O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

D. O. JO‘RAYEV, H.D. JO‘RAYEVA

GEODEZIK O‘LCHASHLARNI MATEMATIK ISHLASH NAZARIYASI

1-QISM
O’LCHASHLAR XATOLIKLARI NAZARIYASI

TOSHKENT - 2014

UDK 519.2

Muallif: Jo‘rayev Davron Oqnazarovich
Jo’rayeva Husnora Davronovna

Geodezik o‘lchashlarni matematik ishlash nazariyasi. 1-qism. O‘lchash xatoliklari nazariyasi. Darslik. D.O.Jo‘rayev, H.D. Jo’rayeva. Toshkent. 2014,
148 b.

Darslikda ehtimollik nazariyasi va matematik statistikaga asoslangan xatoliklar nazariyasining asosi yoritilgan. Xatoliklarning kelib chiqishi, topish usullari, xossasi va ularning ta’sirini kamaytirish usullari bayon qilingan. Ko‘p xil o‘lchashlarni birgalikda tenglashtirish nazariyasi: parametrik va korrelat tenglashtirish usullarining mohiyati, algoritmi va ularni EHM da hisoblash usullari yoritilgan.

«Geodeziya, kartografiya va kadastr» yo‘nalishi va ushbu fanni o‘rganadigan turdosh yo‘nalish talabalari uchun ham mo‘ljallangan.

Taqrizchilar:
Avchiyev Sh.K., texnika fanlari nomzodi, dotsent (TAQI)
Muborakov X.M., texnika fanlari nomzodi, dotsent (O‘zMU)

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2013-yil, 20-dekabrdagi 484-sonli buyrug‘iga asosan «Geodeziya, kartografia va kadastr» yo‘nalishi va turdosh yo‘nalishida ta’lim olayotgan talabalar uchun darslik sifatida nashr etishga ruxsat berildi (grif № 484-116).

KIRISH

Geodezik ishlarda o‘lchashlar katta o‘rin tutadi. O‘lchashlar natijasi esa ma’lum sabablarga ko‘ra xatolik bilan olinadi. Xatoliklarning kelib chiqish, taqsimlanish qonuniyatlarini o‘rganish, o‘lchash natijalari xatosining yo‘l qo‘yilgan chekdan oshgan va oshmaganligini aniqlash va o‘lchashlarni matematik qayta ishlash natijasida aniqlanayotgan qiymatning haqiqiy miqdorini aniqlashni o‘rganish "Geodeziya, kartografiya va kadastr" yo‘nalishi bo‘yicha o‘qiyotgan talabalar uchun juda zarur.

«Geodezik o‘lchashlarni matematik ishlash nazariyasi» fani ikki qismga bo‘linadi:

1-qism – Ehtimollar nazariyasiga asoslangan o‘lchashlar xatoliklari nazariyasi;

2- qism – Eng kichik kvadratlar usuli.

O‘z navbatida fanning birinchi qismi 2 bo‘limdan iborat:

1. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika;
2. O‘lchash xatoliklari nazariyasi.

Ikkinchi qism ikki bo‘limdan iborat:

1. Tenglashtirishning parametrik usuli;
2. Tenglashtirishning korrelat usuli.

Shuning uchun muallif o‘quv darslikni tayyorlashda uni quyidagilarga bo‘lishni lozim topdi:

1-qism: Ehtimollar nazariyasiga asoslangan o‘lchashlar xatoliklari nazariyasi; 1-bo‘lim: Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika;

1-qism: Ehtimollar nazariyasiga asoslangan o‘lchashlar xatoliklari nazariyasi; 2-bo‘lim: O‘lchashlar xatoliklari nazariyasi.

2-qism: Kichik kvadratlar usuli. 1-bo‘lim: Tenglashtirishning parametrik usul;

2-qism: Kichik kvadratlar usuli. 2-bo‘lim: tenglashtirishning korrelat usuli.

1-QISM

1 – BO‘LIM. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

Hozirgi paytda xatoliklar nazariyasini o‘rganish va tadqiq qilish ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning zamonaviy ilmiy yutuqlaridan foydalangan holda olib borish kerakligini ko‘zda tutmoqda. Shuning uchun, fanning birinchi qismi ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bo‘limlarini o‘rganishdan boshlanadi.

I. EHTIMOLLIK NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI VA TEOREMALARI

1.1. HODISALAR VA ULARNING TURLARI

Ehtimollar nazariyasi – ko‘plab tasodifiy hodisalarning sonli qonuniyatini o‘rganadigan matematik fandir.

Tasodifiy hodisa deb shartlar to‘plami *S* bajarilganda ro‘y berishi ham, ro‘y bermasligi ham mumkin bo‘lgan hodisaga aytiladi. Lekin, tasodifiy hodisa ommoviy ro‘y berganda qandaydir aniq qonuniyat amal qiladi. (tangani tashlaganda taxminan gerb va raqam tomonining teng tushishi, o‘q otilganda nishonning chekkasidan ko‘ra uning markaziga ko‘proq tegishi va hokazolar).

Sinash natijalarini sonli va sifat jihatidan ifodalash mumkin. Har qanday sinashning sifatli xarakteristikasi **hodisa** deyiladi. Masalan, nishonga o‘q otganda ikkita hodisa bo‘lish mumkin: nishonga tegish va tegmaslik.

Tajribaning har qanday sonli xarakteristikasi **tasodifiy miqdor** deyiladi. Qandaydir miqdorning o‘lchash natijasi, otishmadagi koordinataga tushishi va boshqalar tasodifiy miqdorlarga misol bo‘la oladi.

Hodisalar shartli ravishda **oddiy va murakkab hodisalarga** bo‘linadi. Oddiy hodisalar bu - bo‘lib bo‘lmaydigan hodisalardir. Murakkab hodisalar bir nechta oddiy hodisani o‘z ichiga oladi. Masalan, bir o‘lchashda bitta xatolikning paydo bo‘lishi oddiy hodisa, 10 marta o‘lchashda 5 xatolikning paydo bo‘lishi murakkab hodisadir. Hodisalar lotin alifbosining bosh harflari A, B, C yoki A_1, A_2,...,A_n deb belgilanadi.

Belgilangan kompleks shartlarni bajarganda hodisalar quyidagilarga bo‘linadi: ishonchli, imkonsiz va tasodifiy.

Albatta sodir bo‘ladigan hodisaga **ishonchli hodisa** deyiladi. Masalan, oq sharlarga to‘ldirilgan qutidan bitta sharni olganda oq shar chiqish ishonchli hodisadir. Ishonchli hodisalar U xarfi bilan belgilanadi.

Xech qachon sodir bo‘lmaydigan hodisalar **imkonsiz hodisa** deyiladi. Masalan, oq sharlar to‘ldirilgan qutidan bitta sharni olsak qora sharning chiqishi imkonsiz hodisadir. Imkonsiz hodisalar V xarfi bilan belgilanadi.

Biror belgilangan shartlarni bajarganda hodisaning yo bo‘lishi, yoki bo‘lmasligi **tasodifiy hodisa** deyiladi. Masalan, tangani tashlaganimizda gerb yoki yozuv tomoni bilan tushishi tasodifiy hodisadir.

Tasodifiy hodisalar turlari:

1. **Birgalikdagi tasodifiy hodisalar** – tajriba natijasida bir vaqtda sodir bo‘ladi. Masalan, snaryadning nishonga tegishi va uning portlashi birgalikdagi hodisadir.

2. **Alohida (birgalikda bo‘lmagan) hodisalar** - hech qachon birgalikda bo‘lmaydigan hodisalar. Masalan, tangani bir marta tashlaganda gerb va yozuv tomonining birdaniga paydo bo‘lmasligi.

3. **Teng imkoniyatli** - bir xil imkoniyatga ega bo‘lgan paydo bo‘lish hodisasidir. Masalan, tanga tashlanganda gerb yoki yozuv tomonining tushishi hodisasi.

4. **Hodisaning to‘liq guruhi** - tajriba paytida hodisaning albatta paydo bo‘lishi. Masalan, narda toshlarini tashlaganda bari-bir biron tomoniga tushishi.

5. **Qarama-qarshi hodisa** – hodisaning to‘liq guruhidan iborat ikkita birgalikda bo‘lmagan hodisa. A hodisaga qarama-qarshi hodisa $\overline{A}$ deb belgilaydi. Masalan, A – otganda nishonga tegish hodisasi, $\overline{A}$- otganda nishonga tegmaslik hodisasi.

6. **Mustaqil hodisalar** – Boshqa hodisaning paydo bo‘lish yoki bo‘lmasligidan qat’iy nazar paydo bo‘lish imkoniyatiga ega bo‘lgan hodisa. Masalan, bir vaqtda ikkita tanga tashlanganda gerb tomonining tushishi ikkinchi tanganing qaysi tomon bilan tushishiga bog‘liq emas.

7. **Bog‘liq bo‘lgan hodisalar**. Paydo bo‘lish imkoniyati boshqa hodisaning paydo bo‘lishiga bog‘liqligi. Masalan, 2 marta o‘q otganda nishonga tegishini olsak, ikkinchi o‘qning nishonga tegishi bog‘liq bo‘lgan hodisadir, ya’ni u birinchi marta otilganda nishonga tegishi mumkin edi.

Hodisaning paydo bo‘lish imkoniyatini sonli taqqoslash uchun hodisaning **ehtimolligi** tushunchasi kiritiladi.

Ishonchli hodisaning ehtimoli o‘lchov birligi sifatida qabul qilingan. Agar, ishonchli hodisaning ehtimolini birga teng deb qabul qilsak, unda boshqa hodisalar imkoniyatli, lekin ishonchsizdir – ehtimolligi birdan kam bo‘ladi. Imkoniyatsiz hodisaga nolga teng ehtimollik qabul qilinadi.

Har qanday hodisa ehtimolining o‘zgarish chegarasi quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$0 \le P(A) \le 1, \qquad (1.1)$$

shu bilan birga $P(U) = 1, \quad P(V) = 0$.

Yana **amaliy ishonchli** va **amaliy ishonchsiz** hodisa bo‘lishi mumkin. Ya’ni hodisa ehtimoli birga va nolga teng bo‘lgan hodisalar. Bir va nolga yaqinlashishi darajasi amaliy bajarish nuqtai nazaridan aniqlanadi.

Misol. Artilleriya 1000 snaryad otgan bo‘lsa, 999 snaryad portlaydi, bitta snaryad portlamaydi. Snaryadning portlamaslik ehtimoli 0,001 ga, portlash ehtimoli 0,999 ga teng. Birinchi misolda hodisani amaliy mumkin bo‘lmagan, ikkinchisida amaliy ishonchli.

1.2. EHTIMOLLIKNI BEVOSITA HISOBLASH

Hodisalar bo‘ladiki, ehtimolini tajribaning shartidan aniqlash mumkin. Buning uchun hodisalar to‘liq guruhini o‘z ichiga olgan oddiy(elementar) hodisalar kerak. Bunda, tajriba o‘z maromiga yetdi deyish mumkin. Bunday tajriba uchun imkoniyat yaratuvchi bahoga asoslangan ehtimollikni bevosita hisoblash mumkin. Hodisaga qulaylik tug‘diradigan tasodif deb shunga aytiladiki, agar tasodifning paydo bo‘lishi hodisaning paydo bo‘lishiga olib kelsa.

A **hodisaning ehtimoli** deb, tajribaning bu hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi natijalar sonining tajriba yagona mumkin bo‘lgan va teng imkoniyatli elementar natijalari jami soniga nisbatiga aytiladi. Hodisaning ehtimolligi A quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$P(A) = \frac{M}{N}, \qquad (1.2)$$

bu yerda: N – hodisaning umumiy soni, M – hodisa A ga qulaylik tug‘diruvchi voqealar soni. Formula (1.2) ehtimollikni klassik va bevosita hisoblash formulasi deyiladi. Ya’ni (1.2) formulani qo‘llagan holda bir marta tashlangan tanganing gerb tomonining tushish A hodisasi ehtimoli teng.

$$P(A) = \frac{1}{2},$$

Masala 1.1 a) qutida 10 ta brak, 15 ta talabga javob beradigan detal mavjud. Qutidan bitta detalni olganda standartga javob beradigan detal chiqish ehtimolini toping.

Yechish. (1.2) formula bo‘yicha:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

b) Shart xuddi shunday, lekin qutidan 3 ta detal olinadi. 3 ta detalning standartga javob berish ehtimolini toping.

Yechish. Hodisalarning umumiy soni qutidan 3 marta 3 tadan detal olgandagi N songa teng. N sonini hisoblash uchun K elementdan iborat bo‘lgan l birikmalar bo‘yicha hisoblaymiz:

$$C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!} \qquad (1.3)$$

Faktorialning asosiy xossalaridan foydalanib $n! = n(n-1)!$ va qisqartirishlarni amalga oshirib, topamiz:

$$N = C_{25}^3 = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 22!} = 25\cdot 4\cdot 23 = 2300\,.$$

Uchta standartga javob beradigan paydo bo‘lishiga qulaylik tug‘diradigan hodisalar soni standart detalni olish usullari soniga teng:

$$M = C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 12!} = 5\cdot 7\cdot 13 = 455\,.$$

Topilishi kerak bo‘lgan ehtimollik:

$$P(B) = \frac{C_{15}^3}{C_{25}^3} = \frac{455}{2300} = 0{,}198\,.$$

1.3. NISBIY CHASTOTA VA EHTIMOLLIK

Har qanday tajriba ham voqeaga olib kelmaganidek, har qanday hodisaning ehtimolini ham formula (1.2) bilan hisoblab bo‘lmaydi. Masalan, "otishda nishonga tegish" yoki "bir soat ishda radiolampaning ishdan chiqish" kabi hodisalar ehtimolini (1.2) formula bilan hisoblab bo‘lmaydi. Bunday hodisalar uchun ehtimolni aniqlashning boshqa usullari qo‘llaniladi. Bu usullar tajriba (eksperiment) va hodisalarning **nisbiy chastotasi (chastotalik)** tushunchasi bilan bog‘liq.

Sodir bo‘ladigan hodisalar m sonining hamma bajarilgan tajribalar n soniga nisbati hodisaning **nisbiy chastotasi** deyiladi:

$$Q = \frac{m}{n}\ . \qquad (1.4)$$

Agar, n ta erkli tajribaning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p o‘zgarmas va tajribalar soni yetarlicha katta bo‘lsa, u holda nisbiy chastotaning r ehtimoldan chetlanish absolyut qiymat bo‘yicha istalgancha kichik bo‘lish ehtimoli birga istalgancha yaqin bo‘ladi. Bu qonuniyatning matematik ifodasini Yakov Bernulli o‘zining katta sonlar qonuni teoremasida birinchi marta bergan. Bernulli teoremasi quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$P_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{m}{n} - P\right| < \varepsilon\right\} > 1-\delta \qquad (1.5)$$

bu yerda: ε va δ - juda kichkina musbat son, yoki formula:

$$ehtim.\lim_{n\to\infty} Q = P \qquad (1.6)$$

Nisbiy chastotani hodisaning statistik ehtimoli ham deyiladi.

Masala 1.2. Nishonga 20 ta o‘q otilgan, ulardan 18 tasi nishonga teggan. Nishonga tegishning nisbiy chastotasini toping.

Yechish:

$$Q = \frac{m}{n} = \frac{18}{20} = 0{,}9.$$

1.4. HODISALAR YIG‘INDISI. BOG‘LIQ BO‘LMAGAN HODISALAR UCHUN YIG‘INDILAR TEOREMASI

Amaliyotda bevosita sodir bo‘lishi mumkin bo‘lmagan hodisaning ehtimolini aniqlash talab qilinadi. Bunday paytda ma’lum bo‘lgan bitta hodisaning ehtimoli orqali boshqa o‘ta murakkab hodisalarning ehtimolini topish usullari qo‘llanadi.

Bunday masalalarni yechishda ehtimollar nazariyasining asosiy teoremalari: yig‘indilar teoremasi va ko‘paytirishlar teoremasi qo‘llaniladi.

Ikki yoki bir nechta hodisaning yig‘indisi deb shunday murakkab hodisaga aytiladiki, ushbu hodisalardan birortasi sodir bo‘lishligini nazarda tutadi. Alohida hodisa uchun shartli ravishda yozamiz:

$$B = \text{yoki } A_1, \text{ yoki } A_2, \ldots, \text{ yoki } A_m$$

shuningdek:

$$B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Teorema. Ikkkita yoki bir nechta alohida hodisalar ehtimoli yig‘indisi o‘sha hodisalar ehtimolinig yig‘indisiga teng, ya’ni:

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \qquad (1.7)$$

yoki:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (1.8)$$

Yig‘indilar teoremasidan xulosa.

Xulosa 1. Agar hodisalar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalarning to‘liq guruhini tashkil qilsa, unda ularning ehtimollar yig‘indisi birga teng:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(U) = 1 \qquad (1.9)$$

Xulosa 2. Ikkita qarama-qarshi hodisalarning yig‘indisi birga teng:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ yoki } P(\bar{A}) = 1 - P(A). \qquad (1.10)$$

Masala 1.3. Aylanma nishon uchta zonadan tashkil topgan: I, II, III bir marta o‘q otilganda har bir zonaga tegish ehtimoli quyidagicha 0,15; 0,23; va 0,17. Bitta otganda tegmaslik ehtimolini toping.

Yechish. Hodisalarni belgilaymiz:

B – nishonga tegish,

$\bar{B}$ - otganda tegmaslik,

A_1 - I-zonaga tegishi,

A_2 - II-zonaga tegishi,

A_3 - III-zonaga tegishi.

Unda, $B =$yoki A_1, yoki $A_2, \ldots$, yoki A_3, shuningdek $B = A_1 + A_2 + ... + A_3$.

$P(B)$ - nishonga tegish ehtimoli,

$P(\bar{B})$ - tegmaslik ehtimoli.

Chunki, hodisalar A_1, A_2, A_3 alohida, unda yig‘indilar teoremasi bo‘yicha:

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}15 + 0{,}23 + 0{,}17 = 0{,}55.$$

Yig‘indilar teoremasining 2-xulosasidan foydalanib, qidirilayotgan ehtimollikni topamiz:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0{,}45.$$

Masala 1.4. Loteriyada 1000 ta bilet bor. Ularga quyidagicha yutuq chiqadi: bittaga 500 so‘m, 10 taga 100 so‘m, 50 biletga 20 so‘m, 100 biletga 5 so‘m. qolganlari yutuqsiz. Bitta bilet olganinggizda quyidagi ehtimollikni toping: 1) 20 so‘mdan kam bo‘lmagan yutuq va 2) har qanday qiymatli yutuq.

Yechish. Hodisalarni belgilaymiz: B_1 - 20 so‘mdan kam bo‘lmagan yutuq; B_2 - har qanday qiymatli yutuq; A_1 - 20 so‘mlik yutuq; A_2 - 100 so‘mlik yutuq; A_3 - 500 so‘mlik yutuq; A_4 - 5 so‘mlik yutuq. Shartga asosan:

$$B_1 = A_1 + A_2 + A_3,$$
$$B_2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Ehtimollar yig‘indisi teoremasiga asosan topamiz:

$$P(B_1) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{50}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = 0{,}061;$$

$$P(B_2) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 0{,}061 + \frac{100}{1000} = 0{,}161.$$

1.5. HODISALAR KO‘PAYTMASI. KO‘PAYTMALAR TEOREMASI

Ikki va bir nechta hodisalarning ko‘paytmasi deb shunday murakkab hodisaga aytiladiki, bu hodisalarning birgalikda sodir bo‘lishidir.

Murakkab hodisa - S, $A_1, A_2, ..., A_n$. hodisalarning birgalikda sodir bo‘lganligi. Bunday holatda yozamiz:

$$C = \text{va } A_1 \text{ va } A_2 \dots \text{va } A_n,$$

$$\text{yoki: } C = A_1 * A_2 * ... * A_n.$$

Teorema. Ikkita va bir nechta alohida hodisalarning ko‘paytmasi ushbu hodisalar ehtimolining ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$$P(C) = P(A_1) * P(A_2) * ... * P(A_n) \qquad (1.11)$$

$$\text{yoki: } P(\mathop{\Pi}_{i=1}^{n} A_i) = \mathop{\Pi}_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (1.12)$$

<u>Masala 1.5.</u> Quroldan o‘q otganda nishonga tegish ehtimoli 0,20 teng. Agar 2% porox yonmay qolgan taqdirda ham bir martada otganda nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. Hodisalarga belgilash kiritamiz: C – nishonni yo‘qotish, A_1 - nishonga tegish, A_2 - portlatkich pand bermadi.

Ko‘rinadiki, $C = A_1 * A_2$. Chunki hodisalar A_1 i A_2 alohida, ko‘paytirish teoremasini qo‘llash o‘rinli:

$$P(C) = P(A_1) * P(A_2)$$

Shart bo‘yicha $P(A_1) = 0{,}20$, hodisa A_2 ehtimoli $P(A_2) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$ teng, ya’ni hodisa “portlatgich pand bermadi” va "portlatgich pand berdi" hodisalarning to‘liq guruhini tashkil qiladi.

Oxirida yozamiz $P(C) = 0{,}20 * 0{,}98 = 0{,}196$.

Xususiy holda hamma hodisalarning ehtimoli bir xil va *p* ga teng bo‘lsa (1.2) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$P = p^n \ . \qquad (1.13)$$

<u>Masala 1.6.</u> *n* marta o‘lchaganda n ta musbiy xatoliklar kelib chiqish ehtimolini toping.

Yechish. Bir marta o‘lchaganda musbiy xatolik paydo bo‘lish ehtimoli doimiy va $\frac{1}{2}$. teng. O‘lchash natijalari alohida hodisalar deb qaralganligi uchun (1.13) formulani qo‘llash orqali topamiz:

$$P = p^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Alohida hodisalar ehtimoli shartsiz deyiladi. Bog‘liqli hodisalar shartli ehtimollikka ega bo‘ladi.

Bitta yoki bir nechta hodisa ro‘y beradi deb hisoblangan ehtimollik ***shartli*** deyiladi.

$P(A_2 / A_1)$ - A_2 hodisaning shartli ehtimoli, A_1.hodisa sodir bo‘ldi deb hisoblaymiz.

$P(A_n / A_1, A_2, A_3 ... A_{n-1})$ - A_n hodisaning shartli ehtimoli, $A_1, A_2, A_3 ... A_{n-1}$.hodisalar sodir bo‘ldi deb hisoblaymiz.

Teorema. Ikkita va bir nechta bog‘liqlik hodisalarning ko‘paytmalar ehtimoli ushbu hodisalar bittasining ehtimoli bilan boshqalarining shartli ehtimolining ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$$P(C) = P(A_1) * P(A_2 / A_1 .... P(A_n / A_1, A_2, A_3 ... A_{n-1}) \qquad (1.14)$$

Masala 1.7. Qutida 25 ta oq va 36 ta qora shar bor. Ketma-ket ikkita oq sharning chiqish ehtimolini aniqlang. Bu yerda shart shundayki, birinchi chiqarilayotgan shar qayta qutiga quyilmaydi.

Yechish. Hodisalarni belgilaymiz:

A_1- birinchi oq sharning chiqishi,

A_2 - ikkinchi oq sharning chiqishi.

Hodisa A_2 ehtimoli, A_1 hodisaning sodir bo‘lgan bo‘lmaganligiga bog‘liq bo‘lganligi uchun bog‘liqlik hodisalar ehtimollari ko‘paytmasi $P(C) = P(A_1) * P(A_2 / A_1)$ formulasini qo‘llash mumkin.

A_1 hodisaning ehtimolini topamiz:

$$P(A_1) = \frac{M}{N} = \frac{25}{61},$$

Shartli ravishda A_1 hodisa sodir bo‘ldi deb, A_2 hodisaning shartli ehtimolini topamiz:

$$P(A_2 / A_1) = \frac{25-1}{61-1} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5},$$

qidirilayotgan ehtimol teng:

$$P(C) = \frac{25}{61} * \frac{2}{5} = 0{,}164 .$$

Ko‘pincha o‘ta muhim ehtimollik masalalarini yechishda bevosita ehtimollikni yechish formulasi (1.2) dan va ehtimollikni ko‘paytirish va yig‘ish (1.8; 1.9; 1.10; 1.12; 1.14) formulalaridan foydalaniladi.

Masala 1.8. O‘quv zalida 6 ta ehtimollar nazariyasi fanidan kitob mavjud. Shulardan 3 tasi muqovalashda. Kutubxonachi tavakkaliga ikkita kitob oldi: a) bitta kitobning muqovali chiqish ehtimolini; b) bittasi muqovali, bittasi muqovasiz chiqish ehtimolini toping.

a) Yechish. Hodisalarni belgilaymiz:

B - olingan darsliklardan birortsi ham muqovada bo‘lmaydi,

$\bar{B}$ - bitta darslik muqovada bo‘ladi.

B - hodisa murakkab, u alohida hodisalar A_i ning ko‘paytmasi ko‘rinishida bo‘lishi mumkin.

$B = A_1 * A_2$, ya’ni birinchi va ikkinchi olingan darsliklar muqovasiz bo‘lish mumkin bo‘lgan V – hodisa.

Birinchi darslikning muqovasiz bo‘lish ehtimoli:

$$P(A_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ .$$

Birinchi olingan darslik muqovasiz nazarda tutgan holda ikkinchi olingan darslik ham muqovasiz bo‘lish ehtimoli bo‘lganligi uchun, ya’ni A_2 hodisaning shartli ehtimolligi teng:

$P(A_2 / A_1) = \frac{3-1}{6-1} = \frac{2}{5}$. Bog‘liqlik hodisalar ko‘paytirish teoremasiga asosan V hodisaning ehtimoli:

$$P(B) = P(A_1) * P(A_2 / A_1) = \frac{1}{2} * \frac{2}{5} = 0{,}2\,. \qquad ^{x)}$$

Qidirilayotgan ehtimollik shundayki, xattoki bitta darslik muqovalashda bo‘lsa birgalikda bo‘lmaydigan hodisalar uchun qo‘shish teoremasining 2-xulosasiga asosan teng:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0{,}8\,.$$

b) Yechish. Bitta olingan darslik muqovada, boshqasi muqovasiz iborat bo‘lgan C murakkab hodisa A_i elementar hodisalar ko‘rinishida quyidagi tarzda bo‘lishi mumkin:

$$C = \text{ va } A_1 \text{ va } A_2 \text{ yoki } A_3 \text{ va } A_4\,,$$

va bu ko‘rinishda $C = A_1 * A_2 + A_3 * A_4$,

bu yerda hodisalar:

A_1 - birinchi darslik muqovada,

A_2 - ikkinchi darslik muqovada,

A_3 - birinchi darslik muqovasiz,

A_4 - ikkinchi darslik muqovasiz.

Bog‘liqlik hodisalar uchun ko‘paytirish teoremasini va qo‘shish teoremasini qo‘llash orqali topamiz:

$$P(C) = P(A_1) * P(A_2 / A_1) + P(A_3) * P(A_4 / A_3)\,,$$

$$P(C) = \frac{3}{6} * \frac{3}{6-1} + \frac{3}{6} * \frac{3}{6-1} = 0{,}6\,.$$

$^{x)}$ Eslatma.

Hodisa B ehtimolini (1.2) formula $P(B)=\frac{M}{N}$, orqali ham topish mumkin. Bu yerda: N - oltita darslikni olish soni $N=C_6^2$, M - uchta muqovasiz darslikdan ikkita muqovasiz darslikni olish usullar soni, $M=C_3^2$.

Ehtimollik teng: $P(B)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}=0{,}2$.

1.6. KO‘P MARTALIK TAJRIBALAR. BERNULLI FORMULASI

Agar, ko‘p marta n bog‘liq bo‘lmagan A hodisa K ga teng marta paydo bo‘lish ehtimolini aniqlash kerak bo‘lsa, unda Bernulli formulasidan foydalanamiz:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (1.15)$$

bu yerda: $P_n(k)$ -aniqlanayotgan ehtimollik,

C_n^k - n dan k gacha birikmalar soni.

p - har bir alohida tajribada sodir bo‘ladigan A hodisaning ehtimoli

q - alohidagi tajribadagi sodir bo‘lmaydigan hodisaning ehtimoli.

Ma’lumki, $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^0=C_n^n=1$.

Agar k ga 0 dan n (0, 1, 2,…., n) gacha qiymat berib Bernulli formulasi bo‘yicha ehtimollikni hisoblasak, , $P_n(k)$, ehtimollar birikmasi hisoblanadi.

Eslatamiz, chunki $\sum_{k=0}^{n} P_n(k)$-ehtimollik shuki, hodisa A 0 yoki 1 yoki n ga teng marta paydo bo‘ladi. Bu murakkab hodisa – hodisalarning to‘liq guruhidir, ya’ni:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=1 \qquad (1.16)$$

Ko‘p n marta tajribada A hodisa l dan ko‘proqmas marta paydo bo‘lsa, uning ehtimoli quyidagi formula bilan hisoblanishi mumkin:

$$P_n(k\le l)=\sum_{k=0}^{n} P_n(k) \qquad (1.17)$$

Hodisa A, n tajribada l dan kam bulmagan sonda paydo bulishi ehtimoli formula bilan hisoblanadi:

$$P_n(k\ge l)=\sum_{k=l}^{n} P_n(k), \qquad (1.18)$$

quyidagi nisbat o‘rinlidir.

$$P_n(k\le l)=1+P_n(l)-P_n(k\ge l)$$

Masala 1.9. Bitta nishonga bir xil sharoitda alohida-alohida 4 marta o‘q otilgan. Bir otilganda nishonga tegish ehtimoli p=0,33 (q=0,67). Nishonni k=0, 1, 2, 3, 4 marta o‘q otganda nishonga tegish ehtimolini aniqlang.

Yechish:

ya’ni,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ a } \quad n=4,$$

hisoblaymiz:

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = \frac{4!}{0!(4-0)!} * 0{,}33^0 * 0{,}67^4; \quad P_4(0) = 0{,}20;$$

$$P_4(1) = C_4^1 p^1 q^3 = \frac{4!}{1!(4-1)!} * 0{,}33^1 * 0{,}67^3; \quad P_4(1) = 0{,}40;$$

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} * 0{,}33^2 * 0{,}67^2; \quad P_4(2) = 0{,}29;$$

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4!}{3!(4-3)!} * 0{,}33^3 * 0{,}67^1; \quad P_4(3) = 0{,}10;$$

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = \frac{4!}{4!(4-0)!} * 0{,}33^4 * 0{,}67^0; \quad P_4(4) = 0{,}01;$$

Tekshirish: 0,20+0,40+0,29+0,10+0,01=1,00.

Ushbu masalaning shartidan ikki martadan kam bo‘lmagan nishonga tegish ehtimoli teng:

$$P_4(k \geq 2) = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 0{,}40;$$

ikki martadan ko‘p:

$$P_4(k \leq 2) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = 0{,}89.$$

1.7. KO‘P MARTA TAJRIBADA HODISALARNING SODIR BO‘LISH EHTIMOLIY SONI

Ko‘p marta tajribada (k_0) hodisalarning paydo bo‘lish ehtimoliy soni deb, ehtimolning berilgan sharoitidagi eng katta soniga aytiladi.

Matematik nuqtai nazaridan k_0 soni quyidagi shartga javob beradi:

$$\left.\begin{aligned} P_n(k_0) \geq P_n(k_0+1) \\ P_n(k_0) \geq P_n(k_0-1) \end{aligned}\right\} \qquad (1.19)$$

Ehtimollar nazariyasida (1.19) shartlar bajarilishi ko‘rsatiladi, agar:

$$np + p \geq k_0 \geq np - q \qquad (1.20)$$

k_0 qidirish mobaynida masalaning shartidan n har doim ma’lum, ehtimollik qiymati bo‘lsa masala sharti bo‘yicha ma’lum yoki ushbu shartdan foydalangan holda topish mumkin. Agar ko‘p n tajribada p qiymati nolga yaqin bo‘lmagan son bilan ifodalangan bo‘lsa:

$$k_0 \approx np. \qquad (1.21)$$

Shuni ta’kidlash kerakki, (1.20) tenglikning chap va o‘ng qismi birga farq qiladi.

Masala 1.10 1.9 masala shartidagi nishonga tegish ehtimoliy sonini toping.

Yechish:

1. Ya’ni ehtimolning maksimal $P_4(1) = 0{,}40$ qiymati $k = 1$, songa to‘g‘ri keladi, ko‘rinib turibdiki, $k_0 = 1$ - bu nishonga tegish ehtimoliy sonidir.

2. k_0 sonni topish uchun (1.20) tengligidan foydalanamiz:

$$np + p \geq k_0 \geq np - q;$$

$$4 * 0{,}33 + 0{,}33 \geq k_0 \geq 4 * 0{,}33 - 0{,}67;$$

$$1{,}65 \geq k_0 \geq 0{,}65; \qquad k_0 = 1.$$

Masala 1.11 Ko‘p yillik kuzatishlar shuni ko‘rsatdiki, 1 iyulda yomg‘ir yog‘ish ehtimoli 0,227 ga teng. Yaqin 50 yil ichida 1 iyulda yomg‘ir yog‘adigan ehtimoliy kun sonini (k_0) toping.

Yechish: Masala sharti bo‘yicha: n=50, p=0,227 unda,

$$50 * 0{,}227 + 0{,}227 \geq k_0 \geq 50 * 0{,}227 - (1 - 0{,}227)$$

$$11{,}5 \geq k_0 \geq 10{,}5$$

$$k_0 = 11.$$

Demak, 50 yil ichida 1 iyulda 11 kuni yomg‘irli kun bo‘ladi.

Nazorat savollari:

1. Hodisalar va ularning turlarini tushuntiring.
2. Ehtimollik qanday qilib bevosita hisoblanadi?
3. Hodisalar yig‘indisi va ko‘paytmasi teoremasini tushintiring.
4. Bernulli formulasining qo‘llanish mezonini tushuntiring.
5. Nisbiy chastota nima?

II. TASODIFIY MIQDORLAR VA ULAR EHTIMOLLARINING TAQSIMLANISH QONUNLARI

2.1. TASODIFIY MIQDORLAR VA EHTIMOLLARNING TAQSIMLANISH QONUNI TO‘G‘RISIDA TUSHUNCHA

Birinchi paragrafda aytilganidek, tasodifiy miqdorlar tajriba natijalarining sonli tafsifidir, shuningdek tasodifiy voqealar ham tajriba natijalarining sifatli tafsifidir. Voqeadan har doim tasodifiy miqdorlarga o‘tish mumkin. Masalan, tajriba o‘tkazilmoqda natijada A voqeaning bo‘lish va bo‘lmasligi mumkin (gerb tomonining tushish va tushmasligi). Voqea A o‘rniga o‘lchami 1 ga teng bo‘lgan tasodifiy miqdor X ni olish mumkin, agar voqea A hosil bo‘lsa, o‘lchami 0 ga teng, agar A voqea hosil bo‘lmasa. Tasodifiy miqdor X, ko‘rinib turibdiki, ikkita 0 va 1 imkoniyatli miqdorga ega.

Tasodifiy miqdorlar uzlukli (diskretnoy) va uzluksiz bo‘lishi mumkin.

Imkoniyatli qiymatini oldindan bilish mumkin bo‘lgan (masalan, n marta otilganda tegish soni; bir marta tashlanganda gerb tomonining tushishi) tasodifiy miqdorlarga ***uzlukli tasodifiy miqdor*** deyiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarga imkoniyatli miqdorini oldindan aytib berolmaydigan miqdorlarga aytiladi (masalan, otishdagi nuqtaning tegish koordinatasi, o‘lchash natijalari xatoliklari va boshqalar).

Tasodifiy miqdorlarni son bilan ifodalash kamlik qiladi. Har bir imkoniyatli qiymatiga, o‘sha qiymat hosil bo‘lish ehtimolini hisobga olish kerak.

Tasodifiy miqdorlarning imkoniyatli qiymati bilan uning hosil bo‘lish ehtimoli orasidagi bog‘liqlik ifoda ***ehtimollikning taqsimlanish qonuni*** deyiladi.

Ehtimollik nuqtai nazaridan tasodifiy miqdor to‘liq tafsiflangan deyiladi, agar ehtimolning taqsimlanish qonuni berilgan bo‘lsa.

2.2. UZLUKLI TASODIFIY MIQDORLAR TAQSIMLANISH QONUNINING BERILISH FORMALARI

Taqsimlanish jadvali – uzlukli tasodifiy miqdorlarning taqsimlanish qonunini berilishi oddiy formasidir.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

x_i - tasodifiy miqdorlarning imkonli qiymatlari;

p_i - ularning ehtimollari.

Chunonchi $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, ya’ni jadvalda tasodifiy X miqdorlarning hamma imkonli miqdorlari berilgan.

Taqsimlanishning ko‘pburchagi.

Taqsimlanish qatorlarini to‘gri burchakli koordinatalar sistemasida grafik ifodalashda hamma imkonli qiymatlarni absissa o‘qi bo‘yicha qo‘yiladi ularning ehtimollari ordinata o‘qi bo‘yicha. Keyin (x_i, p_i) nuqtalar tushirilib va ular bir-biri bilan to‘g‘ri kesik chiziqlar yordamida tutashtiriladi. Olingan chizma ***taqsimlanish ko‘pburchagi*** deyiladi va uzlukli tasodifiy miqdorlar taqsimlanish qonunining berilish formasidir (2.1-chizma).

2.1 Masala. Bir xil sharoitda bitta miqdorni 8 marta o‘lchangan. Ko‘rilayotgan tasodifiy miqdor *k* – manfiy xatolarning hosil bo‘lish soni 8 marta o‘lchaganda. Taqsimlanish qatorini tuzish va tasodifiy miqdorlarning taqsimlanish ko‘pburchagini qurish talab etiladi.

Yechish. O‘lchashlarning haqiqiy xatoligini $\Delta_i = x_i - X$ deb belgilaymiz. (x_i - o‘lchashlar natijasi, X - o‘lchanayotgan miqdorning haqiqiy qiymati). Bir marta o‘lchanganda, quyidagicha bo‘lishini nazarda tutadi:

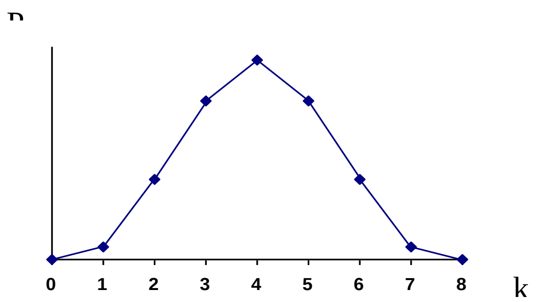
$$p(\Delta > 0) = p(\Delta < 0) = \frac{1}{2}, \quad p(\Delta > 0) = p, \quad p(\Delta < 0) = q.$$

Bernulli formulasi orqali *n* marta o‘lchaganda k marta musbat xato paydo bo‘lish ehtimolini hisoblaymiz . Bunda k 0 dan 8 gacha qiymatni qabul qiladi. Hisoblash natijalarini 2.1-jadvalga joylashtiramiz. Bu esa tasodifiy k miqdorlarni taqsimlanish qatori deyiladi.

2.1-jadval

k paydo bo‘-lish soni	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Tekshirish
$P_n(k)$	$C_8^0\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^1\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^2\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^3\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\sum_{k=0}^{8} P_n(k)$
	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{71}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{256}{256}$

Taqsimlanish ko‘p burchagini chizishda (1.1-chizma) ehtimollik $P_8(1)$ ordinataga shunday joylashtirildiki, uning uzunligi "______" ga teng, sodir bo‘lish soni absissa o‘qi bo‘yicha "___" qirqimda joylashtirildi.



2.1-chizma.

2.3. TAQSIMLANISH FUNKSIYASI

Uzlukli va uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimlanish qonuni berilishining eng umumiy formasi tasodifiy miqdorlarning taqsimlanish funksiyasidir.

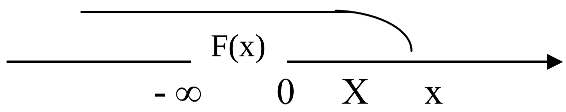
Tasodifiy qiymat X berilgan x qiymatdan kamroq bo‘lishlik ehtimoliga ***taqsimlanish funksiyasi*** deyiladi, ya’ni:

$$F(x) = P \qquad (X < x) \qquad (2.1)$$

Taqsimlanish funksiyasining xossalari:

1. $F(-\infty) = 0$
2. $F(+\infty) = 1$
3. $F(x_2) \geq F(x_1)$, agar $x_2 \geq x_1$

Bu xossalarni taqsimlanish funksiyasining geometrik interpretasiya yordamida osongina ilova qilish mumkin. $0x$ .o‘qidagi X tasodifiy nuqta.



2.2-chizma.

Demak, taqsimlanish funksiyasi $F(x)$ shunday ehtimollikki, bunda tasodifiy nuqta X tajriba natijasida x nuqtadan chetroqqa tushadi.

Masala 2.2. To‘rt marta o‘q otilganda nishonga tegish soni k tasodifiy miqdor uchun taqsimlanish funksiyasini tuzing, agar bir marta nishonga tegish ehtimol p =0,33 teng bo‘lsa.

Yechish. Tasodif miqdor k ning taqsimlanish qatori quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi (1.9 masalaga qarang).

k_i	0	1	2	3	4
p_i	0,20	0,40	0,29	0,10	0,01

Diskret qiymat uchun k taqsimlanish funksiyasi quyidagicha:

$$F(k) = P(K < k) = \sum_{k_i < k} P(k = k_i) \qquad (2.2)$$

(bu yerda yig‘indi belgisining tagidagi $k_i < k$ tengsizlik yig‘indi (summirovaniy) berilgan k dan kichik bo‘lgan hamma qiymatlarga k_i tegishli).

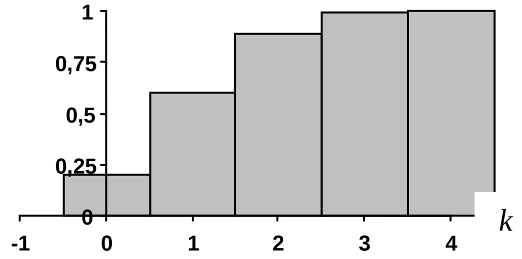
Jadval va funksiyaning $F(k)$ (2.2) qoidasidan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

1) $k \leq 0$ da, $F(k = 0) = P(k < 0) = 0$;
2) $k = 1$ da, $F(k = 1) = P(k < 1) = P(k = 0) = 0{,}20$;
3) $k = 2$ da, $F(k = 2) = P(k < 2) = P(k = 0) + P(k = 1) = 0{,}60$;
4) $k = 3$ da, $F(k = 3) = P(k < 3) = P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2) = 0{,}89$;

5) $k = 4$da, $F(k = 4) = P(k < 4) = ... = 0{,}99$;

6) $k > 4$da $F(k > 4) = 1{,}00$.

Absissa, o‘qi bo‘yicha k qiymatni, ordinata o‘qi bo‘yicha $F(k)$ qiymatlarni qo‘yib va aniq masshtabni tanlab, $F(k)$ grafigini chizamiz (2.3-chizma).

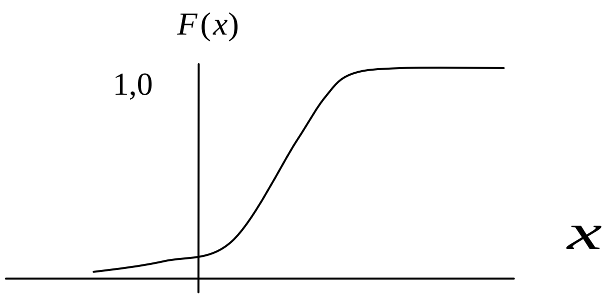


2.3-chizma.

Uzlukli tasodifiy miqdorlar taqsimlanish funksiyasi taqsimlanish jadvalda ko‘rsatilgan tasodifiy miqdorlar qabul qiladigan nuqtalarda sakrash tarzida bo‘ladi. Funksiyaning $F(x)$ hamma sakrashlar yig‘indisi 1 ga teng.

2.4.UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR UCHUN TAQSIMLANISH QONUNLARINING BERILISH FORMALARI. TAQSIMLANISH ZICHLIGI

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar taqsimlanish funksiyasini ko‘pincha taqsimlanishning integral funksiyasi yoki taqsimlanishning integral qonuni deb aytiladi. Uzluksiz tasodifiy miqdor uzluksiz taqsimlanish funksiyasiga ega bo‘ladi. Bu funksiyaning grafigi silliq egrilik formasiga ega bo‘ladi.



2.4-chizma.

Taqsimlanish zichligi – uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimlanish qonuni berilish formasidir.

Taqsimlanish zichligi taqsimlanish funksiyasidan hosila sifatida aniqlanadi, ya’ni:

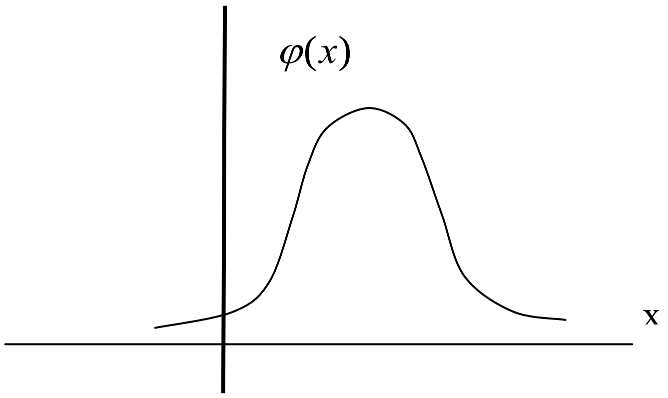
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F^{/}(x) = \varphi(x) \qquad (2.3)$$

Zichlik $\varphi(x)$ ko‘pincha tasodifiy miqdorlar taqsimlanishining deferensial qonuni deb yuritiladi. Tasodifiy miqdorlar taqsimlanishining zichligini tasvirlovchi egrilik taqsimlanish egriligi (2.5-chizma) deyiladi.

Zichlik $\varphi(x)$ quyidagi xossalarga ega:

1. $\varphi(x) \geq 0$, Ya’ni , zichlik – musbiy funksiya.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$, Ya’ni, “taqsimlanish egriligi” va absissa o‘qi bilan chegaralangan maydon doimo 1 ga teng.

Agar X ning hamma imkonli qiymatlari a dan $в$ gacha chegarada bo‘lsa, unda 2-xossa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $\int_{a}^{в} \varphi(x)dx = 1$.



2.5 – chizma.

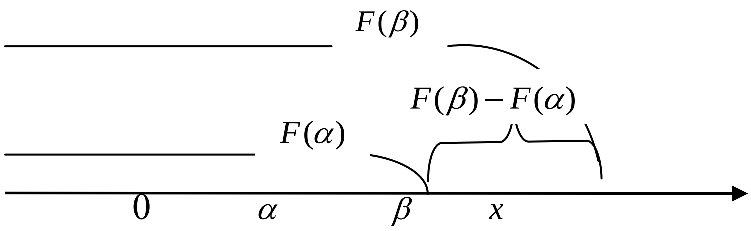
2.5. TASODIFIY MIQDORLARNING BERILGAN ORALIQQA TUSHISH EHTIMOLI

Amaliyotda ko‘pincha shunday ehtimollikni bilish kerakki, bunda tasodifiy miqdor α dan β gacha bo‘lgan chegarada bo‘lgan qiymatni qabul qiladi. Izlanayotgan ehtimollik quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$P(\alpha \leq x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \qquad (2.4)$$

bunda: α chap oxiri (α, β) qismini o‘z ichiga oladi, ungi X uzlukli tasodifiy miqdorlarni o‘z ichiga oladi.

Taqsimlanish funksiyasining geometrik interpretatsiya (2.4) ifodasidan (2.6-chizma)



2.6-chizma.

Masala 2.3. Masala 2.2 shartidagi nishonga tegish soni 1 dan 3 gacha bo'lish ehtimolini toping (ya'ni 1 ga yoki 2 ga teng)

Yechish: (2.4) asosida yozamiz:

$$P(1 \le k < 3) = F(k = 3) - F(k = 1) = 0{,}89 - 0{,}20 = 0{,}69$$

Haqiqatdan,

$$P(1 \le k < 3) = P_4(1) + P_4(2) = 0{,}40 + 0{,}29 = 0{,}69$$

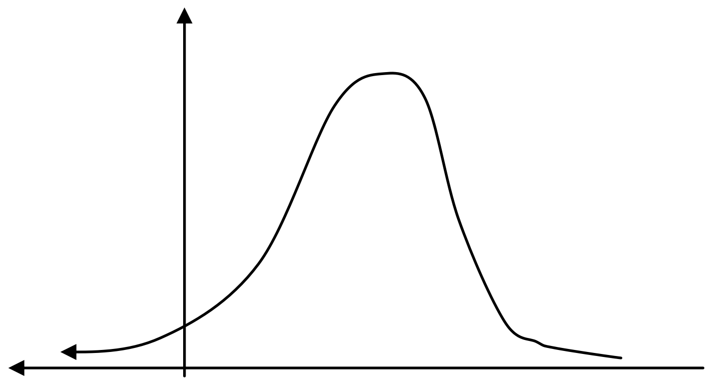
Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun (2.4) formula ko'rinishda bo'ladi:

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \qquad (2.5)$$

ya'ni, $P(x = \alpha) = \lim_{\beta \to \alpha}\left[F(\beta) - F(\alpha)\right] = 0$,

ya'ni, uzluksiz tasodifiy miqdorlarning har qanday alohida qiymatlari ehtimoli nolga teng. Lekin, uzluksiz tasodifiy miqdorlarning bunday qiymati imkoniyatsiz deb hisoblab bo'lmaydi (u paydo bo'ladi, lekin juda kam). Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning uzlukli tasodifiy miqdorlardan farqi ana shu.

Taqsimlanish zichligi $\varphi(x)$ tasodiy miqdor X ning x_i ga yaqin dx elementar uchastkaga tushish ehtimolini aniqlaymiz.



2.7-chizma.

Bu ehtimollik eng yuqori darajali cheksiz kichik aniqlikga $\varphi(x)\, dx$ teng. Bu maydon geometrik jihatdan dx qirqimga to'g'ri keluvchi oddiy to'g'riburchakdir. Miqdor $\varphi(x)\, dx$ ehtimollik elementi deyiladi. Unda X tasodifiy miqdorning α dan β gacha kesimda tushish ehtimoli quyidagi ifoda bilan ifodalanadi:

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx \qquad (2.6)$$

Taqsimlanish funksiyasini zichlik orqali ifodalaymiz. Shart bo'yicha:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x),$$

yoki, (2.6) ni hisobga olganda,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx \qquad (2.7)$$

Geometrik $F(x)$ - bu x nuqtadan chaproqdagi taqsimlanish egriligi egallagan maydondir (7-chizma).

Masala 2.4. Tasodifiy miqdor x integral funksiya $F(x)$ orqali berilgan

$$F(x)=\begin{cases}0..\partial a..x\le 0\\ x^2..\partial a...0<x\le 1\\ 1..\partial a..x>1\end{cases}$$

Differensial funksiya $\varphi(x)$, hamda tajriba natijasida x miqdor (0.25; 0.75) oraliqda joylashgan qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish.

$$1.\quad \varphi(x)=F(x)=\begin{cases}0..\partial a..x\le 0\\ 2x..\partial a...0<x\le 1\\ 0..\partial a..x>1\end{cases}$$

2. (2.5) formulasiga asosan tasodifiy miqdor x, (0.25; 0.75) oraliqda nishonga tegish ehtimoli teng:

$$P(\alpha<x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$$

$\alpha=0.25...\textit{в}a...\beta=0.75$ qiymatlarni qo‘yib,

$$P(0.25<x<0.75)=F(0.75)-F(0.25)=0.75^2-0.25^2=0.5$$

yoki formula (2.6) bo‘yicha:

$$P(0.25<x<0.75)=\int_{0.25}^{0.75}2xdx=x^2\Big/_{0.25}^{0.75}=0.75^2-0.25^2=0.5 \text{ bo‘ladi.}$$

2.6. TAQSIMLANISH QONUNINING SONLI XARAKTERISTIKASI. MATEMATIK KUTISH

Ehtimollik nuqtai nazaridan taqsimlanish qonuni tasodifiy miqdorlarni ifodalaydi. Lekin, ko‘pgina masalalarni Yechishda taqsimlanishning asosiy chegaralarini ifodalovchi faqatgina alohida sonli parametrlarni ko‘rsatish yetarli bo‘ladi, masalan, u atrofida guruhlanadigan tasodifiy miqdorning qandaydir o‘rtacha qiymatini (taqsimlanish markazini), o‘rtacha qiymatga nisbatan titilish (razbrosannost) darajasi ifodalaydigan sonni va boshqalar.

Tasodifiy miqdorlarning o‘rtacha qiymati xarakteristikasi bo‘lib ***matematik kutish*** xizmat qiladi.

Tasodifiy miqdorlarning hamma imkonli qiymatlarining ular ehtimoliga ko‘paytmasi yig‘indisi ***matematik kutish*** deyiladi.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (2.8)$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor X uchun Ox o‘qiga tegishli bo‘lgan imkoniyatli qiymatlar:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx \qquad (2.9)$$

Xususan, agar hamma imkoniyatli qiymatlari (a,b) oraliqqa tegishli bo‘lsa,

$$M(x) = \int_{a}^{в} x\varphi(x)dx \qquad (2.9a)$$

Matematik kutishning xossalari:

1. $M(C) = C$, bu yerda S – doimiy miqdor;
2. $M(CX) = CM(X)$;
3. $M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)$;
4. $M(X_1 * X_2 * ... * X_n) = M(X_1) * M(X_2) * ... * M(X_n)$, agar miqdorlar $X_1, X_2 ..., X_n$ - o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar.

Imkoniyatli qiymatlaridan iborat tasodifiy miqdorlar o‘rta arifmetigi matematik kutishi o‘zaro bog‘liqlik formulasi quyidagicha:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i Q_i \qquad (2.10)$$

bu yerda: Q - paydo bo‘lish chastotasi x_i, ya’ni p_i odatda noma’lum.

Agar x_i ning xar bir qiymati bir marta paydo bo‘lsa, unda (2.10) ifoda ko‘rinishni oladi:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (2.11)$$

Ehtimollar nazariyasida isbot qilingan:

$$eht.\lim_{n\to\infty} \bar{x} = M(X).$$

O‘rta arifmetik bilan matematik kutish orasidagi bog‘liqlik katta sonlar qonunining formasini tashkil qiladi. Katta sonlar qonunining hamma formalari katta sonli tajribada qandaydir o‘rtacha "barqarorlik"(ustoychivost’) ni ta’kidlaydi. Ya’ni, katta sonli tajribada o‘rta arifmetik "tasodifiy bo‘lmagan miqdor" ga va ehtimolligi bo‘yicha doimiy miqdor - matematik kutishga aylanadi.

2.7. MOMENTLAR. DISPERSIYA. STANDARTLAR

Ehtimollar nazariyasida taqsimlanishning asosiy xossalarini tafsiflash (xarakteristika) uchun momentlar degan tushuncha qo‘llaniladi.

Tasodifiy miqdor X ning K darajali boshlangich momenti deb, shu tasodifiy miqdorning K darajali matematik kutishiga aytiladi.

$$\gamma_k = M(X^k) \qquad (2.12)$$

k=1 bo‘lganda $\gamma_л = M(X)$ bo‘ladi.

Uzlukli tasodifiy miqdorlar uchun:

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \qquad (2.13)$$

uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun:

$$\gamma_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x) dx \ . \qquad (2.14)$$

Markaziy tasodifiy miqdor tushunchasini kiritamiz:

$$\bar{X} = X - M(X) .$$

Markaziy tasodifiy miqdorning k-darajali matematik kutishiga X tasodifiy miqdorning k-darajali ***markaziy momenti*** deyiladi.

$$\mu_k = \mu\left\{\left[x - M(x)\right]^k\right\} . \qquad (2.15)$$

Uzlukli tasodifiy miqdorlar uchun:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} \left[x - M(x)\right]^k p_i \qquad (2.16)$$

uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)^k \varphi(x) dx \qquad (2.17)$$

Markaziy momentlarni xar doim boshlangich momentlar bilan ifodalash mumkin.

Ya’ni:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = 0 \\ &\mu_2 = \gamma_2 - \gamma_1^2 \\ &\mu_3 = \gamma_3 - 3\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_1^3 \\ &\text{..................................}va..boshqa \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Dispersiya deb ataladigan ikkinchi darajali markaziy moment **muhim** ahamiyatga ega.

$$\mu_2 = D(x) = M\left[(x - M_x)^2\right] \qquad (2.19)$$

Dispersiya tasodifiy miqdorlarning matematik kutishga nisbatan taqsimlanish(razbros) darajasini ko‘rsatadi. Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1. $D(C) = 0$;

2. $D(CX) = C^2 D(X)$;

3. $D(C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n) = C_1^2 D(X_1) + C_2^2 D(X_2) + \ldots + C_n^2 D(X_n)$,
agar $X_1, X_2 \ldots. X_n$ - bog‘liq bo‘lmagan miqdorlar hisoblanadi.

Dispersiya tasodifiy miqdorning kvadratiga teng qiymatga ega. Ko‘z bilan tasavvur qilish uchun tasodifiy miqdorlarning **standarti** yoki **kvadratik og‘ish** tushunchasidan foydalanish kerak.

$$\delta(x) = \sqrt{D(X)} \qquad (2.20)$$

Standart – dispersiya kvadrat ildizidan chiqarilgan musbiy qiymat.

Masala 2.5 X tasodifiy miqdor tangani bir marta tashlaganda gerb tomonining tushish soni. Taqsimlanish qatori berilgan.

x_i	0	1
p_i	q	p

bu yerda: q=1-p.

Topish kerak: M(X), D(X), $\delta(x)$.

Yechish. (2.8), (2.19), (2.20) formulalarga asosan:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 * q + 1 * p = p$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x - M_x\right)^2 p_i = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq$$

yoki (2.18) formula bo‘yicha:

$$D(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 0 * q + 1^2 * p = p$$

$$\alpha_1 = M(X) \qquad D(X) = p - p^2 = pq$$

$\delta(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{pq}$ bo‘ladi.

Nazorat savollari:

1. Taqsimlanish funksiyasini tushuntiring.
2. Taqsimlanish zichligi.
3. Matematik kutish.
4. Dispersiya nima?
5. Standart nima?

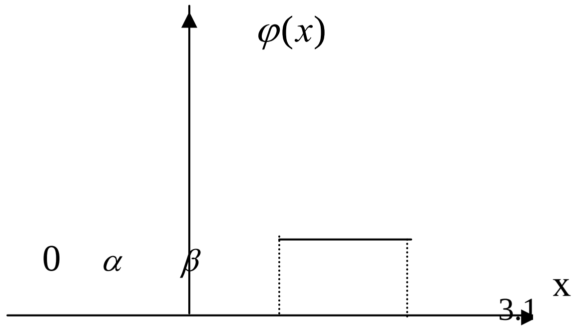
III. TAQSIMLANISHNING ENG MUHIM QONUNLARI VA ULARNING SONLI HARAKTERISTIKASI

3.1. TING TAQSIMLANISH

Uzluksiz tasodifiy miqdor X taqsimlanish zichligida:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 ... da ... x < \alpha \\ c = \dfrac{1}{\beta - \alpha} ... da ... \alpha < x < \beta \\ 0 ... da ... x > \beta \end{cases} \qquad (3.1)$$

teng taqsimlanish qonuniga bo‘ysinadi. Zichlik $\varphi(x)$ grafigi ko‘rinishda bo‘ladi:



3.1 a.

Bir tekis taqsimlanishning asosiy sonli harakteristikasi.
Matematik kutish quyidagi ko‘rinishda:

$$M(x) = \int_{\alpha}^{\beta} x\varphi(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} * \frac{x^2}{2} \Big/_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{2} \qquad (3.2)$$

Dispersiyani (2.8) formula bo‘yicha aniqlaymiz

$$D(x) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = M(x^2) - [M(x)]^2;$$

$$M(x^2) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2\varphi(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} * \frac{x^3}{3} \Big/_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3(\beta - \alpha)} = \frac{\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{3}$$

$$D(x) = \frac{\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{3} - \frac{(\beta + \alpha)^2}{4} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2}{12} = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \qquad (3.3)$$

Standart quyidagiga teng: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \dfrac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}$ (3.4)

3.2. BINOMIAL TAQSIMLANISH

Ta’kidlab o‘tganimizdek, uzlukli tasodifiy k miqdor, n marta tajriba utkazganda hodisaning paydo bo‘lish soni va paydo bo‘lish r ehtimoli binomial taqsimlanish qonuniga bo‘ysinadi. Bu tasodifiy miqdorning taqsimlanish qatori quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

k_i	0	1	…	n
p_i	$p_n(0)$	$p_n(1)$	…	$p_n(n)$

$$\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = 1$$

ehtimoli Bernulli formulasi bo‘yicha (1.15) aniqlanadi.

Binomial taqsimlanish asosiy sonli harakteristikasini aniqlaymiz. Juda ko‘p tajriba n da hodisalarning sodir bo‘lish soni k tasodifiy miqdorlarning yig‘indisi tarzida ko‘rsatish mumkin.

$$k = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

bu yerda, x_i - hodisaning sodir bo‘lish soni, *i* – chi tajribada.

Har bir x_i ikkita 0 va 1 imkoniyatli qiymatga ega.

Miqdorlar x_i taqsimlanish qatori ko‘rinishda bo‘ladi

x_i	0	1
p_i	q	p

Oldingi 2.5 masalada shu tasodifiy miqdorning matematik kutish va dispersiya topilgan edi:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = p,$$

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_x)^2 p_i = pq$$

matematik kutish va dispersiyaning xossasiga asosan:

$$M(k) = \sum_{i=1}^{n} M(x_i) = np, \qquad (3.5)$$

$$D(k) = \sum_{i=1}^{n} D(x_i) = npq, \qquad (3.6)$$

$$\sigma(k) = \sqrt{npq}\,. \qquad (3.7)$$

3.3. NORMAL TAQSIMLANISH QONUNI VA UNING PARAMETRLARI

Geodezik o‘lchashlar natijasida olinadigan hamma tasodifiy miqdorlar ehtimollar normal taqsimlanish qonuniga bo‘ysinadi. Normal qonunning asosiy xususiyatlari shundan iboratki, boshqa taqsimlanish qonunlarini uz ichiga olgan chegaraviy qonundir.

Normal qonun quyidagi ehtimol zichligi bilan xarakterlanadi:

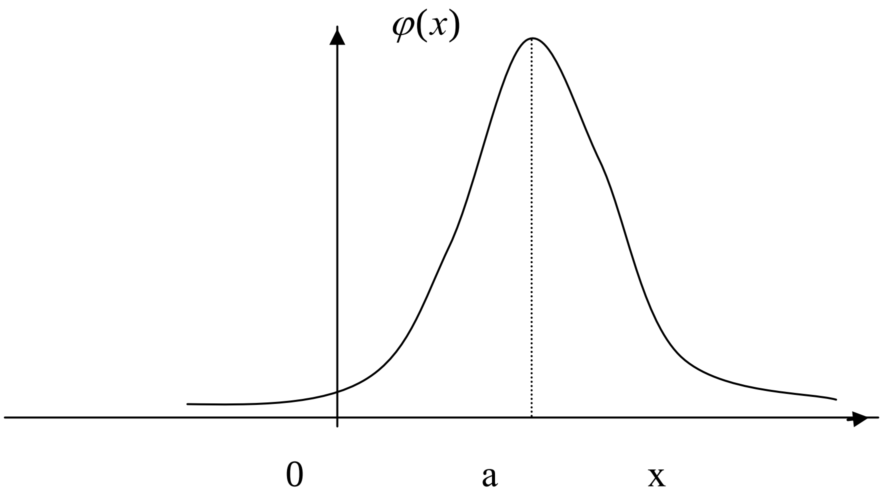
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (3.8)$$

Parametrlar a va σ^2, (3.8) ifodaga kiradigan, X tasodifiy $M(x)$ va $D(x)$ miqdorlardir.

$a = M(x)$,

$\sigma^2 = D(x)$.

Normal qonun bo‘yicha taqsimlanish egriligi tepalik simmetrik ko‘rinishda bo‘ladi.



3.2-chizma.

3.4. LYAPUNOV MARKAZIY CHEKLI TEOREMASI

Ehtimollar nazariyasida normal qonun hosil bo‘ladigan shartlarni muvofiklashtiradigan teoremani "markaziy chekli teorema" nomi bilan yuritiladi. Markaziy chekli teoremaning eng umumiy formasi A.M.Lyapunov tomonidan isbot kilingan.

Lyapunov teoremasi bunday ifodalanadi: “Agar X tasodifiy miqdor juda katta sondagi uzaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar yig‘indisidan iborat bo‘lib, ularning har birining yig‘indiga ta’siri juda kichik bo‘lsa, u holda X normal taqsimotga ega bo‘ladi”. Lyapunova teoremasi o‘lchashlar xatoliklari nazariyasi uchun eng **muhim** ahamiyatga ega.

Ushbu teorema asosida shuni ta’kidlash kerakki, o‘lchashlar xatoligi normal qonunga bo‘ysinadi, ya’ni ular biror sababga ko‘ra hosil bo‘lgan alohida xatoliklar yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Alohida xatoliklar ta’siri xatoliklar yig‘indisi ta’siriga nisbatan kam.

3.5. LAPLASNING TAXMINIY FORMULASI

Qiymati 0 va 1 dan farq qilgan ko‘p sonli tajribada va r ehtimolli qiymatda binomial taqsimlanish normalga yaqinlashadi. Bu qonuniyat Muavr-Laplas lokal teoremasida asoslangan.

Stirlingning taxminiy formulasini qo‘llash bilan

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n \left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (3.9)$$

isbotlanadi, ya’ni

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = .. \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{1}{\sqrt{npq}} * \ell^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \qquad (3.10)$$

(3.10) ifoda Laplasning taxminiy formulasi deyiladi. (3.9) va (3.10), (3.5) va (3.6) e’tiborga olib, (3.10) formula (3.8) formulaga o‘xshashligini ko‘ramiz.

$$t = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \qquad (3.11)$$

(3.11) ifodani belgilab, k ning birga o‘zgarishi bilan miqdor t orttirma olishini hisobga olib,

$$\Delta t = \frac{k+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}},$$

(3.10) ko‘rinishda yozamiz:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ell^{-\frac{t^2}{2}} \Delta t \quad . \qquad (3.12)$$

Funksiya: $$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ell^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (3.13)$$

uchun jadval (1-ilova) tuzilgan.

Unda formula: $P_n(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2npq}} y$. (3.14)

Katta sonli n tajribada $P_n(k)$ ehtimollikni hisoblash uchun xizmat qiladi.

<u>Masala 3.1.</u> Tangani 10 marta tashlaganda gerb tomonining 4 marta tushish ehtimolini toping. n=10; k=4; p=q=0,5. berilgan.

Yechish.

1. formula (3.11) bo‘yicha t ning qiymatini topamiz:

$$t = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{4 - 10*0,5}{\sqrt{10*0,5*0,5}} = \frac{-1}{\sqrt{2,5}} = -0,632 .$$

2. Jadvaldan (1-ilova) u=0,462 olamiz, t argumentda manfiy belgi tushirilgan, ya’ni u juft funksiya u=(-t)=u(t).

3. $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{2,5}} = 0,632$,

4. $P_n(k) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2}} y = \frac{0.632 * 0,462}{\sqrt{2}} = 0,207.$

Javob: $P_n(k) = 0,207$.

Binomial taqsimlanish.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_{10}^4 (0,5)^{10} = 0,205 .$$

Masalaning echimidan ko‘rinib turibdiki, n=10 bo‘lganda ham normal qonun binomial taqsimlanishdan juda kam farq qiladigan javobni beradi.

Lekin, juda katta sonli tajribada ehtimollik $P_n(k)$ shunday kichik bo‘ladiki, amaliyotda ularni hisoblash mohiyatini yo‘qotadi.

3.6. LAPLAS TEOREMASI

Katta sonli tajribada shunday ehtimolliklarni hisoblash amaliy jihatdan qiziqarliki, bunda k hodisalarning paydo bo‘lish soni a dan b gacha chegarada aniqlangan bo‘ladi. (2.4) va (3.10) ga asosan:

$$P(a \le k \le b) = F(k = b) - F(k = a),$$

bu yerda: $$F(k) = \sum_{k=0}^{k-1} P_n(k) = \sum_{k=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} \ell^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \qquad (3.15)$$

$n \to \infty$, $P_n(k) \to 0$da, miqdor $\Delta t \to 0$ va funksiya $\ell^{-\frac{t^2}{2}}$ uzlukli nazarda tutib yozamiz

$$P(a < k < b) = P(t_1 < t < t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} \ell^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(t_2) - F(t_1), \qquad (3.16)$$

bu yerda $$t_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad t_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} \qquad (3.17)$$

Ifoda (3.16) Laplas teoremasi nomi bilan yuritiladi. Bu ifoda normal qonunga bo‘ysinadigan har qanday tasodifiy X miqdorlar uchun qulay.

Umumiy holda ifoda (3.17) ko‘rinishni oladi:

$$t_1 = \frac{a - M(x)}{\sigma(x)}, \quad t_2 = \frac{b - M(x)}{\sigma(x)} \qquad (3.18)$$

Miqdor t - normalangan tasodifiy miqdor deyiladi. Tasodifiy miqdorlarning matematik kutish va dispersiyasining xossalaridan foydalangan holda ko‘rsatish mumkin:

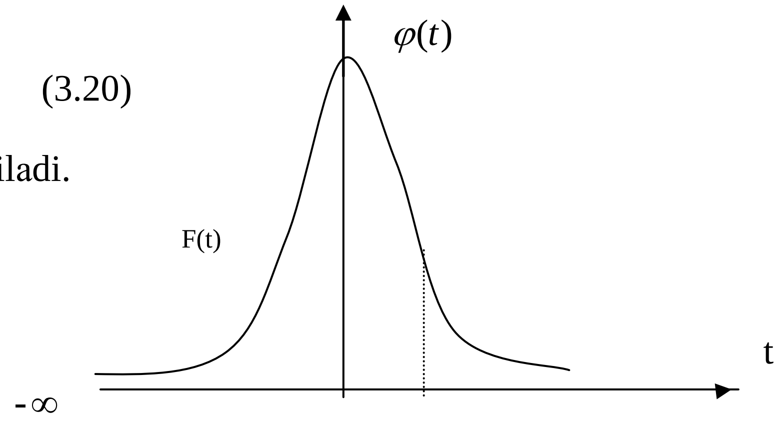
$$M(t) = M\left\{\frac{x - M(x)}{\sigma_x}\right\} = \frac{1}{\sigma_x}\{M(x) - M(x)\} = 0\,,$$

$$D(t) = D\left\{\frac{x - M(x)}{\sigma_x}\right\} = \frac{1}{\sigma_x^2}\{D(x) - 0\} = \frac{D(x)}{\sigma_x^2} = 1\,. \qquad (3.19)$$

Funksiya

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} \ell^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (3.20)$$

normal ***taqsimlanish funksiyasi*** deyiladi.



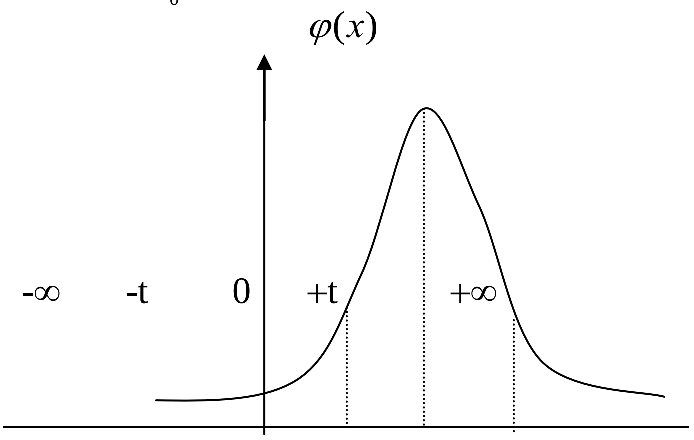
3.3-chizma.

Funksiya F(x) shtrix bilan ko‘rsatilgan maydonga teng (1.10-chizma).

3.7. EHTIMOLLAR INTEGRALI

Jadvalning F(t) qiymatlari hajm jihatdan juda katta , chunki *t* argumentning manfiy va musbiy qiymatlari uchun tuzilgan. Jadvallashtirish uchun ehtimollar integrali yoki Laplas funksiyasi deb yuritiladigan $\Phi(t)$ funksiyasi qo‘layroqdir,

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{+t} \ell^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t} \ell^{-\frac{1}{2}t^2} dt \qquad (3.21)$$

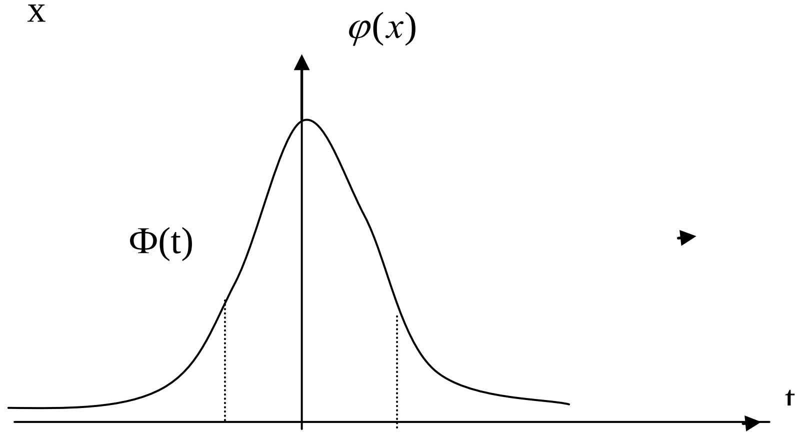


3.4-chizma.

Soniy jihatdan funksiya $\Phi(t)$ shtrixlangan maydonga teng (3.5-chizma). 10-chizmadan ko‘rinib turibdiki, tasodifiy miqdor t intervalda matematik kutishga nisbatan simmetrikdir. Umumiy holda X tasodifiy miqdor uchun $\Phi(t)$ ifodani ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\Phi(t) = P\{|x - M(x)| < t\sigma\} \qquad (3.22)$$

$t\sigma$ M(x) $t\sigma$ x



3.5-chizma.

Funksiya $\Phi(t)$ - toq, ya'ni $\Phi(-t) = -\Phi(t)$, u $F(t)$ jadvaliga nisbatan ikki marta jadval hajmini qisqartiradi.

3.4 va 3.5 chizmalardan ko'rinib turibdiki

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(t) \qquad (3.23)$$

ya'ni, zichlikning 2-xossasiga asosan taqsimlanish egriligining hamma maydoni 1 teng, shtrix bilan ko'rsatilgan (3.4-chizma) maydon ikki qismga bulingan bo'lishi mumkin, bittasi 0,5 ga teng , ikkinchisi 0,5). $\Phi(t)$. teng. Formula (3.23) inobatga olganda (3.16) formula quyidagi ko'rinishga keladi:

$$P(a < x < b) = P(t_1 < t < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = \frac{1}{2}\{\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\}, \qquad (3.24)$$

2-ilovada $\Phi(t)$ funksiya qiymatlarining jadvali tuzilgan. Jadvali bo'lmaganda $\Phi(t)$ funksiya qiymatlarini quyidagi formula bo'yicha hisoblash mumkin.

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \frac{t^7}{336} + ...\right) \qquad (3.25)$$

<u>Masala 3.2.</u> Tangani 100 marta tashlaganda, uning gerb tomoni bilan 45 dan 50 gacha tushish ehtimolini toping.

Yechish: n=100; p=q=0,5; a=45; b=60. berilgan

Toping: P(a<k<b).

1. $\mathrm{M(k)} = \mathrm{np} = 100 * 0,5 = 50$; $\sigma(k) = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \bullet 0,5 \bullet 0,5} = 5$;

2. $t_1 = \dfrac{a - M(k)}{\sigma(k)} = \dfrac{45 - 50}{5} = -1$, $t_2 = \dfrac{b - M(k)}{\sigma(k)} = \dfrac{60 - 50}{5} = 2$

3. 2 – ilovadagi jadvalga asosan $\Phi(t = -1) = -0,683; \quad \Phi(t = 2) = 0,955$.

4. Hisoblanayotgan ehtimollik quyidagiga teng

$$P(a < k < b) = P(t_1 < t < t_2) = \frac{1}{2}\{\Phi(t_1) - \Phi(t_1)\} = \frac{1}{2}\{0{,}955 + 0{,}683\} = 0{,}819\,.$$

<u>Masala 3.3.</u> t=0,30; 0,40; 0,50; 0,60. lar uchun ehtimollar integralini hisoblang.

Yechish. Formula (3.25) qo‘llab topamiz:

$$\Phi(t_1) = 0{,}798(0{,}30 - \frac{0{,}30^3}{6} + \frac{0{,}30^5}{40} - \ldots)\ ; \quad \Phi(t_1) = 0{,}236;$$

$$\Phi(t_2) = 0{,}798(0{,}40 - \frac{0{,}40^3}{6} + \frac{0{,}40^5}{40} - \ldots)\ ; \quad \Phi(t_2) = 0{,}311;$$

$$\Phi(t_3) = 0{,}798(0{,}50 - \frac{0{,}50^3}{6} + \frac{0{,}50^5}{40} - \ldots)\ ; \quad \Phi(t_3) = 0{,}383;$$

$$\Phi(t_4) = 0{,}798(0{,}60 - \frac{0{,}60^3}{6} + \frac{0{,}60^5}{40} - \ldots)\ ; \quad \Phi(t_4) = 0{,}452.$$

Jadval bo‘yicha $\Phi(t)$ hisoblashni tekshirganimizda (2-ilova) natijalar to‘g‘riligi yaxlitlash xatosidan oshmasligini ko‘rsatadi.

<u>Masala 3.4.</u> Zavoddan chiqarilayotgan 1 sortli maxsulotning o‘rtachasi 73% ga teng. Tavakaliga olingan 100 maxsulotning : 1) 69 kam va 77 ko‘pi birinchi sortli; 2) birinchi sortli maxsulot 70 kam , ya’ni 70 dan ko‘p bo‘lishligining ehtimolini aniqlang.

Yechish: n=100; p=0,73; q=0,27; a=69; b=77 berilgan.

1. a) $\mathrm{M(k)} = 100 * 0{,}73 = 73$; $\sigma_{(k)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}73 \cdot 0{,}27} = 4{,}44;$

$$t_1 = \frac{69 - 73}{4{,}44} = -0{,}90\ ; \quad t_2 = \frac{77 - 73}{4{,}44} = 0{,}90\,;$$

$$|t_1| = t_2 = 0{,}90\,; \qquad \Phi(t = 0{,}90) = 0{,}632\,.$$

Simmetrik cheklik holatida (3.24) ifoda quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$P(a < x < b) = P(t_1 < t < t_2) = \Phi(t_1) \qquad (3.26)$$

Qidirilayotgan ehtimollik 0,632 ga teng.

2. Birinchi sortli maxsulot 70% dan kam emaslik ehtimolini toping. Taqsimlanish funksiyasining qoidasiga asosan $F(t) = P(T < t)$,

bu yerda : $t = \frac{69 - 73}{4{,}44} = -0{,}90$. 2-ilovadagi jadval bo‘yicha topamiz $\Phi(t) = 0{,}632$. formula (3.23) nazarda tutib va $\Phi(t)$ funksiyaning toqligini hisobga olib topamiz:

$$F(t = -0{,}90) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(t = 0{,}90) = 0{,}184\,.$$

Birinchi sortli maxsulot 70% kam emas, ya’ni 70% va ko‘proq bo‘ladi, ehtimoli $P = 1 - F(t) = 1 - 0{,}184 = 0{,}816$ ga teng.

Masala 3.5. Burchak o‘lchash standarti $\sigma(\Delta) = 10$, a $M(\Delta) = 0$ bo‘lsa burchak o‘lchash xatoligi Δ. absolyut qiymat bo‘yicha 6'' oshmasligi ehtimolini toping.

Yechish. O‘lchash xatoligi Δ normal qonunga bo‘ysinadi , (3.26) formula bo‘yicha va chekning simmetrikligini nazarda tutib $|t_1| = t_2 = \frac{6''}{10''} = 0{,}6$ topamiz.

$$P(-|\Delta| < 6'') = P(-6'' < \Delta < 6'') = P(-0{,}6 < t < 0{,}6) = \Phi(t = 0{,}6) = 0{,}451.$$

Masala 3.6. –10'' dan +10'' oraliqda xatolikning sodir bo‘lishi ehtimoli 0.95 ga teng, ya’ni $P(|\Delta| < 10'') = 0{,}95$. Agar $M(\Delta) = 0$ bo‘lsa o‘lchash standartini hisoblang.

Yechish.

Ya’ni cheklar simmetrikdir,

$$P(|\Delta| < 10'') = P(-10'' < \Delta < 10'') = \Phi(t) = 0{,}95.$$

Jadval bo‘yicha funksiya $\Phi(t)$ni teskari interpolyatsiya qilib topamiz t=1.96.

Lekin, $t = \frac{\Delta - M(\Delta)}{\sigma(\Delta)} = \frac{10''}{\sigma(\Delta)}$, bu yerda $\sigma = \frac{\Delta}{t} = \frac{10''}{1{,}96} = 5{,}1''$.

3.8. EHTIMOLIY OG‘ISH Z VA O‘RTACHA OG‘ISH

Tasodifiy miqdorlar titilish(razbros) mezoni(kriteriya)ni aniqlaydigan σ standardan boshqa mezonlar (kriteriya) ham qo‘llaniladi, agar tasodifiy miqdor – o‘lchash xatoligi, mezon(kriteriya) - o‘lchash aniqligi bo‘lsa.

1. Ehtimoliy og‘ish Z – tushish ehtimoli 1/2 teng bo‘lgan, matematik kutishga nisbatan simmetrik bo‘lgan uchastka uzunligining yarmidir. Normal tarqatilgan tasodifiy miqdorlar uchun – bu ehtimollik (3.22) asosan – ehtimollar integralidir $\Phi(t_Z)$.

Jadvaldan $\Phi(t)$ qiymat bo‘yicha $\Phi(t_Z) = 0{,}5$ quyidagini topamiz $t_Z = 0{,}67$, bu yerda Z va σ bog‘liqlik formulasini topamiz.

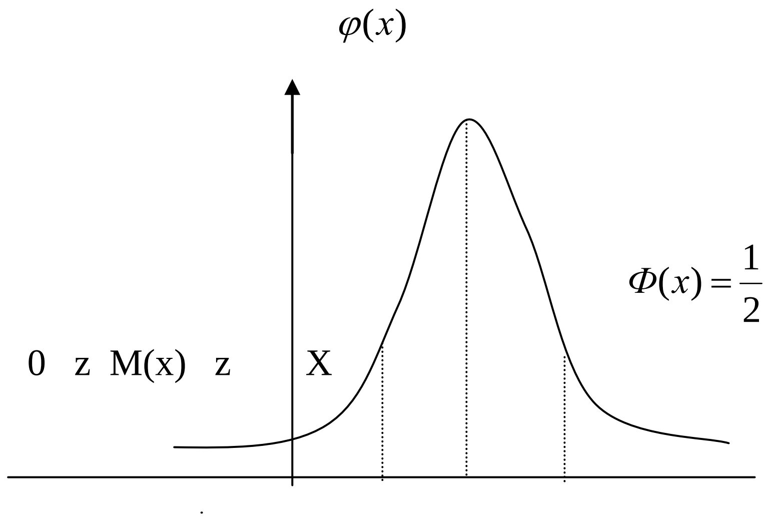
$$t_Z \sigma = Z;\ Z = 0{,}67\sigma \text{ ili } \sigma = 1{,}48Z. \qquad (3.27)$$

2. O‘rtacha og‘ish – birinchi darajali absolyut markaziy moment.

$$\upsilon = M(|x - M_x|) \qquad (3.28)$$

Normal taqsimlanish uchun quyidagi moslik ko‘rinib turibdi:

$$\upsilon = 0{,}80\sigma \quad \text{yoki} \quad \sigma = 1{,}25\upsilon \qquad (3.29)$$



3.6-chizma.

Masala 3.7. Agar o‘rtacha og‘ish $\upsilon = 8{,}0''$ bo‘lsa, ehtimoli 0,954 bo‘lgan qanday chekda xatoliklar Δ paydo bo‘lishini kutish mumkin.

Yechish.

1. Formula (3.29) asosan $\sigma = 1{,}25\upsilon = 1{,}25 * 8{,}0'' = 10{,}0''$ ega bo‘lamiz.

2. Jadvaldagi (2-ilova) $\Phi(t) = 0{,}954$ qiymatlar bo‘yicha t = 2,0.

3. $M(\Delta) = 0$ va $|t_1| = t_2 = \dfrac{\Delta}{\sigma}$ e’tiborga olgan holda $\Delta = t * \sigma = 2 * 10'' = 20''$ topamiz.

Javob: $-20'' < \Delta < 20''$.

Masala 3.8. 100 dan nechta xatolik ikkilangan ehtimoliy og‘ishdan oshishi mumkin.

Yechish.

1. (3.28) asosan $|\Delta| = 2 * Z = 2 * 0{,}67 * \sigma = 1{,}34 * \sigma$ $|t_1| = t_2 = \dfrac{\Delta}{\sigma} = \dfrac{1{,}34 * \sigma}{\sigma} = 1{,}34$. topamiz

2. $\Phi(t = 1{,}34) = 0{,}823$ topamiz, bu yerda $\Phi(t) = P(-2Z < \Delta < 2Z)$.

3. Xatoliklar Δ qiymat $2Z$ dan oshish ehtimolini quyidagi ifoda yordamida aniqlaymiz:

$P(|\Delta| > 2Z) = 1 - \Phi(t) = 0{,}177$.

4. (1.21) ga asosan katta sonli n da $k_0 = np = 100 * 0{,}177 = 18$ ga ega bo‘lamiz.

Nazorat savollari:

1. Bir tekis taqsimlanish nima?
2. Binomial taqsimlanish nima?
3. Normal taqsimlanish qonuni va uning parametrlarini aytib bering?
4. Ehtimollar integralini tushuntiring?
5. Ehtimoliy og‘ish va o‘rtacha og‘ish nima?

4. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

4.1. MATEMATIK STATISTIKANING ASOSIY VAZIFASI. STATISTIK QATOR. GISTOGRAMMA VA TUSHUNCHASI

Matematik statistika – statistik eksperimental tajriba natijalari asosida ehtimoliy masalalarni Yechish usullarini yaratish bilan shug‘ullanadigan maxsus fandir.

Matematik statistikaning asosiy vazifasi:

1. Tasodifiy miqdorlarning taqsimlanish qonunini aniqlash. Bu masala statistik qatorlarni tekislash (sglajivat’) va to‘g‘rilash masalasi ham deyiladi.

2. "Gipotezaning to‘g‘riligini tekshirish masalasi", birinchi masala bilan uzviy bog‘liq va quyidagi savolga jovob bo‘ladi: tajriba natijalari gipoteza bilan mos tushadimi yoki berilgan tasodifiy miqdor taqsimlanish qonuniga $\varphi(x)$ bo‘ysinadimi. Bu savolga javob berish uchun "moslik mezoni" deyiladigan kriteriya xizmat qiladi.

3. Noma’lum parametrlarni "eng qulay" baholashni aniqlash haqida masala, masalan, $M(x)$ va $D(x)$ larga bog‘liq bo‘lgan masalalarning aniqligini baholash.

Tasodifiy miqdor X ning kuzatish natijalari bosh to‘plamdan tanlash deyiladi (tasodifiy miqdor X ning hamma imkonli qiymatlari). Ko‘p n tajribada tanlash statistik guruhlash ko‘rinishida rasmiylashtiriladi. Bunda hamma x_i qiymat oraliqlarga bulinadi va har bir oraliqka to‘g‘ri keladigan m_i qiymatning soni hisoblanadi. Keyin chastota $Q = \frac{m_i}{n}$ hisoblanib, taqsimlanish qatori jadvali tuziladi.

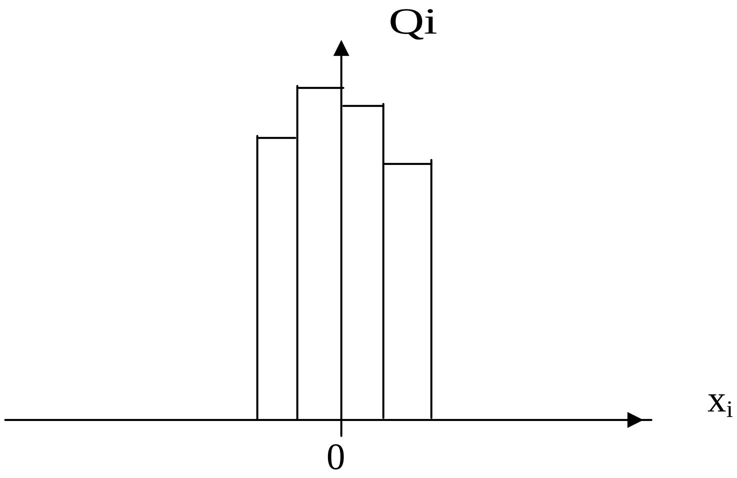
Oraliqlar	x_1-x_2	x_2-x_3	…	x_k-x_{k+1}
m_i	m_1	m_2		m_k
Q_i	Q_1	Q_2		Q_k

Tajriba ko‘rsatadiki, razryadlar soni 10-20 ta bo‘lishi kerak.

Grafik ravishda statistik qator gistogramma deyilgan ko‘rinishda rasmiylashtiriladi. Buning uchun absissa o‘qi bo‘yicha oraliq tushiriladi va har birida maydoni Q_i. ga teng bo‘lgan to‘g‘riburchak chiziladi. Balandlik h_i formula bilan hisoblanadi:

$$h_i = Q_i / x_{i+1} - x_i, \qquad (4.1)$$

$$\text{to‘g‘ri, } \sum_{i=1}^{k} Q_i = 1.$$



4.1-chizma.

Matematik statistikada taqsimlanish funksiyasiga $F(x)$ mos taqsimlanishning statistik funksiyasi xizmat qiladi.

$$F^*(x) = Q(X < x).$$

4.2. STATISTIK TAQSIMLANISHNING SONLI HARAKTERISTIKASI

Tasodifiy miqdorning har bir sonli harakteristikasi uning statistik uxshashligiga mos keladi. Statistik boshlang‘ich va markaziy momentlar quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\nu_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n} \qquad (4.2)$$

$$\mu_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k}{n} \qquad (4.3)$$

Mos ravishda matematik kutish , dispersiya va standart quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$M^*(x) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (4.4)$$

$$D^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} \qquad (4.5)$$

$$\sigma^*(x) = \sqrt{D^*(x)} \qquad (4.6)$$

Ko‘rinib turibdiki, bu formulalarda matematik kutish o‘rnida o‘rta arifmetik qatnashmoqda.

Statistik taqsimlanishning asosiy sonli harakteristikasi to‘liq aniq amaliy ma’noga ega. Sistematik xatolardan holi holda hamma o‘lchashlar natijasi o‘rta arifmetigi (4.4) o‘lchanayotgan miqdorning haqiqiy qiymat o‘lchovi bo‘lib, statistik o‘rta kvadratik og‘ish (4.6) aniqlik o‘lchami bo‘lib xizmat qiladi.

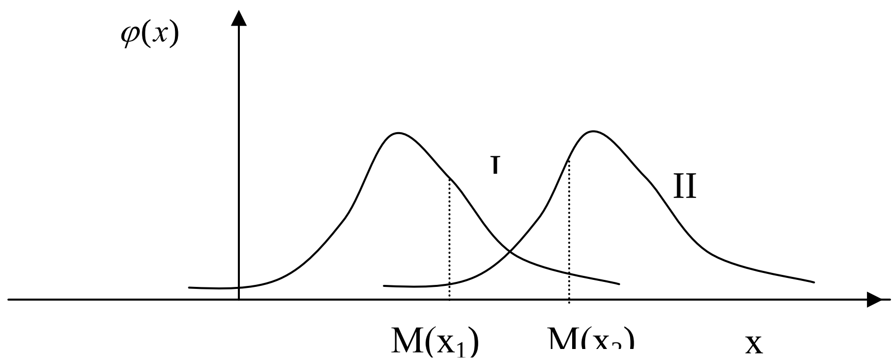
Qanchalik standart $\sigma^*(x)$ kichik bo‘lsa, o‘lchash natijalari o‘rta arifmetik qiymat atrofida shunchalik tikish guruhlanadi, shunchalik o‘lchashlar aniqroq bo‘ladi.

4.3. STATISTIK TAQSIMLANISHNING QO‘SHIMCHA XARAKTERISTIKASI. ASIMMETRIYA. EKSSESS

Taqsimlanishni juda aniqroq harakterlash uchun yuqori darajali momentlar qo‘llaniladi. Uchinchi darajali normallangan markaziy moment asimmetriya deyiladi:

$$S_k = \frac{\mu_3^*}{\sigma^{*3}} \qquad (4.7)$$

Simmetrik taqsimlanish uchun $S_{л} = 0$. 1.15-chizmada ikkita asimmetrik taqsimlanish ko‘rsatilgan.



1.15-chizma.

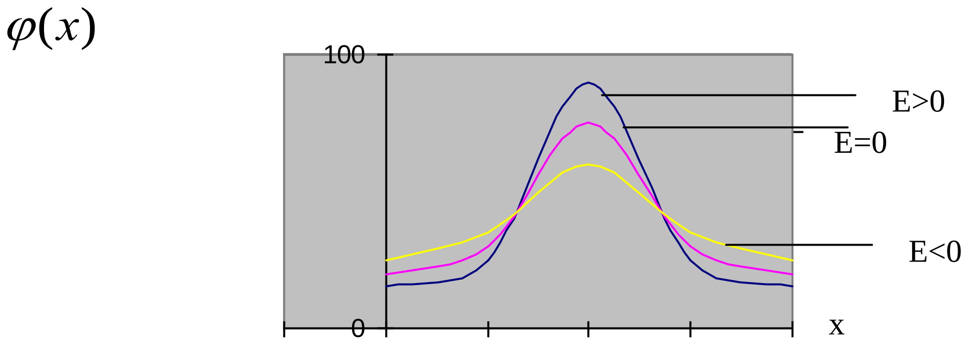
I-egrilik musbiy assimmetriyaga ega ($S_k > 0$), II-egrilik manfiy ($S_k < 0$) .

Miqdor: $$E = \frac{\mu_4^*}{\sigma^{*4}} - 3 \qquad (4.8)$$

ekssess deyiladi va egrilik o‘lchovi bo‘lib xizmat qiladi, ya’ni o‘tkir cho‘qqili va yassi cho‘qqili taqsimlanishlar. Standart qiymati uchun ekssess E=0 qabul qiladi. (normal taqsimlanishning egriligi uchun quyidagi ifoda o‘rinlidir $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$).

16-chizmada taqsimlanishning uch xil ko‘rinishi: manfiyga, nolga va musbatga ekssessga teng bo‘lgan egriligi ko‘rsatilgan.

Statistik qatorlarning normalligini tekshirish masalalarni yechishda $S_{л}$ va E miqdorlarni hisoblash amalga oshiriladi. S_k va E qiymatlarning noldan farq qilishi tasodifiy miqdor haqiqiy taqsimlanishining normaldan farq qilishini bildiradi.



1.16-chizma.

Ekssess qiymatining noldan farq qilishini baholash uchun quyidagi emperik formula qo‘llaniladi:

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24}{n}}, \qquad (4.9)$$

bu yerda: σ_E – ekssessning o‘rta kvadratik og‘ishi;

n – tajribalar soni.

Juda assimmetrik qatorlar uchun S_k miqdor odatda birdan kichik bo‘ladi.

Masala 4.1. "Blesk" tipidagi svetodalnomerni tadqiq qilish uchun bitta tomon 16 marta o‘lchangan. 1.2-jadvalda berilgan natijalardan foydalanib, $\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*, \sigma^*, E, \sigma_E, S_k$ larni hisoblang va taqsimlanish turi haqida xulosa qiling.

Hisoblash natijalaridan ko‘rinib turibdiki, asimmetriya va ekssess noldan juda oz farq qiladi, tasodifiy miqdor S statistik taqsimlanish normalga yaqin.

1.2-jadval

№	O‘lchashlar natijalari $S_i(m)$	$\delta S_i = S_i - S_{cp}$ (m)	δS_i^2	δS_i^3	δS_i^4	Hisoblashlar
1	6994,911	+17,8	316,84	+5639,8		$\mu_1^* = \frac{\Sigma \delta S_i}{n} = \frac{-0,2}{16} \approx 0$
2	,890	-3,2	10,24	-32,8		
3	,879	-14,2	201,64	-2863,3		$\mu_2^* = \frac{\Sigma \delta S_i^2}{n} = \frac{1186,4}{16} = 74,2$
4	,895	+1,8	3,24	+5,8		
5	,882	-11,2	125,44	-1404,9		$\mu_3^* = \frac{\Sigma \delta S_i^3}{n} = \frac{+653}{16} = +40,8$
6	,898	+4,8	23,04	+110,6		
7	,885	-8,2	67,24	-551,4		

8	,888	-10,2	104,04	-1061,2		$\mu_4^* = \frac{\Sigma \delta S_i^4}{n} = \frac{199313}{16} = 12457$
9	,902	+8,8	77,44	+681,5		$D^*(x) = \mu_2^* = 74{,}2$
10	,901	+7,8	60,84	+474,6		$\sigma^*(x) = \sqrt{D^*(x)} = 8{,}6$
11	,895	+1,8	3,24	+5,8		$E = \frac{\mu^*{}_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{12457}{8{,}6^4} - 3 = -0{,}74$
12	,894	+0,8	0,64	+0,5		
13	,896	+2,8	7,84	+22,0		$\sigma_E = \sqrt{\frac{24}{16}} = 1{,}22$
14	,888	-10,2	104,04	-1061,2		
15	,895	+1,8	3,24	+5,8		$\lvert E \rvert < \sigma_E \quad S_л = \frac{\mu_3^{//}}{\sigma^{//3}}$
16	,902	+8,8	77,44	+681,5		

$S_{o'r.}$=6994,8962; Σ=0,2; 1186,4; +653,1; 199313.

4.4. TAQSIMLANISH QONUNINI TAJRIBA ASOSIDA ANIQLASH

Statistik qator taqsimlanishini tadqiq qilish gistogrammani qurishdan boshlanadi. Gistogrammaning ko‘rinishi bo‘yicha hamda masalaning maqsadi bo‘yicha taqsimlanishning nazariy egriligi hakida xulosa qilinadi. Masalan, o‘lchashlar tasodifiy xatoliklari qatori tadqiq qilinmoqda. Bunda normal taqsimlanish nazariy egriligi (3.1) ko‘rinishda desak:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

(3.1) ifodada ikkita noma’lum parametrlar a va σ mavjud. Berilgan tanlash bo‘yicha shunday parametrlarni tanlash talab qilinadiki, ya’ni funksiya $\varphi(x)$ eng qulay tarzda berilgan statistik materiallarni izohlasin. Parametrlarni tanlash usullaridan biri ("momentlar usuli" deyiladi), ya’ni nazariy taqsimlanishning asosiy sonli harakteristikasi uning mos statistik harakteristikasiga teng bo‘lishi kerak. quyidagi tenglik bajarilishi kerak:

$$a = M^*(x), \quad \sigma = \sqrt{D^*(x)}\,. \qquad (4.10)$$

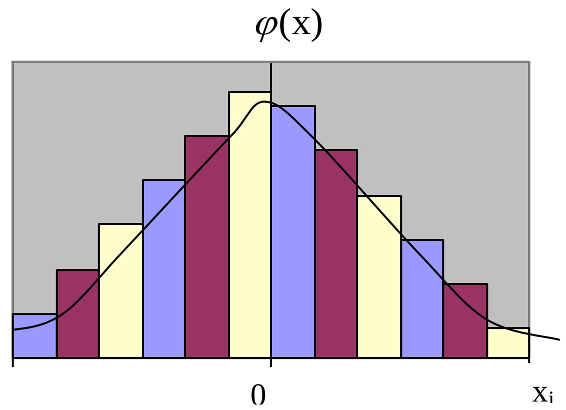
Miqdorlar $M^*(x)$ i $D^*(x)$ formulalar (4.4 va 4.5) bo‘yicha aniqlanadi. Egrilik tenglamasi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma^*\sqrt{2\pi}} \ell^{-\frac{(x-M^*{}_x)^2}{2\sigma^{*2}}} \qquad (4.11)$$

Ifoda (4.11) odatda quyidagi ko‘rinishga keltiriladi:

$$\varphi(x) = y * \frac{1}{\sigma^*\sqrt{2}} \qquad (4.12)$$

bu yerda: $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ell^{-\frac{t^2}{2}}$ argument $t_i = \frac{x_i - M^*(x)}{\sigma^*}$ bo‘yicha 1-ilovadagi jadvaldan olinadi. Keyinchalik gistogramma chizmasiga, chap intervallar x_i chegarasi uchun hisoblangan $\varphi(x_i)$ (1.1-jadvalga qarang) qiymati bo‘yicha taqsimlanishning nazariy egriligi chiziladi.



1.17-chizma.

4.5. PERSON KRITERIYASI

Nazariy egrilik $\varphi(x)$ qanchalik yaxshi tanlanmasin, uning statistik taqsimlanish (gistogramma) bilan farqi bo‘ladi. Savol tug‘iladi: bu farq sezilarlimi yoki tasodifiy vaziyat bilan bog‘liqmi. K.Person p_i va Q_i oralig‘idagi farq o‘lchovi sifatida quyidagi miqdorni taklif qildi:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (4.13)$$

bu yerda: m_i - i - oraliqdagi qiymatlar x_i soni ;

k – oraliqlar soni;

np_i - qiymatlarning x_i nazariy soni, i-oraliqqa tushuvchi;

p_i-*i*-oraliqqa tushuvchi ehtimollik va formula bilan aniqlanadi:

$$p_i = \frac{1}{2}\left\{ \Phi\left(\frac{x_{i+1} - M_x^*}{\sigma^*}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - M_x^*}{\sigma^*}\right) \right\}, \qquad (4.14)$$

agar gistogrammaning ko‘rinishi bo‘yicha normal taqsimlanish bo‘yicha gipoteza qo‘yilganda.

Miqdor χ^2 bitta parametr Z bog‘liq bo‘lgan «x_i-kvadrat» taqsimlanishiga bo‘ysinadi. Z formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$Z = k - 1 - S, \qquad (4.15)$$

bu yerda: ; *k*-oraliqlar soni, *S*- parametrlar soni, tanlash bo‘yicha baholanayotgan.

Masalan, normal taqsimlanish ikkita parametr bilan aniqlanadi: matematik kutish α va standart σ. Demak normal qonun uchun S=2 va z=k-3.

Statistik taqsimlanishning nazariy bilan moslik darajasi ehtimollik r bilan baholanadi va 5-ilovadagi jadvaldan argument z va qiymat $\chi^2_{his.}$ bo‘yicha olinadi. Amaliyotda ehtimolning eng kichik qiymati r=0.1 hisoblanadi. Shuning uchun ehtimollik r kichkina bo‘lsa, ya’ni r<0,1 bo‘lsa, unda tajriba natijalari gipotezaga qarshi hisoblanadi. Agar r katta bo‘lsa, unda gipotezaga mos keladi.

4.6. PARAMETRLARNI STATISTIK BAHOLASH

Parametrning taxminiy, tasodifiy qiymati cheklangan sonli tajribada hisoblangan bo‘lsa parametrlarni baholash deyiladi. Masalan, matematik kutish uchun tasodifiy miqdorlarning o‘rta arifmetik qiymati baholash bo‘lib xizmat qiladi. Parametrlarni baholash o‘z navbatida o‘lchashlar natijasining funksiyasidir. Hamma baholashlardan odatda shunday baholashni tanlaydiki, u "sifatli" bo‘lsin, ya’ni, quyidagi talablarga javob bersin:

- asoslanganlik $eht.\lim\limits_{n\to\infty}.a^* = a$

(tajribalar sonini ko‘paytirganda a^* ehtimollik bo‘yicha a kidirilayotgan parametrga mos kelishi kerak);

- siljimaganlik (shartning $M(a^*) = a$ bajarilishi kerak, bajarilmaslik parametrlarni baholashda sistematik xatolarga olib keladi);

- natijalik (effektivnosti), ya’ni $D(a^*) = \min$

(siljimagan baholash hamma qolgan baholashlarga taqqoslaganda minimal dispersiyaga ega bo‘lishi kerak, ya’ni baholanayotgan parametrlar atrofida kichik sochilishga ega bo‘lish kerak).

Parametrlarni baholashni topishning uchta usuli mavjud, bittasi "momentlar usuli", 26 paragrafda ko‘rildi.

Yuqoridagi xossalarni qoniqtiradigan parametrlarni baholashni topish hamma vaqt ham qo‘l kelavermaydi. Shuning uchun baholashni tanlashdan oldin ularni tahlil qilish kerak.

Matematik kutishnini eng qulay baholash o‘rta arifmetik (4.4) hisoblanadi.

$$M^*(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Dispersiyani asoslangan va siljimagan baholash bo‘lib quyidagi miqdor xizmat qiladi:

$$D^*(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \qquad (4.16)$$

standartni baholashda – qiymat:

$$\sigma^*(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \qquad (4.17)$$

Xatoliklar nazariyasida standartni baholashni o‘rta kvadratik xato deyiladi va m belgilanadi.

4.7. ISHONCHLI ORALIQLAR VA ISHONCHLI EHTIMOLLIK

Noma’lum parametrlarni bitta son bilan baholash (masalan, $M^*(x) = \bar{x}$) aniq baholash deyiladi. Matematik statistikada aniq baholash bilan birgalikda parametrlarni oraliq (interval) baholash usullari ham yaratilgan. Bu usullar asosan kichik sonli o‘lchashlarda qo‘l keladi, qachonki, aniq baholash ko‘p hollarda tasodifiy va parametrlarni baholashda ma’lum xatoliklarga olib kelish mumkin. Oraliq (interval) baholashning vazifasiga parametrlarning noma’lum aniq qiymatni $a \cdot \beta$ oldindan tanlangan ishonchli ehtimollik β bilan yopuvchi va ehtimolligi amaliy hisoblarda 0,90-0,95 ga teng bo‘lgan oraliqni qurishdan iborat. Noma’lum standarda matematik kutish uchun ishonchli oraliq quyidagi ifodaga asosan kuriladi

$$P\left[\left|\bar{x} - M(x)\right| < t_\beta \sigma^*_{\bar{x}}\right] = \beta, \qquad (4.18)$$

bu yerda: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\sigma^*(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$, $\sigma^*_{\bar{x}} = \frac{\sigma^*_x}{\sqrt{n}}$ (4.19)

(o‘rta arifmetikning standartini keltirib chiqarish formulasi 42 paragrafda berilgan), $x_1, x_2, ..., x_n$ - normal taqsimlangan X miqdorning qiymatlari X, $t_\beta = \frac{\bar{x} - M(x)}{\sigma^*_{\bar{x}}}$ - Styudent qonuni bo‘yicha taqsimlangan, **ozodlik darajasi soni** deyiladigan z bitta parametrga bog‘liq bo‘lgan tasodifiy miqdor, ya’ni z=n-1. Berilgan ehtimollik β va ozodlik darajasi soni bo‘yicha Styudent taqsimlanish jadvalidan (4-ilova) koeffitsiyent t_β topiladi. Matematik kutish uchun ishonchli oraliq(interval) quyidagicha: $\bar{x} - t_\beta \sigma^*_{\bar{x}} < M(x) < \bar{x} + t_\beta \sigma^*_{\bar{x}}$ (4.20)

n>20 bo‘lganda Styudent taqsimlanishi normalga yaqinlashadi, shuning uchun t_β koeffitsiyenti berilgan ehtimollik $\beta = \Phi(t)$ ehtimollar integrali jadvalidan topiladi (2-ilova).

Masala 4.2. Tasodifiy X miqdor 20 marta kuzatilgan. Kuzatish natijalari 1.3-jadvalda berilgan. 0,95 bo‘lgan ishonchli ehtimollik bilan M(x) uchun ishonchli oraliq(interval)ni ko‘ring.

1.3-jadval

№	x_i	№	x_i	№	x_i	№	x_i
1	10,5	6	10,6	11	10,6	16	10,9
2	10,8	7	10,9	12	11,3	17	10,8
3	10,9	8	11,0	13	10,5	18	10,7
4	11,2	9	10,3	14	10,7	19	10,9
5	10,4	10	10,8	15	10,8	20	11,0

Yechish.

1. Miqdorlarni topamiz:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 10{,}78; \qquad D^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 0{,}064;$$

$$\sigma^*(x) = \sqrt{D^*(x)} = \sqrt{0{,}064} = 0{,}253; \qquad \sigma^*_{\bar{x}} = \frac{\sigma^*_x}{\sqrt{n}} = 0{,}056.$$

2. Styudent jadvali bo‘yicha (4-ilova) β=0,95 va z=19 uchun koeffitsiyent t_β=2,09 topamiz, bu yerda $t_\beta * \sigma^*_{\bar{x}} = 2{,}09 * 0{,}056 = 0{,}12$. Ishonchli oraliq 10,78-0,12<M(x)<10,78+0,12 yoki 10,66<M(x)<10,90 ga teng.

3. Normal qonundan foydalanganimizda t_β=1,95 topamiz. Integral jadvali bo‘yicha $\Phi(t)$ q0,95. Unda $t_\beta * \sigma^*_{\bar{x}} = 1{,}96 * 0{,}056 = 0{,}11$, M(x) uchun ishonchli oraliq: 10,67 < M(x) < 10,89.

Demak, n=20 bo‘lganda ikkala taqsimlanish ham bir-biridan juda kam farq qiladi.

<u>Masala 4.3.</u> Tasodifiy miqdor 7 marta kuzatildi. $\bar{x} = 23{,}64$, $\sigma^*_{\bar{x}} = 0{,}092$. miqdorlar hisoblangan M(x) noma’lum uchun ehtimolligi 0,95 bo‘lgan ishonchli oraliqni ko‘ring.

Yechish.

1. Styudent jadvali bo‘yicha β=0,95 va z=6 uchun: t_β=2,45; $t_\beta * \sigma^*_{\bar{x}} = 0{,}23$.

Ishonchli oraliq: 23,41<M(x)<23,87.

2. Ehtimollar integrali jadvali bo‘yicha $\Phi(t) = 0{,}95$ uchun: t_β=1,96; $t_\beta * \sigma^*_{\bar{x}} = 0{,}18$.

Ishonchli oraliq: 23,46<M(x)<23,82 , ya’ni oraliq ozgina kichkina.

Shunday qilib, n<20 da M(x) uchun ishonchli oraliqni qurish uchun Styudent taqsimotini qo‘llash kerak.

Nazorat savollari:

1. Matematik statistikaning asosiy vazifalari nimadan iborat?
2. Gistogramma qanday qo‘riladi?
3. Assimetriya nima?
4. Ekssess nima?
5. Ishonchli oraliq va ehtimollik nima?

5. KORRELYATSIYA ANALIZNING ELEMENTLARI

5.1. STATISTIK ALOQALAR TO‘G‘RISIDA TUSHUNCHA

Qator ilmiy-tadqiqot masalalarini yechishda olingan o‘lchash natijalarining qandaydir bir bosh sababga yoki xatolik manba’siga bog‘liq ekanligini belgilashga to‘g‘ri keladi.

Agar o‘lchangan miqdorlar orasidagi bog‘liqlik aniqlangan bo‘lsa va formula bilan ifodalangan bo‘lsa, unda uni o‘lchashlarni va ular natijalarni hisoblashni unumli boshqarishda foydalanish kerak.

Bog‘liqlikning ikkita turi mavjud: funksional va statistik.

Ikkita *x* va *y* funksional bog‘liqlik deb shunday bog‘liqlikka aytiladiki, bunda har bir x qiymatga aniq ko‘rsatiladigan u ning qiymati mos kelishi kerak (masalan: $y = \sqrt{x}$, $\upsilon = \frac{4}{3}\pi R^3$ va boshqalar).

Ikkita *x* va *y* statistik bog‘liqlik deb shunday bog‘liqlikga aytiladiki, bunda x ning o‘zgarishi bilan x ning har bir qiymatiga u ning qiymati mos keladi.

Statistik bog‘liqlik xususiy holda shunday bog‘liqlikki, bunda x ning o‘zgarishi bilan u ning matematik kutishi chiziqli qonun asosida o‘zgaradi. Bu bog‘liqlik to‘g‘ri chiziqli korrelyatsion bog‘liqlik deyiladi. Masalan, odamning bo‘yi va og‘irligi orasidagi bog‘liqlik (u_{kg}=x_{sm} – 100).

Tadqiqotchining maqsadi shundan iboratki, bog‘liqlikning zichligini aniqlash, ya’ni korrelyatsion aloqaning funksional aloqaga yaqinlik darajasini baholash va bu aloqaning turini aniqlashdan iborat.

5.2. KORRELYATSIYA KOEFFITSIYENTI

Ikkita miqdor *x* va *y* orasidag chiziqli korrelyatsion aloqa zichligi korrelyatsiya koeffitsiyenti bilan ifodalanadi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$z^* = \frac{k_{xy}^*}{\sigma_x^* * \sigma_y^*} \qquad (5.1)$$

bu yerda: $$k_{xy}^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \qquad (5.2)$$

statistik korrelyatsion moment, ikkinchi darajali markaziy moment, ikkita tasodifiy miqdor sistemasinig eng muhim sonli xarakteristikasi;

x_i va u_i- kuzatishlardan olingan *x* va *y* o‘zgaruvchilarnig har xil qiymatlari;

n – juft kuzatishlar soni x_i va y_i;

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}; \quad \sigma_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}; \quad \sigma_y^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}}.$$

Korrelyatsiya koeffitsiyenti $-1 \le Z \le 1$ oraliqda o‘zgaradi. Agar, korrelyatsiya koeffitsiyenti +1 yoki –1 teng bo‘lsa, x va u orasida aniq chiziqli funksional aloqa mavjud, ya’ni

$$y=ax+c; \qquad x=by+d.$$

Agar z<0 bo‘lsa, u holda manfiy korrelyatsiya mavjud: x ning kamayishi (ko‘payishi) bilan *y* ning ko‘payishi (kamayishi) tendensiyasi mavjud; z>0 bo‘lgan holda musbiy korrelyatsiya bo‘ladi. Agar z=0, unda *x* va *y* orasida korrelyatsion aloqa mavjud emas (lekin chiziqsiz aloqa bo‘lishi mumkin).

Formula (4.21) bo‘yicha aniqlanadigan miqdor z^*, korrelyatsiya koeffitsiyenti nazariy qiymatini baholash formulasidir. Bu baholash tasodifiydir. Savol tug‘iladi: korrelyatsiya koeffitsiyenti qanday aniqlikda hisoblanmoqda va qanday absolyut qiymatda aloqa mavjud, va teskarisi.

Mashhur statistik olim V.I.Romanovskiy o‘lchashlar soni $n \ge 50$ bo‘lganda korrelyatsiya koeffitsiyenti o‘rta kvadratik og‘ishini hisoblashda quyidagi formulani taklif qildi:

$$\sigma_z = \frac{1-z^2}{\sqrt{n}}. \qquad (5.3)$$

Aloqa mavjud deb hisoblanadi, agar quyidagi shart bajarilsa:

$$\left|z^*\right| \ge 3\sigma_z 0. \qquad (5.4)$$

5.1 Masala. n=100 bo‘lganda korrelyatsiya koeffitsiyenti z^*=+0,36 topilgan. Miqdorlar orasida korrelyatsion aloqa borligini aniqlang.

Yechish. Aniqlaymiz: $\sigma_z = \frac{1-0{,}36^2}{\sqrt{100}} = 0{,}087$

ya’ni $\left|z^*\right| \ge 3\sigma_z$, 0,36>0,26 bo‘lganligi uchun chiziqli korrelyatsion aloqa mavjud deb hisoblaymiz.

n<50 bo‘lganda korrelyatsiya koeffitsiyentini baholash uchun taqsimlanishning normal qonuniga bo‘ysinadigan maxsus funksiya – Fisher mezoni(kriteriyasi)dan foydalaniladi:

$$Z = \frac{1}{2}\left\{\ln(1+z) - \ln(1-z)\right\}. \qquad (5.5)$$

Qiymatlarning standarti Z formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \qquad (5.6)$$

Korrelyatsiya koeffitsiyentlari z^* qiymatlari tajribasidan hisoblangan Z qiymatlar bevosita (5.5) formula bo‘yicha yoki 3-ilovada berilgan jadval bo‘yicha hisoblanishi mumkin.

Fisher kriteriyasini qo‘llashni misolda ko‘ramiz.

5.2 Masala. X va Y miqdorlar orasidagi korrelyatsion aloqani tadqiqot qilganda z^{*}=+0,50; n=28 teng bo‘lgan korrelyatsiya koeffitsiyentlari olingan. X va U miqdorlar orasida aloqa borligini 0,95 ehtimollik bilan aniqlang.

Yechish. 3 ilovadagi jadvalning z^{*}=+0,50 qiymati bo‘yicha $Z_{hisob.}$ ni topamiz:

$$Z_{hisob.=}0,549.$$

Standart Z: $\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{28-3}} = 0,20$.

Ehtimollik 0,95 bilan (t=1,96) Z miqdor qiymatni qabul qilishi mumkin:

$Z_{hisob.} - t * \sigma_z < Z < Z_{hisob.} + t * \sigma_z$, yoki $0,549 - 1,96 * 0,20 < Z < 0,549 + 1,96 * 0,20$

$$0,157 < Z < 0,941.$$

3 – ilovadagi jadvaldan korrelyatsiya koeffitsiyenti qiymatlarining mos Z (0,16 i 0,94) chekka qiymatlarini topamiz: 0,16<z<0,74.

Demak, ehtimolligi 0,95 kichik bulmaganda korrelyatsiya koeffitsiyentining haqiqiy qiymati +0,16 *i* +0,74 oraliqda joylashgan bo‘ladi.

Shunday kilib 0,74-0,16=0,58 ga teng bo‘lgan oraliq korrelyatsiya koeffitsiyentinig absolyut qiymatidan (0,50) katta, unda chiziqli korrelyatsion bog‘liqlik mavjud deb hisoblash kerakmas.

5.3. REGRESSIYA TENGLAMASI

X va *Y* o‘zgaruvchilar orasidagi chiziqli korrelyatsion aloqani ifodalaydigan emperik formulani chiqarish uchun, regressiya degan tenglama qo‘llaniladi (chiziqli regressiya *Y* va *X*) $y_i - \bar{y} = \rho_{y/x}(x_i - \bar{x})$, (5.7)

bu yerda: $\rho_{y/x}$- quyidagi formula bilan hisoblanadigan *Y* va *X* regressiya koeffitsiyenti.

$$\rho_{y/x} = z^{*}\frac{\sigma_y^{*}}{\sigma_x^{*}}, \qquad (5.8)$$

Chiziqli korrelyatsion aloqa bo‘lganda o‘zgaruvchilar orasida quyidagi ko‘rinishdagi regressiya tenglamasi mavjud

$$x_i - \bar{x} = \rho_{x/y}(y_i - \bar{y}), \qquad (5.9)$$

bu yerda: $\rho_{x/y} = z^{*}\frac{\sigma_x^{*}}{\sigma_y^{*}}$, (5.10)

Lekin, ko‘pincha (5.9) ko‘rinishdagi tenglamaning ma’nosi yo‘q, agar X ning Y ga bog‘liqligi tadqiq qilingan bo‘lsa.

Regressiya koeffitsiyenti o‘rta kvadratik og‘ishini n ko‘p bo‘lganda quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\sigma_{\rho_{y/x}} = \frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*}\sqrt{\frac{1-z^2}{n-3}}, \qquad (5.11)$$

Tenglama (5.7) amaliy qo‘llanganda quyidagi ko‘rinishga keladi: Y=ax+b:

$$y_i = \rho_{y/x} * x_i + (\bar{y} - \rho_{y/x} * \bar{x}) \qquad (5.12)$$

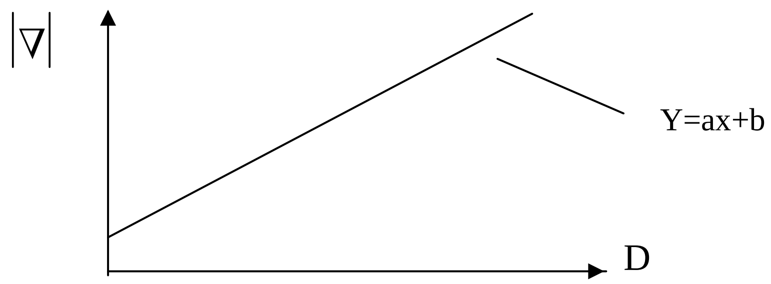
Tenglama (5.12) berilgan X qiymatlar bo‘yicha o‘zgaruvchi Y ning o‘rtacha qiymatlarini hisoblashda qulaydir.

<u>5.3 Masala.</u> Svetodalnomer bilan o‘lchangan D_i masofalar va ushbu tomonlarning xatoliklari $|\Delta_i|$ berilgan. Jadvaldagi berilganlarga asosan korrelyatsiya koeffitsiyenti, regressiya koeffitsiyenti, ular aniqligini kamida 0,90 ehtimollikda baholash va regressiya tenglamasini tuzing.

Yechish. Masalani Yechishdan oldin (x_i y_i) nuqtalarni grafik tasvirlashdan boshlanadi (1.18-chizma). Ko‘rinib turibdiki, tasvir D_i va $|\Delta_i|$ orasida korrelyatsiya mavjudligini ko‘rsatadi. z^* ni formula (5.1) bo‘yicha hisoblaymiz.

1.4-jadval

№	O‘lchash natijalari		Hisoblashlar				
	D_i, km	$\|\Delta_i\|$, sm	$\delta D_i = D_i - \bar{D}$	$\delta\Delta_i = \|\Delta_i\| - \|\bar{\Delta}\|$	δD_i^2	$\delta\Delta_i^2$	$\delta D_i\ \delta\Delta_i$
1	8,7	7,0	+3,8	+3,2	14,44	10,24	+12,16
2	3,7	3,0	-1,2	-0,8	1,44	0,64	+0,96
3	6,0	4,0	+1,1	+0,2	1,21	0,04	+0,22
4	3,3	3,0	-1,6	-0,8	2,56	0,64	+1,28
5	5,1	4,0	+0,2	+0,2	0,04	0,04	+0,04
6	6,1	4,0	+1,2	+0,2	1,44	0,04	+0,24
7	2,7	3,0	-2,2	-0,8	4,84	0,64	+1,76
8	4,9	4,0	0	+0,2	0	0,04	0
9	3,1	4,0	-1,8	+0,2	3,24	0,04	-0,36
10	3,7	2,0	-1,2	-1,8	1,44	3,24	+2,16
11	5,7	6,0	+0,8	+2,2	0,64	4,84	+1,76
12	4,9	5,0	0	+1,2	0	1,44	0
13	5,6	3,0	+0,7	-0,8	0,49	0,64	-0,56
14	7,6	4,0	+2,7	+0,2	7,29	0,04	+0,54
15	4,2	3,0	-0,7	-0,8	0,49	0,64	+0,56
16	2,0	2,0	-2,9	-1,8	8,41	3,24	+5,22
17	4,0	2,0	-0,9	-1,8	0,81	3,24	+1,62
18	6,5	5,0	+1,6	+1,2	2,56	1,44	+1,92
19	7,2	6,0	+2,3	+2,2	5,29	4,84	+5,06
20	2,7	2,0	-2,2	-1,8	4,84	3,24	+3,96
O‘r.	4,9	3,8	+14,4 <u>-14,7</u> -0,3	+11,2 <u>-11,2</u> 0,0	61,47	39,20	+38,54



1.18-chizma.

Topamiz $\sigma^*_{|\Delta|} = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta\Delta_i^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{39{,}20}{19}} = 1{,}42sm; \quad \sigma^*_D = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta D_i^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{61{,}47}{19}} = 1{,}80km$

$$z^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta D_i * \delta\Delta_i}{(n-1)\sigma^*_{|\Delta|} * \sigma^*_D} = \frac{+38{,}54}{19 * 1{,}80 * 1{,}42} = +0{,}79\,.$$

Korrelyatsiya koeffitsiyentining ishonchliligini baholaymiz. Chunki o‘lchashlar soni n unchalik katta emas. Ishonchlikni baholash uchun Fisher Z kriteriyasidan foydalanamiz.

3-ilovada joylashgan jadval bo‘yicha, korrelyatsiya koeffitsiyenti z^*=+0,79 ni argument deb foydalanib, Z=1,071 topamiz.

Z ning ishonchligini (5.6) formula bo‘yicha baholaymiz:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{20-3}} = 0{,}243\,.$$

Ehtimoli 0,95 (t=1,645) qiymat z quyidagi qiymatlarni qabul qiladi:

$$1{,}071-1{,}645\ 0{,}243 \le Z \le 1{,}071+1{,}645\ 0{,}243$$

$$0{,}672 \le Z \le 1{,}471$$

Jadvaldan (3-ilova) korrelyatsiya koeffitsiyentining chekka qiymatlari z (0,67 va 1,47) mos ravishda topamiz.

$$+0.58 \le r \le +0{,}90$$

Demak, ehtimolligi 0,90 bo‘lganda haqiqiy korrelyatsiya koeffitsiyenti +0,59 va +0,90 oraliqda joylashgan bo‘ladi.

z uchun ishonchli oraliq z^* absolyut (0,90-0,59<0,79) qiymatidan kichik, shuning uchun chiziqli korrelyatsion aloqa mavjud deb hisoblash mumkin.

Endi $|\Delta|$ uchun D_i ga regressiya tenglamasini tuzamiz:

$$|\Delta_i| - |\overline{\Delta}| = \rho_{|\Delta|/D}(D_i - \overline{D})$$

$$|\Delta_i| = \rho_{|\Delta|/D} * D_i + (|\overline{\Delta}| - \rho_{|\Delta|/D} * \overline{D}) \qquad (5.13)$$

z^* , $\sigma^*_{|\Delta|}$, σ^*_D , $|\overline{\Delta}|$, $\overline{D}$, larning sonli qiymatlarini (5.13) formulaga qo‘yib, topamiz:

$$|\Delta_i| = +0,79 * \frac{1,42}{1,80} D_i + (3,80 - 0,79 * \frac{1,42}{1,80} * 4,90)$$

$$|\Delta_i| = (0,62 D_i + 0,76) sm \qquad (5.14)$$

bu yerda: D_i – kilometr hisobidagi masofa.

Regressiya koeffisentining $\rho_{|\Delta|/D} = +0,62$ ishonchligini taxminan baholaymiz:

$$\sigma_{\rho_{|\Delta|/D}} = \frac{\sigma_{|\Delta|}}{\sigma_D}\sqrt{\frac{1-z^2}{n-3}}$$

$$\sigma_{\rho_{|\Delta|/D}} = \frac{1,42}{1,80}\sqrt{\frac{1-0,79^2}{20-3}} = 0,12$$

Ya’ni, $\rho_{|\Delta|/D} \pm \sigma_{\rho_{|\Delta|/D}} = 0,62 \pm 0,12$.

Nazorat savollari:

1.Korrelyatsiya aloqa deb nimaga aytiladi?

2. Korrelyatsiya koeffitsiyenti nima?

3. Regressiya tenglamasini ta’riflab bering?

2-BO‘LIM. O‘LCHASHLAR XATOLIKLARI NAZARIYASI

6. O‘LCHASHLAR XATOLIGI. ULARNING XOSSALARI.

6.1. XATOLIKLAR NAZARIYASI MAQSADI

Ishlab chiqarishnig barcha ishlarini oqilona va to‘g‘ri bajarish uchun geodezik o‘lchovlari haqidagi informasiya (axborot) nihoyatda muhimdir. Ushbu axborotning ko‘pchilik qismi er usti va er osti inshootlarida bajariladigan o‘lchovlar natijasida topiladi. Geodezik o‘lchovlari natijasi odatda amaliyot ishlarida to‘g‘ridan - to‘g‘ri qo‘llanilmay, balki matematik ishlab chiqish orqali, maxsus hisoblash usullari va vositalari yordamida amalda qo‘llash uchun qulay holga keltiriladi. Faqat, matematik ishlab chiqish o‘lchash natijalariga salbiy ta’sir qilmagan holda ulardagi mavjud xatolar ta’sirini kamaytirishga qaratilishi kerak.

Har qanday o‘lchash u qanchalik mukammal bajarilmasin, xatosiz bo‘lmaydi. Bu xatolikning qiymati o‘lchash natijasi bilan o‘lchanilayotgan kattalikning **haqiqiy qiymati** orasidagi ayirmaga teng, ya’ni:

$$\varepsilon = x_i - X \qquad (1)$$

bu yerda ε-o‘lchash xatosi, x_i-o‘lchash natijasi, X – o‘lchangan kattalikning haqiqiy qiymati. Ba’zan ε qiymatni o‘lchovning haqiqiy xatosi ham deyishadi.

Umumiy holda o‘lchash – bu fizik kattalikning son qiymatini maxsus texnik vositalar yordamida topishdir.

O‘lchanayotgan fizik kattalikning haqiqiy qiymati ko‘pincha aniq bo‘lmaydi. Lekin o‘lchovlar yordamida ma’lum bir aniqlikgacha mavhum haqiqiy qiymatga yaqinlashish mumkin.

Amaliyotda quyidagi masalalarga duch keladilar:

1. Amaliy masalalarining echimini ta’minlashda zaruriy va yetarli bo‘lgan o‘lchovlar aniqligini tanlash;
2. Tanlangan aniqlikni ta’minlashning uslub va vositalarini belgilab olish;
3. O‘lchovning yetarlicha aniqlikda bajarilganligiga ishonch hosil qildira oladigan mezon qabul qilish;
4. Optimal natijaga erishish maqsadida o‘lchangan qiymatlarni ishlab chiqishning uslub va vositalarini tanlash;
5. O‘lchangan va ishlab chiqish natijasida topilgan qiymatlarning sifati va aniqligini baholash.

Shuning bilan birga keragidan ortiq bo‘lgan aniqlikni ta’minlash, murakkab va qimmatbaho o‘lchash vositalarini qo‘llash hamda qo‘shimcha mehnat sarf qilishga aniqligi yetarlicha bo‘lmagan o‘lchovlar esa xato echimlarga olib kelishi mumkin. Ayniqsa, konchilik ishlarida bunday xatoliklarning oqibatini bartaraf etish juda katta harajatlarni talab qiladi. Xattoki, xavfli vaziyatlar tug‘ilishiga ham sababchi bo‘lishi mumkin.

Qayd etilgan masalalarni to‘g‘ri yechish uchun zarur bo‘lgan nazariy bilimlar va amaliy ko‘nikma hosil qilish o‘lchash xatoliklari nazariyasi fanining asosiy maqsadini belgilab beradi. Fanda o‘lchashdagi xatolarning paydo bo‘lish sabablari, ularning xossalari, aniqlik mezoni, ishonchli natijaga erishish maqsadida o‘lchovlarni ishlab chiqish uslublari, sifatsiz bajarilgan o‘lchovni baholash prinsiplarini belgilash, o‘lchangan qiymatlarning aniqligini baholash usullari, o‘lchangan qiymatalarni ishlab chiqish natijasiga o‘lchash xatosining ta’siri tavsiflari bayon etilgan.

Tenglash hisoblari o‘lchash xatoliklari nazariyasi kursining davomi bo‘lib u bilan chambarchas bog‘langan. Unda asosan ko‘p jinsli o‘lchovlar to‘plamini matematik ishlab chiqish usullari ko‘riladi. O‘lchov va uni ishlab chiqish bor joyda xatoliklar nazariyasi va tenglash hisoblari qo‘llanilishi tabiiy. Shuning uchun bu fanlarning asosiy qoidalari umumnazariy qiymatga ega.

Shunday qilib ehtimollar nazariyasi asosidagi xatoliklar nazariyasi matematik statistika usullaridan foydalangan holda quyidagi vazifalarni yechadi:

1.Xatoliklarning kelib chiqishi va taqsimlanish qonuniyatlarini o‘rganadi.

2.O‘lchash natijalari xatosining yo‘l qo‘yish chekidan oshgan va oshmaganligini aniqlash.

3.Ko‘p marta o‘lchash natijalaridan aniqlanayotgan o‘lchamning haqiqiy qiymatini topish.

4.O‘lchash natijalarining kutiladigan va olingan aniqlik bahosini hisoblash.

5.O‘lchashlarni matematik qayta ishlash natijasida aniqlanayotgan qiymatning haqiqiy miqdor aniqligini tavsiflash.

6.2. O‘LCHASHLAR XATOLIKLARI KLASSIFIKATSIYASI

O‘lchash natijasi birlamchi qiymat, hisoblash natijasi esa, birlamchi qiymatning funksiyasidir. Bundan ko‘rinib turibdiki, argumentdagi xatolik funksiyada ham takrorlanadi.

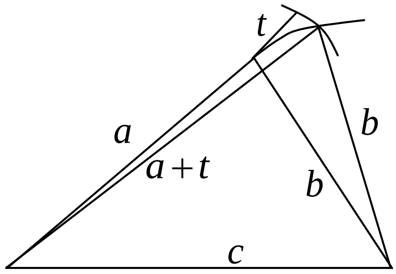
Masalan, agar uchburchakning uchta tomoni ham o‘lchangan bo‘lsa, uning uchta burchagini va yuzasini topish mumkin. Hisoblangan qiymatlardagi xatolik argument xatosining ta’siri oqibatida sodir bo‘ladi.

Aytaylik, a, v,s, xatosiz o‘lchangan tomonlarning qiymatlari bo‘lsin (2.1 - chizma).

Bu qiymatlarga mos holda uchburchaning boshqa elementlarini ham xatosiz topish mumkin.

Mabodo, a tomonini o‘lchanganda

t xatosiga yo‘l qo‘yilgan desak, unda a+t, b, c dan iborat boshqa uchburchak hosil bo‘ladi.



2.1 - chizma

Uning ustiga hisoblanadigan elementlarning xatosi faqatgina t ning qiymati va ishorasiga bog‘liq bo‘ladi.

O‘lchash va hisoblash ob’yektlari **bir xilli** va **ko‘p xilli** bo‘lishi mumkin. Masalan, triangulyasiyada o‘lchanadigan elementlar bir xilli (burchaklar), poligonometriyada esa ko‘p xilli (burchaklar va masofalar). Ammo, hisoblanadigan asosiy kattaliklar nuqtalarning koordinatalari ikkalasida ham bir xilli bo‘ladi.

O‘lchovlar **zaruriy** va **qo‘shimcha** bo‘ladi. Noma’lum kattalikning yagona qiymatini aniqlash uchun yetarli bo‘lgan o‘lchov **zaruriy** deb ataladi. Har qanday muayyan masalani Yechishda kerakli qiymatni aniqlaydigan zaruriy o‘lchovlar soni ayon, ammo zaruriy qiymatlar ro‘yhati yagona emas. Masalan, uchburchakning barcha elementlarini aniqlash(topish) uchun uning ixtiyoriy uchta elementini o‘lchasak yetarli bo‘ladi, faqat ulardan biri aynan masofa (tomon uzunligi) bo‘lishi kerak.

Zaruratdan ortiqcha bajarilgan o‘lchovlar **qo‘shimcha o‘lchovlar** bo‘ladi. Qo‘shimcha o‘lchovlar xatoliklar nazariyasida muhim ahamiyat kasb etadi, chunki ular quyidagi imkoniyatlarni yaratadi:

- o‘lchashning sifatini nazorat qilib borishni:
- o‘lchov aniqligini baholashni:
- noma’lum kattalikning eng aniq qiymatini topishni.

Darhaqiqat, yagona qiymatni aniqlash uchun bir marotaba o‘lchashning o‘zi kifoya, ammo qo‘pol xatoga yo‘l qo‘yish ehtimoli borligi tufayli, uning ishonchlilik darajasi yetarli bo‘lmaydi.

Shuning uchun, ishonch hosil qilish maqsadida, ikkinchi marotaba o‘lchanadi (qo‘shimcha o‘lchov bajariladi) va ikkala o‘lchov qiymatlarining ayirmasi topiladi. Agar topilgan ayirma ma’lum bir cheklangan qiymatdan kichik bo‘lsa, demak o‘lchash sifatli bajarilgan. Aks holda, o‘lchash takrorlanishi shart. Agar yagona miqdor bir necha marotaba o‘lchansa, har juft o‘lchov ayirmasiga qarab o‘lchash aniqligi haqida xulosa chiqarish mumkin. Va nihoyat, agar takroriy o‘lchovlardan bir xil miqdorning o‘rta arifmetik qiymati topilgan bo‘lsa, uning aniqligi har bir yagona o‘lchov aniqligidan ortiq bo‘ladi.

Bir xilli qiymatlar o‘lchash aniqligi bo‘yicha **teng aniqlikli** va **noteng aniqliklilarga** bo‘linadi. O‘lchash natijalarining aniqligi bir xil va aniqligi har xil bo‘lishi o‘lchash sharoitiga bog‘liq. O‘lchanayotgan ob’yekt, tashqi muhit, o‘lchash vositalari, o‘lchovchi va o‘lchash uslubi birgalikda o‘lchash sharoitini belgilab beradi. Agar bir jinsli (qiymatlarni) kattaliklarni o‘lchash sharoiti bir xil bo‘lsa, topilgan qiymat teng aniqlikli bo‘ladi. Mabodo, o‘lchash sharoitini tashkil etuvchi biror bir shart (omil) bajarilmasa, o‘lchangan qiymat aniqligi har xil bo‘ladi. Amalda esa, o‘lchash sharoiti ma’lum bir chekinishda o‘zgarib qolgan bo‘lsa, o‘lchovni teng aniqlikli deb qabul qilsa bo‘ladi. Masalan, yer osti poligonometriya tayanch tarmoqlarining burchak va masofalari bir xil maxoratga ega bo‘lgan o‘lchovchilar, bir xil turdagi asboblar va yagona uslubda o‘lchangan bo‘lsin. O‘lchash sharoiti qisman o‘zgarganiga qaramasdan, uning natijasini teng aniqlikli deb qarash mumkin. Shuning bilan birga, xuddi shunday o‘lchovlarni o‘sha o‘lchovchilar er ustidagi poligonda bajarsalar, uning natijasini shaxtadagi o‘lchangan qiymatlar bilan aniqlikdagi o‘lchovlar bo‘ladi. Ko‘p jinsli o‘lchovlarning aniqliklari haqida ham xuddi shunday ta’kid o‘rinli. Masalan, gorizontal burchaklar va masofalarning aniqliklarini taqqoslash noo‘rindir.

O‘lchovning sifati ko‘pincha uning mustaqilligiga bog‘liq bo‘ladi. Xilma-xil o‘lchovlar natijasi bir xil xatoliklarning ta’sirida teng o‘zgarishga ega bo‘lsa, bu ularning mustaqilligidan dalolat beradi. O‘lchash to‘liq mustaqil bo‘lishi uchun iloji boricha o‘lchash sharoiti xilma-xil bo‘lishi kerak, ya’ni bir nechta o‘lchovli, turli asbob bilan, har xil sharoitda, bir-biriga o‘xshash bo‘lmagan uslublarda o‘lchashi kerak. Amalda ko‘pincha o‘lchovchi, asbob, uslub kabi omillar o‘zgarmaydi. Shu sababli, o‘lchash natijalari mustaqil bo‘lmay qoladi. Lekin, tahlil shuni ko‘rsatadiki, ushbu omillarning o‘lchash natijasiga ta’siri muhandislik ishlarining bajarilish aniqligi doirasidan chiqmaydi. Demak, bunday holllarda nomustaqillik ta’sirini inobatga olmasa ham bo‘ladi.

Hisoblangan qiymatlar mustaqil bo‘ladi agar ularning topilishi uchun qo‘llanilgan yoki tayangan boshlang‘ich miqdorlar mustaqil bo‘lsa. Har xil qiymatlarni hisoblaganda xatosi bo‘lgan umumiy miqdordan foydalanilganda ham natija nomustaqil bo‘ladi. Bunda nomustaqillik darajasi umumiy miqdorning xatosi va uning hisoblangan miqdor bilan funksional munosabatiga bog‘liqdir.

Masalan, oldindan xatosi aniqlangan va o‘lchangan qiymatlarga tuzatma sifatida qo‘shilganlikdan hosil bo‘lgan natijalar albatta nomustaqil bo‘ladi. Svetodalnomer va giroskoplarning tuzatmalari o‘lchov va namunaviy qiymatlarning taqqoslanishidan kelib chiqadi. Ushbu o‘lchovlar qanchalik puxta bajarilmasin topilgan tuzatmalarning xatolari boshqa oddiy o‘lchovlarning xatolaridan unchalik farq qilmaydi. Shuning uchun ham bir xil tuzatmaga ega bo‘lgan o‘lchash natijalari nomustaqil bo‘ladi.

Mustaqil o‘lchovlarning natijalarini ishlab chiqish, nomustaqil o‘lchovlarga nisbatan soddaroq. Shuning uchun o‘lchash jarayonidayoq mustaqil natijalar olishga intilish kerak.

Zaruriy va qo‘shimcha, teng va noteng aniqlikli, mustaqil va nomustaqil o‘lchovlar kabi tushunchalar o‘lchash natijalarini ishlab chiqishning uslub va aniqligini baholashni belgilab beradi. Bo‘lardan tashqari, o‘lchashlar bevosita va bilvosita bo‘lishi mumkin. Agar, o‘lchov to‘g‘ridan-to‘g‘ri bajarilsa yoki sinash natijasida topilsa, **bevosita** bo‘ladi. O‘lchash natijasi ishlab chiqish yo‘li bilan hisoblab topilsa, u **bilvosita** bo‘ladi.

Masalan uchburchakda α va β burchaklarning qiymati o‘lchangan bo‘lsa uchinchi burchagini (γ=180-(α+β)) hisoblasa bo‘ladi. Bu yerda α, β – **bevosita** va γ **bilvosita** o‘lchovlar bo‘ladi.

6.3. O‘LCHASHLAR XATOLIKLAR TURI

Avval ta’kidlanganidek, o‘lchash xatosi bu topilgan qiymatni uning namuna sifatida qabul qilingan o‘lchov qiymati bilan solishtirish yoki taqqoslashdir. Umumiy holda ushbu o‘lchovlarning nisbati rasional sondir, ya’ni bu sonlar davriy bo‘lmagan cheksiz kasrlar bilan ifodalanadi. O‘lchash natijasi esa chekli bo‘lgan o‘nlik razryadli son ko‘rinishida yoziladi. Bu esa, xatoga olib keladi. Undan tashqari, o‘lchash natijasiga mavjud sharoitining ta’siri bor. Shuning uchun, har qanday o‘lchovda xato bo‘lishi muqarrar. Xatoliklarni uch turga ajratishadi: qo‘pol, muntazam(sistematik) takrorlanadigan va tasodifiy xatoliklar.

6.3.1. QO‘POL XATOLIKLAR

Mavjud o‘lchashning sharoitida kutilganidan sezilarli darajada ortiq qiymatga ega bo‘lgan xatolar qo‘pol xatoliklar deyiladi. Masalan 2T-30M teodoliti bilan burchak o‘lchanganda xato qiymati 1' dan oshgan bo‘lsa, u qo‘pol xatoliklar bo‘ladi. Qo‘pol xatolikning sodir bo‘lish sabablari har xil: o‘lchovchining tajribasizligi, yoxud noaniq o‘rnatilishi va boshqa ko‘zda tutilmagan ta’sirlar.

Qo‘pol xatolikka yo‘l qo‘yilganligi aksariyat holda qo‘shimcha o‘lchovlar yordamida aniqlanadi. Odatda o‘lchovlar takrorlanib, ular orasidaga ayirma yo‘l qo‘yilgan chegarada bo‘lsa /cheklangan qiymatdan oshmasa/, natija qo‘pol yanglishishdan ozod deb hisoblanadi va u ishlab chiqish uchun qabul qilinadi. Aks holda o‘lchash takrorlanaveradi. Qo‘pol xatolikni aniqlashning yana bir yo‘l – nazariy mavjud bo‘lgan qiymat bilan taqqoslash.

Masalan, uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi - 180^0, yopiq ko‘pburchak abssissasi va ordinatalari orttirmalarining nazariy yig‘indisi nolga teng ekanligi va boshqalar. Nazariy qiymatdan hosil bo‘lgan chetlanish - xatolik deyiladi. Uning qiymati ham joiz (yo‘l qo‘yilgan) xatodan ortiq bo‘lmasligi kerak. Amaliyotda qo‘llash zarur bo‘lgan o‘lchovlarda qo‘pol xatoliklar bo‘lmasligi, ular oldindan aniqlanib, natijalar qo‘pol yanglishishlardan holi bo‘lishi shart.

Har bir muayyan o‘lchash turi uchun mumkin bo‘lgan joiz xato va xatoliklarni oldindan aniqlash. O‘lchash xatoliklari nazariyasi fanining muhim vazifalaridan biri hisoblanadi.

Sistematik(muntazam) xatoliklar

Sodir bo‘lgan xatoliklarning doimiy (o‘zgarmas) yoki qayta o‘lchovlardagi bir xil qonuniyatda o‘zgarib boradigan yoki takrorlanadigan qismi muntazam xatolik deyiladi. Masalan, masofa o‘lchanayotganda tasma uzunligi namunaviy qiymatdan 5 sm uzun bo‘lsa ushbu xato har o‘lchovdan bir xil ishora bilan takrorlanadi. Yoki masofa o‘lchanayotganda xavo harorati hisobga olinmasligi muntazam xatolikka olib keladi. Uning qiymati harorat oshgan sari o‘sib borishi va masofaning umumiy uzunligiga bog‘liqligi qonuniy o‘zgarishga sabab bo‘ladi. Har qanday o‘lchovda butunlay yoki qisman muntazam xatoga yo‘l qo‘yish uchun ushbu xatoliklarning sodir bo‘lish sabablarini puxta tahlil qilish kerak.

Sistematik(muntazam) xatoliklardan mustasno bo‘lish tadbirlari

1. Taqqoslash usuli. O‘lchaydigan asbob ko‘rsatgichni namunaviy asbob ko‘rsatgichi bilan taqqoslab, uning tuzatmasi topiladi. Aniqlangan tuzatma bo‘lajak barcha o‘lchovlar natijasini topishda inobatga olinadi. Tuzatmani aniqlash jarayoni o‘lchov asbobini taqqoslash (komparlash) deyiladi. Geodeziya va marksheyderiyada ko‘pincha uzunlik o‘lchaydigan (masofa o‘lchaydigan) asboblar (yig‘ma, tasma, reyka, dalnomerlar) komparlanadi.

2. Analitik usul. Muntazam xatoni bir yoki bir nechta parametrlarga bog‘liq bo‘lgan formulasi topiladi. Ana shu parametrlar o‘lchash jarayonida aniqlanib uning natijasiga hisoblangan tuzatma kiritiladi. Masalan, masofani o‘lchanganda xavo harorati va chiziqning yotiqlik burchagi o‘lchanib formulalar yordamida maxsus tuzatmalar hisoblanadi va uzunlikning o‘lchangan natijasiga o‘z ishorasi bilan qo‘shiladi.

3. O‘lchashning maxsus uslubini qo‘llash. O‘lchashda shunday uslublar tanlanadiki, u natijani muntazam xatoliklardan mustasno qiladi. Masalan, kollimasion xatodan holi bo‘lish uchun burchaklar teodolit ko‘rish trubasining ikki xil holatida (DCH va DO‘) o‘lchanadi. Yoki nivelirdagi ko‘rish va silindrik adilak o‘qlarining noparallelligidan hosil bo‘ladigan xatoni kamaytirish uchun asbob reykalarga nisbatan teng masofada o‘rnatiladi.

4. Maxsus konstruktiv uslub. Muntazam xatoliklardan mustasno bo‘lish yoki ularning ta’sirini kamaytirish maqsadida asboblarda maxsus konstruktiv o‘zgarishlar, tuzatishlar va tekshirishlar qo‘llaniladi. Masalan, teodolitning gorizontal va vertikal doiralari alidadasining ekssentrisitetini kamaytirish (yo‘q qilish) uchun sanoq olish moslamalarini limbning diametral qarama-qarshi tomonlarida o‘rnatadi. Muntazam xatoliklarning ko‘pchiligi teodolit va nivelir o‘qlarining konstruktiv mosligini tekshirish jarayonida ularning o‘zaro joylashishini aynan ta’minlash orqali yo‘q qilinadi.

Shuni ham esda tutish kerakki, ko‘pgina hollarda muntazam xatoliklarni butunlay bartaraf etishning iloji yo‘q . Shu bilan birga, qolgan mavjud xato e’tiborga molik emas yoki tasodifiy tavsifga ega. Juda zarur bo‘lgan hollarda muntazam xatoliklarni tenglash hisoblarida inobatga olish tavsiya etiladi.

Sistematik xatoliklar o‘lchashlarda xatoliklarni tug‘diradigan ba’zi funksional manbaidan (teodolit shtrixi belgilash, sinus qonuniyatinig davriy o‘zgarishi) kelib chiqadigan xatolikdir. Sistematik xatoliklar ishorasi va miqdori bo‘yicha doimiy va bir tomonlama ta’sir qilishi mumkin.

Geodezik o‘lchashlar amaliyotida sistematik xatolarni kamaytirishning quyidagi usullari qo‘llanadi:

1. Sistematik xatolarning paydo bo‘lish qonuniyatlari aniqlanadi, undan keyin xatolik o‘lchangan miqdorlarga tuzatma kiritish orqali kamaytiriladi(uzunlikni o‘lchash asboblarini etolonlashtirish orqali uning uzunligiga tuzatma kiritish).

2. Sistematik xatolarnining bir tomonlama ta’sir qilmasligi uchun maxsus o‘lchash usullari qo‘llaniladi (masalan, yontomonlama refraksiyani kamaytirish uchun yuqori aniqlikdagi gorizontal yo‘nalishni o‘lchash dasturini ertalab va kechkurungi vaqtlarga teng taqsimlash).

3. O‘lchashlarni matematik qayta ishlashning aniq usulidan foydalanish (masalan, to‘g‘ri teodolit yo‘li burchagi va koordinati aloxida tenglashtirish hisobi tartibi, tomon va burchak o‘lchashdagi sistematik xatolikning ta’sirini kamaytiradi).

6.3.3. TASODIFIY XATOLIKLAR

Yagona qiymatni takror o‘lchaganda umumiy xatoning o‘zgarib turadigan qismi tasodifiy xatolik bo‘ladi. Aynan tasodifiy omil har qanday alohida o‘lchov natijasini oldindan bilishga imkon bermaydi.

Xatoliklar qiymatining o‘zgarib turish sabablari turlicha: shart-sharoitning o‘zgarishi, tashqi muhit ta’siri, asboblarning xatoliklari va boshqalar.

Ya’ni tasodifiy xatoliklar taxminlash qiyin bo‘lgan, ishorasi va qiymati ayon bo‘lmagan elementlar yanglishishlar majmuidan iborat bo‘lib, ularning jamlangan ta’siri o‘lchovdan-o‘lchovga o‘zgarib boradi. Ushbu o‘zgarish sharoitning o‘lchash jarayonidagi o‘zgaruvchanligini ifodalaydi. Masalan, nivelir bilan o‘lchangan ikki nuqta orasidagi nisbiy balandlik xatoligi quyidagi elementlar xatolardan iborat:

- adilak pufakchasi markazlashtirishdagi xato;
- ko‘rish va adilak o‘qlarining noparalellik xato;
- ko‘rish to‘rining niveliridan reykagacha borish yo‘lidagi refraki ta’siri;
- reyka bo‘linmalarining noaniqligi;
- reykadan sanoq olishning xatosi;
- reyka poshnasi notekisligining ta’siri.

O‘lchash vositalari va uslublari qonun – qoidalarini barkarorlashtirib, tasodifiy xatoliklar ta’sirini iloji boricha kamaytirish mumkin, lekin uni butunlay yo‘q qilib bo‘lmaydi. Tasodifiy xatolar qutulib bo‘lmaydigan xatoliklardir. Shu sababli, o‘lchash xatoliklari nazariyasi fanida asosan tasodifiy xatoliklar o‘rganiladi. Xatoliklarni ikki xil shaklda ifodalash qabul qilingan: mutlaq /absolyut/ va nisbiy qiymat ko‘rinishida. O‘lchash xatosi o‘lchangan qiymat birligida ifodalangan bo‘lsa, u mutlaq xatolik deyiladi. Ammo, har doim ham shunday ifodalash ma’qo‘l bo‘lavermaydi. Masalan, ma’lum bir uzunlik 5 sm mutlaq xatolik bilan o‘lchangan desak, uzunlik qiymati ma’lum bo‘lmasa, uning aniqligi to‘g‘risida fikr yuritish mushkul.

Darhaqiqat, shunday xato bilan derazaning bo‘yi o‘lchangan bo‘lsa, unda bu o‘lchovning qo‘pol bajarilganligi ko‘rinib turibdi. Agar ushbu xato triangulyasiya punktlari orasidagi masofaga taaluqli bo‘lsa, bunday o‘lchov aniq darajali o‘lchovlar qatoriga kiradi.

O‘lchovlar natijasini baholashdagi noaniqliklarni bartaraf etish maqsadida o‘lchashlar aniqligini yo‘l qo‘yilgan mutlaq xato va o‘lchangan qiymatlar nisbati ko‘rinishida ifodalaydi. Topilgan nisbat o‘lchovning nisbiy xatosi deyiladi. Odatda, nisbiy xato to‘g‘ri kasr ko‘rinishida yoki alikvot kasr ko‘rinishida beriladi, ya’ni I:M kasr surati birga teng bo‘lib, uning maxraji Mga teng bo‘ladi: $M=x/\varepsilon$, bu yerda x-o‘lchangan miqdor qiymati; ε – o‘lchashning mutlaq xatosi. Ko‘rgan misollarimizda $x_1=150$ sm bo‘lsa, $m_{nis}=1:30$, yoki $x_2=2$ km bo‘lsa, $m_{nis}=\frac{5}{20000}=1:40000$ bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, maxraj qanchalik katta bo‘lsa, shunchalik o‘lchash aniq bajarilgan bo‘ladi. Ba’zida nisbiy xato foizda ham ifodalanishi mumkin.

O‘lchash xatosining qiymati noldan farqli bo‘lgan faqatgina 2 ta qiymatdor raqam bilan ifodalanadi. Masalan, agar hisoblash natijasida o‘lchangan gorizontal burchakning xatosi topilgan bo‘lcha, $m_\beta=18{,}63''$, nihoyat u 19'' ga teng deb qabul qilinadi va yozib qo‘yiladi. Yoki aytaylik hisoblangan nisbiy xato m_{nis} teng bo‘lsin 14,93126. U uzil-kesil 1:15000 ko‘rinishida yoziladi. Ya’ni 2 ta ishonchli raqamli maxraj sifatida qabul qilinadi.

6.4. TASODIFIY XATOLIKLAR

Ularning ehtimoliy taqsimlanish qonuniyati

Tasodifiy xatoliklar tasodifiy miqdorlarning eng ochiq misoli bo‘ladi. Uning qonuniyati faqat ko‘p tajriba orqali seziladi. O‘lchash moboynida sistematik xatolikdan holis bo‘lish mumkin emas, uning ta’sirini o‘lchash sifatini oshirish yoki o‘lchash natijalarini izchil matematik qayta ishlash tufayli kamaytirish mumkin.

Tasodifiy xatoliklarning paydo bulish sabalari ko‘p: tashqi muhitning ta’siri, asboblarning noto‘g‘ri tayyorlanishi va sozlanishi, kuzatish jarayonini noaniq bajarilishi va h. k.

Barcha sabablarning umumiy ta’siridan ko‘ra xar-bir sabab o‘lchash natijasiga oz miqdorda ta’sir qiladi. Shuning uchun Lyapunovning markaziy nazariyasiga asosan tasodifiy xatoliklar $\Delta_i = x_i - X$ (x_i – o‘lchash natijasi, X – o‘lchanayotgan miqdorning aniq qiymati) normal taqsimlanish qonuniyatiga bo‘ysinadi.

Agar xatoliklar qatori mumkin bo‘lgan xilma-xil sharoitda olingan bo‘lsa, unda μ(Δ)=0 deb hisoblash mumkin. Bu sistematik xatoliklarning yo‘qligini bildiradi. Bunda M(x) haqiqiy qiymat X bilan to‘g‘ri keladi. Endi har qanday o‘lchamlar qo‘pol xatoliklardan holi deb qabul qilamiz sistematik xatoliklar o‘lchash natijasidan olib tashlangan, ya’ni faqat tasodifiy xatoliklarni ko‘rib chiqamiz.

Unda tasodifiy xatoliklarning taqsimlanish zichligi tenglamasi bunday ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} \qquad (6.1)$$

Agar normallashgan xatolikka o‘tadigan bo‘lsak $t = \frac{\Delta}{m}$,

m –o‘lchashlar natijasining o‘rta kvadratik xatosi (6.1) ifoda quyidagi ko‘rinishga keladi: $\varphi(\Delta) = \frac{1}{m\sqrt{2}} .y$ (6.2)

bu yerda $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ funksiya argumenti $t = \frac{\Delta}{m}$ uchun jadval tuzilgan (1-ilova)

Amaliyotda φ(Δ) = f(ε) desak, o‘lchashdagi tasodifiy xatoliklar normal taqsimotining zichlik funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon/(2\sigma^2)}, \qquad (6.3)$$

bu yerda ε-o‘lchashdagi tasodifiy xatoning joriy qiymati; σ- xatolar majmuining o‘rta kvadratik chetlanishi (standarti). ε ning xususiy qiymatlari formula bilan ifodalanadi.

(6.3) ifodadagi funksiyaning tahlili shuni ko‘rsatadiki:

- ε=0 bo‘lganda funksiya maksimumga ega. Funksiya juft funksiyadir, chunki f(ε)=f(-ε), qaerdan ko‘rinib turibdiki, funksiyaning egri chiziqli tasviri ε=0 ga nisbatan simmetrik joylashgan. Tasodifiy xatoliklarning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o‘rta kvadratik chetlanishi teng bo‘ladi: 2-chizma normal taqsimot funksiyasining zichligi:

$$M(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-}^{+}\varepsilon e^{-\varepsilon^2/2\sigma^2}d\varepsilon=0, \qquad (6.4)$$

$$D(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon e^{-\varepsilon^2/2\sigma^2}d\varepsilon=\sigma^2, \qquad (6.5)$$

$$\sigma=\sqrt{D(\varepsilon)} \qquad (6.6)$$

2.1-chizmada keltirilgan (6.3) funksiyaning tasvirida $\varepsilon_i \pm \sigma$ nuqtalari egri chiziqning bukilgan joylariga mos kelgan.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun o‘lchashdagi tasodifiy xatoliklar ham ular qatoriga kiradi. Har qanday muayyan qiymatning paydo bo‘lish ehtimoli nolga teng. Shuning uchun ham ushbu qiymatning qandaydir yetarlicha kichkina Δε – oraliqda paydo bo‘lish ehtimoli haqida gap yuritish o‘rinlidir. 2.1-chizmada bu ehtimollik chizgilangan /shtrixlangan/ yuza bilan o‘lchanadi. Bunday elementlar ehtimollik matematikada

$$R(\varepsilon_i€\Delta\varepsilon)\approx f(\varepsilon_i)\Delta\varepsilon \qquad (6.7)$$

Formula orqali ifodalanadi; bu yerda $\varepsilon_i€\Delta\varepsilon$ ε ning Δε ga tegishliligini bildiradi.

Tasodifiy qiymatni av oraliqda paydo bo‘lish ehtimoli egri chiziqli trapesiyaning yuzasi bilan ifodalanadi, ya’ni $P(a\le\varepsilon\le b)=\int_a^b f(\varepsilon)d\varepsilon$ (6.8)

Tasodifiy qiymat ε ning - ∞ dan + ∞ gacha oraliqdagi ehtimoli birga teng bo‘ladi:

$$P(-\infty\le\varepsilon\le+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\varepsilon)d\varepsilon=1 \qquad (6.9)$$

Shuni inobatga olish kerakki, Gauss normal taqsimot qonunini quyidagi postulatdan kelib chiqqan holda ruyobga keltirilgan.

Ehtimollik zichligini maksimumi o‘lchovlar qatorining o‘rta arifmetik qiymati atrofida joylashgan. Demak, qat’iyan qaraganda,

$$v_i=x_i-\overline{X} \qquad (6.10)$$

ifodadan topilgan v_i tasodifiy qiymatlar taqsimoti normal taqsimotga mos keladi.

(10) formulada $\overline{X}$ o‘lchangan miqdorlarning o‘rta arifmetik qiymati.

Normal taqsimot funksiyasining tahlilidan shu taqsimot zichligi tasvirini (2.1-chizma) inobatga olgan holda, o‘lchashdagi tasodifiy xatolarning to‘rtta xossasini ta’riflash mumkin:

1-xossa. Xatolarning absolyut(mutlaq) qiymati kamaygan sari ularning sodir bo‘lish chastotasi ortib boradi.

2- xossa. Xatolar absolyut qiymat jihatdan ma’lum bir chekdan oshgan sari ularning paydo bo‘lish ehtimoli nolga yaqinlashib boradi.

3-xossa. Absolyut qiymati bir xil bo‘lgan har xil ishorali xatoliklarning paydo bo‘lishi ehtimoli tengdir. Bu xossa taqsimot funksiyasining juftligidan kelib chiqadi.

4-xossa. Tasodifiy xatolar majmuining o‘rta arifmetik qiymati o‘lchash soni cheksiz ortgan sari nolga intiladi, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+.....+\varepsilon_n}{n}=0 \qquad (6.11)$$

Bu xossa o‘lchashdagi tasodifiy xatoliklar matematik kutilmasi xossasidan kelib chiqib, muntazam xatolikni topish imkonini beradi. Agarda (11) shart bajarilmagan bo‘lsa, demak muntazam xatolar ta’siri bartaraf etilmagan va o‘rta arifmetik qiymat haqiqiy qiymatga nisbatan siljigan bo‘ladi.

6.5 A.M. LYAPUNOVNING MARKAZIY LIMITIK TEOREMASI HAQIDA TUSHUNCHA

Avval ta’kidlangan xulosalarga qaraganda, tasodifiy xatoliklar bu elementar xatochalar to‘plamining jamlangan natijasidir. Shu bilan birga elementar xatochalarning birortasi ham ikkinchisidan ustun emas.

Elementar xatochalarning o‘lchash natijasiga ta’sir mexanizmini tushunishda A.M. Lyapunovning markaziy limitik teoremasi katta ahamiyat kasb etadi. Ushbu teoremaning mohiyati quyidagidan iborat.

Agar tasodifiy qiymat cheksiz mustaqil tasodifiy qiymatlarning yig‘indisidan iborat bo‘lib, ulardan birortasi ham ikkinchisidan ustun bo‘lmasa, bunday jamlangan tasodifiy qiymatlar normal taqsimotga ega. Bunda har bir jamlanuvchi elementning taqsimot tavsifini ahamiyati yo‘q, ular limitik holatda normal taqsimotga ega bo‘lmasliklari ham mumkin.

O‘lchashda elementar xatolar soni ko‘p bo‘lsada, ammo cheklidir. Bu holda o‘lchash natijalarini normal taqsimotga yaqin deb hisoblasak bo‘ladi.

Boshqa tomondan tasodifiy qiymatlar nazariyasida isbotlangan teoremaga asosan normal taqsimlangan birlashuvchilar soni chekli bo‘lganda, jamlangan tasodifiy qiymat doimo normal taqsimlanadi.

O‘lchashdagi tasodifiy xatoliklarning normal taqsimotga yaqinligi ko‘pchilik sanash natijalarida tasdiqlangan.

6.6. GAUSS EGRILIGI VA UNING XOSSALARI

Aniqlik uchun h –ni $\frac{1}{m\sqrt{2}} = h$ (6.3)

deb belgilaymiz.

Unda (6.1) tenglama:

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \qquad (6.4)$$

ko‘rinishni oladi.

Bu ifoda Gauss egriligi yoki xatoliklar egriligi deyiladi. Gauss egriligi quyidagi xossalarga ega:

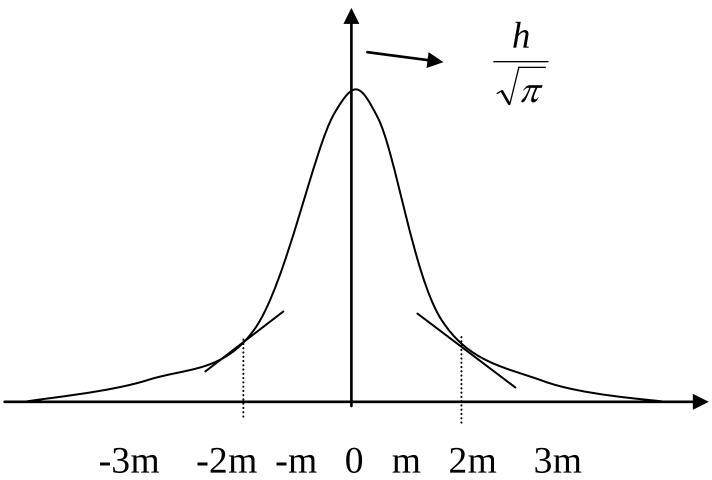
1. Funksiya $\varphi(\Delta)$ juft, ya’ni $\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$ egriliklari ordinata o‘qiga nisbatan simmetrikdir.

2. Gauss egriligi abssissa o‘qi ustida joylashadi.

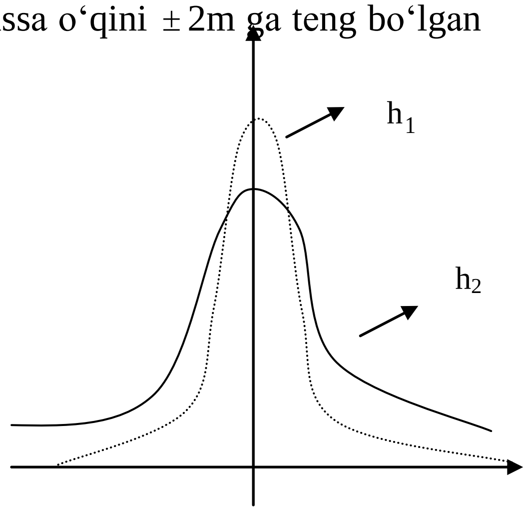
3. Gauss egriligi $\Delta = 0$ nuqtada yuqoriga (maksimum) ega bo‘ladi. Shu bilan birga egrilik ordinatasi $y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, ya’ni egrilikning chuqqisi vaziyati h – bilan aniqlanadi. Agar $h_2 < h_1$, bo‘lsa bunda h_1 - egrilik chuqqisi juda yuqori vaziyatda, ordinata o‘qi bo‘ylab juda siqilgan bo‘ladi (2.2-chizma), ya’ni xatolikning kam sochilganligi, o‘lchashning yuqori aniqligi. Shuning uchun h – aniqlik o‘lchami deyiladi.

4. Xatoliklar egriliginig ikkita bukilganlik nuqtasi bo‘ladi, bittasi ordinatadan o‘ng tomonda va boshqasi chap tomonda. Shunda bukilgan nuqtaning abssissasi $\pm$m bo‘ladi.

5. Bukilgan nuqtadagi egrilikka urilma abssissa o‘qini $\pm$2m ga teng bo‘lgan bulakda kesadi. (2.3-chizma)



2.2-chizma.



2.3- chizma.

6.7. O‘LCHASHLAR TASODIFIY XATOLARINING XOSSALARI

Tasodifiy xatoliklarning asosiy xossalarini ko‘rib chiqamiz:

1. Tasodifiy xatoliklar absolyut miqdori bo‘yicha muayyan t m chekdan oshmasligi kerak , t – ehtimoli $\Phi(t) = P$, bo‘lgan kattalik. masalan t=3 da ehtimollik r=0,997, ya’ni ehtimolligi birga yaqinlashsa tasodifiy xatoliklar cheki $\pm$3m dan oshib ketmaydi.(6.1 topshiriqka qarang).

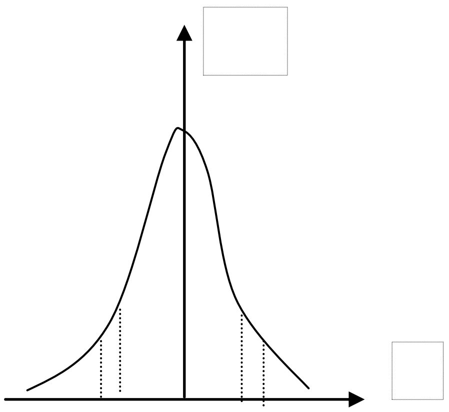
2. Manfiy va musbiy tasodifiy xatoliklar o‘lchash qatorida bir xil paydo bo‘ladi, ya’ni ular absolyut qiymati bo‘yicha tengdir.

Bu xossalar 2.3-chizmada yaxshi tasvirlangan. Agar o‘zidan chapga va unga teng qirqim Δ o‘lchasak, cheksiz kichik oraliq $\alpha\,\Delta$ tushish ehtimolini aniqlasak, keyin miqdor k_0. Bu miqdorlar bir-biriga teng.

3. O‘lchashlar sonini cheksiz o‘zgartirganda tasodifiy xatoliklarning o‘rta arifmetik qiymati nol chekka ega bo‘ladi:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[\Delta]}{n} = \mu(\Delta) = 0.$ M(Δ) ning noldan farqi o‘lchashlar natijasida sistematik xatolarning borligini ko‘rsatadi.

4. O‘lchashlar qatorida tasodifiy xatoliklar absolyut qiymati bo‘yicha kattasiga nisbatan, kichik xatoliklar ko‘p uchraydi.



2.4- chizma.

6.1 Masala. Umumiy soni n = 100 bo‘lgan, eng imkoniy xatoliklar sonini hisoblang absolyut qiymatidan oshuvchi,

a) m; b) 2m; v) 2.5; g) 3m; n = 1000 da

Yechish: Masala shartiga ko‘ra

n = 100 da a) $|\Delta| > m$ b) $|\Delta| > 2m$ v) $|\Delta| > 2{,}5m$;

n = 1000 da $|\Delta| > 3m$.

Aniqlanish kerak :

a) R$|\Delta|$ >m; b) R $|\Delta|$ > 2m; v) P $|\Delta|$ >2,5m; g) P $|\Delta|$ >3m; va shuningdek qiymati k_{oi}.

1. Xatoliklarning 0 dan $\pm t$ gacha bo‘lish ehtimolini quyidagi formula bo‘yicha aniqlaymiz :

$$P(|\Delta| < \Delta_i)_i = P(-\Delta_i < \Delta < \Delta_i) = P(-t_i < t < t_i) = F(t_i)$$

2. Gauss egri chizig‘i va absissa o‘qi orasidagi maydon birga teng bo‘lganligi uchun $|\Delta|$ qiymatidan oshuvchi xatoliklarning paydo bo‘lish ehtimoli oralig‘i quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$R_i = 1 - F(t_i)$$

3. Berilgan oraliqqa tushadigan eng muhim xatoliklar soni formula bilan aniqlanadi:

$$k_i \approx np_i$$

Natijalarni 1-jadvalga joylashtiramiz:

2.1-jadval

Tar-tib №	Xato-liklar soni n	Beril-gan chekli qiymat $\lvert\Delta_i\rvert$	$t_i = \frac{\Delta_i}{m}$	$\Phi(t_i)$	$P_i = 1 - \Phi(t_i)$	Berilgan qiymatdan oshadigan xatoliklar soni Δ_i, K_{0i}	0 dan $\pm t_i$ gacha oraliqda joylashadi gan xatoliklar soni	Tek-shi-rish
1	100	1,0 m	1	0,6827	0,3173	32	68	100
2	100	2,0 m	2	0,9545	0,0455	5	95	100
3	100	2,5 m	2,5	0,9876	0,0124	1	99	100
4	1000	3,0 m	3	0,9973	0,0027	3	997	1000

Masalani Yechishdan olingan natijalar tasodifiy xatolarning birinchi xossasini ko‘rinarli tasvirlaydi. Amaliyotda foydalanish uchun umumiy xatoliklarning 68% 0 dan m gacha oraliqda joylashadi; 95% 0 dan 2m gacha; faqat 100% 0 dan 3m gacha joylashadi. Absolyut qiymati 3m dan yuqori bo‘lgan xatoliklarni qo‘pol xatoliklar hisoblanadi.

6.8. O‘LCHASHLAR ANIQLIGINI BAHOLASHDA QO‘LLANILADIGAN ME’ZONLAR (KRITERIYALAR).

O‘lchashdagi tasodifiy xatoliklar keng diapazonda ham musbat ham manfiy qiymatda bo‘lishi mumkin. Bu esa bajarilgan o‘lchovlar majmui aniqligining umumiy tavsifini topishda qiyinchiliklar tug‘diradi, ayniqsa ular har xil bo‘lsa.

Masalan, burchakning «haqiqiy» qiymati yuqori aniqlikdagi teodolitlar bilan o‘lchangan. Birinchi teodolit bilan qo‘lga kiritilgan maksimal xatoliklar – 10,7" ikkinchisi bilan esa absolyuti 9,5" bo‘lgan ikkita qiymat topilgan. O‘lchash aniqligining sifat bahosi sifatida bitta son majmuini tavsiflovchi baho sifatida Gauss taklif kilgan o‘rta kvadratik xato qabul qilingan:

1. O‘lchash natijalarini aniqligini baholashning asosiy me’zoni(kriteriyasi) o‘lchashning o‘rta kvadratik xatosi:

$$\mathrm{m} = \sqrt{Д^*(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - Mx)^2}{n}} \qquad (6.5)$$

X = M(x) bo‘lganda Δ_i haqiqiy xatoliklar qatori uchun (6.5) formula quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\mathrm{m} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \text{ bu yerda } [\Delta^2] = \Delta^2{}_1 + \Delta^2{}_2 + \ldots\ldots\ldots + \Delta^2{}_n \qquad (6.6)$$

Bu ifoda Gauss formulasi deyiladi.

O‘rta kvadratik m dan boshqa, v-o‘rta xatolik va r-ehtimoliy xatolik ham aniqlik kriteriyasi deb qabul qilingan.

2. Tasodifiy xatoliklar yig‘indisining o‘rta arifmetik qiymati o‘rtacha xatolik deyiladi:

$$\mathrm{v} = \frac{[|\Delta|]}{n} \qquad (6.7)$$

3. Ehtimoliy xatolik

$$\mathrm{R}(|\Delta| < \mathrm{r})\ \mathrm{P}(|\Delta| > \mathrm{r}) = \frac{1}{2}$$

Amaliyotda r xatoliklar qatori Δ_i absolyut qiymati bo‘yicha o‘suvchanlik yoki kamayuvchanlik tartibida joylashtirib topiladi. Ehtimoliy xatolik qatorning o‘rtasida joylashadi.

v^* va r^* qiymatlar parametr v va r ning nazariy qiymatini baholaydi. Tasodifiy xatolarning normal taqsimlanish qonunida ular quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\mathrm{m} \approx 1{,}25\ \mathrm{v}^*,$$
$$\mathrm{m} \approx 1{,}48\ \mathrm{r}^* \qquad (6.8)$$

Bu ifodalar tasodifiy xatoliklar haqiqiy normal taqsimlanishini baholash mezoni sifatida qo‘llaniladi.

O‘lchash natijasini matematik ishlab chiqish nazariyasi ko‘pincha o‘rta kvadratik xatodan foydalanishga asoslangan, chunki uning qator afzalliklari mavjud:

1. Hisoblashda har bir ε_i xatolikning ishorasini inobatga olmasa ham bo‘ladi;

2. ε_i ning absolyut qiymati kattalari ikkinchi darajaga ko‘tarilganda qiymat kattalashib bahoning «ishonchliligi» kuchayadi;

3. O‘rta kvadratik xato parametr sifatida normal taqsimot zichlik funksiyasi tarkibiga kiradi;

4. (14) formulaga asoslangan o‘rta kvadratik xatolikning (±) ishoraliqligi tasodifiy xatolar xossasiga mos keladi.

O‘rta kvadratik xatoning o‘rta kvadratik chetlanishdan farqi shundaki, σ – o‘lchangan qiymatlarining cheksiz majmuini tavsiflovchi nazariy doimiy miqdordir. m-esa cheklangan sinashlar natijasida topilgan empirik miqdor. Sinashlar soni oshgan sari m σ ga intiladi /m – σ /. Shuning uchun o‘rta kvadratik xatoni topishga noaniq bo‘lgan σ ning taxminiy qiymati yoki bahosi deyiladi. Demak, hisoblangan o‘rta kvadratik xatolar bu tasodifiy qiymatlar bo‘lib, ε ning muayyan qiymatlari to‘plamiga bog‘liq va o‘nga yangi ε qiymatlari qo‘shiladigan bo‘lsa o‘zgaruvchanlik xossasiga ega. Tasodifiy o‘rta kvadratik xatoning taqsimot qonuni tasodifiy xatolar /ε/ taqsimot qonunidan farq qiladi, ya’ni Gauss qonunidan o‘zgacha .

Yuqorida ko‘rilgan misol uchun 10 o‘lchov natijasida topilgan xatolar yig‘indisi $[\varepsilon\varepsilon]_2$=214,6 va $[\varepsilon\varepsilon]_2$=346,28 bo‘lsa unda m_1=4,6"; m_2=5,9".

Demak, birinchi teodolit bilan burchaklar aniqroq o‘lchangan (2-teodolit bilan o‘lchanganga nisbatan).

(14) formulani qo‘llash mumkin agarda o‘lchanayotgan miqdorlarning haqiqiy qiymati oldindan aniq bo‘lsa. Odatda, haqiqiy qiymat sifatida aniqroq o‘lchangan o‘lchov (yuqori aniqlikdagi asbob yoki uslub yordamida topilgan qiymat) natijasi qabul qilinadi va aniq o‘lchovning o‘rta kvadratik xatosi tadqiq qilinayotgan asbob yoki uslubning taxminan kutulayotgan xatosidan 3 va undan ortiq marotaba kichik bo‘lganida yetarli hisoblanadi.

O‘rta kvadratik xato o‘lchash natijalarining chekli qatoridan aniqlanganligi uchun (14) formula orqali uning hisoblangan qiymatida ma’lum bir xato mavjud bo‘ladi. O‘rta kvadratik xatoning o‘rta kvadratik xatosi quyidagicha baholanadi:

$$m_{(m)} = \frac{m}{\sqrt{2n}} \qquad (15)$$

ko‘rilgan misol uchun $m_{(m1)}$=1,0", $m_{(m2)}$=1,3"

Aniqlikning me’yoriy sifatida o‘rta kvadratik xatodan tashqari o‘rtacha xato ham qo‘llaniladi:

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i|$$

Agar o‘lchovlar soni oz bo‘lsa xatoning o‘rtacha bahosi taxminiy bo‘ladi. Lekin n cheksizga intilganda θ va m orasida barqaror munosabat mavjud

$$\theta = m\sqrt{\frac{2}{m}} \approx 0{,}798m = \frac{4}{5}m \qquad (16)$$

Nihoyat, ba’zi hollarda aniqlik me’yoriy sifatida ehtimoliy xatodan /r/ foydalanish mumkin. r ning qiymatini shunday tanlash kerakki, tasodifiy xatoning shu qiymatdan katta yoki kichik sodir bo‘lish ehtimoli 0,5 ga teng bo‘lsin. Boshqacha qilib aytganda, ehtimoliy xato absolyut qiymati bo‘yicha o‘sib borayotgan tasodifiy xatolar qatorini teng ikkiga bo‘ladi. Shuning uchun ham uni oraliq xato (o‘rtalik xato) ham deyishadi. Agar n - ∞ bo‘lsa, ehtimoliy xato o‘rta kvadratik xato bilan quyidagicha bog‘liqlikka ega bo‘ladi.

$$r = 0{,}674m \approx \frac{2}{3}m \qquad (17)$$

Amaliyotda ko‘proq o‘rta kvadratik xatodan foydalaniladi.

O‘rta kvadratik xatolikning afzalliklari

O‘lchashlar aniqligini baholashda o‘rtacha xatolik va ehtimoliy xatolikka ko‘ra o‘rta kvadratik xatolik uzining quyidagi afzalliklariga ega:

1. O‘rta kvadratik xatoliklar qiymatiga asosan xatoliklarning absolyut qiymati bo‘yicha yiriklari ta’sir qiladi.

2. O‘rta kvadratik xatolik n –kichik bo‘lganda ham aniqroq hisoblanadi

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} \qquad (6.9)$$

O‘lchashlarning cheklangan son bo‘yicha aniqlikni baholaganda m ishonchli deb hisoblash qabul qilingan, agar m_m, ¼ dan oshmagan bo‘lsa:

$$m_m \le \frac{1}{4}\ m.$$

Bu shart o‘lchashlar soni $n \ge 8$ bo‘lganda ham bajariladi.

3. O‘rta kvadratik xatolikdan chekli xatolikka o‘tish mumkin, ya’ni o‘lchashlar qatorida bundan yuqori xatolik bo‘lishi kerak emas. Xatoliklarning katta qatorlarini tadqiq qilishda nazariy hisobda quyidagi formula qo‘llaniladi:

$$\Delta_{cheki} \le 3m.$$

O‘lchashlar sonining kichikligini hisobga olib, amaliyotda quyidagi formula qo‘llaniladi:

$$\Delta_{chek} \le 2m.$$

Absolyut va nisbiy xatoliklar

O‘rta kvadratik xatolik m, o‘rtacha v, ehtimoliy r va haqiqiy xatolik Δ **absolyut xatoliklar** deyiladi.

Absolyut xatoliklarning o‘lchangan miqdorlar qiymatiga nisbati ***nisbiy xatoliklar*** deyiladi. Nisbiy xatoliklar asosan surati birga teng bo‘lgan kasr shaklida ifodalanadi:

6.2. Masala. $m_x = 0{,}25$ m;   x = 196,0 m.

Nisbiy o‘rta kvadratik xatolikning qiymatini toping.

Yechish:

$$\frac{m_m}{x} = \frac{0{,}25m}{196{,}0m} = \frac{1}{780}$$

6.9. HAQIQIY XATOLIKLAR QATORINING NORMAL TAQSIMLANISHINI TADQIQ QILISH.

Xatoliklar nazariyasining birinchi asosiy masalasi – tasodifiy xatoliklarning taqsimlanish qonunini ko‘rib chiqamiz. Bu masalani Yechish uchun matematik statistika bo‘limidagi 4.4 va 4.5 laridagi tadqiq qilish usullaridan va taqsimlanishlarni normalga yakinlashtirish darajasini baholash kriteriyalaridan foydalanamiz(6.6 , 6.7).

6.3. masala. 2-jadvalda 32 ta uchburchakning bog‘lanmaslik xatosi berilgan. Bog‘lanmaslik xatoliklari qatorini normal taqsimlanishini tadqiq qiling. Uchburchaklar ichki burchak yig‘indisi 180^0 ga teng desak, bog‘lanmaslik xatolikni $f_i = \sum_{j=1}^{3} \beta_j - 180^0$ orqali hisoblab uni haqiqiy xatolik Δ_i ni topamiz.

2.2-jadval

№	Bog‘lanmaslik xatoligi Δ_i	№	Bog‘lanmaslik xatoligi Δ_i	№	Bog‘lanmaslik xatoligi Δ_i	№	Bog‘lanmaslik xatoligi Δ_i
1	-0,76	9	+1,29	17	+0,71	25	+0,22
2	+1,52	10	+0,38	18	+1,04	26	+0,06
3	-0,24	11	-1,03	19	-0,38	27	+0,43
4	+1,31	12	0,00	20	+1,16	28	-1,28
5	-1,27	13	-1,23	21	-0,19	29	-0,41
6	-1,88	14	-1,38	22	+2,28	30	-2,50
7	+0,01	15	-0,25	23	+0,07	31	+1,92
8	-0,69	16	-0,73	24	-0,95	32	-0,62

$\sum(\Delta_i > 0) = +12.40$; $\sum(\Delta_i < 0) = -15.79$; $\sum\Delta_i = -3.39$; $\sum\Delta^2 = [\Delta^2] = 38.75$

Yechish:

1. Normal taqsimlanish parametrlarini baholashni hisoblash M(Δ) i m:

$$M(\Delta)=\frac{[\Delta]}{n}=\frac{-3''.39}{32}=-0''.105$$

$$m=\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}=\sqrt{\frac{38.75}{32}}=1''.10$$

2. O‘rta xatolik v* va uning koeffitsiyenti K_1 hisoblash.

$$v^{\bullet}=\frac{[|\Delta|]}{n}=\frac{28''.19}{32}=0''.88$$

$$K_1=\frac{m}{v}=\frac{1''.10}{0''.88}=1.25$$

3. Ehtimoliy xatolik r• va uning koeffitsiyenti K_2 hisoblash.

r ni aniqlash uchun haqiqiy xatoliklar qatorini absolyut qiymati bo‘yicha usuvchanlikda joylashtiramiz:

+0.00	+0.01	+0.06	+0.07	-0.19	+0.22	-0.24	-0.25
+0.38	-0.38	-0.41	+0.43	-0.62	-0.69	+0.71	-0.73
-0.76	-0.95	-1.03	+1.04	+1.16	-1.23	-1.27	-1.28
-1.29	+1.31	1.38	+1.52	-1.88	+1.92	+2.28	-2.50

Topamiz:

$$r^{\bullet}=\frac{|\Delta_{16}|+|\Delta_{17}|}{2}=\frac{0.73+0.76}{2}=0.74$$

$$K_2=\frac{m}{r}=\frac{1.10}{0.74}=1.49$$

4. Statistik guruhlashgan qatorni qo‘rish:

Xatoliklar qatorini 12 ta oraliqka joylashtiramiz (oraliq uzunligini o‘rta kvadratik xatoning yarmiga teng: 0.5m).

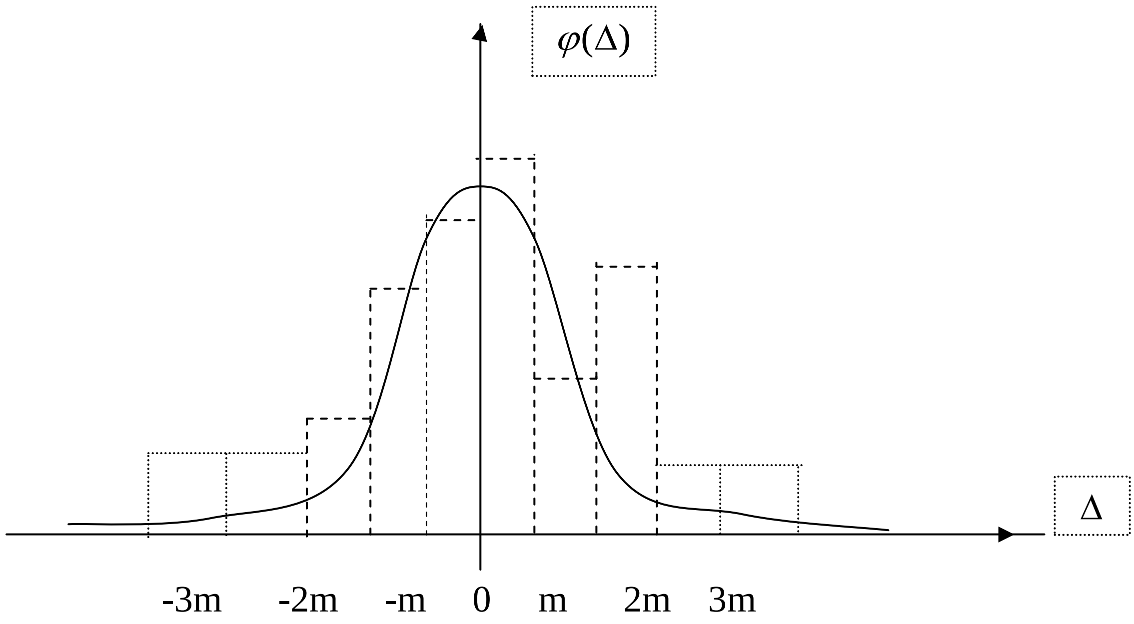
2.3-jadval

Oraliq-lar №	Oraliqlar uzunligi		Xatolik-lar soni, m_i	Chastotalar $Q_i=\frac{m_i}{n}$	To‘g‘riburchaklar balandligi $h_i=\frac{Q_i}{0,5m}=\frac{Q_i}{0,55}$
	Nazariy, m	Amaliy			
1	2	3	4	5	6
1	0 – (+0,5)	0 – (+0,55)	7	0,219	0,398
2	(+0,5) – (+1,0)	(+0,56) – (+1,10)	2	0,062	0,113
3	(+1,0) – (+1,5)	(+1,11) – (+1,65)	4	0,125	0,227
4	(+1,5) – (+2,0)	(+1,66) – (+2,20)	1	0,031	0,056
5	(+2,0) – (+2,5)	(+2,21) – (+2,75)	1	0,031	0,056

6	(+2,5) – (+3,0)	(+2,76) – (+3,30)	0	0	0
7	0 – (-0,5)	0 – (-0,55)	5	0,156	0,284
8	(-0,5) – (-1,0)	(-0,56) – (-1,10)	6	0,188	0,342
9	(-1,0) – (-1,5)	(-1,11) – (-1,65)	4	0,125	0,227
10	(-1,5) – (-2,0)	(-1,66) – (-2,20)	1	0,031	0,056
11	(-2,0) – (-2,5)	(-2,21) – (-2,75)	1	0,031	0,056
12	(-2,5) – (-3,0)	(-2,76) – (-3,30)	0	0	0
Σ			32	1,000	

5. Gistogrammani va taqsimlanish egriligini chizish:

2.3-jadvalning 2 va 6 ustunidan foydalanib taqsimlanishning empirik taqsimlanishini chizamiz (masshtabni shartli tanlanadi).



2.4-chizma.

Gistogramma xatoliklar Δ_i normal taqsimlanish qonuniyatini his qilishni ko‘rsatadi.

Statistik taqsimlanish berilganlarini eng yaxshi ko‘rinishda to‘g‘rilaydigan nazariy egrilikni aniqlaydigan formula:

$$\varphi(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.1.10}\mathring{a}^{-\frac{\Delta^2}{2\cdot 1.21}} \quad ,$$

bu yerda: m=1”10, M(Δ) = 0.

Birinchi ilovada berilgan jadvaldan foydalanib egrilik φ(Δ) ning ordinatasini hisoblaymiz. Hisoblash natijalarni 4-jadvalga joylashtiramiz:

2.4-jadval

Tar-tib №	Oraliq chegaralari Δ_i	$t_i = \frac{\Delta_i}{m}$	$y_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t_i^2}{2}}$	$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$	$\varphi(\Delta_i) = h\,y_i$
1.	0	0	0.564	0.645	0.364
2.	$0.5m$	0.5	0.498	0.645	0.321
3.	$1.0m$	1.0	0.342	0.645	0.220
4.	$1.5m$	1.5	0.183	0.645	0.118
5.	$2.0m$	2.0	0.076	0.645	0.0049
6.	$2.5m$	2.5	0.025	0.645	0.016
7.	$3.0m$	3.0	0.006	0.645	0.004

To‘rtinchi jadvaldagi 2 va 4 ustunlardan foydalanib $[\Delta_i,\ \varphi(\Delta_i)]$ nuqtalar qatorini qo‘yib chiqamiz va ularni tekis egri chiziq bilan tutashtiramiz (2.4-chizma).

KRITERIYA χ^2 QO‘LLANILISHI (PERSON KRITERIYASI)

Statistik taqsimlanishning (gistogrammaning) nazariy normal taqsimlanish qonuniga (taqsimlanishning egriligi) yakinlashish darajasini baholash uchun quyidagi qiymatni hisoblaymiz:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{12} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

Hisoblash natijasini 5-jadvalga joylashtiramiz.

2.5-jadval

Tar-tib №	Oraliqlar $t_i = \frac{\Delta_i}{m}$	$\frac{1}{2}F(t_i)^*$	P_i	m_i	np_i	$m_i - np_i$	$\frac{m_i - np_i}{np_i}$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1.	0 +0.5	0.192	0.192	7	6	1	0.167	0.167
2.	+0.5 - +1.0	0.341	0.149	2	5	-3	-0.600	1.800
3.	+1.0 - +1.5	0.433	0.092	4	3	1	0.333	0.333
4.	+1.5 - +2.0	0.477	0.044	1	1	0	0	0
5.	+2.0 - +2.5	0.494	0.017	1	1	0	0	0
6.	+2.5 - +3.0	0.4986	0.005	0	0	0	0	0
7	0 -0.5			5	6	-1	-0.167	-0.167
8.	-0.5 - –1.0			6	5	1	0.200	0.200
9.	-1.0 - –1.5			4	3	1	0.333	0.333
10.	-1.5 - –2.0			1	1	0	0	0
11.	-2.0 - –2.5			1	1	0	0	0
12.	-2.5 - –3.0			0	0	0	0	0
								Σ = 2,80

5-ilovadagi jadval bo‘yicha ko‘rsatkich darajasi soni r = k-1-s = k-2 (s = 1, chunki bitta parametr b , M(Δ) nolga teng deb qabul qilingan tanlash bo‘yicha baholanmoqda). χ^2= 2 uchun, ehtimoli r = 0,996; χ^2 = 3 uchun, r=0,981. Taxminlab, χ^2 = 2,80 uchun r(χ^2)= 0,98 topamiz.

Ko‘rilgan qator haqiqiy xatoliklarning normal taqsimlanishga bo‘ysinishi va M(Δ) = 0 tadqiqot natijasi bo‘yicha shunday xulosaga kelamiz, ya’ni

1).O‘rta arifmetik qiymat $\frac{[\Delta]}{n}$ amaliyotda nolga teng.

2). Xatoliklar qatorida Δ_i ishora va qiymat bo‘yicha ko‘rinarli qonuniyat yo‘q.(2.2-jadval)

3). Tasodifiy xatoliklar absolyut qiymati bo‘yicha kichik xatoliklar katta qiymatga nisbatan ko‘proqni tashkil qiladi (2.3-jadvalning 4-ustunidagi m_i ga qarang).

4). Xatoliklar qatoridagi birorta xatolik chekdan oshmaydi

Δ_{chek} = 3m =3",30;

5). Koeffitsiyentlar K_1 va K_2 o‘zlarining nazariy qiymatlari bilan mos keladi (K_1=1,25; K_2=1,48)

6). Berilgan kriteriya 0,1 qiymatidan ehtimollik R(χ^2_{hisob}) = 0,98 katta.

6.10. YAXLITLASH XATOLIGI VA UNING XOSSALARI

Teng taqsimlanish qonuniga bo‘ysinadigan tasodifiy miqdorlarga misol qilib, o‘lchash va hisoblashda yo‘l qo‘yiladigan yaxlitlash xatoligini olish mumkin. Hisoblash natijasida kerakli aniqlikda yaxlitlanadi. Asbob o‘lchash shkalalaridan sanoq olganda oxirgi raqamlar yaxlitlanib tashlab yuboriladi.

Yaxlitlash xatoliklari quyidagi xossalar bilan tavsiflanadi:

1. Yaxlitlashning chekli xatoligi oxirgi saqlanayotgan unli raqamning 0.5 ga teng

2. Manfiy va musbatli yaxlitlash xatoliklari paydo bo‘lish imkoniyati tengdir.

3. Tasodifiy yaxlitlash xatoliklarining matematik kutushi nolga teng. Haqiqatdan (3.2) formulaga: $\mu(x) = \frac{\beta + \alpha}{2}$ ga $\beta = |\alpha|$ =0.5 ni qo‘ysak $\mu(\Delta) = 0$.

4. Yaxlitlash xatoligining katta va kichik miqdorlari teng imkoniyatlidir.

Tasodifiy miqdorlarning teng taqsimlanish standarti formula bilan aniqlanadi:

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{12}} = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}} \qquad (6.4)$$

Yaxlitlash xatoligi uchun yaxlitlashning o‘rta kvadratik xatoligi bilan chekli xatoligi o‘rtasidagi bog‘liqlik formulasi quyidagichadir $\Delta_{chekli} = 0.5$ oxirgi raqam, $(\beta = |\alpha| = \Delta_{cheki})$

$$m_{yaxl.} = \frac{0.5\hat{\imath}\tilde{o}r\,.son}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta_{chek}}{\sqrt{3}} \qquad (6.10)$$

Yaxlitlash xatoligi uchun quyidagi munosabat o‘rinlidir

$$m_{yax.} = 1.15 v_{yax.}$$

$$m_{yax.} = 1.15 r_{yax.} \qquad (6.11)$$

Normal taqsimotdan o‘zgacha taqsimotga ega bo‘lgan tasodifiy qiymatlar sifatida yaxlitlashning tasodifiy xatoliklarini ko‘rib chiqamiz.

Gauss yaxlitlashning quyidagi qoidasini yaratgan: Saqlanadigan o‘nlik raqam yaxlitlanganda 0,5 gacha bo‘lgan qiymat tashlab ketiladi; 0,5 dan ortiq bo‘lgan qiymat birgacha yaxlitlanadi; 0,5 bo‘lsa yaxlitlash kerak bo‘lgan oldingi raqam juft bo‘lsa, u tashlab ketiladi, toq bo‘lsa, juft raqamgacha yaxlitlanadi.

Gauss qoidasi hisoblashda bir xil tartibni joriy etishga imkon beradi. Kasr sonlar bilan hisob bajarayotganda har bir natija yaxlitlash xatosini o‘z ichiga oladi.

O‘lchash jarayonida yaxlitlash xatosi asboblarning shkalalaridan sanoq olayotganda o‘nliklar tashlanib shkala bo‘linmasining butun qismigacha yaxlitlanganda sodir bo‘ladi. Lekin, shkala bo‘linmasining o‘nlik qismi chamalab olinsa, unda sanoq olish xatosi yaxlitlash emas, o‘lchash xatosi bo‘ladi.

Yaxlitlash xatosi quyidagi xossalarga ega ekanligi tajribada isbotlangan:

- bir marotaba yaxlitlashning eng katta xatosi saqlanib qoladigan o‘nlik xona birligining yarmiga teng;
- Yaxlitlashda musbat va manfiy xatolarning paydo bo‘lish imkoniyatlari tengdir;
- Yaxlitlash xatosining matematik kutilmasi nolga teng, ya’ni M(ε)=0;
- Oxirgi saqlangan unli xona raqamining noldan ½ gacha bo‘lgan qismida har qanday son qiymatning paydo bo‘lishi teng ehtimolga ega;
- katta va kichik qiymatli yaxlitlash xatolarining bo‘lish imkoniyatlari tengdir.

Ana shu xossalar yaxlitlash xatolarini bir maromda taqsimlangan tasodifiy qiymatlar qatoriga kiritishga imkon beradi. Bunday taqsimot funksiyasi to‘g‘ri chiziq tenglamasi bilan ifodalanib, u abssissa o‘qiga paralleldir.

Nazorat savollari:

1. O‘lchashlar nima?
2. Xatoliklarning kelib chiqish sabablari.
3. Xatoliklar nazariyasining vazifasi.
4. Tasodifiy xatoliklar va ularning xossalarini ayting.
5. Gauss egriligi va uning xossalarini ayting

7. O‘LCHANGAN MIQDORLAR FUNKSIYASINING ANIQLIGINI BAHOLASH

Geodezik o‘lchashlarda ba’zan aniqlanishi kerak bo‘lgan miqdor o‘lchangan miqdorlarning funksiyasi sifatida hisoblab topiladi. Chunki funksiya xatoligi argumentlar xatosiga va funksiyaning turiga bog‘liq.

7.1. KORRELYATSIYALANGAN ARGUMENTLAR FUNKSIYASINING O‘RTA KVADRATIK XATOSI

Funksiya berilgan

$$F = f\,(x, y, z, \ldots\ldots\ldots, u)\,, \qquad (7.1)$$

bu yerda x, y, z,……., u - o‘rta kvadratik xatosi m_x, m_y, m_z,…….., m_u bo‘lgan o‘lchashlardan olingan argumentlardir. Ma’lumki juft statistik bog‘liqlikda bo‘lgan koeffitsiyentlar noldan farqlidir, ya’ni $r_{xy} \neq 0,\ r_{xz} \neq 0, \ldots\ldots\ldots$ Bunday argumentlar korrelyatsiyalangan deyiladi.

Funksiya (7.1) aniqligini baholash quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 m^2{}_x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 \mathrm{m}^2{}_y + \ldots.+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0^2 m_u^2 + 2\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \mathrm{r}_{xy}\, m_x m_y. \quad (7.2)$$

bu yerda, $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$, …………, $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0$ - o‘lchangan miqdorlar deb qabul qilingan x, y,….., u, argumentlar x_0, y_0,………, u_0, taxminiy qiymatlari bo‘yicha funksiyaning hosilasi. Shuni ta’kidlash kerakki, (7.2) ifoda umumiy ko‘rinishdagi funksiya dispersiyasini baholaydi:

$$Д_F = \sigma_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \sigma^2{}_x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 \sigma^2{}_y + \ldots..+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0^2 \sigma_u^2 + 2\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \mathrm{r}_{xy}\, \sigma_x \sigma_y + \ldots$$

(7.3)

bu yerda $\sigma_x, \sigma_y, \ldots\ldots.\sigma_u$ - argumentlar standarti.

7.2. KORRELYATSIYALANMAGAN ARGUMENTLAR FUNKSIYASI O‘RTA KVADRATIK XATOSI

Korrelyatsiyalanmagan argumentlar uchun korrelyatsiya koeffitsiyenti (7.2) formulada nolga teng. Shuning uchun (7.2) formulaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 m^2{}_x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 \mathrm{m}^2{}_y + \ldots\ldots\ldots+\left(\frac{\partial F}{\partial xu}\right)_0^2 m_u^2. \qquad (7.4)$$

Funksiya aniqligini baholash uchun masala echamiz.

7.1 Masala. Uchburchakda ikkita burchak m_{β_1} = 3"0 va m_{β_2} = 4"0 o‘rta kvadratik xatolik bilan o‘lchangan. Uchinchi burchakning o‘rta kvadratik xatosini m_{β_3} toping.

Yechish: Funksiyani tuzamiz $u = \beta_3 = 180^0 - \beta_1 - \beta_2$ $\left(\frac{\partial u}{\partial \beta_1}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_2}\right) = 1$; 180^0- aniq son, β_1 va β_2 - bog‘liq bulmagan argumentlar bunda

$m_u^2 = m_{\beta_3}^2 = m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2$ =3"0 ^{2} +4"0 ^{2} = 25; m_{β_3} =5"0.

Umuman chiziqli funksiya uchun: $u = x_1 \pm x_2 \pm \ldots\ldots\ldots \pm x_n$

$$m_u^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 \ldots\ldots\ldots + m_{x_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}^2 , \qquad (7.5)$$

boshqa ko‘rinishdagi funksiya uchun $u = k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm \ldots\ldots \pm k_n x_n$

$$m_u^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 m_{x_i}^2 \qquad (7.6)$$

7.2 Masala. Bog‘liq bo‘lmagan argument funksiyasining o‘rta kvadratik xatosini toping $u = \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{4}z$, agar ular argumentlarining o‘rta kvadratik xatosi ma’lum bo‘lsa.

(7.6) ga asosan topamiz

$$m_u = \sqrt{\frac{1}{4}m_x^2 + \frac{1}{25}m_y^2 + \frac{1}{16}m_z^2}$$

7.3. Masala. Burchak n marta o‘lchangan qiymatning o‘rtachasi deb hisoblangan. Burchak qiymatining o‘rta kvadratik xatosini toping, agar bitta o‘lchashning o‘rta kvadratik xatosi m bo‘lsa.

Yechish: Funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$u = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x_n}{n}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{n} \quad \text{va}$$

$m_{x_1} = m_{x_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = m_{x_n} = m$, bunda

$$m_u^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{x_2}^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{x_n}^2 = \frac{nm^2}{n^2} = \frac{m^2}{n}$$

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad (7.7)$$

Demak, oddiy o‘rta arifmetik yig‘indilar soni kvadrat ildiziga bulingan xatoliklar yig‘indisidan aniqroqdir.

7.4. Masala Funksiya berilgan: F=$\frac{xy}{z}$, bu yerda x, y, z – korrelyatsiya bo‘lmagan argumentlar; m_x, m_y, m_z - ularning o‘rta kvadratik xatoligi. Funksiyaning o‘rta kvadratik xatosini toping.

Yechish: Funksiya F ni e asosida logarifmlaymiz $\ln F = \ln x + \ln y - \ln z$, bunda $\frac{\partial \ln x}{\partial x} = \frac{1}{x}$ ligini hisobga olib,

$$m_{\ln F}^2 = \left(\frac{m_F}{F}\right)^2 = \left(\frac{m_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{z}\right)^2 \qquad (7.8)$$

$$m_F^2 = F^2 \left[\left(\frac{m_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{z}\right)^2 \right]$$

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{y}{z}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{xy}{z^2}\right)^2 m_z^2}$$

7.5 Masala Funksiya F=lnx uchun m_F ni toping

Yechish: F=$\mu \cdot \ln x$ yozamiz, bunda μ = 0,4343 – unli logarifmning moduli.

$$m_F^2 = m_{\ln x}^2 = \mu^2 \frac{m_x^2}{x^2}; \qquad m_F = m_{\ln x} = \mu \frac{m_x}{x};$$

$$\frac{m_x}{x} = \frac{m_{\ln x}}{\mu} \qquad (7.9)$$

7.6. Masala. Sinuslar teoremasi asasida uchburchakning tomonlari hisoblangan:

$$a = b \frac{\sin A}{\sin B},$$

bu yerda v, A, V – bevosita o‘lchangan, o‘rta kvadratik xatoligi m_b, m_A, m_B -bo‘lgan o‘lcham. m_a ni hisoblab toping.

Yechish: Formula (7.4) bo‘yicha yozamiz:

$$m_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2 m_A^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial B}\right)^2 m_B^2$$

xususiy hosilaning qiymatini qo‘yib, topamiz:

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{\sin A}{\sin B}\right)^2 m_b^2 + \left(b\frac{\cos A}{\sin B}\right)^2 \frac{m_A^2}{\rho^2} + \left(-b\frac{\sin A\cos B}{\sin^2 B}\right)^2 \frac{m_B^2}{\rho^2}} \quad .$$

7.7. Masala. Formula h = s tgv bo‘yicha olingan nisbiy balandlikning o‘rta kvadratik xatosini toping. s = 143,5 m ; v = +2^0 30'; m_s = 0,5 m; m_v =1'0.
Yechish:

$$m_h = \sqrt{(tgv)^2 m_s^2 + \left(\frac{s}{\cos^2 v}\right)^2 \frac{m_v^2}{\rho^2}} = \sqrt{0{,}044^2 \cdot 0{,}5^2 + \frac{143{,}5^2 \cdot 1}{0{,}999^2 \cdot 3438^2}} = 4{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 4{,}8 \text{ sm};$$

$m_h = 4{,}8$ sm.

7.8. Masala. qaytarish usuli bilan o‘lchangan burchakning o‘rta kvadratik xatosi berilgan m_β= 6" . Ikkita qo‘shni burchak β_1 va β_2 yig‘indisining o‘rta kvadratik xatosini toping.

Ma’lumki, qaytarish usuli bilan o‘lchangan qo‘shni burchaklar bir-biri bilan korrelasion bog‘liqdir. Korrelyatsiya koeffitsiyenti $r_{\beta_1\beta_2}$= -0,25. Formula (7.2) foydalanib:

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_1}\right)^2 m^2{}_{\beta_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_2}\right)^2 m^2{}_{\beta_2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial \beta_1}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \beta_2}\right) r_{\beta_1\beta_2}\, m_{\beta_1} m_{\beta_2},$$ agar $m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = m_\beta$ ni

e’tiborga olib m_u .

Nazorat savollari:

1. Korrelyatsiyalangan argumentlar funksiyasining o‘rta kvadratik xatosi formulasini yozing va tushuntiring?

2. Korrelyatsiyalanmagan argumentlar funksiyasining o‘rta kvadratik xatosi formulasini yozing va tushuntiring?

8. TENG ANIQLIKGA EGA BO‘LGAN BITTA MIQDOR O‘LCHASHLARINING NATIJASINI MATEMATIK QAYTA ISHLASH.

8.1. ANIQLIKNI BAHOLASH

O‘lchashlarda bir xil asbobda, bir xil usulda va bir xil sharoitda olingan natijalar **teng aniqlikka ega bo‘lgan o‘lchamlar** deyiladi. Teng aniqlikdagi o‘lchamlar bir xil o‘rta kvadratik xatolikka ega bo‘ladi.

Haqiqiy qiymati X bo‘lgan miqdorni teng aniqlikda bir necha marta o‘lchangan. Sistematik xatolardan holi bo‘lgan x_1, x_2, ……, x_n natijalar olingan. qatorlarni matematik qayta ishlab, uning haqiqiy qiymatini, har bir o‘lchamning aniqligini baholash kerak. Matematik statistika bo‘limidagi noma’lum parametrlarni baholash uslubidan foydalanib qo‘yilgan masalani echamiz.

1.Noma’lum X qiymatning aniqligini baholashda oddiy o‘rta arifmetik orqali topiladi:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{[x]}{n}$$

2. O‘lchashlarning o‘rta kvadratik xatosi Bessel formulasi bilan aniqlanadi

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \quad , \qquad (8.1)$$

bu Bessel formulasi va quyidagi xususiyatga ega:

a). [v] = 0,

b). $[v^2]$ =min

3. Oddiy o‘rta arifmetik standartni baholash quyidagicha

$$m_x = M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad (8.2)$$

formulani keltirib chiqarish 7.3 masalada berilgan.

O‘lchangan miqdorning noma’lum haqiqiy qiymati berilgan ehtimollik β oralig‘ida joylashgan ishonchlik oralig‘ida bo‘ladi.

$$\bar{x} - t_\beta M < x < \bar{x} + t_\beta M$$

8.2. TENG ANIQLIKDAGI O‘LCHASHLAR QATORINI QAYTA ISHLASH

Kerakli tekshirishlarni bajarish orqali hisoblash quyidagi tartibda olib boriladi:

1.O‘rta arifmetik qiymat quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\bar{x}_{яхл.} = x_o + \frac{[\varepsilon]}{n} \quad , \qquad (8.4)$$

bu yerda, $\varepsilon_i = x_i - x_o$,

x_o - x_i ning eng kichik qiymati.

2. Og‘ish v_i - ni hisoblanadi va tekshirish bajariladi:

$[v] = -n\beta$, (8.5)

bu yerda, β - $x_{яхл.}$ ni yaxlitlashni hisoblash xatoligi.

$\beta = x_{яхл.} - \bar{x}$ ($x_{яхл.}$ - x ni yaxlitlab olinadi, ya’ni x qiymat $x_{яхл.}$ - dan bitta o‘nlik son katta bo‘ladi)

3. $[v^2]$ – hisoblanadi va tekshiriladi: $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$ (8.6)

(7.1; 7.2;) formula bo‘yicha m va M

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} \; ; \qquad m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} \; ,$$

8.1. Masala. Teng aniqlikdagi bitta burchakni o‘lchash natijalari berilgan. $\bar{x}$, m, M, m_m, m_M aniqlang. Ehtimoli 0,95 bo‘lgan burchakning haqiqiy qiymatini yopuvchi ishonchli oraliqni tuzing.

2.6-jadval

№	O‘lchash natijalari x_i	$\varepsilon_i = x_i - x_0$	ε_i^2	$v_i = \bar{x}_{яхл.} - x_i$	$\vartheta^2{}_i$
1	$67^0 33' 44''$	+4"	16	+0,7"	0,49
2	40	0	0	+4,7	22,1
3	43	+3	9	+1,7	2,89
4	45	+5	25	-0,3	0,09
5	46	+6	36	-1,3	1,69
6	43	+3	9	+1,7	2,89
7	48	+8	64	-3,3	10,9
8	45	+5	25	-0,3	0,09
9	48	+8	64	-3,3	10,9
10	46	+6	36	-1,3	1,69
11	47	+7	49	-2,3	5,29
12	41	+1	1	+3,7	13,7
Σ		+56	334	+12.5 -12.1 +0.4	72,9

$x_0 = 67^0 33' 40''$

$$\frac{[\varepsilon]}{n} = 4''67$$

$$\bar{x} = 67\ 33\ 44''\ 67$$

1. $\bar{x}_{яхл.} = 67^0 33'\ 44''7$; β = -0,03;

Tekshirish:

a). [v]= -nβ =-(12) (-0.03)=+0"4

b). $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} = 334 - \frac{56^2}{12} = 72$

Aniqlikni baholash:

1. $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{72{,}9}{11}} = 2'',6$

2. $M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}6}{\sqrt{12}} = 0'',75_x$

3. $m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = 0'',55$

4. $m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = 0''15$

Styudent jadvaliga (4-ilova) asosan ehtimoli 0,95 bo‘lganda r = n-1 = 11 uchun t_β = 2,20 ni topamiz. Ishonchli oraliqni tuzamiz:

$$\bar{x} - t_\beta M < x < \bar{x} + t_\beta M$$

$$67^0\ 33'\ 44''7 - 2{,}20\ 0{,}75 < x < 67^0\ 33'\ 44''\ 7 + 2{,}20\ 0''\ 75\ ,$$

$$67^0\ 33'\ 43''1 < x < 67^0\ 33'\ 46''3$$

Javob: Burchakning haqiqiy qiymati ehtimoli 0,95 bo‘lgan oraliqda (67^0 33' 43"1; 67^0 33' 46"3) joylashadi

8.2 Masala. Burchakni bitta usul bilan o‘lchash o‘rta kvadratik xatosi 12" aniqlik bilan imkoniyatini beradi. Ushbu asbob bilan o‘rta kvadratik xatosi M = 6"0 bo‘lgan oxirgi natijani olish uchun qanday oz sonli usul bilan o‘lchash mumkin.

Yechish: Formula $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ bo‘yicha $n = \frac{m^2}{M^2} = \frac{12^2}{6^2}$ = 4. Javob: 4 usul bilan.

Quyidagi masalani eching. Burchakning o‘rtacha qiymati 9 usulda o‘rta kvadratik xato M = 1"5 bilan olingan. Ushbu sharoitda 4 usul bilan burchak qiymatining oxirgi natijasi o‘rta kvadratik xatosini toping.

Nazorat savollari:

1. Teng aniqlikda o‘lchangan bitta miqdorni qayta ishlash tartibini aytib bering.
2. Teng aniqlikda o‘lchangan bitta miqdorni qayta ishlash formulalarini yozing va tushuntiring.

9. TENG ANIQLIKKA EGA BULMAGAN O‘LCHASHLARNI MATEMATIK QAYTA ISHLASH.

9.1. VAZN TO‘G‘RISIDA UMUMIY TUSHUNCHA

O‘rta kvadratik xatolik (standart) bo‘yicha o‘lchashlar aniqligini baholash – absolyut baholash deyiladi. O‘lchashlar natijasini matematik qayta ishlash amaliyotida o‘lchash natijalari aniqlikni nisbiy baholash kerakligini ham takazo qiladi. Bu masalani Yechish uchun Gauss maxsus nisbiy aniqlik o‘lchamini – dispersiyaga teskari bo‘lgan qiymatni taklif kildi:

$$r_i = \frac{c}{\sigma^2{}_i}, \qquad (9.1)$$

bu yerda, s – proporsional koeffitsiyent,

Ma’lumki, o‘lchashlar natijasi dispersiyasi noma’lum. Uni o‘rta kvadratik xatolik bilan almashtirib vazn formulasini topamiz:

$$r'_i = \frac{c}{m^2{}_i} \qquad (9.2)$$

r'_i - taxminiy vazn, haqiqiy vazn r – ning statistik bahosi.

s = μ^2, deb quyidagi formulani olamiz:

$$r'_i = \frac{\mu^2}{m^2} \qquad (9.3)$$

Agar $r_i = 1$, $\mu = m_i$ bo‘lsa, bunda μ - vazni birga teng bo‘lgan o‘lchashning o‘rta kvadratik xatosi (qisqacha vazn birligidagi o‘rta kvadradratik xatolik).

Amaliyotda ixtiyoriy tanlashdan foydalanib o‘lchashning o‘rta kvadratik xatosini bilmasdan turib uning vazni qo‘yilishi mumkin.

9.1 Masala. Bitta asbobda n – usul bilan bir nechta burchak o‘lchangan, ya’ni

1-burchak n_1 marta

2-burchak n_2 marta

3-burchak n_3 marta

………………………..

N-burchak n_N marta

Har bir burchak qiymatining o‘rtacha vaznini toping

Yechish: Bitta usulda o‘lchashning o‘rta kvadratik xatosini μ bilan belgilab, burchak o‘rtacha qiymatining o‘rta kvadratik xatosi qiymatini topamiz:

1-chi burchak $M_1 = \frac{\mu}{\sqrt{n_1}}$

2-chi burchak $M_2 = \frac{\mu}{\sqrt{n_2}}$

3-chi burchak $M_3 = \frac{\mu}{\sqrt{n_3}}$

……………………………

N-burchak $M_N = \frac{\mu}{\sqrt{n_N}}$

(9.2) formula bo‘yicha vazn belgilab, $s = \mu^2$ deb,

1-burchak uchun $r_1 = \frac{\mu^2}{M^2{}_1} = \frac{\mu^2 \cdot n_1}{\mu^2} = n_1$

2-burchak uchun $r_2 = \frac{\mu^2}{M^2{}_2} = \ldots\ldots\ldots = n_2$

3-burchak uchun $r_3 = \frac{\mu^2}{M^2{}_3} = \ldots\ldots\ldots = n_3$

……………………………………

N-burchak uchun $r_N = \frac{\mu^2}{M^2{}_N} = \ldots\ldots.. = n_N$

Shunday qilib berilgan masaladagi vazn burchak o‘lchash usuli soniga teng deb qabul qilish mumkin. O‘lchangan miqdor uchun vazn tushunchasi barcha o‘lchangan miqdorlar funksiyasi uchun ham qabul qilingan. O‘rta kvadratik xatosi m_F ma’lum bo‘lgan funksiyaning vazni quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$r_F = \frac{\mu^2}{m^2{}_F} \qquad (9.4)$$

Shuni ta’kidlash kerakki , miqdorlar μ va r_i yoki μ va r_F ma’lum bo‘lsa barcha o‘lchash miqdorlari funksiyasi va o‘lchash natijalari o‘rta kvadratik xatosini quyidagi formula bilan topish mumkin:

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}\,, \qquad (9.5)$$

$$m_F = \frac{\mu}{\sqrt{p_F}} \qquad (9.6)$$

9.2 Masala. Burchak vazni 9 teng. Agar vazn birligidagi o‘rta kvadratik xatolik $\mu = 15''$ bo‘lsa shu burchakning o‘rta kvadratik xatosini toping.

Yechish: $m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5''$.

Bir xil o‘lchash natijalari vaznini hisoblashda $s = \mu^2$ qiymatini $m^2{}_i$ qiymatiga teng deb qabul qilamiz. Bu holda vazn qiymati cheksizdir.

Har xil o‘lchashlarning (masalan burchak va tomon) vaznini hisoblashda doimiylik s ning qiymati cheksiz deb hisoblanadi.

Amaliyotda vaznni hisoblashda ikki xil masalaga duch kelamiz:

1). Teng aniqlikka ega bo‘lmagan natijalarni birgalikda qayta ishlash maqsadida ushbu natijalarning vaznini belgilash (masalan, 9.1 masala).

2). Teng aniqlikka ega bo‘lmagan natijalar funksiyasi vaznini topish va keyinchalik uning (9.6) formula bo‘yicha funksiya m_F o‘rta kvadratik xatosini hisoblash.

Funksiya vaznini aniqlash xatoliklar nazariyasining birdan bir asosiy masalasidir.

9.2. BOG‘LIQ VA BOG‘LIQ BO‘LMAGAN ARGUMENTLAR FUNKSIYASINING VAZNI

(7.2) va (9.2) formulalarni hisobga olgan holda funksiyaning teskari vazn formulasini oson topish mumkin.

Funksiya F = f(x,y,z, ……., u) , bu yerda x,u,z, ……, u juft korrelirovan argumentlardir. Funksiyaning teskari vazn formulasi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{1}{p_F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_y} + \ldots\ldots\ldots..+ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_u} +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \cdot r_{xy} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_x \cdot p_y}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (9.7)$$

bog‘liq bo‘lmagan argumentlar uchun formula quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{1}{p_F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_y} + \ldots\ldots\ldots..+ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_u} \qquad (9.8)$$

Masalalarni Yechishda bog‘liq bo‘lmagan argumentlar funksiyasini Yechishni ko‘rib o‘tamiz.

9.3. Masala. Quyidagi funksiyaning vaznini toping:

1. ux-y+z;
2. u=2x+$\frac{1}{3}$y-$\frac{1}{2}$z;
3. u=3x^2; agar r_x=3; $r_y = \frac{1}{3}$: $r_z = \frac{1}{4}$; bo‘lsa

Yechish: 1. $\frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \frac{1}{p_z} = \frac{1}{3} + 3 + 4 = \frac{22}{3}$; $p_u = \frac{3}{22}$.

2. $\frac{1}{p_u} = (2)^2 \frac{1}{p_x} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{p_y} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{p_z} = \frac{8}{3}$; $p_u = \frac{3}{8}$.

3. $\frac{1}{p_u}=(6x)^2\frac{1}{p_x}=\frac{36x^2}{3}$; $p_u=\frac{1}{12x^2}$

9.4. Masala. Funksiya u = x$\sqrt{p}$ berilgan. O‘lchash natijasi - x , uning vazni r - bo‘lsa, p_u vaznni toping.

Yechish: $\frac{1}{p_u}=(\sqrt{p})^2\frac{1}{p}=1$; $p_u=1$.

9.5 Masala. quyidagi funksiyaning vaznini toping:

$$u=\bar{x}=\frac{[xp]}{[p]}=\frac{x_1p_1+x_2p_2+.....+x_np_n}{[p]}$$

x_i - o‘lchash natijasi,

p_i - vazni

Yechish:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=\frac{P_i}{[P]};$$

$$\frac{1}{P_u}=\frac{1}{P_{\bar{x}}}=\left(\frac{p_1}{[p]}\right)^2\cdot\frac{1}{p_1}+\left(\frac{p_2}{[p]}\right)^2\cdot\frac{1}{p_2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{p_n}{[p]}\right)^2\cdot\frac{1}{p_n}=$$

$$\frac{p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n}{([p])^2}=\frac{1}{[p]};\quad p_{\bar{x}}=[p]. \qquad (9.9)$$

9.3. TENG ANIQLIKKA EGA BULMAGAN BEVOSITA O‘LCHANGAN BITTA MIQDORNI MATEMATIK QAYTA ISHLASH

O‘rta kvadratik xatosi bir-biriga teng bo‘lmagan o‘lchamlar teng aniqlikka ega bo‘lmagan o‘lchamlar deyiladi (o‘rta kvadratik xatolik $m_i=\frac{\mu}{\sqrt{P_i}}$ formula bilan aniqlanadi).

Haqiqiy qiymati ma’lum bo‘lgan teng aniqlikka ega bo‘lmagan x_1, x_2, … , x_n bitta qiymat va ularning vazni r_1, r_2, … , r_n berilgan.

Berilgan o‘lchamlar qatorini matematik qayta ishlash talab qilinadi.

1. O‘lchangan miqdorlarning eng ishonchli qiymati (sistematik xatodan holi bo‘lgan tarzda) formula bilan aniqlanadi:

$$\bar{x}=\frac{[xp]}{[p]} \qquad (9.10)$$

$\bar{x}$ - umumiy arifmetik qiymat deyiladi.

2. O‘rtacha arifmetikning aniqligi (9.5) formulaga asosan aniqlanadi:

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} \qquad (9.11)$$

yoki 9.5 masalani Yechish natijasini hisobga olganda formula bilan:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}} \qquad (9.12)$$

Vazn birligidagi o‘rta kvadratik xatolik μ (9.12) da Bessel formulasi orqali aniqlanadi:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\vartheta^2]}{n-1}} \qquad (9.13)$$

bu yerda $\vartheta_i = x_i - \bar{x}$. Og‘ishlik ϑ_i xususiyatga ega:

a) $[p\vartheta] = 0$,

b) $[p\vartheta^2] = \min$.

Javob quyidagi ko‘rinishda yoziladi: $\bar{x} \pm M$, yoki berilgan ehtimollik β yopadigan ishonchli oraliq ko‘rinishda (8.1 masalaga qarang).

Agar o‘lchamning haqiqiy xatosi ma’lum bo‘lsa $\Delta_i = x_i - X$, bunda vazn birligidagi o‘rta kvadratik xatolik Gauss formulasi bo‘yicha aniqlanadi:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}\ . \qquad (9.14)$$

9.4. TENG ANIQLIKGA EGA BO‘LMAGAN BITTA MIQDORNI QAYTA ISHLASH

Quyidagi hisoblash tartibi taklif qilinadi:

1. (9.10) o‘rniga quyidagi formula qo‘llaniladi:

$$\bar{x}_{яхл.} = x_0 + \frac{[\varepsilon p]}{[p]} \qquad (9.15)$$

bu yerda x_0 – odatda x_i; ning eng kichik qiymat

$\varepsilon_i = x_i - x_0$;

p_i – masala shartida beriladigan, (9.2) formula bo‘yicha hisoblanadigan yoki masala shartidan aniqlanadigan vazn.

2. Og‘ish ϑ_i hisoblanadi va tekshirish bajariladi

$$[p\vartheta] = -\beta[p] \qquad (9.16)$$

bu yerda: $\beta = \bar{x}_{яхл} - \bar{x}$.

3. tekshirish bilan $[p\vartheta^2]$ hisoblanadi:

$$[p\vartheta^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]} \qquad (9.17)$$

(9.13 va 9.11) formulalar bo‘yicha μ va M hisoblanadi:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} \quad \text{va} \quad m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} \qquad (9.18)$$

9.6 Masala. Tugun reperining otmetkasi oltita yo‘l bo‘yicha olingan. 2.7-jadvaldagi berilganlar bo‘yicha uning eng ishonchli qiymatinini toping va aniqligini baholang.

2.7-Jadval

yo‘l-lar №	H_i (m)	m_{H_i} (mm)	$p_i = \frac{10}{m_{H_i}^2}$	ε_i (mm)	$p_i\varepsilon_i$	$p_i\varepsilon_i^2$	ϑ_i (mm)	$p_i\vartheta_i$	$p_i\vartheta_i^2$
1	196,529	6,3	0,25	+12	3,00	36,0	-1,3	-0,33	0,4
2	,522	8,4	0,14	+5	0,70	3,5	+5,7	+0,80	4,6
3	,517	9,1	0,12	0	0	0	+10,7	+1,28	13,7
4	,532	4,3	0,54	+15	8,10	121,5	-4,3	-2,32	10,0
5	,530	5,2	0,37	+13	4,81	62,5	-2,3	-0,85	2,0
6	,520	7,5	0,18	+3	0,54	1,6	+7,7	+1,39	10,7
Σ			1,60		17,15	225,1		+3.47 -3.50 -0,03	41,4

$$x_0 = 196{,}517\,\text{m};$$

$$\frac{[p\varepsilon]}{[p]} = \frac{17{,}15}{1{,}60} = 10{,}72\,\text{mm}$$

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = 196{,}52772\text{m}$$

(Vazn formula bo‘yicha hisoblangan $p_i = \frac{c}{m_i^2}$, s=10 ga teng). $\bar{x}_{яхл.} = 196{,}5277\,\text{m}$ – o‘lchanayotgan miqdorning eng ishonchli qiymati. Tekshirish: $\beta = \bar{x}_{яхл.} - \bar{x} = 0{,}02\,\text{mm}$.

1. $-\beta[p] = -0{,}032$; $[p\vartheta] = -0{,}03$;

2. $[p\vartheta^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]} = 225{,}1 - \frac{294{,}1}{1{,}60} = 41{,}3$; $[p\vartheta^2] = 41{,}4$.

Aniqlikni baholash:

1. $\mu = \sqrt{\frac{[p\vartheta^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{41{,}4}{5}} = 2{,}9\,\text{mm};$

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{2{,}9}{\sqrt{2*5}} = 0{,}92\,\text{mm}.$$

2. $M = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}} = \frac{2,9}{\sqrt{1,60}} = 2,3$ mm;

$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = \frac{2,3}{\sqrt{12}} = 0,073$ mm .

Javob. $\bar{x} = 196,5277\text{м} \pm 2,3\text{мм}.$

Eslatma. Berilgan masaladagi vazn birligidagi o‘rta kvadratik xatolikni quyidagi formula bo‘yicha ham Yechish mumkin $\mu = \sqrt{c}$ (9.19) , ya’ni $c = \mu^2$. $\mu = \sqrt{10} = 3,3\text{мм}.$ Ko‘rinib turibdiki (9.13) va (9.19) formulalar bo‘yicha aniqlangan qiymat μ ning farqi m_μ dan oshmaydi.

9.7 Masala. 2.8-jadvalda berilgan har xil usul bilan o‘lchangan bitta burchaknig o‘rtacha qiymati berilgan. Berilganlar bo‘yicha matematik qayta ishlang.

Ko‘rsatma. Vaznni $p_i = \frac{n_i}{3}$ formula bo‘yicha aniqlaymiz, ya’ni o‘lchashlar usuli soniga n_i to‘g‘ri proporsional deb qabul qilamiz (9.1 masalaga qarang).

2.8 -Jadval

№	x_i	n_i	$p_i = \frac{n_i}{3}$	ε_i	$p_i\varepsilon_i$	$p_i\varepsilon_i^2$	ϑ_i	$p_i\vartheta_i$	$p_i\vartheta_i^2$
1	$89^0 47' 16''$	6	2	+10	+20	200	-6	-12	72
2	9	18	6	+3	+18	54	+1	+6	6
3	6	3	1	0	0	0	+4	+4	16
4	10	15	5	+4	+20	80	0	0	0
5	13	6	2	+7	+14	98	-3	-6	18
6	8	12	4	+2	+8	16	+2	+8	16
Σ			20		80	448		+18 -18 0.0	128

$x_0 = 89^0\ 47'\ 06''$;

$\frac{[p\varepsilon]}{[p]} = \frac{+80}{20} = +4'',0$;

$\bar{x} = 89^0 47' 10''.$

$\bar{x}_{\text{яхл.}} = 89^0 47' 10''.$ $\beta = 0$;

Hisoblashlarni tekshirish va aniqlikni baholash:

1. $[p\vartheta^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]} = 448 - \frac{6400}{20} = 128$;

2. $\mu = \sqrt{\dfrac{[p\vartheta^2]}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{128}{5}} = 5{,}1$; $m_\mu = \dfrac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \dfrac{5{,}1}{10} = 1{,}6$.

3. $M = \dfrac{\mu}{\sqrt{[P]}} = \dfrac{5{,}1}{\sqrt{20}} = 1{,}14$; $m_M = \dfrac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}$

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = \frac{1{,}60}{\sqrt{20}} = 0{,}36.$$

Javob. $\bar{x} = 89^0 47^/ 10^{//},0 \pm 1^{//},14$.

9.8 Masala. 2.9-jadvalda berilgan 11 poligon bog‘lanmaslik xatosi bo‘yicha nivelir ishlari aniqligini baholang.

Ko‘rsatma. Bog‘lanmaslikni nazariy qiymati ma’lum bo‘lgan haqiqiy xatoliklar funksiyasi orqali hisoblang. Aniqlikni baholashda quyidagi formulani qo‘llaymiz:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[pf^2]}{N}} \ . \qquad (9.20)$$

bu yerda: N – poligonlar soni, f_i - bog‘lanmaslik.

Bu formulada vazn quyidagicha belgilangan. Bitta poligon bo‘yicha funksiya tuzamiz.

$$f_i = \sum h_{амалi} - h_{назарi} = h_1 + h_2 + \ldots + h_{n_i} - (H_{Охир_i} - H_{Бошл.i})$$

bu yerda: n_i – poligondagi stansiyalar soni,

h_i - stansiyadagi o‘lchangan nisbiy balandliklar,

$H_{Бош.}, H_{Охир.}$- punktlarning boshlangich va oxirgi absolyut balandligi. Xar bir stansiyada nisbiy balandliklarni aniqlash aniqligi bir xil va uni r ga teng deb, (9.8) formula bo‘yicha funksiyaning teskari vaznini aniqlaymiz. qiymat ($H_{Бош.} - H_{Охир.}$) doimiy deb qaraymiz.

Bunda

$$\frac{1}{Pf_i} = \left[\frac{1}{p}\right] = \frac{n_i}{p} \quad \text{yoki} \quad Pf_i = \frac{p}{n_i}.$$

Oxirida topamiz

$$Pf_i = \frac{c}{n_i} \qquad (9.21)$$

Koeffitsiyent S shunday tanlanadiki, vazn Pf_i birga yaqin bo‘lsin. Bizning masalada S=100. Unda qiymat $\mu_{100} = \sqrt{\dfrac{[pf^2]}{N}} = \sqrt{\dfrac{\left[\dfrac{100}{n} f^2\right]}{N}}$

Vazn birligidagi o‘rta kvadratik xatolik – 100 stansiyadagi yo‘l bo‘yicha nisbiy balandlikning o‘rta kvadratik xatoligidir. qiymat $m_{cm.} = \frac{\mu_{100}}{\sqrt{100}}$ - bitta stansiyadagi nisbiy balandlikning o‘rta kvadratik xatosi.

Yechish. Hisoblash natijalarini 2.9-jadvalga joylashtiramiz.

2.9-Jadval

№	Bog‘lanmaslik, f_i (mm)	Stansiyalar soni, n_i	$p_i = \frac{100}{n_i}$	f_i^2	$P_i f_i^2$
1	-7,5	54	1,85	56,2	104,0
2	-8,5	67	1,49	72,2	107,0
3	+3,9	87	1,15	15,2	17,5
4	+5,7	118	0,85	32,5	27,6
5	-14,1	200	0,50	198,8	99,4
6	-5,0	87	1,15	25,0	28,8
7	+8,2	136	0,74	67,2	49,7
8	+3,7	108	0,92	13,7	12,6
9	-4,6	140	0,71	21,2	15,0
10	+6,4	60	1,66	41,0	68,1
11	+9,7	75	1,33	94,1	125,1
Σ					655,4

Vazn birligidagi o‘rta kvadratik xatolik (100 stansiyadagi yo‘l bo‘yicha nisbiy balandlik)

$$\mu_{100} = \sqrt{\frac{\left[pf^2\right]}{N}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{100}{n} f^2\right]}{N}} = \sqrt{\frac{655,4}{11}} = 7,7\text{мм};$$

bu yerda: N – yo‘llar soni; $m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{7,7}{\sqrt{2*11}} = 1,6\text{мм}$; $m_{cm.} = \frac{7,7}{\sqrt{100}} = 0,77\text{мм}$ va 1 km da 10 stansiya deb, $m_{\text{км}} = m_{cm.}\sqrt{10} = 2,4\text{мм}$.

Javob. 1 km yo‘l bo‘yicha nisbiy balandlikni aniqlashni nivellir ishlari aniqligi qiymatga $m_{\text{км}} = 2,4\text{мм}$. teng bo‘lgan o‘rta kvadratik xatolik bilan baholanadi.

Nazorat savollari:

1.Vaznning mohiyati.

2. Bog‘liq bo‘lmagan argumentlar funksiyasining vazni.

3. Teng aniqlikka ega bo‘lmagan bitta miqdorni qayta ishlash tartibi.

10. IKKILANGAN O‘LCHAMLARNING FARQI BO‘YICHA ANIQLIKNI BAHOLASH

10.1. IKKILANGAN O‘LCHAMLARNING FARQI BO‘YICHA ANIQLIKNI BAHOLASH

Geodezik amoliyotda ko‘upincha ko‘p sonli bir xil qiymatlar o‘lchanadi. Har bir miqdor tekshirish uchun ikki marta o‘lchanadi.

Qandaydir bir xil miqdor $x_1, x_2, ..., x_n$ ikki martadan o‘lchangan va quyidagi o‘lchash natijasi olingan

$$x_1^{/}, x_2^{/}, ..., x_n^{/}$$
$$x_1^{//}, x_2^{//}, ..., x_n^{//} \qquad (10.1)$$

Yuqoridagi o‘lchash qatorlarini matematik qayta ishlash talab qilinadi.

Farqlarni tuzamiz

$$d_1 = x_1^{/} - x_1^{/}$$
$$d_2 = x_2^{/} - x_2^{//}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d_n = x_n^{/} - x_n^{//} \qquad (10.2)$$

O‘lchanayotgan miqdor x_i eng ishonchli qiymati formula bilan aniqlanadi:

$$\overline{x_i} = \frac{x_i^{/} + x_i^{//}}{2} \qquad (10.3)$$

Bajarilgan o‘lchashlarning aniqligini baholash uchun (10.2) farqdan foydalanamiz.

Qatordagi (10.1) $x_i^{/}$ va $x_i^{//}$ hamma qiymatlar aniqligi tengdir. Sistematik xatodan xoli bo‘lganda d_i farqni haqiqiy xatoliklar qiymati nolga teng deb qarash mumkin. Shuning uchun Gauss formulasini:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \qquad (10.4)$$

Bundan boshqa (7.2) formula bo‘yicha

$$m_{d_i} = m_{x_i}\sqrt{2} \qquad (10.5)$$

bu yerda m_{x_i} - bitta o‘lchamning o‘rta kvadratik xatosi.

Shuningdek,

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \qquad (10.4)$$

O‘rtacha arifmetikning aniqligi (10.3) formula bo‘yicha topiladi:

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \qquad (10.5)$$

Ikkilangan o‘lchamning farqidagi d_i sistematik xatoliklar qoldiq sistematik xatoliklar deyiladi.

O‘lchash natijasida sistematik xatolikning bo‘lishi miqdorning noldan anchagina farqini ko‘rsatadi:

$$\delta_{ур.яхл.} = \frac{[d]}{n} \qquad (10.6)$$

Bunday paytda miqdor $\delta_{ур.яхл.}$ farq d_i farqdan olib tashlanib ushbu qiymat topiladi:

$$d_i^{/} = d_i - \delta_{ур.яхл.}$$

o‘rta arifmetikdan bir xil sonlarning farqi xossasiga asosan $d^{/} = 0$. $d_i^{/}$ hisobni tekshirishda formula xizmat qiladi:

$$[d^{/}] = -n\beta, \qquad \beta = \delta_{ур.яхл} - \delta_{ур.} \qquad (10.7)$$

Farq $d_i^{/}$, o‘rta arifmetikdan og‘ish deb qarab va Bessel (7.1) formulasini qo‘llab, topamiz:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^{/2}]}{n-1}} \qquad (10.8)$$

Yig‘indi $[d^{/2}]$ hisoblash formula bo‘yicha tekshiriladi:

$$[d^{/2}] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n} \qquad (10.9)$$

Bitta o‘lchamning o‘rta kvadratik xatoligi va o‘rtacha arifmetik qiymat uchun x_i formula topamiz:

$$m_{x_i} = \sqrt{\frac{[d^{/2}]}{2(n-1)}} \quad ; \qquad m_{\bar{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^{/2}]}{n-1}} \qquad (10.11)$$

Noldan og‘ish $\delta_{урт.}$ qiymatini topish uchun tengsizlik qo‘llaniladi:

$$|\delta_{ур.}| \le \frac{1}{5} m_d ,$$

O‘rtacha va o‘rta kvadratik xatolarning orasidagi bog‘liqlikni amaliy qo‘llash uchun quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi (6.8):

$$|\delta_{ур.}| = \frac{[|d|]}{n} \le 1{,}25\frac{[|d|]}{5n}$$

yoki $\quad |[d]| \le 0{,}25[|d|] \qquad (10.12)$

bu yerda $[|d|] = |d_1| + |d_2| + ... + |d_n|$.

Agar shart (10.12) bajarilgan bo‘lsa, matematik qayta ishlash formulalar (10.4), (10.5) bo‘yicha amalga oshiriladi.

Ta’kidlaymizki, ikkilangan o‘lchamning farqi bo‘yicha aniqlikni baholash faqatgina tasodifiy xatolarning ta’sirini ishonchli baholaydi.

10.1. Masala. Topografik svetodalnomer bilan ikkita kuzatuvchi bitta masofani o‘lchagan. O‘lchashni teng aniqlik deb hisoblab bitta o‘lchamning va ikkita o‘lchamning o‘rtachasi uchun o‘rta kvadratik xatolarni hisoblaymiz.

2.10-jadval

№	O‘lchashlar farqi S_i, (m.)		d_i (cm.)	d_i^2	$d_i^{/}$ (sm.)	$d_i^{/2}$	Eslatma(hisoblarni tekshirish)
	1 kuzat.	2 kuzat.					
1	967,480	967,389	+9,1	82,8	+5,7	32,5	1. $\left[d^{/}\right]=-n\beta$, $\beta=\delta_{ур.яхл.}-\delta_{ур.}$, $\beta=0{,}03$. $-n\beta=-0{,}21$, $\left[d^{/}\right]=-0{,}2$. 2. $\left[d^{/2}\right]=\left[d^{2}\right]-\frac{[d]^2}{n}$ $\left[d^{/2}\right]=188{,}2-79{,}6=$ $=108{,}6$ $\left[d^{/2}\right]=108{,}6$
2	752,468	752,412	+5,6	31,3	+2,2	4,8	
3	692,223	692,250	-2,7	7,3	-6,1	37,2	
4	1023,536	1023,536	0,0	0	-3,4	11,6	
5	808,457	808,444	+1,3	1,7	-2,1	4,4	
6	612,692	612,665	+2,7	7,3	-0,7	0,5	
7	675,158	675,082	+7,6	57,8	+4,2	17,6	
Σ		$[\lvert d\rvert]$ $[d]$.	+26,3 -2.7 29.0 +23.6	188,2	-0,2	108,6	Tekshirish bajarildi, ya’ni farq $\left[d^{/2}\right]$ 108,6-108,6= 0

Echim 1. Yo‘l qo‘yish mezoni(kriteriyasi) $\delta_{ур.}$.

$0{,}25[\lvert d\rvert]=0{,}25*29{,}0=7{,}2$; $[d]=+23{,}6$;

bu yerda quyidagi tengsizlikga urin bor

$[\lvert d\rvert]>0{,}25[\lvert d\rvert]$ $23{,}6>7{,}2$.

SHuningdek miqdor $\delta_{ур.}$ ni hisobga olmaslik mumkin emas.

2. Sistematik xatolarning qoldiq ta’siri

$$\delta_{урт.}=\frac{[d]}{n}=\frac{+23{,}6}{7}=+3{,}37см. \qquad \delta_{урт.яхл.}=+3{,}4$$

3. Bitta o‘lchamning o‘rta kvadratik xatosi

$$m_{x_i} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{108{,}6}{12}} = 3{,}0 см.$$

4. Ikkita o‘lcham uchun o‘rta kvadratik xatolik

$$m_{\bar{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{108{,}6}{6}} = 2{,}1 см..$$

5. Nisbiy xatoliklar

$$\frac{m_{x_i}}{S_{ур.}} = \frac{3{,}0}{79000} = \frac{1}{26000};$$

$$\frac{m_{\bar{x}}}{S_{ур.}} = \frac{2{,}1}{79000} = \frac{1}{38000}.$$

10.2. TENG ANIQLIKKA EGA BO‘LMAGAN IKKILANGAN O‘LCHAMLARNING FARQI BO‘YICHA ANIQLIKNI BAHOLASH

Bir xil miqdorlarning x_i (i=1, 2,…, n) xar biri ikki martadan o‘lchangan, shuningdek o‘lchamlar har bir juftlikda teng aniqlikka ega, juftliklar bir-biri bilan esa teng aniqlikka ega emas. Farqlarni olamiz

$$d_1 = x_1^{/} - x_1^{//}$$

$$d_2 = x_2^{/} - x_2^{//}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d_n = x_n^{/} - x_n^{//} \qquad (10.13)$$

p_i bilan 1-chi juftlikdagi o‘lchamlarning vaznini belgilaymiz, ya’ni

$$p_i = p_{x_i^{/}} = p_{x_i^{//}}$$

(9.80) formula bo‘yicha farq d_i ning teskari vaznini topamiz:

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{x_i^{/}}} + \frac{1}{p_{x_i^{//}}} = \frac{2}{p_i}$$

va $$p_{d_i} = \frac{p_i}{2}. \qquad (10.14)$$

Miqdor d_i xar bir 1-chi farqning haqiqiy xatoligi hisoblanadi (sistematik xatolik yo‘q bo‘lsa). SHuning uchun formula (9.14) bo‘yicha (10.14) ni hisobga olgan holda vazn birligidagi o‘rta kvadratik xatoning qiymatini topamiz:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} \qquad (10.15)$$

Izlanayotgan miqdor x_i ning eng ishonchli qiymati $\bar{x}_i$ xuddi oddiy o‘rtacha arifmetik kabi topamiz:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i^{/} + x_i^{//}}{2}$$

Har bir miqdor uchun vazn $p_{\bar{x}_i}$ bo‘ladi,

$$p_{\bar{x}_i} = 2p_i \qquad (10.16)$$

$\bar{x}_i$ - qiymatlarning $m_{\bar{x}_i}$ o‘rta kvadratik xatolari formula bilan hisoblanadi:

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\bar{x}_i}}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \qquad (10.17)$$

Sistematik xatoliklarning o‘rtacha qiymati $\delta_{ур.яхл.}$ formula bilan aniqlanadi:

$$\delta_{ур.яхл.} = \frac{[pd]}{[p]} \qquad (10.18)$$

O‘xshash ifoda (10.12) formulani qo‘llash kriteriyasi (10.15) tengsizlik xizmat qiladi,

$$\left|\left[d\sqrt{p}\right]\right| \le 0{,}25\left[\left|d\sqrt{p}\right|\right] \qquad (10.19)$$

bu yerda $\left[\left|d\sqrt{p}\right|\right] = \left|d_1\sqrt{p_1}\right| + \left|d_2\sqrt{p_2}\right| + ... + \left|d_n\sqrt{p_n}\right|$.

Agar shart (10.19) bajarilmagan bo‘lsa, unda $\delta_{teng.yax..}$ hisoblanadi, keyin $d_i^{/} = d_i - \delta_{teng.yax.}$

va, oxiri,

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[pd^{/2}\right]}{2(n-1)}} \qquad (10.20)$$

Hisoblarni tekshirish: 1. $\left[pd^{/}\right] = -\beta[p]$; 2. $\left[pd^{/2}\right] = \left[pd^2\right] - \frac{[pd]^2}{[p]}$ (10.21)

10.2 Masala. To‘g‘ri va teskari yo‘nalish bo‘yicha nivelir yo‘llarining nisbiy balandliklar yig‘indisining farqlari va yo‘llar bo‘yicha stansiyalar soni berilgan. 10 ta stansiyadagi bitta yo‘lning va ushbu yo‘ldagi ikkilangan yo‘lning o‘rta kvadratik xatosini toping.

2.11-jadval

№	Farqlar d_i, (mm)	Stansiyalar soni, k_i	Vazn, $p_i = \frac{10}{k_i}$	$d_i * \sqrt{p_i}$	$p_i * d_i^2$
1	+2,4	9	1,11	+2,5	6,4
2	-6,2	36	0,28	-3,3	10,7
3	-2,2	16	0,62	-1,7	3,0
4	+1,3	31	0,32	+0,7	0,5
5	-0,6	37	0,27	-0,3	0,1
6	+2,1	14	0,71	+1,8	3,1
7	-4,0	23	0,43	-2,6	6,9
8	+1,4	22	0,45	+0,9	0,9
9	+7,5	21	0,48	+5,2	26,9
10	-1,3	19	0,53	-0,9	0,9
Σ			5.20 $\left[d\sqrt{p}\right]$ $\left[\left|d\sqrt{p}\right|\right]$	+11.1 <u>-8.8</u> +2.3 19.9	59.4

Echim. 1. Yo‘l qo‘yish me’zoni(kriteriyasi):

$0,25\left[\left|d\sqrt{p}\right|\right] = 0,25 * 19,9 = 5$; $[\, d_i \cdot \sqrt{p_i}\,]$=2,3.

Ya’ni $[\, d_i \cdot \sqrt{p_i}\,] \le 0,25\left[\left|d\sqrt{p}\right|\right]$ $(2,3 < 5)$,

Aniqlikni baholashda sistematik xatolik ta’sirini hisobga olmasa ham bo‘ladi.

2. 10 ta stansiyadagi bitta yo‘lning o‘rta kvadratik xatosi

$$\mu_{10} = \sqrt{\frac{\left[pd^2\right]}{2n}} = \sqrt{\frac{59,4}{20}} = 1,72\text{мм}.$$

3. Ikkilangan yo‘lning o‘rta kvadratik xatosi $\mu_{10(teng.)}$, ya’ni 10 ta stansiyadagi ikki yo‘lning o‘rtachasi

$$\mu_{10(teng)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left[pd^2\right]}{n}} = 1,21\text{мм}..$$

11. O‘LCHASHLARNI MATEMATIK ISHLAB CHIQISHDA XATOLIKLAR NAZARIYASINI QO‘LLASHNING EHTIMOLIY ASOSI

11.1. EHTIMOLLIK INTEGRALI

O‘lchashning tasodifiy xatoliklari ehtimolining taqsimot-zichlik funksiyasini bilish nafaqat nazariy, balki bir qator amaliy masalalarni Yechishga imkon beradi. Masalan, bir jinsli miqdorlarni kattaliklarni o‘lchashning o‘rta kvadratik xatosini bilsak, avvaldan berilgan yoki undan ortiqroq bo‘lgan tasodifiy xatoning sodir bo‘lish ehtimolini hisoblay olamiz. Xuddi shunday tasodifiy xatosi berilgan ehtimollikdan oshmaydigan chekli qiymatni topish mumkin. Ana shu masalalar echimining zaminida ehtimollik integrali yotadi. Uning yordamida o‘lchashni nazorat qilish uchun zarur bo‘lgan joiz qiymatlar (qo‘yimli qiymatlar) o‘rnatiladi va zaruriy aniqlikni ta’minlash prinsiplari belgilanadi.

$$P(a \le \varepsilon \le b) = \int_a^b f(\varepsilon) d\varepsilon \qquad (11.1)$$

(11.1) ifoda tasodifiy qiymatlarning f(ε) taqsimot funksiyasi orqali ularning a va b cheklangan oraliqda joylashish ehtimolini topish imkonini beradi. Normal taqsimot funksiyasi (3) aniq bo‘lganligi tufayli o‘lchash tasodifiy xatosining ma’lum bir oraliqqa /-a, +a/ to‘g‘ri kelish ehtimoli ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘lib, quyidagicha ifodalanadi:

$$P(-a \le \varepsilon \le +a) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\varepsilon^2/2\sigma^2} d\varepsilon \qquad (11.2)$$

Ushbu ehtimollikning son qiymatini topish uchun har gal o‘rta kvadratik chetlanishi (σ) bilish zarur. SHuning uchun ham (11.2) formuladan amalda foydalanish unchalik oson emas, ayniqsa formuladagi integralning qiymati har doim ham aniq emasligini inobatga olsak ya’ni u elementar funksiyalar orqali ifodalanmagan. Hisoblash jarayonini osonlashtirish maqsadida yangi o‘zgaruvchan argument t=ε/σ kiritamiz bu yerdan dε=σdt. Bunday amal me’yorlashtirish, t esa me’yoriy o‘zgaruvchi miqdor deyiladi. Natijada me’yoriy chek k=a/σ takroriylik koeffitsiyenti deyiladi. U a oraliqda nechta o‘rta kvadratik chetlanish mavjudligini ko‘rsatadi. Topilgan me’yoriy miqdorlarni formulaga qo‘yib, ehtimollikning yangi funksiyasini topamiz:

$$P(-k\sigma \le t\sigma \le +k\sigma) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} e^{-t^2/2} dt \qquad (11.3)$$

o‘zgaruvchanlarni σ ga qisqartirib, yakuniy ehtimollik integraliga erishamiz:

$$\Phi(\kappa) = P(-k \le t \le +k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^k e^{-t^2/2} dt \qquad (11.4)$$

Topilgan funksiya F(k) o‘rta kvadratik chetlanishga bog‘liq emas. Bu narsa uning amaliy tadbig‘ini osonlashtiradi. Masalan, o‘lchashning tasodifiy xatosini –k dan +l gacha bo‘lgan oraliqda bo‘lish ehtimolini topish mumkin. Lekin F(k) funksiyadagi integral ham, odatda integral ostidagi funksiyani darajali qatorga yoyib, uning qiymati hisoblanadi. Ba’zan hisobni ixchamlashtirish uchun darajali qator approqsimasiyalangan funksiya bilan almashtiriladi va yetarli darajadagi aniqlikda F(k) funksiya hisoblanadi. EHMda hisoblash uchun quyidagi aproqsimasiyalashtirilgan funksiya qulay:

$$\Phi(k) = 1 - e^{-k^2/2}\{(a_1E + a_2)E + a_3]E\,, \qquad (11.5)$$

bu yerda: $E=1/(1+a_4k)$; $a_1=0{,}74786$; $a_2=-0{,}09588$; $a_3=0{,}34802$; $a_4=0{,}33267$.

Hisoblash aniqligi beshinchi ishonchli raqam chegarasida bo‘ladi. Keltirilgan formula ehtimollik integralining ixtiyoriy qiymatini topishga imkon beradi. Tasodifiy xatoning [-a;+a] oraliqda paydo bo‘lishining ehtimoli S yuza bilan ifodalanadi. Egri chiziq bilan chegaralangan to‘liq ehtimollik birga teng va u berilgan majmuidagi tasodifiy miqdorning sodir bo‘lish ehtimolini ifodalaydi. Egri chiziqning chizgilangan qismi abssissa o‘qi bilan bo‘lgan oraliqda tasodifiy qiymatning [-a;+a] oraliqdan tashqarida sodir bo‘lish ehtimoliga teng.

Misol. O‘rta kvadratik m=±10sm bo‘lsa, tasodifiy xato a=16 sm dan oshmaslik ehtimoli topilsin. K=a/m=1,6, F(k)=0,89 demak, 100 o‘lchovdan 89 tasida tasodifiy xato 16 sm dan oshmaydi.

11.2. XATOLIKLAR NAZARIYASINING TO‘G‘RI VA TESKARI MASALALARI

Xatoliklar nazariyasini amalda qo‘llaganimizda prinsipial har xil bo‘lgan masalani tez Yechishga to‘g‘ri keladi. Ularni shartli ravishda to‘g‘ri va teskari masalalarga ajratamiz.

To‘g‘ri masalada alohida o‘lchovlarning xatosi orqali yakuniy natijalarning xatoliklarini o‘lchovlarning funksiyasi sifatida topamiz. Umumiy ko‘rinishida masala quyidagicha bo‘ladi: har biri $m_1,\ m_2,\ \ldots\ldots,m_n$; o‘rtacha xato bilan o‘lchangan $l_1,\ l_2,\ \ldots\ldots,l_n$; mustaqil qiymatlar mavjud bo‘lib hisoblash natijasida funksiyalarning t qiymatlari

$$y_i=F_i(l_1, l_2,\ \ldots\ldots,l_n) \qquad (11.6)$$

topilgan bo‘lsa, ularning o‘rta kvadratik xatosini umumiy ko‘rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$M_{yi}=F_i(m_1, m_2,\ \ldots\ldots,m_n) \qquad (11.7)$$

M_{yi} ning son qiymatini hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalaniladi:

$$M_y^2 = f_1^2 m_1^2 + f_2^2 m_2^2 + ... + f_n^2 m_n^2 \qquad (11.8)$$

To‘g‘ri masala joyi qiymatlarni avvaldan aniqlash bilan bog‘liq bo‘lgan masofadir. Bu holda o‘lchangan qiymatlarning to‘g‘riligini nazorat qilish uchun y_i ning (11.8) shunday qiymatlari hisoblanadiki, ular uchun yoki haqiqiy yoki avvaldan juda aniq o‘lchangan qiymatlar ma’lum, bo‘ladi. Misol tariqasida, yopiq ko‘p burchaklarda ichki burchaklar va koordinatalar orttirmalarining yig‘indilarini keltirish mumkin:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 180^0 (n-2); \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0; \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i = 0. \qquad (11.9)$$

Xatoning muqarrarligi tufayli bu shartlar to‘liq bajarilmaydi. Natijada xatoliklar paydo bo‘ladi $w_{\beta i}$, w_{xi}, w_{yi}. Tabiiyki, xatoliklarning qiymatlari bir xil sharoitda tasodifiy xatlarning o‘lchamlariga bog‘liq bo‘ladi. Lekin xatoliklarda qo‘pol yanglishishlar ham mavjud bo‘lishi mumkin.

Ularni nazorat qilish jarayonida aniqlash zarur. Buning uchun amaliy xatoliklar joiz qiymatlar bilan taqqoslangan. Agarda shunda joiz qiymatlar aniqlangan bo‘lsa ulardan kichik bo‘lgan xatoliklar qo‘pol yanglishishdan holi bo‘ladi. Aks holda tahlildan so‘ng ba’zi bir o‘lchovlar takrorlanadi. Joiz qiymatlarni aniqlash prinsipini yopiq teodolit poligoni misolida ko‘ramiz. Bu hol uchun:

$$y = F(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \qquad (11.10)$$

o‘lchangan burchaklarning xatosini bilgan holda burchaklar yig‘indisining o‘rtacha xatosini topish mumkin. O‘z navbatida, M_{yi} ning qiymati bu xatolikning o‘rta kvadratik qiymatdir. Joiz xatolik ushbu qiymatni inobatga olgan holda o‘rnatiladi. $w_{\beta k} = k\mu_y$, bu yerda k- ehtimoliy integralining takroriylik koeffitsiyenti. Ushbu koefissientining son qiymatini tanlashni quyidagicha idroq etish mumkin. Joiz qiymat ishonchliroq bo‘ladi kichik k lar uchun. Ammo, bu holda ko‘pgina to‘g‘ri o‘lchangan o‘lchovlardan voz kechishga to‘g‘ri keladi. Masalan. K=1 uchun tasodifiy xatoning normal taqsimot funksiyaga binoan 32% to‘g‘ri o‘lchangan qiymatlar tashlab yuboriladi. Ular orasida qo‘pol yanglishish ham bo‘lishi mumkin. Shunday qilib k=1 deb olsak, mehnat unumdorligini 32% ga pasaytiramiz.

Xuddi shunday tahlildan kelib chiqib, k=2 bo‘lsa, 5% to‘g‘ri o‘lchangan qiymatlar tashlab yuboriladi va nihoyat k=3 bo‘lsa, o‘lchovlarning faqat hisobda ishtiroq etmaydi. Ammo, oxirgi holda uch karra o‘rta kvadratik xatoga yaqin bo‘lgan qo‘pol xatolar qo‘yimli bo‘lib qolish ehtimoli hosil bo‘ladi. Marksheyderlik amaliyotida k=2 va geodeziyada esa k=2,5 qabul qilingan va tashlab yuboriladigan to‘g‘ri qiymatlar 1% ga etkaziladi, ammo o‘lchami katta bo‘lgan qo‘pol o‘lchash jarayonida yo‘l qo‘yilmaydi.

Teskari masala yordamida alohida o‘lchovning o‘rtacha xatosi o‘rnatilib, o‘lchangan qiymatlar funksiyasining ma’lum aniqligi ta’minlanadi. Marksheyderlik ishlaridagi yunaltirish-tutashtirish masalalarini Yechish va uchrashadigan kovjoylarning loyihalashda ana shunday zarurat paydo bo‘ladi.

Masalan, kon lahimlarining kovjoylarini tutashuvida har bir muayyan hol uchun ishlab chiqarish zaruratidan kelib chiqib, avvaldan tutashma aniqligining joiz qiymati qabul qilinadi va u marksheyderlik xizmati tomonidan amalga oshirilishi shart.

Ushbu joiz qiymat chekli xato sifatida qabul qilinadi, u lahimlar o‘qining tutashganlik xatoligidan oshmasligi kerak.

O‘rta kvadratik va chekli xatolar o‘zaro quyidagicha bog‘liqlikka ega:

$$M_{ур} = \frac{M_{чек}}{k} \qquad (11.11)$$

Koeffitsiyent k joiz bo‘lgan xavf darajasini inobatga olgan holda tanlanadi. Agar K=1 bo‘lganda 100 tasodifdan 32 tasida lahimlar o‘qlarining tutashishidagi xatolik joiz qiymatdan ortiq bo‘lish xavfi bor. K=2 bo‘lganda bu xavf 100 tadan 5 tasodifda mavjud bo‘ladi.

Marksheyderiya amaliyotida koeffitsiyent k=3 ga teng qilib, juda ham muhim bo‘lganda xatto to‘rtga teng qilib olinadi. K=3 bo‘lganda tutashma xatoligining joiz qiymatdan chetlanish ehtimoli 1000 dan 3 tasida mavjud bo‘ladi. K=4 da esa bu hol 100000 dan 6 tasida ro‘y berishi mumkin.

Yakuniy natijaning o‘rta kvadratik xatosini shu tariqa qabul qilib maxsus avvaliy hisob yordamida har bir o‘lchash aniqligi shunday belgilanadiki u istiqbolda belgilangan xatolikka erishishga imkon yaratadi.

Teskari masalani yechish

$$M_{yi}=F_i(m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n) \qquad (11.12)$$

Formulaga asoslangan. Bunda har bir muayyan hol uchun $M_u = M_{ур} = \frac{M_{чек}}{k}$ xatoliklar aniq. Izlanadigan qiymat o‘lchashning o‘rta xatosi bo‘ladi: $m_j(j=1,n)$. Har bir tenglamada bir nechta n noma’lum bo‘lganligi sababli, teskari masala yagona echimga ega emas. Teng ta’sirli prinsipidan foydalangan holda, qo‘shimcha shartlar o‘rnatib bir jinsli emaslikning echimini topish mumkin.

Xususiy holda, har bir m_j xatolikning M_u ga ta’sirini o‘zaro bir xil qabul qilib, soddalashtirilgan echim orqali izlanayotgan xato qiymati topiladi. Lekin, topilgan natija amaliyotda qo‘llash uchun noqulay. Darhaqiqat, agar shu tarzda teodolit poligonidagi burchak va masofalarning zaruriy aniqligi topiladigan bo‘lsa, unda hisob natijasiga qaraganda har bir burchak va masofani bir-biridan farqli bo‘lgan uz xatosi bilan o‘lchash zarur bo‘lardi. Bu esa amaliy ijro uchun noqulay.

Amalda guruhlangan o‘lchovlarning teng ta’sir prinsipini qo‘llash maqsadga muvofiq, ya’ni M_u xato bir jinsli o‘lchovlardan iborat guruhlarga teng tarqatib beriladi. Masalan, ko‘pincha burchak va masofa o‘lchovlarining teng ta’sirlik bo‘lishligi inobatga olinadi. Guruh uchun xato topilgandan so‘ng guruhdagi o‘lchovlarning teng aniqlikli deb qabul qilib mavjud variantlarni birma-bir qo‘llash orqali ushbu o‘lchovlarning o‘rta xatosi topiladi. Hisobning boshida guruh uchun o‘lchovning o‘rta kvadratik xatosi belgilanib guruh uchun kutilayotgan xatoligi hisoblanadi. Natijaga qarab o‘lchashning belgilangan o‘rta xatosi tuzatiladi va hisob qonikarli echimga ega bo‘lmago‘nga qadar davom ettiriladi.

Teskari masalani yechishning muayyan usullari marksheyderiya fanining maxsus bo‘limlarida o‘rganiladi.

11.3. O‘LCHASH NATIJALARINING INTERVALLI BAHOSI

Yagona o‘lchov qiymatlarining qatorini matematik ishlab chiqish natijasida o‘rta arifmetik qiymat X topiladi. U noma’lum bo‘lgan matematik kutilmaning statistik bahosi deb qabul qilingan. Dispersiyaning noma’lum qiymati va u bilan bog‘liq bo‘lgan o‘rta kvadratik chetlanishning bahosi sifatida o‘lchovning hisoblangan o‘rta kvadratik xatosi m_x qo‘llaniladi. Bu xil baholarning har biri yagona qiymat bilan ifodalanganligi uchun nuqtaviy baho deyiladi.

Matematik statistikada nuqtalar oralig‘i interval J uchun baholash keng tarqalgan. U belgilangan ehtimollik R_o bilan o‘lchangan qiymatning haqiqiy miqdorini qoplaydi. Shunday oraliq

$$J = \left[\bar{x} - km_{\bar{x}}; \bar{x} + km_{\bar{x}}\right] \qquad (11.12)$$

ishonchli oraliq R_o ehtimollik esa ishonch ehtimolligi yoki ishonchlilik deyiladi. Koefisient k tanlangan ishonch ehtimoli R_o orqali ehtimollik integralidan topiladi. Masalan, R_o=0,90 bo‘lganda ishonch oralig‘i $J = \left[\bar{x} - 1{,}65m_{\bar{x}}; \bar{x} + 1{,}65m_{\bar{x}}\right]$ bo‘ladi. Xuddi shunday $\left[\bar{x} = 21{,}621\text{вa}m_{\bar{x}} = 0{,}018\right]$ bo‘lganda, oraliq chegarasini topsak, J=[21.519; 21,651].

X ning noma’lum qiymati 0,90 ehtimollik bilan topilgan 21,519≤x≤21,651oraliqda yotadi. Ko‘rinib turibdiki nuqtaviy baho interval bahoga zid emas, lekin aniq o‘lchovga ega bo‘lganligi tufayli uni marksheyderlik o‘lchovlarni ishlab chiqishda qulayligi bor. Ba’zan o‘lchovlarni matematik ishlab chiqishda nuqtaviy baho$\left[\bar{x} \pm m_{\bar{x}}\right]$ ko‘rinishda yoziladi, ya’ni, kurilgan misol uchun 21,621±0,018 m.

11.4. SONI CHEKLANGAN O‘LCHOVLARNING ANIQLIGINI BAHOLASH

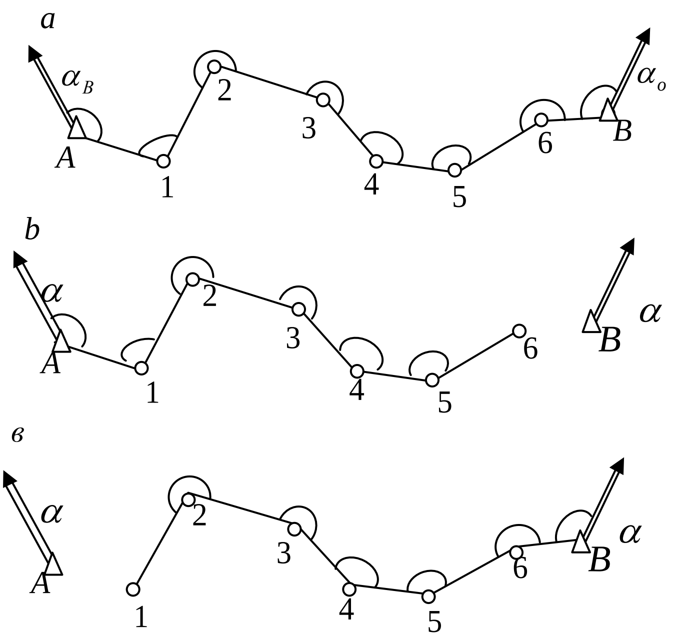
Me’yoriy tasodifiy qiymat t=ε/σ=ε/m normal taqsimotga ega, agar σ~m ishonchli ya’ni, yetarlicha ko‘p bo‘lgan o‘lchovlardan topilgan bo‘lsa. O‘lchovlar soni cheklangan holda ushbu qiymatning taqsimoti sezilarli darajada n ga bog‘liq bo‘lib qoladi, chunki o‘rta kvadratik xatoning xatoligi

$$m_{(m)} = m / \sqrt{2n} \qquad (11.13)$$

Bunday hollarda t ning qiymati Styudent taqsimotining koefisienti –s maxsus jadvalllarda ishonch ehtimollari va ortiqcha o‘lchovlar soni r uchun berilgan. Ma’lumki, matematik statistikada ortiqcha o‘lchov soni ozodlik darajasi deyiladi. S koefisienti k koefisientga o‘xshash bo‘lib, o‘lchovlar cheklangan hollar uchun $J = \left[\bar{x} - cm_{\bar{x}}; \bar{x} + cm_{\bar{x}}\right]$ ishonch chegarasini teng aniqlashda ishtiroq etadi. Aytaylik $\lfloor m_{\bar{x}} \rfloor$ ning qiymati r=6 bo‘lganda topilgan bo‘lsin R_o=40 uchun s=1,94 ko‘rilgan misol uchun ishonchli chegara J=[21,586; 21,650] bo‘ladi. Topilgan oraliqda X ning haqiqiy qiymati 0,90 ehtimollik bilan mavjud. Taqqosdan ko‘rinib turibdiki, o‘lchovlar soni kamaygan sari ishonch chegarasi kengayadi. Styudent taqsimoti o‘rta kvadratik xatolik cheklangan o‘lchovlar orqali topish kerak bo‘lganda muhim ahamiyatga ega. Ko‘p hollarda marksheyderlik – geodezik o‘lchovlar ba’zi bir shart-sharoitlar ta’sirida bajariladi, shu sababdan m xatolik ma’lum bir cheklikda ishonchlik bo‘ladi va konkret sharoitlar uchun maxsus tadqiqotlar tufayli normal taqsimotdan foydalangan holda topiladi.

11.5. ENG KICHIK KVADRATLAR PRINSIPINI ASOSLASH

Xatolikli qo‘shimcha o‘lchovlar yordamida qiymati noma’lum bo‘lgan natijani aniqlash, umuman bir echimli masala emas, balki ma’lum bir ma’noda, noaniq masalaladir ham. Misol tariqasida A va B nuqtalari orasidagi boshlang‘ich va oxirgi tomonlari triangulyasiya punktlariga tayangan teodolit poligonini ko‘ramiz. Poligonda burchaklar va masofalar o‘lchangan.



Agar A punktdan boshlab barcha nuqtalarning koordinatalarini hisoblasak B nuqtaning koordinatalari va α_{ox} direksion burchakni topamiz. Agarda o‘lchangan burchaklar va masofalar xatosiz bo‘lsa, unda hisoblangan X_B, Y_B, α_{ox} lar o‘zlarining berilgan qiymatlari bilan bir xil chiqadi. Ammo xato bo‘lishligi muqarrarligi tufayli uchta xatolik paydo bo‘ladi: $w_x = X_B^x - X_B^Б$; $w_y = Y_B^x - Y_B^Б$; $w_\alpha = \alpha_{ox}^x - \alpha_{ox}^Б$. Ushbu xatoliklarni taqsimlash masalasini yechish kerak bo‘ladi. Ya’ni qaysi qiymatlarga taqsimlash kerak: hisoblanganmi yoki o‘lchanganmi, qanday taqsimlash kerak? Barcha o‘lchovlarga baravarigami yoki ma’lum bir prinsip asosidami? Ehtimol boshqacha echimlar ham mavjuddir: ya’ni nuqtalarning aniqlanayotgan koordinatalarini ikki marotaba A nuqtasidan va V nuqtasidan boshlab hisoblash kerakdir. Bunda qo‘sh qiymatlarni o‘rtalash masalasi paydo bo‘ladi.

Lekin, oddiy o‘rtalatish to‘g‘ri bo‘lmaydi, chunki 1-nuqtaning koordinatalari boshqalarga nisbatan ishonchliroq topilgan. Ixtiyoriy yo‘l bilan hisoblanganda ham bir xil natijaga erishamiz. Bunday echimlar ko‘p bo‘lishi mumkin. Ulardan bir xili maqbul, ba’zilari nomaqbul bo‘ladi. Natijada topilishi kerak bo‘lgan qiymatga eng yaqin va ishonchli bo‘lgan qiymatni izlash masalasi kelib chiqadi. Aniq bo‘lmagan haqiqiy qiymat X_i ga eng yaqin bo‘lgan son X_i ishonchli qiymat bo‘la oladi. Optimal baholash masalasining umumiy qo‘yilishida, ya’ni ko‘p qiymatli echim sharoitida ba’zi bir noma’lum parametrlarning $T_j\left(j=\overline{1,t}\right)$ ishonchli qiymatini mos tanlangan qiymatlar $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ ni o‘lchash natijasida topish matematik statistikada haqiqatga yaqin funksiya bilan bog‘liqdir.

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; T_1, T_2, ..., T_t) = f(x_1) f(x_2) .... f(x_n) \qquad (11.14)$$

bu yerda $f(x_i)$-x_i tasodifiy qiymatlar taqsimot funksiyasining zichligi bo‘lgan barcha x_i, ….. x_n tasodifiy qiymatlar to‘plamining taqsimot funksiyasi zichligiga mos keladi.

Ma’lumki, o‘lchangan qiymatlar x_i uchun zichlik funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$f(x_i) = \frac{1}{m_i\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x_o - x_i)^2/\left(2m_i^2\right)} \qquad (11.15)$$

bu yerda x_i o‘lchangan miqdorlarning haqiqiy qiymati, m_i o‘lchashning o‘rta kvadratik xatosi (11.15) ga (11.14)ni qo‘ysak hosil bo‘ladi:

$$L(x_i, T_i) = \frac{1}{m_1 m_2 .....m_n (\sqrt{2\pi})^2} e^{-1/2\sum[\left(x_o - x^2{}_i\right)/\left(2m_i^2\right)]} \qquad (11.16)$$

x_i – haqiqiy qiymat aniq bo‘lmaganligi sababli T_i parametrini optimal baholash uchun x_i ning qiymatini shunday tanlash kerakki, ularning majmui (11.16) funksiya bilan ifodalangan ehtimolikning eng zich joyiga (chegarasiga) mos kelsin. Buning uchun (11.16) funksiyaning maksimumini topib x_i ni x_i ga almashtirish kifoya. Bu narsa quyidagi shartga olib keladi:

$$\sum \frac{\left(x_i - \overline{x_i}\right)^2}{m_i^2} = \min \tag{11.17}$$

$x_i - \overline{x_i} = v_i, \frac{1}{m_i^2} = P_i$ belgilash kiritsak,

R_i – o‘lchangan miqdorning vazni bo‘ladi. U bajarilgan o‘lchovga bo‘lgan ishonch darajasini belgilab beradi. Darhaqiqat, o‘rta kvadratik xato qanchalik kichik bo‘lsa ushbu o‘lchov shunchalik ishonchli bo‘ladi.

Qabul qilingan belgilashni inobatga olgan holda Gauss belgilashida (11.17) formula quyidagicha yoziladi:

$$\sum_1^1 \frac{v_i^2}{m_i^2} = \sum_1^1 P_i v_i^2 = [pvv] = \min \tag{11.18}$$

Shunday qilib, xatoliklar nazariyasining /MGUMICH ning/ poydevor asosi bo‘lgan eng kichik kvadratlar tushunchasi hosil bo‘ldi. U topilishi kerak bo‘lgan T_i parametrning ishonchli qiymatini aniqlash imkonini yaratib beradi. Ishonchli qiymatni topish jarayoni GUMICHda eng kichik kvadratlar usuli bo‘yicha tenglash deyiladi. v_i ning qiymatini tenglashdagi tuzatmalar yoki ehtimoliy /ishonchli/ tuzatmalar deyishadi. Ular normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadilar. Bunday tenglashni ba’zida qat’iyan tenglash deyishadi.

11.6. KO‘P MAROTABA O‘LCHANGAN YAGONA QIYMATNI QAT’IYAN TENGLASH

Qat’iyan tenglash masalasi quyidagi tartibda echiladi: Aytaylik $x_1,x_2,\ldots..x_n$ lar X qiymatning noteng aniqlikdagi o‘lchamlari bo‘lib, ularning o‘rta kvadratik xatoliklari $m_1,m_2,\ldots..m_n$ bo‘lsin.

O‘lchangan miqdorning eng ishonchli qiymati $(\overline{x})$ni eng kichik kvadratlar prinsipini qo‘llab topamiz.

Uning uchun qatorlar tuzamiz:

Tuzatma

$$\begin{array}{ll} v_1 = x_1 - \overline{x} & P_1 = 1/m_1^2 \\ v_2 = x_2 - \overline{x} & P_2 = 1/m_2^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = x_n - \overline{x} & P_n = 1/m_n^2 \end{array} \tag{11.19}$$

[Pvv] yig‘indini topish uchun har bir tenglamani kvadratga ko‘tarib o‘zining vazniga ko‘paytiramiz.

$$P_1 v_1^2 = P_1 x_1^2 - 2P_1 x_1 \overline{x} + P_1 \overline{x}^2;$$

$$P_2 v_2^2 = P_2 x_2^2 - 2P_2 x_2 \bar{x} + P_2 \bar{x}^2; \qquad (11.20)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_n v_n^2 = P_n x_n^2 - 2P_n x_n \bar{x} + P_n \bar{x}^2;$$

Tenglamalarning o‘ng va chap tomonlarini jamlab Gauss belgilashini qo‘llaymiz:

$$[Pvv] = [Pxx] - 2\bar{x}[Px] + \bar{x}^2 [P] \qquad (11.21)$$

bu yerda $[Pvv]$ va $(\bar{x})$ noaniq qiymatlar. Ammo $\sum_1^1 \frac{v_i^2}{m_i^2} = \sum_1^1 P_i v_i^2 = [pvv] = \min$ shartiga ko‘ra (11.21) tenglamaning $(\bar{x})$ bo‘yicha olingan xususiy hosilasini nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial [Pvv]}{\partial \bar{x}} = -2[Px] + 2\bar{x}[P] = 0 \qquad (11.22)$$

bu yerdan:

$$\bar{x} = \frac{[Px]}{[P]} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots\dots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \dots\dots\dots P_n} \qquad (11.23)$$

$(\bar{x})$ - o‘rta vaznli, o‘rtacha vazniy, umumiy arifmetik o‘rtalik deyiladi.
(11.23) formula orqali bajarilgan hisob har xil aniqlikdagi yagona qiymat o‘lchovlarini qat’iyan tenglashning oddiy holidir.

Agar o‘lchangan qiymatlarning vaznlarini ixtiyoriy o‘lchamli doimiy son k uf ko‘paytirsak $(\bar{x})$ miqdor o‘zgarmaydi, ya’ni

$$\bar{x} = \frac{[Px]}{[P]} = \frac{k(P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots\dots + P_n x_n)}{k(P_1 + P_2 + \dots\dots\dots P_n)} \qquad (11.24)$$

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: aniqligi teng bo‘lmagan o‘lchov natijalarini ishlab chiqishda ularning vaznlarini mutlaq qiymatini emas, vaznlar nisbatini hisobga olish kerak. Mazkur xulosani noteng aniqlikdagi o‘lchovlarni ishlab chiqishning umumiy holiga ham tadbiq etish mumkin. Bu esa o‘z navbatida vaznlarni hisoblashning qulay imkonini yaratadi. Masalan, barcha vaznlarning qiymatini biror bir o‘lchov xatoligining kvadratiga ko‘paytirish orqali hisoblash:

$$P_1 = \frac{m_1^2}{m_1^2} = 1; P_2 = \frac{m_1^2}{m_2^2}; \dots\dots, P_n = \frac{m_1^2}{m_n^2} \qquad (11.25)$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, o‘lchangan qiymatning bittasining vazni birga teng bo‘ladi. Bu holda m_1 xato-vazn birligining o‘rta kvadratik xatosi deyiladi va μ bilan belgilanadi. Umumiy holda quyidagi tenglik to‘g‘ri bo‘ladi:

$$P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} \qquad (11.26)$$

Ko‘p hollarda μ sifatida har qanday qiymatni tanlash mumkin. Aynan bir aniq qiymatning o‘rtacha xatosiga teng bo‘lishi shart emas. Unda μ vazni birga teng bo‘lishi mumkin bo‘lgan soxta o‘lchovning o‘rta xatosi bo‘ladi. Hisobni takomillashtirish maqsadida ushbu uslubdan tez-tez foydalanishadi.

Biz ko‘rgan qat’iyan tenglash o‘lchangan yagona qiymat qatorining vaznlar o‘zaro teng bo‘lmagan holiga tegishlidir. Agar o‘lchash aniqligi teng bo‘lsa,

$m_1=m_2=\dots\dots\dots=m_n=m$ yoki $R_1=R_2=\dots\dots=R_n=R$,

Unda μ=m va R=1 bo‘ladi. Teng aniqlikli o‘lchashlar uchun eng kichik kvadratlar sharti [vv]=min ko‘rinishga ega bo‘ladi va tanlangan qiymat $(\bar{x})$ quyidagicha hisoblanadi. Agar R=1 ni o‘rniga qo‘ysak:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n} \tag{11.27}$$

Shunday qilib, aniqligi teng bo‘lgan o‘lchashda o‘rta arifmetik qiymat $(\bar{x})$ eng ishonchli qiymatdir. Ba’zan $(\bar{x})$ ni oddiy arifmetik o‘rtacha qiymat deyishadi.

Hisobni nazorat qilish uchun foydalaniladigan tengliklarni /tenglamalarni/ keltirib chiqarishni ko‘ramiz.

Noteng aniqlikdagi o‘lchashlar tuzatmalari qatorini tuzamiz:

$$\begin{array}{ll} \text{Tuzatma} & \text{vazn} \\ v_1 = x_1 - \bar{x} & P_1 \\ v_2 = x_2 - \bar{x} & P_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ v_n = x_n - \bar{x} & P_n \end{array} \tag{11.28}$$

Tenglamalarning o‘ng va chap tomonlarini o‘zlariga mos bo‘lgan vaznlarga ko‘paytiramiz:

$$\begin{array}{l} P_1 v_1 = P_1 x_1 - P_1 \bar{x} \\ P_2 v_2 = P_2 x_2 - P_2 \bar{x} \\ \dots\dots\dots\dots \\ P_n v_n = P_n x_n - P_n \bar{x} \end{array} \tag{11.29}$$

Topilgan /yozilgan/ tenglamalarni jamlab, quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$[Pv] = [Px] - [P]\bar{x} \tag{11.30}$$

$(\bar{x})$ning qiymatini o‘rniga qo‘ysak: [Pv]=0 bo‘ladi. Teng aniqlikli o‘lchovlar uchun [v]=0. Hosil bo‘lgan tenglamalar /tengliklar/ yagona miqdor o‘lchovi qatorining hisobi to‘g‘riligini nazorat qilish uchun foydalaniladi. Ular $(\bar{x})$ning tenglangan qiymatini topishni va tuzatmalarni $v_i = x_i - \bar{x}$ hisoblashni nazorat qilish imkonini beradi. $(\bar{x})$ ning qiymatini topishni qulaylashtirish uchun quyidagi usul tez-tez qo‘llaniladi. O‘lchangan x_i qiymatlardan taxminiy x_0 qiymat shunday tanlanadiki, /$\delta_i=x_i-x_0$/ ayirmaning qiymati iloji boricha kichik bo‘lsin. Unda $x_i=x_0 + \delta_i$ni (48) ifodaga qo‘ysak:

$$\bar{x} = \frac{P_1(x_0 + \delta_1) + P_2(x_0 - \delta_1) + \dots\dots + P_n(x_0 + \delta_n)}{[P]} \tag{11.31}$$

murakkab bo‘lmagan almashtiruvdan keyin

$$\bar{x} = x_0 + \frac{P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + ... + P_n\delta_n}{[P]} = x_0 + \frac{[P\delta]}{[P]} \qquad (11.32)$$

ga ega bo‘lamiz.

Shunday qilib δ ayirmadan o‘rta vazniy qiymatni topib taxminiy qiymat x_0 ga qo‘shsak yetarli bo‘lar ekan. Shuni ham qayd qilmoq kerakki x_0 ni ba’zan soxta nom deyishadi.

Teng aniqlikdagi o‘lchovlar uchun P_i=1 unda

$$\bar{x} = x_0 + \frac{\delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_n}{[n]} = x_0 + \frac{[\delta]}{[n]} \qquad (11.33)$$

bo‘ladi. Yagona miqdor o‘lchovi qatorining ishlab chiqilishida uning aniqligini baholash uchun [Pvv] yoki [vv] yig‘indilaridan noteng va teng aniqlikdagi o‘lchovlar uchun mos ravishda foydalanish mumkin. Endi ushbu yig‘indilar hisobini nazorat qilish imkonini beradigan nisbatlarni topamiz.

Uchta qator tuzamiz:

Tuzatmalar	ayirmalar	vaznlar	
$v_1 = x_1 - \bar{x}$	$\delta_1 = x_1 - x_0$	P_1	
$v_2 = x_2 - \bar{x}$	$\delta_2 = x_2 - x_0$	P_2	(11.34)
....	....	.....	
$v_n = x_n - \bar{x}$	$\delta_n = x_n - x_0$	P_n	

Birinchi qatordan uning ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib P_i vaznga ko‘paytirib, natijani jamlasak topamiz:

$$[Pxx] = [Pxx] - 2[Px]\bar{x} + [P]\bar{x}^2 \qquad (11.35)$$

(48)dagi $\bar{x} = \frac{[Px]}{[P]}$ ni (11.35) ga qo‘yib, qisqartirgandan keyin ega bo‘lamiz:

$$[Pvv] = [Pxx] - \frac{[Px][Px]}{[P]} \qquad (11.36)$$

Xuddi shunga o‘xshab boshqa yig‘indilarni ham topamiz:

$$[Pv\delta] = [Pxx] - [Px]\bar{x} - [Px]x_0 + [P]\bar{x}x_0 \qquad (11.37)$$

$\bar{x}$ ni qiymatini o‘rniga qo‘yib, qisqartirgandan keyin hosil bo‘ladi:

$$[Pv\delta] = [Pxx] - \frac{[Px][Px]}{[P]} \qquad (11.38)$$

bu yerdan xulosa qilishimiz mumkin:

$$[Pvv] = [Pv\delta] \qquad (11.39)$$

Shunday qilib $[Pvv]$ yig‘indining to‘g‘riligini nazorat qilish uchun u ikki marotaba hisoblanadi. Agar, natijalar aniqlik chegarasida o‘zaro yaqin bo‘lsa. Demak, ular to‘g‘ri hisoblangan. Aniqligi teng bo‘lgan o‘lchovlarda $[vv] = [v\delta]$ tenglik o‘rinli hisoblanadi.

12. O‘LCHASH XATOLIKLARINING TO‘PLANISH QONUNI

12.1. MUSTAQIL MANBALI XATOLIKLARNING O‘ZARO TA’SIRI

O‘lchashning tasodifiy xatoligini mustaqil manbalar bilan bog‘liq bo‘lgan elementlar xatoliklarning algebraik yig‘indisi sifatida keltirish mumkin. Bunda yagona miqdorning o‘lchashdagi tasodifiy xatoliklar qatori quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \Delta_{11} \pm \Delta_{12} \pm .... \pm \Delta_{1k} \\ \varepsilon_2 &= \Delta_{21} \pm \Delta_{22} \pm .... \pm \Delta_{2k} \\ &.. \\ \varepsilon_n &= \Delta_{n1} \pm \Delta_{n2} \pm .... \pm \Delta_{nk} \end{aligned} \qquad (12.1)$$

bu yerda ε_i- o‘lchashning tasodifiy xatoligi

Δ_{ij}- tasodifiy xatoliklarning elementar tashkil etuvchilari

n- o‘lchovlar soni

k- elementar xatoliklar mustaqil manbalarning soni.

Birgina o‘lchashning o‘rta kvadratik xatoligini (14) formuladan topish uchun (12.1) ifodadagi har bir tenglamani kvadratga ko‘tarib, qulaylik uchun k=2 deb olamiz, ya’ni xatoliklarning faqat ikkita manbasini ko‘rish bilan cheklanamiz, natija quyidagicha bo‘ladi

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\varepsilon_1 &= \Delta_{11}\Delta_{11} \pm \Delta_{12}\Delta_{12} \pm .... \pm 2\Delta_{11}\Delta_{12} \\ \varepsilon_2\varepsilon_2 &= \Delta_{21}\Delta_{21} \pm \Delta_{22}\Delta_{12} \pm .... \pm 2\Delta_{21}\Delta_{22} \\ &.. \\ \varepsilon_n\varepsilon_n &= \Delta_{n1}\Delta_{n1} \pm \Delta_{n2}\Delta_{n2} \pm .... \pm 2\Delta_{n1}\Delta_{n2} \end{aligned}$$

bu tenglamalarni jamlab topilgan yig‘indini /n/ ga bo‘lsak hosil bo‘ladi.

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{[\Delta\Delta]_1}{n} = \frac{[\Delta\Delta]_2}{n} \pm \frac{2[\Delta_1\Delta_2]}{n} \qquad (12.2)$$

Matematik statistika fanida quyidagi teorema isbot qilingan:

«Mustaqil tasodifiy miqdorlar ko‘paytmasining o‘rta qiymati ko‘paytuvchilar o‘rta qiymatlarning ko‘paytmasiga teng». SHuning uchun ham ta’kidlash mumkin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta_1\Delta_2]}{n} = 0$$

Shunday qilib (14) formulaga binoan (11.2) ifodadan topamiz

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 \qquad (11.3)$$

bu yerda m- birgina o‘lchovning umumiy o‘rta kvadratik xatoligi;

m_1 va m_2- shu o‘lchovning har xil manbalardan bo‘lgan xatoliklari. Demak, xatoliklarning k-mustaqil manbalari uchun yozish mumkin.

Masalan, nivelir bilan nisbiy balandlik o‘lchashda xatoliklarning quyidagi manbalari ishtiroq etadi: reykadan sanoq olish xatoligi, asbob ko‘rish o‘qining gorizontal holatga keltirish xatoligi. Bu manbalar o‘zaro mustaqil bo‘lib, birining holati ikkinchisiga ta’sir ko‘rsatmaydi. Har bir manbaning nisbiy balandlikni topish aniqligiga ta’sirini bilsak (11.3) ifodaga binoan umumiy xatolikni topsak bo‘ladi

$$m_n^2 = m_o^2 + m_y^2,$$

bu yerda m_o- nisbiy balandlikning reykadan sanoq olishning noaniqligi tufayli sodir bo‘lgan o‘rtacha xatoligi;

m_y- nisbiy balandlikning asbob ko‘rish o‘qining nogorizontalligi tufayli sodir bo‘lgan o‘rtacha xatoligi.

(67) ifoda har bir manbaning umumiy xatolikka bo‘lgan ta’sir darajasini aniqlash imkoniyatini beradi, buning ahamiyati nihoyatda muhim.

12.2. O‘LCHANGAN MIQDORLAR FUNKSIYASINING O‘RTA KVADRATIK XATOLIGI

Biz shu vaqtgacha ko‘rgan xatoliklar alohida o‘lchovlarga ta’luqli edi. Odatda o‘lchash natijalaridan amaliy mohiyatli bo‘lgan miqdorlarni topish uchun foydalaniladi. Masalan, joy uchastkasining eni va bo‘yi o‘lchanib yuzasi topiladi yoki teodolit poligonlarida masofa va burchak o‘lchanib nuqtalarning koordinatalari hisoblanadi. Bunday hollarda hisoblangan miqdorlarning xatoligi o‘lchangan kattaliklarning xatoliklariga bog‘liq bo‘ladi. Umumiy holda o‘lchangan miqdorlar funksiyasining o‘rta kvadratik xatoligini (M_u) topish uchun

$$Y=F(l_1,l_2,\ldots\ldots,l_n) \qquad (11.4)$$

Funksiyani ko‘ramiz. Bu yerda l_i- har xil n bevosita o‘lchovlar natijasi. Bunda har bir alohida o‘lchovning o‘rta kvadratik xatoligi $m_1,m_2,\ldots\ldots,m_n$ aniq deb qabul qilinadi. (11.4) ifodadagi funksiyaning haqiqiy qiymatini topish uchun o‘lchangan qiymatlarni (l_i) ularning haqiqiy qiymatlari (L_i) bilan almashtirish kifoya

$$Y=F(L_1,L_2,\ldots\ldots,L_n) \qquad (11.5)$$

Unda baholanayotgan (11.4) funksiyaning tasodifiy xatoligi

$$E=y-Y \qquad (11.6)$$

teng bo‘ladi.

Aytaylik. Har bir L_i kattalik k marotaba o‘lchangan, ya’ni o‘lchovlar qatori mavjud bo‘lsin:

L_1 uchun l_{11}, l_{12}, ……, l_{1k}

L_2 uchun l_{21}, l_{22}, ……, l_{2k}

………………………..

L_n uchun l_{n1}, l_{n2}, ……, l_{nk}

O‘lchovlarning har bir guruhi uchun baholanayotgan (68) funksiyaning qiymatini topamiz:

$$y_1=F(l_{11},l_{21},\ldots\ldots,l_{n1})$$
$$y_2=F(l_{12},l_{22},\ldots\ldots,l_{n2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_k=F(l_{1k},l_{2k},\ldots\ldots,l_{nk})$$

bu yerda $l_{cj}=L_i+\varepsilon$ u almashtiruvini bajaramiz, ya’ni o‘lchangan miqdorlarni ularning haqiqiy qiymatlari va tasodifiy xatoliklari bilan almashtiramiz. Natijada hosil bo‘ladi:

$$y_1=F(L_1+\varepsilon_{11},L_2+\varepsilon_{21},\ldots\ldots,L_n+\varepsilon_{n1})$$
$$y_1=F(L_2+\varepsilon_{12},L_2+\varepsilon_{22},\ldots\ldots,L_n+\varepsilon_{n2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (11.7)$$
$$y_1=F(L_1+\varepsilon_{1k},L_2+\varepsilon_{2k},\ldots\ldots,L_n+\varepsilon_{nk})$$

Funksiyani Teylor qatoriga yoyishni qo‘llab va tasodifiy xatoliklarni qiymatlari o‘rta kichikligi tufayli qatorning boshlang‘ich hadlari bilan chegaralanib (72) tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$y_1=F(L_1,L_2,\ldots\ldots.L_n)+\frac{\partial F}{\partial L_1}\varepsilon_{11}+\frac{\partial F}{\partial L_1}\varepsilon_{21}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial F}{\partial L_n}\varepsilon_{n1}$$
$$y_2=F(L_1,L_2,\ldots\ldots.L_n)+\frac{\partial F}{\partial L_1}\varepsilon_{12}+\frac{\partial F}{\partial L_1}\varepsilon_{22}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial F}{\partial L_n}\varepsilon_{n2} \qquad (11.8)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_k=F(L_1,L_2,\ldots\ldots.L_n)+\frac{\partial F}{\partial L_1}\varepsilon_{1k}+\frac{\partial F}{\partial L_1}\varepsilon_{2k}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial F}{\partial L_n}\varepsilon_{nk}$$

Agar $F(L_1,L_2,\ldots\ldots.L_n)=Y$ inobatga olsak va ularni tenglamani chap tomoniga o‘tkazsak $y_i-Y=E_j\,(j=\overline{1,k})$ga erishamiz. Endi $\frac{\partial F}{\partial L_i}=f_i \quad (j=\overline{1,n})$ deb belgilasak, unda (11.8) tenglamalar tizimi o‘rniga baholanayotgan funksiyaning (68) tasodifiy xatoligi E_j tizimi hosil bo‘ladi:

$$E_1=f_1\varepsilon_{11}+f_2\varepsilon_{21}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+f_n\varepsilon_{n1},$$
$$E_2=f_1\varepsilon_{12}+f_2\varepsilon_{22}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+f_n\varepsilon_{n2}, \qquad (11.9)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$E_1=f_1\varepsilon_{1k}+f_2\varepsilon_{2k}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+f_n\varepsilon_{nk},$$

Baholanayotgan funksiyaning o‘rta kvadratik xatoligi (14) ga binoan quyidagi ifodadan topilishi mumkin

$$M_y=\sqrt{\frac{[EE]}{n}} \qquad (11.10)$$

(11.10) ifodadagi tenglamalarning har birini kvadratga ko‘taramiz.

$$E_1E_1 = f_1^2\varepsilon_{11}\varepsilon_{11} + f_2^2\varepsilon_{21}\varepsilon_{21} + f_n^2\varepsilon_{n1}\varepsilon_{n1} + 2f_1\ f_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{21} + ... + 2f_{n-1}\varepsilon_{(n-1)1}\varepsilon_{n1};$$

Unda .... hosil

$$E_kE_k = f_1^2\varepsilon_{1k}\varepsilon_{1k} + f_2^2\varepsilon_{2k}\varepsilon_{2k} + f_n^2\varepsilon_{nk}\varepsilon_{nk} + 2f_1\ f_2\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k} + ... + 2f_{n-1}\varepsilon_{(n-1)k}\varepsilon_{nk};$$

bo‘ladi.

Topilgan tenglamalarni qo‘shib chiqamiz va k soniga bo‘lamiz.

$$\frac{[EE]}{k} = f_1^2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{k} + f_2^2\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{k} + ... + f_n^2\frac{[\varepsilon_n\varepsilon_n]}{k} + 2f_1f_2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_2]}{k} + ... + 2f_{n-1}f_n\frac{[\varepsilon_{n-1}\varepsilon]}{k}$$

bu yerda: ε_i – o‘lchovning tasodifiy xatoligi

$\varepsilon_i\ \varepsilon_j$ – erkin qiymatlarning ko‘paytmasiga Kramer teoremasini va tasodifiy qiymatlar xatoligining 4 xossasini qo‘llasak $k \to \infty$ bo‘lganda

$\lim\frac{[\varepsilon_i\varepsilon_j]}{k} = 0$ hosil bo‘ladi.

Natijada $\frac{[EE]}{k} = f_1^2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{k} + f_2^2\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{k} + ... + f_n^2\frac{[\varepsilon_n\varepsilon_n]}{k}$ bo‘ladi.

Demak, baholanayotgan funksiyaning o‘rta kvadratik xatoligi teng bo‘ladi:

$$M_y^2 = f_1^2m_1^2 + f_2^2m_2^2 + ... + f_n^2m_n^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^2m_i^2 \qquad (11.11)$$

(11.11) formula xatoliklar nazariyasining asosiy formulalaridan (tayanch formulalaridan) biridir. U erkin argumentlarning o‘rta kvadratik xatoligi bo‘yicha har qanday funksiyaning aniqligini baholashga imkon beradi. Ba’zan u xatoliklarni ko‘chirish formulasi deyiladi.

12.3. XATOLIKLARNI KO‘CHIRISH FORMULASINING TADBIQI

Har qanday funksiyaning aniqligini baholash uch bosqichda bajariladi:

1. Baholanayotgan funksiyani xatoligini oldindan aniq bo‘lgan erkin argumentlar orqali ifodalash;
2. Funksiyaning erkin argumentlar bo‘yicha xususiy hosilasini topish:
3. Funksiyaning o‘rta kvadratik xatoligini xatolarni ko‘chirish formulasidan (76) foydalangan holda topish.

Shuni ham aytib o‘tish kerakki, bu ishda birinchi bosqich juda ham ma’suliyatli hosil bo‘lsa. Bu yerda eng zaruri shundaki, baholanayotgan funksiya erkin argumentlar orqali ifodalangan bo‘lsa o‘shanda natija soxta bo‘lmaydi. Bir nechta xususiy hollarni ko‘ramiz:

1. y=l+a,

bu yerda: l – xato bilan o‘lchangan qiymat,

a- doimiy xatosiz son. Xususiy holatda $f = \frac{\partial y}{\partial l} = 1$

unda (76) formulani qo‘llab yozamiz $M_y=m_l$.

2. y=l*a, $f=\frac{\partial y}{\partial l}=a$, $M_y=am_l$.

3. $y=a_1 l_1+a_2 l_2+\ldots\ldots+a_n l_n$ chiziqli funksiya,

bu yerda: a- o‘zgarmas son

l_i- xatolik bilan o‘lchangan qiymatlar.

$$f_1=\frac{\partial y}{\partial l_1}=a_1,\ f_2=\frac{\partial y}{\partial l_2}=a_2,\ldots\ldots\ldots\ldots f_n=\frac{\partial y}{\partial l_n}=a_n,$$

Unda f_i - ni o‘rniga m_i ni qo‘ysak

$$M_y^2=a_1^2m_1^2+a_2^2m2+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_n^2m_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2m_i^2$$

Agar $a_1=a_2=\ldots\ldots=a_n=\pm1$ bo‘lsa

$$M_y=\sqrt{m_1^2+m_2^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+m_n^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}m_i^2}\ .$$

Xulosa: Agarda baholanayotgan funksiya erkin argumentlar yig‘indisi yoki ayirmasidan iborat bo‘lsa, uning o‘rta xatoligi har doim argumentlar o‘rta kvadratik xatoligi yig‘indisidan olingan kvadrat ildizga teng bo‘ladi. Uning ustiga $m_1=m_2=\ldots\ldots\ldots\ldots=m_n=m$ bo‘lsa $M_y=\sqrt{nm^2}=m\sqrt{n}$, ya’ni xatolarning jamlanishi chiziqliy emas, balki argumentlar sonining kvadrat ildizidan chiqqaniga proporsionaldir.

4. $y=\lg e$, $f=\frac{\partial y}{\partial l}=\frac{\lg e}{l}$, e=2,718 natural logarifmlar asosi

lge=0,4343

$$M_{\lg e}=\frac{0,4343}{l}m_e \text{ bundan } \frac{m_e}{l}=\frac{M_{\lg l}}{0,4343}$$

Geodezik poligonlarni ishlab chiqishda ushbu ifodadan foydalaniladi agar hisob logarifmda olib borilayotgan bo‘lsa)

Misol 8 tomondan iborat teodolit poligonida burchaklar 20" xatolik bilan o‘lchangan m_β=20”, tayanch direksion burchak xatosi m_α=35", oxirgi tomon direksion burchagi xatoligi topilsin

1. $y=\alpha_8=\alpha_0+\beta_1+\beta_2+\ldots\ldots\ldots+\beta_8\pm8*180$

2. $f_i=\frac{\partial\alpha_8}{\partial\alpha_0}=\frac{\partial\alpha_8}{\partial\beta_1}=\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{\partial\alpha_8}{\partial\beta_8}=1$

3. $M_{\alpha_8}^2=m_\alpha^2+8m_\beta^2$ $M_{\alpha_8}=\sqrt{35^2+8*20^2}=66,5$

demak, $M_{\alpha_i}=\sqrt{m_\alpha^2+im_\beta^2}$

12.4. FUNKSIYA ANIQLIGINI SISTEMAIIK(MUNTAZAM) XATOLIK MAVJUD BO‘LGANDA BAHOLASH

Bir miqdor o‘lchovining tasodifiy va muntazam xatoliklarining birgalikdagi ta’sirini baholaymiz. Faraz qilamizki barcha o‘lchovlarning xatosida muntazam Δ xatolik mavjud.

Unda bir miqdor o‘lchovi xatoliklarining qatori bo‘ladi:

$$\sigma_1=\varepsilon_1+\Delta;$$
$$\sigma_2=\varepsilon_2+\Delta;$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\sigma_n=\varepsilon_n+\Delta;$$

Bu yerda σ_i – umumiy xatolik ε_i – tasodifiy xatolik Δ - umumiy xatolikning o‘zgarmas qismi

O‘rta kvadratik xatolikni topish uchun tenglamalarni kvadratga ko‘taramiz.

$$\sigma_1\sigma_1=\varepsilon_1\varepsilon_1+2\,\varepsilon_1\Delta+\Delta^2;$$
$$\sigma_2\sigma_2=\varepsilon_2\varepsilon_2+2\,\varepsilon_2\Delta+\Delta^2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sigma_n\sigma_n=\varepsilon_n\varepsilon_n+2\,\varepsilon_n\Delta+\Delta^2;$$

Qiymatlarni jamlab ularni n ga bo‘lsak kelib chiqadi.

$$\frac{[\sigma\sigma]}{n}=\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}+2\frac{[\varepsilon]}{n}+\Delta^2 \qquad (11.12)$$
$$m_0^2=m_{mac}^2+\Delta^2$$

m_{tas} – tasodifiy xatolik.

Masalan, o‘z o‘nlik o‘lchash tasmasini muntazam xatoligi komparlash natijasida (namuna bilan taqqoslaganda) topildi va u o‘lchov natijasida hisobga olinadi. Ammo komparlashning o‘zi bu o‘lchash jarayoni, demak unda xatolik bo‘lishi muqarrar. SHuning uchun ham komparlash tuzatmasini o‘lchov natijasiga kiritayotganda quyidagi formuladan foydalanish o‘rinliroq bo‘ladi.

$$m_0^2=m_{mac}^2+m_\Delta^2$$

bu yerda m_Δ - tuzatmani topish o‘rta kvadratik xatoligi.

Agar biz muntazam xatolikni xatolar funksiyasiga ta’sirini ko‘radigan bo‘lsak, 3 ta argument uchun bo‘ladi:

$$E_1=f_1(\varepsilon_{II}+\Delta_1)+f_2(\varepsilon_{21}+\Delta_2)+f_3(\varepsilon_{31}+\Delta_3);$$
$$E_2=f_1(\varepsilon_{12}+\Delta_1)+f_2(\varepsilon_{22}+\Delta_2)+f_3(\varepsilon_{32}+\Delta_3);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$
$$E_k=f_1(\varepsilon_{Ik}+\Delta_1)+f_2(\varepsilon_{2k}+\Delta_2)+f_3(\varepsilon_{3k}+\Delta_3).$$

qavslarni ochib guruhlarga ajratamiz va yuqorida keltirilgan tartibda ishlab chiqsak hosil bo‘ladi:

$$M_{y_0}^2=(f_1^2m_1^2+f_2^2m_2^2+f_3^2m_3^2)+(f_1\Delta_1+f_2\Delta_2+f_3\Delta_3) \qquad (11.13)$$

Agarda muntazam xatolik oldindan o‘lchov natijasida kiritilgan bo‘lsa, unda faqat tuzatmani topish xatoligi inobatga olinadi.

$$M_{y_0}^2 = f_1^2(m_1^2 + m_{\Delta_1}^2) + f_2^2(m_2^2 + m_{\Delta_2}^2) + f_3^2(m_3^2 + m_{\Delta_3}^2) \qquad (11.14)$$

Agar barcha o‘lchovlarga birta tuzatma kiritiladigan bo‘lsa

$$M_z^2 = (f_1^2 m_1^2 + f_2^2 m_2^2 + ... + f_n^2 m_n^2) + (f_1 + f_2 + ... + f_n) m_\Delta^2$$

(11.15)

bu yerda m_1, m_2, ……., m_n – o‘lchangan miqdor (l_i) ning o‘rta kvadratik xatoliklari.

m_Δ - tuzatmaning o‘rta kvadratik xatoligi.

Agarda har bir o‘lchovga o‘z tuzatmasi kiritiladigan bo‘lsa, unda σ_1=f_i bo‘ladi, ya’ni

$$M_z^2 = (f_1^2 m_1^2 + f_2^2 m_2^2 + ... + f_n^2 m_n^2) + ... + (\sigma_1^2 m_{\Delta_1}^2 + \sigma_2^2 m_{\Delta_2}^2 + \sigma_3^2 m_{\Delta_3}^2)$$

(11.16)

bu yerda Δ_1, Δ_2, Δ_3 – tuzatmalarning o‘rta kvadratik xatoliklari.

12.5. O‘LCHANGAN QIYMATLAR FUNKSIYASINING VAZNI

$M_y^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^2 m_i^2$ formulasida argumentlarning xatoliklarini $m_i^2 = \mu P_i$ bilan almashtiramiz, bu yerda P_i argumentlarning vazni μ vazni birligining xatosi. Shundan keyin bu formula quyidagicha yoziladi:

$$M_y^2 = \mu^2 \left(\frac{f_1^2}{P_1} + \frac{f_2^2}{P_2} + ... + \frac{f_n^2}{P_n} \right) \qquad (11.17)$$

Bundan $m_i^2 = \mu^2 \frac{1}{P_i}$ ni inobatga olgan holda o‘lchangan qiymatlar funksiyasini teskari vazn qiymatini topamiz:

$$\frac{1}{P_y} = \frac{f_1^2}{P_1} + \frac{f_2^2}{P_2} + ... + \frac{f_n^2}{P_n} = \left[\frac{ft}{P} \right] \qquad (11.18)$$

chiziqli funksiya $y = a_1 l_1 + a_2 l_2 + ... + a_n l_n$ uchun teskari vazn teng bo‘ladi:

$$\frac{1}{P_y} = \frac{a_1^2}{P_1} + \frac{a_2^2}{P_2} + ... + \frac{a_n^2}{P_n} = \left[\frac{aa}{P} \right] \qquad (11.19)$$

Agar bu yerda $a_1 = a_2 = ... = a_n = \pm 1$bo‘lsa, unda funksiyaning teskari vaznda argumentlar teskari vaznlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi ya’ni:

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + ... + \frac{1}{P_n} = \left[\frac{1}{P} \right] \qquad (11.20)$$

12.6. O‘LCHANGAN QIYMATLAR XATOLIGI VA O‘RTA ARIFMETIK QIYMAT VAZNI

Umumiy o‘rta arifmetik miqdorning o‘rtacha kvadratik xatoligini topish uchun quyidagi formulani ko‘ramiz:

$$\overline{X} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_n x_n}{P_1 + P_2 + ... + P_n} \qquad (11.21)$$

Endi (76) formuladan foydalanamiz. O‘rta kvadratik xatoni hisoblash uchun xususiy hosilalar bu holda teng bo‘ladi:

$$f_i = \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} = \frac{P_i}{[P]}$$

(76) formulaga f_i ning qiymatini qo‘ysak ega bo‘lamiz:

$$M_{\overline{x}} = \frac{1}{[P]^2}\left(P_1^2 m_1^2 + P_2^2 m_2^2 + ... + P_n^2 m_n^2\right) \qquad (11.22)$$

$m_i^2 = \mu^2 \frac{1}{P_i}$ ligini inobatga olib almashtirish bajarsak hosil bo‘ladi:

$$M_{\overline{x}}^2 = \mu^2 \frac{1}{[P]}$$

yoki

$$M_{\overline{x}} = \mu \sqrt{\frac{1}{[P]}} \qquad (11.23)$$

(11.22) da $m_i^2 = \mu^2 \frac{1}{P_i}$ ni inobatga olsak $\frac{\mu}{\sqrt{[P]_{\overline{x}}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}}$ dan umumiy arifmetik o‘rta miqdor vazni $P_{\overline{x}} = [P]$, ya’ni alohida o‘lchovlar vaznining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Oddiy o‘rta arifmetik miqdor xatoligi vaznini topish uchun vaznlarini tenglashtirish kifoya $P_1=P_2=\ldots\ldots=P_n=1$. Unda oddiy o‘rta arifmetik miqdor vazni

$P_{\overline{x}} = [P] = n$ bo‘ladi.

(88) formulaga qo‘ysak oddiy o‘rta arifmetik qiymat xatoligini topamiz:

$$M_{\overline{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{n}} \qquad (11.24)$$

Ammo, P=1 bo‘lsa μ=m bo‘ladi:

$$M_{\overline{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad (11.25)$$

bu yerda m- bir o‘lchovning o‘rta kvadratik xatoligi.

12.7. VAZN BIRLIGI O‘RTA KVADRATIK XATOLIGINI O‘RTA VAZNIY QIYMATDAN CHETLANISH ASOSIDA TOPISH

$P_i = \mu^2 \frac{1}{m_i^2}$ - formula vazn, o‘rta kvadratik xatolik va vazn birligi xatoligi orasidagi munosabatni ifodalaydi. Avval ta’kidlaganimizdek, hisobni takomillashtirish maqsadida vazn birligi xatoligini ixtiyoriy qabul qilish mumkin. O‘lchangan qiymatlarni matematik ishlab chiqishdan avval qabul qilingan vazn birligi xatoligi uning xatoligi deyiladi va μ_0 bilan belgilanadi.

Tengligi har xil bo‘lgan o‘lchovlarni ishlab chiqish natijasida bajarilgan tayinli o‘lchovlarning aniqligini ifodalaydigan (tavsiflaydigan) vazn birligi xatoligini hisoblash mumkin, ya’ni vazn birligi xatosining apostirior qiymatini topish mumkin. U μ orqali ifodalanadi.

μ_0 va μ larni qiymatlarning taqqosi natijasida ularning mosligiga qarab o‘rta arifmetik xatoliklarining m_i boshlang‘ich qiymatlarini $P_i = \mu^2 \frac{1}{m_i^2}$ formulasi asosida to‘g‘ri tanlanganligi haqida fikr yuritish mumkin.

Yagona o‘lchovning ishlab chiqilishida vazn birligi xatoligining apostrior qiymatini topishni ko‘rib chiqamiz.

Aytaylik, x_1, x_2, …………..,x_n qiymatga ega bo‘lgan yagona o‘lchov mavjud va ularning vaznlari P_1,P_2,…………..,P_n ga teng. O‘lchash natijasiga asosan umumiy o‘rta arifmetik miqdor teng bo‘ladi:

$$\overline{X} = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n}{[P]}$$

Birinchi o‘lchangan qiymatni ushbu o‘rta miqdordan chetlashishi teng bo‘ladi:

$$v_1 = x_i - \overline{x} = x_1 - \frac{1}{[P]}\left(P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n\right) = \frac{1}{[P]}\left\{x_i\left([P] - P_1\right) - P_2x_2 - .... - P_nx_n\right\} \tag{11.26}$$

Xatosiz o‘lchashlarda x_i – ning barcha qiymatlari o‘zaro teng bo‘ladi va natijada v_i=0. O‘lchashdagi xatoliklar tufayli v_1=0 dir. Demak, v_i chetlanish (11.26) funksiyaning xatosi, shuning uchun ham v_1=M_{v1} tenglik o‘rinlidir.

Xatolarni ko‘chirish formulasini qo‘llab (11.26) funksiya xatoligini alohida argumentlar xatoligi orqali ifodalaymiz. Buning uchun funksiyaning xususiy hosilasini barcha argumentlar orqali topamiz.

$$f_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{[P] - P_1}{[P]};\ f_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{P_2}{[P]};........ f_n = \frac{\partial v_1}{\partial x_n} = -\frac{P_n}{[P]}$$

Bundan (11.26) funksiyaning o‘rta kvadratik xatoligi teng bo‘ladi:

$$M_{v_1}^2 = \frac{1}{[P]^2}\left\{\left([P] - P_1\right)^2 m_1^2 + P_2^2m_2^2 + ... + P_n^2m_n^2\right\} \tag{11.27}$$

(11.27) ifodada alohida o‘lchovlar xatoligining vazn birligi xatoligi va mos bo‘lgan vaznlar bilan almashtiramiz:

$$m_i^2 = \mu^2 \frac{1}{P_i}$$

Natijada murakkab bo‘lmagan almashtirishlar orqali topamiz:

$$M_{v_1}^2=\frac{\mu^2}{[P]^2}\left\{\frac{[P]^2-2[P]P_1+P_1^2}{P_1}+P_2+........+P_n\right\}=\frac{\mu^2([P]-P_1)}{[P]P_1} \qquad (11.28)$$

$v_1=M_{v_1}$ - ni inobatga olib yozamiz:

$$P_1M_{v_1}^2=P_1v_1v_1=\frac{\mu^2}{[P]}([P]-P_1)=\mu^2\left(1-\frac{P_1}{[P]}\right) \qquad (11.29)$$

Boshqa chetlanishlar uchun ham shunga tengliklar hosil bo‘ladi:

$$P_iv_iv_i=\mu^2\left(1-\frac{P_i}{[P]}\right) \qquad (11.30)$$

Bu tenglamalarni jamlab topamiz:

$$[Pvv]=\mu^2\left(n-\frac{[P]}{[P]}\right)=\mu^2(n-1) \qquad (11.31)$$

Bundan topilishi kerak bo‘lgan (kidirilayotgan) vazn birligining o‘rta kvadratik xatoligi teng bo‘ladi:

$$\mu=\sqrt{\frac{[Pvv]}{(n-1)}} \qquad (11.32)$$

Aniqligi teng bo‘lgan o‘lchovlar uchun $P_i=1$ demak, bir o‘lchovning o‘rta kvadratik xatoligi bo‘ladi:

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)}} \qquad (11.33)$$ Bessel formulasi

μ va m ning xatolarini quyidagicha baholaymiz:

$$m_\mu=\frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}};m_m=\frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} \qquad (11.34)$$

m_μ va m_m qiymatlarning $M_{\bar{x}}=\mu\sqrt{\frac{1}{[P]}}\text{ва}M_{\bar{x}}=\frac{m}{\sqrt{n}}$ formulalarga qo‘ysak hosil bo‘ladi:

$$M_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{[Pvv]}{[P](n-1)}} \qquad (11.35)$$

o‘rta vazniy qiymatning o‘rta kvadratik xatoligi va

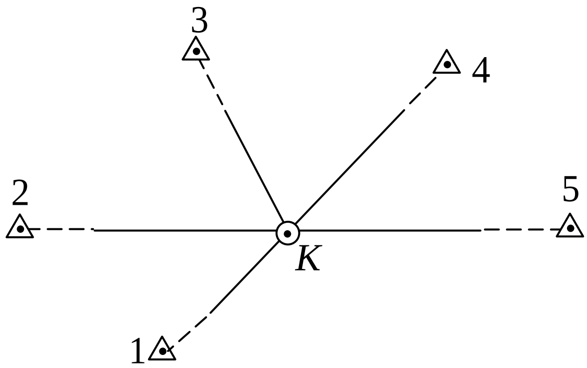
$$M_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \qquad (11.36)$$

oddiy o‘rta arifmetik qiymatning o‘rta kvadratik xatoligi.

12.8. HAR XIL ANIQLIKDAGI KO‘P O‘LCHOVLAR QATORINI MATEMATIK ISHLAB CHIQISH

Misol tariqasida ko‘p marotaba bajarilgan teskari geodezik kestirmani taxminiy tenglashni ko‘ramiz.

Taxminiy tenglashdan maqsad har xil



kombinasiya (almashish)dagi teskari kestirmalarni hisoblash natijasida K nuqta koordinatalarining o‘rta vazniy qiymatini topishdir. Ko‘rilayotgan misolda 10 ta mavjud kombinasiya uchtadan besh marotaba amalga oshiriladi. 10 ta kestirma echilib har bir variant uchun k nuqtasining koordinatalari topiladi. Ko‘p karralik teskari kestirma tarxi (sxemasi).

Hisoblash tartibi quyidagicha bo‘ladi:

1. Hisoblangan absissa va ordinataning vaznlarini topamiz:

$$P_i = \mu_0^2 \frac{1}{M_i^2}$$

Vazn birligi xatoligining arrior qiymati ixtiyoriy bo‘lganligi tufayli x va u uchun μ_0 sifatida 1 kestirma variantining qiymatini qabul kilamiz, ya’ni:

$$\mu_{0_x} = M_{x_1} \text{ va } \mu_{0_y} = M_{y_1}$$

2. Taqribiy qiymat qabul qilib (soxta nol) δ_i – qiymatini topamiz va [pδ]ni hisoblaymiz. Keyin o‘rta vazniy qiymatni topamiz.

$$\bar{x} = x_0 + [P\delta]_{x/10} \text{ва } \bar{y} = y_0 + [P\delta]_{y/10}.$$

3. Xususiy qiymatlar x_i, y_i ni o‘rta vazniy qiymatdan chetlanishini topamiz va [pv] ni hisoblaymiz. [pv] ning nolga yaqinligi o‘rtacha vaznlarni to‘g‘ri topilganligidan dalolat beradi.

4. $p_i\delta_i v_i$ va $p_i v_i v_i$ qiymatlari asosida $[p_i\delta_i v_i]$ va $[p_i v_i v_i]$ yig‘indilarini topamiz.

Ularning taxminiy tengligi hisobining to‘g‘riligini nazorat qilishga imkon beradi.

5. Vazn birligi o‘rta kvadratik xatoligining apostrior qiymatini aniqlaymiz:

$$\mu_x = \sqrt{\frac{[Pvv]_x}{n-1}}; \mu_y = \sqrt{\frac{[Pvv]_y}{n-1}}$$

Vazn birligi xatoligining aprior va apostrior qiymatlarining bir-biriga yaqinligi o‘rta vazniy tenglangan qiymatlarni qabul qilayotgan absissa va ordinata xususiy qiymatlarining o‘rta kvadratik xatoligi haqiqiy xatoliklarga mosligidan dalolat beradi.

6. Vazn birligi o‘rta kvadratik xatoligini topamiz:

$$m_\mu = \frac{\mu_x}{\sqrt{2(n-1)}}; m_m = \frac{\mu_y}{\sqrt{2(n-1)}}$$

7. Tenglangan qiymatlarning o‘rta kvadratik xatoligini topamiz:

$$M_{\bar{x}} = \frac{\mu_x}{\sqrt{[P]_x}}; M_{\bar{y}} = \frac{\mu_y}{\sqrt{[P]_y}}$$

12.9. QO‘SH O‘LCHOV NATIJALARI AYIRMASI ASOSIDA YAGONA O‘LCHOVNING O‘RTA KVADRATIK XATOSINI HISOBLASH

Marksheyderiya ishlarida barcha o‘lchovlar takrorlanishidan juda katta hajmda ma’lumotlar yig‘ilib qoladi. Ulardan amaldagi o‘lchovlarning aniqligini baholashda foydalaniladi.

Aytaylik bir jinsli kattaliklarning teng aniqlikdagi qo‘sh o‘lchovlari qatori mavjud bo‘lsin:

$$l_1^{'}, l_2^{'}, ..., l_n^{'},$$
$$l_1^{''}, l_2^{''}, ..., l_n^{''}$$

Ularning ayirmasini topamiz:

$$\begin{aligned} d_1 &= l_1^{'} - l_1^{''} \\ d_2 &= l_2^{'} - l_2^{''} \\ &.................. \\ d_n &= l_n^{'} - l_n^{''} \end{aligned} \qquad (103)$$

Birgina qiymatning xatosiz o‘lchangan miqdorlari o‘zaro teng bo‘lganligi tufayli ayirmaning haqiqiy qiymati nolga teng. SHuning uchun noldan farqli bo‘lgan d_i – ayirmaning /yoki (103) funksiyaning/ xatosi bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki, ayirmaga nisbatan Gauss formulasini qo‘llasak uning o‘rta kvadratik xatosini topamiz:

$$M_d = \sqrt{\frac{[dd]}{n}} \qquad (104)$$

Shuning bilan birga xatolarni ko‘chirish formulasiga asosan ikkita qiymatning ayirmasi yoki yig‘indisining o‘rta kvadratik xatosi shu miqdorning o‘rta kvadratik xatolari yig‘indisi yoki ayirmasiga:

$M_d^2 = m_1^2 + m_2^2$ teng bo‘ladi

Ko‘rilayotgan holda $m_1=m_2=m$ bo‘lganligi uchun $M_d = m\sqrt{2}$ bo‘ladi. Demak:

$$m = \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} \qquad (105)$$

Qo‘sh o‘lchov natijasida topilgan yagona qiymatning o‘rta kvadratik xatosi bo‘ladi. d_i – haqiqiy qiymat bo‘lganligi uchun o‘lchovlar soni n>20 bo‘lganda [d]/n=0 bo‘ladi.

Agar ushbu shart bajarilmasa, bu o‘lchov natijalarida muntazam xato borligidan dalolat beradi. Shuning uchun o‘rta kvadratik xatoning tasodifiy qismi tuzatilgan qiymat orqali topiladi:

$$d_i^1 = d_i - \frac{[d]}{n} \qquad (106)$$

bu yerda d_i^1 ayirma tasodifiy qiymatining o‘rta arifmetik qiymatdan farqidir. Unda tasodifiy o‘rta kvadratik xatolik Bessel formulasi orqali topiladi.

$$m = \sqrt{\frac{[dd]}{2(n-1)}} \qquad (107)$$

Bu holda xatosiz o‘lchovlar uchun har doim [d']=0. SHuni ta’kidlash kerakki (105) va (107) formulalar orqali topilgan o‘rta kvadratik xatoliklar biroz kamroq chiqishi mumkin, chunki qo‘sh o‘lchovlar ko‘p hollarda bir xil sharoitda bajariladi. Masalan, asbobning o‘zgarmas holatida ikki marotaba burchak o‘lchash natijasi.

Shuning uchun ham xatolar manbalarining ta’siri ikkala o‘lchov uchun ham bir xil bo‘lishi mumkin. Natijada ayirma topayotganda ular o‘zaro qisqarib ketadi.

Masalan, kon lahimlarida topilgan giroskopik azimutning qo‘sh qiymatlari berilgan bo‘lsin.

$d_i = d_i^{'} - d_i^{''}$	$d_i d_i^{'}$
-41	1681
-8	64
-12	144
-11	121
-4	16
-16	256
-4	16
-6	36
8	64
29	841
23	529
-28	784

Giroskop bilan o‘lchangan bir o‘lchovning o‘rta kvadratik xatoligini topilish kerak.

U teng bo‘ladi:

$$m_r = \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} = \sqrt{\frac{455^2}{24}} = 13{,}8^{''}$$

12.10. O‘LCHASH NATIJALARIDAGI QO‘POL QIYMATLARNI TOPISH MEZONI

YAgona qiymatni ko‘p marotaba aniqlaganda boshqalariga nisbatan yaqqol ajralib turadigan natijaviy qiymatlar mavjud bo‘ladi. Ba’zan bu yaqqolllik shunday farqli bo‘ladiki, qo‘pol xato paydo bo‘lganligiga shubxa qolmaydi. Bunday o‘lchovlar bekor qilinadi. Lekin har doim ham bunday o‘lchovlardan voz kYechish ishonchli bo‘lavermaydi. Natijada «shubxali» qiymatni normal taqsimot qonuni yo‘l qo‘yadigan o‘zgarish chegarasida ekanligini yoki uning qo‘pol xato ekanligini baholash kerak bo‘ladi. Boshqacha qilib aytganda, topilgan natijalarning sifati ob’yektiv baholanishi kerak.

Sinash natijalaridagi ekstremal qiymatlarni sub’ektiv tarzda inobatga olmaslik, birinchidan, o‘lchash natijalarini ehtimoldan uzoqlashtiriladi; ikkinchidan, bunday qiymatlar yangicha xossaning ifodasi bo‘lishi ham mumkin. SHuning uchun ham, iloji boricha o‘lchashlar takrorlanib avvalgi qiymatning o‘rinsizligiga ishonch hosil qilinishi zarur. Agar, shunda ham anomal qiymat takrorlansa uning paydo bo‘lish sabablarini aniqlash darkor. Anomal qiymatlarni bekor qilishning bir necha mezonlari mavjud. Geodeziya amaliyotida nazariy unchalik mukammal bo‘lmagan Shovene mezonidan foydalaniladi. Biz ko‘radigan mezonning asosida ekstremal qiymatlar taqsimoti qonuni yotadi. Bu mezon 1941-yilda Smirnov N.V. tomonidan taklif etilgan va nazariy ishlab chiqilgan.

1. Yo‘l qo‘yilgan quloch mezoni. Quloch bu o‘lchangan qiymatlarning eng kichik va eng kattasi orasidagi ayirma, ya’ni:

$$R = X_{mak} - X_{\min}$$

Bunda mezon natijalari mustaqil bo‘lib, normal taqsimotga ega va ularning o‘rta kvadratik chetlanishi σ aniq. Me’yoriy quloch w=R/σ yo‘l qo‘yilgan bo‘ladi, agar $w \le w_T$ sharti bajarilgan bo‘lsa, bu yerda w_t ikkita o‘lchov bo‘yicha tanlanadi: ekstremal miqdorlarni tanlangan qiymatlar soni n va qabul qilingan ishonchli ehtimollik topiladi. Masalan, n=10, P=0,95 bo‘lsa w_t=4.47. Kaysi o‘lchov uchun $w > w_T$ bo‘lsa, o‘sha o‘lchov natijasi bekor qilinadi, yoki qayta o‘lchanadi.

2. Ekstremal qiymatlarning joiz mezoni. Ushbu mezon yagona o‘lchov natijalarining mustaqil normal taqsimotini baholash uchun qo‘llaniladi. Bu mezon quloch mezoniga nisbatan universal, chunki u xilma-xil xususiyatlarni o‘z ichiga olgan 4 ta variantdan iboratdir. Variantlar ikki parametrni aprior /avvaliy/ aniqligini hisobga olgan holda tasniflanadi: izlanayotgan qiymatning matematik kutilmasi X (haqiqiy qiymat) va aniqlangan natijaning o‘rta kadratik xatoligi σ shular jumlasidandir. Har bir variantning o‘z mezoni mavjud bo‘lib, u ishonch ehtimoli P_0 va qo‘shma /birgalikda / aniqlash soni n tufayli belgilanadi. Agar

haqiqiy qiymat X noaniq bo‘lsa, unda o‘rta arifmetik qiymat $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; bu yerda x_i – har bir o‘lchash natijasining qiymati; agar o‘rta kvadratik chetlanish σ noaniq bo‘lsa uning empirik /tajribaviy/ qiymati

$$S = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \text{ёки} S = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$ dan hisoblanadi.

Bu yerda: $\varepsilon_i = x_i - x \text{ва} a_i = x_i - \bar{x}$

Maxsus jadvalllarda tajribaviy me’yoriy chetlanishning yo‘l qo‘yilgan qiymatlari η berilgan:

$$\eta_э = \frac{|x_э - x|}{\sigma};$$ (I variant uchun)

$$\eta_э = \frac{|x_э - x|}{s}$$ (II variant uchun)

$$\eta_э = \frac{x_э - \bar{x}}{\sigma}$$ (III variant uchun)

$$\eta_э = \frac{|\, x_э - \bar{x}\, |}{s}$$ (IV variant uchun)

bu yerda x_e – bir necha marotaba o‘lchash natijasida topilgan amaliy qiymat. Joiz ekstremal qiymatlarni variantlar bo‘yicha baholashga bag‘ishlangan misollar ko‘ramiz:

1. Uchinchi sinf triangulyasiyasida 28 ta uchburchakning xatoligi aniq. Agar bunday triangulyasiya uchun burchak o‘lchashning xatoligi 1,5" ekanligini inobatga olsak – 7,1" amaliy xatolikni ishonch ehtimoli R_o=0,95 bilan qo‘yimli deb bo‘ladimi?

Bu misol 1 variantga taaluqli chunki xatolikining haqiqiy qiymati ma’lum va u nolga teng. Burchak o‘lchash xatoligini bilsak, o‘rta kvadratik xatolikni topish mumkin: $\sigma = 1{,}5\sqrt{3} = 2{,}6$

Amaliy xatolikning me’yoriy qiymati teng bo‘ladi:

$$\eta_э = 7{,}1''/2{,}6'' = 2{,}73$$
$$P_o = 0{,}95, n = 28$$ (1 variant uchun)

Maxsus jadvaldan topamiz (5-ilova) η=2*90 η_e <η bo‘lganligi uchun. 7,1" ga teng bo‘lgan xatolik qo‘yimlidir. Demak ushbu triangulyasiya tarmog‘i uchinchi sinf talabiga monand. Bu xulosa hisoblangan amaliy o‘rta kvadratik xatolikning qiymati orqali ham tasdiqlanayapti.

$$\sigma' = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} = \sqrt{\frac{166{,}2}{28}} = 2{,}4''$$

σ' ning qiymati σ aprior qiymatidan unchalik farq qilmaydi.

[ΔΔ] – xatoliklar kvadratining yig‘indisi.

2. v=583,612 m bazisning uzunligi ko‘p marotaba / k=45/ yuqori aniqlikda svetodalnomer yordamida bir o‘lchovning o‘rta kvadratik xatosini topish maqsadida o‘lchangan. Bu hol II variantga to‘g‘ri keladi, chunki o‘lchanadigan miqdor qiymati x=v aniq. Hisoblash natijasida [ε] =-2mm, [εε]=12928 topilgan. Bundan kelib chiqadiki o‘lchashda muntazam xato yo‘q va bir o‘lchovning o‘rta kvadratik xatosini quyidagi formuladan topish mumkin:

$$S = m\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{12928}{45}} = 16{,}9\text{мм}$$

Bazisdan maksimal chetlanish teng 48 mm ga. Shunday chetlanish qo‘yimligini baholaymiz. Buning uchun uning me’yoriy qiymatini topamiz: η_e = 48/16,9=2,84 mm, II variant uchun n=45 va R_o=0,95 bo‘lganda η=3,12. Demak, o‘lchov to‘g‘ri bajarilgan degan xulosaga kelamiz.

Shunday qilib 500-600 m masofani 17 mm o‘rtacha xatolik bilan o‘lchash mumkin.

3. T5 teodoliti bilan 9 priyomda gorizontal burchak o‘lchangan. Burchakning o‘rtacha qiymatini topish kerak.

$\bar{x} = 258^0 13'31{,}3''$ - o‘rtacha qiymatni hisoblaymiz.

$v_i = x_i - \bar{x}; v_i -$ning maksimal qiymati =16,7. T5 teodoliti bilan bir priyomda o‘lchangan burchak o‘rta kvadratik xatoligi m=5'' ligi aniq, demak bu hol III variantga to‘g‘ri keladi. n=9 va R_o =0,95 uchun η=2,39 bo‘ladi. Me’yoriy chetlanish η_e=16.7''/5''=3,34. η_e>η bo‘lganligi uchun 16,7'' chetlanishga ega bo‘lgan o‘lchov xato deb hisoblanadi va uning qiymati qatordan /hisobdan/ chiqarib tashlanadi. Natijada yangi o‘rtacha qiymatga ega bo‘lamiz: $\bar{x} = 258^0 13'29{,}2''$ va yangitdan v_i chetlanishlarni topamiz. Endi eng katta $v_i = 11{,}2'' \eta_э = 11{,}2''/5'' = 2{,}24''$ n=-8 va R_o=0,95 uchun η'=2,33 bo‘ladi. η_e'<η' bo‘lganligi uchun yakuniy sifatida $\bar{x}'$ ni qabul kilamiz. Uning o‘rta kvadratik xatoligi $M_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{8}} \approx 1{,}8''$

4. YAngi teodolitning aniqligini tadqiq qilish jarayonida ma’lum bir gorizontal burchak ko‘p marotaba (n=21) o‘lchangan. Bir marotaba o‘lchangan burchakning o‘rta kvadratik xatoligi topilsin.

$\bar{x} = 48^0 32'22{,}0''$ - o‘rtacha qiymatini topamiz va chetlanishni hisoblaymiz $v_i = x_i - \bar{x};$ va [vv] = 96,96 topamiz. O‘rta kvadratik chetlanish $S = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{96{,}96}{20}} = 2{,}20'' v_э = -6{,}2''$. Bu hol IV variantga to‘g‘ri keladi, chunki o‘lchanayotgan burchakning qiymati ham uni o‘lchashning o‘rtacha xatosi ham tadqiqotdan avval aniq emas. n=21 va R_o =0,95 uchun qo‘yimli me’yoriy chetlanish topamiz η=2,73 . Amaliy me’yoriy chetlanish teng bo‘ladi $\eta_э = \frac{6.2}{2.20} = 2.82$ $\eta_e > \eta$ bo‘lganligi uchun v_e =-6,2" bo‘lgan o‘lchov tashlab yuboriladi. Qolgan 20 o‘lchovdan $\bar{x} = 48^0 32'22{,}3''$, [vv] = 57,08

$S = \sqrt{\frac{[v'v']}{n-1}} = \sqrt{\frac{57{,}08}{19}} = 1{,}73$ qolgan qatorda v_i=3.2" unda $\eta_э' = \frac{3.2}{1{,}73} = 1{,}85$ n=20 va R_o=0,95 uchun n'=2,71 Demak, qolgan o‘lchovlarning barchasi to‘g‘ri bajarilgan.

Aniqligi har xil bo‘lgan qiymatlar qatorini ishlab chiqishda avval me’yoriy qiymatni har bir chetlanishni o‘rta kvadratik xatoga bo‘lib topishadi. Amaliy me’yoriy qiymatning qo‘yimliligi yuqorida ko‘rilgan masalalardagidek topiladi.

TALABALARNING O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH VA MUSTOQIL ISHLARI

Tekshirish ishlarining masalalari shunday maqsad uchun tanlanganki, uni bajarish mobaynida talaba o‘rganilayotgan kursni qanchalik o‘zlashtirganligini ishonch hosil qilsin. Agar nazariy qism yaxshi o‘zlashtirilgan bo‘lsa, masalalarni Yechishda jiddiy qiyinchiliklarga duch kelmasligi kerak. Agar qiyinchilik bo‘lsa, unda berilgan darslikdan kerakli bo‘limlarni qaytarib chiqishga to‘g‘ri keladi.

1 TEKSHIRISH ISHLARI

Masala №1. Kolkulyatorda berilgan aniqlik bo‘yicha quyidagi ifodalarni eng yuqori aniqlikda hisoblang:

1). $2{,}9\sqrt{7{,}8 + 0{,}2i}$;

2). $17{,}8\sqrt{\frac{2{,}73 + i}{12{,}6}}$;

3). $19{,}4 + 7{,}2(0{,}2 + 0{,}15i)$;

4). $\frac{(1+i)^2}{549^2} * 40{,}7$;

5). $(146 + 10i) * \sin^2 2^0 15^/$;

6). $(215 + 10i) * \cos 82^0 35^/$;

7). $(186 + 5i) * ctg\, 43^0 10^/$;

8). $0{,}48^{-2{,}8-0{,}1i}$;

9). $\sqrt{2\pi * (5+i)} * (\frac{5+i}{\ell})^{5+i}$;

10. $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} * \ell^{-2{,}1+0{,}1i}$.

Bu yerda: i – talaba shifrining oxirgi raqami. Masalani Yechishdan oldin i – ning urniga talaba o‘z shifri raqamini qo‘yishi kerak. masalan shifr 2000148 bo‘lsa, unda i=8 va ifoda 1). $2{,}9\sqrt{9{,}4}$ ko‘rinishni, 2). $17{,}8\sqrt{\dfrac{10{,}73}{12{,}6}}$ ko‘rinishni oladi.

Masala №2. Yashikda n ta detal bor, undan a tasi bo‘yalgan. Ishchi ikkita detalni tavakaliga oladi. Quyidagilarning ehtimolini toping :

a) ikkala olingan detalning bo‘yalgan bo‘lishi;

b) bitta detal bo‘yalgan, boshqasi bo‘yalmagan (detalning chiqish tartibi hisobga olinmaydi);

v) ikkita detaldan bittasi bo‘yalgan bo‘lishi.

Ko‘rsatma.

a) n, a variant nomeriga binoan olish kerak;

b) ehtimolni nol butundan keyin uchta raqamni saqlagan holda hisoblanadi;

v) O‘quv qo‘llanmaning 1-bo‘limi 2, 4, 5 paragraflariga qarang.

Variantlar №	Detallar soni		Variantlar №	Detallar soni	
	n	a		n	a
1	10	6	6	25	19
2	13	7	7	27	20
3	16	10	8	29	22
4	20	15	9	30	24
5	23	16	10	18	12

Masala №3. Batareya ob’yekt bo‘yicha 6 marta o‘q uzdi. Bir marta otilgan o‘qning ob’yektga tegish ehtimoli p=0,i bu yerda i – talaba shifrining oxirgi raqami (masalan, i=0,428).

1. Quyidagi ehtimolikni toping:

a). ob’yekt K=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 martada nishonga olindi;

b). ob’yekt tegish soni uchdan kam bo‘lmaydi;

v). ob’yekt tegish soni uchdan ko‘p bo‘lmaydi;

g). ob’yekt bir martada nishonga olinadi.

2. Ko‘pburchakli taqsimlanishni va tasodifiy miqdor taqsimlanish funksiyasi – ob’yektni nishonga olish sonini tuzib chiqing.

3. Ob’yektni nishonga olish ehtimoliy sonini aniqlang (taqsimlanish kupburchaklari grafigi va formula bo‘yicha).

4. Ob’yektni nishonga olish sonining 2 dan 5 gacha oraliqda joylashish ehtimolini aniqlang.

5. Ob’yektni nishonga olish sonlarining matematik kutish, dispersiya va standartlarini toping .

Ko‘rsatma. Masalarni Yechishda ushbu uslubiy qo‘llanmaning 6-9, 12-14 paragraflarini o‘rganib chiqish tavsiya qilinadi.

Masala №4. Har bir tajribada voqeaning paydo bo‘lish ehtimoli 0,4 bo‘lsa, voqeaning poydo bo‘lish ehtimoli K_0 bo‘lishi uchun necha marta mustaqil tajriba bajarish kerak (K_0 shifrga teng deb qabul qiling, masalan K_0=183).

Masala №5. Formula (3.25) bo‘yicha t=1,i deb qabul qilib, ehtimollar integrali F(t) hisoblang, bu yerda i talaba shifri (masalan, t = 1,4280.

a) Ehtimollar integrali qiymatini verguldan keyin uchta sonni saqlagan holda hisoblang.

b) Formula (3.25) bo‘yicha hisoblangan F(t) qiymatni 2 - ilovada berilgan jadvaldan foydalanib tekshirib chiqing.

Masala №6. Normal tarqalgan tasodifiy miqdor X ning matematik kutish va o‘rta kvadratik og‘ishi 10 mm i 2 mm teng. quyidagi ehtimollikni toping:

a) Tadqiqot natijasida tasodifiy miqdor X, (α, β) oraliqda quyidagi qiymatlarni oladi;

Variant №	α, mm	β, mm	Variant №	α, mm	β, mm
1	12	14	6	6	10
2	10	15	7	4	8
3	8	12	8	6	12
4	8	14	9	6	14
5	10	14	10	4	10

b) Miqdor X , β dan kichik qiymatni qabul qiladi.

Ko‘rsatma. Ushbu o‘quv darslikning 20, 21 paragraflariga qarang (3.18; 3.23; 3.24 formulalar).

Masala №7. Ehtimollik shuki, o‘lchash xatoligi Δ absolyut miqdori α teng 0,90 dan oshmaydi, ya’ni $P(|\Delta| < \alpha) = 0{,}90$. O‘lchashning o‘rta kvadratik xatosi m, o‘rtacha xatolik ϑ va $M(\Delta) = 0$ bo‘lganda ehtimoliy xatolik z hisoblang.

Variant №	$\alpha^{//}$	Variant №	$\alpha^{//}$
1	10	6	6
2	15	7	8
3	12	8	4
4	18	9	7
5	20	10	9

Ko‘rsatma 21, 22, 38 paragraflarga, III- bo‘limda ko‘rilgan masalalarga qarang.

Masala №8. Svetodalnomer bilan o‘lchangan D_i tomonning uzunligi va uning haqiqiy xatolari $|\Delta_i|$ berilgan.

Hisoblang: 1)korrelyatsiya koeffitsiyentini va uning ishonchligini ehtimoli 0,95 bo‘lganda baholang;

2) regresiya koeffitsiyent va regressiya tenglamasini tuzing.

Ko‘rsatma.

1) Har bir talaba o‘z shifrining oxirgi raqamiga to‘g‘ri keladigan nomerlarni jadvaldagi natijalardan (D_i i $|\Delta_i|$) olib tashlaydi;

2) Hamma hisobni ushbu o‘quv darslikda ko‘rsatilgan № 5.3 masaladek joylashtiradi.

1-jadval

Tartib №	D_i(km)	$\|\Delta_i\|$ (sm)	Tartib №	D_i(km)	$\|\Delta_i\|$ (sm)	Tartib №	D_i(km)	$\|\Delta_i\|$ (sm)
1	1,7	1,5	11	3,0	3,5	21	8,5	5,0
2	4,0	4,5	12	3,5	2,5	22	4,5	2,5
3	5,5	3,5	13	8,1	6,0	23	6,7	4,0
4	2,5	2,0	14	7,2	7,0	24	4,7	3,0
5	3,7	3,5	15	5,7	5,5	25	7,5	5,5
6	7,0	5,5	16	6,2	5,0	26	3,5	3,0
7	9,2	6,5	17	8,5	5,0	27	8,7	6,5
8	8,5	7,0	18	6,5	6,5	28	4,2	3,5
9	7,4	4,5	19	2,0	2,0	29	6,2	3,0
10	5,6	2,5	20	5,3	5,0	30	3,3	1,5

2 TEKSHIRISH ISHI

Masala №1. Haqiqiy qiymati ma’lum bo‘lgan yangi asbobni tekshirish uchun 60 marta o‘lchangan. Jadvalda o‘lchash natijalarining haqiqiy xatoliklari joylashtirilgan. O‘lchash haqiqiy xatoliklarining normal taqsimlanish qonuniga bo‘ysinishini tekshiring. Buning uchun jadvaldagi berilganlar bo‘yicha quyidagilarni hisoblang:

1) O‘rta kvadratik xatolik;

2) o‘rta va ehtimoliy xatolik;

3) koeffitsiyentlar $k_1 = \frac{m}{\vartheta^*}$ va $k_2 = \frac{m}{z^*}$, ularni nazariy qiymatlari bilan taqqoslang;

4) gistogramma tuzing va 1 ilovadan foydalanib normal taqsimlanish egriligini tuzing;

5). Pirson kriteriyasi qo‘llash orqali statistik taqsimlanishni nazariyga yaqinlashish darajasini baholash ;

6) Tadqiqot natijalari bo‘yicha umumiy xulosa qiling.

Ko‘rsatma.

1. Har bir talaba o‘z (individual) topshiriqni tanlash uchun shifrning oxirgi raqami to‘g‘ri kelgan jadvaldagi xatoliklar nomerini chizib tashlaydi (ya’ni bajarayotganda hisobga olmaydi). Masalan, talaba shifri 2012128 bo‘lsin; № 8, 18, 28, 38, 48, 58 xatoliklar chizib tashlanadi;

2. Hamma hisoblar maxsus jadvallarga joylashtirilsin.(O‘quv qo‘llanmaning № 6.3 masalasini echimiga qarang)

Tar. №	Δ_i (mm)	Tar. №	Δ_i (mm)	Tar. №	Δ_i (mm)	Tar. №	Δ_i (mm)	Tar. №	Δ_i (mm)	Tar. №	Δ_i (mm)
1	+4,7	11	-12,0	21	-8,6	31	+7,9	41	+12,1	51	-2,6
2	+9,1	12	-7,0	22	+22,9	32	+0,5	42	-1,0	52	-22,4
3	-4,8	13	+2,6	23	-6,8	33	+18,2	43	-7,1	53	-0,5
4	-17,9	14	-4,8	24	-7,9	34	+0,1	44	+2,3	54	-4,1
5	-18,0	15	-2,1	25	+11,9	35	-13,5	45	+9,1	55	+4,9
6	+2,0	16	-8,1	26	+13,2	36	+6,4	46	-1,5	56	-0,5
7	+7,7	17	-6,7	27	+17,9	37	+2,6	47	0,0	57	-8,4
8	-13,3	18	+10,0	28	+10,0	38	+15,8	48	-4,0	58	-7,9
9	+6,3	19	-2,7	29	+12,4	39	-7,1	49	+3,8	59	+8,7
10	+4,2	20	-4,0	30	-0,1	40	-5,7	50	+1,2	60	-10,1

Masala №2. Bitta stansiyada geometrik nivellirlash o‘rta kvadratik xatosi m mm. ga teng. n stansiyada olingan nisbiy balandliklar yig‘indisining o‘rta kvadratik xatosini toping.

Variantlar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i (mm)	2,0	3,5	4,4	3,8	4,0	2,6	3,6	3,1	4,2	3,8
n_i	25	30	25	15	35	30	20	15	30	20

Masala №3. Chiziq uzunligi S va egilish burchagi ν ning 10 varianti jadvalda berilgan. Variantlardan bittasi bo‘yicha nisbiy balandlikni hisoblang $h = S * tg\nu + i - \vartheta + f$ va uning o‘rta kvadratik xatosini hisoblang, agar i=0,88m, m_i=0,005 m, $\vartheta = 2{,}98$ m, $m_\vartheta = 0{,}01$ m, f=0 bo‘lsa (hamma variantlar uchun).

Variant №	S_i (m)	m_{S_i} (m)	ν_i	m_{ν_i}
1	187,95	0,50	$-13^0 47',5$	$0',50$
2	246,84	0,70	$+11^0 52',0$	$0',70$
3	209,67	0,60	$-6^0 57',0$	$0',60$

4	165,35	0,15	$-5^0 30' ,0$	$1' ,00$
5	250,00	0,80	$+18^0 30' ,0$	$0' ,75$
6	68,30	0,20	$-5^0 22' ,0$	$1' ,00$
7	207,80	0,80	$+20^0 11' ,5$	$1' ,50$
8	167,40	0,60	$-15^0 47' ,0$	$1' ,10$
9	197,80	0,50	$+9^0 56' ,5$	$0' ,90$
10	225,85	0,24	$-11^0 16' ,5$	$0' ,40$

Masala №4. Bitta burchaknig teng aniqlikka ega bo‘lgan o‘lchash natijalari berilgan. Undan foydalanib oddiy o‘rtacha arifmetik, o‘rtacha arifmetiknig o‘rta kvadratik xatosini va ehtimoli 0,90 bo‘lgan haqiqiy qiymatni yopadigan ishonchli oraliqni tuzing.

Ko‘rsatma.

1) Har bir talaba jadvaldan shifrining oxirgi nomeriga to‘g‘ri keladigan natija nomerini chizib tashlaydi;

2) Hamma hisoblarni 8.1 masalada ko‘rsatilgan hisoblash sxemasi bo‘yicha bajarsin.

№	O‘lchashlar natijari x_i	№	O‘lchashlar natijalari x_i	№	O‘lchashlar natijalari x_i
1	$58^0 25' 41''$	6	$58^0 25' 33''$	11	$58^0 25' 35''$
2	$58^0 25' 38''$	7	$58^0 25' 35''$	12	$58^0 25' 36''$
3	$58^0 25' 34''$	8	$58^0 25' 37''$	13	$58^0 25' 37''$
4	$58^0 25' 40''$	9	$58^0 25' 35''$	14	$58^0 25' 37''$
5	$58^0 25' 41''$	10	$58^0 25' 36''$	15	$58^0 25' 39''$

Masala №5. Bir xil sharoitda va bitta o‘lchash asbobida bitta masofaning o‘lchash natijalari berilgan . Lekin, natijalar xar xil usullar soni bilan olingan. Umumiy o‘rta arifmetik, vazn birligidagi o‘rta kvadratik va umumiy qiymat xatoligini hisoblang.

Ko‘rsatma.

1) Har bir talaba jadvaldan shifrining oxirgi nomeriga to‘g‘ri keladigan natija nomerini chizib tashlaydi;

2) Hamma hisoblarni 9.7 masalada ko‘rsatilgan hisoblash sxemasi bo‘yicha bajarsin.

3) Alohida o‘lchashlarning vaznini usullar soniga to‘g‘ri proporsional deb qabul qilinsin.

№	O‘lchashlar natijalari S_i	Usullar soni n_i	№	O‘lchashlar natijalari S_i	Usullar soni n_i	№	O‘lchashlar natijalari S_i	Usullar soni n_i

	(m)			(m)			(m)	
1	182,38	1	6	182,37	2	11	182,44	1
2	182,42	2	7	182,40	4	12	182,38	2
3	182,36	3	8	182,39	6	13	182,37	3
4	182,40	2	9	182,35	3	14	182,40	4
5	182,41	5	10	182,43	4	15	182,41	2

Masala №6. 12 ta poligonning burchak bog‘lanmaslik xatoligi jadvalda berilganlari bo‘yicha bitta burchakni o‘lchash o‘rta kvadratik xatosini toping.

Poligon №	Variantlar									
	1		2		3		4		5	
	n_i	f_i	n_i	f_i	n_i	f_i	n_i	f_i	n_i	f_i
1	9	+1′,75	8	+1′,50	7	+1′,25	6	+1′,00	4	+0′,50
2	11	-2,25	10	-2,00	9	-1′,75	12	-2,50	10	-2,00
3	5	+0′,50	6	+0′,75	8	+1′,00	9	+1′,50	8	+0′,75
4	10	-1′,50	9	-0′,50	11	-2′,00	8	-1′,00	12	-2′,25
5	7	+0′,75	11	+1′,75	5	+0′,50	10	+2′,00	9	+1′,50
6	8	-2,00	7	-1′,50	10	-1′,50	7	-0′,75	12	-1′,50
7	13	+2′,25	12	+2′,00	13	+2′,50	14	+2′,25	7	+1′,00
8	6	-0′,75	5	-0′,50	6	-0′,50	5	-0′,75	5	-0′,25
9	8	+1′,50	8	+1′,75	8	+1′,25	8	+1′,00	14	+2′,75
10	10	-1′,75	10	-1′,50	10	-1′,00	11	-1′,75	4	-0′,25
11	4	+0′,50	4	+0′,75	4	+0′,25	4	+1′,00	10	+2′,00
12	12	-2′,25	13	-2′,50	12	-2′,00	13	-2′,75	5	-0′,75

poligon №	Variantlar									
	6		7		8		9		10	
	n_i	f_i	n_i	f_i	n_i	f_i	n_i	f_i	n_i	f_i
1	5	+0′,75	5	+1′,00	4	+0′,75	6	+0′,75	6	+1′,00
2	10	-1,75	11	-1,75	12	-2′,75	11	-2,00	12	-2,50
3	8	+1′,00	9	+1′,00	9	+1′,25	9	+1′,50	7	+1′,00
4	12	-2′,00	12	-1′,75	12	-1′,50	12	-1′,25	11	-1′,50
5	9	+1′,25	9	+1′,00	9	+0′,75	8	+0′,75	8	+0′,50
6	11	-1,50	11	-1′,25	13	-2′,00	13	-2′,25	13	-1′,50
7	7	+1′,25	7	+1′,50	8	+1′,50	8	+1′,75	7	+0′,75
8	5	-0′,50	5	-0′,75	6	-0′,50	6	-0′,75	6	-0′,25
9	13	+2′,50	12	+2′,50	11	+2′,25	11	+2′,50	12	+2′,25
10	4	0,00	4	-0′,75	5	-0′,50	5	-0′,25	5	-0′,75
11	10	+2′,25	11	+2′,25	11	+2′,00	13	+2′,25	13	+2′,50
12	5	-0′,25	5	-0′,25	4	-0′,25	4	-0′,50	4	-0′,25

Ko‘rsatma. Poligondagi burchak bog‘lanmaslik xatoliklari poligondagi burchak yig‘indisining haqiqiy xatoligi deb qaralmoqda. Aniqlikni baholash uchun haqiqiy xatoliklar bo‘yicha vazn birligidagi o‘rta kvadratik xatolikni hisoblash formulasini qo‘llang.

Masala №7. Uchburchakda bitta burchak n_1 marta m_1 o‘rta kvadratik xatolik bilan o‘lchangan. Ikkinchi burchak n_2 marta m_2 o‘rta kvadratik xatolik bilan o‘lchangan. Uchburchakdagi hamma uchta burchaklarning o‘rta kvadratik xatosi va vaznini toping

Variantlar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	4	5	6	7	8	9	10	3	4	12
m_i	12,0	5,0	4,0	3,2	2,3	4,5	2,5	6,2	7,1	1,5
n_i	6	8	9	10	4	3	2	6	7	5
m_i	10,0	7,0	8,0	6,1	9,2	5,3	4,4	2,7	2,5	4,3

Masala №8. Ikkita kuzatuvchi 12 masofani svetodalnomer bilan o‘lchagan. Ikkilangan o‘lchamning farqi bo‘yicha aniqlikni baholang. Bitta o‘lchamning va ikkita o‘lcham o‘rtachasining o‘rta kvadratik xatosini toping va nisbiy o‘rta kvadratik xatoni toping.

№	O‘lchashlar natijalari S_i (m)	
	1-chi kuzatuvchi	2-chi kuzatuvchi
1	214,945	214,951
2	231,408	231,406
3	243,021	243,041
4	247,370	247,362
5	267,394	267,367
6	275,732	275,792
7	276,375	276,396
8	292,277	292,297
9	324,436	324,466
10	347,305	347,336
11	350,447	350,435
12	368,915	368,926

Ko‘rsatma. Masofani o‘lchash natijalarini teng aniqlikka ega deb hisoblansin. Har bir talaba uch juft o‘lchamni hisobga olmay hisoblaydi i, i+1, i+2 (agar i=0 bo‘lsa, i=10 deb hisoblansin).

Masala №9. To‘g‘ri va teskari yo‘nalish bo‘yicha Sh klass nivelir yo‘li nisbiy balandliklarining farqi d_i berilgan va stansiyalar soni k_i berilgan. Bir kilometrga shart qilingan bitta yo'lning o'rta kvadratik xatosini toping va ushbu xatolikni ikkilangan yo'l uchun ham toping.

yo'l №	Variantlar									
	1		2		3		4		5	
	d_i(mm)	k_i	d_i(mm)	k_i	d_i(mm)	k_i	d_i(mm)	k_i	d_i(mm)	k_i
1	-3,1	8	+5,9	11	-3,7	10	+3,3	7	-3,5	12
2	+15,3	31	-18,1	43	+16,9	49	-13,8	37	+14,8	38
3	+8,2	25	-7,9	21	+7,8	19	-8,7	13	+9,1	17
4	-10,9	29	+19,6	46	-10,7	36	+11,1	35	-10,2	31
5	+19,8	41	-12,1	36	+13,9	29	-12,3	32	+12,2	34
6	-10,5	17	+10,9	24	-11,3	26	+11,2	15	-10,7	29
7	+12,6	22	-13,1	30	+12,9	27	-10,4	19	+13,4	27
8	-13,0	20	+13,6	28	-13,3	25	+12,8	28	-12,6	22
9	-11,4	18	+12,7	25	-11,7	23	+11,6	16	-9,8	26
10	+6,1	26	-7,5	19	+8,5	20	-7,3	23	+6,7	24

yo'l №	Variantlar									
	6		7		8		9		10	
	d_i(mm)	k_i	d_i(mm)	k_i	d_i(mm)	k_i	d_i(mm)	k_i	d_i(mm)	k_i
1	+6,2	13	-4,8	13	+4,5	14	-4,2	9	+5,3	10
2	-10,4	17	+15,2	39	-13,3	35	+14,9	35	-10,9	33
3	-8,3	23	+8,9	20	-6,3	15	+8,4	17	-9,1	14
4	+14,8	30	-10,1	33	+14,7	33	-11,3	33	+14,6	37
5	-12,4	30	+12,9	28	-9,9	29	+11,6	30	-10,8	26
6	+11,3	26	-9,5	26	+10,8	17	-10,3	19	+12,1	29
7	-11,3	32	+12,1	21	-12,7	22	+13,8	25	-9,9	19
8	+13,4	29	-13,8	29	+13,7	27	-12,7	22	+9,9	14
9	+12,9	23	+12,4	24	+12,6	31	-9,9	15	+13,7	28
10	-6,1	18	+7,7	17	-9,4	11	+16,4	40	-8,2	19

NAZORAT SAVOLLARI

1. O‘lchash va o‘lchashning natijasi deb nimaga aytiladi?
2. O‘lchash xatosi deb nima tushuniladi?
3. O‘lchashdagi xatolar nazariyasida qanday masalalar ko‘riladi?
4. O‘lchanadigan miqdorning /kattalikning/ haqiqiy qiymati aniq bo‘lmasa o‘lchash xatosini topish uchun nima qilish kerak?
5. Nima sababdan o‘lchashning yetarli va zaruriy aniqligini ta’minlash kerak?
6. O‘lchashdagi xatolar nazariyasi va tenglash hisoblarining umumnazariy mohiyati nimadan iborat?
7. Quyidagi atamalarni qanday tushunasiz; o‘lchangan va hisoblangan qiymatlar; bir jinsli va har xil jinsli o‘lchanadigan qiymatlar; zaruriy va ortiqcha o‘lchashlar; aniqligi teng va aniqligi noteng o‘lchash; nomustaqil va mustaqil qiymatlar?
8. Ortiqcha /qo‘shimcha/ o‘lchashlar nima uchun kerak? Ularning hisobdagi o‘rni.
9. O‘lchash aniqligini ta’minlovchi shart-sharoitlarni keltiring.
10. O‘lchashdagi xatolarning turlari.
11. Qo‘pol xatolarning sodir bo‘lish hollari, ularni topish usullari.
12. Muntazam xatolarni yo‘q qilish va kamaytirish tadbirlari.
13. Tasodifiy xato nima? Uning paydo bo‘lishi muqarrarligining sababi nimada?
14. Xatolar qanday shaklda ifodalanadi va o‘lchash xatolarini yozganda nechta ishonchli raqamni saqlab qolish kerak?
15. O‘lchashdagi tasodifiy xatolar kaysi qonunga bo‘ysunadi?
16. Yaxlitlash xatosi nima?
17. Yaxlitlash xatosi qaysi taqsimot qonuniga bo‘ysunadi?
18. Uzluksiz tasodifiy miqdor konkret qiymatining paydo bo‘lish ehtimoli nimaga teng?
19. Markaziy limitik teoremaning mohiyati nimada?
20. O‘lchash natijalarining aniqligini baholash me’yori
21. O‘lchashning o‘rta kvadratik xatosi deganda nimani tushunasiz?
22. O‘lchash aniqligini baholashda o‘rta kvadratik xatoning afzalligi nimada?
23. Tasodifiy va o‘rta kvadratik xatolar orasidagi farq nimada?
24. Yangi asbob yoki uslubning aniqligini qanday yoki baholash mumkin?
25. O‘lchangan qiymatning vazni nimani bildiradi? Vazn qanday topiladi?
26. Eng kichik kvadratlar prinsipining tamoyilining ma’nosi nimada?
27. O‘rta kvadratik xato 2; 1; 3; 2,5 mm bo‘lsa o‘lchashning vazni nimaga teng bo‘ladi?

28. Vazni ikkiga teng bo‘lgan uchburchakning o‘lchangan burchagining xatosi 3" . Qolgan ikkita burchakning xatosini toping. Agar ularning vaznlari 3 va 1 ga teng bo‘lsa.
29. Tenglama tuzatmalari deganda nimani tushunasiz?
30. «Qat’iy tenglash» atamasi nimani bildiradi?
31. Yagona miqdorni har xil bo‘lgan qiymatlari qatorini ishlab chiqishdan topilgan ishonchli qiymat, aniqligi bir xil bo‘lgan qiymatlarni ishlab chiqqandan topilgan bo‘lsa, qanday ataladi?
32. O‘lchangan yagona miqdor qiymatlari qatorini ishlab chiqishda qaysi maqsad uchun taxminiy qiymat /”soxta nol”/ qo‘llaniladi?
33. Vazn birligi xatosi deb nimaga aytamiz? O‘lchangan qiymatlar vazni vazn birligi xatosi orqali qanday topiladi?
34. O‘rta arifmetik va o‘rta vazniy qiymatlarning to‘g‘ri topilishini qanday nazorat qilish mumkin?
35. [vv] va [Pvv] qiymatlarning to‘g‘ri hisoblanganligini qanday nazorat qilish mumkin?
36. Burchak to‘rt marotaba teng aniqlikda o‘lchangan: $123^0$16'00"./15'50", 15'52", 16'02"/. Hisoblash vositalarini qo‘llamasdan eng ishonchli qiymatni toping.
37. YAgona burchak uch marta o‘lchangan har xil o‘rta kvadratik xato bilan: $65^0$46'00"/2'/; $65^0$46'15"/6"/; $65^0$46'12"/3"/. Burchakning eng ishonchli qiymatini toping.
38. Yig‘ma tasma bilan masofa o‘lchanganda topilgan qiymatga m_1, m_2, m_3 va m_4 xatolar ta’sir qiladi. Umumiy o‘rta kvadratik xatoni qanday topish mumkin?
39. Xatolarning o‘rin almashtirish /o‘zgartirish/ formulalarini keltirib chiqarishning asosiy bosqichlarini keltiring.
40. Xatolarning o‘rin almashtirish formulasini keltirib chiqarishda tasodifiy xatolarning to‘rtinchi xossasidan qanday foydalaniladi?
41. Xatolarning o‘rin almashtirish formulalarining qo‘llanishiga misol keltiring.
42. Xatolarning o‘rin almashtirish formulalari argumentlariga qo‘yiladigan asosiy talablarni keltiring.
43. Xatolarni o‘rin almashtirish formulalarini tadbiq qilish misollari.
44. $x=a+v$ va $u=a-v$ ikkita funksiya berilgan. Bu yerda a va v o‘lchangan qiymatlar. m_a va m_v ularning xatolari. x va u larning qaysi biri aniqroq o‘lchangan?

45. To‘g‘ri burchakli uchburchakda gipotenuza s=10 m, m=10mm xato bilan o‘lchangan, katet a=8m ham shunday aniqlikda o‘lchangan bo‘lsa, hisoblangan v katetning o‘rta kvadratik xatosini toping.
46. Masofaning gorizontal tasviri $S = S_{огй} Cos\delta$ formuladan hisoblab topilgan. Agarda S_{ogy}=50±0,01 m va δ=25^0±30” bo‘lsa S ning o‘rta kvadratik xatosini toping.
47. Masofa logarifmining o‘rtacha xatosi M_{eg} olti xonali logarifmning 8 birligiga tengligi hisobdan topilgan. Masofaning o‘rta kvadratik xatosi topilsin.
48. Agar barcha o‘lchovlarga m_Δ xatolik bilan topilgan tuzatmalarni teng tarqatsak, yoki har bir o‘lchovga o‘zining m_Δ xato bilan topilgan mustaqil tuzatmasini tarqatsak /kiritsak/ kaysi birida aniqroq natijaga erishamiz?
49. O‘lchashning vazni aniq bo‘lsa o‘lchangan qiymat funksiyasining vazni nimaga teng bo‘ladi?
50. Oddiy o‘rta arifmetik qiymat va umumiy o‘rta arifmetik qiymatning vaznlari nimaga teng?
51. Oddiy va umumiy o‘rta arifmetik miqdorlarning o‘rta kvadratik xatolarini ularning vaznlarini inobatga olgan holda qanday topamiz?
52. Avvaliy /aprior/ va oxiriy /apostreor/ vazn birligi xatolarining tushunchasini keltiring. Ular qanday topiladi?
53. μ_0 va μ o‘zaro teng bo‘lishlari kerakmi ? Teng bo‘lmaslik sabablari nimada?
54. Teng aniqlikli va har xil aniqlikli bir miqdor o‘lchovlari qatorini ishlab chiqish natijasida hisoblanadigan apostreor vazn birligi xatosining formulasini keltiring.
55. Yagona burchakni teng aniqlikda o‘lchangan beshta qiymati berilgan: $25^0$43'25"/43'46"; 43'54"; 44'02" va 43'50"/. Bir marotaba o‘lchashning o‘rta kvadratik xatosini toping.
56. Masofani uch marotaba har xil aniqlikdagi o‘lchami berilgan : 216, 151 m/ r=1.5/216,139m/0,5/; 216,152/2,0/. Vazn birligi o‘rta kvadratik xatosini toping.
57. Beshta tomonni qo‘sh o‘lchovlari natijasi berilgan: 51,612 va 51,621; 133,987 va 133,979; 164,033 va 164,038; 18,790 va 18,780; 84,342 va 84,353 m. Bir o‘lchovning o‘rta kvadratik xatosini toping.

1-ilova

QIYMATLARNI HISOBLASH UCHUN JADVAL

$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ell^{-\frac{t^2}{2}}$ argument bo'yicha $t = \frac{x - M(x)}{\sigma_x}$ yoki $t = \frac{\Delta}{m}$.

$\pm t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5641	0,5641	0,5641	0,5640	0,5637	0,5634	0,5731	0,5629	0,562	0,5619
0,1	0,5614	0,5607	0,5602	0,5595	0,5588	0,5579	0,5571	0,5561	0,5551	0,5541
0,2	0,5530	0,5518	0,5507	0,5494	0,5481	0,5469	0,5455	0,5440	0,5425	0,5409
0,3	0,5394	0,5377	0,5360	0,5343	0,5325	0,5306	0,5288	0,5268	0,5250	0,5228
0,4	0,5209	0,5187	0,5166	0,5143	0,5121	0,5098	0,5076	0,5052	0,5028	0,5003
0,5	0,4979	0,4954	0,4929	0,4903	0,4876	0,4849	0,4822	0,4796	0,4769	0,4740
0,6	0,4712	0,4684	0,4656	0,4626	0,4598	0,4568	0,4538	0,3507	0,4477	0,4446
0,7	0,4417	0,4385	0,4354	0,4322	0,4291	0,4258	0,4227	0,4195	0,4162	0,4129
0,8	0,4097	0,4064	0,4030	0,3998	0,3964	0,3932	0,3898	0,3864	0,3831	0,3797
0,9	0,3763	0,3729	0,3695	0,3661	0,3627	0,3594	0,3558	0,3524	0,3490	0,3456
1,0	0,342	0,339	0,336	0,332	0,329	0,326	0,322	0,318	0,315	0,312
1,1	0,308	0,304	0,302	0,298	0,295	0,292	0,288	0,284	0,282	0,278
1,2	0,275	0,272	0,268	0,265	0,262	0,258	0,256	0,252	0,248	0,246
1,3	0,242	0,240	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,214
1,4	0,212	0,209	0,206	0,203	0,200	0,197	0,194	0,192	0,189	0,186
1,5	0,183	0,180	0,178	0,175	0,172	0,170	0,167	0,165	0,162	0,159
1,6	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,145	0,142	0,140	0,138	0,135
1,7	0,133	0,131	0,129	0,126	0,124	0,122	0,120	0,118	0,116	0,114
1,8	0,112	0,110	0,108	0,106	0,104	0,102	0,100	0,098	0,096	0,094
1,9	0,093	0,091	0,090	0,088	0,086	0,084	0,083	0,081	0,080	0,078
2,0	0,076	0,076	0,075	0,073	0,072	0,069	0,068	0,066	0,065	0,063
2,1	0,062	0,061	0,060	0,058	0,057	0,056	0,055	0,053	0,052	0,051
2,2	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041
2,3	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037	0,036	0,036	0,034	0,033	0,032
2,4	0,032	0,031	0,030	0,030	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,025
2,5	0,025	0,024	0,024	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020
2,6	0,019	0,019	0,018	0,018	0,017	0,017	0,016	0,016	0,016	0,015
2,7	0,015	0,014	0,014	0,014	0,013	0,017	0,012	0,012	0,012	0,011
2,8	0,011	0,011	0,011	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009	0,009
2,9	0,008	008	0,008	0,008	0,008	0,07	0,007	0,007	0,007	0,007
3,0	0,006									

2- ilova

ЭНTIMOLLAR INTEGRALI QIYMATLARI JADVALI

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} \ell^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

T	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,00000	1,25	0,78870	2,50	0,98758
0,05	0,03988	1,30	0,80640	2,55	0,98922
0,10	0,07966	1,35	0,82298	2,60	0,99068
0,15	0,11924	1,40	0,83849	2,65	0,99195
0,20	0,15852	1,45	0,85294	2,70	0,99307
0,25	0,19741	1,50	0,86639	2,75	0,99404
0,30	0,23582	1,55	0,87886	2,80	0,99489
0,35	0,27366	1,60	0,89040	2,85	0,99563
0,40	0,31084	1,65	0,90106	2,90	0,99627
0,45	0,34729	1,70	0,91087	2,95	0,99682
0,50	0,38292	1,75	0,91988	3,00	0,99730
0,55	0,41768	1,80	0,92814	3,10	0,99806
0,60	0,45149	1,85	0,93569	3,20	0,99863
0,65	0,48431	1,90	0,94257	3,30	0,99903
0,70	0,51607	1,95	0,94882	3,40	0,99933
0,75	0,54675	2,00	0,95450	3,50	0,99953
0,80	0,57629	2,05	0,95964	3,60	0,99968
0,85	0,60468	2,10	0,96427	3,70	0,99978
0,90	0,63188	2,15	0,96844	3,80	0,99986
0,95	0,65789	2,20	0,97219	3,90	0,99990
1,00	0,68269	2,25	0,97555	4,00	0,99994
1,05	0,70628	2,30	0,97855	4,10	0,99996
1,10	0,72867	2,35	0,98123	4,20	0,99997
1,15	0,74986	2,40	0,98360	4,40	0,99999
1,20	0,76986	2,45	0,98571	4,50	0,999994

3- ilova

FUNKSIYA QIYMATLARI JADVALI

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1104	0,1206	0,1307	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3095	0,3205	0,3316	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
0,5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
0,9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6466
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3,4534	3,8002

4- ilova

ST'YUDENT t_β KOEFFITSIYENTLARI

z	$\Phi^{/}(t)=\beta$												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	14	29	45	62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	14	28	42	58	77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	13	27	41	57	74	94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	13	27	41	56	73	92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	13	26	40	55	72	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	13	26	40	55	71	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	13	26	40	54	71	90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	13	26	39	54	69	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
16	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
17	13	26	39	54	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
18	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
19	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	3,9
20	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
21	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
22	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
23	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
24	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
25	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
26	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
27	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
28	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
29	13	26	39	53	68	86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
30	13	26	39	53	68	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	13	26	39	53	68	85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	13	26	39	53	68	85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	13	26	39	53	68	85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4
∞	13	26	39	52	67	84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

5- ilova

EHTIMOLLAR $P(\chi^2)$ JADVALI

z	1	2	3	4	6
1	0,3173	0,1574	0,0833	0,0455	0,0143
2	0,6065	0,3679	0,2231	0,1353	0,0498
3	0,8013	0,5724	0,3916	0,2615	0,1116
4	0,9098	0,7358	0,5578	0,4060	0,1991
5	0,9626	0,8491	0,7000	0,5494	0,3062
6	0,9856	0,9197	0,8088	0,6767	0,4232
7	0,9948	0,9598	0,8850	0,7798	0,5398
8	0,9982	0,9810	0,9344	0,8571	0,6472
9	0,9994	0,9915	0,9643	0,9114	0,7399
10	0,9998	0,9963	0,9814	0,9473	0,8153
11	0,9999	0,9985	0,9907	0,9699	0,8734
12	1,0000	0,9994	0,9955	0,9834	0,9161
13	-	0,9998	0,9979	0,9912	0,9462
14	-	0,9999	0,9991	0,9955	0,9665
15	-	1,0000	0,9996	0,9974	0,9797
16	-	-	0,9998	0,9989	0,9881
17	-	-	0,9999	0,9995	0,9932
18	-	-	1,0000	0,9998	0,9962
19	-	-	-	0,9999	0,9979
20	-	-	-	1,0000	0,9989
21	-	-	-	-	0,9994
22	-	-	-	-	0,9997
23	-	-	-	-	0,9999
24	-	-	-	-	0,9999
25	-	-	-	-	1,0000
26	-	-	-	-	-
27	-	-	-	-	-
28	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-

EHTIMOLLAR $P(\chi^2)$ JADVALI

z	8	10	12	14	16
1	0,0047	0,0016	0,0005	0,0002	0,0001
2	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003
3	0,0460	0,0186	0,0074	0,0029	0,0011
4	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030
5	0,1562	0,0752	0,0348	0,0156	0,0068
6	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138
7	0,3326	0,1886	0,1006	0,0512	0,0251
8	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424
9	0,5341	0,3505	0,2133	0,1223	0,0669
10	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996
11	0,7133	0,5304	0,3626	0,2330	0,1411
12	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007	0,1912
13	0,8436	0,6939	0,5276	0,3738	0,2491
14	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3134
15	0,9238	0,8197	0,6790	0,5255	0,3821
16	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530
17	0,9665	0,9036	0,8001	0,6671	0,5238
18	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291	0,5925
19	0,9867	0,9539	0,8856	0,7837	0,6573
20	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166
21	0,9951	0,9789	0,9396	0,8696	0,7696
22	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159
23	0,9984	0,9913	0,9705	0,9269	0,8553
24	0,9991	0,9945	0,9799	0,9466	0,8881
25	0,9995	0,9967	0,9866	0,9617	0,9148
26	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362
27	0,9999	0,9988	0,9843	0,9813	0,9529
28	0,9999	0,9993	0,9964	0,9872	0,9658
29	1,0000	0,9996	0,9977	0,9914	0,9755

EHTIMOLLAR $P(\chi^2)$ JADVALI

z	18	20	22	24	26	30
1	0,0000	-	-	-	-	-
2	0,0001	0,0000	0,0000	-	-	-
3	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	-	-
4	0,0012	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	-
5	0,0029	0,0013	0,0005	0,0002	0,0001	-
6	0,0062	0,0028	0,0012	0,0005	0,0002	0,0000
7	0,0120	0,0056	0,0025	0,0011	0,0005	0,0001
8	0,0212	0,0103	0,0049	0,0023	0,0010	0,0002
9	0,0352	0,0179	0,0089	0,0043	0,0020	0,0004
10	0,0550	0,0293	0,0151	0,0076	0,0037	0,0009
11	0,0816	0,0453	0,0244	0,0127	0,0065	0,0016
12	0,1157	0,0671	0,0375	0,0203	0,0107	0,0028
13	0,1575	0,0952	0,0554	0,0311	0,0170	0,0047
14	0,2068	0,1301	0,0786	0,0458	0,0259	0,0076
15	0,2627	0,1719	0,1078	0,0651	0,0380	0,0119
16	0,3239	0,2202	0,1432	0,0895	0,0540	0,0180
17	0,3888	0,2742	0,1847	0,1194	0,0745	0,0263
18	0,4557	0,3328	0,2320	0,1550	0,0998	0,0374
19	0,5224	0,3946	0,2843	0,1962	0,1302	0,0518
20	0,5874	0,4579	0,3405	0,2424	0,1658	0,0699
21	0,6490	0,5213	0,3995	0,2931	0,2064	0,0920
22	0,7060	0,5830	0,4599	0,3472	0,2517	0,1185
23	0,7575	0,5919	0,5203	0,4038	0,3009	0,1494
24	0,8080	0,6968	0,5793	0,4616	0,3532	0,1848
25	0,8424	0,7468	0,6357	0,5194	0,4076	0,2243
26	0,8758	0,7916	0,6887	0,5760	0,4631	0,2676
27	0,9035	0,8308	0,7374	0,6303	0,5186	0,3142
28	0,9261	0,8645	0,7813	0,6815	0,5730	0,3632
29	0,9443	0,8929	0,8202	0,7289	0,6255	0,4140

A D A B I Y O T L A R :

1. Жўраев Д.О. Геодезик ўлчашларни математик қайта ишлаш назарияси. 1-қисм: Ўлчашлар хатоликлари назарияси. Ўқув қўлланма. Т., ТАҚИ, 2000, 142 бет

2. Жўраев Д.О. Геодезик ўлчашларни математик қайта ишлаш назарияси. 2-қисм: Энг кичик квадратлар усули. Ўқув қўлланма Т., ТАҚИ, 2000, 110 бет

3. Жўраев Д.О., Носирова Д.Р. Геодезия. Ўқув қўлланма. 1-қисм. Т., ТАҚИ. 2002, 157 бет.

4. Жўраев Д.О., Ковалев Н.В. Городской и земельный кадастр. Учебное пособие. Ташкент, ТАСИ, 2004, 116 с.

5. Жўраев Д.О. Геодезия. 2-қисм. Ўқув қўлланма. Тошкент, ТАҚИ, 2004, 217 бет.

6. Jo'rayev D.O. Geodeziya. 1-qism. O'quv qo'llanma. Toshkent, TDTU, 2006, 140 b

7. Jo'rayev D.O. Geodeziya. 2-qism. O'quv qo'llanma. Toshkent, «O'sbekiston», 2006, 207 b.

8. Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. Основы теории ошибок. Книга 1. – М.. МИИИГАиК, 2005, 66 с.

9. Маркузе Ю.И. Теория математической обработки геодезических измерений. Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений. Книга 2. – М.. МИИИГАиК, 2005, 280 с.

10. Куштин И.Ф. Геодезия: обработка результатов измерений: учебное пособие. –М, ИКЦ , МарТ. 2006. -288 с.

11. Большаков В.Д. «Теория ошибок наблюдений» М., «Недра», 1983, 223с.

12. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. «Теория математической обработки геодезических измерений» М., «Недра», 1977, 367 с.

13. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. М., «Недра», 1984, 352 с.

14. Гудков В.М., Хлебников А.В. Математическая обработка маркшейдерско-геодезических измерений. Учеб. для вузов. –М., Недра, 1990, -335 с.

M U N D A R I J A