G. Xudayberganov, A. Vorisov,
X. Mansurov, B. Shoimqulov

MATEMATIK ANALIZDAN MA'RUZALAR

I

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

G. Xudayberganov, A.K. Vorisov,
X.T. Mansurov, B.A. Shoimqulov

MATEMATIK ANALIZDAN MA'RUZALAR

I

5460100–«Matematika», 5440200–«Mexanika» bakalavr yo'nalishidagi talabalar uchun o'quv qo'llanma

«Voris-nashriyot»
Toshkent–2010

SO‘ZBOSHI

Respublikamizda «Ta’lim to‘g‘risida»gi Qonunning qabul qilinishi, «Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi» zamon talablariga javob beradigan mutaxassislarni tayyorlovchi oliy o‘quv yurtlariga, ayniqsa, universitetlarga katta mas’uliyat yukladi. Davlat ta’lim standartlari, o‘quv dasturlari asosida darsliklar, o‘quv qo‘llanmalarni yaratish masalasi yuzaga keldi.

Davlat ta’lim standartlari barcha fanlardan, jumladan, matematik analiz bo‘yicha mavjud darslik va qo‘llanmalarga yangicha nuqtayi nazardan qarashni taqozo etadi.

Matematik analiz oliy matematikaning fundamental bo‘limlaridan bo‘lib, matematikaning poydevori hisoblanadi.

Ma’lumki, matematik analiz kursi davomida ko‘pgina tushuncha va tasdiqlar, shuningdek, ularning tatbiqlari keltiriladi.

Ko‘p oliy o‘quv yurtlari talabalarining o‘qish davomida duch keladigan jiddiy fanlardan biri ham matematik analizdir.

Matematik analiz fanining asosiy vazifasi shu fanning tushuncha, tasdiqlar va boshqa matematik ma’lumotlar majmuasi bilan tanishtirishdangina iborat bo‘lmasdan, balki talabalarni mantiqiy fikrlashga, matematik usullarni amaliy masalalarni yechishga qo‘llashni o‘rgatishni ham o‘z ichiga oladi.

Mazkur o‘quv qo‘llanma, mualliflarning ko‘p yillik tajribalari asosida yozilgan bo‘lib, u ma’ruzalar shaklida bayon etilgan. Mavzularning ma’ruzalar bo‘yicha bayon etilishi talabalarni mavzu mazmuni va mohiyatini chuqurroq anglashga yordam beradi deb o‘ylaymiz.

Mualliflar har bir ma’ruzaning mazmuni ravon, matematik qat’iy, o‘z navbatida, talaba tomonidan tushunarli bo‘lishiga harakat qildilar.

O‘quv qo‘llanma ikki qismdan iborat. Mazkur birinchi qism 11 bobdan tashkil topgan bo‘lib, 52 ta ma’ruzaga ajratilgan. Unda haqiqiy sonlar nazariyasi; funksiya limiti va uzluksizligi; funksiyaning differensial va integral hisobi hamda sonli qatorlar mavzulari bayon etilgan.

22.1
X87

Taqrizchilar:

fizika-matematika fanlari doktori, professor
R.R. Ashurov,

fizika-matematika fanlari doktori, professor
R.N. G'anixo'jayev.

Mazkur o'quv qo'llanma universitetlarning mexanika-matematika fakultetlari, shuningdek, oliy matematika chuqur dastur asosida o'qitiladigan oliy o'quv yurtlari talabalariga mo'ljallangan.

Kitobni yozishda mualliflar ayni davrda ma'qullangan dasturga asoslandilar va O'zbekiston Milliy universitetida ko'p yillar davomida o'qigan ma'ruzalaridan foydalandilar.

O'quv qo'llanmada matematik analizning mavzulari ma'ruzalar tarzida yozilgan.

Kitobning mazkur I qismi 52 ma'ruzadan iborat bo'lib, haqiqiy sonlar, funksiya va uning limiti, uzluksizligi; funksiyaning hosila va differensiallari; funksiyaning aniqmas va aniq integrallari, sonli qatorlar mavzulari bayon etilgan.

ISBN 978-9943-375-30-7

Ma'ruzalarning mantiqiy ketma-ketlikda, bir-biriga uzviy bog'liq bo'lishiga, shuningdek, tushunchalarning ravon bayon qilinishiga, tasdiqlar isbotlarining aniq, ilmiylikka asoslangan bo'lishiga e'tibor qaratilgan. Har bir ma'ruza so'ngida nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo'lgan mashqlar keltirilgan. O'ylaymizki, bunday mashqlar talabalarni mustaqil ishlashga, mantiqiy fikrlashga o'rgatadi.

«Matematik analizdan ma'ruzalar» matematika va mexanika yo'nalishlari bo'yicha bakalavrlar tayyorlash o'quv rejasiga moslashtirib yozilgan bo'lsa-da, undan matematika kengroq o'qitiladigan oliy o'quv yurtlari talabalari ham foydalanishlari mumkin.

Kitob mualliflari, shu soha mutaxassislari O'zbekiston Milliy universitetida ko'p yillar mobaynida mazkur kurs bo'yicha o'qigan ma'ruzalaridan foydalandilar.

Kitobda matematik belgilardan keng foydalanish bilan bir qatorda tasdiqlar isbotining boshlanganligini «◀» belgi, tugaganligi esa «▶» belgi orqali ifodalangan.

Kitob qo'lyozmasini sinchiklab o'qib chiqib, uning ilmiy va metodik jihatdan yaxshilanishiga o'z hissalarini qo'shganlari uchun professorlar R.Ashurov, R.G'anixo'jayevlarga mualliflar o'z minnatdorchiligini bildiradilar.

1-BOB
DASTLABKI MA'LUMOTLAR

1- ma'ruza
To'plamlar. To'plamlar ustida amallar

1°. To'plam tushunchasi. To'plam matematikaning boshlang'ich, ayni paytda muhim tushunchalaridan biri. Uni ixtiyoriy tabiatli narsalarning (predmetlarning) ma'lum belgilar bo'yicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushuniladi. Masalan, javondagi kitoblar to'plami, bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami, $x^2 - 5x + 6 = 0$ tenglamaning ildizlari to'plami deyilishi mumkin.

To'plamni tashkil etgan narsalar *uning elementlari* deyiladi.

Matematikada to'plamlar bosh harflar bilan, ularning elementlari esa kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, A, B, C – to'plamlar, a, b, c – to'plamning elementlari.

Ba'zan to'plamlar ularning elementlarini ko'rsatish bilan yoziladi:

$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\},$$
$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n,\ ...\},$$
$$Z = \{...,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ ...\}.$$

Agar a biror A to'plamning elementi bo'lsa, $a \in A$ kabi yoziladi va «a element A to'plamga tegishli» deb o'qiladi. Agar a shu to'plamga tegishli bo'lmasa, uni $a \notin A$ kabi yoziladi va «a element A to'plamga tegishli emas» deb o'qiladi. Masalan, yuqoridagi A to'plamda $10 \in A$, $15 \notin A$.

Agar A chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u *chekli to'plam*, aks holda *cheksiz to'plam* deyiladi. Masalan, $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ chekli to'plam, bir nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami esa cheksiz to'plam bo'ladi.

1- ta'rif. A va B to'plamlari berilgan bo'lib, A to'plamning barcha elementlari B to'plamga tegishli bo'lsa, *A to'plam B ning qismi (qismiy to'plam)* deyiladi va

$$A \subset B \text{ (yoki } B \supset A)$$

kabi yoziladi.

A to'plamning elementlari orasida biror xususiyatga (bu xususiyatni P bilan belgilaymiz) ega bo'ladiganlari bo'lishi mumkin. Bunday xususiyatli elementlardan tuzilgan to'plam quyidagicha

$$\{x \in A | P\}$$

deb belgilanadi. Ravshanki,

$$\{x \in A | P\} \subset A$$

bo'ladi.

Agar A to'plam elementlari orasida P **xususiyatli elementlar** bo'lmasa, u holda

$$\{x \in A | P\}$$

bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'lib, uni *bo'sh to'plam* deyiladi. Bo'sh to'plam $\varnothing$ kabi belgilanadi. Masalan, $x^2 + x + 1 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlaridan iborat A bo'sh to'plam bo'ladi:

$$\varnothing = \{x \in A | x^2 + x + 1 = 0\}.$$

Har qanday A to'plam uchun

$$A \subset A, \ \varnothing \subset A$$

deb qaraladi.

Odatda, A to'plamning barcha qismiy to'plamlaridan iborat to'plam $F(A)$ kabi belgilanadi. Masalan, $A = \{a, b, c\}$ to'plam uchun

$$F(A) = \{\{a\}, \ \{b\}, \ \{c\}, \ \{a, b\}, \ \{a, c\}, \ \{b, c\}, \ \{a, b, c\}, \varnothing\}$$

bo'ladi.

2- ta'rif. A va B to'plamlari berilgan bo'lib,

$$A \subset B, \ B \subset A$$

bo'lsa, A va B bir biriga *teng to'plamlar* deyiladi va

$$A = B$$

kabi yoziladi.

Demak, $A = B$ tenglik A va B to'plamlarning bir xil elementlardan tashkil topganligini bildiradi.

2°. To'plamlar ustida amallar. Ikki A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

3- ta'rif. A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan E to'plam A va B *to'plamlar yig'indisi (birlashmasi)* deyiladi va $A \cup B$ kabi belgilanadi: $E = A \cup B$.

Demak, bu holda $a \in A \cup B$ dan $a \in A$ yoki $a \in B$, yoki bir vaqtda $a \in A$, $a \in B$ bo'lishi kelib chiqadi.

4- ta'rif. A va B to'plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan F to'plam A va B *to'plamlar ko'paytmasi (kesishmasi)* deyiladi va $A \cap B$ kabi belgilanadi:

$$F = A \cap B.$$

Demak, bu holda $a \in A \cap B$ dan bir vaqtda $a \in A$, $a \in B$ bo'lishi kelib chiqadi.

5- ta'rif. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan G to'plam *A to'plamdan B to'plamning ayirmasi* deyiladi *va* $A \backslash B$ kabi belgilanadi:

$$G = A \backslash B .$$

Demak, $a \in A \backslash B$ dan $a \in A$, $a \notin B$ bo'lishi kelib chiqadi.

6- ta'rif. A to'plamning B ga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan va B to'plamning A ga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tuzilgan to'plam A va B *to'plamlarning simmetrik ayirmasi* deyiladi va $A \Delta B$ kabi belgilanadi:

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Demak, $a \in A \Delta B$ bo'lishidan $a \in A$, $a \notin B$ yoki $a \in B$, $a \notin A$ bo'lishi kelib chiqadi.

7- ta'rif. Aytaylik, $a \in A$, $a \in B$ bo'lsin. Barcha tartiblangan (a, b) ko'rinishidagi juftliklardan tuzilgan to'plam A va B *to'plamlarning dekart ko'paytmasi* deyiladi va $A \times B$ kabi belgilanadi. Demak,

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, \;\; b \in B\}.$$

Xususan, $A = B$ bo'lganda $A \times A = A^2$ deb qaraladi.

8- ta'rif. Aytaylik, S va A to'plamlar berilgan bo'lib, $A \subset S$ bo'lsin. Ushbu

$$S \backslash A$$

to'plam A to'plamni S ga ***to'ldiruvchi to'plam*** deyiladi va CA yoki $C_S A$ kabi belgilanadi:

$$CA = S \backslash A .$$

To'plamlar ustida bajariladigan amallarning ba'zi xossalarini keltiramiz.

A, B va D to'plamlari berilgan bo'lsin.

1) $A \subset B$, $B \subset D$ bo'lsa, $A \subset D$ bo'ladi;

2) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ bo'ladi;

3) $A \subset B$ bo'lsa, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$ bo'ladi;

4) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ bo'ladi;

5) $(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D)$, $(A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$ bo'ladi;

6) $A \subset S$ bo'lsa, $A \cap CA = \varnothing$;

7) $C(A \cup B) = CA \cap CB$, bunda $A \subset S$, $B \subset S$;

8) $C(A \cap B) = CA \cup CB$, bunda $A \subset S$, $B \subset S$.

Bu xossalarning isboti yuqorida keltirilgan ta'riflardan kelib chiqadi.

1- misol. Ushbu

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \tag{1}$$

tenglik isbotlansin.

◀ $a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ bo'lsin. U holda

$$a \in (A \setminus B): \ a \in A, \ \ a \notin B$$

yoki

$$a \in (B \setminus A): \ a \in B, \ \ a \notin A$$

bo'ladi. Bundan esa

$$a \in (A \cup B), \ a \notin (A \cap B)$$

bo'lib,

$$a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B). \tag{2}$$

Aytaylik, $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ bo'lsin.

U holda

$$a \in (A \cup B): \ a \in A \ \text{ yoki } \ a \in B$$

$a \notin (A \cap B)$: $a \notin A$, $a \notin B$ yoki $a \in A, a \notin B$, yoki $a \notin A, a \in B$

bo'ladi. Bundan esa

$$a \in A \setminus B \ \text{ yoki } \ a \in B \setminus A$$

bo'lib, $$a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \tag{2}$$

(2) va (3) munosabatlardan (1) tenglikning o'rinli bo'lishi topiladi. ▶

To'plamlar ustida bajariladigan amallarni bayon etishda to'plamlarning qanday tabiatli elementlardan tuzilganligiga e'tibor qilinmadi.

Aslida, keltirilgan amallar biror universal to'plam deb ataluvchi to'plamning qismiy to'plamlari ustida bajariladi deb qaraladi. Masalan, natural sonlar to'plamlari ustida amallar bajariladigan bo'lsa, universal to'plam sifatida barcha natural sonlardan iborat N to'plamni olish mumkin.

3°. Matematik belgilar. Matematikada tez-tez uchraydigan so'z va so'z birikmalari o'rnida maxsus belgilar ishlatiladi. Ulardan muhimlarini keltiramiz:

1) «agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi» iborasi «$\Rightarrow$» belgi orqali yoziladi;

2) ikki iboraning ekvivalentligi ushbu «$\Leftrightarrow$» belgi orqali yoziladi;

3) «har qanday», «ixtiyoriy», «barchasi uchun» so'zlari o'rniga «$\forall$» belgi ishlatiladi;

4) «mavjudki», «topiladiki» so'zlari o'rniga «$\exists$» mavjudlik belgisi ishlatiladi.

Mashqlar

1. Ushbu
$$(A \cup B) \setminus D = (A \setminus D) \cup (B \setminus D)$$
tenglik isbotlansin.

2. Agar A va B chekli to'plamlar bo'lib, ularning elementlari soni mos ravishda $n(A)$, $n(B)$ bo'lsa,
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
bo'lishi isbotlansin.

3. Agar A chekli to'plam bo'lib, uning elementlarining soni n ga teng bo'lsa, bu to'plamning barcha qismiy to'plamlari to'plami $F(A)$ ning elementlari soni 2^n ga teng ekani isbotlansin.

2- ma'ruza

Akslantirishlar va ularning turlari

1°. Akslantirish tushunchasi. E va F to'plamlar berilgan bo'lsin.

1- ta'rif. Agar E to'plamdan olingan har bir x elementga biror f qoida yoki qonunga ko'ra F to'plamning bitta y elementi ($y \in F$) mos qo'yilgan bo'lsa, *E to'plamni F to'plamga akslantirish berilgan* deyiladi va

$$f : E \to F \quad \text{yoki} \quad x \xrightarrow{f} y\,,\ (x \in E,\ y \in F)$$

kabi belgilanadi. Bunda E to‘plam f akslantirishning *aniqlanish to‘plami* deyiladi.

1- misol. Ushbu $N = \{1,2,3,...\}$ va $N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

1) har bir natural n ($n \in N$) songa $\frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{n} \in N'\right)$ sonni mos qo‘ysak, unda

$$f:N \to N',\ n \xrightarrow{f} \frac{1}{n}$$

akslantirish hosil bo‘ladi. Uni $f(n) = \frac{1}{n}$ kabi ham yoziladi.

2) har bir natural n ($n \in N$) songa $\frac{1}{n^2}$ $\left(\frac{1}{n^2} \in N'\right)$ sonni mos qo‘ysak, unda

$$\varphi:N \to N',\ n \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{n^2}$$

akslantirishga ega bo‘lamiz: $\varphi(n) = \frac{1}{n^2}$.

3) har bir natural n ($n \in N$) songa 1 ($1 \in N'$) sonini mos qo‘yish natijasida

$$g:N \to N',\ n \xrightarrow{g} 1$$

akslantirish hosil bo‘ladi: $g(n) = 1$.

Aytaylik,

$$f:E \to F$$

akslantirish berilgan bo‘lsin. $x \in E$ elementga mos qo‘yilgan $y \in F$ element *x ning aksi (obrazi)* deyiladi va $y = f(x)$ kabi belgilanadi.

Endi $y \in F$ elementni olaylik. E to‘plamning shunday x elementlarini qaraymizki, $f(x) = y$ bo‘lsin. Bunday $x \in E$ elementlar $y \in E$ ning *asli (proobrazi)* deyiladi va $f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi:

$$f^{-1}(y) = \{x \in E \mid f(x) = y\}.$$

Agar $A \subset E$ bo'lsa, ushbu

$$\{f(x) \mid x \in A\}$$

to'plam A *to'plamning* F *dagi aksi* deyiladi va $f(A)$ kabi belgilanadi:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Agar $B \subset F$ bo'lsa, ushbu

$$\{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

to'plam B *to'plamning* E *dagi asli* deyiladi va $f^{-1}(B)$ kabi belgilanadi:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

2- misol. Faraz qilaylik, $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ va $M\{-1, +1\}$ to'plamlar berilgan bo'lib, ushbu

$$f : N \to M$$

akslantirish quyidagi

$$f(n) = (-1)^n$$

ko'rinishda bo'lsin.

Ravshanki, $5 \in N$ ning aksi $f(5) = -1$; $1 \in M$ ning asli esa $f^{-1}(1) = \{2, 4, 6, \dots\}$ bo'ladi. Shuningdek, $A = \{3, 4\} \subset N$ to'plamning aksi $f(A) = \{-1, 1\} = M$; $B = \{-1\} \subset M$ to'plamning asli esa

$$f^{-1}(B) = \{1, 3, 5, \dots\}$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik, A va B to'plamlar F to'plamning qismiy to'plamlari bo'lsin: $A \subset F$, $B \subset F$. Unda

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \tag{1}$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik, $x \in f^{-1}(A \cap B)$ bo'lsin. Unda $f(x) \in A \cap B$ bo'lib, $f(x) \in A$ va $f(x) \in B$ bo'ladi. Keyingi munosabatlardan $x \in f^{-1}(A), x \in f^{-1}(B)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Bundan esa

$$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \tag{2}$$

bo'lishini topamiz.

Aytaylik, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ bo'lsin. Unda $x \in f^{-1}(A)$ va $x \in f^{-1}(B)$ bo'lib, $f(x) \in A$, $f(x) \in B$ bo'ladi. Natijasi $f(x) \in A \cap B$ bo'lib, undan $x \in f^{-1}(A \cap B)$ bo'lishini topamiz. Bu esa

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B) \tag{3}$$

bo'lishini bildiradi.

(2) va (3) munosabatlardan (1) tenglikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. ▶

Yuqoridagidek,

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi isbotlanadi.

2°. Akslantirishning turlari. Aytaylik,

$$f : E \to F \tag{4}$$

akslantirish berilgan bo'lib, $f(E)$ esa E to'plamning aksi bo'lsin:

$$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

2- ta'rif. Agar (4) akslantirishda

$$f(E) \subset F$$

bo'lsa, (4) akslantirish *E to'plamni F to'plamning ichiga akslantirish* deyiladi.

Masalan,

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ ...\},\ N' = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ ...\right\}$$

to'plamlar uchun ushbu

$$f : N \to N',\ n \xrightarrow{f} \frac{1}{3n}$$

akslantirish N to'plamni N' to'plamning ichiga akslantirish bo'ladi.

3- ta'rif. Agar (4) akslantirishda

$$f(E) = F$$

bo'lsa, (4) akslantirish *E to'plamni F to'plamning ustiga akslantirish (syuryektiv akslantirish)* deyiladi.

Masalan, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $M = \{-1, 1\}$

to'plamlar uchun $n \xrightarrow{f} (-1)^n$

akslantirish N to'plamni M to'plamning ustiga akslantirish bo'ladi.

4- ta'rif. Agar (4) ustiga akslantirish bo'lib, bu akslantirish E to'plamning turli elementlarini F to'plamning turli elementlariga akslantirsa, (4) *inyektiv akslantirish* deyiladi.

5- ta'rif. Agar (4) ustiga akslantirish bo'lib, u inyektiv akslantirsh ham bo'lsa, (4) *o'zaro bir qiymatli akslantirish (moslik)* deyiladi.

Masalan,

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}, \ N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

to'plamlar uchun ushbu

$$f : N \to N', \ n \xrightarrow{f} \frac{1}{n}$$

akslantirish o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'ladi.

6- ta'rif. $f : E \to F$ akslantirish o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lsin. F to'plamning har bir y, $(y \in F)$ elementiga E to'plamning bitta x elementini $(x \in F)$ mos qo'yadigan va

$$g(y) = g(f(x)) = x$$

munosabat bilan aniqlanadigan

$$g : F \to E$$

akslantirish $f : E \to F$ ga nisbatan *teskari akslantirish* deyiladi va f^{-1} kabi belgilanadi:

$$f^{-1} : E \to F.$$

Demak, $f : E \to F$ ga teskari akslantirish mavjud bo'lishi uchun:

a) f ustiga akslantirish,

b) F to'plamdan olingan har bir y elementning E to'plamdagi asli

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$$

yagona bo'lishi kerak.

3°. Ekvivalent to'plamlar. Sanoqli to'plamlar. Ko'p holda to'plamlarni ularning tashkil etgan elementlari soni bo'yicha o'zaro solishtirishga to'g'ri keladi. Chekli to'plamlar solishtirilganda bir to'plamning elementlari soni ikkinchisidan ko'p yoki kam, yoki ularning elementlarining soni bir-biriga teng degan xulosaga kelinadi. Bu holda elementlari soni ko'p bo'lgan to'plamni *«quvvati» ko'proq* deyish mumkin.

Cheksiz to'plamlarni solishtirishda vaziyat boshqacharoq bo'ladi. Cheksiz to'plamlar ekvivalentlik tushunchasi yordamida solishtiriladi.

7- ta'rif. Agar $f : E \to F$ o'zaro bir qiymatli akslantirish (moslik) bo'lsa, E va F *ekvivalent to'plamlar* deyiladi va $E \sim F$ kabi belgilanadi.

Demak, E va F to'plamlarning ekvivalentligi ($E \sim F$) ularning elementlari o'zaro bir qiymatli moslikda ekanligini bildiradi.

Masalan,

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}, \quad N_1 = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\}$$

to'plamlar uchun

$$n \xrightarrow{f} 2n, \ (n \in N,\ 2n \in N_1)$$

akslantirish o'zaro bir qiymatli. Binobarin,

$$N \sim N_1$$

bo'ladi. (Bu holda $n \leftrightarrow 2n$ kabi yoziladi).

Aytaylik, $A,\ B,\ D$ to'plamlar berilgan bo'lsin. Unda

1) $A \sim A$,

2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$,

3) $A \sim B,\ B \sim D \Rightarrow A \sim D$

bo'ladi. Bu xossalarning isboti yuqorida keltirilgan ta'rifdan kelib chiqadi.

Ikki A va B to'plam o'zaro ekvivalent bo'lsa, ularni bir xil quvvatli to'plamlar deb qaraladi.

Demak, quvvatni ekvivalent to'plamlarning miqdoriy xarakteristikasi sifatida tushunish mumkin.

Chekli to'plamlarning o'zaro ekvivalentligi ularni tashkil etgan elementlar sonining bir-biriga tengligini bildiradi.

Umuman, A va B chekli to'plamlarning o'zaro ekvivalent bo'lishi uchun ularning elementlari soni bir xil bo'lishi zarur va yetarli:

$$A \sim B \Leftrightarrow n(A) = n(B)$$

bunda $n(G)$ — G to'plamning elementlari soni.

8- ta'rif. Natural sonlar to'plami N ga ekvivalent bo'lgan har qanday to'plam *sanoqli to'plam* deyiladi.

Masalan, ushbu

$$N_1 = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots\},$$

$$N_2 = \{1,\ 8,\ 27,\ 64,\ \ldots,\ n^3,\ \ldots\},$$

$$N_3 = \{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\}$$

to'plamlar sanoqli to'plamlar bo'ladi, chunki

$$n \leftrightarrow 2n,\ \ N \sim N_1;$$

$$n \leftrightarrow n^3,\ \ N \sim N_2;$$

$$n \leftrightarrow \frac{1}{n},\ \ N \sim N_3.$$

Natural sonlar to'plami N ga ekvivalent bo'lgan barcha to'plamlar sanoqli to'plamlar sinfini tashkil etadi. Bu sinf to'plamlarining quvvati bir xil bo'ladi.

Ravshanki,

$$N_1 \subset N,\ \ N_2 \subset N,\ \ N_3 \subset N$$

bo'ladi. Ayni paytda, yuqorida ko'rdikki,

$$N \sim N_1,\ \ N \sim N_2,\ \ N \sim N_3.$$

Bunday vaziyat (to'plamning qismi o'ziga ekvivalent bo'lishi) faqat cheksiz to'plamlardagina sodir bo'ladi.

Matematik analiz kursida tayin E va F to'plamlar uchun akslantirishlar $f: E \to F$ va ularning xossalari o'rganiladi.

Dastavval yuqoridagi to'plamlar sifatida haqiqiy sonlar to'plamini olamiz va uning xossalarini o'rganamiz.

Mashqlar

1. Agar $A = \{a,\ b\}$, $B = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ bo'lsa, A to'plamning B to'plamga akslantirishlari soni 9 ga teng bo'lishi isbotlansin.

2. Aytaylik, A sanoqli to'plam bo'lib, $x \in A$ bo'lsin. U holda $A \cup \{x\} \sim A$ bo'lishi isbotlansin.

3- ma'ruza
Haqiqiy sonlar

Son tushunchasi uzoq o'tmishdan ma'lum. Odamlar sanash taqozosi bilan dastlab 1, 2, 3, ... — natural sonlarni qo'llaganlar. So'ngra *manfiy son*, *ratsional son* va nihoyat, *haqiqiy son* tushunchasi kiritilgan va o'rganilgan.

Biz o'quvchiga o'rta maktab, kollej va litseylarning matematika kursidan natural, butun, ratsional sonlar, ular ustida bajariladigan amallar, amallarning xossalari, shuningdek, ularning to'g'ri chiziqda (sonlar o'qida) geometrik ifodalanishi ma'lum deb hisoblaymiz.

Haqiqiy sonlarning matematik analiz kursida muhimligini e'tiborga olib, ular haqidagi ma'lumotlarni talab darajasida bayon etamiz.

1°. Ratsional sonlar va cheksiz davriy o'nli kasrlar. Faraz qilaylik, $\frac{p}{q}$ biror musbat ratsional son bo'lsin. Bo'lish qoidasidan foydalanib p butun sonni q ga bo'lamiz. Agar p ni q ga bo'lish jarayonida biror qadamdan keyin qoldiq nolga teng bo'lsa, u holda bo'lish jarayoni to'xtab, $\frac{p}{q}$ kasr o'nli kasrga aylanadi. Odatda, bunday o'nli kasr chekli o'nli kasr deyiladi. Masalan, $\frac{59}{40}$ kasrda 59 ni 40 ga bo'lib, uni 1,475 bo'lishini topamiz:

$$\frac{59}{40} = 1,475\,.$$

Agar p ni q ga bo'lish jarayoni cheksiz davom etsa, ma'lum qadamdan keyin yuqorida aytilgan qoldiqlardan biri yana bir marta uchraydi, so'ng undan oldingi raqamlar mos tartibda takrorlanadi.

Odatda, bunday kasr *cheksiz davriy o'nli kasr* deyiladi. Takrorlanadigan raqamlar (raqamlar birlashmasi) o'nli kasrning davri bo'ladi.

Masalan, $\frac{1}{3}$ kasrda 1 ni 3 ga bo'lib, 0,333... bo'lishini topamiz:

$$\frac{1}{3} = 0,333...$$

Ushbu

$$0,333...\,,\ 1,4777...\,,\ 2,131313...$$

kasrlar cheksiz davriy o'nli kasrlardir. Ularning davri mos ravishda 3, 7, 13 bo'ladi va bu cheksiz davriy o'nli kasrlar quyidagicha

$$0,(3),\ 1,4(7),\ 2,(13)$$

yoziladi;

$$0,(3) = 0,333...$$

$$1,4(7) = 1,4777...$$

$$2,(13) = 2,131313...$$

Shuni ta'kidlaymizki, davri 9 ga teng bo'lgan cheksiz davriy o'nli kasrni chekli o'nli kasr qilib yoziladi. Masalan,

$$0,4999... = 0,4(9) = 0,5,$$

$$2,71999... = 2,71(9) = 2,72.$$

Har qanday chekli o'nli kasrni nollar bilan davom ettirib cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin. Masalan,

$$1,4 = 1,4000... = 1,4(0),$$

$$0,75 = 0,75000... = 0,75(0).$$

Demak, har qanday $\frac{p}{q}$ ratsional son cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalanadi. Aksincha, har qanday cheksiz davriy o'nli kasrni $\frac{p}{q}$ ko'rinishida yozish mumkin.

Masalan, ushbu

$$0,(3) = 0,333...,\quad 7,31(06) = 7,31060606...$$

cheksiz davriy o'nli kasrlarni qaraylik. Avvalo ularni

$$0,(3) = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ...,$$

$$7,31(06) = 7 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^6} + ...$$

ko'rinishda yozib, so'ng cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi formulasidan foydalanib topamiz:

$$0,(3) = 0,333... = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9} = \frac{1}{3},$$

$$7{,}31(06) = 7{,}31060606\ldots = \frac{731}{100} + \frac{\frac{1}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{731}{100} + \frac{1}{100}\cdot\frac{6}{99} =$$

$$= \frac{1}{100}\left(731 + \frac{2}{33}\right) = \frac{965}{132}.$$

Demak, ixtiyoriy ratsional son cheksiz davriy o'nli kasr orqali va aksincha, ixtiyoriy cheksiz davriy o'nli kasr ratsional son orqali ifodalanadi.

2°. Haqiqiy son tushunchasi. Cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar ham bo'ladi. Bu kesmalarni o'lchash jarayonida yuzaga kelishini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, biror J kesma hamda o'lchov birligi, masalan, metr berilgan bo'lsin. J kesmaning uzunligini hisoblash talab etilsin.

Aytaylik, 1 metr J kesmada 5 marta butun joylashib, kesmaning J_1 qismi ortib qolsin. Ravshanki J_1 ning uzunligi 1 metrdan kam bo'ladi. Bu holda J kesmaning uzunligini taxminan 5 m ga teng deb olish mumkin:

$$J \text{ uzunligi} \approx 5 \text{ m}.$$

Agar bu aniqlik yetarli bo'lmasa, o'lchov birligining $\frac{1}{10}$ qismini, ya'ni 1 dm ni olib, uni J_1 kesmaga joylashtiramiz. Aytaylik, 1 dm J_1 kesmada 7 marta butunlay joylashib, J_1 kesmaning J_2 qismi ortib qolsin. Bunda J_2 ning uzunligi 1 dm dan kichik bo'ladi. Bu holda J kesmaning uzunligi taxminan 5,7 m ga teng deb olinishi mumkin:

$$J \text{ uzunligi} \approx 5{,}7 \text{ m}.$$

Bu jarayonni davom ettira borish natijasida ikki holga duch kelamiz:

1) biror qadamdan keyin, masalan, $n+1$ qadamdan keyin o'lchov birligining $\frac{1}{10^n}$ qismi J_n kesmaga α_n marta butunlay joylashadi. Bu holda o'lchov jarayoni to'xtatilib,

$$J \text{ uzunligi} = 5{,}\underbrace{7\ \ldots\ \alpha_n}_{n \text{ ta raqam}}$$

bo'lishi topiladi.

2) o'lchash jarayoni to'xtovsiz davom (cheksiz davom) etadi. Bu holda J kesmaning uzunligining aniq qiymati deb ushbu

$$5,7\dots\alpha_n$$

cheksiz o'nli kasr olinadi:

$$J \text{ uzunligi} = 5,7\dots\alpha_n,\dots$$

Aytaylik, to'g'ri chiziqda biror O nuqta (koordinata boshi) hamda o'lchov birligi tayinlangan bo'lsin. U holda O nuqtadan o'ngda joylashgan har bir P nuqtaga, OP kesmani o'lchash natijasida hosil bo'lgan ushbu $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots$ cheksiz o'nli kasrni mos qo'yish mumkin. Bunda

$$\alpha_0 \in N \cup \{0\},\ \alpha_n \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},\ n \geq 1.$$

Bu moslik o'zaro bir qiymatli moslik bo'ladi. Ravshanki, yuqoridagi cheksiz o'nli kasrlar orasida cheksiz davriy o'nli kasrlar bo'lib, ular manfiy bo'lmagan ratsional sonlar bo'ladi. qolgan kasrlar esa ratsional sonlar bo'lmaydi.

1- ta'rif. Ushbu $$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots$$

ko'rinishidagi cheksiz o'nli kasr *manfiy bo'lmagan haqiqiy son* deyiladi, bunda $\alpha_0 \in N \cup \{0\},\ \alpha_n \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},\ n \geq 1.$

Agar $\exists n \geq 0;\ \alpha_n > 0$ bo'lsa, u *musbat haqiqiy son* deyiladi.

Manfiy haqiqiy sonning «—» ishora bilan olingani musbat haqiqiy son sifatida ta'riflanadi.

Barcha haqiqiy sonlardan iborat to'plam R bilan belgilanadi.

Barcha natural sonlar to'plami N, ratsional sonlar to'plami Q, haqiqiy sonlar to'plami R uchun $N \subset Q \subset R$ bo'ladi.

2- ta'rif. Ushbu $$R \backslash Q$$

to'plam elementi (son) *irratsional son* deyiladi.

Biz yuqorida, davri «9» ga teng bo'lgan cheksiz davriy o'nli kasrni chekli o'nli kasr qilib olinishini aytgan edik. Buning oqibatida bitta son ikki ko'rinishga, masalan, $\frac{1}{2}$ soni

$$\frac{1}{2} = 0,5000\dots \qquad \frac{1}{2} = 0,4999\dots$$

ko'rinishlarga ega bo'lib qoladi.

Umuman, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ $(\alpha_n \neq 0)$ ratsional son ushbu

1) $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., (\alpha_n - 1)999...,$

2) $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n 000...,$ kabi ko'rinishlarda yozilishi mumkin. Haqiqiy sonlarni solishtirishda ratsional sonning 1- ko'rinishidan foydalanamiz.

Ikkita manfiy bo'lmagan

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...,$$

$$b = \beta_0, \beta_1\beta_2...\beta_n...$$

haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

3- ta'rif. Agar $\forall n \geq 0$ da $\alpha_n = \beta_n$, ya'ni

$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \ ..., \ \alpha_n = \beta_n, ...$$

bo'lsa, a va b sonlar teng deyiladi va $a = b$ kabi yoziladi.

4- ta'rif. Agar

$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \ ..., \ \alpha_n = \beta_n, ...$$

tengliklarning hech bo'lmaganda bittasi bajarilmasa va birinchi bajarilmagan tenglik $n = k$ da sodir bo'lsa, u holda:

$\alpha_k > \beta_k$ bo'lganda *a soni b sonidan katta* deyiladi va $a > b$ kabi belgilanadi.

$\alpha_k < \beta_k$ bo'lganda *a soni b sonidan kichik* deyiladi va $a < b$ kabi belgilanadi.

Aytaylik, to'g'ri chiziq, unda tayin olingan O nuqta (koordinata boshi) va o'lchov birligi berilgan bo'lsin.

Haqiqiy sonlar to'plami R bilan to'g'ri chiziq nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin:

O nuqtadan o'ngda joylashgan P nuqtaga OP kesmaning uzunligiga teng x soni mos qo'yiladi (x son *P nuqtaning koordinatasi* deyiladi);

O nuqtadan charda joylashgan Q nuqtaga QO kesmaning uzunligiga teng x sonining minus ishorasi bilan olingan $-x$ soni mos qo'yiladi;

O nuqtaga nol soni mos qo'yiladi.

Arximed aksiomasi. Ixtiyoriy chekli haqiqiy a soni uchun shunday natural m soni topiladiki,

$$m > a$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n... > 0$$

bo'lsin. $m = \alpha_0 + 1$, $m \in N$ deb olinsa, unda 3- ta'rifga binoan $a < m$ bo'ladi. ▶

Kurs davomida tez-tez uchrab turadigan haqiqiy sonlar to'plamlarini keltiramiz.

Aytaylik, $a \in R$, $b \in R$, $a < b$ bo'lsin:

$[a,b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$ — segment deyiladi,

$(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ — interval deyiladi,

$[a,b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$ — yarim interval deyiladi,

$(a,b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$ — yarim interval deyiladi.

Bunda a va b sonlar $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ larning chegaralari deyiladi.

Shuningdek,

$$[a,+\infty) = \{x \in R \mid x \ge a\},,$$

$$(-\infty,a) = \{x \in R \mid x < a\},,$$

$$(-\infty,\infty) = R$$

deb qaraymiz.

Faraz qilaylik, a va b ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lib, $a < b$ bo'lsin. U holda

$$(a,b) \ne \varnothing$$

bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham,

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n... \ge 0,$$

$$b = \beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

bo'lib, $m \ge 0$ uchun

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, ...\alpha_{m-1} = \beta_{m-1} \text{ va } \alpha_m < \beta_m$$

bo'lsin. Agar k natural son m dan katta sonlar ichida eng kichigi ($\alpha_k < 9$) bo'lsa, unda

$$r = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m \alpha_{m+1} \ldots (\alpha_k + 1)$$

ratsional son uchun $a < r < b$ bo'ladi. Demak, $(a,b) \neq \varnothing$. ▶

Mashqlar

1. Ushbu $x^2 = 3$ tenglikni qanoatlantiruvchi ratsional sonning mavjud emasligi isbotlansin.

2. Agar $r \in Q, \alpha \in R \setminus Q$ bo'lsa, $\alpha + r \in R \setminus Q$ bo'lishi ko'rsatilsin.

3. $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall c \in R$ sonlari uchun

$$a > b, b > c \Rightarrow a > c$$

bo'lishi isbotlansin.

4- ma'ruza

Haqiqiy sonlar to'plamining chegaralari

Haqiqiy sonlar to'plamining chegaralanganligi, to'plamning aniq chegaralari tushunchalari matematik analiz kursida muhim rol o'ynaydi.

1°. Sonlar to'plamining aniq chegaralari. Biror $E \subset R$ to'plam berilgan bo'lsin.

1- ta'rif. Agar E to'plamning shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki, to'plamning ixtiyoriy elementlari uchun

$$x \leq x_0$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\exists x_0 \in E, \ \forall x \in E: \quad x \leq x_0$$

bo'lsa, x_0 soni E to'plamning *eng katta elementi* deyiladi va

$$x_0 = \max E$$

kabi belgilanadi.

2- ta'rif. Agar E to'plamning shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki, to'plamning ixtiyoriy elementlari uchun

$$x \geq x_0$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\exists x_0 \in E, \ \forall x \in E: \quad x \geq x_0$$

bo'lsa, x_0 soni to'plamning *eng kichik elementi* deyiladi va

$$x_0 = \min E$$

kabi belgilanadi. Masalan,

$$\max\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\right\} = 1,$$

$$\min\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = 1$$

bo'ladi.

3- ta'rif. Agar shunday M soni $(M \in R)$ topilsaki, E to'plamning ixtiyoriy elementlari uchun

$$x \le M$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\exists M \in R,\ \forall x \in E:\ \ x \le M$$

bo'lsa, E to'plam *yuqoridan chegaralangan* deyiladi, M soni to'plamning *yuqori chegarasi* deyiladi.

4- ta'rif. Agar shunday m soni topilsaki $(m \in R)$, E to'plamning ixtiyoriy x elementlari uchun

$$x \ge m$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\exists m \in R,\ \forall x \in E:\ x \ge m$$

bo'lsa, E to'plam *quyidan chegaralangan* deyiladi, m soni to'plamning *quyi chegarasi* deyiladi.

Ravshanki, to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lsa, uning yuqori chegaralari cheksiz ko'p, shuningdek, quyidan chegaralangan bo'lsa, uning quyi chegaralari cheksiz ko'p bo'ladi.

5- ta'rif. Agar $E \subset R$ to'plam ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, E *chegaralangan to'plam* deyiladi.

6- ta'rif. Agar ixtiyoriy M soni $(M \in R)$ olinganda ham shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki,

$$x_0 > M$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall M \in R,\ \exists x_0 \in E:\ \ x_0 > M$$

bo'lsa, to'plam *yuqoridan chegaralanmagan* deyiladi.

7- ta'rif. Agar ixtiyoriy m soni $(m \in R)$ olinganda ham shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki,

$$x_0 < m$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall m \in R, \quad \exists x_0 \in E: \quad x_0 < m$$

bo'lsa, to'plam *quyidan chegaralanmagan* deyiladi.

Masalan,

1) $E_1 = \{..., -2, -1, 0\}$ to'plam yuqoridan chegaralangan;

2) $E_2 = \{1, 2, 3, ...\}$ to'plam quyidan chegaralangan;

3) $E_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ to'plam chegaralangan;

4) $E_4 = \left\{x \in R \mid x > 0\right\}$ to'plam yuqoridan chegaralanmagan;

5) $E_5 = \left\{x \in R \mid x < 0\right\}$ to'plam quyidan chegaralanmagan bo'ladi.

Endi sonlar to'plamining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralari tushunchalarini keltiramiz.

Aytaylik, $E \subset R$ to'plam va $a \in R$ soni berilgan bo'lsin.

8- ta'rif. Agar

1) a soni E to'plamning yuqori chegarasi bo'lsa,

2) E to'plamning ixtiyoriy yuqori chegarasi M uchun $a \leq M$ tengsizlik bajarilsa, a soni E to'plamning *aniq yuqori chegarasi* deyiladi va $\sup E$ kabi belgilanadi:

$$a = \sup E.$$

Demak, E to'plamning aniq yuqori chegarasi, uning yuqori chegaralari orasida eng kichigi bo'ladi.

9- ta'rif. Faraz qilaylik, $E \subset R$ to'plam va $b \in R$ soni berilgan bo'lsin. Agar

1) b son E to'plamning quyi chegarasi bo'lsa,

2) E to'plamning ixtiyoriy quyi chegarasi m uchun $b \geq m$ tengsizlik bajarilsa, b soni E to'plamning *aniq quyi chegarasi* deyiladi va $\inf E$ kabi belgilanadi:

$$b = \inf E.$$

Demak, E to'plamning aniq quyi chegarasi, uning quyi chegaralari orasida eng kattasi bo'ladi.

«sup» va «inf»lar lotincha *«supremum»* va *«infimum»* so'zlaridan olingan bo'lib, ular mos ravishda eng yuqori, eng quyi degan ma'nolarni anglatadi.

1- teorema. Faraz qilaylik, $E \subset R$ to'plam va $a \in R$ soni berilgan bo'lsin. a soni E to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'lishi uchun

1) a soni E to'plamning yuqori chegarasi,

2) a sonidan kichik bo'lgan ixtiyoriy α ($\alpha < a$) uchun E to'plamda $x > \alpha$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonining topilishi zarur va yetarli.

◀ ***Zarurligi.*** Aytaylik,

$$a = \sup E$$

bo'lsin. 8- ta'rifga binoan:

1) $\forall x \in E$ uchun $x \leq a$, ya'ni a soni E to'plamning yuqori chegarasi;

2) a soni yuqori chegaralar orasida eng kichigi. Binobarin, a dan kichik α soni uchun $x > \alpha$ bo'lgan $x \in E$ soni topiladi.

Yetarliligi. Teoremaning ikkala sharti bajarilsin. Bu holda, ravshanki, $\alpha < a$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday α soni E to'plamning yuqori chegarasi bo'lolmaydi. Demak, a – to'plamning yuqori chegaralari orasida eng kichigi. Unda ta'rifga ko'ra

$$a = \sup E$$

bo'ladi. ▶

Xuddi shunga o'xshash quyidagi teorema isbotlanadi.

2- teorema. Faraz qilaylik, $E \subset R$ to'plam va $b \in R$ soni berilgan bo'lsin. b soni E to'plamning aniq quyi chegarasi bo'lishi uchun:

1) b soni E to'plamning quyi chegarasi,

2) b sonidan katta bo'lgan ixtiyoriy β ($\beta > b$) uchun E to'plamda $x < \beta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonining topilishi zarur va yetarli.

Eslatma. Agar $E \subset R$ to'plam yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda

$$\sup E = +\infty,$$

quyidan chegaralanmagan bo'lsa, u holda

$$\inf E = -\infty$$

deb olinadi.

2°. Aniq chegaralarning mavjudligi. Aytaylik,

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

musbat haqiqiy son bo'lsin, bunda

$$\alpha_0 \in N \cup \{0\}, \quad \alpha_n \in N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad n \geq 1.$$

Ushbu

$$a_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + ... + \frac{\alpha_n}{10^n},$$

$$b_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2...(\alpha_n + 1) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + ... + \frac{\alpha_n + 1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$a_n \le \alpha < b_n$$

bo'ladi.

Demak, ixtiyoriy haqiqiy son olinganda shunday ikkita ratsional son topiladiki, ulardan biri shu haqiqiy sondan kichik yoki teng, ikkinchisi esa katta bo'ladi.

Endi sonlar to'plamining aniq chegaralarining mavjudligi haqidagi teoremalarni keltiramiz.

3- teorema. Agar bo'sh bo'lmagan to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lsa, uning aniq yuqori chegarasi mavjud bo'ladi.

Bu teoremani

$$E \subset [0, +\infty), \quad E \ne \varnothing$$

to'plam uchun isbotlaymiz.

◀ E to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lsin:

$$\exists M \in R, \forall x \in E: \ x \le M.$$

Arximed aksiomasini e'tiborga olib, $M \in N$ deyish mumkin.

Endi E to'plam

$$\alpha = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2..., \quad (\alpha \in E)$$

elementlarining butun qismlaridan, ya'ni α_0 laridan iborat to'plamni F_0 deylik:

$$F_0 = \{\alpha_0 \in N \cup \{0\} \mid, \alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2... \in E\}.$$

Bu to'plam ham yuqoridan M soni bilan chegaralangan va $F_0 \ne \varnothing$.

Ravshanki, $F_0 \subset N \cup \{0\}$. Bundan F_0 to'plamning chekli ekanligini topamiz. Demak, F_0 to'plamning eng katta elementi mavjud. Uni c_0 deylik:

$$\max F_0 = c_0. \qquad (1)$$

E to'plamning $\quad c_0,\alpha_1\alpha_2...$

ko'rinishdagi barcha elementlaridan iborat to'plamni E_0 deb olamiz:

$$E_0 = \{c_0, \alpha_1\alpha_2 ... \in E\}$$

Ravshanki, $E_0 \subset E$, $E_0 \neq \varnothing$. Endi E_0 to'plam

$$c_0, \alpha_1\alpha_2 ...$$

elementlarining α_1 laridan iborat to'plamni olib, uni F_1 deylik:

$$F_1 = \{\alpha_1 \in \{0, 1, 2, ..., 9\} \mid c_0, \alpha_1\alpha_2 ... \in E_0\}.$$

Bu chekli to'plam bo'lib, $F_1 \neq \varnothing$ bo'ladi. Shuning uchun uning eng katta elementi mavjud. Uni c_1 deb olamiz:

$$\max F_1 = c_1. \tag{2}$$

E_0 to'plamning $\quad c_0, c_1\alpha_2\alpha_3 ...$

ko'rinishdagi barcha elementlaridan iborat to'plamni E_1 deb olamiz:

$$E_1 = \{c_0, c_1\alpha_2\alpha_3 ... \in E_0\}.$$

Ravshanki, $E_1 \subset E$, $E_1 \neq \varnothing$.

Endi E_1 to'plam $\quad c_0, c_1\alpha_2\alpha_3 ...$

elementlarining α_2 laridan iborat to'plamni olib, uni F_2 deylik:

$$F_2 = \{\alpha_1 \in \{0, 1, 2, ..., 9\} \mid c_0, c_1, \alpha_2 ... \in E_1\}.$$

Bu to'plam ham chekli va $F_2 \neq \varnothing$ bo'lib, uning eng katta elementi mavjud:

$$\max F_2 = c_2. \tag{3}$$

E_1 to'plamning $\quad c_0, c_1\alpha_2\alpha_3 ...$

ko'rinishdagi barcha elementlaridan iborat to'plamni E_2 deb olamiz:

$$E_2 = \{c_0, c_1c_2\alpha_3 ... \in E_1\}.$$

Bu jarayonni davom ettira borish natijasida

$$a = c_0, c_1c_2 ... c_n ...$$

haqiqiy son hosil bo'ladi.

Endi E to'plam va bu a son uchun 1- teorema ikkala shartining bajarilishini ko'rsatamiz:

1) Yuqoridagi (1) munosabatga ko'ra $\forall\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 ... \in E$ uchun $\alpha_0 \leq c_0$ bo'ladi.

Agar $\alpha_0 < c_0$ bo'lsa, u holda $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... < a$ bo'ladi.

Agar $\alpha_0 = c_0$ bo'lsa, u holda $c_0,\alpha_1\alpha_2... \in E_0$ bo'lib, (2) munosabatga ko'ra $\alpha_1 \le c_1$ bo'ladi.

Agar $\alpha_1 < c_1$ bo'lsa, u holda $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... < a$ bo'ladi.

Agar $\alpha_1 = c_1$ bo'lsa, u holda $c_0,\alpha_1\alpha_2... \in E_1$ bo'lib, (3) munosabatga ko'ra $\alpha_2 \le c_2$ bo'ladi.

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ikki holga duch kelamiz:

a) shunday $n \ge 0$ topiladiki,

$$\alpha_0 = c_0,\ \alpha_1 = c_1,\ ...\ \alpha_{n-1} = c_{n-1},\ \ \alpha_n < c_n$$

bo'lib, $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... < a$ bo'ladi.

b) ixtiyoriy $n \ge 0$ da $\alpha_n = c_n$ bo'lib, $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... = a$ bo'ladi. Demak, har doim $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... \le a$ munosabat o'rinli bo'ladi;

2) a sondan kichik bo'lgan ixtiyoriy

$$\beta = \beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

haqiqiy sonni olaylik:

$$\beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n... < c_0,c_1c_2...c_n...$$

U holda shunday $n \ge 0$ topiladiki,

$$\beta_0 = c_0,\ \ \beta_1 = c_1,\ \ ...\ \ \beta_{n-1} = c_{n-1},\ \ \beta_n < c_n$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib, $\forall x \in E_n \subset E$ uchun

$$x > \beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

bo'lishini topamiz.

Shunday qilib, teoremada keltirilgan E to'plam va a soni uchun 1- teorema ikkala shartining bajarilishi ko'rsatildi. Unda 1- teoremaga muvofiq to'plamning aniq yuqori chegarasi mavjud va

$$a = \sup E$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

Xuddi shunga o'xshash quyidagi teorema isbotlanadi.

4- teorema. Agar bo'sh bo'lmagan to'plam quyidan chegaralangan bo'lsa, uning aniq quyi chegarasi mavjud bo'ladi.

Eslatma. To'plamning aniq quyi hamda aniq yuqori chegaralari shu to'plamga tegishli bo'lishi ham mumkin, tegishli bo'lmasligi ham mumkin.

Mashqlar

1. Agar A va B to'plamlar ($A \subset R$, $B \subset R$) chegaralangan bo'lib, $A \subset B$ bo'lsa,

$$\sup A \leq \sup B, \quad \inf A \geq \inf B$$

bo'lishi isbotlansin.

2. Agar $\forall x \in A$ $(A \subset R)$ uchun $x \leq \alpha$ $(\alpha \in R)$ bo'lsa, $\sup A \leq \alpha$ bo'lishi isbotlansin.

5- ma'ruza

Haqiqiy sonlar ustida amallar

1°. Ikki haqiqiy sonlar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati. Avval aytganimizdek, ratsional sonlar ustida, xususan, chekli o'nli kasrlar ustida bajariladigan amallar va ularning xossalari ma'lum deb hisoblaymiz.

Aytaylik, ikkita musbat

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$$
$$b = \beta_0, \beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$$

haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Unda $n \geq 0$ bo'lganda ushbu

$$a_n' = a_0, a_1a_2\ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

$$a_n'' = a_0, a_1a_2\ldots(a_n + 1) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$a_n' \leq a \leq a_n'', \tag{1}$$

shuningdek,

$$b_n' = \beta_0, \beta_1\beta_2\ldots\beta_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_n}{10^n},$$

$$b_n'' = \beta_0, \beta_1\beta_2\ldots(\beta_n + 1) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_n + 1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$b_n' \leq b \leq b_n'' \tag{1}$$

bo'ladi.

Endi (1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning yig'indisi $a_n' + b_n'$ lardan iborat $\{a_n' + b_n'\}$ to'plamni qaraymiz. Ravshanki, bu to'plam yuqoridan chegaralangan. Unda 4- ma'ruzadagi 3- teoremaga ko'ra $\{a_n' + b_n'\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasi mavjud bo'ladi.

1- ta'rif. $\{a_n' + b_n'\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasi *a* va *b haqiqiy sonlar yigindisi* deyiladi va $a + b$ kabi belgilanadi:

$$a + b = \sup_{n\geq 0}\{a_n' + b_n'\}.$$

(1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning ko'paytmasi $a_n' \cdot b_n'$ lardan iborat $\{a_n' \cdot b_n'\}$ to'plamni qaraymiz. Bu to'plam yuqoridan chegaralangan bo'ladi. Shuning uchun uning aniq yuqori chegarasi mavjud bo'ladi.

2- ta'rif. $\{a_n' \cdot b_n'\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasi *a* va *b haqiqiy sonlar ko'paytmasi* deyiladi va $a \cdot b$ kabi belgilanadi:

$$a \cdot b = \sup_{n\geq 0}\{a_n' \cdot b_n'\}.$$

(1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning $\frac{a_n'}{b_n''}$ nisbatidan iborat $\left\{\frac{a_n'}{b_n''}\right\}$ to'plam yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

3- ta'rif. $\left\{\frac{a_n'}{b_n''}\right\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasi *a sonining b soniga nisbati* deyiladi va $\frac{a}{b}$ kabi belgilanadi:

$$\frac{a}{b} = \sup_{n\geq 0}\left\{\frac{a_n'}{b_n''}\right\}.$$

Aytaylik *a* va *b* musbat haqiqiy sonlar bo'lib, $a > b$ bo'lsin.

4- ta'rif. $\{a_n' - b_n'\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasi *a sonidan b sonining ayirmasi* deyiladi va $a - b$ kabi belgilanadi:

$$a - b = \sup_{n\geq 0}\{a_n' - b_n''\}.$$

Eslatma. 1) Haqiqiy sonlar ustida bajariladigan qo'shish, ko'paytirish, ayirish va bo'lish amallarini to'plamning aniq quyi chegarasi orqali ham ta'riflash mumkin.

Masalan, a va b haqiqiy sonlar yig'indisi quyidagicha ta'riflanadi:

$$a + b = \inf_{n\geq 0}\{a_n'' + b_n''\}.$$

Haqiqiy sonlarda, yuqorida kiritilgan amallar o'rta maktab matematika kursida o'rganilgan amallarning barcha xossalariga ega.

2°. Haqiqiy sonning darajasi. Avval haqiqiy sonning 0- hamda n- darajalari ($n\in N$) quyidagicha

$$a^0 = 1,$$

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{ta}},\quad (n\in N)$$

aniqlanishini ta'kidlaymiz.

Teorema (isbotsiz). Faraz qilaylik, $a > 0$ va $n\in N$ bo'lsin. U holda shunday yagona musbat x soni topiladiki,

$$x^n = a$$

bo'ladi.

5- ta'rif. Musbat haqiqiy a sonining n darajali ildizi deb, ushbu

$$x^n = a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi yagona x soniga aytiladi va

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

kabi belgilanadi.

Aytaylik, a musbat haqiqiy son, r esa musbat ratsional son bo'lsin:

$$a > 0,\quad r = \frac{m}{n},\quad m, n\in N.$$

Bu holda a sonining r- darajasi quyidagicha

$$a^r = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

kabi aniqlanadi.

6- ta'rif. Faraz qilaylik, $a > 1$, $b > 0$ haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin, a sonining b- darajasi deb ushbu $\{a^{b_n'}\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasiga aytiladi:

$$a^b = \sup_{n\geq 0}\{a^{b_n'}\},\ \text{bunda}\ b_n' = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n,\ b = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$$

3°. Haqiqiy sonning absolut qiymati. Aytaylik, $x\in R$ son berilgan bo'lsin. Ushbu

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar} \quad x \geq 0 \quad \text{bo‘lsa,} \\ -x, & \text{agar} \quad x < 0 \quad \text{bo‘lsa} \end{cases}$$

miqdor *x sonining absolut qiymati* deyiladi.

Haqiqiy sonning absolut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1) $x \in R$ son uchun

$$|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|$$

munosabatlar o‘rinli.

2) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a,$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \quad (a > 0).$$

3) $x \in R$, $y \in R$ sonlar uchun

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$
$$|x - y| \geq |x| - |y|,$$
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$
$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \qquad (y \neq 0)$$

bo‘ladi.

Bu xossalarning isboti bevosita sonning absolut qiymati ta’rifidan kelib chiqadi. Ulardan birini, masalan, $|x + y| \leq |x| + |y|$ bo‘lishini isbotlaymiz.

◀ Aytaylik, $x + y > 0$ bo‘lsin. Unda $|x + y| = x + y$ bo‘ladi. $x \leq |x|$, $y \leq |y|$ bo‘lishini e’tiborga olib topamiz:

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

Endi $x + y < 0$ bo‘lsin.

U holda $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y)$ bo‘ladi. $-x \leq |x|, -y \leq |y|$ bo‘lishini e’tiborga olib topamiz:

$$|x + y| = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|. \blacktriangleright$$

1- misol. Ushbu

$$|3x - 1| \leq |2x - 1| + |x| \qquad (3)$$

tengsizlik x ning qanday qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi?

◀ Sonning absolut qiymati xossasidan foydalanib topamiz:

$$|3x-1| = |(2x-1)+x| \le |2x-1| + |x|.$$

Demak, (3) tengsizlik ixtiyoriy $x \in R$ uchun o'rinli bo'ladi. ▶

Barcha manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plamini R_+ bilan belgilaylik. Ravshanki, $R_+ \subset R$.

Har bir $x \in R$ haqiqiy songa uning absolut qiymati $|x|$ ni mos qo'yish bilan ushbu

$$f : x \to |x| \qquad (f : R \to R_+)$$

akslantirishga ega bo'lamiz.

Demak, haqiqiy sonning absolut qiymati R to'plamni R_+ to'plamga akslantirish deb qaralishi mumkin.

Ixtiyoriy $x \in R$, $y \in R$ sonlarni olaylik. Ushbu

$$|x-y|$$

miqdor x va y *nuqtalar orasidagi masofa* deyiladi va $d(x, y)$ kabi belgilanadi:

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Masofa quyidagi xossalarga ega:

1) $d(x,y) \ge 0$ va $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $d(x,y) = d(y,x)$;

3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$, $(z \in R)$.

4°. Bernulli tengsizligi. Nyuton binomi formulasi. Ixtiyoriy $x \ge -1$ $(x \in R)$ hamda ixtiyoriy $n \in N$ uchun ushbu

$$(1+x)^n \ge 1 + nx \tag{4}$$

tengsizlik o'rinli.

◀ Bu tengsizlikni matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

Ravshanki, $n = 1$ da (4) tengsizlik (tasdiq) o'rinli bo'ladi:

$$1 + x = 1 + x.$$

Endi $n \in N$ da (4) munosabat o'rinli deb, uni $n + 1$ uchun ham o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. (4) tengsizlikning har ikki tomonini $1+x$ ga ko'paytirib topamiz:

$$(1+x)^{n+1} \ge (1+nx)\cdot(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \ge 1 + (n+1)x.$$

Matematik induksiya usuliga binoan (4) munosabat ixtiyoriy $n \in N$ uchun o'rinli bo'ladi. ▶

(4) tengsizlik **Bernulli tengsizligi** deyiladi.

Endi Nyuton binomi formulasini keltiramiz.

Ma'lumki, $a \in R$, $b \in R$ da

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

bo'ladi. Umuman, ixtiyoriy $n \in N$ da

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 a^{n-1} \cdot b + \ldots + C_n^k \cdot a^{n-k} b^k + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n \cdot b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (5)$$

bo'ladi, bunda

$$C_n^0 = 1$$
$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}, \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

(5) tenglik ham matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi.

◀ Ravshanki, $n=1$ da $C_1^0 \cdot a + C_1^1 \cdot b = a + b$. Demak, bu holda (5) tenglik o'rinli. Endi (5) tenglik n uchun o'rinli bo'lsin deb, uni $n+1$ uchun ham o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. (5) tenglikning har ikki tomonini $a+b$ ga ko'paytirib topamiz:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1}.$$

Ravshanki,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-2))}{k!}(n-(k-1)+k) =$$
$$= \frac{n(n+1)((n+1)-1)\ldots((n+1)-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k.$$

Demak,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$$

bo'ladi. Bu esa (5) tenglik $n+1$ bo'lganda ham bajarilishini ko'rsatadi.▶

Odatda, (5) tenglik **Nyuton binomi formulasi** deyiladi.

5°. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsiri. Ma'lumki, ushbu

$$\{x \in R: \ a \le x \le b\} = [a, b]$$

to'plam *segment* deb ataladi.

Aytaylik, $[a_1, b_1]$ va $[a_2, b_2]$ segmentlar berilgan bo'lsin. Agar

$$[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2]$$

bo'lsa, $[a_1, b_1]$ *segment* $[a_2, b_2]$ *segmentning ichiga joylashgan* deyiladi. Bu holda $a_1 \le a_2 < b_2 \le b_1$ bo'ladi.

*7- **ta'rif.*** Agar

$$[a_1, b_1], \ [a_2, b_2], \ ..., \ [a_n, b_n], \ ... \tag{6}$$

segmentlar ketma-ketligi quyidagi

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

munosabatda, ya'ni $\forall n \in N$ da

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

bo'lsa, (6) *ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi* deyiladi.

Teorema. Aytaylik,

$$[a_1, b_1], \ [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ...$$

segmentlar ketma-ketligi quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\forall n \in N$: $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$;

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in N$, $n > n_0$: $b_n - a_n < \varepsilon$ bo'lsin.

U holda shunday $c \in R$ mavjud bo'ladiki, $c \in [a_n, b_n]$, $(n = 1, 2, 3, ...)$ bo'lib, bunday c yagona bo'ladi.

◀ Teoremada qaralayotgan segmentlar ketma-ketligi ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi bo'ladi. Ravshanki, bu holda ushbu

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n < b_n \le b_{n-1} \le ... \le b_2 \le b_1$$

munosabat bajariladi.

Endi a_1, a_2, ..., a_n sonlaridan tashkil topgan

$$E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

to'plamni qaraymiz. Bu to'plamning yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy natural m sonini olib, uni tayinlaymiz.

Agar $n \le m$ bo'lsa, $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$ bo'lib, $a_n \le a_m < b_m \le b_n$, ya'ni $a_n < b_m$ bo'ladi.

Agar $n > m$ bo'lsa, $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m]$ bo'lib, $a_m \le a_n < b_n \le b_m$, ya'ni $a_n < b_m$ bo'ladi.

Aniq yuqori chegara haqidagi teoremaga ko'ra

$$\sup E = c \quad (c \in R)$$

mavjud bo'ladi.

To'plamning aniq yuqori chegarasi ta'rifiga binoan

$$\forall n \le N \text{ da } a_n \le c \text{ va } \forall m \le N \text{ da } c \le b_m \text{ bo'ladi.}$$

Demak,

$$\forall n \le N \text{ da } c \in [a_n, b_n].$$

Agar shu nuqtadan farqli va barcha segmentlarga tegishli c' $(c' \in [a_n, b_n], \forall n \in N)$ mavjud deb qaraladigan bo'lsa, unda

$$b_n - a_n \ge |c - c'| > 0$$

bo'lib, bu teoremaning 2- shartiga zid bo'ladi. Demak, $c = c'$. ►

Odatda, bu teorema ichma-ich joylashgan segmentlar prinsiri deyilib, u haqiqiy sonlar to'plamining uzluksizlik (to'liqlik) xossasini ifodalaydi.

Mashqlar

1. Ixtiyoriy $x_1, x_2, ..., x_n$ haqiqiy sonlar uchun

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \le |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

bo'lishi isbotlansin.

2. Ikki haqiqiy son yig'indisi ta'rifidan foydalanib, ushbu

$$a + b = b + a, \quad a + a = 2a$$

tengliklar isbotlansin.

2- B O B
SONLAR KETMA-KETLIGI UCHUN LIMITLAR NAZARIYASI

6- ma'ruza
Sonlar ketma-ketligi va ularning limiti

1°. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi. Biz birinchi bobda ixtiyoriy E to'plamni F to'plamga akslantirish:

$$f : E \to F$$

tushunchasi bilan tanishgan edik.

Endi $E=N$, $F=R$ deb, har bir natural n songa biror haqiqiy x_n sonini mos qo'yuvchi

$$f : n \to x_n, \quad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (1)$$

akslantirishni qaraymiz.

1- ta'rif. (1)- akslantirishning akslaridan iborat ushbu

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \qquad (2)$$

to'plam *sonlar ketma-ketligi* deyiladi. Uni $\{x_n\}$ yoki x_n kabi belgilanadi.

x_n (n=1, 2, 3, ...) sonlar (2) *ketma-ketlikning hadlari* deyiladi. Masalan,

1) $x_n = \frac{1}{n}$: $1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ ..., \ \frac{1}{n}, \ ...,$

2) $x_n = (-1)^n$: $-1, \ 1, \ -1, \ ..., \ (-1)^n, ...$

3) $x_n = \sqrt[n]{n}$: $1, \ \sqrt{2}, \ \sqrt[3]{3}, \ ..., \ \sqrt[n]{n}, \ ...$

4) $x_n = 1$: $1, \ 1, \ 1, \ ..., \ 1, \ ...$

5) $0,3; \ \ 0,33; \ \ 0,333; \ \ ...; \ \ 0,\underbrace{333...3}_{n \text{ ta}};$

lar sonlar ketma-ketliklaridir.

Biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2- ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy x_n (n = 1, 2, 3,...) uchun $x_n \le M$ tengsizlik bajarilsa (ya'ni $\exists M, \forall n \in N : \ x_n \le M$ bo'lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik *yuqoridan chegaralangan* deyiladi.

3- ta'rif. Agar shunday o'zgarmas m soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy x_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ uchun $x_n \geq m$ tengsizlik bajarilsa (ya'ni $\exists m, \forall n \in N : x_n \geq m$ bo'lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik *quyidan chegaralangan* deyiladi.

4- ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa (ya'ni $\exists m, M, \ \forall n \in N : m \leq x_n \leq M$ bo'lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik *chegaralangan* deyiladi.

1- misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n}{4+n^2}, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

ketma-ketlikning chegaralanganligi isbotlansin.

◀ Ravshanki, $\forall n \leq N$ uchun

$$x_n = \frac{n}{4+n^2} > 0$$

bo'ladi. Demak, qaralayotgan ketma-ketlik **quyidan chegaralangan.**

Ma'lumki,

$$0 \leq (n-2)^2 = n^2 - 4n + 4$$

bo'lib, undan $4 \leq 4 + n^2$, ya'ni

$$\frac{n}{4+n^2} \leq \frac{1}{4}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. Demak, ketma-ketlik chegaralangan. ▶

5- ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$\forall M \in R, \ \exists n_0 \in N : x_{n_0} > M$$

bo'lsa, *ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan* deyiladi.

2°. Sonlar ketma-ketligining limiti. Aytaylik, $a \in R$ son hamda ixtiyoriy musbat ε son berilgan bo'lsin.

6- ta'rif. Ushbu

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R | a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

to'plam *a nuqtaning* ε- *atrofi* deyiladi.

Faraz qilaylik $\{x_n\}$ ketma-ketlik va $a \in R$ soni berilgan bo'lsin.

7- ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday n_0 natural soni mavjud bo'lsaki, $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{3}$$

tengsizlik bajarilsa, (ya'ni

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, \quad \forall n > n_0 : |\, x_n - a \,| < \varepsilon$$

bo'lsa), a son $\{x_n\}$ *ketma-ketlikning limiti* deyiladi va

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{yoki} \quad n \to \infty \ \text{ da } \ x_n \to a$$

kabi belgilanadi.

Ravshanki, yuqoridagi (3) tengsizlik uchun

$$|\, x_n - a \,| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon\,,$$

ya'ni $x_n \in U_\varepsilon(a)$, $(n > n_0)$ bo'ladi. Shuni e'tiborga olib, ketma-ketlikning limitini quyidagicha ta'riflasa bo'ladi.

8- ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(a)$ atrofi olinganda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan ko'rinadiki, ε ixtiyoriy musbat son bo'lib, natural n_0 soni esa ε ga va qaralayotgan ketma-ketlikka bog'liq ravishda topiladi.

2- misol. Ushbu

$$x_n = c, \quad (c \in R, \quad n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ketma-ketlikning limiti c ga teng bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, bu holda $\forall\varepsilon > 0$ ga ko'ra $n_0 = 1$ deyilsa, unda $\forall n > n_0$ uchun $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$ bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$. ▶

3- misol. Ushbu $\quad x_n = \dfrac{1}{n}, \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$

ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo'lishi isbotlansin:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

◀ Ravshanki, $\quad \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n}$

bo'lib, $\dfrac{1}{n} < \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$ tengsizlik barcha $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ bo'lganda o'rinli. Bu holda

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

deyilsa, ($[a]$ — a sonidan katta bo'lmagan uning butun qismi), unda $\forall n > n_0$ uchun

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Ta'rifga binoan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \blacktriangleright$$

4- misol. Aytaylik, $a \in R$, $|a| > 1$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$$

bo'lishi isbotlansin.

◀ $|a| = 1 + \delta$ deylik. Unda $\delta = |a| - 1 > 0$ va Bernulli tengsizligiga ko'ra

$$(1+\delta)^n \geq 1 + n\delta > n\delta$$

bo'lib, $\forall n \in N$ da
$$\frac{1}{|a|^n} < \frac{1}{n\delta}$$

bo'ladi. Demak,
$$\left|\frac{1}{a^n} - 0\right| = \frac{1}{a^n} < \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0)$$

tengsizlik barcha
$$n > \frac{1}{\varepsilon\delta}$$

bo'lganda o'rinli. Agar
$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right] + 1$$

deyilsa, ravshanki, $\forall n > n_0$ uchun $\left|\frac{1}{a^n} - 0\right| < \varepsilon$

bo'ladi. Demak,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0. \blacktriangleright$$

5- misol. Ushbu $x_n = \frac{n}{n+1}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ketma-ketlikning limiti 1 ga teng bo'lishi isbotlansin.

◀ Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olamiz. So'ng ushbu

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

tengsizlikni qaraymiz. Ravshanki,

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{n}{n+1}.$$

Unda yuqoridagi tengsizlik

$$\frac{n}{n+1} < \varepsilon$$

ko'rinishga keladi. Keyingi tengsizlikdan

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, limit ta'rifidagi $n_0 \in N$ sifatida $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$ olinsa ($\varepsilon > 0$ ga ko'ra $n_0 \in N$ topilib), $\forall n > n_0$ uchun $|x_n - 1| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

bo'lishini bildiradi. ▶

6- misol. Faraz qilaylik, $a \in R$, $|a| > 1$ va $a \in R$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

bo'lishi isbotlansin.

◀ Shunday natural k sonni olamizki, $k \geq \alpha + 1$ bo'lsin. Endi $|a|^{\frac{1}{k}} > 1$ bo'lishini e'tiborga olib, $|a|^{\frac{1}{k}} = 1 + \delta$, ya'ni $\delta = |a|^{\frac{1}{k}} - 1 > 0$ deymiz. Unda Bernulli tengsizligiga ko'ra

$$|a|^{\frac{n}{k}} = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta > n\delta$$

bo'lib, $\forall n \in N$ da
$$\frac{n^{k-1}}{a^n} < \frac{1}{n\delta^k}$$

bo'ladi. Bu holda
$$n_0 = \left[\frac{1}{\delta^k \cdot \varepsilon}\right] + 1, \quad (\varepsilon > 0)$$

deyilsa, $\forall n > n_0$ uchun
$$\left|\frac{n^\alpha}{a^n} - 0\right| = \frac{n^\alpha}{|a|^n} \leq \frac{n^{k-1}}{|n|^n} < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$. ▶

7- misol. Ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=0$$

tenglik isbotlansin.

◀ Ravshanki, $\forall\varepsilon\in 0$ va $\forall n\in N$ uchun

$$0\le\frac{\lg n}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow\lg n<n\varepsilon\Leftrightarrow n<10^{n\varepsilon}\Leftrightarrow\frac{n}{(10^{\varepsilon})^{n}}<1$$

bo'ladi. Agar $10^{\varepsilon}>1$ bo'lishini e'tiborga olsak, 6- misolga ko'ra

$$n\to\infty\text{ da }\frac{n}{(10^{\varepsilon})^{n}}\to 0$$

ekanini topamiz. Unda ta'rifga ko'ra 1 soni uchun

$$\exists n_0\in N,\quad\forall n>n_0:\ \frac{n}{(10^{\varepsilon})^{n}}<1$$

bo'ladi. Shunday qilib, $\forall n>n_0$ uchun $\frac{\lg n}{n}<\varepsilon$ bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=0$. ▶

8- misol. Ushbu $x_n=(-1)^n$, $(n=1,2,3,\ldots)$ ketma-ketlikning limiti mavjud emasligi isbotlansin.

◀ Teskarisini faraz qilaylik. Bu ketma-ketlik a limitga ega bo'lsin. Unda ta'rifga binoan,

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists n_0\in N,\quad\forall n>n_0:|(-1)^n-a|<\varepsilon$$

bo'ladi.

Ravshanki, n — juft bo'lganda $|1-a|<\varepsilon$; n — toq bo'lganda $|(-1)-a|<\varepsilon$, ya'ni $|1+a|<\varepsilon$ bo'ladi. Bu tengsizliklardan foydalanib topamiz:

$$2=|(1-a)+(1+a)|\le|1-a|+|1-a|<2\varepsilon.$$

Bu tengsizlik $\varepsilon>1$ bo'lgandagina o'rinli. Bunday vaziyat $\varepsilon>0$ sonining ixtiyoriy bo'lishiga zid. Demak, ketma-ketlik limitga ega emas. ▶

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u yagona bo'ladi.

◀ Teskarisini faraz qilaylik. $\{x_n\}$ ketma-ketlik ikkita a va b $(a \neq b)$ limitlarga ega bo'lsin:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b, \quad (a \neq b).$$

Limitning ta'rifiga ko'ra

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in N, \quad \forall n > n_0 : \ |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_0' \in N, \quad \forall n > n_0' : \ |x_n - a| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Agar n_0 va n_0' sonlarining kattasini $\bar{n}$ desak, unda $\forall n > \bar{n}$ da

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |x_n - b| < \varepsilon$$

bo'lib,

$$|x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon$$

bo'ladi.

Ravshanki, $|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b|$.

Demak, $\forall\varepsilon > 0$ da $|a - b| < 2\varepsilon$ bo'lib, undan $a = b$ bo'lishi kelib chiqadi. ▶

Mashqlar

1. Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib, ushbu

$$x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

ketma-ketlikning limiti topilsin.

2. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo'lsa, u holda ushbu

$$x_1, \ y_1, \ x_2, \ y_2, \ \ldots, \ x_n, \ y_n, \ \ldots$$

ketma-ketlikning limiti ham a ga teng bo'lishi isbotlansin.

3. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = a$$

bo'lishi isbotlansin.

7- ma'ruza

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

$\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

1- ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

1°. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligi. Tengsizliklarda limitga o'tish.

1- teorema. $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad (a \in R)$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, \quad \forall n > n_0; \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $n > n_0$ uchun

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

bo'ladi. Agar

$$\max\left\{|a-\varepsilon|, \ |a+\varepsilon|, \ |x_1|, \ |x_2|, \ \dots, \ |x_{n_0}|\right\} = M$$

deyilsa, u holda $\forall n \in N$ uchun

$$|x_n| \le M$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini bildiradi. ▶

2- teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

bo'lib, $a > p$ $(a < q)$ bo'lsa, u holda shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0$ bo'lganda

$$x_n > p \ \left(x_n < q\right)$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad a > p, \ (p \in R)$

bo'lsin. $\varepsilon > 0$ sonining ixtiyoriyligidan foydalanib, $\varepsilon < a - p$ deb qaraymiz.

Ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan, $\forall\varepsilon > 0$ uchun, jumladan, $0 < \varepsilon < a - p$ uchun shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0$ bo'lganda

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$0 < \varepsilon < a - p \Rightarrow p < a - \varepsilon,$$
$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n.$$

Bu tengsizliklardan $\forall n > n_0$ bo'lganda

$$xn > p$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

($a < q$ hol uchun ham teorema yuqoridagidek isbot etiladi).

3- teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b;$

2) $\forall n \in N$ uchun $x_n \le y_n, \; (x_n \ge y_n)$

bo'lsa, u holda $a \le b, \; (a \ge b)$ bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0' \in N, \quad \forall n > n_0' : \; |x_n - a| < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0'' \in N, \quad \forall n > n_0'' : \; |y_n - b| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Agar $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ deyilsa, unda $\forall n > n_0$ uchun bir yo'la

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi.

Ravshanki, $\quad |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$

$$|y_n - b| < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$

Bu tengsizliklardan hamda teoremaning 2- shartidan foydalanib topamiz:

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n < b + \varepsilon.$$

Keyingi tengsizliklardan

$$a - \varepsilon < b + \varepsilon, \quad a - b < 2\varepsilon$$

va $\forall \varepsilon > 0$ bo'lgani uchun $a - b \le 0$, ya'ni $a \le b$ bo'lishi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o'xshash, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ hamda $\forall n \in N$ uchun $x_n \ge y_n$ bo'lishidan $a \ge b$ tengsizlik kelib chiqishi ko'rsatiladi. ▶

4- teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$;

2) $\forall n \in N$ uchun $x_n \le y_n \le z_n$

bo'lsa, u holda $\{y_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Limit ta'rifiga binoan:

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_0' \in N, \ \ \forall n > n_0' : \ |x_n - a| < \varepsilon,$$
$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_0'' \in N, \ \ \forall n > n_0'' : \ |z_n - a| < \varepsilon$$

bo'ladi. Agar $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ deyilsa, unda $\forall n > n_0$ uchun

$$a - \varepsilon < x_n, \quad z_n < a + \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi. Teoremaning 1-shartidan foydalanib topamiz:

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon.$$

Keyingi tengsizliklardan

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad \text{ya'ni} \quad |y_n - a| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi. ▶

1- misol. Ushbu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

limit topilsin.

◀ Ravshanki, barcha $n \ge 2$ bo'lga

$$\sqrt[2n]{n} > 1$$

bo'ladi. Aytaylik, $\sqrt[2n]{n} = 1 + \alpha_n$

bo'lsin. Unda
$$\sqrt[n]{n} = (1+\alpha_n)^2 \tag{1}$$
va $\sqrt{n} = (1+\alpha_n)^2$ bo'ladi.

Bernulli tengsizligidan foydalanib topamiz:
$$\sqrt{n} = (1+\alpha_n)^n \geq 1 + n\cdot\alpha_n > n\cdot\alpha_n. \tag{2}$$
(1) va (2) munosabatlardan
$$a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$
va
$$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$$
tengsizliklar kelib chiqadi. Agar
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1$$
ekanini e'tiborga olsak, unda 4- teoremaga ko'ra
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$
bo'lishini topamiz. ▶

2- misol. Ushbu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$

limit topilsin.

◀ Ravshanki,
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n} = n\cdot\frac{1}{n} = 1,$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < 1+1+1+\ldots+1 = n.$$
Demak,
$$1 < \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n}.$$
4- teoremadan foydalanib topamiz:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}} = 1. \ ▶$$

2°. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida amallar. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ hamda $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lsin:

$$\{x_n\}: \ x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$$
$$\{y_n\}: \ y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$$

Quyidagi

$$x_1 + y_1, \ x_2 + y_2, \ x_3 + y_3, \ ..., \ x_n + y_n, \ ...$$
$$x_1 - y_1, \ x_2 - y_2, \ x_3 - y_3, \ ..., \ x_n - y_n, \ ...$$
$$x_1 \cdot y_1, \ x_2 \cdot y_2, \ x_3 \cdot y_3, \ ..., \ x_n \cdot y_n, \ ...$$
$$\frac{x_1}{y_1}, \ \frac{x_2}{y_2}, \ \frac{x_3}{y_3}, \ ..., \ \frac{x_n}{y_n}, \ ..., \ (y_n \neq 0, n = 1, 2, 3, ...)$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ *ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi hamda nisbati* deyiladi va ular

$$\{x_n + y_n\}, \ \{x_n - y_n\}, \ \{x_n \cdot y_n\}, \ \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

kabi belgilanadi.

5- teorema. Aytaylik $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b, \quad (a \in R, \ b \in R)$$

bo'lsin. U holda $n \to \infty$ da $(c \cdot x_n) \to c \cdot a$;

$$x_n + y_n \to a + b; \quad x_n \cdot y_n \to ab; \quad \frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}, \ (b = 0); \text{ ya'ni}$$

a) $\forall c \in R$ da $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, $(b \neq 0)$ bo'ladi.

Teoremaning tasdiqlaridan birining, masalan, d) ning isbotini keltiramiz.

◄ Teoremaning shartiga ko'ra,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Ravshanki,

$$\begin{aligned}|x_n \cdot y_n - ab| &= |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n + a \cdot y_n - b| \le \\ &\le |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b|.\end{aligned} \tag{3}$$

$\{y_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli u 1- teoremaga ko'ra chegaralangan bo'ladi:

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in N: \ |y_n| \le M.$$

Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib topamiz:

$\forall \varepsilon > 0$ berilgan hamda $\frac{\varepsilon}{2M}$ ga ko'ra shunday $n_0' \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0'$ uchun

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

bo'ladi. Shuningdek, $\frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$ ga ko'ra shunday $n_0'' \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0''$ uchun

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$$

bo'ladi.

Agar $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ deyilsa, unda $\forall n > n_0$ uchun bir yo'la

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} \tag{4}$$

bo'ladi.

(3) va (4) munosabatlardan

$$|x_n \cdot y_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = ab$$

bo'lishini bildiradi. ▶

3°. Cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar. Faraz qilaylik, $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2- ta'rif. Agar $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

bo'lsa, $\{\alpha_n\}$ — *cheksiz kichik miqdor* deyiladi.

Masalan,

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \text{ va } \alpha_n = q^n, \quad (|q| < 1)$$

ketma-ketliklar cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi.

Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti a ga teng bo'lsin:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

U holda $\alpha_n = x_n - a$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz: $x_n = a + \alpha_n$. Bundan esa quyidagi muhim xulosa kelib chiqadi:

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning a $(a \in R)$ limitga ega bo'lishi uchun $\alpha_n = x_n - a$ ning cheksiz kichik miqdor bo'lishi zarur va yetarli.

Ketma-ketlikning limiti ta'rifidan foydalanib quyidagi ikkita lemmani isbotlash qiyin emas.

1- lemma. Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlar yigindisi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

2- lemma. Chegaralangan miqdor bilan cheksiz kichik miqdor ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

3- ta'rif. Agar har qanday M soni olinganda ham shunday natural n_0 soni topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun

$$|x_n| > M$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti cheksiz* deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

kabi belgilanadi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz bo'lsa, $\{x_n\}$ *cheksiz katta miqdor* deyiladi. Masalan,

$$x_n = (-1)^n \cdot n$$

ketma-ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladi.

Endi cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog'lanishni ifodalovchi tasdiqlarni keltiramiz:

1) Agar $\{x_n\}$ cheksiz kichik miqdor $\{x_n \neq 0\}$ bo'lsa, u holda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz katta miqdor bo'ladi.

2) Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor bo'lsa, u holda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Mashqlar

1. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \ \ a > 0$ bo'lsa, u holda

$$\exists n_0 \in N, \ \ \forall n > n_0: \ x_n > 0$$

bo'lishi isbotlansin.

2. Ushbu limit hisoblansin: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{2n^2-1} \cos\frac{n+1}{2n-1}$.

3. Ushbu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n!} = 0, \ \ (n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)$

limit munosabat isbotlansin.

4. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \ \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b;$

2) $\forall n \in N$ uchun $x_n < y_n$ bo'lsa, u holda $a < b$ bo'ladimi? Misollar keltiring.

8- ma'ruza
Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti

1°. Monoton ketma-ketlik tushunchasi. Aytaylik, $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \tag{1}$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

1- ta'rif. Agar (1) ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n \le x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ — *o'suvchi ketma-ketlik* deyiladi. Agar (1) ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n < x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ — *qat'iy o'suvchi ketma-ketlik* deyiladi.

2- *ta'rif.* Agar (1) ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n \geq x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ – *kamayuvchi ketma-ketlik* deyiladi. Agar (1) ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n > x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ – *qat'iy kamayuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

1- misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n+1}{n}: \ \frac{2}{1}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{4}{3}, \ \dots$$

ketma-ketlik qat'iy kamayuvchi ketma-ketlik bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, berilgan ketma-ketlik uchun

$$x_n = \frac{n+1}{n}, \quad x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

bo'lib, $\forall n \in N$ uchun

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

bo'ladi. Unda $x_{n+1} < x_n$ bo'lishi kelib chiqadi. ▶

Yuqoridagi ta'riflardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1) agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lsa, u quyidan chegaralangan bo'ladi;

2) agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo'lsa, u yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

O'suvchi hamda kamayuvchi ketma-ketliklar umumiy nom bilan *monoton ketma-ketliklar* deyiladi.

2- misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlikning qat'iy o'suvchi ekanligi isbotlansin.

◀ Bu ketma-ketlikning n- hamda $(n+1)$- hadlari uchun

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1},$$

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$$

Shu tengsizlikni e'tiborga olib, topamiz:

$$x_{n+1}=1-\frac{1}{(n+1)^2+1}>1-\frac{1}{n^2+1}=x_n.$$

Demak, $\forall n\in N$ uchun $x_n<x_{n+1}$. Bu esa qaralayotgan ketma-ketlikning qat'iy o'suvchi bo'lishini bildiradi. ▶

2°. Monoton ketma-ketlikning limiti. Quyida monoton ketma-ketliklarning limiti haqidagi teoremalarni keltiramiz.

1- teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik

1) o'suvchi,

2) yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega bo'ladi.

◀ Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik teoremaning ikkala shartini bajarsin. Bu ketma-ketlikning barcha hadlaridan iborat to'plamni E bilan belgilaymiz:

$$E=\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots\}.$$

Ravshanki, E yuqoridan chegaralangan to'plam bo'lib, $E\neq\varnothing$. Unda to'plamning aniq chegarasining mavjudligi haqidagi teoremaga muvofiq, $\sup E$ mavjud bo'ladi. Uni a bilan belgilaylik:

$$\sup E=a.$$

Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonini olaylik. To'plamning aniq yuqori chegarasi ta'rifiga binoan:

1) $\forall n\in N$ uchun $x_n\le a$,

2) $\exists x_{n_0}\in E,\quad x_{n_0}>a-\varepsilon$

bo'ladi. Ayni paytda $\forall n>n_0$ uchun $x_n\ge x_{n_0}$ tengsizlik bajarilib, $x_n>a-\varepsilon$ bo'ladi.

Natijada $\forall n>n_0$ uchun $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$, ya'ni $|a-x_n|<\varepsilon$ bo'lishini topamiz.

Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega va

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a=\sup E. \ ▶$$

2- teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik

1) kamayuvchi,

2) quyidan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega bo'ladi.

Bu teorema yuqorida keltirilgan teoremaning isboti kabi isbotlanadi.

3- misol. Ushbu $$x_n=\frac{n!}{n^n}$$

ketma-ketlikning limiti topilsin.

◀ Ravshanki, $\forall n \geq 1$ uchun $x_n > 0$ bo'ladi. Bu ketma-ketlikning x_{n+1} va x_n hadlarining nisbatini qaraymiz:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

Demak, $x_{n+1} < x_n$. Bundan esa berilgan ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Ayni paytda $\forall n \geq 1$ da

$$0 < x_n \leq x_1$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Demak, berilgan ketma-ketlik chegaralangan. 1- teoremaga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega. Uni a bilan belgilaymiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = a, \quad (a \geq 0).$$

Endi ushbu $x_n - x_{n+1}$ ayirmani qaraymiz. Bu ayirma uchun

$$x_n - x_{n+1} = x_n - x_n \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1)^n} \geq$$

$$\geq x_n \cdot \frac{2n^n - n^n}{(n+1)^n} = x_n \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_{n+1}$$

bo'lib, undan

$$x_n \geq 2x_{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Keyingi munosabatlardan topamiz:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq 2 \lim_{n\to\infty} x_{n+1}, \quad a \geq 2a.$$

Ravshanki, bu holda $a = 0$ bo'ladi.

Demak, $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$ ▶

3°. *e* soni. Ushbu

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (1)$$

ketma-ketlikni qaraymiz.

Tasdiq. (1) ketma-ketlik o'suvchi bo'ladi.

◀ Berilgan ketma-ketlikning x_{n+1} hamda x_n hadlarining nisbatini topamiz:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^n} =$$

$$= \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Bernulli tengsizligiga ko'ra:

$$\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > 1-\frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$$

bo'ladi. Natijada $\forall n \in N$ uchun

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1,$$

ya'ni $x_{n+1} > x_n$ bo'lishi kelib chiqadi. ▶

Tasdiq. (1) ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

◀ Ravshanki, $k \geq 1$ uchun

$$k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k \geq 2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2 = 2^{k-1}$$

bo'ladi.

Endi Nyuton binomi formulasidan foydalanib topamiz:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\cdot\frac{1}{n} + C_n^2\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^k\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + C_n^n\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n^k}C_n^k = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Demak, $\forall n \in N$ uchun $0 < x_n < 3$ bo'ladi.

Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga ko'ra

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ketma-ketlik chekli limitga ega. ▶

3- ta'rif. (1) ketma-ketlikning limiti *e* soni deyiladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Bu e soni irratsional son bo'lib,

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

bo'ladi.

Mashqlar

1. Ushbu

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

2. Ushbu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

limit hisoblansin.

3. Ushbu $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots$

ketma-ketlikning yaqinlashuvchanligi isbotlansin va limiti topilsin.

9- ma'ruza
Fundamental ketma-ketliklar. Koshi teoremasi

1°. Qismiy ketma-ketliklar. Bolsano—Veyershtrass teoremasi. Aytaylik,

$$\{x_n\}:\ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu (1) ketma-ketlikning biror n_1 nomerli x_{n_1} hadini olamiz. So'ngra nomeri n_1 dan katta bo'lgan n_2 nomerli x_{n_2} hadini olamiz. Shu usul bilan x_{n_3}, x_{n_4} va h.k. hadlarni tanlab olamiz. Natijada nomerlari

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi (1) ketma-ketlikning hadlari ushbu

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ \ldots, \ x_{n_k}, \ \ldots \tag{2}$$

ketma-ketlikni hosil qiladi.

(2) ketma-ketlik (1) *ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi* deyiladi va $\{x_{n_k}\}$ kabi belgilanadi.

Masalan, $\quad 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,$

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$$

ketma-ketliklar $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklari,

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,$$

$$-1,\ -1,\ \ldots,\ -1,\ \ldots$$

ketma-ketliklar $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^{n+1},\ \ldots$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklari bo'ladi.

Keltirilgan tushuncha va misollardan bitta ketma-ketlikning turli qismiy ketma-ketliklari bo'lishi mumkinligi ko'rinadi.

1- teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, uning har qanday qismiy ketma-ketligi ham shu limitga ega bo'ladi.

◀ Bu teoremaning isboti ketma-ketlik limiti ta'rifidan kelib chiqadi. ▶

Eslatma. Ketma-ketlik qismiy ketma-ketliklarining limiti mavjud bo'lishidan, berilgan ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Masalan, $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^{n+1},\ \ldots$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklari

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,$$

$$-1,\ -1,\ \ldots,\ -1,\ \ldots$$

larning limiti bo'lgan holda ketma-ketlikning o'zining limiti mavjud emas.

2- teorema. (Bolsano—Veyershtrass teoremasi.) Har qanday chegaralangan ketma-ketlikdan chekli songa intiluvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

◀ $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, u chegaralangan bo'lsin. Bu holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari $[a, b]$ da joylashgan deb qarash mumkin: $x_n \in [a,\ b],\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$

$[a, b]$ segmentni

$$\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right],\ \left[\frac{a+b}{2},\ b\right]$$

segmentlarga ajratamiz. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashganini $[a_1, b_1]$ deymiz. Ravshanki, $[a_1, b_1]$ ning uzunligi $\frac{b-a}{2}$ ga teng bo'ladi. Yuqoridagiga o'xshash $[a_1, b_1]$ segmentni

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

segmentlarga ajratamiz. Berilgan ketma-ketlikning cheksiz ko'p sondagi hadlari bo'lganini $[a_2, b_2]$ deymiz. Bunda $[a_2, b_2]$ ning uzunligi $\frac{b-a}{2^2}$ ga teng bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirish natijasida ushbu

$$[a_1, b_1], \ [a_2, b_2], \ \dots, \ [a_k, b_k], \ \dots$$

segmentlar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu segmentlar ketma-ketligi uchun

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots \text{ bo'lib, } k \to \infty \text{ da}$$

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$$

bo'ladi.

Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsiriga ko'ra

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = C, \quad (C \in R)$$

bo'ladi.

Endi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $[a_1, b_1]$ dagi birorta x_{n_1} hadini, $[a_2, b_2]$ dagi birorta x_{n_2} hadini va h.k. $[a_k, b_k]$ dagi birorta x_{n_k} hadini va h.k. hadlarini olamiz. Natijada $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlaridan tashkil topgan ushbu

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ \dots, \ x_{n_k}, \ \dots, \ (n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots)$$

qismiy ketma-ketlik hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlik uchun

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k, \ (k = 1, 2, \dots)$$

bo'lib, undan $k \to \infty$ da $x_{n_k} \to C$, ya'ni $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = C$ bo'lishi kelib chiqadi. ▶

2°. Fundamental ketma-ketliklar. Koshi teoremasi. $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

1- ta'rif. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday natural n_0 soni topilsaki, barcha $n > n_0$ va $m > n_0$ uchun

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa (ya'ni $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0, \forall m > n_0 : |x_n - x_m| < \varepsilon$ bo'lsa), $\{x_n\}$ — *fundamental ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \quad (n = 1, 2, ...)$$

fundamental ketma-ketlik bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, berilgan ketma-ketlik uchun

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| < \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

bo'lib, $\forall\varepsilon > 0$ ga ko'ra $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ deyilsa, $\forall n > n_0$, $\forall m > n_0$

bo'lganda $\quad |x_n - x_m| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad$ bo'ladi. ▶

3- teorema. (Koshi teoremasi.) Ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning fundamental bo'lishi zarur va yetarli.

◀ ***Zarurligi.*** $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in N, \ \forall n > n_0 : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Shuningdek, $\forall m > n_0 : |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi. Natijada $\forall n > n_0$, $\forall m > n_0$ uchun

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, fundamental ketma-ketlik.

Yetarliligi. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsin:

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in N, \ \forall n > n_0, \ \forall m > n_0 : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Agar $m > n_0$ shartni qanoatlantiruvchi m tayinlansa, unda

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \Leftrightarrow x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$$

bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Bolsano—Veyershrass teoremasiga binoan bu ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlikni ajratish mumkin: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a.$

Demak,

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists k_0 \in N, \ \forall k > k_0 : \ |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Agar $m = n_k$ deyilsa, unda

$$|x_n - x_{n_k}| \le \varepsilon$$

bo'ladi. Keyingi ikki tengsizlikdan

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$ ►

3°. Ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari. $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligining limiti $\{x_n\}$ ning qismiy limiti deyiladi.

2- ta'rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlik qismiy limitlarining eng kattasi berilgan *ketma-ketlikning yuqori limiti* deyiladi va

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

kabi belgilanadi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik qismiy limitlarining eng kichigi berilgan *ketma-ketlikning quyi limiti* deyiladi va

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

kabi belgilanadi.

Masalan, ushbu $\{x_n\}$: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... ketma-ketlikning yuqori limiti

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 3,$$

quyi limiti esa

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1$$

bo'ladi. Umuman, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari quyidagicha ham kiritilishi mumkin.

Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, A bu ketma-ketlikning qismiy limitlaridan iborat to'plam bo'lsin. Unda bu ketma-ketlikning quyi limitini

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf x_n =$$
$$= \begin{cases} -\infty; & \{x_n\} \quad \text{quyidan chegaralanmagan bo'lsa,} \\ \inf A; & \{x_n\} \quad \text{quyidan chegaralangan va } A \neq \{+\infty\} \text{ bo'lsa,} \\ +\infty; & A = \{+\infty\} \quad \text{bo'lsa} \end{cases}$$

deb olish mumkin.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori limitini esa

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup x_n =$$
$$= \begin{cases} +\infty; & \{x_n\} \quad \text{yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa,} \\ \sup A; & \{x_n\} \quad \text{yuqoridan chegaralangan va } A \neq \{-\infty\} \text{ bo'lsa,} \\ -\infty; & A = \{-\infty\} \quad \text{bo'lsa} \end{cases}$$

deb qarash mumkin.

Endi quyi hamda yuqori limitlarning xossalarini keltiramiz.

Biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsin. U holda $\forall\varepsilon > 0$ olinganda ham:

1) shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0$ da $x_n < a + \varepsilon$;

2) $\forall n_1 \in N$ uchun ε va n_1 larga bog'liq shunday $n' > n_1$ topiladiki, $x_{n'} > a - \varepsilon$ bo'ladi.

Bu xossalar quyidagilarni anglatadi: $\forall\varepsilon > 0$ tayin bo'lganda, birinchi xossa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning faqat chekli sondagi hadlarigina

$$x_n < a + \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantirishini, ikkinchi xossa esa bu ketma-ketlikning

$$x_n > a - \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi hadlarining soni cheksiz ko'p bo'lishini ifodalaydi.

◀ Agar $\{x_n\}$ ning cheksiz ko'p sondagi hadlari $a + \varepsilon$ dan katta bo'lsa, u holda $a + \varepsilon$ sonidan kichik bo'lmagan b $(b \geq a + \varepsilon)$ ga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi mavjud va bu $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = a$ ga zid.

Demak, $a + \varepsilon$ dan o'ngda ketma-ketlikning ko'pi bilan chekli sondagi hadlari yotadi.

Modomiki,
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a$$
ekan, unda $\{x_n\}$ ning qismiy limitlaridan biri a ga teng:
$$\overline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k} = a\,.$$

Limit ta'rifiga ko'ra bu $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlikning, demak, $\{x_n\}$ ning ham cheksiz ko'p sondagi hadlari $a - \varepsilon$ dan katta bo'ladi. ▶

Eslatma. Biror a soni yuqoridagi ikki shartni qanoatlantirsa, u $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori limiti bo'ladi.

Faraz qilaylik, biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = b$$
bo'lsin. U holda $\forall\varepsilon > 0$ olinganda ham:

1′) shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0$ da $x_n > b - \varepsilon$;

2′) $\forall n_1 > N$ uchun ε va n_1 larga bog'liq shunday $n' > n_1$ topiladiki, $x_{n'} < b + \varepsilon$ bo'ladi.

Quyi limitning bu xossasi yuqoridagidek isbotlanadi.

Ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari xossalaridan foydalanib, quyidagi teoremani isbotlash qiyin emas.

4- teorema. $\{x_n\}$ ketma-ketlik C limitga ega bo'lishi uchun
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = C$$
bo'lishi zarur va yetarlidir.

Mashqlar

1. Har qanday monoton ketma-ketlik faqat bitta qismiy limitga ega bo'lishi isbotlansin.

2. Koshi teoremasidan foydalanib, ushbu
$$x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
ketma-ketlikning $(a_k \in R,\ |a_k| \le q^k;\ 0 < q < 1;\ k = 1,\ 2,\ \ldots)$ limitga ega bo'lishi isbotlansin.

3. Ushbu $\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$ tengsizlik isbotlansin.

3- B O B
FUNKSIYA VA UNING LIMITI

10- ma'ruza
Funksiya tushunchasi

1°. Funksiya ta'rifi, berilish usullari. Biz 2- ma'ruzada E to'plamni F to'plamga akslantirish

$$f:\ E \to F$$

ni o'rgangan edik.

Endi $E = F$, $F = R$ deb olamiz. Unda har bir haqiqiy x songa biror haqiqiy y sonni mos qo'yuvchi

$$f:\ E \to R\ (x \xrightarrow{f} y)$$

akslantirishga kelamiz. Bu esa *funksiya* tushunchasiga olib keladi.

Funksiya tushunchasi o'quvchiga o'rta maktab matematika kursidan ma'lum. Shuni e'tiborga olib, funksiya haqidagi dastlabki ma'lumotlarni qisqaroq bayon etishni lozim topdik.

Aytaylik, $X \subset R$, $Y \subset R$ to'plamlar berilgan bo'lib, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamlarda o'zgarsin: $x \in X$, $y \in Y$.

1- ta'rif. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror f qoidaga ko'ra Y to'plamdan bitta y son mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda *funksiya berilgan (aniqlangan)* deyiladi va

$$f:\ x \to y \quad \text{yoki} \quad y = f(x)$$

kabi belgilanadi. Bunda X — *funksiyaning aniqlanish to'plami (sohasi)*, Y — *funksiyaning o'zgarish to'plami (sohasi)*; x — *erkli o'zgaruvchi* yoki *funksiya argumenti*, y esa *erksiz o'zgaruvchi* yoki *funksiya* deyiladi.

Misollar. 1. $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$ bo'lib, f qoida

$$f:\ x \to y = x^2 + 1$$

bo'lsin. Bu holda har bir $x \in X$ ga bitta $x^2 + 1 \in Y$ mos qo'yilib,

$$y = x^2 + 1$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

2. Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo'yish natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu **Dirixle funksiyasi** deyilib, u $D(x)$ kabi belgilanadi:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo‘lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo‘lsa.} \end{cases}$$

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiya uchta: X to‘plam, Y to‘plam va har bir $x \in X$ ga bitta $y \in Y$ ni mos qo‘yuvchi f qoidaning berilishi bilan aniqlanar ekan.

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lsin. $x_0 \in X$ nuqtaga mos keluvchi y_0 miqdor $y = f(x)$ *funksiyaning* $x = x_0$ *nuqtadagi xususiy qiymati* deyiladi va $f(x_0) = y_0$ kabi belgilanadi.

Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tekislikdagi $(x, f(x))$nuqtalardan iborat ushbu

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) | x \in X, \ f(x) \in Y\}$$

to‘plam $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi. Masalan,

$$y = x^2 - 1 \quad (x \in X = [-2, \ 2])$$

funksiyaning grafigi 1- chizmada tasvirlangan.

Funksiya ta’rifidagi f qoida turlicha bo‘lishi mumkin.

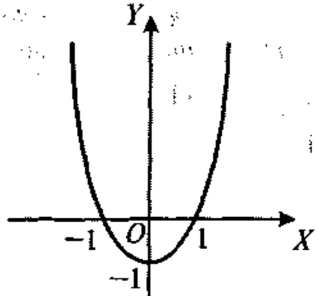
a) Ko‘pincha x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bu *funksiyaning analitik usulda berilishi* deyiladi. Masalan,

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

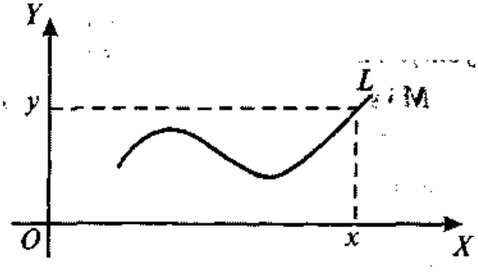
funksiya analitik usulda berilgan bo‘lib, uning aniqlanish to‘plami

$$X = \{x \in R | -1 \le x \le 1\} = [-1, \ 1]$$

bo‘ladi.



1- chizma.



2- chizma.

x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish quyidagi formulalar yordamida berilgan bo'lsin:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu funksiyaning aniqlanish to'plami $X = R \setminus \{0\}$ bo'lib, qiymatlar to'plami esa $Y = \{-1, 1\}$ bo'ladi. Odatda, bu funksiya $y = \operatorname{sign} x$ kabi belgilanadi.

b) Ba'zi hollarda $x \in X$, $y \in Y$ o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval orqali bo'lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatganimizda, t_1 vaqtda havo harorati T_1, t_2 vaqtda havo harorati T_2 va h.k. bo'lsin. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

t — vaqt	t_1	t_2	t_3	...	t_n
T — harorat	T_1	T_2	T_3	...	T_n

Bu jadval t vaqt bilan havo harorati T orasidagi bog'lanishni ifodalaydi, bunda t — argument, T esa t ning funksiyasi bo'ladi.

d) x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikda biror egri chiziq orqali ham ifodalanishi mumkin (2- chizma).

Masalan, 2- chizmada tasvirlangan L egri chiziq berilgan bo'lsin. Bunda $[a, b]$ segmentdagi har bir nuqtadan o'tkazilgan perpendikular L chiziqni faqat bitta nuqtada kessin. $\forall x \in [a, b]$ nuqtadan perpendikular chiqarib, uning L chiziq bilan kesishish nuqtasini topamiz. Olingan x nuqtaga kesishish nuqtasining ordinatasi y ni mos qo'yamiz. Natijada har bir $x \in [a, b]$ ga bitta y mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Bunda x bilan y orasidagi bog'lanishni berilgan L egri chiziq bajaradi.

Aytaylik, $f_1(x)$ funksiya $X_1 \subset R$ to'plamda, $f_2(x)$ funksiya esa $X_2 \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Agar: 1) $X_1 = X_2$; 2) $\forall x \in X_1$ da $f_1(x) = f_2(x)$ bo'lsa, $f_1(x)$ hamda $f_2(x)$ funksiyalar o'zaro teng deyiladi va $f_1(x) = f_2(x)$ kabi belgilanadi.

2°. Funksiyaning chegaralanganligi. $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

2- ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \le M$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya X to'plamda yuqoridan chegaralangan* deyiladi. Agar shunday o'zgarmas m soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \ge m$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya X to'plamda quyidan chegaralangan* deyiladi.

3- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* X *to'plamda chegaralangan* deyiladi.

1- misol. Ushbu $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya R da chegaralangan bo'ladi.

◀ Ravshanki, $\forall x \in R$ da $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}>0$.

Demak, berilgan funksiya R da quyidan chegaralangan.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya uchun

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}\le 1+\frac{x^2}{1+x^4}$$

bo'ladi. Endi

$$0\le (x^2-1)^2=x^4-2x^2+1 \Rightarrow 2x^2\le x^4+1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^4+1}\le\frac{1}{2}$$

bo'lishini e'tiborga olib, topamiz: $f(x)\le 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Bu esa $f(x)$ funksiyaning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. Demak, berilgan funksiya R da chegaralangan. ▶

4- ta'rif. Agar har qanday $M>0$ son olinganda ham shunday $x_0 \in X$ nuqta topilsaki,

$$f(x)>M$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya* X *to'plamda yuqoridan chegaralanmagan* deyiladi.

3°. Davriy funksiyalar. Juft va toq funksiyalar. $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

5- ta'rif. Agar shunday o'zgarmas T $(T\ne 0)$ son mavjud bo'lsaki, $\forall x\in X$ uchun

1) $x-T\in X,\ x+T\in X$;   2) $f(x+T)=f(x)$

bo'lsa, $f(x)$ *davriy funksiya* deyiladi, T son esa $f(x)$ *funksiyaning davri* deyiladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ funksiyalar davriy funksiyalar bo'lib, ularning davri 2π ga, $f(x)=\operatorname{tg} x$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$ funksiyalarning davri esa π ga teng.

Davriy funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

a) Agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri T ($T \neq 0$) bo'lsa, u holda

$$T_n = nT, \ (n = \pm 1, \pm 2)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.

b) Agar T_1 va T_2 sonlar $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda $T_1 + T_2 \neq 0$ hamda $T_1 - T_2$ ($T_1 \neq T_2$) sonlar ham $f(x)$ funksiyaning davri bo'ladi.

d) Agar $f(x)$ hamda $g(x)$ lar davriy funksiyalar bo'lib, ularning har birining davri T ($T \neq 0$) bo'lsa, u holda

$$f(x)+g(x), \ f(x)-g(x), \ f(x)\cdot g(x), \ \frac{f(x)}{g(x)}, \ (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar ham davriy funksiyalar bo'lib, T son ularning ham davri bo'ladi.

2- misol. Ixtiyoriy T ($T \neq 0$) ratsional son Dirixle funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsionol son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \ \text{ irratsionol son bo'lsa} \end{cases}$$

ning davri bo'lishi ko'rsatilsin.

◀ Aytaylik, T ($T \neq 0$) ratsional son bo'lsin. Ravshanki, $\forall x \in R$ irratsional son uchun $x+T$ – irratsional son, $\forall x \in R$ ratsional son uchun $x+T$ ratsional son bo'ladi. Demak,

$$D(x+T) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsionol son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \ \text{ irratsionol son bo'lsa.} \end{cases}$$

Shunday qilib, $\forall x \in R$, T – ratsional son bo'lganda

$$D(x+T) = D(x)$$

bo'ladi. ▶

Ma'lumki, $\forall x \in X$ ($X \subset R$) uchun $-x \in X$ bo'lsa, X to'plam O nuqtaga nisbatan *simmetrik to'plam* deyiladi.

Aytaylik, O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan X to'plamda $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

6- ta'rif. Agar $\forall x \in X$ uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ *juft funksiya* deyiladi. Agar $\forall x \in X$ uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ *toq funksiya* deyiladi.

Masalan, $f(x) = x^2+1$ – juft funksiya, $f(x) = x^3+x$ esa toq funksiya bo'ladi. Ushbu $f(x) = x^2-x$ funksiya juft ham emas, toq ham emas.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar bo'lsa, u holda

$$f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)},\quad (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham juft bo'ladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ toq funksiyalar bo'lsa, u holda

$$f(x)+g(x),\, f(x)-g(x)$$

funksiyalar toq bo'ladi,

$$f(x)\cdot g(x);\quad \frac{f(x)}{g(x)},\quad (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar esa juft bo'ladi.

Juft funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan, toq funksiyaning grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi.

4°. Monoton funksiyalar. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X\in R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

7- ta'rif. Agar $\forall x_1, x_2\in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1)\leq f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya X to'plamda o'suvchi* deyiladi. Agar $\forall x_1, x_2\in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya X to'plamda qat'iy o'suvchi* deyiladi.

8- ta'rif. Agar $\forall x_1, x_2\in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1)\geq f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya X to'plamda kamayuvchi* deyiladi. Agar $\forall x_1, x_2\in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya X to'plamda qat'iy kamayuvchi* deyiladi.

O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan *monoton funksiyalar* deyiladi.

3- misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ funksiyaning $X=[1,\ +\infty)$ to'plamda kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

◀ $[1,\ +\infty)$ da ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$ bo'lsin deylik. Unda

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{x_1+x_1x_2^2-x_2-x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=$$

$$=\frac{x_1-x_2+x_1\cdot x_2(x_2-x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1\cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

bo‘ladi. Keyingi tenglikda

$$x_1 - x_2 < 0, \ 1 - x_1 \cdot x_2 < 0$$

bo‘lishini e’tiborga olib,

$$f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

ya’ni $f(x_1) > f(x_2)$ ekanini topamiz. Demak,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \ \blacktriangleright$$

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to‘plamda o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lib, $C = \text{const}$ bo‘lsin. U holda

a) $f(x) + C$ funksiya o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi;

b) $C > 0$ bo‘lganda $C \cdot f(x)$ o‘suvchi, $C < 0$ bo‘lganda $C \cdot f(x)$ kamayuvchi bo‘ladi.

d) $f(x) + g(x)$ funksiya o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi.

5°. Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar. $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, bu funksiyaning qiymatlaridan iborat to‘plam

$$Y_f = \{f(x) \mid x \in X\}$$

bo‘lsin.

Faraz qilaylik, biror qoidaga ko‘ra Y_f to‘plamdan olingan har bir y ga X to‘plamdagi bitta x mos qo‘yilgan bo‘lsin. Bunday moslik natijasida funksiya hosil bo‘ladi. Odatda, bu funksiya $y = f(x)$ ga nisbatan *teskari funksiya* deyiladi va $x = f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $y = \frac{1}{2}x + 1$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya $x = 2y - 1$ bo‘ladi.

Yuqorida aytilganlardan $y = f(x)$ da x — argument, y esa x ning funksiyasi, teskari $x = f^{-1}(y)$ funksiyada y — argument, x esa y ning funksiyasi bo‘lishi ko‘rinadi.

Qulaylik uchun teskari funksiyada ham argument x, uning funksiyasi y bilan belgilanadi: $y = g(x)$.

$y = f(x)$ ga nisbatan teskari $g(x)$ funksiya grafigi $f(x)$ funksiya grafigini I va III choraklar bissektrisasi atrofida 180° ga aylantirish natijasida hosil bo‘ladi.

Aytaylik, Y_f to‘plamda $u = F(y)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Natijada X to‘plamdan olingan har bir x ga Y_f to‘plamda bitta y:

$$f: \ x \to y, \ (y = f(x))$$

va Y_f to'plamdagi bunday songa bitta u:

$$F: \ y \to u, \ \ (u = F(y))$$

son mos qo'yiladi. Demak, X to'plamdan olingan har bir x songa bitta u son mos qo'yilib, yangi funksiya hosil bo'ladi: $u = F(f(x))$. Odatda, bunday funksiyalar *murakkab funksiya* deyiladi.

Mashqlar

1. $f(x)$ funksiyaning $X \subset R$ to'plamda quyidan chegaralanmaganligi ta'rifi keltirilsin.

2. O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan $X \subset R$ to'plamda berilgan har qanday $f(x)$ funksiya juft va toq funksiyalar yig'indisi ko'rinishida ifodalanishi isbotlansin.

3. Ushbu $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ funksiyaning $X = [0, +\infty]$ to'plamda kamayuvchi ekani isbotlansin.

4. Agar $f(x) = \frac{1}{1-x}$ bo'lsa, $f(f(f(x)))$ topilsin.

11- ma'ruza
Elementar funksiyalar

Elementar funksiyalar kitobxonga o'rta maktab matematika kursidan ma'lum. Biz quyida elementar funksiyalar haqidagi asosiy ma'lumotlarni bayon etamiz.

1°. Butun ratsional funksiyalar. Ushbu

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

ko'rinishdagi funksiya *butun ratsional funksiya* deyiladi. Bunda $a_0, a_1, \dots, a_n$ — o'zgarmas sonlar, $n \in N$. Bu funksiya $R = (-\infty, \ +\infty)$ da aniqlangan.

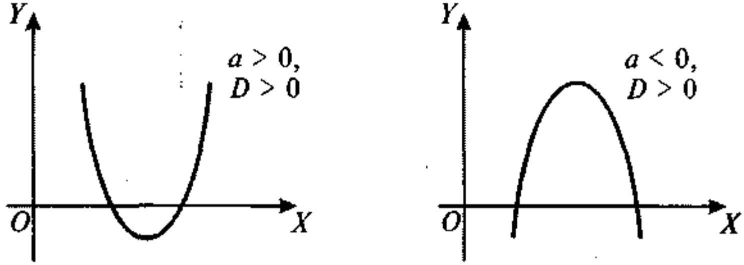
Butun ratsional funksiyaning ba'zi xususiy hollari:

a) Chiziqli funksiya. Bu funksiya

$$y = ax + b, \ \ (a \neq 0)$$

ko'rinishga ega, bunda a, b — o'zgarmas sonlar.

Chiziqli funksiya $(-\infty, +\infty)$ da aniqlangan $a > 0$ bo'lganda o'suvchi, $a < 0$ bo'lganda kamayuvchi: grafigi tekislikdagi to'g'ri chiziqdan iborat.



3- chizma.

b) Kvadrat funksiya. Bu funksiya

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0)$$

ko'rinishga ega, bunda a, b, c — o'zgarmas sonlar.

Kvadrat funksiya R da aniqlangan bo'lib, uning grafigi parabolani ifodalaydi.

Ravshanki,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Parabolaning tekislikda joylashishi a hamda $D = b^2 - 4ac$ larning ishorasiga bog'liq bo'ladi. Masalan, $a > 0,\ D > 0$ va $a < 0,\ D > 0$ bo'lganda uning grafigi 3- chizmada tasvirlangan parabolalar ko'rinishida bo'ladi.

2°. Kasr ratsional funksiyalar. Ushbu

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$$

ko'rinishdagi funksiya *kasr ratsional funksiya* deyiladi. Bunda $a_0, a_1, \ldots, a_n$ va $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — o'zgarmas sonlar, $n \in N,\ m \in N$. Bu funksiya

$$X = (-\infty, \ +\infty) \setminus \{x \mid b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m = 0\}$$

to'plamda aniqlangan.

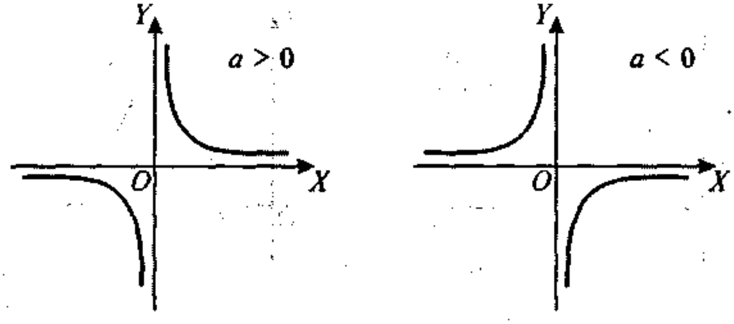
Kasr ratsional funksiyaning ba'zi xususiy hollari:

a) Teskari proporsional bog'lanish. U

$$y = \frac{a}{x}, \quad (x \neq 0, \ a = const)$$

ko'rinishga ega. Bu funksiya

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = R \setminus \{0\}$$



4- chizma.

to'plamda aniqlangan, toq funksiya, *a ning ishorasiga* qarab funksiya $(-\infty, 0)$va $(0, +\infty)$ oraliqlarning har birida kamayuvchi yoki o'suvchi bo'ladi (4- chizma).

b) Kasr chiziqli funksiya. U ushbu

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

ko'rinishga ega. Bu funksiya

$$X = R \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, \quad (c \neq 0)$$

to'plamda aniqlangan.

Ravshanki, $\quad y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{bc-ad}{c^2} \cdot \dfrac{1}{x+\frac{d}{c}} + \dfrac{a}{c}.$

Demak, $\quad y = \dfrac{\alpha}{x+\beta} + \gamma, \quad \left(\alpha = \dfrac{bc-ad}{c^2}, \quad \beta = \dfrac{d}{c}, \quad \gamma = \dfrac{a}{c}\right).$

Uning grafigini $y = \frac{a}{x}$ funksiya grafigi yordamida chizish mumkin.

3°. Darajali funksiya. Ushbu

$$y = x^a, \quad (x \geq 0)$$

ko'rinishdagi funksiya *darajali funksiya* deyiladi.

Bu funksiyaning aniqlanish to'plami a ga bog'liq. Darajali funksiya $(0, +\infty)$ da $a > 0$ bo'lganda o'suvchi, $a < 0$ bo'lganda kamayuvchi bo'ladi. $y = x^a$ funksiya grafigi tekislikning (0, 0) va (1, 1) nuqtalaridan o'tadi.

4°. Ko'rsatkichli funksiya. Ushbu

$$y = a^x$$

ko'rinishdagi funksiya *ko'rsatkichli funksiya* deyiladi. Bunda $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$. Ko'rsatkichli funksiya $(-\infty, +\infty)$ da aniqlangan, $\forall x \in R$ da $a^x > 0$; $a > 1$ bo'lganda o'suvchi; $0 < a < 1$ bo'lganda kamayuvchi bo'ladi.

Xususan, $a = e$ bo'lsa, matematikada muhim rol o'ynaydigan $y = e^x$ funksiya hosil bo'ladi.

Ko'rsatkichli funksiyaning grafigi OX o'qdan yuqorida joylashgan va tekislikning $(0, 1)$ nuqtasidan o'tadi.

5°. Logarifmik funksiya. Ushbu

$$y = \log_a x$$

ko'rinishdagi funksiya *logarifmik funksiya* deyiladi. Bunda $a > 0$, $a \neq 1$.

Logarifmik funksiya $(0, +\infty)$ da aniqlangan, $y = a^x$ funksiyaga nisbatan teskari; $a > 1$ bo'lganda o'suvchi, $0 < a < 1$ bo'lganda kamayuvchi bo'ladi.

Logarifmik funksiyaning grafigi OY o'qning o'ng tomonida joylashgan va tekislikning $(0, 1)$ nuqtasidan o'tadi.

6°. Trigonometrik funksiyalar. Ushbu

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x,$$

$$y = \sec x, \quad y = \operatorname{cosec} x$$

funksiyalar *trigonometrik funksiyalar* deyiladi.

$y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalar $R = (-\infty, +\infty)$ da aniqlangan, 2π davrli funksiyalar $\forall x \in R$ da

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

bo'ladi. Ushbu $y = \operatorname{tg} x$ funksiya

$$X = R \setminus \left\{ x \in R \mid x = (2k+1)\frac{\pi}{2}; \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

to'plamda aniqlangan π davrli funksiya, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ funksiyalar $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ lar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

7°. Giperbolik funksiyalar. Ko'rsatkichli $y = e^x$ funksiya yordamida tuzilgan ushbu

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

funksiyalar *giperbolik* (mos ravishda *giperbolik sinus, giperbolik kosinus, giperbolik tangens, giperbolik katangens) funksiyalar* deyiladi va ular quyidagicha

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{ch}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{th}x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad \mathrm{cth}x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

kabi belgilanadi.

8°. Teskari trigonometrik funksiyalar. Ma'lumki, $y = \sin x$ funksiya R da aniqlangan va uning qiymatlari to'plami

$$Y_f = [-1, \ 1]$$

bo'ladi.

Agar $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right]$ bo'lsa, u holda $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right]$ va $Y_f = [-1, \ 1]$ to'plamlarning elementlari o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi.

$y = \sin x$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya

$$y = \arcsin x$$

kabi belgilanadi.

Shunga o'xshash $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ funksiyalarga nisbatan teskari funksiyalar mos ravishda

$$y = \arccos x, \quad y = \mathrm{arctg}\, x, \quad y = \mathrm{arcctg}\, x$$

kabi belgilanadi.

Ushbu $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$, funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deyiladi.

Mashqlar

1. $y = x^2$ funksiya grafigiga ko'ra $y = ax^2 + bx + c$ funksiyaning grafigi chizilsin.

2. $y = \frac{1}{x}$ funksiya grafigiga ko'ra $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ funksiyaning grafigi chizilsin.

12- ma'ruza

Funksiya limiti

1°. To'plamning limit nuqtasi. Aytaylik, biror $X \subset R$ to'plam va $x_0 \in R$ nuqta berilgan bo'lsin.

1- ta'rif. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon),\ \ (\forall\varepsilon > 0)$$

atrofida X to'plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi, ya'ni

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists x \in X,\ \ x \neq x_0:\ |x - x_0| < \varepsilon$$

bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

Misollar. 1. $X = [0, 1]$ to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2. $X = (0, 1)$ to'plamning har bir nuqtasi va $x_0 = 0$, $x = 1$ nuqtalar shu to'plamning limit nuqtalari bo'ladi.

3. $X = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\right\}$ to'plamning limit nuqtasi $x_0 = 0$ bo'ladi.

4. $X = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ to'plam limit nuqtaga ega emas.

2- ta'rif. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon^+(x_0) = (x_0,\ x_0 + \varepsilon)\quad (U_\varepsilon^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0)),\ \ (\forall\varepsilon > 0)$$

o'ng atrofida (chap atrofida) X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning *o'ng (chap) limit nuqtasi* deyiladi.

3- ta'rif. Agar ixtiyoriy $c \in R$ uchun

$$U_c(+\infty) = \{x \in R \mid x > c\}$$

to'plamda X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, «$+\infty$» X to'plamning limit «nuqta»si deyiladi.

Agar ixtiyoriy $c \in R$ uchun

$$U_c(-\infty) = \{x \in R \mid x < c\}$$

to'plamda X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, «$-\infty$» X to'plamning limit «nuqta»si deyiladi.

Keltirilgan ta'rif va misollardan ko'rinadiki, to'plamning limit nuqtasi shu to'plamga tegishli bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin ekan.

1- teorema. Agar $x_0 \in R$ nuqta $X \subset R$ to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning har qanday

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon),\ \ (\forall\varepsilon > 0)$$

atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'ladi.

◀ Aytaylik, x_0 nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin. Teorema tasdig‘ining teskarisini faraz qilaylik: x_0 nuqtaning biror $U_{\delta_0}(x_0)$ atrofida X to‘plamning chekli sondagi $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ nuqtalarigina bo‘lsin. U holda

$$\min\{|x_0 - x_1|,\ |x_0 - x_2|,\ \ldots,\ |x_0 - x_n|,\ \delta_0\} = \delta$$

deb olinsa, x_0 nuqtaning $U_{\delta_0}(x_0)$ atrofida X to‘plamning x_0 dan farqli bitta ham nuqtasi bo‘lmaydi. Bu esa x_0 nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lishiga ziddir. ▶

2- teorema. Agar x_0 nuqta $X \subset R$ to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsa, u holda shunday sonlar ketma-ketligi $\{x_n\}$ topiladiki,

1) $\forall n \in N$ da $x_n \in X,\ x_n \neq x_0$;

2) $n \to \infty$ da $x_n \to x_0$ bo‘ladi.

◀ Aytaylik, $x_0 \in R$ nuqta $X \subset R$ to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin. Unda 1- ta’rifga binoan

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_n \in X,\ x_n \neq x_0: \quad |x_n - x_0| < \varepsilon$$

bo‘ladi. Jumladan,

$$\varepsilon = 1 \text{ uchun } \exists x_1 \in X,\ x_1 \neq x_0: \quad |x_1 - x_0| < 1,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{ uchun } \exists x_2 \in X,\ x_2 \neq x_0: \quad |x_2 - x_0| < \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \text{ uchun } \exists x_3 \in X,\ x_3 \neq x_0: \quad |x_3 - x_0| < \frac{1}{3},$$

. . . .

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \text{ uchun } \exists x_n \in X,\ x_n \neq x_0: \quad |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

. . . .

bo‘ladi.

Natijada qaralayotgan teoremaning 1- shartini qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik hosil bo‘lib, uning uchun $\forall n \in N$ da $|x_n - x_0| < 1/n$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Keyingi munosabatdan esa $n \to \infty$ da $x_n \to x_0$ kelib chiqadi. ▶

Shuni ta’kidlash lozimki, 2- teoremaning shartlarini qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar ko‘plab topiladi.

2°. Funksiya limiti ta'riflari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. x_0 nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ (x_n \in X,\ \ x_n \neq x_0)$$

ketma-ketlikni olib, funksiya qiymatlaridan iborat $\{f(x_n)\}$:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz.

***4- ta'rif.* (Geyne ta'rifi.)** Agar $n \to \infty$ da $x_n \to x_0$ $(x_n \in X,\ x_n \neq x_0)$ bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $n \to \infty$ da $f(x_n) \to b$ bo'lsa, b ga $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi limiti* deyiladi va $x \to x_0$ da $f(x) \to b$ yoki

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

Eslatma. Agar $n \to \infty$ da

$$x_n \to x_0 \quad (x_n \in X,\ x_n \neq x_0) \text{ va } \quad y_n \to x_0 \quad (y_n \in X,\ y_n \neq x_0)$$

bo'ladigan turli $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ketma-ketliklar uchun $n \to \infty$ da $f(x_n) \to b_1$, $f(y_n) \to b_2$ bo'lib, $b_1 \neq b_2$ bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* $x \to x_0$ *da limitga ega emas* deyiladi.

1- misol. Ushbu $\qquad f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$

funksiyaning $x_0 = 4$ nuqtadagi limiti topilsin.

◀ Quyidagi $\{x_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 4,\ \ (x_n \neq 4,\ \ n = 1, 2, \ldots)$$

ketma-ketlikni olaylik. Unda

$$f(x_n) = \frac{x_n^2-16}{x_n^2-4x_n} = \frac{x_n+4}{x_n}$$

bo'lib, $n \to \infty$ da $f(x_n) \to 2$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2-16}{x^2-4x} = 2. \ ▶$$

2- misol. Ushbu $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ funksiyaning $x \to 0$ dagi limiti mavjud bo'lmasligi ko'rsatilsin.

◀ Ravshanki, $n \to \infty$ da

$$x_n' = \frac{2}{(4n-1)\pi} \to 0, \quad x_n'' = \frac{2}{(4n+1)\pi} \to 0$$

bo'ladi.

Bu ketma-ketliklar uchun

$$f(x_n') = \frac{4n-1}{2}\pi = -1, \quad f(x_n'') = \frac{4n+1}{2}\pi = 1$$

bo'lib, $n \to \infty$ da

$$f(x_n') \to -1, \quad f(x_n'') \to 1$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $x_0 = 0$ nuqtada limitga ega emas. ▶

5- ta'rif. **(Koshi ta'rifi.)** Agar $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilsaki, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ uchun

$$| f(x) - b | < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi limiti* deyiladi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin:

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \ \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}), \ | f(x) - b | < \varepsilon$$

bo'lsa, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

3- misol. $f(x) = C = \text{const} \ (C \in R)$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = C$$

bo'ladi.

4- misol. Ushbu $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ funksiyaning $x_0 = 1$ nuqtadagi limiti 2 ga teng ekani ko'rsatilsin.

◀ $\forall\varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\delta = \varepsilon$ deb olsak, u holda $| x - 1 | < \delta \ (x \neq 1)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x da

$$\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| = | x + 1 - 2 | = | x - 1 | < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$. ▶

5- misol. Faraz qilaylik, $X = R \setminus \{0\}$ da $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

bo'ladi.

◀ Ma'lumki, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ uchun

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

bo'ladi. Bu tengsizliklardan, funksiyalarning juftligini hisobga olib, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ da

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

bo'lishini topamiz. Keyingi tengsizliklardan esa

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $\forall \varepsilon > 0$ ni olib, $\delta = \min\{\varepsilon;\ 1\}$ deyilsa, unda $\forall x$, $|x| < \delta$, $x \neq 0$ uchun

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \ ▶$$

6- misol. Ushbu

$$f(x) = a^x, \ \ a > 0, \ \ x \in R, \ \ x_0 = 0$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1$$

bo'lishi isbotlansin.

◀ $a > 1$ bo'lgan holni qaraylik. Bu holda $f(x)$ funksiya qat'iy o'suvchi bo'ladi:

$$\forall x_1,\ x_2 \in R,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2):\ a^{x_1} < a^{x_2}.$$

$\forall\varepsilon > 0$ sonni olaylik. Ma'lumki, $n \to \infty$ da

$$a^{\frac{1}{n}} \to 1, \quad a^{-\frac{1}{n}} \to 1$$

bo'lib, ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan

$$\exists n_1 \in N, \ \forall n > n_1 : \ a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in N, \ \forall n > n_2 : \ a^{-\frac{1}{n}} < 1 - \varepsilon$$

bo'ladi. Endi $n_0 = \max\{n_1, \ n_2\}$, $\delta = \frac{1}{n_0}$ deyilsa, unda

$$\forall x, \ |x - 0| < \delta \Leftrightarrow -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n_0}$$

bo'lganda

$$a^{\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow |a^x - 1| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

$0 < a < 1$ bo'lganda $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ bo'lishini isbotlash o'quvchiga havola etiladi. ▶

6-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ uchun $f(x) > \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti $+\infty$ deb ataladi va

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

kabi belgilanadi. Masalan,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \ (x \neq 0)$$

funksiya uchun $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 = +\infty$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

7- ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki, $\forall x \in X$, $x > \delta$ uchun

$$| f(x) - b | < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ *funksiyaning* $x_0 = +\infty$ *dagi limiti* deyiladi va

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

7- misol. Aytaylik, $X = (0, \ +\infty)$, $x_0 = +\infty$, $f(x) = \frac{1}{x}$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, $\forall\varepsilon > 0$ sonni olaylik. Ravshanki, $\forall x > 0$ uchun

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Demak, $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ deyilsa, unda $\forall x > \delta$ uchun

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta} = \varepsilon$$

bo'ladi. ▶

8- misol. Faraz qilaylik,

$$f(x) = \frac{x^m}{a^x}, \ \ a > 1, \ \ m \in N, \ \ X = R$$

bo'lsin. Unda
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0$$

bo'lishini isbotlaymiz.

◀ $\varepsilon > 0$ sonni olaylik. Ma'lumki, $n \to \infty$ da

$$\frac{(n+1)^m}{a^n} \to 0$$

bo'ladi. U holda $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n > n_0$: $\frac{(n+1)^m}{a^n} < \varepsilon$ bo'ladi.

Agar $C = n_0$ deyilsa, unda $\forall x > C$ uchun

$$\left|\frac{x^m}{a^x} - 0\right| = \frac{x^m}{a^x} < \frac{([x]+1)^m}{a^{[x]}} < \varepsilon$$

bo'ladi $([x] \geq n_0 = C)$. Demak, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0$. ▶

9- misol. Ushbu
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$
munosabat isbotlansin.

◀ $\forall\varepsilon > 0$ sonni olamiz. Ma'lumki, $n\to\infty$ da

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} \to e.$$

Limit ta'rifiga binoan,

$$\forall\varepsilon>0, \quad \exists n_0\in N, \quad \forall n>n_0:$$

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon$$

bo'ladi.

Endi $C = n_0$ desak, u holda $\forall x > C$ uchun

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e+\varepsilon$$

bo'lib,
$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \;\blacktriangleright$$

3°. Funksiya limiti ta'riflarining ekvivalentligi.

3- teorema. Funksiya limitining Koshi hamda Geyne ta'riflari ekvivalent ta'riflardir.

◀ Koshi ta'rifiga ko'ra b soni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti bo'lsin:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

U holda

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in X, \ | x - x_0 | < \delta, \ x \neq x_0$$

bo'lganda

$$| f(x) - b | < \varepsilon \tag{1}$$

bo'ladi. x_0 nuqta – X to'plamning limit nuqtasi. Unda 2- teoremaga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlik topiladiki, $n \to \infty$ da $x_n \to x_0$ ($x_n \neq x_0$, $n = 1$, 2, ...) bo'ladi. Ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan

$$\delta > 0, \ \exists n_0 \in N, \ \forall n > n_0 : \ |x_n - x_0| < \delta \tag{2}$$

bo'ladi. (1) va (2) munosabatlardan $n > n_0$ uchun

$$|f(x_n) - b| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa b sonining Geyne ta'rifi bo'yicha $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti ekanini bildiradi.

Endi b soni Geyne ta'rifi bo'yicha $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti bo'lsin. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti Geyne ta'rifi bo'yicha b ga teng bo'lsa ham, Koshi ta'rifi bo'yicha limiti bo'lmasin. Unda biror $\varepsilon_0 > 0$ uchun ixtiyoriy $\delta > 0$ son olinganda ham $0 < | x - x_0 | < \delta$ ni qanoatlantiruvchi biror x' da

$$| f(x') - b| \geq \varepsilon_0$$

bo'ladi.

Nolga intiluvchi musbat sonlar ketma-ketligi $\{\delta_n\}$ ni olaylik:

$$n \to \infty \ \text{ da } \ \delta_n \to 0 \ \left(\delta_n > 0, \ n = 1, 2, \ldots\right).$$

U holda

$$0 < | x_n - x_0 | < \delta_n \Rightarrow | f(x_n) - b | \geq \varepsilon_0 \tag{3}$$

bo'ladi. Ammo $\delta_n \to 0$ da $x_n \to x_0$, demak, Geyne ta'rifiga asosan

$$f(x_n) \to b$$

bo'ladi. Bu (3) ga ziddir. Demak, b soni Koshi ta'rifi bo'yicha ham $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti bo'ladi. ▶

4°. Funksiyaning o'ng va chap limitlari. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan, x_0 nuqta X ning chap limit nuqtasi va

$$(x_0 - \gamma, \ x_0) \subset X, \ \ (\gamma > 0)$$

bo'lsin.

8- ta'rif. Agar

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, \ x_0): \ |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa, b son $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi chap limiti* deyiladi va

$$b = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

kabi belgilanadi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan, x_0 nuqta X ning o'ng limit nuqtasi va

$$(x_0, \ x_0 + \gamma) \subset X, \ (\gamma > 0)$$

bo'lsin.

9- ta'rif. Agar

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0, \quad \forall x \in (x_0, \ x_0 + \delta): \ |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa, b son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng limiti deyiladi va

$$b = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa}, \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa}, \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning 0 nuqtadagi o'ng limiti 1, chap limiti **−1 bo'ladi**.

Mashqlar

1. Ushbu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

limitlarning ta'riflari keltirilsin.

2. Ushbu $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ funksiya $x_0 = 0$ nuqtada limitga ega emasligi isbotlansin.

3. Limit ta'rifidan foydalanib, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ bo'lishi isbotlansin.

4. $f(x)$ funksiya a nuqtada b limitga ega bo'lishi uchun uning shu nuqtadagi o'ng va chap limitlari mavjud bo'lib,

$$f(a+0) = f(a-0) = b$$

tengliklar o'rinli bo'lishi zarur va yetarli bo'lishi isbotlansin.

13- ma'ruza

Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari. Limitning mavjudligi

1°. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ham yaqinlashuvchi ketma-ketlik singari qator xossalarga ega.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in R$ nuqta X ning limit nuqtasi bo'lsin.

1- xossa. Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiya limitga ega bo'lsa, u yagona bo'ladi.

◀ Bu xossaning isboti limit ta'riflarining ekvivalentligi hamda ketma-ketlik limitining yagonaligidan kelib chiqadi. ▶

2- xossa. Agar

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b, \ (b - \text{chekli son})$$

bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$, $(\delta > 0)$ atrofi topiladiki, bu atrofda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

◀ Aytaylik, $$\lim_{x\to x_0} f(x) = b$$

bo'lsin. Funksiya limiti ta'rifiga binoan

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists\delta > 0, \ \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \text{ da } |f(x) - b| < \varepsilon,$$

ya'ni $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ bo'ladi. Keyingi tengsizliklardan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida chegaralanganligi kelib chiqadi. ▶

3- xossa. Agar

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b$$

bo'lib, $b < p$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ atrofi topiladiki, bu atrofda

$$f(x) < p$$

bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Funksiyaning limiti ta'rifiga ko'ra $\varepsilon = p - b > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $\forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < b + \varepsilon = p$$

bo'ladi. Bu esa $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) < p$ bo'lishini bildiradi. ▶

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in R$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

4- xossa. Agar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b_1, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = b_2$$

bo'lib, $\forall x \in X$ da $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $b_1 \leq b_2$, ya'ni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b_1, \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b_2$

bo'lsin.

Funksiya limitining Geyne ta'rifiga ko'ra x_0 ga intiluvchi ixtiyoriy

$$x_n \to x_0, \quad (x_n \in X, \ x_n \neq x_0)$$

ketma-ketlik uchun

$$n \to \infty \quad \text{da} \quad f(x_n) \to b_1, \ g(x_n) \to b_2 \tag{1}$$

bo'ladi.

Ravshanki, $\forall n \in N$ da

$$f(x_n) \leq g(x_n). \tag{2}$$

Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xossalaridan foydalanib, (1) va (2) munosabatlardan $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_n) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x_n)$, ya'ni $b_1 \leq b_2$ bo'lishini topamiz. ▶

5- xossa. Faraz qilaylik,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b_1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b_2, \quad (b_1,\ b_2 \in R)$$

limitlar mavjud bo'lsin. U holda

a) $\forall c \in R$ da $\lim\limits_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

d) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

e) agar $b_2 \neq 0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ **bo'ladi.**

Bu tasdiqlarning isboti sonlar ketma-ketliklari ustida arifmetik amallar bajarilishi haqidagi ma'lumotlardan kelib chiqadi.

1- misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}$

limit hisoblansin.

◀ Bu limitni yuqoridagi xossalardan foydalanib hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+\ldots+(x^n-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}+x+1)]}{x-1} =$$

$$= 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \ ▶$$

2- misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

limit hisoblansin.

◀ Ma'lumki, $1-\cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$. Shuni hisobga olib topamiz:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right] = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

2°. Funksiya limitining mavjudligi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0 - \gamma,\ x_0) \subset X$ bo'lsin ($\gamma > 0$). Ravshanki, $x_0 \in R$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

1- teorema. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi bo'lib, u yuqoridan chegaralangan bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

limitga ega bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya qiymatlaridan iborat bo'lgan ushbu

$$F = \{f(x) | x \in X \cap \{x < x_0\}\}$$

to'plamni qaraymiz. Teoremaning shartiga ko'ra bu to'plam yuqoridan chegaralangan bo'ladi. U holda to'plamning aniq chegarasining mavjudligi haqidagi teoremaga ko'ra F to'plam aniq yuqori chegaraga ega. Uni b bilan belgilaymiz:

$$\sup F = b.$$

Endi, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$ bo'lishini isbotlaymiz. Aniq yuqori chegara ta'rifiga ko'ra:

1) $\forall x \in X \cap \{x < x_0\}$ uchun $f(x) \le b$;

2) $\exists x^* \in X \cap \{x < x_0\},\ x^* < x_0:\ f(x^*) > b - \varepsilon,\ (\forall \varepsilon > 0)$ bo'ladi.

Agar $\delta = x_0 - x^* > 0$ deyilsa, unda $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \cap (x_0 - \gamma,\ x_0)$ uchun

$$b - \varepsilon < f(x^*) \le f(x) \le b < b + \varepsilon$$

bo'lib,

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$$

ekanini bildiradi. ▶

Xuddi shunga o'xshash quyida keltiriladigan teorema isbotlanadi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0,\ x_0+\gamma) \subset X$ bo'lsin $(\gamma > 0)$. Ravshanki, $x_0 \in R$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2- teorema. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi bo'lib, u quyidan chegaralangan bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x)$$

limitga ega bo'ladi.

Endi funksiya limitining mavjudligi haqidagi umumiy teoremani keltiramiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in R$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1- ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap \left(U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}\right), \quad \forall y \in X \cap \left(U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}\right)$$

lar uchun

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ uchun x_0 nuqtada *Koshi sharti bajariladi* deyiladi.

3- misol. Ushbu $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ funksiya uchun $x_0 = 0$ nuqtada Koshi sharti bajariladi.

◀ Haqiqatan ham, $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ra $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ deyilsa, u holda

$$\forall x \in X \cap (U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \setminus \{0\}), \ \forall y \in X \cap (U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \setminus \{0\})$$

lar uchun (ya'ni $|x| < \delta,\ |y| < \delta$ uchun)

$$|f(x) - f(y)| = |x \sin \frac{1}{x} - y \sin \frac{1}{y}| \le |x \sin \frac{1}{x}| + |y \sin \frac{1}{y}| \le$$

$$\le |x| + |y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo'ladi. ▶

3- teorema. (Koshi teoremasi.) $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun bu funksiya x_0 nuqtada Koshi shartini bajarishi zarur va yetarli.

◀ ***Zarurligi.*** $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli limitga ega bo'lsin:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Limit ta'rifiga binoan:

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0, \quad \forall x \in X \cap \left(U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}\right) \text{ uchun}$$

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

bo'ladi. Shuningdek, $\forall y \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ uchun ham

$$|f(y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

bo'ladi. (2) va (3) munosabatlardan

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - b| + |b - f(y)| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya uchun (1) shart bajarilsin. x_0 nuqtaga intiluvchi ikkita

$$x_n \to x_0 \quad (x_n \ne x_0, \; n = 1, 2, \ldots), \; x_n \in X,$$

$$y_n \to x_0 \quad (y_n \ne x_0, \; n = 1, 2, \ldots), \; y_n \in X$$

ketma-ketliklarni olamiz. Bu ketma-ketliklardan foydalanib, ushbu

$$x_1, \; y_1, \; x_2, \; y_2, \; \ldots, \; x_n, \; y_n, \; \ldots$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz. Uni z_n bilan belgilaymiz. Ravshanki, z_n ketma-ketlik uchun

$$z_n \to x_0 \quad (z_n \ne x_0, \; n = 1, 2, \ldots), \; z_n \in X$$

bo'ladi. Teorema shartiga binoan $\forall\varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\delta > 0$ sonni olamiz. Modomiki, $n \to \infty$ da $z_n \to x_0$ ekan, unda limit ta'rifiga ko'ra:

$$\delta > 0, \; \exists n_0 \in N, \; \forall n > n_0 : \; |z_n - x_0| < \varepsilon$$

bo'ladi. Binobarin, $\forall m > n_0, \; \forall n > n_0$ uchun

$$|f(z_m) - f(z_n)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan $f(z_n)$ ketma-ketlikning fyndamental ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f(z_n)$ ketma-ketlik yaqinlashyvchi:

$$n \to \infty \text{ da } f(z_n) \to b.$$

U holda $f(x_n) \to b$, $f(y_n) \to b$ bo'lib, funksiya limitining Geyne ta'rifiga binoan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

bo'ladi. ▶

3°. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar. Aytaylik, $\alpha(x)$ hamda $\beta(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in R$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

2- ta'rif. Agar

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x \to x_0$ da *cheksiz kichik funksiya* deyiladi.

Masalan, $x \to 0$ da $\alpha(x) = \sin x$ funksiya cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

3- ta'rif. Agar

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$$

bo'lsa, $\beta(x)$ funksiya $x \to x_0$ da *cheksiz katta funksiya* deyiladi.

Masalan, $x \to 0$ da $\beta(x) = \frac{1}{x}$ funksiya cheksiz katta funksiya bo'ladi.

Cheksiz kichik hamda cheksiz katta funksiyalar cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar kabi xossalarga ega bo'ladi:

1) Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalar yig'indisi cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

2) Chegaralangan funksiyaning cheksiz kichik funksiya bilan ko'paytmasi cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

3) Agar $\alpha(x)$ $(\alpha(x) \neq 0)$ cheksiz kichik funksiya bo'lsa, $\frac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta funksiya bo'ladi.

4) Agar $\beta(x)$ cheksiz katta funksiya bo'lsa, $\frac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Mashqlar

1. Ushbu

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

limit bilan aniqlanadigan funksiya topilsin.

2. Ushbu $\lim\limits_{n \to \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ limit hisoblansin.

14- ma'ruza

Funksiyalarni taqqoslash

1°. «O» va «o» belgilar, ularning xossalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1- ta'rif. Agar shunday o'zgarmas $C > 0$ soni va shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in X \bigcap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ uchun

$$|f(x)| \le C\,|g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\exists C \in R_+,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in X \bigcap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}):\ |f(x)| \le C\,|g(x)|$$

bo'lsa, $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan *chegaralangan* deyiladi va $f(x) = O(g(x))$ kabi belgilanadi.

Agar

$$\exists C \in R,\ \exists d \in R_+,\ \forall x,\ |x| > d:\ \ |f(x)| \le C\,|g(x)|$$

bo'lsa, $x \to x_0=\infty$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan *chegaralangan* deyiladi va yuqoridagidek $f(x) = O(g(x))$ kabi belgilanadi.

Masalan, $x \to 0$ da $x^2 = O(x)$ bo'ladi, chunki $x\in(-1,\ 1)$ da $|x^2| \le |x|$.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida chegaralangan bo'lsa, $x \to x_0$ da $f(x) = O(1)$ kabi yoziladi.

«O» ning xossalari:

1) Agar
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = b$$
bo'lsa, $x \to x_0$ da $f(x) = O(g(x))$ bo'ladi.

2) Agar $x \to x_0$ da $f(x) = O(g(x))$ va $g(x) = O(h(x))$ bo'lsa, u holda $x \to x_0$ da $f(x) = O(h(x))$ bo'ladi. Demak, $x \to x_0$ da $O(O(h(x))) = O(h(x))$.

3) Agar $x \to x_0$ da $f(x) = O(g(x))$ va $h(x) = O(g(x))$ bo'lsa, u holda $x \to x_0$ da $f(x) + h(x) = O(g(x))$ bo'ladi.

4) Agar $x \to x_0$ da $f_1(x) = O(g_1(x))$ va $f_2(x) = O(g_2(x))$ bo'lsa, u holda $x \to x_0$ da $f_1(x)\cdot f_2(x) = O(g_1(x)\cdot g_2(x))$ bo'ladi.

2- ta'rif. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

uchun

$$|f(x)| \le \varepsilon |g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}):\ |f(x)| \le \varepsilon |g(x)|$$

bo'lsa, $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan *yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya* deyiladi va $f(x) = o(g(x))$ yoki $f = o(g)$ kabi belgilanadi.

«o» ning xossalari:

1) Agar $x \to x_0$ da $f = o(g)$ bo'lsa, u holda $x \to x_0$ da $f = O(g)$ bo'ladi.

2) Agar $x \to x_0$ da $f = o(g)$, $g = o(h)$ bo'lsa, u holda $x \to x_0$ da $f = o(h)$ bo'ladi. Demak, $o(o(h)) = o(h)$.

3) Agar $x \to x_0$ da $f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g)$ bo'lsa, u holda $x \to x_0$ da $f_1 + f_2 = o(g)$ bo'ladi.

4) Agar $x \to x_0$ da $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$ bo'lsa, u holda $x \to x_0$ da $f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$ bo'ladi. Demak, $o(g_1) \cdot o(g_2) = o(g_1 \cdot g_2)$.

2°. Funksiyalarning ekvivalentligi. Autaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

3- ta'rif. $x \to x_0$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ($x \ne x_0$ da $g(x) \ne 0$) uchun

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

bo'lsa, $x \to x_0$ da $f(x)$ va $g(x)$ *ekvivalent funksiyalar* deyiladi va $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $x \to 0$ da $f(x) = \sin x$ va $g(x) = x$ funksiyalar ekvivalent funksiyalar bo'ladi: $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$.

1- teorema. $x \to x_0$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ($x \ne x_0$ da $g(x) \ne 0$) ekvivalent bo'lishi uchun

$$g(x) - f(x) = o(g(x))$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

◀ ***Zarurligi.*** $x \to x_0$ da $f(x) \sim g(x)$ bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

bo'lib, undan

$$\lim_{x\to x_0}\left[1-\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-f(x)}{g(x)} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $g(x) - f(x) = o(g(x))$.

Yetarliligi. $x \to x_0$ da $g(x) - f(x) = o(g(x))$ bo'lsin. U holda $x \to x_0$ da

$$1-\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)-f(x)}{g(x)} = \frac{o(g(x))}{g(x)}$$

bo'lib, undan

$$\lim_{x\to x_0}\left[1-\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-f(x)}{g(x)} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

ya'ni $f(x) \sim g(x)$ ekanini bildiradi. ▶

«~» ning xossalari:

1) Har qanday funksiya uchun $x \to x_0$ da $f(x) \sim f(x)$ bo'ladi.

2) Agar $x \to x_0$ da $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \sim h(x)$ bo'lsa, $x \to x_0$ da $f(x) \sim h(x)$ bo'ladi.

3) Agar $x \to x_0$ da $f_1(x) \sim g_1(x)$, $f_2(x) \sim g_2(x)$ bo'lsa, $x \to x_0$ da $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ bo'ladi.

3°. Funksiyaning asimptotik yoyilmasi. Autaylik,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g_1(x)} = c_1 = \text{const} \neq 0$$

bo'lsin. Unda $x \to x_0$ da $f(x) \sim cg_1(x)$ bo'lib,

$$f(x) = c_1 g_1(x) + o(g_1(x))$$

bo'ladi. Bu holda $c_1 g_1(x)$ funksiya $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning *bosh qismi* deyiladi.

Faraz qilaylik, $x \to x_0$ da $c_2 g_2(x)$ $(c_2 = \text{const} \neq 0)$ funksiya $f(x) \sim c_1 g_1(x)$ ning bosh qismi bo'lsin. U holda $x \to x_0$ da

$$f(x) - c_1 g_1(x) \sim c_2 g_2(x)$$

bo'lib,

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + o(g_2(x))$$

bo'ladi.

Bu jarayonni marta takrorlab, $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyani quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \ldots + c_n g_n(x) + o(g_n(x)) \qquad (1)$$

bunda $c_i \neq 0$ va

$$g_{i+1}(x) = o(g_i(x)), \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Odatda, (1) formula $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning *asimptotik yoyilmasi* deyiladi.

4°. Ekvivalentlikdan foydalanib, funksiyalarning limitini topish. Endi funksiyalarning ekvivalentligiga asoslangan holda funksiyalarning limitini hisoblashda foydalaniladigan teoremani keltiramiz.

2- teorema. Agar $x \to x_0$ da $f_1(x) \sim f_2(x)$, $g_1(x) \sim g_2(x)$ bo'lib, ushbu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

limit mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

limit ham mavjud va

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik, $x \to x_0$ da $f_1(x) \sim f_2(x)$, $g_1(x) \sim g_2(x)$ bo'lsin. Unda ravshanki, $x \to x_0$ da

$$f_2(x) = f_1(x) + o(f_1(x)),$$
$$g_2(x) = g_1(x) + o(g_1(x))$$

bo‘ladi. Bu munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)+o(f_1(x))}{g_1(x)+o(g_1(x))}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \blacktriangleright$$

Misol. Ushbu
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$$
limit hisoblansin.

◀ Ravshanki, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{x^2}$.

Endi $\sin\frac{3x}{2}=\frac{3x}{2}+o(x)$ va $\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}+o(x)$ bo‘lishini e’tiborga olib, topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{3}{2}x+o(x)\right)\left(\frac{1}{2}x+o(x)\right)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

Demak, $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin 2x}{x^2}=\frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

Mashqlar

1. Aytaylik, $n\in N$: $a_1, a_2, \ldots, a_n\in R$ bo‘lsin. U holda $x\to+\infty$ da
$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=O(x^n)$$
bo‘lishi isbotlansin.

2. Agar $x\to x_0$ da $\quad f(x)-g(x)=o(f(x))$

bo‘lsa, $x\to x_0$ da $\quad f(x)-g(x)=o(g(x))$

bo‘lishi isbotlansin.

3. Agar $x\to x_0$ da $\quad f_1(x)\sim f_2(x),\ g_1(x)\sim g_2(x)$
bo‘lsa, $x\to x_0$ da

$$f_1(x)+f_2(x)\sim g_1(x)+g_2(x),$$
$$f_1(x)-f_2(x)\sim g_1(x)-g_2(x)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladimi?

4-BOB
FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI VA TEKIS UZLUKSIZLIGI

15-ma'ruza
Funksiyaning uzluksizligi tushunchasi

1°. Funksiyaning uzluksizligi ta'riflari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ushbu

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ ning mavjudligi,

2) $b = f(x_0)$ bo'lishi

shartlarining bajarilishi bilan ifodalanadi.

Misollar. 1. Ushbu

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$

funksiya $\forall x_0 \in R$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^4 + x^2 + 1) = x_0^4 + x_0^2 + 1 = f(x_0).$$

2. Ushbu

$$f(x) = (\mathrm{sign} x)^2 = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, $\forall x_0 \in R$ nuqtada $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ bo'ladi. Demak, qaralayotgan funksiya $\forall x_0 \in R$, $x \neq 0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi. Ammo $f(0) = 0$ bo'lganligi sababli

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya $x_0 = 0$ nuqtada uzluksiz bo'lmaydi.

Funksiya limitining Geyne va Koshi ta'riflariga binoan x_0 funksiyaning nuqtadagi uzluksizligini quyidagicha ta'riflash mumkin.

2- ta'rif. Agar

$$n \to \infty \text{ da } x_n \to x_0, \ (x_n \in X, \ n = 1, 2, ...)$$

bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$n \to \infty \text{ da } f(x_n) \to f(x_0)$$

bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

3- ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$$

uchun $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Odatda, $x - x_0$ ayirma *argument orttirmasi*, $f(x) - f(x_0)$ esa *funksiya orttirmasi* deyilib, ular mos ravishda Δx va Δf kabi belgilanadi:

$$\Delta x = x - x_0, \ \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Unda funksiya uzluksizligining 1- ta'rifidagi (1) munosabat ushbu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \tag{2}$$

ko'rinishga keladi. Demak, (2) munosabatni funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ta'rifi sifatida qarash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqta X to'plamning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin.

4- ta'rif. Agar

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0), \ (\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0))$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz* deyiladi.

Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz bo'lganda funksiyaning o'ng (chap) limiti uning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi:

$$f(x_0 + 0) = f(x_0), \quad (f(x_0 - 0) = f(x_0)).$$

Keltirilgan ta'riflardan, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ham o'ngdan, ham chapdan bir vaqtda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'lishini topamiz.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi, $\forall\varepsilon > 0$ berilganda ham unga ko'ra shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilib,

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

bo'lishini bildiradi.

5- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda uzluksiz deyiladi.

6- ta'rif. $X \subset R$ to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalardan iborat to'plam *uzluksiz funksiyalar to'plami* deyiladi va $C(X)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x) \in C[a, b]$ bo'lishi, $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segmentning har bir nuqtasida uzluksiz, ya'ni $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz, a nuqtada o'ngdan, b nuqtada esa chapdan uzluksiz bo'lishini bildiradi.

2°. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar. Misollar. Uzluksiz funksiyalarning yig'indisi, ko'paytmasi va nisbatining uzluksiz funksiya bo'lishi haqidagi tasdiqlarni keltiramiz.

1- teorema. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \subset X$ nuqtada uzluksiz bo'lsin. U holda:

a) $\forall c > R$ da $c \cdot f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi;

b) $f(x) + g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi;

d) $f(x) \cdot g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi;

e) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x) \neq 0)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

◀ Teoremaning tasdiqlari uzluksizlik ta'rifi hamda limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremadan kelib chiqadi. Masalan, teoremaning d) tasdig'i quyidagicha isbotlanadi:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0).$$ ▶

1- misol. $f(x) = c$, $c \in R$ bo'lsin. Unda $f(x) \in C(R)$ bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, $\forall\varepsilon > 0$ ga ko'ra $\delta = \varepsilon$ deyilsa, u holda

$$\forall x, \quad |x - x_0| < \delta: \ |f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

bo'ladi. ▶

2- misol. $f(x) = x$, $x \in R$ bo'lsa, u holda $f(x) \in C(R)$ bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, $\forall\varepsilon > 0$ ga ko'ra $\delta = \varepsilon$ deyilsa, u holda

$$\forall x,\quad |x-x_0|<\delta:\quad |f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta=\varepsilon$$
bo‘ladi. ▶

3- misol.

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m;\ m\in N,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m\in R$$

bo‘lsin. U holda $f(x)\in C(R)$ bo‘ladi.

◀ Bu tasdiqning isboti 1- va 2-misollar hamda 1- teoremadan kelib chiqadi. ▶

Shunga o‘xshash ushbu

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}$$

funksiyaning (bunda $m,n\in N$; $a_0,a_1,\ldots,a_m,b_0,b_1,\ldots,b_n\in R$)

$$\{x\in R\setminus b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n=0\}$$

to‘plamda uzluksiz bo‘lishi ko‘rsatiladi.

4- misol. $f(x)=\sin x$ bo‘lsin. U holda $f(x)\in C(R)$ bo‘ladi.

◀ $x_0\in R$ nuqtani olib, $\forall\varepsilon>0$ ga ko‘ra $\delta=\varepsilon$ deymiz.

Unda $\forall x,\quad |x-x_0|<\delta$:

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|<\delta=\varepsilon$$

bo‘ladi. ▶

Xuddi shunga o‘xshash $f(x)=\cos x$ funksiya R da, $f(x)=\operatorname{tg}x$ va $f(x)=\operatorname{ctg}x$ funksiyalarning esa o‘z aniqlanish to‘plamlarida uzluksiz bo‘lishi ko‘rsatiladi.

5- misol. $f(x)=a^x$, $a>0$ bo‘lsin. U holda $f(x)\in C(R)$ bo‘ladi.

◀ Ravshanki, $\lim\limits_{x-x_0\to0}(a^{x-x_0}-1)=0.$

Unda

$$0=\lim_{x-x_0\to0}(a^{x-x_0}-1)\Leftrightarrow\lim_{x-x_0\to0}\bar{a}^{x_0}(a^x-a^{x_0})=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\bar{a}^{x_0}\lim_{x\to x_0}(a^x-a^{x_0})=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$$

bo‘ladi. ▶

6- misol. Aytaylik,

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{agar} \quad x<0 \quad \text{bo‘lsa,}\\ 0, & \text{agar} \quad x=0 \quad \text{bo‘lsa,}\\ 1, & \text{agar} \quad x>0 \quad \text{bo‘lsa}\end{cases}$$

bo‘lsin. Bu funksiya uchun

$$f(+0)=1, \quad f(-0)=-1$$

va berilgan funksiya $X = R \setminus \{0\}$ to‘plamda uzluksiz bo‘ladi.

3°. Funksiyaning uzilishi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b)da $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ berilgan bo‘lib, $x_0 \in (a, b)$ bo‘lsin.

Ma’lumki, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng va chap limitlari

$$f(x_0+0), \quad f(x_0-0) \tag{3}$$

mavjud bo‘lib,

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0) \tag{4}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lar edi.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lmasa, unda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *uzilish nuqtasi* deyiladi.

7- ta’rif. Agar (3) limitlar mavjud va chekli bo‘lib, (4) tengliklarning birortasi o‘rinli bo‘lmasa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *birinchi tur uzilish nuqtasi* deyiladi.

Bunda

$$f(x_0+0), \quad f(x_0-0)$$

ayirma *funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi* deyiladi.

Masalan, $f(x) = [x]$ funksiya $x = p$ $(p \in Z)$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki

$$f(p+0)=p, \quad f(p_0-0)=p-1$$

bo‘lib,

$$f(p+0) \ne f(p_0-0)$$

bo‘ladi.

Agar hech bo‘lmaganda (3) limitlarning birortasi mavjud bo‘lmasa yoki cheksiz bo‘lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *ikkinchi tur uzilish nuqtasi* deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{agar } x\neq 0 \text{ bo‘lsa,}\\ 0, & \text{agar } x=0 \text{ bo‘lsa}\end{cases}$$

funksiya $x = 0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo‘ladi, chunki bu funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi o‘ng va chap limitlari mavjud emas.

4°. Murakkab funksiyaning uzluksizligi. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda, $u = F(y)$ funksiya esa Y_f to‘plamda aniqlangan bo‘lib, ular yordamida $u = F(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo‘lsin.

2- teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $x_0\in X$ nuqtada, $u = F(y)$ funksiya esa $y_0\in Y_f$ nuqtada ($y_0 = f(x_0)$) uzluksiz bo‘lsa, $F(f(x))$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

◀ $u = F(y)$ funksiya $y_0\in Y_f$ nuqtada ($y_0 = f(x_0)$) uzluksiz bo‘lgani uchun

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\sigma>0,\ \forall y,\quad |y-y_0|<\sigma:\ |F(y)-F(y_0)|<\varepsilon,\quad (5)$$

ya’ni $|F(f(x))-F(f(x_0))|<\varepsilon$ bo‘ladi.

Shartga ko‘ra $y = f(x)$ funksiya $x_0\in X$ nuqtada uzluksiz. U holda yuqoridagi $\sigma > 0$ ga ko‘ra

$$\exists\delta>0,\ \forall x,\quad |x-x_0|<\delta:\ |f(x)-f(x_0)|<\sigma,$$

ya’ni

$$|y-y_0|<\sigma \quad (6)$$

bo‘ladi.

(5) va (6) munosabatlardan

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\quad |x-x_0|<\delta:\ |F(f(x))-F(f(x_0))|<\varepsilon$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $F(f(x))$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. ▶

5°. Monoton funksiya uzilish nuqtasining xarakteri.

3- teorema. $[a, b]\subset R$ da monoton bo‘lgan $f(x)$ funksiya shu $[a, b]$ ning istalgan nuqtasida yoki uzluksiz bo‘ladi, yoki birinchi tur uzilishga ega bo‘ladi.

◀ $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da o‘suvchi bo‘lsin. Aytaylik,

$$x_0\in[a,b],\ (x_0-\delta, x_0+\delta)\subset[a,b],\quad (\delta>0)$$

bo‘lsin. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremaga ko‘ra

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)\le f(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \geq f(x_0),$$

bo'ladi. Agar $f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)$
bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, agar

$$f(x_0-0) < f(x_0+0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada birinchi tur uzilishiga ega bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da kamayuvchi bo'lganda ham tasdiq isbotlanadi. ▶

Mashqlar

1. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{agar } x - \text{ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning $x_k = k\pi \ (k \in Z)$ nuqtalarida uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

2. Ushbu

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

Dirixle funksiyasi R ning har bir nuqtasida uzilishga ega ekanligi isbotlansin.

3. Ushbu $f(x) = [x] \cdot \sin \pi x, \ (x \in R)$

funksiya uchun $f(x) \in C(R)$ bo'lishi ko'rsatilsin.

16- ma'ruza

Uzluksiz funksiyalarning xossalari

1°. Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyaning xossalari (lokal xossalari). Misollar. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in X$ bo'lsin.

1. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $\delta > 0$ va $M > 0$ sonlar topiladiki, $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$ da $|f(x)| < M$ bo'ladi, ya'ni $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida chegaralangan bo'ladi.

2. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo‘lib, $f(x_0) \neq 0$ bo‘lsa, u holda shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$ da $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x_0)$ bo‘ladi, ya’ni $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi ishorasi $f(x_0)$ning ishorasi kabi bo‘ladi.

Bu tasdiqlarning isboti limitga ega bo‘lgan funksiyaning xossalaridan kelib chiqadi.

3. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b, \quad (b \in R) \tag{1}$$

ga ega bo‘lib, $g(y)$ funksiya Y to‘plamda berilgan $\{f(x) \mid x \in X\} \cup \{b\} \subset Y$ va $y = b$ nuqtada uzluksiz bo‘lsin. U holda

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(b),$$

ya’ni

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) \tag{2}$$

bo‘ladi.

◀ $n \to \infty$ da $x_n \to x_0$ $(x_n \in X, \ x_n \neq x_0, \ n = 1, 2, \ldots)$ bo‘ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olaylik. Unda (1) munosabatga ko‘ra

$$n \to \infty \text{ da } f(x_n) \to b$$

bo‘ladi. Shartga ko‘ra $g(f(x))$ funksiya b nuqtada uzluksiz. Demak,

$$n \to \infty \text{ da } g(f(x_n)) \to g(b)$$

bo‘ladi. Keyingi munosabatdan (2) tengliknig o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. ▶

1- misol. Ushbu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad (a > 0, \ a \neq 1) \tag{3}$$

munosabat isbotlansin.

◀ (2) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e.$$

Xususan, $a = e$ bo‘lganda $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ bo‘ladi. ▶

2- misol. Ushbu $\quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (a > 0)$

munosabat isbotlansin.

◀ Keltirilgan tenglikni isbotlash uchun $a^x - 1 = t$ deb olamiz. Unda $x \to 0$ da $t \to 0$ bo'ladi. Shuni hamda (3) munosabatni e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \ ▶$$

3- misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha, \quad (\alpha \in R)$$

munosabat isbotlansin

◀ Ravshanki, $\qquad (1+x)^\alpha = e^{\alpha\ln(1+x)}$

va $x \to 0$ da $\ln(1+x) \to 0$ bo'ladi. Unda

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \frac{(e^{\alpha\ln(1+x)}-1)}{\alpha\cdot\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)\cdot\alpha}{x}$$

bo'lib, undan

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\alpha = \alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

2°. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari (global xossalar). Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lsin.

Ma'lumki, $f(x)$ funksiya (a, b) da uzluksiz, a nuqtada o'ngdan, b nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'ladi.

Endi segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalarini keltiramiz. Ular teoremalar orqali ifodalanadi.

1- teorema. (Veyershtrassning birinchi teoremasi.) Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz, ya'ni $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralangan bo'ladi.

◀ Ma'lumki, $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ da chegaralanganligi quyidagi

$$\exists M \in (0, +\infty), \ \forall x \in [a, b] : |f(x)| \le M$$

ni anglatadi.

Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsa ham funksiya $[a, b]$ da chegaralanmagan bo'lsin. U holda

$$\forall n \in N,\ \exists x_n \in [a, b]:\ |f(x_n)| > n,\ (n = 1, 2, \ldots) \qquad (4)$$

bo'ladi. Ayni paytda, hosil bo'ladigan $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $x_n \in [a, b]$, $(n = 1, 2, \ldots)$ bo'lganligi sababli u chegaralangan bo'ladi. Unda Bolsano—Veyershtrass teoremasiga ko'ra bu $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy $\{x_n\}$ ketma-ketlik ajratish mumkin:

$$k \to \infty \text{ da } x_{n_k} \to x_0,\ (x_0 \in [a, b]).$$

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz. Binobarin,

$$k \to \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \to f(x_0) \qquad (5)$$

bo'ladi. Bu (5) munosabat yuqorida qilingan farazga ziddir (chunki faraz bo'yicha

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = +\infty$$

bo'lishi lozim edi). Demak, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralangan bo'ladi. ▶

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar X to'plamda shunday $x_0 \in X$ nuqta topilsaki, $\forall x \in X$ uchun

$$f(x) \le f(x_0),\ \ (f(x) \ge f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa, *$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishadi* deyiladi va

$$f(x_0) = \max_X f(x), \quad (f(x_0) = \min_X f(x))$$

kabi belgilanadi.

2-teorema. (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi.) Agar $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsa, bu funksiya $[a, b]$ segmentda eng katta hamda eng kichik qiymatlarga erishadi, ya'ni

$$\exists c_1 \in [a, b],\ \forall x \in [a, b]:\ f(x) \le f(c_1),$$
$$\exists c_2 \in [a, b],\ \forall x \in [a, b]:\ f(x) \ge f(c_2)$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik, $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsin. Veyershtrassning 1-teoremasiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda chegaralangan, ya'ni ushbu

$$\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

to'plam chegaralangan bo'ladi. Unda to'plamning aniq chegarasi haqidagi teoremaga ko'ra

$$\sup_{x\in[a,\,b]} f(x) = M, \ \ (M \in R)$$

mavjud bo‘ladi.

To‘plamning aniq yuqori chegarasi ta’rifiga muvofiq:

$$\forall x \in [a, b]: \ f(x) \le M,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x(\varepsilon) \in [a, b]: \ f(x(\varepsilon)) > M - \varepsilon$$

bo‘ladi. Keyingi tengsizlikda

$$\varepsilon = 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \dots, \ \frac{1}{n}, \ \dots$$

deb olinadigan bo‘lsa,

$$x_n = x\left(\frac{1}{n}\right) \in [a, b]$$

ketma-ketlik hosil bo‘lib, uning uchun

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}$$

tengsizlik bajariladi. Demak, $\forall n \in N$ da

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$$

bo‘ladi. Bu munosabatdan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M \tag{6}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Yuqorida hosil qilingan $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan. Undan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni ajratish mumkin. Uni $\{x_{n_k}\}$ deylik:

$$k \to \infty \text{ da } x_{n_k} \to c_1, \ \ (c_1 \in [a, b]).$$

Berilgan $f(x)$ funksiyaning uzluksizligidan foydalanib topamiz:

$$k \to \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \to f(c_1).$$

Ravshanki, $\{f(x_{n_k})\}$ ketma-ketlik $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi. Demak, (6) munosabatga ko‘ra

$$k \to \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \to M$$

bo‘lib, $f(c_1)=M$ bo‘lishi kelib chiqadi. Xuddi shunga o‘xshash, $f(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatga erishishi ko‘rsatiladi. ▶

3- teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a, b]$;

2) segmentning chetki nuqtalari a va b larda har xil ishorali qiymatlarga ega, ya'ni

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ yoki } f(a) > 0 > f(b)$$

bo'lsin.

U holda (a, b) da shunday x_0 nuqta $(a < x_0 < b)$ topiladiki, $f(x_0) = 0$ bo'ladi.

◀ Aytaylik, $f(x) \in C[a, b]$ bo'lib, $f(a) < 0 < f(b)$ bo'lsin. $[a, b]$ segmentning $f(x)$ funksiyaga manfiy qiymatlar beradigan nuqtalaridan iborat to'plamini E deylik:

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}.$$

Ravshanki, $a \in E$, $E \subset [a, b]$. Demak, E to'plam chegaralangan va $E \neq \varnothing$.

To'plamning aniq yuqori chegarasi haqidagi teoremaga ko'ra

$$\sup E = x_0, \ (x_0 \in (a, b))$$

mavjud bo'ladi.

Aniq yuqori chegara ta'rifiga binoan,

$$\forall n \in N, \ \exists x_n \in E: \ x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0$$

bo'ladi. Demak,

$$f(x_n) < 0, \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

$f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ da uzluksiz bo'lganligini e'tiborga olib topamiz:

$$n \to \infty \text{ da } x_n \to x_0 \text{ bo'lib, } f(x_n) \to f(x_0).$$

Bir tomondan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0,$$

ikkinchi tomondan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

bo'lishidan

$$f(x_0) \leq 0 \tag{7}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki, $x > x_0$ da $x \notin E$. Binobarin, $f(x) \geq 0$. Shuning uchun

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \geq 0$$

bo'lib,

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \geq 0 \tag{8}$$

bo'ladi. (7) va (8) munosabatlardan $f(x_0) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Xuddi shunga o'xshash, $f(x) \in C[a, b]$ va $f(a) > 0 > f(b)$ bo'lgan holda teorema isbotlanadi. ▶

4- teorema. Agar $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsa, u holda chegaralari $f(a)$ va $f(b)$ bo'lgan segmentga tegishli ixtiyoriy l soni olinganda $[a, b]$ da shunday x_0 nuqta topiladiki, $f(x_0) = l$ bo'ladi.

◀ $f(a) < f(b)$ deb, $f(a) \leq l \leq f(b)$ ni olaylik. Ravshanki, $f(a) = l$ yoki $f(b) = l$ bo'lgan holda teorema isbotlangan hisoblanadi.

Endi $f(a) < l < f(b)$ bo'lsin. Ushbu

$$g(x) = f(x) - l, \quad (x \in [a, b])$$

funksiyani olaylik. Bu funksiya uchun:

1) $g(x) \in C \; [a, b]$;

2) $g(a) < 0 < g(b)$

bo'ladi. Unda 3- teoremaga ko'ra shunday $x_0 \in (a, b)$ topiladiki,

$$g(x_0) = 0,$$

ya'ni

$$f(x_0) = l$$

bo'ladi. ▶

Ushbu ma'ruzaning pirovardida berilgan funksiyaga teskari bo'lgan funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

5- teorema (teskari funksiyaning mavjudligi). Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ oraliqda uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsa, u holda $Y_f = \{f(x) \mid x \in X\}$ oraliqda teskari $f^{-1}(y)$ funksiya mavjud bo'lib, u uzluksiz qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'ladi.

Mashqlar

1. Ushbu

$$x \cdot e^x = 1$$

tenglama (0, 1) da hech bo'lmaganda bitta ildizga ega ekanligi isbotlansin.

2. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+1, & \text{agar } -1\le x<0 \text{ bo‘lsa,} \\ 0, & \text{agar } x=0 \text{ bo‘lsa,} \\ x^2-1, & \text{agar } 0<x\le 1 \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

funksiya $[-1,\ 1]$ da eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadimi?

3. Ushbu

$$f(x)=x^3-x,\ \ (x\in R)$$

funksiya qiymatlari to‘plami R bo‘lishi isbotlansin.

4. Aytaylik, $f(x)$ funksiya tekislikdagi biror aylanada berilgan va uzluksiz bo‘lsin. U holda aylanada diametral qarama-qarshi joylashgan a va b nuqtalar topilib, $f(a)=f(b)$ bo‘lishi isbotlansin.

17- ma’ruza

Funksiyaning tekis uzluksizligi. Kantor teoremasi

1°. Funksiyaning tekis uzluksizligi tushunchasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

1- ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon\in 0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki,

$$|x'-x''|<\delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x',\ x''\in X$ uchun

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x',x''\in X,\ \ |x'-x''|<\delta:\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda *tekis uzluksiz* deyiladi.

Keltirilgan ta’rifdan:

1) $\delta>0$ sonning faqat $\varepsilon>0$ ga bog‘liqligi;

2) $f(x)$ funksiya X da tekis uzluksiz bo‘lsa, u shu X to‘plamda uzluksiz bo‘lishi kelib chiqadi.

1- misol. $f(x)=x,\ \ x\in R$ bo‘lsin. Bu funksiya R da tekis uzluksiz bo‘ladi.

◀ Agar $\forall\varepsilon>0$ ga ko‘ra $\delta=\varepsilon$ deb olinsa, unda $\forall x',x''\in X$, $|x'-x''|<\delta$ da

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. ▶

2- misol. $f(x) = \sin x$, $x \in R$ bo'lsin. Bu funksiya R da tekis uzluksiz bo'ladi.

◀ Agar $\forall\varepsilon > 0$ ga ko'ra, $\delta = \varepsilon$ deyilsa, unda $\forall x', x'' \in R$, $|x' - x''| < \delta$ da

$$|\sin x' - \sin x''| = 2\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right| \le |x' - x''| < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. ▶

3- misol. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in X = (0, 1]$ bo'lsin. Bu funksiya $X = (0, 1]$ da tekis uzluksiz bo'lmaydi.

◀ $\forall\varepsilon > 0$ sonni, masalan, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ deb olib, x' va x'' nuqtalar sifatida

$$x' = \frac{1}{n} \text{ va } x'' = \frac{1}{n+1}, \ (n \in N)$$

deb olinsa, u holda $|x' - x''|$ ayirma quyidagicha

$$|x' - x''| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)}$$

bo'ladi. Bundan ($|x' - x''| < \delta$) δ ni har qancha kichik qilib olish mumkin bo'lsa ham

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = |n - (n+1)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya $X=(0, 1]$ da tekis uzluksiz emas. ▶

2°. 1- teorema. (Kantor teoremasi.) Agar $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da tekis uzluksiz bo'ladi.

◀ Aytaylik, $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsa ham funksiya $[a, b]$ da tekis uzluksiz bo'lmasin. Unda biror $\varepsilon > 0$ va ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun $[a, b]$ da shunday x' va x'' nuqtalar topiladiki,

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \ge \varepsilon$$

bo'ladi. $n \to +\infty$ da $\delta_n \to 0$, ($\delta_n > 0$, $n=1, 2, \ldots$) bo'ladigan ixtiyoriy

$\{\delta_n\}$ ketma-ketlikni olamiz. Unda

$$|x_1' - x_1''| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1') - f(x_1'')| \geq \varepsilon,$$
$$|x_2' - x_2''| < \delta_2 \Rightarrow |f(x_2') - f(x_2'')| \geq \varepsilon,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$|x_n' - x_n''| < \delta_n \Rightarrow |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

bo'ladi.

Ravshanki, $\{x_n'\}$ uchun $x_n' \in [a, b]$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ bo'lib, undan

$$k \to +\infty \text{ da } x_{n_k}' \to x_0, \ (x_0 \in [a, b])$$

bo'ladigan qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Shuningdek, x_n'' ketma-ketlikdan x_{n_k}'' qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Ayni paytda, x_{n_k}'' uchun ham

$$k \to +\infty \text{ da } x_{n_k}'' \to x_0$$

bo'ladi. $f(x) \in C[a, \ b]$ bo'lishidan $k \to +\infty$ da $f(x_{n_k}') \to f(x_0)$, $f(x_{n_k}'') \to f(x_0)$ bo'lib, ulardan $k \to +\infty$ da $f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'') \to 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $\forall n > N$ uchun

$$|\, f(x_n') - f(x_n'') \,| \geq \varepsilon$$

deb olingan farazga zid. Demak, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da tekis uzluksiz. ▶

2- ta'rif. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$$

ayirma $f(x)$ *funksiyaning X to'plamdagi tebranishi* deyiladi va u ω orqali belgilanadi:

$$\omega = \omega(f; X) = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$$

funksiyaning X to'plamdagi tebranishi quyidagicha

$$\omega = \sup_{x', x'' \in X} \{|f(x') - f(x'')|\}$$

kabi ta'riflanishi ham mumkin.

Natija. Agar $f(x) \in C[a, \ b]$ bo'lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki, $[a, b]$ segment uzunliklari δ dan kichik bo'laklarga ajratilganda har bir bo'lakdagi funksiyaning tebranishi ε dan kichik bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra $f(x)\in C[a,\ b]$. Demak, Kantor teoremasiga ko'ra u $[a,\ b]$ da tekis uzluksiz. Unda ta'rifga binoan

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x',\ x''\in[a,b],\ |x'-x''|<\delta:\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

bo'ladi.

Endi $[a,\ b]$ segmentni uzunligi δ dan kichik bo'lgan

$$[x_k,x_{k+1}],\ (x_0<x_1<x_2<...<x_n,\ x_0=a,\ x_n=b)$$

bo'laklarga ajaratamiz. Unda

$$\forall x',\ x''\in[x_k,x_{k+1}],\ |x'-x''|<\delta:\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\omega=\sup_{x',x''\in[x_k,\,x_{k+1}]}\{|f(x')-f(x'')|\}\le\varepsilon$$

bo'ladi. ▶

3°. Funksiyaning uzluksizlik moduli. $f(x)$ funksiya $X\subset R$ **to'plamda** berilgan bo'lib, u shu to'plamda uzluksiz bo'lsin. Endi

$$\forall\delta>0,\ \forall x',\ x''\in X,\ |x'-x''|<\delta$$

uchun

$$|f(x')-f(x'')| \tag{1}$$

ayirmani qaraymiz.

3- ta'rif. (1) ayirmaning aniq yuqori chegarasi

$$\sup\{|f(x')-f(x'')|\}$$

$f(x)$ funksiyaning $X\subset R$ to'plamdagi uzluksizlik moduli deyiladi va $\omega(\delta)$ kabi belgilanadi:

$$\omega(\delta)=\sup_{|x'-x''|\le\delta}\{|f(x')-f(x'')|\}.$$

Demak, $f(x)$ funksiyaning X to'plamdagi uzluksizlik moduli δ ning manfiy bo'lmagan funksiyasi bo'ladi.

Endi uzluksizlik modulining ba'zi xossalarini keltiramiz:

1. Funksiyaning uzluksizlik moduli δ ning o'suvchi funksiyasi bo'ladi.

◀ Aytaylik, $\delta_1>0,\ \delta_2>0$ va $\delta_1>\delta_2$ bo'lsin. U holda

$$\{x',x''\in X:\ |x'-x''|\le\delta_1\},\ \{x',x''\in X:\ |x'-x''|\le\delta_2\}$$

to'plamlar uchun

$$\{x', x'' \in X:\ |x' - x''| \le \delta_2\} \subset \{x', x'' \in X:\ |x' - x''| \le \delta_1\}$$

bo'lib, undan

$$\omega(\delta_2) \le \omega(\delta_1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\delta_1 > \delta_2 \Rightarrow \omega(\delta_1) \ge \omega(\delta_2)$. ▶

Uzluksizlik modulining keyingi xossasini isbotsiz keltiramiz.

2. Funksiyaning uzluksizlik moduli uchun ushbu

$$\omega(\lambda\delta) \le (1 + \lambda) \cdot \omega(\delta)$$

munosabat o'rinli bo'ladi, bunda λ — musbat son.

4- misol. Ushbu $f(x) = ax + b$, $(a, b \in R)$ funksiyaning $X = [\alpha, \beta]$ dagi uzluksizlik moduli topilsin.

◀ Ta'rifga binoan,

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''|\le\delta} |(ax' + b) - (ax'' + b)| = \sup_{|x'-x''|\le\delta} |a(x' - x'')| = |a| \cdot \delta$$

bo'ladi. Demak, $\omega(\delta) = |a| \cdot \delta$. ▶

2- teorema. $f(x)$ funksiya X to'plamda tekis uzluksiz bo'lishi uchun

$$\lim_{\delta\to+0} \omega(\delta) = 0$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va etarli.

◀ ***Zarurligi.*** $f(x)$ funksiya X to'plamda tekis uzluksiz bo'lsin:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ \forall x',\ x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta_\varepsilon:\ |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

U holda $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy δ uchun

$$\sup_{|x'-x''|\le\delta} \{|f(x') - f(x'')|\} \le \sup_{|x'-x''|\le\delta_\varepsilon} \{|f(x') - f(x'')|\} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

bo'lib, unda $\omega(\delta) < \varepsilon$, ya'ni

$$\lim_{\delta\to+0} \omega(\delta) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Ushbu $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega(\delta) = 0$

munosabat o'rinli bo'lsin. Demak, $\delta \to +0$ da

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''|\le\delta} \{|f(x') - f(x'')|\} \to 0.$$

U holda

$$\forall x',\ x'' \in X,\ |x'-x''| \le \delta < \delta_\varepsilon:\ |f(x')-f(x'')| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya X to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi. ▶

Funksiyaning uzluksizlik moduli funksiyalarni sinflarga ajratish imkonini beradi. Masalan, uzluksizlik moduli ushbu

$$\omega(\delta) \le M \cdot \delta^{\alpha}$$

(bunda $M = const$, $0 < \alpha \le 1$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami α *tartibli Lipshits sinfi* deyiladi va $Lip_M \alpha$ kabi belgilanadi.

Mashqlar

1. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri $[a, b] \subset R$ da tekis uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham $[a, b] \subset R$ da tekis uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

2. $f(x) = x$ funksiyaning $[0, +\infty)$ da tekis uzluksiz emasligi ko'rsatilsin.

3. Ushbu

$$f(x) = x^2 + 1$$

funksiyaning $X = [0, 1]$ segmentdagi uzluksizlik moduli topilsin.

4. Agar $f(x)$ funksiya $(0,1)$ da tekis uzluksiz bo'lsa, ushbu

$$\lim_{x \to +0} f(x)$$

limit mavjud bo'ladimi?

18- ma'ruza

Kompakt to'plam. Kompakt to'plamda uzluksiz funksiyalar

1°. Kompakt to'plam tushunchasi. Avvalo ochiq va yopiq to'plamlar tushunchalarini keltiramiz.

Faraz qilaylik, $X \subset R$ to'plam berilgan bo'lib, $x_0 \in X$ bo'lsin.

1- ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday

$$U_\delta(x_0) = \{x \in R:\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\},\quad (\delta > 0)$$

atrofi mavjud bo'lsaki, uning uchun $U_\delta(x_0) \subset X$ bo'lsa, x_0 nuqta *X to'plamning ichki nuqtasi* deyiladi.

Masalan, $x_0 = \frac{1}{2}$ nuqta $X = [0,\ 1]$ to'plamning ichki nuqtasi bo'ladi. Chunki, bu nuqtaning $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ atrofi uchun $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) \subset [0, 1]$ bo'ladi. $x = 0$, $x = 1$ nuqtalar shu to'plamning ichki nuqtalari bo'lmaydi, chunki, masalan, $x = 0$ nuqtaning hech qaysi $(-\delta,\ \delta)$ atrofi $X = [0,\ 1]$ segmentga tegishli bo'lmaydi. (Bu atrofning $(-\delta,\ 0)$ qismi $[0,\ 1]$ segmentning tashqarisida joylashgan).

2- ta'rif. Agar X to'plamning har bir nuqtasi uning ichki nuqtasi bo'lsa, X *ochiq to'plam* deyiladi.

Masalan, $X = (0, 1)$, $X = (0, 1) \cup (2, 4)$ to'plamlar ochiq to'plamlar bo'ladi.

3- ta'rif. Agar X to'plamning barcha limit nuqtalari shu to'plamga tegishli bo'lsa, X *yopiq to'plam* deyiladi.

Masalan, $X = [0,\ 1]$ segment yopiq to'plamdir.

Eslatma. Limit nuqtaga ega bo'lmagan to'plam ta'rifga ko'ra yopiq to'plam deb hisoblanadi. Masalan, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ to'plam yopiq to'plam bo'ladi.

4- ta'rif. Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan shu to'plamning nuqtasiga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, X *kompakt to'plam* deyiladi.

Misollar. 1. $X = [a, b]$ segmentning kompakt to'plam bo'lishi Bolsano—Veyershtrass teoremasidan kelib chiqadi.

2. $X = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup ... \cup [a_n, b_n]$ to'plam kompakt to'plam bo'ladi.

3. $X = (0,\ 1)$ interval kompakt to'plam bo'lmaydi, chunki

$$x_n = \frac{1}{n+1} \in (0, 1) \text{ bo'lib, } n \to \infty \text{ da } x_n \to 0 \notin X.$$

Teorema. X kompakt to'plam bo'lishi uchun uning chegaralangan va yopiq to'plam bo'lishi zarur va yetarli.

◀ ***Zarurligi.*** X – kompakt to'plam bo'lsin. Uning chegaralanganligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni X — kompakt to'plam bo'lsa ham, u chegaralanmagan bo'lsin. U holda

$$\exists x_n,\ x_n \in X,\ n = 1, 2, 3, \ldots :\quad |x_n| > n$$

bo'ladi. Ravshanki, bu $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib bo'lmaydi. Bu esa X ning kompakt to'plamligiga zid. Demak, X — chegaralangan to'plam.

Endi X ning yopiq to'plam bo'lishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. U holda

$$\exists x_n,\ x_n \in X,\ n = 1, 2, 3, \ldots :\quad n \to +\infty \ \text{da}\ \ x_n \to x_0$$

bo'ladi. Bu $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har qanday $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketligi uchun

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x_0$$

bo'ladi. X kompakt to'plam bo'lganligi sababli $x_0 \in X$ bo'ladi. Demak, X — yopiq to'plam.

Yetarliligi. X — chegaralangan va yopiq to'plam bo'lsin. Bolsano—Veyershtrass teoremasiga ko'ra har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan x_0 ga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin: $k \to +\infty$ da $x_{n_k} \to x_0$.

Ravshanki, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'ladi. Ayni paytda, X yopiq to'plam bo'lgani uchun $x_0 \in X$ bo'ladi. Demak, X — kompakt to'plam. ▶

Endi kompakt to'plamning muhim xossalarini keltiramiz.

Faraz qilaylik, X to'plam va har bir elementi intervaldan iborat $S=\{\sigma\}$ intervallar sistemasi berilgan bo'lsin.

5- ta'rif. Agar X to'plamning har bir x nuqtasi uchun S sistemada shu nuqtani o'z ichiga oluvchi σ interval topilsa, u holda $S=\{\sigma\}$ *sistema X to'plamni qoplaydi* deyiladi.

Masalan, $X = (0, 1)$ bo'lsin. Quyidagi

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right),$$

intervallar sitemasini olaylik.

Ravshanki, $X = (0, 1)$ to'plamning har bir nuqtasi bu intervallar sistemasining kamida bitta intervaliga tegishli bo'ladi. Demak,

$$S = \left\{\left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right);\ n = 1, 2, \ldots\right\}$$

sistema $X = (0, 1)$ to'plamni qoplaydi.

Endi bitta tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

Geyne–Borel lemmasi. Agar chegaralangan yopiq X to'plam cheksiz intervallar sistemasi $\{\sigma\}$ bilan qoplangan bo'lsa, u holda $\{\sigma\}$ sistemadan X to'plamni qoplovchi chekli $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ sistemani ajratish mumkin.

2°. Kompakt to'plamda berilgan uzluksiz funksiyalarning xossalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya X kompakt to'plamda ($X \subset R$) berilgan bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, u qator xossalarga ega bo'ladi.

1. Agar $f(x)$ funksiya X kompakt to'plamda uzluksiz bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.

2. Agar $f(x)$ funksiya X kompakt to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu to'plamda o'zining aniq chegaralariga erishadi. Ya'ni shunday $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ nuqtalar topiladiki,

$$f(x_1) = \sup_{x \in X} f(x), \quad f(x_2) = \inf_{x \in X} f(x)$$

bo'ladi.

3. Agar $f(x)$ funksiya X kompakt to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya X da tekis uzluksiz bo'ladi.

4. Agar $f(x)$ funksiya X kompakt to'plamda uzluksiz bo'lsa, shu X to'plamning aksi $\{f(x)\}$ kompakt to'plam bo'ladi.

Bu xossalarning birini, masalan, 1- xossaning isbotini keltiramiz.

◄ Aytaylik, $X \subset R$ kompakt to'plam bo'lib, bu to'plamda $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsin. Unda $\forall x \in X$ nuqtaning shunday kichik atrofi $U(x)$ topiladiki, bu atrofda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi. Bunday nuqta atroflari $U(x)$ intervallardan S sistemani hosil qilamiz:

$$S = \{U(x): \ x \in X\}.$$

Ravshanki, S sistema X to'plamni qoplaydi. X kompakt to'plam bo'lganligi sababli, Geyne–Borel lemmasiga asosan bu sistemadan X to'plamni qoplovchi chekli

$$S^* = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$$

sistemani ajratish mumkin.

Har bir U_k $(k = 1, 2, ..., n)$ atrofda $f(x)$ funksiya chegaralangan, ya'ni shunday m_k, M_k $(m_k = const, M_k = const, k = 1, 2, ..., n)$ sonlar topiladiki, $\forall x \in U_k$ da

$$m_k < f(x) < M_k, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

bo'ladi.

Agar $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sonlarning eng kichigini m; $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sonlarning eng kattasini M desak, u holda $\forall x \in X$da $m < f(x) < M$ bo'ladi.

Demak, $f(x)$ funksiya X to'plamda chegaralangan. ▶

Mashqlar

1. Chekli sondagi ochiq to'plamlar yig'indisi ochiq to'plam bo'lishi isbotlansin.

2. Agar $f(x)$ funksiya X kompakt to'plamda uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya Xda tekis uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

5-BOB
FUNKSIYANING HOSILA VA DIFFERENSIALLARI

19- ma'ruza
Funksiyaning hosilasi

1°. Funksiya hosilasining ta'rifi. Misollar. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,\ b) \subset R$ da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin.

Ma'lumki, ushbu

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ayirma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi.

1- ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi hosilasi* deyiladi va $\frac{df(x_0)}{dx}$ yoki $f'(x_0)$, yoki $(f(x))'_{x_0}$ kabi belgilanadi. Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Agar $x_0 + \Delta x = x$ deyilsa, unda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \to 0$ da $x \to x_0$ bo'lib, (1) munosabat quyidagi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

ko'rinishga keladi.

1- misol. $f(x) = x$, $x_0 \in R$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

bo'lib,
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

bo'ladi. Demak, $f'(x) = (x)' = 1$.

2- misol. $f(x)=|x|,\ x\in R$ bo‘lsin.

Agar $x>0$ bo‘lsa, u holda $f(x)=x$ bo‘lib, $f'(x)=1$ bo‘ladi.

Agar $x<0$ bo‘lsa, u holda $f(x)=-x$ bo‘lib, $f'(x)=-1$ bo‘ladi.

Agar $x_0=0$ bo‘lsa, u holda $\frac{f(x)-0}{x-0}=\frac{|x|}{x}$ bo‘lib, $x\to 0$ da bu nisbatlarning limiti mavjud bo‘lmaydi. Demak, berilgan funksiya $x_0=0$ nuqtada hosilaga ega bo‘lmaydi.

3- misol. $f(x)=x|x|,\ x\in R,\ x_0\in R$ bo‘lsin.

a) $x_0>0,\ x>0,\ x\neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x|x|-x_0|x_0|}{x-x_0}=\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=x+x_0$$

va
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=2x_0=2|x_0|$$

bo‘ladi.

b) $x_0<0,\ x<0,\ x\neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{-x^2+x_0^2}{x-x_0}=-x-x_0$$

va
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-2x_0=2|x_0|$$

bo‘ladi.

d) $x_0=0,\ x\neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}=\frac{x|x|}{x}=|x|$$

va
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

bo‘ladi. Demak, $\forall x\in R$ da $f'(x)=(x|x|)'=2|x|$.

4- misol. Aytaylik,

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & \text{agar } x\neq 0 \text{ bo‘lsa,}\\ 0, & \text{agar } x=0 \text{ bo‘lsa}\end{cases}$$

bo‘lib, $x_0=0$ bo‘lsin. Unda

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\sin\frac{1}{x}$$

bo'lib, uning $x \to 0$ dagi limiti mavjud emas. Demak, berilgan funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga ega emas.

2°. Funksiyaning o'ng va chap hosilalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0 - \delta,\ x_0) \subset X$, $(\delta > 0)$ bo'lsin.

2- ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi chap hosilasi* deyiladi va $f'(x_0-0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0,\ x_0+\delta) \subset X$, $(\delta > 0)$ bo'lsin.

3- ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi o'ng hosilasi* deyiladi va $f'(x_0+0)$ kabi belgilanadi:

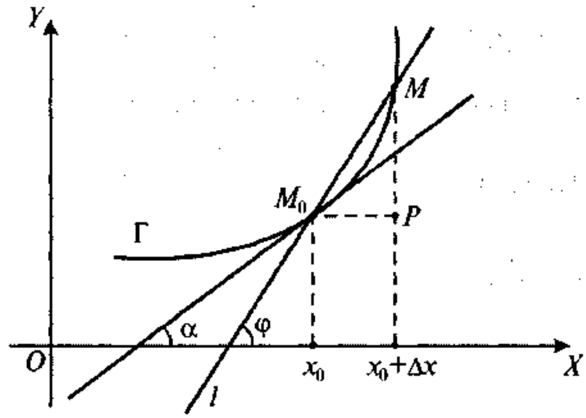
$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Masalan, $f(x)=|x|$ funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi o'ng hosilasi $f'(+0)=1$, chap hosilasi $f'(-0)=-1$ bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya x_0 nuqtada o'ng $f'(x_0+0)$ hamda chap $f'(x_0-0)$ hosilalarga ega va $f'(x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0)$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

2. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ng $f'(x_0+0)$ hamda chap $f'(x_0-0)$ hosilalarga ega bo'lib, $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega va $f'(x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0)$ tengliklar o'rinli bo'ladi.



5- chizma.

3°. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma'nolari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu $f(x)$ funksiyaning grafigi 5- chizmada tasvirlangan Γ egri chiziqni ifodalasin.

Bu Γ chiziqda $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ nuqtalarni olib, ular orqali o'tuvchi l kesuvchini qaraymiz.

$M_0\left(x_0, f(x_0)\right) \in \Gamma$, $M\left(x, f(x)\right) \in \Gamma$, $M \to M_0$ da l kesuvchi limit holati Γ chiziqqa M_0 nuqtada *o'tkazilgan urinma* deyiladi.

Ravshanki, φ burchak Δx ga bog'liq: $\varphi = \varphi(\Delta x)$. $f(x)$ funksiyaning grafigiga M_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

ning mavjud bo'lishi lozim. Bunda α – urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagi.

M_0MP uchburchakdan:

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lib, undan $\qquad \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

bo'lishi kelib chiqadi. Funksiya uzluksizligidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right] = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Demak, $\Delta x \to 0$ da $\varphi(\Delta x)$ ning limiti mavjud va

$$\alpha = \operatorname{arctg} f'(x_0) .$$

Keyingi tenglikdan

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, funksiyaning x_0 nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi. Bunda urinmaning tenglamasi

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Aytaylik, P nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $s = s(t)$ qonun bilan harakat qilsin, bunda t — vaqt, s — o‘tilgan yo‘l. Agar vaqtning t_1 va t_2 $(t_1 < t_2)$ qiymatlaridagi o‘tilgan yo‘l $s(t_1)$, $s(t_2)$ bo‘lsa, unda ushbu nisbat

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

$[t_1, t_2]$ vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezlikni ifodalaydi.

Quyidagi

$$\lim_{t_2 \to t_1+0} \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

limit harakatdagi nuqtaning t_1 vaqtdagi oniy tezligini bildiradi.

Demak, harakatdagi P nuqtaning t vaqtdagi $v(t)$ oniy tezligi, $s(t)$ o‘tilgan yo‘lning hosilasidan iborat bo‘ladi:

$$v(t) = s'(t).$$

4°. Hosilaga ega bo‘lgan funksiyaning uzluksizligi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a, b) \subset R$ da berilgan bo‘lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

◀ Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsin. Ta’rifga binoan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} ,$$

ya'ni $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$

bo'ladi. Endi $\alpha = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$

deb belgilaymiz. Ravshanki,

$$\Delta x \to 0 \text{ da } \alpha \to 0.$$

Keyingi tengliklardan topamiz:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Odatda, bu tenglik funksiya orttirmasining formulasi deyiladi. Undan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi. ▶

Eslatma. Funksiyaning biror nuqtada uzluksiz bo'lishidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan, $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz, ammo u shu nuqtada hosilaga ega emas.

Mashqlar

1. Funksiya hosilasi ta'rifidan foydalanib, quyidagi

$$f(x) = x\sqrt{x}, \quad f(x) = 3^x \sin x$$

funksiyalarning hosilalari topilsin.

2. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x - \text{ratsional son bo'lsa,} \\ -x^2, & \text{agar } x - \text{irratsional son bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning $x = 0$ nuqtada hosilasi mavjud bo'lishi isbotlansin.

20- ma'ruza

Hosilani hisoblash qoidalari

1°. Ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatining hosilasi. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a, b) \subset R$ da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0)$ va $g'(x_0)$ hosilalarga ega bo'lsin. Hosila ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0) \tag{2}$$

bo'ladi.

1) $f(x) \pm g(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$(f(x) \pm g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

bo'ladi.

◀ $F(x) = f(x) \pm g(x)$ deb topamiz:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \pm \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Bu tenglikda $x \to x_0$ da limitga o'tib, yuqoridagi (1) va (2) munosabatlarni e'tiborga olsak, unda

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0} \pm$$
$$\pm \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$F'(x_0) = (f(x) \pm g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0). \blacktriangleright$$

2) $f(x) \cdot g(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$(f(x) \cdot g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

bo'ladi.

◀ $\Phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ deb

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}$$

nisbatni quyidagicha ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_0} \cdot g(x_0) + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \cdot f(x).$$

So'ng $x \to x_0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=g(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x)=$$

$$=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Demak,

$$\Phi'(x_0)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'_{x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).\ ►$$

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiya $(g(x_0)\neq 0)$ x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

bo'ladi.

◄ Modomiki, $g(x_0)\neq 0$ ekan, unda x_0 nuqtaning biror atrofidagi x larda $g(x)\neq 0$ bo'ladi. Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\frac{f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)\cdot(x-x_0)}=$$

$$=\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].$$

Bu tenglikda $x\to x_0$ da limitga o'tib, ushbu

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

tenglikka kelamiz. ►

1- natija. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, $c\cdot f(x)$ funksiya (c = const) x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$\left(c\cdot f(x)\right)'_{x_0}=c\cdot f'(x_0)$$

bo'ladi, ya'ni o'zgarmas sonni hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin.

2- natija. Agar $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada hosilalarga ega bo'lib, $c_1, c_2, ..., c_n$ o'zgarmas sonlar bo'lsa, u holda

$$\left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)\right)'_{x_0} = c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0) + \ldots + c_n f_n'(x_0)$$

bo'ladi.

2°. Murakkab funksiyaning hosilasi. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda, $g(y)$ funksiya $\{f(x) \mid x \in X\}$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga, $y_0 \in \{f(x) \mid x \in X\}$ nuqtada $\left(y_0 = f(x_0)\right)$ $g'(y_0)$ hosilaga ega bo'lsin. U holda $g(f(x))$ murakkab funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$\left(g(f(x))\right)'_{x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

bo'ladi.

◀ $g(y)$ funksiyaning y_0 nuqtada hosilaga ega bo'lganligidan

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0) \cdot (y - y_0) + \alpha \cdot (y - y_0)$$

bo'lishi kelib chiqadi, bunda

$$y = f(x),\ \ y_0 = f(x_0) \text{ va } y \to y_0 \text{ da } \alpha \to 0.$$

Keyingi tenglikning har ikki tomonini $x - x_0$ ga bo'lib topamiz:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bundan $x \to x_0$ da limitga o'tib,

$$\left(g(f(x))\right)'_{x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

tenglikka kelamiz. ▶

3°. Teskari funksiyaning hosilasi. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan, uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0)$, $(f'(x_0) \neq 0)$ hosilaga ega bo'lsin. U holda $x = f^{-1}(y)$ funksiya $y_0, (y_0 = f(x_0))$ nuqtada hosilaga ega va

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{x_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bo'ladi.

◀ Ravshanki,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$$

bo'lib, $x \to x_0$ da $\alpha \to 0$ bo'ladi. Bu tenglikdan

$$y - y_0 = f'(x_0)\left[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right] - \alpha\left[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right] =$$

$$= \left[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right] \cdot [f'(x_0) + \alpha]$$

ifodaga kelamiz. Bundan esa

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{f'(x_0)+\alpha}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Keyingi tenglikda $y \to y_0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y_0}=\frac{1}{f'(x_0)}. \blacktriangleright$$

4°. Misollar. 1- misol. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ bo'ladi, $\alpha \in R$, $x > 0$.

$\blacktriangleleft$ Aytaylik, $x > 0$ bo'lsin. Unda $f(x)=x^{\alpha}$ funksiya uchun

$$\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=x^{\alpha-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

bo'lib, $\Delta x \to 0$ da $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ bo'ladi. $\blacktriangleright$

2- misol. $(a^x)'=a^x \ln a$ bo'ladi, $a > 0$, $x \in R$.

$\blacktriangleleft$ $f(x)=a^x$ funksiya uchun

$$\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

bo'lib, $\Delta x \to 0$ da $(a^x)'=a^x \ln a$ bo'ladi. $\blacktriangleright$

3- misol. $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$ **bo'ladi,** $x \in R$.

$\blacktriangleleft$ $f(x)=\sin x$ funksiya uchun

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=2\cdot\frac{1}{\Delta x}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

bo'lib, $\Delta x \to 0$ da $(\sin x)'=\cos x$ bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash $(\cos x)'=-\sin x$ bo'lishi topiladi. $\blacktriangleright$

4- misol. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ bo'ladi, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

◀ $f(x)=\log_a x$ funksiya uchun

$$\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

bo'lib, $\Delta x\to 0$ da

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$$

bo'ladi. Xususan, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ bo'ladi. ▶

5- misol. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$ bo'ladi.

◀ Teskari funksiya hosilasini hisoblash formulasiga asosan ($y=\operatorname{arctg} x,\ \ x=\operatorname{tg} y$)

$$y'=(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ (x\in(-1,1)),$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ (x\in(-1,1)),$$

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

bo'ladi. ▶

6- misol. Faraz qilaylik,

$$y=[u(x)]^{v(x)},\ \ (u(x)>0)$$

bo'lib, $u'(x)$ va $v'(x)$ lar mavjud bo'lsin. U holda

$$\left([u(x)]^{v(x)}\right)'=[u(x)]^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right]$$

bo'ladi.

◀ Ushbu $y = [u(x)]^{v(x)}$ ni logarifmlab,

$$\ln y = v(x)\ln u(x)$$

ga ega bo'lamiz, so'ngra murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{1}{y}y' = v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \frac{1}{u(x)}\cdot u'(x),$$

$$y' = y\left[v'(x)\cdot \ln u(x) + v(x)\cdot \frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x)\right] =$$

$$= [u(x)]^{v(x)}\cdot \left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right].$$

Bu $$(u^v)' = u^v\cdot \ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u' \qquad (3)$$

tenglikdan, $y = u^v$ funksiya hosilasini hisoblashning quyidagi qoidasi kelib chiqadi: $y = u^v$ funksiyaning hosilasi ikki qo'shiluvchidan iborat bo'lib, birinchi qo'shiluvchi u^v ning ko'rsatkichli funksiya deb olingan hosilasiga (bunda asos $u(x)$ o'zgarmas deb qaraladi), ikkinchi qo'shiluvchi esa u^v ning darajali funksiya deb olingan hosilasiga (bunda daraja ko'rsatkich $v(x)$ o'zgarmas deb qaraladi) teng bo'ladi.

7- misol. Ushbu $$f(x) = x^x,\ \ g(x) = x^{x^x}$$

funksiyalarning hosilalari topilsin.

◀ (3) formuladan foydalanib topamiz:

$$f'(x) = \left(x^x\right)' = x^x\cdot \ln x + x\cdot x^{x-1} = x^x(\ln x + 1),$$

$$g'(x) = \left(x^{x^x}\right)' = \left(x^{f(x)}\right)' = x^{f(x)}\cdot \ln x\cdot f'(x) + f(x)\cdot x^{f(x)-1} =$$

$$= x^{x^x}\cdot \ln x\cdot (x^x(\ln x + 1)) + x^{x^x}\cdot x^{x^x - 1} =$$

$$= x^{x^x + x - 1}(x^x\ln x(\ln x + 1) + 1).$$

5°. Hosilalar jadvali. Quyida sodda funksiyalarning hosilalarini ifodalovchi formulalarni keltiramiz:

1. $(C)' = 0,\ \ C = \text{const}.$
2. $(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1},\ \ \alpha\in R,\ \ x > 0.$
   $(x^n)' = nx^{n-1},\ \ n\in N,\ \ x\in R.$

3. $(a^x)' = a^x \ln a, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1, \ \ x \in R.$

$(e^x)' = e^x, \ \ x \in R.$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1, \ \ x > 0.$

$(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1, \ \ x \neq 0.$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \ \ x > 0.$

$(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}, \ \ x \neq 0.$

5. $(\sin x)' = \cos x, \ \ x \in R.$

6. $(\cos x)' = -\sin x, \ \ x \in R.$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \ \ x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi, \ \ n \in Z.$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \ \ x \neq n\pi, \ \ n \in Z.$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \ |x| < 1.$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \ |x| < 1.$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \ \ x \in R.$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \ \ x \in R.$

13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \ \ x \in R.$

14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \ \ x \in R.$

15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \ \ x \in R.$

16. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \ \ x \neq 0.$

Mashqlar

1. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(-a, a) \subset R$ da berilgan va $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Agar $f(x)$ juft funksiya bo'lsa, $f'(x)$ ham juft funksiya bo'lishi isbotlansin.

2. $f(x)$ funksiya R da berilgan bo'lib, $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. qanday nuqtalarda $|f(x)|$ funksiya hosilaga ega bo'ladi?

3. Ushbu
$$\Phi(g(f))$$
murakkab funksiya hosilasini hisoblash qoidasi topilsin.

21- ma'ruza

Asosiy teoremalar

1°. Hosilaga ega bo'lgan funksiyalar haqidagi teoremalar. Bu teoremalar funksiyalarni tekshirishda muhim rol o'unaydi.

1- teorema. (Ferma teoremasi.) $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan. $x_0 \subset X$ nuqtaning atrofi uchun $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$, $(\delta > 0)$ bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \le f(x_0)$, $(f(x) \ge f(x_0))$,

2) $f'(x_0)$ mavjud va chekli bo'lsin.

U holda $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

◀ Aytaylik, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \le f(x_0)$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda
$$f(x) - f(x_0) \le 0$$
bo'ladi.

Shartga ko'ra, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega. Shuning uchun
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
bo'ladi. Ayni paytda, $x > x_0$ bo'lganda
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \le 0,$$
$x < x_0$ bo'lganda
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \ge 0$$
bo'lishidan $f'(x_0) = 0$ ekani kelib chiqadi. ▶

2- teorema. (Roll teoremasi.) Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a, b]$,

2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ mavjud va chekli,

3) $f(a) = f(b)$ bo‘lsin.

U holda shunday $x_0 \in (a, b)$ nuqta topiladiki, bunda $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi.

◀ Shartga ko‘ra $f(x) \in C[a, b]$. Unda Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko‘ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi, ya’ni shunday c_1, c_2 nuqtalar $(c_1, c_2 \in [a, b])$ topiladiki,

$$f(c_1) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\},$$

$$f(c_2) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

bo‘ladi.

Agar $f(c_1) = f(c_2)$ bo‘lsa, unda $[a, b]$ da $f(x) = \text{const}$ bo‘lib, $\forall x_0 \in (a, b)$ da $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi.

Agar $f(c_1) > f(c_2)$ bo‘lsa, u holda $f(a) = f(b)$ bo‘lganligi sababli $f(x)$ funksiya $f(c_1)$ hamda $f(c_2)$ qiymatlarning kamida bittasiga $[a, b]$ segmentning ichki x_0 $(a < x_0 < b)$ nuqtasida erishadi. Ferma teoremasiga binoan $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi. ▶

3- teorema. (Lagranj teoremasi.) Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a, b]$,

2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosila mavjud va chekli bo‘lsin.

U holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo‘ladi.

◀ Ushbu

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) \tag{1}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Ayni paytda, uning hosilasi

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

bo'ladi. Roll teoremasiga binoan, shunday c $(c \in (a, b))$ nuqta topiladiki, bunda

$$F'(c) = 0 \tag{2}$$

bo'ladi. (1) va (2) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

ya'ni
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

1- natija. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x) = 0$ bo'lsin. U holda $\forall x \in (a, b)$ da $f(x) = \text{const}$ bo'ladi.

◀ $x, x_0 \in (a, b)$ ni olib, chekkalari x va x_0 bo'lgan segmentda $f(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llab $f(x) = f(x_0) = \text{const}$ bo'lishini topamiz. ▶

2- natija. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da $f'(x)$, $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x) = g'(x)$ bo'lsin. U holda $\forall x \in (a, b)$ da $f(x) = g(x) + \text{const}$ bo'ladi.

◀ Bu natijaning isboti $f(x) - g(x)$ funksiyaga nisbatan 1-natijani qo'llash bilan kelib chiqadi. ▶

4- teorema. (Koshi teoremasi.) Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

1) $f(x) \in C[a, b]$, $g(x) \in C[a, b]$;

2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va chekli;

3) $\forall x \in (a, b)$ da $g'(x) \neq 0$ bo'lsin.

U holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

◀ Avvalo $g(b) \neq g(a)$ bo'lishini ta'kidlab o'tamiz, chunki $g(b) = g(a)$ bo'ladigan bo'lsa, unda Roll teoremasiga ko'ra shunday $c \in (a, b)$ nuqta topilar ediki, $g'(c) = 0$ bo'lar edi. Bu 3- shartga zid.

Quyidagi

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)], \quad (x \in [a, b])$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Unda Roll teoremasiga binoan shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$\Phi'(c) = 0 \tag{3}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x). \tag{4}$$

(3) va (4) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0,$$

ya'ni

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

1- misol. $\forall x', \ x'' \in R$ uchun $|\sin x' - \sin x''| \le |x' - x''|$ tengsizlik isbotlansin.

◀ Aytaylik, $x' < x''$ bo'lsin. $f(x) = \sin x$ ga $[x', x'']$ da Lagranj teoremasini qo'llaymiz. Unda shunday $c \in (x', x'')$ nuqta topiladiki,

$$|\sin x' - \sin x''| = |\cos c| \cdot (x'' - x')$$

bo'ladi. Agar $\forall t \in R$ da $|\cos t| \le 1$ ekanini e'tiborga olsak, u holda yuqoridagi munosabatdan

$$|\sin x' - \sin x''| \le |x' - x''|, \quad (\forall x', x'' \in R)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

2- misol. Ushbu

$$e^x \ge 1 + x$$

tengsizlik isbotlansin.

◀ Aytaylik, $x > 0$ bo'lsin. Unda $f(t) = e^t$ funksiyaga $[0, x]$ da Lagranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$e^x - e^0 = e^c(x - 0), \quad c \in (0, x).$$

Agar $c > 0$ da $e^c > 1$ bo'lishini e'tiborga olsak, u holda keyingi munosabatdan $e^x \geq 1 + x$ bo'lishi kelib chiqadi.

Agar $x < 0$ bo'lsa, unda $f(t) = e^t$ funksiyaga $[x, 0]$ da Lagranj teoremasini qo'llab,

$$e^x - e^0 = e^c(0 - x)$$

ni va $-x > 0$, $e^c < 1$ bo'lishini e'tiborga olib, $e^x \geq 1 + x$ ekanligini topamiz.

Ravshanki, $x = 0$ da $e^0 = 1$. Demak, $\forall x \in R$ da $e^x \geq 1 + x$. ▶

3- misol. Ushbu

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \ (0 < b < a)$$

tengsizlik isbotlansin.

◀ $[b, a]$ segmentda $f(x) = \ln(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya shu segmentda uzluksiz va (b, a) da $f'(x) = \frac{1}{x}$ hosilaga ega. Binobarin, Lagranj teoremasiga ko'ra shunday c $(b < c < a)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{\ln a - \ln b}{a-b} = \frac{1}{c} \qquad (5)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$b < c < a \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}. \qquad (6)$$

(5) va (6) munosabatlardan

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

2°. Funksiya hosilasinig uzilishi haqida. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) ning x_0 nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin.

Agar $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x) = b$ limit mavjud bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chap hosila $f'(x_0 - 0)$ ga ega bo'lib, $f'(x_0 - 0) = b$ bo'ladi.

Agar $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = d$ limit mavjud bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ng hosila $f'(x_0 + 0)$ ga ega bo'lib, $f'(x_0 + 0) = d$ bo'ladi.

◀ Aytaylik, $\Delta x \neq 0$ va $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin. Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x), \quad (0 < \theta < 1).$$

Endi
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) = b$$
mavjud bo'lsin deylik. Unda
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) = \lim_{x - x_0 \to -0} f'(x) = \lim_{\Delta x \to -0} f'(x_0 + \Delta x) = b$$
bo'lib, $\quad \Delta x \to -0$ da $f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \to b$,

ya'ni $\quad \Delta x \to -0$ da $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to b$

bo'ladi. Demak, $f'(x_0 - 0) = b$. Shunga o'xshash, $f'(x_0 + 0) = d$ bo'lishi ko'rsatiladi. ▶

Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsin. U holda, ravshanki,
$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0)$$
bo'ladi. Ayni paytda,
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f'(x), \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f'(x)$$
limitlarning mavjud va chekli bo'lishidan
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f'(x) = f'(x_0)$$
bo'lishi kelib chiqadi.

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu $f'(x)$ hosila birinchi tur uzilishga ega bo'lolmaydi.

Boshqacha aytganda, har bir $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x)$ funksiya yoki uzluksiz bo'ladi, yoki ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

4- misol. Ushbu
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa}, \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$
funksiyani qaraylik.

◀ $x \neq 0$ bo'lgan holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

$x = 0$ bo'lgan holda hosila ta'rifiga ko'ra

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = 0$$

bo'ladi. Demak, $f'(x)$ funksiya R da aniqlangan va $x \neq 0$ da uzluksiz bo'ladi. $f'(x)$ hosila $x = 0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi, chunki $x \to 0$ da

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

funksiya limitga ega emas. ▶

Mashqlar

1. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, uning shu (a, b) da tekis uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

2. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \geq x_0$ da chekli hosilalar: $f'(x)$, $g'(x)$ ga ega bo'lib,

$$f(x_0) = g(x_0), \quad x > x_0 \quad \text{da} \quad f'(x) > g'(x)$$

bo'lsa, u holda $x > x_0$ da $f(x) > g(x)$ bo'lishi isbotlansin.

3. $\forall x > -1$ uchun

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

tengsizliklarning o'rinli bo'lishi isbotlansin.

22- ma'ruza

Funksiyaning differensiali

1°. Funksiya differensiali tushunchasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$ bo'lsin.

Ma'lumki, $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ayirma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi.

1- ta'rif. Agar $\Delta f(x_0)$ ni ushbu

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, bunda $A = \text{const}$, $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$.

Teorema. $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli.

◀ ***Zarurligi.*** $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan,

$$\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

bo'ladi, bunda $A = \text{const}$, $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$.

Bu tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + \alpha,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) = A.$$

Demak, $f'(x)$ mavjud va $f'(x) = A$.

Yetarliligi. $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

bo'ladi. Agar

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$$

deyilsa, undan

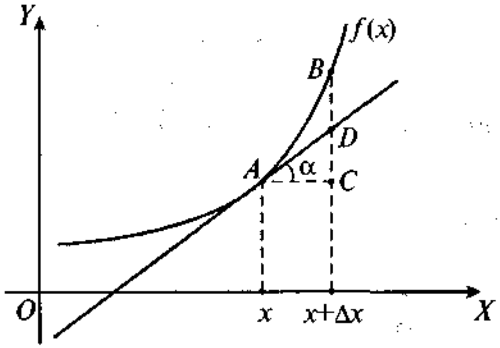
$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

bo'lishi kelib chiqadi, bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$. Demak, $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi. ▶

2- ta'rif. Funksiya orttirmasidagi $f'(x_0) \cdot \Delta x$ ifoda $f(x)$ *funksiyaning x_0 nuqtadagi differensiali* deyiladi va $df(x_0)$ kabi belgilanadi:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Aytaylik, $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning grafigi 6- chizmada tasvirlangan egri chiziqni ifodalasin:



6- chizma.

Keltirilgan chizmadan ko'rinadiki,

$$\frac{DC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha$$

bo'lib, $DC = \operatorname{tg}\alpha \cdot AC = f'(x)\cdot \Delta x$ bo'ladi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali funksiya grafigiga $(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi DC ni ifodalar ekan.

Faraz qilaylik, $f(x) = x$, $x \in R$ bo'lsin. Bu funksiya differensiallanuvchi bo'lib, $df(x) = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$, ya'ni $dx = \Delta x$ bo'ladi. Demak, (a, b) da differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning differensialini

$$df(x) = f'(x)\cdot dx$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Endi sodda funksiyalarning differensiallarini keltiramiz:

1. $d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx, \ (x > 0).$

2. $d(a^{x}) = a^{x}\cdot \ln a \cdot dx, \ (a > 0, \ a \neq 1).$

3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e dx, \ (x > 0, \ a > 0, \ a \neq 1).$

4. $d(\sin x) = \cos x dx.$

5. $d(\cos x) = -\sin x dx.$

6. $d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx, \ (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k = 0, \pm 1, \ldots).$

7. $d(\operatorname{ctg} x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx, \ \ (x \neq k\pi, \ \ k = 0, \pm 1, \ldots).$

8. $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \ \ (-1 < x < 1).$

9. $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \ \ (-1 < x < 1).$

10. $d(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}dx.$

11. $d(\operatorname{arcctg} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}dx.$

12. $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx.$

13. $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx.$

14. $d(\operatorname{th} x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx.$

15. $d(\operatorname{cth} x) = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}dx, \ \ (x \neq 0).$

2°. Funksiya differensialining sodda qoidalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da berilgan bo‘lib, $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda $x \in (a, b)$ da

1) $d(c \cdot f(x)) = c df(x), \ \ c = \text{const};$

2) $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x);$

3) $d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x);$

4) $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \ \ (g(x) \neq 0)$

bo‘ladi. Bu tasdiqlardan birini, masalan 3- sini isbotlaymiz.

◀ Ma’lumki,

$$d(f(x)g(x)) = (f(x)g(x))'dx.$$

Agar

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, u holda quyidagi tenglikka kelamiz:

$$d(f(x)g(x)) = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx =$$
$$= g(x)f'(x)dx + f(x)g'(x)dx = g(x)df(x) + f(x)dg(x). \blacktriangleright$$

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda, $g(y)$ funksiya $Y \supset \{f(x):\ x \in X\}$ to'plamda berilgan bo'lib, $f'(y)$ va $g'(y)$ hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$d(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot df(x)$$

bo'ladi.

◀ Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$d(g(f(x))) = [g(f(x))]' dx = g'(f(x)) \cdot f'(x)dx = g'(f(x)) \cdot df(x). \blacktriangleright$$

1- misol. Ta'rifdan foydalanib, ushbu $f(x) = x - 3x^2$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtadagi differensiali topilsin.

◀ Bu funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtadagi orttirmasini topamiz:

$$\Delta f(2) = f(2 + \Delta x) - f(2) = 2 + \Delta x - 3(2 + \Delta x)^2 - 2 + 12 =$$
$$= -11 \cdot \Delta x - 3\Delta x^2 = -11 \cdot \Delta x + (-3\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Demak, $df(2) = -11 \cdot dx$. ▶

3°. Funksiya differensiali va taqribiy formulalar. Funksiya differensiali yordamida taqribiy formulalar yuzaga keladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ($f'(x_0) \neq 0$) ega bo'lsin. U holda $\Delta x \to 0$ da

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

bo'ladi.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, uning differensiali

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = o(\Delta x)$$

bo'lib, $\Delta x \to 0$ da

$$\frac{\Delta f(x_0) - df(x_0)}{\Delta x} \to 0$$

ga ega bo'lamiz. Natijada

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0),$$

ya'ni

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{1}$$

taqribiy formula hosil bo'ladi. (1) formula $x_0 \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi $\Delta f(x_0)$ ni uning shu nuqtadagi differensiali $df(x_0)$ bilan almashtirish mumkinligini ko'rsatadi. Bu almashtirishning mohiyati funksiya orttirmasi argument orttirmasining, umuman aytganda, murakkab funksiyasi bo'lgan holda, funksiya differensiali argument orttirmasining chiziqli funksiyasi bo'lishidadir.

(1) formulada $\Delta x = x - x_0$ deyilsa, unda

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{2}$$

bo'ladi.

2- misol. Ushbu sin 29° miqdor taqribiy hisoblansin.

◀ Agar $f(x) = \sin x,\ \ x_0 = 30^\circ$ deyilsa, unda (2) formulaga ko'ra

$$\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot (29^\circ - 30^\circ) \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} = 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \approx 0,4848$$

bo'ladi. ▶

Ma'lumki, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya grafigiga $(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Demak, (2) taqribiy formula geometrik nuqtayi nazardan, $f(x)$ funksiya ifodalagan egri chiziqni x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida shu funksiya grafigiga $(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma bilan almashtirish mumkinligini bildiradi.

(2) formulada $x_0 = 0$ deyilsa, u ushbu

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \tag{3}$$

ko'rinishga keladi.

$f(x)$ funksiya sifatida $(1 + x)^\alpha,\ \sqrt{1 + x},\ e^x,\ \ln(1 + x),\ \sin x,\ \operatorname{tg} x$ funksiyalarni olib, ularga (3) formulani qo'llash natijasida quyidagi taqribiy formulalar hosil bo'ladi:

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x, \qquad \ln(1+x) \approx x,$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x, \qquad \sin x \approx x,$$

$$e^{x} \approx 1+x, \qquad \operatorname{tg} x \approx x.$$

Mashqlar

1. Aytaylik, u va v lar differensiallanuvchi funksiyalar bo'lib, ularning differensiallari du va dv bo'lsin. U holda ushbu

$$y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v} + \ln\sqrt{u^2+v^2}$$

funksiyaning differensiali topilsin.

2. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya $x_0 = 0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

3. Ushbu $\qquad \sqrt{1,2}, \ \sqrt{1,02}, \ \sqrt{1,002}$

miqdorlarning taqribiy qiymati topilsin.

23- ma'ruza

Funksiyaning yuqori tartibli hosila va differensiallari

1°. Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu $f'(x)$ funksiyani $g(x)$ orqali belgilaymiz:

$$g(x) = f'(x), \ \ (x \in (a, b)).$$

1- ta'rif. Agar $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $g(x)$ funksiya $g'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, bu hosila $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi* deyiladi va $f''(x_0)$ yoki $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ kabi belgilanadi.

Xuddi shunga o'xshash, $f(x)$ ning 3- tartibli $f'''(x)$, 4- tartibli $f^{IV}(x)$ va h.k. tartibli hosilalari ta'riflanadi.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning n- tartibli hosilasi bo'lgan $f^{(n)}(x)$ ning hosilasi $f(x)$ funksiyaning $(n+1)$- tartibli hosilasi deyiladi:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'.$$

Odatda, $f(x)$ funksiyaning $f''(x), f'''(x), \ldots$ hosilalari uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, $f(x)$ funksiyaning $x \in (a, b)$ da n- tartibli hosilasining mavjudligi bu funksiyaning shu nuqta atrofida 1-, 2-, ..., $(n-1)$- tartibli hosilalari mavjudligini taqoza etadi. Ammo bu hosilalarning mavjudligidan n- tartibli hosila mavjudligi, umuman aytganda, kelib chiqavermaydi. Masalan,

$$f(x) = \frac{x|x|}{2}$$

funksiyaning hosilasi $f'(x) = |x|$ bo'lib, bu funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas, ya'ni berilgan funksiyaning $x = 0$ da birinchi tartibli hosilasi mavjud, ikkinchi tartibli hosilasi esa mavjud emas.

1- misol. $f(x) = a^x$ bo'lsin, $a > 0$, $x \in R$. Bu funksiya uchun

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$
$$(a^x)'' = (a^x \ln a)' = a^x (\ln a)^2,$$

umuman

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n \qquad (1)$$

bo'ladi. (1) munosabatning o'rinli bo'lishi matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

2- misol. $f(x) = \sin x$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

Umuman, $$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

bo'ladi. Shunga o'xshash,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

bo'ladi.

3- misol. $f(x)=x^{\alpha}$ bo‘lsin, $x>0$, $\alpha\in R$. Bu funksiya uchun

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},$$
$$(x^{\alpha})''=(\alpha x^{\alpha-1})'=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

umuman,

$$(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

bo‘ladi.

Xususan, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $(x>0)$ funksiya uchun

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

bo‘lib, undan

$$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

bo‘lishini topamiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a,\ b)$ da berilgan bo‘lib, $\forall x\in(a,\ b)$ da $f^{(n)}(x)$ va $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. U holda:

1) $(c\cdot f(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x),\ \ c=\text{const}$;

2) $(f(x)\pm g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$;

3) $$(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x), \tag{2}$$

$$\left(C_n^k=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\right),\ \ f^{(0)}(x)=f(x)$$

bo‘ladi.

◀ Bu tasdiqlardan 3- sining isbotini keltiramiz. Ravshanki, $n=1$ da (2) munosabat o‘rinli bo‘ladi. Aytaylik, (2) munosabat $n-1$ da o‘rinli bo‘lsin:

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n-1)}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-1-k)}(x).$$

Keyingi tenglikni hamda

$$C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}=C_n^k$$

bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \left((f(x)\cdot g(x))^{(n-1)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-1-k)}(x)\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\left(f^{(k+1)}(x)g^{(n-1-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right) = C_{n-1}^{0} f(x)g^{(n)}(x) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k})f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) + C_{n-1}^{k-1}f^{(n)}(x)g(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x). \blacktriangleright$$

Odatda, (2) *Leybnits formulasi* deyiladi.

4- misol. Ushbu

$$y = x^2 \cos 2x$$

funksiyaning n-tartibli hosilasi topilsin.

◀ Leybnits formulasida $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = x^2$ deb olamiz. Unda bu formulaga ko'ra, ayni paytda $g(x) = x^2$ funksiya uchun $k > 2$ bo'lganda

$$g^{(k)}(x) = (x^2)^{(k)} = 0, \quad (k > 2)$$

bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = C_n^0 x^2 (\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)' \cdot (\cos 2x)^{(n-1)} +$$
$$+ C_n^2 (x^2)''(\cos 2x)^{(n-2)}.$$

Ravshanki,

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-1)} = 2^{n-1}\cos\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = 2^{n-1}\sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-2)} = 2^{n-2}\cos\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) = -2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Demak,

$$(x^2\cos 2x)^{(n)} = 2^n\left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\right)\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2^n nx\sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right). \blacktriangleright$$

2°. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x \in (a, b)$ nuqtada $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Ravshanki, $f(x)$ funksiyaning differensiali

$$df(x) = f'(x)dx \tag{3}$$

bo'lib, bunda $dx = \Delta x$ — funksiya argumentining ixtiyoriy orttirmasi.

2- ta'rif. $f(x)$ funksiyaning $x \in (a, b)$ nuqtadagi differensiali $df(x)$ *ning differensiali* $f(x)$ *funksiyaning* $x \in (a, b)$ *nuqtadagi ikkinchi tartibli differensiali* deyiladi va $d^2f(x)$ kabi belgilanadi:

$$d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Xuddi shunga o'xshash, $f(x)$ funksiyaning uchinchi $d^3f(x)$, to'rtinchi $d^4f(x)$ va h.k. tartibdagi differensiallari ta'riflanadi.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning n- tartibli differensiali $d^nf(x)$ ning differensiali $f(x)$ funksiyaning $(n+1)$- tartibli differensiali deyiladi:

$$d^{n+1} f(x) = d(d^n f(x)).$$

5- misol. Ushbu

$$f(x) = xe^{-x}$$

funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali topilsin.

◀ Berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensialini ta'rifiga ko'ra topamiz:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(d(xe^{-x})) = d(xde^{-x} + e^{-x} dx) =$$
$$= d(-xe^{-x} dx + e^{-x} dx) = -d(xe^{-x})dx + (de^{-x})dx =$$
$$= -(xde^{-x} + e^{-x} dx)dx - e^{-x}(dx)^2 =$$
$$= x \cdot e^{-x}(dx)^2 - e^{-x}(dx)^2 - e^{-x}(dx)^2 = (x-2)e^{-x}(dx)^2. \blacktriangleright$$

Differensiallash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} &d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = dx \cdot d(f'(x)) = \\ &= dx \cdot f''(x)dx = f''(x)(dx)^2, \\ &d^3 f(x) = d(d^2 f(x)) = f'''(x)(dx)^3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n. \end{aligned} \tag{4}$$

Masalan, yuqorida keltirilgan misol uchun

$$d^2(xe^{-x}) = (xe^{-x})''(dx)^2 = (e^{-x} - xe^{-x})'(dx)^2 =$$
$$= (e^{-x} - e^{-x} - xe^{-x})(dx)^2 = (x-2)e^{-x}(dx)^2$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a,\ b)$ da berilgan bo'lib, $\forall x_0 \in (a,\ b)$ nuqtada n- tartibli differensiallarga ega bo'lsin. U holda:

1) $d^n(c \cdot f(x)) = c \cdot d^n f(x), \quad c = \text{const};$

2) $d^n(f(x) \pm g(x)) = d^n f(x) \pm d^n g(x);$

3) $d^n(f(x) \cdot g(x)) = d^n f(x) \cdot g(x) + C_n^1 d^{n-1} f(x) \cdot dg(x) +$
$+ \ldots + C_n^k d^{n-k} f(x) \cdot d^k g(x) + \ldots + f(x) \cdot d^n g(x)$

bo'ladi.

Bu munosabatlarning 1- va 2- larining isboti ravshan. 3- munosabatni isbotlashda (2) formuladan foydalaniladi.

3°. Differensial shaklining invariantligi. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da differensiallanuvchi bo'lib, x o'zgaruvchi o'z navbatida biror t o'zgaruvchining $[\alpha, \beta]$ da differensiallanuvchi funksiyasi bo'lsin:

$$x = \varphi(t) \quad (t \in [\alpha, \beta], \ \ x = \varphi(t) \in [a,\ b]).$$

Natijada

$$y = f(x) = f(\varphi(t))$$

bo'ladi. Bu funksiyaning differensiali

$$dy = (f(\varphi(t)))' dt = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = f'(\varphi(t)) \cdot d\varphi(t) = f'(x) dx$$

bo'lib, u (3) ko'rinishga ega bo'ladi. Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyada x o'zgaruvchi erkli bo'lgan holda ham, u biror t o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan holda ham $y = f(x)$ funksiya differensialining ko'rinishi bir xil bo'ladi. Odatda, bu xususiyat *differensial shaklining invariantligi* deyiladi.

$y = f(\varphi(t))$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali quyidagicha bo'ladi:

$$d^2 y = d(df) = d(f'(x)dx) = df'(x) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx) =$$
$$= f''(x) \cdot (dx)^2 + f'(x) d^2 x.$$

Bu munosabatni (4) munosabat bilan solishtirib ikkinchi tartibli differensiallarda differensial shaklining invariantligi xossasi o'rinli emasligini topamiz.

Mashqlar

1. Ushbu
$$f(x)=|x|^3$$
funksiya $x = 0$ nuqtada uchinchi tartibdagi hosilaga ega bo'ladimi?

2. Ushbu
$$f(x)=(x-1)^2\sin x\sin(x-1)$$
funksiyaning n- tartibli hosilasi topilsin ($n > 2$).

3. Agar $y = f(x)$ funksiya n- tartibli hosilaga ega bo'lsa,
$$d^n f(ax+b)=a^n f^{(n)}(ax+b)\cdot(dx)^n$$
bo'lishi isbotlansin.

24- ma'ruza
Teylor formulasi

1°. Ko'phad uchun Teylor formulasi. Ushbu
$$P(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+...+b_n(x-x_0)^n \qquad (1)$$
funksiyani (n- darajali ko'phadni) qaraylik, bunda $x_0\in R$ va $b_0, b_1, ..., b_n$ — haqiqiy sonlar. Bu $b_0, b_1, ..., b_n$ lar quyidagicha ham aniqlanishi mumkin.

(1) tenglikda $x = x_0$ deyilsa,
$$b_0=P(x_0)$$
bo'ladi. $P(x)$ funksiyani differensiallab,
$$P'(x)=1\cdot b_1+2\cdot b_2\cdot(x-x_0)+...+n\cdot b_n(x-x_0)^{n-1}$$
va bu tenglikda $x = x_0$ deb
$$b_1=\frac{P'(x_0)}{1!}$$
bo'lishini topamiz.

$P(x)$ funksiyani ikki marta differensiallab
$$P''(x)=2\cdot1\cdot b_2+...+n(n-1)\cdot b_n(x-x_0)^{n-2}$$
va bu tenglikda $x = x_0$ deb topamiz:

$$b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}.$$

Bu jarayonni davom ettira borib, $\forall k \geq 0$ da

$$b_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$$

bo'lishini topamiz.

Natijada $P(x)$ ko'phad quyidagi ko'rinishga keladi:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (2)$$

Demak, $P(x)$ ko'phad o'zining hamda hosilalarining biror nuqtasidagi qiymati bilan to'liq aniqlanar ekan. (2) *formula P(x) ko'phad uchun Teylor formulasi* deyiladi.

2°. Ixtiyoriy funksiyaning Teylor formulasi va uning qoldiq hadlari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ bo'lsin. Bu funksiya x_0 nuqtaning

$$\cup_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b), \quad \delta > 0$$

atrofida $f'(x)$, $f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. Funksiya hosilalaridan foydalanib, ushbu

$$P_n(f; x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ko'phadni tuzamiz.

Agar $f(x)$ funksiya n- darajali ko'phad bo'lsa, ravshanki,

$$f(x) = P_n(f; x)$$

bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya ko'phad bo'lmasa,

$$f(x) \neq P_n(f; x)$$

bo'lib, ular orasidagi farq yuzaga keladi. Uni $R_n(x)$ orqali belgilaymiz:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(f; x).$$

Natijada ushbu

$$f(x) = P_n(f;x) + R_n(x)\,,$$

ya'ni

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad (3)$$

formulaga kelamiz. Bu (3) formula $f(x)$ *funksiyaning Teylor formulasi* deyiladi. (3) formuladagi $R_n(x)$ esa *Teylor formulasining qoldiq hadi* deyiladi.

Endi qoldiq had $R_n(x)$ ni aniqlaymiz. x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofidagi x ni tayinlab, ushbu

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

funksiyani $[x_0, x] \subset U_\delta(x_0)$ (yoki $[x, x_0] \subset U_\delta(x_0)$) da qaraymiz.

Bu funksiya $[x_0, x]$ segmentda uzluksiz bo'lib, (x_0, x) da hosilaga ega bo'ladi:

$$F'(t) = -f'(t) - \left[\frac{f'(t)}{1!}(x-t) - f'(t)\right] - \left[\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f'(t)}{1!}(x-t)\right] - \ldots -$$
$$-\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right] = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Demak, $$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Endi $[x_0, x]$ da uzluksiz, (x_0, x) da chekli (nolga teng bo'lmagan) hosilaga ega $\Phi(x)$ funksiyani olib, $F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalarga $[x, x_0]$ da Koshi teoremasini qo'llaymiz. Natijada quyidagi

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\Phi(x) - \Phi(x_0)} = \frac{F'(c)}{\Phi'(c)} \qquad (4)$$

tenglikka kelamiz, bunda $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $(0 < \theta < 1)$.

Ravshanki,

$$F(x) = 0, \quad F(x_0) = R_n(x), \quad F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Unda (4) tenglikdan

$$R_n(x) = \frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{\Phi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \qquad (5)$$

bo'lishini topamiz.

a) Koshi ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi.

Aytaylik, $\Phi(t) = x - t$ bo'lsin. Unda

$$\Phi(x) = 0, \ \ \Phi(x_0) = x - x_0, \ \ \Phi'(c) = -1$$

bo'lib, (5) tenglik quyidagi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot \frac{-(x-x_0)}{-(n+1)(x-c)^n}(x-c)^n =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}[x - x_0 - \theta(x-x_0)]^n \cdot (x-x_0) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

ko'rinishga keladi. Bu holda

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

formula hosil bo'lib, uni $f(x)$ *funksiyaning Koshi ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi* deyiladi.

b) Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi.

Aytaylik, $\Phi(t) = (x-t)^{n+1}$ bo'lsin. Unda

$$\Phi(x) = 0, \ \ \Phi(x_0) = (x-x_0)^{n+1},$$

$$\Phi'(c) = -(n+1)(x-c)^n, \ \ (c = x_0 + \theta(x-x_0))$$

bo'lib, (5) tenglik quyidagi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n} \cdot (x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ko'rinishga keladi. Bu holda

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{6}$$
$$(c = x_0 + \theta\ (x - x_0),\ 0 < \theta < 1)$$

formula hosil bo'lib, uni $f(x)$ *funksiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi* deyiladi.

d) Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi.

Yuqoridagi (6) formuladan foydalanib topamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots +$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,$$
$$(c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1).$$

$f^{(n)}(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Demak, $x \to x_0$ da $c \to x_0$ bo'lib,

$$f^{(n)}(c) \to f^{(n)}(x_0).$$

Shuni e'tiborga olib, $x \to x_0$ da

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

bo'lishini topamiz. Natijada ushbu

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad (x \to x_0)$$

formula hosil bo'ladi. Bu formula $f(x)$ *funksiyaning Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi* deyiladi.

3°. Ba'zi funksiyalarning Teylor formulalari. $f(x)$ funksiyaning Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini olamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad (x \to x_0).$$

Bu tenglikda $x_0 = 0$ deb, ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \ (x \to 0) \quad (7)$$

formulaga kelamiz. (7) formula $f(x)$ funksiyaning Makloren formulasi deyiladi.

1) $f(x) = e^x$ bo'lsin. Bu funksiya uchun $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = 1$ bo'lib,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + .. + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0$$

bo'ladi.

2) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in R$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$f(0) = 1, \ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

bo'lib,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n), \ x \to 0$$

bo'ladi. Xususan,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \quad x \to 0$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), \ x \to 0$$

bo'ladi.

3) $f(x) = \ln(1+x)$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$f(0) = 0, \ f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

bo'lib, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + o(x^n), \ x \to 0$

bo'ladi.

Shuningdek, $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n), \ x \to 0$

bo'ladi.

4) $f(x)=\sin x$ bo'lsin. Bu funksiya uchun $f(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$ bo'lib,

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}),\quad x\to 0$$

bo'ladi.

5) $f(x)=\cos x$ bo'lsin. Bu funksiya uchun $f(0)=1$, $f^{(2k)}(0)=(-1)^k$ bo'lib,

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}),\quad x\to 0$$

bo'ladi.

Misol. Ushbu
$$f(x)=\frac{1}{3x+2}$$
funksiyaning Teylor (Makloren) formulasi yozilsin.

◀ Bu funksiyani quyidagicha

$$f(x)=\frac{1}{3x+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{3}{2}x\right)}$$

yozib, so'ng $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n),\quad x\to 0$

bo'lishidan foydalanib topamiz:

$$\frac{1}{3x+2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^k}{2^{k+1}}x^k+o(x^n),\quad x\to 0.$$ ▶

Mashqlar

1. Asimptotik formulalardan foydalanib, ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}$$

limit hisoblansin.

2. Ushbu
$$f(x)=e^{x^2}$$
funksiyaning Teylor (Makloren) formulasi yozilsin.

6-BOB
FUNKSIYA HOSILALARINING BA'ZI BIR TATBIQLARI

25- ma'ruza
Funksiyaning monotonligi. Funksiyaning ekstremumlari

1°. Funksiyaning monotonligi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ berilgan bo'lsin.

Ma'lumki, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ uchun $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da o'suvchi (qat'iy o'suvchi), $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ uchun $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, $(f(x_1) > f(x_2))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi.

1- teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

$f(x)$ funksiyaning (a, b) da o'suvchi bo'lishi uchun $\forall x \in (a, b)$ da

$$f'(x) \ge 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

◀ ***Zarurligi.*** $f(x)$ funksiya (a, b) da o'suvchi bo'lsin. Unda $\Delta x > 0$ bo'lganda

$$f(x + \Delta x) - f(x) \ge 0$$

bo'ladi. Hosila ta'rifidan foydalnib topamiz:

$$f'(x) = f'(x + 0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ge 0.$$

Yetarliligi. Aytaylik, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ mavjud bo'lib, $f'(x) \ge 0$ bo'lsin. $[x_1, x_2]$ da $(x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2)$ $f(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \ge 0.$$

Demak, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, $f(x)$ − o'suvchi. ▶

Xuddi shunga o'xshash, quyidagi teorema isbotlanadi.

2- teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. $f(x)$ funksiya (a, b) da kamayuvchi bo'lishi uchun $\forall x \in (a, b)$ da

$$f'(x) \le 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Shuningdek, quyidagi teoremalarni isbotlash qiyin emas.

3- teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning (a, b) da qat'iy o'suvchi bo'lishi uchun

1) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x) \ge 0$;

2) $\forall x \in (\alpha, \beta)$ da $f'(x) = 0$ tenglik bajariladigan $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ intervalning mavjud bo'lmaslik shartlarining bajarilishi zarur va yetarli.

4- teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning (a, b) da qat'iy kamayuvchi bo'lishi uchun

1) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x) \le 0$;

2) $\forall x \in (\alpha, \beta)$ da $f'(x) = 0$ tenglik bajariladigan $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ intervalning mavjud bo'lmaslik shartlarining bajarilishi zarur va yetarli.

Demak, (a, b) da

$f'(x) \ge 0 \Rightarrow f(x)$ o'suvchi $\Rightarrow f'(x) \ge 0$,

$f'(x) \le 0 \Rightarrow f(x)$ kamayuvchi $\Rightarrow f'(x) \le 0$,

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ qat'iy o'suvchi $\Rightarrow f'(x) \ge 0$,

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ qat'iy kamayuvchi $\Rightarrow f'(x) \le 0$

bo'ladi.

1- misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x}$$

funksiyaning o'suvchi, kamayuvchi bo'lish oraliqlari topilsin.

◀ Ravshanki,

$$f'(x) = x \cdot 2^{-x}(2 - x\ln 2)$$

bo'ladi. Ushbu $f'(x) > 0$, $x \cdot 2^{-x}(2 - x\ln 2) > 0$ tengsizlik $x \in \left(0, \frac{2}{\ln 2}\right)$ da o'rinli bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya $x \in \left(0, \frac{2}{\ln 2}\right)$ da o'suvchi, $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$ da kamayuvchi bo'ladi. ▶

2°. Funksiyaning ekstremumlari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in X$ bo'lsin.

1- ta'rif. Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$ nuqtalarda

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada maksimumga (minimumga) erishadi* deyiladi, x_0 nuqtaga esa $f(x)$ *funksiyaning maksimum (minimum) nuqtasi* deyiladi.

2- ta'rif. Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ $(U_\delta(x_0) \subset X)$ nuqtalarda

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada qat'iy maksimumga (qat'iy minimumga) erishadi* deyiladi,

Funksiyaning maksimum hamda minimumi umumiy nom bilan uning *ekstremumlari*, maksimum hamda minimum nuqtalari esa uning *ekstremum nuqtalari* deyiladi.

5- teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqtada ekstremumga erishsin.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$f'(x_0) = 0$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishib, shu nuqtada hosilaga ega bo'lsin. U holda

$$\exists \delta > 0: \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \text{ da } f(x) \le f(x_0)$$

bo'ladi.

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ intervalda $f(x)$ funksiyaga Ferma teoremasini qo'llab topamiz:

$$f'(x_0) = 0. \ ▶$$

3- ta'rif. Funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqta uning *stansionar (kritik) nuqtasi* deyiladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya biror nuqtada ekstremumga erishsa, u shu nuqtada hosilaga ega bo'lishi shart emas.

Masalan, $f(x) = |x|$ funksiya $x_0 = 0$ nuqtada minimumga erishadi, biroq u shu nuqtada hosilaga ega emas.

Demak, $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtalari uning statsionar hamda hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalari bo'lishi mumkin.

4- ta'rif. Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ da } g(x) > 0 \text{ yoki}$$
$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ da } g(x) < 0$$

bo'lsa, $g(x)$ funksiya x_0 nuqtaning chap tomonida **ishora saqlaydi** deyiladi.

Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ da } g(x) > 0 \text{ yoki}$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ da } g(x) < 0$$

bo'lsa, $g(x)$ funksiya x_0 nuqtaning o'ng tomonida ishora saqlaydi deyiladi.

6- teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\exists\delta > 0,\ \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X$ da $f'(x)$ hosila mavjud;

2) $f'(x_0) = 0$;

3) $f'(x_0)$ hosila x_0 nuqtaning o'ng va chap tomonlarida ishora saqlasin.

Agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o'tishda ishorasini o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi.

Agar $f'(x_0)$ hosila x_0 nuqtani o'tishda ishorasini o'zgartirmasa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

◀ Aytaylik,

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ da } f'(x) > 0,$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ da } f'(x) < 0$$

bo'lsin. U holda $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0),\ f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ o'suvchi, ya'ni $f(x) < f(x_0),\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta),\ f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ kamayuvchi, ya'ni $f(x) < f(x_0)$, bo'lib, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da $f(x) < f(x_0)$ bo'ladi. Demak, bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

Aytaylik,

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ da } f'(x) < 0,$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ da } f'(x) > 0$$

bo‘lsin. U holda $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ kamayuvchi, ya’ni $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ o‘suvchi, ya’ni $f(x) > f(x_0)$ bo‘lib, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da $f(x) > f(x_0)$ bo‘ladi.

Demak, bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

Agar $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) > 0$ yoki $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) < 0$ bo‘lsa, unda $f(x)$ funksiya $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da o‘suvchi yoki $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da kamayuvchi bo‘lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi. ▶

7- teorema. $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C(X)$;

2) $\exists \delta > 0$, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ da $f'(x)$ hosila mavjud va chekli;

3) $f'(x)$ hosila x_0 nuqtaning o‘ng va chap tomonlarida ishora saqlasin.

Agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o‘tishda ishorasini o‘zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi.

Agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o‘tishda ishorasini o‘zgartirmasa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Bu teorema yuqoridagi 6- teorema kabi isbotlanadi.

8- teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan va $m \in N$, $m \geq 2$, $x_0 \in X$ bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\exists \delta > 0$, $\forall x \in U_\delta(x_0) \subset X$ da $f^{(m-1)}(x)$ hosila mavjud;

2) $f^{(m)}(x_0)$ hosila mavjud;

3) $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$, $f^{(m)}(x_0) \neq 0$.

U holda $m = 2k$, $k \in N$ bo‘lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishib, $f^{(m)}(x_0) < 0$ bo‘lganda x_0 nuqtada maksimumga, $f^{(m)}(x_0) > 0$ da minimumga erishadi.

Agar $m = 2k + 1$, $k \in N$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

◀ $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi Teylor formulasi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right), \quad x \to x_0$$

ni olamiz. Bu formula teoremaning shartida ushbu

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+o\left((x-x_0)^m\right),\quad x\to x_0$$

ko'rinishga keladi. Bundan esa $x\neq x_0$ da

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^m\left[\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}+\frac{o\left((x-x_0)^m\right)}{(x-x_0)^m}\right],\quad x\to x_0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

«o» ning ta'rifiga ko'ra $\frac{1}{m!}|f^{(m)}(x_0)|>0$ son uchun $\exists\delta>0$, $\forall x\in U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ nuqtalarda

$$\left|\frac{o\left((x-x_0)^m\right)}{(x-x_0)^m}\right|<\frac{1}{m!}\left|f^{(m)}(x_0)\right|$$

bo'ladi. Demak, $x\in U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ uchun

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}+\frac{o\left((x-x_0)^m\right)}{(x-x_0)^m}\quad \text{va}\quad \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

miqdorlar bir xil ishorali bo'ladi. Bundan esa $x\in U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ da

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$

ning ishorasi $f(x)-f(x_0)$ ayirmaning ishorasi bilan bir xil bo'lishi kelib chiqadi.

Agar $m=2k,\ k\in N$ bo'lib, $f^{(m)}(x_0)>0$ bo'lsa, unda $f(x)-f(x_0)>0$, ya'ni $f(x)>f(x_0)$ bo'ladi. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

Agar $m=2k, k\in N$ bo'lib, $f^{(m)}(x_0)<0$ bo'lsa, unda $f(x)-f(x_0)<0$, ya'ni $f(x)<f(x_0)$ bo'ladi. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

Agar $m=2k+1,\ k\in N$ bo'lsa, $f(x)-f(x_0)$ ayirma ishora saqlamaydi. Bu holda funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi. ▶

Xususan, agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli $f''(x_0)\neq 0$ hosilaga ega bo'lsa, shu nuqtada $f(x)$ funksiya $f''(x_0) < 0$ bo'lganda maksimumga, $f''(x_0) > 0$ da minimumga ega bo'ladi.

2- misol. Ushbu

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◀ Bu funksiya $R = (-\infty; +\infty)$ da aniqlangan bo'lib, u shu to'plamda uzluksiz. Uning hosilasini topamiz:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} - 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}. \qquad (1)$$

Ravshanki, funksiyaning hosilasi $x_1 = 1$ nuqtada nolga aylanadi: $f'(1) = 0$; $x_2 = 0$ nuqtada esa funksiyaning hosilasi mavjud emas.

Hosila ifodasi (1) dan ko'rinadiki, $x = 1$ nuqtaning chap tomonidagi nuqtalarda $f'(x) < 0$, o'ng tomonidagi nuqtalarda $f'(x) > 0$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $x=1$ nuqtada minimumga erishadi va $\min f(x) = f(1) = -2$ bo'ladi.

Yana hosila ifodasi (1) dan ko'rinadiki, $x = 0$ nuqtaning chap tomonidagi nuqtalarda $f'(x) > 0$, o'ng tomonidagi nuqtalarda $f'(x) < 0$ bo'ladi.

Demak, $f(x)$ funksiya $x = 0$ nuqtada maksimumga erishadi va $\max f(x) = f(0) = 1$ bo'ladi. ▶

Mashqlar

1. $f(x)$ funksiyaning hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtada funksiya ekstremumga erishishi shart emasligi isbotlansin.

2. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

3. Aytaylik, $f(x) \in C[a,b]$ bo'lsin. Bu funksiyaning $[a, b]$ dagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

26- ma'ruza

Funksiyaning qavariqligi, egilish nuqtalari va asimptotalari

1°. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x_1, x_2 \in (a, b)$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lsin.

$f(x)$ funksiya grafigining $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqni $y = l(x)$ desak, u quyidagicha

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

bo'ladi.

1- ta'rif. Agar har qanday oraliq $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ da joylashgan $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \le l(x) \quad (f(x) < l(x))$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya (a, b) da botiq (qat'iy botiq) funksiya* deyiladi.

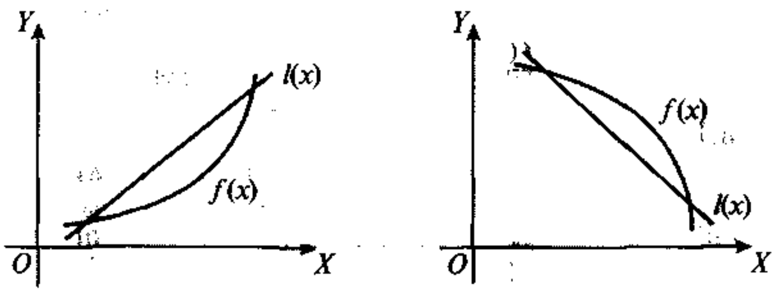
2- ta'rif. Agar har qanday oraliq $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ da joylashgan $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \ge l(x) \quad (f(x) > l(x))$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya (a, b) da qavariq (qat'iy qavariq) funksiya* deyiladi.

Botiq hamda qavariq funksiyalarning grafiklari 7- chizmada tasvirlangan.

Aytaylik, $\alpha_1 \ge 0$, $\alpha_2 \ge 0$, $\alpha_1 + \alpha_1 = 1$ bo'lib, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ bo'lsin. Funksiyaning botiqligi hamda qavariqligini quyidagicha ta'riflash ham mumkin.



7- chizma.

3- ta'rif. Agar

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\le \alpha_1 f_1(x_1)+\alpha_2 f(x_2),$$
$$(f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)<\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2))$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya (a, b) da botiq (qat'iy botiq)* deyiladi.

4- ta'rif. Agar

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\ge \alpha_1 f_1(x_1)+\alpha_2 f(x_2),$$
$$(f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)>\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2))$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya (a, b) da qavariq (qat'iy qavariq)* deyiladi.

1- misol. Ushbu

$$f(x)=x^2$$

funksiya R da qat'iy botiq funksiya bo'ladi.

◀ 3- ta'rifdan foydalanib topamiz:

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)^2=(\alpha_1 x_1)^2+2\alpha_1\alpha_2 x_1 x_2+(\alpha_2 x_2)^2<$$
$$<\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_1\alpha_2(x_1+x_2)^2+\alpha_2^2 x_2^2=\alpha_1 x_1^2(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2 x_2^2(\alpha_1+\alpha_2)=$$
$$=\alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2=\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2). \ ▶$$

1- teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, unda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning (a, b) da botiq (qat'iy botiq) bo'lishi uchun $f'(x)$ ning (a, b) da o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lishi zarur va yetarli.

◀ ***Zarurligi.*** $f(x)$ funksiya (a, b) da botiq bo'lsin. U holda $\forall x_1,\ x_2\in(a,b),\ x_1<x_2,\ \forall x\in(x_1,x_2)$ uchun

$$f(x)\le\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

bo'lib, undan
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

bo'lishi kelib chiqadi ($(x_2-x_1)=(x_2-x)+(x-x_1)$ deyildi). Keyingi tengsizlikda $x\to x_1$, so'ng $x\to x_2$ da limitga o'tib,

$$f'(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

$$f'(x_2)\ge\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

bo'lishini topamiz. Undan $f'(x_1) \le f'(x_2)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $f'(x)$ funksiya (a, b) da o'suvchi.

$f(x)$ funksiya (a, b) da qat'iy botiq bo'lsin. U holda

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

bo'ladi. Lagranj teoremasiga muvofiq

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < x;$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2), \quad x < c_2 < x_2$$

bo'lib, undan $f'(x_1) < f'(x_2)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. $f'(x)$ funksiya (a, b) da o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lsin: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ da

$$f'(x_1) \le f'(x_2) \quad f'(x_1) < f'(x_2).$$

Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < x;$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2), \quad x < c_2 < x_2$$

Ravshanki, $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2 \Rightarrow c_1 < c_2$. Demak, $f'(c_1) \le f'(c_2)$ $(f'(c_1) < f'(c_2))$ bo'lib, yuqoridagi munosabatlardan

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad \left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning (a, b) da botiq (qat'iy botiq) ekanini bildiradi. ▶

Xuddi shunga o'xshash, quyidagi teorema ham isbotlanadi.

2- teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, unda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

$f(x)$ funksiyaning (a, b) da qavariq (qat'iy qavariq) bo'lishi uchun $f'(x)$ ning (a, b) da kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lishi zarur va yetarli.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, u shu intervalda $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bundan tashqari, (a, b) intervalning har qanday (α, β) $((\alpha, \beta) \subset (a, b))$ qismida $f''(x)$ aynan nolga teng bo'l-masin.

3- teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda botiq (qavariq) bo'lishi uchun (a, b) da

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teoremaning isboti yuqoridagi hamda funksiyaning monotonligi haqidagi teoremalardan kelib chiqadi.

2- misol. Ushbu $$f(x) = \ln x \quad (x > 0)$$
funksiya qavariq bo'ladi.

◀ Bu funksiya uchun

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

bo'ladi. 2- teoremaga ko'ra berilgan $f(x) = \ln x$ funksiya $(0, +\infty)$ da qat'iy qavariq bo'ladi. ▶

2°. Funksiyaning egilish nuqtalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in X$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$, $\delta > 0$ bo'lsin.

5- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $(x_0 - \delta,\ x_0)$ da botiq (qavariq), $(x_0, x_0 + \delta)$ da qavariq (botiq) bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *egilish nuqtasi* deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ da $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Agar $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ da $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$;

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ da } f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0)$$

bo'lsa, $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi va $f''(x) = 0$ bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya egilish nuqtasida $f''(x)=0$ bo'ladi.

3- misol. Ushbu $$f(x) = x^3$$
funksiya $x_0 = 0$ nuqtada egiladi.

◀ Bu funksiya uchun

$$f''(x) = 6x$$

bo'lib,

$$\forall x \in (-\delta,\ 0) \text{ da } f''(x) < 0$$

$$\forall x \in (0, \delta) \text{ da } f''(x) > 0,\ (\delta > 0)$$

bo'ladi. ▶

3°. Funksiya grafigining asimptotalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

6- ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

limitlardan biri yoki ikkalasi ham cheksiz bo'lsa, $x = x_0$ *to'g'ri chiziq* $f(x)$ *funksiya grafigining vertikal asimptotasi* deyiladi.

Masalan, $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya grafigi uchun to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0, +\infty)$ da aniqlangan bo'lsin.

7- ta'rif. Agar shunday k va b sonlari topilsaki,

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad (x \to +\infty \text{ da } \alpha(x) \to 0)$$

bo'lsa, $y = kx + b$ *to'g'ri chiziq* $f(x)$ *funksiya grafigining og'ma asimptotasi* deyiladi.

4- teorema. $f(x)$ funksiya grafigi $y = kx + b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$$

bo'lishi zarur va yetarli.

◀ ***Zarurligi.*** $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'lsin. Unda

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

bo'lib, $x \to +\infty$ da $\alpha(x) \to 0$ bo'ladi. Bu tenglikni e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{kx + b + \alpha x}{x} = k;$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Yetarliligi. Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$$

munosabatlar o'rinli bo'lsin. Bu munosabatlardan

$$(f(x)-kx)-b=\alpha(x)\to 0\Rightarrow f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

4- misol. $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ funksiyaning og'ma asimptotasi topilsin.

◀ Bu funksiya uchun

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=2$$

bo'ladi. Demak, $y=x+2$ to'g'ri chiziq berilgan funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi.▷

Mashqlar

1. Ushbu

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$$

funksiyaning botiq hamda qavariq bo'ladigan oraliqlari topilsin.

2. Ushbu

$$f(x)=\frac{2x^2+x-2}{x-1}$$

funksiya grafigining og'ma asimptotasi topilsin.

3. Ushbu

a) $f(x)=x^2\sqrt[x]{e}$,

b) $f(x)=x+2\operatorname{arcctg}x$,

d) $f(x)=|e^x-1|$ funksiyalarni hosilalar yordamida to'liq tekshirilsin, grafiklari chizilsin.

27- ma'ruza
Lopital qoidalari

Ma'lum shartlarda funksiya limitini hisoblash qoidalari o'rganilgan edi. Ko'p hollarda bunday shartlar bajarilmaganda, ya'ni

$x \to x_0$ da $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0:\ \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti $\left(\frac{0}{0}\right)$,

$x \to x_0$ da $f(x) \to +\infty,\ g(x) \to +\infty:\ \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ning limiti $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$,

$x \to x_0$ da $f(x) \to +\infty,\ g(x) \to +\infty:\ f(x) - g(x)$ ning limiti $(\infty, -\infty)$,

$x \to x_0$ da $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0:\ (f(x))^{g(x)}$ ning limiti (0^0),

$x \to x_0$ da $f(x) \to 1,\ g(x) \to +\infty:\ (f(x))^{g(x)}$ ning limiti (1^∞)

$x \to x_0$ da $f(x) \to \infty,\ g(x) \to 0:\ f(x)\ g(x)$ ning limiti ∞^0 ni topishda funksiyaning hosilalariga asoslangan qoidaga ko'ra hisoblash qulay bo'ladi. Bunday usul bilan funksiya limitini topish ***Lopital qoidalari*** deyiladi.

1°. $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ **ko'rinishidagi hollar.**

1- teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = 0,\ \ \lim\limits_{x \to b-0} g(x) = 0;$

2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud;

3) $\forall x \in (a, b)$ da $g'(x) \neq 0;$

4) ushbu $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l,\ \ (l \in R)$ mavjud. U holda $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ bo'ladi.

◀ $f(b) = 0,\ \ g(b) = 0$ deb olamiz. Bunda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(b - \delta, b]$ da $(\delta > 0)$ uzluksiz bo'lib qoladi. Teoremaning 4- shartiga ko'ra:

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0, \quad \forall x \in (b-\delta, b): \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Endi $(b-\delta, b]$ da Koshi teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} - l\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon, \ \ (c \in (x, b) \subset [b-\delta, b]).$$

Demak, $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Shuni isbotlash talab qilingan edi. ▶

1- misol. Ushbu $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{(\ln x)^{\alpha} - \left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta}}{x-e} = \dfrac{\alpha-\beta}{e}$

munosabat isbotlansin.

◀ $f(x) = (\ln x)^{\alpha} - \left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta}$, $g(x) = x - e$ funksiyalar uchun $(1, e)$ da 1- teoremaning barcha shartlari bajariladi:

1) $\lim\limits_{x \to e} f(x) = \lim\limits_{x \to e} \left[\left((\ln x)^{\alpha} - \left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta}\right)\right] = 0,$;

$\lim\limits_{x \to e} g(x) = \lim\limits_{x \to e} (x - e) = 0;$

2) $f'(x) = \alpha(\ln x)^{\alpha-1} \cdot \dfrac{1}{x} - \dfrac{\beta}{e}\left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta-1}$, $g'(x) = 1;$

3) $g'(x) = 1 \neq 0;$

4) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{\alpha(\ln x)^{\alpha-1} \cdot \dfrac{1}{x} - \dfrac{\beta}{e} \cdot \left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta-1}}{1} = \dfrac{\alpha-\beta}{e}.$

Demak, $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{(\ln x)^{\alpha} - \left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta}}{x-e} = \dfrac{\alpha-\beta}{e}$. ▶

2- teorema. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a, +\infty)$ da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0;$

2) $\forall x \in (a, +\infty)$ da $f'(x)$, $g'(x)$ hosilalar mavjud;

3) $\forall x \in (a, +\infty)$ da $g'(x) \neq 0$;

4) Ushbu
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$
mavjud ($l \subset R$). U holda
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$
bo'ladi.

◀ $a > 0$ deb, $t = \frac{1}{x}$ deymiz. Unda $t \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ bo'lib, $x \to +\infty$ da $t \to +0$. Endi $F(t)$ va $G(t)$ funksiyalarni quyidagicha aniqlaymiz:
$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right), \quad G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right).$$
U holda
$$t \to +0 \text{ da } F(t) \to 0, \quad G(t) \to 0;$$
$$F'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right), \quad G'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right);$$
$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \to l, \quad (t \to +0)$$
bo'lib, 1- teoremaga ko'ra, $t \to +0$ da
$$\frac{F(t)}{G(t)} \to l$$
ga ega bo'lamiz. Keyingi munosabatdan esa
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$
bo'lishi kelib chiqadi ▶

2- misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\,\mathrm{arctg}\,x^2-\pi}$

limitni hisoblang.

◀ Agar $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - 1, \quad g(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,x^2 - \pi$ deyilsa, ular uchun 2- teoremaning barcha shartlari bajariladi, jumladan,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}, \quad g'(x) = \frac{4x}{1+x^4}$$

bo'lib, $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{4x}{1+x^4}} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^4}{2x^4} = -\frac{1}{2}$$

bo'ladi. 2-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\,\mathrm{arctg}\,x^2-\pi} = -\frac{1}{2}$$

bo'ladi. ▶

Quyidagi teoremalar ham yuqorida keltirilgan teoremalarga o'xshash isbotlanadi.

3- teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = \infty;$

2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x), \ g'(x)$ hosilalar mavjud;

3) $\forall x \in (a, b)$ da $g'(x) \neq 0;$

4) Ushbu $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l, \ (l \in R)$ mavjud. U holda

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$$

bo'ladi.

4- teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a, +\infty)$ da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \infty$;

2) $\forall x \in (a, +\infty)$ da $f'(x)$, $g'(x)$ hosilalar mavjud;

3) $\forall x \in (a, +\infty)$ da $g'(x) \neq 0$;

4) Ushbu $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, $(l \in R)$ mavjud. U holda

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

bo'ladi.

2°. $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0 ko'rinishidagi hollar. Bu ko'rinishdagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ hollarga keltirilib, so'ng yuqoridagi teoremalar qo'llaniladi.

1) $x \to x_0$ da $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$ bo'lganda $f(x) \cdot g(x)$ funksiyaning limitini topish uchun uni

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

deb, so'ng 1- yoki 2- teorema qo'llaniladi.

2) $x \to x_0$ da $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ bo'lganda $f(x) - g(x)$ funksiyaning limitini topish uchun uni

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{g(x)}}$$

deb, so'ng 1- teorema qo'llaniladi.

3) $x \to x_0$ da $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ hamda $x \to x_0$ da $f(x) \to 1$, $g(x) \to +\infty$ bo'lganda $(f(x))^{g(x)}$ funksiyaning limitini topish uchun avvalo

$$y = (f(x))^{g(x)}$$

funksiya logarifmlanadi, so'ng yuqoridagi teoremalar qo'llaniladi.

3- misol. Ushbu $\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

limit hisoblansin.

◀ Avvalo $y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ deb olamiz. Ravshanki, $x \to 0$ da

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \to 1, \;\; g(x) = \frac{1}{x^2} \to +\infty.$$

Sodda hisoblashlar yordamida topamiz:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x}\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{(x\cos x - \sin x)'}{\left(x^3\right)'} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

Demak, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$. ▶

Mashqlar

1. Ixtiyoriy $\alpha \in R$ da ushbu

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{\alpha} - 1}{\ln x} = \frac{2\alpha}{\pi}$$

tenglikning o'rinli bo'lishi isbotlansin.

2. Ushbu

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$$

limit hisoblansin.

7- BOB
ANIQMAS INTEGRAL

28- ma'ruza
Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari

1°. Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalar $(a, b) \subset R$ intervalda (bu interval chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin) berilgan bo'lib, $F(x)$ funksiya shu $(a, b) \subset R$ da differensiallanuvchi bo'lsin.

1- ta'rif. Agar (a, b) intervalda $F'(x) = f(x)$, $(x \in (a, b))$ bo'lsa, (a, b) da $F(x)$ *funksiya* $f(x)$ *ning boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

Masalan, $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiyaning $(0, +\infty)$ da boshlang'ich funksiyasi $F(x) = \ln x$ bo'ladi, chunki $(0, +\infty)$ da $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} = f(x)$.

Aytaylik, $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lib, $F(x)$ funksiya shu $[a, b]$ da differensialanuvchi bo'lsin.

2- ta'rif. Agar (a, b) intervalda $F'(x) = f(x)$, $(x \in (a, b))$ bo'lib, a va b nuqtalarda esa

$$F'(a+0) = f(a), \quad F'(b-0) = f(b)$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, $[a, b]$ segmentda $F(x)$ *funksiya* $f(x)$ *ning boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

1- teorema. Agar (a, b) intervalda $F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalarning har biri $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalar (a, b) da bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi:

$$\Phi(x) - F(x) = C, \quad (C = \text{const}).$$

◀ Shartga ko'ra (a, b) da $\Phi'(x) = f(x)$, $F'(x) = f(x)$.

Demak, (a, b) da $\Phi'(x) = F'(x)$. U holda 21- ma'ruzada keltirilgan 2- natijaga ko'ra

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad (C = \text{const})$$

bo'ladi. ▶

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar (a, b) da $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning (a, b) dagi ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi uchun

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad (C = \text{const})$$

bo'ladi.

1- eslatma. (a, b) da berilgan har qanday funksiya ham boshlang'ich funksiyaga ega bo'lavermaydi.

1- misol. $(-1, 1)$ intervalda ushbu

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{agar } -1 < x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } 0 < x < 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyani qaraylik.

Bu funksiyaning $(-1, 1)$ intervalda boshlang'ich funksiyaga ega bo'lmasligi isbotlansin.

◀ Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni berilgan funksiya $(-1, 1)$ da boshlang'ich funksiya $F(x)$ ga ega bo'lsin: $F'(x) = f(x), \ (x \in (-1, 1))$.

Ravshanki,

$$F'(0) = f(0) = 0 \tag{1}$$

bo'ladi. Bu $F(x)$ funksiyaga $[0, x]$ segmentda $(0 < x < 1)$ Lagranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$F(x) - F(0) = F'(c) \cdot x = f(c) \cdot x = x, \ (c \in (0, x)).$$

Keyingi tenglikdan

$$\frac{F(x)-F(0)}{x} = 1, \ \lim_{x \to +0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = 1$$

bo'lib, $F'(+0) = 1$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (1) munosabatga ziddir.

Demak, qaralayotgan $f(x)$ funksiya $(-1, 1)$da boshlang'ich funksiyaga ega bo'lmaydi. ▶

2- teorema. Agar $f(x) \in C(a,b)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a, b) da boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

Bu teoremaning isboti 34- ma'ruzada keltiriladi.

2°. Funksiyaning aniqmas integrali. Integralning xossalari. Aytaylik, $(a,\ b)$ da $f(x)$ funksiya berilgan bo'lib, $F(x)$ funksiya uning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin:

$$F'(x) = f(x),\ (x \in (a,\ b)).$$

U holda berilgan $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi

$$F(x) + C,\ (C = \text{const})$$

ko'rinishda ifodalanadi.

3- ta'rif. Ushbu

$$F(x) + C,\ (x \in (a,\ b))$$

ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Bunda $\int$ — integral belgisi, $f(x)$ — integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ — integral ostidagi ifoda deyiladi.

Demak,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ (C = \text{const}).$$

Shunday qilib, $(a,\ b)$ intervalda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $(a,\ b)$ da hosilasi shu $f(x)$ ga teng bo'lgan funksiyaning umumiy ko'rinishini ifodalar ekan.

2- misol. Ushbu $$\int x^3 dx$$

integral topilsin.

◀ Aniqmas integral ta'rifiga ko'ra, shunday $F(x)$ funksiya topilishi kerakki, $F'(x) = x^3$ bo'lsin. Agar

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4$$

deyilsa, ravshanki, $F'(x) = x^3$ bo'ladi. Demak,

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C,\quad (C = \text{const}).$$ ▶

3- misol. Ushbu $$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

aniqmas integral topilsin.

◀ Ravshanki,

$$F(x) = \sqrt{1+x^2}$$

funksiya uchun

$$F'(x) = (\sqrt{1+x^2})' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

bo'ladi. Demak,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C. \blacktriangleright$$

Endi aniqmas integralning xossalarini keltiramiz. Bundan buyon aniqmas integral haqida gap borganda uni qaralayotgan oraliqda mavjud deb, ya'ni integral ostidagi funksiya qaralayotgan oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega deb qaraymiz va oraliqni ko'rsatib o'tirmaymiz.

1) Ushbu

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

munosabat o'rinli.

◀ Aytaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin:

$$F'(x) = f(x).$$

U holda,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (C = \text{const})$$

bo'ladi. Bu tenglikka differensial amalini qo'llab topamiz.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx. \blacktriangleright$$

Bu xossa avval differensial belgisi d, so'ngra integral belgisi $\int$ kelib, ular yonma-yon turganda o'zaro bir-birini yo'qotishini ifodalaydi.

2) Ushbu

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad (C = \text{const})$$

munosabat o'rinli.

◀ Aytaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin:

$$F'(x) = f(x).$$

U holda,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \ \ (C = \text{const})$$

bo'ladi. Ayni paytda,

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x)$$

bo'lib, bu tengliklardan

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

Bu xossa avval integral belgisi $\int$, so'ngra differensial belgisi d kelib, ular yonma-yon turganda o'zaro bir-birini yo'qotishini anglatadi va $F(x)$ ga o'zgarmas C ni qo'shib qo'yish kerakligini ko'rsatadi.

3) Ushbu

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{2}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

◀ Aytaylik, $F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalar mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ larning boshlang'ich funksiyalari bo'lsin:

$$F'(x) = f(x), \ \ \Phi'(x) = g(x).$$

U holda

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1, \ \ \int g(x)dx = \Phi(x) + C_2$$

bo'lib,

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + \Phi(x) + C_1 + C_2 \tag{3}$$

bo'ladi.

Ayni paytda,

$$[F(x) + \Phi(x)]' = f(x) + g(x)$$

bo'lganligi sababli

$$\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + \Phi(x) + C_3 \tag{4}$$

bo'ladi. (3) va (4) munosabatlardan, ulardagi C_1, C_2 va C_3 larning ixtiyoriy o'zgarmas ekanligini e'tiborga olib topamiz:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \ ▶$$

Bu xossa aniqmas *integralning additivlik xossasi* deyiladi.

4) Ushbu $$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (5)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bunda k — o'zgarmas son va $k \neq 0$.

Bu xossa yuqoridagi 3- xossa kabi isbotlanadi.

2- eslatma. (2) va (5) tengliklarni o'ng va chap tomonlaridagi ifodalar orasidagi ayirma o'zgarmas songa barobarligi ma'nosidagi (o'zgarmas son aniqligidagi) tengliklar deb qaraladi.

4- misol. Ushbu $$J = \int\left(\frac{5}{1+x^2} - 3\sin x\right)dx$$

integral topilsin.

◀ Aniqmas integralning 3- va 4- xossalaridan foydalansak, unda

$$\int\left(\frac{5}{1+x^2} - 3\sin x\right)dx = 5\int\frac{1}{1+x^2}dx - 3\int\sin x dx$$

bo'lishi kelib chiqadi. Endi

$$(-\cos x)' = \sin x, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$5\int\frac{1}{1+x^2}dx - 3\int\sin x dx = 5\operatorname{arctg} x + 3\cos x + C.$$

Demak, $$J = 5\operatorname{arctg} x + 3\cos x + C. \quad ▶$$

3°. Asosiy aniqmas integrallar jadvali.

Elementar funksiyalarning hosilalari jadvali hamda aniqmas integral ta'rifidan foydalanib, sodda funksiyalarning aniqmas integrallari topiladi. Ularni jamlab, jadval ko'rinishiga keltiramiz:

1) $\int 0 \cdot dx = C, \quad C = \text{const}.$

2) $\int 1 \cdot dx = x + C.$

3) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1).$

4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad (x \neq 0).$

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, \ a \neq 1).$

$\int e^x dx = e^x + C.$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z\right).$

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad (x \neq \pi n, \ n \in Z).$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases} \quad (-1 < x < 1).$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

12) $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C.$

13) $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C.$

14) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{ch} x + C, \quad (x \neq 0).$

15) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

4°. Differensiallash va integrallash amallari haqida. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(a, b) \subset R$ da berilgan bo‘lsin.

Odatda, $f(x)$ *funksiyaning hosilasini topish uni differensiallash* ($f(x)$ funksiyaga differensiallash amalini qo‘llash) deyiladi. $f(x)$ funksiyaning (a, b) dagi boshlang‘ich funksiyasini topish, ya’ni $f(x)$ *ning aniqmas integralini topish uni integrallash* ($f(x)$ funksiyaga integral amalini qo‘llash) deyiladi.

Differensiallash va integrallash tushunchalari matematika va uning tatbiqlarida muhim rol o‘unaydi.

Matematik analizning differensiallash tushunchasidan bir qancha masalalarni, jumladan, harakat qonuniga ko'ra nuqta harakatining oniy tezligini topishda, egri chiziq ma'lum bo'lgan holda unga urinma o'tkazish masalalarini hal etishda foydalaniladi.

Ko'p hollarda harakatdagi nuqtaning har bir vaqt momentidagi tezligi ma'lum bo'lganda harakat qonunini topish, egri chiziqning urinmasiga ko'ra o'zini aniqlash masalalari yuzaga keladi. Bu holda funksiyaning hosilasiga ko'ra o'zini topish lozim bo'ladi. Bu yuqorida eslab o'tilgan masalalarga teskari bo'lib, ular funksiyalarni integrallash amali yordamida yechiladi.

Demak, funksiyalarni differensiallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar bo'ladi.

Ma'lumki, elementar funksiyalarning (bunda ratsional funksiyalar; darajali, ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalar; trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar, ularning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, nisbati ham chekli marta superpozitsiyalardan tuzilgan funksiyalar tushuniladi) hosilalari yana elementar funksiyalar bo'ladi.

Ammo hamma elementar funksiyalarning integrallari elementar funksiyalar bo'lavermaydi.

Masalan, ushbu

$$f(x) = \sin x^2, \quad f(x) = \cos x^2, \quad f(x) = e^{x^2}, \quad (x \in R);$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (x > 0)$$

funksiyalarning aniqmas integrallari mavjud bo'lsa ham ular elementar funksiyalar bo'lmaydi.

Mashqlar

1. $f(x) = |x|$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi topilsin.

2. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ da berilgan toq funksiya bo'lib, $F(x)$ funksiya esa uning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. $F(x)$ juft funksiya bo'lishi isbotlansin.

3. Ushbu

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}$$

integral hisoblansin.

29- ma'ruza

Integrallash usullari. Sodda kasrlarni integrallash

1°. O'zgaruvchini almashtirib integrallash usuli. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali

$$\int f(x)dx \tag{1}$$

berilgan bo'lib,uni hisoblash talab etilsin.

Ko'pincha, o'zgaruvchi x ni ma'lum qoidaga ko'ra boshqa o'zgaruvchiga almashtirish natijasida berilgan integral sodda integralga keladi va uni hisoblash oson bo'ladi.

Aytaylik, (1) integraldagi o'zgaruvchi yangi o'zgaruvchi bilan ushbu

$$t = \varphi(x)$$

munosabatda bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $\varphi(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsin;

2) $g(t)$ funksiya boshlang'ich funksiya $G(t)$ ga ega, ya'ni:

$$G'(t) = g(t), \quad \int g(t)dt = G(t) + C; \tag{2}$$

3) $f(x)$ funksiya quyidagicha ifodalansin:

$$f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'((x) \cdot \tag{3}$$

U holda

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

bo'ladi.

◀ Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib, (2) va (3) munosabatlarni e'tiborga olib topamiz:

$$[G(\varphi(x)) + C]' = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(x) \cdot$$

Bundan

$$\int f(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

Shu yo'l bilan (1) integralni hisoblash *o'zgaruvchini almashtirib integrallash usuli* deyiladi.

Bu usulda, o'zgaruvchini juda ko'p munosabat bilan almashtirish imkoniyati bo'lgan holda ular orasidan qaralayotgan integralni sodda, hisoblash uchun qulay holga keltiradiganini tanlab olish muhimdir.

1- misol. Ushbu $\int \sin 5x dx$
integral hisoblansin.

◀ Bu integralni o'zgaruvchisini almashtirib hisoblaymiz:

$$\int \sin 5x dx = \left| \begin{matrix} 5x = t \\ 5dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{5}\int \sin t dt = -\frac{1}{5}\cos t + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C. ▶$$

2- misol. Ushbu $J = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

integral hisoblansin.

◀ Avvalo berilgan integralni quyidagicha

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu integralni o'zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib hisoblaymiz:

$$J = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C. ▶$$

2- misol. Ushbu $J = \int \frac{dx}{\cos x}$

integral hisoblansin.

◀ Ravshanki, $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}.$

Unda $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{1-t^2}$

bo'lib, $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+t)} + \frac{1}{(1-t)}\right]$

bo'lganligi sababli

$$J = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{(1+t)} + \int \frac{dt}{(1-t)}\right) = \frac{1}{2}\left(\int \frac{d(1+t)}{(1+t)} - \int \frac{d(1-t)}{(1-t)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

bo'ladi. Agar

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, unda

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C$$

ekanini topamiz. ▶

4-misol. Ushbu $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}, \quad (a \neq 0, a \in R)$

integral hisoblansin.

◀ Integralda o‘zgaruvchini quyidagicha almashtiramiz:

$$x + \sqrt{x^2 + a} = t.$$

Unda

$$dt = d(x + \sqrt{x^2 + a}) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx = \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}\, dx = \frac{t}{\sqrt{x^2+a}} dx$$

bo‘lib, undan
$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{t}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Natijada

$$J = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \tag{4}$$

bo‘lishini topamiz. ▶

2°. Bo‘laklab integrallash usuli. Faraz qilaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar uzluksiz $u'(x)$, $v'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin.

Ravshanki,

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

bo‘ladi. Demak, $F(x) = u(x) \cdot v(x)$

funksiya $f(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi. Bundan

$$\int [u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)]dx = u(x) \cdot v(x) + C$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Aniqmas integralning 3- va 4- xossalaridan foydalanib

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx \tag{5}$$

bo‘lishini topamiz.

(5) formulani quyidagicha

$$\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x) \qquad (5')$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Bu (5') formula *bo'laklab integrallash formulasi* deyiladi. Uning yordamida

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx$$

integralni hisoblash

$$\int u'(x)\cdot v(x)dx$$

integralni hisoblashga keltiriladi.

5-misol. $\int x\cos x\,dx$

integral hisoblansin.

◀ Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanib topamiz:

$$\int x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ \cos xdx = dv, & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin xdx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C. \ ▶$$

6- misol. Ushbu $J = \int \sqrt{x^2+a}\,dx$

integral hisoblansin.

◀ Qaralayotgan integralda

$$u = \sqrt{x^2+a}, \quad dv = dx$$

deyilsa, unda $du = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx, \quad v = x$

bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanib topamiz:

$$J = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Demak, $$J = x\sqrt{x^2+a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

$$J = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\right].$$

Ma'lumki, (1° dagi 4- misol)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Natijada

$$J = \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

7- misol. Ushbu

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad (n \in N,\ a \in R,\ a \neq 0)$$

integral topilsin.

◀ Bu integralda

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad dv = dx$$

deb olsak, unda

$$du = -\frac{2nx\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = x$$

bo'ladi. (5) formuladan foydalanib topamiz:

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right].$$

Natijada $$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot J_n - 2na^2\cdot J_{n+1}$$

bo'ladi. Bu tenglikdan

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot J_n \qquad (6)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Odatda, (6) *munosabat rekkurent formula* deyiladi.

Ravshanki, $n = 1$ bo'lganda

$$J_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

bo'ladi.

$n\geq 2$ bo'lganda mos J_n integrallar (6) rekkurent formula yordamida topiladi. Masalan,

$$J_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\cdot J_1=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

bo'ladi. ▶

3°. Sodda kasrlarni integrallash. Ushbu

$$\frac{A}{(x-a)^m},\quad (x\neq a);\quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

ko'rinishdagi funksiyalar *sodda kasrlar* deyiladi, bunda $m\in N;\ A,\ B,\ C,\ a,\ p,\ q$ — haqiqiy sonlar bo'lib, x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas, ya'ni $q-\frac{p^2}{4}>0$.

$m = 1$ bo'lganda sodda kasrlarning integrallari

$$\int\frac{A}{x-a}dx,\quad \int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$$

lar quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$$

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx=$$

$$= \left| \begin{matrix} x + \frac{p}{2} = t, & x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt, & q - \frac{p^2}{4} = a^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= B\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln(t^2 + a^2) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C^* =$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{2C-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C^*.$$

Aytaylik, $m \in N$, $m > 1$ bo'lsin. Bu holda sodda kasrlarning integrallari

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx, \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,dx$$

lar quyidagicha hisoblanadi:

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx = A\int (x-a)^{-m}\,d(x-a) = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C,$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \left| \begin{matrix} x + \frac{p}{2} = t, & x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt, & q - \frac{p^2}{4} = a^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} + \left(C - \frac{p}{2}B\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} =$$

$$= -\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}} + \left(C - \frac{p}{2}B\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Keyingi munosabatdagi

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

integral (6) rekurrent formula yordamida topиладı.

Mashqlar

1. Ushbu
$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$
integral hisoblansin.

2. Ushbu
$$\int e^{ax}\cos bx dx$$
integral hisoblansin.

3. Quyidagi $\int \frac{dx}{x}$ integralni bo'laklab integrallash natijasida:
$$\int \frac{dx}{x} = \begin{bmatrix} du = dx, & v = \frac{1}{x} \\ u = x, & dv = -\frac{1}{x} \end{bmatrix} = x \cdot \frac{1}{x} - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = 1 + \int \frac{dx}{x}$$
bo'lishi kelib chiqadi. Xatolik topilsin.

30- ma'ruza

Ratsional hamda trigonometrik funksiyalarni integrallash

1°. Algebraning ba'zi ma'lumotlari va tasdiqlari.

Biz quyida algebra kursida o'rganiladigan ba'zi tushunchalarni hamda tasdiqlarni (isbotsiz) keltiramiz. Ulardan ratsional funksiyalarni integrallashda foydalaniladi.

Aytaylik,
$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \tag{1}$$
ko'phad berilgan bo'lsin, bunda $a_k \in R,\ k = 0, 1, 2, ..., n,\ n \in N$ esa ko'phadning darajasi.

Agar $\alpha \in R$ uchun $P_n(\alpha) = 0$ bo'lsa, α son $P_n(x)$ *ko'phadning ildizi* deyiladi. Bu holda $P_n(x)$ ko'phad $x - \alpha$ ga bo'linib, u quyidagicha
$$P_n(x) = (x-\alpha)Q(x)$$
ko'rinishda ifodalanadi, bunda $Q(x)$ — $(n-1)$- darajali ko'phad.

Agar $P_n(x)$ ko'phad $(x-\alpha)^k$, $(k \in N)$ ga bo'linsa, α son $P_n(x)$ ning k karrali ildizi bo'ladi. Bu holda $P_n(x)$ ushbu

$$P_n(x) = (x-\alpha)^k R(x)$$

ko'rinishda ifodalanadi,bunda $R(x)$ — $(n-k)$- darajali ko'phad.

Agar $z = \alpha + i\beta$ kompleks son $P_n(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, $\bar{z} = \alpha - i\beta$ ham $P_n(x)$ ning ildizi bo'ladi. Shuningdek, $z = \alpha + i\beta$ son $P_n(x)$ ning k karrali ildizi bo'lsa, $\bar{z} = \alpha - i\beta$ son ham shu $P_n(x)$ ko'phadning k karrali ildizi bo'ladi. U holda $P_n(x)$ ko'phadning ifodasida quyidagi

$$(x-z)(x-\bar{z}) = [x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)] =$$
$$= x^2 + px + q, \quad (p = -2\alpha, \quad q = \alpha^2 + \beta^2)$$

kvadrat uchhad ko'paytuvchi bo'lib qatnashadi.

Faraz qilaylik,

$$Q_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \tag{2}$$

ko'phad berilgan bo'lib, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ haqiqiy sonlar $Q_n(x)$ ning mos ravishda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ karrali ildizlari, $z_1, z_2, \ldots, z_s$ kompleks sonlar esa $Q_n(x)$ ning mos ravishda $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ karrali ildizlari bo'lsin.

1- teorema. Har qanday n- darajali

$$Q_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

ko'phad $(a_m \in R, \ m = 0, 1, 2, \ldots, n, a_n \neq 0)$ ushbu

$$Q_n(x) = (x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(x-\alpha_k)x^{\lambda k} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{\gamma_1} \times$$
$$\times(x^2 + p_2x + q_2)^{\gamma_2}\ldots(x^2 + p_sx + q_s)^{\gamma_s} \tag{3}$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_s) = n$$

bo'lib, $x^2 + p_ix + q_i, \ (i = 1, 2, \ldots, s)$ kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas.

Ma'lumki,

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \ (n \in N),$$
$$Q_s(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_sx^s, \quad (s \in N)$$

ko'phadlar $(a_i \in R, \ b_j \in R; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, s)$ nisbati

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_sx^s}$$

kasr ratsional funksiya deyilib, $n < s$ bo'lganda u *to'g'ri kasr* deyilar edi.

2- teorema. Agar $\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}$ to'g'ri kasr maxrajidagi $Q_s(x)$ ko'phad ushbu

$$Q_s(x) = (x - \alpha)^m Q(x), \quad (m \in N)$$

ko'rinishda bo'lib, $Q(x)$ ko'phad $x - \alpha$ ga bo'linmasa, u holda

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + ... + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

bo'ladi, bunda $A_i \in R$, $i = 1, 2, ..., m$; $P(x)$ – ko'phad.

3- teorema. Agar $\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}$ to'g'ri kasr maxrajidagi $Q_s(x)$ ko'phad ushbu

$$Q_s(x) = (x^2 + px + q)^m Q(x), \quad (m \in N)$$

ko'rinishda bo'lib, ($x^2 + px + q$ kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas), $Q(x)$ ko'phad $x^2 + px + q$ ga bo'linmasa, u holda

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)} = \frac{B_mx + C_m}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{B_{m-1}x + C_{m-1}}{(x_2 + px + q)^{m-1}} + ... + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

bo'ladi, bunda $B_i \in R$, $C_i \in R$, $i = 1, 2, ..., m$; $P(x)$ – ko'phad.

Yuqorida keltirilgan 2- 3- teoremalar ixtiyoriy to'g'ri kasr har bir hadi ushbu

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad (a \in R, \ A \in R, \ m \in N);$$

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m}, \quad (B \in R, \ C \in R, \ p \in R, \ q \in R, \ p^2 - 4q < 0, \ m \in N)$$

ko'rinishdagi kasrlardan, ya'ni sodda kasrlardan iborat bo'lgan yig'indi orqali ifodalanishini ko'rsatadi. Bunday holda *to'g'ri kasr sodda kasrlarga yoyiladi* deyiladi.

Aytaylik,

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}, \quad (n \in N, \ s \in N, \ n < s)$$

to'g'ri kasr berilgan bo'lsin. Amaliyotda bu kasr sodda kasrlarga quyidagicha yoyiladi:

1) Kasrning maxraji $Q_s(x)$ ko'phad (3) ko'rinishda yoziladi;

2) 2—3- teoremalardan foydalanib,

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}$$

ni sodda kasrlarga yoyiladi;

3) bu yoyilmaning o'ng tomonidagi sodda kasrlar yig'indisi umumiy maxrajga keltiriladi;

4) natijada hosil bo'lgan

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)} = \frac{R_n(x)}{Q_s(x)},$$

ya'ni

$$P_n(x) = R_n(x)$$

tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, noma'lum koeffitsiyentlarni topish uchun tenglamalar sistemasi hosil qilinadi.

1- misol. Ushbu

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}$$

to'g'ri kasr sodda kasrlarga yoyilsin.

◀ Bu kasrning maxraji

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x + 2)^2$$

bo'lgani uchun 2- teoremaga ko'ra

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

bo'ladi. Uni

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A(x+2)^2+x(x+2)B+Cx}{x(x+2)^2}$$

ko'rinishda yozib, ushbu

$$3x^2 + 8 = A(x + 2)^2 + Bx(x + 2) + Cx =$$
$$= (A + B)x^2 + (4A + 2B + C)x + 4A$$

tenglikka kelamiz. Ikki ko'phadning tengligidan foydalanib, ushbu

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ 4A + 2B + C = 0, \\ 4A = 8 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz va uni yechib

$$A = 2, \quad B = 1, \quad C = -10$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{-10}{(x+2)^2}. \quad \blacktriangleright$$

2- misol. Ushbu $\qquad \dfrac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}$

to'g'ri kasr sodda kasrlarga yoyilsin.

◀ Ravshanki, $\qquad x^4 + x = x(x+1)(x^2 - x + 1).$

Unda $\qquad \dfrac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = A(x^3+1) + Bx(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x) =$$
$$= (A + B + C)x^3 + (C + D - B)x^2 + (B + D)x + A$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, A, B, C, D larni topish uchun quyidagi

$$\begin{cases} A + B + C = 1, \\ C + D - B = 4, \\ B + D = -2 \\ A = 1 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Uni echib topamiz:

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 2, \quad D = 0.$$

Demak, $\qquad \dfrac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{-2}{x+1} + \dfrac{2x}{x^2-x+1}. \quad \blacktriangleright$

2°. Ratsional funksiyalarni integrallash. Faraz qilaylik, $f(x)$ ratsional funksiya bo'lib, uning integralini hisoblash talab etilsin.

Aytaylik, $f(x)$ butun ratsional funksiya

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

bo'lsin. Unda

$$\int f(x)dx = \int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)dx =$$

$$= a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} ... + a_n\frac{x^n}{n} + C$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ kasr ratsional funksiya

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad (n \in N, \ m \in N)$$

bo'lsin. Agar $n \geq m$ bo'lsa, unda $P_n(x)$ ko'phadni $Q_m(x)$ ko'phadga bo'lish bilan $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ning butun qismini ajratib, butun ratsional funksiya hamda to'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida ifodalab olinadi:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{\tilde{P}_k(x)}{Q_m(x)}.$$

Ravshanki, $\int f(x)dx = \int R(x)dx + \int \frac{\tilde{P}_k(x)}{Q_m(x)}dx.$

Demak, $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad (n > m)$

ratsional funksiyani integrallash to'g'ri kasrni integrallashga keladi. To'g'ri kasrlarni integrallash uchun avvalo uni 1° da keltirilgan usul bilan sodda kasrlarga yoyiladi. Sodda kasrlarni integrallash esa 29-ma'ruzada batafsil bayon etilgan.

3- misol. Ushbu $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$

integral hisoblansin.

◀ Integral ostidagi ratsional funksiyani sodda kasrlarga yoyamiz:

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}.$$

Demak,

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+2} - 10\int \frac{dx}{(x+2)^2} =$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C. \blacktriangleright$$

4- misol. Ushbu $$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$$

integral hisoblansin.

◀ Integral ostidagi funksiya ratsional funksiya bo'lib, u noto'g'ri kasrdir. Bu kasrning surati $x^6+2x^4+2x^2-1$ ko'phadni maxraji $x(x^2+1)^2$ ko'phadga bo'lib, uning butun qismini ajratamiz:

$$\begin{array}{r|l} -\; x^6+2x^4+2x^2-1 & x^5+2x^3+x \\ \cline{2-2} x^6+2x^4+x^2 & x \\ \cline{1-1} x^2-1 & \end{array}$$

Demak, $$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Endi $$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$$

to'g'ri kasrni sodda kasrlarga yoyamiz:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

$$x^2-1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x =$$

$$= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A.$$

Keyingi tenglikdan

$$A=-1,\ B=1,\ C=0,\ D=2,\ E=0$$

bo'lishini topamiz.

Demak, $$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Natijada,

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

bo‘lib,

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \int xdx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x}{x^2+1}dx +$$

$$+\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{x^2+1} + C$$

bo‘ladi. ▶

3°. Ikki o‘zgaruvchining ratsional funksiyasi haqida. Ikki u va v o‘zgaruvchilar berilgan bo‘lib, bu o‘zgaruvchilar yordamida ushbu

$$u^n v^m, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \ m = 0, 1, 2, \ldots)$$

ko‘paytmani tuzamiz. Quyidagi

$$P(u,v) = a_{00} + a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \ldots$$

$$+a_{n0}u^n + a_{(n-1)1}u^{n-1}v + \ldots + +a_{1(n-1)}uv^{n-1} + a_{0n}v^n$$

funksiya u va v *o‘zgaruvchilarning ko‘phadi* deyiladi, bunda $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \ldots, a_{0n}$ – haqiqiy sonlar.

Aytaylik, $P(u, v)$ hamda $Q(u, v)$ lar u va v o‘zgaruvchilarning ko‘phadlari bo‘lsin. Ushbu

$$\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}, \quad (Q(u,v) \neq 0)$$

nisbat u va v *o‘zgaruvchilarning ratsional funksiyasi* deyiladi va $R(u, v)$ kabi belgilanadi:

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}, \quad (Q(u,v) \neq 0).$$

Faraz qilaylik, u va v o‘zgaruvchilarning har biri o‘z navbatida x o‘zgaruvchining

$$u = \varphi(x),$$
$$v = \psi(x)$$

funksiyalari bo‘lsin. U holda $R(u, v)$ funksiya $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarning ratsional funksiyasi bo‘ladi. Masalan,

$$f(x)=\frac{x-2\sqrt[3]{x^2-1}+1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2-1}}$$

funksiya $\quad u=\sqrt{x}, \quad v=\sqrt[3]{x^2-1}$

larning ratsional funksiyasi bo‘ladi, chunki

$$R(u,v)=\frac{u^2-2v+1}{u+v}.$$

Xususan, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ larning har biri x o‘zgaruvchining ratsional funksiyalari bo‘lsa, u holda

$$R(u,v)=R(\varphi(x),\psi(x))$$

funksiya shu x o‘zgaruvchining ratsional funksiyasi bo‘ladi.

Endi $R(u, v)$ ratsional funksiyaning sodda xossalarini keltiramiz:

1) Agar $\quad R(-u,v)=R(u,v)$

bo‘lsa, u holda bu ratsional funksiya ushbu

$$R(u,v)=R_1(u^2,v)$$

ko‘rinishga keladi, bunda R_1 ham ratsional funksiya.

2) Agar $\quad R(-u,v)=-R(u,v)$

bo‘lsa, u holda bu ratsional funksiya ushbu

$$R(u,v)=R_2(u^2,v)$$

ko‘rinishga keladi, bunda R_2 — ratsional funksiya.

1) Agar $\quad R(-u,-v)=R(u,v)$

bo‘lsa, u holda bu ratsional funksiya ushbu

$$R(u,v)=R_2\left(\frac{u}{v},v^2\right)$$

ko‘rinishga keladi, bunda R_2 — ratsional funksiya.

4°. Trigonometrik funksiyalarni integrallash.

Aytaylik, $R(u, v)$ ikki o‘zgaruvchining ratsional funksiyasi bo‘lsin. Ushbu

$$\int R(\sin x,\cos x)dx \tag{4}$$

integralni qaraymiz. Bu integralda

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

almashtirishni bajaramiz. Unda

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

bo‘lib, $\int R(\sin x, \ \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}$$

ifoda t ning ratsional funksiyasidir. Demak, **(4) integralni hisoblash**

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

almashtirish bilan ratsional funksiyani integrallashga keladi.

5- misol. Ushbu $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

integral hisoblansin.

◄ Bu integralda $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

almashtirish bajarib topamiz:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C. \ ►$$

Ayrim hollarda $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \operatorname{tg} x$ almashtirishlar qulay bo‘ladi.

Aytaylik, $R(u, v)$ ratsional funksiya uchun

$$R(-u, v) = -R(u, v)$$

bo‘lsin. Bu holda

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_2(\sin^2 x, \cos x)\sin x\, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{vmatrix} = -\int R_2(1-t^2, t)dt$$

bo‘ladi. Aytaylik, $R(u, v)$ ratsional funksiya uchun

$$R(u, -v) = -R(u, v)$$

bo‘lsin. Bu holda quyidagi ifodani olamiz:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_3(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int R_3(t, 1-t^2)dt.$$

Aytaylik, $R(u, v)$ ratsional funksiya uchun

$$R(-u, -v) = -R(u, v)$$

bo‘lsin. Bu holda

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)dx =$$

$$= \begin{vmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt \end{vmatrix} = \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$$

bo‘ladi.

6- misol. Ushbu

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx$$

integral hisoblansin.

◀ Integral ostidagi funksiya uchun $R(-u, v) = -R(u, v)$ bo‘ladi. Shuning uchun $\cos x = t$ deyilsa, unda $-\sin x dx = dt$ bo‘lib,

$$\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx = \int (t^2 - 1)t^4 dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

bo‘ladi. ▶

Mashqlar

1. Ushbu
$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}$$
to'g'ri kasr sodda kasrlarga ajratilsin.

2. Ushbu
$$\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}\,dx$$
integral hisoblansin.

31- ma'ruza
Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash

1°. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ **ko'rinishidagi integrallarni hisoblash.**

Faraz qilaylik, $R(u, v)$ ikki o'zgaruvchining ratsional funksiyasi bo'lib, a, b, c, d — haqiqiy sonlar, $n \in N$ bo'lsin.

Ushbu
$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx, \quad ad-bc \neq 0$$
ko'rinishidagi integrallarni qaraymiz. Bu integral o'zgaruvchini almashtirish yordamida ratsional funksiyaning integraliga keladi:
$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t, \quad x = \frac{b-t^n d}{ct^n-a} \\ dx = \frac{(ad-bc)n}{(a-ct^n)^2}t^{n-1}dt \end{array} \right| =$$
$$= \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\cdot\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt.$$

1- misol. Ushbu
$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{1-x}\,dx$$
integral hisoblansin.

◀ Bu integralda $$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

almashtirishni bajaramiz. Unda

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$$

bo'lib, $$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{1-x} dx = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2+1}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = t - \operatorname{arctg} t + C .$$

Demak,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{1-x} dx = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C . \quad ▶$$

2°. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ ko'rinishidagi integrallarni hisoblash. Bu integralda a, b, c –haqiqiy sonlar bo'lib, $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhad teng ildizlarga ega emas.

Qaralayotgan

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx \tag{1}$$

integral quyidagi uchta almashtirish yordamida ratsional funksiya integraliga keladi.

a) $a > 0$ bo'lsin. (1) integralda ushbu

$$t = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (\text{yoki } t = -\sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

almashtirishni bajaramiz. U holda

$$ax^2 + bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}xt + ax^2,$$

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \quad dx = \frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t+b)^2} dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}$$

bo'ladi. Natijada

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx =$$

$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)\cdot\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$$

bo'ladi.

2- misol. Ushbu $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ integral hisoblansin.

◀ Bu integralda

$$t = x+\sqrt{x^2+x+1}$$

almashtirishni bajaramiz. Natijada

$$x = \frac{t^2-1}{1+2t}, \quad dx = 2\,\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,dt$$

bo'lib, $$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2 t}\,dt$$

bo'ladi. Agar

$$\frac{2(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2} = \frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2}\right)dt =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + C =$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right| +$$

$$+\frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})}+C$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

b) $c > 0$ bo'lsin. Bu holda (1) integralda ushbu

$$t = \frac{1}{x}(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c})$$

yoki $$t = \frac{1}{x}\left(\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c}\right)$$
almashtirishni bajaramiz. Unda

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \quad dx = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{(a+t)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}$$

bo'lib, (1) integral ratsional funksiyaning integraliga keladi:

$$\int R(x, \ \sqrt{ax^2 + bx + c})dx =$$

$$= \int R\left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}\right)\left(\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{(a+t)^2}\right)dt.$$

d) $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhad turli x_1 va x_2 haqiqiy ildizga ega bo'lsin:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot$$

Bu holda (1) integralda ushbu

$$t = \frac{1}{x - x_1}\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

almashtirishni bajaramiz. Natijada

$$x = \frac{-ax_2 + x_1t^2}{t^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(x_1 - x_2)}{t^2 - a}t, \quad dx = \frac{2a(x_1 - x_2)t}{(t^2 - a)^2}dt$$

bo'lib,

$$\int R(x, \ \sqrt{ax^2 + bx + c})dx =$$

$$= \int R\left(\frac{-ax_2 + x_1t^2}{t^2 - a}, \ \frac{a(x_1 - x_2)}{t^2 - a}t\right)\cdot\frac{2a(x_1 - x_2)t}{(t^2 - a)^2}dt$$

bo'ladi.

3- misol. Ushbu

$$I = \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}}dx$$

integral hisoblansin.

◀ Ravshanki,

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1) \cdot (x+2).$$

Shuni e'tiborga olib berilgan integralda

$$t = \frac{1}{x+1} \sqrt{x^2 + 3x + 2}$$

almashtirishni bajaramiz. U holda

$$x = \frac{2-t^2}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{2t dt}{(t^2-1)^2}$$

bo'lib,

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} dx = \int \frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3} dt$$

bo'ladi. Endi

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3} = \frac{\frac{3}{4}}{t-1} - \frac{\frac{16}{27}}{t-2} - \frac{\frac{17}{108}}{t+1} + \frac{\frac{5}{18}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{(t+1)^3}$$

bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$I = \int \frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3} dt = \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{16}{27}\int \frac{dt}{t-2} -$$

$$-\frac{17}{108}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{5}{18}\int \frac{dt}{(t+1)^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t+1)^3} = \frac{3}{4}\ln|t-1| -$$

$$-\frac{16}{27}\ln|t-2| - \frac{17}{108}\ln|t+1| - \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(t+1)^2} + C.$$ ▶

3°. Binomial differensialni integrallash. Ushbu

$$x^m (a + bx^n)^p dx$$

ifoda *binomial differensial* deyiladi, bunda $a \in R$, $b \in R$, m, n, p — ratsional sonlar.

Binomial differensialning integrali

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \tag{2}$$

ni qaraymiz. Bu integral quyidagi hollarda ratsional funksiyaning integraliga keladi:

1) p — butun son. Bu holda m va n ratsional sonlar maxrajlarining eng kichik umumiy karralisini δ orqali belgilab, (2) integralda

$$x = t^{\delta}$$

almashtirish bajarilsa, (2) integral ratsional funksiyaning integraliga keladi.

4- misol. Ushbu $$I = \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$$

integral hisoblansin.

◀ Bu integralni quyidagicha yozib:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}\,dx\,,$$

bunda $p = -2$ bo'lishini aniqlaymiz.

Integralda $x = t^6$ almashtirish bajarib,

$$I = 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}\,dt$$

bo'lishini topamiz. Ravshanki,

$$\frac{t^8}{(1+t^2)^2} = t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4}{t^2+1} + \frac{1}{(t^2+1)^2}\,.$$

Demak,

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + 3t - 4\operatorname{arctg}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}t + C$$

bo'lib,

$$I = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} - 21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} + C$$

bo'ladi. ▶

2) $\frac{m+1}{n}$ **— butun son.** Bu holda (2) integralda

$$x = t^{\frac{1}{n}}$$

almashtirishni bajarib

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p \cdot t^q\,dt$$

bo'lishini topamiz, bunda

$$q = \frac{m+1}{n} - 1 .$$

So'ng p ning maxrajini s deb

$$z = (a + bt)^{\frac{1}{s}}$$

almashtirishni bajaramiz. Natijada (2) integral ratsional funksiyaning integraliga keladi.

5- misol. Ushbu $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ integral hisoblansin.

◀ Bu integralda

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x(1 + x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} dx,$$

$$m = 1, \quad n = \frac{2}{3}, \quad p = -\frac{1}{2}$$

bo'lib,
$$\frac{m+1}{n} = 3$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib, berilgan integralda,

$$t = (1 + x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

almashtirishni bajaramiz. U holda

$$1 + x^{\frac{2}{3}} = t^2, \quad x = (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}, \quad dx = \frac{3}{2}(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2tdt$$

bo'lib,

$$\int x(1 + x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} dx = 3\int (t^2 - 1)^2 t^2 dt = 3\,\frac{t^7}{7} - 6\,\frac{t^5}{5} + t^3 + C, \quad t = \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}}$$

bo'ladi. ▶

3) $p + q$ — butun son. Ma'lumki, (2) integral $x = t^{\frac{1}{n}}$ almashtirish bilan ushbu

$$\frac{1}{n}\int (a + bt)^p \cdot t^{\frac{m+1}{n}-1} dt = \frac{1}{n}\int (a + bt)^p \cdot t^q dt = \frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p \cdot t^{p+q} dt$$

ko'rinishga keladi. Agar keyingi integralda

$$z=\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}$$

almashtirish bajarilsa (s soni p ning maxraji), u ratsional funksiyaning integraliga keladi.

6- misol. Ushbu $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{2+3x^2}}$ integral hisoblansin.

◀ Ravshanki, $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{2+3x^2}}=\int x^{-2}(2+3x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$.

Demak, $m=-2,\ n=2,\ p=-\frac{1}{2},\ \frac{m+1}{n}+p=-1$

bo'lib, $p+q$ — butun son bo'ladi. Berilgan integralda

$$t=\left(\frac{2+3x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{x^2}+3}$$

almashtirish bajarib,

$$x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2-3}},\qquad dx=-\frac{\sqrt{2}tdt}{\sqrt{(t^2-3)^3}},$$

$$\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{2+3x^2}}=\int x^{-2}(2+3x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\int\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{t}{2}+C=-\frac{\sqrt{\frac{2}{x^2}+3}}{2}+C$$

bo'lishini topamiz. ▶

Mashqlar

1. Ushbu $\int\frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}$ integral hisoblansin.

2. Ushbu $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}$ integral hisoblansin.

8- B O B
ANIQ INTEGRAL

32- ma'ruza
Aniq integral tushunchasi

1°. Segmentni bo'laklash. Biror $[a, b] \subset R$ segment berilgan bo'lsin. Bu segmentning quyidagi

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ...x_{n-1} < x_n = b$$

munosabatda bo'lgan

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \tag{1}$$

nuqtalari to'plamini olaylik.

Ravshanki, (1) to'plam $[a, b]$ segmentni

$$B_1 = [x_0, x_1], \ B_2 = [x_1, x_2], \ ..., \ B_n = [x_{n-1}, x_n]$$

bo'laklarga ajratadi.

1- ta'rif. Ushbu

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

munosabatda bo'lgan

$$x_0, \ x_1, \ x_2, \ ..., \ x_{n-1}, \ x_n$$

nuqtalar to'plami $[a, b]$ *segmentni bo'laklash* deyiladi va

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

kabi belgilanadi. Bunda har bir x_k $(k = 0, 1, 2, ..., n)$ nuqta $[a, b]$ segmentning bo'luvchi nuqtasi, $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$ segment esa *P bo'laklashning oralig'i* deyiladi.

Quyidagi

$$\lambda_p = \max\{\Delta x_k\}, \ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

miqdor *P bo'laklashning diametri* deyiladi.

Masalan, $[a, b] = [0, 1]$ bo'lganda quyidagi

$$0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, \frac{10}{10} = 1;$$

$$0, \frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{10}{10} = 1$$

nuqtalar sistemasi [0, 1] segmentning

$$P_1 = \left\{0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 1\right\},$$

$$P_2 = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, 1\right\}$$

bo'laklashlarini hosil qiladi. Ularning diametrlari mos ravishda

$$\lambda_{P_1} = \frac{1}{5}, \quad \lambda_{P_2} = \frac{2}{5}$$

bo'ladi.

Yuqoridagi keltirilgan ta'rif va misollardan ko'rinadiki, $[a, b]$ segmentning turli usullar bilan istalgan sondagi bo'laklashlarini tuzish mumkin. Bu bo'laklashlardan iborat to'plamni $\mathcal{P}$ bilan belgilaymiz: $\mathcal{P} = \{P\}$.

2°. Darbu hamda integral yig'indilar. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. Unda

$$\exists m \in R, \ \exists M \in R, \ \ \forall x \in [a,b]: \ \ m \le f(x) \le M$$

bo'ladi. Aytaylik,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

$[a, b]$ segmentning biror bo'laklashi bo'lsin. U holda bu bo'laklashning har bir $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$ oralig'ida

$$m_k = \inf\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$M_k = \sup\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

mavjud bo'lib

$$\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \le m_k \le M_k \le \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \tag{2}$$

bo'ladi.

2- ta'rif. Ushbu $$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k$$

yig'indi $f(x)$ *funksiyaning* $[a, b]$ *segmentning* P *bo'laklashiga nisbatan Darbuning quyi yig'indisi* deyiladi.

Ravshanki, bu yig'indi $f(x)$ funksiyaga hamda $[a, b]$ ning P bo'laklashiga bog'liq bo'ladi:

$$s = s(f; P).$$

3- ta'rif. Ushbu

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

yig'indi $f(x)$ *funksiyaning* $[a, b]$ *segmentning P bo'laklashiga nisbatan Darbuning yuqori yig'indisi* deyiladi.

Bu yig'indi $f(x)$ funksiyaga hamda $[a, b]$ ning P bo'laklashiga bog'liq bo'ladi:

$$S = S(f; P).$$

Endi $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ ning har bir qiymatida $[x_k, x_{k+1}]$ segmentda ixtiyoriy ξ_k nuqtani tayinlaymiz: $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $(k=0, 1, 2, ..., n-1)$. Natijada $[a, b]$ ning P bo'laklashiga nisbatan

$$\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}\}$$

nuqtalar to'plami hosil bo'ladi. Bu nuqtalardagi $f(x)$ funksiyaning

$$f(\xi_k), \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

qiymatlari yordamida ushbu

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

yig'indini tuzamiz.

4- ta'rif. Quyidagi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

yig'indi $f(x)$ *funksiyaning* $[a, b]$ *segmentning P bo'laklashiga nisbatan integral yig'indisi* deyiladi.

Integral yig'indi, $f(x)$ funksiyaga, P bo'laklashga hamda har bir $[x_k, x_{k+1}]$ da olingan ξ_k nuqtalarga bog'liq bo'ladi:

$$\sigma = \sigma(f; P; \xi_k).$$

Ravshanki, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ uchun

$$m_k \le f(\xi_k) \le M_k$$

bo'lib, ayni paytda

$$s(f; P) \le \sigma(f; P; \xi_k) \le S(f; P) \tag{3}$$

tengsizliklar bajariladi.

1- misol. Ushbu

$$f(x) = |x|$$

funksiyaning $[-1, 1]$ segmentda quyidagi

$$P = \left\{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

bo‘laklashga nisbatan Darbu yig‘indilari hamda

$$\xi_k = x_k, \ (k = 0, 1, 2, ..., 7)$$

deb, integral yig‘indi topilsin.

◀ Berilgan $f(x) = |x|$ funksiya uchun $[-1, 1]$ segmentning

$$P = \left\{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

bo‘laklashida

$$m_0 = \frac{3}{4}, \ m_1 = \frac{1}{2}, \ m_2 = \frac{1}{4}, \ m_3 = 0,$$

$$m_4 = 0, \ m_5 = \frac{1}{4}, \ m_6 = \frac{1}{2}, \ m_7 = \frac{3}{4},$$

$$M_0 = 1, \ M_1 = \frac{3}{4}, \ M_2 = \frac{1}{2}, \ M_3 = \frac{1}{4},$$

$$M_4 = \frac{1}{4}, \ M_5 = \frac{1}{2}, \ M_6 = \frac{3}{4}, \ M_7 = 1$$

hamda

$$\xi_0 = -1, \ \xi_1 = -\frac{3}{4}, \ \xi_2 = -\frac{1}{2}, \ \xi_3 = -\frac{1}{4},$$

$$\xi_4 = 0, \ \ \xi_5 = \frac{1}{4}, \ \xi_6 = \frac{1}{2}, \ \xi_7 = \frac{3}{4},$$

$$f(\xi_0) = 1, \ f(\xi_1) = \frac{3}{4}, \ f(\xi_2) = \frac{1}{2}, \ f(\xi_3) = \frac{1}{4},$$

$$f(\xi_4) = 0, \ f(\xi_5) = \frac{1}{4}, \ f(\xi_6) = \frac{1}{2}, \ f(\xi_7) = \frac{3}{4}$$

bo‘ladi.

Endi $\Delta x_k = \frac{1}{4}$ $(k = 0, 1, 2, ..., 7)$ bo‘lishini e’tiborga olib topamiz:

$$s(f;P)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+0+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$S(f;P)=\left(1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1\right)\cdot\frac{1}{4}=5,$$

$$\sigma(f;P;\xi_k)=\left(1+3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}=1. \blacktriangleright$$

3°. Aniq integral ta'rifi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan va chegaralangan bo'lsin. Unda $[a, b]$ oraliqning har qanday P bo'laklashi hamda har qanday ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k=0,1,2,...,n-1$) larda yuqoridagi (2) va (3) munosabatlar o'rinli bo'lib,

$$(b-a)\cdot\inf_{[a,b]}\{f(x)\}\le s(f;P)\le\sigma(f;P;\xi_k)\le$$
$$\le S(f;P)\le(b-a)\cdot\sup_{[a,b]}\{f(x)\} \qquad (4)$$

bo'ladi.

Endi $[a, b]$ segmentning bo'laklashlar to'plami $\mathcal{P}=\{P\}$ ning har bir $P\in\mathcal{P}$ bo'laklashga nisbatan $f(x)$ funksiyaning Darbu yig'indilari $s(f, P)$ va $S(f, P)$ ni tuzib, ushbu

$$\{s(f;P)\},\ \{S(f;P)\}$$

to'plamlarni qaraymiz. Bu to'plamlar (4) munosabatga ko'ra chegaralangan bo'ladi.

5- ta'rif. $\{s(f, P)\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasi $f(x)$ *funksiyaning* $[a, b]$ *oraliqdagi quyi integrali* deyiladi va

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup_P\{s(f;P)\}.$$

6- ta'rif. $\{S(f, P)\}$ to'plamning aniq quyi chegarasi $f(x)$ *funksiyaning* $[a, b]$ *oraliqdagi yuqori integrali* deyiladi va

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P \{S(f;P)\}.$$

7- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning quyi hamda yuqori integrallari bir-biriga teng

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* $[a, b]$ *oraliq bo'yicha integrallanuvchi* (Riman ma'nosida integrallanuvchi) deyiladi.

Bunda quyi hamda yuqori integrallarning umumiy qiymati $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliq bo'yicha aniq integrali (Riman integrali) deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

a son integralning quyi chegarasi, b son esa integralning yuqori chegarasi, $[a, b]$ segment integrallash oralig'i deyiladi.

Eslatma. Yuqorida keltirilgan $f(x)$ funksiyaning integrali ta'rifiga binoan integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

o'zgarmas sonni ifodalaydi. Binobarin, integral ostida o'zgaruvchining qanday yozilishiga bog'liq bo'lmaydi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2- misol. $f(x) = C,\ C \in R,\ x \in [a,b]$ bo'lsin.

Bu funksiyaning integrallanuvchanligi aniqlansin.

◀ $[a, b]$ segmentning ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

bo'laklashini olib, unga nisbatan Darbu yig'indilarini topamiz:

$$s(C; P) = \sum_{k=0}^{n-1} C \cdot \Delta x = C \cdot (b - a),$$

$$S(C; P) = \sum_{k=0}^{n-1} C \cdot \Delta x_k = C \cdot (b - a).$$

Bundan
$$\sup_P \{s(C; P)\} = C \cdot (b - a),$$
$$\inf_P \{S(C; P)\} = C \cdot (b - a)$$

bo'lib, $\underline{\int_a^b} C \cdot dx = \overline{\int_a^b} C \cdot dx$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $f(x) = C$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b C \cdot dx = C \cdot (b - a).$$

Xususan, $f(x) = 1$ bo'lganda

$$\int_a^b dx = b - a$$

bo'ladi. ▶

3- misol. $f(x) = D(x)$, $x \in [0, 1]$ bo'lsin. Bu Dirixle funksiyasini $[0, 1]$ da integrallanuvchanlikka tekshirilsin.

◀ $[0, 1]$ segmentning ixtiyoriy P bo'laklashiga nisbatan Dirixle funksiyasining Darbu yig'indilari

$$s(D; P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k = 0,$$

$$S(D; P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k = b - a$$

bo'lib, $\sup_P \{s(D; P)\} = 0, \ \inf_P \{S(D; P)\} = b - a$

bo‘ladi. Demak,

$$\underline{\int_0^1} D(x)dx = 0, \quad \overline{\int_0^1} D(x)dx = b - a,$$

$$\underline{\int_0^1} D(x)dx \neq \overline{\int_0^1} D(x)dx.$$

Dirixle funksiyasi integrallanuvchi emas. ▶

4°. Integral yig‘indining limiti. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo‘lib, u shu segmentda chegaralangan bo‘lsin. $[a, b]$ segmentning biror

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

bo‘laklashini olamiz.

Ma’lumki, $f(x)$ funksiyaning bu bo‘laklashga nisbatan integral yig‘indisi

$$\sigma(f; P; \xi_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

bo‘ladi.

8- ta’rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $[a, b]$ segmentning diametri $\lambda_P < \delta$ bo‘lgan har qanday P bo‘laklashi uchun tuzilgan $\sigma(f; P; \xi_k)$ yig‘indi ixtiyoriy ξ_k nuqtalarda

$$|\sigma(f; P; \xi_k) - J| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k - J\right| < \varepsilon$$

tengsizlikni bajarsa, J son $\sigma(f; P; \xi_k)$ *yig‘indining* $\lambda_P \to 0$ *dagi limiti* deyiladi va

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(f; P; \xi_k) = J$$

kabi belgilanadi.

Bu ta’rifni quyidagicha ham aytish mumkin:

Agar

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists\delta > 0, \ \forall P \in \rho, \ \lambda_P < \delta, \forall\xi_k$$

uchun
$$|\sigma(f; P; \xi_k) - J| < \varepsilon$$

bo'lsa, u holda

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(f;P;\xi_k) = J$$

deyiladi.

9- ta'rif. Agar $\lambda_P \to 0$ da $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi $\sigma(f;P;\xi_k)$ chekli J limitga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi (Riman ma'nosida integrallanuvchi) deyiladi, J soniga esa $f(x)$ *funksiyaning* $[a, b]$ *segment bo'yicha aniq integrali* deyiladi. Uni

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

4- misol. $f(x) = x, \ \ x \in [a,b]$ bo'lsin. Bu funksiyaning aniq integrali topilsin.

◀ $[a, b]$ segmentning ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

bo'laklashini olib, unga nisbatan $f(x) = x$ funksiyaning integral yig'indisini tuzamiz:

$$\sigma(f;P;\xi_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k ,$$

bunda $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k , \ \ x_k \le \xi_k \le x_{k+1}, \ \ (k = 0, 1, 2, ..., n-1).$

Endi

$$x_k \le \xi_k \le x_{k+1}$$

tengsizliklarni $\Delta x_k > 0$ ga ko'paytirib, hosil bo'lgan

$$x_k \cdot \Delta x_k \le \xi_k \cdot \Delta x_k \le x_{k+1} \cdot \Delta x_k$$

tengsizliklarni k ning 0, 1, 2, ..., $n-1$ qiymatlari bo'yicha hadlab qo'shib:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k ,$$

ya'ni

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \le \sigma(f;P;\xi_k) \le \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k \qquad (3)$$

bo'lishini topamiz. Bu tengsizliklardagi

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k$$

yig'indilarni quyidagicha yozib olamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k{}^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(x_k + \Delta x_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2 =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2.$$

Natijada (3) tengsizliklar ushbu

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2 \le \sigma(f;P;\xi_k) \le \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2$$

ko'rinishga keladi. Bu munosabatdan

$$\left|\sigma(f;P;\xi_k) - \frac{b^2 - a^2}{2}\right| \le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2 \le \lambda_P \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \frac{b-a}{2}\lambda_P.$$

Demak, $\forall\varepsilon > 0$ songa ko'ra $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{b-a}$ deyilsa, u holda $\lambda_p < \delta$ bo'lgan ixtiyoriy P bo'laklash va ixtiyoriy ξ_k larda

$$\left|\sigma(x;P;\xi_k)-\frac{b^2-a^2}{2}\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\cdot\Delta x_k-\frac{b^2-a^2}{2}\right|<\varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\sigma(x;P;\xi_k)=\frac{b^2-a^2}{2}=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\cdot\Delta x_k=\frac{b^2-a^2}{2}$$

bo'lishini bildiradi. Demak,

$$\int_a^b x dx=\frac{b^2-a^2}{2}. \blacktriangleright$$

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning aniq integrali ikki xil ta'riflanadi. Bu ta'riflar ekvivalent ta'riflar bo'ladi (qaralsin [1], 9- bob).

Odatda, $[a, b]$ segment bo'yicha integrallanuvchi funksiyalar to'plami $R([a, b])$ kabi belgilanadi:

$f(x)\in R([a,b]) \Leftrightarrow f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi.

Mashqlar

1. $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ da chegaralanganligi uning $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'lishining zaruriy sharti ekani isbotlansin.

2. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da berilgan va chegaralangan bo'lib, P esa $[a, b]$ ning ixtiyoriy bo'laklashi bo'lsin. Agar $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)\le g(x)$ bo'lsa,

$$s(f,p)\le s(g,p)$$
$$S(f,p)\le S(g,p)$$

bo'lishi isbotlansin.

33- ma'ruza

Funksiyaning integrallanuvchanlik mezoni (kriteriysi)

1°. Darbu yig'indilarining xossalari. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan va chegaralangan bo'lib,

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n\}$$

$[a, b]$ ning biror bo'laklashi bo'lsin. Ravshanki, bu holda $f(x)$ funksiyaning Darbu yig'indilari

$$s(f, P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k,$$

$$S(f; P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

mavjud bo'ladi, bunda

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, \; x_{k+1}], \\ M_k &= \sup\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \\ \Delta x_k &= x_{k+1} - x_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

1) $[a, b]$ segmentning ixtiyoriy P bo'laklashiga nisbatan tuzilgan $f(x)$ funksiyaning Darbu yig'indilari uchun

$$(b-a)\cdot \inf_{[a,b]}\{f(x)\} \le s(f; P) \le S(f; P) \le (b-a)\cdot \sup_{[a,b]}\{f(x)\}$$

bo'ladi.

◀ Bu munosabat 32- ma'ruzadagi (3) tengsizliklardan kelib chiqadi. ▶

Aytaylik, $\qquad P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$

$[a, b]$ segmentning biror bo'laklashi bo'lsin. Bu bo'laklashning bo'luvchi nuqtalari x_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ qatoriga yangi bo'luvchi nuqtalarni qo'shib, $[a, b]$ segmentning boshqa P' bo'laklashini hosil qilamiz. Uni $P \subset P'$ kabi belgilaymiz.

2) $[a, b]$ segmentining ixtiyoriy P va P' bo'laklashlari uchun

$$\begin{aligned} s(f; P) &\le s(f; P'), \\ S(f; P) &\ge S(f; P') \end{aligned}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

◀ $[a, b]$ segmentning ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

bo'laklashini olaylik. Soddalik uchun P' bo'laklash P ning barcha bo'luvchi nuqtalari hamda qo'shimcha bitta x' nuqtadan yuzaga kelgan bo'lsin. Bu x' nuqta x_k hamda x_{k+1} nuqtalar orasida joylashsin:

$$x_k < x' < x_{k+1}.$$

Demak,

$$P' = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_k, x', x_{k+1}, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

Bu bo‘laklashlarga nisbatan Darbuning quyi yig‘indilarini yozamiz:

$$s(f;P) = m_0\Delta x_0 + m_1\Delta x_1 + ... + m_k\Delta x_k + ... + m_{n-1}\Delta x_{n-1},$$
$$s(f;P') = m_0\Delta x_0 + m_1\Delta x_1 + ...$$
$$... + \left[m_k^{\text{I}} \cdot (x^{\text{I}} - x_k) + m_k^{\text{II}} \cdot (x_{k+1} - x^{\text{I}})\right] + ... + m_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1},$$

bunda

$$m_k^{\text{I}} = \inf\{f(x)\},\ \ x \in [x_k, x'],$$
$$m_k^{\text{II}} = \inf\{f(x)\},\ \ x \in [x', x_{k+1}].$$

Endi $m_k^{\text{I}} \geq m_k$, $m_k^{\text{II}} \geq m_k$ bo‘lishini e’tiborga olib topamiz:

$$s(f;P') - s(f;P) = m_k^{\text{I}}(x' - x_k) + m_k^{\text{II}}(x_{k+1} - x') -$$
$$-m_k\Delta x_k \geq m_k(x' - x_k) + m_k(x_{k+1} - x') - m_k\Delta x_k = 0.$$

Keyingi munosabatdan

$$s(f;P) \leq s(f;P')$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Xuddi shunga o‘xshash,

$$S(f;P) \geq S(f;P')$$

bo‘lishi isbotlanadi. ▶

3) $[a, b]$ ning ixtiyoriy P_1 va P_2 ($P_1 \subset \mathcal{P}$, $P_2 \subset \mathcal{P}$) bo‘laklashlarga nisbatan Darbu yig‘indilari uchun

$$s(f;P_1) \leq S(f;P_2)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

◀ P_1 va P_2 bo‘laklashlarning barcha bo‘luvchi nuqtalari yordamida $[a, b]$ ning P' bo‘laklashini hosil qilamiz. Ravshanki,

$$P_1 \subset P', \quad P_2 \subset P'$$

bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan 1- va 2-xossalardan foydalanib topamiz:

$$s(f;P_1) \leq s(f;P') \leq S(f;P') \leq S(f;P_2). \ ▶$$

Natija. $[a, b]$ segmentda chegaralangan ixtiyoriy funksiya uchun

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

bo‘ladi.

◀ Shartga ko‘ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralangan. Demak,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P\{s(f;P)\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P\{S(f;P)\}$$

integrallar mavjud.

Yuqoridagi 3- xossa hamda aniq chegara ta’riflaridan

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ▶

2°. Integrallanuvchanlik mezoni (kriteriysi). Endi $[a, b]$ segmentda berilgan va chegaralangan $f(x)$ funksiya aniq integralining mavjudligi masalasini qaraymiz.

1- teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi bo‘lishi uchun $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham $[a, b]$ segmentning shunday P bo‘laklashi topilib, unga nisbatan

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Bu teorema quyidagicha ham ifodalanishi mumkin:

$$f(x) \in R([a,b]) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists P \in \{P\}:\ S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

◀ ***Zarurligi.*** Aytaylik, $f(x) \in R([a,b])$ bo‘lsin. Ta’rifga binoan

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

bo‘ladi.

Ixtiyoriy musbat ε sonni olaylik. Unda quyi va yuqori integral-larning ta'riflariga ko'ra

$$\exists P_1 \in \{P\}: \quad \int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx - s(f;P_1) < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\exists P_2 \in \{P\}: \quad S(f;P_2) - \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi.

Endi $[a, b]$ segmentning P_1 va P_2 bo'laklashlarning barcha bo'luvchi nuqtalaridan $[a, b]$ ning P bo'laklashini hosil qilamiz.

Ravshanki, $P_1 \subset P_2$, $P_2 \subset P$ bo'ladi. Darbu yig'indilarining 1- va 2- xossalaridan foydalanib P bo'laklash uchun

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f;P_1) \le s(f;P) \le S(f;P) \le S(f;P_2) < \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'lishini topamiz.

Keyingi munosabatlardan

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Aytaylik,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P \in \{P\}: \quad S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

bo'lsin. Unda yuqorida keltirilgan natijaga ko'ra

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx$$

bo'lib,
$$s(f;P) \le \int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx \le S(f;P)$$

bo'ladi. Bu tengsizliklardan

$$0 \le \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx - \int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx \le S(f;P) - s(f;P)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\forall\varepsilon > 0: \quad 0 \le \int_a^{\bar{b}} f(x)dx - \int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx < \varepsilon .$$

Keyingi tengsizlikdan topamiz:

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx .$$

Demak, $f(x) \in R([a,b])$.

(Aniq integralning mavjudligi haqidagi teoremani quyidagicha ifodalasa ham bo‘ladi:

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi bo‘lishi uchun $\forall\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilib, $[a, b]$ segmentni diametri $\lambda_P < \delta$ bo‘lgan har qanday P bo‘laklashga nisbatan

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.)

Avvalgidek, $f(x)$ funksiyaning $[x_k, x_{k+1}]$, $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$ oraliqdagi tebranishini ω_k orqali belgilaymiz. U holda

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k$$

bo‘lib, 1-teorema quyidagicha ifodalanadi:

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi bo‘lishi uchun $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham $[a, b]$ segmentning shunday P bo‘laklashi topilib, unga nisbatan

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Demak,

$$f(x) \in R([a,b]) \Leftrightarrow \forall\varepsilon \in 0, \ \exists P \in \{P\}: \ \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \varepsilon .$$

Mashqlar

1. $[a, b]$ segmentning ixtiyoriy bo'laklashi uchun

$$s(\alpha f(x)+\beta; P) = \alpha s(f; P) + \beta(b-a),$$
$$S(\alpha f(x)+\beta; P) = \alpha S(f; P) + \beta(b-a)$$

bo'lishi isbotlansin, bunda $\alpha, \beta \in R$.

2. Agar $f(x) \in C[a,b]$ bo'lsa, u holda $[a, b]$ ning ixtiyoriy bo'laklashi uchun Darbuning quyi va yuqori yig'indilari $f(x)$ funksiyaning integral yig'indilari bo'lishi isbotlansin.

34- ma'ruza

Integrallanuvchi funksiyalar sinfi

1°. Uzluksiz funksiyalarning integrallanuvchanligi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

1- teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz bo'lsa, u shu $[a, b]$ da integrallanuvchi, ya'ni

$$C[a,b] \subset R([a,b])$$

bo'ladi.

◀ Modomiki, $f(x) \in C[a,b]$ ekan, u Kantor teoremasiga ko'ra $[a, b]$ oraliqda tekis uzluksiz bo'ladi. Kantor teoremasining natijasiga ko'ra, $\forall\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $[a, b]$ oraliqni uzunliklari δ dan kichik bo'lgan bo'laklarga ajratilganda har bir bo'lakdagi funksiyaning tebranishi

$$\omega_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

bo'ladi. Unda $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda_P < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklashda

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $f(x) \in R([a,b])$. ▶

2°. Monoton funksiyalarning integrallanuvchanligi.

2- teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda chegaralangan va monoton bo'lsa, u shu segmentda integrallanuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda o'suvchi bo'lib, $f(a) < f(b)$ bo'lsin.

$\forall\varepsilon > 0$ sonni olib, unga ko'ra $\delta > 0$ ni

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

deymiz. U holda $[a, b]$ segmentning diametri $\lambda_P < \delta$ bo'lgan ixtiyoriy P bo'laklash uchun

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{k+1}) - f(x_k)]\cdot\Delta x_k \le$$

$$\le \lambda_P\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{k+1}) - f(x_k)] = \lambda_P\cdot[f(b) - f(a)] < \frac{\varepsilon}{f(b-f(a)}\cdot[f(b) - f(a)] = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $f(x) \in R([a,b])$. ▶

3°. Uziladigan funksiyalarning integrallanuvchanligi.

3- teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda chegaralangan va shu segmentning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralangan bo'lsin. Demak,

$$\exists C \in R,\ \ \forall x \in [a,b]:\ \ |f(x)| \le C,\ \ (C > 0)$$

bo'ladi.

Soddalik uchun, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentning faqat bitta x^* $(x^* \in [a,b])$ nuqtasida uzilishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarda uzluksiz bo'lsin. $\forall\varepsilon > 0$ sonni olib, unga ko'ra $\delta > 0$ sonni

$$\delta = \frac{\varepsilon}{16C}$$

deymiz.

x^* nuqtaning δ atrofi $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ ni olib, ushbu

$$[a,b] \setminus (x^* - \delta, x^* + \delta)$$

to'plamni qaraymiz. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lib, Kantor teoremasiga binoan u tekis uzluksiz bo'ladi. U holda shunday $\gamma > 0$ son topiladiki,

$$\forall x', x'' \in [a, x^* - \delta],\ \ (\forall x', x'' \in [x^* + \delta, b])$$

lar uchun $|x' - x''| < \gamma$ bo'lishidan

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $[a, b]$ segmentni diametri $\lambda_P < \min(\delta, \gamma)$ bo'lgan ixtiyoriy P bo'laklashini olib, unga nisbatan

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k \tag{1}$$

yig'indini tuzamiz. Bu yig'indining har bir hadida $[x_k, x_{k+1}]$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ oraliqlarning Δx_k uzunliklari qatnashadi.

(1) yig'indining ushbu

$$[x_k, x_{k+1}] \cap (x^* - \delta, x^* + \delta) = \varnothing$$

munosabat bajariladigan $[x_k, x_{k+1}]$ ga mos hadlaridan tuzilgan yig'indini

$$\sum_k{}' \omega_k \cdot \Delta x_k$$

bilan, qolgan barcha hadlardan (bunday hadlar uchun

$$[x_k, x_{k+1}] \cap (x^* - \delta, x^* + \delta) \neq \varnothing$$

yoki $$[x_k, x_{k+1}] \cap \{x^* - \delta\} \neq \varnothing,$$

yoki $$[x_k, x_{k+1}] \cap \{x^* + \delta\} \neq \varnothing$$

bo'ladi) tashkil topgan yig'indini

$$\sum_k{}'' \omega_k \cdot \Delta x_k$$

bilan belgilaymiz. Natijada

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k = \sum_k{}' \omega_k \cdot \Delta x_k + \sum_k{}'' \omega_k \cdot \Delta x_k$$

bo'lib, tenglikning o'ng tomondagi qo'shiluvchilar uchun

$$\sum_k{}' \omega_k \cdot \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_k{}' \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_k{}'' \omega_k \cdot \Delta x_k \le 2C \cdot \sum_k{}'' \Delta x_k \le 2 \cdot C \cdot 4\delta = 8C \cdot \frac{\varepsilon}{16} = \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi. Demak,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bu esa $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ da integrallanuvchi ekanini bildiradi. ▶

Mashqlar

1. Aytaylik,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{agar } 0 < x \le 1 \text{ bo'lsa}, \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lsin. $f(x) \in R([0,1])$ bo'lishi isbotlansin.

2. $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'lib, uning qiymatlari $[c, d]$ ga tegishli bo'lsin. Agar $\varphi(y)$ funksiya $[c, d]$ da uzluksiz bo'lsa, u holda murakkab funksiya $\varphi(f(x))$ning $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'lishi isbotlansin.

35- ma'ruza

Aniq integralning xossalari

1°. Integralning chiziqlilik hamda additivlik xossalari.

1- xossa. Agar $f(x) \in R([a,b])$ va $C \in R$ bo'lsa, u holda $(C \cdot f(x)) \in R([a,b])$ bo'lib,

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

◀ $f(x) \in R([a,b])$ va $C \in R$ bo'lsin. Aniq integral ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sigma(f, P, \xi_k) = \int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\sigma(C \cdot f(x; P; \xi_k)) = C\sigma(f; P; \xi_k),$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(C \cdot f(x; P; \xi_k)) = C \cdot \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(f, P, \xi_k).$$

Demak,

$$(C \cdot f(x)) \in R([a,b])$$

va

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

2- xossa. Agar

$$f(x) \in R([a,b]),\ g(x) \in R([a,b])$$

bo'lsa, u holda

$$(f(x) + g(x)) \in R([a,b])$$

bo'lib,

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi (additivlik xossasi).

◀ Aniq integral ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(f, P, \xi_k) = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(g, P, \xi_k) = \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\sigma(f + g, P, \xi_k) = \sigma(f, P, \xi_k) + \sigma(g, P, \xi_k).$$

Limitga ega bo'lgan funksiyalar haqidagi teoremadan foydalanib, $(f(x) + g(x)) \in R([a,b])$ va

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

bo'lishini topamiz. ▶

3- xossa. Agar

$$f(x) \in R([a,c]),\ f(x) \in R([c,b]),$$

bo‘lsa, u holda

$$f(x) \in R([a,b])$$

bo‘lib,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

ifodaga ega bo‘lamiz.

◀ Aytaylik, $a < c < b$ bo‘lib, $f(x) \in R([a,c])$ va $f(x) \in R([c,b])$ bo‘lsin. U holda $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham $[a, c]$ oraliqning $\lambda_{P_1} < \delta_1$ bo‘lgan P_1 bo‘laklashi topiladiki,

$$S(f;P_1) - s(f;P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

bo‘ladi. Shuningdek, $[c, b]$ oraliqning $\lambda_{P_2} < \delta_2$ bo‘lgan bo‘laklashi topiladiki,

$$S(f;P_2) - s(f;P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo‘ladi.

Endi $[a, b]$ oraliqning diametri $\lambda_{P_3} < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ bo‘lgan ixtiyoriy P_3 bo‘laklashini olamiz. Bu P_3 bo‘laklashning bo‘luvchi nuqtalari qatoriga c nuqtani qo‘shib, $[a, b]$ ning yangi P bo‘laklashini hosil qilamiz. Unga nisbatan $f(x)$ funksiyaning Darbu yig‘indilari

$$S(f;P),\ s(f;P)$$

bo‘lsin.

P bo‘laklashning $[a, c]$ va $[c, b]$ dagi bo‘luvchi nuqtalari mos ravishda ularning P_1' hamda P_2' bo‘laklashlarini yuzaga keltiradi. Ravshanki, bu P_1' hamda P_2' bo‘laklashlarga nisbatan quyidagi tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$S(f;P_1') - s(f;P_1') < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S(f;P_2') - s(f;P_2') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ayni paytda,

$$S(f;P)=S(f;P_1')+S(f;P_2'),$$
$$s(f;P)=s(f;P_1')+s(f;P_2')$$

bo‘ladi. Bu munosabatlardan

$$S(f;P)-s(f;P)=(S(f;P_1')-s(f;P_1'))+$$
$$+(S(f;P_2')-s(f;P_2'))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $f(x)\in R([a,b])$.

$f(x)$ funksiyaning $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$ oraliqlar bo‘yicha P bo‘laklashga nisbatan integral yig‘indilari

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k,\quad \sum_{[a,c]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k,\quad \sum_{[c,b]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

bo‘lib,

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{[a,c]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k+\sum_{[c,b]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

bo‘ladi. Integral ta’rifidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Shunga o‘xshash $c<a<b$, $a<b<c$ bo‘lgan hollarda ham xossaning o‘rinli bo‘lishi isbotlanadi. ▶

4- xossa. Agar $f(x)\in R([a,b])$, $g(x)\in R([a,b])$ bo‘lsa, u holda $f(x)\cdot g(x)\in R([a,b])$ bo‘ladi.

◀ Modomiki, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da integrallanuvchi ekan, unda

$$S(f;P)-s(f;P)<\frac{\varepsilon}{2M'},\quad (M'=\sup f(x),\ \ x\in[a,b])$$

$$S(g;P)-s(g;P)<\frac{\varepsilon}{2M},\quad (M=\sup g(x),\ \ x\in[a,b])$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $\forall x \in [a,b]$ da $f(x) \geq 0$, $q(x) \geq 0$ bo'lsin. U holda $\forall x \in [x_k; x_{k+1}]$ uchun

$$0 \leq m_k \leq f(x) \leq M'_k, \quad m_k = \inf f(x), \quad M'_k = \sup f(x);$$

$$0 \leq m'_k \leq g(x) \leq M_k, \quad m'_k = \inf g(x), \quad M_k = \sup g(x)$$

bo'lib, ulardan

$$0 \leq m_k \cdot m'_k \leq f(x) \cdot g(x) \leq M_k \cdot M'_k$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ayni paytda,

$$m_k^0 = \inf\{f(x) \cdot g(x)\}, \quad M_k^0 = \sup\{f(x) \cdot g(x)\}$$

lar uchun

$$m_k \cdot m'_k \leq m_k^0 \leq M_k^0 \leq M_k \cdot M'_k$$

bo'lib,

$$M_k^0 - m_k^0 \leq M_k \cdot M'_k - m_k \cdot m'_k = M'_k(M_k - m_k) + m_k(M'_k - m'_k)$$

bo'ladi.

Endi $M \geq M_k$, $M' \geq M'_k$ ekanini etiborga olib, topamiz;

$$S(f \cdot g; P) - s(f \cdot g; P) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(M_k^0 - m_k^0\right) \leq$$

$$\leq M' \cdot \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k) \cdot \Delta x_k + M \cdot \sum_{k=0}^{n-1}(M'_k - m'_k) =$$

$$= M'\left(S(f;P) - s(f;P)\right) + M'\left(S(g;P) - s(g;P)\right) <$$

$$< M' \frac{\varepsilon}{2M'} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon.$$

Demak, bu holda $f(x) \cdot g(x) \in R([a,b])$.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da ixtiyoriy integrallanuvchi funksiyalar bo'lsin.

Ravshanki, $\forall x \in [a,b]$ da

$$f(x) - \inf f(x) = f(x) - m \geq 0,$$

$$g(x) - \inf g(x) = g(x) - m' \geq 0$$

bo'ladi.

Endi $f(x)\cdot g(x)$ funksiyani quyidagicha yozib olamiz:

$$f(x)\cdot g(x)=\left(f(x)-m\right)\left(g(x)-m'\right)+mg(x)+m'f(x)-mm'.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi har bir qo'shiluvchi $[a,\ b]$ da integrallanuvchi bo'lganligi sababli $f(x)\cdot g(x)$ ham $[a,\ b]$ da integrallanuvchi bo'ladi. ▶

Natija. Agar $f(x)\in R([a,b])$ bo'lsa, u holda $[f(x)]^n\in R([a,b])$ bo'ladi, bunda $n\in N$.

2°. Integralning tengsizliklar bilan bog'langan xossalari.

1-xossa. Agar $f(x)\in R([a,b])$ bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)\geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0$$

bo'ladi.

◀ Integralning ta'rifiga ko'ra

$$\lambda_P\to 0 \text{ da } \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\to\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi. U holda, $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)\geq 0$ bo'lishidan

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\geq 0$$

bo'lib, undan
$$\int_a^b f(x)dx\geq 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

1-natija. Agar $f(x)\in R([a,b])$, $g(x)\in R([a,b])$ bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)\leq g(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

◀ Ravshanki,

$f(x) \in R([a,b]),\ \ g(x) \in R([a,b]) \Rightarrow (g(x) - f(x)) \in R([a,b])$
bo'lib,

$$g(x) - f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b (g(x) - f(x))dx \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi. ▶

2- natija. Agar $f(x) \in R([a,b])$, $g(x) \in R([a,b])$ bo'lsa, u holda

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \qquad (2)$$

bo'ladi.

◀ Ixtiyoriy $\alpha \in R$ uchun

$$\int_a^b (f(x) - \alpha \cdot g(x))^2\, dx \ge 0$$

bo'lib,

$$\alpha^2 \int_a^b g^2(x)dx - 2\alpha \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \ge 0$$

bo'ladi. Kvadrat uchhadning diskriminanti musbat bo'lmaganligi sababli

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \le 0,$$

ya'ni

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

bo'ladi. ▶

(2) tengsizlik *Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi* deyiladi.

2- xossa. Agar $f(x) \in R([a,b])$ bo'lsa, $|f(x)| \in R([a,b])$ bo'lib,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

bo'ladi.

◀ $f(x) \in R([a,b])$ bo'lsin. Integrallanuvchanlik mezoniga ko'ra, $\forall\varepsilon > 0$ olinganda ham $[a, b]$ segmentning shunday P bo'laklashi topiladiki, unga nisbatan

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$$

bo'ladi, bunda ω_k – $f(x)$ funksiyaning $[x_k, x_{k+1}]$ dagi tebranishi.

Ravshanki, $\forall x', x'' \in [a,b]$ uchun

$$\big||f(x')| - |f(x'')|\big| \le |f(x') - f(x'')|$$

bo'lib, undan

$$\sup\big||f(x')| - |f(x'')|\big| \le \sup|f(x') - f(x'')|$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\omega_k' \le \omega_k$$

bo'ladi, bunda ω_k' – $|f(x)|$ funksiyaning $[x_k, x_{k+1}]$ dagi tebranishi. Shularni e'tiborga olib,

$$S(|f|;P) - s(|f|;P) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k' \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \varepsilon$$

bo'lishini topamiz. Demak, $|f(x)| \in R([a,b])$.

$f(x)$ va $|f(x)|$ funksiyalarning integral yig'indilari uchun

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \cdot \Delta x_k$$

bo'lib, $\lambda_p \to 0$ da limitga o'tish natijasida

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

3°. O'rta qiymat haqidagi teoremalar. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ da berilgan va chegaralangan bo'lsin. U holda $m = \inf\{f(x)\}$, $M = \sup\{f(x)\}$, $(x \in [a,b])$ mavjud va $\forall x \in [a,b]$ uchun

$$m \le f(x) \le M$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

1- teorema. Agar $f(x) \in R([a,b])$ bo'lsa, u holda shunday o'zgarmas μ $(m \le \mu \le M)$ son mavjudki,

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \cdot (b-a)$$

bo'ladi.

◄ Ravshanki,

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow \int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Keyingi tengsizliklardan

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

deyilsa, undan

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \cdot (b-a)$$

bo'lishini topamiz. ▶

3- natija. Agar $f(x) \in C[a,b]$ bo'lsa, u holda shunday $\theta \in [a,b]$ topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = f(\theta) \cdot (b-a)$$

bo'ladi.

◀ Bu tasdiq yuqoridagi teorema va uzluksiz funksiyaning xossasidan kelib chiqadi. ▶

2- teorema. Agar $f(x) \in R([a,b])$, $g(x) \in R([a,b])$ bo'lib, $[a,\ b]$ da $g(x)$ funksiya o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda shunday o'zgarmas μ son $(m \le \mu \le M)$ mavjudki,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \tag{3}$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik, $\forall x \in [a,b]$ da $g(x) \ge 0$ bo'lsin. Unda ravshanki,

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow mg(x) \le f(x) \cdot g(x) \le Mg(x)$$

bo'ladi.

Bu munosabatdan hamda aniq integral xossalaridan foydalanib topamiz:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx.$$

a) $\int_a^b g(x)dx = 0$ bo'lsin. U holda

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

bo'lib, ixtiyoriy μ $(m \le \mu \le M)$ da (3) o'rinli bo'ladi.

b) $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$ bo'lsin. U holda

$$m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \le M$$

bo'lib,

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}$$

deyilsa, undan $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

4- natija. Agar $f(x) \in C[a,b]$ bo'lib, $g(x) \in R([a,b])$ va $g(x)$ funksiya $[a, b]$ da o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda shunday $\theta \in [a,b]$ topiladiki,

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\theta)\int\limits_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

Mashqlar

1. Ushbu $\frac{\pi}{4} \le \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}dx \le \frac{\pi\cdot\sqrt{6}}{8}$ tengsizlik isbotlansin.

2. Ushbu $\int\limits_a^b \frac{|x|}{x}dx = |b|-|a|$ tenglik isbotlansin.

3. $f(x) \in C((-\infty, +\infty))$ bo'lib, u $T\,(T \neq 0)$ davrli funksiya bo'l-sin. U holda $\forall a \in R$ uchun

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

bo'lishi isbotlansin.

36- ma'ruza

Chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar

1°. Ba'zi ma'lumotlar. Quyidagilarni ta'rif hamda kelishuv sifatida qaraymiz:

1) Ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uchun

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,.$$

2) $f(x) \in R([a,b])$ va $a < b$ bo'lganda

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

1- teorema. Agar $f(x) \in R([a,b])$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ uchun $f(x) \in R([\alpha,\beta])$ bo'ladi.

◀ $f(x) \in R([a,b])$ bo'lib, $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ bo'lsin. Integrallanuvchanlik mezoniga ko'ra, $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham $[a, b]$ oraliqning shunday P bo'laklashi topiladiki, unga nisbatan

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

bo'ladi.

P bo'laklashning bo'luvchi nuqtalari $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ qatoriga α va β nuqtalarni qo'shib, $[a, b]$ oraliqning yangi P' bo'laklashini hosil qilamiz. Ravshanki, $P \subset P'$ bo'ladi.

Darbu yig'indilarining xossasiga ko'ra

$$s(f;P) \leq s(f;P'),$$

$$S(f;P) \geq S(f;P')$$

bo'lib,

$$S(f;P') - s(f;P') < \varepsilon$$

bo'ladi.

P' bo'laklashning $[\alpha, \beta]$ dagi bo'luvchi nuqtalarini shu oraliqning bo'luvchi nuqtalari sifatida qarab, $[\alpha, \beta]$ oraliqning P_1 bo'laklashini hosil qilamiz. Bu bo'laklashga nisbatan $f(x)$ funksiyaning Darbu yig'indilarini tuzamiz:

$$S(f;P_1), \quad s(f;P_1).$$

Natijada

$$S(f;p') - s(f;p') = \sum_{[a,b]} (M_k - m_k)\Delta x_k,$$

$$S(f;p_1) - s(f;p_1) = \sum_{[\alpha,\beta]} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

bo'lib, ulardan

$$S(f;P_1) - s(f;P_1) \leq S(f;P') - s(f;P')$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$S(f;P_1) - s(f;P_1) < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $f(x) \in R([\alpha, \beta])$ ekanini bildiradi. ▶

2°. Chegaralari o'zgaruvchi aniq integrallar. Aytaylik, $f(x) \in R([a,b])$ bo'lsin. U holda yuqorida keltirilgan teoremaga ko'ra $f(x) \in R([a,x])$, $a \leq x \leq b$ bo'lib, funksiyaning $[a, x]$ oraliq bo'yicha aniq integrali x ga bog'liq bo'ladi:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad (x \in [a,b], \quad F(a) = 0).$$

2- teorema. Agar $f(x) \in R([a,b])$ bo'lsa, $F(x) \in C[a,b]$ bo'ladi.

◀ $f(x) \in R([a,b])$ bo'lsin. $[a, b]$ oraliqdan ixtiyoriy x', x'' nuqtalarni olib,

$$F(x') - F(x'')$$

ayirmani qaraymiz. Ravshanki,

$$F(x')-F(x'')=\int_a^{x'}f(t)dt-\int_a^{x''}f(t)dt=\int_{x''}^{x'}f(t)dt.$$

Bu tenglikdan topamiz:

$$|F(x')-F(x'')|=\left|\int_{x''}^{x'}f(t)dt\right|\le\int_{x''}^{x'}|f(t)|\,dt\le$$

$$\le\sup_{[a,b]}|f(t)|\cdot\left|\int_{x''}^{x'}dt\right|=\sup_{[a,b]}|f(t)|\cdot|x'-x''|.$$

Demak, $\forall\varepsilon>0$ ga ko'ra, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\sup\limits_{[a,b]}|f(t)|}$ deyilsa, u holda $|x'-x''|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x',\ x''\in[a,\ b]$ uchun

$$|F(x')-F(x'')|=\sup_{[a,b]}|f(t)|\cdot|x'-x''|<\sup_{[a,b]}|f(t)|\cdot\delta=$$

$$=\sup_{[a,b]}|f(t)|\cdot\frac{\varepsilon}{\sup\limits_{[a,b]}|f(t)|}=\varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $F(x)$ funksiyaning $[a,\ b]$ da uzluksiz bo'lishini bildiradi. Demak, $F(x)\in C[a,b]$. ▶

3- teorema. Agar $f(x)\in C[a,b]$ bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya $[a,\ b]$ da hosilaga ega bo'lib,

$$F'(x)=f(x)$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik, $f(x)\in C[a,b]$ bo'lib, $x\in[a,b]$, $x+\Delta x\in[a,b]$ bo'lsin. Aniq integralning xossalaridan foydalanib topamiz:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)\,dt\right]=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt.$$

O'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib, ushbu

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x+\theta\cdot\Delta x),\ \ (0<\theta<1)$$

tenglikka kelamiz.

Keyingi tenglikda, $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib

$$F'(x) = f(x)$$

bo'lishini topamiz. ▶

Natija. Agar $f(x)\in C[a,b]$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

◀ Bu tasdiq yuqoridagi 3- teoremadan kelib chiqadi. Bunda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

bo'ladi. ▶

Faraz qilaylik, $f(x)\in R([a,b])$ bo'lsin. U holda $f(x)\in R([x,b])$, $a\le x\le b$ bo'lib, funksiyaning $[x,\ b]$ oraliq bo'yicha aniq integrali x ga bog'liq bo'ladi:

$$\Phi(x) = \int_x^b f(t)dt,\ \ (x\in[a,b],\ \ \Phi(b)=0).$$

Aniq integral xossasidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt = F(x)+\Phi(x),\ \ (x\in[a,b]).$$

Bu tenglikdan

$$\Phi(x) = \int_a^b f(x)dx - F(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Keyingi tenglik, $\Phi(x)$ funksiyaning xossalarini $f(x)$ hamda $F(x)$ funksiyalarning xossalari orqali o'rganish mumkinligini ko'rsatadi.

Jumladan, $f(x)\in C[a,b]$ bo'lsa, u holda

$$\Phi'(x) = -f(x)$$

bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham,

$$\Phi'(x)=\left(\int_x^b f(t)dt\right)'=\left(\int_a^b f(t)dt-F(x)\right)'=-F'(x)=-f(x). \ ▶$$

Mashqlar

1. Agar $$F(x)=\int_{-1}^{x}\sin x dx,\quad x\in[-1,1]$$

bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada hosilasi mavjud emasligi isbotlansin.

2. Ushbu $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t\operatorname{arctg} t}{1+t}dt$ limit hisoblansin.

(K o ' r s a t m a . Lopital qoidasidan foydalaning.)

37- ma'ruza

Aniq integralni hisoblash

1°. Aniq integralni ta'rifiga ko'ra hisoblash. Aytaylik, $f(x)\in$ $\in R([a,b])$ bo'lsin. Unda integral ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

1- misol. Ushbu $\int_a^b \sin x\, dx$ integral hisoblansin.

◀ Ravshanki, $f(x)=\sin x\in C[a,b]$. Demak, $f(x)\in R([a,b])$. $[a, b]$ oraliqni ushbu

$$a, a+\alpha_n, a+2\alpha_n, ..., a+k\alpha_n, ..., a+n\alpha_n=b$$

nuqtalar yordamida (bunda $\alpha_n=\frac{b-a}{n}$) n ta teng bo'lakka bo'lib, har bir

$$[a+k\alpha_n, a+(k+1)\alpha_n], \quad (k=0,1,2,...,n-1)$$

bo'lakda ξ_k nuqtani quyidagicha tanlaymiz:

$$\varepsilon_k = a+(k+1)\alpha_n, \quad (k=0,1,2,...,n-1).$$

U holda $f(x)=\sin x$ funksiyaning integral yig'indisi quyidagicha

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+(k+1)\alpha_n)\cdot\alpha_n = \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+(k+1)\alpha_n)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ma'lumki,

$$\sin(a+(k+1)\alpha_n) = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha_n}{2}} 2\sin\frac{\alpha_n}{2}\sin(a+(k+1)\alpha_n) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha_n}{2}}\left[\cos\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_n\right) - \cos\left(a+\left(k+\frac{3}{2}\right)\alpha_n\right)\right]$$

bo'ladi. Natijada integral yig'indi uchun ushbu

$$\sigma = \frac{\alpha_n}{2\sin\frac{\alpha_n}{2}} \sum_{k=0}^{n-1}\left[\cos\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_n\right) - \cos\left(a+\left(k+\frac{3}{2}\right)\alpha_n\right)\right] =$$

$$= \frac{\frac{\alpha_n}{2}}{\sin\frac{\alpha_n}{2}}\left(\cos\left(a+\frac{1}{2}\alpha_n\right) - \cos\left(b+\frac{1}{2}\alpha_n\right)\right)$$

tenglikka kelamiz.

Keyingi tenglikda $\lambda_P = \Delta x_k = \alpha_n \to 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b. \blacktriangleright$$

2°. Nyuton–Leybnits formulasi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan va shu segmentda uzluksiz bo'lsin. U holda $f(x)$ boshlang'ich funksiya

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

ga ega bo'ladi.

Ravshanki, $\Phi(x)$ funksiya $f(x)$ ning ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda

$$\Phi(x)=F(x)+C,\ (C=\text{const})$$

bo'ladi.

Bu tenglikda avval $x=a$ deb,

$$\Phi(a)=C\ ,$$

so'ngra $x=b$ deb,

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)dx+C$$

ifodani topamiz. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a). \tag{1}$$

(1) formula *Nyuton—Leybnits formulasi* deyiladi.

Odatda, $\Phi(b)-\Phi(a)$ ayirma $\Phi(x)\Big|_a^b$ kabi yoziladi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(x)\Big|_a^b=\Phi(b)-\Phi(a)\,.$$

Masalan,

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_a^b=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a},\ \ (a>0,b>0)\,.$$

3°. O'zgaruvchilarni almashtirish formulasi. Faraz qilaylik, $f(x)\in C[a,b]$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda

$$\int_a^b f(x)dx$$

integral mavjud bo'ladi.

Ayni paytda, bu funksiya $[a, b]$ da boshlang'ich $\Phi(x)$ funksiyaga ega bo'lib,

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

bo'ladi.

Aytaylik, aniq integralda x o'zgaruvchi ushbu

$$x = \varphi(t)$$

formula bilan almashtirilgan bo'lib, bunda $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\varphi(t) \in C[\alpha,\beta]$ bo'lib, $\varphi(t)$ funksiyaning barcha qiymatlari $[a, b]$ ga tegishli;

2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

3) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega bo'lsin. U holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \qquad (2)$$

bo'ladi.

◀ Ravshanki, $\Phi(\varphi(t))$ murakkab funksiya $[\alpha,\beta]$ segmentda uzluksiz bo'lib,

$$(\Phi(\varphi(t)))' = \Phi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

bo'ladi.

Agar $\Phi'(x) = f(x)$ ekanini e'tiborga olsak, unda

$$(\Phi(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

bo'lishini topamiz. Bu esa $\Phi(\varphi(t))$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ekanini bildiradi. Nyuton–Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad (3)$$

bo'ladi.

(2) va (3) munosabatlardan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \tag{4}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

(4) *formula aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish formulasi* deyiladi.

2- misol. Ushbu $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ integral hisoblansin.

◀ Berilgan integralda $x = \sin t$ almashtirishni bajaramiz. Unda

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

bo'ladi. ▶

4°. Bo'laklab integrallash formulasi. Aytaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning har biri $[a, b]$ segmentda uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x) \cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \tag{5}$$

bo'ladi.

◀ Hosilani hisoblash qoidasiga ko'ra

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

bo'ladi. Demak, $u(x) \cdot v(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda $u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Nyuton–Leybnits formulasidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x))'dx = (u(x) \cdot v(x))\Big|_a^b .$$

Keyingi tenglikdan

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

(5) *formula aniq integrallarda bo'laklab integrallash formulasi* deyiladi.

3- misol. Ushbu $\int_1^2 x\ln x dx$ integral hisoblansin.

◀ Bu integralda $u(x) = \ln x$, $dv(x) = x$ deb $du(x) = \frac{1}{x}dx$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$ bo'lishini topamiz. Unda (5) formulaga ko'ra:

$$\int_1^2 x\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

bo'ladi. ▶

4- misol. Ushbu

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

integral hisoblansin.

◀ Ravshanki,

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$n \geq 2$ bo'lganda berilgan integralni

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} xd(-\cos x)$$

ko'rinishda yozib, unga bo'laklab integrallash formulasini qo'llaymiz.

Natijada

$$J_n = (-\sin^{n-1} x \cdot \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$$

$$= (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$$

bo'lib, undan ushbu

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

rekurrent formula kelib chiqadi.

Bu formula yordamida berilgan integralni $n = 1, 2, 3, \ldots$ bo'lganda ketma-ket hisoblash mumkin.

Aytaylik, $n = 2m$ — juft son bo'lsin. U holda

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot J_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $n = 2m+1$ — toq son bo'lsin. U holda

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \ldots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot J_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

bo'ladi. ($m!!$ simvol m dan katta bo'lmagan va u bilan bir xil juftlikka ega bo'lgan natural sonlarning ko'paytmasini bildiradi.) ▶

5°. Vallis formulasi. Ma'lumki, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lganda

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bu tengsizliklarni $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ oraliq bo'yicha integrallab,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx,$$

so‘ngra 4° da keltirilgan formulalardan foydalanib topamiz:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Bu tengsizliklardan

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Keyingi tengsizliklardan topamiz:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2. \tag{6}$$

(6) formula *Vallis formulasi* deyiladi.

Mashqlar

1. Agar $f(x) \in R([0,1])$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} f(x)dx$ tenglik isbotlansin.

2. Ushbu $\int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ integral hisoblansin.

3. Ushbu $\int\limits_{t}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{1}^{\frac{1}{t}} \frac{dx}{1+x^2}$, $(t > 0)$ tenglik isbotlansin.

38- ma’ruza

Aniq integralni taqribiy hisoblash

Odatda, aniq integrallar Nyuton—Leybnits formulasi yordamida hisoblanadi. Bu formula boshlang‘ich funksiyaga asoslanadi. Ammo boshlang‘ich funksiyani topish masalasi doim osongina hal bo‘lavermaydi. Agar integral ostidagi funksiya murakkab bo‘lsa, tegishli aniq integralni taqribiy hisoblashga to‘g‘ri keladi.

1°. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Demak, $f(x) \in R([a,b])$.

Masala $\int_a^b f(x)dx$ integralni taqribiy hisoblashdan iborat.

$[a, b]$ oraliqni $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ nuqtalar ($x_0 < x_1 < < x_2 < \dots < x_n$) yordamida n ta teng bo'lakka bo'lib, har bir $[x_k, x_{k+1}]$, $(k = 0,1,2,\dots,n-1)$ bo'yicha integralni quyidagicha

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \cdot (x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)$$

ko'rinishda taqribiy hisoblaymiz, bunda

$$x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}, \quad x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + (k + \frac{1}{2})\frac{b-a}{n},$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}, \quad (k = 0,1,2,\dots,n-1).$$

Aniq integral xossasidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx + \dots$$

$$\dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + \frac{b-a}{n} f\left(x_{1+\frac{1}{2}}\right) + \frac{b-a}{n} f\left(x_{2+\frac{1}{2}}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{b-a}{n} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + \dots + \frac{b-a}{n} f\left(x_{n-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \left[\frac{b-a}{n} f\left(x_{\frac{1}{2}}\right) + f\left(x_{1+\frac{1}{2}}\right) + \dots + f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + \dots + f\left(x_{n-\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Natijada $\int_a^b f(x)dx$ integralni taqribiy hisoblash uchun quyidagi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) \tag{1}$$

formulaga kelamiz.

(1) formula *to'g'ri to'rtburchaklar formulasi* deyiladi.

Endi (1) taqribiy formulaning xatoligini aniqlaymiz. Uning xatoligini

$$R_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) \tag{2}$$

deylik.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Avvalo R_n ni quyidagicha yozib olamiz:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+\frac{1}{2}})dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int [f(x) - f(x_{k+\frac{1}{2}})]dx.$$

Teylor formulasidan foydalanib topamiz:

$$f(x) - f(x_{k+\frac{1}{2}}) = f'(x_{k+\frac{1}{2}})\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2$$

(bunda ξ_k son $-$ x va $x_{k+\frac{1}{2}}$ sonlar orasida). Natijada

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f'(x_{k+\frac{1}{2}})\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(f'(x_{k+\frac{1}{2}})\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_{k+\frac{1}{2}})dx + \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2)dx$$

bo'ladi.

Ravshanki, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_{k+\frac{1}{2}})dx = 0$.

Demak, $\quad R_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})dx.$

O‘rta qiymat haqidagi teoremaga binoan

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2\,dx = f''(\xi_k^*)\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2\,dx =$$

$$= \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{12} f''(\xi_k^*) = \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_k^*), \quad (\xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}])$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, R_n uchun ushbu

$$R_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_k) = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*)$$

ifodaga kelamiz.

Ravshanki,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) = \frac{f''(\xi_0^*)+(\xi_1^*)+\ldots+f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

miqdor $(\xi_k^* \in [a,b],\ k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ $f''(x)$ ning $[a, b]$ oraliqdagi eng kichik m'' hamda eng katta M'' qiymatlari orasida:

$$m'' \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) \le M''$$

bo‘ladi.

Shartga ko‘ra $f''(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz. Uzluksiz funksiyaning xossasiga muvofiq (a, b) da shunday ζ nuqta topiladiki,

$$f''(\zeta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*)$$

bo‘ladi.

Natijada R_n uchun quyidagi

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta)$$

tenglikka kelamiz.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta)$$

bo'ladi.

Shunday qilib, $[a, b]$ oraliqda ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiyaning

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralini (1) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi yordamida taqribiy hisoblansa, bu taqribiy hisoblash xatoligi quyidagi

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta), \quad (\zeta \in (a,b))$$

formula bilan ifodalanadi.

2°. Trapetsiyalar formulasi. $f(x)$ funksiyaning

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralini taqribiy hisoblash uchun, avvalo, $[a, b]$ segmentni

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

nuqtalar yordamida n ta teng bo'lakka bo'linadi. So'ng har bir $[x_k, x_{k+1}]$, $(k = 0,1,2,\dots,n-1)$ bo'yicha integral quyidagicha

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot(x_{k+1}-x_k), \quad (k = 0,1,2,\dots,n-1)$$

taqribiy hisoblanadi. Natijada ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) + \dots$$

$$\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n-x_{n-1})=\frac{b-a}{2}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\right.$$

$$\left.+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right]$$

formulaga kelamiz. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right].\quad(3)$$

(3) *formula trapesiyalar formulasi* deyiladi.

Bu taqribiy formulaning xatoligi R_n', $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ da uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega bo'lishi shartida ,

$$R_n'=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\zeta),\quad(\zeta\in(a,b))$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\right.$$

$$\left.+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right]\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\zeta).$$

3°. Simpson formulasi. Bu holda $f(x)$ funksiyaning

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralini taqribiy hisoblash uchun $[a,\ b]$ segmentni $a=x_0, x_1, \ldots, x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}=b$ nuqtalar yordamida $2n$ ta teng bo'lakka bo'lib, har bir $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ bo'yicha integral quyidagicha

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx\approx\frac{x_{2k+2}-x_{2k}}{6}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right]=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right],\quad(k=0,1,\ldots,n-1)$$

ko'rinishda taqribiy hisoblanadi. Natijada

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) +$$

$$+f(x_4)) + \ldots + (f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots$$

$$\ldots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2}))]$$

hosil bo‘ladi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[f(x_0) + f(x_{2n}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots$$

$$\ldots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2}))]. \qquad (4)$$

(4) formula *Simpson formulasi* deyiladi.

Bu taqribiy formulaning xatoligi R_n'', $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz $f^{(IV)}(x)$ hosilaga ega bo‘lishi shartida,

$$R_n'' = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(IV)}(\zeta), \quad (\zeta \in (a,b))$$

bo‘ladi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}[f(x_0) + f(x_{2n}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})) +$$

$$+2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2}))] - \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(IV)}(\zeta).$$

Misol. Ushbu $$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

integral to‘g‘ri to‘rtburchaklar, trapesiyalar va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblansin.

◀ [0, 1] segmentni 5 ta teng bo‘lakka bo‘lamiz. Bunda bo‘linish nuqtalari

$$x_0 = 0, \; x_1 = 0,2, \; x_2 = 0,4, \; x_3 = 0,6, \; x_4 = 0,8, \; x_5 = 1,0$$

bo'lib, bu nuqtalarda $f(x)=e^{-x^2}$ funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_0)=1,00000,$$
$$f(x_1)=0,96079,$$
$$f(x_2)=0,85214,$$
$$f(x_3)=0,69768,$$
$$f(x_4)=0,52729,$$
$$f(x_5)=0,36788.$$

Har bir bo'lakning o'rtasini ifodalovchi nuqtalar

$$x_{\frac{1}{2}}=0,1,\quad x_{\frac{3}{2}}=0,3,\quad x_{\frac{5}{2}}=0,5,\quad x_{\frac{7}{2}}=0,7,\quad x_{\frac{9}{2}}=0,9$$

bo'lib, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_{\frac{1}{2}})=0,99005,$$
$$f(x_{\frac{3}{2}})=0,91393,$$
$$f(x_{\frac{5}{2}})=0,77680,$$
$$f(x_{\frac{7}{5}})=0,61263,$$
$$f(x_{\frac{9}{5}})=0,44486.$$

a) To'g'ri to'rtburchaklar formulasi bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{5}(0,99005+0,91393+0,77680+$$
$$+0,61263+0,44486)=\frac{1}{5}\cdot 3,74027=0,74805$$

bo'lib, $\quad |R_n|\le\frac{1}{12\cdot 25}=\frac{1}{300}\approx 0,003\quad$ bo'ladi.

b) Trapetsiyalar formulasi bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}\left(\frac{1,00000+0,36788}{2}+0,96079+0,85214+\right.$$

$$\left.+0,69768+0,52729\right)=\frac{1}{5}(0,68394+3,03790)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3,72184\approx 0,74437$$

bo'lib, $\quad |R_n'|\le \frac{1}{6\cdot 25}=\frac{1}{150}\approx 0,006 \quad$ bo'ladi.

d) Simpson formulasi bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{30}[(1,00000+0,36788)+4(0,99005+$$

$$+0,91393+0,77680+0,61263+0,44486)+2(0,96079+$$

$$+0,85214+0,69768+0,52729)]=\frac{1}{30}(1,36788+4\cdot 3,74027)+$$

$$+2\cdot 3,03790)=\frac{1}{30}(1,36788+6,07580+14,96108)\approx 0,74682$$

bo'lib, $\quad |R_n''|\le \frac{12}{2880\cdot 5^4}=0,7\cdot 10^{-5} \quad$ bo'ladi.

Mashqlar

1. Trapesiyalar formulasining xatoligi $R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$ bo'lishi isbotlansin.

2. Simpson formulasining xatoligi $R_n=-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{IV}(\xi)$ bo'lishi isbotlansin.

3. Ushbu $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, **($n$ = 10)** integral taqribiy hisoblansin.

9- B O B
ANIQ INTEGRALNING BA'ZI TATBIQLARI

39- ma'ruza
Tekis shaklning yuzi va uni hisoblash

1°. Tekis shaklning yuzi tushunchasi. Ma'lumki, (x, y) juftlik $(x \in R, y \in R)$ tekislikda nuqtani ifodalaydi.

Koordinatalari ushbu

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \quad (a \in R, b \in R, c \in R, d \in R)$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi tekislik nuqtalaridan hosil bo'lgan D_0 to'plam:

$$D_0 = \{(x, y); x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

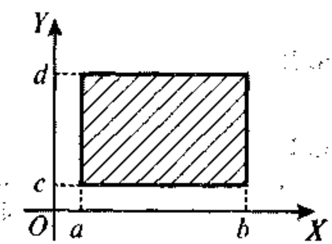
to'g'ri to'rtburchak deyiladi (8-chizma).

Bu to'g'ri to'rtburchakning tomonlari (chegaralari) mos ravishda koordinatalar o'qiga parallel bo'ladi.

D_0 to'g'ri to'rtburchakning yuzi deb (uning chegarasining, ya'ni

$$x = a, \quad x = b, \quad (c \le y \le d),$$

$$y = c, \quad y = d, \quad (a \le x \le b)$$



8- chizma.

to'g'ri chiziq kesmalarining D_0 ga tegishli bo'lishi yoki tegishli bo'lmasligidan qat'iy nazar) ushbu

$$\mu(D_0) = (b - a) \cdot (d - c)$$

miqdorga aytiladi.

Aytaylik, tekislik nuqtalaridan iborat biror Q to'plam berilgan bo'lsin.

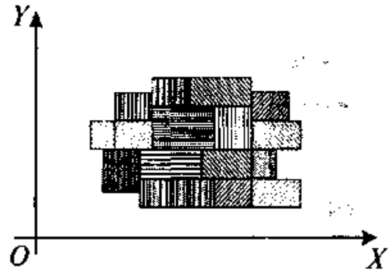
Agar shunday D_0 to'g'ri to'rtburchak topilsaki,

$$Q \subset D_0$$

bo'lsa, *Q chegaralangan to'plam* deyiladi.

Har qanday chegaralangan tekislik nuqtalaridan iborat to'plam *tekis shakl* deyiladi.

Agar tekis shakl chekli sondagi kesishmaydigan to'g'ri to'rtburchaklarning birlashmasi sifatida ifodalansa, uni *to'g'ri ko'pburchak* deymiz (9- chizma).



9- chizma.

Bunday to‘g‘ri ko‘pburchakning yuzi deb, uni tashkil etgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzalari yig‘indisiga aytiladi.

To‘g‘ri ko‘pburchak yuzi quyidagi xossalarga ega:

1) to‘g‘ri ko‘pburchak yuzi manfiy bo‘lmaydi: $\mu(D) \geq 0$;

2) kesishmaydigan ikki D_1 va D_2 to‘g‘ri ko‘pburchaklardan tashkil topgan to‘g‘ri ko‘pburchak yuzi D_1 va D_2 larning yuzalari yig‘indisiga teng:

$$\mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2);$$

3) agar D_1 va D_2 to‘g‘ri ko‘pburchaklar uchun

$$D_1 \subset D_2$$

bo‘lsa, u holda

$$\mu(D_1) \leq \mu(D_2)$$

bo‘ladi.

Tekislikda biror chegaralangan Q shakl berilgan bo‘lsin. Bu shaklning ichiga A to‘g‘ri ko‘pburchak $(A \subset Q)$, so‘ngra Q shaklni o‘z ichiga olgan B to‘g‘ri ko‘pburchak $(Q \subset B)$ lar chizamiz. Ularning yuzlari mos ravishda $\mu(A)$ va $\mu(B)$ bo‘lsin.

Ravshanki, bunday to‘g‘ri ko‘pburchaklar ko‘p bo‘lib, ularning yuzalaridan iborat $\{\mu(A)\}$ va $\{\mu(B)\}$ to‘plamlar hosil bo‘ladi.

Ayni paytda, bu sonli to‘plamlar chegaralangan bo‘ladi. Binobarin, ularning aniq chegaralari

$$\sup\{\mu(A)\}, \quad \inf\{\mu(B)\}$$

mavjud.

1- ta’rif. Agar

$$\sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\}$$

bo‘lsa, Q shakl yuzaga ega deyiladi. Ularning umumiy qiymati Q shaklning yuzi deyiladi va $\mu(Q)$ kabi belgilanadi:

$$\mu(Q) = \sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B).$$

1- teorema. Tekis shakl Q yuzaga ega bo'lishi uchun $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday A $(A \subset Q)$ va B $(Q \subset B)$ to'g'ri ko'pburchaklar topilib, ular uchun

$$\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

◀ ***Zarurligi.*** Aytaylik, Q shakl yuzaga ega bo'lsin. Unda ta'rifga binoan

$$\sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\} = \mu(Q)$$

bo'ladi. Modomiki,

$$\sup\{\mu(A)\} = \mu(Q),$$
$$\inf\{\mu(B)\} = \mu(Q)$$

ekan, unda $\forall\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday to'g'ri ko'pburchak A $(A \subset Q)$ hamda shunday to'g'ri ko'pburchak B $(Q \subset B)$ topiladiki,

$$\mu(Q) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\mu(B) - \mu(Q) < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi. Bu tengsizliklardan

$$\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Aytaylik, A $(A \subset Q)$ va B $(Q \subset B)$ to'g'ri ko'pburchaklar uchun $\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsin.

Ravshanki,

$$\mu(A) \le \sup\{\mu(A)\},$$
$$\mu(B) \ge \inf\{\mu(B)\}.$$

Bu munosabatlardan

$$\inf\{\mu(B)\} - \sup\{\mu(A)\} \le \mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$$

bo'lishini topamiz. ε — ixtiyoriy musbat son bo'lganligidan,

$$\sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\}$$

bo'lishi kelib chikadi. Demak, Q shakl yuzaga ega. ▶

Shunga o'xshash quyidagi teorema isbotlanadi.

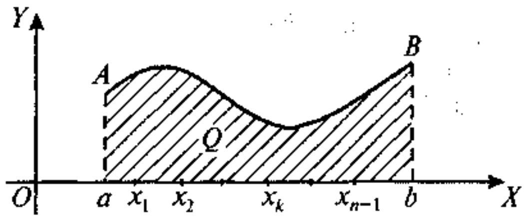
2- teorema. Tekis shakl Q yuzaga ega bo'lishi uchun $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday yuzaga ega P va S $(P \subset Q, \ Q \subset S)$ tekis shakllar topilib, ular uchun

$$\mu(S) - \mu(P) < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

2°. Egri chiziqli trapesiyaning yuzini hisoblash. Faraz qilaylik, $f(x) \in C[a,b]$ bo'lib, $\forall x \in [a,b]$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsin.

Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x = a$, $x = b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan abssissa o'qi bilan chegaralangan Q shaklni qaraylik (10- chizma).



10- chizma.

Odatda, bu shakl *egri chiziqli trapesiya* deyiladi. $[a, b]$ segmentni ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}, \quad (a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b)$$

bo'laklashni olamiz. Bu bo'laklashning har bir $[x_k, x_{k+1}]$ oralig'ida

$$\inf\{f(x)\} = m_k, \quad \sup\{f(x)\} = M_k, \quad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

mavjud bo'ladi.

Endi asosi $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, balandligi m_k bo'lgan (k=0,1,2,3,..., $n-1$) to'g'ri to'rtburchaklarning birlashmasidan tashkil topgan to'g'ri ko'pburchakni A deylik.

Shuningdek, asosi $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, balandligi M_k bo'lgan (k=0,1,2,3,..., $n-1$) to'g'ri to'rtburchaklarning birlashmasidan tashkil topgan to'g'ri ko'pburchakni B deylik. Ravshanki,

$$A \subset Q, \quad Q \subset B$$

bo'lib, ularning yuzalari

$$\mu(A)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\cdot\Delta x_k\,,\quad \mu(B)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta x_k$$

bo'ladi.

Bu yig'indilarni $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segmentning P bo'laklashiga nisbatan Darbuning quyi hamda yuqori yig'indilari ekanini payqash qiyin emas:

$$\mu(A)=s(f;P),\quad \mu(B)=S(f;P).$$

$f(x)\in C[a,b]$ bo'lgani uchun $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi bo'ladi. Unda integrallanuvchanlik mezoniga ko'ra, $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham $[a, b]$ segmentning shunday P bo'laklashi topiladiki,

$$S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon$$

bo'ladi. Binobarin, ushbu

$$\mu(B)-\mu(A)<\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa 1- teoremaga muvofiq, qaralayotgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzaga ega bo'lishini bildiradi. Unda ta'rifga ko'ra

$$\sup\{\mu(A)\}=\inf\{\mu(B)\}$$

bo'ladi. Ayni paytda,

$$\sup\{\mu(A)\}=\int_a^b f(x)dx,$$

$$\inf\{\mu(B)\}=\int_a^b f(x)dx$$

bo'lganligi sababli Q egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

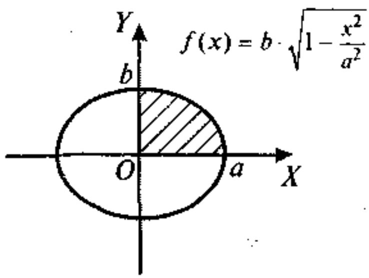
$$\mu(Q)=\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

ga teng bo'ladi.

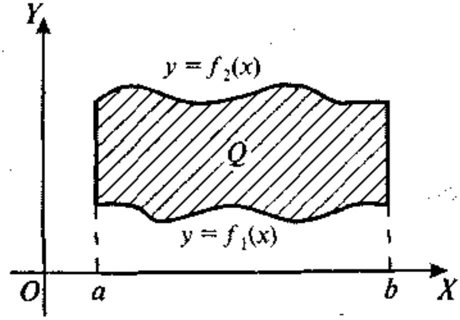
1- misol. Tekislikda ushbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ellips bilan chegaralangan Q shaklning yuzi topilsin.



11- chizma.



12- chizma.

◀ Ellips bilan chegaralangan Q shaklning yuzi OX va OY koordinata o'qlari hamda

$$f(x) = b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad 0 \le x \le a$$

chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiya yuzining 4 tasiga teng bo'ladi (11- chizma).

U holda (1) formuladan foydalanib topamiz:

$$\mu(Q) = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} x = a\sin t, & \\ & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ dx = a\cos t dt, & \end{matrix}\right| = \frac{4b}{a}\cdot a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4ab\cdot\frac{\pi}{4} = ab\pi. \blacktriangleright$$

Aytaylik, $f_1(x) \in C[a,b]$, $f_2(x) \in C[a,b]$ bo'lib, $\forall x \in [a,b]$ da

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x)$$

bo'lsin. Tekislikdagi Q shakl quyidagi

$$y = f_1(x),\quad y = f_2(x),\quad x = a,\quad x = b$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklni ifodalasin (12- chizma).

Bu shaklning yuzi

$$\mu(Q)=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx \qquad (2)$$

bo'ladi.

2- misol. Tekislikda ushbu

$$y=4-x^2,\quad y=x^2-2x$$

chiziqlar (parabolalar) bilan chegaralangan Q shaklning yuzi topilsin.

◀ Parabolalarning tenglamalari

$$y=4-x^2,$$
$$y=x^2-2x$$

ni birgalikda yechib, ularning kesishish nuqtalarini topamiz (13-chizma):

$$4-x^2=x^2-2x,$$
$$x_1=-1,\ \ x_2=2;\ \ y_1=3,\ \ y_2=0:\ \ A(-1;3),\ \ B(2;0).$$

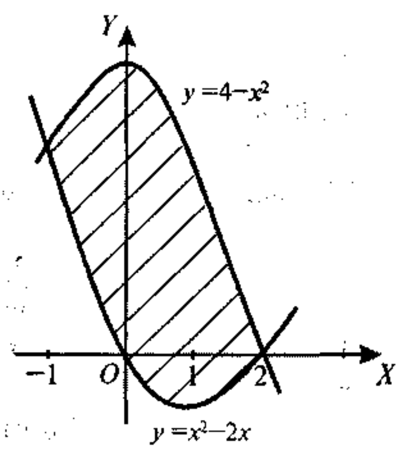
Bu shaklning yuzini (2) formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$\mu(Q)=\int_{-1}^{2}\left[(4-x^2)-(x^2-2x)\right]dx=\int_{-1}^{2}\left(4+2x-2x^2\right)dx=$$

$$=(4x+x^2-\frac{2}{3}x^3)\Big|_{-1}^{2}=9.\ ▶$$

Eslatma. Agar $f(x)\in C[a,b]$ funksiya $[a, b]$ da ishora saqlamasa, (1) integral egri chiziqli trapetsiyalar yuzalarining yig'indisidan iborat bo'ladi. Bunda OX o'qining yuqorisidagi yuza musbat ishora bilan, OX o'qining pastidagi yuza manfiy ishora bilan olinadi.

Masalan, OX o'qi hamda $f(x)=\sin x,\ \ 0\le x\le 2\pi$ funksiya grafigi bilan chegaralangan shaklning yuzi



13- chizma.

$$\mu(Q)=\int_0^{\pi}\sin x+(-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx)=(-\cos x)\Big|_0^{\pi}-(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}=4$$

bo'ladi.

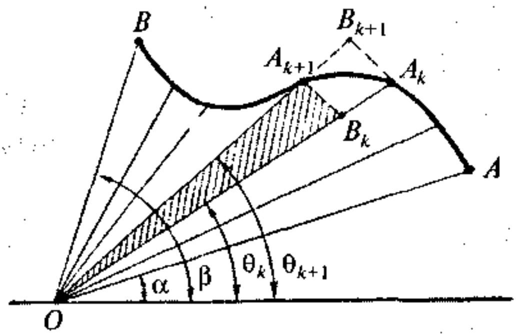
3°. Egri chiziqli sektorning yuzini hisoblash. Aytaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida ushbu

$$\rho=\rho(\theta),\quad \alpha\le\theta\le\beta,\quad (\alpha\in R,\ \ \beta\in R)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bunda

$$\rho(\theta)\in C[\alpha,\beta],\quad \forall\theta\in[\alpha,\beta]\ \text{ da }\ \rho(\theta)\ge 0.$$

Tekislikda $\breve{AB}$ egri chiziq hamda OA va OB radius-vektorlar bilan chegaralangan Q shaklni qaraymiz (14- chizma).



14- chizma.

$[\alpha,\beta]$ segmentning ixtiyoriy

$$P=\{\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n\},\quad (\alpha=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_n=\beta)$$

bo'laklashini olamiz. O nuqtadan har bir qutb burchagi θ_k ga mos OA_k radius-vektor o'tkazamiz. Natijada OAB – egri chiziqli sektor

$$OA_kA_{k+1},\ \ (k=0,1,2,\ldots,n-1;\ \ A_0=A,\ \ A_n=B)$$

egri chiziqli sektorchalarga ajraladi.

Ravshanki, $\rho=\rho(\theta)\in C[\alpha,\beta]$ bo'lganligi uchun $[\theta_k,\theta_{k+1}]$ da $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$

$$m_k=\inf\{\rho(\theta)\},\quad M_k=\sup\{\rho(\theta)\}$$

lar mavjud.

Endi har bir $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ segment uchun radius-vektorlari mos ravishda m_k hamda M_k bo'lgan doiraviy sektorlarni hosil qilamiz. Bunday doiraviy sektorlar yuzaga ega bo'lib, ularning yuzi mos ravishda

$$\frac{1}{2} m_k^2 \cdot \Delta\theta_k, \quad \frac{1}{2} M_k^2 \cdot \Delta\theta_k, \quad (\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k)$$

bo'ladi.

Radius-vektorlari m_k $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$ bo'lgan barcha doiraviy sektorlar birlashmasidan hosil bo'lgan shaklni Q_1 desak, unda $Q_1 \subset Q$ bo'lib, uning yuzi

$$\mu(Q_1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \cdot \Delta\theta_k \tag{3}$$

bo'ladi.

Shuningdek, radius-vektorlari M_k $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$ bo'lgan barcha doiraviy sektorlar birlashmasidan hosil bo'lgan shaklni Q_2 desak, unda $Q \subset Q_2$ bo'lib, uning yuzi

$$\mu(Q_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \cdot \Delta\theta_k \tag{4}$$

bo'ladi.

(3) va (4) yig'indilar $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ funksiyaning Darbu yig'indilari bo'ladi. Ayni paytda, $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz bo'lgani uchun u integrallanuvchidir. Demak, $\forall\varepsilon > 0$ olinganda ham $[\alpha, \beta]$ segmentning shunday P bo'laklashi topiladiki,

$$S(\frac{1}{2}\rho^2(\theta); P) - s(\frac{1}{2}\rho^2(\theta); P) < \varepsilon$$

bo'ladi. Binobarin, ushbu

$$\mu(Q_2) - \mu(Q_1) < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa, 2-teoremaga muvofiq, qaralayotgan egri chiziqli sektorning yuzaga ega bo'lishini bildiradi. Unda ta'rifga ko'ra

$$\sup\{\mu(Q_1)\} = \inf\{\mu(Q_2)\}$$

bo'ladi. Ayni paytda,

$$\sup\{\mu(Q_1)\} = \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta)d\theta,$$

$$\inf\{\mu(Q_2)\} = \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta)d\theta$$

bo'lgani sababli egri chiziqli sektorning yuzi

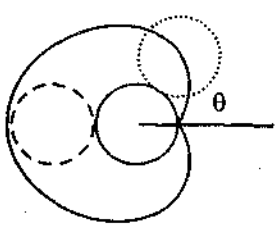
$$\mu(Q) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta)d\theta$$

ga teng bo'ladi.

3- misol. Ushbu

$$\rho = \rho(\theta) = a(1-\cos\theta), \quad (a \in R, \ \ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

funksiya grafigi bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.



15- chizma.

◀ Bu funksiya grafigi kardioidani ifodalaydi. Ma'lumki, kardioida radiusi r ga teng bo'lgan aylananing shu radiusli ikkinchi qo'zg'almas aylana bo'ylab harakati (sirpanmasdan dumalashi) natijasida birinchi aylana ixtiyoriy nuqtasining chizgan chizig'idir (15- chizma).

Kardioida qutb o'qiga nisbatan simmetrik bo'lganligi sababli yuqori yarim tekislikdagi shaklning yuzini topib, so'ngra uni 2 ga ko'paytirsak, izlanayotgan yuza kelib chiqadi.

θ o'zgaruvchi $[0, \pi]$ da o'zgarganda ρ radius-vektor kardioidaning yuqori yarim tekislikdagi qismini chizadi. Shuning uchun

$$\mu(Q) = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2(\theta)d\theta = \int_0^{\pi} a^2(1-\cos\theta)^2 d\theta =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left[\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]d\theta =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

bo'ladi. ▶

Mashqlar

1. Aytaylik, tekislikda $\breve{AB}$ egri chiziq $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ($\alpha \le t \le \beta$) tenglamalar bilan parametrik holda berilgan bo'lsin, bunda $x=\varphi(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega, $\varphi'(x) \ge 0$ va $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $y=\psi(t)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz va $\psi(t) \ge 0$. U holda yuqoridan $\breve{AB}$ egri chiziq, yon tomonlaridagi $x=a$, $x=b$ vertikal chiziqlar, pastdan $[a, b]$ kesma bilan chegaralangan shaklning yuzi

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt$$

bo'lishi isbotlansin.

2. Ushbu $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ chiziq bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

40- ma'ruza

Yoy uzunligi va uni hisoblash

1°. Yoy uzunligi tushunchasi. Ma'lumki, tekislikdagi ikki $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi l_0 uzunlikka ega va uning uzunligi

$$\mu(l_0)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ga teng bo'ladi.

Aytaylik, tekislikdagi l chiziq $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$ nuqtalarni ($n \in N$) birin-ketin to'g'ri chiziq kesmalari bilan birlashtirishdan hosil bo'lgan bo'lsin. Odatda, bunday chiziq *siniq chiziq* deyiladi.

Siniq chiziq uzunligi (perimetri) deb, uni tashkil etgan to'g'ri chiziq kesmalari uzunliklarining yig'indisiga aytiladi:

$$\mu(l)=\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2}.$$

Faraz qilaylik, tekislikdagi $\breve{AB}$ egri chiziq (uni $\breve{AB}$ yoy deb ham ataymiz) ushbu

$$y = f(x), \quad (a \le x \le b)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin, bunda $f(x) \in C[a,b]$.

$[a, b]$ segmentning ixtiyoriy

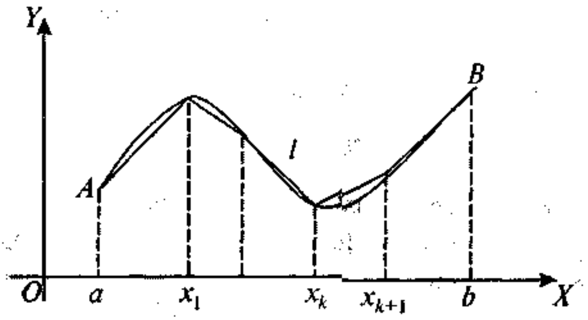
$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}, \quad (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

bo'laklashini olib, bo'luvchi x_k $(k = 0,1,2,...,n)$ nuqtalar orqali OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning $\breve{AB}$ yoy bilan kesishgan nuqtalari

$$A_k(x_k, f(x_k)), \ (k = 0,1,2,...,n; A_0 = A, \ A_n = B)$$

bo'ladi.

$\breve{AB}$ yoydagi bu $A_k(x_k, f(x_k))$ nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birlashtirib, l siniq chiziqni hosil qilamiz (16- chizma).



16- chizma.

Odatda, l siniq chiziq $\breve{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziq deyiladi. U uzunlikka ega bo'lib, uzunligini (perimetrini) $\mu(l)$ deylik.

Agar P_1 va P_2 lar $[a, b]$ segmentning ikkita bo'laklashi bo'lib, $P_1 \subset P_2$ bo'lsa, u holda bu bo'laklashlarga mos $\breve{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziq l_1, l_2 larning perimetrlari uchun

$$\mu(l_1) \le \mu(l_2)$$

bo'ladi.

◀ $[a, b]$ segmentning P_1 bo‘laklashi quyidagi

$$P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$$
$$(a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b)$$

ko‘rinishda bo‘lib, P_2 bo‘laklash esa P_1 bo‘laklashning barcha bo‘luvchi nuqtalari hamda qo‘shimcha bitta $x^* \in [a, b]$ nuqtani qo‘shish natijasida hosil bo‘lgan bo‘laklash bo‘lsin. Bu x^* nuqta x_k hamda x_{k+1} nuqtalar orasida joylashsin: $x_k < x^* < x_{k+1}$. Demak,

$$P_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_k, x^*, x_{k+1}, \dots, x_n\},$$
$$(a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x^* < x_{k+1} < \dots < x_n = b).$$

Ravshanki, $P_1 \subset P_2$ bo‘ladi.

$\breve{AB}$ yoyga chizilgan P_1 bo‘laklashga mos siniq chiziq l_1, shu yoyga chizilgan P_2 bo‘laklashga mos siniq chiziq l_2 dan faqatgina bitta bo‘lagi bilangina farq qiladi: l_1 da $A_k A_{k+1}$ bo‘lak bo‘lgan holda l_2 da ikkita $A_k A^*$ hamda $A^* A_{k+1}$ bo‘laklar bo‘ladi.

Ammo $A_k A_{k+1}$ to‘g‘ri chiziq kesmasining uzunligi $\mu(A_k A_{k+1})$, $A_k A^*$ hamda $A^* A_{k+1}$ kesmalar uzunliklari $\mu(A_k A^*)$, $\mu(A^* A_{k+1})$ yig‘indisidan har doim katta bo‘lmaganligi, ya’ni

$$\mu(A_k A_{k+1}) \le \mu(A_k A^*) + \mu(A^* A_{k+1})$$

dan

$$\mu(l_1) \le \mu(l_2)$$

bo‘ladi. ▶

Demak, P bo‘laklashning bo‘luvchi nuqtalari sonini orttira borilsa, $\breve{AB}$ yoyga chizilgan ularga mos siniq chiziqlar perimetrlari ham ortib boradi.

1- ta’rif. Agar $\lambda_p \to 0$ da $\breve{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziq perimetri

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

chekli limitga ega bo‘lsa, $\breve{AB}$ *yoy uzunlikka ega* deyiladi.

Ushbu $$\lim_{\lambda_P \to 0} \mu(l) = \mu(\breve{AB})$$

limit $\breve{AB}$ *yoyning uzunligi* deyiladi. Masalan, agar

$$f(x) = kx + C, \quad (a \le x \le b)$$

bo'lsa, unda $\breve{AB}$ ning uzunligi

$$\mu(\breve{AB}) = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + k^2(x_{k+1} - x_k)^2} =$$

$$= \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + k^2} \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sqrt{1 + k^2} \cdot (b - a)$$

bo'ladi.

Aytaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

tenglamalar sistemasi bilan berilgan bo'lsin.

(Bu holda egri chiziq parametrik ko'rinishda berilgan deyiladi). Bunda:

1) $\varphi(t) \in C[\alpha, \beta]$, $\psi(t) \in C[\alpha, \beta]$;

2) $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \ne t_2$ uchun (1)

$$A_1(x_1, y_1) = A_1(\varphi(t_1), \psi(t_1)),$$
$$A_2(x_2, y_2) = A_2(\varphi(t_2), \psi(t_2))$$

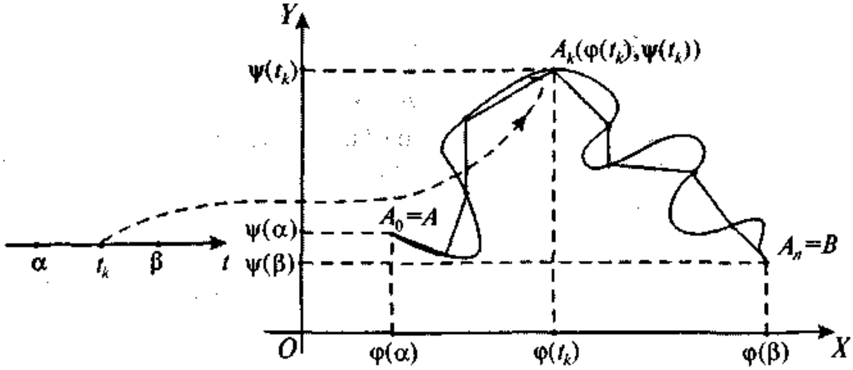
nuqtalar turlicha ;

3) $t = \alpha$ ga A nuqta, $t = \beta$ ga B nuqta mos kelsin.

$[\alpha, \beta]$ segmentning ixtiyoriy

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}, \quad (\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta)$$

bo'laklashini olib, bu bo'laklashning bo'luvchi t_k $(k = 0, 1, 2, ..., n)$ nuqtalariga mos kelgan $\breve{AB}$ yoydagi $A_k = A_k(x_k, y_k)$ $(x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$; $k = 0, ..., n)$ nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birlashtirib, $\breve{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziq l ni hosil qilamiz (17- chizma).



17- chizma.

Bu siniq chiziq perimetri

$$\mu(l)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2+[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)]^2}$$

bo'ladi.

2- ta'rif. Agar $\lambda_p \to 0$ da $\breve{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziq perimetri $\mu(l)$ chekli limitga ega bo'lsa, $\breve{AB}$ *yoy uzunlikka ega* deyiladi.

Ushbu
$$\lim_{\lambda_p \to 0}\mu(l)=\mu(\breve{AB})$$

limit $\breve{AB}$ *yoyning uzunligi* deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan yoy uzunligining (agar u mavjud bo'lsa) musbat bo'lishi kelib chiqadi.

Endi yoy uzunligining ikkita xossasini isbotsiz keltiramiz:

1) Agar $\breve{AB}$ yoy uzunlikka ega bo'lib, u $\breve{AB}$ yoydagi nuqtalar yordamida n ta $\breve{A_k A_{k+1}}$ yoylarga $(k=0,1,2,...,n;\ A_0=A,\ B=A_{n+1})$ ajralgan bo'lsa, u holda har bir $\breve{A_k A_{k+1}}$ yoy uzunlikka ega va

$$\mu(\breve{AB})=\sum_{k=0}^{n}\mu(\breve{A_k A_{k+1}})$$

bo'ladi.

2) Agar $\breve{AB}$ yoy n ta $\breve{A_k A_{k+1}}$ yoylarga ajralgan bo'lib, har bir $\breve{A_k A_{k+1}}$ yoy uzunlikka ega bo'lsa, u holda $\breve{AB}$ yoy ham uzunlikka ega bo'ladi.

2°. $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan egri chiziq uzunligini hisoblash. Faraz qilaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq ushbu

$$y = f(x), \quad a \le x \le b$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bunda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz va uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega.

$[a, b]$ segmentning ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \quad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

bo'laklashini olib, unga mos $\breve{AB}$ yoyga chizilgan l siniq chiziqni hosil qilamiz. Bu siniq chiziqning perimetri

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

bo'ladi.

Har bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentda $f(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f'(\tau_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)]^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} \Delta x_k,$$

bunda $\tau_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Bu tenglikdagi yig'indining $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ funksiyaning integral yig'indisidan farqi shundaki, integral yig'indida $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ nuqta ixtiyoriy bo'lgan holda yuqoridagi yig'indida esa τ_k nuqta Lagranj teoremasiga muvofiq olingan tayin nuqta bo'ladi. Ammo $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ funksiya integrallanuvchi bo'lganligi sababli $\xi_k = \tau_k$ deb olinishi mumkin. Natijada

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k$$

bo'lib, undan

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \mu(l) = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $\breve{AB}$ yoyning uzunligi

$$\mu(\breve{AB}) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \tag{2}$$

bo'ladi. Bu formula yordamida yoy uzunligi hisoblanadi.

1- misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}), \quad (a > 0, \ -a \le x \le a)$$

tenglama bilan berilgan egri chiziqning uzunligi topilsin.

Bu tenglama bilan aniqlanadigan chiziq *zanjir chizig'i* deyiladi.

◀ Ravshanki,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}),$$

$$1 + f'^2(x) = \frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2,$$

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

bo'ladi. (2) formuladan foydalanib, zanjir chizig'ining uzunligini topamiz:

$$\mu(\breve{AB}) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) \Big|_{-a}^{a} = a(e - \frac{1}{e}). \quad ▶$$

3°. Parametrik ko'rinishda berilgan egri chiziq uzunligini hisoblash.

Faraz qilaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

tenglamalar sistemasi bilan berilgan bo'lib, (1) shartlarning bajarilishi bilan birga $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funksiyalari $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$ hamda $\psi'(t)$ hosilalarga ega bo'lsin.

$[\alpha, \beta]$ segmentning ixtiyoriy

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}, \quad (\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta)$$

bo'laklashini olib, ularga mos $\breve{AB}$ yoyning $A_k = A_k(x_k, y_k)$ $(x_k = \varphi(t_k),\ y_k = \varphi(t_k))$ nuqtalarini bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmasi yordamida birlashtirishdan hosil bo'lgan l siniq chiziq perimetri

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2}$$

ni qaraymiz.

Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\tau_k)\cdot(t_{k+1} - t_k)^2 + \psi'^2(\theta_k)\cdot(t_{k+1} - t_k)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)}\cdot \Delta t_k, \quad (\Delta t_k = t_{k+1} - t_k),$$

bunda $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}],\ \theta_k \in [t_k, t_{k+1}]$.

Keyingi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}\cdot \Delta t_k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} [\sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}]\cdot \Delta t_k, \qquad (*)$$

bunda $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$.

Modomiki,

$$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \in C[\alpha, \beta]$$

ekan, u holda

$$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \in R[\alpha, \beta]$$

bo'lib,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}\cdot \Delta t_k = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \qquad (3)$$

bo'ladi. Ixtiyoriy a, b, c, d haqiqiy sonlar uchun ushbu

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right| \le |a-c|+|b-d|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham,

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right| = \left|\frac{(a^2-c^2)+(b^2-d^2)}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}\right| \le$$

$$\le |a-c|\cdot\frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}+|b-d|\cdot\frac{|b+d|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}} \le |a-c|+|b-d|. \ ▶$$

Bu tengsizlikdan foydalanib topamiz:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}]\Delta t_k\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}|\varphi'(\tau_k)-\varphi'(\xi_k)|\Delta t_k+\sum_{k=0}^{n-1}|\psi'(\theta_k)-\psi'(\xi_k)|\Delta t_k \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(\varphi')\cdot\Delta t+\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(\psi')\cdot\Delta t.$$

$$\varphi'(t)\in R[\alpha,\beta], \quad \psi'(t)\in R[\alpha,\beta]$$

bo'lganligi sababli

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}]\Delta t_k=0 \qquad (4)$$

bo'ladi.

(3) va (4) munosabatlarni e'tiborga olib, $\lambda_p\to 0$ da (*) tenglikda limitga o'tsak, u holda $\breve{AB}$ yoyning uzunligi uchun

$$\mu(\breve{AB})=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \qquad (5)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu formula yordamida yoy uzunligi hisoblanadi.

2- misol. Ushbu

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t), \quad (0 \le t \le \pi)$$

tenglamalar sistemasi bilan berilgan $\breve{AB}$ egri chiziqning (sikloidaning) uzunligi topilsin.

◀ Ravshanki,

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t,$$
$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2 2(1 - \cos t),$$
$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = a\sqrt{2(1 - \cos t)}$$

bo'ladi. (5) formulaga ko'ra izlanayotgan egri chiziqning uzunligi

$$\mu(\breve{AB}) = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2(1 - \cos t)}dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = -4a \cdot (\cos\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = 8a$$

bo'ladi. ▶

4°. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan egri chiziqning uzunligini hisoblash. Faraz qilaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida quyidagi

$$r = \rho(\theta), \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bunda $\rho(\theta) \in C[\alpha, \beta]$ bo'lib, u uzluksiz $\rho'(\theta)$ hosilaga ega bo'lsin.

Qutb koordinatalari (ρ, θ) dan Dekart koordinatalari (x, y) ga o'tish formulasiga binoan

$$x = \rho(\theta) \cdot \cos\theta,$$
$$y = \rho(\theta) \cdot \sin\theta, \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

bo'ladi. Natijada $\breve{AB}$ parametrik ko'rinishda

$$\varphi(\theta) = \rho(\theta) \cdot \cos\theta,$$
$$\psi(\theta) = \rho(\theta) \cdot \sin\theta, \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

berilgan egri chiziq sifatida ifodalanadi, bunda $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$ funksiyalar 3° da keltirilgan shartlarni bajaradigan funksiyalar bo'ladi.

(5) formuladan foydalanib $\breve{AB}$ egri chiziqning uzunligini topamiz:

$$\mu(\breve{AB}) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\theta)\cdot\cos\theta)'^2 + (\rho(\theta)\cdot\sin\theta)'^2}\,d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}\,d\theta.$$

Bu formula yordamida egri chiziqning uzunligi hisoblanadi.

3- misol. Ushbu $\qquad \rho = a\cdot\sin^3\dfrac{\theta}{3}$

tenglama bilan berilgan egri chiziqning uzunligi topilsin.

◀ θ o'zgaruvchi 0 dan 3π gacha o'zgarganidan (ρ, θ) nuqta 18-chizmada tasvirlangan l egri chiziqni chizib chiqadi.

(2) formuladan foydalanib chiziqning uzunligini topamiz:

$$\mu(l) = \int_0^{3\pi} \sqrt{\left(a\sin^3\frac{\theta}{3}\right)'^2 + \left(a\sin^3\frac{\theta}{3}\right)'^2}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2\cdot\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3} + a^2\sin^6\frac{\theta}{3}}\,d\theta = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta = \frac{3\pi a}{2}. \ ▶$$

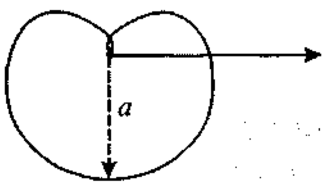
5°. Yoy differensiali. Aytaylik, tekislikdagi $\breve{AB}$ egri chiziq ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

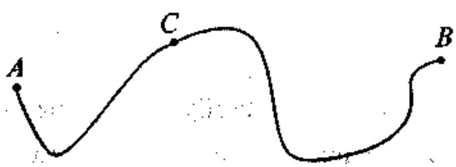
tenglamalar sistemasi bilan berilgan bo'lib, bunda $\varphi(t)$ hamda $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$ hamda $\psi'(t)$ hosilalarga ega bo'lsin (19- chizma).

Ma'lumki, t o'zgaruvchining $t=\alpha$ qiymatiga $\breve{AB}$ egri chiziqda nuqta mos keladi.

Endi ixtiyoriy $t\in[\alpha,\beta]$ ni olib, unga mos $\breve{AB}$ egri chiziqdagi nuqtani C bilan belgilaylik: $C(\varphi(t),\ \psi(t)),\ \alpha\le t\le\beta$.



18- chizma.



19- chizma.

Ravshanki, $\breve{AC}$ yoyning uzunligi C nuqtaning $\breve{AB}$ egri chiziqdagi holatiga qarab o'zgaradi va ayni paytda t ning har bir tayin qiymatida yagona $\breve{AC}$ yoyning uzunligiga ega bo'lamiz. Binobarin, $\breve{AC}$ yoyning uzunligi $\mu(\breve{AC})$ t o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi:

$$\mu_t(\breve{AC}), \quad (\alpha \le t \le \beta).$$

(5) formuladan foydalanib topamiz:

$$\mu_t(\breve{AC}) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

Modomiki, $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \in C[\alpha, \beta]$ ekan, unda $\mu_t(\breve{AC})$ funksiya hosilaga ega bo'lib,

$$(\mu_t(\breve{AC}))' = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikning kvadratini dt_2 ga ko'paytirib, ushbu

$$(\mu_t(\breve{AC}))'^2 \cdot dt^2 = \varphi'^2(t)dt^2 + \psi'^2(t)dt^2,$$

ya'ni

$$d(\mu_t(\breve{AC}))'^2 = dx^2 + dy^2$$

munosabatga kelamiz. Bu munosabat yoy differensialining kvadratini ifodalaydi. Demak, yoy differensiali $d\mu_t(\breve{AC})$ yuqoridagi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ funksiyalarning differensiallari dx hamda dy lar orqali ifodalanadi. Binobarin, (5) formula uzluksiz hosilaga ega bo'lgan $x(t)$, $y(t)$ funksiyalar yordamida egri chiziq yoyini turli usullarda parametrlashtirishda o'z ko'rinishini saqlaydi.

Mashqlar

1. Ushbu

$$x = \int_{1}^{t} \frac{\cos z}{z} dz, \quad y = \int_{1}^{t} \frac{\sin z}{z} dz, \quad \left(1 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$$

tenglamalar bilan berilgan egri chiziqning uzunligi topilsin.

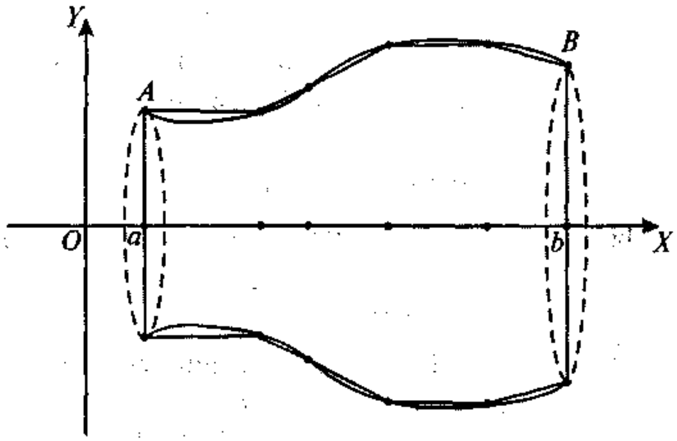
2. Ushbu $x^2 + y^2 = 2$, $y = \sqrt{|x|}$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli uchburchakning perimetri topilsin.

41- ma'ruza

Aylanma sirtning yuzi va uni hisoblash

1°. Aylanma sirt va uning yuzi tushunchasi. Ma'lumki, to'g'ri chiziq kesmasini biror o'q atrofida aylantirishdan silindrik, konus (kesik konus) sirtlar hosil bo'ladi. Bu sirtlar yuzaga ega va ular ma'lum formulalar yordamida topiladi.

Aytaylik, $f(x) \in C[a,b]$ bo'lib, $\forall x \in [a,b]$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsin. Bu funksiya grafigi $\breve{AB}$ yoyni tasvirlasin (20- chizma).



20- chizma.

$\breve{AB}$ yoyni OX o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt *aylanma sirt* deyiladi. Uni Π deylik. $[a, b]$ segmentni ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}, \quad (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$$

bo'laklashni olaylik. Bu bo'laklashning har bir

$$x_k \, (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

bo'luvchi nuqtalari orqali OY o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularning $\breve{AB}$ yoy bilan kesishish nuqtalarini $A_k = A_k(x_k, f(x_k))$ bilan belgilaylik $(A_0 = A, A_n = B;\ k = 0, 1, 2, ..., n)$. Bu nuqtalarni o'zaro to'g'ri chiziq kesmalari bilan birlashtirib, $\breve{AB}$ yoyga L siniq chiziq chizamiz.

$\breve{AB}$ yoyini OX o‘q atrofida aylantirish bilan birga L siniq chiziqni ham shu o‘q atrofida aylantiramiz. Natijada kesik konus sirtlarining birlashmasidan tashkil topgan K sirt hosil bo‘ladi. Bu K sirt yuzaga ega va uning yuzi

$$\mu(K) = 2\pi\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \cdot \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

ga teng. (Bunda kesik konus yon sirtining yuzini topish formulasidan foydalanildi).

Ravshanki, K sirt, binobarin, uning yuzi $\mu(K)$ $[a, b]$ segmentning bo‘laklashlariga bog‘liq bo‘ladi.

1- ta’rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $[a, b]$ segmentning diametri $\lambda_p < \delta$ bo‘lgan ixtiyoriy P bo‘laklashi uchun

$$|\mu(K) - S| < \varepsilon, \quad (S \in R)$$

tengsizlik bajarilsa, *S son $\mu(K)$ ning $\lambda_p \to 0$ dagi limiti* deyiladi:

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \mu(K) = S\,.$$

2- ta’rif. Agar $\lambda_p \to 0$ da $\mu(K)$ yig‘indi chekli S limitga ega bo‘lsa, Π *aylanma sirt yuzaga ega* deyiladi.

Bunda S son Π aylanma sirtning yuzi deyiladi:

$$S = \mu(\Pi)\,.$$

Demak,

$$\mu(\Pi) = \lim_{\lambda_p \to 0} 2\pi\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \cdot \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}.$$

2°. Aylanma sirt yuzini hisoblash. Faraz qilaylik, $f(x) \in C[a,b]$ bo‘lib, u $[a, b]$ segmentda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin.

Bu funksiya grafigi $\breve{AB}$ yoyni OX o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan Π aylanma sirtning yuzini topamiz.

◀ $[a, b]$ segmentning ixtiyoriy P bo‘laklashini olib, yuqoridagidek

$$\mu(K) = 2\pi\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \cdot \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

yig'indini tuzamiz. Lagranj teoremasiga ko'ra

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)=f'(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

bo'ladi, bunda $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$. Natijada

$$\mu(K)=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$$

bo'ladi. Keyingi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\mu(K)=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k+\pi\left\{\sum_{k=0}^{n-1}[(f(x_k)-\right.$$

$$\left.-f(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k\right\}. \qquad (1)$$

$f'(x)\in C[a,b]$ bo'lganligi sababli

$$f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\in R[a,b]$$

bo'ladi. Demak, $\lambda_p\to 0$ da

$$2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k\to 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx. \qquad (2)$$

Ravshanki,

$$\sqrt{1+f'^2(x)}\in C[a,b].$$

Demak, bu funksiya $[a, b]$ da o'zining maksimum qiymatiga ega bo'ladi. Uni M deylik:

$$M=\max_{a\le x\le b}\sqrt{1+f'^2(x)}.$$

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda tekis uzluksiz. Unda $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham, $\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$ ga ko'ra shunday $\delta>0$ son topiladiki, $\lambda_p<\delta$ bo'lganda

$$|f(x_k)-f(\xi_k)|<\frac{\varepsilon}{2M(b-a)},\quad |f(x_{k+1})-f(\xi_k)|<\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$$

bo'ladi. Shularni e'tiborga olib topamiz:

$$\left|\left\{\sum_{k=0}^{n-1}[(f(x_k)-f(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k\right\}\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}\left[|f(x_k)-f(\xi_k)|+|f(x_{k+1})-f(\xi_k)|\right]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k<$$

$$<M\left[\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}+\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}\right]\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k<\varepsilon.$$

Bundan $\lambda_p\to 0$ da

$$\sum_{k=0}^{n-1}[(f(x_k)-f(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))]\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k\to 0 \quad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

$\lambda_p\to 0$ da (1) tenglikda limitga o'tib (bunda (2) va (3) munosabatlarni e'tiborga olib), aylanma sirtning yuzi uchun

$$\mu(\Pi)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (4)$$

bo'lishini topamiz. ▶

1- misol. Ushbu

$$f(x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}),\quad a>0,\quad 0\le x\le a$$

zanjir chizig'ini OX o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzi topilsin.

◀ Ravshanki, $\quad f'(x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}})$.

(4) formuladan foydalanib, izlanayotgan aylanma sirtning yuzini topamiz:

$$\mu(\Pi)=2\pi\int_0^a\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2dx=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})dx=$$

$$= \frac{\pi a}{2}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]\Bigg|_0^a = \frac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4).\ \blacktriangleright$$

Aytaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq yuqori yarim tekislikda joylashgan bo'lib, u ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

rarametrik tenglamalar sistemasi bilan berilgan bo'lsin. Bunda $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(t), \psi'(t)$ hosilalarga ega. Bu egri chiziqni OX o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzi

$$\mu(\Pi) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \qquad (5)$$

bo'ladi.

2- misol. Ushbu

$$x^2 + (y-2)^2 = 1$$

aylanani OX o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning (torning) yuzi topilsin.

◀ Aylananing tenglamasini quyidagicha

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) = \cos t, \\ y &= \psi(t) = 2 + \sin t, \end{aligned} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

parametrik ko'rinishda yozamiz.

Izlanayotgan aylanma sirtning yuzi (5) formulaga ko'ra

$$\mu(\Pi) = 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \sin t)\sqrt{(\cos t)'^2 + (2 + \sin t)'^2}\,dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \sin t)\,dt = 8\pi^2$$

bo'ladi. ▶

Mashqlar

1. Aytaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $(\alpha \le t \le \beta)$ tenglamalar bilan berilgan bo'lib, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$ va $\psi'(t)$ hosilalarga ega bo'lsin. Bu egri chiziqni OX o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzi

$$P = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt, \quad (\psi(t) \ge 0)$$

bo'lishi isbotlansin.

2. Ushbu

$$2ay = x^2 - a^2, \quad (0 \le x \le 2\sqrt{2}a)$$

parabolani OY o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzi topilsin.

42- ma'ruza
Aniq integralning mexanika va fizikaga tatbiqlari

1°. Inersiya momenti. Mexanikada moddiy nuqta harakati muhim tushunchalardan biri hisoblanadi.

Odatda, o'lchami yetarli darajada kichik va massaga ega bo'lgan jism *moddiy nuqta* deb qaraladi.

Aytaylik, tekislikda m massaga ega bo'lgan A moddiy nuqta berilgan bo'lib, bu nuqtadan biror l o'qqacha (yoki O nuqtagacha) bo'lgan masofa r ga teng bo'lsin.

Ushbu

$$J = mr^2$$

miqdor A moddiy nuqtaning l o'qqa (O nuqtaga) nisbatan *inersiya momenti* deyiladi.

Masalan, $A = A(x, y)$ moddiy nuqtaning koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x = my^2, \quad J_y = mx^2, \quad J_0 = m\sqrt{x^2 + y^2}$$

bo'ladi.

Tekislikda, har biri mos ravishda

$$m_0, \ m_1, \ m_2, ..., m_{n-1}$$

massaga ega bo'lgan moddiy nuqtalar sistemasi

$$\{A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}\}$$

ning biror l o'qqa (O nuqtaga) nisbatan inersiya momenti ushbu

$$J_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k r_k^2$$

yig'indi bilan ta'riflanadi, bunda r_k – nuqta A_k dan l o'qqacha (O nuqtagacha) bo'lgan masofa $(k = 0, \ 1, \ 2, \ ..., \ n-1)$.

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ egri chiziq yoyi $\breve{AB}$ bo'yicha zichligi $\rho = 1$ ga teng massa tarqatilgan bo'lib, bunda $f(x)$ funksiya $[a, \ b]$ segmentda uzluksiz hamda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

Ravshanki, bu holda massa yoy uzunligiga teng bo'ladi:

$$m = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

$[a, \ b]$ segmentning ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}, \ (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$$

bo'laklashini olamiz. Bu bo'laklash $\breve{AB}$ yoyni

$$A_k = A_k(x_k, f(x_k)), \ (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

nuqtalar bilan n ta $\breve{A_k A_{k+1}}$, $(A_0 = A, A_{n-1} = B)$ bo'lakka ajratadi. Bunda $\breve{A_k A_{k+1}}$ bo'lakning massasi

$$m_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx, \ (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

bo'ladi. O'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib topamiz:

$$m_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

bunda $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Ma'lumki,

$$(\xi_k, f(\xi_k)), \ (k = 0,1,2,...,n-1)$$

moddiy nuqtaning koordinata o'qlariga hamda kordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J'_{x_k} = m_k \cdot f^2(\xi_k) = f^2(\xi_k) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$J'_{y_k} = m_k \cdot \xi_k^2 = \xi_k^2 \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$J'_0 = m_k(\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) = (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k$$

bo'ladi. Unda ushbu

$$\{(\xi_0, f(\xi_0)), (\xi_1, f(\xi_1), ..., (\xi_{n-1}, f(\xi_{n-1}))\}$$

moddiy nuqtalar sistemasining inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} f^2\left(\xi_k\right) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$J_y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$J_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k$$

tengliklar bilan ifodalanadi.

Agar P bo'laklashning diametri λ_P nolga intila borsa, unda har bir $\overset{\smile}{A_k A_{k+1}}$ yoyning uzunligi ham nolga intila borib, yuqoridagi

$$J_x^{(n)}, \quad J_y^{(n)}, \quad J_0^{(n)}$$

yig'indilarning limitini massaga ega bo'lgan $\overset{\smile}{AB}$ egri chiziqning mos ravishda koordinata boshi hamda koordinata o'qlariga nisbatan inersiya momentlarini ifodalaydi deb qarash mumkin. Ayni paytda,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} J_x^{(n)} = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} J_y^{(n)} = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} J_0^{(n)} = \int_a^b (x^2 + f^2(x))\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

bo'ladi.

Demak, massaga ega bo'lgan $\breve{AB}$ egri chiziqning koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari aniq integrallar yordamida topiladi:

$$J_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx,$$

$$J_y = \int_a^b x^2\sqrt{1+f'^2(x)}dx,$$

$$J_0 = \int_a^b (x^2+f^2(x))\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

2°. O'zgaruvchi kuchning bajargan ishi. Biror jismni OX o'q bo'ylab, shu o'q yo'nalishida bo'lgan $F = F(x)$ kuch ta'siri ostida a nuqtadan b nuqtaga $(a < b)$ o'tkazish uchun bajarilgan ishni topish lozim bo'lsin.

Ravshanki, jismga ta'sir etuvchi kuch o'zgarmas, ya'ni

$$F(x) = C = \text{const}$$

bo'lsa, unda jismni a nuqtadan b nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ish

$$A = C\cdot(b-a)$$

ga teng bo'ladi.

Aytaylik, jismga ta'sir etuvchi kuch x ga $(x\in[a,b])$ bog'liq bo'lib, u $[a, b]$ da uzluksiz bo'lsin:

$$F = F(x)\in C[a,b].$$

$[a, b]$ segmentning ixtyoriy

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},\ \ (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

bo'laklashini olib, bu bo'laklashning har bir

$$[x_k, x_{k+1}],\ \ (k = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

bo'lakchasida ixtyoriy ξ_k, $\xi_k\in[x_k, x_{k+1}]$, $(k = 0,1,2\ldots,n-1)$ nuqta olamiz.

Agar har bir $[x_k, x_{k+1}]$ da jismga ta'sir etuvchi kuchni o'zgarmas va u $F(\xi_k)$ ga teng deyilsa, u holda $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqda bajarilgan ish (kuch ta'sirida jismni x_k nuqtadan x_{k+1} nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ish) taxminan

$$F(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)$$

formula bilan, $[a, b]$ oraliqda bajarilgan ish esa taxminan

$$A\approx\sum_{k=0}^{n-1}F(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}F(\xi_k)\cdot\Delta x_k \tag{1}$$

formula bilan ifodalanadi.

P bo'laklashning diametri λ_P nolga intila borganda yuqoridagi yig'indining qiymati izlanayotgan ish miqdorini tobora aniqroq ifodalaydi. Bu hol $\lambda_p\to 0$ da (1) yig'indining chekli limitini *bajarilgan ish* deyish mumkinligini ko'rsatadi. Demak,

$$A=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}F(\xi_k)\cdot\Delta x_k.$$

Modomiki, $F(x)\in C[a,b]$ ekan,

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}F(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\int_a^b F(x)dx$$

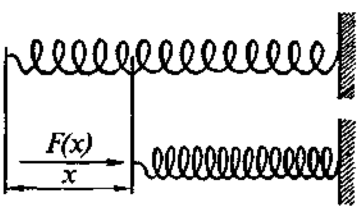
bo'ladi. Shunday qilib, o'zgaruvchi $F(x)$ kuchning $[a, b]$ dagi bajargan ishi

$$A=\int_a^b F(x)dx \tag{2}$$

formula bilan ifodalanadi.

Misol. Vintsimon prujinaning bir uchi mustahkamlangan, ikkinchi uchiga esa $F=F(x)$ kuch ta'sir etib, prujina qisilgan (21- chizma).

Agar prujinaning qisilishi unga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchga proporsional bo'lsa, prujinani a birlikka qisish uchun $F(x)$ kuchning bajargan ishi topilsin.



21- chizma.

◀ Agar $F(x)$ kuch ta'sirida prujinaning qisilish miqdorini x orqali belgilasak, u holda

$$F(x)=kx$$

bo'ladi, bunda k – proporsionallik koeffitsiyenti (qisilish koeffitsiyenti). (2) formulaga ko'ra bajarilgan ish

$$A = \int_0^a kx\,dx = \frac{ka^2}{2}$$

bo'ladi. ▶

Mashqlar

1. Uchburchak asosiga nisbatan inersiya momenti topilsin.

2. Asosining radiusi R, balandligi H bo'lgan paraboloid shaklidagi qozondan, undagi suvni chiqarishga sarflangan ish hisoblansin.

10- B O B
XOSMAS INTEGRALLAR

43- ma'ruza
Chegaralari cheksiz xosmas integrallar

Funksiyaning aniq integrali (Riman integrali) tushunchasini kiritishda integrallash oralig'ining chekli bo'lishi talab etilgan edi.

Endi cheksiz oraliqda ($[a,+\infty)$; $(-\infty,a]$; $(-\infty,+\infty)$ oraliqlarda) berilgan funksiyaning shu oraliq bo'yicha integral tushunchasini keltiramiz va o'rganamiz.

1°. Chegaralari cheksiz xosmas integral tushunchasi. $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda ($a \in R$) berilgan bo'lib, ixtiyoriy $[a, t]$ da ($a \le t < +\infty$) integrallanuvchi bo'lsin: $f(x) \in R([a,t])$.

Ushbu $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ belgilashni kiritamiz.

1- ta'rif. Agar $t \to +\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ *funksiyaning* $[a, +\infty)$ *cheksiz oraliq bo'yicha xosmas integrali* deyiladi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

kabi belgilanadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx. \qquad (1)$$

(1) integralni *chegarasi cheksiz xosmas integral* ham deb yuritiladi.
Qulaylik uchun, bundan keyin «chegarasi cheksiz xosmas integral» deyish o'rniga «integral» deymiz.

2- ta'rif. Agar $t \to +\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa, (1) *integral yaqinlashuvchi* deyiladi.

Agar $t \to +\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, (1) *integral uzoqlashuvchi* deyiladi.

1- misol. Ushbu $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ integralni qaraylik. Bu holda

$$F(t) = \int_0^t e^{-x} dx = -e^{-t} + 1$$

bo'lib, $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$ bo'ladi.

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$

2- misol. Ushbu $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, $(a > 0, \alpha > 0)$ integral uchun

$$F(t) = \int_a^t \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \ln t - \ln a, & \text{agar } \alpha = 1 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \text{agar } \alpha \neq 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lib, $t \to +\infty$ da

$$F(t) \to \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, \quad (\alpha > 1),$$
$$F(t) \to +\infty, \quad (\alpha \leq 1)$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

integral $\alpha > 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \leq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

3- misol. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx$$

integral uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki $t \to +\infty$ da

$$F(t) = \int_0^t \cos x dx = \sin t$$

funksiyaning limiti mavjud emas.

Yuqoridagidek,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integrallar va ularning yaqinlashuvchiligi, uzoqlashuvchiligi ta'riflanadi:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{a} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{u\to+\infty \\ t\to-\infty}} \int_{t}^{u} f(x)dx.$$

2°. Yaqinlashuvchi xosmas integralning sodda xossalari. Xosmas integralning turli xossalarini $f(x)$ funksiyaning $[a,+\infty)$ oraliq bo'yicha olingan

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

integrali uchun bayon etamiz. Bu xossalarni

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

integrallar uchun keltirishni o'quvchiga havola etamiz.

1- xossa. Agar $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_{b}^{+\infty} f(x)dx, \ (a < b)$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha. Bunda

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx \qquad (2)$$

tenglik bajariladi.

◀ Ravshanki,

$$\int_a^t f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^t f(x)dx, \ \ (a < b < t).$$

Aytaylik, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Demak,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$$

mavjud va chekli bo'ladi:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx .$$

(2) tenglikdan foydalanib, $t \to +\infty$ da

$$\lim_{t\to+\infty} \int_b^t f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

bo'lishini topamiz. Demak, $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi va

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

Aytaylik, $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Demak,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_b^t f(x)dx = \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

chekli bo'ladi.

(2) tenglikdan, $t \to +\infty$ da

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

bo‘ladi. ▶

2- xossa. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} C \cdot f(x)dx$ ham (C=const) yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\int_a^{+\infty} C \cdot f(x)dx = C\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

bo‘ladi.

3- xossa. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lib, $\forall x \in [a,+\infty)$ da $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$$

bo‘ladi.

4- xossa. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo‘ladi.

5- xossa. Agar $\forall x \in [a,+\infty)$ da $f(x) \le g(x)$ bo'lib, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

2- va 5- xossalarning isboti xosmas integral va uning yaqinlashuvchanligi ta'riflaridan bevosita kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ da berilgan bo'lib, $f(x)$ funksiya chegaralangan ($m \le f(x) \le M$, $x \in [a,+\infty)$), $g(x)$ funksiya esa o'z ishorasini o'zgartirmasin ($\forall x \in [a,+\infty)$ da har doim $g(x) \ge 0$ yoki $g(x) \le 0$).

6- xossa. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda shunday o'zgarmas $\mu (m \le \mu \le M)$ topiladiki,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx = \mu \int_a^{+\infty} g(x)dx \qquad (3)$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik, $\forall x \in [a,+\infty)$ da $g(x) \ge 0$ bo'lsin. U holda

$$m \cdot g(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

bo'lib,

$$m\int_a^t g(x)dx \le \int_a^t f(x)g(x)dx \le M\int_a^t g(x)dx$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu tengsizliklardan, $t \to +\infty$ da limitga o'tsak, unda

$$m\int_a^{+\infty} g(x)dx \le \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \le M\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx = 0$

bo'lganda (3) tenglik bajariladi.

Aytaylik, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx > 0$

bo'lsin. Bu holda $m \le \frac{\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx} \le M$

bo'ladi. Agar $\mu = \frac{\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx}$

deb olinsa, unda $m \le \mu \le M$ bo'lib,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx = \mu \cdot \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

$\forall x \in [a, +\infty)$ da $g(x) \le 0$ bo'lganda (3) tenglikning bajarilishi yuqoridagidek isbotlanadi. ▶

Odatda, bu xossa o'rta qiymat haqidagi teorema deyiladi.

3°. Xosmas integralning yaqinlashuvchanligi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsin.

Ma'lumki, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

xosmas integralning yaqinlashuvchanligi ushbu

$$F(t) = \int\limits_a^{t} f(x)dx, \quad (t > a)$$

funksiyaning $t \to +\infty$ da chekli limitga ega bo'lishidan iborat.

13- ma'ruzada funksiyaning chekli limitga ega bo'lishi haqidagi Koshi teoremasi, ya'ni $F(t)$ funksiyaning $t \to +\infty$ da chekli limitga ega bo'lishi uchun

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists t_0 > a,\ \forall t' > t_0,\quad \forall t'' > t_0:\ |F(t'') - F(t')| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli ekani keltirilgan edi. Bu tushuncha va tasdiqdan

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{4}$$

xosmas integralning yaqinlashuvchanligini ifodalaydigan quyidagi teoremaga kelamiz.

Teorema. (Koshi teoremasi.) (4) integral yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $t_0 \in R$ $(t_0 > a)$ topilib, ixtiyoriy $t' > t_0$, $t'' > t_0$ bo'lganda

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Mashqlar

1. Ushbu $\int_0^{+\infty} x\sin xdx$ xosmas integral **yaqinlashuvchi bo'ladimi?**

2. Ushbu $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}dx = -\frac{1}{8}$ tenglik **isbotlansin.**

44- ma'ruza

Manfiy bo'lmagan funksiyaning xosmas integrallari. Integralning absolut yaqinlashuvchanligi

1°. Manfiy bo'lmagan funksiya xosmas integralining yaqinlashuvchanligi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo'lib,

$\forall x \in [a,+\infty)$ da $f(x) \ge 0$ bo'lsin. Bu funksiyani $[a, t]$ da $(a < t < +\infty)$ integrallanuvchi deylik: $f(x) \in R([a,t])$. Bu holda

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

funksiya $(a,+\infty)$ oraliqda o'suvchi bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, $a < t_1 < t_2 < +\infty$ da

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x)dx = \int_a^{t_1} f(x)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = F(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

bo'lib, $$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \ge 0$$

bo'lganligi sababli $$F(t_2) \ge F(t_1)$$

bo'ladi. Demak, $\forall t_1, t_2 \in (a,+\infty)$ uchun

$$t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1) \le F(t_2). \ ▶$$

1- teorema. Manfiy bo'lmagan $f(x)$ funksiya xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad (f(x) \ge 0, \ x > a) \tag{1}$$

ning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $F(t)$ funksiyaning yuqoridan chegaralangan, ya'ni

$$\exists C \in R, \ \forall t > a: \quad F(t) \le C$$

bo'lishi zarur va yetarli.

◀ ***Zarurligi.*** Aytaylik, (1) integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{t \to +\infty} F(t)$$

mavjud va chekli bo'ladi. Unda, $\exists C \in R, \forall t > a$ da $F(t) \le C$ bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $F(t)$ funksiya $(a,+\infty)$ da yuqoridan chegaralangan bo'lsin. Ayni paytda, $F(t)$ o'suvchi funksiya. Demak, $t \to +\infty$ da $F(t)$ funksiya chekli limitga ega. Bu esa (1) integralning yaqinlashuvchi bo'lishini bildiradi. ▶

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $F(t)$ funksiya $(t \in (a,+\infty))$ yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

2°. Taqqoslash teoremalari. Ikkita funksiya ma'lum munosabatda bo'lganda birining xosmas integralining yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lishidan ikkinchisining ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lishini ifodalovchi teoremalarni keltiramiz. Odatda, *ular taqqoslash teoremalari* deyiladi.

2- teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo'lib, $\forall x \in [a,+\infty)$ da

$$0 \le f(x) \le g(x) \tag{2}$$

bo'lsin.

Agar $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik, (2) munosabat o'rinli bo'lib, $\int_a g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsin. Unda 1-teoremaga ko'ra

$$G(t) = \int_a^t g(x)dx \le C$$

bo'ladi. Ayni paytda,

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \le G(t)$$

bo'lganligi sababli, ya'ni 1- teoremaga binoan $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, (2) munosabat o'rinli bo'lib, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsin. Unda yuqorida keltirilgan natija va

$$F(t) \le G(t)$$

tengsizlikdan $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integralning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi. ▶

3- teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ da $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$ bo'lib,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad (0 \le k \le +\infty)$$

bo'lsin.

Agar $k < +\infty$ bo'lib, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $k > 0$ bo'lib, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k < +\infty$$

bo'lib, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists t_0 > a, \ \forall t > t_0 \ \text{da}$$

$$f(x) < (k+\varepsilon)g(x) \qquad (3)$$

bo'ladi. Yaqinlashuvchi integralning xossasiga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} (k+\varepsilon)g(x)dx$$

yaqinlashuvchi bo'ladi.

(3) munosabat va 2- teoremadan foydalanib, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz.

Aytaylik,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$$

bo'lib, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsin. Bu holda k_1 son $(k > k_1 > 0)$ uchun shunday $t_0' > a$ topiladiki, $\forall x > t_0'$ da

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k_1,$$

ya'ni
$$g(x) < \frac{1}{k_1} f(x) \qquad (4)$$

bo'ladi.

(4) munosabat va 2- teoremadan foydalanib $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning uzoqlashuvchi bo'lishini topamiz. ▶

Natija. Agar
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

bo'lib, $0 < k < +\infty$ bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar bir vaqtda yoki yaqinlashuvchi, yoki uzoqlashuvchi bo'ladi.

Ko'p hollarda biror xosmas integralning yaqinlashuvchanligini yoki uzoqlashuvchanligini aniqlashda avvaldan yaqinlashuvchanligi yoki uzoqlashuvchanligi ma'lum bo'lgan integral bilan taqqoslab (yuqorida keltirilgan teoremalardan foydalanib) qaralayotgan integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi topiladi.

Masalan,
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integralni
$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad (a > 0, \alpha > 0)$$

integral bilan taqqoslab, quyidagi natijaga kelamiz.

Natija. Aytaylik, biror $C\ (0 < C < +\infty)$ va $\alpha > 0$ sonlar uchun $x \to +\infty$ da
$$f(x) \sim \frac{C}{x^\alpha},$$

ya'ni
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \cdot f(x) = C$$

bo'lsin. U holda
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral $\alpha > 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \le 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

3°. 1- misol. Ushbu $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Agar
$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

deyilsa, u holda $\forall x \in [0, +\infty),\ 0 \le f(x) \le g(x)$ bo'ladi.

Ravshanki,
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

integral yaqinlashuvchi. 2- teoremaga ko'ra berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

2- misol. Ushbu $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ $\forall x \geq 1$ da

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = e^{-x}$$

funksiyalar uchun $\quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$

bo'ladi. Ushbu

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$$

integralning yaqinlashuvchiligi ravshan. Demak,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

3- *misol*. Ushbu $\int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ $\forall x \geq 1$ da $\quad \ln x < x$

bo'lib, $f(x) = e^{-x} \ln x$, $g(x) = xe^{-x}$ funksiyalar uchun

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

bo'ladi. Endi

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} xe^{-x} dx$$

integralning yaqinlashuvchiligini e'tiborga olib, 2- teoremadan foydalanib, berilgan

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$$

integralning yaqinlashuvchiligini topamiz. ▶

4- misol. Ushbu $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}}$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Integral ostidagi

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}=1$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$$

integral yaqinlashuvchi. Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi bo‘ladi. ▶

4°. Xosmas integralning absolut yaqinlashuvchanligi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo‘lsin. Bunda $\forall x\in[a,+\infty)$ uchun $f(x)\geq 0$ bo‘lishi shart emas.

Ta'rif. Agar

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$$

integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral *absolut yaqinlashuvchi* deyiladi.

Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lib, $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *shartli yaqinlashuvchi integral* deyiladi.

4- teorema. Agar integral absolut yaqinlashuvchi bo‘lsa, u yaqinlashuvchi bo‘ladi.

◀ Aytaylik,

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Berilgan $f(x)$ va $|f(x)|$ funksiyalar yordamida ushbu

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(-f(x) + |f(x)|)$$

funksiyalarni tuzamiz.

Bu funksiyalar uchun, $\forall x \in [a, +\infty)$ da

1) $\varphi(x) \geq 0, \ \ \psi(x) \geq 0$;

2) $\varphi(x) \leq |f(x)|, \ \ \psi(x) \leq |f(x)|$;

3) $\varphi(x) - \psi(x) = f(x)$

bo'ladi. Yuqorida keltirilgan 2- teoremadan foydalanib, quyidagi

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx, \quad \int_a^{+\infty} \psi(x)\,dx$$

integral yaqinlashuvchi ekanligini topamiz. U holda

$$\int_a^{+\infty} (\varphi(x) - \psi(x))\,dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

Mashqlar

1. Ushbu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

2. k ning qanday qiymatlarida

$$\int_1^{+\infty} x^k \frac{x+\sin x}{x-\sin x}\,dx, \quad (k<1)$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi?

45- ma'ruza

Integralning yaqinlashuvchanlik alomatlari. Integralning bosh qiymati

1°. Dirixle alomati. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsin.

1- teorema. (**Dirixle alomati.**) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ da uzluksiz va uning shu oraliqdagi boshlang'ich $F(x)$, $(F'(x)=f(x))$ funksiyasi chegaralangan;

2) $g(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ da uzluksiz $g'(x)$ hosilaga ega;

3) $g(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ da kamayuvchi;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

U holda
$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$
integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ Ravshanki,

$$f(x)\in C([a,+\infty)),\quad g(x)\in C([a,+\infty)) \Rightarrow f(x)g(x)\in C([a,+\infty))$$

bo'ladi. Binobarin, $f(x)\cdot g(x)$ funksiya $[a,t]$, $(a<t<+\infty)$ oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasidan hamda teoremaning 1- va 2- shartlaridan foydalanib topamiz:

$$\int_a^t f(x)g(x)dx=\int_a^t g(x)dF(x)=g(x)F(x)\Big|_a^t-\int_a^t f(x)g'(x)dx. \quad (1)$$

Endi

$$|g(t)F(t)|\le Mg(t),\quad (M=\sup|F(t)|<+\infty)$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, undan $t \to +\infty$ da

$$g(t)F(t) \to 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Berilishiga ko‘ra, $g(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi hamda shu oraliqda kamayuvchi funksiya. Demak, $\forall x \in [a,+\infty)$ da

$$g'(x) \le 0$$

bo‘ladi. Shuni e’tiborga olib topamiz:

$$\int_a^t |F(x)g'(x)|dx \le M\int_a^t |g'(x)|dx = -M\int_a^t g'(x)dx =$$
$$= M(g(a) - g(t)) \le Mg(a), \quad (g(t) \ge 0).$$

Unda 44- ma’ruzadagi 2- teoremadan foydalanib

$$\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchi ekanligini aniqlaymiz.

(1) tenglikda $t \to +\infty$ da limitga o‘tib, ushbu

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)g(x)dx$$

limitning mavjud va chekli bo‘lishini topamiz. Bu esa $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ integralning yaqinlashuvchi bo‘lishini bildiradi. ▶

Misol. Ushbu $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, (\alpha > 0)$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Berilgan integralni quyidagicha

$$J = \int_1^{+\infty} \sin x \frac{1}{x^\alpha}dx, \quad (\alpha > 0)$$

ko‘rinishda yozib, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ deymiz. Bu funksiyalar yuqorida keltirilgan teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

1) $f(x)=\sin x$ funksiya $[1,+\infty)$ oraliqda uzluksiz va uning boshlang‘ich funksiyasi $F(x)=-\cos x$ funksiya $[1,+\infty)$ da chegaralangan;

2) $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $(\alpha>0)$ funksiya $[1,+\infty)$ da

$$g'(x)=-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

hosilaga ega va u uzluksiz;

3) $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $(\alpha>0)$ funksiya $[1,+\infty)$ da kamayuvchi;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0$, $(\alpha>0)$.

Unda Dirixle alomatiga ko‘ra

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \quad (\alpha>0)$$

integral yaqinlashuvchi bo‘ladi. ▶

2°. Abel alomati. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo‘lsin.

2- teorema. (Abel alomati.) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ da uzluksiz bo‘lib, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi;

2) $g(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ da uzluksiz $g'(x)$ hosilaga ega va bu hosila $[a,+\infty)$ da o‘z ishorasini saqlasin;

3) $g(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ da chegaralangan.

U holda $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘ladi.

◀ Ravshanki, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning yaqinlashuvchi bo'lishidan $f(x)$ funksiyaning $[a,+\infty)$ oraliqda chegaralangan $F(x)$ boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Teoremaning 2- va 3- shartlaridan hamda monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremadan foydalanib ushbu

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

limitning mavjud va chekli bo'lishini topamiz:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = b\,.$$

Unda

$$g_1(x) = g(x) - b$$

funksiya $x \to +\infty$ da monoton ravishda nolga intiladi:

$$\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = 0\,.$$

Shunday qilib, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar Dirixle alomatida keltirilgan barcha shartlarni qanoatlantiradi. Dirixle alomatiga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

Ayni paytda,

$$f(x)g(x) = f(x)b + f(x)g_1(x)$$

bo'lganligi sababli,

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

3°. Xosmas integralning bosh qiymati. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da berilgan bo'lib, bu oraliqning istalgan $[t',t]$, $(-\infty < t' < t < +\infty)$ qismida integrallanuvchi bo'lsin:

$$F(t',t) = \int_{t'}^{t} f(x)dx.$$

Ma'lumki, ushbu

$$\lim_{\substack{t'\to-\infty,\\ t\to+\infty}} F(t',t) = \lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}} \int_{t'}^{t} f(x)dx$$

limit $f(x)$ funksiyaning $(-\infty,+\infty)$ oraliq bo'yicha xosmas integrali deyilib, u chekli bo'lsa,

$$\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}} \int_{t'}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi deyilar edi.

Bunda t' va t o'zgaruvchilarning ixtiyoriy ravishda

$$t' \to -\infty, \quad t \to +\infty$$

ga intilishi ko'zda tutiladi.

Xususan, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

bo'ladi. Biroq $\qquad F(t',t) = \int_{t'}^{t} f(x)dx$

funksiya, $t' = -t$ bo'lib, $t \to +\infty$ da chekli limitga ega bo'lishidan $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqavermaydi. Masalan, ushbu

$$F(t',t) = \int_{t'}^{t} \sin x dx$$

integral uchun $t' = -t$ bo'lsa,

$$\int_{-t}^{t} \sin x\, dx = 0, \quad (\forall t > 0)$$

bo‘lib, $$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}\sin x\,dx=0$$

ga ega bo‘lamiz. Biroq $$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi emas.

Ta'rif. Agar $t'=t$ bo‘lib, $t\to+\infty$ da

$$F(t',t)=\int_{-t'}^{t}f(x)dx$$

funksiyaning limiti mavjud va chekli bo‘lsa, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ xosmas integral bosh qiymat ma’nosida yaqinlashuvchi deyilib,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}f(x)dx$$

limit esa $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ *xosmas integralning bosh qiymati* deb ataladi. Odatda, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ xosmas integralning bosh qiymati

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}f(x)dx.$$

Bunda v.p. belgi fransuzcha «*valeur princiriale*» — «bosh qiymat» so‘zlarining dastlabki harflarini ifodalaydi.

Shunday qilib, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u bosh qiymat ma’nosida ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Biroq,

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ xosmas integralning bosh qiymat ma'nosida yaqinlashuvchi bo'lishidan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Mashqlar

1. Dirixle alomatidan foydalanib

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}\,dx, \quad (\alpha > 0)$$

integralning yaqinlashuvchi bo'lishi isbotlansin.

2. Ushbu

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \operatorname{arctg} x\,dx, \quad (\alpha > 0)$$

integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

46- ma'ruza
Xosmas integrallarni hisoblash

1°. Nyuton–Leybnits formulasi. Ushbu

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lib, uni hisoblash talab etilsin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda boshlang'ich $F(x)$ funksiyaga ega va $x \to +\infty$ da $F(x)$ funksiya chekli limiti mavjud bo'lsin:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty).$$

U holda

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{a}^{t} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} (F(t) - F(a)) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty} \qquad (1)$$

bo'ladi.

Bu formula *Nyuton—Leybnits formulasi* deyiladi.

1- misol. Ushbu $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\, dx$ integral hisoblansin.

◀ Ravshanki, $F(x) = \cos \frac{1}{x}$ funksiya $\left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$ oraliqda $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

(1) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\, dx = \cos \frac{1}{x}\Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} = 1. \ ▶$$

2°. Bo'laklab integrallash. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, +\infty)$ oraliqda uzluksiz va uzluksiz $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin.

Agar

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x) \cdot g'(x) dx \quad (\int\limits_a^{+\infty} f'(x) g(x) dx)$ integral yaqinlashuvchi;

2) ushbu $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) g(x))$ limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda

$$\int\limits_a^{+\infty} f'(x) \cdot g(x) dx, \quad (\int\limits_a^{+\infty} f(x) g'(x) dx)$$

integral yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int\limits_a^{+\infty} f'(x) \cdot g(x) dx = \lim_{x \to +\infty} (f(x) g(x)) - f(a) \cdot g(a) - \int\limits_a^{+\infty} f(x) g'(x)\, dx$$

$$\left(\int\limits_a^{+\infty} f(x) g'(x) dx = \lim_{x \to +\infty} (f(x) g(x)) - f(a) \cdot g(a) - \int\limits_a^{+\infty} f'(x) g(x)\, dx \right) \quad (2)$$

bo'ladi.

◀ Ravshanki,

$$\int_a^t f'(x)g(x)dx = \int_a^t g(x)df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^t - \int_a^t f(x)dg(x) =$$

$$= f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^t f(x)g'(x)dx.$$

Keyingi tenglikda, $t \to +\infty$ da limitga o'tib topamiz:

$$\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx = \lim_{t\to+\infty}(f(t)g(t)) - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx.$$ ▶

(2) *formula bo'laklab integrallash formulasi* deyiladi.

2- misol. Ushbu $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ integral hisoblansin.

◀ Agar $g(x) = x$, $f'(x) = e^{-x}$ deb olsak, unda

$$g'(x) = 1, \quad f(x) = -e^{-x}$$

bo'lib, (2) formulaga ko'ra ($a = 0$)

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}(-te^{-t}) - 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

bo'ladi. ▶

3°. O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash. Ushbu

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integralni qaraymiz. Bu integralda $x = \varphi(z)$ almashtirishni bajaramiz. Bunda $x = \varphi(z)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\varphi(z)$ funksiya $[\alpha, +\infty)$ oraliqda uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(z)$ hosilaga ega;

2) $\varphi(z)$ funksiya $[\alpha, +\infty)$ da qat'iy o'suvchi;

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(+\infty) = \lim_{z\to+\infty} \varphi(z) = +\infty$.

Agar $$\int_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$
xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

bo'ladi.

◀ Ixtiyoriy $z(\alpha < z < +\infty)$ ni olib, unga mos $\varphi(z) = t$ nuqtani topamiz.

Ravshanki, yuqoridagi shartlarda $[a,t)$ da 37- ma'ruzadagi (2) formulaga ko'ra

$$\int_{a}^{t} f(x)dx = \int_{\alpha}^{z} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikda $t \to +\infty$ da (bunda $z = \varphi^{-1}(t) \to +\infty$) limitga o'tib topamiz:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz.$$

Bu esa keltirilgan tasdiqni isbotlaydi. ▶

3- misol. Ushbu $J = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ integral hisoblansin.

◀ Bu integralda $x = \frac{1}{t}$ almashtirishni bajaramiz. Natijada

$$J = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{t^2dt}{1+t^4}$$

bo‘lib, $$J=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Keyingi integralda $x-\frac{1}{x}=z$ deb, topamiz:

$$J=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{2+z^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Demak, $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \ ▶$$

4°. Xosmas integrallarni taqribiy hisoblash. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo‘lib, ushbu

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsin. Ta’rifga binoan

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx,$$

ya’ni

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists t_0>a,\ \forall t>t_0:$$
$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)dx-\int_a^t f(x)dx\right|<\varepsilon$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx-\int_a^t f(x)=\int_t^{+\infty}f(x)dx.$$

Demak, $$\left|\int_t^{+\infty}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Natijada ushbu

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \approx \int_a^t f(x)dx \tag{5}$$

taqribiy formulaga kelamiz. Uning xatoligi

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

bo'ladi.

4-misol. Ushbu $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ xosmas integral taqribiy hisoblansin.

◀ (5) formulaga ko'ra, berilgan integralni taqribiy hisoblash uchun ushbu

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_0^a e^{-x^2}dx, \quad (a > 0)$$

formulani hosil qilamiz. Uning xatoligi

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

ga teng bo'ladi. Bu xatolikni yuqoridan baholaymiz:

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \frac{1}{a}\int_a^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2a}\int_a^{+\infty} e^{-x^2}d(x^2) = \frac{1}{2a}(-e^{-x^2})_a^{+\infty} = \frac{1}{2a}e^{-a^2}.$$

Aytaylik, $a = 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_0^1 e^{-x^2}dx$$

bo'lib, bu taqribiy formulaning xatoligi uchun

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le 0,1839$$

bo'ladi.

Aytaylik, $a = 2$ bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^2 e^{-x^2}\,dx$$

bo'lib, bu taqribiy formulaning xatoligi uchun

$$\int_2^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le 0,00458$$

bo'ladi.

Aytaylik, $a = 3$ bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^3 e^{-x^2}\,dx$$

bo'lib, bu taqribiy formulaning xatoligi uchun

$$\int_3^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le 0,00002$$

bo'ladi. ▶

Mashqlar

1. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$$

integral hisoblansin.

2. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{\arcsin a}{a\sqrt{1-a^2}}, \quad (a > 0)$$

tenglik isbotlansin.

47- ma'ruza

Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari

1°. Maxsus nuqta. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin. $x_0 \in R$ nuqtaning ushbu

$$\dot{U}_\delta(x_0) = \{x \in R;\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta;\ x \neq x_0\}$$

atrofida qaraymiz, bunda δ — ixtiyoriy musbat son.

1- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya

$$X \cap \dot{U}_\delta(x_0) \neq \varnothing$$

to'plamda chegaralanmagan bo'lsa, x_0 *nuqta* $f(x)$ *funksiyaning maxsus nuqtasi* deyiladi.

Masalan, $[a, b)$ da berilgan $f(x) = \frac{1}{b-x}$ funksiya uchun $x_0=b$ — maxsus nuqta; $R \setminus \{-1;\ 0;\ 1\}$ to'plamda berilgan $f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$ funksiya uchun $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ nuqtalar maxsus nuqtalar bo'ladi.

2°. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali tushunchasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b)$ da berilgan bo'lib, b nuqta shu funksiyaning maxsus nuqtasi bo'lsin. Bu funksiya ixtiyoriy $[a, t]$ da $(a < t < b)$ integrallanuvchi bo'lsin. Ravshanki, bu integral t ga bog'liq bo'ladi:

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx, \quad (a < t < b).$$

2- ta'rif. Agar $t \to b - 0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, bu limit *chegaralanmagan* $f(x)$ *funksiyaning* $[a, b)$ *bo'yicha xosmas integrali* deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b-0} F(x) = \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)dx \tag{1}$$

3- ta'rif. Agar $t \to b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa, (1) *xosmas integral yaqinlashuvchi* deyiladi.

Agar $t \to b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, (1) *xosmas integral uzoqlashuvchi* deyiladi.

$f(x)$ funksiya $(a, b]$ da berilgan bo'lib, $x_0 = a$ nuqta uning maxsus nuqtasi; $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x_0 = a$, $x_1 = b$ nuqtalar uning maxsus nuqtalari bo'lgan holda shu funksiyaning $(a, b]$ hamda (a, b) bo'yicha xosmas integrallari, ularning yaqinlashuvchanligi hamda uzoqlashuvchanligi yuqoridagidek ta'riflanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a+0} F(t) = \lim_{t \to a+0} \int_t^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{t' \to a+0 \\ t \to b-0}} F(t', t) = \lim_{\substack{t' \to a+0 \\ t \to b-0}} \int_{t'}^{t} f(x)dx.$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(a, b) \setminus \{c\}$ to'plamda $(a < c < b)$ berilgan bo'lib, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = c$ nuqtalar uning maxsus nuqtalari bo'lsin. Bu funksiyaning quyidagi

$$\int_{t'}^{t} f(x)dx = \varphi(t', t), \quad (a < t' < t < c),$$

$$\int_{u'}^{u} f(x)dx = \psi(u', u), \quad (c < u' < u < b)$$

integrallari mavjud bo'lsin.

4- ta'rif. Agar $t' \to a+0$, $t \to c-0$ hamda $u' \to c+0$, $u \to b-0$ da $\varphi(t', t) + \psi(u', u)$ funksiyaning limiti

$$\lim_{\substack{t' \to a+0 \\ t \to c-0 \\ u' \to c+0 \\ u \to b-0}} [\varphi(t', t) + \psi(u', u)] = \lim_{\substack{t' \to a+0 \\ t \to c-0 \\ u' \to c+0 \\ u \to b-0}} [\int_{t'}^{t} f(x)dx + \int_{u'}^{u} f(x)dx]$$

mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning (a, b) bo'yicha xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{t'\to a+0 \\ t\to c-0 \\ u'\to c+0 \\ u\to b-0}} [\int_{t'}^{t} f(x)dx + \int_{u'}^{u} f(x)dx]. \qquad (2)$$

5- ta'rif. Agar $t' \to a+0$, $t \to c-0$ hamda $u' \to c+0$, $u \to b-0$ da $\varphi(t',t)+\psi(u',u)$ funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa, (2) integral yaqinlashuvchi deyiladi.

1- misol. Ushbu $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Ravshanki, x_0=0 nuqta $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiyaning maxsus nuqtasi. Demak, qaralayotgan integral chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali bo'ladi.

Ta'rifga binoan

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+0} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+0} 2(1-\sqrt{t}) = 2$$

bo'ladi. Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi va u 2 ga teng. ▶

2- misol. Ushbu $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki

$$\lim_{t\to+0} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+0} (\ln x)\Big|_t^1 = +\infty.$$

3- misol. Ushbu $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Integral ostidagi

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

funksiya uchun $x_0=0$, $x_1=1$ nuqtalar maxsus nuqtalar bo'ladi. Xosmas integral ta'rifidan foydalanib topamiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\substack{t'\to+0\\ t\to1-0}}\int_{t'}^{t}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{\substack{t'\to+0\\ t\to1-0}}[\arcsin(2x-1)]_{t'}^{t}=$$

$$=\lim_{\substack{t'\to+0\\ t\to1-0}}[\arcsin(2t-1)-\arcsin(2t'-1)]=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Demak, integral yaqinlashuvchi va

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\pi\,. \blacktriangleright$$

4- misol. Ushbu

$$J_1=\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}},\quad J_2=\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}},\quad (\alpha>0)$$

integrallar yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Ta'rifdan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}=\lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}=\lim_{t\to a+0}\left[\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_t^b=$$

$$=\lim_{t\to a+0}\frac{1}{1-\alpha}[(b-a)^{1-\alpha}-(t-a)^{1-\alpha}],\quad (\alpha\neq1).$$

Bu limit α ga bog'liq bo'lib, $\alpha<1$ bo'lganda chekli, demak, J_1 xosmas integral yaqinlashuvchi, $\alpha>1$ bo'lganda esa cheksiz bo'lib, J_1 xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

$\alpha=1$ bo'lganda

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{t\to a+0}(\ln(x-a))$$

bo'lib, J_1 integral — uzoqlashuvchi.

Demak, $$J_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad (\alpha > 0)$$

integral $\alpha < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash ko'rsatish mumkin,

$$J_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad (\alpha > 0)$$

integral $\alpha < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. ▶

Yuqorida keltirilgan ta'rif va misollardan chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali ham 43—46- ma'ruzalarda batafsil o'rganilgan chegaralari cheksiz (cheksiz oraliq bo'yicha) xosmas integral kabi ekanligini ko'ramiz.

Shuni e'tiborga olib, chegaralanmagan fuksiyaning xosmas integrallari haqidagi tushuncha va tasdiqlarni keltirish bilangina kifoyalanamiz. Bunda $[a, b)$ da berilgan va $x = b$ uning maxsus nuqtasi bo'lgan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali $\int_a^b f(x)dx$ ni qaraymiz.

3°. Yaqinlashuvchi xosmas integralning sodda xossalari.

1) Agar $\int_a^b f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_c^b f(x)dx, \quad (a < c < b)$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha. Bunda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2) Agar $\int_a^b f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^b cf(x)dx$ ham $(c = \text{const})$ yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx,\ (c = \text{const})$$

bo‘ladi.

3) Agar $\int_a^b f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lib, $\forall x\in[a,b)$ da $f(x)\geq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

bo‘ladi.

4) Agar $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

bo‘ladi.

5) Agar $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo‘lib, $\forall x\in[a,b)$ da $f(x)\leq g(x)$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

bo‘ladi.

4°. Xosmas integralning yaqinlashuvchanligi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b)$ da berilgan bo‘lib, b nuqta shu funksiyaning maxsus nuqtasi bo‘lsin.

1- teorema. (Koshi teoremasi.) Ushbu

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilib, $b-\delta < t' < b$, $b-\delta < t'' < b$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy t' va t'' lar uchun

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

5°. Manfiy bo'lmagan funksiyaning xosmas integrallari. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b)$da berilgan (b nuqta shu funksiyaning maxsus nuqtasi) bo'lib, $\forall x \in [a,b)$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsin.

2- teorema. Ushbu

$$\int_a^b f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\forall t \in (a,b)$ da

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \leq C, \quad (C = \text{const})$$

tengsizlikning bajarilishi, ya'ni $F(t)$ funksiyaning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

Natija. Agar $F(t) = \int_a^t f(x)dx$, $(\forall t \in (a,b))$ yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

6°. Taqqoslash teoremalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b)$ da berilgan bo'lib, b nuqta shu funksiyalarning maxsus nuqtalari bo'lsin.

3- teorema. Agar $\forall x \in [a,b)$ da $0 \leq f(x) \leq g(x)$ bo'lib, $\int_a^b g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi, $\int_a^b f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b g(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

4- teorema. Aytaylik, $f(x) \geq 0, (g(x) \geq 0), \ x \in [a,b)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

bo‘lsin.

Agar $k < +\infty$ bo‘lib, $\int_a^b g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^b f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo‘ladi,

Agar $k > 0$ bo‘lib, $\int_a^b g(x)dx$ uzoqlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^b f(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Natija. Yuqoridagi 4- teoremaning shartida $0 < k < +\infty$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b g(x)dx$ integrallar bir vaqtda yoki yaqinlashuvchi, yoki uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Natija. Agar x o‘zgaruvchining b ga yetarlicha yaqin qiymatlarida

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^{\alpha}}, \quad (\alpha > 0)$$

bo‘lsa, u holda:

1) $\varphi(x) \leq C < +\infty$ va $\alpha < 1$ bo‘lganda $\int_a^b f(x)dx$ integral – yaqinlashuvchi,

2) $\varphi(x) \geq C > 0$ va $\alpha \geq 1$ bo‘lganda $\int_a^b f(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

5- misol. Ushbu $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} dx$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Integral ostidagi funksiya

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{\cos^2 x}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$$

bo‘lib, $\forall x \in [0,1)$ uchun $\varphi(x) = \cos^2 x \le 1$, $\alpha = \frac{1}{4} < 1$ bo‘ladi. Yuqoridagi natijadan foydalanib berilgan integralning yaqinlashuvchi bo‘lishini topamiz. ▶

6- misol. Ushbu $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Ravshanki, quyidagi $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ xosmas integral yaqinlashuvchidir. Endi ushbu

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

limitni hisoblaymiz: $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim\limits_{x\to 1-0} x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

U holda yuqoridagi natijaga ko‘ra berilgan xosmas integralning yaqinlashuvchi ekanini topamiz. ▶

7°. Xosmas integralning absolut yaqinlashuvchanligi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b)$ da berilgan bo‘lib, b nuqta shu funksiyaning maxsus nuqtasi bo‘lsin. (Bunda $\forall x \in [a,b)$ da $f(x) \ge 0$ bo‘lishi shart emas).

Ravshanki, ushbu $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ integral manfiy bo‘lmagan funksiyaning xosmas integrali bo‘ladi.

5- teorema. Agar $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

6- ta'rif. Agar $\int_a^b |f(x)|dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ *absolut yaqinlashuvchi integral* deyiladi.

Agar $\int_a^b |f(x)|dx$ integral uzoqlashuvchi bo'lib, $\int_a^b f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ *shartli yaqinlashuvchi integral* deyiladi.

8°. Xosmas integrallarni hisoblash. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b)$da uzluksiz bo'lib, uning $F(x)$ boshlang'ich funksiyasi $x \to b-0$ da chekli limitga ega bo'lsin:

$$\lim_{x \to b-0} F(x) = F(b).$$

U holda

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b-0} \int_a^t f(x)dx = \lim_{x \to b-0} [F(t) - F(a)] = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

bo'ladi. Bu *Nyuton—Leybnits formulasi* deyiladi.

Aytaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a, b)$ da berilgan va shu oraliqda uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, b nuqta $v(x) \cdot u'(x)$ hamda $u(x) \cdot v'(x)$ funksiyalarning maxsus nuqtalari bo'lsin.

Agar:

1) $\int_a^b v(x)du(x)$ integral yaqinlashuvchi;

2) Ushbu $$\lim_{x \to b-0} u(t) \cdot v(t)$$

limiti mavjud va chekli bo'lsa, u holda $\int_a^b u(x)dv(x)$ integral yaqinlashuvchi va

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \qquad (3)$$

bo'ladi, bunda $u(b) \cdot v(b) = \lim_{x \to b-0} u(t) \cdot v(t)$.

7- misol. Ushbu $\int\limits_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ integral hisoblansin.

◀ Bu integralda $u(x) = x+1$, $dv(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$ deb olinsa,

unda $du(x) = dx$, $v(x) = 3(x-1)^{\frac{1}{3}}$ va

$$u(x)\cdot v(x)\Big|_0^1 = (x+1)\cdot 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^1 = 3,$$

$$\int\limits_0^1 v(x)du(x) = \int\limits_0^1 3(x-1)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{9}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 = -\frac{9}{4}$$

bo‘lib, (3) formulaga ko‘ra

$$\int\limits_0^1 u(x)\cdot dv(x) = \int\limits_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3 - \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{21}{4}$$

bo‘ladi. Demak, $\int\limits_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{21}{4}$. ▶

Quyidagi
$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

xosmas integralda (b — maxsus nuqta) $x = \varphi(z)$ almashtirish bajaramiz, bunda $\varphi(z)$ funksiya $[\alpha,\beta)$ oraliqda uzluksiz $\varphi'(z) > 0$ hosilaga ega hamda

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = \lim_{z\to\beta-0}\varphi(z) = b.$$

Agar
$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$$

integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$$

bo'ladi.

8- misol. Ushbu $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ integral hisoblansin.

◀ Bu integralda $x = \varphi(z) = z^2$ almashtirish bajaramiz. Ravshanki, $x = z^2$ bu funksiya $(0,\ 1]$ oraliqda $x' = 2z > 0$ hosilaga ega va u uzluksiz bo'lib, $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1$ bo'ladi.

Unda $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2dz}{1+z^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,z\Big|_0^1 = 2\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ bo'ladi. ▶

9°. Chegaralanmagan funksiya xosmas integralining bosh qiymati. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]\setminus\{c\}$ da berilgan bo'lib, c nuqta $(a < c < b)$ shu funksiyaning maxsus nuqtasi bo'lsin.

Ma'lumki, ushbu

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha'\to 0}}\left[\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha'}^{b} f(x)dx\right]$$

limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali deyilib, u chekli bo'lsa,

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha'\to 0}}\left[\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha'}^{b} f(x)dx\right] = \int_a^b f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi deyilar edi. Bunda α va α' o'zgaruvchilar ixtiyoriy ravishda nolga intiladi deb qaraladi.

Xususan, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha}^{b} f(x)dx\right] = \int_a^b f(x)dx\,,$$

biroq

$$F(\alpha,\alpha') = \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha'}^b f(x)dx$$

funksiya $\alpha = \alpha'$ bo'lib, $\alpha \to 0$ da chekli limitga ega bo'lishidan $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integralning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqavermaydi. Masalan,

$$F(\alpha,\alpha') = \int_a^{c-\alpha} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\alpha'}^b \frac{dx}{x-c}, \quad (a < c < b)$$

uchun $\alpha = \alpha'$ *bo'lsa,*

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\int_a^{c-\alpha} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\alpha}^b \frac{dx}{x-c}\right] = \ln\frac{b-c}{c-a}$$

bo'ladi. Biroq

$$F(\alpha,\alpha') = \int_a^{c-\alpha} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\alpha'}^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\alpha}{\alpha'}$$

bo'lib, $\alpha \to 0$, $\alpha' \to 0$ da uning limiti mavjud emas, ya'ni

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \quad (a < c < b)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi emas.

7- ta'rif. Agar $\alpha = \alpha'$ bo'lib, $\alpha \to 0$ da

$$F(\alpha,\alpha') = \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha'}^b f(x)dx$$

funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral bosh qiymat ma'nosida yaqinlashuvchi deyilib,

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha}^b f(x)dx\right]$$

limit esa $\int_a^b f(x)dx$ *xosmas integralning bosh qiymati* deyiladi. Uni

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to 0}\left[\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha}^{b} f(x)dx\right].$$

Mashqlar

1. Ushbu $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integral hisoblansin.

2. Ushbu $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$ integralning yaqinlashuvchanligi isbotlansin, qiymati topilsin.

3. Ushbu $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x}$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

48- ma'ruza

Xosmas integrallarning umumiy holi

1°. Chegaralanmagan funksiyaning cheksiz oraliq bo'yicha xosmas integrali tushunchasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a, +\infty)$ oraliqda berilgan bo'lib, a nuqta uning maxsus nuqtasi bo'lsin.

Ayni paytda, bu funksiya istalgan chekli $[t, \tau]$ $(a < t < \tau < +\infty)$ oraliqda integrallanuvchi, ya'ni

$$\int_t^{\tau} f(x)dx = F(t,\tau)$$

integral mavjud bo'lsin.

Ma'lumki, $t \to a+0$ da $F(t,\tau)$ funkiyaning limiti mavjud bo'lsa, uni chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali deyilib,

$$\int_a^\tau f(x)dx$$

kabi belgilanar edi:

$$\int_a^\tau f(x)dx = \lim_{t \to a+0} F(t,\tau) = \lim_{t \to a+0} \int_t^\tau f(x)dx. \qquad (1)$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiyaning $(a, \tau]$ oraliq bo'yicha xosmas integrali $\int_a^\tau f(x)dx$ mavjud bo'lsin. Ravshanki, bu integral τ ga bog'liq bo'ladi.

Agar $\tau \to +\infty$ da $\int_a^\tau f(x)dx$ ning limiti mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning $(a, +\infty)$ oraliq bo'yicha xosmas integrali deyilib, uni $\int_a^\tau f(x)dx$ kabi belgilanar edi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\tau \to +\infty} \int_a^\tau f(x)dx. \qquad (2)$$

(1) va (2) munosabatlardan topamiz:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\tau \to +\infty} \lim_{t \to a+0} \int_t^\tau f(x)dx. \qquad (3)$$

Bu (3) munosabat chegaralanmagan funksiyaning **cheksiz** oraliq bo'yicha xosmas integralini ifodalaydi.

2°. $\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ **integral va uning yaqinlashuvchanligi**. Ravshanki, bu integral a ga bog'liq. $a < 1$ bo'lganda $x = 0$ nuqta integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtasi bo'ladi. Demak,

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

integral chegaralanmagan funksiyaning cheksiz oraliq bo'yicha xosmas integrali.

Qaralayotgan integralni quyidagicha

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

ko'rinishda yozib, tenglikning o'ng tomonidagi integrallarning har birini alohida-alohida yaqinlashuvchanlikka tekshiramiz.

Ushbu $\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ integralda, integral ostidagi funksiya uchun

$$\frac{1}{e}\frac{1}{x^{1-a}} \le x^{a-1}e^{-x} \le \frac{1}{x^{1-a}}, \quad (0 < x \le 1)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Ma'lumki,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$$

integral $1-a<1$, ya'ni $a>0$ bo'lganda – yaqinlashuvchi, $1-a \ge 1$, ya'ni $a \le 0$ bo'lganda – uzoqlashuvchi. Demak,

$$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx \quad \text{va} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$$

integrallarda $$x^{a-1}e^{-x} \le \frac{1}{x^{1-a}}$$

bo'lib, $a > 0$ bo'lganda $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$ integral – yaqinlashuvchi. Unda

taqqoslash haqidagi teoremaga ko'ra $a > 0$ bo'lganda

$$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi $$\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

integralni yaqinlashuvchanlikka tekshiramiz.

Ushbu $\int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ va $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$

integrallarni qaraylik. Ravshanki, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ integral yaqinlashuvchi. Ayni paytda, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{a-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = 0$ bo'lganligi sababli, 44- ma'ruzada keltirilgan tasdiqqa ko'ra $\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ integral a ning ixtiyoriy qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'ladi.

Demak, berilgan $\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ integral $a > 0$ bo'lganda yaqinlashuvchi bo'ladi.

3°. $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ integral va uning yaqinlashuvchanligi.

Bu integraldagi integral ostidagi funksiya uchun:

a) $a<1,\ b\ge 1$ bo'lganda $x = 0$ maxsus nuqta;

b) $a\ge 1,\ b<1$ bo'lganda $x = 1$ maxsus nuqta;

d) $a<1,\ b<1$ bo'lganda $x = 0$, $x = 1$ nuqtalar maxsus nuqtalar bo'ladi.

Berilgan integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

Ravshanki, $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{x^{a-1}} = 1$, $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(1-x)^{a-1}} = 1$.

Unda 47- ma'ruzada keltirilgan tasdiqqa ko'ra

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \text{ bilan } \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}dx,$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \text{ bilan } \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^{b-1}\,dx$$

integrallar bir vaqtda yoki yaqinlashadi, yoki uzoqlashadi.

Ma'lumki, $a > 0$ bo'lganda $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}dx$ integral yaqinlashuvchi, $b > 0$ bo'lganda

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^{b-1}\,dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, $a > 0$ bo'lganda

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi, $b > 0$ bo'lganda

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. Shunday qilib, berilgan

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

xosmas integral $a > 0$ va $b > 0$ bo'lganda yaqinlashuvchi bo'ladi.

Mashqlar

1. Ushbu $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

2. Ushbu $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ integral yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

11- B O B
SONLI QATORLAR

49- ma'ruza

Sonli qatorlar va ularning yaqinlashuvchanligi. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Koshi teoremasi

1°. Sonli qator tushunchasi. Faraz qilaylik,

$$\{a_n\}:\ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Ular yordamida ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \tag{1}$$

ifodani hosil qilamiz. (1) ifoda *sonli qator*, qisqacha *qator* deyiladi va u $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Bunda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ sonlar *qatorning hadlari*, a_n esa *qatorning umumiy hadi* (yoki n- hadi) deyiladi.

Quyidagi

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

yig'indi (1) qatorning n- *qismiy yig'indisi* deyiladi.

Demak, (1) qator berilganda har doim bu qatorning qismiy yig'indilaridan iborat ushbu $\{S_n\}$:

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

ketma-ketlikni hosil qilish mumkin. Masalan,

$$\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

qatorning qismiy yig'indisi

$$S_n = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

bo'lib, ulardan tuzilgan $\{S_n\}$ ketma-ketlik

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

bo'ladi.

1- ta'rif. Agar $n \to \infty$ da $\{S_n\}$ ketma-ketlik S ga $(S \in R)$ yaqinlashsa, (1) *qator yaqinlashuvchi* deyiladi, *S uning yig'indisi* deyiladi:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lmasa (limit mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa), (1) *qator uzoqlashuvchi* deyiladi.

1- misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$ qator uchun $S_n = 1 - \frac{1}{1+n}$ bo'lib,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

bo'ladi. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi 1 ga teng: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$

2- misol. Quyidagi $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$ qator uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ uchun $\lim_{n \to \infty} S_n = +\infty$.

3- misol. Ushbu $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$ qator uchun

$$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{agar } n - \text{juft son}, \\ 1, & \text{agar } n - \text{toq son} \end{cases}$$

bo'lib u $n \to \infty$ da limitga ega emas. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

4- misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots, \quad (a \in R, q \in R)$$

qator yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Odatda, bu *geometrik qator* deb yuritiladi. Berilgan qator uchun

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}, \quad (q \neq 1)$$

bo‘lib, $|q| < 1$ bo‘lganda $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{q-1}$ bo‘ladi.

Demak, bu holda geometrik qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $\frac{a}{1-q}$ ga teng.

Agar $q > 1$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$,

$q = 1$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$

bo‘lib, bu hollarda berilgan qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

$q \leq -1$ bo‘lganda esa $\{S_n\}$ ketma-ketlik limitga ega emas. Demak, bu holda ham qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Shunday qilib, geometrik qator $|q| < 1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi, $|q| > 1$ bo‘lganda uzoqlashuvchi bo‘ladi. ▶

2°. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari. Aytaylik, biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

qator berilgan bo‘lsin.

Ushbu

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots \tag{2}$$

qator (bunda m — tayinlangan natural son) (1) *qatorning qoldig‘i* deyiladi.

1- xossa. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (2) qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va aksincha; (2) qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishidan (1) qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

◀ (1) qatorning qismiy yig‘indisi

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

(2) qatorning qismiy yig'indisi

$$M_k^{(m)} = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}$$

lar uchun
$$S_{m+n} = S_m + M_k^{(m)} \tag{3}$$
bo'ladi.

Aytaylik, (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Unda $k \to \infty$ da S_{m+n} chekli limitga ega bo'lib, (3) munosabatga ko'ra $k \to \infty$ da $M_k^{(m)}$ ham chekli limitga ega bo'ladi. Demak, (2) qator yaqinlashuvchi.

Aytaylik, (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Unda $k \to \infty$ da $M_k^{(m)}$ chekli limitga ega bo'ladi. Yana (3) munosabatga ko'ra $k \to \infty$ da S_{m+n} ham chekli limitga ega bo'ladi. Demak, (1) qator yaqinlashuvchi. ▶

2- xossa. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \ldots + c \cdot a_n + \ldots$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $c \cdot S$ ga teng bo'ladi, bunda $c \neq 0$ — o'zgarmas son.

3- xossa. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda S_1 va S_2 ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S_1 + S_2$ ga teng bo'ladi.

2- va 3- xossalarning isboti sonli qatorlar va ularning yaqinlashuvchanligi ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

4- xossa. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $n \to \infty$ da a_n nolga intiladi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

◀ Aytaylik, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsin: Ta'rifga binoan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = S .$$

Ravshanki, $a_n = S_n - S_{n-1}$ bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 . \blacktriangleright$$

Eslatma. Qatorning umumiy hadi a_n ning $n \to \infty$ da nolga intilishidan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

qatorning umumiy hadi $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ bo'lib, u $n \to \infty$ da nolga intiladi. Ammo bu qator uzoqlashuvchi, chunki

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

ketma-ketlik $n \to \infty$ da $+\infty$ ga intiladi: $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Yuqorida keltirilgan 4- xossa qator yaqinlashuvchi bo'lishining zaruriy shartini ifodalaydi.

5- xossa. Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \tag{1}$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qatorning hadlarini guruhlab quyidagi

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + \dots \tag{4}$$

qatorni hosil qilamiz, bunda $n_1 < n_2 < \dots$ bo'lib, $\{n_k\}$ — natural sonlar ketma-ketligi $\{n\}$ ning qismiy ketma-ketligi.

Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda (4) qator ham yaqinlashuvchi va yig'indisi S bo'ladi.

◀ (1) qator yaqinlashuvchi bo'lib, yigindisi S ga teng bo'lsin. U holda

$$n \to \infty \text{ da } S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \to S$$

bo'ladi.

Aytaylik, (4) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat ketma-ketlik $\{S_{n_k}\}$ bo'lsin (k=1, 2, 3, ...). Ravshanki, bu ketma-ketlik $\{S_n\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi bo'ladi. Ma'lum teoremaga ko'ra

$$k \to \infty \text{ da } S_{n_k} \to S$$

bo'ladi. Demak, (4) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S ga teng. ▶

3°. Qatorning yaqinlashuvchanligi. Koshi teoremasi. Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

qator berilgan bo'lsin. Ma'lumki, bu qatorning yaqinlashuvchanligi ushbu

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

ketma-ketlikning $n \to \infty$ da chekli limitga ega bo'lishidan iborat.

9- ma'ruzada sonlar ketma-ketligining chekli limitga ega bo'lishi haqida Koshi teoremasi, ya'ni $\{S_n\}$ ketma-ketlikning $n \to \infty$ da chekli limitga ega bo'lishi uchun

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in N, \ \forall n > n_0, \ \forall m \in N \text{ da } |S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli ekani keltirilgan edi.

Bu tushuncha va tasdiqdan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchiligini ifodalaydigan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema. (Koshi teoremasi.) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $n_0 \in N$ topilib, $\forall n > n_0$ va m = 1, 2, 3, ... bo'lganda

$$|S_{n+m} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+m}| < \varepsilon \tag{5}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Eslatma. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun (5) shart bajarilmasa, ya'ni

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \ \forall k \in N, \ \exists n \geq k, \ \exists m \in N$$

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+....+a_{n+m}| \geq \varepsilon_0 \tag{6}$$

bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

5- misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n} = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n} + \ldots$$

qator yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Bu qator uchun Koshi teoremasidagi (5) shartning bajarilishini tekshiramiz:

$$\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+m}} \leq \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

Agar $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ra $n_0 = [-\log_2 \varepsilon] + 1$ deb olinsa, u holda $\forall n > n_0$ va $m = 1, 2, 3, \ldots$ lar uchun

$$\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}}\right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi. ▶

6- misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{7}$$

qator yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ va ixtiyoriy $k \in N$ uchun $n = k$, $m = k$ bo'lganda

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+m}\right| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

bo'ladi.

(6) shartga ko'ra (7) qator uzoqlashuvchi bo'ladi. ▶

Odatda, (7) qator *garmonik qator* deyiladi. Demak, garmonik qator uzoqlashuvchi qator ekan.

Mashqlar

1. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$, $(x \neq \pm 1)$ qatorning yaqinlashuvchanligi isbotlansin, yig'indisi topilsin.

2. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $(a_n \geq 0, n = 1,2,3,...)$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ qatorning ham yaqinlashuvchi bo'lishi isbotlansin.

50- ma'ruza
Musbat hadli qatorlar

1°. Musbat hadli qatorlar va ularning yaqinlashuvchanligi. Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

qator berilgan bo'lsin.

Agar bu qatorda $a_n \geq 0$, $(\forall n \in N)$ bo'lsa, (1) *musbat hadli qator* deyiladi.

Musbat hadli qatorlarda, ularning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi ketma-ketlik bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n .$$

1- teorema. Musbat hadli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun

$$\{S_n\} = \{a_1 + a_2 + ... + a_n\}, \quad (n = 1,2,3,...)$$

ketma-ketlikning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

◀ **Zarurligi.** (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Unda $n \to \infty$ da $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xossasiga ko'ra $\{S_n\}$ chegaralangan, jumladan, yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

Yetarliligi. $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsin. Unda monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga ko'ra $\{S_n\}$ ketma-ketlik $n \to \infty$ da chekli limitga ega bo'ladi. Demak, (1) qator — yaqinlashuvchi. ▶

Eslatma. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ musbat hadli qatorda, uning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2°. Musbat hadli qatorlarda taqqoslash teoremalari. Ikkita

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

musbat hadli qatorlar berilgan bo'lsin.

2- teorema. Faraz qilaylik, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar uchun $\forall n \in N$ da

$$a_n \le b_n \tag{2}$$

tengsizlik bajarilsin.

U holda:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlarning qismiy yig'indilari mos ravishda

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad S'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

bo'lsin. U holda (2) munosabatga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S_n \le S'_n. \tag{3}$$

Aytaylik, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda 1- teoremaga binoan $\{S'_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

Ayni paytda, (3) munosabatni e'tiborga olib, $\{S_n\}$ ketma-ketlikning ham yuqoridan chegaralangan bo'lishini topamiz. Yana 1- teoremaga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsin. Unda (3) munosabat va eslatmadan foydalanib, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishini topamiz. ▶

1- misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n} = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2^2} + ... + \sin\frac{\pi}{2^n} + ...$

qator yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Ravshanki, bu qator hadlari uchun

$$0 < \sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Natijada berilgan qatorning har bir hadi yaqinlashuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ qatorning (geometrik qatorning) mos hadidan kichik. 2- teoremaga muvofiq berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

3- teorema. Faraz qilaylik, musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlarning umumiy hadlari uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \quad (b_n > 0, \ \ n = 1, 2, ...)$$

bo'lsin. U holda:

1) $K < +\infty$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

2) $K > 0$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik, $K < +\infty$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsin.

Ravshanki, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \Rightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0$:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon \Rightarrow (K-\varepsilon)b_n < a_n < (K+\varepsilon)b_n.$$

Bundan esa $\sum_{n=1}^{\infty}(K+\varepsilon)b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun 2- teoremaga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqishini topamiz.

Aytaylik, $K > 0$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsin.

Ravshanki, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$ va $0 < K_1 < K$ bo'lishidan $\forall n > n_0 \in N$ uchun $\frac{a_n}{b_n} > K_1$, ya'ni $b_n < \frac{1}{K_1} a_n$ bo'lishi kelib chiqadi. 2-teoremadan foydalanib, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishini topamiz. ▶

Natija. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K,\ \ (0 < K < +\infty)$$

bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar bir vaqtda yoki yaqinlashuvchi bo'ladi, yoki uzoqlashuvchi bo'ladi.

2- misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ qator yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Berilgan qator bilan birga uzoqlashuvchiligi ma'lum bo'lgan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ garmonik qatorni qaraymiz. Bu qatorlarnig umumiy hadlari uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$$

bo'ladi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi ekan. ▶

4- teorema. Aytaylik, musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qatorlar uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

bo'lsin ($a_n>0,\ b_n>0,\ n=1,2,3,...$).

U holda:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Faraz qilaylik, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qatorlar ($a_n>0, b_n>0,\ n=1,2,3,...$) uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n},\quad (n=1,2,3,....)$$

tengsizliklar bajarilsin. Bu shartdan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot...\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot...\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Keyingi tengsizlikdan topamiz:

$$a_n\le\frac{a_1}{b_1}b_n,\quad (n=1,2,3,...).$$

Aytaylik, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Ravshanki, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{b_1}b_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. 2- teoremadan foydalanib,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz. Xuddi shunga o'xshash $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqishi ko'rsatiladi. ▶

Yuqorida keltirilgan teorema va misollardan ko'rinadiki, musbat hadli qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligini bilgan holda, hadlari bu qator hadlari bilan ma'lum munosabatda bo'lgan (taqqoslangan) ikkinchi musbat hadli qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligini aniqlash mumkin bo'lar ekan.

Izoh. Yuqorida keltirilgan teoremalar n ning biror n_0 qiymatidan boshlab bajarilganda ham o'rinli bo'ladi.

Mashqlar

1. Ushbu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n^2}$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi isbotlansin.

2. Ushbu $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln)^{\ln \ln n}}$ qatorning yaqinlashuvchi ekani isbotlansin.

3. Garmonik qator $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ning qismiy yig'indisi S_n uchun ushbu

$$0 < S_n - \ln(n+1) < 1, \quad (n \geq 2)$$

tengsizlik o'rinli ekani ko'rsatilsin.

51- ma'ruza

Musbat hadli qatorlarda yaqinlashish alomatlari

Musbat hadli qatorlar mavzusida bayon etilgan taqqoslash teoremalaridan foydalanib, yaqinlashish alomatlarini keltiramiz.

1°. Koshi alomati. Agar musbat hadli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

qatorda barcha $n \geq 1$ uchun

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \tag{2}$$

bo'lsa, (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \tag{3}$$

bo'lsa, (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik, (1) qator hadlari uchun

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

bo'lsin. Ravshanki, bu tengsizlikdan

$$a_n \leq q^n$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, berilgan qatorning har bir hadi yaqinlashuvchi geometrik qatorning mos hadidan katta emas. Unda 50- ma'ruzadagi 2- teoremaga ko'ra (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, (1) qator hadlari uchun

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1\text{, ya'ni } a_n \geq 1$$

bo'lsin. Bu munosabat berilgan qatorning har bir hadini uzoqlashuvchi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

qatorning mos hadidan kichik emasligini ko'rsatadi. Bu holda yana o'sha 2- teoremaga ko'ra (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi. ▶

Ko'pincha Koshi alomatining quyida keltirilgan limit ko'rinishidagi tasdig'idan foydalaniladi.

Faraz qilaylik, musbat hadli (1) qatorda

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

mavjud bo'lsin. U holda :

1) $k < 1$ bo'lganda (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi,

2) $k > 1$ bo'lganda (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

1- misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ qator yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Bu qatorning umumiy hadi $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ bo'lib, uning uchun

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$$

bo'ladi. Ravshanki, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$.

Demak, $k = \frac{1}{e} < 1$, berilgan qator yaqinlashuvchi ekan. ▶

1- eslatma. Koshi alomatidagi (2) va (3) tengsizliklar n ning biror n_0 qiymatidan boshlab bajarilganda ham tasdiq o'rinli bo'ladi.

2- eslatma. Koshi alomatining limit ko'rinishidagi ifodasida $k = 1$ bo'lsa, u holda (1) qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.

2°. Dalamber alomati. Agar musbat hadli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \tag{1}$$

qatorda barcha $n \geq 1$ uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \ \ (a_n > 0, n = 1, 2...) \tag{4}$$

bo'lsa, (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \ \ (a_n > 0, n = 1, 2...) \tag{5}$$

bo'lsa, (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik, (1) qator hadlari uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$$

bo'lsin. Bu tengsizlikni quyidagicha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}, \ \ (q < 1)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Ravshanki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad (0 < q < 1)$$

qator (geometrik qator) yaqinlashuvchi. 50- ma'ruzada keltirilgan 3- teoremadan foydalanib, berilgan qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz.

(1) qator hadlari uchun $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ bo'lganda (1) qatorning uzoqlashuvchi bo'lishini aniqlash qiyin emas. ▶

Dalamber alomatining quyidagi limit ko'rinishidagi tasdig'idan foydalaniladi.

Faraz qilaylik, musbat hadli (1) qatorda $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$ limit mavjud bo'lsin. U holda:

1) $d < 1$ bo'lganda (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi,
2) $d > 1$ bo'lganda (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2- misol. Ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ qator yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Berilgan qator uchun

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

bo'lib,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Demak, $d = \frac{1}{e} < 1$, berilgan qator yaqinlashuvchi ekan. ▶

3- eslatma. Dalamber alomatidagi (4) va (5) tengsizliklar n ning biror n_0 qiymatidan boshlab bajarilganda ham tasdiq o'rinli bo'ladi.

4- eslatma. Dalamber alomatining limit ko'rinishidagi ifodasida $d=1$ bo'lsa, u holda (1) qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.

3°. Integral alomat. Faraz qilaylik, musbat hadli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

qator berilgan bo'lsin. Ayni paytda, $[1,+\infty)$ oraliqda berilgan $f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $f(x)$ funksiya $[1,+\infty)$ da uzluksiz,
2) $f(x)$ funksiya $[1,+\infty)$ da kamayuvchi,
3) $\forall x \in [1,+\infty)$ da $f(x) \geq 0$,
4) $f(n) = a_n$, $(n = 1, 2, 3, ...)$.

Bunda berilgan qator ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ ko'rinishga keladi.

Yuqoridagi shartlardan foydalanib, $n < x < n+1$, $(n \in N)$ bo'lganda

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)\text{, ya'ni } a_n \geq f(x) \geq a_{n+1}$$

bo'lishini topamiz. Keyingi tengsizlikni $[n, n+1]$ oraliq bo'yicha integrallash natijasida

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n \tag{6}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi berilgan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ qator bilan birga ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx \tag{7}$$

qatorni qaraymiz. Bu qatorning qismiy yig'indisi

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx$$

bo'ladi.

Aytaylik, $F(x)$ funksiya $[1,+\infty)$ oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin: $F'(x) = f(x)$.

Uni quyidagicha

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt, \quad F(1)=0$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Natijada

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)dx = F(n+1)$$

bo‘ladi.

Agar $n\to\infty$ da $F(n+1)$ chekli songa intilsa, (bu holda (7) qatorning qismiy yig‘indisi chekli limitga ega bo‘ladi) unda (7) qator – yaqinlashuvchi.

Binobarin, $\int_1^n f(x)dx$, $(n=1,2,3,...)$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo‘ladi. (6) munosabatga ko‘ra berilgan qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo‘lib, musbat hadli qatorlarning yaqinlashuvchanligi haqidagi teoremaga muvofiq berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar $n\to\infty$ da $F(n+1)\to\infty$ bo‘lsa, berilgan qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Shunday qilib, quyidagi integral alomatga kelamiz.

Integral alomat. Agar $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=b$ bo‘lib, b chekli son bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘ladi, $b=\infty$ bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

3- misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+...+\frac{1}{n^{\alpha}}+..., \quad (\alpha>0)$$

qator yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Agar $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$, $(\alpha>0)$ deyilsa, unda bu funksiya $[1,+\infty)$ oraliqda integral alomatda keltirilgan barcha shartlarni qanoatlantiradi. Bu funksiyaning boshlang'ich funksiyasi

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x \frac{dt}{t^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right),\ (\alpha\neq 1)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \text{agar } \alpha>1 \text{ bo'lsa,}\\ \infty, & \text{agar } \alpha<1 \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

bo'lib, $\alpha=1$ bo'lganda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\int_1^x\frac{dt}{t}=\infty .$$

Demak, integral alomatga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ qator $\alpha>1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha\leq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. ▶

Odatda, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ qator umumlashgan garmonik qator deyiladi.

4°. Raabe alomati. Agar musbat hadli

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \tag{1}$$

qatorda $n\in N$ ning biror n_0 $(n_0\geq 1)$ qiymatidan boshlab, $n>n_0$ uchun

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\geq r>1$$

bo'lsa, (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi,

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leq 1$$

bo'lsa, (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik, (1) qator hadlari uchun

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\geq r>1$$

bo'lsin. Bu tengsizlikdan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1-\frac{r}{n} \tag{8}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $r>\alpha>1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi α sonini olib, uni

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1}{-\frac{1}{n}}$$

kabi ifodalaymiz. Limit xossasiga ko'ra, shunday $n_0'\in N$ topiladiki, barcha $n>n_0'$ lar uchun

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1}{-\frac{1}{n}}\leq r,$$

ya'ni
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\geq 1-\frac{r}{n} \tag{9}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

(8) va (9) munosabatlardan barcha $n>\bar{n}_0$, $(\bar{n}_0=\max\{n_0,n_0'\})$ lar uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha}=\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Bu tengsizlikni va $\alpha>1$ bo'lganda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ qatorning yaqinlashuvchanligini e'tiborga olib, so'ng 50- ma'ruzadagi 4- teoremadan foydalanib, berilgan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz.

Endi (1) qatorning hadlari uchun $n > n_0$ bo'lganda

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leq 1$$

bo'lsin. Bu tengsizlikni quyidagicha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Ushbu tengsizlikni va $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ qatorning uzoqlashuvchiligini e'tiborga olib, yana 50- ma'ruzadagi 4- teoremadan foydalanib, berilgan $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishini topamiz. ▶

Ko'p hollarda Raabe alomatining quyidagi limit ko'rinishidan foydalaniladi.

Faraz qilaylik, musbat hadli (1) qator hadlari uchun

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\rho$$

mavjud bo'lsin. U holda:

1) $\rho > 1$ bo'lganida (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi,
2) $\rho < 1$ bo'lganida (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

4- misol. Ushbu $\sum_{n=2}^{\infty}a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}$, $(a>0)$ qator yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

◀ Bu qator uchun

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\left(1-\frac{a^{-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})}}{a^{-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1})}}\right)=n\left(1-a^{-\frac{1}{n}}\right)$$

bo'lib, $\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}}=\ln a$ bo'ladi.

Agar $\ln a > 1$, ya'ni $a > e$ bo'lsa, berilgàn qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $\ln a < 1$, ya'ni $a < e$ bo'lsa, berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi

Agar $a = e$ bo'lsa, Raabe alomati berilgan qatorning yaqinlashuvchanligi yoki uzoqlashuvchiligi haqida xulosa qilolmaydi. ▶

Mashqlar

1. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n, \quad (x > 0)$$

qator yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin, bunda $\{a_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi musbat bo'lib, $\lim_{n\to\infty} a_n = a, (a \in R)$.

2. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

qator yaqinlashuvchanlikka tekshirilsin.

52- ma'ruza

Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar

1°. Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar tushunchasi. Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qatorning har bir hadi ixtiyoriy ishorali haqiqiy sonlardan iborat. (Odatda, bunday qator *ixtiyoriy hadli qator* deyiladi.)

(1) qator hadlarining absolut qiymatlaridan ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_n| + \ldots + |a_n| + \ldots \tag{2}$$

qatorni tuzamiz.

1- teorema. Agar (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (1) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ Aytaylik, (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Unda qator yaqinlashuvchanligi haqidagi Koshi teoremasiga ko'ra

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0 \quad m = 1,2,3\ldots \text{ da}$$
$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}| < \varepsilon$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots. + |a_{n+m}|.$$

Keyingi ikki munosabatdan

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0,\ m = 1,2,3,\ldots \text{ da}$$
$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Koshi teoremasiga muvofiq (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

1- ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator *absolut yaqinlashuvchi qator* deyiladi. Masalan, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}(-1)^{n-1} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} + \ldots$$

qator $\alpha > 1$ bo'lganda *absolut yaqinlashuvchi qator* bo'ladi, chunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^\alpha}(-1)^{n-1}\right| = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

umumlashgan garmonik qator $\alpha > 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi.

2- ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator *shartli yaqinlashuvchi qator* deyiladi.

Misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$

qator shartli yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

◀ Ravshanki, berilgan qatorning qismiy yig'indisi

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{3}$$

bo'ladi. Ma'lumki, $\ln(1+x)$ funksiyaning Makloren formulasiga ko'ra yoyilmasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_{n+1}(x)$$

bo'lib, $0 \le x \le 1$ bo'lganda

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}$$

bo'lar edi (qaralsin [1], 6- bob, 7- §).

Xususan, $x = 1$ bo'lganda

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1)$$

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{n+1} \tag{4}$$

bo'ladi.

(3) va (4) munosabatlardan

$$\ln 2 = S_n + R_{n+1}(1)$$

va undan
$$|S_n - \ln 2| < \frac{1}{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $n \to \infty$ da $S_n \to \ln 2$. Bu esa qaralayotgan qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi.

Ayni paytda, berilgan qator hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

qator garmonik qator bo'lib, uning uzoqlashuvchiligi ma'lum. Demak, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi qator. ▶

Endi $$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ...$$

qatorning musbat hadli qator ekanini e'tiborga olib, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning absolut yaqinlashuvchiligini ifodalovchi alomatlarni keltiramiz. Ularning isboti 51- ma'ruzada bayon etilgan alomatlardan kelib chiqadi.

Dalamber alomati. Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ..., \quad (a_n \neq 0, \qquad n = 1, 2, ...)$$

qator hadlari uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = d$$

limit mavjud bo'lsin. U holda:

1) $d < 1$ bo'lganda, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator absolut yaqinlashuvchi bo'ladi,

2) $d > 1$ bo'lganda, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Koshi alomati. Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

qator hadlari uchun

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K$$

limit mavjud bo'lsin. U holda:

1) $K < 1$ bo'lganda, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator absolut yaqinlashuvchi bo'ladi.

2) $K > 1$ bo'lganda, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2°. Absolut yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari.

Absolut yaqinlashuvchi qatorlarning xossalarini keltiramiz.

1) Agar qator absolut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ Bu xossaning isboti 1- teoremadan kelib chiqadi. ▶

2) Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

qator absolut yaqinlashuvchi bo'lib, $\{b_n\}$ sonlar ketma-ketligi chegaralangan bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots \tag{5}$$

qator absolut yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra, $\{b_n\}$ sonlar ketma-ketligi chegaralangan. Demak,

$$\exists M > 0, \ \forall n \in N \ \text{da} \ |b_n| \le M \tag{6}$$

bo'ladi.

(1) qator absolut yaqinlashuvchi. Unda Koshi teoremasiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham $\frac{\varepsilon}{M}$ ga ko'ra shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0$ va $m = 1, 2, 3, \ldots$ bo'lganda

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}| < \frac{\varepsilon}{M} \tag{7}$$

bo'ladi.

(6) va (7) munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$|a_{n+1} b_{n+1}| + |a_{n+2} b_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m} b_{n+m}| \le M\left(|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}|\right) < \varepsilon.$$

Yana Koshi teoremasidan foydalanib, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ qatorning absolut yaqinlashuvchi ekanini topamiz. ▶

3) Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

qator hadlarining o'rinlarini almashtirish natijasida ushbu

$$\sum_{j=1}^{\infty} a'_j = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_j + \ldots \tag{8}$$

qator hosil qilingan bo'lsin.

Ravshanki, (8) qatorning har bir a'_j hadi $(j = 1,2,\ldots)$ (1) qatorning tayin bir a_{k_j} hadining aynan o'zidir, ya'ni $\forall j \in N, \exists k_j \in N$, $a_{k_j} = a'_j$ bo'ladi.

Agar (1) qator absolut yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda bu qator hadlarining o'rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirishdan hosil bo'lgan (8) qator absolut yaqinlashuvchi va uning yig'indisi ham S ga teng bo'ladi.

◀ Aytaylik, (1) qator absolut yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsin.

(8) qator hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan $\sum_{j=1}^{\infty} |a'_j|$ qatorning qismiy yig'indisini σ'_n bilan belgilaylik:

$$\sigma'_n = \sum_{j=1}^{n} |a'_j|, \quad (a'_j = a_{k_j}).$$

Agar $n' = \max\limits_{1 \le j \le n} k_j$ deyilsa, unda $n' \ge n$ va $\forall n \in N$ bo'lganda

$$\sigma'_n \le \sum_{k=1}^{n'} |a_k|$$

bo'ladi.

(1) qator absolut yaqinlashuvchi bo'lgani sababli uning qismiy yig'indilari ketma-ketligi yuqoridan chegaralangandir. Binobarin, σ'_n yig'indi ham yuqoridan chegaralangan bo'ladi. Unda musbat hadli qatorning yaqinlashuvchiligi haqidagi teoremaga ko'ra $\sum_{j=1}^{\infty} |a'_j|$ qator va ayni paytda $\sum_{j=1}^{\infty} a'_j$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, $\sum_{j=1}^{\infty} a'_j$ qator absolut yaqinlashuvchi. Uning yig'indisini S' deymiz.

Endi berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator hadlarining o'rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirishdan hosil bo'lgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k + \ldots$$

qator yig'indisini S ga teng ekanini isbotlaymiz. Buning uchun $\forall\varepsilon > 0$ ga ko'ra shunday $\bar{n} \in N$ topilib, $\forall n > \bar{n}$ da

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a'_k - S\right| < \varepsilon \tag{9}$$

bo'lishini ko'rsatish yetarli bo'ladi.

Ixtiyoriy musbat ε sonni tayinlab olamiz. Modomiki, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ qator absolut yaqinlashuvchi ekan, unda Koshi teoremasiga binoan olingan $\varepsilon > 0$ songa ko'ra shunday n_0 nomer topiladiki,

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{10}$$

shuningdek, qatorning yaqinlashish ta'rifiga ko'ra

$$\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

bo'ladi.

Yuqoridagi natural son $\bar{n}$ ni shunday katta qilib olamizki, $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ qatorning $\bar{n}$ dan katta bo'lgan n nomerli ixtiyoriy qismiy yig'indisi

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} a'_k \text{ da } \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

qatorning barcha dastlabki n_0 ta hadi qatnashsin.

Ravshanki,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k' - S = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k' - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k - S\right).$$

Keyingi munosabatdan va (11) tengsizlikni e'tiborga olib topamiz:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k' - S\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} a_k' - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - S\right| < \left|\sum_{k=1}^{n} a_k' - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\right| + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

Ma'lumki, $n > \bar{n}$ bo'lganda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'$ qatorda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ qatorning barcha dastlabki n_0 ta hadi qatnashadi. Binobarin,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k' - \sum_{k=1}^{n_0} a_k$$

ayirma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ qator har bir hadining nomeri n_0 dan katta bo'lgan $n - n_0$ ta hadining yig'indisidan iborat.

Endi natural m sonni shunday katta qilib olamizki, bunda n_0+m son yuqorida aytilgan barcha $n - n_0$ ta hadlarning nomerlaridan katta bo'lsin.

U holda

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k' - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\right| \le \sum_{k=n_0+1}^{n_0+m} |a_k| \qquad (13)$$

bo'ladi.

(12), (13) va (10) munosabatlardan foydalanib, (9) tengsizlik, ya'ni

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k' - S\right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishini topamiz. ▶

Mashqlar

Aytaylik,
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*)$$
ixtiyoriy hadli qator bo‘lib,
$$u_n = \begin{cases} a_n, & a_n \ge 0, \\ 0, & a_n < 0, \end{cases} \qquad v_n = \begin{cases} -a_n, & a_n < 0, \\ 0, & a_n \ge 0 \end{cases}$$
bo‘lsin.

1. Agar (*) qator absolut yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ qatorlar yaqinlashuvchi va
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$
bo‘lishi isbotlansin.

2. Agar (*) qator shartli yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ qatorlarning uzoqlashuvchi bo‘lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

1. *Azlarov T., Mansurov H.* Matematik analiz. 1-tom. Toshkent, «O'zbekiston», 1994, 1995.
2. *Xudayberganov G., Varisov A., Mansurov H.* Matematik analiz. 1- va 2-qismlar. Qarshi, «Nasaf», 2003.
3. *Архипов Г., Садовничий В., Чубариков В.* Лекции по математическому анализу. Москва, «Высшая школа», 1999.
4. *Ильин В., Садовничий В., Сендов Б.* Математический анализ, Москва «Наука», 1979.
5. *Кудрявцев Л.* Курс математического анализа. Т. 1. 1973.
6. *Рудин У.* Основы математического анализа. Москва, «Мир», 1976.
7. *Дороговцев А.* Математический анализ. Киев, «Высшая школа», 1985.
8. *Фихтенгольц Г.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, II. Москва, "Физмат-лит", 2001.
9. *Sa'dullayev A., Mansurov H., Xudayberganov G., Varisov A., G'ulomov R.* Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. 1- va 2- tomlar. Toshkent, «O'zbekiston», 1993, 1996.
10. *Демидович Б.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва, «Наука», 1990.

MUNDARIJA

G. Xudayberganov, A.K. Vorisov,
X.T. Mansurov, B.A. Shoimqulov

MATEMATIK ANALIZDAN MA'RUZALAR

I

5460100—«Matematika», 5440200—«Mexanika» bakalavr yo'nalishidagi talabalar uchun o'quv qo'llanma

«Voris-nashriyot» MChJ
Toshkent — 2010

Muharrir *M.Shermatova*
Badiiy muharrir *B. Ibrohimov*
Sahifalovchi *Sh.Rahimqoriyev*

Original-maketdan bosishga 06.09.2010 da ruxsat etildi.
Bichimi $60\times84^1/_{16}$. Ofset bosma usulida bosildi. Bosma t. 23,5.
Shartli b.t. 21,85. Adadi 500. Buyurtma № 55.

«Voris-nashriyot» MChJ, Toshkent, Shiroq ko'chasi, 100.

MChJ «Noshir» O'zbekiston-Germaniya qo'shma korxonasining bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent sh., Navoiy ko'chasi, pastki savdo rastalari

22.1
X87

Matematik analizdan ma'ruzalar: 5460100–«Matematika», 5440200–«Mexanika» bakalavr yo'nalishidagi talabalar uchun o'quv qo'llanma/ G. Xudayberganov va boshq. O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta-maxsus ta'lim vazirligi. — T.: «Voris-nashriyot», 2010. — 376 b.

I. Xudayberganov, G.

ББК22.1я722