birligining o'rtacha kvadrat xatosini aniqlash uchun Bessel formulasini quyidagi Rasmda yozish mumkin

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \sqrt{\frac{[pv'v'] + [pv''v'']}{r_1 + r_2}}.$$

, ikki guruhli tuzatish uchun funktsiyalarning aniqligini baholashni ko'rib chiqaylik . F(y) = 0 funksiyaning aniqligini baholash talab qilinsin. Uni Teylor qatorida kengaytiramiz**. fv +ΔF=0,** bu erda **ΔF = F(y) − F(y).**

Bu funksiyalar sistemasini **$B_1V+W_1=0$** birinchi guruhning tuzatishlar tenglamalari tizimiga belgilaymiz; fV +ΔF=0. Biz funktsiyalar tizimini ikkinchi guruh tenglamalari sifatida ko'rib chiqamiz va ikkinchi guruh shartlar uchun bajarilganlarga o'xshash mustaqillik sharoitida ekvivalent o'zgarishlarni amalga oshiramiz.

rT vektoriga ko'paytiramiz va natijani funksiyalar tizimiga qo'shamiz (bu holda ikkinchi guruh shartli bog'lanish tenglamalari rolini o'ynaydi). Biz rT (B1V+W 1)+ fV +ΔF=0 ni olamiz.

Qavslarni ochib, V (f+rTB 1)V +ΔF+rTW1=0 uchun koeffitsientlar matritsasini olamiz. Bu erda f = (f + rTB1) ikkinchi guruh koeffitsientlarining o'zgartirilgan matritsasi sifatida qaralishi mumkin.

1)T =$B_1B_1^T$r +B_1f_T =N_1^{-1}1r +B_1f^T = 0, demak, r = −N− B f1111T — ikki guruhning mustaqilligi sharti bilan r vektorni hisoblaymiz .

Teng bo’lmagan o’lchovlar uchun mustaqillik sharti $\mathbf{B_1P^{-1}f^T} = 0$ va p = −N− BP−f11111 T ko’rinishga ega bo’ladi.

Ilgari, $\mathbf{Q_F = fP^{-1}f^T - fP^{-1}B^TN^{-1}BP^{-1}f^T}$ uchun korrelyatsiya qilingan tuzatish usuli uchun o’lchangan miqdorlarning **tuzatilgan** qiymatlaridan funktsiyalar vektorining teskari og'irlik matritsasi uchun formula olingan.

f o’zgartirilgan koeffitsientlar bilan yozamiz . O’zgartirishlar ekvivalent bo’lgani uchun formulaning Rasmi $\mathbf{Q_F = fP^{-1}f^T - fP^{-1}B^TN^{-1}BP^{-1}f^T}$ o’zgarmaydi.

O’zgartirilgan B2 va f matritsalarini hisobga olgan holda ikkinchi hadda ichida BTN−1B mahsulotini alohida ko’rib chiqing:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T & \bar{\mathbf{B}}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T\mathbf{N}_{11}^{-1} & \bar{\mathbf{B}}_2^T\bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_1^T\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{B}_1 + \bar{\mathbf{B}}_2^T\bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2.$$

Olingan natijani teskari og'irlik matritsasi uchun formulada almashtiring

$$\mathbf{Q}_F = \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T - \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1^T\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T - \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2^T\bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T.$$

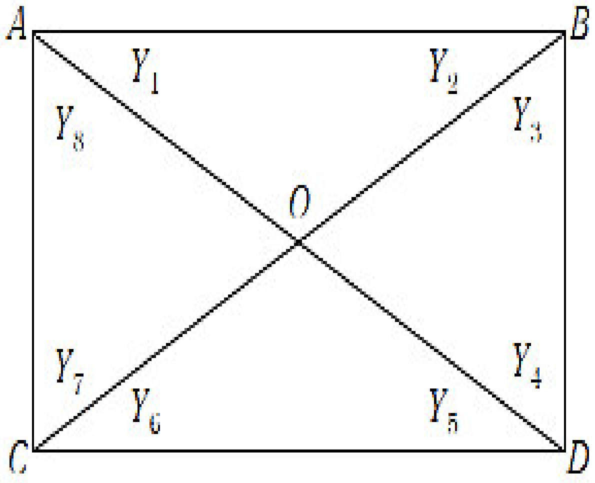
Ikkinchi muddat $B_1P^{-1}f^T$ mahsulotini o’z ichiga oladi, bu ikki guruhning mustaqillik shartiga muvofiq, nolga teng.

Demak, butun ikkinchi had nolga teng. Va nihoyat

$$\mathbf{Q}_F = \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T - \bar{\mathbf{f}}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2^T\bar{\mathbf{N}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{f}}^T. \qquad (3.57)$$

Shunday qilib, teskari og'irlik matritsasi faqat ikkinchi guruh tuzatishlarining o’zgartirilgan tenglamalari koeffitsientlari va o’lchangan qiymatlardan funktsiyalarning o’zgartirilgan koeffitsientlari yordamida aniqlanadi. Birinchi guruh koeffitsientlari ikkinchi guruh koeffitsientlarini o’zgartirishda ishtirok etadi va shu bilan funktsiyalarning teskari og'irlik matritsasi elementlariga ta'sir qiladi.

KRUGER -URMAEV USULI



Rasm. 3.35. Geodezik to’rtburchakda qutb holati

Krueger usuli geodezik tarmoqlarning har qanday konfiguratsiyasi uchun ishlatilishi mumkin. Kruger -Urmaev usuli triangulyatsiya xususiyatlarini hisobga oladi va faqat triangulyatsiya tarmoqlari uchun mo’ljallangan. Urmaev shartli bog`lanish tenglamalarining birinchi guruhiga faqat figuralarning shartlarini va umumiy burchakka ega bo`lmaganlarini kiritishni taklif qildi.

Misol uchun, Rasmda ko’rsatilgan geodezik to’rtburchakda. 3.35 ikkita bunday shart mavjud.

Agar biz kesishmaydigan uchburchaklarni ko’rib chiqsak, unda ularning umumiy burchaklari yo’q. Masalan, ABC va BCD uchburchaklar uchun $Y_1+Y_2+Y_7+Y_8-180°=0$ va $Y_3+Y_4+Y_5+Y_6-180°=0$ figuralarning shartlari umumiy burchaklarga ega emas. Boshqa barcha shartlar shartli tenglamalarning ikkinchi guruhiga kiradi. Masalan, ABD uchburchagi bu ikki uchburchakni kesib o’tadi va ular bilan umumiy burchaklarga ega. Bunday uchburchak figuralarining sharti $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4-180°=0$. Kruger -Urmaev usulida bu holat qutb sharti kabi ikkinchi

$$\ln\frac{\sin Y_1 \sin Y_3 \sin Y_5 \sin Y_7}{\sin Y_2 \sin Y_4 \sin Y_6 \sin Y_8}=0$$

guruh shartlarga ham tegishli bo`lishi kerak.

Kruger usulida bo’lgani kabi, raqamlarning barcha uchta sharti shartlarning birinchi guruhiga tegishli bo’lishi kerak.

Ikkinchi guruhga ufq holati va qutb holati kiradi. Urmaevning birinchi guruh shartlarini tanlash bo’yicha takliflari uni hal qilishni ancha soddalashtiradi. Rasmda ko’rsatilgan markaziy raqam uchun shartlarning birinchi guruhini hal qilishni ko’rib chiqing. 3.34.

Birinchi guruhning tuzatishlar tenglamalari koeffitsientlari matritsasi olingan

Oddiy tenglamalarning koeffitsient matritsasi Rasmga ega

$$\mathbf{N}_{11} = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, shartlarning birinchi guruhiga kiritilgan raqamlarning shartlari umumiy burchaklarga ega bo'lmaganda, normal tenglamalarning koeffitsient matritsasi diagonal Rasmga ega bo'ladi. Oddiy tenglamalar tizimi uchta mustaqil tenglamaga ajralishi aniq:

$$3k_1 + w_1 = 0$$

$$3k_2 + w_2 = 0$$

$$3k_3 + w_3 = 0.$$

korrelyatsiyani tegishli tenglamadan alohida aniqlab yechamiz k_1=–w_1/3, k_2=-w_2/3, k_3=–w_3/3.

Korrelyativ tuzatish tenglamalaridan birlamchi tuzatishlarni aniqlaylik

Birinchi guruhning shartli cheklov tenglamalarini yechish, bu yerga kesishmaydigan uchburchaklar figuralari shartlarini kiritish sharti bilan, j-uchburchak qoldiqlarini uning barcha burchaklariga teng taqsimlashga keltirilishini ko'rsatdik . Bu Kruger -Urmaev usulida hisob-kitoblarni ancha soddalashtiradi .

Shartli tuzatish tenglamalarining ikkinchi guruhiga o'tamiz. Ikkinchi guruh koeffitsientlarini Krueger usulida o'zgartirish quyidagicha amalga oshiriladi: B_2 = B_2 + $r^T B_1$, bu erda r = -N− N_{11}112.

$$\overline{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{B}_2 + \rho^T \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 - \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2(\mathbf{E} - \mathbf{B}_1^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1).$$

Ilgari bu ko'rsatilgan edi

$$\mathbf{Q}_{\bar{y}} = \mathbf{E} - \mathbf{B}_1^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- bitta uchburchakdagi tenglashtirilgan burchaklarning teskari og'irlik matritsasi. Bunday holda, u faqat birinchi guruh shartlariga taalluqlidir, shuning uchun $Qy = E - B_1^T N_{11}^{-1} B_1$ *va* $B_2 = B_2 Q_y$.

Ikkinchi shartlar guruhiga ikkita tuzatish tenglamasi kiritilsin. Matritsasi c_2, umumiy holatda, Rasmga ega

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \end{pmatrix}.$$

Umumiy holatda, ikkinchi guruhning o'zgartirilgan koeffitsientlari matritsasi Rasmga ega

$$\overline{\mathbf{B}}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{y_1'} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{y_2'} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{y_3'} \end{pmatrix}.$$

Bu yerda Qyj ′ - j- uchburchak uchun avvaldan **tuzatilgan** (birinchi guruh shartlariga ko'ra) burchaklarning teskari og'irlik matritsasi.

Ushbu matritsalarni ko'paytirib, o'zgartirilgan koeffitsientlarni lotin harflari orqali chiziq bilan belgilab, biz quyidagilarni olamiz:Olingan natijalarni quyidagicha aylantirish mumkin:

Xuddi shunday, siz ikkinchi guruh shartlarining boshqa o'zgartirilgan koeffitsientlarini yozishingiz mumkin. Umuman

$$\overline{\alpha}_k^j = \alpha_k^j - \frac{\sum\limits_{i \in j} \alpha_j}{3}; \quad \overline{\beta}_k^j = \beta_k^j - \frac{\sum\limits_{i \in j} \beta_j}{3}.$$

Bular. transformatsiya birinchi, ikkinchi, uchinchi burchak (birinchi uchburchak) uchun alohida sodir bo'ladi. To'rtinchi, beshinchi va oltinchi burchaklar uchun alohida (ikkinchi uchburchak). Va nihoyat, ettinchi, sakkizinchi va to'qqizinchi burchakda (uchinchi uchburchak). Bu erda j - shartlarning birinchi guruhiga kiritilgan uchburchakning soni; k - burchakning joriy raqami, ya'ni. o'zgartirilgan koeffitsientlar j-uchburchak bilan bog'liq bo'lgan o'zgartirilmagan koeffitsientlarning o'rtacha arifmetik qiymatidan chetlanishi sifatida hisoblanadi . Yuqorida isbotlanganidek, o'rtacha arifmetikdan og'ishlar yig'indisi nolga teng bo’lishi kerak. Shuning uchun o’zgartirilgan koeffitsientlarning hisob-kitoblarini nazorat qilish mumkin. Har bir j- uchburchak uchun uchta o’zgartirilgan koeffitsientlar yig'indisi nolga teng bo’lishi kerak.

Nihoyat, ikkinchi guruhning o’zgartirilgan koeffitsient matritsasi

$$\bar{B}_2 = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 & \bar{\alpha}_4 & \bar{\alpha}_5 & \bar{\alpha}_6 & \bar{\alpha}_7 & \bar{\alpha}_8 & \bar{\alpha}_9 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \bar{\beta}_3 & \bar{\beta}_4 & \bar{\beta}_5 & \bar{\beta}_6 & \bar{\beta}_7 & \bar{\beta}_8 & \bar{\beta}_9 \end{pmatrix}.$$

Kruger usulidan farqli o’laroq , Kruger -Urmaev usulida o’zgartirilgan koeffitsientlarni hisoblash uchun r vektorini topish shart emas edi, bu esa hisoblash jarayonini ancha soddalashtirdi.

Bundan tashqari, tuzatish ketma-ketligi Kruger usulidagi hisoblash ketma-ketligiga to’g'ri keladi . Ikkinchi guruh tuzatish tenglamalari koeffitsientlarining o’zgartirilgan matritsasini bilib, ular ikkinchi guruh normal tenglamalar tizimini tuzadilar va yechadilar.

$$\bar{N}_{22}\bar{K}_2 + \bar{W}_2 = 0 \quad \text{и} \quad \bar{K}_2 = -\bar{N}_{22}^{-1}\bar{W}_2.$$

Keyinchalik, V″ = BT2K2 ikkilamchi tuzatishlar va yˆ = y′ + V″ burchaklarining **tuzatilgan** qiymatlari hisoblab chiqiladi.

Nazorat savollari:

1. Ikki guruhli tenglashtirishning mohiyati nimada?

2. Shartli tuzatish tenglamalari tizimi qanday ikki guruhga bo’linadi?

3. Ikki guruhning mustaqilligi shartini yozing.

4. Ikki guruhli Kruger usulida tuzatish ketma-ketligi qanday ?

5. Ikki guruhli usulda vazn birligining standart xatosi qanday hisoblanadi?

Kryuger -Urmaev usulida birinchi guruh shartlari qanday tuzilgan ?

Kruger -Urmaev usulida geodezik to’rtburchakda birinchi guruhga qanday shartlar qo’llaniladi ?

Kryuger -Urmaev usulida markaziy figurada birinchi guruhga qanday shartlar kiradi ?

9. Geodezik to’rtburchak uchun birinchi va ikkinchi guruhning shartli ulanish tenglamalarini va tuzatishlarini yozing.

Kryuger -Urmaev usulida ikkinchi guruhning aylantirilgan tenglamalarining koeffitsientlari qanday hisoblanadi ?

11. Ikki guruhli tuzatishda o'lchangan qiymatlardan funktsiyalarning ***tuzatilgan*** *qiymatlarining aniqligini baholash qanday amalga oshiriladi (Kruger usuli)?*

Kruger va Kryuger -Urmaev usulida hisoblangan o'lchangan kattaliklarning qiymatlari birinchi guruh sharoitlari uchun birlamchi tuzatishlar va dastlabki tuzatishlar qanday amalga oshiriladi ?

13. Ikkilamchi tuzatishlar va o'lchangan miqdorlarning to'g'rilangan qiymatlari qanday hisoblanadi?

14. Ikki guruhli tuzatishda tuzatishning yakuniy nazorati qanday amalga oshiriladi?

YECHIMLAR BILAN BOG'LIQ MUAMMOLAR

Rasmda ko'rsatilgan tarmoqning to'g'riligini tenglashtiring va baholang. 3.35 ikki guruhli Kryuger-Urmaev usulida. Agar AB tomoni asl tomoni bo'lsa va 1240,120 m ga teng bo'lsa, tuzatishdan keyin CD tomonining to'g'riligini baholang Burchaklarning o'lchangan qiymatlari jadvalda keltirilgan.

Yechim.

Ushbu tarmoq §3.3 da o'zaro bog'liq holda sozlangan. Bu tarmoqni Kruger-Urmaev usuli yordamida tenglashtiramiz.

№ Burchak	Burchak y_i
1	46°23′07,0″
2	68°58′21,5″
3	38°40′06,5″
4	25°58′23,5″
5	22°34′43,7″
6	92°46′51,9″
7	46°37′48,3″
8	18°00′39,4″

1. Barcha o'lchovlar soni n=8, k=4 (aniqlangan C va D nuqtalari), r=n–k=4.

Shartli aloqa tenglamalarini tuzish. Geodezik to'rtburchakda to'rtta shartli ulanish tenglamalari paydo bo'ladi - raqamlarning uchta sharti va bitta qutbli shartli tenglama:

$$\boldsymbol{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - 180 = 0}$$
$$\boldsymbol{Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 - 180 = 0}$$
$$\boldsymbol{Y_1 + Y_2 + Y_7 + Y_8 - 180 = 0}$$
$$\boldsymbol{Y_2 + Y_5 + Y_8 - 360 = 0}$$
$$\boldsymbol{\ln \frac{sinY_1 sinY_3 sinY_5 sinY_7}{sinY_2 sinY_4 sinY_6 sinY_8} = 0}$$

2. Tuzatishlarning shartli tenglamalarini tuzish. Olingan cheklash tenglamalari uchun shartli tuzatish tenglamalarining umumiy Rasmi quyidagicha

Kruger -Urmaev usulida birinchi guruhga kesishmaydigan (umumiy burchakka ega bo'lmagan) uchburchaklar figuralari shartlari kiradi. Rasmlarning dastlabki ikkita sharti umumiy burchakka ega emas, shuning uchun bu shartlar birinchi guruh shartlarga, qolgan ikkita shart - raqamlar va qutb - ikkinchi guruhga beriladi.

3. Jadvaldagi tuzatishlarning birinchi guruh shartli tenglamalarini yechish. 3.27.

3.27-jadval

№burchog	№burchog	O'lchov burchogi y_i	V′	$y'_i = y_i + v'_i$
1	1 2 3 4	46°23′07,0″ 68°58′21,5″ 38°40′06,5″ 25°58′23,5″	+0,3 +0,4 +0,4 +0,4	46°23′07,3″ 68°58′21,9″ 38°40′06,9″ 25°58′23,9″
	Σ=	179°59′58,5″′	Σ=	180°00′00,0″
	ω_1=	–1,5″′		
2	5 6 7 8	22°34′43,7″ 92°46′51,9″ 46°37′48,3″ 18°00′39,4″	–0,8 –0,8 –0,8 –0,9	22°34′42,9″ 92°46′51,1″ 46°37′47,5″ 18°00′38,5″
	Σ=	180°00′03,3″	Σ=	180°00′00,0″
	ω_1=	+3,3″		

Bu erda uchburchaklar to'rtta burchakka ega. Qoldiq to'rt burchakda teng ravishda taqsimlanadi.

4. Oldindan **tuzatilgan** burchaklar uchun ikkinchi guruh tuzatishlarning shartli tenglamalarida qoldiqlarni hisoblash. Raqamlar holatining nomuvofiqligini hisoblash Jadvalda keltirilgan. 3.28.

3.28-jadval

№uchburchak	№ burchak	Birinchi guruh shartlariga moslashtirilgan burchaklar,
1	1 2 7 8	46°23′07,3″ 68°58′21,9″ 46°37′47,5″ 18°00′38,5″
	Σ=	179°59′55,2″
	ω_1=	–4,8″

Qutb shartli cheklash tenglamasining qoldig'ini hisoblash amalga oshiriladi tomonidan formula $\omega_4 = 10^{\,5} \ln \frac{siny'_1 siny'_3 siny'_5 siny'_7}{siny'_2 siny'_4 siny'_6 siny'_8} = +8{,}506$

5. Ikkinchi guruh tuzatish tenglamalarining o'zgartirilgan koeffitsientlarini hisoblash. Ikkinchi guruhning o'zgartirilmagan tenglamalari Rasmga ega

$$v_1 + v_2 + v_7 + v_8 - 4{,}8 = 0;$$

$$0{,}462v_1 - 0{,}186v_2 + 0{,}606v_3 - 0{,}995v_4 + 1{,}166v_5 + 0{,}024v_6 + 0{,}458v_7 - 1{,}491v_8 + 8{,}506 = 0;$$

O'tkazish koeffitsientlari jadvalda keltirilgan. 3.29.

3.29-jadval

birinchi guruhning uchburchak shartlari raqamlari	№ burchak	αi	O'zgartirilgan figurali holat koeffitsientlari αi = αi − αñð	βi	O'zgartirilgan figurali holat koeffitsientlari βi = βi − βñð
1	1 2 3 4	1 1 0 0	0,5 0,5 –0,5 –0,5	0,462 –0,186 0,606 –0,995	0,490 –0,158 0,634 –0,967
	Σ αcp	2 0,5	0,0 βcp	–0,113 –0,028	–0,001
2	5 6 7 8	0 0 1 1	–0,5 –0,5 0,5 0,5	1,166 0,024 0,458 –1,491	1,127 –0,015 0,419 –1,530
	Σ αcp	2 0,5	0,0 βcp	0,157 0,039	+0,001

O'zgartirilgan koeffitsientlar har bir uchburchak uchun o'rtacha arifmetikdan og'ishdir. Shuning uchun ularning yig'indisi nolga teng bo'lishi kerak (yaxlitlash xatolari bilan aniqlangan aniqlik bilan), bu konvertatsiya qilingan koeffitsientlarni hisoblash uchun nazoratdir. Bizning holatimizda birinchi uchburchak uchun bu summalar -0,001 va ikkinchi uchburchak uchun +0,001 ga teng.

Ikkinchi guruhning o'zgartirilgan tenglamalar tizimini yozamiz:

$$0{,}5v_1+0{,}5v_2-0{,}5v_3-0{,}5v_4-0{,}5v_5-0{,}5v_6+0{,}5v_7+0{,}5v_8-4{,}8=0;$$

$$0{,}490v_1-0{,}158v_2+0{,}634v_3-0{,}967v_4+1{,}127v_5-$$

$$–0,015v_6+0,419v_7–1,530v_8+8,506=0.$$

korrelyatsion tenglamalar tizimini tuzish va yechish .

Ikkinchi guruh normal tenglamalari koeffitsientlari matritsasi hisoblanamiz

$$\bar{N}_2 = \bar{B}_2\bar{B}_2^T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,490 & -0,158 & 0,634 & -0,967 & 1,127 & -0,015 & 0,419 & -1,530 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 0,5 & 0,490 \\ 0,5 & -0158 \\ -0,5 & 0,634 \\ -0,5 & -0,967 \\ -0,5 & 1,127 \\ -0,5 & -0,015 \\ 0,5 & 0,419 \\ 0,5 & -1,530 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -0,779 \\ -0,779 & 5,389 \end{pmatrix}$$

Keyinchalik, biz teskari matritsani aniqlaymiz

$$\bar{N}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5298 & 0,0766 \\ 0,0766 & 0,1966 \end{pmatrix}$$

va vektor korrelyatsiyasi

$$K_2 = \bar{N}_2^{-1}\bar{W}_2 = \begin{pmatrix} 1,8917 \\ -1,3050 \end{pmatrix}$$

7. Ikkilamchi tuzatishlar vektorini hisoblash $V'' = B^T{}_2K_2$. Raqamli

$$V' = \begin{pmatrix} 0,31 \\ 1,15 \\ -1,77 \\ 0,32 \\ -2,42 \\ -0,93 \\ 0,40 \\ 2,94 \end{pmatrix}$$

8. Burchaklarning **tuzatilgan** qiymatlarini hisoblash va tuzatishni yakuniy nazorat qilish (3.30-jadval).

3.30-jadval

№ uchburchak	№ burchak	O’lchangan burchaklar, yi	V′	y′i=yi+v′i	V″	y^i = yi′ + v″
1	1	46°23′07,0″	+0,3	46°23′07,3″	0,3	46°23′07,6″

	2 3 4	68°58′21,5″ 38°40′06,5″ 25°58′23,5″	+0,4 +0,4 +0,4	68°58′21,9″ 38°40′06,9″ 25°58′23,9″	1,2 –1,8 0,3	68°58′23,1″ 38°40′05,1″ 25°58′24,2″
	Σ= w_1=	179°59'58,5" –1,5″	Σ=	180°00′00,0″	0,0	180°00′00,0″
2	5 6 7 8	22°34′43,7″ 92°46′51,9″ 46°37′48,3″ 18°00′39,4″	–0,8 –0,8 –0,8 –0,9	22°34′42,9″ 92°46′51,1″ 46°37′47,5″ 18°00′38,5″	–2,4 –0,9 0,4 2,9	22°34′40,5″ 92°46′50,2″ 46°37′47,9″ 18°00′41,4″
	Σ= w_2=	180°00′03,3″ +3,3″	Σ=	180°00′00,0″	0,0	180°00′00,0″

Birinchi guruhga kiritilgan raqamlarning shartlari tenglashtirilganligi sababli, bu uchburchaklar ustidagi burchaklar yig'indisi 180 ° ga teng. Va ikkilamchi tuzatishlar bu tengliklarni buzmasligi kerak, shuning uchun birinchi guruh raqamlari shartlariga kiritilgan burchaklar uchun ikkilamchi tuzatishlar yig'indisi nolga teng bo’lishi kerak. Bu shart bajarildi.

Keling, ikkinchi guruhga kiritilgan shartlarning bajarilishini tekshirib ko’ramiz. Jadvalda. .31 ikkinchi guruh figurasi shartiga kiruvchi burchaklarni yozamiz. Uchburchak uchun ikkilamchi tuzatishlar yig'indisi qarama-qarshi belgi bilan nomuvofiqlikka teng. Tabiiyki, tuzatishdan keyin burchaklar yig'indisi 180 ° ga teng.

3.31-jadval

№ uchburchak	№ burchak	Birinchi guruh shartlariga moslashtirilgan burchaklar, y′i	V″	Tuzatilgan burchaklar
1	1 2 7	46°23′07,3″ 68°58′21,9″ 46°37′47,5″	0,3 1,2 0,4	46°23′07,6″ 68°58′23,1″ 46°37′47,9″

	8	18°00′38,5″	2,9	18°00′41,4″
	Σ= w3=	179°59′55,2″ -4,8"	+4,8	180°00′00,0″

Tenglikning qutb holatida bajarilishini tekshiramiz, unga 105 1 burchaklarning tenglashtirilgan qiymatlarini almashtirgandan so'ng, ya'ni. noldan farq ettinchi kasrning 7,2 birligiga teng. Nol qoniqtirildi deb taxmin qilishimiz mumkin. Shunday qilib, barcha shartlar uchun yakuniy nazorat amalga oshiriladi.

9. Aniqlikni baholash.

, burchak o'lchamining o'rtacha kvadrat xatosini hisoblaylik. Buning uchun [vϙvϙ]=3,30 va [vƎvƎ]=20,00 ni hisoblaymiz .

Ikkilamchi tuzatishlar uchun boshqaruv tenglamasi [k2w 2] = –20.18.. Burchak o'lchamining o'rtacha kvadrat xatosini hisoblaylik.

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[\upsilon'\upsilon'] + [\upsilon''\upsilon'']}{r_1 + r_2}} = \sqrt{\frac{3,30 + 20,00}{2 + 2}} = 2,4''.$$

Keling, yon CD ning aniqligini taxmin qilaylik. Buning uchun $S_{CD} = S_{AB} \dfrac{\sin y_1}{\sin y_4} \dfrac{\sin y_3}{\sin y_6}$ logarifmni olib, yoki uchun funksiya tuzamiz

$$F = \ln S_{CD} = \ln S_{AB} \frac{\sin y_1}{\sin y_4} \frac{\sin y_3}{\sin y_6}.$$

-

Bu funktsiyaning qisman hosilalari vektorini barcha burchaklar bo'yicha aniqlaymiz, agar SAB qattiq tomoni bo'lsa.

$$f = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} & \frac{\partial F}{\partial y_3} & \frac{\partial F}{\partial y_4} & \frac{\partial F}{\partial y_5} & \frac{\partial F}{\partial y_6} & \frac{\partial F}{\partial y_7} & \frac{\partial F}{\partial y_8} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \Delta_3 & -\Delta_4 & 0 & \Delta_6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Raqamli

$$f = \begin{pmatrix} 0,462 & 0 & 0,606 & -0,995 & 0 & 0,024 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jadvalda. 3.32 funktsiya uchun aylantirilgan koeffitsientlarni hisoblab chiqdi.

3.32-jadval

№ birinchi guruhning uchburchak shartlari raqamlari	№ burchak	f	O’zgartirilgan funksiya koeffitsientlari $f_i = f_i - f_{cp}$
1	1	0,462	0,444
	2	0	–0,018
	3	0,606	0,588
	4	–0,995	–1,013
	Σ	0,073	0,001
	α_{cp}	0,018	
2	5	0	–0,006
	6	0,024	0,018
	7	0	–0,006
	8	0	–0,006
	Σ	0,024	+0,000
	αcp	0,006	

Funktsiyaning o’zgartirilgan koeffitsientlari bo’lgan vektor Rasmga ega

f = (0. 444 –0. 018 0. 588 –1. 013 –0. 006 0. 018 –0. 006 –0. 006),

bu yerdan $\frac{1}{P_F} = \bar{f}\bar{f}^T - \bar{f}\bar{B}_2^T \bar{N}_{22}^{-1} \bar{B}_2 \bar{f}^T = 0,89$

$m_{lnS_{CD}} = m_\beta \sqrt{\frac{1}{P_F}} = 2{,}4\sqrt{0{,}89} = 2.3$ o’nli kasrdan keyin logarifmning beshinchi belgisi birliklari (2,3 10–5), chunki D xatolik qaysi belgida hisoblanganligini aniqlaydigan 10 ^{5} omilni o’z ichiga oladi . Ammo biz tomonning o’rtacha kvadrat xatosini hisoblashimiz kerak. $F = lnS_{CD}$ bo’lgani uchun

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)^2 m_S^2 = \left(\frac{\partial \ln S_{CD}}{\partial S}\right)^2 m_S^2 = \frac{1}{S^2} m_S^2$$

или $m_{\ln S_{CD}} = \frac{1}{S_{CD}} m_{S_{CD}}$.

Откуда, учитывая $S_{CD} = S_{AB} \frac{\sin y_1}{\sin y_4} \frac{\sin y_3}{\sin y_6} = 1240 \frac{\sin 46{,}3^\circ}{\sin 26{,}0^\circ} \frac{\sin 36{,}7^\circ}{\sin 92{,}7^\circ} = 1218$ м

va S ni santimetrga aylantirsak, biz SCD=1,218 105 sm ni olamiz,

$$m_{S_{CD}} = S_{CD} m_{\ln S_{CD}} = 1,218 \cdot 10^5 \cdot 2,3 \cdot 10^{-5} = 2,8 \text{ см.}$$

§3.5. GEODEZIK INSHOOTLARNI LOYIHALASH

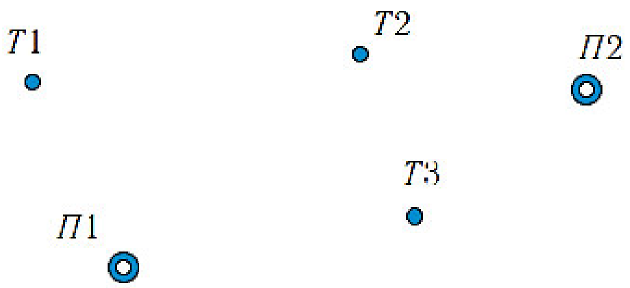
Oldingi bo’limlarda biz o’lchov natijalarini matematik qayta ishlash masalalarini ko’rib chiqdik. Ammo yana bir muhim muhandislik vazifasi bor - tarmoqni loyihalash va u bilan bog'liq holda, tenglashtirilgan miqdorlarning aniqligini oldindan hisoblash vazifasi.

Masalan, davlat geodeziya tarmog'i ierarxik tizim sifatida ishlab chiqilgan bo’lib, unda quyi sinf tarmog'i yuqori sinf tarmog'iga o’rnatiladi. Har bir tarmoq ma'lum talablarga javob beradi. U yoki bu tarmoqni qurish sxemasi ta'minlaydigan aniqlikning dastlabki hisob-kitoblarini amalga oshirish kerakligi aniq. Bunday muammoni davlat geodeziya tarmog'i darajasida hal qilish uchun yuqori geodeziya darajasida bilim talab etiladi. Ushbu kurs ikkinchi kurs talabalari uchun mo’ljallangan, shuning uchun biz mahalliy ahamiyatga ega bo’lgan muhandislik tarmoqlarini loyihalash bilan cheklanamiz.

Bunday holda, muammo tarmoqlarni tuzatishda aniqlikni baholash muammosiga o’xshaydi. Farqi shundaki, tarmoqlarni loyihalashda aniqlikni oldindan hisoblashni amalga oshirish , tarmoqning geometrik xarakteristikalari belgilangan parametrlarni aniqlashning aniqligiga qanday ta'sir qilishini tekshirish kerak. Buning uchun biz tuzatish vaqtida ko’rib chiqqan algoritmlar bo’yicha ushbu parametrlarning teskari og'irlik matritsasi QFni aniqlang. Bundan tashqari, o’lchashning standart xatosi (yoki og'irlik birligining standart xatosi) o’rniga , o’lchovlar uchun ishlatiladigan asboblarning (odatda pasport) aniqligi bilan belgilanadigan ma'lum bir dizayn qiymati o’rnatiladi. Masalan, bu og'irlik birligining kutilgan standart og'ishi s0. Va KF = s02QF korrelyatsiya matritsasi hisoblanadi, uning asosiy diagonali bo’ylab funktsiyalarning oldindan hisoblangan standart og'ishlarining kvadratlari mavjud bo’lib , ular uchun ma'lum chegara qiymatlari oldindan o’rnatiladi.

Agar diagonal elementlarning qiymatlari oldindan belgilangan qiymatlardan oshmasa, loyihalashtirilgan tarmoq belgilangan aniqlik talablariga javob beradi degan xulosaga keladi.

Ba'zan ular teskari muammoni hal qilishadi. Muayyan qiymatning standart og'ishini tayinlang (F funktsiya) sF , 1/RF funktsiyalarining to'g'riligini baholash algoritmlaridan foydalangan holda, tuzatishdan keyin ushbu qiymatning teskari og'irligini aniqlang. Va keyin s0 hisoblab chiqiladi, bu o'lchov aniqligi bilan bog'liq. Shunday qilib, kerakli o'lchov aniqligini ta'minlash uchun zarur bo'lgan geodezik asboblar aniqlanadi.



Rasm. 3.5.1. Belgilangan va boshlang'ich nuqtalarning taxminiy joylashuvi

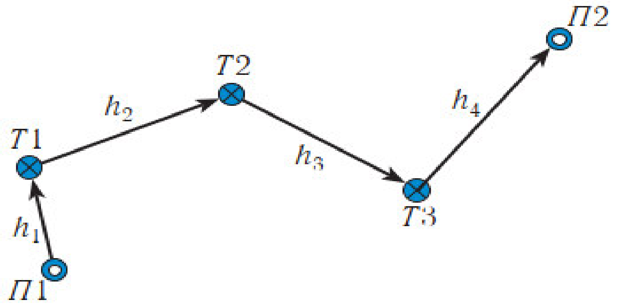
Quyidagi muammoni ko'rib chiqing. Uch nuqta (T1, T2 va T3) belgilarini aniqlash talab qilinadi (3.5.1-rasm). Yaqin atrofda ikkita P1 va P2 boshlang'ich nuqtalari mavjud. Dastlabki nuqtalarga nisbatan 5 mm dan oshmaydigan aniqlangan nuqtalarning balandligini aniqlashda o'rtacha kvadrat xatoni ta'minlaydigan tekislash tarmog'ini qurish talab qilinadi.

Ko'rinib turibdiki, biz belgilangan va boshlang'ich nuqtalarni tekislash harakatlari bilan bog'lashimiz kerak. Keling, harakatlarning umumiy uzunligi minimal bo'ladigan tarzda bajarishga harakat qilaylik. Masalan, barcha nuqtalarni faqat bitta harakat bilan ulash orqali (3.5.2-rasm).

Agar s0=s1km=5mm olsak, ushbu tarmoq kerakli aniqlikni ta'minlay oladimi yoki yo'qligini aniqlaymiz.

Buning uchun **tuzatilgan** belgilar (parametrlar) vektorining teskari og'irlik matritsasi aniqlanishi kerak. E'tibor bering, bu matritsani o'lchovlar bo'lmagan vaziyatda ham aniqlash mumkin.

Haqiqatan ham, parametrik bog'lanish tenglamalarini (parametr sifatida aniqlanadigan nuqtalarning belgilarini tanlash orqali) va parametrik tuzatish tenglamalarini yozamiz:



Длины ходов

№ хода	L, км
1	1,8
2	1,7
3	2,8
4	2,4

Rasm. 3.5.2. Nivelirlash zarbasi

$$\begin{aligned} &h_1 = X_1 - H_{\Pi 1}; \qquad && v_1 = \delta x_1 + l_1; \\ &h_2 = X_2 - X_1; && v_2 = \delta x_2 - \delta x_1 + l_2; \\ &h_3 = X_3 - X_2; && v_3 = \delta x_3 - \delta x_2 + l_3; \\ &h_4 = H_{\Pi 2} - X_3; && v_4 = -\delta x_3 + l_4. \end{aligned}$$

Tuzatish tenglamasi koeffitsienti matritsasi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Oddiy tenglamalar koeffitsientlari matritsasini olish uchun formuladan foydalanib, ortiqcha o'lchovlarning og'irliklarini hisoblaymiz.

$p_i = \frac{\ }{l} = \frac{\ }{l}$: $p_1 = 1/1{,}8 = 0{,}56$; $p_2 = 1/1{,}7 = 0{,}59$; $p_3 = 1/2{,}8 = 0{,}36$;

$p_4 = 1/2{,}4 = 0{,}42$.

Keyin p vazn matritsasi va oddiy tenglamalar koeffitsientlari matritsasi soni ko'rinishda bo'ladi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,56 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,42 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1,15 & -0,59 & 0 \\ -0,59 & 0,95 & -0,36 \\ 0 & -0,36 & 0,78 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отсюда } \mathbf{Q}_{\bar{x}} = \mathbf{R}_{\bar{x}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,42 & 1,07 & 0,49 \\ 1,07 & 2,08 & 0,96 \\ 0,49 & 0,96 & 1,72 \end{pmatrix}.$$

s0=s1km=5mm bo’lgan holda, o’rnatilgan belgilar (parametrlar) vektorining korrelyatsiya matritsasini olish oson.

$$\mathbf{K}_{\bar{x}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 35,4 & 26,7 & 12,3 \\ 26,7 & 52,0 & 24,0 \\ 12,3 & 24,0 & 43,1 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, belgilangan benchmarklarning **tuzatilgan** belgilarining quyidagi aniqligi ta'minlanadi:

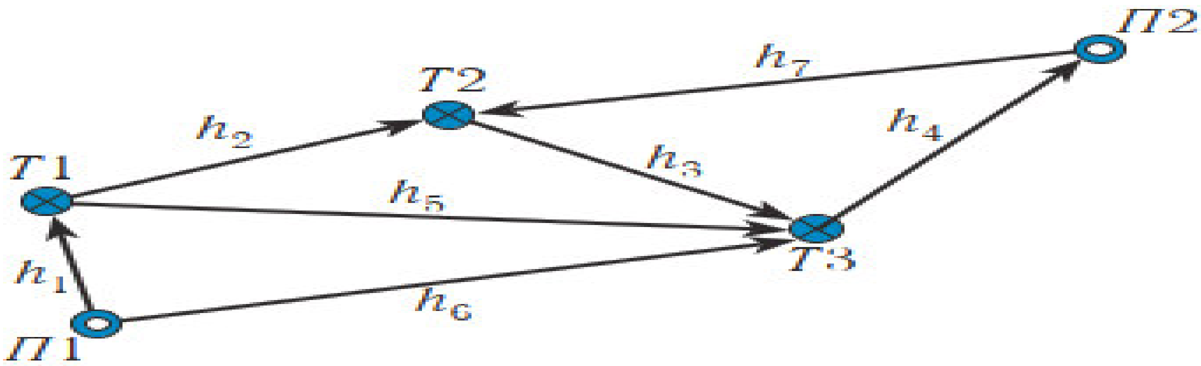
$$\sigma_{\bar{x}_1} = \sqrt{35,4} = 6,0 \text{ мм}; \ \sigma_{\bar{x}_2} = \sqrt{52,0} = 7,2 \text{ мм}; \ \sigma_{\bar{x}_3} = \sqrt{43,1} = 6,6 \text{ мм}.$$

Ko’rib turganingizdek, 5 mm talab qilinadigan aniqlik qoniqtirilmaydi. Bunday holda, 7,2 mm ga teng bo’lgan eng katta xato, zarbaning o’rtasida joylashgan va boshlang'ich nuqtalardan eng uzoqda joylashgan 2-band uchun olingan. Bunday nuqta kursning (yoki tarmoqning) zaif nuqtasi deb ataladi.

Tarmoqlarni loyihalashda zaif nuqtaga eng katta e'tibor berilishi kerak. Agar buning uchun kerakli aniqlik qondirilsa, qolgan nuqtalar uchun u faqat yuqori bo’ladi.

Yodda tutingki, tekislashda bitta ortiqcha o’lchov mavjud.

Bu shuni anglatadiki, aniqlik bahosining ishonchliligi yuqori bo’lmaydi, shuning uchun sxemaga uchta qo’shimcha o’lchov qo’shamiz (3.38-rasm) va tuzatishdan keyin parametrlarni aniqlashning aniqligi qanday o’zgarishini ko’raylik .



Rasm. 3.5.3. Mo'ljallangan tekislash tarmog'i

Muammoni hal qilish uchun qo'shilgan ortiqcha harakatlarning uzunligini bilish kerak. Bu mavjud sxemalar, xaritalar bo'yicha amalga oshirilishi mumkin. Bu holda zarbalar uzunligini aniqlashning aniqligi aniqlikni oldindan hisoblash uchun etarli bo'ladi. L5=2,5 km; L6=2,1 km; L7=3,1 km. Harakatlarning og'irliklari p5=1/2,5=0,40; p6=1/2,1=0,48; p7=1/1,9=0,53.

Tuzatish tenglamalari koeffitsientlari matritsasini tuzing

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и матрицу } \mathbf{R} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1,55 & -0,59 & -0,40 \\ -0,59 & 1,48 & -0,36 \\ -0,40 & -0,36 & 1,66 \end{pmatrix}.$$

Tuzatilgan parametrlar vektorining teskari og'irlik matritsasi hisoblang

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{Q}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0,89 & 0,43 & 0,31 \\ 0,43 & 0,92 & 0,30 \\ 0,31 & 0,30 & 0,74 \end{pmatrix}$$

va korrelyatsiya matritsasi

$$\mathbf{K}_{\bar{x}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 22,2 & 10,7 & 7,7 \\ 10,7 & 23,0 & 7,6 \\ 7,7 & 7,6 & 18,5 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, s0=s1km=5 mm bo’lgan ushbu tarmoq kerakli aniqlikni ta'minlaydi, chunki barcha standart og'ishlar

$$\sigma_{\bar{x}_1} = \sqrt{22,2} = 4,7 \text{ мм}; \ \sigma_{\bar{x}_2} = \sqrt{23,0} = 4,8 \text{ мм}; \ \sigma_{\bar{x}_3} = \sqrt{18,5} = 4,3 \text{ мм}.$$

5 mm dan kam edi.

Chiziqli algebrada Sherman - Morrison - Vudberi formulasi [25, 26] ma’lum: (A+ UCV)− 1 = A−1 − A−1U(C−1 + VA−1U)−1VA−1, C. Bilan parametrik tuzatish usulining yozuviga kelsak, bu formula Rasmga ega

$$(\mathbf{R} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}.$$

Maxsus holatda a vektor a va p son p bo’lsa, biz olamiz

$$(\mathbf{R} + paa)^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \frac{\mathbf{R}^{-1}a^T a\mathbf{R}^{-1}}{(1/p + a\mathbf{R}^{-1}a^T)^{-1}}.$$

Professor Yu.I. Markuz tarmoqlarni loyihalashda foydalanish uchun qulay bo’lgan takroriy tuzatish formulalarini taklif qildi [14, 15]. Ushbu formulalar keyingi o’lchamni qo’shish yoki olib tashlashda teskari og'irlik matritsalari ketma-ketligini olish imkonini beradi. Agar Qi–1 i–1 o‘lchamli tarmoq uchun ma’lum bo‘lsa, u holda i- o‘lchamni qo‘shganda teskari og‘irlik matritsasi Qxi = Qxi−1 − Δ Qi formulasi bilan hisoblanishi mumkin , bunda

$$\Delta\mathbf{Q}_i = \frac{1}{g_i}\mathbf{Z}_i^T\mathbf{Z}_i; \ \mathbf{Z}_i^T = \mathbf{Q}_{\bar{x}_{i-1}} a_i^T; \ g_i = \frac{1}{p_i} + a_i\mathbf{Z}_i^T.$$

O’lchov o’chirilganda, formula $\mathbf{Q}_{\bar{x}_{i-1}} = \mathbf{Q}_{\bar{x}_i} - \Delta\mathbf{Q}_i$ и $g_i = -\frac{1}{p_i} + a_i\mathbf{Z}_i^T$, где $\mathbf{Z}_i^T = \mathbf{Q}_{\bar{x}_i} a_i^T$, a_i — i-я berilgan o’lchamga mos keladigan a matritsaning i qatorini oladi; pi - i o’lchovning og'irligi .

Takroriy tuzatish formulalaridan foydalanib, biz ko’rib chiqilayotgan misol uchun ettinchi o’lchovsiz teskari og'irlik matritsasini aniqlaymiz. Ushbu o’lchov og'irligiga ega p7 = 0,53. a matritsa koeffitsientlarining yettinchi qatori a7 =(0 1 0) ko'rinishga ega, demak,

$$\mathbf{Z}_i^T = \mathbf{Q}_{\bar{x}_i} a_i^T = \begin{pmatrix} 0,89 & 0,43 & 0,31 \\ 0,43 & 0,92 & 0,30 \\ 0,31 & 0,30 & 0,74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,43 \\ 0,92 \\ 0,30 \end{pmatrix}.$$

Bu erda indeks i=7, chunki teskari og'irlik matritsasi barcha etti o'lchov uchun hisoblanadi:

$$g_7 = -\frac{1}{p_7} + a_7 \mathbf{Z}_7^T = -1,9 + (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0,43 \\ 0,92 \\ 0,30 \end{pmatrix} = -0,98;$$

$$\Delta\mathbf{Q}_i = \frac{1}{g_i} \mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i = -\frac{1}{0,98} \begin{pmatrix} 0,43 \\ 0,92 \\ 0,30 \end{pmatrix} (0,43 \quad 0,92 \quad 0,30) = -\begin{pmatrix} 0,19 & 0,40 & 0,13 \\ 0,40 & 0,86 & 0,28 \\ 0,13 & 0,28 & 0,09 \end{pmatrix}.$$

Shuning uchun, olti o'lchovdan iborat bo'lgan tarmoqning teskari og'irlik matritsasi

$$\mathbf{Q}_{\bar{x}_{i-1}} = \mathbf{Q}_{\bar{x}_i} - \Delta\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} 0,89 & 0,43 & 0,31 \\ 0,43 & 0,92 & 0,30 \\ 0.31 & 0,30 & 0,74 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,19 & 0,40 & 0,13 \\ 0,40 & 0,86 & 0,28 \\ 0,13 & 0,28 & 0,09 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,08 & 0,83 & 0,44 \\ 0,83 & 1,78 & 0,58 \\ 0,44 & 0,58 & 0,83 \end{pmatrix},$$

va tegishli korrelyatsiya matritsasi

$$\mathbf{K}_{\bar{x}_{i-1}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\bar{x}_{i-1}} = 5^2 \begin{pmatrix} 1,08 & 0,83 & 0,44 \\ 0,83 & 1,78 & 0,58 \\ 0,44 & 0,58 & 0,83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26,9 & 20,9 & 11,0 \\ 20,9 & 44,9 & 14,8 \\ 11,0 & 14,8 & 20,9 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, oltita o'lchov bilan tarmoqdagi aniqlangan nuqtalar belgilarining o'rtacha kvadrat xatolarining oldindan hisoblangan qiymatlari quyidagicha bo'ldi:

$$\sigma_{\bar{x}_1} = \sqrt{26,9} = 5,2 \text{ мм}; \quad \sigma_{\bar{x}_2} = \sqrt{44,9} = 6,7 \text{ мм}; \quad \sigma_{\bar{x}_3} = \sqrt{20,9} = 4,6 \text{ мм}.$$

Ettinchi o’lchovni olib tashlash muammoning sharti talab qiladigan aniqlikning bajarilmasligiga olib keladi. Shuning uchun ettinchi o’lchovni olib tashlash mumkin emas. Shunday qilib, biz yetti o’lchovli tarmoq loyihalashtirilayotgan tarmoqning yakuniy versiyasini ifodalaydi deb taxmin qilamiz.

Savol tug'iladi - natijada olingan belgilarning aniqligi asl talablarni qondirish uchun beshinchi yoki oltinchi o’lchovni olib tashlash mumkinmi? Biz o’quvchini yuqoridagi formulalardan foydalanib, ushbu savolga javob berishga taklif qilamiz.

Tarmoqlarni loyihalashda rekursiv formulalardan foydalanib, ortiqcha o’lchovlar bilan bog'liq bo’lgan bepul atamalarning ruxsat etilgan qiymatlarini hisoblash mumkin. Buni bizning tekislash tarmog'imiz misolida ko’rsatamiz (3.37-rasmga qarang), bu erda bitta ortiqcha o’lchovga ega bo’lgan tekislash harakati - o’lchovlarni nazorat qilish va qo’pol xatolarni aniqlash imkonini beruvchi to’rtinchi ortiqcha. Birinchi uchta tuzatish tenglamalaridagi erkin shartlar nolga teng bo’lishi aniq. Erkin muddat faqat to’rtinchi va keyingi o’lchovlar uchun noldan farq qiladi, chunki ularning hammasi ortiqcha.

To’rtinchi o’lchov uchun erkin atamaning ruxsat etilgan qiymatini aniqlaymiz. Ma'lumki, parametrik tuzatish tenglamalaridagi doimiy hadlar parametrlarning taxminiy qiymatlari va o’lchov natijalari li = f(x 1,x 2,..., xk) - yi ga almashtirilganda birlashtiruvchi tenglamalar bilan hisoblanadi. ularni . Keling, yangi o’lchov kerakli o’lchovlardan topilgan parametrlarning taxminiy qiymatlariga bog'liq emasligini hisobga olgan holda, umumiy aniqlikni baholash formulasi bo’yicha bepul muddatning og'irligini aniqlaylik.

Keyin adolatli

$$\frac{1}{p_{l_i}} = f\mathbf{Q}_{x_0} f^T + \left(\frac{\partial l_i}{\partial y_i}\right)^2 \frac{1}{p_{y_i}} = a_i \mathbf{Q}_{x_0} a_i^T + \frac{1}{p_{y_i}}.$$

Bu yerda Qx0 - faqat kerakli o’lchovlar yordamida olingan taxminiy parametrlar vektorining teskari og'irlik matritsasi, ai - a matritsaning i-qatori.

Shunday qilib, erkin atamaning o'zaro og'irligini aniqlash uchun siz Qx0 ni bilishingiz kerak. Bunday holda, erkin muddatning chegara qiymati formula bilan aniqlanishi mumkin $$|l_i|_{\text{доп}} = t\sigma_0\sqrt{\frac{1}{p_{l_i}}}.$$

kesmaning haqiqiy bo'lish ehtimoli bilan bog'liq koeffitsient ; s0 - vazn birligining standart og'ishi. 0,95 ehtimollik bilan koeffitsient t=2, ehtimollik 0,997 - t=3.

Keling, tekislash tarmog'iga qaytaylik. To'rtinchi ortiqcha uchun erkin muddat l4 = H2 - x3 - h4 formulasi bilan aniqlanadi, bu erda x3 = H1 + h1 + h2 + h3.

Qayerda, $$\frac{1}{p_{x_3}} = \frac{1}{p_{h_1}} + \frac{1}{p_{h_2}} + \frac{1}{p_{h_3}} = 1,8 + 1,7 + 2,8 = 6,3.$$

Shuning uchun x3 va h4 qiymatlari mustaqildir

$$\frac{1}{p_{l_4}} = \frac{1}{p_{x_3}} + \frac{1}{p_{h_4}} = 6,3 + 2,4 = 8,7.$$

Xuddi shunday natijani formuladan foydalanib olish mumkin

$$\frac{1}{p_{l_4}} = a_4 \mathbf{Q}_{x_0} a_4^T + \frac{1}{p_{h_4}}, \text{ где } a_4 = (0\ 0\ -1).$$

Oddiy tenglamalar koeffitsientlari matritsasi va taxminiy parametrlar vektorining teskari vazn matritsasi aniqlansin.

$$\mathbf{R}_{x_0} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,56 & 0 & 0 \\ 0 & 0,59 & 0 \\ 0 & 0 & 0,36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1,15 & -0,59 & 0 \\ -0,59 & 0,95 & -0,36 \\ 0 & -0,36 & 0,36 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{x_0} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,15 & -0,59 & 0 \\ -0,59 & 0,95 & -0,36 \\ 0 & -0,36 & 0,36 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,79 & 1,79 & 1,79 \\ 1,79 & 3,48 & 3,48 \\ 1,79 & 3,48 & 6,26 \end{pmatrix}.$$

Erkin atamaning o'zaro og'irligini toping

$$\frac{1}{p_{l_4}} = a_4 \mathbf{Q}_{x_0} a_4^T + \frac{1}{p_{h_4}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,79 & 1,79 & 1,79 \\ 1,79 & 3,48 & 3,48 \\ 1,79 & 3,48 & 6,26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2,4 = 6,3 + 2,4 = 8,7\,.$$

Erkin a'zoning ruxsat etilgan qiymatini hisoblash uchun t=2 koeffitsientini (ehtimoli 0,95) va s0=5 mm ni olamiz.

$$|l_i|_{\text{доп}} = t\sigma_0 \sqrt{\frac{1}{p_{l_i}}} = 2 \cdot 5\sqrt{8,7} = 29,5 \text{ мм} \approx 3,0 \text{ см.}$$

Beshinchi, oltinchi va ettinchi ortiqcha erkin shartlarning ruxsat etilgan qiymatlarini hisoblash uchun siz Qx 0 matritsasidan foydalanishingiz mumkin. Bunday holda, i- ortiqcha (mos ravishda, l5, l6 va l7) doimiy shartlari faqat kerakli o’lchovlar va i- o’lchov bilan aniqlanishi kerak . Masalan,

$$l_7 = x_2 - H_2 - h_7, \text{ где } x_2 = H_1 + h_1 + h_2 \text{ и } \frac{1}{P_{l_7}} = a_7 \mathbf{Q}_{x_6} a_7 + \frac{1}{P_{h_7}}.$$

Ammo shuni esda tutish kerakki, tuzatish uchun takroriy usuldan foydalanganda teskari og'irlik matritsasi va parametrlari har bir o’lchov uchun qayta hisoblab chiqiladi , shuning uchun i-1 o’lchovlarini qayta ishlagandan so’ng, **tuzatilgan** parametrlarning vektori xi-1 ma'lum bo’ladi (bu erda indeks - tuzatish uchun ishlatilgan o’lchovlar soni) va Qxi-1 matritsasi

Bunday holda, i o’lchamining ruxsat etilgan qiymatini hisoblash uchun Qx0 o’rniga Q dan foydalanish mumkin, ya'ni. ettinchi o’lchov uchun $\frac{1}{P_{l_7}} = a_7 \mathbf{Q}_{x_6} a_7 + \frac{1}{P_{h_7}}.$ Ammo keyin erkin atama li ham i -1 o’lchamlarni tuzatishdan olingan xi -1 **tuzatilgan** parametrlardan aniqlanishi kerak . Shunday qilib , bepul muddatning $l_7 = \bar{x}_2^6 - H_2 - h_7.$ ettinchi ortiqligi uchun $\frac{1}{P_{l_7}} = a_7 \mathbf{Q}_{x_6} a_7 + \frac{1}{P_{h_7}},$.

Bu erda x26 - oltita o’lchovni qayta ishlashdan keyin ikkinchi parametrning **tuzatilgan** qiymati.

Rejalashtirilgan tarmoqlarning aniqligini loyihalash va oldindan hisoblash uchun shunga o’xshash yondashuv qo’llaniladi. **Tuzatilgan** parametrlar vektorining oldindan hisoblangan korrelyatsiya matritsasini aniqlash uchun ushbu vektorning teskari og'irlik matritsasi hisoblab chiqiladi va rejalashtirilgan standart og'ish kvadratiga ko’paytiriladi .

Misol uchun, chiziqli burchakli tarmoqni ko’rib chiqing (3.13-rasmga qarang). Keling, ushbu tarmoqning aniqligini oldindan hisoblash masalasini hal qilaylik.

Bu tarmoq topografik xaritada proyeksiyalansin. A va B boshlang'ich nuqtalariga nisbatan belgilangan nuqtalarning holatida 3 sm aniqlikni ta'minlash talab qilinadi.

Ushbu tarmoqda olti burchak va to’rt tomonni o’lchash rejalashtirilgan. Avvalroq, §3.2 da barcha 10 o’lchov uchun **tuzatilgan** parametrlarning teskari og'irlik matritsasi olingan. Endi biz o’lchovlar faqat prognoz qilingan deb taxmin qilamiz. Tarmoqni loyihalashda diagrammalardan yoki topografik xaritalardan, aerofotosuratlardan olish mumkin bo’lgan burchaklarning (bir necha darajagacha) va tomonlarning (yuzlab metrgacha) taxminiy qiymatlarini bilish kifoya . Bu aniqlikni oldindan hisoblash muammosini hal qilish uchun etarli bo’ladi.

Ma'lumotlar a matritsasini va og'irliklarni Rasmlantirish uchun kerak. 5Ǝ burchakni o’lchash aniqligini va 1 sm tomonlarni o’lchashning aniqligini ta'minlovchi umumiy stansiyadan foydalanish nazarda tutilsin, mos yozuvlar o’lchovi sifatida biz o’lchangan burchakni olamiz, ya'ni. s0=sb=5Ǝ.

Keyin o’lchangan burchakning og'irligi $p_\beta = \frac{\sigma_0^{\ 2}}{\sigma_\beta^{\ 2}} = \frac{\sigma_\beta^{\ 2}}{\sigma_\beta^{\ 2}} = 1$ tomonning og'irligi hisoblanadi

$$p_S = \frac{\sigma_0^{\ 2}}{\sigma_S^{\ 2}} = \frac{\sigma_\beta^{\ 2}}{\sigma_S^{\ 2}} = \frac{25}{1} = 25.$$

Ushbu vazn qiymatlari ushbu tarmoqni tuzatishda keltirilgan misoldagi og'irliklar bilan bir xil. Parametrlarning teskari og'irlik matritsasi misolda keltirilgan matritsaga to’g'ri keladi, shuning uchun hisoblangan R va Q matritsalari misoldan olinadi:

Tuzatilgan koordinatalar (parametrlar) vektorining korrelyatsiya matritsasini hisoblang.

$$\mathbf{K}_{\bar{x}} = \sigma_0^{\,2}\mathbf{Q} = 25\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0,54 & -0,11 & 0,15 & -0,06 \\ -0,11 & 0,83 & -1,06 & 0,86 \\ 0,15 & -1,06 & 3,35 & -1,68 \\ -0,06 & 0,86 & -1,68 & 1,66 \end{pmatrix}.$$

Ko'rib turganingizdek, C nuqtasi kamroq aniqlik bilan aniqlanadi (asosiy diagonalning uchinchi va to'rtinchi elementlari C nuqtasi koordinatalarining dispersiyalarining oldindan hisoblangan qiymatlari), shuning uchun biz ushbu nuqta uchun hisob-kitoblarni amalga oshiramiz.

$$\sigma_{\bar{x}c} = \sqrt{3,35} = 1,8 \text{ см}; \quad \sigma_{\bar{y}c} = \sqrt{1,66} = 1,3 \text{ см}.$$

Ushbu nuqta pozitsiyasining dastlabki nuqtalarga nisbatan aniqligining xarakteristikasi sifatida biz qiymatni ko'rib chiqamiz.

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_{\bar{x}c}^{\;2} + \sigma_{\bar{y}c}^{\;2}} = 2,2 \text{ см}.$$

Kerakli aniqlik (3 sm) taqdim etiladi.

Savol tug'iladi: aniqlikni sezilarli darajada yo'qotmasdan ushbu tarmoqdagi o'lchovlarni kamaytirish mumkinmi? Keling, oltinchi burchakning o'lchamini olib tashlashga harakat qilaylik, chunki bu holda asbobni C nuqtasiga joylashtirishning ho

Og'irlik matritsasi diagonal bo'lib, uning asosiy diagonali bo'ylab R ={ 1 1 1 1 1 25 25 25 25} elementlari joylashgan.

Bu holda normal tenglamalar koeffitsientlari matritsasi teng

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 43,98 & 8,36 & -0,62 & -2,03 \\ 8,36 & 69,53 & 7,74 & -28,20 \\ -0,62 & 7,74 & 15,82 & 11,75 \\ -2,03 & -28,20 & 11,75 & 40,72 \end{pmatrix}.$$

Tuzatilgan parametrlarning teskari og'irlik matritsasi hisoblang

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,024 & -0,005 & 0,007 & -0,005 \\ -0,005 & 0,034 & -0,043 & 0,036 \\ 0,007 & -0,043 & 0,134 & -0,068 \\ -0,005 & 0,036 & -0,068 & 0,069 \end{pmatrix}.$$

Tuzatilgan koordinatalarning hisoblangan korrelyatsiya matritsasi quyidagicha bo’ladi:

$$\mathbf{K}_{\bar{x}} = 25\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0,59 & -0,14 & 0,17 & -0,11 \\ -0,14 & 0,85 & -1,07 & 0,89 \\ 0,17 & -1,07 & 3,36 & -1,70 \\ -0,11 & 0,89 & -1,70 & 1,72 \end{pmatrix}.$$

Ko’rinib turibdiki, oltinchi burchakni olib tashlash belgilangan nuqtalarning **tuzatilgan** koordinatalarini aniqlashning aniqligiga ta'sir qilmadi:

$$\sigma_{\bar{x}_C} = \sqrt{3,36} = 1,8 \text{ см}; \; \sigma_{\bar{y}_C} = \sqrt{1,72} = 1,3 \text{ см}; \; \sigma_C = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_C}^{\,2} + \sigma_{\bar{y}_C}^{\,2}} = 2,2 \text{ см}.$$

Shunday qilib, ushbu tarmoqdagi maydon o’lchovlarini bajarishda oltinchi burchakni o’lchamaslik tavsiya qilinishi mumkin. E'tibor bering, oltinchi burchakni tuzatishdan olib tashlash uchun takroriy tuzatish formulalari yordamida bir xil natijaga erishish mumkin.

takroriy usul bilan birgalikda Pranis - Pranevich ko’p guruhli usulidan foydalanishni tavsiya etish mumkin. Pranis - Pranevich usulida tarmoq ikkita tarmoqqa (yoki bir nechta tarmoqqa) bo’linadi, birinchi bosqichda ularni bog'laydigan barcha o’lchovlarni olib tashlaydi. Umuman olganda, birinchi tarmoqda k1 parametrlari, ikkinchisida - k_2 parametrlari bo’ladi . Ikki tarmoq ajratilgandan so’ng butunlay mustaqil bo’lganligi sababli, ular R1 va R2 normal tenglamalarining matritsalarini olish orqali bir-biridan mustaqil ravishda qayta ishlanishi mumkin.

Keyin ular teskari bo’lib, **tuzatilgan** parametrlarning teskari og'irlik matritsalari birinchi va ikkinchi tarmoqlar uchun alohida olinadi $Q_1 = R_1^{-1}$, 12 2. Q = R−

Keyingi bosqichda blok Rasmida umumiy teskari og'irlik matritsasi hosil bo'ladi.Bu $\mathbf{Q}_{\bar{x}_{i-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}$ turdagi matritsalar birinchi va ikkinchi guruhlarning mustaqilligi bilan bog'liq. Keyin ikkita mustaqil tarmoqni bog'laydigan o'lchovlar yordamida umumiy teskari og'irlik matritsasini olish uchun rekursiv tuzatish formulalaridan foydalanishingiz mumkin:

$$\mathbf{Q}_{\bar{x}i} = \mathbf{Q}_{\bar{x}_{i-1}} - \Delta\mathbf{Q}_i; \quad \Delta\mathbf{Q}_i = \frac{1}{g_i}\mathbf{Z}_i^T\mathbf{Z}_i,$$

bu erda **ZiT = Qxi−1AiT; g1 = Pi−1 + AiZiT ; AiT va Pi−1**, mos ravishda, birinchi va ikkinchi tarmoqlarni bog'laydigan o'lchovlar guruhi uchun tuzatish tenglama koeffitsientlari matritsasi va bu o'lchovlar guruhining teskari og'irlik matritsasi.

Ushbu yondashuv tarmoqlarni loyihalashda ham, ularni tenglashtirishda ham qo'llanilishi mumkin. Ikkinchi holda, dastlabki teskari og'irlik matritsasi Q0 ni Q0 = 10KE ga teng qabul qilish tavsiya etiladi. Q0 matritsasi o'lchovlar bajarilmagan shartdan tanlanishi kerak [14]. Bunda aniqlangan nuqta koordinatalarining og'irliklari nolga, o'zaro og'irliklari esa ∞ ga teng bo'ladi.

Haqiqiy hisob-kitoblarda k qiymatining bit uzunligi kompyuterda ko'rsatish uchun maksimal mumkin bo'lgan qiymat sifatida qabul qilinadi [14].

Geodeziya inshootlarini loyihalash va aniqlikni oldindan hisoblash uchun siz nafaqat parametrik, balki korrelyatsiya qilingan usuldan ham foydalanishingiz mumkin. Bu erda aniqlikni oldindan hisoblash printsipi o'xshash. Aniqlik talablari oldindan belgilangan ba'zi bir **tuzatilgan** tarmoq elementlarining og'irliklarini aniqlash kerak . Bunday holda, bu elementlar o'lchangan qiymatlarning F = F (y) vektor funktsiyasi sifatida taqdim etiladi. Keyinchalik, vazn birligining standart og'ishi o'rnatiladi va funktsiyalar yordamida ko'rsatilgan elementlarning standart og'ishlarining hisoblangan qiymatlari aniqlanadi. Agar olingan qiymatlar kerakli aniqlikka mos kelsa, tarmoq dizayni tasdiqlanadi.

Biz eng kichik kvadratlar usuli (qat'iy usullar) asosida geodezik inshootlarni loyihalash uchun aniqlikni oldindan hisoblash usullarini ko'rib chiqdik. Biroq, ular katta hajmdagi hisoblashni talab qiladi. Ba'zan, ortiqcha o’lchovlar bo’lmaganda, aniqlikni oldindan hisoblash uchun korrelyatsiya qilinmagan o’lchovlar funktsiyalarining aniqligini baholash uchun formuladan foydalanish mumkin. Bunday holda, geodezik qurilishning ma'lum bir sxemasi uchun aniqlikni oldindan hisoblash uchun ba'zi formulalar olinadi. Bu yagona seriflarning ayrim turlariga tegishli. Bunday formulalar keng tarqalgan.

Ularni ko’plab adabiy manbalarda topish mumkin. Keling, ulardan ba'zilarini ko’rib chiqaylik.

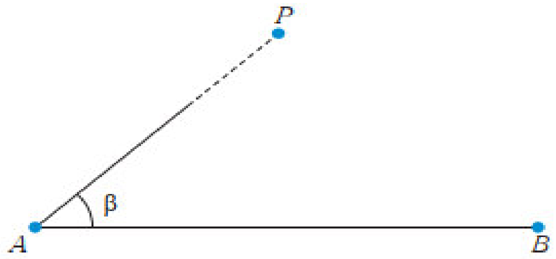


рис. 3.39. Полярный метод определения координат

Qutbli usul. Agar A nuqtaning koordinatalari va AB tomonining yo’nalish burchagi qiymati ma'lum bo’lsa, P nuqtaning koordinatalarini aniqlash talab qilinsin (3.39-rasm). Xp = XA + Scos (aAB - b) formulalari bilan aniqlanadi ; Yp = YA + Ssin (aAB - b).

O’lchovlar mustaqil deb hisoblab, biz R nuqtaning koordinatalarini aniqlashning aniqligini hisoblaymiz:

$$\sigma_{x_p}{}^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial S}\right)_0^2 \sigma_S{}^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \beta}\right)_0^2 \sigma_\beta{}^2 = \cos^2\alpha_{AP}\sigma_S{}^2 + \left(\frac{S\sin\alpha_{AP}}{\rho''}\right)^2 \sigma_\beta{}^2;$$

$$\sigma_{y_p}{}^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial S}\right)_0^2 \sigma_S{}^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \beta}\right)_0^2 \sigma_\beta{}^2 = \sin^2\alpha_{AP}\sigma_S{}^2 + \left(\frac{-S\cos\alpha_{AP}}{\rho''}\right)^2 \sigma_\beta{}^2.$$

2 ,p X p Yp bo’ladi, deb hisoblashadi .

$$\sigma_p^2 = (\cos^2\alpha_{AP} + \sin^2\alpha_{AP})\sigma_S^2 + \left(\frac{S\sin\alpha_{AP}}{\rho''}\right)^2 \sigma_\beta^2 + \left(\frac{-S\cos\alpha_{AP}}{\rho''}\right)^2 \sigma_\beta^2 =$$

$$= \sigma_S^2 + \frac{S_{AP}{}^2}{\rho^2}\sigma_\beta^2.$$

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_S{}^2 + \frac{S^2}{\rho^2}\sigma_\beta{}^2}.$$

sP ning santimetrdagi qiymatini olish uchun siz tomonning qiymatini santimetrda ifodalashingiz yoki tomonning qiymatini kilometrlarda ifodalashingiz va r qiymatini soniyalarda 105 ga bo’lishingiz kerak.

natijani santimetrda beradigan formulani olamiz . $\sigma_P = \sqrt{\sigma_S{}^2 + \frac{S^2}{4,3}\sigma_\beta{}^2}$,

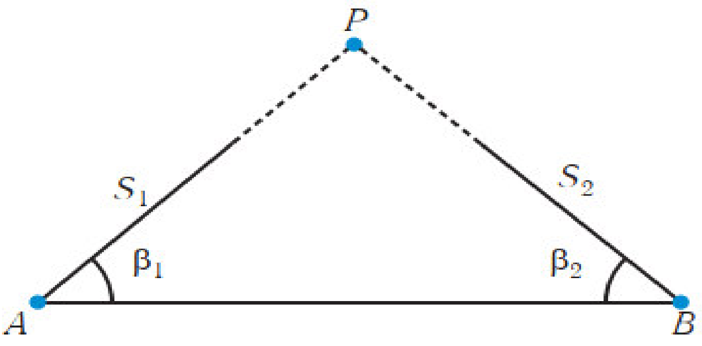
Ko’rib turganingizdek, nuqtaning o’rnini aniqlashning aniqligi masofani, burchakni va masofani o’lchashning to’g'riligiga bog'liq.

Masalan, sb=3Ǝ, sS =1 sm va yon qiymati 1,5 km bo’lsa, biz hosil bo’lamiz.

$$\sigma_P = \sqrt{1 + \frac{1,5^2}{4}3^2} = 2,4 \text{ см.}$$

To’g'ri burchakli burchak. Rasmda. 3.40 to’g'ri burchakli serifning diagrammasini ko’rsatadi. Bu erda A va B nuqtalarning koordinatalari ma'lum. P nuqta koordinatalari o’lchangan β_1 va β_2 burchaklar yordamida aniqlanadi.

AB tomoni asl bo’lgani uchun, o’lchangan burchaklarni bilib, sinus teoremasidan foydalanib, biz S1 va S2 tomonlarini hisoblaymiz.



$$S_1 = \frac{S_{AB}}{\sin(180 - \beta_1 - \beta_2)}\sin\beta_2;$$

$$S_2 = \frac{S_{AB}}{\sin(180 - \beta_1 - \beta_2)}\sin\beta_1 \quad ;$$

Rasm. 3.40. To’g'ri burchakli serif sxemasi

va AR va VR tomonlarining yo’nalish burchaklari aAP = aAB - b1, aBP = aBA + b2.

Bundan tashqari, P nuqtaning koordinatalarini olish oson:

$$x_p = X_A + S_1 \cos\alpha_{AP} = X_A + \frac{S_{AB}}{\sin(180 - \beta_1 - \beta_2)} \sin\beta_2 \cos(\alpha_{AB} - \beta_1);$$

$$y_p = Y_A + \frac{S_{AB}}{\sin(180 - \beta_1 - \beta_2)} \sin\beta_2 \sin(\alpha_{AB} - \beta_1).$$

Demak, qutbli usulga o’xshatib, biz olamiz

$$\sigma_P = \frac{\sigma_\beta}{\rho \sin\gamma} \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \text{ где } \gamma = (180 - \beta_1 - \beta_2).$$

Demak, sb=3Ǝ, sS =1 sm, tomonlari 1,5 km va g=60° bo’lganda hosil bo’ladi.

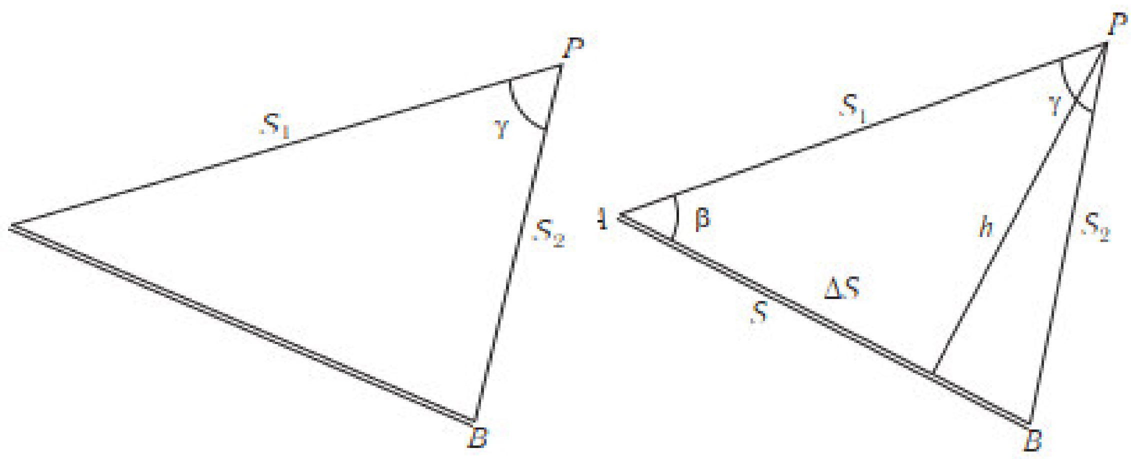
$$\sigma_P = \frac{3}{2{,}06 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}5^2} \approx 3{,}6 \text{ см.}$$

Chiziqli tirqish. Chiziqli tirqish holatida ikkita A va B boshlang'ich nuqtalari asosida S1 va S2 ikki tomon o’lchanadi (3.41-rasm).

Dastlabki bo’lganlarga nisbatan P nuqtasi pozitsiyasining aniqligini oldindan hisoblashni amalga oshirish kerak .

Bunday oldindan hisoblash formula [24] yordamida amalga oshirilishi mumkin.

$$\sigma_P = \frac{\sqrt{\sigma_{S_1}^{\;2} + \sigma_{S_2}^{\;2}}}{\sin\gamma}.$$



Rasm. 3.41. Chiziqli tirqish sxemasi

Rasm. 3.42. Chiziqli tirqish. P nuqtaning koordinatalarini hisoblash algoritmi tasviri

s S =1 sm va g=60° bo'lsin . Qiymatlarni formulaga almashtirib, biz P nuqtasining boshlang'ich nuqtalariga nisbatan o'rnini aniqlash aniqligining kutilgan qiymatini olamiz:

$$\sigma_P = \frac{\sqrt{1+1}}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2} = 1,63 \text{ см.}$$

P nuqtasi koordinatalari quyidagi algoritm bo'yicha hisoblanadi. Qattiq tomon S va o'lchangan tomonlar S_1 va S_2 qiymatlariga asoslanib, biz b burchakni hisoblaymiz (3.42-rasm): arccos S,S Δb = bu yerda ΔS quyidagidan hisoblanadi. P nuqtadan AB tomoniga perpendikulyar tushiramiz, keyin

$$S_2 = h^2 + (S - \Delta S)^2;$$
$$S_1 = h^2 + \Delta S^2.$$

Birinchi tenglamadan ikkinchisini olib tashlang

$$S_2^2 - S_1^2 = (S - \Delta S)^2 - \Delta S^2 = S^2 - 2S\Delta S + \Delta S^2 - \Delta S^2 =$$
$$= S^2 - 2S\Delta S.$$

$$\text{Отсюда } \Delta S = \frac{S^2 + S_1^2 - S_2^2}{2S}.$$

Keyinchalik, tomonning yo'nalish burchagini AP: $\alpha_{AP} = \alpha_{AB} - \beta$ va nuqtaning koordinatalarini hisoblaymiz R $X_P = X_A + S_1 \cos$ aAP; YP = YA + S1 sin aAP.

Bir qator geodezik konstruktsiyalar uchun oldindan hisoblash aniqligi uchun taxminiy formulalar olinadi. Masalan, cho'zilgan Rasmga ega bo'lgan poligonometrik shpal uchun oxirgi nuqtaning boshlang'ichga nisbatan o'rtacha kvadrat xatosi formuladan aniqlanadi.

$$M^2 = nm_S^2 + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} L^2 \frac{n+1,5}{3},$$

bu erda n - poligonometrik zarbaning tomonlar soni; mS - tomonlarni o'lchashning o'rtacha kvadrat xatosi (barcha tomonlar teng o'lchangan deb hisoblasak); mb - burchakni o'lchashning o'rtacha kvadrat xatosi (barcha burchaklar teng o'lchangan deb hisoblasak); L - kursning umumiy uzunligi, km;

Harakatning oxirgi nuqtasi, agar u faqat boshlang'ich nuqtaga tayansa, harakatning "zaif nuqtasi" deb hisoblanadi. Agar harakat ikkita sobit nuqta orasiga qo'yilgan bo'lsa, u holda harakatning "zaif nuqtasi" tenglashtirilgandan keyin harakatning o'rtasi hisoblanadi. Bu holda biz quyidagi formulaga ega bo'lamiz [22].

$$(2M^2) = nm_S{}^2 + \frac{m_\beta{}^2}{\rho^2} L^2 \frac{n+1,5}{3}, \qquad (3.58)$$

bu erda M - harakatning o'rtasida joylashgan nuqtaning o'rtacha kvadrat xatosi.

Aniqlikni oldindan hisoblashda to'g'ridan -to'g'ri yoki teskari masala hal qilinadi. To'g'ridan-to'g'ri masalada mS va mb boshlang'ich sifatida berilgan .

M qiymati hisoblab chiqiladi, bu ma'lum bir standart qiymatni qondirishi kerak. Teskari muammo shundaki, M me'yoriy qiymati o'rnatiladi va mS va mb qiymatlari hisoblanadi, ya'ni. aniqlangan - o'lchovlarni qanday aniqlik bilan bajarish kerak.

Biz geodezik inshootlarni loyihalash va aniqlikni bashorat qilish uchun turli yondashuvlarni ko'rib chiqdik. Bunday muammolarni hal qilishda to'rtta tushunchani ajratib ko'rsatish kerak.

1. Standart og'ish - tasodifiy miqdorning tarqalish darajasining nazariy tavsifi (o'lchov). Bu qiymat har doim noma'lum bo'lib qoladi, shuningdek, o'lchangan qiymatning haqiqiy qiymati.

2. s ning bahosi bo'lgan o'rtacha kvadrat o'lchov xatosi m, o'lchov natijalarini qayta ishlash natijasida aniqlanadi.

3. Standart og'ishning oldindan hisoblangan qiymati oldindan, o'lchovlardan oldin, muammoning shartlari va aniqlik ko'rsatilgan xarakteristikalar asosida aniqlanadi. Masalan, burchakni bir qadamda 3Ǝ va tomonlarini 0,5 sm o'lchash aniqligini ta'minlaydigan elektron to'liq stansiyadan foydalanish kerak, bu holda har qanday miqdorning aniqligini oldindan hisoblash uchun (masalan, , aniqlanayotgan nuqtalarning koordinatalari) yoki o'lchov og'irliklarini hisoblash uchun sb = 3Ǝ va sS = 0,5 sm ni

oling.Bu qiymatlar o’lchov natijalaridan hisoblangan haqiqiy standart xatolarga to’g'ri kelmasligi aniq . Ammo ular haqiqiy o’lchovlarning standart og'ishlaridan ham farq qiladi . Haqiqiy o’lchov xatolariga nafaqat instrumental xatolar, balki kuzatuvchining shaxsiy xatolari va kuzatuvning tashqi sharoitlaridan kelib chiqqan xatolar ham kiradi. Va turli sharoitlarda bu xatolar boshqacha bo’ladi. Ko’pincha dizayn standart og'ishlari m bilan belgilanadi va dizayn standart xatolar deb ataladi . Bu erda qanday qiymat bilan shug'ullanayotganingizni tushunish muhimdir.

4. Aniqlikning ba'zi normativ xarakteristikalari. Masalan, aniqlangan nuqta holatidagi xatoning chegara qiymati (asl nusxaga yoki eng yaqin nuqtalarga nisbatan). Bu xususiyatlar turli me'yoriy hujjatlar talablari bilan belgilanadi. Masalan, chegaraviy rejalarda aholi punktlaridagi yer uchastkasining xarakterli nuqtalari joylashuvining o’rtacha kvadratik xatosi 0,1 m dan oshmasligi kerak.Bu qiymatlardan foydalanib, o’lchov aniqligini oldindan hisoblash mumkin. bu aniqlikni ta'minlaydi. 3-bandda, aksincha, o’lchov aniqligining dizayn xususiyatlari belgilanadi, keyin esa bunday o’lchov aniqligi me'yoriy talablarga javob beradimi yoki yo’qmi aniqlanadi. Bular. bu holda muammo 3-banddan boshlab masalaga nisbatan teskari bo’ladi.

Hozirgi vaqtda chegaraviy rejalarda "o’rtacha kvadrat xato" ustunidagi xarakterli nuqtalar holatidagi xatoning me'yoriy, chegaraviy qiymatini qayd etish talab qilinadi. Bu barcha nuqtalar uchun bir xil qiymat (masalan, 10 sm) qayd etilishiga olib keladi. Va bu haqiqat emas. O’lchov natijalariga ko’ra, barcha nuqtalar o’z xato qiymatlariga ega bo’ladi. Ularni hisoblash mumkin va kerak. Normativ qiymatlar, shuningdek, oldindan hisoblanganlar , o’lchovlarsiz hisoblab chiqiladi va haqiqiy aniqlikni tavsiflamaydi.

Nazorat savollari

og'ish , chegaraviy xato va standart xato tushunchalari o’rtasidagi farq nima ?

2. Geodeziya inshootlarini loyihalash vazifasi nimadan iborat?

3.Eng kichik kvadratlar usuli yordamida aniqlik qanday oldindan hisoblanadi ?

4.To’g'ri burchakli rezektsiyaning aniqligini oldindan hisoblash qanday amalga oshiriladi?

5.To’g'ri chiziqli rezektsiyaning aniqligini oldindan hisoblash qanday amalga oshiriladi?

6. Polar rezektsiyaning aniqligi qanday qilib oldindan hisoblangan ?

7. Aniqlikni oldindan hisoblash uchun takroriy tuzatish formulalaridan qanday foydalaniladi?

8. Bo'sh a'zolarning ruxsat etilgan qiymatlarini parametrik usulda qanday hisoblash mumkin?

9. Ikki guruhli Pranis - Pranevich usulidan aniq oldindan hisoblash uchun qanday foydalaniladi ?

10. Oldindan hisoblash uchun korrelyatsiya usulidan qanday foydalaniladi ?

Muammoni hal qilishga misollar

Vazifa 1. Cho'zilgan Rasmga ega bo'lgan poligonometrik harakatning aniqligini oldindan hisoblang . n=5, mS =1 sm, mb=5Ǝ, L=3,5 km bo'lsin.

Moslashdan keyin harakatning o'rtasida joylashgan nuqtaning koordinatalarini aniqlashning aniqligini oldindan hisoblash talab qilinadi .

Yechim

Biz (3.58) formuladan foydalanamiz. L ni santimetrga aylantiramiz:

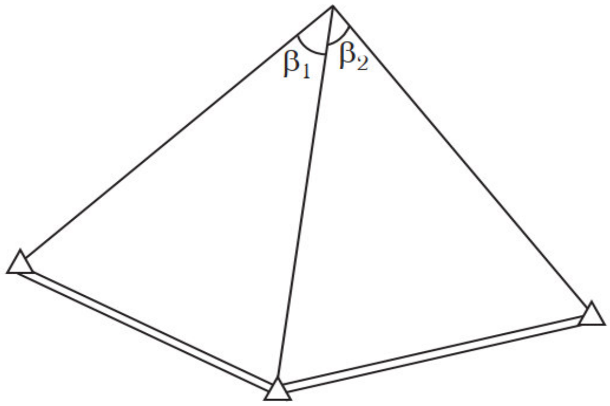
$$2M^2 = nm_S{}^2 + \frac{m_\beta{}^2}{\rho^2} L^2 \frac{n+1,5}{3} = 5 \cdot 1 + \frac{25}{2,06 \times 10^5} 3,5 \cdot 10^5 \frac{5+1,5}{3} = 97,0.$$

Bu erda M = 97 2 = 4,9 sm.

Vazifa 2. Teskari burchakli rezektsiyaning aniqligini oldindan hisoblang (3.43-rasm). Aniqlanayotgan nuqtada teskari bir chiziq bilan ikkita burchak uchta boshlang'ich nuqtada o'lchanadi. Dastlabki ma'lumotlar §3.2 da keltirilgan chiziqli burchakli tarmoqni tuzatish misolidan olinishi kerak (3.13-rasm, 3.12-jadvalga qarang), o'lchangan qiymatlar sifatida faqat dastlabki ikkita burchak qoldiriladi. Boshlanish nuqtalari, bu holda, A, B va C nuqtalari bo'lib, D nuqtasi bilan belgilanadi.

Yechim.

Chiziqli burchakli tarmoqdan (A matritsasining elementlari) ilgari olingan ma'lumotlardan foydalanib, aniqlikni oldindan hisoblashni amalga oshiramiz . Takroriy tuzatish formulalarini qo'llaymiz. Yuqorida aytib o'tilganidek, Q0 matritsasi o'lchovlar bajarilmagan shartdan tanlanishi kerak [14].



Rasm. 3.43. Teskari burchakli rezektsiya

Kompyuterda hisoblashda biz ushbu matritsani asosiy diagonal bo’ylab turgan qiymatlarning maksimal mumkin bo’lgan qiymatlari (biz ularni 109 ga teng olamiz) bilan diagonal sifatida o’rnatamiz, shuning uchun . D nuqtasi koordinatalarining dastlabki teskari og'irlik matritsasi

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} 10^9 & 0 \\ 0 & 10^9 \end{pmatrix}.$$

Rekursiv formuladan foydalanish uchun burchak o’lchovlarining og'irliklarini bir ga teng qilib olaylik, pb=1, chunki burchak o’lchovlari teng darajada aniq bajarilishi kerak , chunki ilgari chiziqli burchakli tarmoq uchun a matritsasi hisoblangan, biz undan foydalanamiz. Bu a matritsadan ikkita b1 va b2 burchaklar va nuqtani nazarda tutgan holda ai qatorlarni tanlaymiz.

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2,783 & -1,372 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} -0,961 & 2,719 \end{pmatrix}.$$

Keyinchalik, birinchi β1 burchak uchun hisob-kitoblarni bajaramiz:

$$\mathbf{Z}_1^T = \mathbf{Q}_0 a_1^T = 10^9 \begin{pmatrix} -2,783 \\ -1,372 \end{pmatrix}; \quad g_1 = 1/p_1 + a_1 \mathbf{Z}_1^T = 9,6275 \cdot 10^9;$$

$$\Delta\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{g_1} \mathbf{Z}_1^T \mathbf{Z}_1 = 10^8 \begin{pmatrix} 8,0448 & 3,9660 \\ 3,9660 & 1,9552 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_0 - \Delta\mathbf{Q}_1 = 10^8 \begin{pmatrix} 1,9552 & -3,9660 \\ -3,9960 & 8,0448 \end{pmatrix}.$$

Ikkinchi β2 burchak uchun:

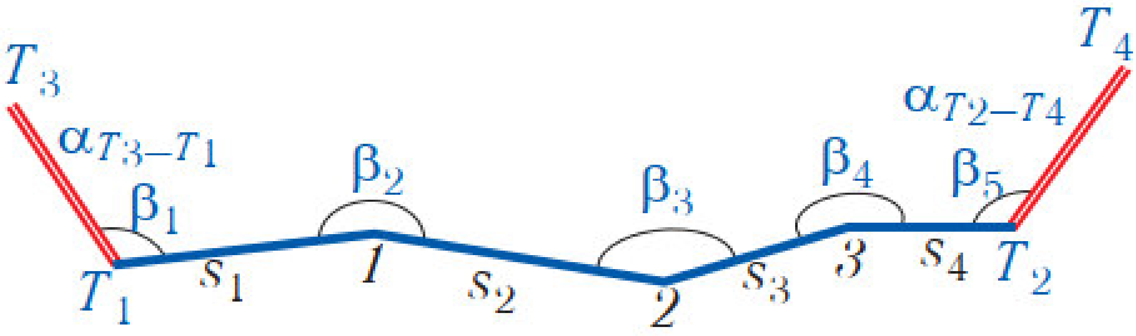
sb=s0=5” burchakni o’lchashning dizayn aniqligi bilan D nuqtasini aniqlashning aniqligi quyidagicha bo’ladi:

$$\sigma_x = \sigma_0 \sqrt{0,118} = 1,7 \text{ см}; \quad \sigma_y = \sigma_0 \sqrt{0,110} = 1,7 \text{ см}; \quad \sigma_D = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = 2,4 \text{ см}.$$

Savol tug'ilishi mumkin. Nega ilgari, chiziqli burchakli tarmoqni o’lchashda kattaroq o’lchovlar bilan, taxminan bir xil aniqlik olingan? Gap shundaki, chiziqli burchakli tarmoq uchun D emas, balki S nuqtaning koordinatalarini aniqlashning aniqligi hisoblangan.Rezektsiya sxemasida chiziqli burchakli tarmoqda "zaif nuqta" bo’lgan S nuqtasi, boshlang'ich hisoblanadi. Aslida, bu tarmoqlar boshqacha bo’lib chiqdi.

Vazifa 3. Poligonometrik harakatning o’rtasida joylashgan nuqta pozitsiyasining aniqligini oldindan hisoblang (3.44-rasm) . Asl 8 sm ga nisbatan ushbu elementning pozitsiyasining aniqligini ta'minlash kerak.

Oldindan hisoblash uchun Jadvaldagi ma'lumotlardan foydalaning. 3.33. Ushbu ma'lumotlar topografik xaritadan transportyor va hisoblagich yordamida aniqlanadi.



Rasm. 3.44. poligonometrik zarba

	X	Y			
T1	6840	10020	α_{T3-T1}=40°		143
1				S1=916	147
2				S2=751	130
3				S3=855	144
T2	8260	8230	α_{T2-T4}=202°	S4=714	138

Yechim

1. Barcha kerakli va ortiqcha o’lchovlar sonini aniqlash n=9,

k=6, r=3.

2. Shartli aloqa tenglamalarini tuzish. Poligonometrik harakatda yo’nalish burchagining bitta shartli tenglamasi va ikkita koordinata tenglamasi paydo bo’ladi:

O’lchangan miqdorlar orqali yakuniy Rasmdagi koordinatalarning shartli tenglamalari:

3. Tuzatishlarning shartli tenglamalarini tuzish. Tizim (3.27) - uch tomonli poligonometrik harakat uchun shartli tuzatish tenglamalari. To'rt tomoni o'lchangan poligonometrik shpal uchun shartli tuzatish tenglamalarini yozamiz:

Matritsaning elementlarini hisoblash uchun undagi taxminiy yo'nalish burchaklarining sinuslari va kosinuslarini, shuningdek, nuqtalarning taxminiy koordinatalarini yoki har bir tomonda koordinatalarning o'sishini hisoblash kerak. Bunday hisob-kitoblar jadvalda keltirilgan. 3.34.

3.34-jadval

№			β	sinα	cosα	ΔY	ΔX
	40	143					
1	3	147	916	0.06	1.00	58	916
2	330	130	751	-0.49	0.87	-371	653
3	280	144	855	-0.08	0.19	-839	100
	244	138	714	-0.90	-0.43	-644	-308
	202						

Keling, matritsa hosil qilaylik

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,00 & 0,87 & 0,19 & -0,43 & 0,87 & 0,90 & 0,72 & 0,31 & 0 \\ 0,06 & -0,49 & -0,98 & -0,90 & 0,69 & 0,25 & -0,07 & -0,15 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Oddiy tenglamalar tizimini Rasmlantirish uchun o'lchov og'irliklarini hisoblash kerak. Og'irliklar Pii = ss022 formulasi bilan aniqlanadi . Poligonometrik harakat heterojen o'lchovlarni - burchaklar va tomonlarni o'z ichiga oladi. Dastlab, o'lchov aniqligi ishlatiladigan umumiy stansiyaning xususiyatlaridan kelib chiqqan holda aniqlanadi. To'liq stansiya tomonidan taqdim etilgan burchak o'lchovining standart og'ishi 5Ǝ bo'lsin va yon o'lchovning standart og'ishi 1 sm bo'lsin: sb=5", sS =1 sm.Biz barcha burchaklar bir xil aniq o'lchangan deb faraz qilamiz . Barcha tomonlar ham bir xil standart og'ish bilan o'lchanadi . Biz mos yozuvlar o'lchovi sifatida tanlaymiz - burchakning o'lchami, ya'ni. s02 = sb2. Demak, burchaklarning o'lchangan qiymatlarining og'irliklari birga teng bo'ladi va tomonlarning o'lchangan qiymatlari

og'irliklari olinadi.Shuning uchun $P_S = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_S^2} = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_S^2} = \frac{25}{1} = 25.$ og'irlik matritsasining diagonal elementlari quyidagicha bo'ladi. P={25 25 25 25 1 1 1 1 1}.

tenglamalar koeffitsientlari matritsasi tuzish :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 5,00 & 2,80 & 0,71 \\ 2,80 & 2,26 & 0,71 \\ 0,71 & 0,71 & 0,64 \end{pmatrix}, \text{ где } \mathbf{N}=\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T.$$

Keling, ikkinchi tomonning yo'nalish burchagining **tuzatilgan** qiymatlari va kursning o'rtasida - "zaif" joyda joylashgan ikkinchi nuqta koordinatalarining aniqligini oldindan hisoblab chiqamiz . Yo'nalish burchagi va nuqta koordinatalarining aniqligini baholash uchun ulanish tenglamalariga o'xshash funktsiyalarni tuzish kerak:

Ushbu tenglamalarni chiziqli Rasmga keltiramiz:

$$\Delta F_1 = \upsilon_{\beta_1} + \upsilon_{\beta_2};$$

$$\Delta F_2 = \cos\alpha_1 \upsilon_{S_1} + \cos\alpha_2 \upsilon_{S_2} - \frac{Y_{T_2} - Y_{T_1}}{\rho''}\upsilon_{\beta_1} - \frac{Y_{T_2} - Y_1}{\rho''}\upsilon_{\beta_2};$$

$$\Delta F_3 = \sin\alpha_1 \upsilon_{S_1} + \sin\alpha_2 \upsilon_{S_2} + \frac{X_{T_2} - X_{T_1}}{\rho''}\upsilon_{\beta_1} + \frac{X_{T_2} - X_1}{\rho''}\upsilon_{\beta_2}.$$

Demak, ushbu tenglamalarning koeffitsientlari matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

yoki raqamli Rasmda

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1,00 & 0,87 & 0 & 0 & 0,15 & 0,18 & 0 & 0 & 0 \\ 0,06 & -0,49 & 0 & 0 & 0,76 & 0,32 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Xususiyat vektorining teskari vazn matritsasi

$$\boldsymbol{Q}_{\bar{F}_1} = \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}^T - \mathbf{f}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}^T = \begin{pmatrix} 0,278 & 0,027 & 0,065 \\ 0,027 & 0,058 & -0,002 \\ 0,065 & -0,002 & 0,062 \end{pmatrix}.$$

va funktsiya vektorining korrelyatsiya matritsasi

$$\boldsymbol{K}_{\bar{F}_1} = \sigma_0^2 Q_{\bar{F}} = 25\begin{pmatrix} 0,278 & 0,027 & 0,065 \\ 0,027 & 0,058 & -0,002 \\ 0,065 & -0,002 & 0,062 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,95 & 0,67 & 1,62 \\ 0,67 & 1,44 & -0,06 \\ 1,62 & -0,06 & 1,54 \end{pmatrix}.$$

Shuning uchun, **tuzatilgan** funktsiyalar qiymatlarining standart og'ishlarining oldindan hisoblangan qiymatlari

$$\sigma_{\bar{F}_1} = \sigma_{\alpha_2} = \sqrt{6{,}95} = 2{,}6''$$

$$\sigma_{\bar{F}_2} = \sigma_{\bar{x}_2} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2\ sm$$

$$\sigma_{\bar{F}_3} = \sigma_{\bar{u}_2} = \sqrt{1{,}54} = 1{,}2\ sm$$

2-nuqta pozitsiyasining (zaif joyda - zarba o'rtasida) boshlang'ich nuqtalariga nisbatan ildiz o'rtacha kvadrat og'ishining oldindan hisoblangan qiymati $\sigma_2 = \sqrt{1{,}44 + 1{,}54} = 1{,}7\ sm.$

Berilgan tarmoq geometriyasi va tanlangan asbob uchun kerakli aniqlik katta chegara bilan ta'minlangan. Keling, cho'zilgan zarba uchun taxminiy formuladan foydalanib, shunga o'xshash oldindan hisoblashni amalga oshiramiz

$$2M^2 = nm_S^2 + \frac{m_\beta^2}{\rho^2}L^2\frac{n+1{,}5}{3} = 4\cdot 1^2 + \frac{25}{4{,}24}3{,}2^2\frac{5{,}5}{3} = 114{,}6$$

Harakatning zaif nuqtasidagi nuqtaning o'rni o'rtacha kvadrat xatosi $M^2 = \sqrt{\frac{114{,}6}{4}} = 5{,}4\ sm$ σ_2 ning analogidir. Tarqalishi sezilarli bo'ldi. Ammo bu erda shuni yodda tutish kerakki, oxirgi formula taxminiy va cho'zilgan zarba uchun olingan, shuning uchun aniqlikni oldindan hisoblash uchun qat'iy formulalardan foydalanish yaxshiroqdir.

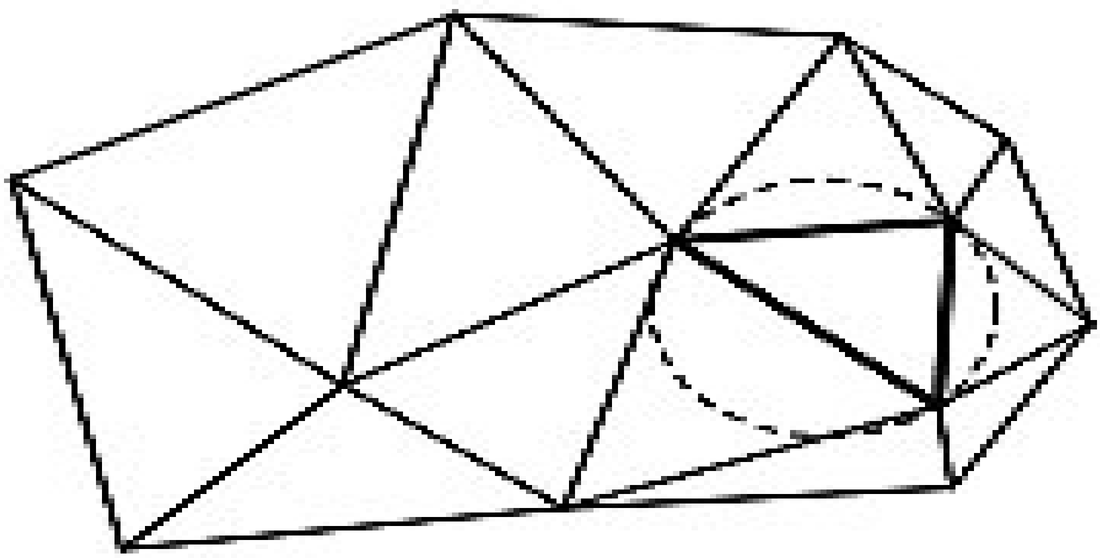
§3.6 Har xil aniqlikdagi ko‟p o‟lchovlar qatorini matematik ishlab chiqish va matematik modellashtirish

Bugungi kunda, raqamli yer modellarini o'rganishda bo'ladigan muammolardan biri qavariq va botiqlikni hisobga olmay, faqat yerning proeksiya maydonini hisoblash asosida maydonni hisoblashda farqlar kelib chiqmoqda. Ushbu muammoni yechishga qaratilgan tadqiqotlar dolzarb hisoblanadi. Bu borada qavariq va botiqlikni ham e'tiborga olgan holda yer maydoni yuzasini hisoblashni taqozo etmoqda.

Ushbu masalani yechishda yaxshi yondashuvlardan biri regulyar bo'lmagan triangulatsiya tarmog'i hisoblanadi. Bu usulda zamonaviy geodezik asboblardan olingan x,y koordinata va z balandliklari tartibsiz nuqtalar to'plami asosida yer maydoni aniqligi yuqori bo'lgan hisoblashni amalga oshirish mumkin. Muammoni yechish bir nechta bosqichlarni o'z ichiga oladi.

Yondashuvni amalga oshirishda qavariq va botiqlikni hisobga olganda, har bir qavariq va botiqlikni normal vektorini qo'shni uchburchak qirralarining normal vektorlari asosida baholanadi. Ikkinchi qadamda, har bir qavariq va botiqlikning burchak qiymatlari hisoblanadi. Uchinchi qadamda, har bir tepalikning Voronoy poligoniga bo'linib chiqiladi. Bu esa tezkor taqsimlash imkonini beradi. Chunki, Voronoy diagrammasi regulyar bo'lmagan triangulatsiya tarmog'ining ikki tomonlama grafigini hosil qilib, hisoblash ishlari amalga oshiriladi. Yakuniy qadamda, har bir tepalik uchun burchak qiymatlari Voronoy poligoniga biriktiriladi.

Delone triangulyatsiyani qurish. Berilgan shaklni *M* ta uchburchakka bo'lish jarayonidir. Berilgan triangulatsiya nuqtalarining ixtiyoriy 3 tasidan qurilgan uchburchak ichiga tushmasa, bu triangulyatsiya Delone shartini qanoatlantiradi. Delone shartini bajariladigan triangulyatsiya Delone triangulyatsiyasi deyiladi (3.3.1-rasm).



3.6.1-rasm. Delone triangulyatsiya

Amaliyotda Delone shartini tekshirishni bir nechta usullari qo'llaniladi. Hisoblashlarni amalga oshirishda foydalaniladigan usullarni keltiramiz:

1. Aylana tenglamasi asosida tekshirish;
2. Oldindan hisoblangan aylana asosida tekshirish;
3. Bir-biriga zid bo'lgan burchaklar yig'indisi bo'yicha tekshirish;
4. Bir-biriga zid bo'lgan burchaklar yig'indisi bo'yicha takomillashtirilgan usul yordamida tekshirish.

Aylana tenglamasi asosida tekshirish. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ nuqtalaridan o’tgan aylananing tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x^2+y^2)\cdot a - x\cdot b + y\cdot c - d = 0$ kanonik shakl ko’rishda ifodalash mumkin. Bu yerda,

$$a = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad c = \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$d = \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (3.3.1)$$

Ixtiyoriy (x_0, y_0) nuqtada $\Delta\big((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\big)$ uchburchakda Delone sharti bajarilishi uchun $\left(a(x_0^2+y_0^2) - bx_0 + cy_0 - d\right)\cdot sgna \geq 0$ tengsizlik sharti bajarilishi lozim, ya’ni (x_0, y_0) nuqta aylana ichida yotmaydi. Hisoblashlarni amalga oshirishda $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ uchlik nuqta soat yo’nalishida bo’lsa $sgna = 1$, teskari bo’lsa $sgna = -1$ qiymat olinadi.

Oldindan hisoblangan aylana asosida tekshirish. Ushbu yondashuv har bir qurilgan uchburchak uchun tashqi chizilgan aylananing radiusi va markazini hisoblash asosida Delone triangulyatsiyasining sharti tekshiriladi. $\Delta\big((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\big)$ uchburchak uchun tashqi chizilgan aylananing markazi (x_s, y_s) va radiusi quyidagicha hisoblanadi.

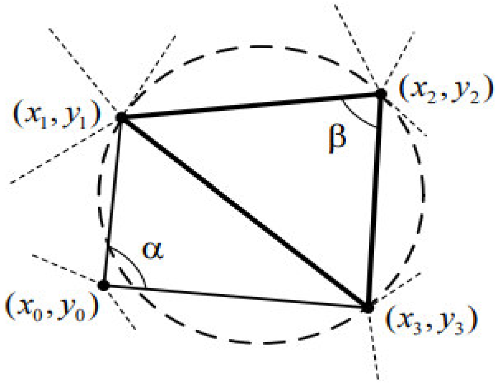
$$x_c = \frac{b}{2a}, \quad y_c = -\frac{c}{2a}, \quad r^2 = \frac{(b^2+c^2-4ab)}{4a^2},$$

bu yerda *a, b, c, d* (3.3.1) ifodada aniqlangan parametrlar.

Ixtiyoriy (x_0, y_0) nuqtada $\Delta\big((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\big)$ uchburchakda Delone sharti bajarilishi uchun $(x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2 \geq r$ tengsizlik sharti bajarilishi lozim.

Qarama-qarshi burchaklar yig'indi bo'yicha tekshirish. Ixtiyoriy (x_0, y_0) nuqtada $\Delta\big((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\big)$ uchburchakda Delone sharti bajarilishi uchun $\alpha + \beta \le \pi$ tengsizlik sharti bajarilishi lozim. Bu shart $\sin(\alpha + \beta) \ge 0$ shartga ekvalent hisoblanadi, ya'ni,

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \ge 0. \qquad (3.3.2)$$



3.6.2-rasm. Delone shartining qarama-qarshi burchaklar yig'indisi bo'yicha tekshirish

Burchaklarning *sinus* va *cosinus* qiymatlarini $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ nuqtalar asosida hosil qilingan vektorlarning skalyar va vektor qo'paytmasi asosida quyidagicha yozish mumkin.

$$\cos\alpha = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_3) + (y_0 - y_1)(y_0 - y_3)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}\sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}},$$

$$cos\,\beta = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_3)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{(x_0 - x_1)(y_0 - y_3) + (x_0 - x_3)(y_0 - y_1)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}\sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}},$$

$$\sin\beta = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}.$$

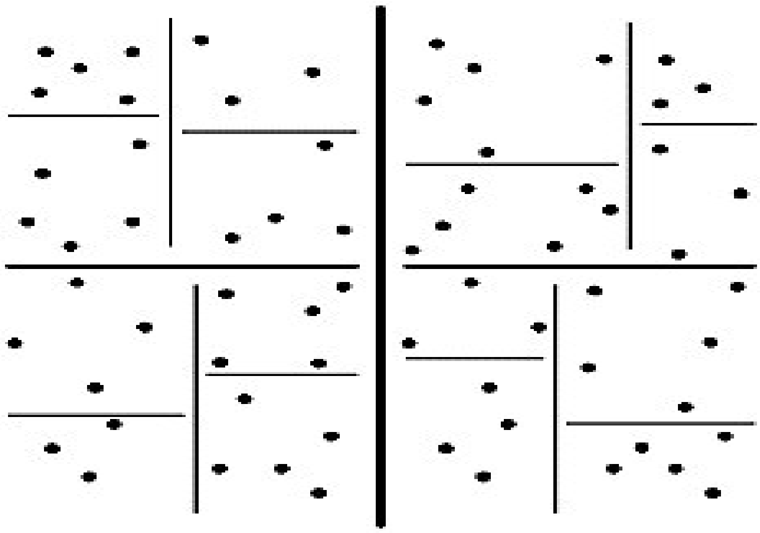
Bu qiymatlarni 3.3.2 ifoda qo'yib, quyidagicha shaklda shartni ifodalash mumkin:

$$\big((\mathrm{x_0} - \mathrm{x_1})(\mathrm{x_0} - \mathrm{x_3}) + (\mathrm{y_0} - \mathrm{y_1})(\mathrm{y_0} - \mathrm{y_3})\big)\big((\mathrm{x_2} - \mathrm{x_1})(\mathrm{x_2} - \mathrm{x_3}) + (\mathrm{y_2} - \mathrm{y_1})(\mathrm{y_2} - \mathrm{y_3})\big) + \Big((\mathrm{x_2} - \mathrm{x_1})(\mathrm{y_2} - \mathrm{y_3}) + (\mathrm{x_2} - \mathrm{x_3})(\mathrm{y_2} - \mathrm{y_1})\big((\mathrm{x_0} - \mathrm{x_1})(\mathrm{y_0} - \mathrm{y_3}) + (\mathrm{x_0} - \mathrm{x_3})(\mathrm{y_0} - \mathrm{y_1})\big)\Big) \ge 0 \qquad (3.3.3)$$

Qarama-qarshi burchaklar yig'indi bo'yicha takomillashtirilgan usul bo'yicha tekshirish. Bu usulda burchaklarning sin va cos qiymatlarini $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ nuqtalar asosida hosil qilingan vektorlarning skalyar va vektor qo'paytmasi birinchi hisoblanmay, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ lar asosida quyidagilar hisoblanadi.

$$s_a = (x_0 - x_1)(x_0 - x_3) + (y_0 - y_1)(y_0 - y_3),$$
$$s_b = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_3).$$

Delone sharti $s_a < 0$ va $s_b < 0$ bo'lsa, Delone sharti bajarilmaydi, $s_a \geq 0$ va $s_b \geq 0$ sharti bajarilsa, Delone sharti bajariladi. Bu qiymatlar uchun qolgan holatlarda (3.3.3) shart tekshiriladi. Bu hisoblash bir muncha amallarni hisoblash vaqtidan yutish imkoniyatini beradi.



3.6.3-rasm. Triangulyatsiyani qurishning "Bo'l va boshqar" algoritmi asosida bo'lish jarayoni

Triangulyatsiyani qurishning "Bo'l va boshqar" algoritmi. Bu algoritm berilgan nuqtalar to'plamini teng ikkiga bo'lishga asoslangan. Birinchi navbatda berilgan to'plam teng ikkiga gorizontal va vertikal chiziqlar asosida bo'linadi. Bu jarayon har bir bo'lingan qism uchun rekursiv amalga oshiriladi. Rekursiya jarayoni bo'lingan qismlardagi nuqtalardan uchburchak hosil qilishga davom etadi. Odatda, qismlardagi nuqtalar uch yoki to'rtta nuqtadan iborat qilib tanlanadi.

Agar triangulyatsiyadagi nuqtalar soni har doim beshtadan ko'p bo'lsa, undagi barcha nuqtalar to'plamini uch va to'rt nuqtali qismlariga ajratish mumkin, ya'ni

$$\left.\begin{array}{c} N = 3k; \\ N = 3k + 1 = 3(k-1) + 4 \\ N = 3k + 2 = 3(k-2) + 4 * 2 \end{array}\right\} k \geq 2, N > 5$$

Triangulyatsiyani qurishning “Bo’l va boshqar” algoritmi quyidagi qadamlardan iborat.

1-qadam. Agar $N = 3$ bo’lsa, bitta uchburchakdan iborat triangulyatsiya tuziladi.

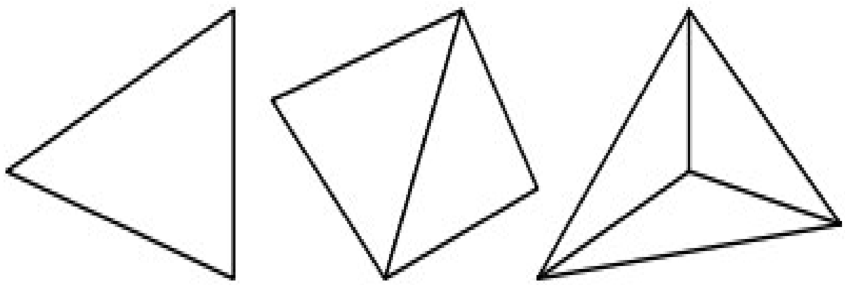
2-qadam. Agar $N = 4$ bo’lsa, ikki yoki uch uchburchakdan iborat triangulyatsiya tuziladi.

3-qadam. Agar $N = 8$ bo’lsa, to’plam 4 ta nuqtalardan tashkil topgan 2 qismga bo’linadi. Rekursiv ravishda yuqoridagi algoritm qadamlari qo’llaniladi. Hosil bo’lgan uchburchaklar bir-biri bilan biriktirilib, triangulyatsiya tuziladi.

4-qadam. Agar $N < 12$ bo’lsa, to’plam 3 ta $N - 3$ nuqtalardan tashkil topgan 2 qismga bo’linadi. Rekursiv ravishda yuqoridagi algoritm qadamlari qo’llaniladi. Hosil bo’lgan uchburchaklar bir-biri bilan biriktirilib, triangulyatsiya tuziladi.

5-qadam. Agar $N \geq 12$ bo’lsa, to’plam $\lfloor N/2 \rfloor$ *va* $\lceil N/2 \rceil$nuqtalardan tashkil topgan 2 qismga bo’linadi. Rekursiv ravishda yuqoridagi algoritm qo’llaniladi. Hosil bo’lgan uchburchaklar bir-biri bilan biriktirilib, triangulyatsiya tuziladi.

Uch va to’rtta nuqtali to’plamlar asosida tashkil etilgan misollar 3.3.4-rasmda keltirilgan.



3.6.4-rasm. Uch va to’rtta nuqtadan iborat triangulyatsiyalar

Voronoy diagramasini qurish. Yaqinlik zonalarini qurish masalasi nuqtalar to’plamidagi a_i nuqtadan o’rnatilgan nuqtagacha *s* masofada bo’lgan barcha tekislikning barcha nuqtalarini aniqlashni amalga oshiradi. Shuning uchun bu ishni Delone triangulatsiyasi asosida bajarish qiyinchilik keltirib chiqarmaydi. Shuni ta’kidlash kerakki, berilgan harakterli nuqtalar uchun Voronoy poligonlarini tuzish chekli bo'ladi. Amaliy jihatdan, tadqiqot ob'ektining chegarasini belgilash bilan bajarish mumkin.

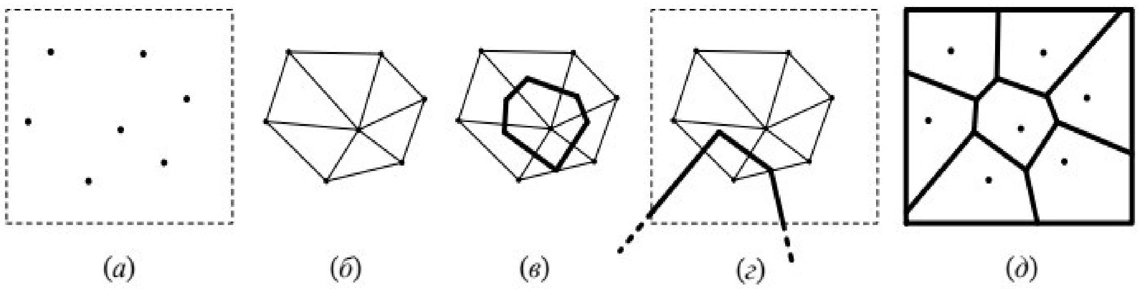
Voronoy poligoniningg algoritmni yaratish quyidagi bosqichlarda amalga oshiriladi.

Voronoy poligonini qurishda joyning balandlik xarakterli nuqtalar to'plami olinadi (3.3.5.*a*.-rasm). Ushbu balandlik xarakterli nuqtalar uchun Voronoy burchaklarini aniqlash zarur bo'ladi (3.3.5.*d*.-rasm).

1-bosqich. Joyning balandlik xarakterli nuqtalar asosida Delone triangulyatsiyasi yaratiladi.

2-bosqich. Yaratilgan har bir triangulyatsiyalar uchun tashqi chizilgan aylana markazi topiladi.

3-bosqich. Topilgan har bir aylana markazi uchun Voronoy burchaklarining markazi topiladi. Buni bajarishda, qo'shni uchburchaklar bo'yicha aylana markazi aylanib chiqilib tashqi aylanalarini markazlari topiladi. Agar aylana markazi triangulyatsiya chegarasida bo'lmasa, u holda aylana markaziga mos keladigan Voronoy poligonining koordinatalari topiladi (3.3.5.*v*.-rasm). Agarda aylana markazi chegarada bo'lsa, u holda Voronoy poligoni soni chekli bo'ladi. Bunday holatda uning ikkita tomoni olib tashlanadi.



3.6.5-rasm. Voronoy poligonlarini tuzish: *a* – dala geodezik o'lchashlari; *b* – Delone triangulyatsiyasini tuzish; *v, g* – ichki va tashqi tugunlar uchun Voronoy poligonlarini tuzish; *d* – tuzilgan Voronoy poligonlari

Uch o'lchamli model asosida yerning qavariq va botiq maydonini hisoblash. Masalani yechishda, uchta qo'shni nuqtalar asosida modelga keltiriladi, bu tetraedr shaklni beradi (3.3.6(a, b)-rasm). Q tetraedrning balandligi qo'shni uchlari B_0, B_1 va B_2 belgilashlarni olaylik (3.3.6.b-rasm). Bu tetraedrning markazi *C* nuqta bo'lgan aylanada yotsin. Koordinatalarni Q ga o'tkazish orqali biz $Q = (0,0,0)$, $V_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $V_1 = (x_1, y_1, z_1)$, va $V_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ega bo'lamiz. Uchta qirraning uchta o'rta nuqtalari $\frac{B_0}{2}, \frac{B_1}{2}, \frac{B_2}{2}$ mos keladi va perpendikulyar bissektrisa tekisliklari shar markazida kesishadi (3.3.6.s-rasm).

Q koordinata bo'yicha $C = (x, y, z)$ ni o'tkazamiz. Perpendikulyar bissektrisa tekisliklaridagi normal vektorlar $QV_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $QV_1 = (x_1, y_1, z_1)$, va $QV_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ni vektor qirralar sifatida belgilaymiz (3.3.6.*d*-rasm). Ushbu normal vektorlar va uchta qirralarning o'rta nuqtasini birlashtirish asosida, uchta perpendikulyar bissektrisa tekisliklarining tenglamalarini quramiz. Bu esa bizga *C* shar markazi uchun quyidagi tarzda yechish uchun bir vaqtning o'zida chiziqli tenglamalarni qurishimiz mumkin:

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = \frac{|QV_0|^2}{2};$$
$$x_1 x + y_1 y + z_1 z = \frac{|QV_1|^2}{2}; \quad (3.3.4)$$
$$x_2 x + y_2 y + z_2 z = \frac{|QV_2|^2}{2}.$$

Ushbu tenglamalarni Kramer usulida yechish mumkin, ya'ni yechim quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{|QV_0|^2 QV_0 \times QV_1 + |QV_0|^2 QV_1 \times QV_2 + |QV_1|^2 QV_2 \times QV_0}{2} \qquad (3.3.4)$$

bu yerda *D*-koeffitsentlar matritsasining determinanti. $C = (x, y, z)$sfera markazi uchun $x_i (i = 0,1,2), y_i (i = 0,1,2), z_i (i = 0,1,2)$lar (3.3.3) tenglama asosida aniqlanadi.

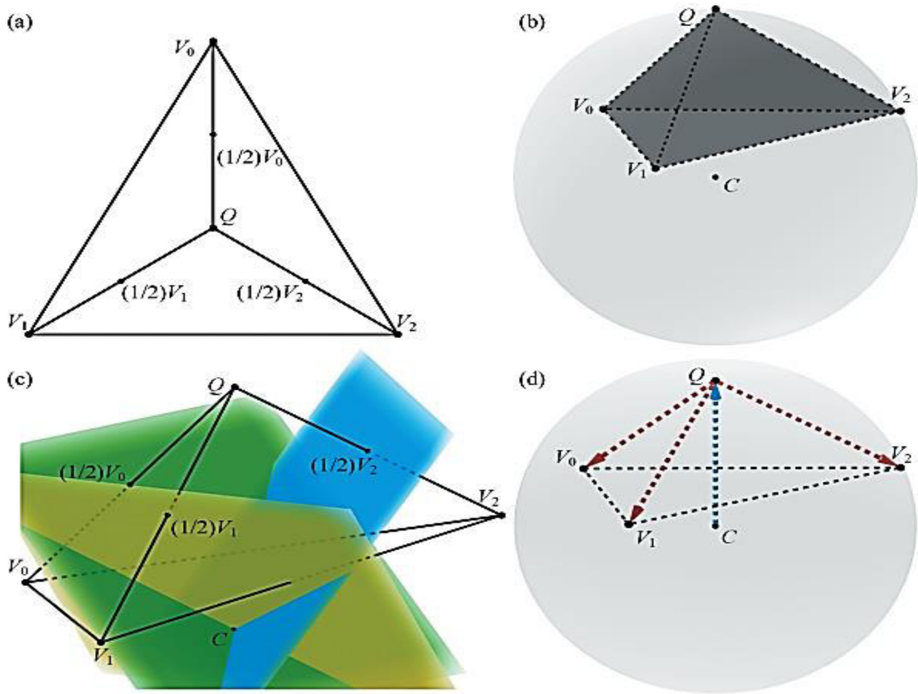
(3.3.3) tenglamani $\frac{|QV_0|^2 |QV_1|^2 |QV_2|^2}{2}$ bo'lamiz. Bu esa bizga tashqi CQnormal vektorga yo'nalishini beradi.(3.3.6.*d*-rasmga qarang). Natijaviy vektor CQ normal vektorga musbat *s* marta karrali bo'ladi, ya'ni,

$$\frac{QV_0 \times QV_1}{|QV_0|^2 |QV_1|^2} + \frac{QV_1 \times QV_2}{|QV_1|^2 |QV_2|^2} + \frac{QV_2 \times QV_0}{|QV_2|^2 |QV_0|^2} = c \times CQ. \qquad (3.3.5)$$

(3.3.5) tenglamada almashtirish bajarib, quyidagiga ega bo'lamiz,

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{QV_i \times QV_{i+1}}{|QV_i|^2 |QV_{i+1}|^2} = \sum_{i=0}^{2} \frac{N_i \sin(a_i)}{|QV_i|^2 |QV_{i+1}|^2} = c \times CQ. \qquad (3.3.6)$$

Bu yerda barcha indekslar 3 ning qoldig‘i bo’yicha olinadi. N_i– i-tomonning normal vektori, $a_i - V_i$ va V_{i+1} lar orasidagi burchak. Uchta qo’shni nuqtada N_i normal vektorining vazni $\frac{\sin(a_i)}{|QV_i|\ \ |QV_{i+1}|}$ ga teng.



3.6.6-rasm. Uch o’lchamli nuqtalarni modellashtirish.

Matematik induksiya asosida xususiy holatdan umumiy holatga o’tishimiz mumkin, ya’ni, atrofdagi nuqtalar soni *n(n>3)*holat uchun ham. Umumiy holatga o’tish Maxning ishida isboti keltirgan.

(3.3.6) tenglamani umumiy holat ko’rinishi quyidagicha bo’ladi:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{QV_i\times QV_{i+1}}{|QV_i|^2|QV_{i+1}|^2}=\sum_{i=0}^{n}\frac{N_i\sin(a_i)}{|QV_i|^2|QV_{i+1}|^2}=\sum_{i=0}^{n}\frac{N_i|QV_i||QV_{i+1}|\sin(a_i)}{|QV_i|^2|QV_{i+1}|^2}=\sum_{i=0}^{n}\frac{N_i S_{QV_iV_{i+1}}}{|QV_i|^2|QV_{i+1}|^2}= c\times CQ, \qquad (3.3.7)$$

bu yerda $S_{QV_iV_{i+1}}$ – uchburchak maydoni, uni Geron formulasi bo’yicha hisoblanadi. *s* qiymat va *N* vektor regulyar bo’lmagan triangulyatsiya tarmog‘i natijasida nuqtalarning vaznli to’plashdan hosil qilingan normal vektor bo’yicha amalga oshiriladi.

Normal vektorning $N = (N_x, N_y, N_z)$nuqtasi asosida qiyalik burchagini va aspekt oson hisoblash mumkin. Bu Ritter ning. ishida normal vektorga asoslangan asosida qiyalik burchagini va aspektni hisoblash usuli taklif etilgan, ya'ni,

$$\beta = arctan\frac{\sqrt{N_x^2 + N_y^2}}{N_z},$$

$$asp = \begin{cases} 90 - t, & t \leq 90 \\ 450 - t, & t > 90 \end{cases}, t = atan2(N_y, N_x) \times \frac{180}{\pi}$$

bu yerda $atan2$ funksiyasi musbat x o'qi va $(x, y) \neq (0,0$ nuqtagacha bo'lgan nur orasidagi berilgan radianlarda berilgan Evklid tekisligidagi burchak natijasida aniqlanadi.

Yuqoridagilar asosida regulyar bo'lmagan triangulyatsiya tarmog'i quriladi. Triangulyatsiya tarmog'ining har bir uchburchagi quyidagicha aniqlanadi:

$$S_t = \frac{1}{2}|(x_{t1} - x_{t3})(y_{t2} - y_{t3}) - (x_{t2} - x_{t3})(y_{t1} - y_{t3})|.$$

Triangulyatsiya tarmog'ini har bir uchburchagining yuzalari yig'indisi esa berilgan shaklning yuzasini hisoblash imkoniyatini beradi, ya'ni:

$$S = \sum_{t=1}^{n} S_t$$

Tajribaviy sinov o'tkazish. Hisoblash tajribasi Bulung'ur tumani "G'o'bdin" massividagi (uchinchi bob 3.1. paragraf)da ko'rsatilgan konturlarda hududning 1:10 000 masshtabli qishloq xo'jaligi kartasi yordamida o'lchash ishlari olib borildi. Geodezik dala o'lchash natijasida olingan 31977 nuqtalar asosida "G'o'bdin" massivi yuqorida keltirilgan konturlar maydonining 3 o'lchamli raqamli model va keltirilgan matematik model va matematik usullar asosida "Matlab R2019" da dasturiy majmua ishlab chiqildi. Majmua quyidagi bosqichlardan iborat:

a) ma'lumotlarni o'qish;

b) o'qilgan 3 o'lchamli ma'lumotlarni tartibli holatga keltirish;

v) 3 o'lchamli modelda qiyaliklar uchun burchaklarni hisoblash;

g) regulyar bo'lmagan triangulyatsiya tarmog'ini qurish;

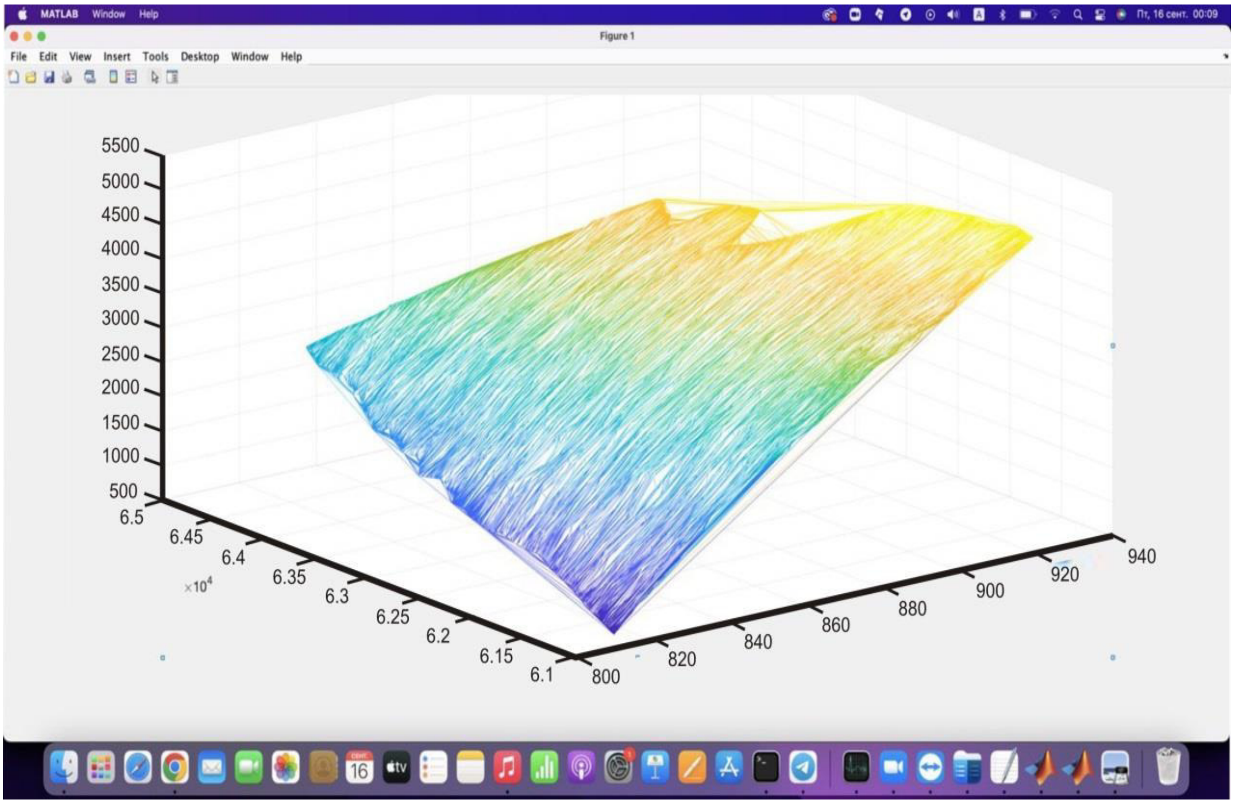
d) qurilgan tarmoqning har bir triangulyatsiya uchburchagi yuzasini hisoblash;

ye) hisoblangan uchburchaklar yuzasi yig'indisini hisoblash;

j) natijani nashr etish.

Dasturiy hisoblash matlab matematik hisoblash majmuasida quyida keltirilgan

Olingan natijalar asosida “Matlab R2019” da dasturiy majmuacida “G‘o’bdin” massivini belgilangan o’lchashlari natijalari regulyar bo’lmagan triangulyatsiya tarmog‘i bilan modellashtirilgan natijani vizuallashtirish 3.3.7-rasmda keltirilgan.



3.6.7-rasm. Matlab R2019 da dasturiy majmuacida triangulyatsiya tarmog‘ining vizual ko’rinishi

ADABIYOT

1. Русяева Е.А. Теория математической обработки геодезических измерений: учебное пособие Часть I. Теория ошибок измерений.- М.: МИИГАиК, 2016.- 56 с.

2. Голубев В.В. Геодезия. Теория математической обработки геодезических измерений: учебник для вузов. –М.: Изд-во МИИГАиК, 2016. – 422 с.: ил.

3.Попело В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 2. Оценивание результатов геодезических и их погрешностей на основе вероятностных представлений: учебное пособие / В.Д. Попело, М.В. Ванеева. – Воронеж: ВГАУ, 2015. – 138 с.

4. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1984. – 352 с.

5. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений: Справочное пособие. – М.: Недра, 1989. – 413 с.

6. D.O.Jo‘rayev., H.D.Jo’rayeva. Geodezik o’lchashlarni matematik ishlash nazariyasi. 1-qism. O’lchash xatoliklari nazariyasi. O’quv qullanma. D.O.Jo’rayev, H.D. Jo’rayeva. Toshkent. 2014, 148 b.

7. Isakov E.X. Geodezik o’lchashlarni matematik qayta ishlash. 1-qism O’quv qullanma. Samarqand: Turon nashr, 2022, 184 b.

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

http://matrixcalc.org/

http://ru.onlinemschool.com/math/assistance/equation/matr/

http://www.matworld.ru/calculator/matrix-calculator-1.php

http://math.semestr.ru/matrix/equations.php

http://matrixcalc.appspot.com/ru/index.html

http://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_наименьших_квадратов

http://www.armig.org/polygonometry.htm

http://medstatistic.ru/calculators.html

http://www.phys.nsu.ru/ok03/Praktikum/main().html

ILOVALAR

Илова 1

O'lchamlar jadvali $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}}$ argument bilan $t = \frac{\Delta}{m}$

$\pm t$	y	$\pm t$	y	$\pm t$	y	$\pm t$	y	$\pm t$	y
0,0	0,564	0,6	0,472	1,2	0,275	1,8	0,112	2,4	0,032
0,1	0,561	0,7	0,441	1,3	0,242	1,9	0,093	2,5	0,025
0,2	0,553	0,8	0,410	1,4	0,212	2,0	0,076	2,6	0,019
0,3	0,539	0,9	0,376	1,5	0,183	2,1	0,062	2,7	0,015
0,4	0,521	1,0	0,342	1,6	0,156	2,2	0,050	2,8	0,011
0,5	0,498	1,1	0,308	1,7	0,133	2,3	0,040	2,9	0,008
								3,0	0,006

Илова-2

Ehtimollar integrali qiymatlari jadvali $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

T	Ф(t)	T	Ф(t)	T	Ф(t)
,00	0,0000	1,25	0,7887	2,50	0,9876
0,05	0,0399	1,30	0,8064	2,55	0,9892
0,10	0,0797	1,35	0,8230	2,60	0,9907
0,15	0,1192	1,40	0,8385	2,65	0,9920
0,20	0,1585	1,45	0,8529	2,70	0,9931
0,25	0,1974	1,50	0,8664	2,75	0,9940
0,30	0,2358	1,55	0,8789	2,80	0,9949
0,35	0,2737	1,60	0,8904	2,85	0,9956
0,40	0,3108	1,65	0,9011	2,90	0,9963
0,45	0,3473	1,70	0,9109	2,95	0,9968
0,50	0,3829	1,75	0,9199	3,00	0,99730
0,55	0,4177	1,80	0,9281	3,10	0,99806
0,60	0,4515	1,85	0,9357	3,20	0,99863
0,65	0,4843	1,90	0,9426	3,30	0,99903
0,70	0,5161	1,95	0,9488	3,40	0,99933
0,75	0,5468	2,00	0,9545	3,50	0,99953
0,80	0,5763	2,05	0,9596	3,60	0,99968
0,85	0,6047	2,10	0,9643	3,70	0,99978
0,90	0,6319	2,15	0,9684	3,80	0,99986
0,95	0,6579	2,20	0,9722	3,90	0,99990
1,00	0,6827	2,25	0,9756	4,00	0,99994
1,05	0,7063	2,30	0,9786	4,10	0,99996

Илова-3

Qiymatlar jadvali $Z = \frac{1}{2} ln\left[\frac{1+|r|}{1-|r|}\right]$.

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,1	0,100	0,110	0,121	0,131	0,141	0,151	0,161	0,172	0,182	0,192
0,2	0,203	0,213	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,289	0,299
0,3	0,310	0,320	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,388	0,400	0,412
0,4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,497	0,510	0,523	0,536
0,5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,618	0,633	0,648	0,662	0,678
0,6	0,693	0,709	0,725	0,741	0,758	0,775	0,793	0,811	0,829	0,848
0,7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,950	0,973	0,996	1,020	1,045	1,071
0,8	1,099	1,127	1,157	1,189	1,221	1,256	1,293	1,333	1,376	1,422
0,9	1,472	1,528	1,589	1,658	1,738	1,832	1,946	2,092	2,298	2,647
0,99	2,647	2,670	2,759	2,826	2,903	2,994	3,106	3,250	3,453	3,800

Илова-4

r	$\Phi^{/}(t)=\beta$												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,0
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,13	0,27	0,40	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,13	0,26	0,40	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,13	0,26	0,40	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6

12	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
20	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
30	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
60	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4

Илова -5

c^2 / r	1	2	3	4	6	8	10	12	16
1	0,317	0,157	0,083	0,046	0,014	0,005	0,002	0,000	0,000
2	0,606	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,000
3	0,801	0,572	0,392	0,262	0,112	0,046	0,019	0,007	0,001
4	0,910	0,736	0,558	0,406	0,199	0,092	0,040	0.017	0,003
5	0,963	0,849	0,700	0,549	0,306	0,156	0,075	0,035	0,007
6	0,986	0,920	0,809	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,014
7	0,995	0,960	0,885	0,780	0,540	0,333	0,189	0,101	0,025
8	0,998	0,981	0,934	0,857	0,647	0,434	0,265	0,151	0,042
9	0,999	0,992	0,964	0,911	0,740	0,534	0,350	0,213	0,067
10	0,999	0,996	0,981	0,947	0,815	0,529	0,440	0,285	0,100
11	1,000	0.998	0,991	0,970	0,873	0,713	0,530	0,363	0,141
12		0,999	0,996	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,191
13		1,000	0,998	0,991	0,946	0,844	0,694	0,528	0,249
14			0,999	0,996	0,966	0,889	0,762	0,606	0,313
15			1,000	0,997	0,980	0,924	0,820	0,679	0,382