O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

RENESSANS TA’LIM UNIVERSITETI

«MATEMATIKA VA TABIIY FANLAR» KAFEDRASI

Sirtqi ta’lim yo’nalishidagi bakalavrlar uchun kuzgi mavsumda “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fanidan mustaqil ishlarni tashkil etish uchun uslubiy ishlanmasi

TOSHKENT − 2024

Uslubiy ishlanma Matematika va tabiiy fanlar" kafedrasining 2024 yil _________________ dagi №____majlisida va institut kengashining 2024 yil _________________ dagi №____yigʻilishida muhokama etilgan va chop etishga tavsiya qilihgan.

M U A L L I F: **"Matematika va tabiiy fanlari" kafedrasi**

katta o'qituvchi Z.Q.Hamroyeva

T A Q R I Z CH I L A R: **RTU dotsenti, f.-m.f.n.,**
D.E.Davlatov
TKTI Professori, f.-m.f.d.
I.I.Safarov

M U H A R R I R: **"Matematika va tabiiy fanlari" kafedrasi**
dotsenti I.X.Turopov

Uslubiy ishlanma o'quv rejasida "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" fanini o'qitish rejalashtirilgan bakalavriat yo'nalishlari uchun mo'ljallangan. Unda II bosqich bakalavrlari uchun ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanidan bahorgi (III-IV bosqich sirtqi) oʻquv mavsumida mustaqil o'rganilishi ko'zda tutilgan mavzular ro'yxati, mustaqil ish topshiriqlari va ulardagi masalalarning namunaviy yechimlari keltirilgan, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani uchun zarur barcha jadvallari ilovalangan va oʻquv-uslubiy adabiyotlar roʻyxati ko'rsatilgan.

KIRISH

Fanning mazmuni va maqsadi.

Hozirgi kunda fan va texnikaning jadal rivojlanib borishi turli murakkab texnik mexanik, fizik va boshqa jarayonlarni o‘rganish, ularni matematik nuqtai nazardan tasavvur qilish, matematik modellarini tuzish va yechish, nafaqat tadbiqiy jihatdan balki nazariy jihatdan ham dolzarb, ham amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan muammolardan biri hisoblanadi.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturida chuqur nazariy va amaliy bilimlar bilan bir qatorda tanlagan sohasi bo‘yicha mustaqil faoliyat ko‘rsata oladigan, o‘z bilimi va malakasini mustaqil ravishda oshirib boradigan, masalaga ijodiy yondashgan holda muammoli vaziyatlarni to‘g‘ri aniqlab, tahlil qilib, sharoitga tez moslasha oladigan mutaxassisllarni tayyorlash asosiy vazifalardan biri sifatida belgilangan.

Talaba mustaqil ravishda shug‘ullansa va o‘z ustida tinimsiz ishlasagina bilimlarni chuqur o‘zlashtirishi mumkin. Talabalarning asosiy bilim, ko'nikma va malakalari mustaqil ta'lim jarayonidagina shakllanadi, mustaqil faoliyat ko‘rsatish qobiliyati rivojlanadi va ularda ijodiy ishlashga qiziqish paydo bo‘ladi.

Shuning uchun talabalarning mustaqil ta'lim olishlarini rejalashtirish, tashkil qilish va buning uchun barcha zaruriy shart-sharoitlarni yaratish, dars mashg‘ulotlarida talabalarni o‘qitish bilan bir qatorda ularni ko'proq o‘qishga o‘rgatish, bilim olish yo‘llarini ko‘rsatish, mustaqil ta'lim olish uchun yo‘llanma berish oliy ta'lim muassasasining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi.

Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi

Dastlab ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri "tasodifiy hodisa" tushunchasini keltiramiz. Natijasini oldindan aytib bo‘lmaydigan tajriba o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Bunday tajribalar ehtimollar nazariyasida tasodifiy deb ataladi.

✓ *Tasodifiy hodisa*(yoki hodisa) deb, tasodifiy tajriba natijasida ro‘y berishi oldindan aniq bo‘lmagan hodisaga aytiladi.

Hodisalar, odatda, lotin alifbosining bosh harflari A, B, C, …lar bilan belgilanadi.

✓ Tajribaning har qanday natijasi *elementar hodisa* deyiladi va ω orqali belgilanadi.

✓ Tajribaning natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha elementar hodisalar to‘plami *elementar hodisalar fazosi* deyiladi va Ω orqali belgilanadi.

misol. Tajriba nomerlangan kub(o‘yin soqqasi)ni tashlashdan iborat bo‘lsin. U holda tajriba 6 elementar hodisadan hodisalar $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ lardan iborat bo‘ladi. ω_i hodisa tajriba natijasida $i\ (i = 1,2,3,4,5,6)$ ochko tushishini bildiradi. Bunda elementar hodisalar fazosi: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

✓ Tajriba natijasida albatta ro‘y beradigan hodisaga *muqarrar hodisa* deyiladi.

Elementar hodisalar fazosi muqarrar hodisaga misol bo‘la oladi.

Aksincha, umuman ro‘y bermaydigan hodisaga mumkin bo‘lmagan hodisa deyiladi va u   orqali belgilanadi.

1.1-misolda keltirilgan tajriba uchun quyidagi hodisalarni kiritamiz:

A={5 raqam tushishi};

B={juft raqam tushishi};

C={7 raqam tushishi};

D={butun raqam tushishi};

Bu yerda A va B hodisalar tasodifiy, C hodisa mumkin bo‘lmagan va D hodisa muqarrar hodisalar bo‘ladi.

Hodisalar ustida amallar

Tasodifiy hodisalar orasidagi munosabatlarni keltiramiz:

✓ A va B *hodisalar yig‘indisi* deb, A va B hodisalarning kamida bittasi(ya’ni yoki A, yoki B, yoki A va B birgalikda) ro‘y berishidan iborat $C = A \quad B$ ($C = A + B$) hodisaga aytiladi.

A va B *hodisalar ko‘paytmasi* deb, A va B hodisalar ikkilasi ham(ya’ni A va B birgalikda)ro‘y berishidan iborat $C = A \quad B$ ($C = A \quad B$)hodisaga aytiladi.

A hodisadan B *hodisaning ayirmasi* deb, A hodisa ro‘y berib, B hodisa ro‘y bermasligidan iborat $C = A \setminus B$ ($C = A - B$) hodisaga aytiladi.

✓ A hodisaga *qarama-qarshi* $\overline{A}$ hodisa faqat va faqat A hodisa ro‘y bermaganda ro‘y beradi(ya’ni $\overline{A}$ hodisa A hodisa ro‘y bermaganda ro‘y beradi). $\overline{A}$ ni A uchun teskari hodisa deb ham ataladi.

✓ Agar A hodisa ro‘y berishidan B hodisaning ham ro‘y berishi kelib chiqsa A hodisa B hodisani *ergashtiradi* deyiladi va $A \quad B$ ko‘rinishida yoziladi.

✓ Agar $A \quad B$ va $B \quad A$ bo‘lsa, u holda A va B hodisalar *teng*(*teng kuchli*) hodisalar deyiladi va $A = B$ ko‘rinishida yoziladi.

misol. A,B va C-ixtiyoriy hodisalar bo‘lsin. Bu hodisalar orqali quyidagi hodisalarni ifodalang: *D*={uchchala hodisa ro‘y berdi}; *E*={bu hodisalarning kamida bittasi ro‘y berdi}; *F*={bu hodisalarning birortasi ham ro‘y bermadi}; *G*={bu hodisalarning faqat bittasi ro‘y berdi}.

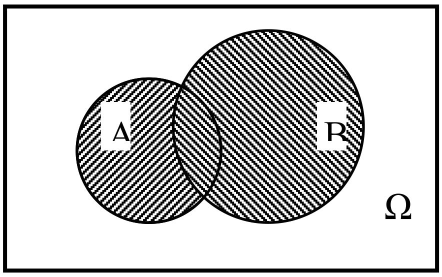
Hodisalar ustidagi amallardan foydalanamiz: $D = A \quad B \quad C (D = A\ B\ C)$; $E = A + B + C$; $F = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$; $G = A\ \overline{B}\ \overline{C} + \overline{A}\ \overline{B}\ C + \overline{A}\ B\ \overline{C}$.

Demak hodisalarni to‘plamlar kabi ham talqin etish mumkin ekan.

Belgilash	To‘plamlar nazariyasidagi talqini	Ehtimollar nazariyasidagi talqini
Ω	Fazo (asosiy to‘plam)	Elementar hodisalar fazosi, muqarrar hodisa
$\omega,\ \ \omega \quad \Omega$	ω fazo elementlari	ω elementar hodisa
$A,\ \ A \quad \Omega$	*A* to‘plam	*A* hodisa
$A \quad B$, $A + B$	A va B to‘plamlarning yig‘indisi, birlashmasi	A va B hodisalar yig‘indisi (A va B ning kamida biri ro‘y berishidan iborat hodisa)
$A \quad B$, $A\ B$	A va B to‘plamlarning kesishmasi	A va B hodisalar ko‘paytmasi (A va B ning birgalikda ro‘y berishidan iborat hodisa)
$A \setminus B$, $A - B$	A to‘plamdan B to‘plamning ayirmasi	A hodisadan B hodisaning ayirmasi(A ning ro‘y berishi, B ning ro‘y bermasligidan iborat hodisa)
	Bo‘sh to‘plam	Mumkin bo‘lmagan hodisa
$\overline{A}$	A to‘plamga to‘ldiruvchi	A hodisaga teskari hodisa(A ning ri’y bermasligidan iborat)
$A \quad B = \quad$, $A\ B =$	A va B to‘plamlar kesishmaydi	A va B hodisalar birgalikda emas
$A \quad B$	A to‘plam B ning qismi	A hodisa B ni ergashtiradi
$A = B$	A va B to‘plamlar ustma-ust tushadi	A va B hodisalar teng kuchli

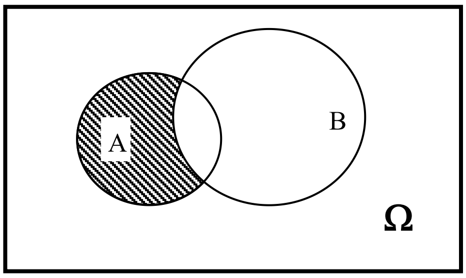
Hodisalar va ular ustidagi amallarni Eyler-Venn diarammalari yordamida tushuntirish(tasavvur qilish) qulay. Hodisalar ustidagi amallarni 1-5 rasmlardagi shakllar kabi tasvirlash mumkin.

$A+B$



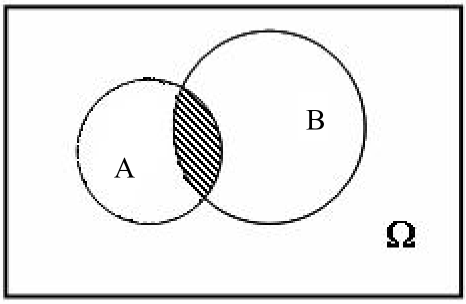
1-rasm.

$A\text{-}B$



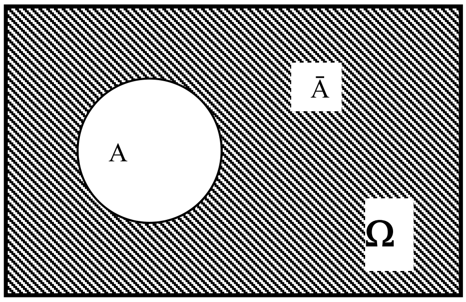
2-rasm.

$A \cdot B$



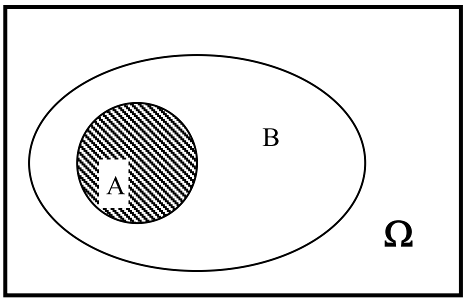
3-rasm.

$\overline{A}$



4-rasm.

$A \quad B$



5-rasm.

Hodisalar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

- $A+B=B+A, \quad A \ \ B=B \ \ A$;
- $(A+B) \ \ C=A \ \ C+B \ \ C,$;
- $(A+B)+C=A+(B+C), \quad (A \ \ B) \ \ C=A \ \ (B \ \ C)$;
- $A+A=A, \quad A \ \ A=A$;
- $\mathrm{A}+\Omega=\Omega, \quad A \ \ \Omega=A \quad A+ \quad =A, \quad A \quad = \quad$;
- $A+\overline{A}=\Omega, \quad A \ \ \overline{A}= \quad$;

- $\overline{\quad} = \Omega, \quad \overline{\Omega} = \quad , \quad \overline{\overline{A}} = A$;
- $A - B = A \ \overline{B}$;
- $\overline{A+B} = \overline{A} \ \overline{B}$ va $\overline{A \ B} = \overline{A} + \overline{B}$ - de Morgan ikkilamchilik prinsipi.

misol.

a) $(A+B) \ (A+\overline{B})$ ifodani soddalashtiring.

Yuqoridagi xossalardan foydalanamiz:

$(A+B) \ (A+\overline{B}) = A \ A + A \ \overline{B} + B \ A + B \ \overline{B} = A + A \ (\overline{B} + B) + \quad = A + A \ \Omega = A + A = A$

Demak, $(A+B) \ (A+\overline{B}) = A$ ekan.

b) $A + B = A + \overline{A} \ B$ formulani isbotlang.

$A + B = (A+B) \ \Omega = A \ \Omega + B \ \Omega = A \ \Omega + B \ (A + \overline{A}) = A \ \Omega + (A + \overline{A}) \ B =$

$= A \ \Omega + A \ B + A \ \overline{B} = (\Omega + B) \ A + A \ \overline{B} = \Omega \ A + A \ \overline{B} = A + A \ \overline{B}$.

Tasodifiy hodisalar. Hodisalar algebrasi

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalarini keltiramiz.

Natijasi tasodifiy bo`lgan biror tajriba o`tkazilayotgan bo`lsin. $\Omega$-tajriba natijasida ro`y berishi mumkin bo`lgan barcha elementar hodisalar to`plami elementar hodisalar fazosi deyiladi; tajribaning natijasi ω esa elementar hodisa deyiladi.

✓ Agar Ω chekli yoki sanoqli to`plam bo`lsa (ya`ni elementlarini natural sonlar yordamida nomerlash mumkin bo`lsa), u holda uning ixtiyoriy qism to`plami A tasodifiy hodisa (yoki hodisa) deyiladi: A $\quad \Omega$.

Ω to`plamdagi A qism to`plamga tegishli elementar hodisalar A hodisaga qulaylik yaratuvchi hodisalar deyiladi.

✓ Ω to`plam muqarrar hodisa deyiladi. -bo`sh to`plam mumkin bo`lmagan hodisa deyiladi.

S-Ω ning qism to`plamlaridan tashkil topgan sistema bo`lsin.

✓ Agar

1. $\emptyset \quad S, \Omega \quad S$;

2. $A \quad S$ munosabatdan $\overline{A} \quad S$ kelib chiqsa;

3. $A \quad S$ va $B \quad S$ munosabatdan $A + B \quad S$, $A \ B \quad S$ kelib chiqsa S sistema algebra tashkil etadi deyiladi.

Ta'kidlash joizki, $A + B = \overline{\overline{A} \ \overline{B}}$, $A \ B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$ ekanligidan 3 shartdagi $A + B \quad S$ va $A \ B \quad S$ munosabatlardan ixtiyoriy bittasini talab qilish yetarlidir.

misol. $S = \{\emptyset, \Omega\}$ sistema algebra tashkil etadi: $\quad + \Omega = \Omega$, $\quad \Omega = \quad$, $\overline{\quad} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \emptyset$.

Agar 3 shart o`rniga quyidagilarni talab qilsak $A_n \quad S$, $n = 1,2,...$, munosabatdan $\bigcup_{n=1} A_n \quad S$, $\bigcap_{n=1} A_n \quad S$ kelib chiqsa S sistema σ-algebra deyiladi.

Agar Ω chekli yoki sanoqli bo'lsa, Ω -to`plamning barcha qism to`plamlaridan tashkil topgan hodisalar sistemasi algebra tashkil etadi.

Ehtimollikning statistik ta'rifi

A hodisa n ta bog'liqsiz tajribalarda n_A marta ro'y bersin. n_A son A hodisaning chastotasi, $\frac{n_A}{n}$ munosabat esa A hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi.

✓ Agar tajribalar soni etarlicha ko'p bo'lsa va shu tajribalarda biror A hodisaning nisbiy chastotasi biror o'zgarmas son atrofida tebransa, bu songa A hodisaning *statistik ehtimolligi* deyiladi.

A hodisaning ehtimolligi $\mathrm{P(A)}$ simvol bilan belgilanadi. Demak,

$\lim\limits_{n\to} \frac{n_A}{n} = P(A)$ yoki yetarlicha katta *n* lar uchun $\frac{n_A}{n} \approx P(A)$.

Ehtimollikning klassik ta'rifi

Ω chekli *n* ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsin.

✓ A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni *k* ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni *n* ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n}$$

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

✓ *Qo'shish qoidasi:* agar A to'plam elementlari soni *n* va B to'plam elementlari soni *m* bo'lib, $A \quad B =$ (A va B to'plamlar kesishmaydigan) bo'lsa, u holda $A + B$ to'plam elementlari soni *n*+*m* bo'ladi.

✓ *Ko'paytirish qoidasi:* A va B to'plamlardan tuzilgan barcha (a_i, b_j) juftliklar to'plami $C = \{(a_i, b_j) : i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\}$ ning elementlari soni $n \cdot m$ bo'ladi.

n ta elementdan *m* ($0 < m \quad n$)tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: qaytarilmaydigan va qaytariladigan tanlashlar. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi(orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o'rniga qaytariladi.

I. Qaytarilmaydigan tanlashlar sxemasi

✓ *Guruhlashlar soni:* *n* ta elementdan *m* ($0 < m \quad n$)tadan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

C_n^m sonlar Nyuton binomi formulasining koeffisientlaridir:

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + ... + q^n .$$

✓ *O‘rinlashtirishlar soni:* n ta elementdan m ($0 < m \quad n$) tadan o‘rinlashtirishlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} .$$

✓ *O‘rin almashtirishlar soni:* n ta elementdan n tadan o‘rinlashtirish o‘rin almashtirish deyiladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n = n! .$$

O‘rin almashtirish o‘rinlashtirishning xususiy holidir, chunki agar $n=m$ bo‘lsa $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ bo‘ladi.

II. Qaytariladigan tanlashlar sxemasi

✓ *Qaytariladigan guruhlashlar soni:* n ta elementdan m ($0 < m \quad n$) tadan qaytariladigan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$$

✓ *Qaytariladigan o‘rinlashtirishlar soni:* n ta elementdan m ($0 < m \quad n$) tadan qaytariladigan o‘rinlashtirishlari soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{A}_n^m = n^m .$$

✓ *Qaytariladigan o‘rin almashtirishlar soni:* k hil n ta elementdan iborat to‘plamda 1-element n_1 marta, 2-element n_2 marta,…, k- element n_k marta qaytarilsin va $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ bo‘lsin, u holda n ta elementdan iborat o‘rin almashtirish $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ orqali belgilanadi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} .$$

Endi ehtimollik hisoblashga doir misollar keltiramiz.

misol. Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to‘g‘ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni A_{10}^2 usul bilan terish mumkin. A={telefon nomeri to‘g‘ri terilgan} hodisasini kiritamiz. A hodisa faqat bitta elementdan iborat bo‘ladi(chunki kerakli telefon nomeri bitta bo‘ladi). Shuning uchun klassik ta’rifga ko‘ra $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{A_{10}^2}=\dfrac{1}{10\cdot 9}=\dfrac{1}{90}\approx 0.011$.

misol. 100 ta lotoreya biletlarlaridan bittasi yutuqli bo‘lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo‘lishi ehtimolligini toping.

100 ta lotoreya biletlaridan 10 tasini C_{100}^{10} usul bilan tanlash mumkin. B ={10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo‘lishi } hodisasi bo‘lsa, $N(B)=C_1^1\cdot C_{99}^9$ va $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{C_1^1\cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}}=\dfrac{1}{10}=0.1$.

misol. Pochta bo‘limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan: a) 4 tasi bir xilda; b) 4 tasi turli xilda bo‘lishi ehtimolliklarini toping.

6 xil otkritkadan 4 tasini $\overline{C_6^4}$ usul bilan tanlash mumkin. a) A={4 ta bir xildagi otkritka sotilgan} hodisasi bo‘lsin. A hodisaning elementar hodisalari soni otkritkalar xillari soniga teng, ya’ni $N(A)=6$. Klassik ta’rifga ko‘ra $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{6}{\overline{C_6^4}}=\dfrac{6}{126}=\dfrac{1}{21}$ bo‘ladi. b) B={4 ta har xil otkritka sotilgan} hodisasi bo‘lsin, u holda $N(B)=C_6^4$ ga teng va $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{C_6^4}{\overline{C_6^4}}=\dfrac{15}{126}=\dfrac{5}{42}$.

Klassik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $P(\varnothing)=0$;
2. $P(\Omega)=1$;
3. $0\le P(A)\le 1$;
4. Agar $A\cap B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $P(A+B)=P(A)+P(B)$;
5. $\forall A,B\subset\Omega$ uchun $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Isboti. 1) $N(\varnothing)=0$ bo‘lgani uchun klassik ta’rifga ko‘ra $P(\varnothing)=\dfrac{N(\varnothing)}{N(\Omega)}=0$.

2) Klassik ta’rifga ko‘ra $P(\Omega)=\dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$.

3) Ihtiyoriy A hodisa uchun $\varnothing\subset A\subset\Omega$ ekanligidan $0\le P(A)\le 1$ bo‘ladi.

4) Agar $A\ B=$ bo‘lsa, u holda $N(A+B)=N(A)+N(B)$ va $P(A+B)=\dfrac{N(A+B)}{N(\Omega)}=\dfrac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}+\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=P(A)+P(B)$.

5) $A+B$ va B hodisalarni birgalikda bo‘lmagan ikki hodisalar yig‘ndisi shaklida yozib olamiz:

$A+B=A+B\ \overline{A}\,(1.3-misol),\quad B=B\ \Omega=B\ (A+\overline{A})=A\ B+B\ \overline{A}$, u holda 4-xossaga ko‘ra $P(A+B)=P(A)+P(B\ \overline{A})$ va $P(B)=P(A\ B)+P(B\ \overline{A})$. Bu ikki tenglikdan $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\ B)$ kelib chiqadi.

1-misol. Qutida 7 ta oq, 3 ta qora shar bor. Undan tavakkaliga olingan sharning oq bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish: A – olingan shar oq ekanligi hodisasi bo‘lsin. Bu sinov 10 ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan iborat bo‘lib, ularning 7 tasi A hodisaga qulaylik tug‘diruvchidir. Demak,

$$P(A)=\frac{7}{10}=0{,}7$$

2-misol. Telefonda nomer terayotgan abonent oxirgi ikki raqamni esdan chiqarib qo‘yadi va faqat bu raqamlar har xil ekanligini eslab qolgan holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilganligi ehtimolini toping.

Yechish: B – ikkita kerakli raqam terilganlik hodisasi bo‘lsin, hammasi bo‘lib, o‘nta raqamdan ikkitadan nechta o‘rinlashtirishlar tuzish mumkin bo‘lsa, shuncha , ya’ni $A_{10}^2=10\ \ 9=90$ ta turli raqamlarni terish mumkin. Demak,

$$P(B)=\frac{1}{A_{10}^2}=\frac{1}{90}.$$

3-misol. Qurilma 5 ta elementdan iborat bo‘lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elementlar ulangan bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish: Sinovning barcha mumkin bo‘lgan elementar hodisalari soni C_5^2 ga teng. Bularning ichidan C_3^2 tasi eskirmagan elementlar ulangan bo‘lishi hodisasi (A) uchun qulaylik tug‘diradi.

Shuning uchun $\mathrm{P}\ (\mathrm{A})=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}=0.3$

4-misol. Texnik nazorat bo‘limi tasodifan ajratib olingan 100 ta kitobdan iborat partiyada 5 ta yaroqsiz kitob topdi. Yaroqsiz kitoblar chiqishining nisbiy chastotasini toping. Yechish:

$$W(A) = \frac{5}{100} = 0.05$$

5-misol. Nishonga 20 ta o‘q uzilgan. Shundan 18 ta o‘q nishonga tekkani qayd qilingan. Nishonga tegishlar nisbiy chastotasini toping. Yechish:

$$W(A) = \frac{18}{20} = 0.9$$

6. Qutida 5 ta bir xil buyum bo‘lib, ularning 3 tasi bo‘yalgan. Tavakkaliga 2 ta buyum olinganda ular orasida:

A) bitta bo‘yalgan bo‘lishi;
B) ikkita bo‘yalgan bo‘lishi;
C) hech bo‘lmaganda bitta bo‘yalgan bo‘lishi ehtimolini toping.

7. Tavakkaliga 20 dan katta bo‘lmagan natural son tanlanganda, uning 5 ga karrali bo‘lish ehtimolini toping.

8. Kartochkalarga 1,2,3,4,5,6,7,8,9 raqamlari yozilgan. Tavak-kaliga 4 ta kartochka olinib, ular qator qilib terilganda juft son bo‘lishi ehtimolini toping.

9. Ikkita o‘yin soqqasi baravar tashlanganda quyidagi hodisa-larning ro‘y berish ehtimolini toping:

A) Tushgan ochkolar yig‘indisi 8 ga teng.
B) Tushgan ochkolar ko‘paytmasi 8 ga teng.
C) Tushgan ochkolar yig‘indisi ularning ko‘paytmasidan katta.

10. Tanga 2 marta tashlanganda aqalli bir marta gerbli tomoni tushishi ehtimolini toping.

11. Qutichada 6 ta bir xil (nomerlangan) kubik bor. Tavakkaliga bitta–bittadan barcha kubiklar olinganda kubiklarning nomerlari o‘sib borish tartibida chiqishi ehtimolini toping.

12. Qutida 12 ta oq va 8 ta qizil shar bor. Tavakkaliga

A) bitta shar olinganda uning oq bo‘lishi ehtimolini toping;
B) bitta shar olinganda uning qizil bo‘lishi ehtimolini toping;
C) 2 ta shar olinganda ularning turli rangda bo‘lishi ehtimolini toping;
D) 8 ta shar olinganda ularning 3 tasi qizil rangli bo‘lishi ehtimolini toping.

13. Qutida 100 ta lampochka bo‘lib, ularning 10 tasi yaroqsiz. Tavakkaliga 4 ta lampochka olinadi. Olingan lampochkalar ichida:

A) yaroqsizlar yo‘q bo‘lishi;
B) yaroqlilari yo‘q bo‘lishi ehtimolini toping.

14. Yashikda 31 ta birinchi nav va 6 ta ikkinchi nav detal bor. Tavakkaliga 3 ta detal olinadi:

A) Olingan uchala detal birinchi nav bo‘lishi ehtimolini toping.
B) Olingan detallarning hech bo‘lmaganda bittasi birinchi nav bo‘lishi ehtimolini toping.

15. Ikkita o‘yin soqqasi tashlanadi. Chiqqan ochkolar yig‘indisining 7 ga teng bo‘lishi ehtimolini toping.

16. N ta buyumdan iborat partiyada M ta standart buyum bor. Partiyadan tavakkaliga n ta buyum olinadi. Bu n ta buyum ichida rosa m ta standart buyum borligini ehtimolini toping.

17. Yashikda 15 ta detal bo‘lib, ulardan 10 tasi bo‘yalgan. Yig‘uvchi tavakkaliga 3 ta detal oladi. Olingan detallarning bo‘yalgan bo‘lishi ehtimolini toping.

18. Xaltachada 5 ta bir xil kub bor. Har bir kubning barcha tomonlariga quyidagi harflardan biri yozilgan: o, p, r, s, t. Bittalab olingan va “bir qator qilib” terilgan kublarda “sport” so‘zini o‘qish mumkinligi ehtimolini toping.

19. Oltita bir xil kartochkaning har biriga quyidagi harflardan biri yozilgan – a, t,m,r,s,o. Kartochkalar yaxshilab aralashtirilgan. Bittalab olingan va “bir qator qilib” terilgan to‘rtta kartochkada “soat” so‘zini o‘qish mumkinligi ehtimolini toping.

20. Hamma tomoni bo‘yalgan kub mingta bir xil o‘lchamli kubchalarga bo‘lingan va yaxshilab aralashtirilgan. Tavakkaliga olingan kubchaning a) bitta; b) ikkita; c) uchta tomoni bo‘yalgan bo‘lish ehtimolini toping.

21. Aralashtirilgan 36 talik kartalar dastasidan tavakkaliga bittasi olinadi. Olingan kartaning a) “tuz” bo‘lishini b) rasmli (ya’ni “korol”, “dama” yoki “valet”) bo‘lishini ehtimoli qanday?

22. Qutida m ta oq va n ta qora sharlar bor. Qutidan tavakkaliga bitta shar olinadi. Olingan sharning oq bo‘lishi ehtimolini toping.

23. Bitta shashqoltosh (kubik, o‘yin soqqasi) tashlangan. Quyidagi ehtimollarni toping.

a) juft ochko tushishi;
b) 5 ochkodan kam bo‘lmagan ochko tushishi.

24. Ikkita tanga tashlangan. Agar A – tangalar bir xil tomonlar bilan tushishi hodisasi, B – turli tomonlar bilan tushishi hodisasi bo‘lsa, qaysi hodisaning ehtimoli kattaroq?

25. Uchta tanga tashlangan. Ikki marta “gerb” tomoni bilan tushishi ehtimolini toping.

26. 52 talik kartalar dastasidan tavakkaliga uchtasi olinadi. Ularning “3”, “7” va “tuz” karta bo‘lishi ehtimoli qanday?

27. Telefon raqami 6 ta raqamdan iborat. Telefon nomerining: a) raqamlari turli xil bo‘lishi; b) raqamlari 3 ga karrali bo‘lishi ehtimol-larini toping.

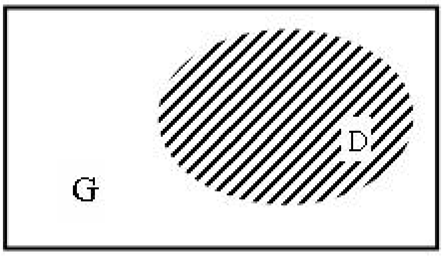
28. Qutida faqat ranglari bilan farqlanuvchi 22 ta shar bor: 9 ta ko‘k, 5 ta sariq va 8 ta oq. Qaysi hodisaning ehtimoli kattaroq: qutidan sariq sharning chiqishimi yoki shashqoltosh tashlanganda 5 ochko tushishimi?

29. O‘nta biletdan ikkitasi yutuqli. Tavakkaliga olingan 5 ta bilet orasida bittasi yutuqli bo‘lish ehtimolini toping.

30. 100 ta detal orasida 10 tasi yaroqsiz. Shu partiyadan tanlangan 5 ta detal orasida kamida bittasi yaroqsiz bo‘lish ehtimolini toping.

Ehtimollikning geometrik ta'rifi

Ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra Ω - elementar hodisalar fazosi chekli bo'lgandagina hisoblashimiz mumkin. Agar Ω cheksiz teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsa, geometrik ehtimollikdan foydalanamiz.



6-rasm.

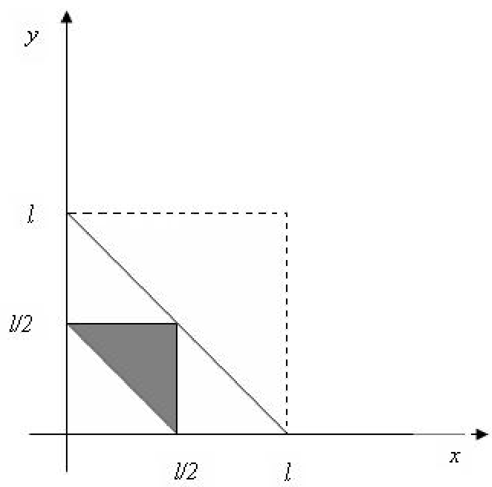
O'lchovli biror G soha berilgan bo'lib, u D sohani o'z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolligini hisoblash masalasini ko'ramiz. Bu yerda X nuqtaning G sohaga tushishi muqarrar va D sohaga tushishi tasodifiy hodisa bo'ladi. $A = \{X \quad D\}$ -X nuqtaning D sohaga tushishi hodisasi bo'lsin.

✓ A hodisaning geometrik ehtimolligi deb, D soha o'lchovini G soha o'lchoviga nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A) = \frac{mes\{D\}}{mes\{G\}},$$

bu yerda *mes* orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.

misol. l uzunlikdagi sterjen tavakkaliga tanlangan ikki nuqtada bo'laklarga bo'lindi. Hosil bo'lgan bo'laklardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi ehtimolligini toping.



Birinchi bo'lak uzunligini x, ikkinchi bo'lak uzunligini y bilan belgilasak, uchinchi bo'lak uzunligi l-x-y bo'ladi. Bu yerda $\Omega = \{(x, y) : 0 < x + y < l\}$, ya'ni $0 < x + y < l$ sterjenning bo'laklari uzunliklarining barcha bo'lishi mumkin bo'lgan kombinatsiyasidir. Bu bo'laklardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak: $x + y > l - x - y$, $x + l - x - y > y$, $y + l - x - y > x$.

7-rasm.

Bulardan $x < \frac{l}{2}$, $y < \frac{l}{2}$, $x + y > \frac{l}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu tengsizliklar 7-rasmdagi bo‘yalgan sohani bildiradi. Ehtimollikning geometrik ta’rifiga ko‘ra:

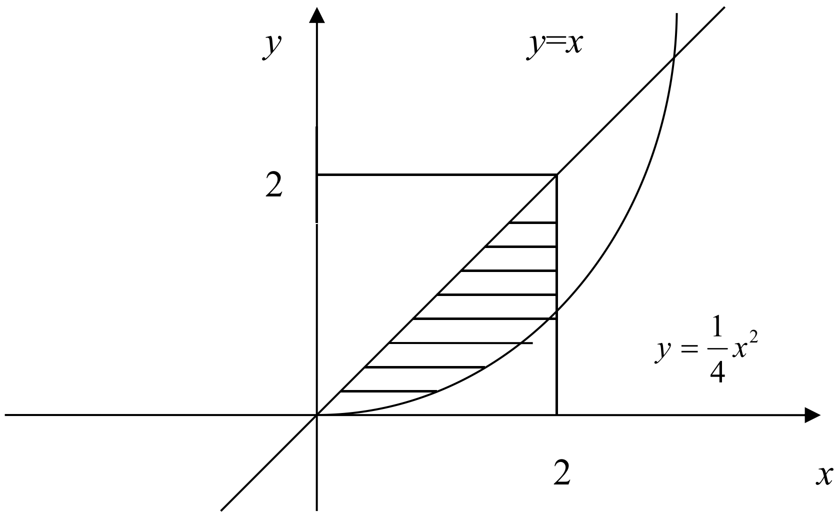
$$P(A)=\frac{mes\{A\}}{mes\{G\}}=\frac{\frac{1}{2}\ \frac{l}{2}\ \frac{l}{2}}{\frac{1}{2}\ l\ l}=\frac{1}{4}.$$

31-misol. [0; 2] kesmadan tavakkaliga ikkita x va y sonlari tanlangan. Bu sonlar $y \le x$ va y $\ \frac{1}{4}x^2$ tengsizliklarni qanoatlantirishi ehtimolini toping.

Yechish: Masalaning shartidan (x ; y) nuqtaning koordinatalari

$$\begin{matrix} 0 & x & 2 \\ 0 & y & 2 \end{matrix}$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradi. Bizni qiziqtirayotgan A hodisa tanlanadigan (x ; y) nuqta shtrixlangan figuraga tegishli bo‘lgan hol-da va faqat shu holda ro‘y beradi. (1-rasm).



Bu figura koordinatalari $x^2 \le 4y \le 4x$ tengsizlikni qanoat-lantiradigan nuqtalarning to‘plami sifatida hosil qilingan.

Demak, izlanayotgan ehtimol shtrixlangan figura yuzining kvadrat yuziga nisbatiga teng, ya’ni

$$\text{P (A)} = \frac{{}^{2}_{0}\ \ x-\frac{x^2}{4}\ \ dx}{4}=\frac{1}{3}$$

32. Sharga kub ichki chizilgan. Nuqta tavakkaliga sharga tashlanadi. Nuqtaning kubga tushish ehtimolini toping.

33. R radiusli doiraga nuqta tashlanadi. Bu nuqta doiraga ichki chizilgan kvadrat ichiga tushish ehtimolini toping.

34. R radiusli doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Tashlangan nuqtaning doiraga ichki chizilgan muntazam uchburchak ichiga tushishi ehtimolini toping.

35. Tavakkaliga har biri 2 dan katta bo‘lmagan ikkita x va y musbat son olinganda, bu sonlarning ko‘paytmasi xy birdan katta bo‘lmasligi, $\frac{y}{x}$ bo‘linma esa ikkidan katta bo‘lmasligi ehtimolini toping.

36. Kvadratga ichki doira chizilgan. Kvadratga tavakkaliga tashlangan nuqtaning doira ichiga tushishi ehtimolini toping.

37. Ikkita x va y haqiqiy son $x \le 1$, $0 \le y \le 1$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan qilib, tavakkaliga tanlanadi. $x^2 < y$ shartning bajarilish ehtimolini toping.

38. Parabola kvadratning pastki asosiga urinadi va uning yuqori uchlari orqali o‘tadi. Kvadratga tavakkaliga tashlangan nuqtaning kvadratning yuqori tomoni va parabola bilan chegaralangan sohaga tushish ehtimolini toping.

39. R radiusli doiraga muntazam oltiburchak ichki chizilgan. Doira ichiga tavakkaliga tashlangan nuqtaning oltiburchak ichiga tushish ehtimolini toping.

40-misol. Uzunligi 12 sm bo‘lgan AB kesmaga tavakkaliga C nuqta qo‘yiladi. AC kesmaga qurilgan kvadrat yuzi 36 sm^2 va 81 sm^2 lar orasida bo‘lish ehtimolini toping.

. Shartli ehtimollik. Hodisalarniig bogliqsizligi. To`la ehtimollik va Bayes formulalari. Bernulli sxemyasi va formulasi. Binomial taqsimot xossalari.

Reja:

1. **Shartli ehtimollik.;**
2. **To`la ehtimollik va Bayes formulalari.**
3. **Bernulli sxemasi va formulasi. Binomial taqsimot xossalari.**

A va B hodisalar biror tajribadagi hodisalar bo‘lsin.

- ✓ B hodisaning A hodisa ro‘y bergandagi *shartli ehtimolligi* deb,

$$\frac{P(A\quad B)}{P(A)} \quad (P(A) \quad 0)$$

nisbatga aytiladi. Bu ehtimollikni $P(B/A)$ orqali belgilaymiz.

Shartli ehtimollik ham Kolmogorov aksiomalarini qanoatlantiradi:

1. $P(B/A) \quad 0$;

2. $P(\Omega/A) = \frac{P(\Omega \quad A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$;

3. Agar $B \quad C = \quad$ bo‘lsa, u holda

$$P((B+C)/A)=\frac{P((B+C)\ \ A)}{P(A)}=\frac{P(B\ \ A+C\ \ A)}{P(A)}=\frac{P(B\ \ A)+P(C\ \ A)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B\ \ A)}{P(A)}+\frac{P(C\ \ A)}{P(A)}=P(B/A)+P(C/A),$$

chunki $B\ \ C=$ ekanligidan, $(B\ \ A)\ \ (C\ \ A)=B\ \ A\ \ A\ \ C=B\ \ C\ \ A=\ \ \ \ A=$

misol. Idishda 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Tavakkaliga ketma-ket bittadan 2 ta shar olinadi. Birinchi shar oq rangda bo‘lsa ikkinchi sharning qora rangda bo‘lishi ehtimolligini toping.

Bu misolni ikki usul bilan yechish mumkin:

1) A={birinchi shar oq rangda}, B={ikkinchi shar qora rangda}. A hodisa ro‘y berganidan so‘ng idishda 2 ta oq va 7 ta qora shar qoladi. Shuning uchun $P(B/A)=\frac{7}{9}$.

2) (1.11.1) formuladan foydalanib, hisoblaymiz: $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(AB)=\frac{3}{10}\ \frac{7}{9}=\frac{7}{30}$

Shartli ehtimollik formulasiga ko‘ra: $P(B/A)=\frac{P(A\ \ B)}{P(A)}=\frac{7/30}{3/10}=\frac{7}{9}$.

Shartli ehtimollik formulasidan hodisalar ko‘paytmasi ehtimolligi uchun ushbu formula kelib chiqadi:

$$P(A\ \ B)=P(A)\ \ P(B/A)=P(B)\ \ P(A/B)$$

tenglik ko‘paytirish qoidasi(teoremasi) deyiladi. Bu qoidani n ta hodisa uchun umumlashtiramiz:

$$P(A_1\ \ A_2\ \ ...\ \ A_n)=P(A_1)\ \ P(A_2/A_1)\ \ P(A_3/A_1A_2)...\ \ P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

✓ Agar $P(A/B)=P(A)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda A hodisa B hodisaga bog‘liq emas deyiladi va $A\perp B$ orqali belgilanadi.

Agar $A\perp B$ bo‘lsa, u holda formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$P(A\ \ B)=P(B)\ \ P(A/B)=P(B)\ \ P(A).$$

✓ A va B hodisalar o‘zaro bog‘liq emas deyiladi, agar

$$P(A\ \ B)=P(A)\ \ P(B)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa.

Lemma. Agar $A \perp B$ bo‘lsa, u holda $A \perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp B$ va $\overline{A} \perp \overline{B}$ bo‘ladi.
Isboti: $A \perp B$ bo‘lsin. U holda $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. $P(B) + P(\overline{B}) = 1$ tenglikdan foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A \cap (\Omega - B)) = P(A \cap \Omega - A \cap B) = P(A - A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) =$$
$$= P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Demak, $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow A \perp \overline{B}$. Qolganlari ham xuddi shunday isbotlanadi. ■

To‘la ehtimollik va Bayes formulalari

$A_1, A_2, ..., A_n$ juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘la gruppani tashkil etsin, ya’ni $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ va $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. U holda $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$ ekanligini hisobga olib, B ni $B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 + A_2 + ... + A_n) = B \cap A_1 + B \cap A_2 + ... + B \cap A_n$ ko‘rinishda yozamiz. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ ekanligidan $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$, $i \neq j$ ekani kelib chiqadi. B hodisaning ehtimolligini hisoblaymiz:

$$P(B) = P(B \cap A_1 + B \cap A_2 + ... + B \cap A_n) =$$
$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n).$$

Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra $P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B / A_i), i = \overline{1, n}$ bo‘ladi. Bu tenglikni (1.12.1) ga qo‘llasak,

$$P(B) = P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + ... + P(A_n)P(B / A_n).$$

✓ Agar $B \subset \sum_{i=1}^{n} A_i$ bo‘lsa, u holda

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglik *to‘la ehtimollik formulas*i deyiladi.

masala. Detallar partiyasi uch ishchi tomonidan tayyorlanadi. Birinchi ishchi barcha detallarning 25%ini, ikkinchi ishchi 35%ini, uchinchsi esa 40%ini tayyorlaydi. Bu uchchala ishchining tayyorlagan detallarining sifatsiz bo‘lish ehtimolliklari mos ravishda 0.05,0.04 va 0.02 ga teng bo‘lsa, tekshirish uchun partiyadan olingan detalning sifatsiz bo‘lish ehtimolligini toping.

A_i={detal i-ishchi tomonidan tayyorlangan} $i=\overline{1,3}$, B={tekshirish uchun olingan detal sifatsiz} hodisalarni kiritamiz va quyidagi ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$$P(A_1)=\frac{25\%}{100\%}=0.25,\quad P(A_2)=\frac{35\%}{100\%}=0.35,\quad P(A_3)=\frac{40\%}{100\%}=0.4\,,$$

$P(B/A_1)=0.05,\quad P(B/A_2)=0.04,\quad P(B/A_3)=0.02$. To‘la ehtimollik formulasiga asosan $P(B)=0.25\cdot 0.05+0.35\cdot 0.04+0.4\cdot 0.02=0.0345$.

A_i va B hodisalar ko‘paytmasi uchun

$$P(A_i\cdot B)=P(B)\cdot P(A_i/B)$$
$$P(A_i\cdot B)=P(A_i)\cdot P(B/A_i)$$

tengliklar o‘rinli. Bu tengliklardan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$P(B)\cdot P(A_i/B)=P(A_i)\cdot P(B/A_i)\,,$$

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}\,.$$

Bu yerda $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)$. Bu tenglik *Bayes formulasi* deyiladi. Bayes formulasi yana *gipotezalar teoremasi* deb ham ataladi. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarni gipotezalar deb olsak, u holda $P(A_i)$ ehtimollik A_i gipotezaning aprior(“a priori” lotincha tajribagacha), $P(A_i/B)$ shartli ehtimollik esa aposterior(“a posteriori” tajribadan keyingi) ehtimolligi deyiladi.

masala. 1.11-misolda sifatsiz detal ikkinchi ishchi tomonidan tayyorlangan bo‘lishi ehtimolligini toping. Bayes formulasiga ko‘ra:

$$P(A_2/B)=\frac{0.35\cdot 0.04}{0.25\cdot 0.05+0.35\cdot 0.04+0.4\cdot 0.02}=\frac{28}{69}\approx 0.4\,.$$

41-misol. Sexda bir necha stanok ishlaydi. Smena davomida bitta stanok sozlashni talab etish ehtimoli 0,2 ga teng, ikkita stanokni sozlashni talab etish ehtimoli 0,13 ga teng. Smena davomida ikkitadan ortiq stanokni sozlashni talab etish ehtimoli esa 0,07 ga teng. Smena davomida stanoklarni sozlashni talab etilishini ehtimolini toping.

Yechish: Quyidagi hodisalardan qaraymiz.

A – Smena davomida bitta stanokni sozlash talab etiladi.
B – Smena davomida ikkita stanokni sozlash talab etiladi.
C – Smena davomida ikkitadan ortiq stanokni sozlash talab etiladi.

A, B va C hodisalar o‘zaro birgalikda emas. Bizni quyidagi hodisa qiziqtiradi: (A+B+C) – smena davomida sozlash uchun zarur bo‘la-digan stanoklar:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}2+0{,}13+0{,}07=0{,}4$$

42-misol. Yashikda 10 ta qizil va 6 ta ko‘k shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olinadi. Olingan ikkala sharning bir xil rangli bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish: A hodisa olingan ikkala shar qizil bo‘lishi, B hodisa esa olingan ikkala sharning ko‘k bo‘lish hodisasi bo‘lsin. Ko‘rinib turibdiki, A va B hodisalar birgalikda bo‘lmagan hodisalar. Demak,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

A hodisaning ro‘y berishiga $C^2{}_{10}$ ta natija imkoniyat yaratadi. B hodisaning ro‘y berishiga esa $C^2{}_6$ ta natija imkoniyat yaratadi. Umumiy ro‘y berishi mumkin bo‘lgan natijalar soni esa $C^2{}_{16}$ ga teng.
U holda:

$$P(A+B)=\frac{C_{10}^2+C_6^2}{C_{16}^2}=\frac{\frac{10\ 9}{2}+\frac{6\ 5}{2}}{\frac{16\ 15}{2}}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}.$$

43-misol. Ikki ovchi bo‘riga qarata bittadan o‘q uzishdi. Birinchi ovchining bo‘riga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisiniki 0,8 ga teng. Hech bo‘lmaganda bitta o‘qning bo‘riga tegish ehtimolini toping.

Yechish. A hodisa birinchi ovchining bo‘riga o‘qni tekkizishi, B hodisa esa ikkinchi ovchining bo‘riga o‘qni tekkizishi bo‘lsin. Ko‘rinib turibdiki, A va B hodisalar birgalikda bo‘lgan, ammo bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan hodisalar. U holda

$$P(A+B)=P(A)+P(B) – P(AB)= P(A)+P(B)- P(A)\cdot P(B)=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94$$

44-misol. Tanga va kubik bir vaqtda tashlangan. “Gerb tushishi “ va “3” ochko tushishi hodisalarining birgalikda ro‘y berish ehtimolini toping.

Yechish: A hodisa tanganing “gerb” tushishi, B hodisa esa kubik tashlanganda “3” ochko tushishi bo‘lsin. A va B hodisalar bog‘liq bo‘l-magan hodisalar. U holda:

$$P(A\ \ B)=P(A)\ \ P(B)=\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

45-misol. Sexda 7 ta erkak va 3 ta ayol ishchi ishlaydi. Tabel nomerlari bo‘yicha tavakkaliga 3 kishi ajratildi. Barcha ajratib olingan kishilar erkaklar bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish: Hodisalarni quyidagicha belgilaylik: A hodisa birinchi ajratilgan erkak kishi, B ikkinchi ajratilgan C uchinchi ajratilgan erkak kishi.

Birinchi ajratilgan kishining erkak bo‘lishi ehtimoli:

$$P(A) = \frac{7}{10}$$

Birinchi ajratilgan kishining erkak kishi bo‘lganligi shartida ikkin-chi kishining erkak bo‘lishi ehtimoli, ya’ni B hodisaning shartli ehtimoli:

$$P(B/A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Oldin ikki erkak kishi ajratib olinganligi shartida uchinchi ajratilgan kishi erkak bo‘lishi ehtimoli, ya’ni C hodisaning shartli ehtimoli:

$$\mathrm{P(C/AB)}=\frac{5}{8}$$

Ajratib olingan kishilarning hammasi erkak ishchilar bo‘lishi ehti-moli:

$$P(ABC) = P(A)\;\; P(B/A)\;\; P(C/AB) = \frac{7}{10}\;\frac{2}{3}\;\frac{5}{8} = \frac{7}{24}$$

46-misol. Ko‘prik yakson bo‘lishi uchun bitta aviatsion bombaning kelib tushishi kifoya. Agar ko‘prikka tushish ehtimollari mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 bo‘lgan 4 ta bomba tashlansa, ko‘prikni yakson bo‘lish ehtimolini toping.

Yeshish: Demak, kamida bitta bombaning ko‘prikka tushishi, uni yakson bo‘lishi uchun yetarli (A hodisa). U holda, izlanayotgan ehtimol

$$\mathrm{P(A)} = 1 - 0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3 \approx 0{,}95$$

47. Yashikda 6 ta yashil va 5 ta qizil tugmalar bor. Tavakkaliga 2 ta tugma olinadi. Olingan ikkala tugmaning ham bir xil rangli bo‘lish ehtimolini toping.

48. Tanga va o‘yin soqqasi bir vaqtda tashlanadi. “Raqam tushish” va “4” ochko tushishi hodisalarining birgalikda ro‘y berish ehtimolini toping.

49. Qutida 3 ta oq va 8 ta qizil shar bor. Qutidan tavakkaliga bitta shar, keyin yana bitta shar olindi. Olingan sharlardan birinchisi oq, ikkinchisi qizil bo‘lish ehtimolini toping.

50. Birinchi yashikda 6 ta oq va 14 ta qizil shar bor. Ikkinchi yashikda esa 4 ta oq va 6 ta qizil shar bor. Agar har bir yashikdan bittadan shar olinsa, hech bo‘lmaganda bitta sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

51. Uchta to‘pdan otishda nishonga tekkizish ehtimoli mos ravishda P_1=0,9; P_2=0,7; P_3=0,8. Nishon yakson qilinishi uchun bitta o‘qning nishonga tegishi kifoya qilsa, uchala to‘pdan biryo‘la otishda nishonning yakson qilinishi ehtimolini toping.

52. Merganni bitta o‘q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli P=0,8. Mergan uchta o‘q uzdi. Uchala o‘qning ham nishonga tegish ehtimolini toping.

53. Yashikda 7 ta oq, 4 ta qora va 4 ta ko‘k shar bor. Har bir tajriba qutidan 1 ta shar olishdan iborat. Olingan shar qaytib qo‘yilmaydi. Birinchi sinashda oq shar (A), ikkinchisida qora (B), uchinchisida ko‘k shar chiqish ehtimolini toping.

54. Qutida 5 ta oq va 5 ta qora shar bor. Tavakkaliga 3 ta shar olinadi. Olingan uchala sharning ham bir xil rangli bo‘lish ehtimolini toping.

55. Uchta merganning nishonga tekkizish ehtimoli mos ravishda 0,6; 0,8 va 0,9 ga teng. Uchta mergan baravariga o‘q uzganda nishonga hech bo‘lmaganda bitta o‘qning tegishi ehtimolini toping.

56. Birinchi qutida 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Ikkinchi qutida esa 6 ta oq va 4 ta qora shar bor. Agar har bir qutidan bittadan shar olinsa, hech bo‘lmaganda bitta sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

57-misol. Texnik nazorat bo‘limi buyumlarning yaroqliligini tekshiradi. Buyumning yaroqli bo‘lish ehtimoli 0,9 ga teng. Tekshirilgan ikkita buyumdan faqat bittasi yaroqli bo‘lish ehtimolini toping.

58-misol. Talabaga kerakli formulani uchta spravochnikda bo‘lish ehtimoli mos ravishda 0,6; 0,7; 0,8 ga teng. Formula: a) faqat bitta spravochnikda; b) faqat ikkita spravochnikda; c) formula uchala spravochnikda bo‘lish ehtimolini toping.

59. Talaba programmadagi 25 ta savoldan 20 tasini biladi. Talabaning imtihon oluvchi taklif etgan uchta savolni bilish ehtimolini toping.

60. Yashikda 1dan 10gacha nomerlangan 10 ta bir xil kubik bor. Tavakkaliga bittadan 3 ta kubik olinadi. Birin-ketin 1,2,3 nomerli kubiklar chiqish ehtimolini quyidagi hollarda toping:

a) kubiklar olingach, yashikka qaytarib solinmaydi;
b) olingan kubik yashikka qaytarib solinadi.

61. Biror joy uchun iyul oyida bulutli kunlarning o‘rtacha soni oltiga teng. Birinchi va ikkinchi iyulda havo ochiq bo‘lish ehtimolini toping.

62. Guruhda 10 ta talaba bo‘lib, ularning 7 nafari a’lochilar. 4 ta talaba dekanatga chaqirtirildi. Ularning barchasi a’lochi bo‘lish ehtimolini toping.

63. Buyumlar partiyasidan tovarshunos oliy nav buyumlarni ajrat-moqda. Tavakkaliga olingan buyumning oliy nav bo‘lish ehtimoli 0,8 ga teng. Tekshirilgan uchta buyumdan faqat ikkitasi oliy nav bo‘lish ehti-molini toping.

64. Birinchi yashikda 4 ta oq va 8 ta qora shar bor. Ikkinchi ya-shikda 10 ta oq va 6 ta qora shar bor. Har qaysi yashikdan bittadan shar olinadi. Ikkala sharning ham oq chiqish ehtimolini toping.

65. Sexda 7 ta erkak va 8 ta ayol ishchi ishlaydi. Tabel tartib son-lari bo‘yicha tavakkaliga 3 kishi tanlangan. Tanlanganlarning hammasi ayol kishi bo‘lish ehtimolini toping.

66. Birinchi yashikda 5 ta oq va 10 ta qizil shar bor. Ikkinchi ya-shikda esa 10 ta oq va 5 ta qizil shar bor. Agar har bir yashikdan bittadan shar olinsa, hech bo‘lmaganda bitta sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

67. Bitta smenada stanokning ishlamay qolishi ehtimoli 0,05 ga teng. Uchta smenada stanokning ishlab turish ehtimolini toping.

68. Tanga birinchi marta “gerb” tomoni bilan tushguncha tash-lanadi. Tashlashlar sonining juft son bo‘lish ehtimolini toping.

69. A,B,C hodisalarning juft-juft bog‘liq emasligidan, ularning birgalikda bog‘liq emasligi kelib chiqmasligini ko‘rsatadigan masala tuzing.

70. Otilgan torpedoning kemani cho‘ktirib yuborish ehtimoli 0,5 ga teng. Agar kemani cho‘ktirib yuborish uchun bitta torpedoning mo‘ljalga tegishi yetarli bo‘lsa, 4 ta torpedoning kemani cho‘ktirib yuborish ehtimolini toping.

71-misol. Birinchi qutida 2 ta oq , 6 ta qora, ikkinchi qutida esa 4 ta oq, 2 ta qora shar bor.

Birinchi qutidan tavakkaliga 2 ta shar olib, ikkinchi qutiga solindi, shun-dan keyin ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olindi.

a) Olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

b) Ikkinchi qutidan olingan shar oq bo‘lib chiqdi. Birinchi qutidan olib ikkinchi qutiga solingan 2 ta shar oq shar bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish:

a) quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

A – ikkinchi qutidan olingan shar oq.

B_1 – birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta oq shar solingan.

B_2 – birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta turli rangdagi shar solingan.

B_3 – birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta qora shar solingan.

B_1, B_2 , B_3 – hodisalar hodisalarning to‘la guruhini tashkil etadi.

U holda, to‘la ehtimol formulasiga ko‘ra:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3)$$

Bunda:

$$P(B_1)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}; \qquad P(B_2)=\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}$$

$$P(B_3)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}; \qquad P(A/B_1)=\frac{3}{4}$$

$$P(A/B_2)=\frac{5}{8}; \qquad P(A/B_3)=\frac{1}{2}$$

U holda:

$$P(A)=\frac{1}{28}\ \frac{3}{4}+\frac{12}{28}\ \frac{5}{8}+\frac{15}{28}\ \frac{1}{2}=\frac{9}{16}$$

b) $P(B_1/A)$ ehtimolni Bayes formulasidan foydalanib topamiz.

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{28}\ \frac{3}{4}}{\frac{9}{16}}=\frac{1}{21}$$

72-misol. Ikkita avtomat bir xil detallar ishlab chiqaradi, bu detallar keyin umumiy konveyerga o‘tadi. Birinchi avtomatning unum-dorligi ikkinchi avtomatning unumdorligidan ikki marta ko‘p. Birinchi avtomat o‘rta hisobda detallarning 60% ini, ikkinchi avtomat esa o‘rta-cha hisobda detallarning 84% ini a’lo sifat bilan ishlab chiqaradi. Kon-veyerda tavakkaliga olingan detal a’lo sifatli bo‘lib chiqdi. Bu detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish: A – detal a’lo sifatli bo‘lish hodisasi bo‘lsin. Bu yerda ikkita taxmin (gipoteza) qilish mumkin:

B_1 – detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan, shu bilan birga:

$$P(B_1)=\frac{2}{3}$$

(Chunki birinchi avtomat ikkinchi avtomatga qaraganda ikki marta ko‘p detal ishlab chiqaradi);

B_2 – detalni ikkinchi avtomat ishlab chiqargan, shu bilan birga:

$$P(B_2)=\frac{1}{3}$$

Agar detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan bo‘lsa, detal a’lo sifatli bo‘lishining shartli ehtimoli

$$P(A/B_1)=0{,}6$$

Xuddi shunga o‘xshash:

$$P(A/B_2)=0{,}84$$

Tavakkaliga olingan detalning a’lo sifatli bo‘lish ehtimoli to‘la ehtimol formulasiga ko‘ra.

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)\ P(A/B_2)=\frac{2}{3}\ 0.6+\frac{1}{3}\ 0.84=0.68$$

Olingan a’lo sifatli detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan bo‘lish ehtimoli Bayes formulasiga ko‘ra

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\ 0.6}{0.68}=\frac{10}{17}$$

73. Yashikda 1-zavodda tayyorlangan 12 ta detal, 2-zavodda tay-yorlangan 20 ta detal va 3-zavodda tayyorlangan 18 ta detal bor. 1-zavodda tayyorlangan detalning a’lo sifatli bo‘lishi ehtimoli 0,9ga teng, 2-zavodda va 3-zavodda mos ravishda 0,6 va 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan detalning a’lo sifatli bo‘lishi ehtimolini toping.

74. Birinchi idishda 10 ta shar bo‘lib, ularning 8 tasi oq, ikkinchi idishda 20 ta shar bo‘lib, ularning 4 tasi oq. Har bir idishdan tavakkaliga bittadan shar olinib, keyin bu ikki shardan yana bitta shar tavakkaliga olindi. Oq shar olinganlik ehtimolini toping.

75. Uchta idishning har birida 6 tadan qora shar va 4 tadan oq shar bor. Birinchi idishdan tavakkaliga bitta shar olinib, uchinchi idishga so-lindi. Uchinchi idishdan tavakkaliga olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

76. Elektron raqamli mashinaning ishlash vaqtida arifmetik quril-mada, operativ xotira qurilmasida, qolgan qurilmalarda buzilish yuz berish ehtimollari

3:2:5 kabi nisbatda. Arifmetik qurilmada, operativ xotira qurilmasida va boshqa qurilmalardagi buzilishning topilish ehtimoli mos ravishda 0,8; 0,9; 0,9 ga teng. Mashinada yuz bergan buzilishning topilishi ehtimolini toping.

77. Qutida 10 ta miltiq bo‘lib, ularning 4 tasi optik nishon bi-lan ta’minlangan. Merganning optik nishonli miltiqdan o‘q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli 0,95 ga teng. Optik nishon o‘rnatilmagan miltiq uchun bu ehtimol 0,8 ga teng. Mergan tavakkaliga olingan miltiqdan nishonga o‘q tekkizdi. Qaysi birining ehtimoli katta? Mergan optik nishonli miltiqdan o‘q uzganiningmi yoki optik nishon o‘rnatil-magan miltiqdan o‘q uzganiningmi?

78. Benzokolonka joylashgan shossedan o‘tadigan yuk mashinalari sonining o‘sha shossedan o‘tadigan yengil mashinalar soniga nisbati 3:2 kabi. Yuk mashinaning benzin olish ehtimoli 0,1 ga teng, yengil mashina uchun bu ehtimol 0,2 teng. Benzokolonka yoniga benzin olish uchun mashina kelib to‘xtadi. Uning yuk mashina bo‘lish ehtimolini toping.

79. Ixtisoslashtirilgan kasalxonaga bemorlarning o‘rta hisobda 30% K kasallik bilan, 50% i L kasallik bilan 20% i M kasallik bilan qabul qilindi. K kasallikni to‘liq davolash ehtimoli 0,7 ga teng, L va M kasalliklar uchun bu ehtimol mos ravishda 0,8 ga va 0,9 ga teng. Kasal-likka qabul qilingan bemor butunlay sog‘ayib ketdi. Bu bemor K kasallik bilan og‘rigan bo‘lish ehtimolini toping.

80. Sharlar solingan 2 ta bir xil yashik bor. Birinchi yashikda 2 ta oq va 1 ta qora shar, ikkinchi yashikda esa 1 ta oq va 4 ta qora shar bor. Tavakkaliga bitta yashik tanlanadi va undan bitta shar olinadi. Olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

81. Qutidagi 20 ta sharni (12 ta oq va 8 ta qora) aralashtirish jarayonida bitta shar yo‘qotib qo‘yildi. Qolgan 19 ta shardan tavakkaliga bitta shar olindi. Olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

82. Sharlar solingan 2 ta bir xil yashik bor. Birinchi yashikda 3 ta oq va 2 ta qora, ikkinchi yashikda esa 4 ta oq va 4 ta qora shar bor. Birinchi yashikdan ikkinchi yashikka 2 ta shar tashlandi. Shundan keyin ikkinchi yashikdan bitta shar olindi. Olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

83. Ikki mergan bir-biriga bog‘liqmas ravishda, nishonga qarata bittadan o‘q uzishdi. Birinchi merganning nishonga o‘q tekkizish ehti-moli 0,8 ga teng, ikkinchi merganniki esa 0,4 ga teng. O‘qlar otilgandan keyin bitta o‘qning nishonga tekkani ma’lum bo‘ldi. O‘qni birinchi mergan nishonga tekkizgan bo‘lishi ehtimolini toping.

84. Uchta zavod soat ishlab chiqaradi va magazinga jo‘natadi. Bi-rinchi zavod butun mahsulotning 40% ini, ikkinchi zavod 45% ini, uchinchi zavod esa 15% ini tayyorlaydi. Birinchi zavod chiqargan soat-larning 80% i, ikkinchi zavod chiqargan soatlarning 70% i, uchinchi za-vod chiqargan soatlarning 90% i ilgarilab ketadi. Sotib olingan soat-ning ilgarilab ketishi ehtimolini toping.

85. Samolyotga qarata uchta o‘q otildi. Birinchi o‘qning nishonga tegish ehtimoli 0,5 ga, ikkinchisiniki 0,6 ga, uchinchisiniki esa 0,8 ga teng. Bitta o‘q tekkanda samolyotning urib tushirilish ehtimoli 0,3 ga, ikkita o‘q tekkanda 0,6 ga teng. Uchta o‘q tekkanda, samolyot urib tu-shiriladi. Samolyotning urib tushirilish ehtimolini toping.

86. Sexda tayyorlanadigan detallar 2 ta nazoratchi tomonidan tek-shiriladi. Detallarning nazorat uchun birinchi nazoratchiga tushish ehti-moli 0,6 ga teng, ikkinchi nazoratchiga tushishi 0,4 ga teng. Yaroqli de-talning birinchi nazoratchi tomonidan yaroqsiz deb topilish ehtimoli 0,06 ga, ikkinchi nazoratchi uchun esa 0,02 ga teng. Yaroqsiz deb topilgan detallar tekshirilganda ular ichidan yaroqli detal chiqib qoldi. Bu detalni birinchi nazoratchi tekshirganligi ehtimolini toping.

87. Yig‘uv sexiga 1-sexdan 600 ta, 2-sexdan 500 ta, 3-sexdan 500 ta detal kelib tushadi. 1- sexning yaroqsiz detallari 5% ni, 2-sexniki 8% ni, 3-sexniki 3% ni tashkil etadi. Tavakkaliga olingan detalning yaroqsiz bo‘lishi ehtimolini toping.

88. Yig‘ish uchun detallar ikkita stanokda tayyorlanib, ularning birinchisi ikkinchisiga nisbatan 3 marta ko‘p detal ishlab chiqaradi. Bun-da birinchi stanok ishlab chiqaradigan detallarning yaroqsiz bo‘lish ehti-moli 0,025, ikkinchi stanok uchun 0,015 ga teng. Tavakkaliga yig‘ish uchun olingan bitta detal yaroqli bo‘lib chiqdi. Bu detalning ikkinchi stanokda tayyorlangan bo‘lish ehtimolini toping.

89. Elektr lampochkalari partiyasining 10% i 1-zavodda, 40% i 2-zavodda, 50% i 3-zavodda tayyorlangan. Yaroqsiz lampochka ishlab chiqarish ehtimoli 1-zavod uchun 0,02 , 2-zavod uchun 0,008, 3-zavod uchun 0,006. Tavakkaliga olingan lampochkaning yaroqsiz bo‘lish ehtimolini toping.

90. Plastmassa buyumlari uchta avtomatda tayyorlanadi. 1-avto-mat mahsulotning 30% i, 2-avtomat mahsulotning 40% i, 3-avtomat esa 30% ini ishlab chiqaradi. Bunda I avtomatning 0,13 , II 0,25 , III 0,025 qismi yaroqsiz buyumlardir. Tanlangan yaroqli buyum III avtomatda tayyorlanganligining ehtimolini toping.

Bernulli formulasi. Muavr - Laplasning lokal va integral limit teoremalari. Puasson teoremasi.

Agar bir nechta sinov o‘tkazilayotgan bo‘lib, har bir sinashda A hodisaning ro‘y berish ehtimoli boshqa sinov natijalariga bog‘liq bo‘l-masa, u holda, bunday sinovlar A hodisaga nisbatan erkli sinovlar de-yiladi.

Faraz qilaylik, n ta erkli takroriy sinovning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p, ro‘y bermaslik ehtimoli q=1–p bo‘lsin. Shu n ta sinovdan A hodisaning (qaysi tartibda bo‘lishidan qat’iy nazar) rosa k marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k)$ ushbu Bernulli formulasi bilan hisoblanadi.

$$P_n(k) = C_n^k P^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} P^k q^{n-k}$$

A hodisaning o‘tkazilayotgan n ta erkli takroriy sinov davomida kamida k marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n)$$

ko‘pi bilan k marta ro‘y berishi ehtimoli esa

$$P_n(0)+ P_n(1)+\ldots+ P_n(k)$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Agar n ta erkli sinovda hodisaning k_0 marta ro‘y berish ehtimoli sinovning boshqa mumkin bo‘lgan natijalari ehtimollaridan kichik bo‘l-masa, u holda k_0 soni eng ehtimolli son deb ataladi va u quyidagi qo‘sh tengsizlik bilan aniqlanadi:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

Eng ehtimolli son k_0 ushbu shartlarni qanoatlantiradi:

a) agar np–q kasr son bo‘lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud bo‘ladi;
b) agar np–q butun son bo‘lsa, u holda ikkita k_0 va k_0+1 eng ehtimolli sonlar mavjud bo‘ladi;
c) agar np butun son bo‘lsa, u holda eng ehtimolli son $k_0=np$ bo‘ladi.

91-misol. Har bir otilgan o‘qning nishonga tegish ehtimoli $p=\frac{2}{3}$ Otilgan 10 ta o‘qdan uchtasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish: $n=10$; $k=3$; $p=\frac{2}{3}$; $q=\frac{1}{3}$. U holda Bernulli formulasiga asosan:

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

92-misol. Tanga 6 marta tashlandi. Gerbli tomon tushishlarning eng ehtimolli sonini toping.

Yechish: Berilgan masalaning shartlariga ko‘ra $n=6$, $p=q=1/2$. U holda gerbli tomon tushishining eng ehtimolli soni k_0 ni

$$k_0 = np = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

yuqoridagi formuladan foydalanib topamiz.
Demak, eng ehtimolli son $k_0=3$ bo‘ladi.

93. Savdo do‘koniga kirgan 8 ta xaridordan har birining xarid qilish ehtimoli 0,7 ga teng. Xaridorlardan beshtasining xarid qilish ehtimolini toping.

94. Biror mergan uchun bitta o‘q uzishda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng va o‘q uzish tartibiga (nomeriga) bog‘liq emas. 5 marta o‘q uzilganda nishonga rosa 2 marta tegish ehtimolini toping.

95. Tanga 10 marta tashlanganda gerbli tomon:

a) 4 tadan 6 martagacha tushish ehtimolini toping.

b) Hech bo‘lmaganda bir marta tushish ehtimolini toping.

96. Birorta qurilmaning 15 ta elementidan har biri sinab ko‘riladi. Elementlarning sinovga bardosh berish ehtimolli sonini toping.

97. Qaysi hodisaning ehtimoli katta?

a) Teng kuchli raqib bilan o‘ynab, to‘rtta partiyadan uchtasini yutib olishmi yoki sakkizta partiyadan beshtasini yutib olishmi?

b) To‘rtta partiyaning kamida uchtasini yutib olishmi yoki sakkizta partiyaning kamida beshtasini yutib olishmi?

98. Tanga tashlanadi. Tanga 11 marta tashlanganda gerbli tomon 3 marta tushish ehtimolini toping.

99. Qaysi birining ehtimoli kattaroq: tanga 4 marta tashlanganda “gerb”ning 2 marta tushishimi yoki 8 marta tashlanganda “gerb”ning 4 marta tushishimi?

100. Ishlab chiqarilgan buyumlarning 5% i yaroqsiz, tavakkaliga tanlangan 5 ta buyumdan ikkitasini yaroqsiz bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

101. Tanga 5 marta tashlanadi. Tanganing 1 marta “gerb” tomoni bilan tushish ehtimolini toping.

102. Merganning nishonga urish ehtimoli 0,3 ga teng. Merganning 6 ta o‘qdan to‘rttasini nishonga urish ehtimolini toping.

103. Merganning nishonga urish ehtimoli 0,25 ga teng. Mergan nishonga qarata 8 ta o‘q uzadi. Quyidagi ehtimollarni toping:

a) Kamida 7 ta o‘q nishonga tegadi.

b) Kamida 1 ta o‘q nishonga tegadi.

104. Firma mahsulotlarining 5% i yaroqsiz. 5 ta mahsulot tanlanganda:

a) 1 ta ham yaroqsiz mahsulot yo‘q bo‘lishi;

b) 2 ta yaroqsiz mahsulot bo‘lish ehtimoli nimaga teng.

105. Tanga 20 marta tashlanadi. “Gerb” tomon bilan tushishlar sonining eng ehtimolli sonini toping.

106. O‘yin soqqasi 16 marta tashlanadi. 3 ga karrali ochkolarning eng ehtimolli sonini toping.

107. O‘qning nishonga tegish ehtimoli p=0,35. Nishonga qarata 10 ta o‘q uziladi. Nishonga tegishlarning eng ehtimolli sonini toping.

108. Oilada 10 ta farzand bor. O‘g‘il bola va qiz bola tug‘lish ehti-moli $P=\frac{1}{2}$ bo‘lsa, ularning 5 tasi o‘gil bola va 5 tasi qiz bola bo‘lish ehti-molini toping.

109. Tanga 7 marta tashlanadi. Tanganing 2 marta “raqam” tomoni bilan tushish ehtimolini toping.

110. O‘qning nishonga tegish ehtimoli p=0,7. Nishonga otilgan 5 ta o‘qdan 2 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari. Puasson formulasi

Bernulli formulasini n ning katta qiymatlarida qo‘llash qiyin, chun-ki formula katta sonlar ustida amallar bajarishni talab qiladi. Bizni qi-ziqtirayotgan ehtimolni Bernulli formulasini qo‘llamasdan ham hisob-lanishi mumkin ekan.

Teorema. Agar har bir sinashda A hodisaning ro‘y berish ehtimoli P o‘zgarmas bo‘lib, nol va birdan farqli bo‘lsa, u holda n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro‘y berish ehtimoli (n qancha katta bo‘lsa, shuncha aniq)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi \left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right)$$

ga teng. Bu yerda:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

φ (x) funksiya juft bo‘lib, funksiyaning x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlaridan tuzilgan jadvallar ehtimollar nazariya-siga oid ko‘pgina adabiyotlarda keltirilgan.

Agar n ta sinashda hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k_1;k_2)$ ni topish talab qilinsa, sinashlar soni katta bo‘lganda, Muavr-Laplasning integral teoremasi qo‘llaniladi.

Teorema. Har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli P(0<P<1) ga teng bo‘lgan n ta sinovda hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k_1;k_2) \approx \phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - \phi\left(\frac{k_1 - np}{npq} \right)$$

ga teng. Bu yerda:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

ko‘rinishda bo‘lib, u Laplas funksiyasi deb ataladi. Bu funksiya toq funksiya bo‘lib, uning qiymatlari jadvallashtirilgan va $x \geq 5$ da ϕ(x)=0,5 deb olinadi.

Eslatma: Laplasning taqribiy formulalaridan $npq \geq 9$ bo‘lgan hollarda foydalangan ma’qul. Agar sinovlar soni katta bo‘lib, har bir sinovda hodisaning ro‘y berish ehtimoli p juda kichik bo‘lsa, u holda:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

formuladan foydalaniladi, bu yerda k hodisaning n ta erkli sinovda ro‘y berish soni, λ=np (hodisaning n ta erkli sinovda ro‘y berishlari o‘rtacha soni)

111. Bitta o‘q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta o‘q uzilganda rosa 75 ta o‘qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish: n=100; k=75; p=0,8; q=0,2
U holda,

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100*0.8}{\sqrt{100*0.8*0.2}}=-1.25$$

jadvaldan

$$\varphi(-\ 1{,}25)=0{,}1826$$

Demak,

$$P_{100}(75)=\frac{0.1826}{4}=0.04565$$

112-misol. Agar biror hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo‘lsa, bu hodisaning 100 ta sinovdan

a) rosa 50 marta ro‘y berish ehtimolini;

b) kami bilan 30 marta, ko‘pi bilan 45 marta ro‘y berish ehti-molini toping.

Yechish: a) shartga ko‘ra n=100; p=0,4; q=0,6. Sinovlar soni n katta bo‘lganligi uchun, masalani lokal teoremaga ko‘ra yechamiz:

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{50-100*0.4}{\sqrt{100*0.4*0.6}}=\frac{10}{\sqrt{24}}\approx 2.04$$

$\varphi(\underline{x})$ -funksiyaning qiymatlar jadvalidan

$$\varphi(2.04)=0{,}0498$$

ekanligini topamiz.

Topilganlarni formulaga qo‘yib, izlanayotgan ehtimolni topamiz:

$$\mathrm{P}_{100}(50)\approx\frac{1}{\sqrt{100\ \ 0.4\ \ 0.6}}\varphi(2.04)=\frac{0.0498}{\sqrt{24}}=0.0102$$

b) Laplasning integral teoremasini qo‘llaymiz. n=100; k_1=30; k_2=45; p=0,4 va q=0,6 ekanligiga asosan:

$$\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{30-100\ \ 0.4}{\sqrt{100\ \ 0.4\ \ 0.6}}=\frac{-10}{\sqrt{24}}\approx -2.04$$

$$\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{45-100\ \ 0.4}{\sqrt{100\ \ 0.4\ \ 0.6}}=\frac{5}{\sqrt{24}}\approx 1.02$$

$\phi(x)$ ning qiymatlar jadvalidan

$$\phi\ (-2{,}04)=-\ \phi\ (2{,}04)=-\ 0{,}4793$$
$$\phi(1{,}02)=0{,}3461$$

Topilganlarni formulaga qo‘yib, talab qilingan ehtimollikni topamiz.

$$P_{100}(30;45) \approx \phi(1{,}02)-\phi(-2{,}04)=\phi(1{,}02)+\phi(2{,}04)=0{,}3461+0{,}4793=0{,}8254$$

113-misol. A hodisaning 900 ta bog‘liqmas sinovning har birida ro‘y berish ehtimoli p=0,8 ga teng. A hodisa :

a) 750 marta ;

b) 710 dan 740 martagacha ro‘y berish ehtimolini toping.

Yechish: a) n=900; k=750; p=0,8; q=0,2

U holda:

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{750-900\;\;0.8}{\sqrt{900\;\;0.8\;\;0.2}}=2.5$$

jadvaldan

$$\varphi(2.5)\approx 0.0175$$

Demak, $$P_{900}(750) \approx \frac{1}{12}0{,}0175\approx 0{,}00146$$

b) $\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{710-720}{12}\approx -0.83$, $\quad \dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{740-720}{12}\approx 1.67$

jadvaldan

$$\phi(-0{,}83)=-\phi(0{,}83)\approx -0{,}2967;$$

$$\phi(1{,}67)\approx 0{,}4525$$

Demak,

$$P_{900}(710;740)\approx 0{,}4525+0{,}2967=0{,}7492$$

114-misol. Telefon stansiyasi 400 abonentga xizmat ko‘rsatadi. Agar har bir abonent uchun uning bir soat ichida stansiyaga qo‘ng‘iroq qilish ehtimoli 0,01 ga teng bo‘lsa, quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

a) bir soat davomida 5 abonent stansiyaga qo‘ng‘iroq qiladi;

b) bir soat davomida 4 tadan ko‘p bo‘lmagan abonent qo‘ng‘iroq qiladi;

c) bir soat davomida kamida 3 abonent stansiyaga qo‘ng‘iroq qiladi.

Yechish: p=0,01 juda kichik, n= 400 esa katta bo‘lgani uchun $\lambda=400\;\;0.01=4$ da Puassonning taqribiy formulasidan foydalanamiz:

a) $$P_{400}(5)\approx\frac{4^5}{5}e^{-4}\approx 0.156293.$$

$$b)P_{400}(0\quad k\quad 4)=P_{400}(0)+P_{400}(1)+P_{400}(2)+P_{400}(3)+P_{400}(4)=$$
$$0.018316+0.073263+0.146525+0.195367+0.195367=0.628838$$

c) $$P_{400}(3\quad k\quad 400)=1-P_{400}(0\quad k\quad 2)=1-0.018316-0.0732263-0.146525=0.761896$$

115. Korxonada ishlab chiqarilgan buyumning 20% i yaroqsizdir. 400 ta buyum ichidan yaroqsizlari sonining 50 bilan 100 orasida bo‘lish ehtimolini toping.

116. Maktabning birinchi sinfiga 260 ta bola qabul qilindi. Agar o‘g‘il yoki qiz tug‘ilish ehtimollari bir-biriga teng bo‘lsa, qabul qilinganlarning rosa 100 tasi qiz bola bo‘lish ehtimolini toping.

117. Avtomat qurolidan otilgan har bir o‘qning nishonga tegish ehtimoli 0,7 ga teng. Otilgan 60 ta o‘qdan nishonga tekkanlari soni kamida 30 ta va ko‘pi bilan 50 ta bo‘lish ehtimolini toping.

118. Kassirning vedomostda ko‘rsatilgan pulni birinchi sanashda adashish ehtimoli 0,04 ga teng. Uning 25 ta vedomostdagi pullarni sanaganda ko‘pi bilan ikkita vedomostda adashish ehtimolini toping.

119. O‘yin soqqasi 800 marta tashlanganda uchga karrali ochko 267 marta tushish ehtimolini toping.

120. Zavod omborga 5000 ta sifatli buyumlar yubordi. Har bir buyumning yo‘lda shikastlanish ehtimoli 0,0002 ga teng. 5000 ta buyum ichidan yo‘lda:

a) rosa 3 tasi shikastlanishi ehtimolini;

b) 3 tadan ko‘p bo‘lmagani shikastlanish ehtimolini;

v) 3 tadan ko‘pining shikastlanish ehtimolini toping.

121. O‘yin soqqasi 10 marta tashlanganda uchga karrali ochko-lar kamida 2 marta, ko‘pi bilan besh marta tushish ehtimolini toping.

122. Bitta o‘q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 marta o‘q uzilganda nishonga rosa 75 marta tegish ehtimolini toping.

123. **t** vaqt ichida bitta kondensatorning ishdan chiqish ehtimoli 0,2 teng. **t** vaqt ichida 100 ta bir-biriga bog‘liqsiz ishlovchi kondensator-dan:

a) kamida 20 tasining ishdan chiqishi;

b) 14 tadan 28 tagachasining ishdan chiqishi ehtimolini toping.

124. Do‘kon 1000 shisha ma’danli suv oldi. Tashib keltirishda 1 ta shishaning sinib qolish ehtimoli 0,003 ga teng. Do‘konga keltirilgan shisha idishlarning:

a)rosa 2 tasi;

b)2 tadan kami;

c)2 tadan ko‘pi;

g) hech bo‘lmaganda bittasi singan bo‘lishi ehtimolini toping.

125. Avtomat telefon stansiyasi 1000 ta telefon abonentiga xizmat ko‘rsatadi. 5 minut davomida ATSga abonentdan chaqiriq kelish ehtimoli 0,005 ga teng.

a) 5 minut davomida ATSga hech bo‘lmaganda bitta chaqiriq kelish ehtimoli qanday?

b) 5 minut davomida ATSga 4 tadan ko‘p chaqiriq kelish ehtimoli qanday?

126. Yangi tug‘ilgan 70 ta chaqaloqni kamida 40 va ko‘pi bilan 65 nafari o‘g‘il bola bo‘lish ehtimolini toping.

127. O‘yin soqqasi 50 marta tashlanganda «oltilik» kamida 10, ko‘pi bilan 25 marta tushishi ehtimolini toping.

128. Partiyada 30% yaroqsiz detallar bor. 50 ta detalning ichida 10 tadan ko‘pi yaroqsiz bo‘lib chiqishi ehtimolini toping.

129. P(A)=0,7 bo‘lsin. A hodisa 50 ta sinovdan 10 dan 25 martagacha ro‘y berish ehtimolini toping.

130. O‘yin soqqasi 60 marta tashlanganda «uchlik» 15 dan kam marta tushish ehtimolini toping.

Tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi. Tasodifiy vektor va uning taqsimoti.

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Masalan, o‘yin soqqasini tashlaganda tushishi mumkin bo‘lgan ochkolar soni, ishga kech qoluvchi xizmatchilar soni va hokazolar tasodifiy miqdorga misol bo‘la oladi.

1-ta’rif. Tasodifiy miqdor deb avvaldan noma’lum bo‘lgan va oldin-dan inobatga olib bo‘lmaydigan tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan hamda sinash natijasida bitta mumkin bo‘lgan qiymatni qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Odatda, tasodifiy miqdorlar lotin alifbosining katta harflari X, Y, Z ... va h.k. uning mumkin bo‘lgan qiymatlari kichik x,y,z... va h.k. harflar bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorlar diskret yoki uzluksiz bo‘lishi mumkin.

2-ta’rif. Diskret tasodifiy miqdor deb ayrim, ajralgan qiymatlarni ma’lum ehtimollar bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin.

3-ta’rif. Uzluksiz tasodifiy miqdor deb chekli yoki cheksiz oraliqda-gi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo‘lgan miqdorlarga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari soni cheksizdir.

4-ta’rif. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb mum-in bo‘lgan qiymatlar bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi usullar bilan berilishi mumkin:

a) Birinchi satri mumkin bo‘lgan X_k qiymatlardan, ikkinchi satri P_k ehtimollardan iborat jadval yordamida, yani:

$$X : x_1 \quad x_2 \ldots x_n$$
$$P : p_1 \quad p_2 \ldots p_n$$

bu yerda $$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

b) Grafik usulda - buning uchun to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida (x_k p_k) nuqtalar yasaladi, so‘ngra ularni to‘g‘ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, taqsimot ko‘pburchagi deb ataluvchi figura hosil qilinadi.

c) Analitik usulda (formula ko‘rinishida).

Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlariga mos ehtimollar

$$P_n(k) = C_n^k P^k q^{n-k}$$

Bernulli formulasi bilan aniqlanadigan bo‘lsa, tasodifiy miqdor binomial taqsimot qonuniga bo‘ysunadin deyiladi.

Agar diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlariga mos ehtimollar:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda = np$$

formula bilan aniqlanadigan bo‘lsa, bunday tasodifiy miqdor «Puasson taqsimot qonuniga bo‘ysunadi» deyiladi.

Agar diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlariga mos ehtimollar:

$$P_k = q^{k-1} p, \qquad \text{k=1,2, ...}$$

formula bilan aniqlanadigan bo‘lsa, bunday diskret tasodifiy miqdor “Geometrik taqsimot qonuniga bo‘ysunadi” deyiladi.

131- misol. Talabaning imtihon biletidagi savollarning har biriga javob berish ehtimoli 0,7 ga teng. Imtihon biletidagi 4 ta savolga bergan javoblari sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X tasodifiy miqdor orqali talabaning javoblari sonini belgilasak, uning qabul qiladigan qiymatlari $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$; $x_5=4$. Ko‘rinib turibdiki, n=4; p=0,7; q=0,3. X ning yuqoridagi qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi orqali topiladi.

$$P_1 = P_4(0) = C_4^0 (0.7)^0 (0.3)^4 = 0{,}0081$$
$$P_2 = P_4(1) = C_4^1 (0.7)^1 (0.3)^3 = 0{,}0756$$
$$P_3 = P_4(2) = C_4^2 (0.7)^2 (0.3)^2 = 0{,}2646$$
$$P_4 = P_4(3) = C_4^3 (0.7)^3 (0.3)^1 = 0{,}4116$$
$$P_5 = P_4(4) = C_4^4 (0.7)^4 (0.3)^0 = 0{,}2401$$

U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

X	0	1	2	3	4

P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Tekshirish: 0,0081 +0,0756 + 0,2646 +0,4116+0,2401 = 1

132-misol. Qurilma bir-biridan erkli ishlaydigan uchta elementdan iborat. Har bir elementning bitta tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,1ga teng. Bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X diskret tasodifiy miqdor orqali bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonini belgilasak, u ushbu qiymatlarga ega:
$X_1=0$; $X_2=1$; $X_3=2$; $X_4=3$.
Bundan tashqari, n=3; p=0,1; q=0,9 ekanligini hisobga olsak,

$$P_1 = P_3(0) = C_3^0(0.1)^0(0.9)^3 = 0.729$$
$$P_2 = P_3(1) = C_3^1(0.1)^1(0.9)^2 = 0.243$$
$$P_3 = P_3(2) = C_3^2(0.1)^2(0.9)^1 = 0.027$$
$$P_4 = P_3(3) = C_3^3(0,1)^3(0,9)^0 = 0,001$$

U holda, taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

133-misol. Nishonga qarata 4 ta o‘q uziladi, bunda har qaysi o‘q uzishda nishonga tegish ehtimoli p=0,8 ga teng.
Quyidagilarni toping:

a) Nishonga tegishlar soniga teng bo‘lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini;

b) $1\le X\le 3$ va $X>3$ hodisalarning ehtimolini;

v) Taqsimot ko‘pburchagini chizing.

Yechish: a) X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari: 0, 1, 2, 3, 4.

Ehtimollarni Bernulli formulasi bo‘yicha hisoblaymiz:

$$P_1= P(X=0) = C_4^0\, 0,8^0 \bullet 0,2^4= 0,0016$$
$$P_2= P\ (X=1) = C_4^1\, 0,8^1 \bullet 0,2^3= 0,0256$$
$$P_3= P\ (X=2) = C_4^2\, 0,8^2 \bullet 0,2^2= 0,1536$$
$$P_4= P\ (X=3) = C_4^3\, 0,8^3 \bullet 0,2^1= 0,4096$$
$$P_5= P\ (X=4) = C_4^4\, 0,8^4 \bullet 0,2^0 = 0,4096$$

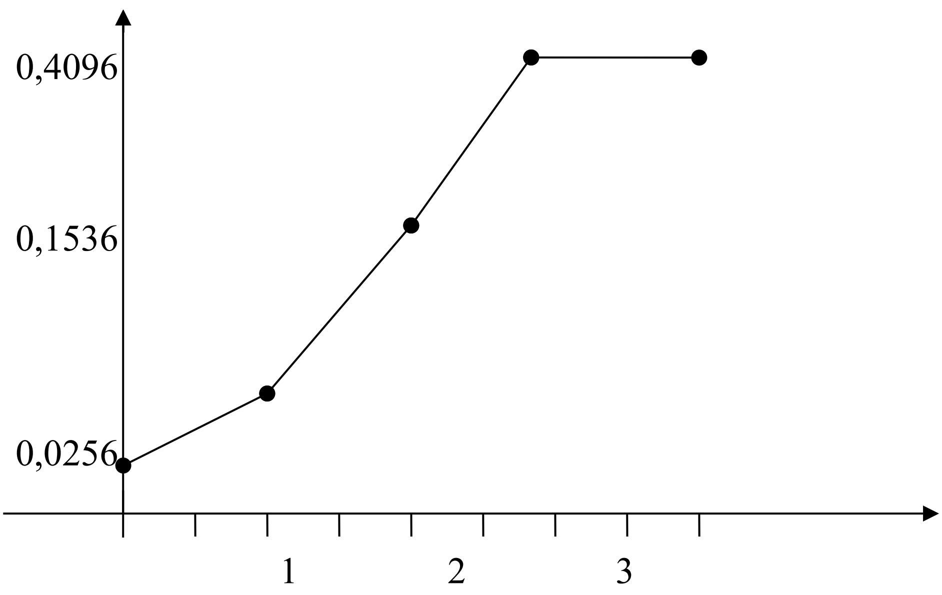
U holda, X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Tekshirish:

$$0{,}0016+0{,}0256+0{,}1536+0{,}4096+0{,}4096=1$$

b) $P(1 \le X \le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}0256+0{,}1536+0{,}4096=$
$=0{,}5888$
$P(X>3)=P(X=4)=0{,}4096;$
c) Taqsimot ko‘pburchagini yasaymiz:



134. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

135. Yashikda 5 ta oq va 25 ta qora shar bor. Yashikdan 1 ta shar olindi. X tasodifiy miqdor - olingan oq sharlar soni bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.

136. 10 ta detal solingan yashikda 8 ta yaroqli detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. Olingan detallar orasidagi yaroqli detallar soning taqsimot qonunini tuzing.

137. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

a) X: 2 4 5 6
P: 0,3 0,1 0,2 0,6

b) X: 10 15 20
P: 0,1 0,7 0,2

Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

138. X diskret tasodifiy miqdor tangani ikki marta tashlashda «gerbli» tomon tushish sonining binomial taqsimot qonunini yozing.

139. Ikkita o‘yin soqqasi birgalikda ikki marta tashlandi:

a) Ikkala o‘yin soqqasida juft ochkolar tushishi sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning binomial taqsimot qonunini toping;

b) Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

140. Ikki mergan bitta nishonga baravariga bittadan o‘q uzadi. Bitta o‘q uzishda birinchi mergan uchun nishonga tegish ehtimoli 0,5 ga, ikkinchi mergan uchun 0,4 ga teng. Diskret tasodifiy miqdor nishonga tegishlar soni.

a) X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping;

b) Taqsimot ko‘pburchagini yasang.

141. Ma’lum bir partiyada yaroqsiz detallar 10% ni tashkil etadi. Tavakkaliga 4 ta detal tanlab olinadi. Bu 4 ta detal orasida yaroqsiz detallar sonidan iborat bo‘lgan X diskret tasodifiy miqdorning binomial taqsimot qonunini toping.

142. Miltiqdan otilgan har bir o‘qning samolyotga tegish ehtimoli 0,001 ga teng. 3000 ta o‘q uziladi. Otilgan o‘qlarning samolyotga tekkanlari sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping:

143. Ikkita mergan galma-galdan nishonga qarata o‘q uzishadi. Bitta o‘q uzishda xato ketish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,2 ga, ikkinchisi uchun 0,4 ga teng. Agar 4 tadan ortiq o‘q uzilmagan bo‘lsa, nishonga tekkuncha otilgan o‘qlar sonidan iborat bo‘lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

144. Ikkita bombardimonchi samolyot nishonga tekkuncha galma-galdan bomba tashlaydi. Birinchi samolyotning nishonni aniq mo‘ljalga olish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisiniki esa 0,8 ga teng. Agar samolyot-larning har birida 2 tadan bomba bo‘lsa, tashlangan bombalar sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

145. Qiz va o‘g‘il bolalarning tug‘ilish ehtimollari teng deb faraz qilinadi. To‘rt bolali oiladagi o‘g‘il bolalar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

146. Uchta mergan bitta nishonga qarata o‘q uzishadi. Nishonga tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,8 ga, ikkinchisi uchun 0,6 ga, uchinchisi uchun 0,5 ga teng. Nishonga tekkan o‘qlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

147. Ichida 5 ta oq va 7 qora shar bo‘lgan idishdan 4 ta shar olinadi. Olingan oq sharlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdor-ning taqsimot qonunini toping.

148. Ikkita tanga 3 martadan tashlanadi. «Gerbli» tomon tushishlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

149. Agar bitta o‘q uzishda nishonga tegish ehtimoli 3/4 ga teng bo‘lsa, 3 ta o‘q uzishda nishonga tegishlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

150. Ichida 4 ta oq va 6 ta qora shar bo‘lgan idishdan 5 ta shar olinadi. Chiqqan oq sharlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miq-dorning taqsimot qonunini toping.

Ba’zi muhim taqsimotlar. Tasodifiy miqdorlardan olingan funksiyalarning taqsimotlari.

Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni har doim ham jadval ko‘ri-nishida berilavermaydi. Masalan, uzluksiz tasodifiy miqdor uchun uning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarini sanab chiqish mumkin emas.

1-ta’rif. Har bir $x \in R$ uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qandaydir qiymat qabul qilish ehtimolini beradigan

$$F(x) = P(X< x)$$

funksiya X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi yoki integral taqsimot funksiyasi deyiladi.

Agar X diskret tasodifiy miqdor bo‘lib x_1 x_2 ... qiymatlarini p_1, p_2 ... ehtimollar bilan qabul qilsa, uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$P(X < x) = \sum_{x_i<x} P_i$$

Taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega.

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $P(a<X<b) = F(b) - F(a)$;
3. Agar $x_1<x_2$ bo‘lsa, $F(x_1) \le F(x_2)$;
4. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

2-ta’rif. X uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining differensial funksiyasi yoki zichlik funksiyasi deb:

$$f(x) = F'(x)$$

funksiyaga aytiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor f(x) zichlik funksiyaga ega bo‘lsa, uning taqsimot funksiyasi quyidagiga teng:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. $f(x) \ge 0$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx.$

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari tegishli bo‘lgan (a,b) oraliqda

$$f(x) = \begin{cases} 0, agar, x \le a, bo'lsa \\ \dfrac{1}{b-a}, agar, a < x \le b\ bo'lsa \\ 0, agar, x > b, bo'lsa \end{cases}$$

zichlik funksiyaga ega bo‘lsa, bunday tasodifiy miqdor (a,b) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, X tasodifiy miqdor normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadi deyiladi.

Normal taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning (α , β) oraliqqa tushish ehtimoli:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

formula bo‘yicha hisoblanadi, bu yerda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Laplas funksiyasi.

Agar zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, agar, x < 0, bo'lsa \\ \lambda e^{-\lambda x}, agar, x \ge 0, bo'lsa \end{cases}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, X uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimoti ko‘rsatkichli taqsimot deyiladi.

151-misol. X – diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish: Ko‘rinib turibdiki, x (- ; -2] uchun X < x hodisa mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘ladi, ya’ni:

$$F(x)=0$$

Endi x (-2;1] bo‘lsin. U holda:

$$F(x)=P(X<x)=P(X=-1)=0,1$$

Agar x (-1;0] bo‘lsa,

$$F(x)=P(X<x)=P(X=-1)+P(X=0)=0,1+0,2=0,3$$

Huddi shuningdek, x (0; 1] bo‘lsa,

$$F(x)= 0,1 +0,2 + 0,2 = 0,5.$$

Agar x (1; 2] bo‘lsa,

$$F(x)= 0,1 + 0,2 + 0,2+0, 4= 0,9$$

Agar $x > 2$ bo‘lsa, F (x)= P(X< x) =1,

chunki ixtiyoriy $x > 2$ uchun X< x hodisa muqarrar hodisa bo‘ladi.

Shunday qilib, F(x) taqsimot funksiyaning analitik ifodasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$F(x)=\begin{matrix} 0, agar, x \quad -2, bo'lsa, \\ 0.1, agar -2 < x \quad -1, bo'lsa, \\ 0.3, agar -1 < x \quad 0, bo'lsa, \\ 0.5, agar, 0 < x \quad 1, bo'lsa, \\ 0.9, agar, 1 < x \quad 2, bo'lsa, \\ 1, agar, x > 2, bo'lsa, \end{matrix}$$

152-misol. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya bilan berilgan.

$$F(x)=\begin{matrix} 0, agar, x \quad -1, bo'lsa \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, agar -1 < x \quad \frac{1}{3}, bo'lsa \\ 1, agar, x > \frac{1}{3}, bo'lsa \end{matrix}$$

Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (0; $\frac{1}{3}$) intervalda yotgan qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish: Taqsimot funksiyaning 2-xossasiga asosan:

$$P (a < X < b)=F (b) - F (a).$$

Bu formulaga a = 0, b=$\frac{1}{3}$ ni qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(0 < X < \frac{1}{3}) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{3}} - \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right)\Bigg|_{x=0} = \frac{1}{4}$$

153-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x) = \begin{cases} 0, agar\ , x \le 0 bo'lsa \\ \sin 2x, agar\ 0 < x \le \frac{\pi}{4} bo'lsa \\ 1, agar\ , x > \frac{\pi}{4} bo'lsa \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan, f(x) zichlik funksiyani toping.

Yechish: Zichlik funksiya taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga teng:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, agar\ , x \le 0, bo'lsa \\ 2\cos 2x, agar\ , 0 < x \le \frac{\pi}{2} bo'lsa \\ 0, agar\ , x > \frac{\pi}{4} bo'lsa, \end{cases}$$

154-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, agar\ , x \le 0, bo'lsa \\ \cos x, agar\ , 0 < x \le \frac{\pi}{2} bo'lsa \\ 0, agar\ , x > \frac{\pi}{2} bo'lsa \end{cases}$$

F(x) taqsimot funksiyani toping.

Yechish: $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz$$

formuladan foydalanamiz. Agar $x \le 0$ bo‘lsa, F(x)=0
Demak,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dz = 0$$

Agar $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ bo‘lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dz + \int_{0}^{x} \cos z\,dz = \sin x$$

Agar $x > \frac{\pi}{2}$ bo‘lsa

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dz + \int_{0}^{\pi/2} \cos z\,dz + \int_{\pi/2}^{x} 0\,dx = \sin z \Big|_{0}^{\pi/2} = 1$$

Demak, izlanayotgan taqsimot funksiya quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, agar\ ,x \le 0, bo\text{'}lsa \\ \sin x, agar\ ,0 < x \le \frac{\pi}{2} bo\text{'}lsa \\ 1, agar\ ,x > \frac{\pi}{2} bo\text{'}lsa\ , \end{cases}$$

155-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyaga ega.

$$f(x) = \begin{cases} 0, agar\ ,x \le 0, bo\text{'}lsa \\ \frac{2}{3}\sin 3x, agar\ ,0 < x \le \frac{\pi}{3} bo\text{'}lsa \\ 0, agar\ ,x > \frac{\pi}{3} bo\text{'}lsa\ , \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$ intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish: $\quad P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

formuladan foydalanamiz.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 3x dx = \frac{\sqrt{2}}{9}$$

156. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x) = \begin{cases} 0, agar\ ,x \le 0, bo\text{'}lsa\ , \\ \sin x, agar\ ,0 < x \le \frac{\pi}{2} bo\text{'}lsa\ , \\ 1, agar\ ,x > \frac{\pi}{2} bo\text{'}lsa\ , \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan. f(x) zichlik funksiyani toping.

157. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \quad 0, bo'lsa \\ \sin x, 0 < x \quad \frac{\pi}{2} bo'lsa \\ 0, agar\ , x > \frac{\pi}{2} bo'lsa \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan F (x) taqsimot funksiyasini toping.

158. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \quad \frac{\pi}{6}, bo'sa \\ 3\sin 3x, \frac{\pi}{6} < x \quad \frac{\pi}{3} bo'lsa \\ 0, x > \frac{\pi}{3} bo'lsa, \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. F (x) taqsimot funksiyani toping.

159. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \quad 1, bo'lsa \\ x - \frac{1}{2}, 1 < x \quad 2 bo'lsa \\ 0, x > 2 bo'lsa, \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan. F (x) taqsimot funksiyani toping.

160. X uzluksiz tasodifiy miqdorning differensial funksiyasi butun Ox o‘qida:

$$f(x) = \frac{4c}{e^x + e^{-x}}$$

tenglik bilan berilgan. ***c*** o‘zgarmas parametrini toping.

161. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi butun Ox o‘qida:

$$f(x) = \frac{2c}{1 + x^2}$$

tenglik bilan berilgan. ***c*** o‘zgarmas parametrini toping.

162. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi (0; 1) intervalda f(x) = C *arctgx* tenglik bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida f(x) =0, C o‘zgarmas parametrini toping.

163. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiya bilan berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \quad 0, bo'lsa \\ x^2, 0 \quad x \quad 1 bo'lsa \\ 1, agar, x > 1, bo'lsa, \end{cases}$$

To‘rtta erkli sinov natijasida X tasodifiy miqdorning rosa 3 marta (0,25; 0,75) intervalda yotadigan qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

164. X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagicha qonun bo‘yicha taqsimlangan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \quad 0, bo'lsa \\ 2e^{-2x}, x \quad 0, bo'lsa \end{cases}$$

Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (0,3; 1) oraliqqa tushish ehtimolini toping.

165. X tasodifiy miqdor ehtimollar taqsimotining a=0, σ =2 parametrli normal qonuniga bo‘ysunsin. X tasodifiy miqdorning (-2; 3) oraliqqa tushish ehtimolini aniqlang.

166. X tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \quad 0, bo'lsa \\ A\sin x, 0 < x \quad \pi, bo'lsa, \\ 0, x > \pi, bo'lsa, \end{cases}$$

zichlik funksiyasi berilgan.

a) A ni aniqlang;
b) Taqsimot funksiyasi F(x) ni toping;
c) f(x) va F(x) funksiyalarning grafigini chizing.

167. X uzluksiz tasodifiy miqdor parametrlari a=20, σ =5 bo‘lgan normal taqsimot qonuniga bo‘ysunsin. Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (15;25) oraliqda joylashgan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

168. X tasodifiy miqdor [0;2] kesmada tekis taqsimot qonuniga ega.

a) 0<X<0,5 hodisaning ehtimolini toping;
b) f(x) va F(x) funksiyalarning grafiklarini chizing.

169. X tasodifiy miqdor parametrlari a=30, σ =10 bo‘lgan normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadi. X tasodifiy miqdor (10;50) oraliqda qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

170. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan. Bu miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi 0,4ga teng. Tasodifiy miqdorning absolut qiymati bo‘yicha a dan chetlanishi 0,3 dan kichik bo‘lishi ehtimolini toping.

Ba’zi muhim taqsimotlar. Tasodifiy miqdorlardan olingan funksiyalarning taqsimotlari.

Diskret tasodifiy miqdorning o‘rtacha qiymati xarakteristikasi bo‘lib matematik kutilish xizmat qiladi.

1-ta’rif. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb uning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlarini bu qiymatlarning mos ehtimollariga ko‘paytmalari yig‘indisiga aytiladi, ya’ni:

$$\mathrm{M}(\mathrm{X}) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari sanoqli to‘plam bo‘lsa, u holda:

$$M(X) = \sum_{k=1} x_k p_k$$

bunda tenglikning o‘ng tomonida turgan qator absolut yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi va

$$P_1 + P_2 + ...+ P_K + \ldots = \sum_{k=1} P_K = 1$$

Matematik kutilish quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O‘zgarmas miqdorning matematik kutilishi uning o‘ziga teng, ya’ni:

$$M(C)=C$$

2-xossa. O‘zgarmas sonni matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni:

$$M(CX) = CM(X)$$

3-xossa. Tasodifiy miqdorlar yig‘indisining matematik kutilishi qo‘shiluvchilarning matematik kutilishlari yig‘indisiga teng:

$$M(X_1+X_2+\ldots.+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots.+M(X_n)$$

4-xossa. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ko‘payt-masining matematik kutilishi ko‘paytuvchilar matematik kutilishlarining ko‘paytmasiga teng:

$$M(X_1 \; X_2 \ldots..X_n) = M(X_1) \; M(X_2) \ldots\ldots M(X_n)$$

2-ta'rif. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb chetlanish kvad-ratining matematik kutilishiga aytiladi, ya'ni:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2$$

Dispersiyani

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

formuladan foydalanib hisoblagan ma'qul.

Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = O$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini avval kvadratga oshirib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$D(CX)=C^2D(X)$$

3-xossa. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisi (ayir-masi) ning dispersiyasi qo'shiluvchilar dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X\pm Y) = D(X) +D(Y)$$

3-ta'rif. Tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

171-misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret taso-difiy miqdorning matematik kutilishini toping:

X:	-0,4	6	10
P:	0,2	0,3	0,5

Yechish:

$$M(X) =-0,4\cdot 0,2 + 6\cdot 0,3+10,0,5 =6$$

172-misol. Yashikda 5 ta oq va 25 ta qora shar bor. Yashikdan ta-vakkaliga 1 ta shar olingan. X tasodifiy miqdor olingan oq sharlar soni bo'lsa, uning taqsimot qonunini tuzing va matematik kutilishini hisob-lang.

Yechish: Bitta shar olinsa, bu shar qora yoki oq bo'lishi mumkin. Demak, X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari 0 yoki 1. U holda, uning taqsimot qonuni quyidagicha:

X	0	1
P	5/6	1/6

U holda ta'rifga ko'ra:

$$M(X)=0\ \frac{5}{6}+1\ \frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

173-misol. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

Yechish:

$$M(X)=0\cdot0{,}2+1\cdot0{,}4+2\cdot0{,}3+3\cdot0{,}08+4\cdot0{,}02=1{,}32$$

X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

X^2	0	1	4	9	16
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$$M(X^2)= 0\cdot0{,}2+1\cdot0{,}4+2\cdot0{,}3+9\cdot0{,}08+16\cdot0{,}02=1{,}64$$

U holda:

$$D(X)=M(X^2)- [M(X)]^2=2{,}64-(1{,}32)^2=2{,}64-1{,}7424=1{,}8976$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1.8976}=1.3775$$

174-misol. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar D(X)=5, D(Y) =6 ekanligi ma’lum bo‘lsa, Z=3X+2Y tasodifiy miqdorning disper-siyasini toping.

Yechish:D(Z)=D (3X+2Y)=D(3X)+D(2Y)=9D(X)+4D(Y)=$9\cdot5+4\cdot6$=69

175. Ushbu:

X:	-5	2	3	4
P:	0,4	0,3	0,1	0,2

taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersi-yasini va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

176. X tasodifiy miqdor – o‘yin soqqasi bir marta tashlanganda tushadigan ochkolar soni. M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

177. Qutida 7 ta shar bo‘lib, ularning to‘rttasi oq qolganlari qora. Qutidan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. X – olingan oq sharlar soni. M(X)ni toping.

178. Ikkita o‘yin soqqasi baravariga 2 marta tashlanadi. X – ikkala o‘yin soqqasidagi tushgan juft ochkolar soni. M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

179. 10 ta detaldan iborat partiyada 3 ta yaroqsiz detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. X – diskret tasodifiy miqdor olingan 2 ta detal orasidagi yaroqsiz detallar soni bo‘lsa, uning matematik kutilishini toping.

180. Tanga 5 marta tashlanadi. Raqam tomonining tushishlari soni-ning taqsimot qonunini va dispersiyasini hisoblang.

181. Ovchi nishonga qarata to birinchi marta tekkuncha otadi, lekin otgan o‘qlarning soni 4 tadan ortmaydi. Ovchining nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga teng. Otilgan o‘qlar sonining taqsimot qonunini tuzing va uning dispersiyasini hisoblang.

182. O‘yin soqqasi 4 marta tashlanadi. Soqqa 4 marta tashlanganda 6 ochkoning tushish sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini, M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

183. Agar bitta o‘q uzishda nishonga tegish ehtimoli $\frac{3}{4}$ ga teng bo‘lsa, 3 ta o‘q uzishda nishonga tegishlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini, M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

184. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar D(X)=4, D(Y)=5 ekanligi ma’lum bo‘lsa, Z=2X+3Y tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

185. X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi mos ravishda 2 va 10 ga teng. Z=2X+5 tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

186. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

X	3	5	7	9
P	0,4	0,3	0,2	0,1

187. X tasodifiy miqdor:

P $\{X=k\}=C_n^k P^k q^{n-k}$, k=0, 1, 2, …n

binomial taqsimot qonuniga ega bo‘lsa, M(X) va D(X) ni toping.

188. Mergan o‘q nishonga tekkuncha otadi, (Geometrik taqsimot) o‘qning nishonga tegish ehtimoli P ga teng. Otilgan o‘qlar sonining matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

189. Ichida 4 ta oq va 6 ta qora shar bo‘lgan idishdan 5 ta shar olinadi. X tasodifiy miqdor – chiqqan oq sharlar soni. M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

190. To‘pdan uzilgan bitta o‘q bilan nishonni mo‘ljalga olish ehtimoli 0,4 ga teng. Uchta o‘q uzilganda nishonga tekkizishlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

191. Ovchi parrandaga qarata o‘q tekkuncha otadi, lekin to‘rttadan ko‘p bo‘lmagan o‘q uzishga ulguradi, xolos. Agar bitta o‘q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga teng bo‘lsa, uzilgan o‘qlar sonidan iborat bo‘lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini va M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

192. A hodisaning bitta sinovda ro‘y berish sonining matematik kutilishi A hodisaning ro‘y berish ehtimoli P ga tengligini isbot qiling.

193. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi uning mumkin bo‘lgan eng kichik va eng katta qiymatlari orasida yotishini isbot qiling.

194. Ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

X	4.3	5.1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

195. A hodisaning har bir sinovda ro‘y berish ehtimoli 0,2 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor – A hodisaning 5 ta erkli sinovda ro‘y berish sonining dispersiyasini toping.

196. Diskret tasodifiy miqdor X Puasson taqsimot qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

M(X) va D(X) ni toping.

197. X diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita mumkin bo‘lgan $x_1$va x_2 qiymatga ega bo‘lib, $x_2 > x_1$ ·X ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,6 ga teng. M(X)=1,4, D(X)=0,24. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

198. X diskret tasodifiy miqdor ikkita $x_1 < x_2$ qiymatga ega. X ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,2 teng. M(X)=2,6, σ =0,8 bo‘lsa, X ning taqsimot qonunini toping.

199. Biror qurilmadagi elementning har bir tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,9 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor – elementning o‘nta erkli tajribada ishdan chiqish sonining dispersiyasini toping.

200. X diskret tasodifiy miqdor – ikkita erkli sinovda A hodisaning ro‘y berish sonining dispersiyasini toping. A hodisaning bu sinovlarda ro‘y berish ehtimoli bir xil va M(X)=1,2 ekanligi ma’lum.

Uzluksiz tasodifiy miqdor mumkin bo‘lgan qiymatlarini butun son o‘qida qabul qilsin, $f(x)$ funksiya uning zichlik funksiyasi bo‘lsin.

Agar

$$_{-}\,|x|f(x)dx$$

integral mavjud bo‘lsa,

$$_{-}\,xf(x)dx$$

integral X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deyiladi, ya'ni,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari (a; b) oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda

$$M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx$$

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari Ox o'qida yotsa, uning dispersiyasi quyidagi tenglik orqali aniqlanadi

$$Д(X)=\int_{-\infty}^{\infty} [x-M(X)]^2 f(x)dx$$

yoki

$$Д(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx]^2$$

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari (a; b) oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda:

$$Д(X)=\int_{a}^{b} x^2 f(x)dx-[\int_{a}^{b} xf(x)dx]^2$$

Eslatma: Matematik kutilish va dispersiyaning diskret tasodifiy miqdorlar uchun keltirilgan xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinli.

Tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(x)=\sqrt{Д(X)}.$$

201-misol. Ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimot qonuni bilan taqsimlangan:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0 bo'lsa,\\ 1-e^{-\lambda x}, x\geq 0, \lambda>0\end{cases}$$

X uzluksiz tasodifiy miqdorning:

a) zichlik funksiyasini;

b) matematik kutilishini;

v) dispersiyasini toping.

Yechish:

a) Ta'rifga asosan

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, x < 0 bo'lsa, \\ \lambda e^{\lambda x}, x \quad 0, \lambda > 0 \end{cases}$$

б) Matematik kutilish ta'rifiga asosan:

$$M(X) = \lambda \int_0 x e^{\lambda x} dx = \begin{vmatrix} x = u, du = dx \\ \upsilon = \int e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{vmatrix} = \lambda \left(-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big/_0 + \frac{1}{\lambda} \int_0 e^{-\lambda x} dx \right) =$$

$$= \int_0 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda 0} = \frac{1}{\lambda}$$

v) Dispersiyaning ta'rifiga asosan*:*

$$Д(X) = \lambda \int_0 x^2 e^{\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \begin{vmatrix} x^2 = u, du = 2xdx \\ \upsilon = \int e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{vmatrix} =$$

$$\lambda \left(-\frac{x^2}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big/_0 + \int_0 \frac{2}{\lambda} x e^{-\lambda x} \right) - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

202-misol. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Yechish: Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi ta'rifiga ko'ra:

$$M(X) = \int_{-} x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2a^2}} dx$$

yangi $Z = \dfrac{x-a}{\sigma}$ o'zgaruvchi kiritamiz.

U holda

$$x = \sigma Z + a, dx = \sigma dZ.$$

yangi integrallash chegaralari oldingisiga tengligini hisobga olib, quyi-dagini hosil qilamiz.

$$M(X) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-} (\sigma z + a) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-} \sigma z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Qo'shiluvchilardan birinchisini nolga teng (integral belgisi ostida toq funksiya, integrallash chegaralari koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik). Qo'shiluvchilardan ikkinchisi Puasson integralining qiymati

$$\int_{-} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$$

ekanligini hisobga olsak, uning qiymati a ga teng.

Demak,

$$\text{M(X)}= a$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor dispersiyasi ta’rifiga ko‘ra va M(X)= a ekanligini e’tiborga olib, quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\text{D(X)}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\alpha)^2 e^{-\frac{(\chi-\alpha)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Yuqoridagiga o‘xshash, Z=$\frac{x-a}{\sigma}$ yangi o‘zgaruvchi kiritamiz. Bundan

$$x-a=\sigma Z, \quad dx=\sigma dz$$

U holda

$$\text{D(X)}=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

ni hosil qilamiz: Bo‘laklab integrallash natijasida D(X)=σ^2 ni topamiz.

Demak, $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sigma$

Shunday qilib, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorda qatnasha-yotgan **a** va σ parametrlarining ehtimoliy ma’nosi quyidagicha:

$$\text{M(X)=a}, \quad \text{D(X)}= \sigma^2$$

203-misol. Ushbu taqsimot funksiya bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0, bo'lsa\\ x^2, agar, 0<x\le 1, bo'lsa\\ 1, agar, x>1, bo'lsa,\end{cases}$$

Yechish: zichlik funksiyasini topamiz.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x\le 0, bo'lsa,\\ 2x, 0<x\le 1\\ 0, x>1\end{cases}$$

Matematik kutilishini topamiz.

$$\text{M(X)}=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2x^3}{3}\Big/_0^1=\frac{2}{3}$$

Dispersiyasini topamiz.

$$\text{D(X)}=2\int_0^1 x^3dx-\left(\tfrac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{5}$$

204. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0, x \le 0, bo'lsa\\ \dfrac{3x^2}{8}, 0<x\le 2, bo'lsa,\\ 0, x>2, bo'lsa\end{cases}$$

Matematik kutilish va dispersiyani hisoblang.

205. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le \dfrac{\pi}{6} bo'lsa,\\ 3\sin 3x, \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3} bo'lsa\\ 0, x>\dfrac{\pi}{3} bo'lsa,\end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

206. Zichlik funksiyasi $f(x)=10e^{-10x}(x\ge 0)$ bilan berilgan ko‘rsatki-chli taqsimotning matematik kutilishi, dispersiyasi, o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

207. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, x\le -\dfrac{\pi}{2} bo'lsa,\\ 0.5\cos x, agar, -\dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{\pi}{2} bo'lsa,\\ 0, agar, x>\dfrac{\pi}{2} bo'lsa,\end{cases}$$

M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

208. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, x\le 2, bo'lsa,\\ 0.5, agar, 2<x\le 4, bo'lsa,\\ 0, agar, x>4, bo'lsa,\end{cases}$$

M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

209. X Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x) = \begin{array}{l} 0, agar, x < 0, bo'lsa, \\ 5e^{-5x}, agar, x \quad 0, bo'lsa \end{array}$$

M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

210. Agar M(X)=3, D(X)=16 ekanligi ma’lum bo‘lsa, normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

211-misol. X Uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi bilan berilgan.

$$f(x) = \begin{array}{l} 0, agar, x \quad 0, bo'lsa, \\ 2x, agar, 0 < x \quad 1, bo'lsa \\ 0, agar, x > 1, bo'lsa, \end{array}$$

M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

212. (2; 8) oraliqda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorning M(X), D(X) va σ (X)larini toping.

213. X Uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{array}{l} 0, agar, x < 0, bo'lsa, \\ 0{,}04e^{-0.04x}, agar, x \quad 0, bo'lsa \end{array}$$

bilan berilgan M(X), D(X) va σ (X) larni toping.

214. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-l)^2}{50}}$$

bilan berilgan M(X), D(X) larni toping.

215. X Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyida-gicha

$$f(x) = \frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)} \quad (- \quad < x < \quad)$$

X ning matematik kutilishini toping.

216. X tasodifiy miqdor quyidagicha taqsimot funksiyasi bilan berilgan

$$F(x) = \begin{array}{l} 0, agar\ x \quad 0, bo'lsa, \\ x^2, agar\ 0 < x \quad 1, bo'lsa, \\ 1, agar\ x > 1, bo'lsa, \end{array}$$

X tasodifiy miqdorning M(X), D(X) va σ (X) sonli xarakteristi-kalarini toping.

217. X tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}, agar\ x \quad 0, bo'lsa, \\ 0, agar\ x>0, bo'lsa, \end{cases}$$

bilan berilgan M(X) va D(X) sonli xarakteristikalarini toping.

218. X tasodifiy miqdor

$$f(x)=Ax^{2}\ \mathrm{e}^{-\lambda x}\ \left(\lambda>0, 0 \quad x< \quad \right)$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. Taqsimot funksiyasi F(x) ni toping.

219. X tasodifiy miqdor

$$F(x)=A+Barctgx(- \quad <x< \quad)$$

taqsimot funksiyaga ega.

a) A va B o‘zgarmas sonlarni toping;
b) *f(x)* zichlik funksiyasini toping;
c) M(X) ni toping.
d)

220. X tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases} A\cos x, agar\ -\frac{\pi}{2}<x \quad \frac{\pi}{2} \\ 0, agar\ |x|>\frac{\pi}{2} bo'lsa, \end{cases}$$

a) A koeffitsiyentni toping;
b) F (x) taqsimot funksiyasini toping;
v) M(X) va D(X)ni toping.

. Chebishev tengsizlngi va teoremasi. Katta sonlar qonuni va uning tatbiqlari.

Tajriba natijasida X tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymati-ni oldindan aytish mumkin emas, ya’ni u tasodifan qiymat qabul qiladi. Lekin soni katta bo‘lgan tasodifiy miqdorlar yig‘indisi o‘zining tasodifiylik xususiyatini yo‘qotar ekan. Amaliyot uchun juda ko‘p taso-difiy sabablarning birgalikdagi ta’siri tasodifga deyarli bog‘liq bo‘lmay-digan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu tasodifiy hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko‘ra bilishga imkon beradi.

Faraz qilaylik, $X_1, X_2,...X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin va bu tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlari mavjud bo‘lib, ular mos ravishda $a_1, a_2,...a_n$ bo‘lsin.

Ta’rif. Agar har qanday kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

munosabat bajarilsa, $X_1, X_2,...X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o‘rinli deyiladi.

Bu ta’rifning ma’nosi quyidagicha: *n* ning yetarlicha katta qiymatlarida

$$X=\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$$

tasodifiy miqdorni tasodifiy bo‘lmagan

$$a=\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

son bilan almashtirgan bo‘lamiz.

Katta sonlar qonuni qachon o‘rinli bo‘ladi? degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

Chebishev teoremasi $X_1, X_2,...X_n$ tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmay, ularning har biri C soni bilan chegaralangan dispersiyaga ega bo‘lsa, u holda berilgan ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladi.

Bernulli teoremasi. n ta erkli tajribada A hodisaning ro‘y berishlari soni μ bo‘lsin, har bir tajribada A hodisa o‘zgarmas P ehtimol bilan ro‘y bersin. U holda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - P\right| < \varepsilon\right) = 1$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremaning ma’nosi quyidagicha: n yetarlicha katta bo‘lganda $\frac{\mu}{n}$ ni istalgan aniqlik bilan P ga teng deb olish mumkin. Ya’ni $\frac{\mu}{n}$ ning qiymatlari P ehtimol atrofida joylashgan bo‘ladi. Bundan tashqari, bu teorema sinashlar soni yetarlicha katta bo‘lganda nisbiy chastota nima uchun turg‘unlik xossasiga ega bo‘lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta’rifini asoslaydi.

Yuqoridagi teoremalarni isbotlashda Chebishev tengsizligi muhim ahamiyatga ega:

Chebishev tengsizligi. Birinchi forma: agar X tasodifiy miqdor musbat bo‘lib, M(X) matematik kutilishiga ega bo‘lsa,

$$P\{X>\alpha\} < \frac{M(X)}{\alpha}$$

Ikkinchi forma: agar D(X)$< +$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$P\left(\left|X - M(X)\right| > \varepsilon\right) < \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

221-misol. $X_1, X_2, ...X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, X_n tasodifiy miqdor *–n,o,n* qiymatlarini mos ravishda $\frac{1}{n^2}, 1-\frac{2}{n^2}, \frac{1}{n^2} (n>1)$ ehtimollar bilan qabul qiladi. Shu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladimi?

Yechish: Chebishev teoremasidan foydalanamiz.

$$M(X_n) = -n\ \frac{1}{n^2} + 0\ (1-\frac{2}{n^2}) + n\ \frac{1}{n^2} = 0$$

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = n^2\ \frac{1}{n^2} + 0^2\ (1-\frac{2}{n^2}) + n^2\ \frac{1}{n^2} = 2$$

Ko‘rinib turibdiki, hamma tasodifiy miqdorlarning dispersiyasi bir xil. U holda, ular yagona son bilan chegaralangan bo‘ladi. Chebishev teoremasining shartlari bajarilganligi sababli, bu ketma-ketlikka katta sonlar qonunini tatbiq qilsa bo‘ladi.

222-misol. A hodisaning har bir sinovda ro‘y berish ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga teng. Agar 100 ta erkli sinov o‘tkaziladigan bo‘lsa, A hodisaning ro‘y berishlari soni 40 dan 60 gacha bo‘lgan oraliqda yotish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

Yechish: X-tasodifiy miqdor qaralayotgan A hodisaning 100 ta erkli sinovda ro‘y berishi sonining matematik kutilishini va dispersiyasi-ni topamiz:

$$M(X) = n\ \ p = 100\ \frac{1}{2} = 50$$

$$D(X) = npq = 100\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} = 25$$

Hodisa ro‘y berishining berilgan soni bilan M(X)=50 matematik kutilish orasidagi maksimal ayirmani topamiz.

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10$$

Ushbu shakldagi Chebishev tengsizligidan foydalanamiz:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon) \quad 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Bunga M(X)=50, D(X)=25, $\varepsilon=10$ ni qo‘yib quyidagini hosil qilamiz.

$$P(|x-50|<10) \quad 1-\frac{25}{10^2}=0.75$$

223. Agar D(X)=0,001 bo‘lsa, |X-M(X)|<0,1 ning ehtimolini Chebishev tengsizligi bo‘yicha baholang.

224. Quyidagilar berilgan: P(|X-M(X)|< ε)≥0,9,D(X)=0,004. Chebishev tengsizligidan foydalanib ε ni toping.

225. Biror punktda shamolning o‘rtacha tezligi 16 km/s. Bitta kuzatishda shamolning tezligi 80 km/s dan oshmasligini baholang.

226. Toshkent shahrining bitta rayonida elektroenergiyaning o‘rta-cha sarfi may oyida 360000 kvt/s. May oyida elektroenergiya sarfining 1000000 kvt/s dan oshmasligini baholang.

227. Aholi punktida 1 kunda suvning o‘rtacha sarfi 50000 litr. Bir kunda suv sarfining 150000 litrdan oshmasligini baholang.

228. X tasodifiy miqdor uchun M(X)=1 va $\sigma(X)=0.2$ ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, 0,5<X<1.5 tengsizlikni baholang.

229. X tasodifiy miqdorning o‘z matematik kutilish chetlanishi uchlangan o‘rtacha kvadratik chetlanishdan kichik bo‘lish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang (“uch sigma” qoidasi).

230. Agar D(X)=0,004 bo‘lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib | X-M(X) | <0,2 ning ehtimolini baholang.

231. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

X: 0,3 0,6

P: 0,2 0,8

| | X-M(X) | <0,2 ni baholang.

232. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2, \ldots X_n,$ ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

X_n :	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P :	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

233. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2, \ldots X_n,$ ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X_n :	a	-a
P :	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

234. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2, ...X_n$, ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

$$X_n: \quad -n\alpha \qquad 0 \qquad n\alpha$$
$$P: \quad \frac{1}{2^n} \qquad 1-\frac{1}{2^{n-1}} \qquad \frac{1}{2^n}$$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

235. Erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2, ...X_n$, ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

$$X_n: \quad -\sqrt{3} \qquad 0 \qquad \sqrt{3}$$
$$P_n: \quad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3}$$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

236. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X:	3	5
P:	0,6	0,4

| | X-M(X) | <0,3 ni baholang.

237. Agar D(X)=0,002 bo‘lsa, |X-M(X)|<0,2 ning ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

238. Quyidagilar berilgan: P(|X-M(X)|< ε)≥0,9,D(X)=0,006. Chebishev tengsizligidan foydalanib ε ni toping.

239. Biror punktda shamolning o‘rtacha tezligi 20 km/s. Bitta kuzatishda shamolning tezligi 100 km/s dan oshmasligini baholang.

240. Ma’lum bir joyda bir yilda o‘rtacha 75 kun quyoshli bo‘ladi. Bu joyda bir yilda quyoshli kunlarning 200 kundan ko‘p bo‘lmaslik ehtimolini baholang.

Tanlanma statistik taqsimoti. Empirik taqsimot funksiya va empirik ko’rsatkichlar.

Tanlamaning statistik taqsimoti. Empirik taqsimot funksiyasi. Poligon va gistogramma

Tasodifiy hodisalar ustida o‘tkaziladigan kuzatish natijalariga asos-lanib, ommaviy tasodifiy hodisalar bo‘ysunadigan qonuniyatlarni aniq-lash mumkin. Matematik statistikaning asosiy vazifasi kuzatish natijala-rini (statistik ma’lumotlarni) to‘plash, ularni guruhlarga ajratish va qo‘-yilgan masalaga muvofiq ravishda bu natijalarni tahlil qilish usullarini ko‘rsatishdan iborat.

Biror X tasodifiy miqdor F(x) taqsimot funksiyasiga ega deylik. X tasodifiy miqdor ustida o‘tkazilgan n ta tajriba (kuzatish) natijasida olin-gan $x_1, x_2, ... x_n$ qiymatlar to‘plamiga n hajmli tanlanma deyiladi, $x_1, x_2, ... x_n$ qiymatlarni bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin. Ba’zan $x_1, x_2, ... x_n$ tanlanma F(x) nazariy taqsimot funksiyaga ega bo‘lgan X bosh to‘plamdan olingan deb ham ataladi.

Bosh to‘plamdan tanlanma olingan bo‘lsin. Birorta x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta va hokazo kuzatilgan hamda

$$n_1 = n$$

bo‘lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantalar, kuzatishlar soni n_i chasto-talar deyiladi. Kuzatishlar sonining tanlanma hajmiga nisbatini

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi.

Shunday qilib, taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodi-fiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasi-dagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ular-ning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Aytaylik, X son belgi chastotalarining statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: n_x -belgining x dan kichik qiy-mati kuzatilgan kuzatishlar soni; n – kuzatishlarning umumiy soni.

Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir x qiymati uchun (X<x) hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladi. Shunday qilib, ta’rifga ko‘ra:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

Bu yerda: n_x – x dan kichik variantalar soni, n – tanlanma hajmi.

Tanlanmaning statistik taqsimotini ko‘rgazmali tasvirlash hamda kuzatilayotgan X belgining taqsimot qonuni haqida xulosalar qilish uchun poligon va gistogrammadan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1, n_1), (x_2, n_2)$, … (x_k, n_k) nuqta-larni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Bu yerda x_i – tanlanma variantalari, n_i – mos chastotalar.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1, w_1), (x_2, w_2)$, … (x_k, w_k) nuqtalarni tutashtiradigan chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i – tanlanma variantalari, W_i –ularga mos nisbiy chastotalar.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ (chastota zichligi) nisbatlarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onali figuraga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi oraliqlar balandliklari esa $\frac{w_i}{h}$ (nisbiy chastota zichligi) nisbatlarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onali figuraga aytiladi.

241-misol. Hajmi 30 bo‘lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan.

x_i	2	8	16
n_i	10	15	5

Nisbiy chastotalar taqsimotini tuzing.

Yechish: Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlama hajmiga bo‘lamiz.

$$W_1 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \qquad W_2 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \qquad W_3 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

u holda, nisbiy chastotalar taqsimoti

x_i	2	8	16
w_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

242-misol. Quyidagi taqsimot qatori bilan berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Yechish:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 10 + 15 + 25 = 50$$

$$W_t = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0.2; \qquad W_2 = \frac{15}{20} = \frac{3}{10} = 0.3; \qquad W_3 = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0.5$$

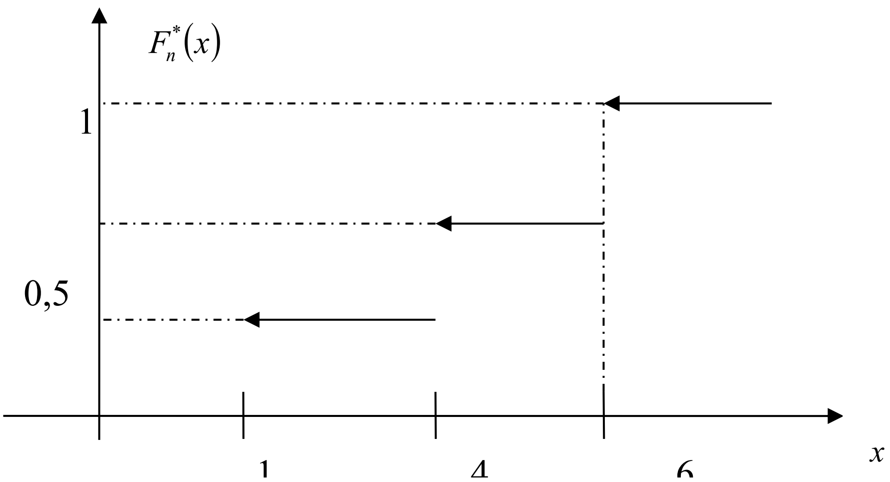
U holda, nisbiy chastotalar empirik taqsimoti

x_i	1	4	6
w_i	0.2	0.3	0.5

Empirik taqsimot funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$F_n^*(x)=\begin{cases} 0_i, agar, x \quad 1, bo'lsa \\ 0.2, agar, 1 < x \quad 4, bo'lsa \\ 0.5, agar, 4 < x \quad 6, bo'lsa \\ 1, agar, x > 6, bo'lsa \end{cases}$$

Topilgan qiymatlar asosida grafikni yasaymiz.

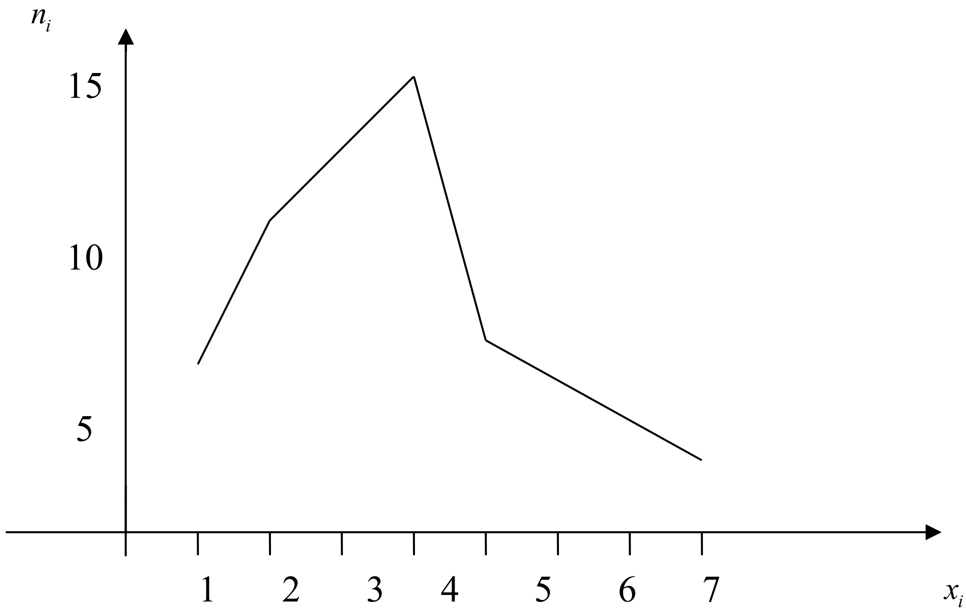


243-misol. Berilgan tanlanma taqsimoti bo‘yicha chastotalar va nisbiy chastotalar poligonlarini chizing.

x_i	1	2	4	5	8
n_i	5	10	15	7	3

Yechish:

n=5+10+15+7+3=40 tanlanma hajmi. Chastotalar poligoni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

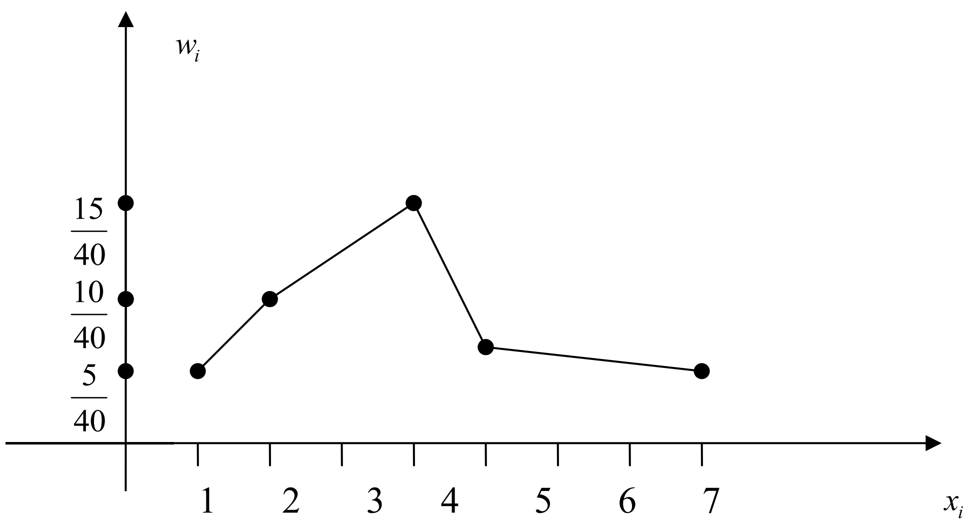


Nisbiy chastotalarni topamiz.

$W_t = \frac{5}{40}$; $W_2 = \frac{10}{40}$; $W_3 = \frac{15}{40}$; $W_4 = \frac{7}{40}$; $W_5 = \frac{3}{40}$;

x_i	1	2	4	5	8
w_i	$\frac{5}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{15}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{40}$

U holda, nisbiy chastotalarni poligoni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



244-misol. Berilgan tanlanma taqsimoti bo‘yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammalarini chizing.

Interval nomeri	Qism interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig‘indisi	Chastotalar zichligi	Nisbiy chastotalar	Nisbiy chastotalar zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h	w_i	w_i/h
1	5–10	2	0.4	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{150}$
2	10–15	6	1.2	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{150}$
3	15–20	12	2.4	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{150}$
4	20–25	10	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{150}$

Statistik baho tushunchasi. Nuqtaviy baholar va ularni xossalari. Baholarni tuzish usullari.

X belgili bosh to‘plamning taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ bo‘lib, θ noma’lum parametr bo‘lsin, $x_1, x_2, ... x_n$ esa bosh to‘plamdan olingan tanlanma bo‘lsin. Tanlanmaning ixtiyoriy funksiyasi $L(x_1, x_2, ... x_n)$ statistika deyiladi.

Statistikaning kuzatilgan qiymati $L = L(x_1, x_2, ... x_n)$ θ parametrning taqribiy qiymati sifatida olinadi. Bu holda $L(x_1, x_2, ... x_n)$ statistika θ parametrning bahosi deyiladi.

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Tanlanmaning o‘rta qiymati,

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_T)^2$$

tanlanmaning dispersiyasi deyiladi.

Agar
ML($x_1, x_2, ... x_n$)$=\theta$

shart bajarilsa, L baho θ parametr uchun siljimagan baho deyiladi.

Agar L baho va har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to} P(|L-\theta| \quad \varepsilon) = 1$$

munosabat bajarilsa, L baho θ parametr uchun asosli baho deyiladi.
Agar L baho uchun

$$\lim_{n\to} D(L) = 0$$

L baho θ parametr uchun asosli baho bo‘ladi.

Agar θ parametrning $L_1 va L_2$ siljimagan baholari berilgan bo‘lib, $D(L_1) < D(L_2)$
bo‘lsa, L_1 baho L_2 bahoga nisbatan samarali baho deyiladi.

Berilgan n hajmli tanlanmada eng kichik dispersiyali baho samarali baho bo‘ladi.

$\overline{x}_T$ –tanlanma o‘rtacha bosh to‘plam o‘rta qiymati uchun siljimagan, asosli va samarali baho bo‘ladi.

D_T -tanlanma dispersiya bosh to‘plam dispersiyasi uchun asosli baho bo‘ladi.

$S = \frac{n}{n-1} D_T$ – bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan, asosli baho bo‘ladi.

Tanlanma o‘rtacha va tanlanma dispersiyalarni hisoblashni soddalashtirish uchun ba’zan quyidagi formulalardan foydalaniladi:

$$u_i = \frac{x_i - c}{h}, \qquad i = \overline{l, n}$$

$$\overline{u} = \frac{1}{n} \ _{i=1}^{n} u_i \ , \qquad \overline{x}_T = \overline{u} \ \ h + c\,,$$

$$D_T^u = \frac{1}{n} \ _{i=1}^{n} (u_i - \overline{u})^2 \ , \qquad D_T^x = h^2 \ \ D_T^u$$

bu yerda c va h sonlari hisoblashni yengillashtiradigan qilib tanlanadi.

245-misol. Sterjenning uzunligi 5 marta o‘lchanganda quyidagi natijalar olingan: 92, 94, 103, 105, 106.

a) Sterjen uzunligining tanlanma o‘rta qiymatini toping.
b) Yo‘l qo‘yilgan xatolarning tanlanma dispersiyasini toping.

Yechish: a)Tanlanma o‘rtacha $\overline{x_T}$ ni topish uchun shartli variantalardan foydalanamiz, chunki dastlabki variantalar katta sonlardir. $u_i = x_i - 92$

$$\overline{x_T} = 92 + \frac{0+2+11+13+14}{5} = 92 + 8 = 100$$

b) Tanlanma dispersiyani topamiz.

$$D_T = \frac{\overset{n}{\underset{i=1}{}}(x_i - x_T)^2}{n} = \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2 + (105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34$$

246-misol. Bosh to‘plamdan n=60 hajmli tanlanma olingan.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Bosh o‘rtacha qiymatning siljimagan bahosini toping.

Yechish: Bosh o‘rtacha qiymatning siljimagan bahosi tanlanma o‘rtacha bo‘ladi.

$$\overline{x_T} = \frac{n_i x_i}{n} = \frac{1\ \ 8 + 3\ \ 40 + 6\ \ 10 + 26\ \ 2}{60} = \frac{240}{60} = 4$$

247-misol. Ushbu n=10 hajmli tanlanma taqsimoti bo‘yicha tanlanma o‘rtachani va tanlanma dispersiyani toping.

x_i	0.01	0.04	0.08
n_i	5	3	2

Yechish: $u_i = 100x_i$, $(h = 1/100)$ shartli variantalarga o‘tamiz va natijada quyidagi taqsimotni hosil qilamiz.

u_i	1	4	8
n_i	5	3	2

$$\overline{u} = \frac{n_i u_i}{n} = \frac{1}{10}(1\ \ 5 + 4\ \ 3 + 8\ \ 2) = 3.3$$

$$\overline{x_T} = \frac{\overline{u}}{100} = 0,033$$

$$D_T^u = \frac{n_i u_i^2}{n} - \left(\frac{n_i u_i}{n}\right)^2 = \frac{5\cdot 1^2 + 3\cdot 4^2 + 2\cdot 8^2}{10} - \left(\frac{5\cdot 1 + 3\cdot 4 + 2\cdot 8}{10}\right)^2 = 7.21$$

$$D_T^x = h^2 D_T^u = \frac{1}{100^2}\cdot 7.21 \approx 0.0007$$

248. Ushbu n=10 hajmli tanlanma taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

249. n=10 hajmli tanlanmaning ushbu taqsimoti bo‘yicha tanlanma o‘rtachani toping.

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

250. Bosh to‘plamdan n=50 hajmdagi tanlanma ajratilgan

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Bosh to‘plam o‘rta qiymatining siljimagan bahosini toping.

251. Guruhdagi 40 ta talabaning yozma ishlari baholarining chastotalari jadvali berilgan.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	8	25	4

Tanlanmaning o‘rtacha va tanlanma dispersiyasini toping.

252. n=10 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

253. n=50 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	0.1	0.5	0.6	0.8
n_i	5	15	20	10

254. n=50 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyani toping.

x_i	18.4	18.9	19.3	19.6
n_i	5	10	20	15

255. n=41 hajmli tanlanma bo‘yicha bosh dispersiyaning D_T=3 siljigan bahosi topilgan. Bosh to‘plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

256. n=10 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tuzatilgan tanlanma dispersiyani toping.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

257. Ushbu n=100 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

. Paramertli baholashning ishonchli oraliq usuli. Normal taqsimot parametrlari uchun ishonchli oraliqlar.

Faraz qilaylik, $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ tanlanma berilgan bo‘lib, uning taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$bo‘lsin. $L(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ statistika θ parametr uchun statistik baho bo‘lsin.

Agar ixtiyoriy $\alpha>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topish mumkin bo‘lsa va uning uchun

$$P(|L-\theta|)<\delta)=1-\alpha$$

bo‘lsa, u holda (L–δ ; L+δ) oraliq θ parametrning $1-\alpha$ ishonchlilik darajali ishonchli oralig‘i deyiladi.

X belgisi normal taqsimlangan bosh to‘plamning matematik kutilishi a uchun quyidagi ishonchli oraliqdan foydalaniladi:

a) $\overline{x_T}-t_a\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x_T}+t_a\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

bu yerda σ – o‘rtacha kvadratik chetlanish, t_α – Laplas funksiyasi $\phi(t)$ ning $\phi(t_\alpha)=\dfrac{\alpha}{2}$ bo‘ladigan qiymati.

b) σ – noma'lum bo'lib, tanlanma hajmi n>30 bo'lganda:

$$\overline{x_T} - t_{n-1:\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t_{n-1:\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Bu yerda S^2 – tuzatilgan tanlanma dispersiya, $t_{n-1:\alpha}$ – Styudent taqsimoti jadvalidan berilgan n va α lar bo'yicha topiladi.

Eslatma: $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ baho aniqligi deyiladi.

X belgisi normal taqsimlangan taqsimot funksiyasining dispersiyasi σ^2 uchun quyidagi ishonchli oraliqlardan foydalaniladi:

$S^2(1-q)^2 < \sigma^2 < S^2(1+q)^2$, q <1 bo'lganda, yoki

$S(1-q) < \sigma < S(1+q)$

$0 < \sigma^2 < S^2(1+q)^2$, q >1 bo'lganda, yoki $0 < \sigma < S(1+q)$

326-misol. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining noma'lum matematik kutilishi a ni $v=0,95$ ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping. Bunda $\sigma = 5$, tanlanma o'rtacha $\overline{x_T} = 14$ va tanlanma hajmi n=25 berilgan.

Yechish: $\phi(t)=\frac{1}{2}v$ munosabatdan $\phi(t)=\frac{0,95}{2}$ =0,475 jadvaldan t=1,96 ni topamiz. Topilganlarni

$$\overline{x_T} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ formulaga qo'yib,

$$14 - 1,96\frac{5}{\sqrt{25}};14 + 1,96\frac{5}{\sqrt{25}}$$

yoki

$$(12,04;\ 15,96)$$

ishonchli oraliqni topamiz.

258-misol. Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan. n = 16 hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma o'rtacha $\overline{x_T} = 20,2$ va tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish S=0,8 topilgan. Noma'lum matematik kutilishni ishonchli oraliq yordamida v=0,95 ishonchlilik bilan baholang.

Yechish: $t_{n-1:v}$ ni jadvaldan topamiz. v=0,95; $n=16;$ $t_{n-1:v}$=2,13

Bu qiymatlarni $\overline{x_T} - t_{n-1:v}\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t_{n-1:v}\frac{S}{\sqrt{n}}$ formulaga qo‘ysak,

$(20{,}2 - 2{,}13\,\frac{0{,}8}{\sqrt{16}};20{,}2 + 2{,}13\,\frac{0{,}8}{\sqrt{16}})$ *yoki* (19,774;20,626)

τ

hosil bo‘ladi. Demak, noma’lum a parametr 0,95 ishonchlilik bilan (19,774; 20,626) ishonchli oraliqda yotadi.

259-misol. Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan. n = 16 hajmli tanlanma bo‘yicha tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish S=1 topilgan. Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ ni 0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping.

Yechish: Berilganlar *v=0,95* va n=16 bo‘yicha jadvaldan q=0,44<1 ekanligini topamiz. Topilganlarni *S(1– q)<* σ *<S(1+q)* formulaga qo‘yamiz va $1\ (1-0.44) < \sigma < 1\ (1+0.44)$ yoki 0,56<σ<1,44 ishonchli oraliqni hosil qilamiz.

260. Tasodifiy miqdor τ=2 parametr bilan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan. n=25 hajmli tanlanma olingan. Bu taqsimotning noma’lum *a* parametri uchun *v=0,95* ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping. $\overline{x_t} = 20$

261. Fizik kattalikni to‘qqizta bir xil, bog‘liq bo‘lmagan o‘lchash natijasida olingan natijalarning o‘rta arifmetigi x_1=42,319 va tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish S=5 topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini *v=0,95* ishonchlilik bilan aniqlash talab qilinadi.

262. Agar 10 ta bog‘liq bo‘lmagan o‘lchashlar natijasida obyektgacha bo‘lgan masofa (m) uchun 25025, 24970, 24780, 25315, 24097, 24646, 24717, 25354, 24912, 25374 natijalar olingan bo‘lsa, obyektgacha bo‘lgan masofaning matematik kutilishi uchun *v=0,9* ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping. Bunda o‘lchash xatoligi σ =100 o‘rtacha kvadratik chetlanish bilan normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.

263. 10 ta erkli o‘lchashlar natijasida sterjen uzunligi (mm) uchun quyidagi ma’lumotlar olingan: 23, 24, 23, 25, 25, 26, 26, 25, 24, 25. O‘lchash xatoligi normal taqsimlangan deb faraz qilib, sterjen uzunligining matematik kutilishi uchun *v=0,95* ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping.

264. Bosh to‘plamning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. n hajmli tanlanma bo‘yicha tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanish S topilgan.

a) o‘rtacha kvadratik chetlanish σ ni;
b) dispersiyasini 0,99 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping, bunda n=10, S=5,1

265. Biror fizik kattalikni bog‘liq bo‘lmagan bir xil aniqlikdagi 9 ta o‘lchash ma’lumotlari bo‘yicha o‘lchashlarning o‘rta arifmetik qiymati x_T*=30,1*

va o‘rtacha kvadratik chetlanishi S=6 topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini ishonchli oraliq yordamida *v=0,95* ishonchlilik bilan baholang.

266. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X son belgisining noma’lum matematik kutilishi a ni 0,95 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping, bunda o‘rtacha kvadratik chetlanish σ =4 tanlanma o‘rtacha $\overline{x_t}=10,2$ va tanlanma hajmi n=16.

267. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining matematik kutilishini tanlanma o‘rta qiymat bo‘yicha bahosining 0,925 ishonchlilik bilan aniqligi 0,2 ga teng bo‘ladigan tanlanmaning minimal hajmini toping. O‘rtacha kvadratik chetlanishini σ=1,5 ga teng deb oling.

268. Tanlanmaning shunday minimal hajmini topingki, bosh to‘plam a matematik kutilishining tanlanma o‘rtacha qiymat bo‘yicha 0,975 ishonchlilik bilan bahosining aniqligi δ =0,3 ga teng bo‘lsin. Normal taqsimlangan bosh to‘plamning o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ=1,2 ga teng.

269. Bosh to‘plamdan n=10 hajmli tanlanma olingan.

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining a mate-matik kutilishini tanlanma o‘rtacha qiymat bo‘yicha 0,95 ishonchlilik bilan ishonchli interval yordamida baholang.

270. Tanlanmaning shunday minimal hajmini topingki, normal taq-simlangan bosh to‘plam matematik kutilishining tanlanma o‘rtacha qiy-mat bo‘yicha bahosining aniqligi 0,925 ishonchlilik bilan 0,2 ga teng bo‘lsin. Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishi σ=1,5 ga teng.

271. Bosh to‘plamdan n=12 hajmli tanlanma olingan:

x_i	-0.5	-0.4	-0.2	0	0.2	0.6	0.8	1	1.2	1.5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Bosh to‘plamning normal taqsimlangan belgisining a matematik kutilishini 0,95 ishonchlilk bilan ishonchli oraliq yordamida baholang.

. Normal va binomial taqsimot paramertlari haqidagi gipotezalar. Pirsonning Xi-kvadrat kriteriysi. Normal bosh to’plamdan olingan ikkita tanlanmaning o’rtacha qiymatlarini, dispersiyasini solishtirish.

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar (belgilar) ustida kuzatishlar otkazilgan bo‘lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda ($x_1;y_1$), ($x_2;y_2$),……($x_k;y_k$)lardan iborat bo‘lsa, u holda X va Y orasidagi bog‘lanishni ushbu jadval ko‘rinishida tasvirlash mumkin.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
y_i	y_1	y_2	$\dots$	y_k

Agar kuzatishlar natijasida hosil bo‘lgan $(x_i;\ y_i)$ juftlarining soni katta bo‘lsa, hamda ularning ayrimlari takrorlanadigan bo‘lsa, u holda yuqoridagi jadval o‘rniga quyidagi ikki o‘lchovli jadvalni keltirish mumkin.

Y \ X	y_1	y_2	$\dots$	y_s	M_x
x_1	m_{11}	m_{12}	$\dots$	m_{1S}	M_{x1}
x_2	m_{21}	m_{22}	$\dots$	m_{2S}	M_{x2}
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
x_k	m_{k1}	m_{k2}	$\dots$	m_{ks}	M_{xk}
M_y	M_{y1}	M_{y2}	$\dots$	M_{ys}	n

Bu jadval korrelatsion jadval yoki korrelatsion panjara deb ataladi.

Aytaylik, X va Y belgilar orasidagi bog‘lanish o‘rganilayotgan bo‘lsin, X ning har bir qiymatiga Y ning bir necha qiymati mos kelsin. Masalan, x_1=8 da y_1 =2; y_2 =3; y_3 =7 qiymatlar olgan bo‘lsin. Bularning arifmetik o‘rtachasini topsak:

$$\overline{y}_8 = \frac{2+3+7}{3} = 4$$

U holda, $\overline{y}_8$ – shartli o‘rtacha qiymat deb ataladi.

$\overline{y}_8$ – shartli o‘rtacha qiymat deb Y ning X=*x* qiymatga mos qiymatlarining arifmetik o‘rtachasiga aytiladi.

Y ning X ga korrelatsion bog‘liqligi deb $\overline{y_x}$ shartli o‘rtachaning *x* ga funksional bog‘liqligiga aytiladi:

$$\overline{y_x} = f(x)$$

Bu tenglama Y ning X ga regressiya tenglamasi deb ataladi. Bu tenglama grafigi esa Y ning X ga regressiya chizig‘i deb ataladi.

X ning regressiya tenglamasi va regressiya chizig‘i ham yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi.

$$\overline{x_y} = \varphi(y)$$

Agar Y ning X ga va Xning Y ga regressiya chizig‘ining ikkalasi ham to‘g‘ri chiziqlar bo‘lsa, u holda korrelatsiya chiziqli korrelatsiya deyiladi.

Y ning X ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasi:

$$\overline{y_x} - y = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

ko‘rinishida bo‘ladi. Bu yerda $\overline{y_x}$ – shartli o‘rtacha qiymat, $\bar{x}$ va $\bar{y}$ tekshirilayotgan X va Y belgilarining tanlanma o‘rtacha qiymatlari, σ_x va σ_y lar esa mos ravishda X va Y belgilarining o‘rtacha kvadratik chetlanishlari, r_T tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti bo‘lib,

$$r_T = \frac{n_{xy}x_iy_i - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y} \quad \text{yoki} \quad r_T = \frac{x_iy_i - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti alohida muhim ahamiyatga ega bo‘lib, u belgilar orasidagi chiziqli korrelatsion bog‘lanishning zichligini baholash uchun xizmat qiladi. Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti uchun $|r_T \le 1|$ munosabat har doim o‘rinli bo‘lib, r_T kattalik birga qancha yaqin bo‘lsa, bog‘lanish shuncha kuchli, 0 ga qancha yaqin bo‘lsa, bog‘lanishi shuncha kuchsiz bo‘ladi.

X ning Y ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_T \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(\bar{y} - y)$$

272-misol. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanma shartli o‘rta qiymat $\overline{x_y}$ ni toping.

Y \ X	4	5	6	7	n_y
1	3	1	-	3	7
2	–	2	4	1	7
3	5	1	5	–	11
n_x	8	4	9	1	n=25

Yechish:

$$\overline{x_1} = \frac{4\ \ 3 + 5\ \ 1 + 6\ \ 0 + 7\ \ 3}{7} = \frac{38}{7}$$

$$\overline{x_2} = \frac{4\ \ 0+2\ \ 5+6\ \ 4+7\ \ 1}{7} = \frac{41}{7}$$

$$\overline{x_3} = \frac{4\ \ 5+5\ \ 1+6\ \ 5+7\ \ 0}{11} = \frac{55}{11}$$

273-misol. Bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi 5 ta sanoat korxonalari bo‘yicha quyidagi mahsulotlar olingan.

Mehnatni elektr energiya bilan ta’minlanganligi– X (kvt/soat)	7,1	8,3	8,5	9	10,5
Mehnat unumdorligi – Y (dona)	14	16	14	15	17

Bu ma’lumotlardan foydalanib, mehnat unumdorligining (Y) elektr energiya bilan ta’minlanganlik darajasiga (X ga) bog‘liqligi regressiya to‘g‘ri chiziqlarining tanlanma tenglamasini toping.

Yechish: Dastlab

$$r_T = \frac{x_i y_i - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y}$$

formuladagi zarur hisoblashlarni bajaramiz:

$$\overline{x} = \frac{7.1+8.3+8.5+9+10.5}{5} = 8.68$$

$$\overline{y} = \frac{14+16+14+15+17}{5} = \frac{76}{5} = 15.2$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{x_i^2}{n} - (\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{7.1^2+8.3^2+8.5^2+9^2+10.5^2}{5} - 8.68^2} \approx 1.1$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{y_i^2}{n} - (\overline{y})^2} = \sqrt{\frac{14^2+16^2+14^2+15^2+17^2}{5} - 15.2^2} \approx 1.16$$

$$x_i y_i = 7.1\ \ 14+8.3\ \ 16+8.5\ \ 14+9\ \ 15+10.5\ \ 17 = 664.7$$

Bu topilganlarni formulaga qo‘ysak:

$$r_T = \frac{664.7-5\ \ 8.68\ \ 15.2}{5\ \ 1.1\ \ 1.6} = \frac{5.02}{6.38} \approx 0.79$$

Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyentining topilgan bu qiymati X va Y belgilar orasidagi chiziqli bog‘liqlik kuchli ekanligini ko‘rsatadi.

Endi yuqoridagi hisoblanganlarni

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$$

regressiya tenglamasiga qo‘yib,

$$\overline{y}_x - 15.2 = 0.79\ \frac{1.16}{1.1}(x - 8.68)$$

Sodda almashtirishlardan so‘ng, regressiya tenglamasini

$$\overline{y}_x - 0.82x + 8.08$$

ko‘rinishda topamiz. Bu tenglama mehnat unumdorligini (Y ni) mehnat-ni elektr energiya bilan ta’minlanganlik darajasiga (X ga) korrelatsion bog‘liqligini ifodalaydi.

274-misol. Y ning X ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasini quyidagi korrelatsion jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha toping.

Y \ X	3	4	5	6	n_y
2	5	–	1	4	10
3	1	2	–	–	3
4	–	4	5	3	12
n_x	6	6	6	7	n=25

Yechish:

$$\overline{x} = \frac{6\ \ 3 + 6\ \ 4 + 6\ \ 5 + 7\ \ 6}{25} - \frac{18 + 24 + 30 + 42}{25} = 4.56$$

$$\overline{y} = \frac{10\ \ 2 + 3\ \ 3 + 12\ \ 4}{25} = \frac{20 + 9 + 48}{25} = 3.08$$

$$x^2 = \frac{9\ \ 6 + 16\ \ 6 + 25\ \ 6 + 36\ \ 7}{25} = \frac{54 + 96 + 150 + 252}{25} = 22.08$$

$$\overline{y^2} = \frac{4\ \ 10 + 9\ \ 3 + 16\ \ 12}{25} = \frac{40 + 27 + 192}{25} = 10.36$$

Yuqoridagilardan foydalanib σ_x va σ_y ni topamiz.

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = \sqrt{22.08 - 4.56^2} \approx 1.18$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2} = \sqrt{10.36 - (3.08)^2} \approx 0.87$$

$n_{xy} x_i y_i$ ni topish uchun quyidagi hisoblash jadvalini tuzamiz.

X / Y	3	4	5	6	$U = \quad n_{xy}x$	$y\ U$
2					44	88
3					11	33
4	–				59	236
$V = \quad n_{xy}y$	13	22	22	20		$_y\ y\ U = 357$ ↑
$x\ V$	39	88	110	120	$_x\ x\ V = 357$ ←	Tekshirish

Ikkala yig‘indining bir xilga 357 ga teng ekanligi hisoblashlarning to‘g‘ri bajarilganligini ko‘rsatadi. Jadval quyidagicha to‘ldirilgan.

1. n_{xy} chastotaning x variantga ko‘paytmasini, ya’ni $n_{xy}\ x$ ni , bu chastotani o‘z ichiga olgan katakning yuqori o‘ng burchagiga yoziladi. Masalan, birinchi satr kataklarining yuqori o‘ng burchaklarida 5*3=15; 1*5=5; 4*6=24 ko‘paytmalar yozilgan.

2. Bir satr kataklarning yuqori o‘ng burchaklarida joylashgan barcha sonlarni qo‘shiladi va ularning yig‘indisi “U ustun”ning shu satrdagi katagiga yoziladi. Masalan, birinchi satr uchun U=15+5+14=44

3. Nihoyat y variantani U ga ko‘paytiriladi va hosil bo‘lgan ko‘paytma “y U ustunning” tegishli katagiga yoziladi. Masalan, jadvalning birinchi satrida y=2, U=44, demak:

$$y\ U = 2\ \ 44 = 88$$

4. “yU ustunning” barcha sonlarini qo‘shib, $\ _y\ yU$ yig‘indi hosil qilinadi, Y izlanayotgan $n_{xy}x_i\ \ y_i$ yig‘indiga teng bo‘ladi. Masalan, yuqoridagi jadvalda $n_{xy}x_i\ \ y_i$ =357

Tekshirish maqsadida shunga o‘xshash hisoblashlar ustunlar bo‘yicha ham o‘tkaziladi.

Izlanayotgan tanlanmaning korrelatsiya koeffitsiyentini topamiz:

$$r_T \ \frac{n_{xy}xy - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{357 - 25\ \ 4.56\ \ 3.08}{25\ \ 1.18\ \ 0.87} = \frac{5.58}{25.665} \approx 0.23$$

yuqorida topilgan qiymatlarni $\bar{y}_x - \bar{y} = r_T\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ regressiya tenglamasiga qo‘yib

$$y_x - 3.08 = 0.23\ \frac{0.87}{1.18}\ (x - 4.56)$$

Sodda almashtirishlardan so‘ng regressiya tenglamasini $\overline{y}_x = 0.17x + 2.3$ ko‘rinishda topamiz.

275. Berilgan jadval bo‘yicha X va Y tasodifiy miqdor tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti topilsin.

X	– 1	3	4	0	2	3	1	4
Y	2	0	1	– 1	1	1	2	0

276. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida Y ning X ga chiziqli tanlanma regressiya tenglamasini tuzing.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

277. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida tanlanmaning shartli o‘rta qiymati $\overline{x}_y$ ni toping.

Y \ X	3	4	5	6	n_y
2	5	–	1	4	10
3	1	2	–	–	3
4	–	4	5	3	12
n_x	6	6	6	7	n=25

278. Berilgan jadvaldan foydalanib tanlanmaning shartli o‘rta qiymati $\overline{y}_x$ ni toping.

Y \ X	3	3.5	4	4.5	5
7	5	3	–	–	–
9	2	3	5	3	1
13	–	1	1	2	2

. Bir jinslilik haqidagi gipotezalarni tekshirish. Ikki o'lchovli tanlanma va uning tanlanma xarakteristikasi. Eng kicik kvadratlar usuli. Chiziqli regressiya tenglamasi.

Tanlanma korrelatsiya koeffitsiyenti belgilar orasidagi chiziqli bog'liqlik miqdorini xarakterlash bilan muhim ahamiyatga ega. Chiziqli bo'lmagan yoki umuman, istalgan korrelatsion bog'lanish zichligini qanday baholash mumkin, degan savol paydo bo'lishi tabiiy. Istalgan korrelatsion bog'lanish uchun korrelatsion nisbat deb ataluvchi quyidagi xarakteristika ishlatiladi. Y ning X ga tanlanma korrelatsion nisbati deb

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_y}$$

nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Bu yerda:

$\sigma_{\bar{y}_x} = \dfrac{n_x(\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}$ – shartli o'rtachaning o'rtacha kvadratik chetlanishi;

$\sigma_y = \dfrac{n_y(y - \bar{y})^2}{n}$ – umumiy o'rtacha kvadratik chetlanishi;

n – tanlanma hajmi;
n_x – X belgi x qiymati chastotasi;
n_y – Y belgi y qiymati chastotasi;
$\bar{y}$ – Y belginig umumiy o'rtacha qiymati;
$\bar{y}_x$ – Y belgining shartli o'rtacha qiymati.

X belgining Y ga tanlanma korrelatsion nisbati ham shu kabi aniqlanadi:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_x} \qquad (1)$$

Agar X va Y orasidagi korrelatsion bog'lanish o'rganilayotgan bo'lib, $\bar{y}_x = f(x)$ yoki $\bar{x}_y = \varphi(y)$ regressiya funksiyalarining grafiklari egri chiziq bilan tasvirlanadigan bo'lsa, korrelatsiya egri chiziqli deyiladi. Egri chiziqli korrelatsiya zichligini baholash uchun tanlanma korrelatsion nisbatlar xizmat qiladi.

Ba'zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki undan ko'p belgilar orasidagi bog'lanishni o'rganish zarurati tug'iladi. Bunday holdagi korrelatsion bog'lanish to'plam (yoki ko'plik) korrelatsiya deb ataladi. To'plam korrelatsiyaning eng sodda holi bo'lgan chiziqli korrelatsiyada X, Y va Z belgilar orasidagi korrelatsion munosabat

Z=aX+bY+C

tenglama ko‘rinishida ifodalanadi.

Z belgining X va Y belgilar bilan bog‘liqligining zichligi quyidagi to‘la korrelatsiya koeffitsiyenti bilan baholanadi:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz} + r_{yz}^2}{1 - r_{xz}^2}} \quad (2)$$

shuningdek, Y ning tayin fiksirlangan qiymatida Z va X orasidagi bog‘lanish zichligi

$$r_{xz}(y) = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)\ (1 - r_{yz}^2)}},$$

X ning tayin fiksirlangan qiymatida Z va Y orasidagi bog‘lanish zichligi

$$r_{xz}(y) = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)\ (1 - r_{yz}^2)}} \quad (3)$$

Xususiy korrelatsiya koeffitsiyentlari bilan baholanadi.

Agar regressiya grafigi egri chiziq bilan ifodalansa, xususan, ikkinchi tartibli parabolik korrelyatiya bo‘lgan holda, Y ning X ga regressiyaning tanlanma tenglamasi

$$\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C \qquad (4)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Noma’lum A, B va C parametrlari quyidagi tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$\begin{aligned}
\left(n_x x^4 \right)A + \left(n_x x^3 \right)B + \left(n_x x^2 \right)c &= n_x \bar{y}_x x^2 \\
\left(n_x x^3 \right)A + \left(n_x x^2 \right)B + \left(n_x x \right)c &= n_x \bar{y}_x x \qquad (5) \\
\left(n_x x^2 \right)A + \left(n_x x \right)B + nc &= n_x \bar{y}_x
\end{aligned}$$

X ning Y ga regressiyaning tanlanma tenglamasi

$$x_y = A_1 y^2 + B_1 y + C_1$$

ham shunga o‘xshash topiladi.

279. n=50 hajmli quyidagi korrelatsion jadval bo‘yicha Y belgining X belgiga korrelatsion nisbati η_{yx} ni toping.

X \ Y	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	–	6	12
n_x	10	28	12	n=50
y_x	21	15	20	

Yechish: $\overline{y}-$ umumiy o‘rtachani topamiz.

$$\overline{y}=\frac{n_i y_i}{n}=\frac{38\ \ 15+12\ \ 25}{50}=\frac{870}{50}=17.4$$

umumiy o‘rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{n_y(y-\overline{y})^2}{n}}=\sqrt{\frac{38(15-17.4)^2+12(25-17.4)^2}{50}}=4{,}27$$

shartli o‘rtachaning o‘rtacha kvadratik chetlanishini topamiz.

$$\sigma_{\overline{y}_{x0}}=\sqrt{\frac{n_x(y_x-y)^2}{n}}=\sqrt{\frac{10(21-17{,}4)^2+28(15-17{,}4)^2+12(20-17{,}4)^2}{50}}=2{,}73$$

Topilganlarni formulaga qo‘ysak,

$$n_{yx}=\frac{\sigma_{y_x}}{\sigma_y}=\frac{2{,}73}{4{,}27}=0{,}64$$

280-misol. Quyidagi korrelatsion jadvaldagi ma’lumotlar bo‘yicha
$\overline{y}_x=Ax^2+Bx+C$
regressiya tanlanma tenglamasini toping.

X \ Y	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1	–	–	20
3	1	20	–	–	–	21
5	3	5	10	2	–	20
10	–	–	7	12	–	19
17	–	–	–	–	20	20
n_x	22	26	18	14	20	n=100

Yechish: Quyidagi hisoblash jadvalini tuzamiz.

x	n_x	$\bar{y}_x$	$n_x \cdot x$	$n_x x^2$	$n_x \cdot x^3$	$n_x \cdot x^4$	$n_x \bar{y}_x$	$n_x \bar{y}_x x$	$n_x \bar{y}_x x^2$
0	22	0,8	0	0	0	0	17,6	0	0
1	26	3,27	26	26	26	26	85,02	85,02	85,02
2	18	6,67	36	72	144	288	120,06	240,12	480,24
3	14	9,3	42	126	378	1134	130	390	1170
4	20	17	80	320	1280	5120	340	1360	5440
	100		184	544	1828	6568	692,68	2075,14	7175,26

Jadvalning oxirgi satrida turgan sonlarni (5) ga qo‘yib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

6568A+1828B+544C=7175,26

1828A+544B+184C=2075,14

544A+184B+100C=692,68

Bu sistemani yechib, A=0,66 B=1,23 va C=1,07 ekanligini topamiz. Topilgan bu koeffitsiyentlarni regressiya tenglamasi

$$\bar{y}_x = Ax^2+Bx+c$$

ga qo‘yib,

$$\bar{y}_x = 0,66x^2+1,23x+1,07$$

ni hosil qilamiz.

281. Quyidagi jadvaldagi ma’lumotlar bo‘yicha $\bar{y}_x = Ax^2+Bx+c$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelatsion nisbatni toping.

Y \ X	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1	–	–	21
13	2	14	–	–	–	16
40	–	3	22	2	–	27
80	–	–	–	15	–	15
200	–	–	–	–	21	21
n_x	21	18	23	17	21	n=100

282. Korrelatsion jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha $x_y = Ay^2+By+c$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelatsion nisbatni aniqlang.

	6	30	50	n_y

X \ Y				
1	15	–	–	15
3	1	14	–	15
4	–	2	18	20
n_x	16	16	18	n=50

283. Quyidagi ma’lumotlar bo‘yicha $\bar{x}_y = Ay^2+By+c$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelatsion nisbatni aniqlang.

X \ Y	1	9	19	n_y
0	13	–	–	13
2	2	10	–	12
3	1	1	23	25
n_x	16	11	23	n=50

6. Matematik statistikada ko‘p ishlatiladigan taqsimotlar. Statistik gipotezalarni tekshirish. Gipotezalarni Pirsonning muvofiqlik kriteriysi bo‘yicha tekshirish

1. χ^2 taqsimot

Agar k ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan normalangan $X_i (i = \overline{1,k})$ tasodifiy miqdorlar normal taqsimotga ega bo‘lsa, u holda ularning kvadratlari yig‘indisi

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

ning taqsimoti ozodlik darajalari k bo‘lgan χ^2 (Xu – kvadrat) taqsimot deyiladi. χ^2 taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagicha:

$$P_k(x) = \begin{cases} 0, agar, x \le 0, bo'lsa, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}, agar\ x > 0, bo'lsa \end{cases}$$

Bu yerda $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ – gamma funksiya.

x^2 taqsimotning ozodlik darajalari $k \leq 30$ bo‘lsa, uning qiymatlari jadvaldan topiladi, agar ozodlik darajalari $k>30$ bo‘lsa, uni normal qonun bilan yetarlicha aniqlikda almashtirish mumkin.

2. Styudent taqsimoti.

X – normalangan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor, Y – esa ozodlik darajalari k bo‘lgan χ^2 taqsimotga ega tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, u holda

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{k}}}$$

tasodifiy miqdor t – taqsimot (yoki k ozodlik darajali Styudent taqsimoti) ga ega deyiladi.

Styudent taqsimoti $k \to$ da asimtotik normaldir. Bu taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagicha:

$$P_k(x) = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi k}\Gamma(\frac{k}{2})} (1+\frac{x^2}{k})^{\frac{k+1}{2}}$$

3.Fisher taqsimoti

Agar X va Y bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ular k_1 va k_2 ozodlik darajali χ^2 qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsa, u holda

$$F = \frac{X/k_1}{Y/k_2}$$

tasodifiy miqdor F taqsimotga (yoki k_1 va k_2 ozodlik darajali Fisher taqsimotiga) ega deyiladi.

Statistik gipoteza deb noma’lum taqsimotning ko‘rinishi haqidagi yoki ma’lum taqsimotning noma’lum parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi. Nolinchi (asosiy) gipoteza deb ilgari surilgan H_0 gipotezaga, konkurent (zid) gipoteza deb esa nolinchi gipotezaga zid bo‘lgan H_1 gipotezaga aytiladi.

Statistik kriteriy deb nolinchi (asosiy) gipotezani qabul qilsh yoki qabul qilinmaslik haqidagi qoidaga aytiladi. Bu qoida quyidagidan ibo-rat. Buning uchun qandaydir $Z(x_1,x_2 \ldots x_n)$ statistika olinib, uning (aniq yoki taqribiy) taqsimoti asosiy gipoteza o‘rinli bo‘lganda topiladi. So‘ngra statistikaning qiymatlar sohasi ikkiga ajratiladi. Agar stati-stikaning kuzatilgan $Z(x_1,x_2 \ldots x_n)$ qiymati bu sohalarning birinchisiga tushsa, H_0 gipoteza qabul qilinish sohasi, ikkinchisiga esa kritik soha deyiladi. $Z(x_1,x_2 \ldots x_n)$ statistikaning qabul qilish mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari biror intervalga tegishli bo‘ladi. Shu sababli kritik soha va gipotezaning qabul qilinish sohasi ham intervallar bo‘ladi. Ularni nuqta-lar ajratib turadi. Bu nuqtalar kritik nuqtalar deyiladi.

Kritik sohalar quyidagicha bo‘lishi mumkin.

a) o‘ng tomonlama kritik soha:

$$Z > Z_{kp}$$

b) chap tomonlama kritik soha:

$$Z < Z_{kp}$$

v) ikki tomonlama kritik soha:

$$|Z| > Z_{kp}$$

$Z(x_1,x_2...x_n)$ statistikaning kritik sohaga tushish ehtimoli α uning aniqlilik darajasi deyiladi.

Gipotezani statistik tekshirish natijasida ikki xil xatoga yo‘l qo‘yish mumkin.

Birinchi tur xato shuki, bunda to‘g‘ri gipoteza rad etiladi.

Ikkinchi tur xato shuki, bunda noto‘g‘ri gipoteza qabul qilinadi.

Kriteriyning quvvati deb konkurent gipoteza o‘rinli bo‘lish shartida Z kriteriyning kritik sohaga tushish ehtimoliga aytiladi. Kriteriyning quvvati qancha katta bo‘lsa, ikkinchi tur xatoga yo‘l qo‘yish ehtimoli shuncha kichik bo‘ladi.

X=$(x_1,x_2...x_n)$tanlanma berilgan bo‘lib, uning asosida bosh to‘plamning F(x) taqsimot funksiyasini aniqlash kerak bo‘lsin.

Muvofiqlik kriteriysi deb taqsimot funksiyaning umumiy ko‘rinishi haqidagi H_0 gipotezani qabul qilish yoki rad etishga imkon beradigan kriteriyga aytiladi.

Muvofiqlik kriteriylaridan biri Pirson kriteriysini qurish uchun X belgi qiymatlarining o‘zgarish sohasini $\Delta_1, \Delta_2, ...\Delta_k$ intervallarga bo‘lamiz.

P_i – tasodifiy miqdor X ning Δ_i intervalga tushishining nazariy ehtimoli bo‘lsin: P_i=P(X Δ_i). Bu ehtimol H_0 gipotezadan kelib chiq-qan holda hisoblanadi, ya’ni X tasodifiy miqdor F(x) taqsimot funk-siyaga ega deb faraz qilinadi.

n_i – hajmi n bo‘lgan $(x_1,x_2...x_n)$ tanlanmada X belgining Δ_i intervalga tushgan qiymatlarining soni bo‘lsin. Bunda

$$P_1+P_2+.......+P_k=1$$

$$n_1+n_2+.......+n_k=n$$

Agar tanlanmaning hajmi yetarlicha katta (n>30) bo‘lsa, taqsimot-ni taqriban normal taqsimot deb olish mumkin.

Ushbu

$$\xi_i = \frac{n_i - np_i}{\sqrt{np_i}} \qquad i = \overline{l,k}$$

tasodifiy miqdorlarni qaraymiz.

Teorema. Agar H_0 gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa va np_i>5 bo‘lsa, u holda

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2$$

tasodifiy miqdor k–1 ozodlik darajali χ^2 taqsimot bo‘yicha taqsimlangan hisoblanadi.

$n \to$ da χ^2 taqsimot statistika assimptotik normaldir.

U holda, Pirsonning muvofiqlik kriteriysini quyidagicha ta’riflash mumkin.

Berilgan α aniqlilik darajasi va χ^2 taqsimot uchun jadvallardan x_α ning

$$P(\chi^2 > x_\alpha) = \alpha$$

bo‘ladigan kritik qiymatlari topiladi. Tanlanma ma’lumotlariga ko‘ra χ^2 kriteriyning kuzatilgan qiymati hisoblanadi, agar u qiymat qabul qilish sohasiga tushsa, ya’ni $\chi^2 > x_\alpha$ bo‘lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi va bosh to‘plam F(x) taqsimot funksiyaga ega deb hisoblanadi, agar $\chi^2 > x_\alpha$ bo‘lsa, u holda H_0 gipoteza rad etiladi.

Agar nazariy chastotalarni hisoblashda a va σ^2 o‘rniga ularning $\overline{x}_T$ va S^2 baholaridan foydalaniladigan bo‘lsa, u holda

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

statistika taqriban k–3 ozodlik darajali χ^2 taqsimot bo‘yicha taqsimlanadi.

284-misol. X belgili bosh to‘plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan

Δ	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[0;5)
n_i	2	12	8	4	14	6	10	2	1	11

X belgining taqsimot funksiyasi tekis taqsimotga muvofiq yoki muvofiq emasligini 0,05 aniqlik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida tekshiring.

ILOVA

1-ilova

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ **funksiyaning qiymatlari jadvali**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3327	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009

3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-ilova

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ funksiyaning qiymatlari jadvali

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
0,00	0,0000	**0,45**	0,1736	**0,90**	0,3159	**1,35**	0,4115
0,01	0,0040	**0,46**	0,1772	**0,91**	0,3186	**1,36**	0,4131
0,02	0,0080	**0,47**	0,1808	**0,92**	0,3212	**1,37**	0,4147
0,03	0,0120	**0,48**	0,1844	**0,93**	0,3238	**1,38**	0,4162
0,04	0,0160	**0,49**	0,1879	**0,94**	0,3264	**1,39**	0,4177
0,05	0,0199	**0,50**	0,1915	**0,95**	0,3289	**1,40**	0,4192
0,06	0,0239	**0,51**	0,1950	**0,96**	0,3315	**1,41**	0,4207
0,07	0,0279	**0,52**	0,1985	**0,97**	0,3340	**1,42**	0,4222
0,08	0,0319	**0,53**	0,2019	**0,98**	0,3365	**1,43**	0,4236
0,09	0,0359	**0,54**	0,2054	**0,99**	0,3389	**1,44**	0,4251
0,10	0,0398	**0,55**	0,2088	**1,00**	0,3413	**1,45**	0,4265
0,11	0,0438	**0,56**	0,2123	**1,01**	0,3438	**1,46**	0,4279
0,12	0,0478	**0,57**	0,2157	**1,02**	0,3465	**1,47**	0,4292
0,13	0,0517	**0,58**	0,2190	**1,03**	0,3485	**1,48**	0,4306
0,14	0,0557	**0,59**	0,2224	**1,04**	0,3508	**1,49**	0,4319
0,15	0,0596	**0,60**	0,2257	**1,05**	0,3531	**1,50**	0,4332
0,16	0,0636	**0,61**	0,2291	**1,06**	0,3554	**1,51**	0,4345
0,17	0,0675	**0,62**	0,2324	**1,07**	0,3577	**1,52**	0,4357
0,18	0,0714	**0,63**	0,2357	**1,08**	0,3599	**1,53**	0,4370
0,19	0,0753	**0,64**	0,2389	**1,09**	0,3621	**1,54**	0,4382
0,20	0,0793	**0,65**	0,2422	**1,10**	0,3643	**1,55**	0,4394
0,21	0,0832	**0,66**	0,2454	**1,11**	0,3665	**1,56**	0,4406
0,22	0,0871	**0,67**	0,2486	**1,12**	0,3686	**1,57**	0,4418
0,23	0,0910	**0,68**	0,2517	**1,13**	0,3708	**1,58**	0,4429
0,24	0,0948	**0,69**	0,2549	**1,14**	0,3729	**1,59**	0,4441
0,25	0,0987	**0,70**	0,2580	**1,15**	0,3749	**1,60**	0,4452
0,26	0,1026	**0,71**	0,2611	**1,16**	0,3770	**1,61**	0,4463
0,27	0,1064	**0,72**	0,2642	**1,17**	0,3790	**1,62**	0,4474
0,28	0,1103	**0,73**	0,2673	**1,18**	0,3810	**1,63**	0,4484
0,29	0,1141	**0,74**	0,2703	**1,19**	0,3830	**1,64**	0,4495
0,30	0,1179	**0,75**	0,2734	**1,20**	0,3849	**1,65**	0,4505
0,31	0,1217	**0,76**	0,2764	**1,21**	0,3869	**1,66**	0,4515
0,32	0,1255	**0,77**	0,2794	**1,22**	0,3883	**1,67**	0,4525
0,33	0,1293	**0,78**	0,2823	**1,23**	0,3907	**1,68**	0,4535
0,34	0,1331	**0,79**	0,2852	**1,24**	0,3925	**1,69**	0,4545
0,35	0,1368	**0,80**	0,2881	**1,25**	0,3944	**1,70**	0,4554
0,36	0,1406	**0,81**	0,2910	**1,26**	0,3962	**1,71**	0,4564
0,37	0,1443	**0,82**	0,2939	**1,27**	0,3980	**1,72**	0,4573
0,38	0,1480	**0,83**	0,2967	**1,28**	0,3997	**1,73**	0,4582
0,39	0,1517	**0,84**	0,2995	**1,29**	0,4015	**1,74**	0,4591
0,40	0,1554	**0,85**	0,3023	**1,30**	0,4032	**1,75**	0,4599

0,41	0,1591	**0,86**	0,3051	**1,31**	0,4049	**1,76**	0,4608
0,42	0,1628	**0,87**	0,3078	**1,32**	0,4066	**1,77**	0,4616
0,43	0,1664	**0,88**	0,3106	**1,33**	0,4082	**1,78**	0,4625
0,44	0,1700	**0,89**	0,3133	**1,34**	0,4099	**1,79**	0,4633
1,80	0,4641	**2,02**	0,4783	**2,44**	0,4927	**2,86**	0,4979
1,81	0,4649	**2,04**	0,4793	**2,46**	0,4931	**2,88**	0,4980
1,82	0,4656	**2,06**	0,4803	**2,48**	0,4934	**2,90**	0,4981
1,83	0,4664	**2,08**	0,4812	**2,50**	0,4938	**2,92**	0,4982
1,84	0,4671	**2,10**	0,4821	**2,52**	0,4941	**2,94**	0,4984
1,85	0,4678	**2,12**	0,4830	**2,54**	0,4945	**2,96**	0,4985
1,86	0,4686	**2,14**	0,4838	**2,56**	0,4948	**2,98**	0,4986
1,87	0,4693	**2,16**	0,4846	**2,58**	0,4951	**3,00**	0,49865
1,88	0,4699	**2,18**	0,4854	**2,60**	0,4953	**3,20**	0,49931
1,89	0,4706	**2,20**	0,4861	**2,62**	0,4956	**3,40**	0,49966
1,90	0,4713	**2,22**	0,4868	**2,64**	0,4959	**3,60**	0,499841
1,91	0,4719	**2,24**	0,4875	**2,66**	0,4961	**3,80**	0,499928
1,92	0,4726	**2,26**	0,4881	**2,68**	0,4963	**4,00**	0,499968
1,93	0,4732	**2,28**	0,4887	**2,70**	0,4965	**4,50**	0,499997
1,94	0,4738	**2,30**	0,4893	**2,72**	0,4967	**5,00**	0,499997
1,95	0,4744	**2,32**	0,4898	**2,74**	0,4969		
1,96	0,4750	**2,34**	0,4904	**2,76**	0,4971		
1,97	0,4756	**2,36**	0,4909	**2,78**	0,4973		
1,98	0,4761	**2,38**	0,4913	**2,80**	0,4974		
1,99	0,4767	**2,40**	0,4918	**2,82**	0,4976		

Asosiy adabiyotlar

1.	Farmonov Sh.Q. va boshqalar "Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika" Darslik. T.: "Tafakkur Bo'stoni", 2012. -207 b
2.	Rasulov A.S. va boshqalar "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" O'quv qo'llanma . "Ma'rifat print" 2006
3.	T.X.Adirov " Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar va ularni yechishga doir ko'rsatmalar" Darslik."Tafakkur-Bo'stoni" 2007
Qo'shimcha adabiyotlar	
1.	Mirziyoev Shavkat Miromonovich. Tanqidiy tahlil, qat'iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik – har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo'lishi kerak. Mamlakatimizni 2016 yilda ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirishning asosiy yakunlari va 2017 yilga mo'ljallangan iqtisodiy dasturning eng muhim ustuvor yo'nalishlariga bag'ishlangan Vazirlar Mahkamasining kengaytirilgan majlisidagi ma'ruza, 2017 yil 14 yanvar / Sh.M. Mirziyoev. – Toshkent: O'zbekiston, 2017. – 104 b
2.	Mirziyoev Shavkat Miromonovich. Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta'minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. O'zbekiston Respublikasi Konstituцiyasi qabul qilinganining 24 yilligiga bag'ishlangan tantanali marosimdagi ma'ruza. 2016 yil 7 dekabr /Sh.M.Mirziyoev. – Toshkent: "O'zbekiston", 2017. – 48 b.
3.	Mirziyoev Shavkat Miromonovich. Yangi O'zbekiston strategiyasi.-Toshkent, 2021. -458 b.
4.	Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: «Наука». 2005.
5.	Ширяев А.Н. Вероятность-1,2. М.: «Наука». 2004.
6.	Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука. 1999.
7.	Чистяков В.П. Курс теории вероятностей» 6-е изд, испр.-СПб.: «Лань», 2003 г -272 с. –(Учебники для вузов. Специальная литература).
8.	Abdushukurov A.A. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.T. 2010-163 b.
9.	Charles M. Grinstead, J. Laurie Snell. Introduction to Probability New York, USA. 2001y.