Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 39

Г. А. Гальперин

МНОГОМЕРНЫЙ КУБ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2015

УДК 514.11
ББК 22.1
Г17

Гальперин Г. А.

Г17 Многомерный куб. — М.: МЦНМО, 2015. — 80 с.

ISBN 978-5-4439-0296-8

Брошюра посвящена многомерному кубу и его свойствам. Рассказывается, как получить формулу для числа граней куба любой размерности и как распространить ее на другие правильные многогранники. Рассматриваются комбинаторные и топологические свойства многомерного куба, связанные с ним парадоксы, гипотеза Борсука; обсуждаются вопросы об объеме корки n-мерного кубического и шарового «арбуза» и электрическом сопротивлении n-мерного куба. В конце приведен список 25 задач, последние две из которых были сформулированы известнейшими математиками современности — И. М. Гельфандом и В. И. Арнольдом.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей: школьников старших классов, студентов, учителей.

ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-0296-8

На одной летней математической школе я обратился к её участникам с вопросом: кто может коротко объяснить, что такое четырёхмерный куб? Вызвался один из участников, паренёк лет 10—11. Ничего не говоря, школьник поднял над головой каркас обычного куба (несколько больших моделей куба лежали на столе рядом с ним) и, продержав его так секунд двадцать, чтобы все всё хорошенько рассмотрели, положил обратно на стол. После чего сел, сочтя объяснение законченным. «И что всё это значит?» — спросил я.

«Всё очень просто, — ответил школьник. — Пока я держал куб, он двигался во времени — вдоль четвёртого измерения. И в результате сдвинулся настолько, что образовался 4-мерный куб, у которого ребро, идущее вдоль четвёртого измерения, — это отрезок длиной 20 секунд. Вы все, однако, идущего вдоль четвёртого измерения ребра не заметили, потому что по четвёртому измерению куб невидим. Однако такое движение вдоль нового измерения легко вообразить, и тогда он станет видимым целиком».

Школьник фактически сделал первый шаг в построении n-мерного куба: перешёл от размерности 3 к размерности 4. Сейчас мы совершим аналогичные шаги в этом направлении, в результате чего и получим n-мерный куб.

* * *

В этой брошюре рассказывается о том, что такое многомерный куб[1] и как определять число его граней разной размерности. Для этого мы соединим, казалось бы, несоединимое — геометрический объект (куб) и алгебраическое выражение (многочлен), взаимодействие которых и даст ответ на наш вопрос. В § 5 мы обсудим одну арифметическую закономерность, объяснение которой даётся кубом с бесконечным числом измерений (или, иначе, бесконечномерным кубом). Оставшаяся часть книги посвящена многим интересным и нетривиальным свойствам многомерного куба, а также их арифметическим, алгебраическим, комбинаторным, статистическим и даже «электрическим» аспектам.

§ 1. Стратегия построения n-мерного куба

Всем известный трёхмерный куб имеет т р и измерения: длину, ширину и высоту. Аналог куба на плоскости — квадрат — имеет д в а измерения: длину и ширину, и его можно поэтому назвать д в у м е р н ы м кубом. Точно так же отрезок — это о д н о м е р н ы й куб (он

[1] См. также статьи о многомерном кубе, публиковавшиеся в «Кванте»:
Н. Д е м и д о в и ч. Как начертить n-мерный куб? // Квант. 1974. №8. С. 22—27.
С. Д у ж и н, В. Р у б ц о в. Четырёхмерный куб // Квант. 1986. № 6. С. 3—7.

имеет одну только длину), а точка — нульмерный куб (т. е. куб без измерений, или с 0 измерений). По аналогии можно рассмотреть куб с четырьмя измерениями, или четырёхмерный куб (иначе называемый ещё «тессеракт»), с пятью измерениями — пятимерный куб, и вообще, куб с n измерениями — n-мерный куб. Пока что это только слова, но сейчас мы подкрепим их делами: построим n-мерный куб для $n = 4$, 5, 6 и т. д.

§ 2. Построение гиперкуба

Построению четырёхмерного куба предпошлём индуктивное построение кубов меньших размерностей. Начнём с $n = 0$, точки. Сдвинув её вдоль прямой, получим отрезок некоторой длины a — одномерный куб, $n = 1$. Сдвинув этот отрезок в перпендикулярном ему направлении на величину a, получим квадрат со стороной a — двумерный куб, $n = 2$. Наконец, сдвинув квадрат по третьему измерению, получим куб с ребром a, $n = 3$ (рис. 1).

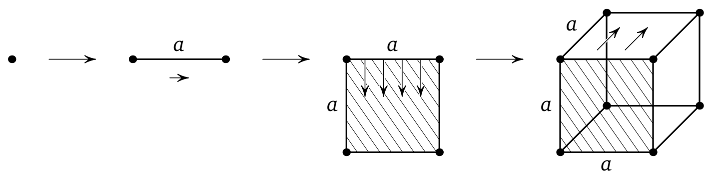


Рис. 1. Куб новой размерности получается параллельным сдвигом куба старой размерности

Теперь остаётся действовать по аналогии — сдвинуть трёхмерный куб на величину a вдоль четвёртого измерения и получить четырёхмерный куб с ребром a (рис. 2). Физического четвёртого измерения не существует, но его можно мыслить как временно́е — трёхмерный куб «живёт» во времени, и если мы добавим время t как четвёртую ось к трёхмерной системе координат x, y, z, то получим четырёхмерное пространство, а в нём четырёхмерный куб.

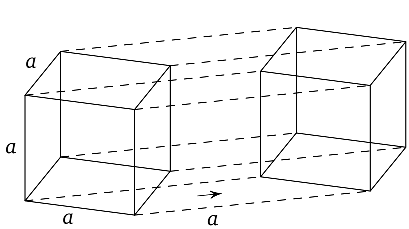


Рис. 2. Четырёхмерный куб

Отметим сложность в изображении куба на бумаге. Когда мы смотрим на трёхмерный куб или его каркас, мы видим на самом деле не трёхмерный объект, а лишь его двумерную проекцию на сетчатку глаза — на плоскость. Из-за этого нам приходится изображать невидимые рёбра куба либо пунктирными линиями, либо сплошными, но прерывающимися в местах пересечения с рёбрами видимых граней (посмотрите внимательно ещё раз на изображение трёхмерного куба на рис. 1). С четырёхмерным кубом дело обстоит ещё сложнее — мы можем сделать его трёхмерную модель, соединив два одинаковых куба проволочками, как это показано пунктирными отрезками на рис. 2, однако для изображения его на бумаге мы должны спроецировать этот трёхмерный каркас на плоскость. Иными словами, сначала мы фотографируем четырёхмерный куб четырёхмерным фотоаппаратом и получаем его *трёхмерную* «фотокарточку» (т. е. пространственную конструкцию рис. 2), а затем делаем стандартную — *двумерную* — фотокарточку получившейся трёхмерной «фотокарточки». Это и будет проекция четырёхмерного куба на плоскость. Но можно и миновать этап изготовления трёхмерной «фотокарточки» и сделать сразу обычную двумерную фотокарточку.

Заметим, что стандартный фотоаппарат делает изображение, близкое к параллельной проекции куба. Однако можно изобрести фотоаппарат, который делает центральную проекцию куба на плоскость (её ещё называют стереографической проекцией). Трёхмерный куб тогда изобразится на фотокарточке, как указано на рис. 3*а*, *б*. На стереографической фотокарточке боковые грани куба искажены и выглядят как трапеции, хотя в действительности являются квадратами.

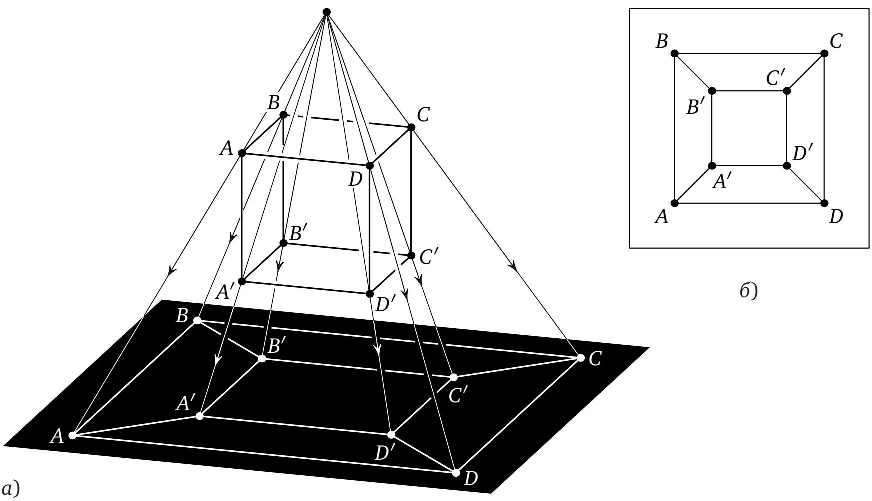


Рис. 3. Центральная (стереографическая) проекция трёхмерного куба на плоскость и его стереографическая фотокарточка

Поступим точно так же и с четырёхмерным кубом: спроецируем его из одной точки четырёхмерного пространства на трёхмерное пространство, а затем параллельно на двумерную плоскость — получим стереографическую фотографию (рис. 4). Отметим, что и в этом случае некоторые — но уже трёхмерные — грани четырёхмерного куба искажены на фотографии и выглядят как усечённые пирамиды (аналоги трапеций, изображающих боковые грани трёхмерного куба на рис. 3*б*).

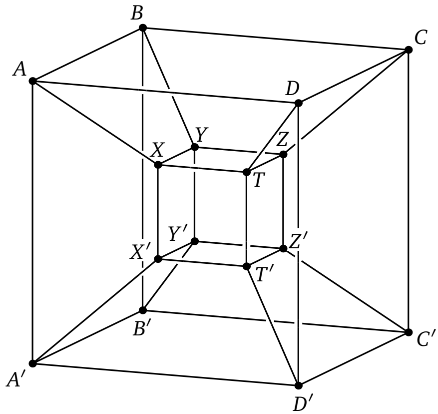


Рис. 4. Стереографическая фотография четырёхмерного куба

Точно так же можно получить стереографические фотографии кубов любого числа измерений. Они будут выглядеть намного более запутанными из-за большего числа отрезков-рёбер на фотографии.

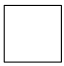
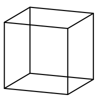
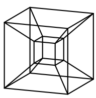
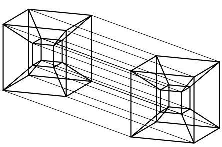
§ 3. Число граней четырёхмерного куба

Глядя на изображения n-мерных кубов при $n = 0$, 1, 2, 3 и 4 (см. рис. 1, 3 и 4), запишем в таблицу количество их граней разных размерностей[1] (см. таблицу 1).

Поясним строчку таблицы, соответствующую размерности 4. Число вершин четырёхмерного куба (рис. 4) — A, B, C, D, A', …, X, Y, …, Z', T' — 16; число рёбер (отрезков) — 32; число двумерных граней —

[1] У n-мерного куба имеются грани всех размерностей от 0 до $n-1$: вершины, рёбра, квадраты, трёхмерные кубы, четырёхмерные кубы, …, $(n-1)$-мерные кубы.

Таблица 1

Название куба	Размерность куба	0-мерные грани	1-мерные грани	2-мерные грани	3-мерные грани	4-мерные грани	5-мерные грани
Точка	0	1	—	—	—	—	—
Отрезок	1	2	1	—	—	—	—
 Квадрат	2	4	4	1	—	—	—
 Куб	3	8	12	6	1	—	—
 4-мерный куб, или тессеракт	4	16	32	24	8	1	—
 5-мерный куб	5	?	?	?	?	?	?

$ABCD$, $ABYX$, …, $X'Y'Z'T'$ — 24; число трёхмерных граней — двух кубов $ABCDA'B'C'D'$ и $XYZTX'Y'Z'T'$ и шести усечённых пирамид (также изображающих кубы) — $ABB'A'XYY'X'$, …, $A'B'C'D'X'Y'Z'T'$ — 8.

В размерности 5 мы всюду поставили вопросительные знаки, хотя ясно, что первый из них должен быть заменён на 32 (так как все предыдущие числа в первой колонке, означающие число вершин, суть степени двойки, $32 = 2^5$), а последний — на 1 (так как 5-мерный куб содержит только одну 5-мерную грань — сам этот куб). Остальные числа найти не так-то просто, даже глядя на (очень запутанную) двумерную карточку 5-мерного куба. Чтобы поставить правильные числа в этой, а затем и во всех остальных строках таблицы, мы должны привлечь логику.

§ 4. Подсчёт числа граней разных размерностей

Начнём с наблюдения: при построении куба из квадрата, т. е. при сдвиге квадрата вдоль третьего измерения,

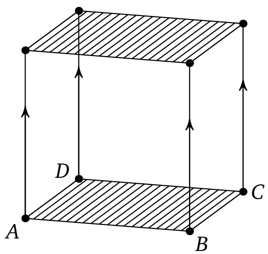


Рис. 5. Квадрат $ABCD$ и «растущие» из него рёбра и грани

1) все вершины удваиваются (так как добавляются вершины сдвинутого квадрата), и их становится $2 \cdot 4 = 8$;

2) все рёбра удваиваются (добавляются рёбра сдвинутого квадрата), добавляются новые рёбра, «растущие» из вершин квадрата $ABCD$, и их становится $2 \cdot 4 + 4 = 12$;

3) к грани $ABCD$ добавляется параллельная ей грань $A'B'C'D'$, а также четыре боковые грани, «растущие» из рёбер квадрата $ABCD$, так что число граней становится равным $2 + 4 = 6$ (рис. 5).

Повторим это наблюдение для четырёхмерного куба, стартовав с куба $XYZTX'Y'Z'T'$.

1) Все вершины куба $XYZTX'Y'Z'T'$ удваиваются, и их становится $2 \cdot 8 = 16$.

2) Все рёбра XY, YX, …, $Z'T'$ удваиваются — им соответствуют рёбра AB, BC, …, $C'D'$ внешнего куба $ABCDA'B'C'D'$, а также добавляются новые рёбра, «растущие» из вершин X, Y, …, Z', T. Итого получаем $2 \cdot 12 + 8 = 32$ рёбер гиперкуба.

3) Все грани $XYZT$, …, $X'Y'Z'T'$ удваиваются — им отвечают грани $ABB'A'$, …, $A'B'C'D'$; а также добавляются новые грани, «растущие» из всех рёбер куба $XYZTX'Y'Z'T'$ (это боковые грани усечённых пирамид на стереографической карточке гиперкуба). Итого получаем $2 \cdot 6 + 12 = 24$ двумерных грани гиперкуба (24 квадрата).

4) Кроме двух трёхмерных кубов $XYZTX'Y'Z'T'$ и полученного из него параллельным сдвигом куба $ABCDA'B'C'D'$ надо добавить все шесть усечённых пирамид (в действительности тоже кубов, искажённо представленных на стереографической карточке), «растущих» из граней куба $XYZTX'Y'Z'T'$. В результате получается $2 + 6 = 8$ трёхмерных граней гиперкуба (т. е. восемь трёхмерных кубов), рис. 6.

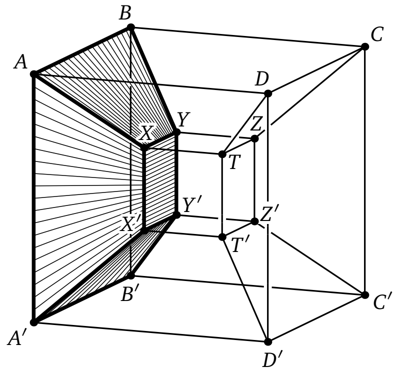


Рис. 6. Куб $XYZTX'Y'Z'T'$ и «растущие» из него рёбра, грани и кубы

Теперь таблицу 1 можно переписать, дополнив её по аналогии строчкой правильных чисел для размерности 5 (см. таблицу 2).

Таблица 2

Название куба	Размерность куба	Количество граней размерности k					
		k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
Точка	0	2^0	—	—	—	—	—
Отрезок	1	2^1	1	—	—	—	—
Квадрат	2	2^2	4 (2·1+2)	1	—	—	—
Куб	3	2^3	12 (2·4+4)	6 (2·1+4)	1	—	—
4-мерный куб, или тессеракт	4	2^4	32 (2·12+8)	24 (2·6+12)	8 (2·1+6)	1	—
5-мерный куб	5	2^5	80 (2·32+16)	80 (2·24+32)	40 (2·8+24)	10 (2·1+8)	1

Обозначим через F_n^k число k-мерных граней у n-мерного куба (F от англ. face). Тогда, как видно из таблицы 2,

$$F_{n+1}^0 = 2 \cdot F_n^0 \tag{1}$$

и вообще

$$F_{n+1}^k = 2 \cdot F_n^k + F_n^{k-1} \tag{2}$$

для всех $1 \leqslant k \leqslant n$.

Таблица 3

Размерность куба	0-мерные грани	1-мерные грани	2-мерные грани	3-мерные грани		$(n-1)$-мерные грани	n-мерные грани	$(n+1)$-мерные грани
n	F_0	F_1	F_2	F_3	…	F_{n-1}	$F_n=1$	—
$n+1$	$2F_0$	$2F_1+F_0$	$2F_2+F_1$	$2F_3+F_2$	…	$2F_{n-1}+F_{n-2}$	$2F_n+F_{n-1}$	$F_{n+1}=1$

Заменив для простоты F_n^k значком F_k, мы получаем таблицу 3. Подставляя конкретные значения для F_i из таблицы 2, мы можем расширить её вниз неограниченно, заполняя последовательно строчки для размерностей 6, 7, 8… Например, строчка для $n=6$ выглядит так:

0-мерные грани	1-мерные грани	2-мерные грани	3-мерные грани	4-мерные грани	5-мерные грани
$2\cdot2^5=2^6$	$2\cdot80+2^5==112$	$2\cdot80+80==240$	$2\cdot40+80==160$	$2\cdot10+4==24$	$2\cdot1+10==12$

Будем рассматривать числа F_0, F_1, …, F_{n-1}, F_n $(=1)$ как коэффициенты многочлена от x:

$$P_n(x)=F_0x^n+F_1x^{n-1}+F_2x^{n-2}+\ldots+F_{n-1}x+F_n.$$

Тогда, согласно таблице 3,

$$P_n(x)=(2F_0)x^{n+1}+(2F_1+F_0)x^n+(2F_2+F_1)x^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+(2F_{n-1}+F_{n-2})x^2+(2F_n+F_{n-1})x+(2F_{n+1}+F_n).$$

Легко доказать следующие две теоремы.

Теорема 1.

$$P_{n+1}(x)=(2x+1)P_n(x).$$

Это равенство следует из умножения многочленов в столбик:

$$\begin{array}{rl} P_n(x)= & F_0x^n+F_1x^{n-1}+F_2x^{n-2}+\ldots \\ & 2x+1 \\ \hline & 2F_0x^{n+1}+(2F_1+F_0)x^n+(2F_2+F_1)x^{n-1}+\ldots \end{array}$$

Теорема 2.

$$P_n(x)=(2x+1)^n.$$

Доказательство по индукции: при $n = 0$ (точка) $P_0(x) = 1 = (2x + 1)^0$. Для $P_{n+1}(x)$ получаем:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) \cdot (2x + 1) = (2x + 1)^n \cdot (2x + 1) = (2x + 1)^{n+1},$$

и теорема доказана.

Итак, многочлен n-мерного куба — это $(2x + 1)^n$.

Проверим для $n = 1, 2, 3, 4$, что коэффициенты многочлена $(2x + 1)^n$ выражают числа граней разных размерностей.

1. $$P_1(x) = (2x + 1)^1 = 2x + 1,$$

так что одномерный куб (отрезок) имеет 2 вершины и 1 ребро.

2. $$P_2(x) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1:$$

квадрат имеет 4 вершины, 4 ребра и 1 двумерную грань.

3. $$P_3(x) = (2x + 1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1:$$

трёхмерный куб имеет 8 вершин, 12 рёбер, 6 граней и 1 трёхмерную грань.

4. $$P_4(x) = (2x + 1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1:$$

гиперкуб содержит 16 вершин, 32 ребра, 24 двумерные грани, 8 трёхмерных граней и 1 четырёхмерную грань.

* * *

Получим теперь явную формулу для F_n^k. Заметим, что n-мерный куб может быть задан аналитически. Для простоты будем считать длину ребра куба равной 1. Тогда n-мерный куб — это множество точек n-мерного пространства, т. е. наборов вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где каждое число x_i меняется от 0 до 1. Зафиксировать k-мерную грань n-мерного куба означает фиксировать какие-то k мест в наборе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, поставить на каждое из этих k мест переменные, которые меняются от 0 до 1, а на остальные $n - k$ мест — либо 0, либо 1. Указанные k мест из n могут быть выбраны $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ способами, а число разных способов расставить нули и единицы на $n - k$ местах равно 2^{n-k} (две возможности — 0 или 1 — на каждое место). В результате получаем $C_n^k \cdot 2^{n-k}$ разных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ указанного вида.

Итак,

$$F_n^k = 2^{n-k} \cdot C_n^k.$$

П р и м е р ы.

1. У трёхмерного куба ($n=3$) имеется

$$
\begin{array}{lll}
2^{3-0}\cdot C_3^0 = 8\times 1 = 8 & \text{вершин} & (k=0),\\
2^{3-1}\cdot C_3^1 = 4\times 3 = 12 & \text{рёбер} & (k=1),\\
2^{3-2}\cdot C_3^2 = 2\times 3 = 6 & \text{граней} & (k=2),\\
2^{3-3}\cdot C_3^3 = 1\times 1 = 1 & \text{3-мерных граней} & (k=3).
\end{array}
$$

Сравнивая эти числа с числами строчки для размерности 3 таблицы 2, получаем равенства: $2^3 = 8\times 1$, $2\times 4+4 = 4\times 3$, $2\times 3 = 2\times 1+4$, $1\cdot 1 = 1$.

2. Четырёхмерный куб содержит

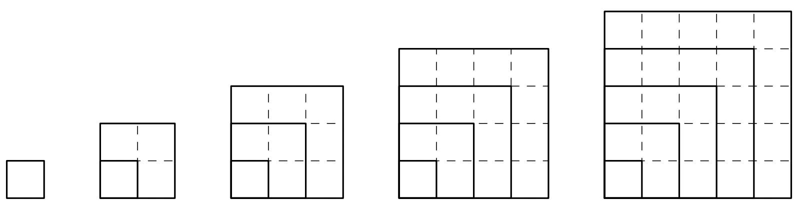
$$
\begin{array}{ll}
2^{4-1}\cdot C_4^1 = 8\times 4 = 32 & \text{рёбер},\\
2^{4-2}\cdot C_4^2 = 4\times 6 = 24 & \text{граней},\\
2^{4-3}\cdot C_4^3 = 2\times 4 = 8 & \text{3-мерных граней}.
\end{array}
$$

§ 5. Арифметическая закономерность, объясняемая бесконечномерным кубом

Рассмотрим последовательность всех натуральных чисел и зачеркнём в ней каждое второе число: 2, 4, 6, 8... В полученной последовательности нечётных чисел сложим первые идущие подряд k чисел, где $k = 1, 2, 3\ldots$:

1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15
1		4		9		16		25		36		49		64

Получились точные квадраты натуральных чисел. Доказательство этого факта получается подсчётом единичных квадратиков:

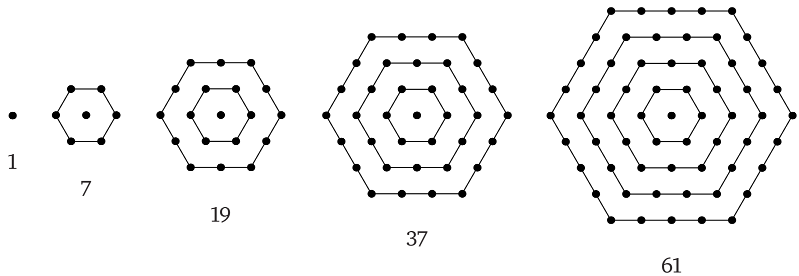


$1 = 1^2$ $\quad 1+3 = 2^2$ $\quad 1+3+5 = 3^2$ $\quad 1+3+5+7 = 4^2$ $\quad 1+3+5+7+9 = 5^2$

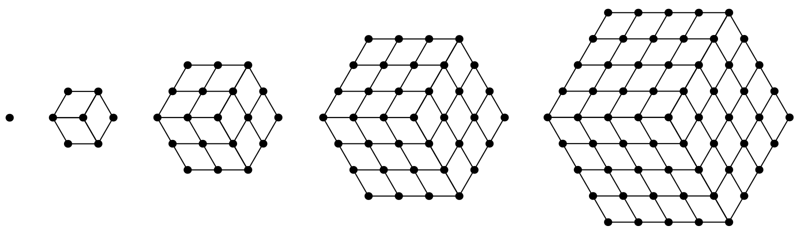
Опять начнём с последовательности 1, 2, 3, 4... Зачеркнём каждое третье число и найдём суммы первых идущих подряд чисел; в новой последовательности зачеркнём каждое второе число и найдём суммы первых идущих подряд чисел:

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16
1	~~3~~		7	~~12~~		19	~~27~~		37	~~48~~		61	~~75~~		91
1			8			27			64			125			216

Эта последовательность может быть получена такой мозаикой, состоящей из вложенных «точечных» правильных шестиугольников:



На эту мозаику можно взглянуть как на проекцию трёхмерного куба:



В каждом из кубов невидимыми (заслоняемыми передними гранями) являются кубы всех меньших размеров. Например, отсутствующая на второй картинке невидимая вершина изображена на первой картинке, а невидимые кубы на третьей картинке отделены на первых двух. Вкладывая в данную картинку куба все предыдущие картинки, мы целиком заполняем этот куб (рис. 7), т. е. получаем число точек, равное третьей степени ребра этого куба. Вот почему

$$1 = 1^3,$$
$$1 + 7 = 2^3,$$
$$1 + 7 + 19 = 3^3,$$
$$1 + 7 + 19 + 37 = 4^3,$$
$$1 + 7 + 19 + 37 + 61 = 5^3 \quad \text{и т. д.}$$

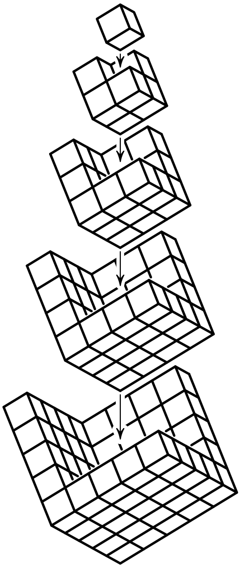


Рис. 7

Аналогичное построение может быть выполнено в результате зачеркивания сначала каждого четвёртого, потом третьего, потом каждого второго, а в промежутках между зачеркиваниями — складывания последовательных чисел.

Тогда конечные ответы будут четвёртыми степенями: 1^4, 2^4, 3^4, 5^4…

Доказательство может быть проведено с помощью проекции 4-мерных кубов размера 1, 2, 3, 4 и т. д. на плоскость.

Такая же процедура может быть проведена для каждого n и объяснена с помощью проекций n-мерных кубов с рёбрами 1, 2, 3…

Все вместе процедуры могут быть объяснены с помощью рассмотрения бесконечномерных кубов с рёбрами 1, 2, 3… Действительно, если посмотреть на один такой бесконечномерный куб сверху, мы увидим просто квадрат; чуть повернув его, увидим трёхмерный куб; ещё чуть повернув, увидим четырёхмерный куб, и т. д.

§ 6. Тетраэдр и его многочлен

Как и для куба, можно построить порождающий его многочлен также и для многомерного тетраэдра. Будем действовать по той же схеме, что и для куба (рис. 8).

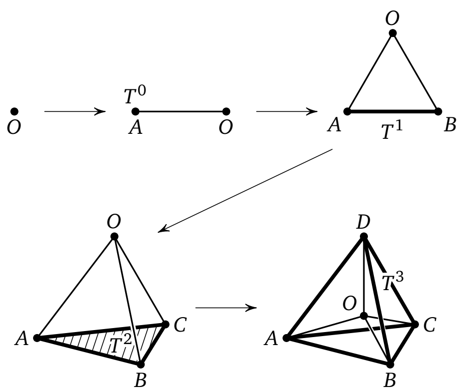


Рис. 8. Тетраэдр новой размерности получается добавлением новой вершины O и соединением её со всеми точками тетраэдра предыдущей размерности

Тетраэдр T^{n+1} размерности $n+1$ получается из тетраэдра T^n размерности n так: добавляем (в новом измерении) точку O — новую точку тетраэдра и соединяем её со всеми точками тетраэдра T^n. При этом тетраэдр T^n можно представлять как основание тетраэдра T^{n+1}. В результате «вырастают» грани всех размерностей у тетраэдра T^{n+1} — из граней тетраэдра T^n. Число вершин увеличивается на 1 (добавляется одна новая вершина O); число рёбер у T^{n+1} становится равным числу рёбер у T^n плюс число вершин T^n (из которых «вырастают» дополнительные рёбра у T^{n+1}); число двумерных (плоских) граней у T^{n+1} складывается из числа двумерных граней у T^n и числа рёбер у T^n (из которых «вырастают» новые плоские грани у T^{n+1}); то же происходит с гранями размерностей 3, 4 и т. д., вплоть до граней размерности n, которые «вырастают» из граней на единицу меньшей размерности. Сам тетраэдр T^{n+1} представляет собой «грань размерности $n+1$». В результате получаем таблицу 4 (где F_k, как и раньше, обозначает число граней размерности k).

Таблица 4

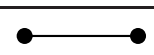
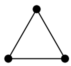
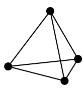
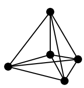
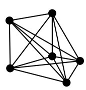
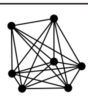
Размерность тетраэдра	0-мерные грани	1-мерные грани	2-мерные грани	3-мерные грани		$(n-1)$-мерные грани	n-мерные грани	$(n+1)$-мерные грани
n	F_0	F_1	F_2	F_3	…	F_{n-1}	$F_n=1$	—
$n+1$	F_0+1	F_1+F_0	F_2+F_1	F_3+F_2	…	$F_{n-1}+F_{n-2}$	F_n+F_{n-1}	$F_{n+1}=1$

Начав с размерности ноль ($n=0$, $T^0=$ точка) и следуя формулам таблицы 4, мы можем получить таблицу конкретных значений чисел $F_n^k=F_k$ (см. таблицу 5).

Эта таблица — не что иное, как знаменитый треугольник Паскаля со срезанной левой (состоящей из единиц) стороной:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Таблица 5

Название тетраэдра	Размерность тетраэдра	0-мерные грани	1-мерные грани	2-мерные грани	3-мерные грани	4-мерные грани	5-мерные грани	6-мерные грани
 Точка	0	1	—	—	—	—	—	—
 Отрезок	1	2	1	—	—	—	—	—
 Треугольник	2	3	3	1	—	—	—	—
 3-мерный тетраэдр	3	4	6	4	1	—	—	—
 4-мерный тетраэдр	4	5	10	10	5	1	—	—
 5-мерный тетраэдр	5	6	15	20	15	6	1	—
 6-мерный тетраэдр	6	7	21	35	35	21	7	1

Это утверждение, собственно, можно усмотреть сразу из нижней строчки таблицы 4 и определения треугольника Паскаля: каждое число треугольника Паскаля равно сумме двух чисел предыдущей строчки, стоящих непосредственно над ним. В результате получаем формулу

$$F_n^k = C_{n+1}^{k+1}. \tag{3}$$

Числа строчек таблицы 5 — это коэффициенты многочлена $(x+1)^{n+1}$, кроме первого — коэффициента 1 при x^{n+1}. Многочлен x^{n+1} и надо вычесть из $(x+1)^{n+1}$, чтобы получить порождающий многочлен $T_n(x)$ тетраэдра T^n:

$$T_n(x) = (x+1)^{n+1} - x^{n+1}.$$

П р и м е р ы.

1. Трёхмерный тетраэдр T^3:

$$T_3(x) = (x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

(4 вершины, 6 рёбер, 4 двумерные грани).

2. Четырёхмерный тетраэдр T^4:

$$T_4(x) = (x+1)^5 - x^5 = 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

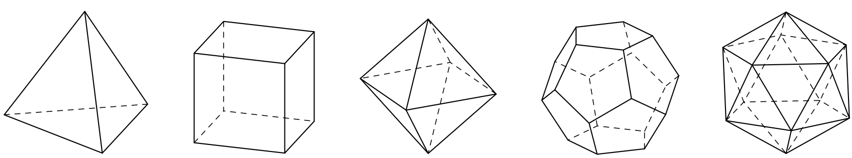
(5 вершин, 10 рёбер, 10 двумерных граней, 5 трёхмерных граней).

3. У шестимерного тетраэдра T^6 имеется $C_7^3 = \dfrac{7!}{3!\,4!} = 35$ двумерных граней и столько же (поскольку $C_7^4 = C_7^3$) трёхмерных граней.

§ 7. Октаэдр и его многочлен

В геометрии доказывается следующее замечательное утверждение.

Теорема 3. а) В трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ существует ровно пять типов правильных многогранников:



Тетраэдр   Куб   Октаэдр   Додекаэдр   Икосаэдр

б) В четырёхмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ существует ровно шесть типов правильных многогранников: пять четырёхмерных аналогов трёхмерных правильных многогранников (тетраэдр, куб, октаэдр или кокуб, правильные 120-гранник, 600-гранник) плюс существует один новый тип многогранника — так называемый четырёхмерный правильный 24-гранник (он имеет также 24 вершины).

в) В пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 5$ существует ровно три типа правильных многогранников: n-мерный тетраэдр, n-мерный куб и n-мерный октаэдр (кокуб). Правильных многогранников, аналогичных додекаэдру, икосаэдру и четырёхмерному 24-граннику, в размерности 5 и выше не существует.

Отметим, что между правильными многогранниками фиксированной размерности имеется интересная связь — так называемая двойственность. А именно, все многогранники данной размерности разбиваются на пары *двойственных* друг другу многогранников. Многогранники называются двойственными друг другу, если один из них может быть получен как выпуклая оболочка[1] центров $(n-1)$-мерных граней другого. При этом каждая k-мерная грань полученного многогранника будет выпуклой оболочкой множества центров $(n-1)$-мерных граней исходного многогранника, содержащих некоторую его $(n-k-1)$-мерную грань. Отношение двойственности симметрично: если первый многогранник двойственен второму, то второй двойственен первому.

В $\mathbb{R}^3$ тетраэдр двойственен сам себе, куб — октаэдру (и наоборот), додекаэдр — икосаэдру (и наоборот), рис. 9.

В $\mathbb{R}^4$ четырёхмерный тетраэдр T^4 двойственен сам себе; четырёхмерные куб и октаэдр — друг другу; 24-гранник двойственен сам себе; а четырёхмерные 120-гранник (120 трёхмерных граней которого — додекаэдры) и 600-гранник (600 трёхмерных граней которого — тетраэдры) двойственны друг другу.

* * *

Имеет смысл говорить о многочленах только тех правильных многогранников, которые существуют в пространстве произвольной размерности $n \geqslant 3$. Конечно, для додекаэдра и икосаэдра в $\mathbb{R}^3$ и их четырёхмерных аналогов — 120-гранника и 600-гранника, а также четырёхмерного 24-гранника, — можно формально выписать многочлены 3-й и 4-й степеней, коэффициенты которых — числа F_3^k и F_4^k граней многогранника размерности k, $0 \leqslant k \leqslant 4$; они и будут многочленами этих многогранников. Например, многочлен додекаэдра — это

$$D_3(x) = 20x^3 + 30x^2 + 12x + 1,$$

а икосаэдра — это «перевёрнутый» $D_3(x)$:

$$I_3(x) = 12x^3 + 30x^2 + 20x + 1.$$

[1]Выпуклая оболочка двух точек — это отрезок с концами в этих точках. Выпуклая оболочка трёх точек — это треугольник, полученный как объединение всех отрезков, один конец которых расположен в третьей точке, а второй заметает выпуклую оболочку первых двух точек (основание треугольника). Аналогично определяется и выпуклая оболочка большего числа точек — это выпуклый многогранник, полученный как объединение всех отрезков, исходящих из последней точки и кончающихся в выпуклой оболочке предыдущих точек.

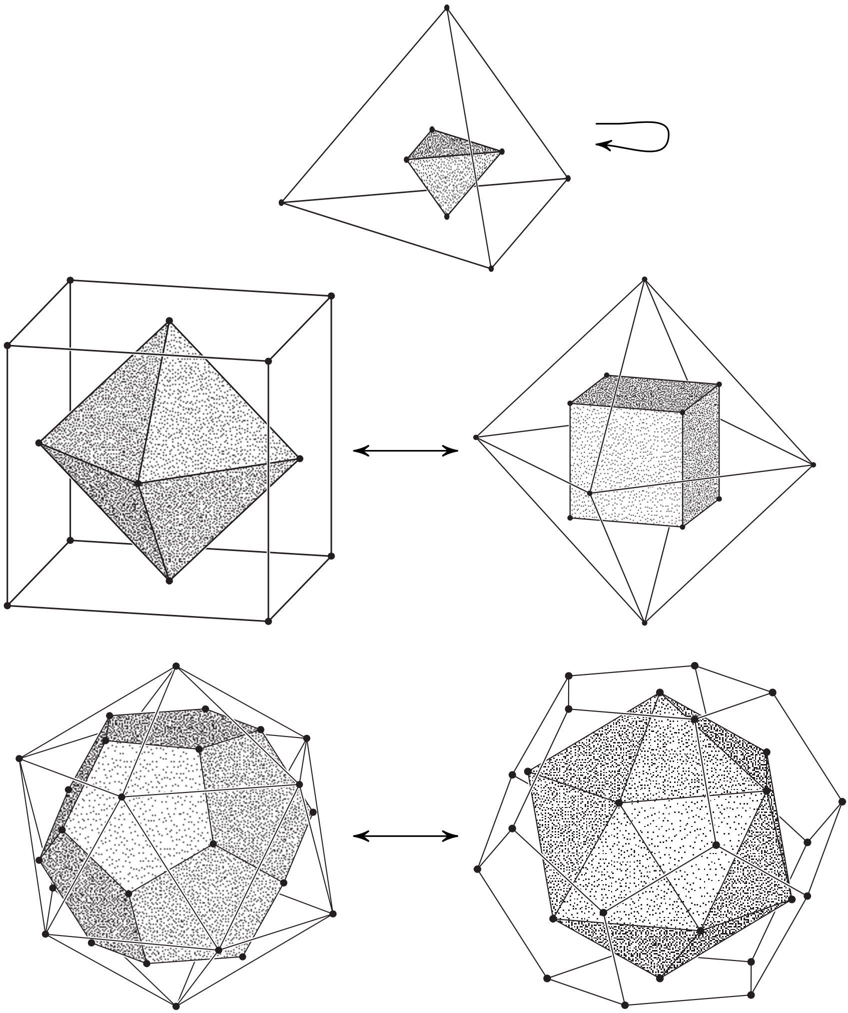


Рис. 9. Двойственные (дуальные) правильные многогранники

Аналогично можно построить многочлены для четырёхмерных 24-гранника, 120-гранника и 600-гранника (см. последние три строчки в таблице из § 8). Но все полученные многочлены не имеют большого смысла, так как не могут быть обобщены на размерности, большие 4. Идея состоит в том, чтобы по многочлену выписывать числа F_n^k, а не наоборот.

* * *

Итак, n-мерный октаэдр (или кокуб) — двойственный многогранник к кубу, поэтому у него всё двойственно: вершин у него столько же, сколько $(n-1)$-мерных граней у куба, рёбер — столько же, сколько $(n-2)$-мерных граней у куба, и т. д. Иными словами, если

$$P_n(x) = F_n^0 x^n + F_n^1 x^{n-1} + \ldots + F_n^k x^{n-k} + \ldots + F_n^{n-1} x + F_n^n$$

— многочлен n-мерного куба (где F_n^k — число его k-мерных граней и $F_n^n = 1$), то чтобы получить многочлен октаэдра $O_n(x)$, надо просто записать коэффициенты $P_n(x)$ при положительных степенях x в обратном порядке и добавить в конце свободный член $F_n^n = 1$:

$$O_n(x) = F_n^{n-1} x^n + F_n^{n-2} x^{n-1} + \ldots + F_n^1 x^2 + F_n^0 x + F_n^n.$$

Явно выписать такой многочлен хотя и легко, но скучно; хочется получить его в компактном (замкнутом) виде, как и многочлен куба $P_n(x) = (2x+1)^n$.

Для этого сделаем простое наблюдение: если в выражении $2x+1$ поменять местами коэффициенты 1 и 2, то n-я степень полученного выражения $(x+2)^n$ даст нам в точности те же «кубические» коэффициенты $\{F_n^k\}$ при положительных степенях x, только записанные в обратном порядке:

$$Q_n(x) = (x+2)^n = F_n^n x^n + F_n^{n-1} x^{n-1} + \ldots + F_n^1 x + F_n^0.$$

Поэтому многочлен $Q_n(x) = (x+2)^n$ тоже можно считать многочленом n-мерного куба. Он даже проще многочлена $P_n(x)$, так как коэффициент F_n^k при x^k и есть число k-мерных граней! И он поможет нам сейчас записать коротко многочлен $O_n(x)$. Поскольку $F_n^n = 1$, то

$$Q_n(x) = x^n + F_n^{n-1} x^{n-1} + F_n^{n-2} x^{n-2} + \ldots + F_n^1 x + F_n^0.$$

Чтобы получить $O_n(x)$, надо стереть x^n, все степени увеличить на 1 и добавить в конце свободный член 1. Это легко достигается умножением на x и выкидыванием x^{n+1}:

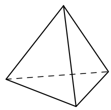
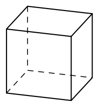
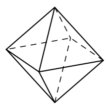
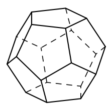
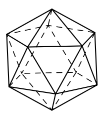
$$O_n(x) = x \cdot Q_n(x) - x^{n+1} + 1.$$

Итак, окончательно: многочлен октаэдра — это

$$O_n(x) = x(x+2)^n - x^{n+1} + 1 = x((x+2)^n - x^n)) + 1.$$

§ 8. Сводка формул

Сведём порождающие многочлены всех правильных многогранников в одну таблицу:

	Правильный многогранник	Порождающий многочлен
$\mathbb{R}^n$	Тетраэдр 	$T_n(x) = (x+1)^{n+1} - x^n$
	Куб 	$P_n(x) = (2x+1)^n$ или $Q_n(x) = (x+2)^n$
	Октаэдр 	$O_n(x) = x(x+2)^n - x^{n+1} + 1$
$\mathbb{R}^3$	Додекаэдр 	$D_3(x) = 20x^3 + 30x^2 + 12x + 1$
	Икосаэдр 	$I_3(x) = 12x^3 + 30x^2 + 20x + 1$
$\mathbb{R}^4$	24-гранник $\{3, 4, 3\}$	$A_4(x) = 24x^4 + 96x^3 + 96x^2 + 24x + 1$
	120-гранник $\{5, 3, 3\}$	$D_4(x) = 600x^4 + 1200x^3 + 720x^2 + 120x + 1$
	600-гранник $\{3, 3, 5\}$	$I_4(x) = 120x^4 + 720x^3 + 1200x^2 + 600x + 1$

§ 9. Замечание о теории множеств и многомерном кубе

Многомерный куб имеет прямое отношение к теории множеств. Рассмотрим множество из n элементов: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Каковы его подмножества и сколько их? Мы включаем в подмножества пустое множество $\varnothing$ (множество без элементов) и само множество A.

Рассмотрим конкретный случай $n = 4$ и для простоты переобозначим элементы множества A: $A = \{a, b, c, d\}$. Естественно каждое подмножество закодировать нулями и единицами следующим образом: если элемент принадлежит подмножеству, пишем 1, а если не принадлежит — пишем 0. Например, $\varnothing$ кодируется четвёркой нулей: $\varnothing \longleftrightarrow (0, 0, 0, 0)$, подмножество $\{a, c\}$ имеет код $(1, 0, 1, 0)$, а всё множество A — код $(1, 1, 1, 1)$. Число единиц в коде — это число элементов в подмножестве.

Зная код, легко однозначно восстановить само подмножество. Теперь достаточно выписать все коды, а вслед за ними отвечающие им подмножества.

Проще всего коды перечислять, изготавливая списки последовательностей нулей и единиц следующим специальным образом.

Сначала напишем на листе бумаги 0 и 1 — это будет первый список. Сдублируем этот список на втором листе бумаги, затем припишем справа 0 к каждому из чисел 0 и 1 первого списка и 1 — к каждому из чисел 0 и 1 второго списка, а потом оба списка склеим в один. Получим список из всех возможных последовательностей длины 2:

00	**1**0	← 1-й список
01	**1**1	← 2-й список

Сделаем с этим списком то же самое: удвоим его, записав ещё раз все четыре последовательности на отдельном листе, а потом припишем 0 справа ко всем последовательностям первого листа и 1 — справа ко всем последовательностям второго. После чего оба листа склеим и получим все возможные последовательности длины 3 из нулей и единиц:

1-й список →	**00**0	**10**0	**00**1	**10**1	← 2-й список
	010	**11**0	**01**1	**11**1	

Наконец (для рассматриваемого случая множества A из четырёх элементов) удвоим полученный список, для чего запишем его на другом листе бумаги, припишем 0 и 1 ко всем последовательностям первого и второго листа соответственно и склеим листы:

0000	**100**0	**001**0	**101**0	← 1-й список
0100	**110**0	**011**0	**111**0	
0001	**100**1	**001**1	**101**1	← 2-й список
0101	**110**1	**011**1	**111**1	

Наверное, читатель заметил, что процедура удвоения списков, приписывание 0 и 1, а затем склеивание «удлинённых» списков в один список — это и есть в точности процедура построения куба размерности n из куба размерности $n-1$! Сравните рис. 10 с рис. 1 и 2.

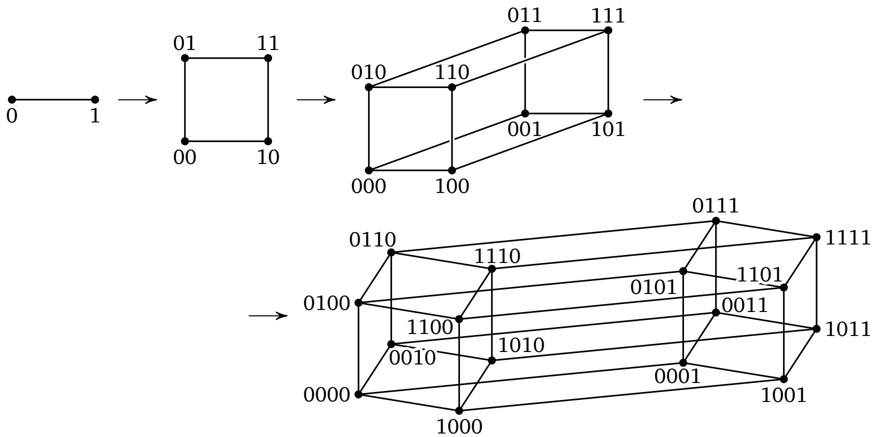


Рис. 10. Перечисление всех кодов подмножеств множества из четырёх элементов

Заодно каждая вершина n-мерного куба получает конкретные координаты — код соответствующего подмножества. Чтобы понять, какие вершины расположены на одной грани четырёхмерного куба, полезно воспользоваться рис. 6: трёхмерные кубы $XYZTX'Y'Z'T'$ и $ABCDA'B'C'D'$ — это два склеиваемых списка; две вершины этих кубов соединены ребром в том и только том случае, когда у них совпадают первые три координаты (например, если $X = 0100$, то $A = 0101$); можно также явно выписать координаты вершин каждой двумерной и трёхмерной грани (оставляем это читателю в качестве упражнения).

Остановимся ещё на одном интересном способе изображения n-мерного куба на листе бумаги. Для этого больше всего подходит бумага в линейку (или в клетку).

Заметим, что коды из нулей и единиц, которыми мы пользовались ранее, можно интерпретировать как двоичные записи натуральных чисел 1, 2, 3, …, $2^n - 1$. С них мы и начнём — это будет первый шаг построения.

Проведём оси Ox и Oy на бумаге в линейку. На оси Ox отметим точки 1, 2, 3, …, $2^n - 1$, а затем проведём горизонтальные прямые $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, …, $\lambda = n$. На этих прямых мы будем ставить «жирные» точки — бусинки — следующим образом: абсцисса любой бусинки — это одно из чисел $m = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, а её ордината — это число $r(m)$, равное числу единичек в двоичной записи числа m; $r(m)$ называется *рангом* числа m. Итак, координаты каждой бусинки равны $(m, r(m))$.

Продемонстрируем сказанное примером для $n = 4$. На оси Ox отмечено 16 чисел от 0 до 15 и проведены четыре горизонтальные прямые $\lambda = 1, 2, 3, 4$. Бусинки имеют координаты $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 2)$, $(6, 2)$, $(7, 3)$, $(8, 1)$, $(9, 2)$, $(10, 2)$, $(11, 3)$, $(12, 2)$, $(13, 3)$, $(14, 2)$, $(15, 4)$. Например, число $m = 11$ имеет двоичное разложение $11 = (1011)_2$, поэтому его ранг равен $r(11) = 3$ (три единички в двоичной записи), так что получаем бусинку $(11, 3)$ (рис. 11*а*).

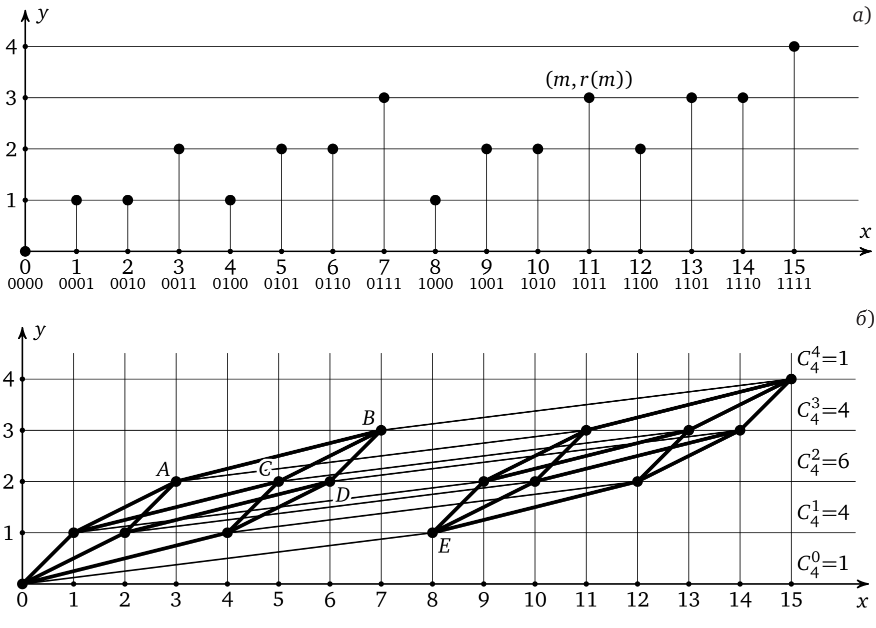


Рис. 11. Двоичное изображение четырёхмерного куба

Второй шаг построения состоит в соединении отрезками некоторых специальных пар бусинок. А именно, мы соединим две бусинки A и B отрезком, только если их абсциссы отличаются на степень двойки: $|x(A) - x(B)| = 2^k$, где $k = 0, 1, 2$ или 3, и при этом наклон проведённого отрезка положителен. Например, мы соединяем отрезком точки $A(3, 2)$ и $B(7, 3)$, поскольку $7 - 3 = 2^2$ и $3 - 2 > 0$, но не соединяем точку $C(5, 2)$ с точкой $D(6, 2)$ или точку $D(6, 2)$ с точкой $E(8, 1)$ (хотя в двух последних случаях разности абсцисс и выражаются степенями двойки:

$6-5=2^0$, $8-6=2^1$, но наклоны отрезков CD и DE неположительны: $2-2=0$, $1-2=-1$).

После того, как все возможные допустимые отрезки будут проведены, мы получим изображение n-мерного куба (на рис. 11*б* рассмотрен случай $n=4$). Почему?

Если вдуматься в приведённое только что построение, то легко видеть, что оно эквивалентно тому, с которого мы начали: как только построен куб размерности $n-1$, мы его сдвигаем вдоль следующего, n-го, измерения и получаем новую $(n-1)$-мерную грань n-мерного куба; а затем соединяем отрезками соответствующие вершины исходной и новой $(n-1)$-мерных граней. Это как раз и отвечает тому, что две вершины куба, которые мы соединяем новым отрезком, отличаются ровно в одной координате. Согласно определению двоичной записи числа, последнее как раз и означает, что разность абсцисс соединяемых точек равна какой-то степени двойки.

На рис. 11*б* жирными отрезками изображены две противоположные (параллельные) трёхмерные грани четырёхмерного куба. Заодно оказались занумерованы все его вершины: номер каждой вершины совпадает с абсциссой изображающей её бусинки на построенной диаграмме. Например, вершины A, B, C, D, E имеют номера 3, 7, 5, 6 и 8 соответственно. А кроме того, все вершины оказались ранжированы: вершина E имеет ранг 1; вершины A, C и D — ранг 2, вершина B — ранг 3; вершина с номером 15 — ранг 4.

Упражнение. Нарисуйте «двоичное изображение» пятимерного куба.

Отметим ещё одну особенность только что предложенной конструкции. Сколько вершин n-мерного куба имеет ранг k $(0<k<n)$?

В терминах «двоичного изображения» n-мерного куба (рис. 10*б*) вопрос формулируется так: сколько бусинок расположено на прямой $\lambda=k$?

Покрасим все рёбра n-мерного куба в n красок: все рёбра, исходящие из точки $(0, 0)$, покрашены в n различных цветов, а все рёбра, параллельные данному — в один и тот же цвет. Все рёбра одного и того же цвета могут мыслиться как следы вершин $(n-1)$-мерного куба при параллельном переносе из начального положения в конечное.

Чтобы определить число бусинок ранга k, мы должны попасть в них, стартуя из $(0, 0)$, вдоль рёбер построенного n-мерного куба. Сначала мы выбираем один какой-то цвет — число способов выбрать его ровно n (столько рёбер выходит из $(0, 0)$ в бусинки ранга 1); потом выбираем следующий цвет — число способов равно $(n-1)$; затем выбираем следующий цвет $(n-2)$ способами; и т. д. Всего получаем

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ путей попасть на прямую $\lambda=k$ из начала координат. Однако число способов попасть в данную конкретную бусинку ранга k равно числу перестановок из k элементов, т. е. равно $(k!)$. Следовательно, найденное перед этим число способов надо поделить на $(k!)$. Получаем, что количество бусинок ранга k равно

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=C_n^k.$$

Таким образом, «двоичное изображение» n-мерного куба на рис. 11 есть просто иная интерпретация треугольника Паскаля: число бусинок на линии $y=k$ равно биномиальному коэффициенту C_n^k.

В частности, мы автоматически получаем ещё одно доказательство формулы $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^k+\ldots+C_n^n=2^n$, которое на языке n-мерного куба формулируется так: общее число вершин куба равно сумме числа вершин (бусинок) по всем рангам от 0 до n.

То, что число бусинок ранга k (т. е. на прямой $\lambda=k$) равно C_n^k, может быть объяснено ещё и так: каждая такая бусинка имеет абсциссу, которая в двоичной записи содержит k единичек, и, следовательно, может быть проинтерпретирована как код k-подмножества в множестве из n элементов. Вот почему число бусинок ранга k — это просто количество k-подмножеств!

§ 10. *F*-многочлены многогранников. Теоремы Эйлера и Штейница о многогранниках

Естественно, что не только правильный, но и любой выпуклый многогранник M в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет порождающий многочлен $\mathscr{P}_M(x)$, определяемый формулой

$$\mathscr{P}_M(x)=F_0x^n+F_1x^{n-1}+\ldots+F_kx^{n-k}+\ldots+F_{n-1}x+F_n,$$

где F_k — число k-мерных граней многогранника M $(0\leqslant k\leqslant n)$, причём $F_n=1$.

Однако часто оказывается более удобно рассматривать другой многочлен

$$\wp_M(x)=F_nx^n+F_{n-1}x^{n-1}+\ldots+F_kx^k+\ldots+F_1x+F_0,$$

который отличается от $\mathscr{P}_M(x)$ тем, что в нём коэффициенты F_k записаны в обратном порядке: граням размерности k отвечает одночлен F_kx^k, а не F_kx^{n-k}, как в порождающем многочлене $\mathscr{P}$.

Многочлен $\wp_M(x)$ называется *F-многочленом* многогранника M (от букв F, участвующих в разложении по степеням x).

Пример. Порождающий многочлен куба — это

$$\mathscr{P}(x) = P_n(x) = (2x+1)^n,$$

а его F-многочлен —

$$\wp(x) = Q_n(x) = (x+2)^n$$

(см. § 7).

Естественно научиться выражать порождающий многочлен и F-многочлен друг через друга. Ответом служит

Теорема 4. $\mathscr{P}(x) = x^n \cdot \wp\left(\frac{1}{x}\right)$, $\wp(x) = x^n \cdot \mathscr{P}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Доказательство.

$$\mathscr{P}(x) = F_0 x^n + F_1 x^{n-1} + \ldots + F_k x^{n-k} + F_{n-1}x + F_n =$$
$$= x^n\left(\frac{F_n}{x^n} + \frac{F_{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{F_k}{x^k} + \ldots + \frac{F_1}{x} + F_0\right) = x^n \cdot \wp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Отсюда заменой $x \longleftrightarrow \frac{1}{x}$ получаем $\mathscr{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n \cdot \wp(x)$, и, следовательно,

$$\wp(x) = x^n \cdot \mathscr{P}(x).$$

Примеры вычисления многочленов (см. § 7).

1. F-многочлен n-мерного тетраэдра T^n:

$$\wp_{T^n} = x^n \cdot T_n\left(\frac{1}{x}\right) = x^n\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}\right) = \frac{(x+1)^{n+1}-1}{x}.$$

2. F-многочлен n-мерного куба K^n:

$$\wp_{K^n} = x^n \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \cdot \left(\frac{2}{x}+1\right)^n = x^n \cdot \frac{(x+2)^n}{x^n} = (x+2)^n = Q_n(x).$$

3. F-многочлен n-мерного октаэдра O^n:

$$\wp_{O^n} = x^n \cdot O_n\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \cdot \left(\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+2\right)^n - \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} + 1\right) =$$
$$= \frac{(2x+1)^n}{x} - \frac{1}{x} + x^n = \frac{x^{n+1} + P_n(x) - 1}{x}.$$

4. F-многочлен трёхмерного додекаэдра:

$$\wp_{D^3}(x) = x^3 \cdot \left(\frac{20}{x^3} + \frac{30}{x^2} + \frac{12}{x} + 1\right) = x^3 + 12x^2 + 30x + 20.$$

Определение. Набор коэффициентов $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ называется *F-вектором* n-мерного многогранника M $(F_n = 1)$.

Не всякий набор $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ является F-вектором какого-нибудь многогранника. Имеется много разных ограничений на числа $\{F_k\}$, из которых самым известным является

Обобщённая теорема Эйлера для n-мерных многогранников.

$$F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \dots + (-1)^n F_n = 1, \tag{4}$$

или (напоминаем, что $F_n = 1$)

$$F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \dots + (-1)^{n-1} F_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}. \tag{5}$$

Число $1 + (-1)^{n-1}$ называется *эйлеровой характеристикой* многогранника M. Для трёхмерного пространства ($n = 3$) получаем отсюда знаменитую теорему Эйлера для трёхмерных многогранников:

$$F_0 - F_1 + F_2 = 2$$

(т. е. эйлерова характеристика любого выпуклого трёхмерного многогранника равна 2), а для многогранников на плоскости ($n = 2$)

$$F_0 - F_1 = 0,$$

т. е. $F_0 = F_1$: число вершин многоугольника равно числу его сторон.

Формула (4) легко проверяется для n-мерного куба:

$$2^n - 2^{n-1} \cdot n + 2^{n-2} \cdot C_n^2 - 2^{n-3} \cdot C_n^3 + \dots + (-1)^p \cdot 2^{n-p} \cdot C_n^p + \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2^1 \cdot C_n^1 + (-1)^n = (2-1)^n = 1$$

и для n-мерного тетраэдра:

$$1 - (n+1) + C_{n+1}^2 - C_{n+1}^3 + \dots + (-1)^p \cdot C_{n+1}^{p+1} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-2} \cdot (n+1) + (-1)^{n+1} = (1-1)^n = 0.$$

Теорему Эйлера мы докажем[1] в § 12. Сейчас отметим только, что теорема Эйлера эквивалентна равенству $h_0 = 1$ компоненты h-вектора (см. § 11).

Для трёхмерного случая справедлива следующая

Теорема Штейница. Набор $(F_0, F_1, F_2, F_3 = 1)$ является F-вектором какого-либо выпуклого многогранника тогда и только тогда, когда он удовлетворяет теореме Эйлера ($F_0 - F_1 + F_2 = 1$) и неравенствам $4 \leqslant F_0 \leqslant \frac{2}{3} F_1$ и $4 \leqslant F_2 \leqslant \frac{2}{3} F_1$.

[1]Простое доказательство в случае $n = 3$ читатель может найти в брошюре Н. П. Долбилина «Жемчужины теории многогранников» (Библиотека «Математическое просвещение», вып. 5), М.: МЦНМО, 2012. — *Прим. ред.*

Необходимость этих неравенств очевидна: при $F_0 < 4$ многогранник становится плоским, а $3F_0 \leqslant 2F_1$ следует из того, что каждое ребро содержит по две вершины, а в каждой вершине сходится не менее трёх рёбер; аналогичное рассуждение проводится и для второй цепочки неравенств. Достаточность доказывается гораздо сложнее, и мы здесь не приводим это доказательство.

Задача описания F-векторов произвольных выпуклых многогранников остаётся нерешённой до сих пор; общие результаты в этом направлении получены только в размерности 3.

§ 11. H-многочлены многогранников

Во многих случаях бывает удобнее рассматривать не F-многочлен многогранника, а другой многочлен, получающийся из F-многочлена $\wp_M(x)$ заменой $x \mapsto x-1$:

$$H_M(x) = \wp_m(x-1).$$

Запишем $H_M(x)$ в виде $H_M(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \ldots + h_nx^n$. Из равенства

$$h_0 + h_1x + h_2x^2 + \ldots + h_kx^k + \ldots + h_nx^n = \\ = F_0 + F_1(x-1) + F_2(x-1)^2 + \ldots + F_k(x-1)^k + \ldots + F_n(x-1)^n$$

получаем

$$h_k = F_k - F_{k+1} \cdot C_{k+1}^k + F_{k+2} \cdot C_{k+2}^k - \ldots + (-1)^{n-k} \cdot F_n \cdot C_n^k = \\ = \sum_{p \geqslant k} (-1)^{p-k} \cdot F_p \cdot C_p^k. \quad (6)$$

Определение. Многочлен $H_M(x)$ называется *H-многочленом*, а набор чисел $\vec{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$ — *h-вектором* многогранника M.

Примеры.

1. H-многочлен n-мерного тетраэдра T^n:

$$H_{T^n} = \wp_{T^n}(x-1) = \frac{((x-1)+1)^n - 1}{x-1} = \frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1,$$

а h-вектор тетраэдра T^n состоит из одних единиц:

$$\vec{h}_{T^n} = (1, 1, \ldots, 1).$$

2. H-многочлен куба K^n:

$$H_{K^n}(x) = \wp_{K^n}(x-1) = ((x-1)+2)^n = (x+1)^n = \\ = 1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^{n-1}x^{n-1} + x^n;$$

h-вектор куба равен $\vec{h}_{K^n} = \left(1, n, \ldots, \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \ldots, n, 1\right)$: его координаты — это биномиальные коэффициенты из n-й строчки треугольника Паскаля.

3. H-многочлен трёхмерного додекаэдра:

$$H_{D^3} = \wp_{D^3}(x-1) = (x-1)^3 + 12(x-1)^2 + 30(x-1) + 20 = x^3 + 9x^2 + 9x + 1;$$

h-вектор додекаэдра: $\vec{h}_{D^3} = (1, 9, 9, 1)$.

4. H-многочлен трёхмерного икосаэдра:

$$H_{I^3} = \wp_{I^3}(x-1) = (x-1)^3 + 20(x-1)^2 + 30(x-1) + 12 = \\ = x^3 + 17x^2 - 7x + 1;$$

h-вектор икосаэдра: $\vec{h}_{I^3} = (1, 17, -7, 1)$.

5. H-многочлен трёхмерного октаэдра:

$$H_{O^3} = \wp_{O^3}(x-1) = (x-1)^3 + \frac{(2x-1)^3 - 1}{x-1} = x^3 + 5x^2 - x + 1;$$

h-вектор: $\vec{h}_{O^3} = (1, 5, -1, 1)$.

§ 12. Теорема Эйлера на языке *H*-многочленов и теорема Дена—Соммервиля о простых многогранниках

Мы видим из примеров (§ 10), что h-векторы тетраэдра, куба и додекаэдра имеют только положительные координаты и симметричны относительно середины, а икосаэдра и октаэдра — нет. Кроме того, заметим, что в этих примерах любой h-вектор начинается с 1 и кончается 1: $h_0 = h_n = 1$. Случайно ли это?

Оказывается, нет. Положительность координат и симметричность h-векторов в первых трёх примерах вытекает из простоты рассмотренных в них многогранников, а несимметричность h-вектора в двух последних примерах — из непростоты икосаэдра и октаэдра.

Многогранник в $\mathbb{R}^n$ называется *простым*, если число $(n-1)$-мерных граней (гиперграней), сходящихся в каждой его вершине, равно n, и *непростым* в противном случае. Если немножко пошевелить гиперграни простого многогранника, то он останется простым.

Исследуем теперь равенство $h_0 = 1$. Подставляя $k = 0$ в формулу (6) для h_k, получаем

$$h_0 = F_0 - F_1 + F_2 - \ldots + (-1)^n F_n,$$

так что равенство $h_0 = 1$ эквивалентно формуле (3) в обобщённой теореме Эйлера!

Введение H-многочленов существенно упрощает формулировку теоремы Эйлера, которая на новом языке звучит так:

Если M — выпуклый n-мерный многогранник, а $\vec{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$ — его h-вектор, то $h_0 = 1$.

Введение H-многочленов позволяет также и доказать теорему Эйлера, причём не совсем обычным образом. Она будет вытекать из следующей существенно более общей теоремы, доказанной в 1927 г. математиками Деном (он рассмотрел несколько важных случаев) и Соммервилем.

Теорема Дена—Соммервиля. Пусть M — простой выпуклый n-мерный многогранник, а $\vec{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_k, \ldots, h_{n-k}, \ldots, h_{n-1}, h_n)$ — его h-вектор. Тогда этот вектор симметричен относительно середины: $h_k = h_{n-k}$; кроме того, $h_0 = h_n = 1$.

Доказательство теоремы Дена—Соммервиля. В пространстве $\mathbb{R}^n$ введём произвольную *линейную* функцию ℓ, не постоянную ни на какой грани многогранника M размерности 1 и выше.

Каждой вершине припишем число — *индекс* этой вершины относительно функции ℓ. Будем считать, что индекс вершины равен m, если функция ℓ убывает на m рёбрах, выходящих из неё, а на остальных рёбрах, выходящих из этой вершины, возрастает. Будем тогда говорить, что m рёбер идут вниз, а остальные рёбра идут вверх.

Обозначим через $V_\ell(m)$ число вершин индекса m у многранника M.

Лемма. $V_\ell(m) = h_m$.

Иными словами, $V_\ell(m)$ не зависит от выбора линейной функции ℓ, и, более того, число вершин индекса m у многогранника M равно $(m+1)$-й координате h-вектора этого многогранника.

Доказательство леммы. В силу линейности функции ℓ, в вершине индекса m функция достигает максимума, если ℓ ограничить на какую-то грань размерности m или меньше. Каждой i-мерной грани сопоставим ту её вершину, в которой ℓ принимает максимальное значение. Получим вершину индекса $m \geqslant i$. Но из каждой такой вершины вниз выходит ровно C_m^i граней размерности i. Число i-мерных граней равно числу вершин индекса не менее i, причём вершину индекса m надо посчитать C_m^i раз. Число граней размерности i мы обозначаем через F_i. Итак,

$$F_i = \sum_{m \geqslant i} V_\ell(m) \cdot C_m^i = V_\ell(m) \cdot \sum_{m \geqslant i} C_m^i.$$

Заметим, что поскольку $H_M(x) = \wp_M(x-1)$, то $\wp_M(x) = H_M(x+1)$ и поэтому

$$F_i = \sum_{m \geqslant i} h_m \cdot C_m^i = h_m \cdot \sum_{m \geqslant i} C_m^i.$$

Сравнивая две последние формулы для F_i, получаем $V_\ell(m) = h_m$.

Значит, $V_\ell(m)$ не зависит от выбора линейной функции ℓ. Лемма доказана.

Окончание доказательства теоремы Дена-Соммервиля. Сменим знак у линейной функции ℓ. По доказанному в лемме, $V_\ell(m)$ не изменится. С другой стороны, все вершины индекса m превратятся в вершины индекса $n-m$. Значит,

$$h_m = V_\ell(m) = V_{-\ell}(n-m) = h_{n-m}.$$

Итак, $h_m = h_{n-m}$ и симметричность h-вектора доказана.

Равенство $h_0 = h_n = 1$ вытекает из того, что ровно в одной вершине многогранника M функция ℓ принимает *минимальное* значение (т. е. из этой вершины рёбра не выходят вниз, значит, $h_0 = 1$), рис. 12; и ровно в одной вершине — *максимальное* значение (в ней ровно n рёбер идут вниз, так как в самой вершине сходится n гиперграней; таким образом, $h_n = 1$). Доказательство теоремы завершено.

В качестве следствия теоремы Дена—Соммервиля дадим схему доказательства обобщённой теоремы Эйлера для произвольного выпуклого n-мерного многогранника.

Схема доказательства обобщённой теоремы Эйлера. Мы хотим доказать, что эйлерова характеристика n-мерного многогранника M равна $1 + (-1)^n$, или, что то же самое, что первая координата h-вектора многогранника M равна 1: $h_0 = 1$.

Для простого многогранника равенство $h_0 = 1$ следует из второй части теоремы Дена—Соммервиля. Пусть теперь M — непростой многогранник. Мы сейчас превратим M в другой многогранник N, который, как можно доказать, будет иметь ту же самую эйлерову характеристику, но будет уже простым. Тогда h_0 будет одинаковым для обоих

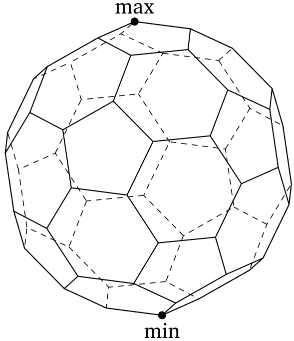


Рис. 12

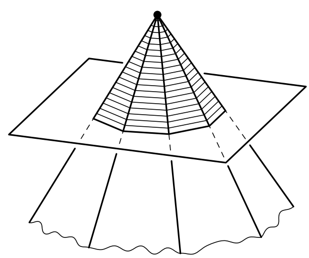


Рис. 13. Отрезание вершины трёхмерного многогранника

многогранников. А поскольку $h_0 = 1$ для N, то $h_0 = 1$ и для многогранника M, чем доказательство и завершается.

Превращение многогранника M в многогранник N состоит в следующем. Сначала отрежем от M все его вершины. Отрезание происходит так: мы проводим гиперплоскость, отделяющую эту вершину от остальных, и выкидываем всё полупространство, содержащее отрезаемую вершину (рис. 13). Из выпуклого многогранника после такой процедуры получается опять выпуклый многогранник. После того, как мы отрезали все вершины, отрежем аналогичным образом все рёбра, затем все двумерные грани, затем все трёхмерные грани, и т. д. В результате получится п р о с т о й многогранник N: в каждой его вершине будет сходиться ровно n граней.

Проверим, что при отрезании вершины (см. рис. 13) трёхмерного многогранника его эйлерова характеристика не изменяется. Пусть в вершине сходилось k рёбер (а тем самым, в ней сходилось k граней). У полученного многогранника вершин на $k-1$ больше, чем у исходного; рёбер — на k больше; граней — на 1 больше. Таким образом, если F_0, F_1 и F_2 — количества вершин, рёбер и граней исходного многогранника M, а F_0', F_1' и F_2' — количества вершин, рёбер и граней полученного многогранника N, то

$$F_0' = F_0 + k - 1, \quad F_1' = F_1 + k, \quad F_2' = F_2 + 1,$$
$$F_0' - F_1' + F_2' = F_0 + k - 1 - F_1 - k + F_2 + 1 = F_0 - F_1 + F_2.$$

Аналогично доказывается, что и при других отрезаниях эйлерова характеристика не меняется. Этим редукция $M \to N$ и завершается.

§ 13. Графы, изоморфные многомерному кубу, и их свойства

В этом параграфе мы рассмотрим многомерный куб как *граф*, т. е. как множество (V, E), состоящее из *вершин* (V) и соединяющих их *рёбер* (E). Изучаемый нами объект будет, таким образом *одномерным* — мы забудем на время о всех гранях куба, имеющих размерность больше единицы. Кроме того, мы введём понятие «похожести», или *изоморфизма*, между разными графами и, затем, для некоторых графов, на первый взгляд не похожих на граф «куб», установим изоморфизм с этим графом. Начнём с определения, которое мотивируется теорией множеств (см. § 9).

Определение. Граф «n-куб» — это множество K^n из 2^n точек («вершин»), занумерованных от 0 до $2^n - 1$, и отрезков («рёбер»), соединяющих любые две вершины A и B в том и только в том случае, когда двоичные записи номеров вершин A и B отличаются ровно на одну единичку (или на один «бит», выражаясь языком теории информации; разность этих номеров, таким образом, есть степень двойки).

Два графа, вершины которых можно занумеровать таким способом, называются *изоморфными*. Эти графы можно отождествить, сопоставив друг другу вершины с одинаковыми номерами и отрезки, соединяющие сопоставленные пары вершин каждого графа.

Примерами n-кубов для $n=1$, 2, 3, 4 служат построенные ранее отрезок, квадрат, обычный трёхмерный куб и четырёхмерный куб.

Заметим, что имеется следующее разбиение графа K^n на два подграфа, K_1^{n-1} и $K_{1'}^{n-1}$: K_1^{n-1} содержит все вершины, двоичные записи которых начинаются с 0, а $K_{1'}^{n-1}$ — с 1. Это разбиение было положено в основу стратегии построения n-мерного куба, с которого началось наше повествование (§ 1). Такое разбиение графа K^n назовём 1-*расщеплением*. Разбиение K^n на два $(n-1)$-куба можно осуществить и другим способом: фиксируем i между 1 и n и включим в первый куб все вершины, у которых на i-м месте двоичной записи стоит 0, а во второй — все вершины с 1 на i-м месте. Такое разбиение обозначим $K^n = K_i^{n-1} \cup K_{i'}^{n-1}$ и назовём i-*расщеплением*. Очевидно, что число всех возможных расщеплений равно n, поскольку $1 \leqslant i \leqslant n$, а для каждого i имеется ровно одно i-расщепление.

Ответим на такой вопрос: сколькими неэквивалентными способами можно занумеровать вершины $(n-1)$-куба? Ответ даётся следующим утверждением.

Утверждение 1. Имеется $n! \cdot 2^n$ разных способов занумеровать вершины n-куба так, чтобы каждая нумерация удовлетворяла определению n-куба.

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по n. Для $n=0$ всё очевидно; предположим, утверждение справедливо для $n-1$ и докажем его для n. Для i-расщепления куба K^n мы имеем две противоположные $(n-1)$-мерные грани, для которых справедливо предположение индукции: $(n-1)! \cdot 2^{n-1}$ способов занумеровать вершины грани K_i^{n-1} и столько же способов занумеровать их у грани $K_{i'}^{n-1}$. Поскольку число различных расщеплений равно n, получаем всего

$$n((n-1)! \cdot 2^{n-1} + (n-1)! \cdot 2^{n-1}) = n! \cdot 2^n$$

нумераций вершин куба K^n, что и требовалось доказать.

Замечание. Мы видим, что число различных нумераций вершин n-куба, $n! \cdot 2^n$, значительно меньше, чем число всех возможных (произвольных, не подчинённых никаким ограничениям) способов занумеровать 2^n вершин, которое равно $(2^n)!$.

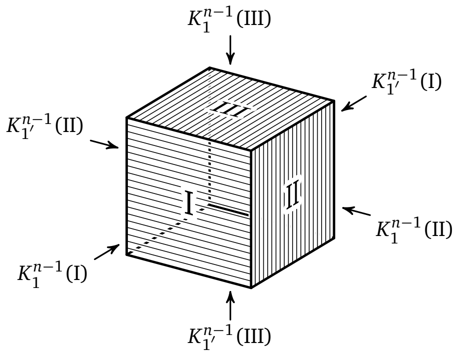


Рис. 14. Различные способы нумерации вершин n-куба

Утверждение 2. Пусть A и B — две соседние вершины n-куба. Тогда все соседи вершины A соединены со всеми соседями вершины B взаимно однозначным образом.

Доказательство. Так как A и B — соседи, т. е. соединены ребром AB, то их двоичные коды отличаются в одном, допустим в i-м, знаке. Рассмотрим i-расщепление куба K^n на две $(n-1)$-мерные грани, K_i^{n-1} и $K_{i'}^{n-1}$. Эти грани соединены своими вершинами следующим образом: вершина X (сосед A) соединена ребром с вершиной Y (соседом B), если они различаются только в i-й координате (например, если код X содержит 1 на i-м месте, а код Y содержит 0 на i-м месте). Очевидно, что возникшее соединение граней взаимно однозначно. Тем самым, утверждение 2 доказано.

Определение. *Циклом* на кубе K^n называется замкнутый путь вдоль рёбер этого куба. Длиной цикла называется число рёбер в этом цикле.

Утверждение 3. Все циклы на n-кубе имеют чётную длину.

Доказательство основано на следующем простом наблюдении. Назовём вершину с номером m *чётной*, если её ранг $r(m)$ — чётное число, и *нечётной* в противном случае. (Напомним, что ранг $r(m)$ — это число единичек в двоичной записи числа m.) Наблюдение состоит в том, что соседние вершины имеют разную чётность.

Рассмотрим теперь цикл $A_1A_2\ldots A_k$ на кубе K^n; $A_k = A_1$. При движении вдоль рёбер этого цикла от вершины A_i к вершине A_{i+1}, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, чётность вершин каждый раз меняется на противоположную. Поскольку $A_1 = A_k$, то число чётных вершин в цикле равно числу нечётных вершин, так что длина цикла k — чётное число, что и требовалось.

Определение. *Диаметром* произвольного графа Г называется наибольшее из расстояний (число проходимых рёбер) между любыми двумя вершинами этого графа.

Утверждение 4. n-куб является связным графом диаметра n.

Это означает, что из любой вершины можно попасть в любую другую вершину, двигаясь по рёбрам графа.

Доказательство. Если A и B — какие-то две вершины куба K^n, то всегда найдётся путь из A в B вдоль рёбер куба; таким образом, граф K^n связный. Один из путей из A в B состоит в том, что мы превращаем двоичную запись вершины A в двоичную запись вершины B, меняя на каждом шаге какую-то одну координату на противоположную (т. е. 0 на 1, а 1 на 0). Это обеспечивает длину между A и B, не превышающую n (поскольку мы изменяем, в конечном счёте, не более n координат). Однако длина пути из $(0, 0, \ldots, 0)$ в $(1, 1, \ldots, 1)$ равна в точности n, и утверждение 4 доказано: диаметр куба K^n равен n.

Утверждения 1—4 устанавливают простейшие свойства n-куба как графа. Важный вопрос состоит в том, как распознать, является ли данный конкретный граф n-кубом или нет; или, иными словами, как охарактеризовать n-куб с помощью нескольких простых правил?

Например, рассмотрим квадрат 4×4, вырезанный из листа бумаги в клетку, свёрнутый затем в цилиндр (склеиванием левой и правой стороны), а после этого в тор (склеиванием верхнего и нижнего края цилиндра). Является ли полученный граф на торе каким-нибудь n-кубом, т. е. можно ли возникшие 16 вершин занумеровать числами от 0 до 15 так, чтобы этот граф удовлетворял определению n-куба? Ясно,

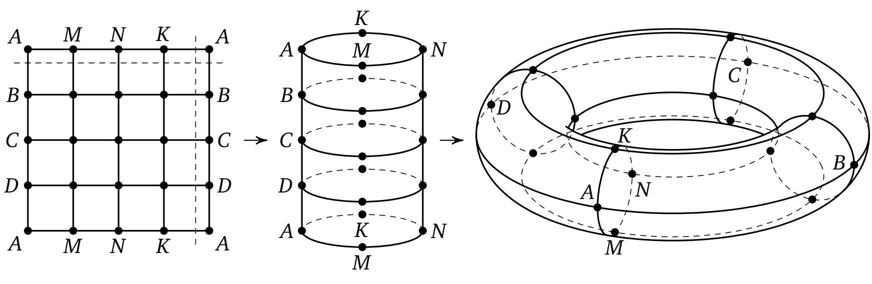


Рис. 15. Является ли тороидальная решётка 4×4 n-кубом для какого-нибудь n?

что без склеивания квадрата в тор решётка 4×4 не может быть n-кубом, поскольку все вершины n-куба должны иметь одну и ту же степень (число выходящих из вершин рёбер).

Утверждение 5. Граф $G = (V, E)$ является n-кубом тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

1) множество V состоит из 2^n вершин;

2) каждая вершина имеет степень n;

3) граф G связен;

4) любые две соседние (т. е. соединённые ребром) вершины A и B таковы, что все соседи A соединены рёбрами со всеми соседями B взаимно однозначным образом (т. е. вершины A и B удовлетворяют утверждению 2).

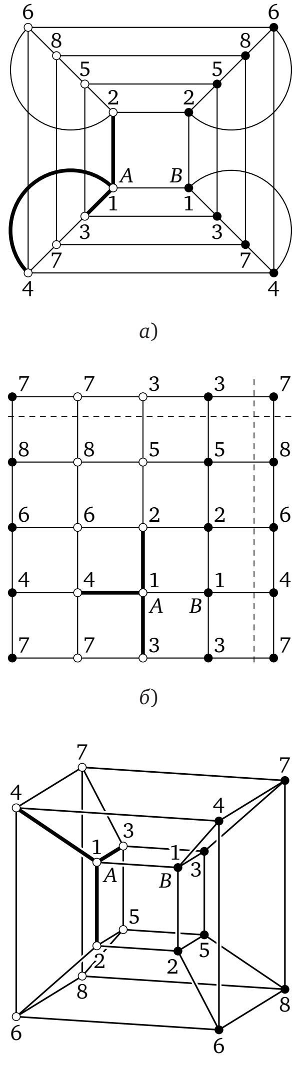


Рис. 16. Расщепление графа G на два симметричных подграфа: белый и чёрный

Доказательство. Необходимость. Если $G = K^n$ (т. е. G — n-куб), то свойства 1—4 выполнены (это вытекает из предыдущих утверждений).

Достаточность. Пусть условия 1—4 выполнены; докажем, что $G = K^n$. Доказывать будем индукцией по n. Для $n = 1$ имеем отрезок, так что $G = K^1$. Допустим, что утверждение справедливо для $n - 1$, т. е. что любой граф G с 2^{n-1} вершинами, удовлетворяющий условиям 1—4, является $(n-1)$-кубом K^{n-1}.

Докажем утверждение для n (шаг индукции). Доказательство состоит в расщеплении графа G на два подграфа, каждый из которых имеет одни и те же свойства для $n - 1$.

Рассмотрим две произвольные соседние вершины A и B графа G. Закрасим A в белый, а B — в чёрный цвет. Закрасим всех соседей A (кроме соседа B) в белый цвет, а всех соседей B (кроме соседа A) в чёрный цвет. По свойству 4, полученные белые точки взаимно однозначно соединены рёбрами с полученными чёрными точками. Продолжим этот процесс далее, пока не исчерпаем все рёбра графа G.

Покажем работу этого процесса на примерах вложенной системы четырёх квадратов с диагональными соединениями (рис. 16*а*), тороидальной решётки 4×4 (*б*), и 4-куба (*в*).

Итак, A — белая вершина, B — чёрная вершина, соединённая с A ребром. Занумеруем A и B числом 1. У A есть четыре соседних вершины, одна из которых B. Остальные три вершины, соседние с A, закрасим в белый цвет и занумеруем числами 2, 3, 4. Закрасим три соседние вершины B в чёрный цвет и занумеруем их также числами 2, 3, 4 так, чтобы они были соседями белых вершин 2, 3, 4 соответственно. Это делается однозначным образом. Затем берём белую вершину 2: она имеет четыре соседних вершины, две из которых уже закрашены — это чёрная 2 и белая 1. Оставшиеся две вершины закрасим в белый цвет и назовём их 5 и 6. То же самое проделаем с чёрной вершиной 2 — две её свободные (незакрашенные) вершины закрасим чёрным, при этом соседа белой вершины 5 назовём 5, а белой вершины 6 — 6. (Заметим, что в случае тора на рис. 16*б*, как только вершина справа от чёрной 2 закрашена в чёрный цвет и обозначена 6, так сразу вершину слева от белой 6 следует закрасить в чёрный цвет и тоже обозначить 6. Граничные точки на противоположных сторонах квадрата повторяются дважды под одинаковыми номерами!) После этого переходим к белой вершине 3 — у неё три соседа уже закрашены и занумерованы (это белые вершины 1 и 5 и чёрная вершина 3), так что оставшуюся соседнюю вершину красим в белый цвет и называем 7. А затем то же самое делаем с чёрной вершиной 3 — красим оставшегося её (четвёртого) соседа в чёрный цвет и даём ему номер 7. (Для тора получим сразу четыре копии чёрной вершины 7 — это вершины квадрата 4×4, которые при склеивании превращаются в одну чёрную вершину 7). Потом переходим к белой вершине 5 (белую вершину 4 пропускаем — все её соседи уже закрашены и пронумерованы), и в результате возникает белая вершина 8 и её чёрный двойник 8. Итак, все вершины графа теперь закрашены и пронумерованы от 1 до 8: они распадаются на два множества — белое и чёрное. Как белое, так и чёрное множество изоморфны (по индукции) 3-кубу, так что все графы на рис. 16 изоморфны 4-кубу (для случая рис. 16*в* это очевидно, в то время как для остальных двух случаев вначале это совершенно неясно).

Продолжим доказательство индукционного шага. После описанного процесса раскраски вершин графа G в два цвета мы получаем следующее.

а) Во-первых, каждая вершина v графа G закрашена. Это следует из связности графа G (свойство 3), так что всегда найдётся путь вдоль рёбер G, из вершины A (или B) в вершину v.

б) Ровно половина вершин графа G — белые, а вторая половина — чёрные. Это следует из процесса раскраски и свойства 4.

в) Все белые (чёрные) вершины образуют связный граф. Действительно, любая белая (чёрная) вершина соединена с исходной белой вершиной A (с чёрной вершиной B соответственно) — по построению раскраски вершин.

г) Рассмотрим два подграфа, G_1 и G_2, получающиеся из графа G выкидыванием всех бело-чёрных рёбер (т. е. рёбер, один конец которых белый, а другой чёрный): G_1 — белый граф, G_2 — чёрный.

Поскольку при этом каждая вершина графа G теряет ровно одно ребро, степень каждой вершины становится равной $n-1$. Тогда свойство 4 остаётся в силе для каждого из подграфов G_1 и G_2.

д) В силу свойства 4 и конструкции раскраски вершин графа G две вершины графа G_1 соединены ребром тогда и только тогда, когда две вершины графа G_2 с теми же номерами соединены ребром.

По предположению индукции каждый из графов G_1 и G_2 является $(n-1)$-кубом. Их вершины поэтому можно закодировать единицами и нулями стандартным (и одинаковым для G_1 и G_2) способом.

Приписав теперь 0 ко всем кодам длины $n-1$ вершин графа G_1 в качестве первой двоичной координаты и 1 ко всем кодам длины $n-1$ вершин графа G_2, мы получим двоичные коды длины n всех вершин графа G. Таким образом, граф G оказывается изоморфен n-кубу K^n, и шаг индукции завершён.

§ 14. Тороидальные решётки как графы n-кубов

Мы уже видели, что двумерная тороидальная решётка 4×4 является графом четырёхмерного куба (т. е. 4-кубом). Это следует из рис. 16*б*, изоморфного рис. 16*в* (см. доказательство утверждения 5).

Рассмотрим трёхмерную тороидальную решётку $4 \times 4 \times 4$ — это куб $4 \times 4 \times 4$, противоположные грани которого попарно отождествлены с помощью параллельных переносов (т. е. склеены подобно склеиванию тора из квадрата 4×4). Эта решётка удовлетворяет условию утверждения 5: число вершин в ней равно $4^3 = 2^6$, степень каждой вершины равна 6, граф связен, и (очевидным образом) выполняется свойство 4. Следовательно, рассматриваемая трёхмерная решётка изоморфна шестимерному кубу K^6.

Точно так же четырёхмерная решётка $4 \times 4 \times 4 \times 4$, полученная склеиванием противоположных граней четырёхмерного куба с ребром 4, даёт $4^4 = 2^8$ вершин, степень каждой из которых равна $2 \cdot 4 = 8$. Согласно утверждению 5, эта решётка изоморфна восьмимерному кубу K^8.

В общем случае n-мерная тороидальная решётка $4 \times 4 \times \ldots \times 4$ (n четвёрок) представляет собой граф $2n$-куба K^{2n}.

§ 15. Электрическое сопротивление n-мерного куба

Широко известна задача об электрическом сопротивлении проволочного куба, каждое ребро которого имеет сопротивление 1 Ом; сопротивление меряется между двумя противоположными вершинами куба A и B. На рис. 17 приведены электрические схемы, изоморфные квадрату, трёхмерному кубу и четырёхмерному кубу (последняя схема изображена на рис. 16*а*; в § 13 доказано, что она изоморфна четырёхмерному кубу).

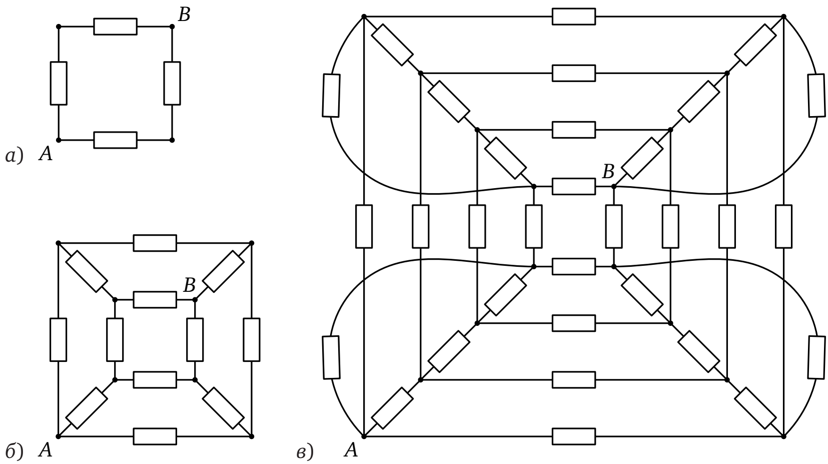


Рис. 17. Электрическое сопротивление *а*) квадрата $R=1$, *б*) куба $R=5/6$, *в*) четырёхмерного куба (тессеракта) $R=2/3$

Идея решения этой задачи состоит в том, что вершины одного и того же ранга (т. е. с одинаковым числом единичек в двоичном представлении) будут иметь один и тот же потенциал (измеренный в вольтах) — это следует из симметрии конфигурации сопротивлений. Напомним, что сопротивление последовательно соединённых проводни-

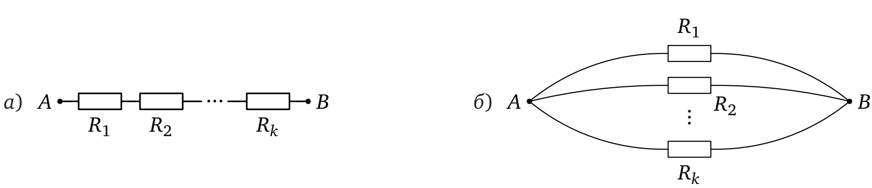
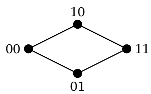
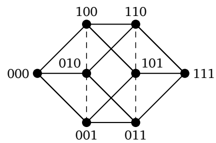
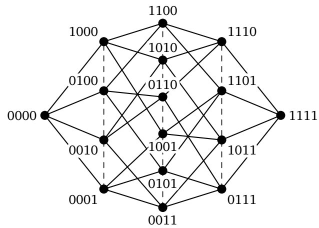
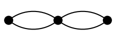
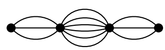
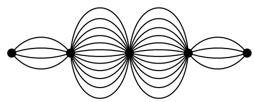


Рис. 18. *а*) Последовательное и *б*) параллельное соединение

ков складывается, а сопротивление параллельно соединённых проводников вычисляется по формуле $R = 1\Big/\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_k}\right)$ (рис. 18). Вычисление ответов для сопротивлений, указанных на рис. 17, видно из таблицы 6.

Таблица 6

<table>
<tr><td>Ранг вершины</td><td>0 1 2</td><td>0 1 2 3</td><td>0 1 2 3 4</td></tr>
<tr><td>Куб</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Число рёбер</td><td>2 + 2 = 4</td><td>3 + 6 + 3 = 12</td><td>4 + 12 + 12 + 4 = 32</td></tr>
<tr><td>Электрическая схема</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Сопротивления</td><td>$R_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$</td><td>$R_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$</td><td>$R_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$</td></tr>
</table>

Для n-мерного куба получаем следующую таблицу:

Ранг вершины	0	1	2	… $k-1$	k	… $n-1$	n	
Число рёбер	n	$+\, n(n-1) +$	…	$+\,(n-k)\cdot C_n^k +$	…	$+$	n	$= n\cdot 2^{n-1}$
Сопротивление	$\frac{1}{n}$	$+\, \frac{1}{n(n-1)} +$	…	$+\, \frac{1}{(n-k)\cdot C_n^k} +$	…	$+$	$\frac{1}{n}$	

Таким образом, справедлива

Теорема 1.

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)C_n^k}. \tag{7}$$

Доказательство. Вершины одного ранга эквипотенциальны: напряжение, измеренное в каждой такой вершине, одно и то же. Поэтому надо найти общее число рёбер, соединяющих вершины двух соседних рангов (см. строку «Электрическая схема» в таблице 6).

Число вершин ранга k равно C_n^k. Вершина ранга $k+1$ отличается от вершины ранга k тем, что в её двоичной записи на одну единичку больше, чем в двоичной записи вершины ранга k, и стоит эта единичка на месте одного из $n-k$ нулей в двоичной записи вершины ранга k. Поэтому каждая вершина ранга k соединена с $(n-k)$ вершинами ранга $k+1$. Таким образом, всего получается $(n-k)C_n^k$ рёбер, соединяющих вершины рангов k и $k+1$. Так как они представляют сопротивления в 1 Ом, соединённые параллельно, их общее сопротивление равно $\dfrac{1}{(n-k)C_n^k}$. После этого остаётся сложить все полученные сопротивления (поскольку они соединены последовательно) и получить ответ — формулу (7).

Замечание. Числа $(n-k)C_n^k$ можно получить так. Возьмём многочлен для числа вершин n-куба:

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n+1} + \ldots + C_n^k x^{n-k} + \ldots + C_n^{n+1} x + C_n^n$$

и продифференцируем его по x:

$$n(x+1)^{n-1} = \\ = nC_n^0 x^{n-1} + (n-1)C_n^1 x^{n-2} + \ldots + (n-k)C_n^k x^{n-k-1} + \ldots + 1 \cdot C_n^{n-1}.$$

Полученный многочлен можно интерпретировать как «многочлен числа рёбер у n-куба». Сумма обратных величин к этим коэффициентам и есть сопротивление проволочного n-куба. Оказывается, тот же ответ можно получить прямо из треугольника Паскаля.

Теорема 2. Электрическое сопротивление n-куба между его противоположными вершинами A и B в n раз меньше суммы обратных величин $(n-1)$-й строчки треугольника Паскаля:

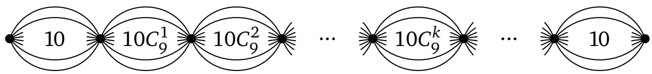
$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k}. \tag{8}$$

Доказательство легко следует из формулы (7). Преобразуем промежуточный знаменатель:

$$(n-k)C_n^k = (n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} = n\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = nC_{n-1}^k.$$

После этого в суммировании по индексу k обратных величин в формуле (7) можно вынести $\frac{1}{n}$ за скобки и тем самым получить формулу (8).

З а м е ч а н и е. Таким образом, строение электрической цепи, эквивалентной n-кубу, состоит в умножении $(n-1)$-й строчки треугольника Паскаля на n: по столько проводников сопротивлением 1 Ом надо соединять параллельно между двумя соседними узлами. Например, сопротивление 10-мерного куба (между противоположными вершинами) считается так:



$$R_{10} = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{84} + \frac{1}{126}\right) \cdot 2 = \frac{73}{315}$$

(множитель 2 появляется из-за симметрии девятой строчки треугольника Паскаля).

Следующая теорема позволяет находить сопротивление n-мерного куба R_n, если уже вычислено сопротивление $(n-1)$-мерного куба R_{n-1}.

Теорема 3. Справедливо следующее реккурентное соотношение:

$$R_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}R_{n-1}. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о[1]. Мы применим исходную формулу (7) к R_n (левая часть равенства (9)) и найденную в теореме 2 формулу (8) к R_{n-1} (правая часть равенства (9)), после чего сравним полученные результаты.

Начнём с левой части. По формуле (7),

$$R_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-k)C_n^k}. \tag{α}$$

Заменим $n-k$ на k:

$$R_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{kC_n^k};$$

но так как $C_n^{n-k} = C_n^k$, получаем эквивалентное равенство

$$R_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{kC_n^k}. \tag{β}$$

[1]Придумано Х. Гаухманом (H. Gauchman), США.

А теперь маленький трюк: найдём R_n как полусумму правых частей равенств (α) и (β)! Получим:

$$R_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(n-k)C_n^k} + \frac{1}{kC_n^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{k(n-k)C_n^k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-k}\frac{nk!(n-k)!}{k(n-k)n!} =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)!(n-k-1)!}{(n-1)(n-2)!} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{C_{n-2}^{k-1}}.$$

Заменяя в итоговой сумме $k-1$ на k, мы имеем:

$$R_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{C_{n-2}^{k}}.$$

Но по формуле (8)

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{C_{n-2}^{k}} = R_{n-1},$$

так что окончательно получаем формулу (9):

$$R_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}R_{n-1}.$$

Теорема 3 доказана.

Замкнутую формулу для R_n, не использующую суммирования, получить сложно. Однако интересно исследовать поведение сопротивления n-мерного куба при больших n. Оказывается, R_n равно примерно $\frac{2}{n}$ при $n \to \infty$.

Теорема 4. Последовательность $n \cdot R_n$ — убывающая, причём существует предел

$$\lim_{n\to\infty} nR_n = 2,$$

т. е.

$$R_n \sim \frac{2}{n}. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим $x_n = n \cdot R_n$. Используя формулу (9), выразим x_n через x_{n-1}:

$$nR_n = 1 + \frac{n}{2}R_{n-1} = 1 + \frac{n}{2(n-1)}(n-1)R_{n-1},$$

$$\boxed{x_n = \frac{n}{2(n-1)}x_{n-1} + 1.} \tag{11}$$

(А) Докажем, что если $n \geqslant 6$, то

$$x_n > \frac{2(n-1)}{n-2}. \tag{12}$$

Индукция по n:

$$x_5 = 5R_5 = 5\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}R_4\right) = 5\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = 5 \cdot \frac{8}{15} = \frac{8}{3} = \frac{2(5-1)}{5-2},$$

$$x_6 = 6R_6 = 6\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}R_5\right) = 6\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15}\right) = 6 \cdot \frac{13}{30} = \frac{13}{5} > \frac{2 \cdot 5}{4} = \frac{2(6-1)}{6-2},$$

так что неравенство справедливо для $n = 6$. Пусть неравенство верно для $n-1$, т. е. $x_{n-1} > \dfrac{2(n-2)}{n-3}$. Докажем его для n:

$$x_n > \frac{n}{2(n-1)} \cdot \frac{2(n-2)}{n-3} + 1 = \frac{2n^2 - 6n + 3}{n^2 - 4n + 3} > \frac{2(n-1)}{n-2},$$

поскольку

$$\frac{2n^2 - 6n + 3}{n^2 - 4n + 3} - \frac{2(n-1)}{n-2} = \frac{n}{(n^2 - 4n + 3)(n-2)} > 0.$$

Следовательно, неравенство (12) справедливо при всех n.

(Б) То, что последовательность $\{x_n\}$ убывающая, вытекает из неравенства $x_n - x_{n-1} < 0$:

$$x_n - x_{n-1} = \left(\frac{n}{2(n-1)} - 1\right)x_{n-1} + 1 =$$
$$= 1 - \frac{n-2}{2(n-1)}x_{n-1} = \frac{n-2}{2(n-1)}\left(\frac{2(n-1)}{n-2} - x_n\right) < 0$$

(выражение в скобках отрицательно в силу пункта (А)).

(В) Последовательность $\{x_n\}$ убывающая и положительная, следовательно, по теореме Вейерштрасса, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. А тогда из формулы (11) получаем $c = \dfrac{c}{2} + 1$, откуда $c = 2$. Итак, действительно $\lim\limits_{n\to\infty} nR_n = 2$ и $R_n \sim \dfrac{2}{n}$, что и требовалось.

Из теорем 4 и 2 вытекает, что сумма обратных величин в строчке, очень далёкой от вершины треугольника Паскаля, за исключением двух единичек по краям, равна примерно нулю — факт, интуитивно очевидный и довольно просто доказываемый независимо от наших предыдущих выкладок (докажите его сами!). Если сначала доказать, что для n-й строчки треугольника Паскаля

$$1 + \frac{1}{C_{n-1}^1} + \frac{1}{C_{n-1}^2} + \frac{1}{C_{n-1}^3} + \ldots + \frac{1}{C_{n-1}^{n-2}} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2, \tag{13}$$

то из формулы (8) будет сразу следовать теорема 4. В нашем изложении мы избрали более сложное доказательство теоремы 4 — из рекуррентного соотношения $R_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}R_{n-1}$, чтобы прийти к той же самой асимптотической формуле (10) независимо от рассмотрения треугольника Паскаля.

§ 16. Два замечательных равенства, вытекающих из формулы электрического сопротивления *n*-мерного куба

I. Рассмотрим следующие удивительные, но легко проверяемые (например, с помощью калькулятора или даже вручную) равенства

$$\frac{1}{6\cdot 1}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 15}+\frac{1}{3\cdot 20}+\frac{1}{2\cdot 15}+\frac{1}{1\cdot 6}= \frac{1}{6\cdot 1}+\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{2\cdot 16}+\frac{1}{1\cdot 32};$$

$$\frac{1}{7\cdot 1}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 21}+\frac{1}{4\cdot 35}+\frac{1}{3\cdot 35}+\frac{1}{2\cdot 21}+\frac{1}{1\cdot 7}= \frac{1}{7\cdot 1}+\frac{1}{6\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{3\cdot 16}+\frac{1}{2\cdot 32}+\frac{1}{1\cdot 64};$$

$$\frac{1}{8\cdot 1}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{6\cdot 28}+\frac{1}{5\cdot 56}+\frac{1}{4\cdot 70}+\frac{1}{3\cdot 56}+\frac{1}{2\cdot 28}+\frac{1}{1\cdot 8}= \frac{1}{8\cdot 1}+\frac{1}{7\cdot 2}+\frac{1}{6\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 16}+\frac{1}{3\cdot 32}+\frac{1}{2\cdot 64}+\frac{1}{1\cdot 128};$$

Все они единообразно записываются следующим образом:

Теорема 5.

$$\frac{1}{nC_n^0}+\frac{1}{(n-1)C_n^1}+\ldots+\frac{1}{(n-k)C_n^k}+\ldots+\frac{1}{2\cdot C_n^{n-2}}+\frac{1}{1\cdot C_n^{n-1}}= \frac{1}{n\cdot 2^0}+\frac{1}{(n-1)\cdot 2^1}+\ldots+\frac{1}{(n-k)\cdot 2^k}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 2^{n-2}}+\frac{1}{1\cdot 2^{n-1}}. \quad (14)$$

Формула (14) замечательна тем, что в левой её части все вторые множители каждого знаменателя — последовательные числа n-й строчки треугольника Паскаля (кроме последней единицы), а в правой части все вторые множители — последовательные степени 2, в то время как первые множители в обеих частях одинаковы — это убывающая последовательность чисел от n до 1, при этом число слагаемых справа и слева одинаково.

Читатель уже, наверное, заметил, что левая часть (14) — это сопротивление R_n n-мерного куба (см. § 15). Если формула (14) верна, то и правая её часть должна измерять электрическое сопротивление того же n-мерного куба (и тогда схема таблицы 6 может быть заменена на аналогичную схему, в которой на k-м месте вместо $(n-k)\cdot C_n^k$ единичных сопротивлений будет соединено параллельно $(n-k)\cdot 2^k$ таких же сопротивлений.

Эта идея наводит на мысль, что правую часть (14) надо сопоставить с формулами (8) или (9). Сопоставление с (8) приводит к такому равенству (которое не менее удивительно, чем (14)).

Теорема 5′.

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{C_{n-1}^0}+\frac{1}{C_{n-1}^1}+\frac{1}{C_{n-1}^2}+\ldots+\frac{1}{C_{n-1}^k}+\ldots+\frac{1}{C_{n-1}^{n-2}}+\frac{1}{C_{n-1}^{n-1}}\right)= \\ =\frac{1}{n\cdot 2^0}+\frac{1}{(n-1)\cdot 2^1}+\frac{1}{(n-2)\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{(n-k)\cdot 2^k}+\ldots \\ \ldots+\frac{1}{2\cdot 2^{n-2}}+\frac{1}{1\cdot 2^{n-1}}. \quad (15)$$

Однако, если попытаться получить для правой части (14) (или (15)) формулу (9), это неожиданно легко приведёт к успеху, а заодно будут доказаны одновременно обе теоремы 5 и 5′.

Доказательство теорем 5 и 5′. Достаточно доказать только (14), поскольку левые части (14) и (15) совпадают (согласно теореме 2). Положим

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)2^k}.$$

Докажем, что

$$S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{2}S_{n-1}.$$

Так как $R_n=S_n$ при начальных значениях n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7)$, то $R_n=S_n$ при вообще всех n, чем и завершается доказательство (14), т. е. теорем 5 и 5′. Заменим k на $n-k$ в определении S_n. Тогда

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^{n-k}}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k}{k}+\frac{2^n}{n}\right)\right)= \\ =\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k2^{(n-1)-k}}+\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{2}S_{n-1}+\frac{1}{n}.$$

Итак, всё доказано: обе части равенства (14) удовлетворяют одному и тому же реккурентному соотношению с одинаковыми начальными условиями, так что они обязаны совпадать[1].

[1]Идея свести обе части (14) к решению одного и того же рекуррентного соотношения (9) также принадлежит Х. Гаухману.

II. Второе, не менее поразительное, равенство замечательно тем, что биномиальные коэффициенты C_n^k «перепрыгивают» из знаменателя левой части в числитель правой.

Теорема 6.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot C_n^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k \text{ нечётное}} \frac{C_n^k}{k}, \tag{16}$$

где в левой части суммирование ведётся по всем k от 1 до n, а в правой — только по нечётным k в тех же пределах.

Примеры.

1) $$\frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{1}{16}\left(5 + \frac{10}{3} + \frac{1}{5}\right) \ \left(= \frac{8}{15}\right).$$

2) $$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 21} + \frac{1}{3 \cdot 35} + \frac{1}{4 \cdot 35} + \frac{1}{5 \cdot 21} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 1} = \\ = \frac{1}{64}\left(7 + \frac{35}{3} + \frac{21}{5} + \frac{1}{7}\right) \ \left(= \frac{151}{420}\right).$$

Доказательство. Левая часть (16) — не что иное, как сопротивление n-мерного куба:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k \cdot C_n^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \cdot C_n^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k) \cdot C_n^k}.$$

По теореме 5

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)C_n^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{n-k}}{(n-k)2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{n-k}}{n-k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}.$$

(в последнем равенстве сделана замена $n-k$ на k).

Итак, осталось доказать, что

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k \text{ нечётное}} \frac{C_n^k}{k}. \tag{17}$$

Проинтегрируем по t от 0 до 2 обе части суммы геометрической прогрессии $1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1} = \frac{t^n - 1}{t - 1}$. Так как

$$\int_0^2 t^{k-1}\, dt = \left.\frac{t^k}{k}\right|_0^2 = \frac{2^k}{k},$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = \int_0^2 \frac{t^n - 1}{t - 1}\, dt.$$

Перейдём к переменной $x = t - 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)^n - 1}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{x^k}{k}\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot C_n^k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k} \cdot C_n^k = 2 \cdot \sum_{k\ \text{нечётное}} \frac{C_n^k}{k},$$

где в самой последней сумме суммирование ведется по нечётным k, откуда, после деления обеих частей на 2^n, получаем равенство (17). Теорема 6 доказана.

§ 17. Объём корки n-мерного «арбуза»

До сих пор мы исследовали комбинаторную структуру n-мерного куба. В этом параграфе мы определим, как измерять расстояния между точками многомерного пространства и определять объёмы в разных размерностях. Но что важнее, разовьём немного «n-мерную интуицию».

Прежде всего введём прямоугольную систему координат в n-мерном пространстве: проведём через точку O (начало координат) n взаимно перпендикулярных осей с делениями на них (т. е. числовых прямых) и из произвольной точки пространства опустим n перпендикуляров на эти оси. Полученные n проекций будут координатами этой точки: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Расстояние между двумя точками X и Y определяется по формуле (эквивалентной n-мерной евклидовой теореме Пифагора)

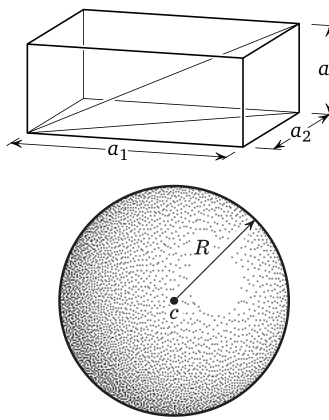


Рис. 19. Параллелепипед и шар

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \qquad (18)$$

Формула (18) задаёт *евклидову метрику* в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Прямоугольный n-мерный параллелепипед с рёбрами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определяется как фигура (множество точек) в $\mathbb{R}^n$, задаваемая в некоторой системе координат неравенствами

$$0 \leqslant x_1 \leqslant a_1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant a_2, \quad \ldots, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant a_n;$$

этот параллелепипед будет кубом, если $a_1 = \ldots = a_n$. Введём также ещё одну простейшую n-мерную фигуру — шар с центром в точке $C = (c_1, \ldots, c_n)$ радиуса R. Он определяется как множество точек $\mathbb{R}^n$, удалённых не далее чем на расстояние R от точки C:

$$\sqrt{(x_1 - c_1)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2} \leqslant R. \qquad (19)$$

Поверхность этого шара — $(n-1)$-мерная фигура в $\mathbb{R}^n$ — называется $(n-1)$-мерной *сферой* и задаётся равенством

$$\sqrt{(x_1 - c_1)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2} = R. \qquad (20)$$

Сфера радиуса R — это множество всех точек пространства, удалённых от одной точки — центра сферы — на одно и то же расстояние R.

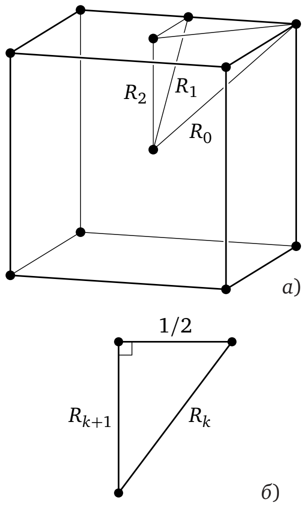


Рис. 20. Радиусы сфер, касающихся всех k-мерных граней единичного куба

Для развития интуиции в размерности $n > 3$ следует всего лишь включить воображение и подкрепить его нехитрыми вычислениями. Например, длина наибольшей (внутренней, невидимой) диагонали параллелепипеда равна $d_n = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$, и это равенство легко получить, переходя от двумерной грани к трёхмерной, затем к четырёхмерной, и так далее, используя на каждом шаге теорему Пифагора (рис. 20):

$d_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ (диагональ прямоугольника);

$d_3 = \sqrt{d_1^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (диагональ параллелепипеда);

$d_4 = \sqrt{d_3^2 + a_4^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$ (диагональ четырёхмерного параллелепипеда)

и т. д. Длина диагонали n-мерного единичного куба ($a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$) равна $\sqrt{n} = \sqrt{1^2 + \ldots + 1^2}$, а n-мерного куба с ребром a — $a\sqrt{n}$.

Упражнение. В каких размерностях длина диагонали единичного n-мерного куба — целое число? Рациональное число?

Ответ. В обоих случаях только при n — полном квадрате.

Вся «школьная» геометрия почти дословно переносится на n-мерный случай. Например, сфера радиуса $R_{n-1} = \dfrac{1}{2}$ с центром в центре единичного n-мерного куба касается всех его $(n-1)$-мерных граней в их центрах, потому является *вписанной*, а *описанная* сфера с тем же центром, содержащая все вершины единичного куба, имеет радиус $R_0 = \frac{\sqrt{n}}{2}$. Мы видим, что число R_{n-1} одно и то же в любой размерности (равное $\frac{1}{2}$), а $R_0 \to \infty$ при увеличении размерности до бесконечности. Найдём, чему равен радиус R_k сферы с центром в центре единичного куба, касающийся всех его k-мерных граней.

Посмотрим на рис. 20*а*, где $n = 3$: $R_2 = \frac{1}{2}$, $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $R_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Рассуждая по аналогии, можно предположить, что для n-мерного куба формула будет такой:

$$R_k = \frac{\sqrt{n-k}}{2}.$$

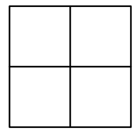
Это равенство и в самом деле верно и его легко получить индукцией по k, двигаясь от размерности $k = n-1$ (грани) к размерности $k = 0$ (вершины): если уже известно, что $R_{k+1} = \frac{\sqrt{n-(k+1)}}{2}$, то по теореме Пифагора

$$R_k = \sqrt{R_{k+1}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{n-(k+1)}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{n-k}}{2}$$

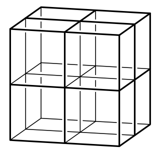
(рис. 20*б*).

Мы не будем здесь демонстрировать других, более сложных, примеров применения формулы расстояния (см. раздел «Задачи»), а перейдём сразу к понятию «объём».

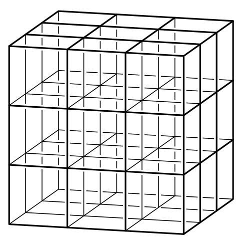
Объём n-мерного куба с ребром $a = 1$ равен 1, с ребром $a = 2$ равен 2^n (поскольку он разбивается n гиперплоскостями, проходящими через центр куба параллельно его граням, на 2^n единичных кубов), с ребром $a = 3$ равен 3^n (по аналогичной причине), и вообще, объём n-мерного куба с ребром a равен $v_n = a^n$ (рис. 21).



$a = 2$, $n = 2$



$a = 2$, $n = 3$



$a = 2$, $n = 3$

Рис. 21. Объём n-мерного куба с ребром a равен a^n

Найдём $(n-1)$-*мерную площадь* S_{n-1} (а вернее, $(n-1)$-мерный объём) *поверхности куба* с ребром a. Она равна числу $(n-1)$-мерных граней, умноженному на $(n-1)$-мерный объём a^{n-1} одной грани: $s_{n-1} = 2n \cdot a^{n-1}$; точно так же можно подсчитать «k-мерную площадь поверхности куба», задаваемую равенством $s_k = 2^{n-k} \cdot C_n^k \cdot a^k$ (см. формулу для числа k-мерных граней в § 4).

Подсчитаем теперь n-мерный *объём n-мерного шара* радиуса R по формуле $V_n(R) = b(n) \cdot R^n$, где $b(n)$ — объём шара единичного радиуса, который, естественно, зависит от размерности пространства: $b(1) = 2$ (одномерный шар радиуса 1 — это отрезок длины 2); $b(2) = \pi$ (площадь единичного круга); $b(3) = \frac{4}{3}\pi$ (объём трёхмерного шара) и т. д. Точно так же *площадь поверхности n-мерного шара*, или, что то же, $(n-1)$-мерный объём $(n-1)$-мерной сферы, вычисляется по формуле $S_{n-1}(R) = c(n-1) \cdot R^{n-1}$, где $c(n-1)$ — $(n-1)$-мерный объём единичной сферы: $c(1) = 2\pi$ (длина единичной окружности); $c(2) = 4\pi$ (площадь единичной сферы) и т. д.

Между числами $b(n)$ и $c(n-1)$ имеется замечательная связь. И эта связь довольно проста:

Теорема 1. Объём n-мерного единичного шара, умноженный на его размерность, численно равен его $(n-1)$-мерной площади поверхности: $c(n-1) = n \cdot b(n)$.

Примеры. 1) Круг и длина окружности: $n = 2$, $b(2) = \pi$, $c(1) = 2\pi \Rightarrow 2 \cdot b(2) = c(1)$.

2) Объём шара и площадь поверхности сферы: $n = 3$, $b(3) = \frac{4}{3}\pi$, $c(2) = 4\pi \Rightarrow 3 \cdot b(3) = c(2)$.

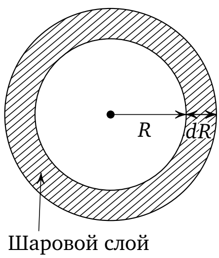


Рис. 22

Доказательство. Возьмём шар радиуса R и увеличим радиус на dR, где dR — «бесконечно малая величина». Объём шара радиуса $R + dR$ получается из объёма шара радиуса R увеличением последнего на объём «шарового слоя» (объёма между двумя сферами), который равен приблизительно $S_{n-1}(R) \cdot (dR)$, причём равенство $V_n(R+dR) - V_n(R) = S_{n-1}(R) \cdot dR$ тем точнее, чем меньше разница в радиусах, т. е. чем меньше dR (рис. 22). Отсюда

$$S_{n-1}(R) = \lim_{dR \to 0} \frac{V_n(R + dR) - V_n(R)}{dR} = \frac{dV_n(R)}{dR} = V_n'(R).$$

Следовательно,

$$c(n-1)R^{n-1} = (b(n)R^n)' \Rightarrow c(n-1)R^{n-1} = n \cdot b(n) \cdot R^{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c(n-1) = n \cdot b(n),$$

и теорема 1 доказана.

С теоремой 1 тесно связана формула для объёма пирамиды и конуса (предельного случая пирамиды).

Теорема 2. Объём n-мерной пирамиды и конуса равен произведению $(n-1)$-мерной площади основания на высоту, делённому на размерность пространства n: $V_{\text{pyr}}(n) = \frac{1}{n} S_{\text{pyr}}(n-1) \cdot H$.

Мы не будем доказывать эту теорему, но продемонстрируем, что она по крайней мере не противоречит здравому смыслу, так как из неё можно вывести теорему 1.

Рассмотрим сферу радиуса 1; её можно представить в виде объединения большого числа «пирамид» с площадью основания dS и высотой 1 (рис. 23). Поэтому $b(n) = k \cdot V_{\text{руг}}(n)$, и одновременно $c(n-1) = k \cdot dS$, где k — число таких пирамид. Но $V_{\text{руг}}(n) = \dfrac{1}{n} \cdot 1 \cdot dS$, откуда

$$b(n) = k \cdot V_{\text{руг}}(n) = \frac{k \cdot dS}{n} = \frac{c(n-1)}{n},$$

что и утверждает теорема 1.

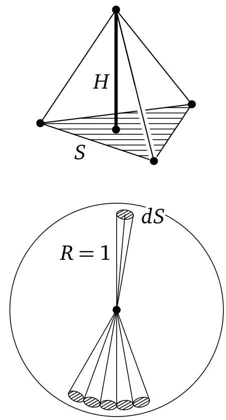


Рис. 23. Объём пирамиды

П р и м е р ы. 1) Объём трёхмерной пирамиды равен $\dfrac{1}{3}$ произведения площади ее основания на высоту.

2) Площадь треугольника равна $\dfrac{1}{2}$ произведения длины основания на высоту.

Закончим этот параграф удивительным и важным свойством «многомерного арбуза».

Теорема 3. Доля объёма n-мерного шарообразного «арбуза», сосредоточенная в его «корке» фиксированной толщины Δ, стремится к 1 при увеличении размерности «арбуза» до бесконечности. Иными словами, чем больше размерность, тем больший объём сосредоточен в «корке арбуза».

Действительно, $\dfrac{V_n(R+\Delta)}{V_n(R)} = \dfrac{(R+\Delta)^n}{R^n} = \left(1 + \dfrac{\Delta}{R}\right)^n \to \infty$ при $n \to \infty$ при фиксированном значении толщины корки Δ и радиуса R. Так как $V_n(R+\Delta) = V_n(R) + V_{\text{корки}}$, то $\dfrac{V_{\text{корки}}}{V_{\text{мякоти}}} \to \infty$.

П р и м е р. Представим себе, что мякоть арбуза представляет собой шар радиуса $r = 0{,}99R$. Тогда объём мякоти

$$V_{\text{мякоти}} = b(n)(0{,}99R)^n = (0{,}99)^n \cdot b(n)(R)^n = (0{,}99)^n \cdot V_{\text{арбуза}},$$

и так как $(0{,}99)^n \to 0$ при $n \to \infty$, получаем, что $V_{\text{мякоти}} \to 0$ при увеличении размерности арбуза, и $V_{\text{арбуза}} \approx V_{\text{корки}}$.

Точно так же, если арбуз кубический, то его объём сосредотачивается у граней. Это выражается в том, что число граней у n-мерного куба стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

В заключение приведём точные формулы для объёма $V_n(R)$ n-мерного шара радиуса R и площади поверхности $S_{n-1}(R)$ $(n-1)$-мерной сферы радиуса R. Справедлива следующая теорема, которую дадим здесь без доказательства[1].

Теорема 4. (а) Если размерность пространства $d=2n$ — чётное число, то

$$V_{2n}(R)=\frac{\pi^n}{n!}R^{2n},\quad S_{2n-1}(R)=\frac{2\pi^n}{(n-1)!}R^{2n-1}.$$

(б) Если размерность пространства $d=2n+1$ — нечётное число, то

$$V_{2n+1}(R)=\frac{2^{2n+1}n!\pi^n}{(2n+1)!}R^{2n+1},\quad S_{2n}(R)=\frac{2^{2n+1}n!\pi^n}{(2n)!}R^{2n}.$$

Напомним, что площадь поверхности сферы получается дифференцированием объёма шара по радиусу (теорема 1), поэтому достаточно знать первую половину формул, чтобы получить вторую. Выпишем в таблицу первые несколько значений для объёмов и поверхностей:

Размерность d	2	3	4	5	6	7
Объём шара $V_d(R)$	πR^2	$\frac{4}{3}\pi R^3$	$\frac{\pi^2}{2}R^4$	$\frac{8\pi^2}{15}R^5$	$\frac{\pi^3}{6}R^6$	$\frac{16\pi^3}{105}R^7$
Площадь поверхности сферы $S_{d-1}(R)$	$2\pi R$	$4\pi R^2$	$2\pi^2R^3$	$\frac{8\pi^2}{3}R^4$	π^3R^5	$\frac{16\pi^3}{15}R^6$

Размерность d	8	9	10	11	12
Объём шара $V_d(R)$	$\frac{\pi^4}{24}R^8$	$\frac{32\pi^4}{945}R^9$	$\frac{\pi^5}{120}R^{10}$	$\frac{64\pi^5}{10395}R^{11}$	$\frac{\pi^{12}}{720}R^{12}$
Площадь поверхности сферы $S_{d-1}(R)$	$\frac{\pi^4}{3}R^7$	$\frac{32\pi^4}{105}R^8$	$\frac{\pi^5}{12}R^9$	$\frac{64\pi^5}{945}R^{10}$	$\frac{\pi^{12}}{60}R^{11}$

§ 18. Задача принца Руперта

Более чем 300 лет назад принц Руперт Пфальцский выиграл спор, утверждая, что в кубе можно сделать отверстие, через которое можно будет протащить второй точно такой же куб. Делается это так.

Возьмём за ось отверстия диагональ куба. Если мы спроецируем куб на плоскость, перпендикулярную диагонали, то в силу симметрии рёбра куба, не имеющие общих концов с этой диагональю, спроецируются в стороны правильного шестиугольника (этот шестиугольник и будет всей проекцией куба), а остальные рёбра — в радиусы описанной

[1]Доказательство получается стандартным применением матанализа с использованием простой картинки: n-мерный шар радиуса R есть объединение $(n-1)$-мерных сечений-шаров, ортогональных оси Ox, радиусы которых $\sqrt{R^2-x^2}$, $-R\leqslant x\leqslant R$, откуда $V_{n+1}(R)=R\cdot V_n(R)\cdot\int\limits_{-1}^{1}(1-u^2)^{n/2}\,du$. Остаётся только посчитать интеграл в правой части.

вокруг шестиугольника окружности (рис. 24). Если длина ребра куба равна 1, то его диагональ равна $\sqrt{3}$. Поэтому косинус угла между диагональю и примыкающим к ней ребром равен $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Значит, косинус угла между ребром и плоскостью, перпендикулярной диагонали, равен $\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, откуда радиус, а значит, и сторона шестиугольника равны $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Длина апофемы такого шестиугольника равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Но радиус окружности, описанной вокруг квадрата со стороной 1, тоже равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, мы легко можем поместить квадрат в шестиугольник так, чтобы он лежал целиком внутри него (см. рис. 24). Поэтому, если мы сделаем отверстие квадратного сечения, направив его ось по диагонали, то при этом мы не затронем средних рёбер. В это сквозное отверстие (рис. 25) как раз и пройдёт куб с длиной ребра 1. Более того, можно сделать такое отверстие, через которое прошёл бы даже несколько больший куб.

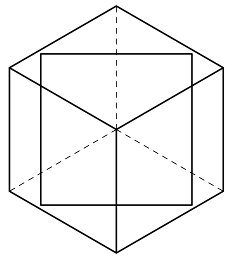


Рис. 24

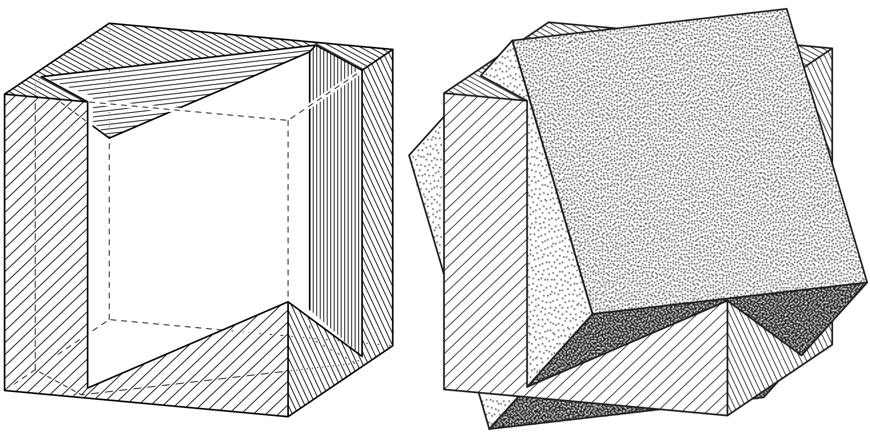


Рис. 25. Задача принца Руперта

Действительно, спустя примерно 100 лет после выигранного спора голландский естествоиспытатель и учёный Питер Ньивланд (Pieter Nieuwland, 1764—1794) показал, что наибольший куб, который может пройти сквозь куб с ребром 1, имеет ребро $\frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1{,}06066$. Найти такой куб эквивалентно нахождению наибольшего квадрата, который мог бы поместиться в куб, поскольку как только такой квадрат помещён в единичный куб, остаётся лишь сделать сквозное отверстие, для которого этот квадрат будет сечением куба (т. е., иными словами, надо начать двигать указанный квадрат параллельно самому себе и удалять все части куба, которые квадрат пересечёт на своём пути). Естественное обобщение этой задачи на многомерный случай таково:

Задача принца Руперта. Найти ребро наибольшего m-мерного куба, который может быть помещён в n-мерный куб с ребром 1.

В общем случае эта задача не решена до конца, хотя о ней написано много статей и даже книг разными авторами. Имеется также много модификаций этой задачи, например таких:

Вопрос 1. Для данного λ $(0 < \lambda \leqslant 1)$ найти наибольшее значение L, при котором прямоугольник размером $L \times \lambda L$ может быть помещён в единичный куб.

Вопрос 2. Для данных чисел λ и μ $(0 < \lambda \leqslant \mu \leqslant 1)$ найти наибольшее значение L, при котором прямоугольный параллелепипед размером $L \times \lambda L \times \mu L$ может пройти сквозь отверстие подходящего размера в единичном кубе.

Ответом на оба вопроса служит теорема, доказанная в статье R. P. Jerrard, J. E. Wetzel. Prince Rupert's Rectangles // Math Magazine. — 73. — 2000. — P. 204—211.

Теорема. а) Пусть $\lambda_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}29289$ и $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}70711$. Для каждого λ, $0 < \lambda \leqslant 1$, наибольшая сторона прямоугольника $L \times \lambda L$, который может поместиться в единичный куб, определяется формулой:

$$L_{\max}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{3-\lambda^2} + \lambda\sqrt{2}} & \text{при } 0 < \lambda \leqslant \lambda_1; \\ \sqrt{2} & \text{при } \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2; \\ \dfrac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3\lambda^2 - 1}} & \text{при } \lambda_2 \leqslant \lambda \leqslant 1. \end{cases} \tag{21}$$

б) Для фиксированных λ и μ, $0 < \mu \leqslant \lambda \leqslant 1$, параллелепипед размером $L \times \lambda L \times \mu L$ может пройти сквозь отверстие подходящего размера в единичном кубе тогда и только тогда, когда

$$L \leqslant \frac{1}{\lambda} L_{\max}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right), \tag{22}$$

где $L_{\max}$ взято из формулы (21).

Утверждение б) легко следует из а), если заметить, что наибольший прямоугольник размера $l \times \frac{\mu}{\lambda} l$, помещающийся в единичном кубе, удовлетворяет условию $l = L_{\max}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$, поэтому соответствующий параллелепипед пройдёт сквозь единичный куб только в том случае, если $\lambda L \leqslant l$, откуда и следует формула (22).

Недавно Грег Губер (Greg Huber), физик из Массачусетского университета, сообщил мне, что из компьютерных экспериментов, которые он проделал при исследовании многомерной задачи принца Руперта, следует, что в n-мерном кубе всегда можно сделать сквозное отверстие, через которое пройдёт равный ему n-мерный куб; при этом доля объёма, который следует удалить из куба, растёт «экспоненциально» при увеличении размерности — примерно как $1 - e^{-n}$. Интересно отметить, что при исследовании задачи принца Руперта Губеру пришлось применить идеи статистической механики. При этом размер прямоугольника, который можно поместить в куб, служил в его рассуждениях «энергией» конфигурации, а положение прямоугольника менялось стохастически относительно непрерывно меняющейся «температуры». Асимптотическая сходимость к глобальному экстремуму гарантировалась строгими ограничениями на функцию «температуры», которая на практике выбиралась из эвристических соображений. Экспериментальные значения, полученные для $L_{\max}(\lambda)$ с помощью компьютерных экспериментов, оказались очень близкими к теоретической кривой, задаваемой формулой (21) (рис. 26).

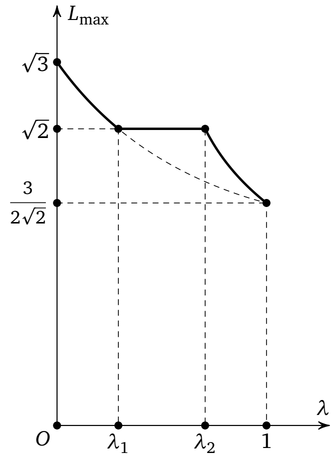


Рис. 26. График функции $L_{\max}(\lambda)$

§ 19. Парадоксы куба размерности 10 и выше

Многомерный куб таит в себе удивительные парадоксы. Один из них уже был упомянут в § 17: в то время как сфера, *вписанная* в единичный куб, имеет радиус, не зависящий от размерности пространства (и равный $\frac{1}{2}$), радиус *описанной* сферы R стремится к бесконечности при неограниченном увеличении размерности: $R = \frac{\sqrt{n}}{2}$. Этот парадокс может быть усугублён следующим образом.

Разделим каждое ребро n-мерного куба на три равные части и проведём через точки деления гиперплоскости, параллельные $(n-1)$-мерным граням куба. Получим разбиение исходного куба на 3^n кубов с ребром $\frac{1}{3}$ каждый. Среди них есть центральный куб — его центр совпадает с центром единичного куба. Опишем сферу вокруг этого центрального куба — её диаметр $D_{(3)}$ равен $\frac{1}{3}$ длины диагонали единичного куба, т. е. $D_{(3)} = \frac{1}{3}\sqrt{n}$.

Если $n = 9$, то $D_{(3)} = 1$ — сфера касается центров всех $(n-1)$-мерных граней исходного куба, а при $n > 9$ мы имеем $D_{(3)} > 1$, т. е. в размерности $n \geqslant 10$ описанная сфера не помещается целиком в единичном кубе! Если разделить с самого начала единичный куб на 5^n кубиков с ребром $\frac{1}{5}$, то диаметр сферы, описанной вокруг центрального кубика, равен $D_{(5)} = \frac{1}{5}\sqrt{n}$, и $D_{(5)}$ становится больше 1, как только $n > 25$, т. е. при $n \geqslant 26$. Аналогично, при делении исходного куба на 7^n кубиков описанная вокруг центрального кубика сфера не помещается в единичном кубе, начиная с размерности $n = 7^2 + 1 = 50$; при делении на 9^n кубиков — начиная с размерности $n = 9^2 + 1 = 82$ и т. д. (рис. 27).

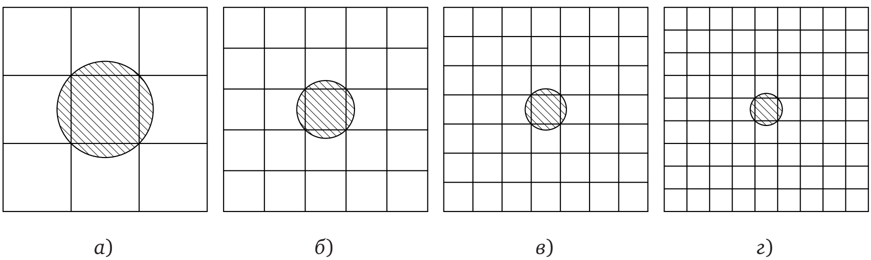


Рис. 27. Описанная вокруг центрального кубика сфера не помещается в большом кубе, если размерность куба не меньше *а*) 10, *б*) 26, *в*) 50, *г*) 82

Приведём несколько более изощрённый парадокс такого же сорта.

Разделим n-мерный куб с ребром 2 на 2^n единичных кубов и в каждый единичный куб впишем по белой сфере. Кроме того, рассмотрим чёрную сферу, касающуюся всех 2^n сфер, с центром в центре куба (рис. 28). Казалось бы, чёрная сфера не может выйти за пределы куба. Но это не так, начиная с размерности десять! Действительно, все центры белых сфер лежат в вершинах n-мерного куба с ребром 1, значит, диаметр чёрной сферы равен $D = \sqrt{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{n} - 1$; чёрная сфера перестаёт помещаться в исходном кубе, если $D > 2$. Итак, $\sqrt{n} - 1 > 2$, откуда $n > 9$, т. е. $n \geqslant 10$.

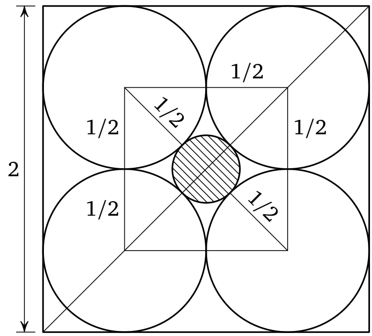


Рис. 28. В размерности 10 и выше центральный шар превосходит по размеру остальные шары и не помещается в исходном кубе

Ещё один подобный парадокс состоит в том, что всё здание МГУ (трёхмерное!) может быть помещено в n-мерный куб со стороной 1 см при подходящем выборе размерности n пространства.

Задача. Оцените эту размерность.

§ 20. Геометрическое доказательство неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

Приведём изящное, и притом прямое и наглядно-геометрическое, доказательство (с помощью n-мерных кубов) неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Обозначим $\sqrt[n]{a_1} = b_1$, $\sqrt[n]{a_2} = b_2$, …, $\sqrt[n]{a_n} = b_n$; без ограничения общности будем считать, что $b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$. Рассмотрим прямоугольную систему координат $Ox_1x_2\ldots x_n$. Построим параллелепипед Π с рёбрами b_1, b_2, …, b_n, идущими вдоль положительных осей Ox_1, Ox_2, …, Ox_n, причём одна из вершин расположена в начале координат O. Кроме того, построим n кубов $K_1, K_2, \ldots, K_n$ с общей вершиной O и рёбрами b_1, b_2, …, b_n соответственно, идущими вдоль осей координат. Рассмотрим в каждом кубе K_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, пирамиду с вершиной O, основанием которой служит $(n-1)$-мерная грань куба K_i, ортогональная оси Ox_i. Назовём такую пирамиду x_i-пирамидой, или x_i-прожектором, освещающим эту пирамиду лучами, исходящими из источника

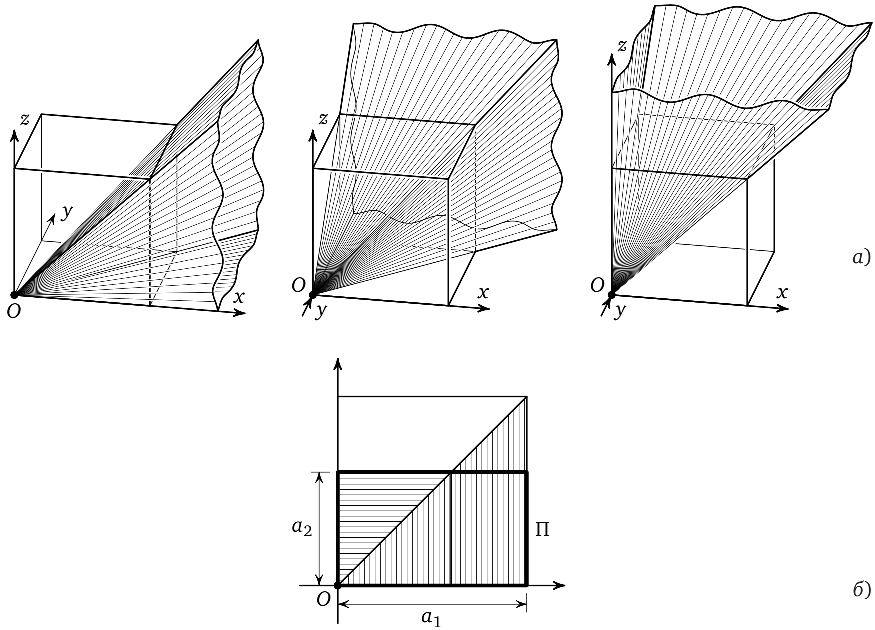


Рис. 29. *а*) x-, y-, z-пирамиды трёхмерного куба; *б*) x_1-, x_2-, …, x_n-пирамиды полностью покрывают параллелепипед П

света — вершины O (рис. 29*а*). Нетрудно видеть, что, в силу неравенств $b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$, x_1-, x_2-, …, x_n-пирамиды полностью освещают весь параллелепипед П (см. рис. 29*б*, где для наглядности изображены освещения прямоугольника и трёхмерного параллелепипеда), причём никакие две пирамиды не перекрываются (хотя каждые две из них имеют кусочек общей грани). Следовательно, суммарный объём всех x_i-пирамид не меньше объёма параллелепипеда П; равенство достигается, когда П — куб, т. е. при $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$. Объём n-мерной x_i-пирамиды в n раз меньше объёма куба K_i (см. теорему 2, § 17): $V_i = \frac{1}{n} b_i^n$, $i = 1, \ldots, n$. Объём П равен произведению длин всех его рёбер: $V(\Pi) = b_1 b_2 \ldots b_n$. Итак, $V_1 + V_2 + \ldots + V_n \geqslant b_1 b_2 \ldots b_n$, откуда

$$\frac{1}{n} b_1^n + \frac{1}{n} b_2^n + \ldots + \frac{1}{n} b_n^n \geqslant b_1 b_2 \ldots b_n,$$

$$\frac{b_1^n + b_2^n \ldots + b_n^n}{n} \geqslant b_1 b_2 \ldots b_n,$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1}\ \sqrt[n]{a_2} \ldots \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим доказано! Равенство достигается только при $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, т. е. когда все числа равны: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

§ 21. Гипотеза Бо́рсука и её опровержение для специального подмножества вершин 946-мерного куба

I. История.

Диаметром геометрической фигуры называется наибольшее расстояние между двумя её точками. В 1933 году польский математик Карел Бо́рсук доказал следующую теорему:

Теорема Борсука. Любая ограниченная фигура на плоскости может быть разбита на три части меньшего диаметра.

Тогда же он высказал такую естественную гипотезу:

Гипотеза Борсука. Любая ограниченная n-мерная фигура может быть разбита на $n+1$ частей меньшего диаметра.

Заметим, что число частей разбиения не может быть уменьшено: если взять n-мерный правильный тетраэдр (n-мерный симплекс), то при любом его разбиении на n частей одна из этих частей будет содержать две (или больше) вершины тетраэдра (так как число вершин тетраэдра равно $n+1$, а частей n), и поэтому диаметр этой части будет равен длине ребра исходного тетраэдра — т. е. не будет меньше диаметра исходной фигуры. Итак, разбиение на $n+1$ частей — необходимое условие в формулировке гипотезы.

Для размерности 3 первое доказательство гипотезы Борсука было дано английским математиком Эгглстоном (H. G. Eggleston) в 1955 году и упрощено американским математиком Грюнбаумом (B. Grünbaum) в 1957 году. Несколько позже гипотеза была доказана для n-мерной сферы и центрально-симметричных тел, а затем для всех ограниченных тел с гладкой границей (без «острых» точек, или «особенностей»). Казалось, ещё одно усилие — и гипотеза будет доказана для тел с произвольной границей.

Однако в 1993 году израильские математики Кан и Калай (J. Kahn, G. Kalai), следуя идее математиков Эрдёша, Лармана и Болтянского использовать комбинаторные рассмотрения, сумели найти контрпример для специального подмножества вершин n-мерного куба при больших n. Они доказали, что это специальное подмножество вершин n-мерного куба можно разбить на части меньшего диаметра, только если число частей порядка $\mathrm{const} \cdot (1{,}2)^{\sqrt{n}}$, что, конечно же, больше $n+1$ для достаточно больших n. В частности, так будет уже при $n = 1326$.

Таким образом, для размерности $n = 3$ гипотеза Борсука справедлива, а для $n = 1326$ — нет. Следовательно, существует такое n_0, $3 < n_0 \leqslant 1326$, что в размерности $\leqslant n_0$ гипотеза верна, а для размерности $n_0 + 1$ — нет. Найти такое n_0 — вызов математикам. Эта проблема открыта и по сей день. В настоящее время известно, что n_0 строго меньше 1326: в 1997 году израильский математик Алон (N. Alon) доказал, что $n_0 \leqslant 946$. Его теорему и идеи её доказательства мы приводим ниже.

II. Теорема Алона.

Пусть $p \geqslant 3$ — простое число и $n = 4p$.

Теорема. Если

$$\frac{2^{n-2}}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} C_n^k} > C_n^2,$$

то гипотеза Борсука неверна для размерности $N = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Наименьшее p, для которого теорема Алона справедлива, это $p = 11$. Тогда $n = 44$ и $C_{44}^2 = 946$, поэтому $n_0 \leqslant 946$; в пространстве размерности 946 гипотеза Борсука неверна.

III. Набросок доказательства теоремы Алона.

Рассмотрим множество F векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, для которых $x_1 = 1$, каждая из координат $x_2, x_3, \ldots, x_n$ принимает значение $+1$ или -1, а «минус единичек» чётное количество (или, иначе говоря, произведение всех координат равно $+1$). Основная лемма, из которой будет вытекать теорема Алона, формулируется вполне элементарно, однако её доказательство, хотя и не очень громоздкое, требует специальных алгебраических знаний и очень большой изобретательности. Поэтому мы приведём здесь только её формулировку и затем выведем из неё теорему.

Основная лемма. Пусть подмножество G в множестве F состоит из векторов, никакие два из которых не ортогональны. Тогда число $|G|$ векторов в G удовлетворяет неравенству

$$|G| \leqslant C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k.$$

Чтобы двигаться дальше, найдём, из скольких векторов состоит множество F.

Утверждение. Мощность множества F, т. е. число n-мерных векторов, входящих в множество F, где $F = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1,$ $x_i = \pm 1$ при $i = 2, \ldots, n$, $x_2x_3x_4\ldots x_n = +1\}$, равно 2^{n-2}: $|F| = 2^{n-2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $(n-1)$-мерный куб K^{n-1} со стороной 2, вершинами которого служат концы n-мерных векторов вида

$(1, x_2, \ldots, x_n)$, где каждое $x_i = \pm 1$. Число вершин этого куба равно 2^{n-1}. Но ровно половина этих вершин (чёрные на рис. 30) удовлетворяет условию $x_2 x_3 \ldots x_n = +1$. Поэтому $|F| = \frac{1}{2} 2^{n-1} = 2^{n-2}$, что и требовалось. Утверждение доказано.

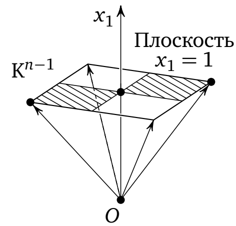


Рис. 30. Вершины, входящие в множество F

Мы сейчас вложим некоторым хитрым способом множество F в пространство размерности $N = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. После этого мы докажем, что если полученное после вложения F в $\mathbb{R}^N$ множество S в N-мерном пространстве разбить произвольным образом на $N+1$ частей (как этого требует гипотеза Борсука), то диаметр хотя бы одной из этих частей будет в точности такой же, как и диаметр исходного множества S, т. е. не уменьшится. Значит, заключение гипотезы Борсука будет нарушено, и множество S, тем самым, будет служить контрпримером к гипотезе Борсука. При доказательстве того, что одна из частей разбиения будет иметь тот же диаметр, что и диаметр S, мы предположим противное и получим противоречие с неравенством, доказанным в теореме.

IV. Вложение множества F в пространство размерности $N = C_n^2$: построение множества S.

Рассмотрим n-мерный вектор $a = (x_1 = 1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in F$. Напомним, что каждая его координата равна ± 1, причём число «плюс единиц» чётно. По этому вектору построим «таблицу умножения» размером $n \times n$: в клетке (i, j) пишем число $x_{ij} = x_i x_j$. По диагонали этой таблицы стоят «+1», так как $x_i x_i = +1$. После этого выпишем подряд числа всех строчек, стоящие выше диагонали, и получим вектор из $N = C_n^2$ координат $(N = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1)$. Обозначим этот вектор $A = a \times a$. Заметим, что, зная вектор $A \in R^N$, мы можем однозначно восстановить исходный вектор $a \in F$: координаты вектора a — это $x_1 = 1$ и затем первые $n-1$ координат вектора A.

Пример. Для $n = 4$, $a = (1, x_2, x_3, x_4)$ получится вот что:

	1	x_2	x_3	x_4
1	1	x_2	x_3	x_4
x_2	x_2	1	x_2x_3	x_2x_4
x_3	x_3	x_3x_2	1	x_3x_4
x_4	x_4	x_4x_2	x_4x_3	1

$\longleftrightarrow A = (x_2, x_3, x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4) \in \mathbb{R}^{C_4^2} = \mathbb{R}^6.$

Множество векторов $\{A\}$ и есть множество S — вложение множества F в пространство $\mathbb{R}^N$:

$$S = \{A = a \times a \mid a \in F\}_{\mathbb{R}^N}.$$

V. Свойства векторов множества *S*.

Мы воспользуемся сейчас понятием *скалярного произведения векторов*: это просто сумма произведений первых, вторых и т. д. координат этих векторов. То есть если $\vec{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$, то $\langle \vec{e}, \vec{f} \rangle = e_1 f_1 + e_2 f_2 + \ldots + e_n f_n$. Для векторов из множества S скалярное произведение обладает интересным свойством: оно всегда неотрицательно.

Свойство 1. $\langle A, B\rangle_{\mathbb{R}^N} \geqslant 0$, где $A = a \times a$, $B = b \times b$, $a = (1, x_2, \ldots, x_n)$, $b = (1, y_2, \ldots, y_n)$.

Доказательство.

$$\langle A, B\rangle_{\mathbb{R}^N} = \langle a \times a, b \times b\rangle = \sum_{i,\, j=1}^{n} x_{ij} y_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j y_i y_j =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \langle a, b\rangle_{\mathbb{R}^n}^2 \geqslant 0.$$

Векторы a и b называются *ортогональными*, если $\langle a, b\rangle = 0$ (обозначение: $a \perp b$).

Свойство 2. $A \perp B$ равносильно $a \perp b$.

Доказательство. Поскольку $\langle A, B\rangle_{\mathbb{R}^N} = \langle a, b\rangle_{\mathbb{R}^n}^2$, то левая часть равна 0 тогда и только тогда, когда правая часть равна 0, что и требовалось.

Свойство 3. Диаметр множества S равен $n\sqrt{2}$ и достигается на векторах, ортогональных друг другу.

Доказательство. Квадрат длины вектора равен скалярному произведению вектора на себя: $|a|^2 = \langle a, a\rangle$. Поэтому

$$\operatorname{dist}(A, B)^2 = \langle A - B, A - B\rangle = (a \times a - b \times b, a \times a - b \times b) =$$
$$= |a \times a|^2 + |b \times b|^2 - 2\langle (a \times a), (b \times b)\rangle = n^2 + n^2 - 2\langle A, B\rangle_{\mathbb{R}^N} \leqslant 2n^2,$$

поскольку $\langle A, B\rangle_{\mathbb{R}^N} \geqslant 0$ (свойство 1). Равенство достигается при $\langle A, B\rangle = 0$, т. е. когда $A \perp B$ и $a \perp b$. Поэтому

$$\operatorname{diam}(S) = \max_{A,B \in S} \operatorname{dist}(A, B) = \sqrt{2n^2} = n\sqrt{2},$$

причём если $\operatorname{dist}(A, B) = n\sqrt{2}$, то векторы A и B, а вместе с ними и векторы a и b, должны быть ортогональны друг другу.

VI. Доказательство теоремы Алона.

Множество S состоит из 2^{n-2} векторов, поскольку $|F| = 2^{n-2}$, а S и F находятся во взаимно однозначном соответствии: $A = a \times a \leftrightarrow a$. Множество S расположено в пространстве $\mathbb{R}^N$, где $N = C_n^2$. Допустим, что S удалось разбить на $N+1$ частей G_1, G_2, …, G_{N+1}, каждая из которых имеет диаметр меньший, чем S, т. е. $\operatorname{diam}(G_k) < n\sqrt{2}$. Тогда каждая часть G_k не содержит ортогональных векторов — это следует из свойства 3 (см. пункт V). А тогда по основной лемме $|G_k| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{p-1} C_n^k$. Значит,

$$|G_1| + |G_2| + \ldots + |G_{N+1}| \leqslant (N+1) \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k = (C_n^2 + 1) \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k.$$

С другой стороны,

$$|G_1| + |G_2| + \ldots + |G_{N+1}| = |S| = 2^{n-2},$$

поэтому

$$2^{n-2} \leqslant (C_n^2 + 1) \sum_{k=0}^{p-1} C_n^k,$$

что противоречит условию теоремы Алона. Следовательно, наше допущение неверно, и поэтому одна из частей G_k должна иметь диаметр, в точности равный $n\sqrt{2}$. Значит, S нельзя разбить на $N+1$ частей меньшего диаметра, и гипотеза Борсука опровергнута.

Замечание. Простота числа p и равенство $n = 4p$ используются существенным образом только в доказательстве основной леммы, которое мы в нашем изложении опустили. Это доказательство чисто алгебраическое и никак не связано с многомерным кубом.

§ 22. Задачи про *n*-мерный куб, *n*-мерный тетраэдр и *n*-мерный шар

Звёздочкой помечены задачи повышенной сложности, двумя звёздочками — задачи, выходящие за рамки данной брошюры по методам их решения.

1. а) Внутри трёхмерного куба летают девять мух. Доказать, что в любой момент времени расстояние между какими-то двумя мухами меньше длины ребра куба.

б) Можно ли, конечно же только теоретически, испечь четырёхмерный кубический кулич и вкрапить в него 17 точечных изюминок так, чтобы расстояние между любыми двумя изюминками было не меньше длины ребра куба?

2. Можно ли какой-нибудь двумерной плоскостью пересечь четырёхмерный куб так, чтобы она не пересекла ни одного его ребра? А четырёхмерный тетраэдр? (Указание: Каков естественный аналог этого вопроса для трёхмерного куба и тетраэдра?)

3. Угол между двумя сторонами правильного треугольника — или, что то же самое, двумерного правильного тетраэдра — равен 60°. Его косинус равен $\frac{1}{2}$. Докажите, что косинус угла α между двумя гранями правильного *трёхмерного* тетраэдра равен $\frac{1}{3}$, и вообще, для n-мерного тетраэдра $\cos\alpha = \frac{1}{n}$.

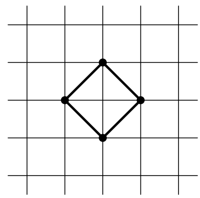


Рис. 31. Квадрат с нецелой длиной стороны

4.** На двумерном листе бумаги в клетку (клетка — единичный квадратик, т. е. квадратик со стороной 1) легко нарисовать квадрат с вершинами в узлах квадратной решётки, у которого длина стороны — *нецелое* число (см. рис. 31). А можно ли нарисовать трёхмерный куб с вершинами в узлах трёхмерной кубической решётки, составленной из единичных кубиков, чтобы его ребро имело нецелую длину?

5. а) Какое наименьшее число точек нужно отметить на $(n-1)$-мерной поверхности n-мерного куба, чтобы на каждой его $(n-1)$-грани была отмечена одна точка? (Отмеченная точка может лежать более чем на одной грани.)

б) На каждом ребре n-мерного куба расположена ровно одна бусинка. Найти наименьшее возможное число бусинок. (Бусинка может располагаться в вершине.)

в) Для каких k число бусинок из пункта б) будет равно k?

6. Пусть $\Delta = A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$ — произвольный n-мерный симплекс (тетраэдр); R — радиус описанной вокруг Δ сферы; r — радиус вписанной в Δ сферы; a — максимальная длина ребра Δ; h — наименьшая по длине высота Δ. Доказать, что $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$.

7. Найти радиус сферы, касающейся всех k-мерных граней n-мерного куба с ребром 1.

8. Обозначим через H_n высоту правильного n-мерного тетраэдра с ребром 1 и через V_n — его объём. Для $n = 1$ полагаем $H_1 = 1$ (длина одномерного отрезка), $V_1 = 1$ (его «объём»).

а) Доказать, что

$$H_n = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n!}\sqrt{(2^2-1)(3^2-1)\ldots(n^2-1)}.$$

б) Доказать, что $V_n = \frac{1}{n!}H_1H_2\ldots H_{n-1}H_n$.

9. а) Найти радиус R_n сферы, описанной вокруг правильного n-мерного тетраэдра с ребром 1.

б) Найти радиус R сферы, касающейся всех рёбер правильного тетраэдра размерности n.

10. а) Пусть рёбра трёхмерного куба — нерастяжимые нити (шнурки) длины 1. Внутри куба находится воздушный шарик, который начинает раздуваться из центра куба. Сначала шарик коснётся всех рёбер куба, а потом, по мере его дальнейшего раздувания, начнёт деформировать рёбра куба (см. рис. 32). Это будет происходить до тех пор, пока шарик не раздуется до максимально возможного размера — при этом все рёбра куба лягут на его большие окружности. Чему равен этот максимальный размер (радиус R_3) воздушного шарика?

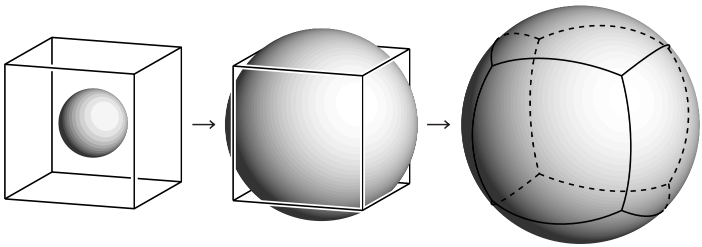


Рис. 32. Раздувающийся воздушный шарик

б) Решить ту же задачу для каркаса n-мерного единичного куба и n-мерного воздушного шарика, раздувающегося из его центра.

в) Та же задача для n-мерного правильного тетраэдра с ребром 1.

11. а)* Трёхмерный куб вращается вокруг своей большой диагонали. Описать поверхность вращения (см. рисунок на первой странице обложки).

б)** Найти объём и площадь поверхности полученного тела вращения.

в)** Та же задача для n-мерного куба.

12. а) Через каждые три вершины трёхмерного куба провели плоскость. Сколько различных плоскостей получилось?

б)** Через каждые n вершин n-мерного куба, не лежащих ни в какой $(n-2)$-мерной плоскости, провели $(n-1)$-мерную плоскость. Сколько различных $(n-1)$-мерных плоскостей получилось?

в)** На сколько n-мерных частей разделился куб после проведения всех этих плоскостей?

г)** Через каждые $k+1$ вершин n-мерного куба провели k-мерную плоскость. Сколько различных k-мерных плоскостей получилось?

13. а) Как надо расположить трёхмерный единичный куб в пространстве, чтобы его ортогональная проекция на горизонтальную двумерную плоскость имела наибольшую площадь? Чему равна эта площадь?

б) Тот же вопрос для n-мерного куба, который ортогонально проектируется на гиперплоскость $Ox_1x_2\ldots x_{n-1}$. Речь идёт о $(n-1)$-мерной площади (объёме) проекции.

в)* Тот же вопрос о проекции n-мерного куба на k-мерную плоскость $Ox_1x_2\ldots x_k$.

14. а) Доказать, что проекция произвольно повёрнутого квадрата на ось Ox имеет ту же длину, что и проекция этого квадрата на ось Oy (рис. 33*а*).

б) Доказать, что площадь проекции произвольно расположенного в пространстве трёхмерного единичного куба на плоскость Oxy численно равна длине проекции этого же куба на ось Oz (рис. 33*б*).

в) Доказать, что численная величина k-мерного объёма проекции произвольно расположенного в пространстве n-мерного единичного куба на k-мерную плоскость $Ox_1x_2\ldots x_k$ равна численной величине $(n-k)$-мерного объёма проекции этого же куба на $(n-k)$-мерную плоскость $Ox_{k+1}x_{k+2}\ldots x_n$.

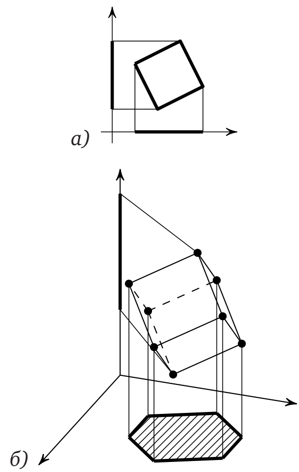


Рис. 33

15. а) Прямая l проходит в положительном октанте через начало координат прямоугольной системы координат $Ox_1x_2\ldots x_n$ и образует с осями Ox_1, Ox_2, …, Ox_n направляющие углы α_1, α_2, …, α_n. Доказать, что

$$\cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1.$$

б) Доказать, что если $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$, то $\cos\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\cos\alpha_2 < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$, …, $\cos\alpha_{n-1} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha_n > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

в) Отрезок единичной длины проектируется ортогонально на все оси Ox_1, Ox_2, …, Ox_n. Найти наибольшую возможную длину наименьшей по величине проекции.

16. а) Прямая на координатной плоскости Oxy может пересечь максимум три из четырёх квадрантов, на которые оси делят плоскость. Какое наибольшее число октантов (от слова «окта» — восемь) может пересечь прямая в трёхмерном пространстве? А наибольшее число ортантов в d-мерном пространстве? (Ортант — это одна из 2^d частей d-мерного пространства, на которые d координатных гиперплоскостей делят пространство $\mathbb{R}^d$.)

б) Трёхмерный кубический пирог разделён на k^3 одинаковых маленьких кубиков. Какое наибольшее число кубиков можно проткнуть очень длинной металлической спицей? А разрезать за один раз плоским ножом? (Спица не проходит через вершины и рёбра, а нож не проходит через вершины и не содержит целиком ни одного ребра.)

в) d-мерный кубический пирог разбит на k^d одинаковых маленьких кубиков. Какое наибольшее количество кубиков можно проткнуть одномерной спицей? А разрезать k-мерным ножом, где $1 < k < d$?

г) Сколько единичных кубиков пересекает главная диагональ параллелепипеда с рёбрами $a_1, a_2, \ldots, a_d$?

17. Имеется три n-мерных кирпича (прямоугольных параллелепипеда) и линейка с делениями. Требуется измерить с помощью этой линейки длину главной (между противоположными углами) диагонали. (Разрешается сделать только один замер.)

18. Квадрат можно разрезать на два равных треугольника, проведя диагональ. А можно ли разрезать n-мерный куб на n равных (конгруэнтных) пирамид?

19. Производная по радиусу R от объёма n-мерного шара радиуса R равна $(n-1)$-мерной площади поверхности его границы — $(n-1)$-мерной сферы радиуса R (см. теорему 1, § 17). Однако производная по x от объёма n-мерного куба с ребром x в два раза меньше его $(n-1)$-мерной «площади поверхности» $(2n)x^{n-1}$, так как $(x^n)' = nx^{n-1}$. Как это объяснить? ($2n$ — число $(n-1)$-мерных граней куба K^n.)

20. Вычислить с точностью до одной миллионной электрическое сопротивление остова 2 000 000-мерного куба между его противоположными вершинами. (Каждое ребро имеет сопротивление 1 Ом.)

21. а) Доказать, что если S — площадь плоской ограниченной фигуры в трёхмерном пространстве, а S_1, S_2, S_3 — площади её ортогональных проекций на плоскости Oxy, Oxz, Oyz, то

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2.$$

(У к а з а н и е: начните с треугольника).

б) Доказать, что если S — $(n-1)$-мерная «площадь» ограниченной и лежащей в одной гиперплоскости (размерности $n-1$) фигуры в $\mathbb{R}^n$, а $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — $(n-1)$-мерные площади её ортогональных проекций на координатные гиперплоскости, то

$$S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2 = S^2.$$

22. а) Единичный квадрат проектируется на координатные плоскости трёхмерного пространства; площади проекций равны S_1, S_2 и S_3. При каком расположении квадрата сумма $S_1 + S_2 + S_3$ максимальна? Чему равна эта максимальная сумма?

б) Решить ту же задачу для правильного шестиугольника и круга.

в)* Решить ту же задачу для проекций S_1, S_2 и S_3 единичного куба.

г)** Решить ту же задачу для n-мерного единичного куба, проектирующегося на все $(n-1)$-мерные координатные плоскости.

23. Расположить 4 одинаковых бутылки на столе так, чтобы все 6 расстояний между их горлышками были одинаковы. Сколько различных (неизоморфных) решений имеет задача? Решить ту же задачу для $n+1$ бутылки в n-мерном пространстве.

24*. (Задача И. М. Гельфанда.) Рассмотрим сечение n-мерного единичного куба гиперплоскостью, ортогональной главной диагонали куба. Сечение — $(n-1)$-мерный многогранник $(n-1)$-мерного объёма $V_{n-1}(x)$, где x — точка на диагонали. Что это за многогранник? Нарисовать график функции $y = V_{n-1}(x)$. (Диагональ можно считать отрезком длины $\sqrt{n}$, а точку x — числом на отрезке $[0, \sqrt{n}]$.)

25*. (Задача В. И. Арнольда.) а) Найти среднее значение площади проекции трёхмерного единичного куба на плоскость.

б) Тот же вопрос для каждого правильного трёхмерного многогранника (из пяти существующих) с ребром 1.

в) Тот же вопрос для n-мерного единичного куба, который проектируется ортогонально на $(n-1)$-мерную плоскость.

§ 23. Ответы, указания, решения

1. а) Пусть ребро куба равно 1. Проведём через центр куба три плоскости, параллельные его граням. Получим восемь маленьких кубиков с ребром $\frac{1}{2}$ каждый. Мух девять, а кубов восемь, поэтому какой-то маленький куб содержит по крайней мере две мухи. Расстояние между ними не превосходит длины его диагонали, т. е. $d \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{3} < 1$, что и требовалось.

б) Можно. Рассуждаем как в а): проводим четыре трёхмерных плоскости, параллельные граням куба; получаем $2^4 = 16$ маленьких кубов с ребром $\frac{1}{2}$ каждый. Длина диагонали каждого маленького куба равна $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$. Поэтому, если поместить 16 изюминок во все вершины куба, а 17-ю в её центр, то расстояние между любыми двумя изюминками будет не меньше 1.

2. Ответ: да, можно. В $\mathbb{R}^3$ это соответствует тому, что существует прямая, пересекающая грани куба (или тетраэдра), но не пересекающая ни одного ребра: сумма размерностей ребра и прямой $1 + 1 < 3$. Точно так же, сумма размерностей двумерной плоскости и одномерного ребра меньше размерности куба (или тетраэдра): $2 + 1 < 4$.

3. См. рис. 34. $AC = H_n$ — высота тетраэдра T^n; AB и BD — высоты тетраэдров T^{n-1}, $AB = BD = H_{n-1}$; C — основание высоты AC — делит BD в отношении $\frac{BC}{BD} = \frac{1}{n}$. Из прямоугольного треугольника ABC находим $\cos\alpha = \frac{\frac{1}{n}H_{n-1}}{H_{n-1}} = \frac{1}{n}$.

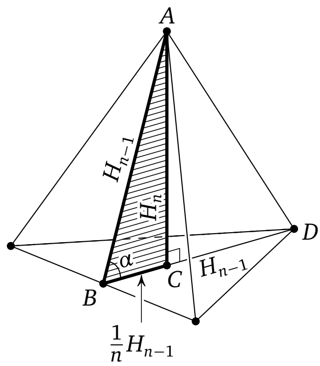


Рис. 34

4. Ответ: в *нечётной* размерности ребро куба с вершинами в узлах единичной решётки (трёхмерной, пятимерной и т. д.) обязано иметь *целую* длину. Для *чётной* размерности длина может быть нецелой.

Доказательство. Пусть l — длина ребра такого куба, и пусть размерность куба n нечётна: $n = 2k + 1$.

1) Если AB — ребро куба, где A и B — узлы решётки, $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$, то число $l^2 = (a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2$ — целое.

2) Объём куба $V = l^n$ можно выразить в виде определителя $n \times n$, вертикальные колонки которого заполнены целыми числами (каждая колонка — это координаты одного из n векторов, выходящих из фиксированной вершины и идущих вдоль рёбер куба). Определитель матрицы, все элементы которой целые, есть число целое. Поэтому l^{2k+1} — целое число.

3) l^2 — целое. Значит, $(l^2)^k = l^{2k}$ — целое, но и l^{2k+1} — целое. Следовательно, $l = \frac{l^{2k+1}}{l^{2k}}$ — рациональное число как отношение двух целых.

4) Рациональное число, квадрат которого — целое число, само должно быть целым. (Это широко известное утверждение доказывается чисто алгебраически, разложением числа на множители и использованием свойств делимости, и мы его опускаем.) Итак, l — целое число.

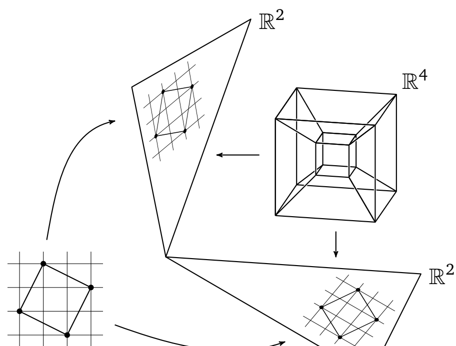


Рис. 35

Если же n — чётное, то, взяв прямое (декартово) произведение k квадратов с рис. 31 (см. условие задачи и рис. 35, где $k = 2$), получим куб размерности $2k$ с нецелым ребром.

Вопрос: могут ли все рёбра куба с нецелым ребром не идти вдоль линий решётки?

5. а) Ответ: две — в противоположных углах куба (в концах главной диагонали). Каждая отмеченная чёрная точка принадлежит n $(n-1)$-мерным граням, и на каждой из $2n$ граней куба отмечена ровно одна точка (рис. 36, *а*).

б) Ответ: 2^{n-1} — *наименьшее* возможное количество бусинок.

Решение. Очевидно, что *наибольшее* количество бусинок получится, если на каждом ребре, скажем в его середине, поместить одну бусинку. Получим столько бусинок, сколько и рёбер — $n2^{n-1}$. Возьмём теперь какую-нибудь вершину куба и все выходящие из неё n рёбер. Заставим двигаться все бусинки на этих рёбрах в сторону этой вершины, пока они не сольются в одну бусинку — в этой самой вершине. Закрасим её в чёрный цвет, а на других концах указанных n рёбер поместим n белых бусинок (в самом конце нашей операции все белые бусинки будут удалены). Затем возьмём другую, неиспользованную пока, вершину и поместим в неё чёрную бусинку, а во все вторые концы исходящей из этой вершины рёбер — по белой бусинке (если белая бусинка уже находится в каких-то из этих концов, мы её там пока и оставляем). Продолжаем эту операцию, пока не заполним 2^{n-1} вершин чёрными бусинками; все белые бусинки удалим. В результате получим по одной (чёрной) бусинке на каждом ребре куба. (См. расположение четырёх и восьми бусинок на кубе и тессеракте, рис. 36*б*, *в*.)

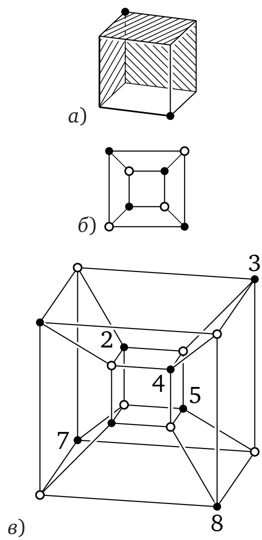


Рис. 36

Так как из каждой вершины куба выходит n рёбер, то одна бусинка может «обслужить» не более n рёбер. Значит, чтобы на каждом ребре было по одной бусинке, число бусинок должно быть не менее $\dfrac{n2^{n-1}}{n} = 2^{n-1}$. Значит, минимум равен 2^{n-1}.

в) Ответ: если на каждом ребре куба по одной бусинке, то общее число k бусинок может равняться одному из чисел

$$k_{\max} = n2^{n-1},\ n(2^{n-1}-1)+1,\ n(2^{n-1}-2)+2,\ n(2^{n-1}-3)+3,\ \ldots$$
$$\ldots,\ n(2^{n-1}-2^{n-1})+2^{n-1} = 2^{n-1} = k_{\min}.$$

Указание. При каждой операции, описанной в б), мы удаляем n бусинок из середин рёбер, выходящих из одной вершины, и добавляем одну чёрную бусинку в эту вершину.

6. Очевидно, что диаметр описанной сферы не меньше ребра тетраэдра Δ (поскольку этот диаметр не короче любой хорды): $2R \geqslant a$. А любая высота тетраэдра строго больше диаметра вписанной в него сферы: $h > 2r$ (рис. 37). Перемножая обе части неравенств, получаем $2Rh > a \cdot 2r$, откуда $\dfrac{R}{r} > \dfrac{a}{h}$, что и требовалось.

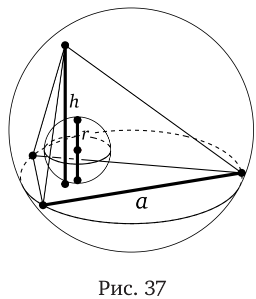


Рис. 37

7. Ответ: $R_k = \frac{1}{2}\sqrt{n-k}$. Указание. См. § 17, рис. 20 (с. 50; там же помещено и решение).

8. а) Из прямоугольного треугольника ABC, где $AB = H_{n-1}$, $AC = H_n$, угол при вершине C прямой, угол ABC равен α_n, получаем $\cos\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ (задача 3, см. рис. 38*а*). Значит,

$$H_n = H_{n-1}\sin\alpha_n = H_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}.$$

Отсюда: $H_1 = 1$, $H_2 = H_1\sqrt{1-\frac{1}{2^2}}$, $H_3 = H_2\sqrt{1-\frac{1}{3^2}}$, $\ldots$, $H_{n-1} = H_{n-2}\sqrt{1-\frac{1}{(n-1)^2}}$, $H_n = H_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ (рис. 38*б*). Перемножая все левые и все правые части, после сокращения на $H_1H_2\ldots H_{n-1}$ получаем требуемую формулу для H_n.

б) Как и в а), находим последовательно объёмы $V_1 = 1$ (длина отрезка равна его «объёму»), $V_2 = \frac{1}{2}V_1H_2$ (площадь правильного треугольника), $V_3 = \frac{1}{3}V_2H_3$ (объём правильного тетраэдра), $V_4 = \frac{1}{4}V_3H_4$ (объём четырёхмерного тетраэдра), $\ldots$, $V_{n-1} = \frac{1}{n-1}V_{n-2}H_{n-1}$, $V_n = \frac{1}{n}V_{n-1}H_n$. Перемножая левые и правые части и сокращая на $V_1V_2V_3\ldots V_{n-1}$, находим

$$V_n = \left(\frac{1}{2}H_2\right)\left(\frac{1}{3}H_3\right)\left(\frac{1}{4}H_4\right)\ldots\left(\frac{1}{n}H_n\right) = \frac{1}{n!}H_1H_2H_3\ldots H_n$$

(поскольку $H_1 = 1$), что и требовалось.

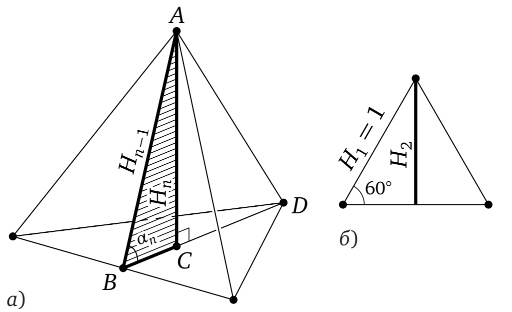


Рис. 38

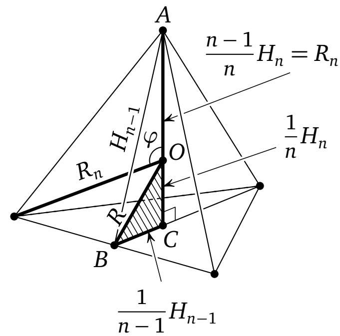


Рис. 39

9. а) Из рис. 39 видно, что

$$R_n = \frac{n-1}{n}H_n = \frac{n-1}{n}\frac{1}{n!}\sqrt{(2^2-1)(3^2-1)\ldots(n^2-1)}.$$

б) Из прямоугольного треугольника OBC (где O — центр вписанной в тетраэдр сферы) имеем: $R = OB$, $OC = \frac{1}{n}H_n$, $BC = \frac{1}{n-1}H_{n-1}$, откуда по теореме Пифагора и из задачи 8

$$R = \sqrt{\left(\frac{1}{n}H_n\right)^2 + \left(\frac{1}{n-1}H_{n-1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}\frac{1}{(n!)^2}(2^2-1)(3^2-1)\ldots(n^2-1) + \frac{1}{(n-1)^2}\frac{1}{((n-1)!)^2}(2^2-1)(3^2-1)\ldots((n-1)^2-1)} =$$

$$= \frac{1}{n(n-1)(n-1)!}\sqrt{(2^2-1)(3^2-1)\ldots((n-1)^2-1)\frac{n^4-n^3+2n-1}{n}}.$$

10. Ответы: а) $1/\arccos\frac{1}{3}$; б) $1/\arccos\left(1-\frac{2}{n}\right)$;

$$\text{в) } 1/\arccos\left(1-\frac{n^2(n!)^2}{2(n-1)^2(2^2-1)(3^2-1)\ldots(n^2-1)}\right).$$

Приведём решение б) (из которого подстановкой $n = 3$ вытекает а)).

После того как все нити лягут на сферу S^{n-1}, вершины исходного куба тоже будут лежать на этой сфере — в вершинах нового куба (рис. 40). Следовательно, дуга AB большого круга, в которую перешло какое-то ребро исходного куба при раздутии, будет видна под тем же углом φ, под которым это ребро было видно из центра куба. Из треугольника со сторонами $\frac{\sqrt{n}}{2}$, $\frac{\sqrt{n}}{2}$, 1 и углом φ между равными сторонами находим по теореме косинусов:

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2-2\frac{\sqrt{n}}{2}\frac{\sqrt{n}}{2}\cos\varphi=1,$$

откуда $\cos\varphi=\frac{n-2}{n}=1-\frac{2}{n}$. После этого из формулы для длины дуги окружности находим: $R\varphi=1$, откуда $R=\frac{1}{\varphi}=1/\arccos\left(1-\frac{2}{n}\right)$.

Решение задачи в) совпадает с приведённым, только угол φ определяется из треугольника со сторонами R_n, R_n, 1, где R_n — радиус описанной сферы вокруг правильного n-мерного тетраэдра (его величина приведена в решении задачи 9 а)).

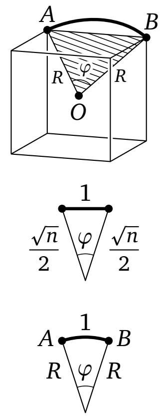


Рис. 40

11. а) Рёбра, выходящие из одной вершины куба, при вращении вокруг главной диагонали образуют конус. Остальные рёбра лежат на двух типах прямых, скрещивающихся с прямой, которой принадлежит главная диагональ куба. Поэтому при вращении эти рёбра образуют часть *однополостного* гиперболоида.

12. а) О т в е т: двадцать различных плоскостей.

Р е ш е н и е. Если плоскость содержит ребро куба и проходит ещё через одну вершину, то она проходит ровно через четыре вершины. Так получаются двенадцать плоскостей: шесть граней и шесть диагональных плоскостей (содержащих прямоугольники $1\times\sqrt{2}$). Ещё восемь плоскостей служат гранями двух правильных тетраэдров с ребром $\sqrt{2}$, вписанных в куб (рис. 41). Итого $12+8$ разных плоскостей.

З а м е ч а н и е: $12\cdot4+8\cdot1=C_8^3$ — обдумайте это равенство и примените идею, заложенную в нём, для многомерного случая.

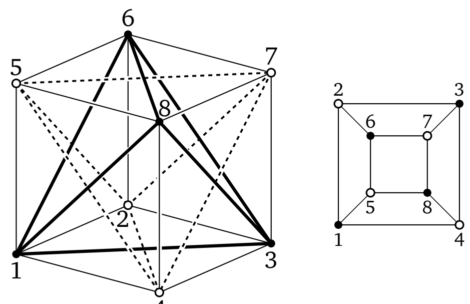


Рис. 41

13. а) О т в е т: Куб надо расположить так, чтобы треугольник ABC с вершинами во вторых концах трёх рёбер, выходящих из общей вершины, был горизонтален (параллелен плоскости, на которую куб проектируется). Площадь проекции в этом случае будет максимальной и равной $\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. В общем случае проекция куба — центрально-симметричный шестиугольник. Пусть $A'B'C'$ — проекция треугольника ABC из ответа. Тогда площадь проекции куба (шестиугольника) в два раза больше площади треугольника $A'B'C'$ (см. рис. 42). Но площадь треугольника $A'B'C'$ равна площади треугольника ABC, умноженной на косинус угла α между плоскостью треугольника ABC и плоскостью проекции (докажите!). Максимальный косинус равен 1 при $\alpha = 0$. В этом случае треугольник ABC горизонтален и максимальная площадь проекции куба равна

$$S_{\max} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}.$$

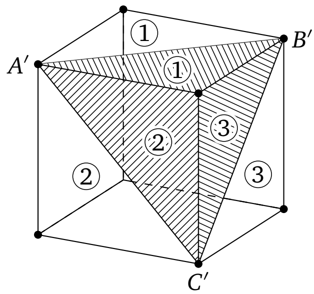


Рис. 42

б) О т в е т: $(n-1)$-мерное основание пирамиды, n вершин которой — вторые концы рёбер n-мерного куба, выходящих из общей вершины, должно быть параллельно гиперплоскости проекции. Площадь проекции ($(n-1)$-мерная) куба вдвое больше площади основания этой пирамиды, вычисленной в задаче 8.

14. а) Каждая проекция квадрата — проекция одной из его диагоналей. Косинусы углов наклона обеих диагоналей к соответствующим осям одинаковы, поэтому и длины проекций одинаковы (рис. 43).

б) Площадь проекции куба на плоскость Oxy равна

$$2\left(\frac{1}{2}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin 60^\circ) \cos \alpha\right) = \sqrt{3} \cos \alpha,$$

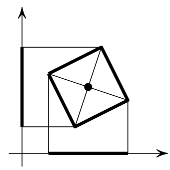


Рис. 43

где α — угол между плоскостями ABC и Oxy (см. решение задачи 13 а). Длина проекции куба на ось Oz равна длине проекции его наибольшей диагонали, перпендикулярной плоскости ABC, т. е. равна $\sqrt{3} \cos \beta$, где β — угол между этой диагональю и осью Oz. Но $\beta = \alpha$ (поскольку диагональ перпендикулярна плоскости ABC), поэтому численные значения площади проекции и длины проекции одинаковы.

в) Идея решения аналогична б): плоскости $Ox_1 \ldots x_k$ и $Ox_{k+1} \ldots x_n$ взаимно перпендикулярны и поэтому соответствующие им углы α и β из б) равны.

15. а) Отложим от начала координат отрезок длины d вдоль прямой l и спроектируем его на все оси координат (рис. 44): получим отрезки с длинами $d_1 = d \cos \alpha_1$, $d_2 = d \cos \alpha_2$, …, $d_n = d \cos \alpha_n$ на этих осях. Поскольку $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = d^2$, получаем $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \ldots + \cos^2 \alpha_n = 1$.

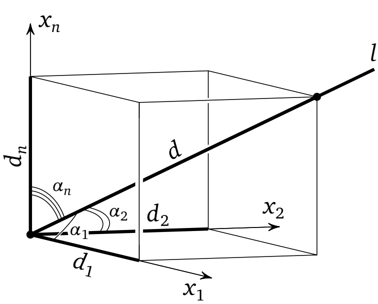


Рис. 44

б) $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$, следовательно, $\cos\alpha_1 < \cos\alpha_2 < \ldots < \cos\alpha_n$, поэтому из равенства пункта а) следует $\cos^2\alpha_1 < \frac{1}{n}$. Далее, $\cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_n < 1$, поэтому $\cos^2\alpha_2 < \frac{1}{n-1}$. И т. д.: $\cos\alpha_3 < \frac{1}{n-2}$, …, $\cos^2\alpha_k < \frac{1}{n-k+1}$, …, $\cos^2\alpha_{n-1} < \frac{1}{2}$. Из равенства пункта а) получаем также $\cos^2\alpha_n > \frac{1}{n}$.

в) Если $d = 1$, то $d_1 = \cos\alpha_1$ — наименьшая длина проекции (при условии, что $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$). Но $\cos\alpha_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, поэтому $\max d_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$; это случится, когда единичный отрезок образует одинаковые углы со всеми осями.

16. а) Ответ: 4 октанта в $\mathbb{R}^3$, $d+1$ ортант в $\mathbb{R}^d$.

Решение. Чтобы число ортантов, которые может пересечь прямая l, было максимальным, надо, чтобы l пересекла *все* d координатных плоскостей. Число точек пересечения плоскостей с прямой l поэтому равно d, и эти точки делят прямую l на $d+1$ частей (две из которых — бесконечные лучи, а остальные — отрезки, см. рис. 45). Каждая часть деления принадлежит ровно одному ортанту, поэтому l пересекает $d+1$ ортантов.

б) Удалим все грани пирога; получим $(k-2)^3$ кубиков и $k^3-(k-2)^3$ неограниченных частей пространства (которые раньше были кубиками). Спица проткнёт наибольшее число кубиков, если после удаления граней пирога она пересечёт наибольшее число частей полученной бесконечной фигуры. Это произойдёт в том случае, когда спица пересечёт $3(k-1)$ плоскостей ($k-1$ плоскостей по каждому из трёх направлений). Далее — рассуждения из пункта а): число точек деления прямой l на части — $3(k-1)$, число частей деления — $3(k-1)+1 = 3k-2$; значит, максимальное число пересечённых спицей кубиков равно $3k-2$. Например, если $k=2$, то всего кубиков $2^3 = 8$, а пересечённых кубиков — $3\times 2 - 2 = 4$. Это совпадает с ответом из пункта а): $4 = 3+1$ (3 — размерность пространства). В случае кубика Рубика, для которого $k = 3$, имеем $3^3 = 27$ кубиков, и только $3\times 3 - 2 = 7$ из них могут быть проткнуты спицей.

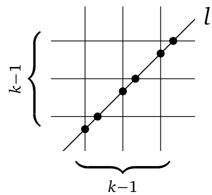


Рис. 45

в) Здесь ответ такой: $d(k-1)+1$. Решение почти дословно совпадает с п. б), где $d = 3$.

г) Если длины рёбер $a_1, \ldots, a_d$ попарно взаимно просты, то главная диагональ не проходит ни через одну вершину и ни через одно ребро размерности меньше d у всех кубиков. В этом случае решение б) даёт ответ:

$$(a_1-1)+(a_2-1)+\ldots+(a_d-1)+1 = \sum_{i=1}^{d} a_i - d + 1.$$

17. Надо расположить три кирпича так, как показано на рис. 46, после чего измерить линейкой отрезок AB. Решение не зависит от размерности n пространства.

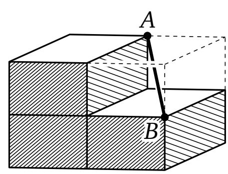


Рис. 46

18. Ответ: можно. Эти пирамиды — x_1-, x_2-, x_3-, …, x_n-пирамиды (или прожекторы) из § 20.

19. Утверждение, что производная по радиусу R от объёма шара равна площади его поверхности, применимо и для куба, если дифференцировать по переменной $R = \frac{x}{2}$ — половине длины ребра куба: $\frac{d(x^n)}{dR} = \frac{d(x^n)}{d\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\frac{d(x^n)}{dx} = 2nx^{n-1} =$ (число $(n-1)$-мерных граней) $\times$ ($(n-1)$-мерная площадь одной грани).

20. Ответ: 0,000001.

Решение. Сопротивление «высокомерного» куба равно примерно $\frac{2}{n}$, где n — размерность пространства (см. теорему 4 § 15).

21. У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что площадь S' проекции плоской фигуры площади S на данную плоскость равна $S' = S\cos\alpha$, где α — угол между двумя плоскостями, или, что тоже самое, угол между нормалями к этим плоскостям (это соотношение верно и в многомерном случае — надо только брать $(n-1)$-мерные объёмы). Затем следует применить утверждение а) задачи 15 о сумме квадратов косинусов направляющих углов.

22. У к а з а н и е. Воспользоваться утверждениями задач 21, 13 и 14.

23. Р е ш е н и е. Поставим три бутылки горлышком вверх, а четвёртую — горлышком вниз, так, чтобы горлышки образовали правильный тетраэдр (рис. 47*а*).

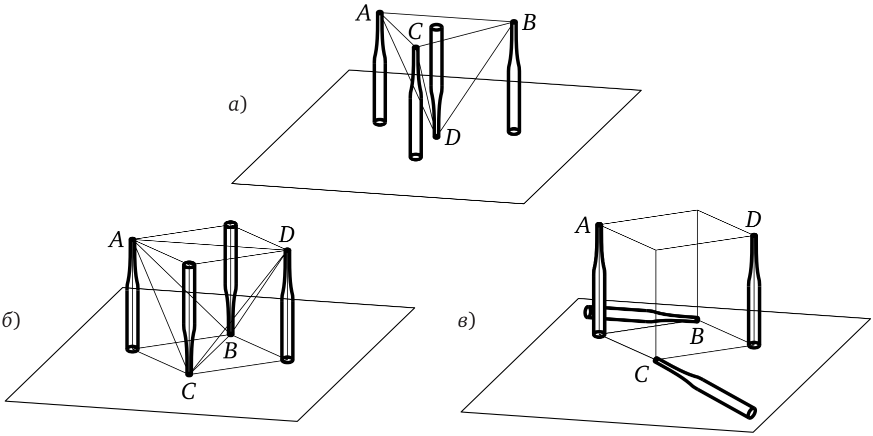


Рис. 47. Расположение бутылок: *а*) «тетраэдральное»; *б*), *в*) «кубическое»

Второе решение — поставить бутылки вдоль вертикальных рёбер куба: две бутылки горлышком вверх, две — вниз (рис. 47*б*). Другие решения можно получить из этого, если бутылки B и C положить на стол горизонтально произвольным образом, но так, чтобы концы их горлышек продолжали оставаться в вершинах B и C куба из второго решения (рис. 47*в*). Аналогично решается и задача для n-мерного случая.

24. Представим куб как пересечение двух частей n-мерного пространства: $\{x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$ и $\{x_1 \leqslant 1, x_2 \leqslant 1, \ldots, x_n \leqslant 1\}$, а гиперплоскость П — уравнением $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x$, где x меняется от 0 до $\sqrt{n}$. При любом фиксированном числе x гиперплоскость П пересекает каждую из двух частей по правильному $(n-1)$-мерному тетраэдру T_1, T_2; один из этих тетраэдров уменьшается, а другой увеличивается при изменении x. Искомое пересечение $T_1 \cap T_2$ двух тетраэдров и есть $(n-1)$-мерное сечение куба гиперплоскостью. Оно меняется от точки, переходит к $(n-1)$-мерному тетраэдру; затем у этого тетраэдра срезаются симметрично все его вершины — и тем больше, чем ближе гиперплоскость к центру куба; и, наконец, когда гиперплоскость проходит через центр куба, в сечении получается правильный $(n-1)$-мерный октаэдр.

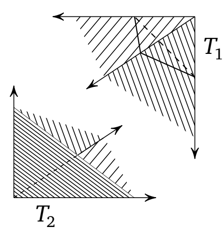


Рис. 48

Имеет место замечательный факт, обнаруженный московским математиком Д. Рыжковым: $(n-1)$-мерное сечение n-мерного куба, проведённое через все его вершины ранга k, совпадает (с точностью до гомотетии) с частью $(n-1)$-мерного куба, расположенной между двумя его $(n-2)$-мерными сечениями — одно проходит через все вершины ранга $k-1$, второе — через все вершины ранга k. Сравнивая число вершин в каждом из двух $(n-1)$-мерных многогранников, получаем ещё раз известное равенство $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. (Описанное решение позволяет находить $(n-1)$-мерный объём сечения — с привлечением задачи 8.)

25. а) Ответ: $\frac{3}{2}$.

Решение. Среднее значение площади проекции куба на плоскость равно среднему значению площади проекции сферы с той же площадью поверхности. (Для доказательства надо разбить обе поверхности — куб и сферу — на маленькие треугольнички и воспользоваться формулой $S' = S\cos\alpha$, см. решение задач 13 и 14). Но площадь проекции сферы радиуса R на плоскость постоянна и равна πR^2. Площадь поверхности единичного куба равна 6, а сферы радиуса R равна $4\pi R^2$; имеем $6 = 4\pi R^2$, откуда и ответ: $\pi R^2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

б) Указание. Приравнять площадь поверхности правильного многогранника величине $4\pi R^2$ и найти отсюда πR^2 (см. а)).

в) Указание. Приравнять число $2n$, равное $(n-1)$-мерной площади поверхности единичного n-мерного куба, величине $S_{\max}(R)$ из теоремы 4 § 17 и найти величину $V_{\max}(R)$ из той же теоремы.

Оглавление

Григорий Александрович Гальперин

Многомерный куб

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04

Подписано в печать 01.06.2015 г. Формат $60\times90\,{}^1\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 5. Тираж 2000. Заказ .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.