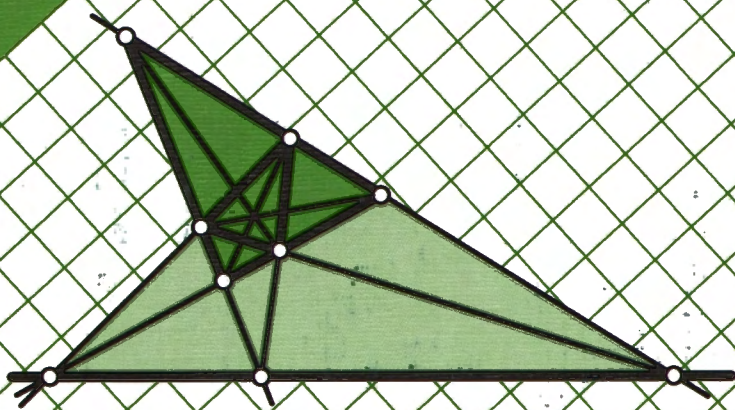


Я. П. ПОНАРИН

# ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ТОМ 3



**ТРЕУГОЛЬНИКИ  
И ТЕТРАЗДРЫ**

Я. П. ПОНАРИН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ  
ГЕОМЕТРИЯ

Том 3

ТРЕУГОЛЬНИКИ  
И ТЕТРАЭДРЫ

Москва  
Издательство МЦНМО  
2009

УДК 514.112  
ББК 22.151.0  
П56

**Понарин Я. П.**

**П56**      **Элементарная геометрия: В 3 т. — Т. 3: Треугольники и тетраэдры. — М.: МЦНМО, 2009. — 192 с.: ил.**

ISBN 978-5-94057-397-5

ISBN 978-5-94057-400-2 (том 3)

Пособие предназначено для учащихся старших классов школ с математической специализацией. Оно содержит разнообразные сведения о геометрии треугольника и тетраэдра. Представлен большой материал из богатого классического арсенала геометров прошлого.

Книга может быть использована для внеклассной работы с учащимися, для самообразования учителей, для спецкурсов и спецсеминаров по элементарной геометрии в педагогических вузах.

**ББК 22.151.0**

**ISBN 978-5-94057-397-5**  
**ISBN 978-5-94057-400-2 (том 3)**

© Понарин Я. П., 2009.  
© МЦНМО, 2009.

Предисловие . . . . .	9
<b>Глава 1. Барицентрические координаты</b>	
§ 1. Барицентрические координаты точки и вектора на плоскости . . . . .	11
1.1. Определение барицентрических координат точки относительно данного треугольника (11). 1.2. Аффинный и метрический смысл барицентрических координат точки (13). 1.3. Барицентрические координаты вектора (14).	
§ 2. Барицентрические формулы длины вектора и скалярного произведения векторов . . . . .	14
2.1. Длина вектора (14). 2.2. Скалярное произведение векторов (15).	
§ 3. Барицентрическое уравнение прямой на плоскости . . . . .	16
3.1. Связь аффинного и барицентрического уравнений прямой (16). 3.2. Уравнения прямой при аффинных способах ее задания (17). 3.3. Критерий принадлежности трех прямых одному пучку (18). 3.4. Уравнение прямой по точке и нормальному вектору в канонической БСК (19).	
§ 4. Барицентрические координаты замечательных точек треугольника . . . . .	19
4.1. Две вспомогательные формулы (19). 4.2. Координаты ортоцентра треугольника (20). 4.3. Координаты центров вписанной и описанной окружностей (20). 4.4. Точка Жергона треугольника (21).	
§ 5. Барицентрические координаты точки и вектора пространства . . . . .	21
5.1. Обзор ранее изложенного (21). 5.2. Длина отрезка и скалярное произведение векторов пространства в Б-координатах (23).	
§ 6. Барицентрическое уравнение плоскости . . . . .	24
6.1. Связь аффинного и барицентрического уравнений плоскости (24). 6.2. Барицентрическое уравнение плоскости при аффинных способах ее задания (24). 6.3. Критерий принадлежности четырех плоскостей одной связке (26).	
§ 7. Нормальный вектор плоскости . . . . .	26
7.1. Координаты нормального вектора плоскости в канонической БСК (26). 7.2. Расстояние от точки до плоскости (27).	
§ 8. Барицентрические уравнения описанной окружности треугольника . . . . .	28

- 8.1. Уравнение описанной окружности (28). 8.2. Уравнение описанной сферы (29). 8.3. Б-координаты центра описанной сферы (29).
- § 9. Примеры решения задач методом барицентрических координат 30

## Глава 2. Треугольники

- § 10. Точка Лемуана треугольника . . . . . 35  
 10.1. Симедианы треугольника (35). 10.2. Точка Лемуана (35).  
 10.3. Теорема Шлёмилха (37).
- § 11. Гомологичные треугольники . . . . . 37  
 11.1. Теорема Дезарга для треугольников пространства (37).  
 11.2. Гармоническая поляра точки относительно треугольника (39). 11.3. Теорема Плюккера (40). 11.4. Геометрическое место точек, (40).
- § 12. Ортологические треугольники . . . . . 43  
 12.1. Определяющий признак ортологических треугольников (43). 12.2. Ортологическое свойство треугольника и прямой (44).
- § 13. Изотомическое и изогональное преобразования . . . . . 46  
 13.1. Изотомическое преобразование (46). 13.2. Изогональное преобразование (47).
- § 14. Треугольник с двумя совпавшими вершинами . . . . . 49  
 14.1. Вырожденный треугольник, его центроид и ортоцентр (49).  
 14.2. Непосредственное истолкование свойств вырожденного треугольника (51).

## Глава 3. Косой четырехугольник

- § 15. Неравенства для косого четырехугольника . . . . . 54  
 15.1. Сумма внутренних углов (54). 15.2. Неравенство Птолемея (55). 15.3. Сумма косинусов (55).
- § 16. Теоремы Менелая, Чевы и Гаусса для косого четырехугольника 56  
 16.1. Теорема Менелая (56). 16.2. Обобщенная теорема Гаусса (57). 16.3. Задача (58). 16.4. Теорема Чевы (59).
- § 17. Косой параллелограмм . . . . . 60  
 17.1. Свойство углов косого параллелограмма (60). 17.2. Ось симметрии косого параллелограмма (63). 17.3. Другие признаки косого параллелограмма (64).
- § 18. Ортологические косые четырехугольники . . . . . 65
- § 19. Плоскости- $n$  косого четырехугольника . . . . . 66

19.1. Определение плоскости- $n$  (66). 19.2. Свойства плоскости-0 и плоскости-1 (67). 19.3. Построение плоскости- $(n + 1)$  по данной плоскости- $n$  (68).

#### Глава 4. Тетраэдры

§ 20. Гомологичные тетраэдры . . . . .	71
20.1. Теорема Понселе (71). 20.2. Дезаргова тетраэдральная конфигурация (72). 20.3. Полярная плоскость точки относительно тетраэдра (73).	
§ 21. Тетраэдр и точка . . . . .	74
21.1. Теорема Чевы для тетраэдра (74). 21.2. Обобщенная теорема Ван-Обеля (75). 21.3. Теорема Жергона (76). 21.4. Две аффинные конструкции точки, прямых и центроидов граней тетраэдра (76).	
§ 22. Тетраэдр и плоскость . . . . .	78
22.1. Деление тетраэдра на две равновеликие части (78). 22.2. Теорема Менелая (79). 22.3. Изотомические плоскости (79). 22.4. Прямые Гаусса в гранях тетраэдра (80).	
§ 23. Параллельное проектирование и равновеликие тетраэдры . .	81
23.1. Три задачи о равновеликих тетраэдрах (81). 23.2. Отношение объемов двух тетраэдров (86). 23.3. Тожество для проекций вершин тетраэдра (87). 23.4. Аналог теоремы Гаусса (87).	
§ 24. Изотомическое и изогональное преобразования пространства .	89
24.1. Изотомические точки относительно тетраэдра (89). 24.2. Изотомическое преобразование (90). 24.3. Изогональное преобразование (90).	
§ 25. Гиперболические четверки прямых . . . . .	91
25.1. Определение и критерий гиперболической четверки прямых (91). 25.2. Аналитические критерии гиперболической четверки прямых (93). 25.3. Примеры гиперболических четверок прямых (94).	
§ 26. Ортологические тетраэдры . . . . .	96
26.1. Теорема Штейнера (96). 26.2. Косо ортологические тетраэдры (97).	
§ 27. Полярное соответствие относительно сферы . . . . .	98
27.1. Полярная плоскость точки относительно сферы (98). 27.2. Автополярный тетраэдр (99). 27.3. Полярное соответствие относительно сферы (99).	
§ 28. Гиперboloидальные тетраэдры . . . . .	100

- 28.1. Теорема Шаля (100). 28.2. Полярно сопряженные тетраэдры (101).
- § 29. Тетраэдры Мёбиуса . . . . . 102
- § 30. Тетраэдр и сфера . . . . . 103
- 30.1. Аналог теоремы Паскаля (103). 30.2. Тожество для тетраэдра и его описанной сферы (105). 30.3. Антипараллельные сечения тетраэдра (105).

### Глава 5. Метрические зависимости в тетраэдре

- § 31. Точка Лемуана тетраэдра . . . . . 108
- 31.1. Определение точки Лемуана тетраэдра (108). 31.2. Свойства точки Лемуана (109). 31.3. Сопутствующая гиперболическая четверка прямых (110).
- § 32. Объем тетраэдра . . . . . 110
- 32.1. Формула Монжа (110). 32.2. Формула величин одной грани (111). 32.3. Формула двенадцати величин (111). 32.4. Выражение объема тетраэдра в барицентрических координатах (113).
- § 33. Зависимости между углами, высотами и бивысотами . . . . . 114
- 33.1. Углы между противоположными ребрами тетраэдра (114). 33.2. Длина бивысоты (115). 33.3. Зависимость между высотами и бивысотами (115). 33.4. Следствия (116).
- § 34. Свойства точки Люилье тетраэдра . . . . . 117
- 34.1. Аналог теоремы Шлёмилха (118). 34.2. Точка Люилье и бивысоты (119).
- § 35. Избранные неравенства и экстремумы . . . . . 119

### Глава 6. Специальные тетраэдры

- § 36. Замечательные сферы ортоцентрического тетраэдра . . . . . 124
- 36.1. Первая сфера Эйлера (124). 36.2. Вторая сфера Эйлера (125). 36.3. Третья замечательная сфера (125). 36.4. Расположение центров сфер Эйлера (126).
- § 37. Ортоцентрический тетраэдр с двумя совпавшими вершинами 126
- 37.1. Задание и элементы вырожденного ортоцентрического тетраэдра (126). 37.2. Высоты и ортоцентр (128).
- § 38. Свойства равногранного тетраэдра . . . . . 130
- § 39. Замечательные сферы равногранного тетраэдра . . . . . 131
- 39.1. Лемма (131). 39.2. Сфера двенадцати точек (132). 39.3. Внеписанные сферы (132).
- § 40. Квазиописанный тетраэдр . . . . . 134
- 40.1. Критерий существования сферы, касающейся ребер тетраэдра (134). 40.2. Свойства квазиописанного тетраэдра (136).

§ 41. Квазивневписанные сферы . . . . .	137
§ 42. Изодинамический тетраэдр . . . . .	138
42.1. Определение и характеристические свойства изодинамического тетраэдра (138).	
42.2. Свойства точки Лемуана изодинамического тетраэдра (139).	
42.3. Построение изодинамического тетраэдра (140).	
§ 43. Замечательные сферы изодинамического тетраэдра . . . . .	141
43.1. Геометрическое место вершин изодинамического тетраэдра, три из которых заданы (141).	
43.2. Сферы Аполлония (141).	
43.3. Сферы Лемуана (143).	
§ 44. Изогональный тетраэдр . . . . .	143
44.1. Определение и характеристическое свойство изогонального тетраэдра (143).	
44.2. Свойство точек касания вписанной сферы (145).	
§ 45. Прямоугольный тетраэдр . . . . .	147
45.1. Основные соотношения (147).	
45.2. Описанная сфера и первая сфера Эйлера прямоугольного тетраэдра (149).	
§ 46. Прямой триэдр и сфера . . . . .	150
46.1. Геометрическое место ортогональных проекций вершины прямого триэдра (150).	
46.2. Инварианты вращения прямого триэдра (152).	
§ 47. Ортогональная проекция тетраэдра . . . . .	153
47.1. Связь между ортогональными проекциями вершин произвольного тетраэдра (153).	
47.2. Вывод соотношения Гаусса (155).	
47.3. Построение ортогональной проекции вершины тетраэдра по заданным проекциям трех других вершин прямоугольного и правильного тетраэдров (157).	

## Глава 7. Начала многомерной геометрии

§ 48. О понятии $n$ -мерного пространства . . . . .	162
§ 49. Аффинное $n$ -мерное пространство $\mathcal{A}^n$ . . . . .	164
49.1. Векторное пространство $V^n$ (164).	
49.2. Аффинное $n$ -мерное пространство $\mathcal{A}^n$ (166).	
§ 50. Взаимное расположение двух плоскостей в аффинном $n$ -мерном пространстве . . . . .	167
50.1. Общие направления, параллельность (167).	
50.2. Пересечение и сумма двух плоскостей (168).	
§ 51. Евклидово векторное пространство . . . . .	171
51.1. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами (171).	
51.2. Ортогональная система векторов (172).	
51.3. Ортогональные подпространства (173).	



§ 52. Евклидово $n$ -мерное пространство $E^n$ . . . . .	174
52.1. Длина отрезка. Уравнение $(n - 1)$ -мерной сферы (175).	
52.2. Координатное задание $k$ -мерной плоскости (175).	
52.3. Угол между прямой и $k$ -плоскостью (175).	
52.4. Об углах между плоскостями (176).	
52.5. Расстояние от точки до гиперплоскости (178).	
§ 53. Барицентрические координаты точки аффинного пространства относительно $n$ -мерного симплекса . . . . .	178
53.1. Определение (178).	
53.2. Симплекс как геометрическое тело (179).	
§ 54. Центроид симплекса и центроиды его граней . . . . .	180
54.1. Центроид системы точек (180).	
54.2. Зависимость центроидов подсистем с центроидом данной системы точек (180).	
54.3. Центроид системы центроидов (181).	
§ 55. Параллелепипеды . . . . .	182
55.1. Полуплоскости и параллелепипеды (182).	
55.2. Грани параллелепипеда (183).	
55.3. Прямоугольный $k$ -параллелепипед и $k$ -куб (184).	
§ 56. Ортогональная проекция точки и вектора на $k$ -плоскость . . .	184
Литература . . . . .	189
Предметный указатель . . . . .	190

## Предисловие

Эта книга является заключительной в серии моих книг по элементарной геометрии. Ее написание заранее я не планировал. Однако после выхода в свет первых двух томов [4] и [5] возникло и постепенно усиливалось чувство неудовлетворенности незавершенностью, несмотря на одобрительные отзывы коллег и читателей об их содержании и стиле изложения. В них имеется много материала по классической геометрии для почитателей этой древней красивой науки. Однако при сложившемся негативном отношении к геометрии есть опасность постепенно растерять имеющийся богатый арсенал, если не обеспечить его сохранность и развитие. Необходимо найти ему достойное применение.

Цель написания этого тома состояла не просто в изложении имеющегося здесь содержания, хотя и это важно. Сверхзадача состояла в том, чтобы дать пищу заинтересованному молодому читателю для решения предлагаемых задач и тех, что возникнут на основе прочитанного о достижениях геометров-классиков XVIII—XIX веков, не гнушавшихся братья за решение казалось бы «приземленных» задач элементарного характера. Содержание книги связано с именами многих выдающихся геометров прошлого: Аполлония, Птолемея, Менелая, Че-вы, Дезарга, Гаусса, Мёбиуса, Пюккера, Шаля, Штейнера, Лемуана, Монжа, Эйлера и др.

В отличие от зарубежной (в основном, немецкой, французской, итальянской) литературы отечественных книг по геометрии треугольника и тетраэдра крайне мало. Если не считать содержательных книг начала прошлого века, сравнительно давно издана книга [3] С. И. Зетеля о треугольнике и книга [8] З. А. Скопеца и Я. П. Понарина о тетраэдре, хотя много фактов об их свойствах рассыпано в различных учебных пособиях и задачниках.

Решение многих задач элементарной геометрии сводится к выяснению свойств этих двух простейших основных геометрических фигур. Видимо, не случайно после выхода в свет книги [8] она неожиданно для автора вызвала спрос инженеров машиностроительных специальностей, строителей, физиков-механиков.

В основу этого тома положена книга [8], которая подверглась существенной переработке и корректировке содержания и изложения применительно к новым целям и условиям. Переработка состояла в следующем.

1) Добавлена вводная глава I о барицентрических координатах, так как в имеющейся литературе этот метод фактически отсутствует.

2) Многие доказательства заменены доказательствами методом барицентрических координат, который во многом и обеспечил единство стиля изложения.

3) Изменена структура распределения материала по главам и параграфам в связи с отказом от распределения по группам преобразований. В основу положен естественный порядок, диктуемый самим содержанием излагаемых фактов.

4) Повышен уровень доступности за счет замены различных квадратов сферами и гиперболоидом.

5) Устранен материал, содержащий малозначительные и устаревшие факты.

6) Включен материал, не содержащийся в книге [8]: § 8, 9, 11, 13, 23, 24, 27, 31, 35, 47 и ряд пунктов в других параграфах. По просьбе редакции добавлена новая глава 7 о началах многомерной геометрии.

7) Даны историко-биографические сведения (в сносках) об авторах излагаемых результатов.

В конце каждой главы, как и в предыдущих двух томах, предлагаются задачи для самостоятельного решения. Они имеют иное назначение, чем ранее. Я рекомендую их читателю в качестве пробы для самостоятельного исследования или самопроверки. Поэтому для них не дается традиционных «ответов». Да многих ответов нет и у автора. Считаю, что если читатель достиг в своей подготовке уровня этого тома, то ему и не нужны авторские «ответы». К задаче, которая «не решается», надо приступать многократно, не выбрасывая ее из головы. Порядок решения задач вообще существует, однако в данной книге он не имеет особого значения. Начинайте с понравившейся задачи. При удаче переходите к следующей понравившейся. Это сопутствует успеху.

Книга предназначена в основном для самостоятельных занятий лицам, освоившим предыдущих два тома и желающим углубить специальные знания в данной области элементарной геометрии и совершенствовать исследовательские навыки. Это относится прежде всего к учащимся 10–11 классов специализированных школ и классов и к студентам младших курсов математических факультетов вузов. Она может служить учебным пособием по геометрическим спецкурсам и спецсеминарам, для самостоятельной работы по курсовым и дипломным темам.

Считаю своим неоплатным долгом почтить светлую память моего учителя, бывшего соавтора и друга, профессора Залмана Алтеровича Скопеца, воспитавшего во мне любовь к классической геометрии. Выражаю искреннюю благодарность издательству Московского Центра непрерывного математического образования за издание моих книг и доброе отношение.

## Барицентрические координаты

При изложении вопросов геометрии треугольника и тетраэдра аффинная и декартова системы координат оказываются неудобными, так как вершины и стороны треугольника, вершины и грани тетраэдра при всяком выборе этой системы занимают по отношению к ней неравное положение. Этим недостатком не страдает барицентрическая система координат (БСК), поскольку она задается треугольником на плоскости и тетраэдром в пространстве.

Впервые барицентрические координаты были введены немецким геометром А. Ф. Мёбиусом (1790—1868) в его работе «Барицентрическое исчисление» (1827). Они особенно эффективно используются при решении аффинных задач. Однако их применение в метрических задачах связано с определенными трудностями из-за усложнения нужных формул.

Многие из этих формул существенно упрощаются, если в качестве базисного треугольника и базисного тетраэдра принять правильный треугольник и правильный тетраэдр с единичными сторонами и единичными ребрами.

В этих случаях такую систему координат будем называть канонической барицентрической системой координат (КБСК).

### § 1. Барицентрические координаты точки и вектора на плоскости

**1.1. Определение барицентрических координат точки относительно данного треугольника.** Пусть дан треугольник  $ABC$  общего вида и точка  $P$  в его плоскости. При любом выборе точки  $O$  в этой плоскости или вне ее будем иметь (рис. 1):

$$\overline{OP} = \overline{OP} - \overline{OC} = x\overline{CA} + y\overline{CB} = x(\overline{OA} - \overline{OC}) + y(\overline{OB} - \overline{OC}),$$

откуда  $\overline{OP} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + (1 - x - y)\overline{OC}$ . Положим  $\lambda_1 = x$ ,  $\lambda_2 = y$ ,  $\lambda_3 = 1 - x - y$ . Тогда  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ .

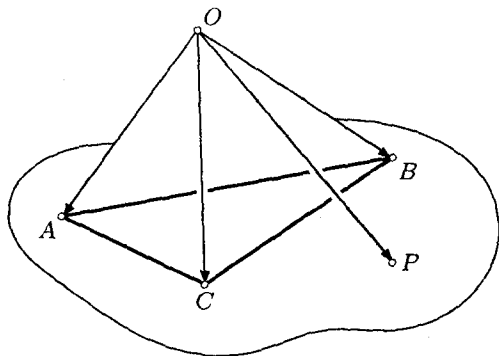


Рис. 1

Таким образом, для любой точки  $O$  пространства и любой точки  $P$  плоскости  $ABC$  имеют место равенства:

$$\begin{cases} \overline{OP} = \lambda_1 \overline{OA} + \lambda_2 \overline{OB} + \lambda_3 \overline{OC}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Существенно, что коэффициенты  $\lambda_i$  не зависят от выбора точки  $O$  при заданной точке  $P$ . В самом деле, при тех же числах  $\lambda_i$ , заменив точку  $O$  другой точкой  $O_1$ , получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \overline{O_1A} + \lambda_2 \overline{O_1B} + \lambda_3 \overline{O_1C} &= \\ &= \lambda_1 (\overline{OA} - \overline{OO_1}) + \lambda_2 (\overline{OB} - \overline{OO_1}) + \lambda_3 (\overline{OC} - \overline{OO_1}) = \\ &= \lambda_1 \overline{OA} + \lambda_2 \overline{OB} + \lambda_3 \overline{OC} - \overline{OO_1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \overline{OP} - \overline{OO_1} = \overline{O_1P}, \end{aligned}$$

то есть

$$\overline{O_1P} = \lambda_1 \overline{O_1A} + \lambda_2 \overline{O_1B} + \lambda_3 \overline{O_1C},$$

где  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ .

**Определение.** Если имеют место равенства (1.1), то числа  $\lambda_i$  называются *барицентрическими координатами* (Б-координатами) точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ .

Условие  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  называется *нормировкой* Б-координат точки. При решении аффинных задач нормировка координат необязательна: достаточно использовать числа  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , соответственно пропорциональные Б-координатам  $\lambda_i$ :  $\mu_1 = k\lambda_1$ ,  $\mu_2 = k\lambda_2$ ,  $\mu_3 = k\lambda_3$ , откуда

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \quad \lambda_3 = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}.$$

Условимся применять запись  $P(\mu_1 : \mu_2 : \mu_3)$  в случае ненормированных координат  $\mu_i$  вместо  $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  в случае нормированных координат  $\lambda_i$ . Чтобы перейти от ненормированных координат  $\mu_i$  точки к ее нормированным барицентрическим координатам  $\lambda_i$ , достаточно каждую координату  $\mu_i$  разделить на их сумму  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ .

Непосредственно из равенств (1.1) видно, что вершины базисного треугольника  $ABC$  имеют нормированные Б-координаты:

$$A(1, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1).$$

Сразу отметим, что для Б-координат сохраняет силу аффинная формула деления отрезка в данном отношении. Действительно, если

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda \quad \text{и} \quad A(a_1, a_2, a_3), \quad B(b_1, b_2, b_3), \quad C(c_1, c_2, c_3),$$

то в силу совпадения первых двух Б-координат с соответствующими аффинными

$$c_1 = \frac{a_1 + \lambda b_1}{1 + \lambda} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{a_2 + \lambda b_2}{1 + \lambda}.$$

Тогда и

$$c_3 = 1 - c_1 - c_2 = \frac{(1 - a_1 - a_2) + \lambda(1 - b_1 - b_2)}{1 + \lambda} = \frac{a_3 + \lambda b_3}{1 + \lambda}.$$

**1.2. Аффинный и метрический смысл барицентрических координат точки.** Условимся при обозначении векторов опускать их общее начало  $O$ :  $\overline{OP} = \vec{P}$ ,  $\overline{OA} = \vec{A}$ , ... и полагать, что оно находится вне плоскости треугольника  $ABC$ . Первое из равенств (1.1) умножим скалярно поочередно на векторы  $\vec{B} \times \vec{C}$ ,  $\vec{C} \times \vec{A}$ ,  $\vec{A} \times \vec{B}$ , после чего находим:

$$\lambda_1 = \frac{\vec{P}\vec{B}\vec{C}}{\vec{A}\vec{B}\vec{C}} = \frac{V_{OPBC}}{V_{OABC}} = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}, \quad \lambda_2 = \frac{S_{APC}}{S_{ABC}}, \quad \lambda_3 = \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}}. \quad (1.2)$$

Итак, нормированные барицентрические координаты точки плоскости равны отношениям площадей двух ориентированных треугольников: площади треугольника, полученного заменой соответствующей вершины базисного треугольника данной точкой, к площади базисного треугольника.

Пусть  $d_i$  — ориентированные расстояния от точки  $P$  до сторон базисного треугольника, причем за положительное направление принято направление соответствующей высоты  $h_i$  треугольника от вершины к противоположной стороне. Тогда отношения площадей указанных треугольников равны  $\frac{d_i}{h_i}$ . Таким образом,

$$\lambda_i = \frac{d_i}{h_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

и значит,

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} = 1.$$

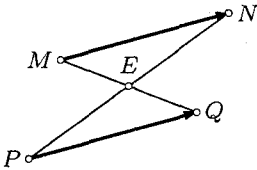


Рис. 2

**1.3. Бариеентрические координаты вектора.** Пусть даны точки  $M(x_1, x_2, x_3)$  и  $N(y_1, y_2, y_3)$  своими Б-координатами в заданной БСК. Бариеентрическими координатами вектора  $\overline{MN}$  будем называть числа

$$u_1 = y_1 - x_1, \quad u_2 = y_2 - x_2, \quad u_3 = y_3 - x_3.$$

Это определение корректно, поскольку согласно ему равные векторы получают соответственно равные координаты. Действительно,  $\overline{MN} = \overline{PQ}$  тогда и только тогда, когда отрезки  $\overline{MQ}$  и  $\overline{PN}$  имеют общую середину (рис. 2). Если  $P(p_1, p_2, p_3)$  и  $Q(q_1, q_2, q_3)$ , то этот критерий запишется равенствами:

$$\frac{1}{2}(x_i + q_i) = \frac{1}{2}(y_i + p_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

которые эквивалентны равенствам  $y_i - x_i = q_i - p_i$ , т. е. соответственные координаты векторов  $\overline{MN}$  и  $\overline{PQ}$  равны. Обратное очевидно.

Поскольку сумма Б-координат каждой точки равна единице, то сумма Б-координат любого вектора равна нулю:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0. \quad (1.4)$$

На основании определений Б-координат точки и вектора имеем  $\forall O$ :

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \overline{ON} - \overline{OM} = (y_1 - x_1)\overline{OA} + (y_2 - x_2)\overline{OB} + (y_3 - x_3)\overline{OC}, \\ \left\{ \begin{aligned} \overline{MN} &= u_1\overline{OA} + u_2\overline{OB} + u_3\overline{OC}, \\ u_1 + u_2 + u_3 &= 0. \end{aligned} \right. \quad (1.5) \end{aligned}$$

В частности, когда точка  $O$  совпадает с точкой  $C$ , то

$$\overline{MN} = u_1\overline{CA} + u_2\overline{CB}.$$

Это значит, что первые две из Б-координат вектора совпадают соответственно с аффинными координатами этого вектора относительно базиса  $(\overline{CA}, \overline{CB})$ . Отсюда и из соотношения (1.4) следует критерий: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответственные Б-координаты пропорциональны.

## § 2. Бариеентрические формулы длины вектора и скалярного произведения векторов

**2.1. Длина вектора.** Используя формулу (1.5), находим:

$$\begin{aligned} \overline{MN}^2 &= u_1^2\overline{OA}^2 + u_2^2\overline{OB}^2 + u_3^2\overline{OC}^2 + u_1u_2 \cdot 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \\ &\quad + u_1u_3 \cdot 2\overline{OA} \cdot \overline{OC} + u_2u_3 \cdot 2\overline{OB} \cdot \overline{OC}. \end{aligned}$$

Обозначим длины сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  базисного треугольника  $ABC$  соответственно  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . По теореме косинусов получаем:

$$\begin{aligned} \overline{MN}^2 &= u_1^2 \overline{OA}^2 + u_2^2 \overline{OB}^2 + u_3^2 \overline{OC}^2 + u_1 u_2 (\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - c^2) + \\ &\quad + u_1 u_3 (\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - b^2) + u_2 u_3 (\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - a^2) = \\ &= (\overline{OA}^2 u_1 + \overline{OB}^2 u_2 + \overline{OC}^2 u_3)(u_1 + u_2 + u_3) - \\ &\quad - a^2 u_2 u_3 - b^2 u_1 u_3 - c^2 u_1 u_2, \quad \text{так как } u_1 + u_2 + u_3 = 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\overline{MN}^2 = -a^2 u_2 u_3 - b^2 u_1 u_3 - c^2 u_1 u_2. \quad (1.6)$$

В канонической БСК  $a = b = c = 1$ , поэтому

$$MN^2 = -(u_2 u_3 + u_1 u_3 + u_1 u_2). \quad (1.7)$$

Равенство  $u_1 + u_2 + u_3 = 0$  эквивалентно  $-(u_2 u_3 + u_3 u_1 + u_1 u_2) = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$ . Следовательно, формула (1.7) принимает вид:

$$MN^2 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2). \quad (1.8)$$

Если в качестве базисного треугольника взять прямоугольный треугольник с катетами  $a = b = 1$  (тогда  $c = \sqrt{2}$ ) и выполнить замену  $-u_3 = u_1 + u_2$ , то из общей формулы (1.6) получим общеизвестную формулу расстояния между двумя точками в прямоугольных декартовых координатах:  $MN^2 = u_1^2 + u_2^2$ .

**2.2. Скалярное произведение векторов.** Для любых векторов  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  очевидно равенство:

$$2\bar{u}\bar{v} = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 - (\bar{u} - \bar{v})^2.$$

Если  $(u_1, u_2, u_3)$  и  $(v_1, v_2, v_3)$  — тройки их Б-координат, то согласно формуле (1.6) имеем:

$$\begin{aligned} 2\bar{u}\bar{v} &= -a^2 u_2 u_3 - b^2 u_3 u_1 - c^2 u_1 u_2 - a^2 v_2 v_3 - b^2 v_3 v_1 - c^2 v_1 v_2 + \\ &\quad + a^2 (u_2 - v_2)(u_3 - v_3) + b^2 (u_3 - v_3)(u_1 - v_1) + c^2 (u_1 - v_1)(u_2 - v_2). \end{aligned}$$

После упрощений получаем окончательно:

$$2\bar{u}\bar{v} = -a^2 (u_2 v_3 + u_3 v_2) - b^2 (u_3 v_1 + u_1 v_3) - c^2 (u_1 v_2 + u_2 v_1). \quad (1.9)$$

Для канонической БСК и при использовании равенства (1.4)

$$2\bar{u}\bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (1.10)$$

Формула (1.9) дает своим следствием критерий ортогональности векторов  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$ :

$$a^2 (u_2 v_3 + u_3 v_2) + b^2 (u_3 v_1 + u_1 v_3) + c^2 (u_1 v_2 + u_2 v_1) = 0. \quad (1.11)$$



Для канонической БСК этот критерий упрощается:

$$u_1(v_2 + v_3) + u_2(v_3 + v_1) + u_3(v_1 + v_2) = 0$$

и с учетом условия (1.4) будет таким:

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0. \quad (1.12)$$

Формула для косинуса угла между векторами в канонической БСК имеет обычный вид:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}}. \quad (1.13)$$

### § 3. Бариецентрическое уравнение прямой на плоскости

**3.1. Связь аффинного и бариецентрического уравнений прямой.** Пусть дано аффинное уравнение  $Ax + By + C = 0$  прямой. Найдем уравнение этой прямой в бариецентрических координатах, если обе системы координат связаны естественным образом (п. 1.1):  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $1 - x - y = x_3$ . Тогда данное уравнение можно представить в виде:

$$Ax_1 + Bx_2 + (x_1 + x_2 + x_3)C = 0,$$

или

$$(A + C)x_1 + (B + C)x_2 + Cx_3 = 0. \quad (1.14)$$

Это и есть бариецентрическое уравнение данной прямой. Оно является однородным линейным.

Обратно, пусть дано однородное линейное уравнение

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

в бариецентрических координатах. Оно является уравнением некоторой прямой, так как при переходе к аффинным координатам  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = 1 - x - y$  оно принимает вид:  $u_1x + u_2y + u_3(1 - x - y) = 0$ , или

$$(u_1 - u_3)x + (u_2 - u_3)y + u_3 = 0. \quad (1.15)$$

Существенно, что в бариецентрическом уравнении

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

исключается случай равенства  $u_1 = u_2 = u_3$  всех трех коэффициентов, поскольку оно привелось бы к виду  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , что противоречит обязательному условию  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .

Таким образом, *однородное линейное уравнение в бариецентрических координатах задает прямую тогда и только тогда, когда не все его коэффициенты равны между собой.*

### 3.2. Уравнения прямой при аффинных способах ее задания.

Пусть в заданной БСК даны точки  $A(a_1, a_2, a_3)$  и  $B(b_1, b_2, b_3)$  своими координатами. Требуется найти уравнение содержащей их прямой, т. е. найти коэффициенты  $u_i$  искомого уравнения  $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$  прямой  $AB$ . По условию  $u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 = 0$  и  $u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3 = 0$ . Рассмотрим систему уравнений относительно искомым коэффициентов  $u_i$ :

$$\begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \\ u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 = 0, \\ u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3 = 0. \end{cases}$$

Она имеет ненулевое решение  $(u_1, u_2, u_3)$  тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (1.16)$$

где  $x_i$  — Б-координаты произвольной точки прямой  $AB$ . Поэтому это и есть искомое ее уравнение. Его можно написать в виде:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = 0. \quad (1.17)$$

Эти определители не могут быть все равными, поскольку данные точки  $A$  и  $B$  различны.

Вектор  $\overline{AB} = \bar{p}$  с координатами

$$p_1 = b_1 - a_1, \quad p_2 = b_2 - a_2, \quad p_3 = b_3 - a_3,$$

очевидно, является направляющим вектором прямой  $AB$ . Вычитанием двух исходных равенств получаем:

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0. \quad (1.18)$$

Обратно, если дан вектор  $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$ , для которого выполняется условие (1.18), то этот вектор является направляющим вектором прямой  $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ . Действительно, из системы

$$\begin{cases} u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 0 \end{cases}$$

находим:  $p_1 : p_2 : p_3 = (u_2 - u_3) : (u_3 - u_1) : (u_1 - u_2)$ . Но согласно аффинному уравнению (1.15) числа  $u_2 - u_3$  и  $u_3 - u_1$  суть аффинные координаты некоторого направляющего вектора прямой.

Таким образом, равенство (1.18) является *критерием параллельности вектора и прямой*.

Повторяя рассуждения при выводе уравнения (1.16) прямой по двум ее точкам запишем сразу аналогичное уравнение прямой, проходящей через данную точку  $M(m_1, m_2, m_3)$  параллельно заданному вектору  $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.19)$$

Критерием параллельности прямых

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \quad \text{и} \quad v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$$

служит коллинеарность их направляющих векторов:

$$\frac{u_2 - u_3}{v_2 - v_3} = \frac{u_3 - u_1}{v_3 - v_1},$$

что эквивалентно

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.20)$$

**3.3. Критерий принадлежности трех прямых одному пучку.** *Пучком прямых* называется множество всех прямых плоскости, имеющих общую точку (*собственный пучок*) или параллельных одной прямой (*несобственный пучок*). Во втором случае существует общий направляющий вектор прямых пучка.

Пусть три прямые заданы Б-уравнениями:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0,$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0.$$

Эти прямые принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда существует точка  $(m_1, m_2, m_3)$  или вектор  $(m_1, m_2, m_3)$  такие, что выполняются равенства:

$$\begin{cases} a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 = 0, \\ b_1m_1 + b_2m_2 + b_3m_3 = 0, \\ c_1m_1 + c_2m_2 + c_3m_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет ненулевое решение при условии

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.21)$$

При этом для выделения случая принадлежности трех данных прямых пучку параллельных прямых можно использовать критерий (1.20) для любых двух из этих прямых.

**3.4. Уравнение прямой по точке и нормальному вектору в канонической БСК.** Пусть прямая задана точкой  $M(m_1, m_2, m_3)$  и нормальным вектором  $\bar{n}(n_1, n_2, n_3)$ . Для любой точки  $X(x_1, x_2, x_3)$  этой прямой векторы  $\overline{MX}$  и  $\bar{n}$  ортогональны. Согласно критерию (1.12)

$$n_1(x_1 - m_1) + n_2(x_2 - m_2) + n_3(x_3 - m_3) = 0. \quad (1.22)$$

Так как вектор  $\bar{p} = (n_2 - n_3, n_3 - n_1, n_1 - n_2)$  является направляющим вектором этой прямой ( $\bar{n}\bar{p} = 0$ ), то на основании (1.19) уравнение

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_2 - n_3 & n_3 - n_1 & n_1 - n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.23)$$

есть уравнение той же прямой. В отличие от предыдущего оно имеет однородный вид. Для приведения к этому виду уравнения (1.23) достаточно умножить его свободный член на  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .

Составим уравнение прямой, проходящей через данную точку  $M(m_1, m_2, m_3)$  перпендикулярно прямой  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ . Вектор  $(b - c, c - a, a - b)$  будет нормальным вектором искомой прямой и на основании (1.22) получаем уравнение искомой прямой:

$$(b - c)(x_1 - m_1) + (c - a)(x_2 - m_2) + (a - b)(x_3 - m_3) = 0. \quad (1.24)$$

## § 4. Бариецентрические координаты некоторых замечательных точек треугольника

**4.1. Две вспомогательные формулы.** Предварительно получим две формулы для вычисления ненормированных Б-координат точек по заданным отношениям отрезков. Пусть точка  $M$  принадлежит чевиане  $CD$  базисного треугольника  $ABC$  и известны отношения

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} = \gamma.$$

Найдем координаты точки  $M$  (рис. 3). По координатным формулам деления отрезка в заданном отношении находим ненормированные Б-координаты точки  $D(1 : \alpha : 0)$

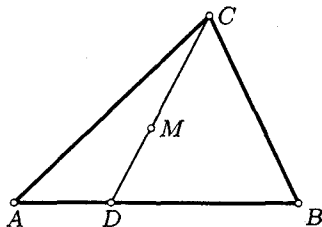


Рис. 3

и затем точки  $M$ :

$$M(\gamma : \alpha\gamma : (1 + \alpha)). \quad (1.25)$$

Нормирующий делитель равен

$$\gamma + \alpha\gamma + 1 + \alpha = (1 + \alpha)(1 + \gamma).$$

Для центра  $G$  треугольника  $ABC$  отношения  $\alpha = 1$  и  $\gamma = 2$ , поэтому  $G(2 : 2 : 2)$ , откуда  $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

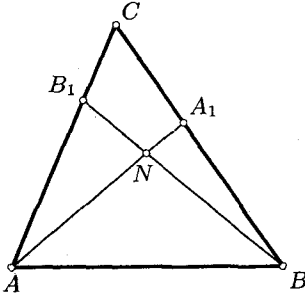


Рис. 4

Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  — две чевианы базисного треугольника (рис. 4) и даны отношения  $\frac{BA_1}{A_1C} = \alpha$  и  $\frac{AB_1}{B_1C} = \beta$ . Тогда точки  $A_1$  и  $B_1$  имеют ненормированные Б-координаты  $(0 : 1 : \alpha)$  и  $(1 : 0 : \beta)$  соответственно, а прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  — уравнения:  $x_3 - \alpha x_2 = 0$  и  $x_3 - \beta x_1 = 0$ . Поэтому точка  $N$  их пересечения получает ненормированные координаты:

$$N(\alpha : \beta : \alpha\beta). \quad (1.26)$$

При  $\alpha = \beta = 1$  повторно получаем координаты  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  центра  $G$ .

**4.2. Координаты ортоцентра треугольника.** Известно, что ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  делит его высоту  $CD$  в отношении  $\gamma = \frac{CH}{HD} = \frac{\cos C}{\cos A \cos B}$ , а сторону  $AB$  в отношении  $\alpha = \frac{b \cos A}{a \cos B}$  (см. [4], с. 41). Так как  $1 + \alpha = \frac{b \cos A + a \cos B}{a \cos B} = \frac{c}{a \cos B}$ ,  $\alpha\gamma = \frac{c}{a \cos^2 B}$ , то согласно (1.25)  $\gamma : \alpha\gamma : (1 + \alpha) = \frac{\cos C}{\cos A} : \frac{b \cos C}{a \cos B} : \frac{c}{a} = \frac{a}{\cos A} : \frac{c}{\cos B} : \frac{c}{\cos C}$ . По теореме синусов  $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ . Следовательно,

$$H(\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C). \quad (1.27)$$

**4.3. Координаты центров вписанной и описанной окружностей.** По свойству биссектрис треугольника

$$\alpha = \frac{c}{b}, \quad \beta = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c^2}{ab}.$$

Тогда на основании формулы (1.26) центр  $J$  вписанной в базисный треугольник  $ABC$  окружности имеет ненормированные Б-координаты

$$\frac{c}{b} : \frac{c}{a} : \frac{c^2}{ab} = \frac{1}{b} : \frac{1}{a} : \frac{c}{ab} = a : b : c.$$

После нормировки получаем:

$$J\left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p}\right), \quad 2p = a + b + c. \quad (1.28)$$

Для нахождения Б-координат центра  $O$  описанной окружности воспользуемся их выражениями (1.2):

$$\lambda_1 = \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 \sin 2A}{2S}, \quad \lambda_2 = \frac{R^2 \sin 2B}{2S}, \quad \lambda_3 = \frac{R^2 \sin 2C}{2S}.$$

Поэтому

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C, \quad O(\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C). \quad (1.29)$$

Из нормировки  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  следует, что для любого треугольника истинно тождество:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2} = \frac{abc}{2R^3}. \quad (1.30)$$

**4.4. Точка Жергона треугольника.** В треугольник  $ABC$  впишем окружность, которая касается сторон в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Длины отрезков касательных обозначим согласно рис. 5. На основании теоремы Чевы прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке  $F$ . Эта точка называется *точкой Жергона* треугольника  $ABC$ .

Выразим ее Б-координаты относительно этого треугольника через длины  $a, b, c$  его сторон, пользуясь формулой (1.26). Для данного случая

$$\alpha = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{b_1}{c_1}, \quad \beta = \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{a_1}{c_1}.$$

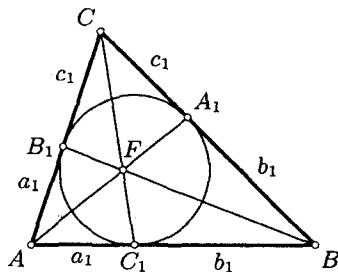


Рис. 5

Следовательно,

$$\alpha : \beta : \alpha\beta = \frac{b_1}{c_1} : \frac{a_1}{c_1} : \frac{a_1 b_1}{c_1^2} = b_1 c_1 : c_1 a_1 : a_1 b_1 = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{b_1} : \frac{1}{c_1}.$$

Поскольку  $a_1 + b_1 + c_1 = p$  и  $b_1 + c_1 = a$ , то  $a_1 = p - a$  и аналогично  $b_1 = p - b$ ,  $c_1 = p - c$ . Таким образом,

$$F\left(\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c}\right). \quad (1.31)$$

## § 5. Бариецентрические координаты точки и вектора пространства относительно тетраэдра

**5.1. Обзор ранее изложенного.** Во втором томе «Элементарной геометрии» (см. [5], с. 102—104) § 4 гл. 6 посвящен этой теме. В нем

имеются начальные сведения о барицентрических координатах в пространстве. Настоятельно рекомендуем читателю освежить в памяти этот материал. Здесь для связи с дальнейшим изложением приводится обзор известных определений и формул.

Пусть даны тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$  и точка  $P$  пространства. Тогда для любой точки  $O$  имеют место равенства:

$$\begin{cases} \overline{OP} = \lambda_1\overline{OA_1} + \lambda_2\overline{OA_2} + \lambda_3\overline{OA_3} + \lambda_4\overline{OA_4}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \end{cases} \quad (1.32)$$

причем при заданной точке  $P$  числа  $\lambda_i$  не зависят от выбора точки  $O$ . Эти числа  $\lambda_i$  называются *барицентрическими координатами* точки  $P$  относительно данного (базисного) тетраэдра.

Каждая координата  $\lambda_i$  равна отношению объемов двух ориентированных тетраэдров: объема тетраэдра, полученного заменой соответствующей вершины  $A_i$  базисного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  точкой  $P$ , к объему тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ . Отношения этих объемов равны также  $\lambda_i = \frac{x_i}{h_i}$ , где  $x_i$  — ориентированные расстояния точки  $P$  до плоскостей граней базисного тетраэдра. За положительное направление принимается направление соответствующей высоты  $h_i$  тетраэдра от его вершины к противоположной грани. Следовательно,

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1. \quad (1.33)$$

Это тождество эквивалентно такому:

$$x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3 + x_4S_4 = 3V. \quad (1.34)$$

Числа  $x_i$  называются *нормальными координатами* точки  $P$  относительно тетраэдра.

Доказана формула расстояния между точками  $M$  и  $P$ :

$$MP^2 = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \rho_i^2 - \sum_{i,j=1}^4 \lambda_i \lambda_j a_{ij}^2, \quad i < j, \quad (1.35)$$

где  $\lambda_i$  — барицентрические координаты точки  $P$ ,  $\rho_i = MA_i$ ,  $a_{ij} = A_iA_j$ .

На основании этой формулы получены соотношения:

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{16} \sum_{i,j=1}^4 a_{ij}^2, \quad i < j, \quad (1.36)$$

$$\sum_{i=1}^4 GA_i^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 a_{ij}^2, \quad i < j, \quad (1.37)$$

$$\sum_{i=1}^4 G_iA_i^2 = \frac{4}{9} \sum_{i=1}^4 a_{ij}^2, \quad i < j, \quad (1.38)$$

где  $O$  — центр описанной около тетраэдра сферы (радиуса  $R$ );  $G$  — его центроид,  $G_i$  — центроиды его граней.

**5.2. Длина отрезка и скалярное произведение векторов пространства в Б-координатах.** Пусть точки  $A(x_i)$  и  $B(y_i)$  заданы своими Б-координатами относительно базисного тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ . Первые три координаты каждой точки совпадают с ее аффинными координатами в аффинной системе с началом  $A_4$  и базисными векторами  $\overline{A_4A_1}$ ,  $\overline{A_4A_2}$ ,  $\overline{A_4A_3}$ . Поэтому  $\overline{AB} = \sum_1^3 (y_i - x_i) \overline{A_4A_i}$ . Находим

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= (y_1 - x_1)^2 a_{41}^2 + (y_2 - x_2)^2 a_{42}^2 + (y_3 - x_3)^2 a_{43}^2 + \\ &+ \sum_{i,j=1}^3 2(y_i - x_i)(y_j - x_j) \overline{A_4A_i} \cdot \overline{A_4A_j}, \quad i < j. \end{aligned}$$

По теореме косинусов  $2\overline{A_4A_i} \cdot \overline{A_4A_j} = a_{4i}^2 + a_{4j}^2 - a_{ij}^2$ . Кроме того,  $(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + (y_3 - x_3) = x_4 - y_4$ . После подстановок и упрощений получаем

$$AB^2 = - \sum_{i,j=1}^4 (y_i - x_i)(y_j - x_j) a_{ij}^2, \quad i < j. \quad (1.39)$$

Числа  $u_i = y_i - x_i$  есть по определению *барицентрические координаты* вектора  $\overline{AB}$ , причем

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0. \quad (1.40)$$

Тогда формула (1.39) принимает вид:

$$AB^2 = - \sum_{i,j=1}^4 u_i u_j a_{ij}^2, \quad i < j. \quad (1.41)$$

Общая барицентрическая система координат (БСК) часто оказывается обременительной (в метрических задачах) для вычислений, поэтому целесообразнее пользоваться канонической барицентрической системой координат (КБСК), в которой базисный тетраэдр имеет единичные ребра.

Из равенства (1.40) следует, что

$$-(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4) = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2).$$

Поэтому для КБСК формула (1.41) значительно упрощается:

$$AB^2 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2). \quad (1.42)$$

Далее, пусть векторы  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3, u_4)$  и  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3, v_4)$  заданы своими Б-координатами. На основании тождества  $2\vec{u}\vec{v} = u^2 + v^2 - (u - v)^2$ ,



пользуясь формулами (1.41) и (1.42), получаем координатные формулы скалярного произведения векторов для БСК и КБСК соответственно:

$$2\bar{u}\bar{v} = - \sum_{i,j=1}^4 (u_i v_j + v_i u_j) a_{ij}^2, \quad i < j, \quad (1.43)$$

$$2\bar{u}\bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4. \quad (1.44)$$

Как следствие имеем привычную формулу для канонической БСК:

$$\cos(\widehat{\bar{u}, \bar{v}}) = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2)}}. \quad (1.45)$$

## § 6. Бариецентрическое уравнение плоскости

**6.1. Связь аффинного и бариецентрического уравнений плоскости.** Пусть дано уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$  плоскости в аффинных координатах. Вследствие того, что первые три аффинные координаты точки совпадают с ее Б-координатами, данное уравнение плоскости можно записать в таком виде:

$$A\lambda_1 + B\lambda_2 + C\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)D = 0,$$

или

$$(A + D)\lambda_1 + (B + D)\lambda_2 + (C + D)\lambda_3 + D\lambda_4 = 0. \quad (1.46)$$

Обратно, если дано линейное однородное уравнение в бариецентрических координатах  $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ , то оно эквивалентно уравнению  $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + (1 - x_1 - x_2 - x_3)u_4 = 0$ , или

$$(u_1 - u_4)x_1 + (u_2 - u_4)x_2 + (u_3 - u_4)x_3 + u_4 = 0. \quad (1.47)$$

Это уравнение определяет некоторую плоскость, поскольку  $x_1, x_2, x_3$  — аффинные координаты точки.

Итак, *линейное однородное уравнение в Б-координатах является уравнением плоскости, если только в нем имеются хотя бы два неравных между собой коэффициента* (ибо уравнение  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  не имеет геометрического смысла). *Обратно, любая плоскость может быть представлена линейным однородным бариецентрическим уравнением.*

**6.2. Бариецентрическое уравнение плоскости при аффинных способах ее задания.** Пусть плоскость задана тремя неколлинеарными точками  $A(a_i), B(b_i), C(c_i)$ , где  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — их

Б-координаты. Тогда система:

$$\begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \\ u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 + u_4a_4 = 0, \\ u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3 + u_4b_4 = 0, \\ u_1c_1 + u_2c_2 + u_3c_3 + u_4c_4 = 0, \end{cases}$$

где  $u_i$  — искомые коэффициенты уравнения плоскости, имеет ненулевое решение при необходимом и достаточном условии:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.48)$$

Это и есть искомое уравнение плоскости, содержащей три данные точки. Среди определителей третьего порядка, составленных из координат данных точек, существует хотя бы один, не равный нулю.

**Пример.** Пусть  $ABCD$  — базисный тетраэдр системы координат:  $A(1, 0, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0, 0)$ ,  $C(0, 0, 1, 0)$ . Тогда согласно (1.48) плоскость грани  $ABC$  имеет уравнение  $x_4 = 0$ . Аналогично три другие грани базисного тетраэдра имеют уравнения:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

Пусть дано уравнение плоскости

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

Аналогично (1.18) вектор  $\vec{p}(p_1, p_2, p_3, p_4)$  параллелен этой плоскости тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 + u_4p_4 = 0. \quad (1.49)$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 + u_4p_4 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \end{cases}$$

находим координаты четырех направляющих векторов данной плоскости (с точностью до ненулевого множителя):

$$\begin{aligned} & (0, u_3 - u_4, u_4 - u_2, u_2 - u_3), \\ & (u_3 - u_4, 0, u_4 - u_1, u_1 - u_3), \\ & (u_4 - u_2, u_1 - u_4, 0, u_2 - u_1), \\ & (u_2 - u_3, u_3 - u_1, u_1 - u_2, 0). \end{aligned} \quad (1.50)$$

В полной аналогии с выводом уравнения (1.48) получаем уравнение плоскости, заданной точкой  $M(m_i)$  и двумя неколлинеарными направляющими векторами  $\vec{p}(p_i)$  и  $\vec{q}(q_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.51)$$

**6.3. Критерий принадлежности четырех плоскостей одной связке.** *Связкой плоскостей* называется множество всех плоскостей, имеющих общую точку или параллельных одной прямой. Поскольку принадлежность точки данной плоскости и параллельность вектора этой плоскости представляется равенствами одного и того же вида, то по аналогии с п. 3.3 заключаем: *для того, чтобы четыре плоскости*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0,$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = 0,$$

$$d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 = 0$$

*принадлежали одной связке, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.52)$$

## § 7. Нормальный вектор плоскости

**7.1. Координаты нормального вектора плоскости в канонической БСК.** Если среди коэффициентов  $u_i$  уравнения плоскости нет равных, то любые два из ее направляющих векторов (1.50) неколлинеарны. Однако, например, при  $u_1 = u_2$  третий и четвертый из этих векторов коллинеарны. Если вектор  $\vec{n}(n_i)$  ортогонален двум неколлинеарным векторам из (1.50), то он ортогонален плоскости

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

Из системы

$$\begin{cases} n_1 \cdot 0 + n_2(u_3 - u_4) + n_3(u_4 - u_2) + n_4(u_2 - u_3) = 0, \\ n_1(u_3 - u_4) + n_2 \cdot 0 + n_3(u_4 - u_1) + n_4(u_1 - u_3) = 0, \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 0 \end{cases}$$

получаем

$$n_1 : n_2 : n_3 : n_4 = (3u_1 - u_2 - u_3 - u_4) : (3u_2 - u_1 - u_3 - u_4) : \\ (3u_3 - u_1 - u_2 - u_4) : (3u_4 - u_1 - u_2 - u_3). \quad (1.53)$$

В частности, нормальные векторы плоскостей граней базисного (правильного) тетраэдра имеют координаты  $(-3, 1, 1, 1)$ ,  $(1, -3, 1, 1)$ ,  $(1, 1, -3, 1)$ ,  $(1, 1, 1, -3)$ .

Плоскость, заданная точкой  $M(m_i)$  и нормальным вектором  $\vec{n}(n_i)$ , имеет в канонической БСК такое уравнение:

$$n_1(x_1 - m_1) + n_2(x_2 - m_2) + n_3(x_3 - m_3) + n_4(x_4 - m_4) = 0, \quad (1.54)$$

которое можно привести к однородному виду, умножив его свободный член на  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ .

**7.2. Расстояние от точки до плоскости.** Выведем формулу расстояния  $d$  от точки  $M(m_i)$  до плоскости  $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$  в канонической БСК, пользуясь координатами (1.53) нормального вектора  $\vec{n}$ .

Согласно (1.44) имеем:

$$2d|\vec{n}| = |(x_1 - m_1)n_1 + (x_2 - m_2)n_2 + (x_3 - m_3)n_3 + (x_4 - m_4)n_4|,$$

где  $x_i$  — координаты ортогональной проекции точки  $M$  на данную плоскость. Выполнив подстановки (1.53), получим:

$$2d|\vec{n}| = 4|(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4) - \\ - (u_1m_1 + u_2m_2 + u_3m_3 + u_4m_4)| = 4|u_1m_1 + u_2m_2 + u_3m_3 + u_4m_4|.$$

На основании (1.42)  $2|\vec{n}| = \sqrt{2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2)}$  и поэтому получаем:

$$d = \frac{4|u_1m_1 + u_2m_2 + u_3m_3 + u_4m_4|}{\sqrt{2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2)}} \quad (1.55)$$

где

$$n_1 = 3u_1 - u_2 - u_3 - u_4, \quad n_2 = 3u_2 - u_1 - u_3 - u_4, \\ n_3 = 3u_3 - u_1 - u_2 - u_4, \quad n_4 = 3u_4 - u_1 - u_2 - u_3.$$

Можно освободиться от координат  $n_i$  вектора  $\vec{n}$ , найдя

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = \sum_{i=1}^4 (4u_i - (u_1 + u_2 + u_3 + u_4))^2.$$

Тогда имеем окончательно:

$$d = \frac{4|u_1m_1 + u_2m_2 + u_3m_3 + u_4m_4|}{\sqrt{2 \sum_{i=1}^4 (4u_i - (u_1 + u_2 + u_3 + u_4))^2}}. \quad (1.56)$$

**З а д а ч а.** Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного тетраэдра до плоскости, содержащей его центр, не зависит от выбора плоскости.

**Р е ш е н и е.** Примем данный тетраэдр за базисный тетраэдр КБСК. Так как плоскость  $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$  содержит его центр  $G\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ , то  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ . По формуле (1.56) расстояния  $d_i$  от вершин  $A_i$  тетраэдра до этой плоскости равны числам

$$d_i = \frac{4|u_i|}{\sqrt{2 \cdot 16(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)}}.$$

Поэтому искомая сумма их квадратов равна

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = \frac{1}{2}$$

независимо от выбора плоскости. За единицу принята длина ребра тетраэдра.

## § 8. Барицентрические уравнения описанной окружности треугольника и описанной сферы тетраэдра

**8.1. Уравнение описанной окружности.** На основании формулы расстояния окружность с центром  $J(m_1, m_2, m_3)$  радиуса  $R$  имеет барицентрическое уравнение

$$a^2(x_2 - m_2)(x_3 - m_3) + b^2(x_1 - m_1)(x_3 - m_3) + c^2(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) = -R^2,$$

где  $a, b, c$  — длины сторон базисного треугольника  $ABC$ . Так как окружность проходит через точки  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ , то после подстановки их координат в уравнение окружности получаем последовательно

$$b^2m_3 + c^2m_2 = Q, \quad a^2m_3 + c^2m_1 = Q, \quad a^2m_2 + b^2m_1 = Q,$$

где  $Q = a^2m_2m_3 + b^2m_3m_1 + c^2m_1m_2 + R^2$ . После раскрытия скобок уравнение окружности принимает вид:

$$a^2x_2x_3 + b^2x_1x_3 + c^2x_1x_2 + Q - Q(x_1 + x_2 + x_3) = 0.$$

Так как  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , то оно упрощается и имеет вид:

$$a^2x_2x_3 + b^2x_1x_3 + c^2x_1x_2 = 0. \tag{1.57}$$

**8.2. Уравнение описанной сферы.** Сфера с центром  $O(m_1, m_2, m_3, m_4)$  радиуса  $R$  на основании формулы (1.39) имеет уравнение

$$\sum_{i,j=1}^4 a_{ij}^2 (x_i - m_i)(x_j - m_j) = -R^2, \quad i < j, \quad (1.58)$$

или в подробной записи:

$$\begin{aligned} a_{12}^2 x_1 x_2 + a_{13}^2 x_1 x_3 + a_{14}^2 x_1 x_4 + a_{23}^2 x_2 x_3 + a_{24}^2 x_2 x_4 + a_{34}^2 x_3 x_4 - \\ - (a_{12}^2 m_2 + a_{13}^2 m_3 + a_{14}^2 m_4) x_1 - (a_{23}^2 m_3 + a_{24}^2 m_4) x_2 - \\ - a_{34}^2 m_4 x_3 - a_{41}^2 m_1 x_4 + D = 0, \end{aligned}$$

где  $D = \sum_{i,j=1}^4 m_i m_j + R^2$ . Поскольку точки  $A_1(1, 0, 0, 0)$ ,  $A_2(0, 1, 0, 0)$ ,

$A_3(0, 0, 1, 0)$ ,  $A_4(0, 0, 0, 1)$  лежат на сфере, справедливы равенства  $a_{12}^2 m_2 + a_{13}^2 m_3 + a_{14}^2 m_4 = D$ ,  $a_{23}^2 m_3 + a_{24}^2 m_4 = D$ ,  $a_{34}^2 m_4 = D$ ,  $a_{41}^2 m_1 = D$ .

При подстановке этих выражений в уравнение сферы оно принимает вид:

$$\sum_{i,j=1}^4 a_{ij}^2 x_i x_j - D(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + D = 0.$$

Так как  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ , имеем окончательно барицентрическое уравнение сферы, описанной около базисного тетраэдра:

$$\sum_{i,j=1}^4 a_{ij}^2 x_i x_j = 0, \quad i < j. \quad (1.59)$$

Очень краткий вывод этого уравнения получается при использовании формулы (1.35) расстояния между точками. Если точка  $M$  совпадает с центром описанной сферы, а точка  $P$  — произвольная точка этой сферы, то по формуле (1.35) сразу получаем:

$$R^2 = R^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - \sum_{i,j=1}^4 \lambda_i \lambda_j a_{ij}^2,$$

откуда

$$\sum_{i,j=1}^4 \lambda_i \lambda_j a_{ij}^2 = 0, \quad i < j.$$

**8.3. Б-координаты центра описанной сферы.** На основании общих аффинных формул Б-координат точки (см. [5] с. 103), для центра  $O$  описанной около тетраэдра  $A_1 A_2 A_3 A_4$  сферы имеем

$$\lambda_1 = \frac{V_{O A_2 A_3 A_4}}{V_{A_1 A_2 A_3 A_4}}.$$

По первой и второй формулам Штаудта для объема тетраэдра  $6V_{OA_2A_3A_4} = R^3 \cdot \Delta_1(OA_2A_3A_4)$  и  $6VR = Q$ , где  $Q$  — площадь треугольника, длины сторон которого равны численно произведениям длин противоположных ребер тетраэдра (см. [5], с. 97, с. 100),  $\Delta_1$  — синус Штаудта трехгранного угла с вершиной  $O$  тетраэдра  $OA_2A_3A_4$ . Следовательно,

$$\lambda_1 = \frac{R^3 \Delta_1 \cdot R}{Q} = \frac{R^4}{Q} \Delta_1.$$

Величина  $\frac{R^4}{Q}$  не зависит от выбора вершины тетраэдра, поэтому

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta_4. \quad (1.60)$$

Итак, ненормированные барицентрические координаты центра  $O$  описанной около базисного тетраэдра сферы пропорциональны синусам Штаудта триэдров с вершиной  $O$  противоположных вершинам базисного тетраэдра.

## § 9. Примеры решения задач методом барицентрических координат

Для иллюстрации применения барицентрических координат рассмотрим решения следующих четырех задач.

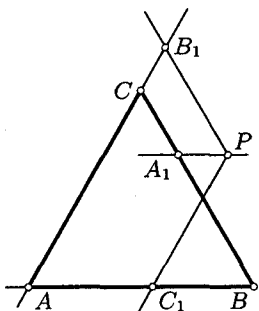


Рис. 6

**Задача 1.** Через произвольную точку  $P$  плоскости данного треугольника  $ABC$  проведены прямые, параллельные сторонам  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  — и пересекающие прямые  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно (рис. 6). Докажите, что

$$\frac{\overline{PA_1}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{PB_1}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{PC_1}}{\overline{CA}} = 1.$$

**Решение.** Примем треугольник  $ABC$  за базисный треугольник БСК. Пусть точка  $P$  имеет координаты  $(p_1, p_2, p_3)$ . Если площадь треугольника  $ABC$  положить равной 1, то точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  согласно формулам (1.2) получают координаты:  $A_1(0, 1 - p_3, p_3)$ ,  $B_1(p_1, 0, 1 - p_1)$ ,  $C_1(1 - p_2, p_2, 0)$ . Так как  $\overline{AB} = (-1, 1, 0)$ ,  $\overline{BC} = (0, -1, 1)$ ,  $\overline{CA} = (1, 0, -1)$  и  $\overline{PA_1} = (-p_1, 1 - p_3 - p_2, 0)$ ,  $\overline{PB_1} = (0, -p_2, 1 - p_1 - p_3)$ ,  $\overline{PC_1} = (1 - p_2 - p_1, 0, -p_3)$ , получаем:

$$\frac{\overline{PA_1}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{PB_1}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{PC_1}}{\overline{CA}} = \frac{-p_1}{-1} + \frac{-p_2}{-1} + \frac{-p_3}{-1} = p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Можно было бы использовать и отношения других соответственных координат коллинеарных векторов, исключая нулевые координаты.

**Задача 2.** На ребрах  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  тетраэдра  $ABCD$  даны соответственно точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Найдите координаты точки  $M$  пересечения плоскостей  $BCA_1$ ,  $ACB_1$ ,  $ABC_1$  относительно данного тетраэдра, если

$$\frac{\overline{DA_1}}{\overline{A_1A}} = \alpha, \quad \frac{\overline{DB_1}}{\overline{B_1B}} = \beta, \quad \frac{\overline{DC_1}}{\overline{C_1C}} = \gamma.$$

**Решение.** По заданным отношениям находим ненормированные Б-координаты точек  $A_1(\alpha : 0 : 0 : 1)$ ,  $B_1(0 : \beta : 0 : 1)$ ,  $C_1(0 : 0 : \gamma : 1)$  и затем уравнения плоскостей  $BCA_1$ ,  $ACB_1$ ,  $ABC_1$  по трем точкам:

$$x_1 - \alpha x_4 = 0, \quad x_2 - \beta x_4 = 0, \quad x_3 - \gamma x_4 = 0,$$

откуда получаем искомый ответ в ненормированных координатах:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \alpha : \beta : \gamma : 1.$$

Следовательно, точка  $M$  имеет координаты

$$M\left(\frac{\alpha}{\sigma}, \frac{\beta}{\sigma}, \frac{\gamma}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right), \quad \text{где } \sigma = \alpha + \beta + \gamma + 1.$$

**Задача 3.** Противоположные стороны шестиугольника попарно параллельны. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке (рис. 7).

**Решение.** Пусть шестиугольник  $AB_1CA_1BC_1$  удовлетворяет условиям задачи. Примем треугольник  $ABC$  в качестве базисного:  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ . Обозначим координаты вершин:  $A_1(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B_1(b_1, b_2, b_3)$ ,  $C_1(c_1, c_2, c_3)$ . Вследствие коллинеарности векторов  $\overline{AC_1} = (c_1 - 1, c_2, c_3)$  и  $\overline{CA_1} = (a_1, a_2, a_3 - 1)$  имеем:

$$\frac{c_1 - 1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_3}{a_3 - 1},$$

откуда  $a_2c_3 = c_2(a_3 - 1)$  и  $a_1c_2 = a_2(c_1 - 1)$  (\*). По ненормированным координатам точек  $M((1 + c_1) : c_2 : c_3)$  и  $N(a_1 : a_2 : (1 + a_3))$  находим уравнение прямой  $MN$ , соединяющей середины сторон  $AC_1$  и  $CA_1$ :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 + c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & 1 + a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

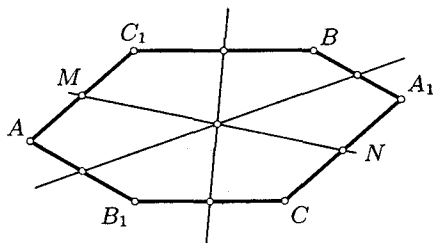


Рис. 7



После раскрытия определителя и с учетом условий (\*) оно приводится к виду:  $c_2x_1 - (c_1 + a_3)x_2 + a_2x_3 = 0$ . Круговой перестановкой букв получаем уравнения двух других средних линий шестиугольника:

$$b_3x_1 + a_3x_2 - (a_2 + b_1)x_3 = 0, \quad -(b_3 + c_2)x_1 + c_1x_2 + b_1x_3 = 0.$$

Проверяем выполнение условия (1.21) принадлежности трех прямых одному пучку:

$$\begin{vmatrix} c_2 & -c_1 - a_3 & a_2 \\ b_3 & a_3 & -a_2 - b_1 \\ -b_3 - c_2 & c_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку сумма всех строк дает строку из нулей.

**Задача 4.** Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки сферы, описанной около правильного тетраэдра, до его вершин не зависит от точки на сфере.

**Решение.** Согласно (1.59) уравнение описанной сферы таково:

$$a^2 \sum_{i,j=1}^4 x_i x_j = 0, \quad i < j.$$

Для любой точки  $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$  этой сферы

$$MA_1^2 = -a^2((x_2 - 1)x_1 + (x_3 - 1)x_1 + (x_4 - 1)x_1 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4).$$

Согласно уравнению сферы

$$x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4).$$

Поэтому  $MA_1^2 = 3a^2x_1$ . Аналогично

$$MA_2^2 = 3a^2x_2, \quad MA_3^2 = 3a^2x_3, \quad MA_4^2 = 3a^2x_4.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^4 MA_i^2 = 3a^2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 3a^2,$$

где  $a$  — длина ребра правильного тетраэдра, при этом  $3a^2 = 8R^2$ .

## Задачи к главе 1

1.1. Докажите, что ненормированные Б-координаты центра описанной окружности треугольника относительно этого треугольника могут быть представлены выражениями:

а)  $a \cos A : b \cos B : c \cos C$ ,

$$6) a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2).$$

Найдите нормирующие делители.

1.2. Докажите, что Б-координаты центра вписанной в тетраэдр сферы пропорциональны площадям его граней.

1.3. Пользуясь барицентрическими координатами, докажите формулу Эйлера  $OJ^2 = R^2 - 2Rr$  для треугольника  $ABC$ , где  $O$  и  $J$  — центры описанной и вписанной окружностей, а  $R$  и  $r$  — их радиусы.

1.4. Вершины треугольника  $A_1B_1C_1$  заданы Б-координатами  $A_1(a_1, a_2, a_3)$ ,  $B_1(b_1, b_2, b_3)$ ,  $C_1(c_1, c_2, c_3)$  относительно данного треугольника  $ABC$ . Произвольная точка  $M$  плоскости имеет координаты  $(x_1, x_2, x_3)$  относительно треугольника  $ABC$  и координаты  $(y_1, y_2, y_3)$  относительно треугольника  $A_1B_1C_1$ . Докажите, что

$$x_i = a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3, \quad i = 1, 2, 3.$$

1.5. Докажите, что для любого тетраэдра имеет место соотношение:

$$OJ^2 = R^2 - r^2 \sum_{i,j=1}^4 \frac{a_{ij}^2}{h_i h_j}, \quad i < j,$$

где  $O$  и  $J$  — центры описанной и вписанной сфер,  $R$  и  $r$  — их радиусы.

1.6. Докажите, что для тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  и любой точки  $P$  выполняется соотношение (теорема Лейбница):

$$\sum_{i=1}^4 PA_i^2 = \sum_{i=1}^4 GA_i^2 + 4PG^2,$$

где  $G$  — центроид тетраэдра.

1.7. Докажите, что расстояние  $d$  от точки  $M(m_1, m_2, m_3)$  до прямой  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$  можно вычислить по формуле в канонической БСК:

$$d = \frac{3|am_1 + bm_2 + cm_3|}{\sqrt{2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)}},$$

где  $n_1 = b + c - 2a$ ,  $n_2 = c + a - 2b$ ,  $n_3 = a + b - 2c$ .

1.8. Докажите, что вписанная окружность базисного треугольника  $ABC$  имеет барицентрическое уравнение:

$$\begin{aligned} ((p-a)x_1 + (p-b)x_2 + (p-c)x_3)^2 = \\ = 4((p-b)(p-c)x_2x_3 + (p-c)(p-a)x_3x_1 + (p-a)(p-b)x_1x_2). \end{aligned}$$

1.9. Докажите, что уравнение

$$x_1^2 bc \cos A + x_2^2 ac \cos B + x_3^2 ab \cos C - a^2 x_2 x_3 - b^2 x_1 x_3 - c^2 x_1 x_2 = 0$$

есть уравнение окружности девяти точек базисного треугольника  $ABC$ .

1.10. Для того, чтобы уравнение в барицентрических координатах  $x_i$

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

было уравнением некоторой окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\frac{2a_{23} - a_{22} - a_{33}}{a^2} = \frac{2a_{13} - a_{11} - a_{33}}{b^2} = \frac{2a_{12} - a_{11} - a_{22}}{c^2},$$

где  $a, b, c$  — длины сторон базисного треугольника системы координат. Докажите.

1.11. Прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих чевиан данной точки, имеют общую точку (*обобщенная теорема Шлёмльха*). Докажите.

1.12. Прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$ , соединяющие соответственные вершины двух треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , параллельны. Докажите, что прямая, содержащая их центры, параллельна этим прямым.

1.13. Если два треугольника имеют общий центр, то сумма квадратов расстояний всех вершин одного треугольника до всех вершин другого не зависит от взаимного расположения треугольников в пространстве. Докажите.

1.14 (*теорема Гаусса*). Если некоторая прямая пересекает прямые  $AB, BC, CA$ , содержащие стороны треугольника  $ABC$ , соответственно в точках  $C_1, A_1, B_1$ , то середины отрезков  $AA_1, BB_1, CC_1$  коллинеарны. Докажите.

1.15. Точки  $E$  и  $F$  — середины оснований  $DC$  и  $AB$  трапеции  $ABCD$ ,  $P$  — произвольная точка прямой  $AC$ . Прямые  $PE$  и  $PF$  пересекают прямые  $AD$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Докажите, что прямая  $MN$  параллельна основаниям трапеции.

1.16. Прямая пересекает стороны  $AB$  и  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  в точках  $M$  и  $N$ , а диагональ  $AC$  — в точке  $P$ . Докажите, что

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}}.$$

## Треугольники

## § 10. Точка Лемуана треугольника

Среди большого числа замечательных точек треугольника после общеизвестных особое место занимает точка Лемуана, обладающая многими свойствами.

**10.1. Симедианы треугольника.** Симедианой треугольника называется прямая, проходящая через его вершину и делящая противоположную сторону в отношении квадратов длин прилежащих сторон.

**Теорема.** Симедиана треугольника симметрична его медиане относительно биссектрисы, проходящей через ту же вершину.

**Доказательство.** Пусть дан треугольник  $ABC$  и  $\overline{CA} = \bar{A}$ ,  $\overline{CB} = \bar{B}$ . Тогда направляющие векторы медианы, биссектрисы и симедианы, проходящих через вершину  $C$ , имеют соответственно выражения:  $\bar{A} + \bar{B}$ ,  $a\bar{A} + b\bar{B}$  и  $a^2\bar{A} + b^2\bar{B}$ . Необходимо проверить истинность равенства:

$$\frac{(\bar{A} + \bar{B})(a\bar{A} + b\bar{B})}{|\bar{A} + \bar{B}|} = \frac{(a\bar{A} + b\bar{B})(a^2\bar{A} + b^2\bar{B})}{|a^2\bar{A} + b^2\bar{B}|},$$

которое приводится к виду:

$$\frac{(a+b)(ab + \bar{A} \cdot \bar{B})}{|\bar{A} + \bar{B}|} = \frac{ab(a+b)(ab + \bar{A} \cdot \bar{B})}{|a^2\bar{A} + b^2\bar{B}|}.$$

Остается показать, что  $ab|\bar{A} + \bar{B}| = |a^2\bar{A} + b^2\bar{B}|$ . Будучи возведены в квадрат, обе части доказываемого равенства оказываются равными выражению  $a^2b^2(a^2 + b^2 + 2\bar{A} \cdot \bar{B})$ , так как  $\bar{A}^2 = b^2$ ,  $\bar{B}^2 = a^2$ .  $\square$

**10.2. Точка Лемуана.** Симедианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется точкой Лемуана<sup>1</sup> треугольника.

Это утверждение сразу следует из теоремы Чевы. Согласно определению симедианы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  делят соответственно стороны  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в отношениях  $\frac{c^2}{b^2}$ ,  $\frac{a^2}{c^2}$ ,  $\frac{b^2}{a^2}$ , произведение которых равно 1.

*Бариецентрические координаты точки К Лемуана треугольника пропорциональны квадратам длин его сторон.*

<sup>1</sup>Лемуан Эмиль (1840—1912) — французский математик, много занимавшийся изучением свойств треугольника. Он положил начало специальному разделу геометрии — геометрографии.

В самом деле, согласно (1.26) при  $\alpha = \frac{c^2}{b^2}$  и  $\beta = \frac{c^2}{a^2}$  находим:

$$\alpha : \beta : \alpha\beta = \frac{c^2}{b^2} : \frac{c^2}{a^2} : \frac{c^4}{a^2b^2} = \frac{1}{b^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{c^2}{a^2b^2} = a^2 : b^2 : c^2.$$

После нормировки имеем:

$$K \left( \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right). \quad (2.1)$$

В п. 4.4 рассматривалась точка Жергона треугольника — точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания

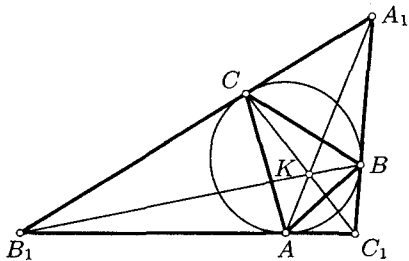


Рис. 8

противоположных сторон с вписанной окружностью. Этот треугольник обозначим  $A_1B_1C_1$  и рассмотрим вписанный треугольник  $ABC$  с вершинами в точках касания (рис. 8). Треугольник  $A_1B_1C_1$  называется *тангенциальным треугольником* треугольника  $ABC$ . По отношению к треугольнику  $ABC$  теорема п. 4.4 о точке Жергона формулируется так: *прямые, каждая из которых соединяет вершину тре-*

*угольника с точкой пересечения касательных к описанной окружности в двух других его вершинах, пересекаются в одной точке.*

Излишне доказывать ее вторично. Докажем дополнительно, что *общая точка указанных прямых есть точка Лемуана треугольника  $ABC$* . Для этого достаточно убедиться, что точки  $C_1$ ,  $C$ ,  $K$  коллинеарны. Для этого примем треугольник  $ABC$  за базисный и найдем  $B$ -координаты точки  $C_1$ . Для этого нужно получить сначала уравнения касательных к описанной окружности (1.57) в точках  $A$  и  $B$ . Если прямая  $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0$  проходит через точку  $A(1, 0, 0)$ , то  $m_1 = 0$ . Решаем систему

$$\begin{cases} a^2x_2x_3 + b^2x_1x_3 + c^2x_1x_2 = 0, \\ m_2x_2 + m_3x_3 = 0. \end{cases}$$

Подстановка  $x_3 = -\frac{m_2}{m_3}x_2$  в первое уравнение приводит его к виду

$$x_2(-a^2m_2x_2 - (b^2m_2 - c^2m_3)x_1) = 0.$$

Очевидно  $x_2 = 0$  есть корень этого уравнения. Для касания прямой и окружности этот корень должен быть двукратным. Поэтому

$$-a^2m_2x_2 - (b^2m_2 - c^2m_3)x_1 = 0,$$

откуда

$$c^2 m_3 = b^2 m_2 \quad \text{и} \quad \frac{m_2}{m_3} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Следовательно, касательная к описанной окружности в точке  $A(1, 0, 0)$  имеет уравнение  $c^2 x_2 + b^2 x_3 = 0$ . Аналогично  $c^2 x_1 + a^2 x_3 = 0$  есть уравнение касательной в точке  $B(0, 1, 0)$ . Отсюда находим координаты точки  $C_1(a^2 : b^2 : (-c^2))$  пересечения касательных в точках  $A$  и  $B$ . Очевидно, что

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & -c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

А это равенство говорит о том, что точки  $C, K, C_1$  коллинеарны.

**10.3. Теорема Шлёмилля<sup>1</sup>:** *прямые, каждая из которых содержит середину стороны треугольника и середину его соответственной высоты, пересекаются в точке Лемуана этого треугольника.*

Середина  $P$  стороны  $BC$  базисного треугольника  $ABC$  имеет координаты  $P(0 : 1 : 1)$ , основание  $D$  высоты  $AD$  — координаты:  $(0 : b \cos C : c \cos B)$ , а середина этой высоты — координаты:  $E(1 : b \cos C : c \cos B)$ . Точки  $P, K$  и  $E$  коллинеарны, поскольку

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & b \cos C & c \cos B \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2ab \cos C - 2ac \cos B) + c^2 - b^2 = \\ = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - a^2 - c^2 + b^2) + c^2 - b^2 = 0.$$

Этим самым доказательство закончено, т. к. прямые равноправны.

Свойства точки Лемуана впервые изучал Симон Люилье (1750—1840) — швейцарский математик и педагог. В 1809 году он обнаружил, что сумма квадратов расстояний от этой точки до сторон треугольника является наименьшей. Это свойство было повторно обнаружено Гауссом. Рассмотренное выше свойство Шлёмилля доказал в 1860 году. Точка Лемуана обладает еще многими интересными свойствами, замеченными другими математиками.

## § 11. Гомологичные треугольники

**11.1. Теорема Дезарга для треугольников пространства.** Читателю известна теорема Дезарга для треугольников плоскости (см. [4],

<sup>1</sup> Ш л ё м и л ь х Оскар (1823—1901) — немецкий математик, доктор философии, профессор. Работал в Иенском университете и Дрезденском политехникуме.

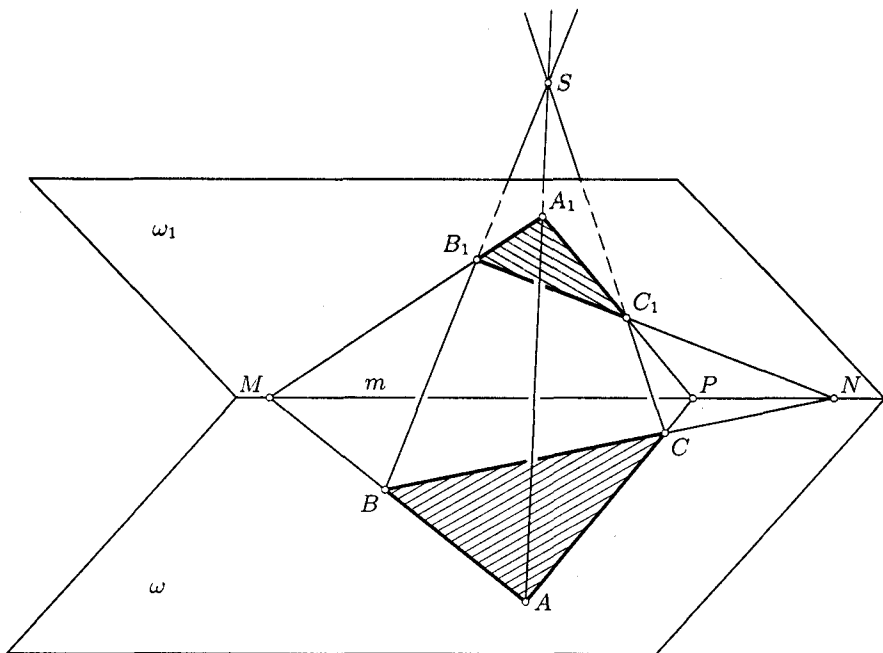


Рис. 9

с. 74, и [6], с. 30). Докажем, что это свойство имеет место и для двух треугольников пространства.

**Теорема.** Если треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  расположены в пространстве так, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке или параллельны, то точки пересечения прямых  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $CA$  и  $C_1A_1$  коллинеарны или эти прямые параллельны в одной или во всех трех пар.

**Доказательство.** Пусть плоскости  $\omega$  и  $\omega_1$  данных треугольников пересекаются по прямой  $m$  и прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  имеют общую точку  $S$  (рис. 9). Тогда точки  $M = (AB) \cap (A_1B_1)$ ,  $N = (BC) \cap (B_1C_1)$ ,  $P = (AC) \cap (A_1C_1)$  лежат на прямой  $m$ . Действительно, каждая из этих трех точек принадлежит обоим плоскостям  $\omega$  и  $\omega_1$  и потому принадлежит прямой их пересечения. Если прямые одной из трех указанных пар параллельны, то они параллельны и прямой  $m$  (см. [5] с. 16, теорема 3), если плоскости  $\omega$  и  $\omega_1$  параллельны, то соответственные прямые параллельны в каждой из трех пар.

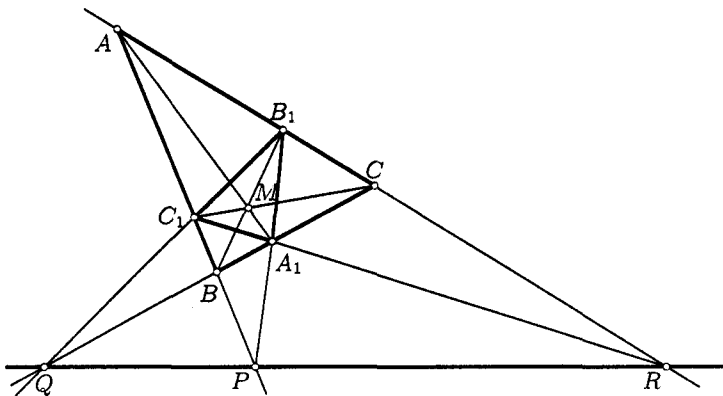


Рис. 10

Пусть  $(AA_1) \parallel (BB_1) \parallel (CC_1)$ , при этом плоскости  $\omega$  и  $\omega_1$  могут быть или не быть параллельными. Если  $\omega \parallel \omega_1$  то имеем треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$ . В противном случае этот многогранник является клином (см. [5] с. 100), и точки  $M, N, P$  принадлежат прямой  $m$ .  $\square$

*Доказанная теорема Дезарга имеет обратную*, которая следует из прямой теоремы для треугольников  $AA_1P$  и  $BB_1N$ . Действительно, так как прямые  $AB, A_1B_1, PN$  пересекаются в точке  $M$ , то точки

$$(AA_1) \cap (BB_1) = S, \quad (AP) \cap (BN) = C, \quad (A_1P) \cap (B_1N) = C_1$$

коллинеарны, т. е. прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в точке  $S$ .

Треугольники, удовлетворяющие теореме Дезарга (на плоскости или в пространстве), называются *гомологичными*, точка  $S$  — *центром гомологии*, а прямая  $m$  — *осью гомологии* этих треугольников. Например, всякий треугольник гомологичен со своим тангенциальным треугольником с центром гомологии в точке Лемуана данного треугольника.

**11.2. Гармоническая поляра точки относительно треугольника.** Пусть точка  $M$  лежит в плоскости треугольника  $ABC$ , но не принадлежит прямым, содержащим его стороны. Если прямые  $AM, BM, CM$  пересекают соответственно прямые  $BC, CA, AB$  в точках  $A_1, B_1, C_1$ , то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  гомологичны с центром гомологии в точке  $M$ . Ось гомологии этих треугольников называется *гармонической* (а также *тримлинейной*) *полярной* точки  $M$  относительно треугольника  $ABC$  (рис. 10).



Найдем барицентрическое уравнение гармонической поляры точки  $M(m_1, m_2, m_3)$ , приняв данный треугольник  $ABC$  за базисный. Точки  $B_1$  и  $C_1$  имеют Б-координаты  $(m_1 : 0 : m_3)$  и  $(m_1 : m_2 : 0)$  соответственно, а уравнение прямой  $B_1C_1$  имеет вид:

$$-m_2m_3x_1 + m_1m_3x_2 + m_1m_2x_3 = 0,$$

или

$$-\frac{x_1}{m_1} + \frac{x_2}{m_2} + \frac{x_3}{m_3} = 0.$$

Точка  $Q$  пересечения прямых  $BC$  и  $B_1C_1$  получает координаты  $(0 : (-x_2) : x_3)$ . Аналогично точка  $R$  пересечения прямых  $AC$  и  $A_1C_1$  имеет координаты  $(-x_2 : 0 : x_3)$ . Следовательно, уравнение гармонической поляры  $QR$  точки  $M$  будет таким:

$$\frac{x_1}{m_1} + \frac{x_2}{m_2} + \frac{x_3}{m_3} = 0. \quad (2.2)$$

**11.3. Теорема Плюккера**<sup>1</sup>. Если вершины одного треугольника являются полюсами соответственных сторон другого относительно некоторой окружности, то эти треугольники гомологичны.

Пусть дан треугольник  $ABC$  и стороны  $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$  служат полярами точек  $A, B, C$  относительно окружности  $\omega$  (рис. 11). По свойству взаимности поляр прямые  $BC, CA, AB$  — поляры точек  $A_1, B_1, C_1$  соответственно (см. [4], с. 134). Докажем, что прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке. Из шести вершин данных треугольников по крайней мере три являются внешними для окружности  $\omega$ . Так как поляра внешней точки пересекает окружность, то проведем касательные к окружности в этих точках пересечения. Точки касания лежат на полярах внешних точек. Рассмотрим полученные описанные четырехугольники. По свойству описанного четырехугольника прямая, содержащая точки касания двух смежных сторон, и прямая, содержащая точки касания двух других смежных сторон, пересекаются на диагонали этого четырехугольника (см. [4], с. 137, рис. 142). На рис. 11 точки 2, 4, 5, 6 лежат на прямых  $BB_1, AA_1, CC_1$ . На основании теоремы Брианшона для описанного шестиугольника 123456 эти прямые пересекаются в одной точке  $S$ .

**11.4. Геометрическое место точек**, из которых два треугольника пространства проектируются на плоскость в гомологичные треугольники.

<sup>1</sup>Плюккер Юлиус (1801—1868) — немецкий математик, физик и механик, профессор, учитель Ф. Клейна. Работал в университетах Бонна, Берлина, Галла. Основные математические работы относятся к геометрии.

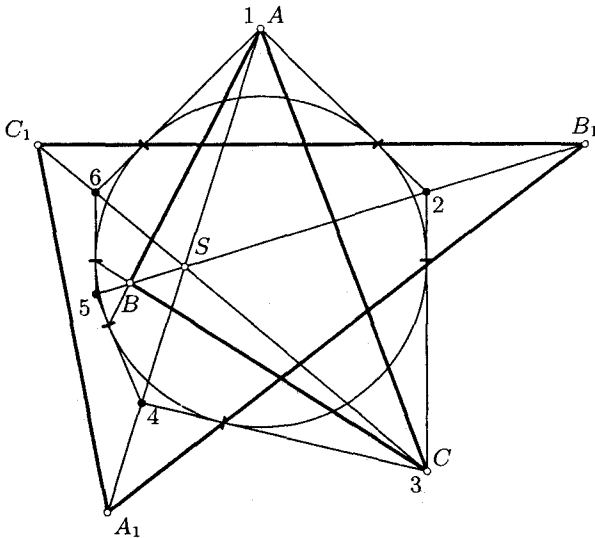


Рис. 11

Решим задачу об отыскании указанного множества точек. Пусть даны два треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , которые произвольно расположены в пространстве, и задана плоскость  $\alpha$  в качестве плоскости проекций. Для искомой точки  $S$  ее центральная проекция  $S_1$  из  $S$  на  $\alpha$  должна быть центром гомологии проекций данных треугольников. Это будет иметь место тогда и только тогда, когда прямая  $SS_1$  будет общей секущей прямых  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Тогда, очевидно, и каждая точка прямой  $SS_1$  будет принадлежать искомому ГМТ. Следовательно, это ГМТ есть объединение всех секущих для прямых  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пространства. Порядок соединения вершин треугольников не определен, поэтому зафиксируем одну из возможных троек прямых и обозначим их  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Они могут занимать различные взаимные расположения. Рассмотрим возможные случаи.

1) Если прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$  попарно скрещиваются и не параллельны одной плоскости, то множеством всех их секущих является линейчатая поверхность второго порядка (квадрика) — *однополостный гиперболоид* (рис. 12). Образующие его прямые состоят из двух подмножеств (серий образующих). Каждые две образующие одной серии скрещиваются, а любые две образующие различных серий пересекаются или параллельны.

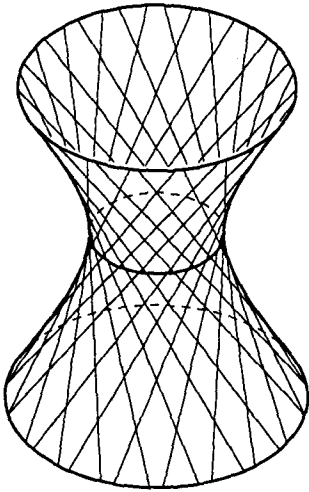


Рис. 12

2) Если прямые  $a, b, c$  попарно скрещиваются и параллельны одной плоскости, то объединением всех их секущих также является линейчатая квадрика — *гиперболический параболоид*, который уже знаком читателю (см. [5], с. 69, рис. 58).

3) Если две из прямых  $a, b, c$  лежат в плоскости  $\gamma$ , а третья не принадлежит  $\gamma$ , то искомым ГМТ будет пара плоскостей: плоскость  $\gamma$  и плоскость, содержащая точку  $P = a \cap b$  и прямую  $c$  (рис. 13). В особом случае  $a \parallel b \parallel c$  эти прямые общих секущих не имеют, но данные треугольники удовлетворяют теореме Дезарга. Точка  $S$  является бесконечно удаленной точкой этих прямых.

4) Если прямые  $a, b, c$  пересекаются в одной точке  $S$ , то искомым ГМТ является все пространство: данные треугольники гомологичны и при всяком проектировании на

плоскость  $\alpha$  их проекции гомологичны.

5) Прямые  $a, b, c$  лежат в одной плоскости и не имеют общей точки. Тогда искомое ГМТ пусто.

В каждом из перечисленных случаев в искомое ГМТ не входят точки плоскости  $\alpha$  проекций согласно определению проектирования.

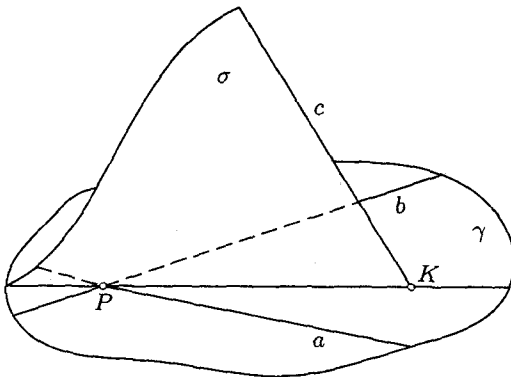


Рис. 13

## § 12. Ортологические треугольники

**12.1. Определяющий признак ортологических треугольников.** Если плоскости, проведенные через вершины одного треугольника  $ABC$  перпендикулярно соответственным сторонам другого треугольника  $A_1B_1C_1$ , пересекаются по одной прямой, то плоскости, проведенные через вершины второго треугольника перпендикулярно соответственным сторонам первого, также пересекаются по одной прямой.

**Доказательство.** При произвольном начале векторов векторные уравнения плоскостей первой тройки имеют вид:

$$(\vec{X} - \vec{A})(\vec{B}_1 - \vec{C}_1) = 0,$$

$$(\vec{X} - \vec{B})(\vec{C}_1 - \vec{A}_1) = 0,$$

$$(\vec{X} - \vec{C})(\vec{A}_1 - \vec{B}_1) = 0,$$

или

$$\vec{A}(\vec{B}_1 - \vec{C}_1) = \vec{X}(\vec{B}_1 - \vec{C}_1),$$

$$\vec{B}(\vec{C}_1 - \vec{A}_1) = \vec{X}(\vec{C}_1 - \vec{A}_1),$$

$$\vec{C}(\vec{A}_1 - \vec{B}_1) = \vec{X}(\vec{A}_1 - \vec{B}_1).$$

По условию эта система совместна. При сложении последних трех уравнений в правой части получается тождественно нуль. В результате после перенесения трех членов в правую часть получаем:

$$\vec{A} \cdot \vec{B}_1 + \vec{B} \cdot \vec{C}_1 + \vec{C} \cdot \vec{A}_1 = \vec{A}_1 \cdot \vec{B} + \vec{B}_1 \cdot \vec{C} + \vec{C}_1 \cdot \vec{A}.$$

Это равенство симметрично относительно векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{C}$  и  $\vec{C}_1$ . Это значит, что система векторных уравнений плоскостей второй тройки

$$(\vec{X} - \vec{A}_1)(\vec{B} - \vec{C}) = 0,$$

$$(\vec{X} - \vec{B}_1)(\vec{C} - \vec{A}) = 0,$$

$$(\vec{X} - \vec{C}_1)(\vec{A} - \vec{B}) = 0$$

также совместна, и эти три плоскости должны пересекаться по одной прямой, поскольку они перпендикулярны плоскости треугольника  $ABC$ .  $\square$

**Следствие.** В случае, когда данные треугольники лежат в одной плоскости, теорему можно сформулировать так: если прямые, проведенные через вершины одного треугольника перпендикулярно соответственным сторонам другого, пересекаются в одной точке  $S$ , то прямые, проведенные через вершины второго треугольника перпендикулярно соответственным сторонам первого, также пересекаются в одной точке  $S_1$  (рис. 14).

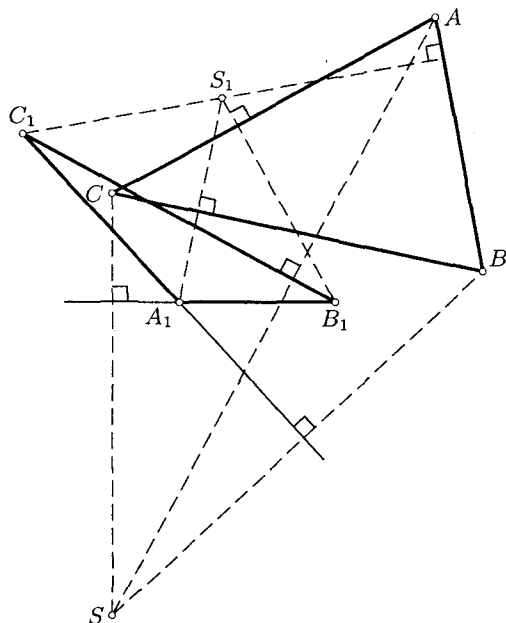


Рис. 14

Два треугольника, удовлетворяющие доказанной теореме, называются *ортологическими*. В случае принадлежности их одной плоскости точки  $S$  и  $S_1$  называются *центрами ортологии* этих треугольников.

В частности, *полярно сопряженные треугольники относительно окружности* (п. 11.3) являются *ортологическими* с совпавшими центрами ортологии.

**12.2. Ортологическое свойство треугольника и прямой.** Плоскости, перпендикулярные к сторонам треугольника и проходящие через ортогональные проекции его вершин на произвольную прямую пространства, пересекается по одной прямой.

**Доказательство.** Пусть даны треугольник  $ABC$  и прямая  $m$ , а точки  $A_1, B_1, C_1$  — ортогональные проекции вершин  $A, B, C$  на прямую  $m$ . Как и в предыдущем пункте, система векторных уравнений данных плоскостей

$$\begin{aligned}\bar{X}(\bar{A} - \bar{B}) &= \bar{C}_1(\bar{A} - \bar{B}), \\ \bar{X}(\bar{B} - \bar{C}) &= \bar{A}_1(\bar{B} - \bar{C}), \\ \bar{X}(\bar{C} - \bar{A}) &= \bar{B}_1(\bar{C} - \bar{A}),\end{aligned}$$

при сложении уравнений дает равенство:

$$\bar{A} \cdot \bar{B}_1 + \bar{B} \cdot \bar{C}_1 + \bar{C} \cdot \bar{A}_1 = \bar{A}_1 \cdot \bar{B} + \bar{B}_1 \cdot \bar{C} + \bar{C}_1 \cdot \bar{A}.$$

Эти плоскости перпендикулярны плоскости данного треугольника. Чтобы они имели общую прямую, необходимо, чтобы рассматриваемая система была совместна, для чего предыдущее равенство должно быть истинным. Это и осталось показать.

По условию ортогональности векторов имеем:

$$\begin{aligned} (\bar{A} - \bar{A}_1)\bar{B}_1 = 0, & \quad (\bar{B} - \bar{B}_1)\bar{C}_1 = 0, & \quad (\bar{A} - \bar{A}_1)\bar{C}_1 = 0, \\ (\bar{B} - \bar{B}_1)\bar{A}_1 = 0, & \quad (\bar{C} - \bar{C}_1)\bar{B}_1 = 0, & \quad (\bar{C} - \bar{C}_1)\bar{A}_1 = 0 \end{aligned}$$

(началом векторов служит точка прямой  $m$ ), откуда  $\bar{A} \cdot \bar{B}_1 = \bar{B} \cdot \bar{A}_1 = \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1$ ,  $\bar{B} \cdot \bar{C}_1 = \bar{C} \cdot \bar{B}_1 = \bar{B}_1 \cdot \bar{C}_1$ ,  $\bar{A} \cdot \bar{C}_1 = \bar{C} \cdot \bar{A}_1 = \bar{A}_1 \cdot \bar{C}_1$ . Следовательно обе части доказываемого равенства равны выражению

$$\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 + \bar{B}_1 \cdot \bar{C}_1 + \bar{A}_1 \cdot \bar{C}_1. \quad \square$$

**Следствие.** Если треугольник  $ABC$  и прямая  $m$  лежат в одной плоскости, то доказанной теореме можно дать планиметрическую формулировку: *прямые, перпендикулярные сторонам треугольника и проходящие через ортогональные проекции его вершин на произвольную прямую плоскости этого треугольника, пересекаются в одной точке* (рис. 15).

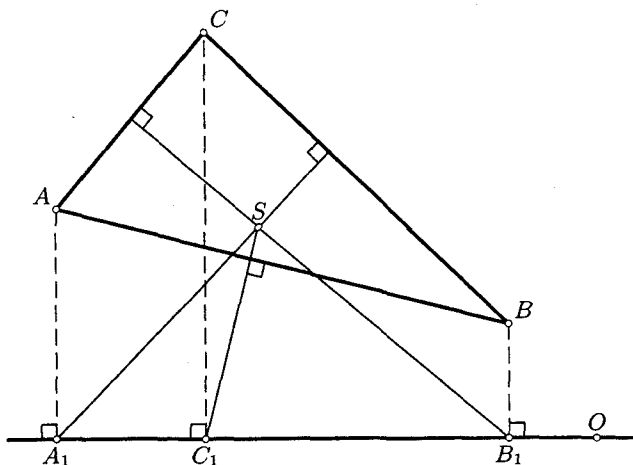


Рис. 15

## § 13. Изотомическое и изогональное преобразования плоскости

**13.1. Изотомическое преобразование.** Две точки  $P$  и  $Q$  называются *изотомически сопряженными* относительно отрезка  $AB$ , если они лежат на прямой  $AB$  и симметричны относительно середины этого отрезка. Очевидно, если  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \lambda$ , то  $\frac{\overline{BQ}}{\overline{QA}} = \lambda$ . На основании теоремы Чевы легко доказывается теорема.

**Теорема.** Пусть дан треугольник  $ABC$  и точка  $P$ , не принадлежащая его сторонам. Если  $(MA) \cap (BC) = A_1$ ,  $(MB) \cap (CA) = B_1$ ,  $(MC) \cap (AB) = C_1$  и точки  $A_2, B_2, C_2$  изотомически сопряжены точкам  $A_1, B_1, C_1$  относительно отрезков  $BC, CA, AB$ , то прямые  $AA_2, BB_2, CC_2$  пересекаются в одной точке  $Q$  (см. [4], с. 68). Точки  $P$  и  $Q$  называются изотомически сопряженными относительно треугольника  $ABC$ .

Рассмотрим преобразование плоскости, которое отображает точку  $P$  в изотомически сопряженную ей точку  $Q$ . Оно называется *изотомическим преобразованием* плоскости и задается треугольником  $ABC$ .

Получим координатные формулы этого преобразования в барицентрических координатах относительно треугольника  $ABC$ . Пусть точки  $P(x_1, x_2, x_3)$  и  $Q(y_1, y_2, y_3)$  изотомически сопряжены. Найдем зависимость между  $x_i$  и  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Рассмотрим пару изотомических точек  $C_1\left(\frac{x_1}{x_1 + x_2}, \frac{x_2}{x_1 + x_2}, 0\right)$  и  $C_2\left(\frac{y_1}{y_1 + y_2}, \frac{y_2}{y_1 + y_2}, 0\right)$  на стороне  $AB$ . Согласно определению  $\overline{AC_1} = -\overline{BC_2}$ , что в координатах запишется равенствами  $\frac{x_1}{x_1 + x_2} - 1 = -\left(\frac{y_1}{y_1 + y_2} - 0\right)$  и  $\frac{x_2}{x_1 + x_2} - 0 = -\left(\frac{y_2}{y_1 + y_2} - 1\right)$ , откуда следует  $x_1 y_1 = x_2 y_2$ . Аналогично, рассматривая пару изотомических точек  $A_1$  и  $A_2$  на стороне  $BC$ , получаем  $x_2 y_2 = x_3 y_3$ .

Следовательно,

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3. \quad (2.3)$$

Это — *координатный критерий изотомической сопряженности* точек  $P$  и  $Q$  в барицентрических координатах. Отсюда получаем искомые формулы

$$y_i = \frac{k}{x_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{k}{x_1} : \frac{k}{x_2} : \frac{k}{x_3} = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}. \quad (2.4)$$

Коэффициент пропорциональности  $k$  зависит от точки  $P$ .

Итак,  $B$ -координаты образа  $Q$  точки  $P$  при изотомическом преобразовании плоскости обратно пропорциональны  $B$ -координатам точки  $P$ .

Обратное преобразование  $Q \rightarrow P$  имеет те же формулы (2.4):  $x_i = \frac{k}{y_i}$ , т. е. совпадает с данным преобразованием.

Оба преобразования представляются рациональными алгебраическими формулами. Преобразования, обладающие этим свойством, называются *бирациональными* преобразованиями. Их впервые изучал итальянский математик А. Кремона<sup>1</sup> и поэтому они носят его имя — *кремоновы преобразования*. Известным примером кремонова преобразования служит *инверсия* (см. [4], с. 255).

Изотомическое преобразование нелинейное: оно квадратичное, т. е. отображает прямую линию  $u_1x_2 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$  в кривую второго порядка (эллипс, параболу, гиперболу):

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{y_1} + \frac{u_2}{y_2} + \frac{u_3}{y_3} &= 0, \\ u_1u_2y_3 + u_2u_1y_3 + u_3u_1y_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

проходящую через вершины базисного треугольника  $ABC$ . В частности, образом прямой  $a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0$  является описанная окружность (1.57). Лишь только чевианы треугольника  $ABC$  переходят в изотомические им чевианы. Из формул (2.4) видно, что точки  $A, B, C$  и прямые  $BC, CA$  и  $AB$  не имеют образов и прообразов. Центроид  $G$  — неподвижная точка преобразования.

**13.2. Изогональное преобразование.** Пусть дан треугольник  $ABC$  и точка  $M$ , не принадлежащая его сторонам. Тогда прямые, симметричные прямым  $AM, BM, CM$  относительно биссектрис углов  $A, B, C$  этого треугольника соответственно, пересекаются в одной точке  $N$  (см. [4], с. 69). Точки  $M$  и  $N$  называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника  $ABC$ . Например, ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  и центр  $O$  его описанной окружности изогонально сопряжены, что доказано в конце этого пункта.

Преобразование плоскости, которое отображает точку  $M$  в изогональную ей точку  $N$  называется *изогональным преобразованием*. Оно задается треугольником  $ABC$ .

Найдем формулы изогонального преобразования в нормальных координатах  $x, y, z$  относительно треугольника  $ABC$ . Напомним, что *нормальными координатами* точки  $M$  называются *ориентированные* расстояния от этой точки до сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ .

<sup>1</sup>Кремона Антонио (1830—1903) — основатель итальянской геометрической школы. Его основные работы относятся к начертательной и алгебраической геометрии. Работал в Болонье, Милане, Риме.



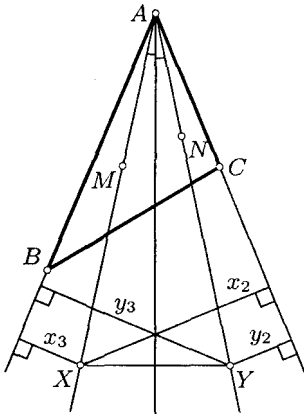


Рис. 16

За положительные направления принимаются направления от вершин треугольника к его сторонам. Они связаны зависимостью:

$$ax + by + cz = 2S. \quad (2.6)$$

Тождество (2.6) называется *нормировкой* нормальных координат точки. Числа, пропорциональные числам  $x, y, z$  называются ненормированными нормальными координатами точки.

Согласно (1.3) нормальные и барицентрические координаты связаны равенствами:

$$x = \lambda_1 h_1, \quad y = \lambda_2 h_2, \quad z = \lambda_3 h_3, \quad (2.7)$$

где  $h_i$  — высоты базисного треугольника.

Найдем формулы изогонального преобразования в нормальных координатах относительно заданного треугольника  $ABC$ . Для любой точки  $X(x_1, x_2, x_3)$  чевианы  $AM$  и соответственной ей точки  $Y(y_1, y_2, y_3)$  изогональной чевианы  $AN$ , очевидно,  $x_2 = y_3$  и  $x_3 = y_2$  (рис. 16). Чевиана  $AM$  точки  $M(m_1, m_2, m_3)$  имеет уравнение  $m_3 x_2 - m_2 x_3 = 0$ . Поэтому изогональная ей чевиана  $AN$  будет иметь уравнение  $m_2 y_2 - m_3 y_3 = 0$ . Система уравнений изогоналей трех чевиан  $AM, BM, CM$

$$\begin{cases} m_2 y_2 - m_3 y_3 = 0, \\ m_1 y_1 - m_3 y_3 = 0, \\ m_1 y_1 - m_2 y_2 = 0 \end{cases}$$

имеет очевидное решение  $\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}\right)$ . Таким образом,

$$M(m_1, m_2, m_3) \rightarrow N\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}\right),$$

т.е. изогональное преобразование имеет в нормальных координатах такие формулы:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}, \quad \text{и обратно} \quad x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3}. \quad (2.8)$$

Для ненормированных координат соответственных точек

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = k. \quad (2.9)$$

Это — *координатный критерий изогональности точек  $M$  и  $N$* .

Итак, *изогональное преобразование в нормальных координатах имеет те же формулы, что изотомическое преобразование в барицентрических координатах*. Следовательно, характеристики этих преобразований совершенно аналогичны.

**Задача.** Доказать, что центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$  и его ортоцентр  $H$  изогонально сопряжены относительно этого треугольника.

**Решение 1.** Точка  $O$  имеет нормальные координаты:  $O(R \cos A, R \cos B, R \cos C)$ , а для точки  $H$  на основании (1.27) и (1.3) получаем нормальные координаты  $H(h_1 \operatorname{tg} A : h_2 \operatorname{tg} B : h_3 \operatorname{tg} C)$ . Произведениями их соответственных координат служат числа  $Rh_1 \sin A, Rh_2 \sin B, Rh_3 \sin C$ , равные соответственно числам  $\frac{2RS \sin A}{a}, \frac{2RS \sin B}{b}, \frac{2RS \sin C}{c}$ , каждое из которых равно  $S$  согласно теореме синусов. В силу критерия (2.9) точки  $O$  и  $H$  изогонально сопряжены.

**Решение 2.** Проведем  $OE \perp BC$  (рис. 17). Тогда  $OE \parallel AH$  и поэтому  $\angle DAP = \angle DOE$ . Следовательно, прямая  $AE$  есть общая биссектриса углов  $BAC$  и  $DAP$ , т.е. чевианы  $AO$  и  $AH$  изогональны относительно угла  $A$  треугольника  $ABC$ . Аналогично доказывается, что точки  $O$  и  $H$  лежат на соответственных изогональных чевианах углов  $B$  и  $C$  и поэтому изогонально сопряжены относительно треугольника  $ABC$ .

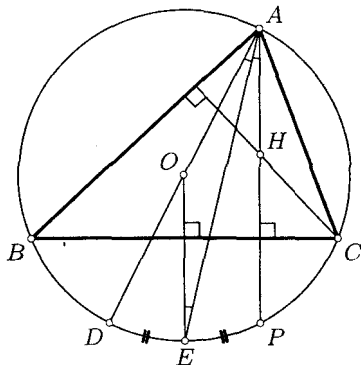


Рис. 17

## § 14. Треугольник с двумя совпавшими вершинами

### 14.1. Вырожденный треугольник, его центроид и ортоцентр.

При совпадении вершин  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  прямая  $BC$  будет занимать положение касательной к описанной около него окружности, а длина стороны  $BC$  обращается в нуль. Следовательно, треугольник с двумя совпавшими вершинами  $B$  и  $C$  можно определить либо как *хорду окружности с указанием ее двойного конца*, либо как *отрезок  $AB$  и прямую  $a$ , проходящую через точку  $B$* . В последнем случае описанной окружностью такого вырожденного треугольника будет

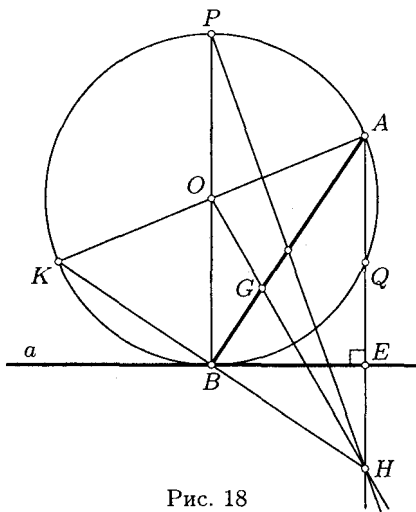


Рис. 18

Ортоцентр  $H$  вырожденного треугольника  $ABV$  есть точка пересечения прямых, перпендикулярных к прямым  $a$  и  $AB$  и проходящих соответственно через точки  $A$  и  $B$ . Эти прямые являются *высотами* вырожденного треугольника  $ABV$ , причем вторая высота должна рассматриваться как двойная.

Если  $O$  — центр описанной окружности, то вектор  $\overline{OH}$  ортоцентра равен

$$\overline{OH} = \overline{OA} + 2\overline{OB}. \quad (2.11)$$

Действительно, векторы  $\overline{AH}$  и  $\overline{OB}$  коллинеарны, поэтому  $\overline{AH} = \lambda\overline{OB}$ . В силу ортогональности векторов  $\overline{BA}$  и  $\overline{BH}$  имеем

$$(\overline{OA} - \overline{OB})(\overline{OH} - \overline{OB}) = 0;$$

отсюда

$$(\overline{OA} - \overline{OB})(\overline{OA} + \lambda\overline{OB} - \overline{OB}) = 0,$$

или

$$(\lambda - 2)(\overline{OA} \cdot \overline{OB} - R^2) = 0,$$

где  $R$  — радиус описанной окружности. Так как точки  $A$  и  $B$  различны, то  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} \neq R^2$  и поэтому  $\lambda - 2 = 0$ , т. е.  $\overline{AH} = 2\overline{OB}$ , чем и закончено доказательство соотношения (2.11).

Из (2.10) и (2.11) следует, что точки  $O, G, H$  лежат на одной прямой — *прямой Эйлера* треугольника  $ABV$  и, как обычно,  $\overline{OG} : \overline{GH} = 1 : 2$ .

являться окружность, содержащая точки  $A$  и  $B$  и касающаяся прямой  $a$  в точке  $B$  (рис. 18). Она всегда существует и единственна.

В вырожденном треугольнике  $ABC$  с совпавшими вершинами  $B$  и  $C$  угол  $\hat{A}$  равен нулю, а углы  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  смежные. Поэтому *сумма углов треугольника равна  $180^\circ$* .

Центроид  $G$  вырожденного треугольника определим как точку, для которой

$$\overline{OG} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + 2\overline{OB}) \quad (2.10)$$

при произвольной точке  $O$ . Следовательно, центроид  $G$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $2 : 1$ .

В обычном треугольнике точки, симметричные ортоцентру относительно сторон и середин сторон, лежат на описанной окружности. Это свойство имеет место и для вырожденного треугольника. В данном случае это будут точки  $K, P, Q$ , симметричные точке  $H$  относительно точки  $B$ , относительно середины отрезка  $AB$  и относительно прямой  $a$ . Непосредственное доказательство опускаем, оставляя его читателю.

**14.2. Непосредственное истолкование свойств вырожденного треугольника.** Оказывается, что геометрия вырожденного треугольника является содержательной и сохраняются свойства обычного треугольника, хотя некоторые из них переходят в тривиальные утверждения. Рассмотрим еще несколько примеров. Обратимся к теореме Симсона (см. [4] с. 60). На прямой Симсона точки описанной окружности лежат ее ортогональные проекции на стороны вписанного треугольника. Для вырожденного треугольника этот факт тривиален, так как две проекции совпадают.

Однако прямая Симсона  $UV$  (рис. 19) и в этом случае обладает нетривиальным свойством: произведения расстояний от точки  $M$ , лежащей на окружности, до вершин и до соответственных сторон треугольника  $ABV$  равны. При обычном

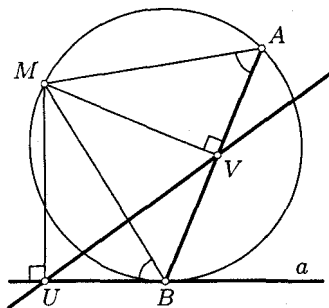


Рис. 19

взгляде на полученную фигуру этот факт можно сформулировать так: если в окружности проведена произвольная хорда и в одном из ее концов касательная, то произведения расстояний от произвольной точки окружности до точки касания и до хорды равно произведению расстояний от этой точки до другого конца хорды и до касательной. Это легко усматривается из подобия треугольников  $AMV$  и  $BMU$ .

Рассмотрим теорему об окружности девяти точек треугольника (см. [4], с. 48). Эта теорема истинна и для вырожденного треугольника, но некоторые из девяти точек совпадают и окружность становится окружностью пяти точек (рис. 20). При обычном взгляде на фигуру это утверждение формулируется таким образом. Пусть в окружности с центром  $O$  проведена

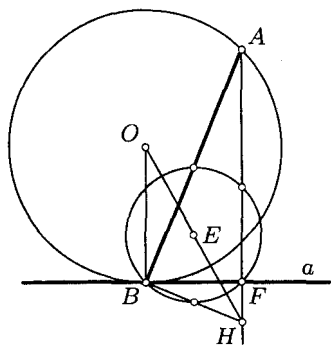


Рис. 20

хорда  $AB$  и в ее конце  $B$  касательная  $a$ . Перпендикуляр, опущенный из точки  $A$  на касательную  $a$ , пересекается в точке  $H$  с перпендикуляром, восстановленным в точке  $B$  к хорде  $AB$ . Тогда точка  $B$ , середины отрезков  $AB$ ,  $AH$ ,  $BH$  и точка  $F$  пересечения касательной  $a$  с прямой  $AH$  лежат на окружности с центром  $E$  в середине  $OH$  и радиусом,

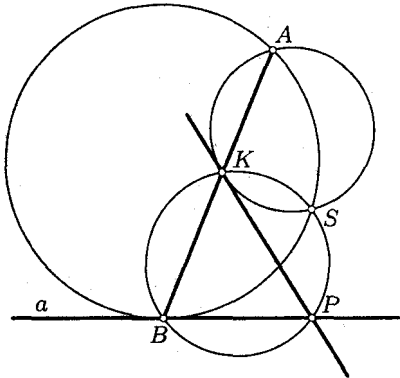


Рис. 21

равным половине радиуса радиуса данной окружности. Доказательство не приводим.

Рассмотрение вырожденного треугольника интересно еще и в том отношении, что это позволяет найти связь между фактами, казалось бы, совсем разными. Например, тот факт, что окружности, описанные около четырех треугольников, образованных каждым тремя сторонами полного четырехсторонника, имеют общую точку, содержит как предельный случай следующее утверждение. Пусть  $A$  — произвольная точка, лежащая на продолжении за точку  $K$  стороны  $BK$  треугольника  $PBK$ . Тогда через одну точку проходят три окружности: описанная окружность треугольника  $PBK$ , окружность, проходящая через точки  $A$  и  $B$  и касающаяся прямой  $BP$  в точке  $B$ , и окружность, проходящая через точки  $A$  и  $K$  и касающаяся прямой  $KP$  в точке  $K$  (рис. 21).

## Задачи к главе 2

2.1. Два полных четырехугольника расположены в пространстве (или на плоскости) так, что их соответственные стороны в пяти парах пересекаются в точках одной прямой. Докажите, что и прямые шестой пары соответственных сторон пересекаются в точке той же прямой.

2.2. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки Лемуана треугольника до его сторон минимальна.

2.3. Если три треугольника попарно гомологичны с общим центром этих гомологий, то оси этих трех гомологий пересекаются в одной точке. Докажите.

2.4. Если три треугольника попарно гомологичны, и центры этих гомологий лежат на одной прямой, то эти гомологии имеют общую ось. Докажите.

2.5. Стороны треугольника служат гармоническими полярами вершин данного треугольника (относительно базисного треугольника  $ABC$ ). Будут ли эти треугольники гомологичны?

Проведите аналогичное исследование для двух изотомически сопряженных треугольников, а также для двух изогонально сопряженных треугольников.

2.6. Если  $P_i$  и  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — ортогональные проекции вершин  $A_i$  и  $B_i$  двух треугольников пространства  $A_1A_2A_3$  и  $B_1B_2B_3$  на произвольную прямую и если плоскости, проведенные через точки  $P_i$  перпендикулярно соответственным сторонам треугольника  $B_1B_2B_3$  пересекаются по одной прямой, то и плоскости, проходящие через точки  $Q_i$  перпендикулярно соответственным сторонам треугольника  $A_1A_2A_3$  также пересекаются по одной прямой. Докажите. Получите отсюда планиметрическую теорему.

2.7. Вершины треугольника  $A_1B_1C_1$  есть основания чевиан точки  $M$  на сторонах треугольника  $ABC$ . Вершины треугольника  $A_2B_2C_2$  — основания чевиан точки  $N$  на сторонах треугольника  $A_1B_1C_1$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $A_2B_2C_2$  гомологичны (с центром  $S$ ). Найдите формулы преобразования  $N \rightarrow S$ , когда точка  $M$  совпадает с центроидом  $G$  треугольника  $ABC$ .

2.8 Через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  проведены прямые, пересекающие соответственно прямые  $BC$  и  $AC$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  так, что отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  имеют равные длины. Докажите, что множество точек  $P = (AA_1) \cap (BB_1)$  есть кривая третьего порядка (*кривая Бурместера*).

2.9. Дан треугольник  $ABC$ . Докажите, что его тангенциальный треугольник и треугольник с вершинами в основаниях высот (ортотреугольник треугольника  $ABC$ ) гомологичны.

2.10. Прямая, не содержащая вершины треугольника  $ABC$ , пересекает соответственно прямые:  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Докажите, что окружности  $ABC$ ,  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$ ,  $CA_1B_1$  имеют общую точку.

2.11. Ортогональные проекции ортоцентра  $H$  треугольника на серединные перпендикуляры к его сторонам, ортогональные проекции его на чевианы центра  $O$  описанной окружности, ортогональные проекции точки  $O$  на высоты, а также точки  $O$  и  $H$  лежат на одной окружности. Докажите это утверждение, сформулируйте его для вырожденного треугольника и снова докажите для полученной фигуры.

## Косой четырехугольник

Четырехугольник, вершины которого не лежат в одной плоскости, называется *косым (неплоским) четырехугольником*. Если из тетраэдра удалить пару противоположных ребер, то оставшиеся четыре ребра образуют косой четырехугольник. Обратное, если в косом четырехугольнике провести диагонали, то получится содержащий его тетраэдр. Поэтому эти две фигуры неразрывно связаны между собой.

### § 15. Неравенства для косого четырехугольника

**15.1. Сумма внутренних углов косого четырехугольника меньше  $360^\circ$ .** В самом деле, вершину  $C$  косого четырехугольника  $ABCD$  повернем около диагонали  $BD$  до плоскости  $ABD$  в точку  $C_1$  (рис. 22). Пусть  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — величины его внутренних углов с вершинами  $A, B, C, D$  соответственно. Для триэдров  $B(ACD)$  и  $D(ABC)$  по свойству плоских углов имеем:  $\beta < \widehat{ABD} + \widehat{CBD}$ ,  $\delta < \widehat{ADB} + \widehat{CDB}$ . При сложении этих неравенств в правой части получим сумму углов при вершинах  $B$  и  $D$  плоского четырехугольника  $ABC_1D$ , которая равна  $2\pi - (\alpha + \gamma)$ . Следовательно,  $\beta + \delta < 2\pi - (\alpha + \gamma)$ , откуда

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta < 2\pi. \quad (3.1)$$

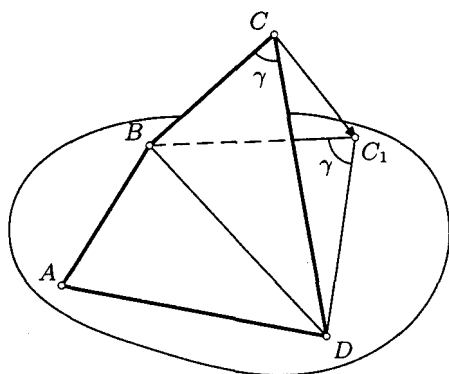


Рис. 22

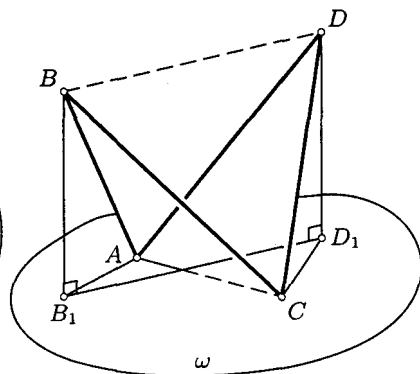


Рис. 23

**15.2. Неравенство Птолемея.** Для любых четырех точек  $A, B, C, D$  плоскости истинно неравенство

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD,$$

причем знак равенства имеет место в случаях, когда точки лежат на окружности или на прямой и пара  $(A, C)$  разделяет пару  $(B, D)$  (см. [4], с. 86). Докажем, что для косо́го четырехугольника  $ABCD$

$$AC \cdot BD < AB \cdot CD + BC \cdot AD, \quad (3.2)$$

т. е. произведение длин его диагоналей меньше суммы произведений длин противоположных сторон.

**Доказательство.** Спроектируем ортогонально диагональ  $BD$  четырехугольника на плоскость  $\omega$ , параллельную  $BD$  и содержащую диагональ  $AC$  (рис. 23). Для четырех точек  $A, B_1, C, D_1$ , лежащих в плоскости  $\omega$ , имеем:

$$AC \cdot B_1D_1 \leq AB_1 \cdot CD_1 + B_1C \cdot AD_1.$$

По свойству ортогонального проектирования  $AB_1 < AB$ ,  $CD_1 < CD$ ,  $CB_1 < CB$ ,  $AD_1 < AD$  и  $B_1D < BD$ . Поэтому неравенство (3.2) следует из предыдущего при замене отрезков большими. Случаи равенства не имеют места.  $\square$

**15.3. Сумма косинусов** внутренних углов косо́го четырехугольника и косинусов углов между его противоположными сторонами не больше 2:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta + \cos \varphi + \cos \psi \leq 2. \quad (3.3)$$

**Доказательство.** Привлечем единичные векторы  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ , сонаправленные соответственно векторам  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$  сторон четырехугольника  $ABCD$ . Очевидно,  $(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \bar{e}_4)^2 \geq 0$ , при этом знак равенства отвечает случаю, когда  $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \bar{e}_4 = \bar{0}$ , т. е. когда косо́й четырехугольник  $ABCD$  гомотетичен косо́му ромбу, построенному на векторах  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$  (рис. 24), т. е. и  $ABCD$  есть косо́й ромб. Исходное неравенство эквивалентно неравенству:

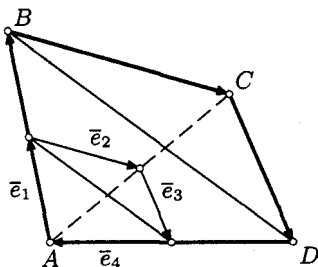


Рис. 24

$$4 + 2(\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_3\bar{e}_4 + \bar{e}_4\bar{e}_1 + \bar{e}_1\bar{e}_3 + \bar{e}_2\bar{e}_4) \geq 0.$$



Так как косинусы смежных углов отличаются лишь знаком, то предыдущее неравенство равносильно доказываемому неравенству (3.3), где

$$\alpha = \widehat{A}, \quad \beta = \widehat{B}, \quad \gamma = \widehat{C}, \quad \delta = \widehat{D}$$

косого четырехугольника  $ABCD$  и  $\varphi = (\widehat{AB}, \widehat{DC})$ ,  $\psi = (\widehat{BC}, \widehat{AD})$ .  $\square$

## § 16. Теоремы Менелая, Чева и Гаусса для косого четырехугольника

**16.1. Теорема Менелая.** Пусть на прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ , определяющих косой четырехугольник  $ABCD$ , даны соответственно точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ . Для того, чтобы эти точки лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1D}} \cdot \frac{\overline{DD_1}}{\overline{D_1A}} = 1. \quad (3.4)$$

**Доказательство 1.** Необходимость. Пусть заданные точки лежат в плоскости  $\gamma$  и  $\gamma \cap (BD) = M$  (рис. 25). По теореме Менелая для треугольника  $ABD$  и прямой  $A_1D_1$  имеем:

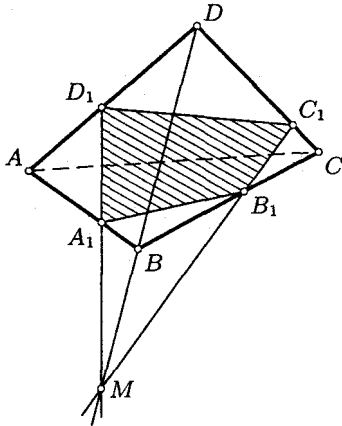


Рис. 25

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{DD_1}}{\overline{D_1A}} = -1.$$

По той же теореме для треугольника  $B_1C_1D$  и прямой  $B_1C_1$

$$\frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1D}} \cdot \frac{\overline{DM}}{\overline{MB}} = -1.$$

Перемножением этих равенств получаем доказываемое соотношение (3.4).

Если  $\gamma \parallel (BD)$ , то по теореме Фалеса  $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{AD_1}}{\overline{D_1D}}$  и  $\frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{DC_1}}{\overline{C_1C}}$ . Поэтому равенство (3.4) также выполняется.

**Достаточность условия (3.4)** доказывается методом от противного. Если плоскость  $A_1B_1C_1$  пересекает прямую  $AD$  в точке  $D_2$ , то по необходимому условию

$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1D}} \cdot \frac{\overline{DD_2}}{\overline{D_2A}} = 1$ . Отсюда и из данного условия (3.4) следует

$$\frac{\overline{DD_1}}{\overline{D_1A}} = \frac{\overline{DD_2}}{\overline{D_2A}}.$$

А это значит, что точки  $D_1$  и  $D_2$  совпадают.  $\square$

**Доказательство 2.** Обозначим отношения векторов, входящие в равенство (3.4) соответственно  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  и найдем ненормированные барицентрические координаты делящих точек относительно базисного тетраэдра  $ABCD$ :  $A_1(1 : \alpha : 0 : 0)$ ,  $B_1(0 : 1 : \beta : 0)$ ,  $C_1(0 : 0 : 1 : \gamma)$ ,  $D_1(\delta : 0 : 0 : 1)$ . Для того, чтобы эти точки принадлежали одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ \delta & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, получаем:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ \delta & 0 \end{vmatrix} = 1 - \alpha\beta\gamma\delta = 0,$$

чем и заканчивается доказательство.  $\square$

**Пример.** Согласно теореме Менелая, если стороны косого четырехугольника касаются сферы, то точки касания компланарны.

Если выполнить аффинное преобразование пространства, то сфера перейдет в эллипсоид, а компланарность точек касания сохранится. Утверждение имеет место не только для сферы эллипсоида, но и для других квадрик, однако это нуждается в отдельном доказательстве.

**16.2. Обобщенная теорема Гаусса.** Теорему Гаусса для треугольника и прямой (см. [4], с. 74) можно обобщить на пространство следующим образом. Пусть плоскость, не проходящая через вершины косого четырехугольника, пересекает его стороны  $AB, BC, CD, DA$  соответственно в точках  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Тогда центры треугольников  $ABC_1, BCD_1, CDA_1, ADB_1$  принадлежат одной плоскости.

**Доказательство.** В обозначениях предыдущего пункта на основании теоремы Менелая  $\alpha\beta\gamma\delta = 1$ . Найдем барицентрические координаты центров указанных треугольников и запишем их в строки определителя

$$\frac{1}{3^4} \begin{vmatrix} \frac{1}{1+\alpha} & \frac{\alpha}{1+\alpha} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{1+\beta} & \frac{\beta}{1+\beta} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{1+\gamma} & \frac{\gamma}{1+\gamma} \\ \delta & 1 & 1 & \frac{1}{1+\delta} \\ \frac{1}{1+\delta} & 1 & 1 & \frac{1}{1+\delta} \end{vmatrix}.$$

Немного преобразуем этот определитель. К первому столбцу прибавим все остальные. Тогда все его элементы будут равны 3. После вынесения общего множителя 3 в полученном определителе первый столбец вычтем из всех остальных:

$$\frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1+\alpha}{-\beta} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1+\beta}{-\gamma} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1+\gamma}{-\delta} \end{vmatrix}.$$

Поменяв знаки в трех последних столбцах, разложим его по элементам первой (или последней) строки. В результате получим:

$$\frac{\alpha\beta\gamma\delta - 1}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)} = 0,$$

поскольку  $\alpha\beta\gamma\delta = 1$ . Следовательно, центры указанных четырех треугольников компланарны.  $\square$

**16.3. Задача.** Через точку  $P$ , не лежащую на сторонах косоугольного четырехугольника  $ABCD$  проведены две (единственные) прямые, пересекающие его стороны  $AB$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $DA$  соответственно в точках  $A_1$  и  $C_1$ ,  $B_1$  и  $D_1$  (рис. 26), и даны отношения:

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}} = \lambda, \quad \frac{\overline{AD_1}}{\overline{D_1D}} = \alpha, \quad \frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}} = \beta, \quad \frac{\overline{A_1P}}{\overline{PC_1}} = \gamma.$$

Доказать, что

$$\gamma = \frac{\alpha + \lambda\beta}{1 + \lambda}. \quad (3.5)$$

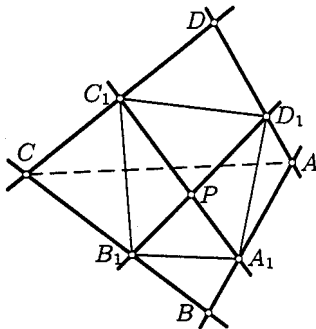


Рис. 26

Решение. По теореме Менелая для косоугольного четырехугольника  $ABCD$  и плоскости  $A_1B_1C_1D_1$  имеем:

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1D}} \cdot \frac{\overline{DD_1}}{\overline{D_1A}} = 1,$$

откуда получаем

$$\frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1D}} = \frac{\alpha}{\lambda\beta} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{C_1D}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1D}} + 1 = \frac{\alpha + \lambda\beta}{\lambda\beta}. \quad (3.6)$$

По той же теореме для косоугольного четырехугольника  $A_1BCC_1$  и плоскости  $ADD_1B_1$

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{AA_1}} \cdot \frac{\overline{A_1P}}{\overline{PC_1}} \cdot \frac{\overline{C_1D}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1B}} = 1.$$

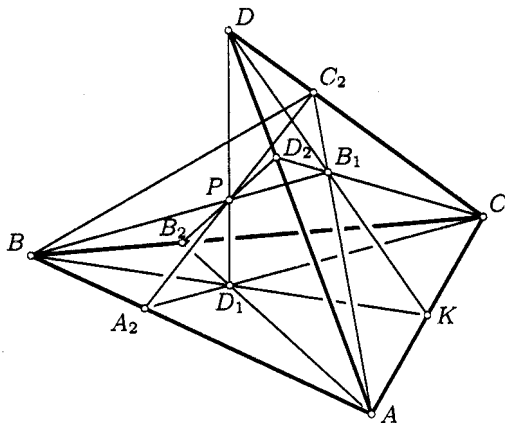


Рис. 27

Заменив  $\overline{BA} = \overline{BA_1} + \overline{A_1A}$  и подставив заданные отношения, имеем:

$$\left(-\frac{1}{\lambda} - 1\right)\gamma \cdot \frac{\overline{C_1D}}{\overline{DC}} \cdot \frac{1}{\beta} = 1,$$

откуда

$$\frac{\overline{C_1D}}{\overline{DC}} = -\frac{\lambda\beta}{(1+\lambda)\gamma}. \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.6) и (3.7), приходим к доказываемому соотношению (3.5).

**16.4. Теорема Чевы.** Пусть на прямых  $AB, BC, CD, DA$ , определяющих косоу четырёхугольник  $ABCD$ , даны точки  $A_2, B_2, C_2, D_2$ . Для того, чтобы плоскости  $A_2CD, B_2DA, C_2AB, D_2BC$  пересекались в одной точке  $P$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\overline{AA_2}}{\overline{A_2B}} \cdot \frac{\overline{BB_2}}{\overline{B_2C}} \cdot \frac{\overline{CC_2}}{\overline{C_2D}} \cdot \frac{\overline{DD_2}}{\overline{D_2A}} = 1. \quad (3.8)$$

**Необходимость.** Пусть прямые  $PA, PB, PC, PD$  пересекают соответственно плоскости  $BCD, CDA, DAB, ABC$  в точках  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . По теореме Чевы для треугольника  $ABC$  и точки  $D_1$  имеем (рис. 27):

$$\frac{\overline{AA_2}}{\overline{A_2B}} \cdot \frac{\overline{BB_2}}{\overline{B_2C}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KA}} = 1.$$

По той же теореме для треугольника  $ACD$  и точки  $B_1$

$$\frac{\overline{DD_2}}{\overline{D_2A}} \cdot \frac{\overline{AK}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{CC_2}}{\overline{C_2D}} = 1.$$

Перемножением этих равенств получаем доказываемое соотношение (3.8).

**Достаточность.** Пусть равенство (3.8) выполнено. Тогда по теореме Менелая для косоугольного четырехугольника  $ABCD$  точки  $A_2, B_2, C_2, D_2$  лежат в одной плоскости. Это значит, что прямые  $A_2C_2$  и  $B_2D_2$  пересекаются в некоторой точке  $P$ . Следовательно, плоскости  $A_2CD, B_2DA, C_2AB, D_2BC$  проходят через точку  $P$ .  $\square$

**Следствие.** Если точки  $A_2, B_2, C_2, D_2$ , взятые на прямых  $AB, BC, CD, DA$  лежат в одной плоскости, то плоскости  $A_2CD, B_2DA, C_2AB, D_2BC$  пересекаются в одной точке, и обратно.

## § 17. Косой параллелограмм

Косой четырехугольник, в котором противоположные стороны равны (в обеих парах), называется *косым параллелограммом*. Некоторые из многих его свойств повторяют свойства обычного (плоского) параллелограмма. Вот одно из них.

### 17.1. Свойство углов косого параллелограмма.

**Теорема 1.** Для того, чтобы косой четырехугольник был косым параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его противоположные углы были равны (в обеих парах).

**Необходимость.** Пусть  $ABCD$  — косой параллелограмм ( $AB = CD, BC = AD$ ). Тогда  $\angle A = \angle C$  и  $\angle B = \angle D$ . В самом деле, треугольники  $ABD$  и  $CBD$  равны по трем сторонам. Поэтому  $\angle BAD = \angle CBD$ . Аналогично из равенства треугольников  $ABC$  и  $BAC$  следует, что  $\angle ABC = \angle ADC$ .

**Достаточность.** Доказательство 1. Пусть дан косой четырехугольник  $ABCD$ , в котором  $\angle A = \angle C$  и  $\angle B = \angle D$ . Докажем, что  $ABCD$  — косой параллелограмм ( $AB = CD, BC = AD$ ).

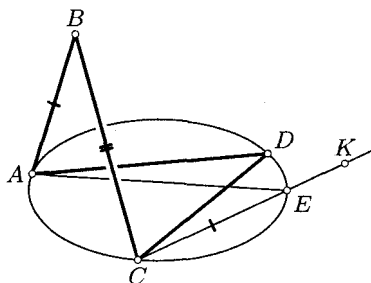


Рис. 28

Выберем в плоскости  $ACD$  по ту же сторону от прямой  $AC$ , что и точка  $D$ , точку  $E$  такую, что  $AE = BC$  и  $AB = CE$  (рис. 28). Следовательно  $ABCE$  — косой параллелограмм, откуда следует равенство углов  $ABC$  и  $CEA$ . Докажем, что точки  $D$  и  $E$  совпадают. Углы  $CDA$  и  $CEA$  равны, следовательно, плоский четырехугольник  $ADEC$  яв-

ляется вписанным в окружность. Углы  $DAE$  и  $DCE$  равны поскольку опираются на одну дугу  $DE$ . Так как  $ABCE$  — косоугольный параллелограмм, то углы  $BAE$  и  $ECB$  равны. Углы  $BAD$  и  $BCD$  равны по условию. Итак, мы имеем два равных трехгранных угла  $A(BDE)$  и  $C(BDE)$  ( $\angle BAD = \angle BCD$ ,  $\angle BAE = \angle BCE$ ,  $\angle DAE = \angle DCE$ ). Тогда равны их двугранные углы при ребрах  $AE$  и  $CE$ . Пусть  $K$  — некоторая точка на продолжении отрезка  $CE$  за точку  $E$ . В трехгранном угле  $E(ABK)$  двугранные углы при ребрах  $EA$  и  $EK$  равны, поэтому противоположные им плоские углы  $BEA$  и  $BEK$  равны. В косоугольном параллелограмме  $ABCE$  углы  $BEA$  и  $EBC$  равны. Но угол  $BEK$  — внешний угол треугольника  $BCE$ , т.е.  $\angle BEK = \angle BCE + \angle ECB > \angle ECB$ , а угол  $EBC$  равен углу  $BEA$ , который в свою очередь равен углу  $BEK$ . Подставляя в последнее неравенство угол  $BEK$  вместо равного ему угла  $EBC$ , имеем  $\angle BEK > \angle BEK$ . Полученное противоречие доказывает, что точки  $D$  и  $E$  совпадают, т.е.  $ABCD$  — косоугольный параллелограмм.  $\square$

**Доказательство 2.** Пусть дан косоугольный четырехугольник  $ABCD$ , в котором  $\angle A = \angle C$  и  $\angle B = \angle D$ . Докажем, что  $ABCD$  — косоугольный параллелограмм ( $AB = CD$  и  $BC = DA$ ). Пусть  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ,  $AC = e$ ,  $BD = f$ . По теореме косинусов из треугольников  $ABD$ ,  $CBD$ ,  $ABC$ ,  $ADC$  имеем:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad}, & \cos C &= \frac{b^2 + c^2 - f^2}{2bc}, \\ \cos B &= \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}, & \cos D &= \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd}. \end{aligned}$$

По условию  $\cos A = \cos C$ ,  $\cos B = \cos D$ , т.е. имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad} = \frac{b^2 + c^2 - f^2}{2bc}, \\ \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} = \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd}. \end{cases}$$

Преобразуем эти два равенства:

$$\begin{cases} (a^2 + d^2)bc - (b^2 + c^2)ad = f^2(bc - ad), \\ (a^2 + b^2)cd - (c^2 + d^2)ab = e^2(cd - ab). \end{cases}$$

А эти равенства соответственно эквивалентны равенствам:

$$\begin{cases} (ac - bd)(ab - cd) = f^2(bc - ad), \\ (ac - bd)(ad - bc) = e^2(cd - ab). \end{cases} \quad (3.9)$$

Перемножим эти равенства почленно:

$$(ac - bd)^2(ab - cd)(ad - bc) = e^2 f^2 (bc - ad)(cd - ab),$$

откуда получаем:

$$(ab - cd)(ad - bc)((ac - bd)^2 - e^2 f^2) = 0,$$

или

$$(ab - cd)(ad - bc)(ac - bd - ef)(ac - bd + ef) = 0.$$

Согласно неравенству Птолемея для косоугольного четырехугольника  $bd + ef > ac$ ,  $ac + ef > bd$ . Отсюда следует, что

$$(ac - bd - ef)(ac - bd + ef) \neq 0,$$

поэтому

$$(ab - cd)(ad - bc) = 0. \quad (3.10)$$

Если  $ab = cd$ , то в силу равенства (3.9) имеем  $bc = ad$ . Тогда из этих двух равенств следует  $b^2 ac = d^2 ac$ , или  $b = d$ , что влечет  $a = c$ . Следовательно,  $AB = CD$  и  $BC = DA$ , т. е.  $ABCD$  — косоугольный параллелограмм. Если в равенстве (3.10)  $ad = bc$ , то из (3.9) получаем  $cd = ab$  и из последних двух равенств снова получаем  $b = d$  и  $a = c$ , т. е.  $ABCD$  — косоугольный параллелограмм.  $\square$

**Доказательство 3.** Применим теорему косинусов для трехгранных углов с вершинами  $B$  и  $D$ . Пусть  $\angle ABC = \angle ADC = \beta$ ,  $\angle CBD = x$ ,  $\angle ABD = y$ ,  $\angle CDB = x_1$ ,  $\angle ADB = y_1$ , а двугранный угол при ребре  $BD$  имеет величину  $\varphi$ . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\cos \beta - \cos x \cos y}{\sin x \sin y}, \quad \cos \varphi = \frac{\cos \beta - \cos x_1 \cos y_1}{\sin x_1 \sin y_1}.$$

Вычислим

$$\cos \varphi - 1 = \frac{\cos \beta - \cos(x - y)}{\sin x \sin y} = \frac{\cos \beta - \cos(y_1 - x_1)}{\sin x_1 \sin y_1}. \quad (3.11)$$

Из треугольников  $BDC$  и  $ABD$  заметим, что

$$\pi - \alpha = x + x_1 = y + y_1,$$

откуда  $x - y = y_1 - x_1$ . Поэтому

$$\cos \beta - \cos(x - y) = \cos \beta - \cos(y_1 - x_1).$$

Покажем, что  $\cos \beta - \cos(x - y) \neq 0$ . В самом деле, если бы  $\cos \beta = \cos(x - y)$ , то либо  $\beta = \pm(x - y)$ , либо  $\beta = 2\pi \pm (x - y)$ . Но первое из двух последних равенств выполняться не может, т. к. плоский угол трехгранного угла не может быть равен разности двух других его плоских углов. Второе из этих равенств также противоречиво, поскольку из  $\beta < \pi$  и  $|x - y| < \pi$  следует, что  $\beta + |x - y| < 2\pi$ , т. е.  $\beta < 2\pi - |x - y|$ . Таким образом, из равенства (3.11) получаем:

$$\sin x \sin y = \sin x_1 \sin y_1. \quad (3.12)$$

Далее по теореме синусов из треугольников  $BCD$  и  $ACD$  имеем:

$$\frac{\sin x}{\sin x_1} = \frac{CD}{BC}, \quad \frac{\sin y}{\sin y_1} = \frac{DA}{AB}.$$

Перемножим эти равенства на основании (3.12) получим:  $AB \cdot BC = CD \cdot DA$ .

Если рассмотреть трехгранные углы с вершинами  $A$  и  $C$ , то тем же путем получим, что  $BC \cdot CD = AB \cdot DA$ . Из  $AB \cdot BC = CD \cdot DA$  и  $BC \cdot CD = AB \cdot DA$  уже следует, что  $AB = CD$  и  $BC = DA$ . Поэтому четырехугольник  $ABCD$  — косоугольный параллелограмм.  $\square$

**17.2. Ось симметрии косоугольного параллелограмма.** Докажем такое свойство.

**Теорема 2.** Для того, чтобы косоугольный параллелограмм был косоугольным параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы прямая, соединяющая середины его диагоналей, была его осью симметрии.

**Доказательство.** Действительно, пусть дан косоугольный параллелограмм  $ABCD$ ,  $M$  и  $N$  — середины диагоналей  $BD$  и  $AC$  соответственно (рис. 29). Докажем, что  $MN$  —

ось симметрии этого параллелограмма. Из равенства треугольников  $ABD$  и  $CBD$  следует равенство их медиан  $AM$  и  $CM$ . Поэтому треугольник  $AMC$  равнобедренный;  $MN$  в нем медиана, следовательно,  $MN \perp AC$ . Аналогично доказываем, что  $MN \perp BD$ . Тогда симметрия с осью  $MN$  отображает точки  $A, B, C, D$  соответственно в точки  $C, D, A, B$ , т.е. данный параллелограмм отображается на себя, и поэтому  $MN$  — его ось симметрии.

Обратно, если  $N$  и  $M$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  косоугольного четырехугольника  $ABCD$  и прямая  $MN$  — его ось симметрии, то этой симметрией каждая из точек  $N$  и  $M$  отображается на себя, отрезки  $AB$  и  $CD$  — друг на друга, и отрезки  $BC$  и  $DA$  также переходят друг в друга. Следовательно,  $AB = CD$  и  $BC = DA$ , т.е.  $ABCD$  — косоугольный параллелограмм.  $\square$

**Следствие.** Центр описанной сферы, центроид и центр вписанной сферы косоугольного параллелограмма лежат на его оси симметрии.

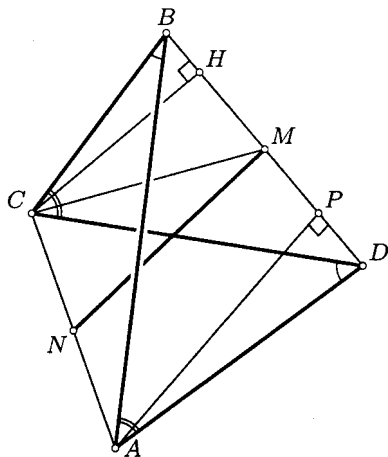


Рис. 29



Действительно, если косоугольный параллелограмм отображается на себя осевой симметрией, то на себя отображаются вписанная и описанная сферы тетраэдра  $ABCD$ , а значит, и их центры и центроид (в силу единственности каждой из этих точек). Поэтому они принадлежат оси симметрии.

### 17.3. Другие признаки косоугольного параллелограмма.

**Теорема 3.** *Для того, чтобы косоугольный четырехугольник был косоугольным параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы каждая его диагональ образовывала с его сторонами пару равновеликих треугольников.*

**Необходимость.** Пусть дан косоугольный параллелограмм  $ABCD$ . Тогда треугольники  $ABC$  и  $ADC$  равны, а значит равновелики. Аналогично треугольники  $ABD$  и  $CBD$  равновелики.

**Достаточность.** Пусть дан косоугольный четырехугольник  $ABCD$ , в котором треугольники  $ABC$  и  $ADC$ ,  $ABD$  и  $CBD$  соответственно равновелики. Докажем, что  $ABCD$  — косоугольный параллелограмм. Проведем высоты  $AP$  и  $CH$  в треугольниках  $ABD$  и  $CBD$  соответственно (рис. 29). Поскольку площади этих треугольников равны, получаем

$$AP \cdot BD = CH \cdot BD \iff AP = CH.$$

Пусть точка  $N$  — середина  $AC$ , и точка  $M$  — ее ортогональная проекция на прямую  $BD$ , тогда  $M$  — середина отрезка  $PH$ . Рассмотрим прямоугольные треугольники  $APM$  и  $CHM$ . В них  $AP = CH$  и  $PM = HM$ , т. е. треугольники  $APM$  и  $CHM$  равны по двум катетам, следовательно,  $AM = CM$ . По свойству медианы равнобедренного треугольника  $ACM$  имеем  $MN \perp AC$ . Итак, прямая  $NM$ , где  $N$  — середина  $AC$ , а  $M$  — ее проекция на прямую  $BD$ , перпендикулярна и прямой  $AC$ , и прямой  $BD$ . Аналогично строим прямую  $N_1M_1$ , где  $M_1$  — середина  $BD$ , а  $N_1$  — ее проекция на  $AC$ , и опять получаем, что  $N_1M_1$  перпендикулярна и прямой  $AC$ , и прямой  $BD$ . Так как существует ровно одна прямая, перпендикулярная скрещивающимся прямым  $AC$  и  $BD$ , то прямые  $NM$  и  $N_1M_1$  совпадают. Значит,  $MN$  — ось симметрии косоугольного четырехугольника  $ABCD$ . Отсюда по теореме 2 следует, что четырехугольник  $ABCD$  является косоугольным параллелограммом.

**Теорема 4.** *Для того, чтобы косоугольный четырехугольник был косоугольным параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы прямая, соединяющая центры вписанной и описанной сфер определяемого им тетраэдра, пересекала диагонали четырехугольника.*

**Необходимость.** Если  $ABCD$  — косоугольный параллелограмм, то центр  $O$  описанной сферы тетраэдра  $ABCD$  и центр  $I$  сферы,

вписанной в этот тетраэдр, лежат на оси симметрии косоугольного параллелограмма, т. е. прямая  $OI$  пересекает его диагонали  $AC$  и  $BD$  в их серединах.

**Достаточность.** Пусть в косом четырехугольнике  $ABCD$  прямая  $OI$  пересекает его диагонали  $AC$  и  $BD$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ . Тогда центр  $O$  описанной сферы лежит в биссекторной плоскости  $IAC$  двугранного угла между плоскостями  $ACB$  и  $ACD$  и поэтому равноудален от этих двух плоскостей. Он ортогонально проектируется в центры  $K$  и  $T$  окружностей, описанных около треугольников  $ACB$  и  $ACD$ . Прямоугольные треугольники  $OKB$  и  $OTD$  равны, т. к.  $OB = OD$  и  $OK = OT$ . Следовательно,  $KB = TD = e$ , и окружности, описанные около треугольников  $ACB$  и  $ACD$ , равны. По теореме синусов  $AC = 2e \cdot \sin ABC = 2e \cdot \sin ADC$ . Отсюда следует, что либо  $\angle ABC = \angle ADC$ , либо  $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ . Если центр  $O$  описанной сферы лежит внутри отрезка  $MN$  или на его продолжении за точку  $M$ , то точки  $K$  и  $T$  лежат по одну сторону от  $AC$  с вершинами  $B$  и  $D$  соответственно, и тогда  $\angle ABC = \angle ADC$ . Если же центр  $O$  лежит на продолжении отрезка  $MN$  за точку  $N$ , то центры  $K$  и  $T$  лежат по разные стороны от  $AC$  с вершинами  $B$  и  $D$  соответственно, и снова  $\angle ABC = \angle ADC$ . Случай  $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$  поэтому не имеет места.

Аналогичным образом доказывается, что  $\angle BCD = \angle BAD$ . Согласно теореме 1 четырехугольник  $ABCD$  — косой параллелограмм.  $\square$

## § 18. Ортологические косые четырехугольники

**Теорема.** Если плоскости, проведенные через середины сторон косоугольного четырехугольника  $ABCD$  перпендикулярно соответствующим сторонам другого косоугольного четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$ , пересекаются в одной точке, то и плоскости, проходящие через середины сторон второго косоугольного четырехугольника перпендикулярно соответствующим сторонам первого, также пересекаются в одной точке.

**Доказательство.** При любом выборе начала векторов векторные уравнения плоскостей первой четверки имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(\bar{A} + \bar{B}) - \bar{X}\right)(\bar{A}_1 - \bar{B}_1) &= 0, \\ \left(\frac{1}{2}(\bar{B} + \bar{C}) - \bar{X}\right)(\bar{B}_1 - \bar{C}_1) &= 0, \\ \left(\frac{1}{2}(\bar{C} + \bar{D}) - \bar{X}\right)(\bar{C}_1 - \bar{D}_1) &= 0, \\ \left(\frac{1}{2}(\bar{D} + \bar{A}) - \bar{X}\right)(\bar{D}_1 - \bar{A}_1) &= 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

По условию эта система совместна. Перепишем ее так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\bar{A} + \bar{B})(\bar{A}_1 - \bar{B}_1) &= \bar{X}(\bar{A}_1 - \bar{B}_1), \\ \frac{1}{2}(\bar{B} + \bar{C})(\bar{B}_1 - \bar{C}_1) &= \bar{X}(\bar{B}_1 - \bar{C}_1), \\ \frac{1}{2}(\bar{C} + \bar{D})(\bar{C}_1 - \bar{D}_1) &= \bar{X}(\bar{C}_1 - \bar{D}_1), \\ \frac{1}{2}(\bar{D} + \bar{A})(\bar{D}_1 - \bar{A}_1) &= \bar{X}(\bar{D}_1 - \bar{A}_1), \end{aligned} \tag{3.14}$$

После сложения этих четырех уравнений в правой части, очевидно, получим нуль, а полученное равенство после простейших преобразований можно записать в таком виде:

$$\bar{A} \cdot \bar{B}_1 + \bar{B} \cdot \bar{C}_1 + \bar{C} \cdot \bar{D}_1 + \bar{D} \cdot \bar{A}_1 = \bar{B} \cdot \bar{A}_1 + \bar{C} \cdot \bar{B}_1 + \bar{D} \cdot \bar{C}_1 + \bar{A} \cdot \bar{D}_1. \tag{3.15}$$

Это равенство симметрично относительно векторов соответственных вершин этих косых четырехугольников, что и доказывает теорему.  $\square$

Косые четырехугольники, удовлетворяющие доказанному свойству, называются *ортологическими относительно середин соответственных сторон*. Аналогично можно доказать, что утверждение останется истинным, если вместо соответственных сторон взять стороны, противоположные соответственным. В этом случае четырехугольники называются *ортологическими относительно середин противоположных сторон*.

## § 19. Плоскости- $n$ косого четырехугольника

**19.1. Определение плоскости- $n$ .** Рассмотрим косой четырехугольник  $ABCD$  и плоскость  $\gamma$ , проходящую через сторону  $AB$ . Пусть эта плоскость пересекает противоположную сторону  $CD$  в точке  $C_1$ , делящей ее в отношении  $\lambda = \overline{CC_1} : \overline{C_1D}$ . Пусть  $a, b, c, d$  — длины сторон  $AB, BC, CD, DA$  данного четырехугольника соответственно. Если  $|\lambda| = b^n : d^n$ , где  $n$  — целое неотрицательное число, то плоскость  $\gamma$  называется *плоскостью- $n$  косого четырехугольника  $ABCD$  относительно стороны  $CD$* .

При данном  $n$  у косого четырехугольника имеются две плоскости- $n$  относительно стороны  $CD$ , так как точка  $C_1$  может делить отрезок  $CD$  в отношении  $\lambda$  внутренним образом ( $\lambda > 0$ ) или же внешним образом ( $\lambda < 0$ ). Соответствующие плоскости- $n$  будем обозначать  $\gamma$  и  $\gamma'$  называть внутренней и внешней плоскостью- $n$ .

Таким образом, с каждым косым четырехугольником при данном  $n$  связаны в о с е м ь плоскостей- $n$ , из которых четыре являются внутренними и четыре внешними. Эти плоскости определяют на сторонах косо-го четырехугольника восемь точек, которые будем называть точками- $n$ .

**19.2. Свойства плоскости-0 и плоскости-1.** При  $n = 0$ , очевидно,  $\overline{CC_1} = \overline{C_1D}$ , т.е. точка  $C_1$  является серединой отрезка  $CD$ . Внешняя плоскость-0 будет параллельна стороне, так как при  $\lambda = -1$  внешняя точка-0 является бесконечно удаленной.

Более содержательными свойствами обладают плоскости-1. Опустим на плоскость-1  $\gamma$  из точек  $C$  и  $D$  перпендикуляры  $CP$  и  $DQ$  (рис. 30). Точки  $P, Q$  и  $C_1$  лежат на одной прямой, так как они принадлежат одновременно плоскости  $\gamma$  и плоскости, проходящей через прямую  $CD$  перпендикулярно к  $\gamma$ . Следовательно, треугольники  $CPC_1$  и  $DQC_1$  подобны, и поэтому  $CC_1 : DC_1 = CP : DQ$ . С другой стороны,  $CC_1 : DC_1 = b : d$ , ибо  $\gamma$  является плоскостью-1. Таким образом, получаем:  $CP : DQ = b : d$ . Последняя пропорция указывает на то, что треугольники  $BSP$  и  $ADQ$  подобны, и поэтому стороны  $BC$  и  $AD$  одинаково наклонены к плоскости  $\gamma$ .

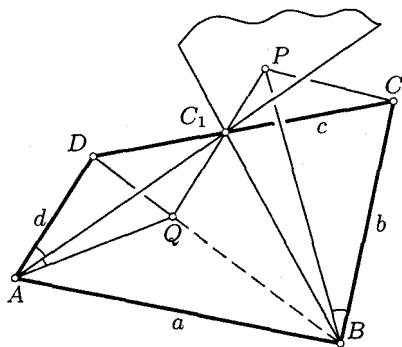


Рис. 30

Аналогичным образом убеждаемся, что внешняя плоскость  $\gamma'$  образует со сторонами  $BC$  и  $AD$  равные углы. В первом случае они лежат с разных сторон от плоскости  $\gamma$ , а во втором случае — с одной стороны от плоскости  $\gamma'$ .

Имеет место обратное предложение: если плоскость, проходящая через сторону косо-го четырехугольника, образует с прилежащими сторонами равные углы, то эта плоскость является плоскостью-1, притом внутренней или внешней в зависимости от расположения сторон по отношению к плоскости.

**Теорема.** Для того, чтобы плоскость, проходящая через сторону косо-го четырехугольника, образовала с его прилежащими сторонами равные углы, необходимо и достаточно, чтобы эта плоскость была плоскостью-1.

Доказанная теорема позволяет установить одно множество точек. Пусть  $\gamma$  является плоскостью-1 для косо-го четырехугольника  $ABCD$ .

На сторонах  $AD$  и  $BC$  выберем произвольно по точке  $D_1$  и  $B_1$ . Очевидно, что плоскость  $\gamma$  является плоскостью-1 и для косоугольного четырехугольника  $ABB_1D_1$ .

**Следствие 1.** Если три прямые, которым принадлежат стороны косоугольного четырехугольника, фиксированы, а четвертая сторона является переменной, то множество точек-1 (внутренних или внешних) на переменной стороне есть пара плоскостей.

Из доказанной теоремы может быть выведено и другое замечательное следствие. Пусть в пространстве даны три попарно скрещивающиеся прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , не параллельные одной плоскости. Выясним, сколько можно провести плоскостей через прямую  $c$ , образующих с прямыми  $a$  и  $b$  равные углы. Через прямые  $a$  и  $b$  проведем две плоскости, параллельные прямой  $c$ . Эти две плоскости пересекаются по прямой  $c'$ , параллельной  $c$  и пересекающей прямые  $a$  и  $b$ . Но через прямую  $c'$  проходят две плоскости, образующие с прямыми  $a$  и  $b$  равные углы. Следовательно, через прямую  $c$  также проходят две плоскости, которые с прямыми  $a$  и  $b$  образуют равные углы. Последние две плоскости параллельны соответствующим плоскостям, проходящим через прямую  $c'$ . Если бы через прямую  $c$  можно было провести еще одну плоскость, образующую с прямыми  $a$  и  $b$  равные углы, то и через прямую  $c'$  можно было бы провести еще одну такую же третью плоскость, что противоречит следствию 1.

**Следствие 2.** Если в пространстве даны три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, то через каждую из них можно провести по две плоскости, образующие с двумя другими прямыми равные углы.

### 19.3. Построение плоскости-( $n + 1$ ) по данной плоскости- $n$ .

Построение плоскости-1 можно выполнить так. Отложим на сторонах  $AD$  и  $BC$  от точек  $A$  и  $B$  равные отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  (рис. 31). Плоскость  $\gamma$ , проведенная через середину  $E$  отрезка  $A_1B_1$  и прямую  $AB$ , является плоскостью-1 для данного косоугольного четырехугольника  $ABCD$ . Действительно, применим к косоугольному четырехугольнику  $A_1B_1CD$  и плоскости  $\gamma$  теорему Менелая:

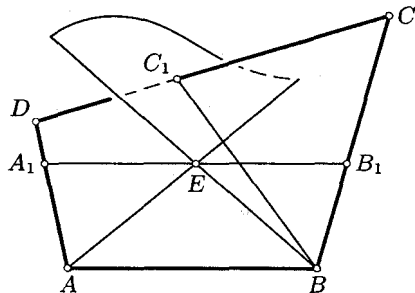


Рис. 31

$$\frac{\overline{A_1E}}{\overline{EB_1}} \cdot \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1D}} \cdot \frac{\overline{DA}}{\overline{AA_1}} = 1,$$

где через  $C_1$  обозначена точка пересечения плоскости  $\gamma$  и прямой  $CD$ . Но  $\overline{A_1E} = \overline{EB_1}$  и  $AA_1 = BB_1$ , поэтому из последнего равенства следует:  $\overline{CC_1} : \overline{C_1D} = b : d$ . Это означает, что плоскость  $\gamma$  является плоскостью-1. Если равные отрезки отложены на сторонах или на продолжениях сторон косоугольного четырехугольника, то плоскость  $\gamma$  будет внутренней плоскостью-1. Если же один отрезок отложен на одной стороне, а другой — на продолжении другой стороны, то плоскость  $\gamma$  будет внешней плоскостью-1.

Таким образом, плоскость-0 для косоугольного четырехугольника  $ABB_1A_1$  относительно стороны  $A_1B_1$  является плоскостью-1 для косоугольного четырехугольника  $ABCD$  относительно стороны  $CD$ . Аналогичным образом можно доказать, что если  $AA_1 = CC_1$ ,  $BB_1 = DC_1$ , причем точка  $C_1$  является точкой- $n$  на стороне  $CD$ , то плоскость- $n$  для четырехугольника  $ABB_1A_1$  будет плоскостью- $(n+1)$  для данного косоугольного четырехугольника. Итак, имеем такую теорему.

**Теорема.** Если на стороне  $CD$  косоугольного четырехугольника  $ABCD$  дана точка- $n$   $C_1$ , и на сторонах  $AD$  и  $BC$  от точек  $A$  и  $B$  отложены соответственно отрезки  $AA_1 = CC_1$ ,  $BB_1 = DC_1$ , то плоскость- $n$  для косоугольного четырехугольника  $ABB_1A_1$  является плоскостью- $(n+1)$  для данного косоугольного четырехугольника.

Эта теорема дает способ построения плоскости- $(n+1)$ , если дана плоскость- $n$ .

### Задачи к главе 3

3.1. Точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  делят соответственно стороны  $AB, BC, CD, DA$  косоугольного четырехугольника  $ABCD$  в одном и том же отношении  $\lambda$ . Докажите, что четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  — параллелограмм. Докажите, что при  $\lambda = 1$  центром этого параллелограмма является центроид четырехугольника  $ABCD$ . Найдите множество всех центров этих параллелограммов при  $\lambda = 1$ , если три вершины четырехугольника остаются неподвижными, а четвертая описывает данную плоскость или данную прямую.

3.2. Докажите, что для косинуса угла  $\gamma$  между диагоналями косоугольного четырехугольника  $ABCD$  имеет место формула:

$$\cos \gamma = \frac{|AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2|}{2AC \cdot BD}.$$

3.3. Вершины  $A_1, B_1, C_1, D_1$  косоугольного четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$  лежат соответственно на сторонах  $AB, BC, CD, DA$  косоугольного четырехугольника  $ABCD$ , причем центроиды этих четырехугольников

совпадают. Докажите, что вершины четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$  делят стороны четырехугольника  $ABCD$  в равных отношениях.

3.4. Прямые, каждая из которых соединяет две точки на двух смежных сторонах косоугольного четырехугольника с точками, делящими соответственно в тех же отношениях противоположные стороны, пересекаются. Отрезок каждой из этих прямых, заключенный между сторонами четырехугольника, делится другой прямой в том же отношении, как и те стороны, которые первая прямая не пересекает. Докажите оба эти утверждения.

3.5. Дан косоугольный четырехугольник и некоторая точка. Через каждую сторону четырехугольника проведена плоскость, параллельная прямой, проходящей через данную точку и середину противоположной стороны. Докажите, что полученные таким образом плоскости имеют общую точку.

3.6. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  косоугольного четырехугольника  $ABCD$  даны соответственно точки  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$ ,  $D_1$  и  $D_2$ . Докажите, что если из четырех четверок точек  $(A_1, B_1, C_2, D_2)$ ,  $(A_2, B_2, C_1, D_1)$ ,  $(A_1, B_2, C_1, D_2)$ ,  $(A_2, B_1, C_2, D_1)$  какие-либо три образованы компланарными точками, то и точки оставшейся четверки также компланарны.

3.7. Точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  принадлежат сторонам  $AB, BC, CD, DA$  косоугольного четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что плоскости, проходящие через середины сторон четырехугольника и через середины отрезков, каждый из которых соединяет данную точку на стороне с вершинами противоположной стороны, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда данные точки на сторонах компланарны.

3.8. Для того, чтобы косоугольный четырехугольник был косоугольным параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали составляли равные углы с противоположными сторонами в каждой паре. Докажите.

3.9. Если прямая, проходящая через центроид косоугольного четырехугольника и через центр описанной около него (вписанной в него) сферы, пересекает диагонали  $AC$  и  $BD$ , то четырехугольник  $ABCD$  есть косоугольный параллелограмм. Докажите.

3.10. Докажите, что в косоугольном ромбе диагонали перпендикулярны. Докажите, что если диагонали косоугольного параллелограмма перпендикулярны, то он является косоугольным ромбом.

3.11. Косоугольной трапецией называется косоугольный четырехугольник, в котором вершины одной стороны (основания), равноудалены от противоположной стороны. Докажите, что в косоугольной трапеции основания и средняя линия параллельны одной плоскости.

## § 20. Гомологичные тетраэдры

**20.1. Теорема Понселе.** Непосредственным обобщением теоремы Дезарга (§ 11) о треугольниках служит следующая теорема Понселе<sup>1</sup>.

Если прямые  $A_i B_i$ , соединяющие соответственные вершины тетраэдров  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и  $B_1 B_2 B_3 B_4$ , пересекаются в одной точке  $M$ , то прямые  $m_i$  пересечения соответственных граней  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  этих тетраэдров лежат в одной плоскости  $\mu$ .

Эту теорему иногда называют также теоремой Дезарга.

**Доказательство.** По теореме Дезарга о треугольниках на прямой  $m_i$  лежат точки  $C_{jk}$  пересечения ребер  $A_j A_k$  и  $B_j B_k$  ( $i, j, k = 1, 2, 3, 4$  и все различны) данных тетраэдров (рис. 32). Например, на прямой  $m_1 = (A_2 A_3 A_4) \cap (B_2 B_3 B_4)$  лежат точки  $C_{23} = (A_2 A_3) \cap (B_2 B_3)$ ,  $C_{24} = (A_2 A_4) \cap (B_2 B_4)$ ,  $C_{34} = (A_3 A_4) \cap (B_3 B_4)$ . Прямые  $m_1$  и  $m_2$  пересекаются в точке  $C_{34}$ . В плоскости  $\mu$  этих прямых лежат точки  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{14}$ ,  $C_{24}$ . Так как точки  $C_{14}$  и  $C_{24}$  принадлежат прямой  $m_3$ , то она также лежит в плоскости  $\mu$ . В этой же плоскости находится и прямая  $m_4$ , поскольку две ее точки  $C_{13}$  и  $C_{23}$  лежат в  $\mu$ .  $\square$

Обратная теорема имеет место и доказывается на основе обратной теоремы Дезарга. В самом деле, если плоскости  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  граней данных тетраэдров пересекаются по прямым  $m_i$ , лежащим в одной плоскости  $\mu$ , то для треугольников  $A_2 A_3 A_4$  и  $B_2 B_3 B_4$  прямые  $A_2 B_2$ ,  $A_3 B_3$ ,  $A_4 B_4$  пересекаются в некоторой точке  $M$ . Аналогично для треугольников  $A_1 A_2 A_3$  и  $B_1 B_2 B_3$  прямые  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$ ,  $A_3 B_3$  пересекаются в одной точке. Поскольку такой точкой является точка  $(A_2 B_2) \cap (A_3 B_3) = M$ , то прямая  $A_1 B_1$  проходит через  $M$ .

Два тетраэдра, удовлетворяющие условию теоремы Понселе, называются *гомологичными*, или *перспективными*. Точку  $M$  называют *центром гомологии* тетраэдров, а плоскость  $\mu$  — *плоскостью гомологии*.

<sup>1</sup>Понселе Жан (1788—1867) — французский инженер и математик, один из создателей проективной геометрии, член-корреспондент Петербургской АН. Работал в Париже и Сорбонне.



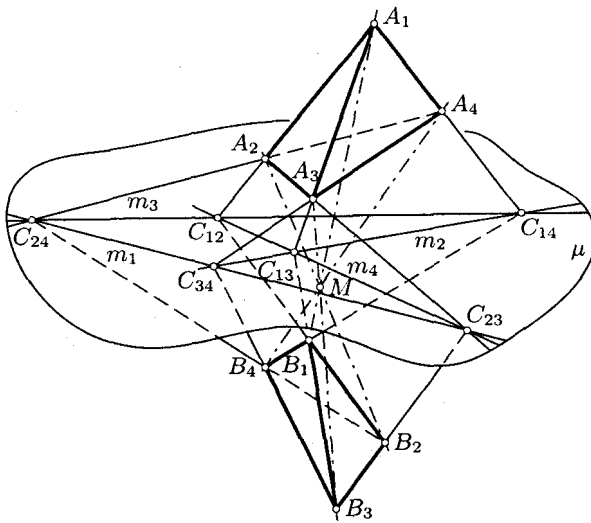


Рис. 32

**Следствие.** Шесть точек пересечения соответственных ребер двух гомологичных тетраэдров лежат по три на четырех прямых, т. е. являются вершинами полного четырехсторонника.

**20.2. Дезаргова тетраэдральная конфигурация.** Пусть дан тетраэдр  $(T) = A_1A_2A_3A_4$  и точка  $M$ , не принадлежащая его граням  $\alpha_i$ . Обозначим через  $M_{ij}$  точку пересечения плоскости  $MA_kA_u$  с прямой  $A_iA_j$ . Тогда три прямые  $M_{12}M_{34}, M_{13}M_{24}, M_{14}M_{23}$  проходят через данную точку  $M$ , так как они являются линиями пересечения плоскостей, проходящих через точку  $M$  (рис. 33).

Далее, если в каждой грани  $\alpha_i$  данного тетраэдра взять по такой точке  $M_i$ , что прямые  $A_iM_j$  и  $A_jM_i$  пересекаются в одной точке  $M_{ki}$  на ребре  $A_kA_u$ , то прямые  $A_iM_i$  пересекаются в одной точке  $M$ . Действительно, прямые  $A_iM_i$  попарно пересекаются, так как попарно лежат в одной плоскости. Известно, что если множество прямых обладает тем свойством, что любые две из них пересекаются, то либо все они лежат в одной плоскости, либо все проходят через одну точку. В нашем случае прямые  $A_iM_i$  все в одной плоскости лежать не могут, а потому должны пересекаться в одной точке  $M$ .

Конфигурацию точек, прямых и плоскостей, полученную таким образом с помощью тетраэдра и точки, называют *дезарговой тетраэдральной конфигурацией*.

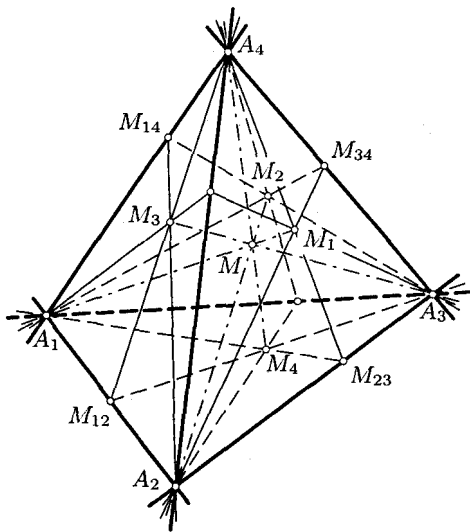


Рис. 33

### 20.3. Полярная плоскость точки относительно тетраэдра.

Пусть дан тетраэдр  $(T) = A_1A_2A_3A_4$  и точка  $M$ , не принадлежащая его граням. Выполнив предыдущие построения и сохранив введенные обозначения, рассмотрим тетраэдр  $M_1M_2M_3M_4$ . Очевидно, он гомологичен с данным тетраэдром  $(T)$  с центром гомологии  $M$ . Плоскость  $\mu$  этой гомологии называется *полярной плоскостью* точки  $M$  относительно тетраэдра  $(T)$ , или *гармонической полярной* точки  $M$  относительно тетраэдра  $(T)$ .

Найдем барицентрическое уравнение полярной плоскости, если тетраэдр  $(T)$  принят за базисный, а точка  $M$  имеет Б-координаты  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ . Тогда точки  $M_i$  имеют (ненормированные) Б-координаты:  $M_1(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ ,  $M_2(\lambda_1, 0, \lambda_3, \lambda_4)$ ,  $M_3(\lambda_1, \lambda_2, 0, \lambda_4)$ ,  $M_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0)$ . В каждой грани тетраэдра  $(T)$  построим гармонические поляры точек  $M_i$  относительно треугольника этой грани (п. 11.2, рис. 10). Согласно (2.2) они имеют уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{x_2}{\lambda_2} + \frac{x_3}{\lambda_3} + \frac{x_4}{\lambda_4} &= 0, & x_1 &= 0; \\
 \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_3}{\lambda_3} + \frac{x_4}{\lambda_4} &= 0, & x_2 &= 0; \\
 \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2} + \frac{x_4}{\lambda_4} &= 0, & x_3 &= 0; \\
 \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2} + \frac{x_3}{\lambda_3} &= 0, & x_4 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Легко видеть, что эти четыре прямые лежат в одной плоскости

$$\frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2} + \frac{x_3}{\lambda_3} + \frac{x_4}{\lambda_4} = 0, \quad (4.2)$$

которая является плоскостью гомотопии тетраэдров ( $T$ ) и  $M_1M_2M_3M_4$  (ср. рис. 32). Следовательно, уравнение (4.2) и есть уравнение полярной плоскости точки  $M(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  относительно базисного тетраэдра ( $T$ ).

## § 21. Тетраэдр и точка

**21.1. Теорема Чевы для тетраэдра.** Если шесть плоскостей, проходящих через ребра тетраэдра, пересекаются в точке  $P$  и пересекают противоположные ребра  $A_iA_j$  в точках  $P_{ij}$ , то между площадями треугольников, ориентированных соответственно в гранях тетраэдра, имеет место зависимость:

$$\frac{\overline{P_{31}A_1P_{41}}}{\overline{P_{34}A_1P_{31}}} \cdot \frac{\overline{P_{42}A_2P_{12}}}{\overline{P_{41}A_2P_{42}}} \cdot \frac{\overline{P_{13}A_3P_{23}}}{\overline{P_{12}A_3P_{13}}} \cdot \frac{\overline{P_{24}A_4P_{34}}}{\overline{P_{23}A_4P_{24}}} = 1. \quad (4.3)$$

**Доказательство.** В каждом из этих отношений оба треугольника имеют общую сторону, поэтому отношения их площадей равны соответственно отношениям ориентированных расстояний от третьих вершин до общей стороны. А отношения этих расстояний соответственно равны отношениям ориентированных расстояний от этих третьих вершин до другой грани тетраэдра, проходящей через общую сторону треугольников (рис. 34). В свою очередь последние отношения

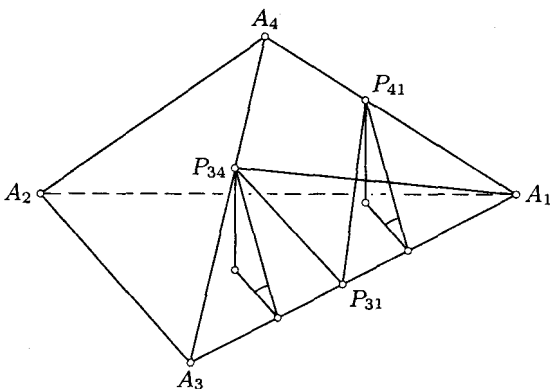


Рис. 34

равны отношениям нормированных барицентрических координат точек  $P_{ij}$ , соответствующих вершине грани рассматриваемых двух треугольников, которая им не принадлежит.

Именно, если  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  — нормированные барицентрические координаты данной точки  $P$ , то точки  $P_{ij}$  имеют координаты:

$$P_{41} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_4}, 0, 0, \frac{\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_4} \right) \quad \text{и} \quad P_{34} \left( 0, 0, \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_4}, \frac{\lambda_4}{\lambda_3 + \lambda_4} \right).$$

Следовательно,

$$\frac{\overline{P_{31}A_1P_{41}}}{\overline{P_{34}A_1P_{31}}} = \frac{\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_4} : \frac{\lambda_4}{\lambda_3 + \lambda_4} = \frac{\lambda_3 + \lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_4}$$

и аналогично

$$\frac{\overline{P_{42}A_2P_{12}}}{\overline{P_{41}A_2P_{42}}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \frac{\overline{P_{13}A_3P_{23}}}{\overline{P_{12}A_3P_{13}}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3}, \quad \frac{\overline{P_{24}A_4P_{34}}}{\overline{P_{23}A_4P_{24}}} = \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_4}.$$

Полученные выражения отношений площадей обращают доказываемое соотношение (4.3) в очевидное.  $\square$

**21.2. Обобщенная теорема Ван-Обеля.** Пусть дан тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$  и некоторая точка  $P$ , не принадлежащая его граням. Через каждое ребро одной грани (например, грани  $A_1A_2A_3$ ) проведем плоскости, которые пересекают противоположные ребра  $A_4A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) соответственно в точках  $Q_i$ . Тогда для каждой чевианы имеет место равенство вида

$$\frac{\overline{A_4P}}{\overline{PP_4}} = \frac{\overline{A_4Q_1}}{\overline{Q_1A_1}} + \frac{\overline{A_4Q_2}}{\overline{Q_2A_2}} + \frac{\overline{A_4Q_3}}{\overline{Q_3A_3}}, \quad (4.4)$$

где  $P_4$  — точка пересечения прямой  $A_4P$  с плоскостью  $A_1A_2A_3$ .

**Доказательство.** Пусть точка  $P$  имеет нормированные барицентрические координаты  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ . Найдем Б-координаты точек  $P_4, Q_1, Q_2, Q_3$ :

$$P_4 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, 0 \right),$$

$$Q_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_4}, 0, 0, \frac{\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_4} \right),$$

$$Q_2 \left( 0, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_4}, 0, \frac{\lambda_4}{\lambda_2 + \lambda_4} \right),$$

$$Q_3 \left( 0, 0, \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_4}, \frac{\lambda_4}{\lambda_3 + \lambda_4} \right).$$

Далее находим отношения векторов

$$\frac{\overline{A_4P}}{\overline{PP_4}} = \frac{1 - \lambda_4}{\lambda_4}, \quad \frac{\overline{A_4Q_1}}{\overline{Q_1A_1}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_4}, \quad \frac{\overline{A_4Q_2}}{\overline{Q_2A_2}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_4}, \quad \frac{\overline{A_4Q_3}}{\overline{Q_3A_3}} = \frac{\lambda_3}{\lambda_4}.$$

Так как  $1 - \lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ , то соотношение (4.4) выполняется.  $\square$

**21.3. Теорема Жергона.** Пусть даны тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$  и некоторая точка  $P$ . Если  $P_i$  — точки пересечения прямых  $PA_i$  с плоскостями граней тетраэдра, то имеет место равенство:

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{A_1P_1}} + \frac{\overline{PP_2}}{\overline{A_2P_2}} + \frac{\overline{PP_3}}{\overline{A_3P_3}} + \frac{\overline{PP_4}}{\overline{A_4P_4}} = 1. \quad (4.5)$$

В самом деле,  $\frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_iP_i}} = \frac{x_i}{h_i}$ , где  $x_i$  — ориентированные расстояния точки  $P$  до граней,  $h_i$  — длины высот тетраэдра. Равенство (4.5) эквивалентно (1.33).

**Следствие.** Заметим, что

$$\frac{\overline{A_iP}}{\overline{A_iP_i}} = \frac{\overline{A_iP_i} - \overline{PP_i}}{\overline{A_iP_i}} = 1 - \frac{\overline{PP_i}}{\overline{A_iP_i}}.$$

Тогда из (4.5) получаем:

$$\frac{\overline{A_1P}}{\overline{A_1P_1}} + \frac{\overline{A_2P}}{\overline{A_2P_2}} + \frac{\overline{A_3P}}{\overline{A_3P_3}} + \frac{\overline{A_4P}}{\overline{A_4P_4}} = 3. \quad (4.6)$$

**21.4. Две аффинные конструкции точки, прямых и центроидов граней тетраэдра.** Докажем две следующие теоремы аффинного характера.

**Теорема 1.** Пусть даны тетраэдр ( $T$ ) и некоторая точка  $P$ , не принадлежащая его граням. Через каждую вершину тетраэдра проведена прямая, параллельная прямой, содержащей точку  $P$  и центроид  $G_i$  противоположной грани. Тогда построенные четыре прямые пересекаются в одной точке  $Q$ , и прямая  $PQ$  проходит через центроид  $G$  данного тетраэдра, причем  $\overline{PQ} : \overline{PG} = 4$  (рис. 35).

**Доказательство.** Векторы центроидов  $G_i$  граней  $\alpha_i$  тетраэдра имеют выражения (при произвольном начале векторов):  $\overline{G}_i = \frac{1}{3}(\overline{A}_j + \overline{A}_k + \overline{A}_u)$ , а вектор текущей точки прямой  $PG_i$  равен

$$\overline{A}_i + (\overline{G}_i - \overline{P})t_i = \overline{A}_i + \left(\frac{1}{3}(\overline{A}_j + \overline{A}_k + \overline{A}_u) - \overline{P}\right)t_i,$$

где  $t_i$  — параметры ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Очевидно, при  $t_i = 3$  последнее выражение не зависит от  $i$ :

$$\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \overline{A}_4 - 3\overline{P}. \quad (4.7)$$

Это значит, что прямые  $PG_i$  пересекаются в одной точке  $Q$ , определяемой вектором (4.7). Так как  $\overline{G} = \frac{1}{4}(\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \overline{A}_4)$ , то получаем

$$\overline{PG} = \overline{G} - \overline{P} = \frac{1}{4}(\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \overline{A}_4) - \overline{P}$$

и

$$\overline{PQ} = \overline{Q} - \overline{P} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \overline{A}_4 - 4\overline{P}.$$

Поэтому  $\overline{PQ} = 4\overline{PG}$ . Следовательно, точки  $P, Q, G$  коллинеарны.  $\square$

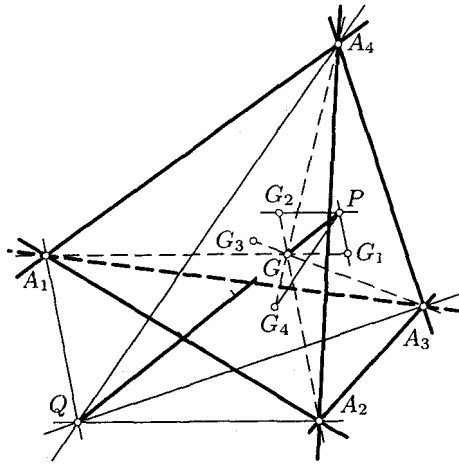


Рис. 35

**Теорема 2.** Пусть произвольная точка  $P$  пространства соединена с центроидами  $G_i$  граней тетраэдра  $(T)$ , и отрезки  $PG_i$  разделены точками  $C_i$  в одном и том же отношении  $\lambda$ . Тогда тетраэдры  $(T)$  и  $C_1C_2C_3C_4$  гомологичны, и центр  $Q$  гомологии лежит на прямой  $PG$ .

**Доказательство.** Векторы точек деления выражаются так:

$$\bar{C}_i = \frac{\bar{P} + \lambda \bar{G}_i}{1 + \lambda} = \frac{1}{1 + \lambda} \bar{P} + \frac{\lambda}{3(1 + \lambda)} (\bar{A}_j + \bar{A}_k + \bar{A}_u).$$

Вектор текущей точки прямой  $A_iC_i$  равен  $\bar{A}_i + (\bar{C}_i - \bar{A}_i)t_i$ , где  $t_i$  — параметры, или подробнее:

$$\bar{A}_i + \left( \frac{1}{1 + \lambda} \bar{P} + \frac{\lambda}{3(1 + \lambda)} (\bar{A}_j + \bar{A}_k + \bar{A}_u) - \bar{A}_i \right) t_i.$$

Нетрудно проверить, что при  $t_i = \frac{3(1 + \lambda)}{4\lambda + 3}$  это выражение не зависит от  $i$ :

$$\frac{1}{4\lambda + 3} (3\bar{P} + \lambda(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4)). \quad (4.8)$$

Следовательно, прямые  $A_iC_i$  пересекаются в одной точке  $Q$ , вектор которой равен (4.8).

Далее находим:

$$\overline{PQ} = \bar{Q} - \bar{P} = \frac{\lambda}{4\lambda + 3} (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4 - 4\bar{P}),$$

$$\overline{PG} = \bar{G} - \bar{P} = \frac{1}{4} (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4) - \bar{P},$$

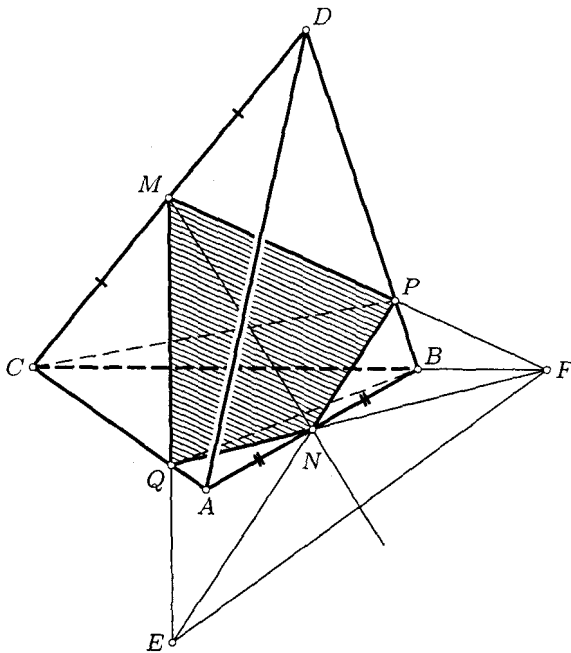


Рис. 36

откуда

$$\overline{PQ} = \frac{4\lambda}{4\lambda + 3} \overline{PG}.$$

Значит, точки  $P, Q, G$  коллинеарны. □

## § 22. Тетраэдр и плоскость

### 22.1. Деление тетраэдра на две равновеликие части.

**Теорема.** *Плоскость, проходящая через бимедиану тетраэдра, делит его на две равновеликие части.*

**Доказательство.** Пусть  $N$  и  $M$  — середины ребер  $AB$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$ , и секущая плоскость  $MPNQ$  пересекает ребра  $BD$  и  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$  (рис. 36). Данный тетраэдр разбивается секущей плоскостью на два многогранника  $DMPNAQ$  и  $CMPBNQ$ . Первый из них состоит из тетраэдров  $DMPQ$ ,  $ADPQ$  и  $ANPQ$ , а второй — из тетраэдров  $CMPQ$ ,  $CBPQ$  и  $BNPQ$ . Тетраэдры  $DMPQ$  и  $CMPQ$

равновелики, поскольку имеют общее основание и равные высоты. По аналогичной причине равновелики тетраэдры  $ANPQ$  и  $BNPQ$ . Тетраэдры  $ADPQ$  и  $CBPQ$  также равновелики. Действительно, по теореме Менелая для косоугольного четырехугольника  $CDBA$  и рассматриваемой секущей плоскости  $MPNQ$

$$\frac{CM}{MD} \cdot \frac{DP}{PB} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{AQ}{QC} = 1,$$

и в силу равенств  $CM = MD$  и  $BN = NA$  получаем:

$$DP \cdot AQ = PB \cdot QC. \quad (4.9)$$

На основании формулы Сервуа (см. [5], с. 98) тетраэдры  $ADPQ$  и  $CBPQ$  имеют равные объемы. В силу равновеликости тетраэдров в каждой из трех указанных пар имеем равновеликость двух многогранников разбиения тетраэдра секущей плоскостью.

Другое изящное доказательство этого факта, методом аффинных преобразований, имеется во втором томе (см. [5], с. 235).  $\square$

**Следствие 1.** *Плоскость, проходящая через бимедиану тетраэдра, делит другие противоположные ребра (в обеих парах) в равных отношениях.*

В самом деле, из равенства (4.9) следует  $\frac{DP}{PB} = \frac{CQ}{QA}$ . Аналогично по теореме Менелая для косоугольного четырехугольника  $ABCD$  и той же секущей плоскости получаем  $\frac{BF}{FC} = \frac{AE}{ED}$ .

**Следствие 2.** *Бимедиана  $MN$  делит пополам отрезки  $PQ$  и  $EF$ , каждый из которых соединяет точки пересечения секущей плоскости с противоположными ребрами тетраэдра.*

Это вытекает из упомянутого доказательства методом аффинных преобразований.

**22.2. Теорема Менелая.** *Если плоскость пересекает ребра  $A_iA_j$  тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  соответственно в точках  $P_{ij}$ , то между площадями ориентированных треугольников, отсекаемых на гранях тетраэдра, существует зависимость (4.3).*

Приведенное в п. 21.1 доказательство сохраняет силу и в этом случае. Обратное утверждение не верно.

**22.3. Изотомические плоскости.** *Если плоскость  $\alpha$  пересекает ребра  $A_iA_j$  тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  соответственно в точках  $P_{ij}$ , то шесть точек  $Q_{ij}$ , изотомически сопряженных им относительно отрезков  $A_iA_j$ , лежат в одной плоскости  $\beta$ , называемой изотомически сопряженной плоскости  $\alpha$  относительно данного тетраэдра.*

**Доказательство.** По теореме Менелая для треугольника и в силу зависимости между точками, изотомически сопряженными



относительно отрезка  $Q_{23}$ , точки  $Q_{12}$ ,  $Q_{13}$ ,  $Q_{23}$ , изотомические точкам  $P_{12}$ ,  $P_{13}$ ,  $P_{23}$  прямой, коллинеарны. Равным образом точки  $Q_{12}$ ,  $Q_{14}$ ,  $Q_{24}$  грани  $\alpha_3$  лежат на прямой и точки  $Q_{34}$ ,  $Q_{23}$ ,  $Q_{24}$  также коллинеарны. Первые две прямые пересекаются в точке  $Q_{12}$ , следовательно, лежат в одной плоскости  $\beta$ . Третья прямая имеет с плоскостью  $\beta$  две общие точки  $Q_{23}$  и  $Q_{24}$ , и поэтому вся лежит в ней.  $\square$

Как следствие получаем аналогичную теорему для косоугольного тетраэдра.

**22.4. Прямые Гаусса в гранях тетраэдра.** Пусть плоскость  $\alpha$  пересекает ребра  $A_i A_j$  тетраэдра соответственно в точках  $P_{ij}$ . В каждой грани имеем полный четырехсторонник, образованный тремя ребрами этой грани и прямой ее пересечения с плоскостью  $\alpha$  (рис. 37). Построим прямые  $g_k$  Гаусса для указанных четырехсторонников (см.

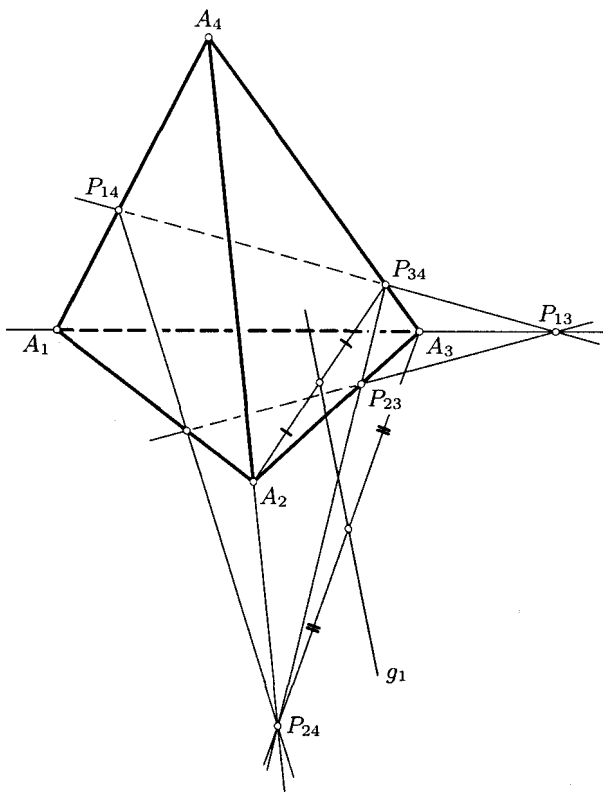


Рис. 37

[4], с. 74). Докажем, что четыре прямые  $g_k$  Гаусса параллельны одной плоскости  $\beta$ , изотомически сопряженной с плоскостью  $\alpha$  относительно тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ .

Действительно, прямая  $g_k$  определяется любыми двумя из трех векторов:

$$\frac{1}{2}(\bar{A}_i + \bar{P}_{ju}), \quad \frac{1}{2}(\bar{A}_j + \bar{P}_{iu}), \quad \frac{1}{2}(\bar{A}_u + \bar{P}_{ij}).$$

Направляющие векторы прямых  $q_1, q_2, q_3$  имеют соответственно выражения

$$\bar{A}_2 + \bar{P}_{43} - \bar{A}_3 - \bar{P}_{42}, \quad \bar{A}_3 + \bar{P}_{41} - \bar{A}_1 - \bar{P}_{43}, \quad \bar{A}_1 + \bar{P}_{42} - \bar{A}_2 - \bar{P}_{41}.$$

Непосредственно видно, что сумма этих векторов равна нуль-вектору. Значит, эти векторы компланарны, а прямые  $q_1, q_2, q_3$  параллельны некоторой плоскости. Равным образом всякие три из четырех прямых  $g_k$  параллельны соответственно одной плоскости. Но в каждой тройке векторов имеются два вектора, общие с другой тройкой. Следовательно, все четыре прямые параллельны одной плоскости. Эта плоскость изотомически сопряжена с плоскостью  $\alpha$  относительно данного тетраэдра. В самом деле, вектор точки  $Q_{ij}$ , изотомической с точкой  $P_{ij}$  относительно вершин  $A_i$  и  $A_j$ , имеет выражение:  $\bar{A}_i + \bar{A}_j - \bar{P}_{ij}$ . Значит, направление вектора  $\bar{Q}_{ij} - \bar{Q}_{iu} = \bar{A}_j - \bar{P}_{ij} - \bar{A}_u + \bar{P}_{iu}$ , параллельное  $\beta$ , параллельно прямой  $g_k$ .

**Следствие.** Пусть даны пять плоскостей общего положения. Для каждой из них построим плоскость, изотомически сопряженную относительно тетраэдра, образованного остальными четырьмя плоскостями. Тогда все полученных таким образом пять плоскостей параллельны между собой.

В самом деле, прямые Гаусса, полученные указанным выше способом для каждого тетраэдра и оставшейся плоскости, будут одни и те же. Отсюда по доказанной теореме и следует сформулированное утверждение.

## § 23. Параллельное проектирование и равновеликие тетраэдры

**23.1. Три задачи о равновеликих тетраэдрах.** Рассмотрим решения следующих задач, возникающих в связи с параллельным проектированием плоскости на плоскость.

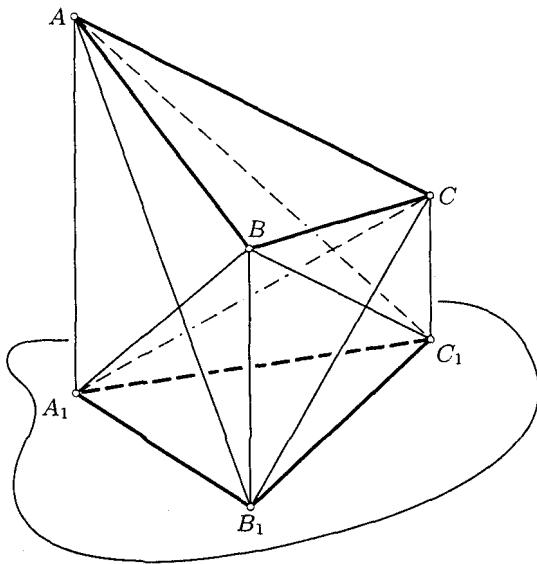


Рис. 38

**Задача 1.** Треугольник  $ABC$  спроектирован в некотором направлении на треугольник  $A_1B_1C_1$ . Плоскости этих треугольников различны. Доказать, что тетраэдры  $ABCC_1$  и  $A_1B_1C_1C$  равновелики (рис. 38).

**Решение 1.** Четырехугольник  $BB_1C_1C$  — трапеция. Треугольники  $BCC_1$  и  $B_1C_1C$  равновелики. Так как прямая  $AA_1$  параллельна плоскости этой трапеции, то высоты тетраэдров  $ABCC_1$  и  $A_1B_1C_1C$ , опущенные соответственно из вершин  $A$  и  $A_1$ , равны. Следовательно, равны и объемы этих тетраэдров.

Заметим, что рассматриваемые тетраэдры ориентированы противоположно. Ориентация тетраэдра определяется ориентацией упорядоченной тройки векторов его ребер с общим началом.

**Решение 2** основано на таком способе вычисления объема произвольной пирамиды: *объем любой пирамиды равен одной трети произведения длины ее бокового ребра и площади ортогональной проекции основания на плоскость, перпендикулярную этому ребру.*

Применим это простое утверждение к тетраэдрам  $ABCC_1$  и  $A_1B_1C_1C$  задачи 1. Они имеют общее ребро  $CC_1$ , а ортогональные проекции треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  на плоскость, перпендикулярную этому ребру, совпадают. Значит, эти тетраэдры равновелики.

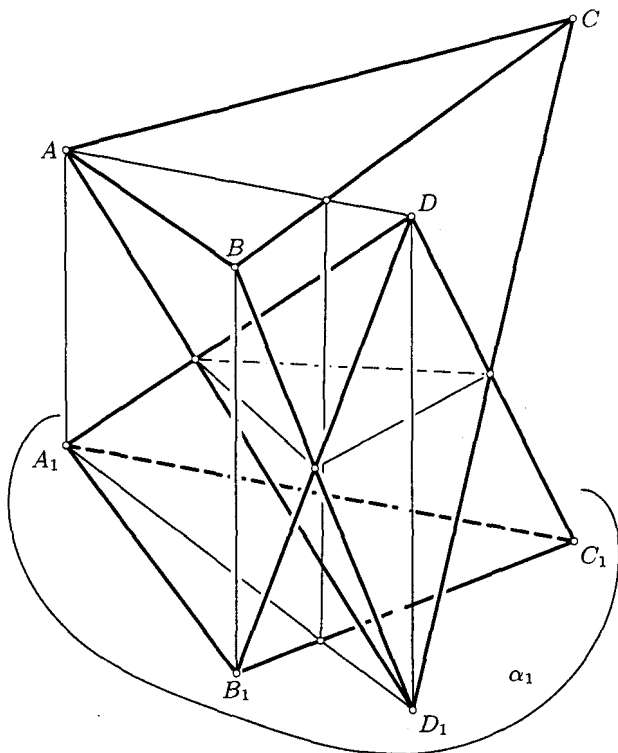


Рис. 39

**Задача 2.** Точки  $A, B, C, D$  лежат в плоскости  $\alpha$ , причем точки  $A, B, C$  неколлинеарны. Точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  являются их образами при параллельном проектировании на плоскость  $\alpha_1$ . Доказать, что тетраэдры  $ABCD_1$  и  $A_1B_1C_1D_1$  равновелики (рис. 39).

**Доказательство** основано на известном свойстве параллельного проектирования: при параллельном проектировании плоскости на плоскость сохраняется отношение площадей фигур, т. е. отношение площадей любых двух фигур первой плоскости равно отношению площадей их проекций. Желающие могут убедиться в этом самостоятельно. Для этого достаточно провести плоскость, перпендикулярную направлению проектирования, и применить формулу площади ортогональной проекции фигуры. Согласно этому свойству

$$\frac{S(ABC)}{S(BCD)} = \frac{S(A_1B_1C_1)}{S(B_1C_1D_1)},$$

откуда

$$\frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = \frac{S(BCD)}{S(B_1C_1D_1)}.$$

На основании задачи 1 объемы тетраэдров  $BCDD_1$  и  $B_1C_1D_1D$  равны, поэтому

$$\frac{S(BCD)}{S(B_1C_1D_1)} = \frac{h_1}{h},$$

где  $h$  и  $h_1$  — длины соответственных высот этих тетраэдров. Они же являются и высотами тетраэдров  $ABCD_1$  и  $A_1B_1C_1D$ . Из двух последних равенств следует:

$$\frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = \frac{h_1}{h}, \quad \text{или} \quad S(ABC)h = S(A_1B_1C_1)h_1,$$

чем и заканчивается доказательство. Тетраэдры  $ABCD_1$  и  $A_1B_1C_1D$  имеют противоположные ориентации.

**Задача 3.** Точки  $A, B, C, D$  одной плоскости проектируются в некотором направлении на другую плоскость соответственно в точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Доказать, что тетраэдры  $ABC_1D_1$  и  $A_1B_1CD$  равновелики (рис. 40).

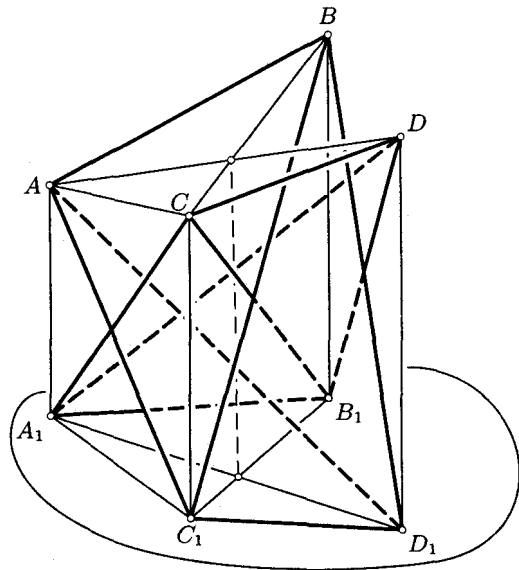


Рис. 40

**Решение 1.** Применим формулу объема тетраэдра через смешанное произведение трех векторов его ребер с началом в одной из его вершин

$$\begin{aligned} 6V(ABC_1D_1) &= |\overline{AB} \overline{AC_1} \overline{AD_1}| = \\ &= |(\overline{AA_1} + \overline{A_1B}) \overline{AC_1} \overline{AD_1}| = |\overline{AA_1} \overline{AC_1} \overline{AD_1} + \overline{A_1B} \overline{AC_1} \overline{AD_1}| = \\ &= |\overline{AA_1} \overline{AC_1} \overline{AD_1} + \overline{A_1B}(\overline{AA_1} + \overline{A_1C_1})(\overline{AA_1} + \overline{A_1D_1})| = \\ &= |\overline{AA_1} \overline{AC_1} \overline{AD_1} - \overline{A_1B} \overline{A_1A} \overline{A_1D_1} - \overline{A_1B} \overline{A_1C_1} \overline{A_1A} + \\ &\quad + \overline{A_1B} \overline{A_1C_1} \overline{A_1D_1}|. \end{aligned}$$

Здесь использовано дистрибутивное свойство смешанного произведения и то, что смешанное произведение компланарных векторов равно нулю. Аналогично

$$\begin{aligned} 6V(A_1B_1CD) &= |\overline{A_1B_1} \overline{A_1C} \overline{A_1D}| = \\ &= |\overline{A_1A} \overline{A_1C} \overline{A_1D} - \overline{AB_1} \overline{AA_1} \overline{AD} - \overline{AB_1} \overline{AC} \overline{AA_1} + \overline{AB_1} \overline{AC} \overline{AD}|. \end{aligned}$$

На основании задачи 2 тетраэдры в каждой из четырех пар  $AA_1C_1D_1$  и  $A_1ACD$ ,  $A_1BAD_1$  и  $AB_1A_1D$ ,  $A_1BC_1A$  и  $AB_1CA_1$ ,  $A_1BC_1D_1$  и  $AB_1CD$  равновелики и ориентированы противоположно. Поэтому в полученных выражениях для  $6V(ABC_1D_1)$  и  $6V(A_1B_1CD)$  смешанные произведения, стоящие на одинаковых местах, имеют равные модули и противоположные знаки. Отсюда следует, что тетраэдры  $ABC_1D_1$  и  $A_1B_1CD$  имеют равные объемы и ориентированы противоположно.

**Решение 2.** Применим метод аффинных преобразований, так как эта задача аффинная. Аффинное преобразование пространства сохраняет отношение объемов фигур, в частности, равновеликие тетраэдры переводит в равновеликие тетраэдры. Надо подобрать аффинное преобразование так, чтобы равновеликость образов данных тетраэдров при этом преобразовании была очевидна. Пусть плоскости  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  пересекаются по прямой  $m$ . Существует аффинное преобразование пространства, которое отображает прямые  $AA_1$  и  $m$  на перпендикулярные прямые  $a'$  и  $m'$ , причем прямая  $a'$  равнонаклонена к образам  $\alpha'$  и  $\alpha'_1$  плоскостей  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Тогда образы параллельных прямых  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  параллельны между собой и перпендикулярны плоскости  $\gamma$  симметрии плоскостей  $\alpha'$  и  $\alpha'_1$ . Поэтому данные тетраэдры  $ABC_1D_1$  и  $A_1B_1CD$  переходят при этом преобразовании в тетраэдры, симметричные относительно плоскости  $\gamma$ , т.е. в равновеликие тетраэдры. Значит, равновелики и данные тетраэдры  $ABC_1D_1$  и  $A_1B_1CD$ .

Это решение одновременно является и решением задачи 2.

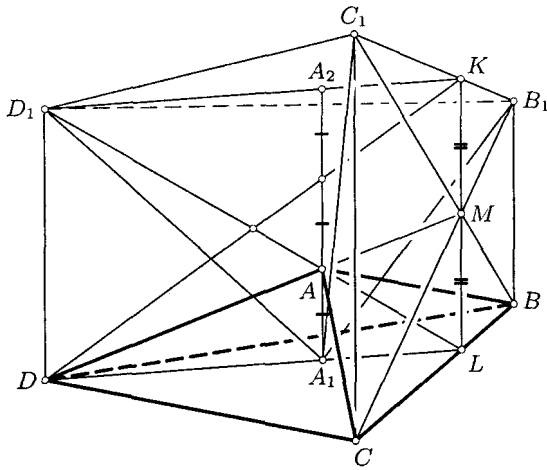


Рис. 41

**23.2. Отношение объемов двух тетраэдров.** *Вершины тетраэдра  $ABCD$  спроектированы в некотором направлении на плоскости противоположных им граней этого тетраэдра соответственно в точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Тогда объем тетраэдра  $A_1B_1C_1D_1$  втрое больше объема данного тетраэдра  $ABCD$  (рис. 41).*

**Доказательство 1.** Если  $A_2$  — проекция точки  $A_1$  в заданном направлении на плоскость  $B_1C_1D_1$ , то согласно задаче 2 предыдущего пункта тетраэдры  $A_2BCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  равновелики. По свойству трапеции точка  $M$  пересечения диагоналей трапеции  $BB_1C_1C$  является серединой отрезка  $KL$ , параллельного ее основаниям. Тогда в трапеции  $KLDD_1$  диагонали  $DK$  и  $D_1L$  делят отрезок  $A_1A_2$  на три равные части. Отношение отрезков  $AA_1$  и  $A_1A_2$  равно отношению высот тетраэдров  $A_2BCD$  и  $ABCD$ . Это и заканчивает доказательство.  $\square$

**Доказательство 2.** Пусть направление проектирования задано вектором  $\vec{p}$ . Примем вершину  $D$  за начало векторов. Вектор  $\vec{D}_1$  точки пересечения прямой  $\vec{X} = \lambda\vec{p}$  с плоскостью  $ABC$ , имеющей уравнение  $(\vec{X} - \vec{A})(\vec{B} - \vec{A})(\vec{C} - \vec{A}) = 0$ , равен

$$\vec{D}_1 = \frac{(\vec{A}\vec{B}\vec{C})}{\vec{p}(\vec{B} - \vec{A})(\vec{C} - \vec{A})}\vec{p}.$$

Аналогично находим:

$$\vec{A}_1 = \vec{A} - \frac{(\vec{A}\vec{B}\vec{C})}{(\vec{p}\vec{B}\vec{C})}\vec{p}, \quad \vec{B}_1 = \vec{B} - \frac{(\vec{A}\vec{B}\vec{C})}{(\vec{A}\vec{p}\vec{C})}\vec{p}, \quad \vec{C}_1 = \vec{C} - \frac{(\vec{A}\vec{B}\vec{C})}{(\vec{A}\vec{B}\vec{p})}\vec{p}.$$

Отсюда

$$(\overline{D_1 A_1} \overline{D_1 B_1} \overline{D_1 C_1}) = (\overline{A_1} - \overline{D_1})(\overline{B_1} - \overline{D_1})(\overline{C_1} - \overline{D_1}) = 3(\overline{A_1 B_1 C_1}),$$

что и доказывает наше утверждение.  $\square$

**23.3. Тождество для проекций вершин тетраэдра.** *Через вершины тетраэдра  $A_1 A_2 A_3 A_4$  проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость  $\omega$  соответственно в точках  $B_i$ , а противоположные грани тетраэдра — в точках  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Тогда имеет место равенство:*

$$\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_1 C_1}} + \frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{A_2 C_2}} + \frac{\overline{A_3 B_3}}{\overline{A_3 C_3}} + \frac{\overline{A_4 B_4}}{\overline{A_4 C_4}} = 1. \quad (4.10)$$

Для доказательства положим:

$$\overline{B_4} = \lambda_1 \overline{B_1} + \lambda_2 \overline{B_2} + \lambda_3 \overline{B_3}, \quad \text{причем} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad (4.11)$$

где  $\lambda_i$  — нормированные барицентрические координаты точки  $B_4$  относительно треугольника  $B_1 B_2 B_3$ . Согласно аффинному смыслу барицентрических координат как отношений площадей ориентированных треугольников и на основании свойств параллельного проектирования числа  $\lambda_i$  инвариантны относительно него. При параллельном проектировании с плоскости  $\omega$  на плоскость  $A_1 A_2 A_3$  получаем:

$$\overline{C_4} = \lambda_1 \overline{A_1} + \lambda_2 \overline{A_2} + \lambda_3 \overline{A_3}. \quad (4.12)$$

Параллельное проектирование на остальные грани дает соответственно:

$$\begin{aligned} \overline{A_4} &= \lambda_1 \overline{C_1} + \lambda_2 \overline{A_2} + \lambda_3 \overline{A_3} = \\ &= \lambda_1 \overline{A_1} + \lambda_2 \overline{C_2} + \lambda_3 \overline{A_3} = \lambda_1 \overline{A_1} + \lambda_2 \overline{A_2} + \lambda_3 \overline{C_3}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из (4.11), (4.12) и (4.13) находим:

$$\begin{aligned} \overline{B_4} - \overline{A_4} &= \lambda_1 (\overline{B_1} - \overline{A_1}) + \lambda_2 (\overline{B_2} - \overline{A_2}) + \lambda_3 (\overline{B_3} - \overline{C_3}), \\ \overline{C_4} - \overline{A_4} &= \lambda_1 (\overline{A_1} - \overline{C_1}) + \lambda_2 (\overline{A_2} - \overline{C_2}) + \lambda_3 (\overline{A_3} - \overline{C_3}), \end{aligned}$$

отсюда

$$\frac{\overline{B_4} - \overline{A_4}}{\overline{C_4} - \overline{A_4}} = \frac{\overline{B_1} - \overline{A_1}}{\overline{A_1} - \overline{C_1}} + \frac{\overline{B_2} - \overline{A_2}}{\overline{A_2} - \overline{C_2}} + \frac{(\overline{B_3} - \overline{A_3}) + (\overline{A_3} - \overline{C_3})}{\overline{A_3} - \overline{C_3}},$$

что равносильно доказываемому равенству (4.10).

**23.4. Аналог теоремы Гаусса.** *Если дан тетраэдр  $ABCD$  и прямая  $l$  пересекает плоскости  $B_1 C_1 D_1$ ,  $C_1 D_1 A_1$ ,  $D_1 A_1 B_1$ ,  $A_1 B_1 C_1$  соответственно в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ , то середины отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  принадлежат одной плоскости.*



**Доказательство 1.** При произвольном выборе начала векторов обозначим векторы точек теми же буквами, что и сами точки. Если  $M, N, P, Q$  — середины отрезков  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ , то

$$2\vec{M} = \vec{A} + \vec{A}_1, \quad 2\vec{N} = \vec{B} + \vec{B}_1, \quad 2\vec{P} = \vec{C} + \vec{C}_1, \quad 2\vec{Q} = \vec{D} + \vec{D}_1.$$

Для того, чтобы точки  $M, N, P, Q$  принадлежали одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение векторов  $\vec{M} - \vec{N}, \vec{M} - \vec{P}, \vec{M} - \vec{Q}$  равнялось нулю:

$$(\vec{M} - \vec{N})(\vec{M} - \vec{P})(\vec{M} - \vec{Q}) = 0.$$

Это равенство эквивалентно равенству:

$$\vec{N}\vec{P}\vec{Q} - \vec{M}\vec{P}\vec{Q} + \vec{M}\vec{N}\vec{Q} - \vec{M}\vec{N}\vec{P} = 0,$$

которое и предстоит доказать.

Умножим левую часть на 8 и векторы  $2\vec{M}, 2\vec{N}, 2\vec{P}, 2\vec{Q}$  заменим их выражениями:

$$\begin{aligned} & (\vec{B} + \vec{B}_1)(\vec{C} + \vec{C}_1)(\vec{D} + \vec{D}_1) - (\vec{A} + \vec{A}_1)(\vec{C} + \vec{C}_1)(\vec{D} + \vec{D}_1) + \\ & + (\vec{A} + \vec{A}_1)(\vec{B} + \vec{B}_1)(\vec{D} + \vec{D}_1) - (\vec{A} + \vec{A}_1)(\vec{B} + \vec{B}_1)(\vec{C} + \vec{C}_1) = \\ & = \vec{B}\vec{C}\vec{D} + \vec{B}_1\vec{C}\vec{D} + \vec{B}\vec{C}_1\vec{D} + \vec{B}\vec{C}\vec{D}_1 + \vec{B}_1\vec{C}_1\vec{D} + \vec{B}\vec{C}_1\vec{D}_1 + \vec{B}_1\vec{C}\vec{D}_1 + \vec{B}_1\vec{C}_1\vec{D}_1 - \\ & - \vec{A}_1\vec{C}\vec{D} - \vec{A}\vec{C}\vec{D} - \vec{A}\vec{C}_1\vec{D} - \vec{A}\vec{C}\vec{D}_1 - \vec{A}_1\vec{C}_1\vec{D} - \vec{A}_1\vec{C}_1\vec{D}_1 - \vec{A}_1\vec{C}\vec{D}_1 - \vec{A}\vec{C}_1\vec{D}_1 + \\ & + \vec{A}_1\vec{B}\vec{D} + \vec{A}\vec{B}_1\vec{D} + \vec{A}\vec{B}\vec{D} + \vec{A}\vec{B}\vec{D}_1 + \vec{A}_1\vec{B}_1\vec{D} + \vec{A}_1\vec{B}\vec{D}_1 + \vec{A}_1\vec{B}_1\vec{D}_1 + \vec{A}\vec{B}_1\vec{D}_1 - \\ & - \vec{A}_1\vec{B}\vec{C} - \vec{A}\vec{B}_1\vec{C} - \vec{A}\vec{B}\vec{C}_1 - \vec{A}\vec{B}\vec{C} - \vec{A}_1\vec{B}_1\vec{C}_1 - \vec{A}_1\vec{B}\vec{C}_1 - \vec{A}_1\vec{B}_1\vec{C} - \vec{A}\vec{B}_1\vec{C}_1. \end{aligned}$$

Члены полученной суммы записаны так, что в каждом из восьми столбцов сумма четырех слагаемых равна нулю в силу компланарности соответствующих четверок точек. Например,

$$\vec{B}\vec{C}\vec{D} - \vec{A}_1\vec{C}\vec{D} + \vec{A}_1\vec{B}\vec{D} - \vec{A}_1\vec{B}\vec{C} = 0,$$

поскольку точки  $A_1, B, C, D$ , компланарны по условию. Этим доказательство заканчивается.  $\square$

**Доказательство 2.** Используем барицентрические координаты точек и векторов относительно данного тетраэдра. Пусть  $x_i = u_i + p_i t$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — параметрические уравнения секущей прямой  $l$ , где  $u_i$  — координаты фиксированной точки этой прямой,  $p_i$  — координаты ее направляющего вектора  $\vec{p}$ . Тогда при  $x_1 = 0$  находим координаты точки  $A_1$ :

$$A_1 \left( 0, u_2 - \frac{u_1 p_2}{p_1}, u_3 - \frac{u_1 p_3}{p_1}, u_4 - \frac{u_1 p_4}{p_1} \right)$$

и середины  $M$  отрезка  $AA_1$ :  $\left( \frac{1}{2}, \frac{u_2}{2} - \frac{u_1 p_2}{2p_1}, \frac{u_3}{2} - \frac{u_1 p_3}{2p_1}, \frac{u_4}{2} - \frac{u_1 p_4}{2p_1} \right)$ . Записав координаты остальных трех середин рассматриваемых отрезков,

составим определитель из координат всех четырех середин:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{u_2}{2} - \frac{u_1 p_2}{2p_1} & \frac{u_3}{2} - \frac{u_1 p_3}{2p_1} & \frac{u_4}{2} - \frac{u_1 p_4}{2p_1} \\ \frac{u_1}{2} - \frac{u_2 p_1}{2p_2} & \frac{1}{2} & \frac{u_3}{2} - \frac{u_2 p_3}{2p_2} & \frac{u_4}{2} - \frac{u_2 p_4}{2p_2} \\ \frac{u_1}{2} - \frac{u_3 p_1}{2p_3} & \frac{u_2}{2} - \frac{u_3 p_2}{2p_3} & \frac{1}{2} & \frac{u_4}{2} - \frac{u_3 p_4}{2p_3} \\ \frac{u_1}{2} - \frac{u_4 p_1}{2p_4} & \frac{u_2}{2} - \frac{u_4 p_2}{2p_4} & \frac{u_3}{2} - \frac{u_4 p_3}{2p_4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \\
 = \frac{1}{16p_1 p_2 p_3 p_4} \begin{vmatrix} p_1 & u_2 p_1 - u_1 p_2 & u_3 p_1 - u_1 p_3 & u_4 p_1 - u_1 p_4 \\ u_1 p_2 - u_2 p_1 & p_2 & u_3 p_2 - u_2 p_3 & u_4 p_2 - u_2 p_4 \\ u_1 p_3 - u_3 p_1 & u_2 p_3 - u_3 p_2 & p_3 & u_4 p_3 - u_3 p_4 \\ u_1 p_4 - u_4 p_1 & u_2 p_4 - u_4 p_2 & u_3 p_4 - u_4 p_3 & p_4 \end{vmatrix}.$$

Так как  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$  и  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ , то сумма всех строк дает нулевую строку, т. е. определитель равен нулю, что и доказывает теорему, являющуюся непосредственным обобщением теоремы Гаусса (см. [4], с. 74).  $\square$

## § 24. Изотомическое и изогональное преобразования пространства

**24.1. Изотомические точки относительно тетраэдра.** Эти два преобразования являются естественным обобщением одноименных им преобразований плоскости (§ 13). В основе изотомического преобразования лежит следующая теорема.

**Теорема.** Пусть дан тетраэдр  $(T) = A_1 A_2 A_3 A_4$  и точка  $P$ , не принадлежащая его граням  $\alpha_i$ . Если  $Q_i$  — точка плоскости  $\alpha_i$ , изотомичная точке  $P_i = \alpha_i \cap (PA_i)$  относительно треугольника  $A_j A_k A_u$  ( $i, j, k, u = 1, 2, 3, 4$  и все различны), то четыре прямые  $A_i Q_i$  пересекаются в одной точке  $Q$ .

**Доказательство.** Прямые  $A_1 Q_1$  и  $A_2 Q_2$  лежат в плоскости  $A_1 A_2 Q_{34}$ , где  $Q_{34}$  — точка ребра  $A_3 A_4$ , изотомичная точке  $P_{34}$  его пересечения с плоскостью  $A_1 A_2 P$  (ср. рис. 33) и, следовательно, пересекаются. На этих же основаниях каждые две из четырех прямых  $A_i Q_i$  пересекаются. Поскольку они не лежат в одной плоскости, то все пересекаются в одной точке  $Q$ .

Точка  $Q$  называется *изотомически сопряженной* точке  $P$  относительно тетраэдра  $(T)$ .  $\square$

**Следствие.** Шесть плоскостей  $A_i A_j Q_{ki}$ , изотомически сопряженных соответственно плоскостям  $A_i A_j P_{ki}$  относительно ребер  $A_k A_u$ , пересекаются в одной точке  $Q$ .

**24.2. Изотомическое преобразование.** Данным тетраэдром ( $T$ ) задается преобразование  $P \rightarrow Q$ , где  $P$  — произвольная точка пространства, а  $Q$  — изотомически сопряженная ей относительно ( $T$ ). Это преобразование  $P \rightarrow Q$  называется *изотомическим преобразованием* пространства, заданным тетраэдром ( $T$ ).

Запишем формулы изотомического преобразования в барицентрических координатах относительно базисного тетраэдра ( $T$ ). Пусть  $P(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow Q(y_1, y_2, y_3, y_4)$ . Тогда в плоскости  $\alpha_1$  получим  $P_1(0; x_2 : x_3 : x_4) \rightarrow Q_1(0 : y_2, y_3, y_4)$ , и на основании (2.3) имеем:  $x_2 y_2 = x_3 y_3 = x_4 y_4$  ( $x_1 = 0$ ). Аналогично для плоскости  $\alpha_3$  верны равенства  $x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_4 y_4$  ( $x_3 = 0$ ). Следовательно,

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = x_4 y_4 = k, \quad (4.14)$$

где все  $x_i$  и  $y_i$  отличны от нуля. Отсюда

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \frac{k}{x_1} : \frac{k}{x_2} : \frac{k}{x_3} : \frac{k}{x_4} = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} : \frac{1}{x_4}. \quad (4.15)$$

Это и есть искомые формулы изотомического преобразования пространства в барицентрических координатах относительно базисного тетраэдра ( $T$ ). Вершины  $A_i$  и другие точки плоскостей  $\alpha_i$  исключаются из области определения преобразования.

Согласно формулам (4.15) образом плоскости

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

является поверхность

$$\frac{u_1}{y_1} + \frac{u_2}{y_2} + \frac{u_3}{y_3} + \frac{u_4}{y_4} = 0,$$

или

$$u_1 u_2 u_3 u_4 + u_2 u_1 u_3 u_4 + u_3 u_1 u_2 u_4 + u_4 u_1 u_2 u_3 = 0. \quad (4.16)$$

Эта поверхность является поверхностью третьего порядка и содержит вершины тетраэдра ( $T$ ). Таким образом, *изотомическое преобразование есть кремонуво кубическое преобразование пространства*. Оно совпадает со своим обратным.

**24.3. Изогональное преобразование.** Две плоскости, проходящие через одно ребро тетраэдра и симметричные относительно биссекторной плоскости двугранного угла тетраэдра при этом ребре, называются *изогональными плоскостями* относительно данного ребра.

**Теорема.** Пусть дан тетраэдр ( $T$ ) и точка  $M$ , не принадлежащая его граням. Тогда шесть плоскостей, изогональных плоскостям

$A_i A_j M$  относительно соответственных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке  $N$ .

**Доказательство.** Будем пользоваться *нормальными* координатами  $x_i = \lambda_i h_i$  (см. п. 5.1) относительно тетраэдра ( $T$ ). Пусть  $X(x_i)$  — произвольная точка плоскости  $A_1 A_2 M$ , и  $Y(y_i)$  — соответственная ей точка изогональной плоскости ( $X$  и  $Y$  симметричны относительно биссекторной плоскости). Тогда, как и на плоскости (см. § 13, рис. 16),  $x_3 = y_4$  и  $x_4 = y_3$ . Так как плоскость  $A_1 A_2 M$  имеет уравнение  $x_3 m_4 - x_4 m_3 = 0$  ( $m_i$  — координаты точки  $M$ ), то изогональная ей плоскость относительно ребра  $A_1 A_2$  имеет уравнение  $m_3 y_3 - m_4 y_4 = 0$ . Следовательно, уравнения изогоналей для всех плоскостей  $A_i A_j M$  будут такими  $m_i y_i = m_j y_j$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ). Эта система имеет очевидное решение  $y_i = \frac{1}{m_i}$ . Итак, все шесть изогоналей имеют общую точку  $N\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}, \frac{1}{m_4}\right)$ .  $\square$

Точки  $M$  и  $N$  называются (*взаимно*) *изогональными* относительно тетраэдра ( $T$ ). Преобразование  $M \rightarrow N$  пространства, называется *изогональным преобразованием* пространства, заданным тетраэдром ( $T$ ).

Вместе с доказательством теоремы об изогональных точках мы получили формулы изогонального преобразования в *нормальных координатах*:

$$y_i = \frac{1}{x_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.17)$$

Характеристика изогонального преобразования аналогична характеристике изотомического преобразования.

## § 25. Гиперболические четверки прямых

**25.1. Определение и критерий гиперболической четверки прямых.** Если даны две скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ , то для каждой точки  $M$  пространства, не принадлежащей этим прямым, существует единственная прямая, лежащая в одной плоскости с каждой из данных прямых и проходящая через данную точку  $M$ . Такой прямой, очевидно, является линия пересечения плоскостей  $(M, a)$  и  $(M, b)$ .

Пусть даны три попарно скрещивающиеся прямые. Перемещая точку  $M$  по одной из них, получаем бесконечное множество прямых, каждая из которых лежит в одной плоскости с каждой их трех данных прямых. Это множество всех общих секущих трех данных попарно скрещивающихся прямых является *гиперboloидом* (п. 11.4, рис. 12), если три данные прямые не параллельны одной плоскости, и является

гиперболическим параболоидом (см. [5], с. 69), если они параллельны одной плоскости.

Пусть даны четыре попарно скрещивающиеся прямые  $u_1, u_2, u_3, u_4$ . Тогда, вообще говоря, существует не более двух прямых, пересекающих каждую из данных четырех прямых. В самом деле, три попарно скрещивающиеся прямые  $u_1, u_2, u_3$  определяют гиперboloид или же гиперболический параболоид (*линейчатую квадрику*), для которых они являются образующими одной серии (семейства). В общем случае прямая  $u_4$  не лежит на этой квадрике и поэтому может иметь с квадрикой не более двух общих точек. Две образующие второй серии, проходящие через эти точки, пересекают все четыре прямые  $u_i$ . Однако если прямые  $u_i$  имеют особое взаимное расположение в пространстве, то общих секущих прямых может быть и бесконечное множество. Этот особый случай указан теоремой Шаля<sup>1</sup>.

**Теорема Шаля.** *Если существуют три прямые  $v_1, v_2, v_3$ , каждая из которых пересекает данные четыре прямые  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , то всякая четвертая прямая  $v_4$ , пересекающая три данные прямые  $u_1, u_2, u_3$  пересекает и четвертую прямую  $u_4$  (или параллельна ей).*

Иначе говоря, если существуют пятнадцать точек пересечения четырех прямых с четырьмя другими прямыми, то существует и шестнадцатая точка пересечения (которая может быть бесконечно удаленной — несобственной).

**Доказательство.** Для доказательства обозначим точки пересечения прямой  $v_1$  с прямыми  $u_1, u_2, u_3, u_4$  соответственно через  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , прямой  $v_2$  —  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , прямой  $v_3$  —  $C_1, C_2, C_3, C_4$  прямой  $v_4$  с прямыми  $u_1, u_2, u_3$  через  $D_1, D_2, D_3$  (рис. 42). Докажем, что  $v_4$  пересекает  $u_4$  в некоторой точке  $D_4$ . По теореме Менелая для косоугольного четырехугольника  $A_1A_2B_2B_1$  и плоскости, определяемой прямыми  $u_4$  и  $v_3$ , имеем:

$$\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_4A_2}} \cdot \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{C_2B_2}} \cdot \frac{\overline{B_2B_4}}{\overline{B_4B_1}} \cdot \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{C_1A_1}} = 1. \quad (4.18)$$

Для того же четырехугольника и плоскости  $(u_3, v_4)$  теорема Менелая дает:

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_3A_2}} \cdot \frac{\overline{A_2D_2}}{\overline{D_2B_2}} \cdot \frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{B_3B_1}} \cdot \frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{D_1A_1}} = 1. \quad (4.19)$$

<sup>1</sup>Ш а л ь Мишель (1793—1880) — французский математик и историк математики, член Парижской, Петербургской, Брюссельской и Берлинской академий. Построил синтетическую проективную геометрии, создал новое направление — вычислительную геометрию.

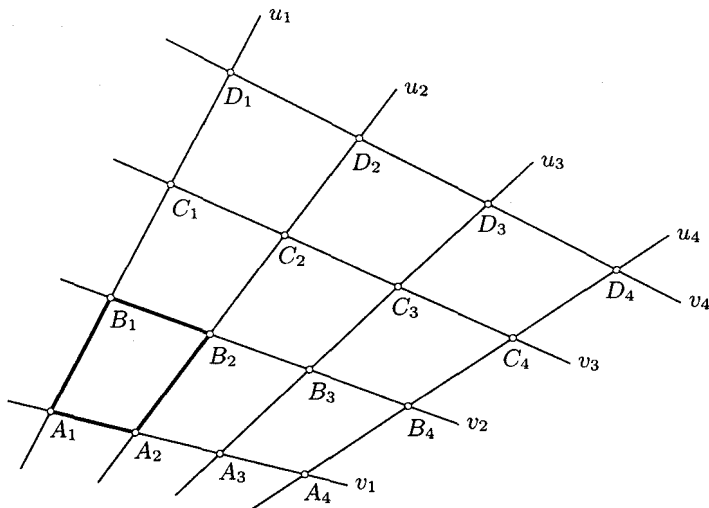


Рис. 42

Применяя еще раз теорему Менелая к тому же четырехугольнику, пересеченному плоскостью  $(u_3, v_3)$ , получаем:

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_3 A_2}} \cdot \frac{\overline{A_2 C_2}}{\overline{C_2 B_2}} \cdot \frac{\overline{B_2 B_3}}{\overline{B_3 B_1}} \cdot \frac{\overline{B_1 C_1}}{\overline{C_1 A_1}} = 1. \quad (4.20)$$

Перемножим почленно равенства (4.18) и (4.19) и разделим на (4.20):

$$\frac{\overline{A_1 A_4}}{\overline{A_4 A_2}} \cdot \frac{\overline{A_2 D_2}}{\overline{D_2 B_2}} \cdot \frac{\overline{B_2 B_4}}{\overline{B_4 B_1}} \cdot \frac{\overline{B_1 D_1}}{\overline{D_1 A_1}} = 1. \quad (4.21)$$

Это равенство согласно достаточному условию теоремы Менелая, примененной к четырехугольнику  $A_1 A_2 B_2 B_1$ , означает, что точки  $D_1, D_2, A_4, B_4$  лежат в одной плоскости, т.е. прямые  $u_4$  и  $v_4$  лежат в одной плоскости и, следовательно, пересекаются в некоторой точке  $D_4$  (или параллельны).  $\square$

Итак, по доказанной теореме Шаля, если существуют три прямые, пересекающие данные четыре попарно скрещивающиеся прямые, то таких прямых существует бесконечное множество. Четверку прямых, расположенных таким образом, называют гиперболической четверкой прямых. Эти прямые являются образующими одной серии линейчатой квадрики.

**25.2. Аналитические критерии гиперболической четверки прямых.** Кроме критерия Шаля имеются еще критерии гиперболической четверки прямых при задании прямых уравнениями. Их получил

немецкий геометр О. Гермес в 1856 году. Приводим их без доказательства.

Для того, чтобы четыре прямые, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{a_{12}} &= \frac{x_3}{a_{13}} = \frac{x_4}{a_{14}}, \\ \frac{x_1}{a_{21}} &= \frac{x_3}{a_{23}} = \frac{x_4}{a_{24}}, \\ \frac{x_1}{a_{31}} &= \frac{x_2}{a_{32}} = \frac{x_4}{a_{34}}, \\ \frac{x_1}{a_{41}} &= \frac{x_2}{a_{42}} = \frac{x_3}{a_{43}}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

составляли гиперболическую четверку, необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \quad (4.23)$$

был симметричен ( $a_{ij} = a_{ji}$ ).

Если прямые связаны с некоторым тетраэдром уравнениями в его гранях, то критерий Гермеса может быть сформулирован так.

Для того, чтобы четыре прямые, расположенные в гранях тетраэдра и имеющие в них уравнения

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{c_{12}} + \frac{x_3}{c_{13}} + \frac{x_4}{c_{14}} &= 0, \\ \frac{x_1}{c_{21}} + \frac{x_3}{c_{23}} + \frac{x_4}{c_{24}} &= 0, \\ \frac{x_1}{c_{31}} + \frac{x_2}{c_{32}} + \frac{x_4}{c_{34}} &= 0, \\ \frac{x_1}{c_{41}} + \frac{x_2}{c_{42}} + \frac{x_3}{c_{43}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

имели гиперболоидальное расположение, необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

был симметричен.

**25.3. Примеры гиперболических четверок прямых.** Согласно теореме Шаля для доказательства того, что рассматриваемая четверка прямых является гиперболической, необходимо отыскать три их общих

секущих. С этой целью подбирается проектирование (центральное или параллельное) на плоскость так, чтобы три из этих прямых проектировались в тройку прямых плоскости, пересекающихся в одной точке. Приведем примеры.

Пример 1. В тетраэдре общего вида высоты не пересекаются. Они пересекаются в одной точке лишь в ортоцентрическом тетраэдре (т. 2, гл. 6, § 6).

В тетраэдре общего вида высоты образуют гиперболическую четверку (теорема Штейнера). Действительно, три высоты тетраэдра, выходящие из вершин одной грани, ортогонально проектируются на эту грань в три ее высоты. Перпендикуляр к данной грани в ее ортоцентре пересекает эти три высоты тетраэдра и параллелен четвертой высоте. Таким образом, четыре перпендикуляра к граням тетраэдра в их ортоцентрах лежат в одной плоскости с каждой из высот тетраэдра. По теореме Шаля высоты тетраэдра являются образующими одной серии гиперboloида, который и называется *гиперboloидом высот*. Ко второй серии его образующих принадлежат указанные четыре перпендикуляра к граням в их ортоцентрах.

Центром гиперboloида высот (т. е. центром его симметрии) тетраэдра является его точка Монжа (см. [5], с. 209). В самом деле, центр гиперboloида высот равноудален от двух его параллельных образующих — высоты тетраэдра и перпендикуляра к соответствующей грани в ее ортоцентре. Эти образующие лежат в плоскостях, проведенных через две вершины  $A$  и  $B$  тетраэдра  $ABCD$  перпендикулярно ребру  $CD$ . Поэтому центр гиперboloида должен лежать в плоскости, проходящей через середину ребра  $AB$  перпендикулярно ребру  $CD$ . А такие шесть плоскостей пересекаются в точке, которая и называется точкой Монжа тетраэдра.

Пример 2. Прямые, каждая из которых соединяет вершину тетраэдра с центром окружности, вписанной в противоположную грань, образуют гиперболическую четверку прямых.

Действительно, пусть  $J_i$  — центры окружностей, вписанных в грани тетраэдра  $ABCD$ . Из точки  $D$  прямые  $AJ_1$ ,  $BJ_2$ ,  $CJ_3$  проектируются на грань  $ABC$  в три прямые, пересекающиеся в одной точке, что легко проверяется по теореме Чевы для треугольника  $ABC$ . Если  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — проекции центров  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , то по свойству биссектрисы угла

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{DA}{DC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{DB}{DA} = 1.$$

Прямая  $DD_1$  ( $D_1$  — точка пересечения прямых  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ) пересекает каждую из прямых  $AJ_1$ ,  $BJ_2$ ,  $CJ_3$  и имеет общую точку  $D$



с четвертой прямой  $DJ_4$ . Аналогичными проектированиями из вершин  $A, B, C$  получаем еще три общие секущие прямых  $AJ_1, BJ_2, CJ_3, DJ_4$ . Значит, они имеют гиперboloидальное расположение.

**Пример 3.** *Прямые, соединяющие вершины тетраэдра с точками Лемуана противоположных граней (§ 10), образуют гиперболическую четверку.*

Доказательство фактически не отличается от предыдущего.

**Пример 4.** *Прямые, соединяющие вершины тетраэдра с точками касания противоположных граней с вписанной в него сферой, принадлежат одной серии образующих гиперболоида.*

Общими секущими этих прямых будут прямые, по которым пересекаются каждые три плоскости, проведенные через ребра одного трехгранного угла и точку касания вписанной сферы с противоположной этому ребру гранью. Опущенные подробности восполнит читатель.

## § 26. Ортологические тетраэдры

**26.1. Теорема Штейнера<sup>1</sup>.** *Если прямые  $p_i$ , проведенные через вершины тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  перпендикулярно соответственным граням другого тетраэдра  $B_1B_2B_3B_4$ , пересекаются в одной точке, то прямые  $q_i$ , проведенные через вершины второго тетраэдра перпендикулярно соответственным граням первого, также пересекаются в одной точке.*

**Доказательство.** Рассмотрим плоскость  $\sigma$ , определенную двумя прямыми  $p_1$  и  $p_2$ . Она перпендикулярна граням  $\beta_1$  и  $\beta_2$  второго тетраэдра, поэтому перпендикулярна и ребру  $B_3B_4$  их пересечения. Значит, ребро  $A_1A_2$  первого тетраэдра перпендикулярно ребру  $B_3B_4$  второго. На равных основаниях, каждое ребро  $A_iA_j$  первого тетраэдра перпендикулярно ребру  $B_kB_u$  второго (для всех шести пар различных индексов  $i$  и  $j$ ).

Рассмотрим теперь, например, два перпендикуляра  $q_1$  и  $q_2$  из вершин  $B_1$  и  $B_2$  второго тетраэдра на соответственные грани  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  первого. По доказанному ребро  $B_1B_2$  перпендикулярно  $A_3A_4$ , поэтому через  $B_1B_2$  можно провести плоскость, перпендикулярную  $A_3A_4$ , а значит, и граням  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . В этой плоскости должны лежать прямые

---

<sup>1</sup>Штейнер Якоб (1796—1863) — швейцарский математик, один из творцов проективной геометрии, член Берлинской АН. Был профессором математики в Берлинском университете.

$q_1$  и  $q_2$ , поэтому они пересекаются. Таким образом, любые два перпендикуляра  $q_i$  и  $q_j$  пересекаются. Поскольку они не могут лежать в одной плоскости, то все они пересекаются в одной точке.  $\square$

Два тетраэдра, удовлетворяющие доказанной теореме Штейнера, называются *ортологическими*, а точки пересечения указанных перпендикуляров — *ортологическими центрами*.

Примером пары ортологических тетраэдров служит данный тетраэдр и тетраэдр, вершинами которого служат центры окружностей, описанных около граней данного тетраэдра, так как перпендикуляры к граням тетраэдра в центрах этих окружностей пересекаются в центре описанной сферы тетраэдра.

**26.2. Косо ортологические тетраэдры.** Обобщением доказанной теоремы Штейнера является следующая теорема **Нейберга** (1886 г.).

*Если перпендикуляры  $p_i$ , проведенные из вершин тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  на соответственные грани  $\beta_i$  тетраэдра  $B_1B_2B_3B_4$ , образуют гиперболическую четверку, то этим же свойством обладают перпендикуляры  $q_i$ , проведенные из вершин второго тетраэдра на соответственные грани  $\alpha_i$  первого.*

**Доказательство.** Прямые  $p_i$  определяют гиперboloид, на котором лежат вершины  $A_i$ . Плоскости  $(A_4, p_1)$ ,  $(A_4, p_2)$ ,  $(A_4, p_3)$  пересекаются по прямой  $g$ , проходящей через вершину  $A_4$  и являющейся образующей второй серии этого гиперboloида. Пусть  $d_1, d_2, d_3$  — расстояния от произвольной точки прямой  $g$  до граней  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ . Отношения  $\frac{d_1}{d_2}, \frac{d_2}{d_3}, \frac{d_3}{d_1}$  не зависят от выбора точки на прямой  $g$ . Эти отношения, взятые соответственно для точек пересечения прямой  $g$  с прямыми  $p_1, p_2, p_3$  равны

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin(\widehat{p_3, \alpha_1})}{\sin(\widehat{p_3, \alpha_2})}, \quad \frac{d_2}{d_3} = \frac{\sin(\widehat{p_1, \alpha_2})}{\sin(\widehat{p_1, \alpha_3})}, \quad \frac{d_3}{d_1} = \frac{\sin(\widehat{p_2, \alpha_3})}{\sin(\widehat{p_2, \alpha_1})},$$

откуда

$$\frac{\sin(\widehat{p_3, \alpha_1}) \sin(\widehat{p_1, \alpha_2}) \sin(\widehat{p_2, \alpha_3})}{\sin(\widehat{p_3, \alpha_2}) \sin(\widehat{p_1, \alpha_3}) \sin(\widehat{p_2, \alpha_1})} = 1. \quad (4.26)$$

Методом от противного доказывается, что выполнение этого соотношения является *достаточным* для того, чтобы существовала прямая, проходящая через  $A_4$  и пересекающая четыре прямые  $p_i$ .

По общему свойству углов между прямыми и плоскостями углы  $(\widehat{p_i, \alpha_j})$  и  $(\widehat{q_j, \beta_i})$  равны для каждой пары неравных индексов  $i, j$ . Следовательно, для тетраэдра  $B_1B_2B_3B_4$  в силу (4.26) будут выполняться четыре соотношения такого вида для каждого трехгранного угла. На

основании достаточности этих равенств существуют четыре прямые, каждая из которых пересекает прямые  $q_i$ .  $\square$

Два тетраэдра, обладающие доказанным свойством, называются *косо ортологическими*. Примером пары косо ортологических тетраэдров является данный тетраэдр и тетраэдр с вершинами в основаниях его высот. По доказанной теореме Нейберга следует, что *перпендикуляры, опущенные из вершин данного тетраэдра на соответственные плоскости, каждая из которых определяется тремя основаниями высот данного тетраэдра, образует гиперболическую четверку*. Этим же свойством обладают перпендикуляры, опущенные из вершин данного тетраэдра на соответственные грани тетраэдра с вершинами в ортоцентрах граней данного тетраэдра.

## § 27. Полярное соответствие относительно сферы

**27.1. Полярная плоскость точки относительно сферы.** Обобщим на пространство результаты § 18 т. I (с. 132—135). Точки  $A$  и  $B$  называются *полярно сопряженными относительно сферы  $\omega(0, R)$* , если

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = R^2. \quad (4.27)$$

На плоскости множеством точек  $B$ , полярно сопряженных с точкой  $A$  относительно окружности, является прямая, перпендикулярная прямой  $OA$ , называемая *полярной точки  $A$  относительно окружности*. Если плоскость поворачивать около прямой  $OA$ , то окружность опишет сферу  $\omega$ , а полярная точка  $A$  — плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную  $OA$  при сохранении условия (4.27). Эта плоскость  $\alpha$  называется *полярной плоскостью точки  $A$  относительно сферы  $\omega$* .

Для построения полярной плоскости достаточно для двух сечений сферы, содержащих прямую  $OA$  построить известными способами полярные точки  $A$  относительно полученных окружностей. Они и определяют полярную плоскость  $\alpha$  точки  $A$  относительно сферы  $\omega$ .

Если точка  $A$  лежит внутри сферы, то ее полярная плоскость не пересекает сферу. Если точка  $A$  — внешняя точка относительно сферы, то ее полярная плоскость содержит окружность  $\gamma$  — множество всех точек касания касательных прямых к сфере, проходящих через точку  $A$  (см. [5], с. 141). Эта окружность  $\gamma$  является общей окружностью сферы  $\omega$  и сферы с диаметром  $OA$ . Если  $A \in \omega$ , то плоскость  $\alpha$  касается сферы  $\omega$  в точке  $A$ .

Условие (4.27) полярной сопряженности точек  $A$  и  $B$  относительно сферы симметрично относительно этих точек, называемых *полюсами* своих полярных плоскостей. Это имеет своим прямым следствием так называемое *свойство (принцип) взаимности полюсов и поляр*: если точка  $A$  лежит в полярной плоскости точки  $B$ , то точка  $B$  лежит в полярной плоскости точки  $A$ .

**27.2. Автополярный тетраэдр.** Построим тетраэдр  $ABCD$ , в котором каждая грань служит полярной плоскостью противоположной ей вершины и, следовательно, каждая вершина есть полюс противоположной ей грани. Он называется *автополярным тетраэдром* относительно данной сферы.

Пусть  $A$  — произвольная точка, отличная от центра сферы и не лежащая на ней. В полярной плоскости  $\alpha$  точки  $A$  возьмем некоторую точку  $B$  и построим ее полярную плоскость  $\beta$ , тогда  $A \in \beta$ . На прямой  $\alpha \cap \beta$  возьмем точку  $C$  и построим ее полярную  $\gamma$ . Так как  $C \in \alpha$  и  $C \in \beta$ , то  $A \in \gamma$  и  $B \in \beta$ . Поскольку точки  $A, B, C$  неколлинеарны, то их полярные плоскости имеют единственную общую точку  $D$ , являющуюся полюсом плоскости  $ABC$ . Итак, тетраэдр  $ABCD$  обладает заданным свойством, т. е. является автополярным тетраэдром относительно данной сферы.

Центр  $O$  сферы является ортоцентром автополярного тетраэдра  $ABCD$ , так как по свойству полярной плоскости  $OA \perp \alpha$ ,  $OB \perp \beta$ ,  $OC \perp \gamma$ ,  $OD \perp (ABC)$ . Поэтому *автополярный тетраэдр является ортоцентрическим*. Каждая из пяти точек  $O, A, B, C, D$  служит ортоцентром тетраэдра с вершинами в четырех остальных.

**27.3. Полярное соответствие относительно сферы.** Данная сфера задает в пространстве взаимно-однозначное соответствие между точками и плоскостями: точка — ее полярная плоскость, и наоборот: плоскость — ее полюс. Исключением являются центр сферы и ее диаметральные плоскости, которые не имеют соответственных элементов. Отсюда возникает взаимно-однозначное соответствие между прямыми, не лежащими в диаметральных плоскостях: прямой, соединяющей две точки, отвечает прямая как линия пересечения полярных плоскостей этих точек. Это соответствие между элементами пространства называется *полярным соответствием относительно сферы*.

Тетраэдру как четверке вершин ставится в соответствие тетраэдр как четверка их полярных плоскостей. Эти два тетраэдра называются *полярно сопряженными* относительно сферы. В частности, каждый автополярный тетраэдр полярно сопряжен сам себе.

Выразим полярное соответствие в прямоугольных декартовых координатах. Пусть дана сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  и точка  $A(a_1, a_2, a_3)$ . Точка

$B(b_1, b_2, b_3)$  ее полярной плоскости  $\alpha$ , лежащая на прямой  $OA$ , инверсна точке  $A$  относительно данной сферы. По формулам инверсии (см. [5], с. 150)

$$b_i = \frac{R^2 a_i}{\sigma}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{где } \sigma = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Уравнение плоскости  $\beta$  по точке  $B$  и нормальному вектору

$$\overline{OA} = (a_1, a_2, a_3)$$

имеет вид

$$(x - b_1)a_1 + (y - b_2)a_2 + (z - b_3)a_3 = 0,$$

которое после подстановок  $b_i$  и упрощения будет таким:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = R^2. \quad (4.28)$$

Таким образом, точке  $A(a_1, a_2, a_3)$  соответствует плоскость (4.28), и обратно.

Если уравнение плоскости задано в обычном виде

$$u_1 x + u_2 y + u_3 z + v = 0, \quad v \neq 0,$$

то приведем его к виду (4.28), умножив его на  $\lambda \neq 0$  и потребовав, чтобы  $-\lambda v = R^2$ . Тогда при  $\lambda = -\frac{R^2}{v}$  данное уравнение плоскости примет нужный вид (4.28), где  $a_i = \lambda u_i = -\frac{R^2}{v} u_i$ .

Следовательно, полюсом плоскости  $u_1 x + u_2 y + u_3 z + v = 0$  является точка

$$\left(-\frac{R^2}{v} u_1, -\frac{R^2}{v} u_2, -\frac{R^2}{v} u_3\right). \quad (4.29)$$

## § 28. Гиперболоидальные тетраэдры

**28.1. Теорема Шаля.** *Если прямые, соединяющие соответственные вершины двух тетраэдров  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$  образуют гиперболическую четверку, то и прямые пересечения соответственных граней этих тетраэдров также образуют гиперболическую четверку.*

**Доказательство.** Напомним, что все плоскости, каждая из которых проходит через одну и ту же точку гиперboloида и соответственно через одну из образующих одной его серии, пересекаются по одной прямой, а именно по той, которая является образующей другой серии, проходящей через данную точку.

Для доказательства достаточно найти не менее трех прямых, каждая из которых пересекала бы все четыре рассматриваемые прямые пересечения соответственных граней тетраэдров. Пусть плоскость  $ABC$  пересекает ребра  $D_1 A_1$ ,  $D_1 B_1$ ,  $D_1 C_1$  другого тетраэдра соответственно

в точках  $P_1, P_2, P_3$ . По предыдущему замечанию плоскости  $D_1A_1A, D_1B_1B, D_1C_1C$  пересекаются по одной прямой  $p$ . Следовательно, прямые  $AP_1, BP_2, CP_3$  пересекаются в одной точке, а именно в точке встречи прямой  $p$  с плоскостью  $ABC$ . По теореме Дезарга соответственные стороны треугольников  $ABC$  и  $P_1P_2P_3$  пересекаются в трех точках  $Q_1, Q_2, Q_3$ , лежащих на одной прямой. Кроме того, эти точки, очевидно, принадлежат соответственно прямым  $l_1, l_2, l_3$  пересечения плоскостей  $B_1C_1D_1, ACD$  и  $A_1C_1D_1, ABD$  и  $A_1B_1D_1$ . Таким образом, прямая  $Q_1Q_2Q_3$  пересекает прямые  $l_1, l_2, l_3$  и, конечно, прямую  $l_4$ , поскольку лежит с ней в одной плоскости  $ABC$ .

Аналогично находим еще три прямые, каждая из которых пересекет все четыре прямые  $l_i$ .  $\square$

*Обратная теорема* имеет место и следует из доказанной на основании полярного соответствия (для произвольной сферы).

Два тетраэдра, обладающие доказанным свойством, называются *гиперboloидальными тетраэдрами*.

**28.2. Полярно сопряженные тетраэдры.** *Два полярно сопряженных тетраэдра относительно сферы гиперboloидальны.*

**Доказательство.** Сначала рассмотрим три грани тетраэдра  $ABCD$ . Их полюсы относительно данной сферы определяют некоторую плоскость  $\sigma$  и некоторый треугольник, который полярно сопряжен относительно окружности пересечения сферы с плоскостью  $\sigma$  с тем треугольником, который получается при пересечении трех взятых граней с плоскостью  $\sigma$ . По теореме Пюккера (п. 11.3) эти треугольники гомологичны. Поэтому три плоскости, каждая из которых проходит через ребро рассматриваемого трехгранного угла и полюс противоположной его грани, пересекаются по одной прямой.

Таким образом, через каждую вершину двух полярно сопряженных тетраэдров  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  проходит прямая, построенная указанным способом. Например, прямая, проходящая через  $A$ , принадлежит трем плоскостям  $ABB_1, ACC_1, ADD_1$  и пересекает прямые  $BB_1, CC_1, DD_1$  и, конечно, прямую  $AA_1$ . Следовательно, имеем всего восемь прямых, каждая из которых пересекает прямые  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ , которые поэтому образуют гиперболическую четверку. По теореме Шаля тетраэдры гиперboloидальны.  $\square$

В частности, если один из тетраэдров вписан в сферу, то полярно сопряженным с ним будет тетраэдр, образованный касательными плоскостями к сфере в его вершинах. Он называется *тангенциальным тетраэдром* для данного вписанного в сферу тетраэдра.

По доказанной теореме *всякий тетраэдр гиперboloидален со своим тангенциальным тетраэдром*.

## § 29. Тетраэдры Мёбиуса<sup>1</sup>

Именем А. Мёбиуса называют два тетраэдра, каждый из которых одновременно вписан и описан около другого. У читателя может возникнуть сомнение в существовании таких двух тетраэдров. Очень простую и наглядную пару тетраэдров Мёбиуса можно получить с помощью параллелепипеда.

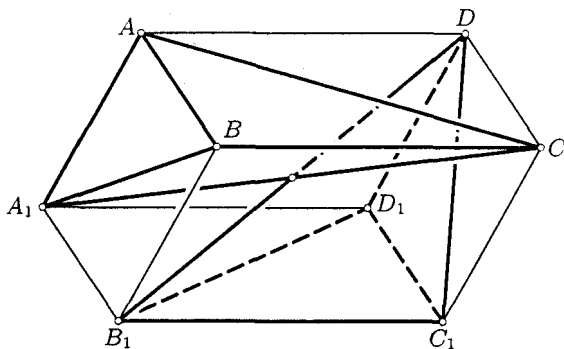


Рис. 43

Разобьем вершины параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на две группы, например,  $ABCA_1$  и  $B_1 C_1 D_1 D$  (рис. 43). Легко проверить, что эти две четверки точек являются вершинами пары тетраэдров Мёбиуса. Гранями этих тетраэдров являются две пары параллельных граней параллелепипеда и две пары его диагональных сечений. Всего таким способом можно получить четыре пары тетраэдров Мёбиуса.

Построим пару тетраэдров Мёбиуса, основываясь на теореме Шаля о гиперболической четверке прямых (§ 25). Возьмем произвольный тетраэдр  $ABCD$ . Через вершину  $A$  проведем плоскость  $\omega$ , которая пересечет плоскости  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  граней тетраэдра по прямым, проходящим через точку  $A$ . На каждой из этих прямых выберем соответственно по точке  $B_1, C_1, D_1$ , которые не были бы коллинеарны (рис. 44). Мы получили четыре четверки компланарных точек: 1)  $ABCD_1$ , 2)  $ABC_1D$ , 3)  $AB_1CD$ , 4)  $AB_1C_1D_1$ . Обозначим через  $A_1$  точку пересечения плоскостей  $B_1C_1D, B_1CD_1, BC_1D_1$ . Имеем еще три четверки компланарных точек: 5)  $A_1B_1C_1D$ , 6)  $A_1B_1CD_1$ , 7)  $A_1BC_1D_1$ . Докажем, что точка  $A_1$

<sup>1</sup>Мёбиус Август (1790—1868) — немецкий геометр и астроном, один из основоположников теории геометрических преобразований, топологии, теории векторов и многомерной геометрии. Ввел барицентрические и проективные координаты. Работал в Лейпцигском университете.

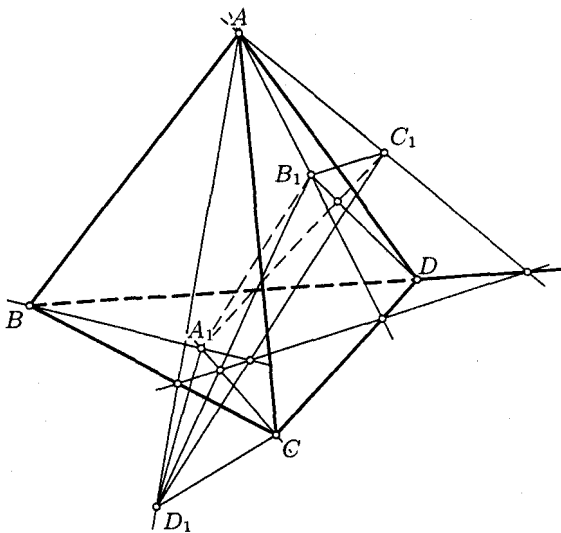


Рис. 44

лежит в плоскости  $BCD$ . Для этого рассмотрим четыре прямые:  $A_1B$ ,  $AB_1$ ,  $C_1D$ ,  $CD_1$  и другие четыре прямые  $A_1B_1$ ,  $AB$ ,  $C_1D_1$ ,  $CD$ . Прямые  $A_1B_1$ ,  $AB$ ,  $C_1D_1$  пересекают все четыре прямые первой четверки либо потому, что имеют по общей точке, либо потому, что лежат в одной плоскости согласно построенным семи четверкам компланарных точек. По той же причине прямая  $CD$  пересекает прямые  $AB_1$ ,  $C_1D$ ,  $CD_1$ , а значит, по теореме Шаля пересечет и прямую  $A_1B$ . Следовательно, точка  $A_1$  лежит в плоскости  $BCD$ . Таким образом, построены два тетраэдра  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  таких, что каждая вершина первого лежит в соответствующей грани второго и наоборот, то есть эти тетраэдры образуют пару тетраэдров Мёбиуса.

## § 30. Тетраэдр и сфера

**30.1. Аналог теоремы Паскаля.** *Плоскости, определяемые точками пересечения сферы с тремя ребрами тетраэдра, сходящимися в одной вершине, пересекают противоположные грани по прямым, образующим гиперболическую четверку.*

**Доказательство.** Точки пересечения сферы с ребрами тетраэдра  $ABCD$  обозначим согласно рис. 45. Рассмотрим шестиугольник



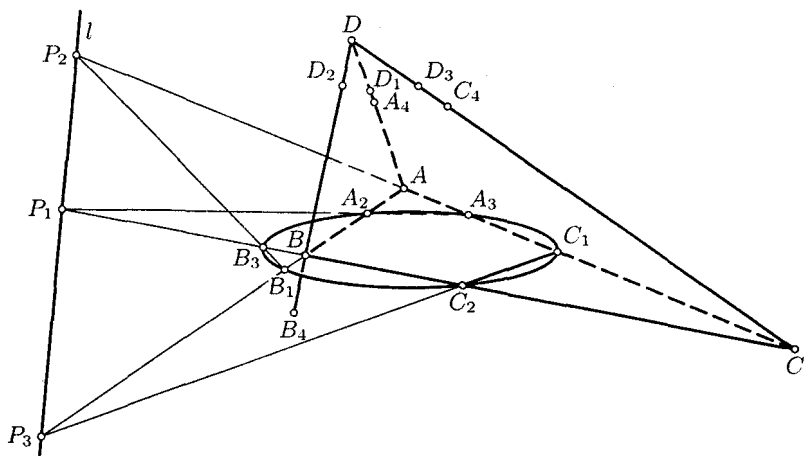


Рис. 45

$A_2B_1B_3C_2C_1A_3$ , лежащий в грани  $ABC$  тетраэдра. Он вписан в окружность пересечения сферы с плоскостью  $ABC$ . По теореме Паскаля для вписанного шестиугольника (см. [4], с. 76) на одной прямой  $l$  лежат точки

$$P_1 = (A_2A_3) \cap (B_3C_2), \quad P_2 = (B_1B_3) \cap (A_3C_1), \quad P_3 = (C_1C_2) \cap (A_2B_1).$$

Эти точки принадлежат соответственно прямым пересечения плоскостей  $BCD$  и  $A_2A_3A_4$ ,  $CAD$  и  $B_1B_3B_4$ ,  $BDA$  и  $C_1C_2C_4$ . Следовательно, прямая  $l$  является общей секущей этих трех прямых, а она пересекает и прямую  $(ABC) \cap (D_1D_2D_3)$ , поскольку лежит с ней в одной плоскости  $ABC$ , т. е. является общей секущей четырех прямых, указанных в условии теоремы. На равных основаниях существуют еще три аналогичные прямые в остальных трех гранях данного тетраэдра. Согласно теореме Шаля (§ 25) рассматриваемая четверка прямых является гиперболической.  $\square$

В тетраэдре, полярно сопряженном данному тетраэдру  $ABCD$ , ребрами служат шесть прямых пересечения касательных плоскостей к сфере в 12 точках пересечения сферы с ребрами тетраэдра  $ABCD$ . Полярное соответствие переводит гиперболическую четверку прямых в гиперболическую четверку. Поэтому получаем **двойственную теорему**: *если точки пересечения троек касательных к сфере плоскостей, проведенных через ребра одной грани тетраэдра, соединить с противоположными этим граням вершинами, то полученные четыре прямые образуют гиперболическую четверку.*

**30.2. Тожество для тетраэдра и его описанной сферы.** Если около тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  описана сфера и прямые  $GA_i$  ( $G$  — центроид тетраэдра) пересекают сферу вторично в точках  $B_i$ , то имеет место соотношение:

$$\frac{\overline{A_1G}}{\overline{GB_1}} + \frac{\overline{A_2G}}{\overline{GB_2}} + \frac{\overline{A_3G}}{\overline{GB_3}} + \frac{\overline{A_4G}}{\overline{GB_4}} = 4. \quad (4.30)$$

**Доказательство.** По теореме о степени точки относительно сферы (см. [5], с. 146) для точки  $G$  имеем:  $\overline{GA_i} \cdot \overline{GB_i} = OG^2 - R^2$ , откуда

$$\frac{\overline{GB_i}}{\overline{GA_i}} = \frac{\overline{GA_i} \cdot \overline{GB_i}}{\overline{GA_i}^2} = \frac{OG^2 - R^2}{GA_i^2}.$$

Так как

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{16} \sum_{i,j=1}^4 a_{ij}^2$$

(там же, с. 104), то

$$\frac{\overline{A_iG}}{\overline{GB_i}} = \frac{GA_i^2}{R^2 - OG^2} = \frac{GA_i^2}{\frac{1}{16} \sum a_{ij}^2}.$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^4 GA_i^2 = \frac{1}{4} \sum a_{ij}^2$$

(там же, с. 104), то тождество (4.30) доказано.  $\square$

**30.3. Антипараллельные сечения тетраэдра.** Проведем через вершины  $A, B, C$  тетраэдра  $ABCD$  сферу  $F$ , пересекающую ребра  $DA, DB, DC$  соответственно в точках  $P_1, P_2, P_3$ . Тогда плоскость  $P_1P_2P_3$  параллельна касательной плоскости в точке  $D$  к описанной около тетраэдра сфере. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что прямые  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1$  соответственно параллельны прямым пересечения касательной плоскости и плоскостей граней тетраэдра. На рис. 46 изображена фигура, полученная в плоскости  $DAB$ .

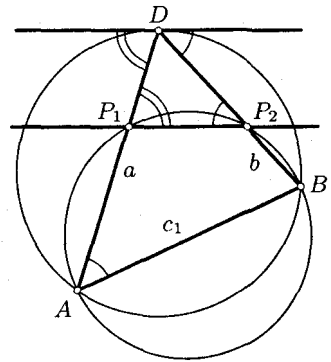


Рис. 46

Треугольник  $P_1P_2P_3$  называется *антипараллельным сечением* тетраэдра относительно вершины  $D$ . Прямые  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1$  также называются *антипараллельными* соответственно прямым  $AB, BC, CA$ .

Рассмотрим одно свойство сторон треугольника  $P_1P_2P_3$ . Пусть

$$DA = a, \quad DB = b, \quad DC = c, \quad AB = c_1, \quad CB = a_1, \quad AC = b_1$$

и  $s$  — степень точки  $D$  относительно сферы  $F$ , т. е.

$$DP_1 \cdot a = DP_2 \cdot b = DP_3 \cdot c = s,$$

отсюда

$$\frac{DP_1}{b \cdot c} = \frac{DP_2}{a \cdot c} = \frac{DP_3}{a \cdot b} = \frac{s}{abc}.$$

Из подобия треугольников  $ABD$  и  $P_1P_2D$  следует

$$DP_1 = P_1P_2 \cdot \frac{b}{c_1}.$$

Учитывая это равенство и два ему аналогичных, находим:

$$\frac{P_1P_2}{c \cdot c_1} = \frac{P_2P_3}{a \cdot a_1} = \frac{P_3P_4}{b \cdot b_1} = \frac{s}{abc}. \quad (4.31)$$

Итак, длины сторон антипараллельного сечения тетраэдра пропорциональны произведениям длин его противоположных ребер.

Поэтому антипараллельные сечения тетраэдра относительно всех его вершин подобны между собой.

## Задачи к главе 4

4.1. Если два тетраэдра гомологичны относительно точки  $S$  и плоскости  $\sigma$ , то полярные плоскости точки  $S$  относительно этих тетраэдров пересекаются по прямой, лежащей в плоскости  $\sigma$ , и полюсы плоскости  $\sigma$  коллинеарны с точкой  $S$ . Докажите.

4.2. Если  $\mu$  — полярная плоскость точки  $M$  относительно тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ ,  $\mu_1$  — полярная плоскость точки  $A_1$  относительно тетраэдра  $MA_2A_3A_4$ ,  $\mu_2$  — полярная плоскость точки  $A_2$  относительно тетраэдра  $A_1MA_3A_4$ ,  $\mu_3$  и  $\mu_4$  — еще две аналогичным образом построенные плоскости, то тетраэдры  $A_1A_2A_3A_4$  и  $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$  гомологичны относительно точки  $M$  и плоскости  $\mu$ . Докажите.

4.3. Если два тетраэдра гомологичны двумя способами (*гомологичны дважды*), то плоскость первой гомологии проходит через центр второй гомологии, а плоскость второй гомологии проходит через центр первой. Докажите.

4.4. Если прямые, соединяющие соответственные вершины двух тетраэдров, являются сторонами косоугольного четырехугольника, то прямые пересечения пар соответственных граней также являются сторонами косоугольного четырехугольника. Докажите.

4.5 В каждой грани тетраэдра выбрана произвольная точка и построена точка, симметричная выбранной относительно центроида грани, в которой она расположена. Докажите, что центроид четырех исходных точек и центроид системы четырех построенных точек симметричны относительно центроида тетраэдра.

4.6. Докажите, что из медиан тетраэдра можно построить косоугольный четырехугольник, стороны которого параллельны этим медианам. Найдите отношение объема тетраэдра, вершины которого совпадают с вершинами этого четырехугольника, к объему данного тетраэдра.

4.7. Докажите, что если пять ребер  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$ ,  $BD$  тетраэдра  $ABCD$  перпендикулярны соответственно пяти ребрам  $A_1B_1$ ,  $A_1C_1$ ,  $A_1D_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $B_1D_1$  тетраэдра  $A_1B_1C_1D_1$ , то и шестые ребра  $CD$  и  $C_1D_1$  перпендикулярны.

4.8. Докажите, что если плоскости, проведенные через ребра одного трехгранного угла перпендикулярно к соответствующим граням другого, пересекаются по прямой, то и плоскости, проведенные через ребра второго трехгранного угла перпендикулярно к соответствующим граням первого, также пересекаются по прямой.

4.9. Докажите, что если две высоты тетраэдра пересекаются, то и две другие также пересекаются.

4.10. Докажите, что если  $P_i$  — ортогональные проекции вершин  $A_i$  данного тетраэдра на произвольную плоскость, то перпендикуляры, проведенные из точек  $P_i$  на соответственные грани этого тетраэдра, образуют гиперболическую четверку прямых.

4.11. Если в гранях тетраэдра  $ABCD$  заданы соответственно точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  и прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  гиперболоидальны, то гиперболоидальны гармонические поляры точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  относительно соответственных граней. Докажите.

4.12. В сферу вписан тетраэдр  $ABCD$ . Прямая  $AG$  ( $G$  — центроид тетраэдра) пересекает вторично сферу в точке  $A_1$ . Найдите зависимость между длинами ребер тетраэдра, если точка  $G$  делит хорду  $AA_1$  пополам.

## Метрические зависимости в тетраэдре

### § 31. Точка Лемуана тетраэдра

**31.1. Определение точки Лемуана тетраэдра** основано на такой теореме.

**Теорема.** Если в каждой грани  $\alpha_i$  произвольного тетраэдра  $ABCD$  взята точка  $U_i$ , расстояния от которой до ребер этой грани обратно пропорциональны длинам противоположных им ребер тетраэдра, то прямые  $AU_1, BU_2, CU_3, DU_4$  пересекаются в одной точке  $K$ .

Эта точка  $K$  называется *точкой Лемуана* данного тетраэдра  $ABCD$ .

**Доказательство.** Обозначим длины ребер тетраэдра

$$DA = a, \quad DB = b, \quad DC = c, \quad BC = a_1, \quad CA = b_1, \quad AB = c_1.$$

Рассмотрим грань  $ABC$ . Если  $d_1, d_2, d_3$  — расстояния от точки  $U_4$  до ребер  $BC, CA, AB$  соответственно, то  $a_1 d_1 + b_1 d_2 + c_1 d_3 = 2S$  (где  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ ). По условию выбора точек  $U_i$  имеем

$$d_1 = \frac{t}{a}, \quad d_2 = \frac{t}{b}, \quad d_3 = \frac{t}{c}. \quad \text{Поэтому} \quad \left( \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} \right) t = 2S, \quad \text{откуда}$$

$$t = \frac{2S}{\left( \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} \right)}.$$

Барицентрические координаты точки  $U_4$  относительно треугольника  $ABC$  равны  $\lambda_i = \frac{d_i}{h_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где  $h_i$  — длины высот этого треугольника:  $h_1 = \frac{2S}{a_1}, h_2 = \frac{2S}{b_1}, h_3 = \frac{2S}{c_1}$ . Выполнив все необходимые подстановки, будем иметь:

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{ka}, \quad \lambda_2 = \frac{b_1}{kb}, \quad \lambda_3 = \frac{c_1}{kc}, \quad \text{где} \quad k = \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c}.$$

Следовательно, ненормированные барицентрические координаты точки  $U_4$  относительно треугольника  $ABC$  равны:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \frac{a_1}{a} : \frac{b_1}{b} : \frac{c_1}{c} = a_1 b c : a b_1 c : a b c_1,$$

поэтому относительно тетраэдра  $ABCD$  точка  $U_4$  имеет координаты:

$$U_4(a_1 b c : a b_1 c : a b c_1 : 0),$$

т.е. отличные от нуля координаты пропорциональны произведениям

длин ребер граней, сходящихся в вершине  $D$  тетраэдра. Таким образом,

$$\begin{aligned} U_1(0 : ab_1c : abc_1 : a_1b_1c_1), \\ U_2(a_1bc : 0 : abc_1 : a_1b_1c_1), \\ U_3(a_1bc : ab_1c : 0 : a_1b_1c_1), \\ U_4(a_1bc : ab_1c : abc_1 : 0). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Барицентрические координаты точек  $U_i$  говорят о том, что эти точки являются проекциями из вершин тетраэдра  $ABCD$  на противоположные грани точки  $K$  с координатами:

$$K(a_1bc : ab_1c : abc_1 : a_1b_1c_1). \quad (5.2)$$

Доказательство закончено.  $\square$

Попутно доказано, что ненормированные барицентрические координаты точки Лемуана  $K$  тетраэдра относительно этого тетраэдра равны произведениям длин ребер соответствующих граней.

**31.2. Свойства точки Лемуана.** Из доказанной теоремы и координат (5.2) имеем следующие следствия.

**Следствие 1.** Точка Лемуана тетраэдра есть центр гомологии тетраэдров  $ABCD$  и  $U_1U_2U_3U_4$ , где точки  $U_i$  лежат в гранях тетраэдра  $ABCD$  и удалены от ребер соответствующей грани на расстояния, обратно пропорциональные длинам противоположных ребер тетраэдра.

На основании теоремы синусов для тетраэдра (см. [5], с. 99) можно показать, что барицентрические координаты точки Лемуана тетраэдра пропорциональны синусам Штаудта противоположных триэдров тетраэдра.

**Следствие 2.** Барицентрические координаты точки Лемуана тетраэдра пропорциональны синусам Штаудта противоположных трехгранных углов этого тетраэдра.

Нормируем Б-координаты (5.2) и привлечем формулу  $S = \frac{abc}{4R}$  площади треугольника. Тогда

$$\lambda_i = \frac{S_i R_i}{\sum_{i=1}^4 S_i R_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5.3)$$

**Следствие 3.** Барицентрические координаты точки Лемуана тетраэдра пропорциональны произведениям площадей граней тетраэдра и радиусов окружностей, описанных около этих граней.

Расстояния  $x_i$  точки  $K$  до граней равны

$$x_i = \lambda_i h_i = \frac{S_i R_i}{\mu} \cdot \frac{3V}{S_i} = \frac{3V}{\mu} R_i, \quad (5.4)$$

где  $\mu = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 + S_4 R_4$ .

**Следствие 4.** Расстояния точки Лемуана тетраэдра до его грани пропорциональны радиусам окружностей, описанных около этих граней.

**31.3. Сопутствующая гиперболическая четверка прямых.** Для сравнения со свойством точек  $U_i$  из п. 31.1 рассмотрим точки  $L_i$  в гранях тетраэдра  $ABCD$ , расстояния которых до ребер соответствующей грани пропорциональны длинам противоположных им ребер. Выполним все рассуждения и вычисления аналогично п. 31.1 для грани  $ABC$  и запишем по аналогии результаты для остальных граней:

$$\begin{aligned} L_1(0 : cc_1 : bb_1 : aa_1), \\ L_2(cc_1 : 0 : aa_1 : bb_1), \\ L_3(bb_1 : aa_1 : 0 : cc_1), \\ L_4(aa_1 : bb_1 : cc_1 : 0). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Прямые  $AL_1, BL_2, CL_3, DL_4$  имеют барицентрические уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{cc_1} &= \frac{x_3}{bb_1} = \frac{x_4}{aa_1}, \\ \frac{x_1}{cc_1} &= \frac{x_3}{aa_1} = \frac{x_4}{bb_1}, \\ \frac{x_1}{bb_1} &= \frac{x_2}{aa_1} = \frac{x_4}{cc_1}, \\ \frac{x_1}{aa_1} &= \frac{x_2}{bb_1} = \frac{x_3}{cc_1}. \end{aligned}$$

Согласно критерию Гермеса (см. п. 25.2) эти прямые образуют гиперболическую четверку.

## § 32. Объем тетраэдра

**32.1. Формула Монжа.** Если  $b_1, b_2, b_3$  — длины бимедиан тетраэдра  $ABCD$ , то его объем  $V$  равен

$$V = \frac{1}{3} b_1 b_2 b_3 \Delta(G), \tag{5.6}$$

где  $\Delta(G)$  синус Штаудта трехгранного угла (с вершиной в центре  $G$  тетраэдра), образованного бимедианами.

**Доказательство.** Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — середины ребер  $BC, CA, AB$  данного тетраэдра. Так как

$$S_{A_1 B_1 C_1} = \frac{1}{4} S_{ABC},$$

то

$$V_{GA_1 B_1 C_1} = \frac{1}{4} V_{GABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} V.$$

Поскольку центр тяжести  $G$  — середина бимедиан, то по формуле Штаудта (см. [5], с. 97)

$$V_{GA_1B_1C_1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} b_1 b_2 b_3 \Delta(G).$$

Следовательно,

$$V = 16V_{GA_1B_1C_1} = 16 \cdot \frac{1}{48} b_1 b_2 b_3 \Delta(G),$$

т. е. имеем формулу (5.6), впервые полученную Монжем<sup>1</sup> в 1809 году.  $\square$

**32.2. Формула величин одной грани.** По формуле проекций для грани  $ABC$  тетраэдра  $ABCD$  (см. [5], с. 53) имеем:

$$S_4 = S_1 \cos(BC) + S_2 \cos(CA) + S_3 \cos(AB).$$

По формулам Достора (там же, с. 97)

$$V = \frac{2}{3} S_1 S_4 \frac{\sin(BC)}{a_1} = \frac{2}{3} S_2 S_4 \frac{\sin(CA)}{b_1} = \frac{2}{3} S_3 S_4 \frac{\sin(AB)}{c_1},$$

откуда

$$\frac{2}{3} S_1 S_4 = \frac{V a_1}{\sin(BC)}, \quad \frac{2}{3} S_2 S_4 = \frac{V b_1}{\sin(CA)}, \quad \frac{2}{3} S_3 S_4 = \frac{V c_1}{\sin(AB)}.$$

Умножим первоначальное равенство на  $\frac{2}{3} S_4$  и выполним подстановки:

$$\frac{2}{3} S_4^2 = V a_1 \operatorname{ctg}(BC) + V b_1 \operatorname{ctg}(CA) + V c_1 \operatorname{ctg}(AB).$$

Отсюда получаем искомую формулу:

$$V = \frac{2}{3} \frac{S_4^2}{a_1 \operatorname{ctg}(BC) + b_1 \operatorname{ctg}(CA) + c_1 \operatorname{ctg}(AB)}. \quad (5.7)$$

Примечательно, что все входящие в нее величины связаны с одной гранью  $ABC$  данного тетраэдра  $ABCD$ .

**32.3. Формула двенадцати величин.** Докажем, что

$$V^2 = \frac{1}{18} \sum_{i=1}^4 S_i^2 (l_i^2 - R_i^2), \quad (5.8)$$

где  $S_i$  — площади граней тетраэдра  $ABCD$ ,  $R_i$  — радиусы окружностей, описанных около этих граней,  $l_i$  — расстояния от центров этих окружностей до противоположных вершин тетраэдра.

**Доказательство.** Пусть  $O_i$  — центры указанных окружностей,  $O$  — центр описанной сферы,  $OO_i = d_i$ . Тогда из треугольника

<sup>1</sup>Монж Гаспар (1746—1818) — французский геометр и общественный деятель, член Парижской АН, творец начертательной геометрии. Имеет важные открытия в дифференциальной геометрии. Дружил с Наполеоном, участвовал в его походе в Египет.



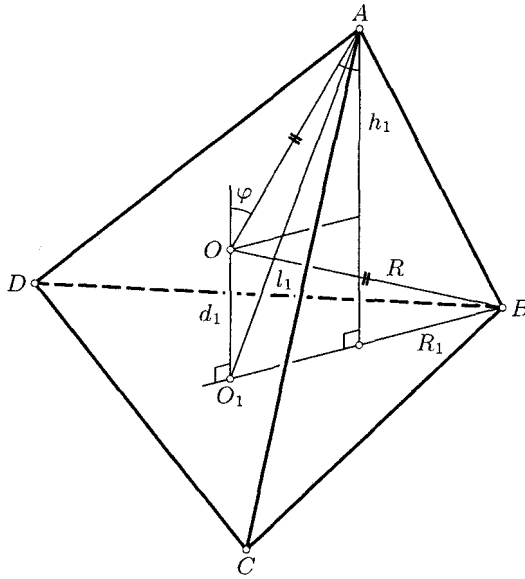


Рис. 47

$AOO_i$  (рис. 47) находим:

$$l_i^2 = R^2 + d_i^2 - 2Rd_i \cos(\pi - \varphi_i),$$

где  $\varphi_i$  — угол между высотой  $h_i$  и прямой  $AO$ , равный внешнему углу при вершине  $O$  рассматриваемого треугольника, так как  $h_i$  параллельна  $OO_i$ . Заметив, что

$$\cos \varphi_i = \frac{h_i - d_i}{R} \quad \text{и} \quad R^2 - R_i^2 = d_i^2,$$

находим

$$l_i^2 - R_i^2 = 2d_i h_i.$$

Далее получаем:

$$\sum_{i=1}^4 S_i^2 (l_i^2 - R_i^2) = 2 \sum_{i=1}^4 S_i^2 d_i h_i = 2 \sum_{i=1}^4 (S_i h_i)^2 \frac{d_i}{h_i}.$$

Поскольку  $S_i h_i = 3V$ , а  $\sum_{i=1}^4 \frac{d_i}{h_i} = 1$ , получим

$$\sum_{i=1}^4 S_i^2 (l_i^2 - R_i^2) = 2 \cdot 9V^2,$$

откуда и следует доказываемая формула (5.8). □

**Следствие 1.** Если точки  $A, B, C, D$  лежат в одной плоскости, то

$$\sum_{i=1}^4 S_i^2 (l_i^2 - R_i^2) = 0. \quad (5.9)$$

**Следствие 2.** Если  $ABCD$  — параллелограмм, то все  $S_i$  равны, поэтому

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2.$$

Вследствие симметрии относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма, имеем:

$$l_1 = l_3, \quad l_2 = l_4, \quad R_1 = R_3, \quad R_2 = R_4.$$

Значит,

$$R_1^2 + R_2^2 = l_1^2 + l_2^2,$$

т.е. сумма квадратов радиусов окружностей, описанных около двух неравных треугольников, на которые разбивается параллелограмм диагоналями, равна сумме квадратов расстояний от центров этих окружностей до противоположных вершин параллелограмма.

**32.4. Выражение объема тетраэдра в барицентрических координатах.** Пусть барицентрическая система координат задана базисным тетраэдром  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и  $\overline{A_4 A_i} = \bar{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Тетраэдр  $ABCD$  задан барицентрическими координатами своих вершин:  $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ,  $B(b_1, b_2, b_3, b_4)$ ,  $C(c_1, c_2, c_3, c_4)$ ,  $D(d_1, d_2, d_3, d_4)$ . Тогда в аффинном базисе  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  смешанное произведение  $(\overline{DA} \overline{DB} \overline{DC})$  имеет выражение (см. [5], с. 231):

$$(\overline{DA} \overline{DB} \overline{DC}) = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) \begin{vmatrix} a_1 - d_1 & a_2 - d_2 & a_3 - d_3 \\ b_1 - d_1 & b_2 - d_2 & b_3 - d_3 \\ c_1 - d_1 & c_2 - d_2 & c_3 - d_3 \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

Рассмотрим два равных определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Чтобы убедиться в истинности этого равенства, достаточно к последнему столбцу прибавить три первых. А второй из этих определителей

равен определителю (5.10), что усматривается вычитанием из трех первых строк четвертой строки. Итак,

$$(\overline{DA} \overline{DB} \overline{DC}) = (\bar{e}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_3) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}. \quad (5.11)$$

Смешанное произведение  $(\bar{e}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_3)$  есть объем *ориентированного* параллелепипеда, построенного на базисных векторах  $\bar{e}_i$ . Если его *принять за единицу измерения объемов*, то получим окончательно:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}, \quad (5.12)$$

где тетраэдр  $ABCD$  рассматривается *ориентированным*.

### § 33. Зависимости между углами, высотами и бивысотами

#### 33.1. Углы между противоположными ребрами тетраэдра.

Для любых четырех точек  $A, B, C, D$  имеет место известное векторное равенство

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0. \quad (5.13)$$

Если обозначить углы между скрещивающимися ребрами тетраэдра  $ABCD$  соответственно направлениям входящих в это равенство векторов

$$\beta_1 = (\widehat{\overline{BC}, \overline{AD}}), \quad \beta_2 = (\widehat{\overline{CA}, \overline{BD}}), \quad \beta_3 = (\widehat{\overline{AB}, \overline{CD}}),$$

то его можно представить в таком виде:

$$aa_1 \cos \beta_1 + bb_1 \cos \beta_2 + cc_1 \cos \beta_3 = 0. \quad (5.14)$$

На основании формулы Сервуа для объема тетраэдра имеем:

$$\delta_1 aa_1 \sin \beta_1 = \delta_2 bb_1 \sin \beta_2 = \delta_3 cc_1 \sin \beta_3. \quad (5.15)$$

Из последних двух зависимостей путем деления получаем соотношение:

$$\frac{\text{ctg } \beta_1}{\delta_1} + \frac{\text{ctg } \beta_2}{\delta_2} + \frac{\text{ctg } \beta_3}{\delta_3} = 0, \quad (5.16)$$

где  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  — длины бивысот тетраэдра.

Выразим косинусы углов  $\beta_i$  через длины ребер тетраэдра. Так как  $2\overline{BC} \cdot \overline{AD} = 2(\overline{AC} \cdot \overline{AD} - \overline{AB} \cdot \overline{AD}) = b_1^2 + a^2 - c^2 - (c_1^2 + a^2 - b^2)$ ,

то получим  $2aa_1 \cos \beta_1 = b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2$ , откуда

$$\cos \beta_1 = \frac{b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2}{2aa_1}. \quad (5.17)$$

Произведения длин противоположных ребер тетраэдра пропорциональны произведениям синусов противоположных двугранных углов тетраэдра (см. [5], с. 99), поэтому отношение (5.14) дает такое следствие:

$$\sin(BC) \sin(AD) \cos \beta_1 + \sin(CA) \sin(BD) \cos \beta_2 + \sin(AB) \sin(CD) \cos \beta_3 = 0. \quad (5.18)$$

Заметим, что тождества (5.13) и (5.14) справедливы и для любого четырехугольника плоскости.

Напомним, что для косинусов углов противоположных ребер имеются еще выражения через косинусы и синусы двугранных углов тетраэдра (там же, с. 88):

$$\cos \beta_1 = \frac{\cos(AB) \cos(CD) - \cos(BD) \cos(AC)}{\sin(BC) \sin(AD)}. \quad (5.19)$$

**33.2. Длина бивысоты.** Из формулы Сервуа объема тетраэдра находим

$$\delta_1^2 = \frac{36V^2}{a^2 a_1^2 \sin^2 \beta_1},$$

где  $\delta_1$  — длина бивысоты тетраэдра. Привлекая (5.17), находим:

$$\sin^2 \beta_1 = \frac{4a^2 a_1^2 - (b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2)^2}{4a^2 a_1^2}.$$

Поэтому

$$\delta_1^2 = \frac{144V^2}{4a^2 a_1^2 - (b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2)^2}. \quad (5.20)$$

**33.3. Зависимость между высотами и бивысотами.** Пусть дан тетраэдр  $ABCD$  и векторы  $\overline{DA} = \bar{a}$ ,  $\overline{DB} = \bar{b}$ ,  $\overline{DC} = \bar{c}$  образуют правую тройку. Привлечем векторы

$$\bar{n}_1 = \bar{c} \times \bar{b}, \quad \bar{n}_2 = \bar{a} \times \bar{c}, \quad \bar{n}_3 = \bar{b} \times \bar{a}, \quad \bar{n}_4 = (\bar{b} - \bar{a}) \times (\bar{c} - \bar{a}).$$

Тогда  $|\bar{n}_i| = 2S_i$  и

$$\bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 + \bar{n}_4 = \bar{0}. \quad (5.21)$$

Векторы

$$\bar{r}_1 = \overline{BC} \times \overline{AD}, \quad \bar{r}_2 = \overline{CA} \times \overline{BD}, \quad \bar{r}_3 = \overline{AB} \times \overline{CD}$$

определяют направления бивысот тетраэдра. Их модули равны  $|\bar{r}_1| = aa_1 \sin \beta_1$ ,  $|\bar{r}_2| = bb_1 \sin \beta_2$ ,  $|\bar{r}_3| = cc_1 \sin \beta_3$ . Заметим, что

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 &= (\bar{c} - \bar{b}) \times (-\bar{a}) = \bar{n}_2 + \bar{n}_3 = -(\bar{n}_1 + \bar{n}_4), \\ \bar{r}_2 &= (\bar{a} - \bar{c}) \times (-\bar{b}) = \bar{n}_3 + \bar{n}_1 = -(\bar{n}_2 + \bar{n}_4), \\ \bar{r}_3 &= (\bar{b} - \bar{a}) \times (-\bar{c}) = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 = -(\bar{n}_3 + \bar{n}_4).\end{aligned}$$

Согласно формуле Сервуа  $6V = |\bar{r}_1| \delta_1$ , поэтому

$$\frac{36V^2}{\delta_1^2} = \bar{r}_1^2 = (\bar{n}_1 + \bar{n}_4)^2 = (\bar{n}_2 + \bar{n}_3)^2,$$

откуда

$$\frac{72V^2}{\delta_1^2} = \sum_{i=1}^4 \bar{n}_i^2 + 2(\bar{n}_1 \bar{n}_4 + \bar{n}_2 \bar{n}_3)$$

и аналогично

$$\begin{aligned}\frac{72V^2}{\delta_2^2} &= \sum_{i=1}^4 \bar{n}_i^2 + 2(\bar{n}_1 \bar{n}_3 + \bar{n}_2 \bar{n}_4), \\ \frac{72V^2}{\delta_3^2} &= \sum_{i=1}^4 \bar{n}_i^2 + 2(\bar{n}_1 \bar{n}_2 + \bar{n}_3 \bar{n}_4).\end{aligned}\tag{5.22}$$

Сложив последние три равенства, получаем:

$$\begin{aligned}72V^2 \left( \frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} + \frac{1}{\delta_3^2} \right) &= 2(\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2 + \bar{n}_3^2 + \bar{n}_4^2) + (\bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 + \bar{n}_4)^2 = \\ &= 8(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2),\end{aligned}$$

что эквивалентно

$$\frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} + \frac{1}{\delta_3^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2}.\tag{5.23}$$

**33.4. Следствия.** Из равенства

$$\sum_{i=1}^4 S_i^2 = 36V^2 \left( \frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} + \frac{1}{\delta_3^2} \right),$$

принимая во внимание формулу Сервуа, получаем:

$$4 \sum_{i=1}^4 S_i^2 = (aa_1 \sin \beta_1)^2 + (bb_1 \sin \beta_2)^2 + (cc_1 \sin \beta_3)^2.\tag{5.24}$$

Это равенство геометрически означает, что *сумма квадратов площадей граней тетраэдра равна сумме квадратов трех непараллельных граней описанного около него параллелепипеда.*

Из формул (5.22) видно, что для равенства бивысот тетраэдра необходимо и достаточно, чтобы

$$\bar{n}_1\bar{n}_4 + \bar{n}_2\bar{n}_3 = \bar{n}_2\bar{n}_4 + \bar{n}_1\bar{n}_3 = \bar{n}_3\bar{n}_4 + \bar{n}_1\bar{n}_2. \quad (5.25)$$

Освобождаясь от векторов и деля эти равенства на  $9V^2$ , получаем:

$$\frac{\cos(AD)}{h_2h_3} + \frac{\cos(BC)}{h_1h_4} = \frac{\cos(BD)}{h_1h_3} + \frac{\cos(AC)}{h_2h_4} = \frac{\cos(CD)}{h_1h_2} + \frac{\cos(AB)}{h_3h_4}. \quad (5.26)$$

Почленное деление равенства

$$S_4 = S_1 \cos(BC) + S_2 \cos(AC) + S_3 \cos(AB)$$

на  $3V$  дает зависимость между двугранными углами и высотами:

$$\frac{1}{h_4} = \frac{\cos(BC)}{h_1} + \frac{\cos(AC)}{h_2} + \frac{\cos(AB)}{h_3}. \quad (5.27)$$

Из двух выражений (5.17) и (5.19) для  $\cos \beta_1$  и аналогичных им выражений для  $\cos \beta_2$  и  $\cos \beta_3$  находим, что величина

$$\frac{b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2}{\cos(BD) \cos(AC) - \cos(AB) \cos(CD)} = -2K,$$

где

$$K = \frac{aa_1}{\sin(AD) \sin(BC)} = \frac{bb_1}{\sin(BD) \sin(AC)} = \frac{cc_1}{\sin(CD) \sin(AB)}$$

постоянна для данного тетраэдра. Отсюда имеем соотношение:

$$a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \operatorname{ctg}(AD) \operatorname{ctg}(BC) = b^2 + b_1^2 + 2bb_1 \operatorname{ctg}(BD) \operatorname{ctg}(AC) = c^2 + c_1^2 + 2cc_1 \operatorname{ctg}(CD) \operatorname{ctg}(AB), \quad (5.28)$$

впервые полученное Б р е т ш н а й д е р о м (1841).

### § 34. Свойства точки Люилье тетраэдра

Точка Люилье определяется как такая точка, для которой сумма квадратов расстояний до граней данного тетраэдра минимальна (см. [5], с. 172—175). Бариецентрические координаты этой точки пропорциональны квадратам площадей соответствующих граней данного тетраэдра. Рассмотрим другие свойства точки Люилье<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Л ю и л ь е Симон (1750—1840) — швейцарский математик-педагог, член Берлинской и Петербургской АН. Ему принадлежат работы по теории многоугольников и многогранников, теории вероятностей, по рядам показательных и тригонометрических функций и др.

**34.1. Аналог теоремы Шлёмильха.** Три плоскости, каждая из которых проходит через бимедиану тетраэдра и середину соответствующей бивысоты, пересекаются в точке Люиле данного тетраэдра.

**Доказательство.** Очевидно, достаточно доказать, что середины двух противоположных ребер, середина соответственной им бивысоты и точка Люиле лежат в одной плоскости. Для этого вычислим барицентрические координаты точек  $P$  и  $Q$ , в которых бивысота пересекает ребра  $AB$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$ . Нормированными Б-координатами точки  $P$  являются отношения объемов ориентированных тетраэдров  $PBCD$ ,  $APCD$ ,  $ABPD$ ,  $ABCP$  к объему  $V$  данного тетраэдра. Именно,  $\lambda_1 = (\overline{BP} \overline{BC} \overline{BD}) \frac{1}{6V}$ . Представим  $\overline{BP} = \overline{BD} + \overline{DQ} + \overline{QP}$ . Тогда  $\lambda_1 = (\overline{BD} \times \overline{BC}) \overline{PQ} \frac{1}{6V}$ . Так как  $\overline{PQ} \parallel \bar{r}_3$ , то положим  $\overline{PQ} = \mu \bar{r}_3$ , вследствие чего

$$\lambda_1 = \frac{1}{6V} \mu (\bar{n}_1 \bar{r}_3).$$

Аналогично получим  $\lambda_2 = \frac{1}{6V} \mu (\bar{n}_2 \bar{r}_3)$ . Очевидно,  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . С равным правом первые две координаты точки  $Q$  равны нулю, а третья и четвертая равны соответственно

$$-\frac{\mu}{6V} (\bar{n}_3 \bar{r}_3) \quad \text{и} \quad -\frac{\mu}{6V} (\bar{n}_4 \bar{r}_3).$$

Тогда ненормированными координатами середины бивысоты  $PQ$  будут числа:

$$\bar{n}_1 \bar{r}_3, \quad \bar{n}_2 \bar{r}_3, \quad -\bar{n}_3 \bar{r}_3, \quad -\bar{n}_4 \bar{r}_3. \quad (5.29)$$

Постоянный множитель  $\frac{1}{6V} \mu$  опущен, поскольку он несуществен для доказательства. Задача сводится к доказательству равенства нулю определителя, составленного из координат рассматриваемых точек:

$$\begin{vmatrix} \bar{n}_1 \bar{r}_3 & \bar{n}_2 \bar{r}_3 & -\bar{n}_3 \bar{r}_3 & -\bar{n}_4 \bar{r}_3 \\ \bar{n}_1^2 & \bar{n}_2^2 & \bar{n}_3^2 & \bar{n}_4^2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Согласно п. 33.3 верно равенство  $\bar{r}_3 = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 = -(\bar{n}_3 + \bar{n}_4)$ , поэтому после подстановки определитель принимает вид:

$$\begin{vmatrix} \bar{n}_1^2 + \bar{n}_1 \bar{n}_2 & \bar{n}_2^2 + \bar{n}_1 \bar{n}_2 & \bar{n}_3^2 + \bar{n}_3 \bar{n}_4 & \bar{n}_4^2 + \bar{n}_3 \bar{n}_4 \\ \bar{n}_1^2 & \bar{n}_2^2 & \bar{n}_3^2 & \bar{n}_4^2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Из первой строки вычтем вторую, а затем из первого столбца вычтем второй, из третьего — четвертый, после чего равенство нулю определителя будет очевидным.

Три плоскости, каждая из которых проходит через бимедиану и середину соответственной бивысоты, равноправны. Следовательно, точка Люиллье будет лежать и в остальных двух плоскостях.  $\square$

**34.2. Точка Люиллье и бивысоты.** Точка Люиллье тетраэдра лежит в плоскости, определенной серединами его бивысот.

**Доказательство.** По аналогии с (5.29) напомним барицентрические (ненормированные) координаты середин других двух бивысот и составим определитель из координат указанных четырех точек:

$$\begin{vmatrix} -\bar{n}_1\bar{r}_1 & \bar{n}_2\bar{r}_1 & \bar{n}_3\bar{r}_1 & -\bar{n}_4\bar{r}_1 \\ \bar{n}_1\bar{r}_2 & -\bar{n}_2\bar{r}_2 & \bar{n}_3\bar{r}_2 & -\bar{n}_4\bar{r}_2 \\ \bar{n}_1\bar{r}_3 & \bar{n}_2\bar{r}_3 & -\bar{n}_3\bar{r}_3 & -\bar{n}_4\bar{r}_3 \\ \bar{n}_1^2 & \bar{n}_2^2 & \bar{n}_3^2 & \bar{n}_4^2 \end{vmatrix}.$$

В обозначениях в п. 33.3

$$\bar{r}_1 = \bar{n}_2 + \bar{n}_3, \quad \bar{r}_2 = \bar{n}_1 + \bar{n}_3, \quad \bar{r}_3 = \bar{n}_1 + \bar{n}_2.$$

Используя (5.21), получаем:

$$\begin{aligned} -\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 &= 2\bar{n}_1, & \bar{r}_1 - \bar{r}_2 + \bar{r}_3 &= 2\bar{n}_2, \\ \bar{r}_1 + \bar{r}_2 - \bar{r}_3 &= 2\bar{n}_3, & \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 &= -2\bar{n}_4. \end{aligned} \quad (5.30)$$

В составленном определителе к первой строке прибавим вторую и третью. Если учесть равенства (5.30), то элементы полученной первой строки оказываются пропорциональными соответственным элементам четвертой строки. А такой определитель равен нулю, поэтому рассматриваемые четыре точки компланарны.  $\square$

## § 35. Избранные неравенства и экстремумы

С целью приложений имеющихся результатов решим несколько задач.

**Задача 1.** Чевяны  $A_iP$ , проходящие через точку  $P$ , пересекают грани  $\alpha_i$  тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$  в точках  $P_i$ . Доказать, что

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\overline{A_iP}}{\overline{PP_i}} \geq 12, \quad \prod_{i=1}^4 \frac{\overline{A_iP}}{\overline{PP_i}} \leq 81. \quad (5.31)$$

**Решение.** Очевидно,  $\frac{\overline{A_iP}}{\overline{PP_i}} + 1 = \frac{\overline{A_iP_i}}{\overline{PP_i}}$ , и поэтому  $\sum_{i=1}^4 \frac{\overline{A_iP}}{\overline{PP_i}} + 4 = \sum \frac{\overline{A_iP_i}}{\overline{PP_i}}$ . Эти отношения положительны (точка  $P$  внутри тетраэдра).



Согласно неравенству (9.2) из [5] (с. 160)

$$\left( \sum_{i=1}^4 \frac{\overline{A_i P_i}}{\overline{P P_i}} \right) \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\overline{P P_i}}{\overline{A_i P_i}} \right) \geq 4^2.$$

В силу (4.5) вторая сумма равна единице, и следовательно, первая сумма не меньше 16, откуда следует первое из доказываемых неравенств (5.31). На основании неравенства Коши (см. [5], с. 159) имеем:

$$\prod_{i=1}^4 \frac{\overline{A_i P}}{\overline{P P_i}} \leq \frac{1}{4^4} \cdot 12^4 = 3^4 = 81.$$

Равенство имеет место лишь в случае, когда все отношения равны, т. е. когда точка  $P$  совпадает с центроидом тетраэдра.

**З а д а ч а 2.** Доказать, что для любого тетраэдра  $A_1 A_2 A_3 A_4$  имеет место неравенство (в общепринятых обозначениях)

$$\frac{R^2}{r^2} \geq \sum_{i,j=1}^4 \frac{a_{ij}^2}{h_i h_j}, \quad i < j. \quad (5.32)$$

**Р е ш е н и е.** Воспользуемся формулой (1.35), согласно которой для центров  $O$  и  $J$  описанной и вписанной сфер тетраэдра

$$OJ^2 = R^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - \sum_{i,j=1}^4 \frac{S_i}{S} \cdot \frac{S_j}{S} a_{ij}^2, \quad i < j,$$

где

$$S = \sum_{i=1}^4 S_i = \frac{3V}{r}.$$

Так как

$$S_i = \frac{3V}{h_i}, \quad \text{то} \quad \frac{S_i}{S} = \frac{r}{h_i},$$

поэтому

$$OJ^2 = R^2 - r^2 \sum \frac{a_{ij}^2}{h_i h_j},$$

откуда и следует (5.32), так как  $OJ^2 \geq 0$ .

Равенство достигается лишь при совпадении центров  $O$  и  $J$ , т. е. в случае равногранного тетраэдра.

**З а д а ч а 3.** Доказать, что сумма всех шести двугранных углов тетраэдра заключена между  $2\pi$  и  $3\pi$ .

**Р е ш е н и е.** Сумма двугранных углов триэдра больше  $\pi$ . Для четырех триэдров данного тетраэдра она больше  $4\pi$ . При этом каждый

двугранный угол будет сосчитан дважды. Следовательно сумма всех двугранных углов тетраэдра больше  $2\pi$ .

Докажем, что эта сумма меньше  $3\pi$ . На основании равенства (5.21) из векторов  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4$  можно построить косою четырехугольник. Угол между векторами  $\vec{n}_i$  и  $\vec{n}_j$  является внешним углом этого четырехугольника. С другой стороны, он дополняет до  $\pi$  угол между гранями  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  тетраэдра. Следовательно, углы  $(\vec{n}_i, \vec{n}_j)$  равны двугранным углам тетраэдра. Перестановкой порядка векторов  $\vec{n}_i$  можно построить три различных косых четырехугольника. Они соответствуют косым четырехугольникам  $ABCD, ACBD, ADBC$  тетраэдра  $ABCD$ . Сумма внутренних углов косою четырехугольника меньше  $2\pi$ , а для трех косых четырехугольников она меньше  $6\pi$ , при этом каждый угол будет сосчитан два раза. Значит, сумма всех шести двугранных углов тетраэдра меньше  $3\pi$ .

**Задача 4.** В тетраэдр  $A_1A_2A_3A_4$  с площадью  $S$  полной поверхности вписана сфера. Найти максимальное значение площади сечения тетраэдра плоскостью, параллельной одной из его граней и касающейся вписанной сферы.

**Решение.** Пусть  $\sigma$  — площадь сечения. Тогда

$$\frac{\sigma}{S_i} = \frac{(h_i - 2r)^2}{h_i^2}.$$

Так как  $S_i h_i = Sr = 3V$ , то

$$\sigma = \frac{S_i(h_i - 2r)^2}{h_i^2} = S_i \left(1 - \frac{2S_i}{S}\right)^2 = \frac{4S_i(S - 2S_i)^2}{4S^2}.$$

Значение площади  $\sigma$  достигает максимума при максимальном значении числителя полученной дроби. Сумма сомножителей числителя равна

$$4S_i + (S - 2S_i) + (S - 2S_i) = 2S,$$

т. е. постоянна. Согласно неравенству Коши произведение максимально при равенстве его сомножителей, т. е. при условии  $4S_i = S - 2S_i$ , откуда  $S_i = \frac{1}{6}S$ , а тогда  $\sigma = \frac{2}{27}S$ . Грань с площадью  $S_i = \frac{1}{6}S$  соответствует высоте  $h_i = 6r$  тетраэдра.

**Задача 5.** В правильной треугольной пирамиде боковая грань имеет заданную постоянную площадь и наклонена к плоскости основания под углом  $\alpha$ . При каком значении  $\alpha$  расстояние от центра основания пирамиды до боковой грани будет наибольшим?

**Решение.** Пусть  $S$  — площадь боковой грани,  $x$  — длина указанного перпендикуляра. Тогда по формуле проекций площадь основания равна  $\sigma = 3S \cos \alpha$ , поэтому объем  $V$  пирамиды равен  $V = 3x \cdot \frac{1}{3}S = xS$ ,

поскольку длина высоты к боковой грани равна  $3x$ . По формуле Дюпона  $V = \frac{2}{3}S\sigma \frac{\sin \alpha}{a}$  ( $a$  — ребро основания). Из равенства  $\sigma = 3S \cos \alpha = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$  следует  $a^2 = 4\sqrt{3}S \cos \alpha$ . Тогда находим:

$$V^2 = S^4 \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sqrt{3}S \cos \alpha} = \frac{S^3}{\sqrt{3}} \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Очевидно,  $x$  максимально при максимальном  $V^2$ , т. е. при максимальном  $y = \sin^2 \alpha \cos \alpha$ . Рассмотрим  $y^2 = \frac{\sin^2 \alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{2} \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$ . Сумма сомножителей  $\frac{\sin^2 \alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{2} + (1 - \sin^2 \alpha) = 1$  постоянна. Следовательно,  $y^2$  максимально при условии  $\frac{\sin^2 \alpha}{2} = 1 - \sin^2 \alpha$  равенства сомножителей, откуда  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $\operatorname{tg}^2 \alpha = 2$ .

### Задачи к главе 5

5.1. Около тетраэдра описан параллелепипед. Докажите, что точка Монжа данного тетраэдра является центром сферы, описанной около тетраэдра с вершинами в тех вершинах параллелепипеда, которые не являются вершинами данного тетраэдра.

5.2. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки Монжа тетраэдра до его вершин равна учетверенному квадрату радиуса описанной около него сферы.

5.3. Докажите, что из медиан тетраэдра можно построить косой четырехугольник, стороны которого параллельны этим медианам. Найдите отношение объема тетраэдра, вершины которого совпадают с вершинами этого четырехугольника, к объему данного тетраэдра.

5.4. Докажите соотношение для тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{1}{h_i^2} = \sum_{i,j=1}^4 \frac{\cos(A_iA_j)}{h_k h_u}, \quad i < j.$$

5.5. Через точку, лежащую внутри тетраэдра, параллельно его граням проведены четыре плоскости, на которых тетраэдр высекает треугольники с площадями  $s_i$  и которые высекают на гранях тетраэдра треугольники с площадями  $\sigma_i$ . Докажите, что

$$\sum_{i=1}^4 \sqrt{\frac{s_i}{S_i}} = 3, \quad \sum_{i=1}^4 \sqrt{\frac{\sigma_i}{S_i}} = 1,$$

( $S_i$  — площади граней тетраэдра).

5.6. На чевианах  $A_iP$  точки  $P$ , взятой внутри тетраэдра  $A_1A_2A_3A_4$ , заданы точки  $N_i$  такие, что  $\overline{A_iN_i} : \overline{A_iP} = 1 : 3$ . Через точки  $N_i$  проведены плоскости, параллельные граням  $\alpha_i$ . Если  $s_i$  — площади полученных сечений,  $V_i$  — объемы отсеченных тетраэдров, то

$$\sum_{i=1}^4 \sqrt{\frac{s_i}{S_i}} = 1, \quad \sum_{i=1}^4 \sqrt[3]{V_i} = \sqrt[3]{V}.$$

Докажите.

5.7. Дана сфера и две точки  $A$  и  $B$  вне ее. Рассматриваются всевозможные тетраэдры  $ABXY$ , описанные около данной сферы. Докажите, что сумма углов косого четырехугольника  $AXBY$  постоянна.

5.8. Докажите, что для тетраэдра  $ABCD$  имеет место неравенство

$$CD^2 + BC^2 + BD^2 < 4R^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2.$$

5.9. Докажите, что для тетраэдра  $ABCD$  имеет место неравенство:

$$r < \frac{AB \cdot CD}{2(AB + CD)}.$$

5.10. Докажите, что сумма шести углов, под которыми видны ребра тетраэдра из произвольной внутренней точки, больше  $3\pi$ .

5.11. Построены точки, инверсные трем вершинам тетраэдра с центром инверсии в четвертой вершине. Докажите, что углы полученного треугольника не зависят от того, какая вершина является центром инверсии.

5.12. Три грани параллелепипеда принадлежат граням тетраэдра  $ABCD$  объема  $V$ , а точка пересечения трех оставшихся граней этого параллелепипеда лежит в четвертой грани тетраэдра. Найдите максимально возможный объем параллелепипеда.

5.13. Выразите расстояние от вершины тетраэдра до центра вписанной в него сферы через длины ребер и площади граней.

5.14. Выразите длину биссектрисы трехгранного угла тетраэдра через длины его ребер и площади граней.

## Специальные тетраэдры

Тетраэдры частных видов (специальные тетраэдры) естественно обладают всеми свойствами, изложенными в двух предыдущих главах 4 и 5 о произвольных тетраэдрах. Однако на практике приходится использовать ортоцентрический, равногранный, изодинамический, изогональный тетраэдры, а также тетраэдр, имеющий касательную сферу к ребрам, и особенно прямоугольный и правильный. Кратко охарактеризуем эти виды тетраэдров.

### § 36. Замечательные сферы ортоцентрического тетраэдра

В главе 6 (§ 6) тома 2 дано определение ортоцентрического тетраэдра как тетраэдра, имеющего ортоцентр, и доказаны его характеристические свойства: ортогональность противоположных ребер, равенство сумм квадратов их длин, равенство бимедиан, пересечение перпендикуляров к граням в их центроидах, совпадение ортоцентров граней с основаниями соответствующих высот тетраэдра. Продолжим изложение других свойств ортоцентрического тетраэдра.

**36.1. Первая сфера Эйлера<sup>1</sup>.** Во всяком тетраэдре бимедианы пересекаются в центроиде и делятся им пополам. Так как, кроме того, в ортоцентрическом тетраэдре бимедианы равны, то середины всех ребер тетраэдра лежат на одной сфере  $\Phi_1$  с центром в центроиде тетраэдра. Поскольку сфера  $\Phi_1$  содержит середины ребер, то она пересекает грани по окружностям девяти точек этих граней (см. [4] § 6). Поэтому на сфере  $\Phi_1$  лежат шесть оснований высот граней (оснований бивысот) и двенадцать точек, делящих пополам отрезки этих высот от ортоцентров граней до вершин.

Сферу  $\Phi_1$  называют *первой сферой Эйлера*, или *сферой 24 точек* ортоцентрического тетраэдра.

<sup>1</sup>Эйлер Леонард (1707—1783) — выдающийся разносторонний ученый — математик, физик, механик, астроном. Родился в Швейцарии. В 1726—1741 и 1776—1783 годах работал в Петербургской АН, остальное время в Берлине, не прерывая связи с Петербургом. Ему принадлежат более 850 научных работ по труднейшим вопросам математики, физики, навигации. Был одним из творцов современной дифференциальной геометрии

**36.2. Вторая сфера Эйлера.** Приняв ортоцентр  $H$  тетраэдра за начало векторов, рассмотрим точку  $E$ , определяемую вектором

$$\bar{E} = \frac{1}{6}(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4). \quad (6.1)$$

Если  $G_i$  — центроид грани  $\alpha_i$ , то  $\bar{G}_i = \frac{1}{3}(\bar{A}_j + \bar{A}_k + \bar{A}_u)$ . Значит,

$$\overline{EG}_i = \bar{G}_i - \bar{E} = \frac{1}{6}(\bar{A}_j + \bar{A}_k + \bar{A}_u - \bar{A}_i). \quad (6.2)$$

Рассмотрим точки  $D_i$ , делящие отрезки высот тетраэдра от ортоцентра  $H$  до вершин в отношении  $1 : 2$ , считая от ортоцентра. Так как  $\bar{D}_i = \frac{1}{3}\bar{A}_i$ , то

$$\overline{ED}_i = \frac{1}{6}(\bar{A}_i - \bar{A}_j - \bar{A}_k - \bar{A}_u). \quad (6.3)$$

Поскольку  $\bar{A}_i(\bar{A}_j - \bar{A}_k) = 0$  для любой тройки различных индексов  $i, j, k$  (в силу ортогональности  $\overline{HA}_i$  и  $\overline{A_jA_k}$ ), то

$$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_3 = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_4 = \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 = \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_4 = \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4. \quad (6.4)$$

С учетом этих равенств находим:

$$\overline{EG}_i^2 = \overline{ED}_i^2 = \frac{1}{36}l^2, \quad \text{где } l^2 = \bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 + \bar{A}_3^2 + \bar{A}_4^2.$$

Таким образом, восемь точек  $G_i, D_i$  лежат на одной сфере  $\Phi_2$  с центром  $E$  и радиусом  $\rho = \frac{1}{6}l$ .

На сфере  $\Phi_2$  лежат ортоцентры  $H_i$  граней тетраэдра. В самом деле, поскольку  $\overline{EG}_i = -\overline{ED}_i$ , то точки  $G_i$  и  $D_i$  суть диаметрально противоположные точки сферы  $\Phi_2$ . В силу того, что углы  $G_iH_iD_i$  прямые, точки  $H_i$  лежат на этой сфере.

*Итак, центроиды и ортоцентры граней ортоцентрического тетраэдра, а также точки, делящие отрезки высот от ортоцентра тетраэдра до вершин в отношении  $1 : 2$ , лежат на одной сфере, называемой второй сферой Эйлера, или сферой 12 точек ортоцентрического тетраэдра.*

Легко проверить, что вторая сфера Эйлера ортоцентрического тетраэдра гомотетична его описанной сфере при гомотетии с центром в центроиде  $G$  и коэффициентом  $k = -\frac{1}{3}$ .

Заметим, что радиус  $R = \frac{1}{2}l$  описанной сферы втрое больше радиуса второй сферы Эйлера.

**36.3. Третья замечательная сфера.** В ортоцентрическом тетраэдре середины  $U_i$  отрезков от вершин  $A_i$  до ортоцентра  $H$  лежат на сфере  $\Phi_3$  с центром в центроиде тетраэдра и радиусом, равным половине радиуса описанной сферы.

Действительно, при начале  $H$  векторов векторы  $\bar{U}_i$  указанных середин отрезков равны соответственно  $\frac{1}{2}\bar{A}_i$ . Поэтому

$$\overline{GU}_i = \frac{1}{4}(\bar{A}_i - \bar{A}_j - \bar{A}_k - \bar{A}_u),$$

откуда с учетом (6.4) получаем:

$$\overline{GU}_i^2 = \frac{1}{16}(\bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 + \bar{A}_3^2 + \bar{A}_4^2) = \frac{1}{16}l^2.$$

Это и доказывает, что точки  $U_i$  лежат на одной сфере с центром  $G$  и радиусом  $\frac{1}{4}l$ , который равен половине радиуса  $R = \frac{1}{2}l$  описанной сферы.

**36.4. Расположение центров сфер Эйлера.** Если  $O$  — центр описанной сферы, то

$$\begin{aligned}\overline{OH} &= \frac{1}{2}(\overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 + \overline{OA}_3 + \overline{OA}_4), \\ \overline{HO} &= \frac{1}{2}(\overline{HA}_1 + \overline{HA}_2 + \overline{HA}_3 + \overline{HA}_4),\end{aligned}\tag{6.5}$$

(см. [5], с. 109). Отсюда следует, что векторы  $\overline{HO}$ ,  $\overline{HG}$ ,  $\overline{HE}$  коллинеарны. Поэтому ортоцентр  $H$  и центр  $E$  второй сферы Эйлера лежат на прямой  $OG$  Эйлера тетраэдра, причем

$$HE : EG : GO = 2 : 1 : 3,$$

так как

$$\overline{HO} : \overline{HG} : \overline{HE} = \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 6 : 3 : 2.$$

**Следствие.** Ортоцентр тетраэдра совпадает с его точкой Монжа, так как  $G$  — середина  $OH$ .

## § 37. Ортоцентрический тетраэдр с двумя совпавшими вершинами

**37.1. Задание и элементы вырожденного ортоцентрического тетраэдра.** Рассмотрим ортоцентрический тетраэдр  $ABCD$ , у которого вершина  $D$  совпадает с  $C$ . Тогда прямая  $CD$  занимает положение касательной  $t$  в точке  $C$  к описанной сфере, причем прямая  $t$  перпендикулярна  $AB$ . Ребро  $AD$  совпадает с ребром  $AC$ , ребро  $BD$  — с  $BC$ , грань  $ABD$  — с гранью  $ABC$ . Следовательно, ребра  $AC$  и  $BC$  ортогональны.

Поэтому ортоцентрический тетраэдр  $ABCD$  с двумя совпавшими вершинами  $C$  и  $D$  (который мы будем называть вырожденным

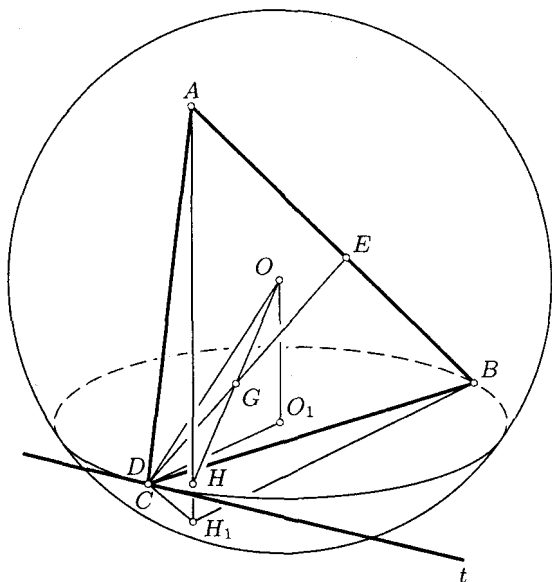


Рис. 48

ортоцентрическим тетраэдром) можно задать как прямоугольный треугольник  $ABC$  с вершинами на данной сфере, причем вершина  $C$  прямого угла считается двойной (рис. 48).

Так как в рассматриваемом тетраэдре  $CD = 0$ ,  $AD = AC$ ,  $BD = BC$ , то равенство сумм квадратов противоположных ребер принимает вид:  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ , что непосредственно видно из прямоугольного треугольника  $ABC$ . Двугранные углы при ребрах  $AC$  и  $AD$ ,  $BC$  и  $BD$  являются соответственно смежными, двугранный угол при ребре  $CD$  является углом между плоскостями  $(BC, t) = \alpha_1$  и  $(AC, t) = \alpha_2$ , а угол при ребре  $AB$  равен нулю. Поэтому  $\cos(AD) = -\cos(AC)$ ,  $\cos(BD) = -\cos(BC)$ ,  $\cos(AB) = 1$  и равенство произведений косинусов противоположных двугранных углов принимает вид:  $-\cos(AC) \cos(BC) = \cos(CD)$ , что находится в соответствии с зависимостью между косинусами двугранных углов триэдра при вершине  $C$ , в котором один плоский угол прямой.

В двух гранях вырожденного ортоцентрического тетраэдра его ребра образуют треугольники, каждый из которых имеет две совпавшие вершины (§ 14). Один из них определяется хордой  $AC$  и касательной  $t$ ,



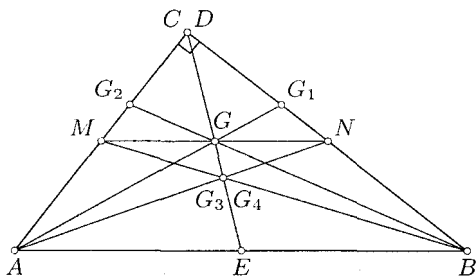


Рис. 49

другой — хордой  $BC$  и касательной  $t$ . Описанными окружностями около этих треугольников являются сечения данной сферы двумя плоскостями  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$ , определяемыми этими двумя парами прямых. Эти окружности имеют общую касательную  $t$  в точке  $C$ .

Одной из бимедиан рассматриваемого тетраэдра служит средняя линия  $MN$  треугольника  $ABC$ , которую надо считать двойной, а второй бимедианой — медианой  $CE$  этого треугольника (рис. 49). Обе они равны половине гипотенузы  $AB$ . Точка  $G$  пересечения  $MN$  и  $CE$  есть *центроид* тетраэдра. При любом начале векторов вектор его равен

$$\vec{G} = \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{A} + \vec{C}}{2} + \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} \right) = \frac{1}{4} (\vec{A} + \vec{B} + 2\vec{C}). \quad (6.6)$$

Это же следует из общей формулы для вектора центроида при  $\vec{C} = \vec{D}$ . Центроиды  $G_i$  граней находятся также в плоскости треугольника  $ABC$  и имеют интересное взаимное расположение с центроидом  $G$ , изображенное на рис. 49.

**37.2. Высоты и ортоцентр.** Перпендикуляр к плоскости  $ABC$  в точке  $C$  суть две совпавшие высоты, две другие — перпендикуляры, проведенные из  $A$  и  $B$  на плоскости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Покажем, что *все высоты пересекаются в одной точке*. Для этого примем за начало векторов центр  $O$  описанной сферы и рассмотрим точку  $H$  с вектором

$$\vec{H} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B} + 2\vec{C}). \quad (6.7)$$

Тогда прямые  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$  будут высотами тетраэдра. В самом деле, векторы  $\vec{CH}$  и  $\vec{BA}$  ортогональны:

$$(\vec{H} - \vec{C})(\vec{A} - \vec{B}) = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})(\vec{A} - \vec{B}) = \frac{1}{2} (\vec{A}^2 - \vec{B}^2) = 0,$$

так как  $\bar{A}^2 = \bar{B}^2 = R^2$ . Векторы  $\overline{CH}$  и  $\overline{CB}$  также ортогональны:

$$\begin{aligned} (\bar{H} - \bar{C})(\bar{B} - \bar{C}) &= \frac{1}{2}(\bar{A} + \bar{B})(\bar{B} - \bar{C}) = \\ &= \frac{1}{2}((\bar{A} - \bar{C}) + (\bar{B} + \bar{C}))(\bar{B} - \bar{C}) = \frac{1}{2}(\bar{A} - \bar{C})(\bar{B} - \bar{C}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\bar{B}^2 - \bar{C}^2) = \frac{1}{2}\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, прямая  $CH$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Далее, рассмотрим прямую  $AH$ . Пусть  $\bar{p}$  — направляющий вектор касательной  $t$ , который поэтому должен удовлетворять условиям:

$$\bar{p} \cdot \bar{C} = 0, \quad \bar{p}(\bar{A} - \bar{B}) = 0.$$

Векторы  $\bar{p}$  и  $\overline{AH}$  ортогональны:

$$\bar{p}(\bar{H} - \bar{A}) = \frac{1}{2}\bar{p}(\bar{B} - \bar{A}) + \bar{p} \cdot \bar{C} = 0.$$

Векторы  $\overline{AH}$  и  $\overline{CB}$  также ортогональны:

$$(\bar{B} - \bar{C})(\bar{H} - \bar{A}) = \frac{1}{2}(\bar{B} - \bar{C})((\bar{C} - \bar{A}) + (\bar{B} + \bar{C})) = 0.$$

Значит,  $AH$  — высота тетраэдра. Аналогично доказывается, что  $BH$  и  $CH$  — также высоты тетраэдра. Итак, высоты вырожденного ортоцентрического тетраэдра пересекаются в ортоцентре  $H$  с вектором (6.7).

Докажем, что основания высот тетраэдра являются ортоцентрами граней. Для высоты  $CH$  это очевидно, ибо  $C$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Рассмотрим грань  $\alpha_1$ . При выбранном начале  $O$  векторов найдем вектор ортоцентра  $H_1$  этой грани. Если  $O_1$  — центр окружности, описанной около вырожденного треугольника  $B_1CD_1$ , то согласно (2.11)  $\overline{O_1H_1} = \overline{O_1B_1} + 2\overline{O_1C_1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \overline{OH_1} &= \overline{OO_1} + \overline{O_1H_1} = \overline{OO_1} + \overline{O_1B_1} + 2\overline{O_1C_1} = \overline{OO_1} + (\overline{O_1O} + \overline{OB_1}) + \\ &\quad + 2(\overline{O_1O} + \overline{OC_1}) = \overline{OB_1} + 2\overline{OC_1} - 2\overline{OO_1}, \end{aligned}$$

или в принятой записи:  $\bar{H}_1 = \bar{B} + 2\bar{C} - 2\bar{O}_1$ . Чтобы убедиться в коллинеарности точек  $A$ ,  $H$ ,  $H_1$ , рассмотрим векторы

$$\bar{H} - \bar{A} = \frac{1}{2}(-\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C}$$

и

$$\bar{H}_1 - \bar{H} = \frac{1}{2}(-\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} - 2\bar{O}_1 = (\bar{H} - \bar{A}) - 2\bar{O}_1.$$

Но векторы  $\bar{H} - \bar{A}$  и  $2\bar{O}_1$  ортогональны плоскости  $\alpha_1$  и поэтому коллинеарны. Следовательно, их разностью является коллинеарный им

вектор, т. е.  $\vec{H} - \vec{A}$  и  $\vec{H}_1 - \vec{H}$  коллинеарны и точки  $A, H, H_1$  лежат на одной прямой. Аналогично доказывается коллинеарность точек  $B, H, H_2$ .

Как видим, для вырожденного ортоцентрического тетраэдра выполняются свойства невырожденного. Однако они нуждаются в специальной проверке. Например, проверка показывает, что существуют три замечательные сферы, рассмотренные в предыдущем параграфе.

## § 38. Свойства равногранного тетраэдра

В главе 6 (§ 7) второго тома были рассмотрены характеристические свойства этого специального тетраэдра, имеющего по определению равные треугольники граней: равенство длин противоположных ребер, совпадение бивысот с соответствующими бимедианами, равновеликость граней, совпадение центра описанной сферы с центроидом.

Рассмотрим другие свойства равногранного тетраэдра *В равногранном и только в равногранном тетраэдре бимедианы попарно ортогональны.*

Действительно, если  $MN$  и  $PQ$  — бимедианы тетраэдра  $ABCD$ , соответствующие парам  $AB$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $AD$  его противоположных ребер, то

$$\begin{aligned} 2\overline{MN} \cdot 2\overline{PQ} &= (\overline{AD} + \overline{BC})(\overline{BA} + \overline{CD}) = \\ &= -\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{DA} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{BA} - \overline{CB} \cdot \overline{CD} = b^2 - b_1^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overline{MN} \cdot \overline{PQ} = 0 \iff b = b_1.$$

Аналогичные зависимости имеют место и для двух других пар бимедиан, откуда и следует доказываемое утверждение.

*В равногранном тетраэдре центр вписанной сферы совпадает с центроидом.* Обратное, если в тетраэдре эти точки совпадают, то он равногранный.

В самом деле, барицентрические координаты центра  $J$  вписанной в тетраэдр сферы пропорциональны площадям его граней (задача 1.2). В равногранном тетраэдре эти площади равны. Следовательно, как для точки  $J$ , так и для центроида  $G$  равногранного тетраэдра  $ABCD$  сумма векторов вершин  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{0}$ . Поэтому эти точки совпадают. Обратное, если точки  $J$  и  $G$  совпадают, то равенства  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{0}$  и  $S_1\vec{A} + S_2\vec{B} + S_3\vec{C} + S_4\vec{D} = \vec{0}$  должны выполняться одновременно, что возможно тогда и только тогда, когда все  $S_i$  равны, т. е. когда тетраэдр равногранный.

Предыдущее рассуждение можно почти дословно повторить для точки Люилле тетраэдра (см. [5], с. 172), барицентрические координаты которой пропорциональны квадратам  $S_i^2$  площадей граней тетраэдра. Это значит, что в равногранном и только в равногранном тетраэдре точка Люилле совпадает с центроидом.

Точка  $\Omega$  Монжа тетраэдра симметрична центру  $O$  описанной сферы относительно центроида  $G$ . При совпадении точек  $O$  и  $G$  она будет совпадать с ними.

Итак, в равногранном тетраэдре совпадают между собой пять замечательных точек: центры вписанной и описанной сфер, центроид, точка Люилле и точка Монжа. Обратное, при совпадении каких-либо двух из них тетраэдр является равногранным.

### § 39. Замечательные сферы равногранного тетраэдра

**39.1. Лемма.** В равногранном тетраэдре основание  $N_i$  высоты симметрично ортоцентру  $H_i$  грани  $\alpha_i$  относительно центра  $O_i$  описанной около этой грани окружности ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Действительно, поскольку центроид  $G$  совпадает с центром  $O$  описанной сферы, то его ортогональной проекцией на плоскость  $\alpha_i$  является центр  $O_i$  описанной около грани окружности (рис. 50). Из треугольника  $A_i N_i G_i$  по теореме Фалеса имеем:  $\overline{N_i O_i} = 3\overline{O_i G_i}$ . С другой стороны, во всяком треугольнике  $\overline{H_i O_i} = 3\overline{G_i O_i}$ . Из последних двух соотношений следует требуемое:  $\overline{N_i O_i} = \overline{O_i H_i}$ .

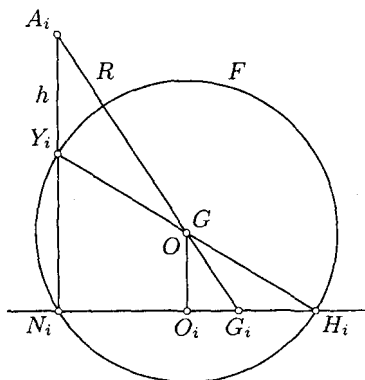


Рис. 50

**39.2. Сфера двенадцати точек.** На основании леммы ортоцентр грани и основание соответственной высоты тетраэдра равноудалены от центроида равногранного тетраэдра. Так как центроид, совпадающий с центром вписанной сферы, равноудален от граней, то в силу равенства граней основания всех высот и ортоцентры всех граней равноудалены от центроида тетраэдра. Иначе говоря, *в равногранном тетраэдре основания высот и ортоцентры граней лежат на одной сфере  $F$  с центром в центроиде тетраэдра.*

Докажем, что на сфере  $F$  лежат середины высот тетраэдра. Пусть прямая  $H_iG$  пересекает высоту  $A_iN_i$  тетраэдра в точке  $Y_i$ . Эта точка является серединой высоты  $A_iN_i$ . В самом деле, из равенства

$$r = \frac{3V}{4S} = \frac{h}{4} = GO_i,$$

где  $h$  — длина каждой высоты,  $S$  — площадь каждой грани тетраэдра имеем:

$$h = 4r. \quad (6.8)$$

Из подобия треугольников  $Y_iN_iH_i$  и  $GO_iH_i$ , учитывая лемму, получаем  $Y_iN_i = 2r = \frac{1}{2}h$ , т. е.  $Y_iG = GH_i$ , и поэтому  $Y_i$  лежит на сфере  $F$ .

Итак, *в равногранном тетраэдре ортоцентры граней, основания и середины высот тетраэдра принадлежат одной сфере с центром в центроиде тетраэдра, называемой сферой двенадцати точек равногранного тетраэдра.*

Вычислим радиус  $l$  этой сферы:

$$\begin{aligned} l^2 &= GH_i^2 = GO_i^2 + O_iH_i^2 = GO_i^2 + 9G_iO_i^2 = 9(GO_i^2 + G_iO_i^2) - 8GO_i^2 = \\ &= 9GG_i^2 - 8GO_i^2 = GA_i^2 - 8GO_i^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$l^2 = R^2 - 8r^2. \quad (6.9)$$

**39.3. Вневыписанные сферы.** В равногранном тетраэдре не существует вневыписанных сфер второго рода (см. [5], с. 107). Четыре вневыписанные сферы ( $J_i$ ) первого рода имеют равные радиусы

$$r_i = \frac{3V}{2S},$$

равные удвоенному радиусу вписанной сферы и половине высоты тетраэдра.

**Теорема.** *Точки касания  $D_i$  вневыписанных сфер ( $J_i$ ) с соответственными гранями  $\alpha_i$  равногранного тетраэдра являются ортоцентрами этих граней.*

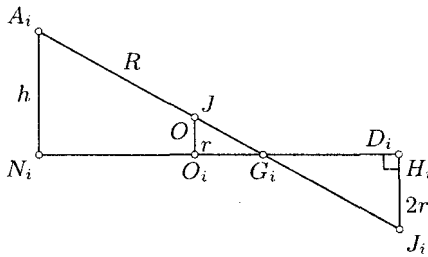


Рис. 51

Действительно, прямая  $JJ_i$  проходит через вершину  $A_i$ , так как является линией пересечения трех биссекторных плоскостей триэдра с вершиной  $A_i$ . Эта прямая проходит через центроид  $G_i$  грани  $\alpha_i$ , так как  $J$  совпадает с  $G$  (рис. 51). Из подобия треугольничков  $JO_iG_i$  и  $J_iD_iG_i$  имеем:  $\frac{\overline{O_iG_i}}{\overline{G_iD_i}} = \frac{JO_i}{J_iD_i} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$ , откуда  $\overline{G_iD_i} = 2\overline{O_iG_i}$ .

С другой стороны, по лемме этого параграфа  $\overline{G_iH_i} = 2\overline{O_iG_i}$ . Следовательно, точки  $D_i$  и  $H_i$  совпадают.  $\square$

Далее, так как центр  $O$  описанной сферы совпадает с центроидом  $G$ , поэтому из тех же треугольников получаем  $\frac{OG_i}{G_iJ_i} = \frac{1}{2}$ , откуда  $OA_i = OJ_i$ .

Итак, центры четырех вневписанных сфер равногранного тетраэдра лежат на описанной сфере и диаметрально противоположны вершинам тетраэдра.

Следовательно, центры вневписанных сфер равногранного тетраэдра являются вершинами описанного около него параллелепипеда, которые не принадлежат этому тетраэдру.

**Теорема.** Двенадцать точек касания  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$  при  $i \neq j$ ) вневписанных сфер ( $J_i$ ) с плоскостями граней  $\alpha_i$  равногранного тетраэдра лежат на описанной около него сфере.

В самом деле (рис. 52),

$$\frac{A_iD_{ij}}{A_iO_j} = \frac{J_iD_{ij}}{JO_j} = 2, \quad A_iD_{ij} = 2A_iO_j,$$

где  $O_j$  — центр окружности, описанной около треугольника  $A_iA_kA_u$ . Поэтому точка  $D_{ij}$  лежит на этой окружности, а значит, и на описанной сфере.

Итак, сфера, описанная около равногранного тетраэдра, содержит четыре центра

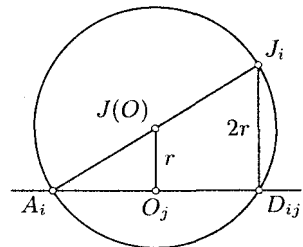


Рис. 52

вневписанных сфер и двенадцать точек касания этих сфер с плоскостями несоответственных им граней тетраэдра.

Интересен еще один замечательный факт. Описанная около равногранного тетраэдра сфера пересекает вневписанные сферы под равными углами  $\varphi$ , для которых  $\cos \varphi = \frac{r}{R}$ .

Действительно, угол пересечения описанной сферы с вневписанной равен углу пересечения грани тетраэдра с описанной сферой, а этот угол измеряется углом между перпендикулярами соответственно к грани и к описанной сфере, т. е. между прямыми  $JO_j$  и  $JA_i$ . Из треугольника  $JA_iO_j$  находим

$$\cos \varphi = \frac{r}{R}.$$

## § 40. Квазиописанный тетраэдр

**40.1. Критерий существования сферы, касающейся ребер тетраэдра.** Найдем необходимые и достаточные условия, при которых существует сфера ( $S$ ), касающаяся всех ребер тетраэдра  $ABCD$  в их внутренних точках. Такую сферу будем называть квазивиписанной в данный тетраэдр, а тетраэдр — квазиописанным около нее.

Пусть данный тетраэдр  $ABCD$  имеет квазивиписанную сферу ( $S$ ). Обозначим точки касания сферы с ребрами  $BC, CA, AB, AD, BD, CD$  соответственно  $A_1, B_1, C_1, D_1, D_2, D_3$ , а  $l_i$  — длины отрезков касательных вершин от тетраэдра до точек касания (рис. 53). Учитывая равенство этих отрезков при каждой вершине, находим:

$$a + a_1 = b + b_1 = c + c_1 = l_1 + l_2 + l_3 + l_4. \quad (6.10)$$

где  $a$  и  $a_1$ ,  $b$  и  $b_1$ ,  $c$  и  $c_1$  — длины противоположных ребер тетраэдра. Таким образом, равенство сумм длин противоположных ребер является необходимым условием существования квазивиписанной в тетраэдр сферы.

Условие (6.10) является и достаточным, для того, чтобы такая сфера существовала. Действительно, пусть окружности, вписанные, например, в треугольники  $ABC$  и  $ABD$ , касаются отрезка  $AB$  соответственно в точках  $C_1$  и  $C'_1$ . Тогда из указанных треугольников имеем:

$$BC_1 = \frac{1}{2}(a_1 + c_1 - b_1) \quad \text{и} \quad BC'_1 = \frac{1}{2}(b + c_1 - a).$$

В силу равенств (6.10)  $a_1 - b_1 = b - a$ , поэтому  $BC_1 = BC'_1$  и значит, точки  $C_1$  и  $C'_1$  совпадают. Оси рассматриваемых окружностей (перпендикуляры в центрах к их плоскостям) пересекаются в некоторой точке  $S$ , являющейся центром сферы, которая, следовательно, касается

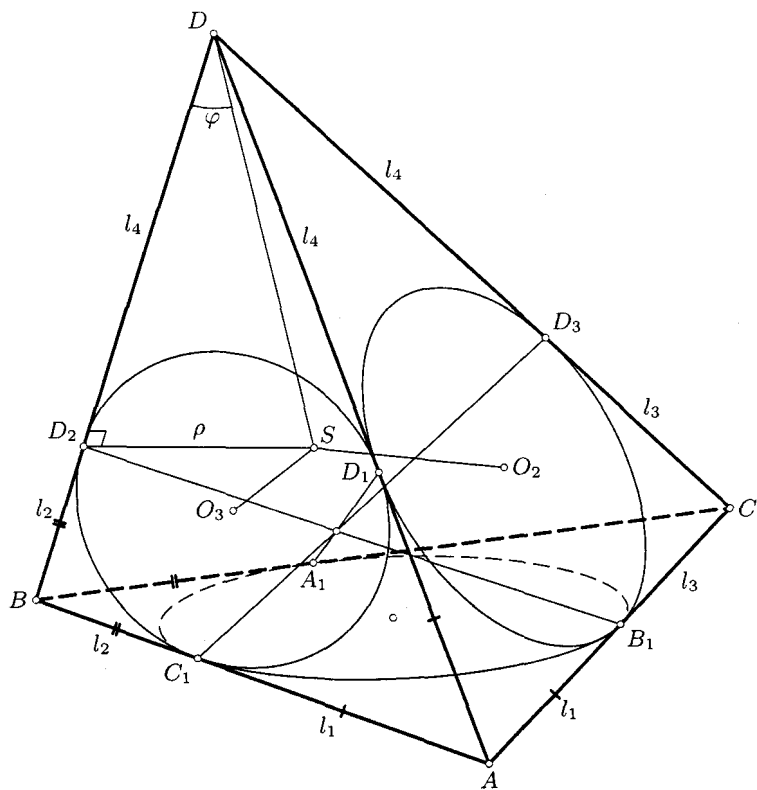


Рис. 53

пяти ребер тетраэдра, кроме ребра  $CD$  и на которой, понятно, лежат эти окружности. На равных основаниях, окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ACD$ , принадлежат одной сфере, касающейся ребра  $AC$  в точке  $B_1$ . Эти две сферы имеют общую окружность, вписанную в треугольник  $ABC$ , и общую точку  $D_1$  вне этой окружности и поэтому совпадают. Полученная сфера касается всех ребер тетраэдра во внутренних точках.

Итак, для того, чтобы существовала квазивписанная в тетраэдр сфера необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных ребер были равны.

Тетраэдр, имеющий квазивписанную в него сферу, будем называть квазиописанным. Примером квазиописанного тетраэдра является правильная треугольная пирамида.



**40.2. Свойства квазиописанного тетраэдра.** Из предыдущего доказательства характеристического свойства (6.10) квазиописанного тетраэдра непосредственно вытекают следующие следствия.

1. Центр  $S$  квазивиписанной сферы равноудален от ребер тетраэдра и потому является точкой пересечения осей круговых конусов, описанных около его триэдров. Значит, для существования квазивиписанной в тетраэдр сферы необходимо и достаточно, чтобы оси круговых конусов, описанных около трехгранных углов тетраэдра, пересекались в одной точке.

2. Центр квазивиписанной сферы является точкой пересечения осей четырех окружностей, вписанных в грани тетраэдра. Следовательно, для существования квазивиписанной сферы необходимо и достаточно, чтобы оси окружностей, вписанных в грани тетраэдра, пересекались в одной точке.

3. В квазиописанном тетраэдре суммы противоположных двугранных углов равны.

Для доказательства рассмотрим трехгранный угол  $D(SD_1D_2)$ . В силу симметрии его двугранные углы при ребрах  $DD_1$  и  $DD_2$  равны. Поэтому равны и суммы противоположных углов данного тетраэдра, так как они состоят из четырех попарно равных частей.

4. Прямые, соединяющие точки касания противоположных ребер квазиописанного тетраэдра со сферой ( $S$ ), пересекаются в одной точке.

В самом деле, для косоугольного тетраэдра  $ABCD$

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CD_3}{D_3D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{l_3}{l_4} \cdot \frac{l_4}{l_1} = 1.$$

По теореме Менелая точки  $C_1, A_1, D_3, D_1$  лежат в одной плоскости. Значит, прямые  $A_1D_1$  и  $C_1D_3$  пересекаются. Аналогично пересекаются любые две из рассматриваемых трех прямых. Поскольку они в одной плоскости лежать не могут, то они пересекаются в одной точке.

Заметим попутно, что четырехугольник  $A_1C_1D_1D_3$  является вписанным и центр квазивиписанной сферы лежит на окружности, описанной около этого четырехугольника.

5. Плоскости, проходящие через ребра тетраэдра и касающиеся его квазивиписанной сферы, пересекают противоположные ребра в шести компланарных точках. Они лежат в полярной плоскости точки пересечения прямых  $A_1D_1, B_1D_2, C_1D_3$  относительно квазивиписанной сферы.

Доказательство опускаем.

6. Радиус  $\rho$  квазивиписанной сферы тетраэдра равен:

$$\rho = \frac{2l_1l_2l_3l_4}{3V}. \quad (6.11)$$

Доказательство. Из треугольника  $ADB$

$$\cos ADB = \frac{a^2 + b^2 - c_1^2}{2ab} = \frac{(l_1 + l_4)^2 + (l_2 + l_4)^2 - (l_1 + l_2)^2}{2ab} = 1 - \frac{2l_1l_2}{ab},$$

откуда

$$\sin^2 \frac{ADB}{2} = \frac{l_1l_2}{ab}.$$

Аналогично

$$\sin^2 \frac{BDC}{2} = \frac{l_2l_3}{bc}, \quad \sin^2 \frac{CDA}{2} = \frac{l_1l_3}{ac}.$$

Из прямоугольного треугольника  $DD_1S$  находим  $\rho = l_4 \operatorname{tg} \varphi$ , где  $\varphi$  — угол, образованный осью  $DS$  конуса, описанного около триэдра  $D(ABC)$ , с его ребрами. Используем выражение  $\operatorname{tg} \varphi$  через плоские углы этого триэдра (см. [8], с. 64), согласно которому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4 \sin \frac{ADB}{2} \sin \frac{BDC}{2} \sin \frac{CDA}{2}}{\Delta(D)} = \frac{4l_1l_2l_3}{abc\Delta(D)}. \quad (6.12)$$

Так как по формуле Штаудта  $abc\Delta(D) = 6V$ , то получаем окончательно требуемое выражение (6.11).  $\square$

## § 41. Квазивневписанные сферы

Выясним, при каких условиях существуют другие сферы, касающиеся всех ребер тетраэдра. Пусть сфера  $(\Gamma_1)$  касается ребер грани  $BDC$  тетраэдра  $ABCD$  во внутренних точках и продолжений отрезков  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  за вершины  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Используем прежние обозначения точек касания (рис. 53). В данном случае имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} AC_1 - BC_1 &= c_1, & AB_1 - CB_1 &= b_1, \\ AD_1 - DD_1 &= a, & BA_1 + A_1C &= a_1, \\ BD_2 + D_2D &= b, & CD_3 + D_3D &= c. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$c_1 - c = b_1 - b = a - a_1. \quad (6.13)$$

Аналогично этому, если существуют сферы  $(\Gamma_2)$ ,  $(\Gamma_3)$ ,  $(\Gamma_4)$  (не обязательно одновременно), касающиеся соответственно ребер граней  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  во внутренних точках и продолжений остальных ребер за вершины этих граней, то имеют место зависимости:

$$c_1 - c = a_1 - a = b - b_1, \quad (6.14)$$

$$b_1 - b = a_1 - a = c - c_1, \quad (6.15)$$

$$a - a_1 = b - b_1 = c - c_1, \quad (6.16)$$

Подобно пункту 40.1 можно доказать, что эти условия являются также достаточными для существования указанных сфер.

Сферу ( $\Gamma_i$ ), касающуюся ребер грани  $\alpha_i$  во внутренних точках и остальных ребер — во внешних, назовем *квазивневписанной* в данный тетраэдр сферой относительно его вершины, не принадлежащей грани  $\alpha_i$ .

Исследуем вопрос, сколько сфер, касательных к ребрам тетраэдра может существовать одновременно. Пусть выполняется одновременно условие (6.10) и одно из последних четырех условий, например, (6.13). Тогда сложением и вычитанием этих равенств получим:

$$a = b_1 = c_1, \quad a_1 = b = c,$$

т. е. тетраэдр является правильной треугольной пирамидой.

Если выполняется одновременно условие (6.10) и любые два из условий (6.13)—(6.16), то тетраэдр является правильным и, следовательно, выполняются и другие два из последних условий. Обратно, если тетраэдр правильный, то выполнение всех пяти соотношений (6.10) и (6.13)—(6.16) очевидно.

Итак, *правильный тетраэдр, и только он, имеет пять квазивневписанных сфер.*

Наконец, если имеют место одновременно два из соотношений (6.13)—(6.16), то противоположные ребра тетраэдра равны, т. е. тетраэдр является равногранным. Тогда и другие два из этих условий выполняются, но (6.10), вообще говоря, не выполняется. Обратно, для равногранного тетраэдра соотношения (6.13)—(6.16) имеют место, но (6.10) не выполняется.

Таким образом, *равногранный тетраэдр, и только он, имеет четыре квазивневписанные сферы.*

Следовательно, может существовать 1, 2, 4, 5 сфер, касающихся ребер тетраэдра. Случай существования только трех таких сфер невозможен.

## § 42. Изодинамический тетраэдр

**42.1. Определение и характеристические свойства изодинамического тетраэдра.** Тетраэдр, в котором равны произведения длин противоположных ребер:

$$aa_1 = bb_1 = cc_1, \tag{6.17}$$

называется *изодинамическим*.

Из этого определения и третьей теоремы синусов для тетраэдра следует, что соотношения (6.17) эквивалентны равенствам произведений

синусов противоположных двугранных углов тетраэдра:

$$\sin(AB) \cdot \sin(CD) = \sin(BC) \cdot \sin(AD) = \sin(CA) \cdot \sin(BD), \quad (6.18)$$

а вследствие (5.15) соотношения (6.17) эквивалентны также следующим:

$$\delta_1 \sin \beta_1 = \delta_2 \sin \beta_2 = \delta_3 \sin \beta_3. \quad (6.19)$$

где  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  — длины бивысот, а  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  — углы между скрещивающимися ребрами тетраэдра  $ABCD$  (см. п. 33.1) Из (5.14) и (6.17) получаем:

$$\cos \beta_1 + \cos \beta_2 + \cos \beta_3 = 0. \quad (6.20)$$

Все приведенные зависимости являются *характеристическими* для изодинамического тетраэдра. Дополним их еще одним критерием изодинамического тетраэдра.

*В изодинамическом и только в таком тетраэдре пересекаются в одной точке прямые, каждая из которых соединяет вершину тетраэдра с центром окружности, вписанной в противоположную грань.*

**Доказательство.** Пусть в тетраэдре  $ABCD$  окружности, вписанные соответственно в треугольники  $ABC$  и  $ABD$ , касаются их общего ребра  $AB$  в точках  $C_1$  и  $D_1$ . По свойству биссектрис углов треугольника  $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b_1}{a_1}$  и  $\frac{AD_1}{D_1B} = \frac{a}{b}$ . В силу (6.17)  $\frac{b_1}{a_1} = \frac{a}{b}$ , т. е. точки  $C_1$  и  $D_1$  совпадают, поэтому прямые  $CJ_3$  и  $DJ_4$  пересекаются. Указанные в условии четыре прямые попарно пересекаются, значит, они пересекаются в одной точке, поскольку в одной плоскости лежать не могут. Истинность обратного утверждения ясна из доказательства.  $\square$

#### 42.2. Свойства точки Лемуана изодинамического тетраэдра.

В § 31 дано определение и найдены барицентрические координаты (5.2) и (5.3) точки  $K$  Лемуана произвольного тетраэдра. Для изодинамического тетраэдра эта точка обладает новыми замечательными свойствами.

*Точки  $U_i$  (5.1) пересечения прямых, соединяющих вершины изодинамического тетраэдра с его точкой  $K$  Лемуана, с противоположными гранями являются точками  $K_i$  Лемуана этих граней.*

Действительно, например, для точки  $U_4$  в грани  $ABC$  изодинамического тетраэдра  $ABCD$  имеем

$$a_1bc : ab_1c : abc_1 : 0 = \frac{a_1}{a} : \frac{b_1}{b} : \frac{c_1}{c} : 0.$$

Согласно (6.17)  $a = \frac{k}{a_1}$ ,  $b = \frac{k}{b_1}$ ,  $c = \frac{k}{c_1}$ , поэтому ненормированные  $B$ -координаты точки  $U_4$  равны

$$\frac{a_1^2}{k} : \frac{b_1^2}{k} : \frac{c_1^2}{k} = a_1^2 : b_1^2 : c_1^2.$$

Следовательно, точка  $U_4$  совпадает с точкой Лемуана треугольника  $ABC$  (см. п. 10.2).

**Следствие.** Тетраэдр  $K_1K_2K_3K_4$  с вершинами в точках Лемуана граней изодинамического тетраэдра  $ABCD$  гомологичен тетраэдру  $ABCD$  относительно его точки  $K$  Лемуана. Обратно, если прямые, соединяющие вершины тетраэдра  $ABCD$  с точками Лемуана противоположных граней, пересекаются в одной точке, то тетраэдр  $ABCD$  изодинамический.

Докажем, что точка Лемуана изодинамического тетраэдра является центром гомологии этого тетраэдра и его тангенциального тетраэдра.

Согласно п. 28.2 всякий тетраэдр гиперболоidalен со своим тангенциальным. При этом секущими прямыми их гиперболической четверки прямых являются оси круговых конусов, вписанных в трехгранные углы тангенциального тетраэдра. По свойству точки Лемуана треугольника (п. 10.2) они пересекают грани  $\alpha_i$  данного тетраэдра  $ABCD$  в точках Лемуана граней. Если тетраэдр  $ABCD$  изодинамический, то эти прямые пересекаются в одной точке — точке Лемуана тетраэдра  $ABCD$ .

**42.3. Построение изодинамического тетраэдра.** Инверсия относительно произвольной сферы с центром в вершине изодинамического тетраэдра отображает вершины противоположащей ей грани в вершины правильного треугольника.

Действительно, образами вершин  $A, B, C$  изодинамического тетраэдра  $ABCD$  при инверсии с центром  $D$  являются точки  $P_1, P_2, P_3$ , и при этом, согласно (4.31)

$$\frac{P_2P_3}{aa_1} = \frac{P_3P_1}{bb_1} = \frac{P_1P_2}{cc_1} = \frac{s}{abc}.$$

На основании (6.17) получим

$$P_2P_3 = P_3P_1 = P_1P_2.$$

Обратно, если преобразовать вершины правильного треугольника  $P_1P_2P_3$  инверсией относительно сферы, центр которой не принадлежит плоскости треугольника, то полученные точки  $A, B, C$  и центр  $D$  инверсии образуют изодинамический тетраэдр.

В самом деле, по свойствам инверсии

$$AB = P_1P_2 \cdot \frac{s}{DP_1 \cdot DP_2}, \quad AC = P_1P_3 \cdot \frac{s}{DP_1 \cdot DP_3}, \quad BC = P_2P_3 \cdot \frac{s}{DP_2 \cdot DP_3}$$

и

$$DP_1 \cdot DA = DP_2 \cdot DB = DP_3 \cdot DC = s.$$

Так как по условию

$$P_1P_2 = P_1P_3 = P_2P_3,$$

то выполнение равенств (6.1) проверяется без труда.

Доказанное свойство позволяет просто построить изодинамический тетраэдр.

### § 43. Замечательные сферы изодинамического тетраэдра

**43.1. Геометрическое место вершин изодинамического тетраэдра, три из которых заданы.** Найдем множество всех точек  $M$ , каждая из которых вместе с тремя данными точками  $A, B, C$  образует изодинамический тетраэдр. Для этого должны выполняться условия:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{MB}{MC} = \frac{c_1}{b_1}.$$

Множество всех точек пространства, удовлетворяющих первому условию, есть сфера Аполлония, построенная для отрезка  $AB$  и отношения  $\frac{b_1}{a_1}$ , (см. [5], с. 70). Диаметром ее служит отрезок прямой  $AB$ , заключенный между основаниями биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине  $C$  треугольника  $ABC$ . Так как точка  $C$  удовлетворяет рассматриваемому соотношению, то эта сфера Аполлония проходит через нее. Множеством всех точек  $M$ , удовлетворяющих второму соотношению, является аналогичная сфера Аполлония, построенная для отрезка  $BC$  и отношения  $\frac{c_1}{b_1}$  и проходящая через  $A$ . Каждая из этих сфер проходит через внутреннюю точку другой, и потому они пересекаются по окружности, которая и является искомым множеством точек.

Итак, *геометрическим местом точек, каждая из которых образует с тремя данными точками изодинамический тетраэдр, есть окружность*. Плоскость этой окружности перпендикулярна плоскости трех данных точек.

**Следствие.** *Указанная окружность есть множество всех центров инверсий, преобразующих вершины данного треугольника в вершины правильного треугольника.*

**43.2. Сферы Аполлония.** Если дан изодинамический тетраэдр  $ABCD$ , то на каждом из шести его ребер можно построить по сфере Аполлония соответственно отношениям ребер: для ребра  $AB$  и отношения  $\frac{a}{b} = \frac{b_1}{a_1}$ , для ребра  $BC$  и отношения  $\frac{b}{c} = \frac{c_1}{b_1}$ , для ребра  $CD$

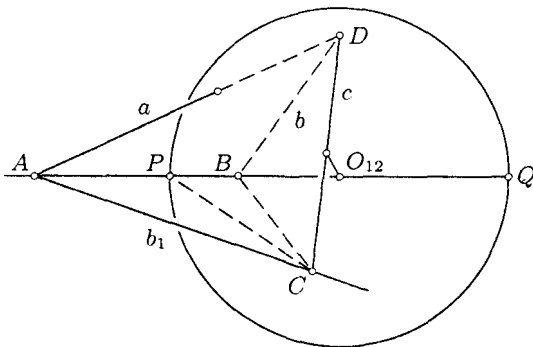


Рис. 54

и отношения  $\frac{b_1}{a} = \frac{a_1}{b}, \dots$ . Эти шесть сфер называются *сферами Аполлония* изодинамического тетраэдра (рис. 54). Каждая из них имеет центр  $O_{ij}$  на ребре тетраэдра и проходит через вершины противоположного ребра. Следовательно, *центры сфер Аполлония изодинамического тетраэдра суть точки пересечения каждого ребра плоскостью, перпендикулярной противоположному ребру и проходящей через его середину*.

Найдем барицентрические координаты центров сфер Аполлония. Для определенности рассмотрим сферу Аполлония для ребра  $AB$  и отношения  $\lambda = \frac{a}{b}$ . Точки  $P$  и  $Q$ , делящие отрезок  $AB$  в отношениях  $\lambda$  и  $-\lambda$ , имеют барицентрические координаты относительно данного тетраэдра соответственно  $P\left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0, 0\right)$  и  $Q\left(\frac{-b}{a-b}, \frac{a}{a-b}, 0, 0\right)$ . Поэтому середина  $O_{12}$  отрезка  $PQ$  имеет координаты  $O_{12}\left(\frac{-b^2}{a^2-b^2}, \frac{a^2}{a^2-b^2}, 0, 0\right)$ . Аналогично находятся координаты других центров  $O_{ij}$ .

Докажем, что *шесть центров  $O_{ij}$  сфер Аполлония изодинамического тетраэдра лежат в полярной плоскости точки К Лемуана относительно этого тетраэдра* (п. 20.3).

Эта плоскость имеет уравнение (4.2), где  $\lambda_i$  — барицентрические координаты (5.2) точки Лемуана:

$$\frac{x_1}{a_1bc} + \frac{x_2}{ab_1c} + \frac{x_3}{abc_1} + \frac{x_4}{a_1b_1c_1} = 0. \quad (6.21)$$

С учетом характеристических условий (6.17) это уравнение удовлетворяется координатами каждой из точек  $O_{ij}$ . Например, для точки  $O_{12}$ :

$$\frac{-b^2}{(a^2-b^2)a_1bc} + \frac{a^2}{(a^2-b^2)ab_1c} + 0 + 0 = \frac{1}{(a^2-b^2)c} \left( \frac{a}{b_1} - \frac{b}{a_1} \right) = 0.$$

Полярная плоскость точки Лемуана изодинамического тетраэдра называется *плоскостью Лемуана* этого тетраэдра.

Итак, *центры шести сфер Аполлония изодинамического тетраэдра лежат в его плоскости Лемуана и являются вершинами полного четырехсторонника, полученного при пересечении тетраэдра этой плоскостью*. Они являются также точками пересечения соответственных ребер данного изодинамического тетраэдра и его тангенциального тетраэдра.

Отметим без доказательства, что *сферы Аполлония изодинамического тетраэдра ортогональны его описанной сфере*.

**43.3. Сферы Лемуана.** С точкой Лемуана изодинамического тетраэдра связаны три его замечательные сферы.

1) Плоскости, проведенные через точку  $K$  Лемуана параллельно граням изодинамического тетраэдра, пересекают его ребра в 12 точках, принадлежащих одной сфере, центр которой делит отрезок  $OK$  в отношении 1:2. Эта сфера называется *первой сферой Лемуана*.

2) Прямые, проведенные через точку  $K$  параллельно ребрам изодинамического тетраэдра, пересекают его грани в 12 точках, лежащих на одной сфере, называемой *второй сферой Лемуана*. Центр этой сферы делит  $OK$  в отношении 2:1.

3) Антипараллельные сечения изодинамического тетраэдра, проходящие через точку  $K$ , равны между собой и вписаны в одну сферу с центром  $K$  (*третья сфера Лемуана*).

Доказательства этих утверждений опускаются. При желании читатель может получить их самостоятельно.

## § 44. Изогональный тетраэдр

**44.1. Определение и характеристическое свойство изогонального тетраэдра.** Тетраэдр, в котором пересекаются в одной точке прямые, соединяющие его вершины с точками касания противоположных граней с вписанной сферой, называется *изогональным*.

По доказанному в п. 42.2 тангенциальный тетраэдр изодинамического тетраэдра является изогональным и обратно, всякий изогональный тетраэдр является тангенциальным тетраэдром изодинамического тетраэдра.

Рассмотрим одно характеристическое свойство изогонального тетраэдра. Пусть дан изогональный тетраэдр  $ABCD$ . Из центра  $J$  вписанной в него сферы опустим перпендикуляры  $JC_1$ ,  $JD_1$ ,  $JN$  на грани  $ABD$  и  $ABC$  и на ребро  $AB$ , по которому они пересекаются (рис. 55).



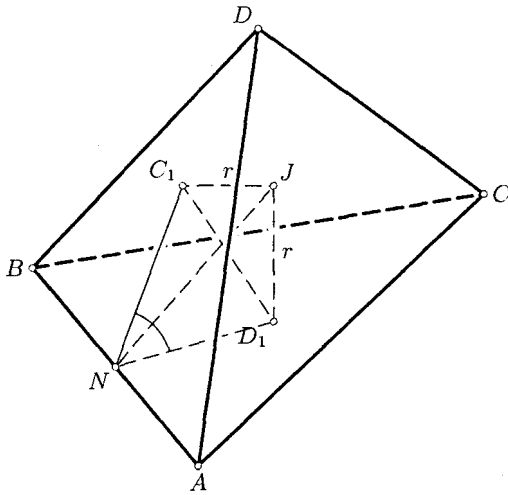


Рис. 55

Из прямоугольного треугольника  $JD_1N$  находим, что

$$\frac{1}{2}C_1D_1 = r \cos \frac{(AB)}{2},$$

где  $r$  — радиус вписанной сферы. Следовательно,

$$C_1D_1 = 2r \cos \frac{(AB)}{2}. \quad (6.22)$$

Тетраэдр  $A_1B_1C_1D_1$  с вершинами в точках касания вписанной сферы является изодинамическим. Поэтому для него имеет место соотношение (6.17):

$$D_1A_1 \cdot B_1C_1 = D_1B_1 \cdot C_1A_1 = D_1C_1 \cdot A_1B_1. \quad (6.23)$$

Подстановкой (6.22) и ей аналогичными получаем соотношение для данного изогонального тетраэдра:

$$\cos \frac{(AB)}{2} \cos \frac{(CD)}{2} = \cos \frac{(BC)}{2} \cos \frac{(AD)}{2} = \cos \frac{(CA)}{2} \cos \frac{(BD)}{2}. \quad (6.24)$$

Обратно, если выполняются условия (6.24) для тетраэдра  $ABCD$ , то в силу зависимостей вида (6.22) выполняется соотношение (6.23) для тетраэдра  $A_1B_1C_1D_1$ , который будет, следовательно, изодинамическим, а тетраэдр  $ABCD$  — изогональным.

Итак, соотношение (6.24) между косинусами половин двугранных углов является характеристическим для изогонального тетраэдра.

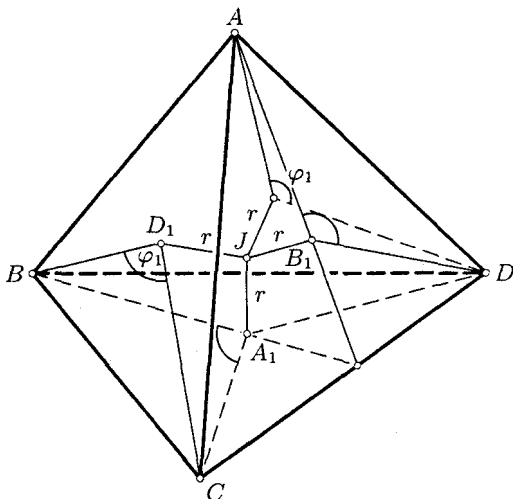


Рис. 56

**44.2. Свойство точек касания вписанной сферы.** В каждой грани тетраэдра  $ABCD$  соединим точку касания вписанной сферы с тремя вершинами этой грани (рис. 56). Для углов, образованных при точке касания в каждой грани, имеем следующие очевидные равенства:

$$\begin{aligned} \widehat{CA_1D} + \widehat{BA_1D} + \widehat{BA_1C} &= 2\pi, \\ \widehat{CB_1D} + \widehat{AB_1D} + \widehat{AB_1C} &= 2\pi, \\ \widehat{BC_1D} + \widehat{AC_1D} + \widehat{AC_1B} &= 2\pi, \\ \widehat{BD_1C} + \widehat{AD_1B} + \widehat{AD_1C} &= 2\pi. \end{aligned}$$

В силу симметрии относительно биссекторных плоскостей двугранных углов тетраэдра из полученных 12 углов в гранях будут равными

$$\begin{aligned} \widehat{BD_1C} &= \widehat{BA_1C}, & \widehat{CB_1D} &= \widehat{CA_1D}, \\ \widehat{AC_1D} &= \widehat{AB_1D}, & \widehat{AD_1B} &= \widehat{AC_1B}, \\ \widehat{AB_1C} &= \widehat{AD_1C}, & \widehat{BC_1D} &= \widehat{BA_1D}. \end{aligned}$$

Учитывая это, приравняем левые части первого и второго, третьего и четвертого предыдущих равенств. После почленного сложения двух новых равенств получим:  $\widehat{BA_1D} = \widehat{AB_1C}$ . Этим же путем приходим еще

к двум соотношениям:  $\widehat{BA_1C} = \widehat{AB_1D}$  и  $\widehat{CA_1D} = \widehat{AC_1B}$ . Обозначим

$$\begin{aligned}\widehat{BA_1C} &= \widehat{BD_1C} = \widehat{AC_1D} = \widehat{AB_1D} = \varphi_1, \\ \widehat{AD_1B} &= \widehat{AC_1B} = \widehat{CB_1D} = \widehat{CA_1D} = \varphi_2, \\ \widehat{AB_1C} &= \widehat{AD_1C} = \widehat{BA_1D} = \widehat{BC_1D} = \varphi_3.\end{aligned}$$

Таким образом, из 12 рассматриваемых углов различными оказываются, только три угла  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

Прямые  $AB_1$  и  $BA_1$  пересекаются на ребре  $CD$ . Это значит, что

$$S_{ACB_1} : S_{ADB_1} = S_{BCA_1} : S_{BDA_1}. \quad (6.25)$$

Отсюда находим:

$$(AB_1 \cdot CB_1 \sin \varphi_2)(BA_1 \cdot DA_1 \sin \varphi_2) = (AB_1 \cdot DB_1 \sin \varphi_1)(BA_1 \cdot CA_1 \sin \varphi_1).$$

Но  $CA_1 = CB_1 = CD_1$ ,  $DA_1 = DB_1 = DC_1$  как отрезки касательных к сфере, выходящих из одной точки. Следовательно,  $\sin^2 \varphi_1 = \sin^2 \varphi_2$  и либо  $\varphi_1 = \varphi_2$ , либо  $\varphi_1 = \pi - \varphi_2$ . Но последнее равенство не может иметь места, так как точки касания являются внутренними точками граней и если бы  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ , то  $\varphi_3 = \pi$ , что невозможно. Итак,  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Аналогично доказываем, что  $\varphi_1 = \varphi_3$ , и поэтому

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 120^\circ.$$

Известно (см. [3], с. 144), что если каждый угол треугольника меньше  $120^\circ$ , то внутри треугольника существует единственная точка, из которой стороны видны под равными углами. Эта точка называется *точкой Торичелли* треугольника. Сумма расстояний от нее до вершин треугольника минимальна.

Итак, доказано, что в *изогональном тетраэдре точки касания вписанной сферы с гранями являются точками Торичелли этих граней.*

**Следствие.** *В изогональном тетраэдре равны произведения площадей любых двух треугольников с общей вершиной в центре  $J$  вписанной сферы, две другие вершины которых являются соответственными концами двух противоположных ребер тетраэдра.*

Действительно, из соотношения (6.25) и ему аналогичного получаем

$$S_{ADB_1} \cdot S_{BCA_1} = S_{ACB_1} \cdot S_{BDA_1} = S_{CDB_1} \cdot S_{ACB_1}. \quad (6.26)$$

Так как, например,  $S_{ADB_1} = S_{JAD} \cos \frac{(AD)}{2}$ , то если обозначим  $S_{JAB} = S_{12}$ , то почленным делением равенств (6.26) и (6.24) находим:

$$S_{14} \cdot S_{23} = S_{24} \cdot S_{13} = S_{34} \cdot S_{12}. \quad (6.27)$$

## § 45. Прямоугольный тетраэдр

Если три ребра, выходящие из одной вершины тетраэдра, попарно перпендикулярны, то трехгранный угол, определяемый ими, называется *прямым*, а тетраэдр — *прямоугольным*.

Очевидно, ребра прямого триэдра являются высотами прямоугольного тетраэдра, и все его четыре высоты пересекаются в вершине прямого триэдра. Следовательно, прямоугольный тетраэдр является ортоцентрическим и поэтому обладает всеми свойствами, изложенными в § 6 из [5] и в § 36 этой главы. Кроме того, этому виду ортоцентрического тетраэдра присущи свои особые свойства.

**45.1. Основные соотношения.** Условимся в обозначениях. Пусть тетраэдр  $ABCD$  имеет прямой триэдр с вершиной  $D$ . Как и ранее, положим:  $DA = a$ ,  $DB = b$ ,  $DC = c$ ,  $BC = a_1$ ,  $CA = b_1$ ,  $AB = c_1$ . Двугранные углы при ребрах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  обозначим  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , площади  $S_{BCD} = S_1$ ,  $S_{ACD} = S_2$ ,  $S_{ABD} = S_3$ ,  $S_{ABC} = S$ , высоту из вершины  $D$  обозначим  $h$ .

Так как *грани-катеты* с общей вершиной  $D$  попарно перпендикулярны, то по теореме косинусов для тетраэдра имеем соотношение:

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (6.28)$$

представляющее собой *стереометрический аналог теоремы Пифагора*.

По свойству ортогонального проектирования

$$S_1 = S \cos \alpha, \quad S_2 = S \cos \beta, \quad S_3 = S \cos \gamma. \quad (6.29)$$

Из последних двух соотношений следует:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (6.30)$$

откуда

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2.$$

Площади ортогональных проекций *граней-катетов* на *грань-гипотенузу* соответственно равны:

$$S'_1 = S_1 \cos \alpha, \quad S'_2 = S_2 \cos \beta, \quad S'_3 = S_3 \cos \gamma.$$

Из этих равенств и из (6.28) получаем:

$$S_1^2 = SS'_1, \quad S_2^2 = SS'_2, \quad S_3^2 = SS'_3, \quad (6.31)$$

т. е. *площади граней-катетов являются средними пропорциональными величинами между площадью грани-гипотенузы и соответственно площадями их ортогональных проекций на гипотенузу*.

Для объема  $V$  прямоугольного тетраэдра с очевидностью имеем два выражения:

$$V = \frac{1}{6}abc, \quad V^2 = \frac{2}{9}S_1S_2S_3, \quad (6.32)$$

причем вторая формула есть непосредственное следствие первой.

Делением (6.28) на  $9V^2$  получаем:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \quad (6.33)$$

Найдем выражение объема прямоугольного тетраэдра через длины ребер, образующих грань-гипотенузу. Так как

$$a^2 + b^2 = c_1^2, \quad b^2 + c^2 = a_1^2, \quad c^2 + a^2 = b_1^2,$$

то при сложении этих равенств получаем:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Из этого и из предыдущих равенств вытекает:

$$2a^2 = b_1^2 + c_1^2 - a_1^2, \quad 2b^2 = c_1^2 + a_1^2 - b_1^2, \quad 2c^2 = a_1^2 + b_1^2 - c_1^2.$$

Применяя (6.32) находим:

$$288V^2 = (b_1^2 + c_1^2 - a_1^2)(c_1^2 + a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2). \quad (6.34)$$

Из этой формулы можно сделать следующие выводы. Произведение трех сомножителей в правой части положительно. Следовательно, либо все они положительны, либо один положителен, а два отрицательны. Последний случай невозможен, поскольку в этом случае треугольник имел бы два тупых угла. Значит, квадрат любой стороны треугольника меньше суммы квадратов двух других сторон и поэтому *все углы треугольника ABC острые*.

Если  $O$  — центр сферы, описанной около прямоугольного тетраэдра  $ABCD$ , то

$$\overline{DO} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}). \quad (6.35)$$

Действительно, параллелепипед, построенный на векторах  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  как на ребрах, является прямоугольным. Сфера, построенная на диагонали этого параллелепипеда, содержит все его вершины и потому является *описанной для данного тетраэдра*. Отсюда и следует (6.35). Возведение этого равенства в квадрат получаем:

$$4R^2 = a^2 + b^2 + c^2. \quad (6.36)$$

Далее,  $\overline{GO} = \overline{DO} - \overline{DG} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) - \frac{1}{4}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = \frac{1}{4}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$ , откуда

$$GO^2 = \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2). \quad (6.37)$$

Найдем выражение вектора  $\bar{h}$  высоты тетраэдра через векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ . Положим  $\bar{h} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c}$ , где  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ . Так как  $\bar{h}(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{h}(\bar{a} - \bar{c}) = 0$ , то  $\bar{h}\bar{a} = \bar{h}\bar{b} = \bar{h}\bar{c}$  и поэтому  $\lambda_1a^2 = \lambda_2b^2 = \lambda_3c^2$ ,

$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = (bc)^2 : (ca)^2 : (ab)^2$ . С учетом зависимости  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  находим:

$$\lambda_1 = \frac{(bc)^2}{k}, \quad \lambda_2 = \frac{(ca)^2}{k}, \quad \lambda_3 = \frac{(ab)^2}{k}, \quad \text{где } k = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2.$$

Таким образом,

$$\bar{h} = \frac{(bc)^2 \bar{a} + (ca)^2 \bar{b} + (ab)^2 \bar{c}}{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}. \quad (6.38)$$

На основании общей зависимости для тетраэдра при  $h_1 = a$ ,  $h_2 = b$ ,  $h_3 = c$  имеем:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{h}$$

и с учетом (6.33)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}. \quad (6.39)$$

Вторая формула Штаудта (см. [5], с. 100) для прямоугольного тетраэдра принимает вид:

$$abcd = 12VR, \quad \text{где } d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \quad (6.40)$$

Ее можно проверить непосредственно на основании формул (6.32) и (6.36). Произведение  $abcd$  равно удвоенной площади вспомогательного треугольника с длинами сторон  $aa_1$ ,  $bb_1$ ,  $cc_1$ .

**45.2. Описанная сфера и первая сфера Эйлера прямоугольного тетраэдра.** Прямоугольный тетраэдр, являясь ортоцентрическим, имеет три сферы Эйлера (см. §36). Радиус  $\rho$  первой сферы Эйлера равен половине бимедианы тетраэдра. На основании формулы длины бимедианы (см. [5], с. 94)

$$16\rho^2 = a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2 = a^2 + b^2 + c^2. \quad (6.41)$$

Из этого соотношения и (6.36), (6.37) следует:

$$GO = \rho = \frac{1}{2}R, \quad R - \rho = GO.$$

Итак, расстояние между центрами  $O$  и  $G$  описанной сферы и первой сферы Эйлера прямоугольного тетраэдра равно разности радиусов этих сфер. Следовательно, *эти сферы касаются внутренним образом.*

Плоскость, содержащая центр описанной сферы, обладает примечательными свойствами: *расстояние от вершины  $D$  прямого триэдра до любой плоскости, проходящей через центр описанной сферы прямоугольного тетраэдра, равно алгебраической сумме расстояний от трех других вершин до этой плоскости.*

Действительно, в прямоугольной декартовой системе координат с осями  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  тетраэдра  $ABCD$  имеют координаты:  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$ , а центр  $O$  описанной сферы на основании (6.37) — координаты:  $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ . Тогда уравнение произвольной плоскости, проходящей через  $O$ , имеет вид:

$$u_1\left(x - \frac{a}{2}\right) + u_2\left(y - \frac{b}{2}\right) + u_3\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0.$$

Ориентированные расстояния  $d_i$  от вершин тетраэдра до этой плоскости равны:

$$d_1 = \frac{au_1 - \frac{1}{2}(au_1 + bu_2 + cu_3)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \quad d_2 = \frac{bu_2 - \frac{1}{2}(au_1 + bu_2 + cu_3)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}},$$

$$d_3 = \frac{cu_3 - \frac{1}{2}(au_1 + bu_2 + cu_3)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \quad d_4 = \frac{-\frac{1}{2}(au_1 + bu_2 + cu_3)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}},$$

откуда легко видно, что

$$d_1 + d_2 + d_3 = d_4.$$

## § 46. Прямой триэдр и сфера

**46.1. Геометрическое место ортогональных проекций вершины прямого триэдра.** Пусть прямой триэдр вращается около своей вершины  $D$  и его ребра пересекают данную сферу с центром в точке  $S$  радиуса  $R$ . Тогда множество всех ортогональных проекций  $H$  точки  $D$  на плоскость, определяемую любыми тремя точками  $A, B, C$  из шести точек пересечения, есть сфера с центром в точке  $Q$ , лежащей на отрезке  $DS$  и делящей его в отношении  $1 : 2$ .

**Доказательство.** Примем точку  $D$  за начало векторов. Имеем:

$$(\bar{A} - \bar{S})^2 = (\bar{B} - \bar{S})^2 = (\bar{C} - \bar{S})^2 = R^2. \quad (6.42)$$

Рассмотрим вектор  $\bar{Q} = \frac{1}{3}\bar{S}$  и найдем  $(\bar{H} - \bar{Q})^2$ , где  $\bar{H}$  имеет выражение (6.38) и  $m = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$ :

$$\begin{aligned} (\bar{H} - \bar{Q})^2 &= \left(\frac{1}{m}((bc)^2\bar{a} + (ca)^2\bar{b} + (ab)^2\bar{c}) - \frac{1}{3}\bar{S}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{m^2}((bc)^4a^2 + (ca)^4b^2 + (ab)^4c^2) - \\ &\quad - \frac{2}{3m}((bc)^2(\bar{a}\bar{S}) + (ca)^2(\bar{b}\bar{S}) + (ab)^2(\bar{c}\bar{S})) + \frac{1}{9}\bar{S}^2, \end{aligned}$$

так как  $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{c} = \bar{c}\bar{a} = 0$ . Уменьшаемое в скобках правой части равно  $(abc)^2 m$ . Представим правую часть в таком виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3m} (3(abc)^2 - 2(bc)^2(\bar{a}\bar{S}) - 2(ca)^2(\bar{b}\bar{S}) - \\ & - 2(ca)^2(\bar{c}\bar{S}) + \bar{S}^2((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2) - \frac{2}{9}\bar{S}^2 = \\ & = \frac{1}{3m} \left( (bc)^2(\bar{a} - \bar{S})^2 + (bc)^2(\bar{b} - \bar{S})^2 + (ca)^2(\bar{c} - \bar{S})^2 - \frac{2}{9}\bar{S}^2 \right). \end{aligned}$$

Привлекая (6.42) и обозначив  $DS = l$ , получаем:

$$(\bar{H} - \bar{Q})^2 = \frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{9}l^2. \quad (6.43)$$

Правая часть этого равенства постоянна. Кроме того, постоянна точка  $Q$ , поэтому множество всех концов переменного вектора  $\bar{H}$  есть сфера с центром  $Q$  радиуса  $\varrho$  такого, что

$$\varrho^2 = \frac{1}{9}(3R^2 - 2l^2). \quad (6.44)$$

Эта сфера существует при условии:

$$3R^2 - 2l^2 \geq 0, \quad l \leq R\sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (6.45)$$

Уравнение (6.43) эквивалентно следующему:

$$2DH^2 + HS^2 = R^2. \quad (6.46)$$

Действительно,

$$(\bar{H} - \bar{Q})^2 = \left( \bar{H} - \frac{1}{3}\bar{S} \right)^2 = \bar{H}^2 - \frac{2}{3}\bar{H} \cdot \bar{S} + \frac{1}{9}\bar{S}^2.$$

Но  $2\bar{H} \cdot \bar{S} = DH^2 + l^2 - HS^2$ ,  $H^2 = DH^2$ ,  $\bar{S}^2 = l^2$  и после подстановки в (6.43) получаем (6.46). Можно выполнить обратный переход.

**Обратно**, пусть  $H$  — произвольная точка сферы  $(Q, \varrho)$ . Проведем через нее плоскость, перпендикулярную прямой  $DH$ . Эта плоскость пересекает сферу  $(S, R)$  по некоторой окружности, в которую впишем какой-либо треугольник  $ABC$  с условием, чтобы точка  $H$  была его ортоцентром. Теперь надо доказать, что прямые  $DA, DB, DC$  попарно перпендикулярны. Докажем, например, что  $\overline{AD} \cdot \overline{BD} = 0$ . Находим:

$$\overline{AD} \cdot \overline{BD} = (\overline{HD} - \overline{HA})(\overline{HD} - \overline{HB}) = \overline{HD}^2 + \overline{HA} \cdot \overline{HB}.$$

Но в силу (6.46)  $2\overline{HD}^2 = R^2 - HS^2$ , а  $HS^2 - R^2$  есть степень точки  $H$  относительно сферы  $(S, R)$ , поэтому

$$HS^2 - R^2 = \overline{HA} \cdot \overline{HZ},$$



где  $Z$  — вторая точка пересечения прямой  $HA$  с окружностью  $ABC$ . Если  $H_1$  — точка пересечения прямых  $HA$  и  $BC$ , то по свойству ортоцентра треугольника  $\overline{HZ} = 2\overline{HH_1}$ . Следовательно,

$$\overline{AD} \cdot \overline{BD} = -\overline{HH_1} \cdot \overline{HA} + \overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HA}(\overline{HB} - \overline{HH_1}) = \overline{HA} \cdot \overline{H_1B} = 0.$$

Итак, сфера (6.43) является геометрическим местом точек  $H$  обладающих заданным свойством.

Вместе с тем доказано, что геометрическим местом точек  $H$  пространства, обладающих свойством (6.46), где  $D$  и  $S$  — данные точки и  $R$  — данное число, есть сфера с центром в точке  $Q$ , делящей  $DS$  в отношении  $1 : 2$ .  $\square$

**46.2. Инварианты вращения прямого триэдра.** Если прямой триэдр вращается около своей вершины  $D$  и его грани пересекают сферу  $(S, R)$ , то сумма площадей трех кругов пересечения постоянна.

В самом деле, если обозначим через  $A_1, B_1, C_1$ , и  $r_1, r_2, r_3$  центры и радиусы этих кругов, то фигура, образованная пересечением прямых триэдров  $D(ABC)$  и  $S(A_1B_1C_1)$ , есть прямоугольный параллелепипед. Отсюда

$$r_1^2 = R^2 - SA_1^2, \quad r_2^2 = R^2 - SB_1^2, \quad r_3^2 = R^2 - SC_1^2$$

и

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 3R^2 - (SA_1^2 + SB_1^2 + SC_1^2) = 3R^2 - l^2, \quad \text{где } DS = l.$$

Следовательно,

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_3^2 = \pi(3R^2 - l^2) = \text{const.} \quad (6.47)$$

Далее, если обозначим  $A_2, B_2, C_2$  — три другие точки пересечения прямых  $DA, DB, DC$  со сферой  $(S, R)$ , то сумма квадратов отрезков  $AA_2, BB_2, CC_2$  также постоянна.

В самом деле, пусть  $N_1$  и  $N_2$  — основания перпендикуляров, проведенных из  $C_1$  к хордам  $AA_2$  и  $BB_2$  (рис. 57). Тогда

$$\begin{aligned} AA_2^2 + BB_2^2 &= \\ &= 4(r_3^2 - C_1N_1^2) + 4(r_3^2 - C_1N_2^2) = \\ &= 8r_3^2 - 4DC_1^2. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} AA_2^2 + CC_2^2 &= 8r_2^2 - 4DB_1^2, \\ BB_2^2 + CC_2^2 &= 8r_1^2 - 4DA_1^2, \end{aligned}$$

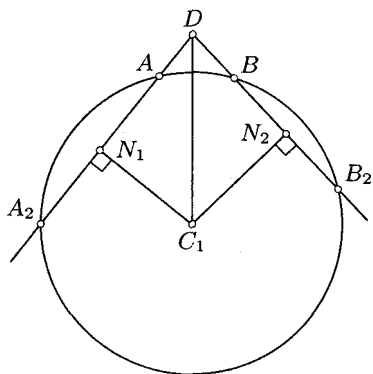


Рис. 57

откуда

$$AA_2^2 + BB_2^2 + CC_2^2 = 4(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - 2(DA_1^2 + DB_1^2 + DC_1^2).$$

Так как

$$DA_1^2 = l^2 - SA_1^2, \quad DB_1^2 = l^2 - SB_1^2, \quad DC_1^2 = l^2 - SC_1^2,$$

то

$$AA_2^2 + BB_2^2 + CC_2^2 = 12R^2 - 8l^2. \quad (6.48)$$

Заметим, что эта сумма равна нулю в том и только в том случае, когда точки  $A$  и  $A_2$ ,  $B$  и  $B_2$ ,  $C$  и  $C_2$  соответственно совпадают, т. е. тогда и только тогда, когда ребра триэдра касаются сферы. В этом и только в этом случае в условии (6.45) будет иметь место знак равенства, и тогда сфера  $(Q, \varrho)$  вырождается в точку.

## § 47. Ортогональная проекция тетраэдра

Для ортогонального проектирования не имеет места теорема Польке-Шварца (1864 г.) о параллельной (неортогональной) проекции тетраэдра. Ортогональные проекции вершин тетраэдра зависимы: одна из них зависит от трех других и от данного тетраэдра. В нахождении этой зависимости и состоит сущность задачи Гаусса. Она была решена самим Гауссом лишь для простейшего частного случая — для тетраэдра, в котором три ребра при одной вершине попарно ортогональны и каждый из них имеет единичную длину. Именно, *если ортогональная проекция вершины прямого трехгранного угла такого тетраэдра принята за нулевую точку плоскости проекций, взятой в качестве плоскости комплексных чисел, то сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих ортогональным проекциям трех остальных вершин, равна нулю (теорема Гаусса)*.

Одно из доказательств этой теоремы Гаусса имеется в книге [8] на с. 224. Для тетраэдра общего вида задача об отыскании аналогичной зависимости оставалась нерешенной. Решение ее излагается ниже.

**47.1. Связь между ортогональными проекциями вершин произвольного тетраэдра.** Пусть полный четырехугольник  $OA_1B_1C_1$  служит ортогональной проекцией заданного тетраэдра  $OABC$ , вершина  $O$  которого принадлежит плоскости проекции (рис. 58). Тогда имеет место векторная зависимость:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} - \overline{OA_1} \cdot \overline{OB_1} = \overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1}. \quad (6.49)$$

Действительно,

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = (\overline{OA_1} - \overline{AA_1})(\overline{OB_1} - \overline{BB_1}) = \overline{OA_1} \cdot \overline{OB_1} + \overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1},$$

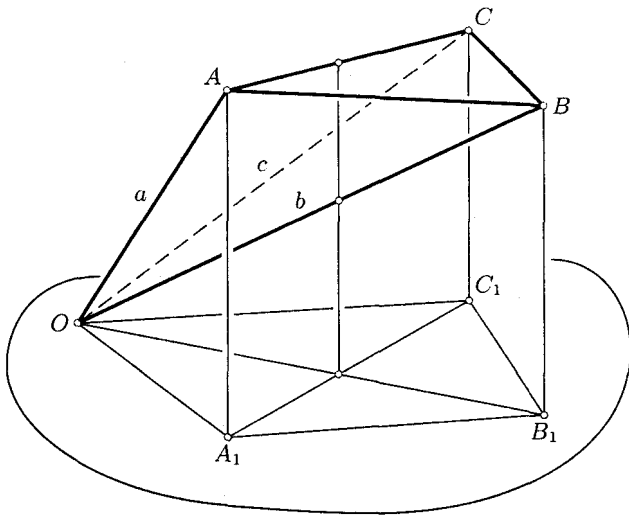


Рис. 58

поскольку  $\overline{OA_1} \cdot \overline{OB_1} = 0$  и  $\overline{OB_1} \cdot \overline{AA_1} = 0$  в силу ортогональности этих векторов.

Так как векторы  $\overline{AA_1}$  и  $\overline{BB_1}$  коллинеарны, их скалярное произведение может отличаться от произведения их длин только знаком. Возведем обе части тождества (6.49) в квадрат и выполним подстановки  $AA_1^2 = OA^2 - OA_1^2$ ,  $BB_1^2 = OB^2 - OB_1^2$ :

$$(\overline{OA} \cdot \overline{OB} - \overline{OA_1} \cdot \overline{OB_1})^2 = (OA^2 - OA_1^2)(OB^2 - OB_1^2).$$

С равным правом имеем еще две аналогичные зависимости:

$$(\overline{OB} \cdot \overline{OC} - \overline{OB_1} \cdot \overline{OC_1})^2 = (OB^2 - OB_1^2)(OC^2 - OC_1^2), \quad (6.50)$$

$$(\overline{OC} \cdot \overline{OA} - \overline{OC_1} \cdot \overline{OA_1})^2 = (OC^2 - OC_1^2)(OA^2 - OA_1^2).$$

Введем обозначения:  $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = \omega_1$ ,  $\overline{OC} \cdot \overline{OA} = \omega_2$ ,  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \omega_3$  и  $|OA| = a$ ,  $|OB| = b$ ,  $|OC| = c$ . Эти шесть величин определяют проектируемый тетраэдр, и поэтому мы считаем их известными. По своей сущности последние три равенства (6.50) и представляют собой зависимость между элементами данного тетраэдра и ортогональными проекциями его вершин.

Следуя Гауссу, перейдем к комплексным координатам, приняв плоскость проекций в качестве плоскости комплексных чисел с нулевой точкой  $O$ . Пусть проекции  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  имеют комплексные координаты  $\alpha$ ,

$\beta, \gamma$  соответственно. Тогда (см. [6], с. 12) имеем:

$$2\overline{OA}_1 \cdot \overline{OB}_1 = \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta, \quad 2\overline{OB}_1 \cdot \overline{OC}_1 = \beta\bar{\gamma} + \bar{\beta}\gamma, \quad 2\overline{OC}_1 \cdot \overline{OA}_1 = \gamma\bar{\alpha} + \bar{\gamma}\alpha,$$

где  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  — числа, сопряженные соответственно комплексным числам  $\alpha, \beta, \gamma$ . Так как  $OA_1^2 = \alpha\bar{\alpha}$ ,  $OB_1^2 = \beta\bar{\beta}$ ,  $OC_1^2 = \gamma\bar{\gamma}$ , то равенства (6.50) принимают вид:

$$\begin{cases} \left(\omega_3 - \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)\right)^2 = (a^2 - \alpha\bar{\alpha})(b^2 - \beta\bar{\beta}), \\ \left(\omega_1 - \frac{1}{2}(\beta\bar{\gamma} + \bar{\beta}\gamma)\right)^2 = (b^2 - \beta\bar{\beta})(c^2 - \gamma\bar{\gamma}), \\ \left(\omega_2 - \frac{1}{2}(\gamma\bar{\alpha} + \bar{\gamma}\alpha)\right)^2 = (c^2 - \gamma\bar{\gamma})(a^2 - \alpha\bar{\alpha}). \end{cases} \quad (6.51)$$

В этих трех зависимостях и состоит искомый результат.

**47.2. Вывод соотношения Гаусса.** Обратимся к частному случаю, рассмотренному Гауссом. Пусть ребра  $OA, OB, OC$  попарно ортогональны и  $a = b = c = 1$ . Тогда  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$  и равенства (6.51) упрощаются:

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)^2 &= 4(1 - \alpha\bar{\alpha})(1 - \beta\bar{\beta}), \\ (\beta\bar{\gamma} + \bar{\beta}\gamma)^2 &= 4(1 - \beta\bar{\beta})(1 - \gamma\bar{\gamma}), \\ (\gamma\bar{\alpha} + \bar{\gamma}\alpha)^2 &= 4(1 - \gamma\bar{\gamma})(1 - \alpha\bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Из них следует соотношение Гаусса:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0. \quad (6.53)$$

В самом деле, равенства (6.52) эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)^2 &= 4(1 - \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}), \\ (\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma)^2 &= 4(1 - \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma}), \\ (\gamma\bar{\alpha} - \bar{\gamma}\alpha)^2 &= 4(1 - \gamma\bar{\gamma} - \alpha\bar{\alpha}). \end{aligned}$$

Сложим их и полученную левую часть заменим согласно тождеству Лагранжа

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)^2 + (\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma)^2 + (\gamma\bar{\alpha} - \bar{\gamma}\alpha)^2 &= \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + \bar{\gamma}^2) - (\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma})^2. \end{aligned}$$

А сумма правых частей равна  $12 - 8(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma})$ . Отсюда получаем

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + \bar{\gamma}^2) = (\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma})^2 - 8(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma}) + 12. \quad (6.54)$$

Пусть  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — углы, образованные векторами  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$  с направлением проектирования. Тогда  $\alpha\bar{\alpha} = OA_1^2 = 1 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \sin^2 \varphi_1$

и аналогично  $\beta\bar{\beta} = \sin^2 \varphi_2$ ,  $\gamma\bar{\gamma} = \sin^2 \varphi_3$ . Поскольку  $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$ , то  $\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_3 = 2$  и поэтому

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} = 2. \quad (6.55)$$

Тогда правая часть равенства (6.54) будет равна  $2^2 - 8 \cdot 2 + 12 = 0$ . Следовательно,

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + \bar{\gamma}^2) = 0.$$

Произведение двух сопряженных комплексных чисел равно нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю. Тождество (6.53) доказано.

**Следствие 1.** Для прямоугольного тетраэдра, в котором длины ребер, образующих прямой трехгранный угол, равны единице, соотношения (6.53) и (6.55) эквивалентны.

Действительно, при условии (6.55) из (6.54) следует (6.53). Обратное, при условии (6.53) из квадратного уравнения (6.54) получаем  $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} = 2$  или  $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} = 6$ . Однако последнее равенство противоречиво, поскольку каждое слагаемое не больше единицы.

**Следствие 2.** Если в прямоугольном тетраэдре  $OABC$  длины ребер  $OA, OB, OC$  равны соответственно  $a, b, c$ , то

$$\frac{\alpha\bar{\alpha}}{a^2} + \frac{\beta\bar{\beta}}{b^2} + \frac{\gamma\bar{\gamma}}{c^2} = 2. \quad (6.56)$$

В самом деле, тогда

$$\alpha\bar{\alpha} = a^2 \sin^2 \varphi_1, \quad \beta\bar{\beta} = b^2 \sin^2 \varphi_2, \quad \gamma\bar{\gamma} = c^2 \sin^2 \varphi_3$$

и соотношение  $\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_3 = 2$  равносильно (6.56).

Выделим еще два частных случая.

Для ортоцентрического тетраэдра  $OABC$  имеем  $\overline{OA} \cdot \overline{BC} = \overline{OB} \cdot \overline{CA} = \overline{OC} \cdot \overline{AB} = 0$ , откуда  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OB} \cdot \overline{OC} = \overline{OC} \cdot \overline{OA}$ , т. е.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ . Поэтому из системы (6.51) получаем:

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + 2\sqrt{(a^2 - \alpha\bar{\alpha})(b^2 - \beta\bar{\beta})} &= \\ &= \beta\bar{\gamma} + \bar{\beta}\gamma + 2\sqrt{(b^2 - \beta\bar{\beta})(c^2 - \gamma\bar{\gamma})} = \\ &= \gamma\bar{\alpha} + \bar{\gamma}\alpha + 2\sqrt{(c^2 - \gamma\bar{\gamma})(a^2 - \alpha\bar{\alpha})}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

В случае, когда плоскость  $ABC$  параллельна плоскости проекций, для любого тетраэдра выполняется  $AA_1 = BB_1 = CC_1$ , что эквивалентно

$$a^2 - \alpha\bar{\alpha} = b^2 - \beta\bar{\beta} = c^2 - \gamma\bar{\gamma}. \quad (6.58)$$

**47.3. Построение ортогональной проекции вершины тетраэдра по заданным проекциям трех других вершин прямоугольного и правильного тетраэдров.** В монографии [8] (с. 225--226) изложен способ построения ортогональной проекции вершины прямоугольного равнобедренного тетраэдра по заданным проекциям трех других его вершин на основании соотношения Гаусса. Однако оно сложно, имеет лишь принципиальный характер и поэтому непригодно для практики. Укажем другой способ, легко осуществимый для практического применения.

Пусть даны ортогональные проекции  $A_1, B_1, C_1$  вершин  $A, B, C$  прямоугольного тетраэдра  $OABC$  с единичными ребрами  $OA, OB, OC$ . Тогда проекцией четвертой вершины  $O$  служит центр окружности  $A_1B_1C_1$ . В самом деле, по теореме Лейбница

$$OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2 = GA_1^2 + GB_1^2 + GC_1^2 + 3OG^2.$$

Известно, что

$$GA_1^2 + GB_1^2 + GC_1^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

и

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Поэтому  $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} = 3R^2$  и в силу (6.55)  $3R^2 = 2$ , чем определяется единичный отрезок плоскости проекций.

Пусть даны ортогональные проекции вершин  $O, A, B$  рассматриваемого тетраэдра. Соотнесем им комплексные числа  $0, \alpha, \beta$  соответственно. Требуется построить координату  $\gamma$  проекции  $C_1$  четвертой вершины  $C$ . Будем пользоваться соотношением Гаусса. Применим способ построения произведения двух комплексных чисел (см. [8], с. 10, рис. 4). Построение выполняется в следующем порядке (рис. 59). По точкам  $0$ ,

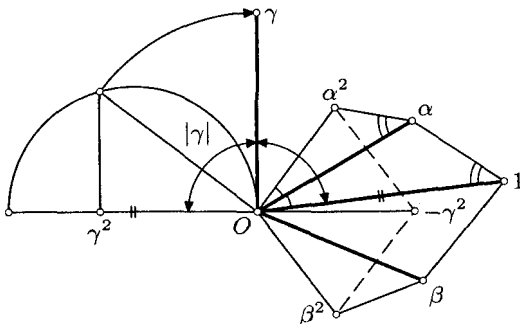


Рис. 59

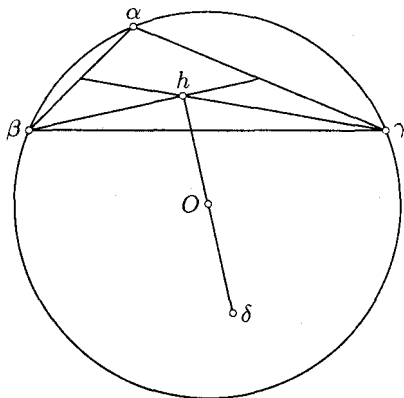


Рис. 60

1,  $\alpha$  строим точку  $\alpha^2$  и аналогично точку  $\beta^2$  (подобные треугольники), затем  $\alpha^2 + \beta^2 = -\gamma^2$  (сумма комплексных чисел) и  $|\gamma| = \sqrt{1 \cdot |\gamma^2|}$  (среднее пропорциональное). Искомая точка  $\gamma$  лежит на биссектрисе угла между векторами точек 1 и  $\gamma^2$ . Существуют две искомые точки  $\gamma$  и  $-\gamma$ .

Переходим к построению проекций вершин *правильного тетраэдра*  $ABCD$ . Середина  $O$  его высоты  $DH$  обладает тем свойством, что отрезки  $OA, OB, OC$  попарно перпендикулярны и  $OA^2 = OB^2 = OC^2 = \frac{1}{2}a^2$  (где  $a$  — длина ребра данного тетраэдра). Согласно соотношению (6.56)  $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} = a^2$ . Если  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $A_1B_1C_1$  проекций вершин  $A, B, C$ , то  $\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = R^2$ . Поэтому  $3R^2 = a^2$  и  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ . Так как  $h = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$  — центроид треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $O$  — середина  $DH$ , то искомая проекция  $\delta$  вершины  $D$  симметрична  $h$  относительно точки  $O$  (рис. 60).

## Задачи к главе 6

6.1. Докажите, что ортоцентрический тетраэдр всегда имеет одну остроугольную грань, а три остальные являются треугольниками одного и того же вида (в зависимости от расположения ортоцентра относительно данного тетраэдра).

6.2. Докажите, что вторая сфера Эйлера ортоцентрического тетраэдра гомотетична его описанной сфере при гомотетии с центром в центре  $G$  и коэффициентом  $-\frac{1}{3}$ .

6.3. Докажите, что ортоцентр ортоцентрического тетраэдра делит каждую из его высот и бивысот на два отрезка, произведения которых равны между собой.

6.4. Докажите, что в ортоцентрическом и только в ортоцентрическом тетраэдре ортооси триэдров пересекаются в одной точке.

6.5. Через каждое из трех ребер одной грани ортоцентрического тетраэдра проведена плоскость, соответственно перпендикулярная одной из трех остальных граней, проходящей через то же ребро. Докажите, что ортогональные проекции точки пересечения этих трех плоскостей на грани тетраэдра образуют четырехугольник, каждая вершина которого является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими вершинами.

6.6. В ортоцентрическом тетраэдре произведения длин противоположных ребер обратно пропорциональны длинам соответствующих бивысот. Докажите.

6.7. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре бимедиана равна половине гипотенузы прямоугольного треугольника, имеющего своими катетами одну из высот тетраэдра и диаметр окружности, описанной около грани, соответственной взятой высоте.

6.8. Докажите, что три ребра одного трехгранного угла ортоцентрического тетраэдра пропорциональны косинусам противоположных плоских углов этого трехгранного угла.

6.9. Докажите, что три ребра одного трехгранного угла ортоцентрического тетраэдра и соответствующие им три двугранных угла удовлетворяют соотношению:

$$\begin{vmatrix} a^2 & \sin^2 \alpha & 1 \\ b^2 & \sin^2 \beta & 1 \\ c^2 & \sin^2 \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.10. Проверьте истинность формулы объема равногранного тетраэдра:

$$V = \frac{1}{3} \delta_1 \delta_2 \delta_3.$$

6.11. Докажите, что для равногранного тетраэдра имеет место формула:

$$72V^2 = (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2),$$

а также зависимость:

$$R^2 = \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2).$$



6.12. Докажите, что углы между противоположными ребрами квазиописанного тетраэдра удовлетворяют соотношению:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_3}{2} = 1.$$

6.13. Докажите, что для квазиописанного тетраэдра имеет место соотношение:

$$9V^2 = - \begin{vmatrix} 2 & a & b & c \\ a & 0 & l_1 l_2 & l_1 l_3 \\ b & l_1 l_2 & 0 & l_2 l_3 \\ c & l_1 l_3 & l_2 l_3 & 0 \end{vmatrix}$$

(в обозначениях § 40).

6.14. Каждые три грани изодинамического тетраэдра пересекают касательную плоскость к описанной сфере в вершине, в которой сходятся эти три грани, по трем прямым, которые образуют при этой вершине шесть углов по  $60^\circ$ . Докажите.

6.15. Тетраэдр является изодинамическим тогда и только тогда, когда основания его высот лежат на прямых  $O_i K_i$  (диаметрах Брокара) соответственных граней. Докажите.

## Начала многомерной геометрии

### Введение (историческая справка)

Геометрия многомерного пространства уже давно стала рабочим аппаратом в физике, механике и в самой математике. В последнее время она успешно применяется и в других науках, например, в химии.

Понятие пространства, имеющего более трех измерений, впервые было введено французским ученым Ж. Лагранжем (1736—1813). В своих работах по теоретической механике он рассматривал четырехмерное пространство, в котором к трем пространственным декартовым координатам добавлена четвертая переменная — время, и все четыре переменные рассматривались как четыре декартовых координаты четырехмерного пространства.

Однако развитие понятия многомерного пространства произошло значительно позже — к середине XIX века. В 40-х годах оно появилось в работах О. Коши (1789—1857, Франция), А. Кэли (1821—1895, Англия), Ю. Плюккера (1801—1868, Германия) и ряда других ученых. Первое систематическое построение геометрии  $n$ -мерного пространства появилось в сочинении Г. Грассмана (1809—1877, Германия). Однако по причине абстрактности изложения оно осталось малодоступным.

Представления о многомерном пространстве все больше проникали в науку и продолжали развиваться в трудах Б. Римана (1826—1866, Германия) и великого А. Эйнштейна. Работа Римана «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» была одной из тех, которые сделали понятие многомерного пространства «общим достижением стремящегося вперед молодого поколения математиков и физиков» (Ф. Клейн). После этого появляются многочисленные труды по многомерной геометрии, из которых упомянем капитальный труд (648 стр.) «Основания геометрии многомерного пространства в элементарном изложении» итальянского математика Дж. Веронезе (1891), где эта геометрия строится сугубо отвлеченно.

Из отечественных математиков в разработку многомерной геометрии определенный вклад внесли К. А. Андреев (1848—1921), А. К. Власов (1868—1922), Д. А. Граве (1863—1939) и Н. И. Гулак.

## § 48. О понятии $n$ -мерного пространства

Ответить на вопрос, что такое многомерное пространство, не так просто. Нельзя ограничиться одним определением: непосвященному человеку оно ничего не скажет. Займемся необходимой подготовкой.

На первый взгляд может показаться, что рассматриваемое понятие вовсе лишено наглядности. Однако четырехмерная (вообще, многомерная) геометрия и получила свое широкое распространение именно благодаря своей наглядности. Нужно лишь привыкнуть к мысли, что точку не обязательно представлять себе как исчезающе малую частицу, как острие иглы или тонко очиненного карандаша. Все зависит от того, что мы будем понимать под точкой, что и назовем точкой. Можно, например, под точкой понимать шар с данным центром и данным радиусом. Такие «точки» ничем не хуже, чем обычные точки трехмерного пространства. Множество таких «точек-шаров» зависит от четырех независимых между собой величин — параметров: трех координат центра и радиуса. Говорят, что это *множество является четырехмерным пространством*.

Возьмем другой пример: множество всех прямых обычного трехмерного пространства. Каждую из них можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей, а именно системой двух уравнений первой степени:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

В нее входят шесть параметров: три координаты  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  точки, принадлежащей данной прямой, и тройка чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — координаты ее направляющего вектора. Эти параметры связаны двумя записанными уравнениями, поэтому независимыми друг от друга будут только четыре из них. Итак, *множество прямых трехмерного пространства зависит от четырех независимых параметров — оно четырехмерно*.

Множество пар точек на плоскости является четырехмерным: одна точка на плоскости определяется двумя координатами, а две — четырьмя. И эти четыре координаты независимы.

Аналогичные примеры могут быть продолжены. Первоначально они и привели к понятию  $n$ -мерного пространства.

*Линейным пространством* называется множество «точек», обладавшее свойством: прямая, содержащая любые две «точки» этого множества, принадлежит этому множеству (т. е. ему принадлежат все ее точки).

Привычные нам плоскость и пространство являются двумерным и трехмерным линейными пространствами. Существуют и нелинейные пространства.

Вспомним, что при переходе от планиметрии к стереометрии в школе мы пользовались аксиомой, что существуют точки не принадлежащие данной плоскости. Эту аксиому иногда называют *аксиомой расширения* в том смысле, что она расширяет двумерное пространство, приводит его к трехмерному.

Сделаем следующий шаг: перейдем от трехмерного пространства к четырехмерному приняв аксиому: *для любого трехмерного пространства существует по крайней мере одна точка, ему не принадлежащая.*

**Определение 1.** Совокупность пяти не лежащих в одном трехмерном пространстве точек  $A, B, C, D, E$  вместе с десятью прямыми, соединяющими их попарно, десятью плоскостями, проходящими через каждые три из них, и пятью трехмерными пространствами, проходящими через каждые четыре из них, называется *четырёхмерным симплексом*. Точки  $A, B, C, D, E$  называются его *вершинами*. прямые  $AB, AC, \dots$  — *ребрами*, плоскости  $ABC, ABD, \dots$  — *двумерными гранями*, пространства  $ABCD, ABCE, \dots$  — *трехмерными гранями* симплекса  $ABCDE$ . Трехмерная грань симплекса и не лежащая в ней вершина называются *противоположными* друг другу. Двумерная грань и не имеющее с ней общей точки ребро, также называются *противоположными* друг другу (рис. 61).

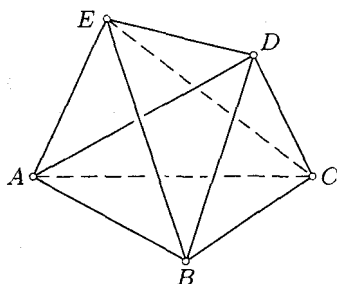


Рис. 61

**Определение 2.** Прямая, соединяющая вершину симплекса с некоторой точкой противоположной этой вершине трехмерной грани, называется *трансверсалью симплекса*. Множество точек, принадлежащих всем трансверсалиям симплекса, называется *четырёхмерным пространством*.

В общем случае при построении  $n$ -мерной геометрии ( $n$  — произвольное целое положительное число, большее 3) аксиому расширения необходимо сформулировать так:

*Каково бы ни было  $(n - 1)$ -мерное пространство, существует по крайней мере одна точка, ему не принадлежащая.*

Чтобы далее развивать  $n$ -мерную геометрию, вводится понятие  $n$ -мерного симплекса как совокупности  $n + 1$  точек, не лежащих в одном  $(n - 1)$ -мерном пространстве, и всех содержащих их подпространств. Затем определяется трансверсаль симплекса, и  $n$ -мерным

пространством называется совокупность всех точек, принадлежащих трансверсалим  $n$ -мерного симплекса.

Однако мы изберем другой путь изложения начал многомерной геометрии.

## § 49. Аффинное $n$ -мерное пространство $A^n$

Чтобы построить логически строго многомерную геометрию, необходимо освободиться от наглядных представлений объектов  $n$ -мерного пространства. Этой цели проще всего достигнуть, используя метод координат.

**49.1. Векторное пространство  $V^n$ .** Вектором будем называть упорядоченную совокупность (конечную последовательность)  $n$  действительных чисел:

$$\bar{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad n \geq 2,$$

а эти числа  $x_i$  называть *координатами вектора*  $\bar{r}$ . Различные (неравные) векторы должны отличаться хотя бы одной из своих соответственных координат.

При прежнем, геометрическом, понимании вектора геометрически же определялись сумма векторов и умножение вектора на число. Теперь, при алгебраическом определении вектора, эти операции следует определить заново, также алгебраически. Суммой векторов  $\bar{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\bar{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  называется вектор

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (7.1)$$

Произведением вектора  $\bar{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  на действительное число  $k$  называется вектор

$$k\bar{r} = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n). \quad (7.2)$$

Пользуясь этими определениями, не представляет труда проверить, что обе операции коммутативны, ассоциативны и дистрибутивны (относительно умножения на число).

Введем в употребление векторы:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \bar{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1), \end{aligned} \quad (7.3)$$

каждый из которых имеет  $n$  координат. Тогда для любого вектора  $\bar{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  очевидно равенство:

$$\bar{r} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n. \quad (7.4)$$

Говорят, что вектор  $\bar{r}$  является (представлен) *линейной комбинацией* векторов  $\bar{e}_i$ .

Система векторов  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_k$  называется *линейно зависимой*, если существуют такие действительные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , хотя бы одно из которых отлично от нуля, что выполняется равенство:

$$\alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2 + \dots + \alpha_k \bar{r}_k = 0. \quad (7.5)$$

Если же это равенство имеет место только при условии  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ , то система векторов  $\bar{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) называется *линейно независимой*.

В частности, система векторов, содержащая нуль-вектор  $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$  линейно зависима, так как

$$1 \cdot \bar{0} + 0 \cdot \bar{r}_1 + 0 \cdot \bar{r}_2 + \dots + 0 \cdot \bar{r}_k = \bar{0}.$$

Непосредственными следствиями предыдущего определения являются три утверждения:

- 1) если система векторов линейно независима, то любая ее часть (подсистема) также линейно независима,
- 2) если некоторая подсистема данной системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима,
- 3) система векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независима.

Два линейно зависимых вектора  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называются *коллинеарными*:  $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{b} = \alpha \bar{a}$ . Нуль-вектор коллинеарен любому вектору.

Три линейно зависимых вектора  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  называются *компланарными*. Если при этом векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  неколлинеарны, то  $\bar{c} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b}$ , где числа  $\alpha$  и  $\beta$  являются единственными для данных векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ .

Если вектор  $\bar{r}$  имеет представление (7.4), то

$$\bar{r} - \bar{r} = (x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n) + (-1) \bar{r} = \bar{0}.$$

Следовательно, система векторов  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n, \bar{r}$  линейно зависима.

**Определение.** Множество векторов, в котором введены операции сложения векторов и умножения векторов на действительные числа, обладающие указанными свойствами, называется *векторным пространством*  $V^n$ .

В векторном пространстве существуют  $n$  линейно независимых векторов, и любой вектор представляется их линейной комбинацией.

Число  $n$  называется *размерностью пространства*, а линейно независимые векторы  $\bar{e}_i$  — его *базисом*. Коэффициенты разложения вектора по векторам базиса называется *координатами* этого вектора в данном базисе.

Рассмотрим подмножество векторов пространства  $V^n$ , имеющих координаты  $(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0)$ , где последние  $n - k$  координат являются нулями. Это подмножество образует  $k$ -мерное векторное пространство с базисом  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k)$ . Оно называется *подпространством данного векторного пространства*.

**49.2. Аффинное  $n$ -мерное пространство  $\mathcal{A}^n$ .** Будем полагать по соглашению (аксиоматически), что в рассматриваемом пространстве имеются неопределяемые объекты — точки. Каждой упорядоченной паре точек  $A$  и  $B$  поставим в соответствие вектор  $\overline{AB}$ . Фиксируем некоторую точку  $O$  и для произвольной точки  $M$  поставим в соответствие вектор

$$\overline{OM} = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7.6)$$

Координаты  $x_i$  вектора  $\overline{OM}$  называются *координатами точки  $M$  относительно системы координат, заданной точкой  $O$  и векторным базисом  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$* .

Пусть  $\overline{OA} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\overline{OB} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Тогда

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n). \quad (7.7)$$

**Определение.** Множество  $\mathcal{A}^n$  точек называется  *$n$ -мерным аффинным пространством*, если каждой упорядоченной паре точек соответствует определенный вектор векторного  $n$ -мерного пространства  $V^n$ .

Полагают, что векторы пространства  $V^n$  принадлежат  $\mathcal{A}^n$  и поэтому пространство  $\mathcal{A}^n$  часто называют *точечно-векторным*.

Кроме точек и векторов важнейшими объектами аффинного пространства являются его подпространства —  *$k$ -мерные плоскости*.

**Определение.** Пусть даны точка  $A \in \mathcal{A}^n$  и векторное подпространство  $V^k$  ( $1 \leq k < n$ ) с базисом  $\bar{p}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Множество всех точек  $X$  аффинного пространства  $\mathcal{A}^n$ , для каждой из которых  $\overline{AX} \in V^k$ , называется  *$k$ -мерной плоскостью  $n$ -мерного аффинного пространства  $\mathcal{A}^n$* . Линейно независимые векторы  $\bar{p}_i$  называются *направляющими векторами* этой плоскости, а векторное подпространство  $V^k$  — ее *направляющим подпространством*. Точка  $A$  называется *начальной точкой* этой плоскости.

Нетрудно доказать, что плоскость не зависит от выбора ее начальной точки. Если фиксируем точку  $O \in \mathcal{A}^n$ , приняв ее за начало векторов, то согласно этому определению векторное уравнение  $k$ -мерной плоскости будет иметь вид:

$$\bar{X} = \bar{A} + t_1 \bar{p}_1 + t_2 \bar{p}_2 + \dots + t_k \bar{p}_k, \quad (7.8)$$

где  $\bar{p}_i$  — заданные линейно независимые векторы,  $t_i$  — любые действительные числа (параметры).

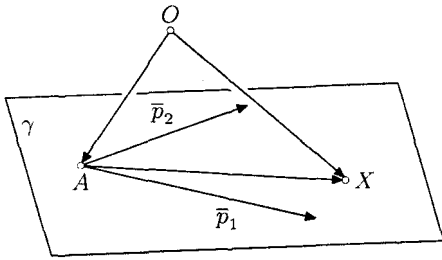


Рис. 62

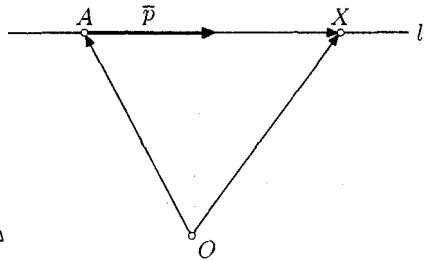


Рис. 63

В частности, при  $k = 2$  имеем обычную двумерную плоскость  $\gamma$  с уравнением  $\bar{X} = \bar{A} + t_1\bar{p}_1 + t_2\bar{p}_2$  (рис. 62), а при  $k = 1$  — прямую  $\bar{X} = \bar{A} + t\bar{p}$  (рис. 63). Для  $k = n - 1$  плоскость имеет особое название — *гиперплоскость*. Например, в четырехмерном симплексе (рис. 61) его трехмерные грани — тетраэдры являются его гипергранями.

В дальнейшем плоскости будем называть соответственно их размерности:  $k$ -плоскость,  $l$ -плоскость.

## § 50. Взаимное расположение двух плоскостей в аффинном $n$ -мерном пространстве

**50.1. Общие направления, параллельность.** Пусть в пространстве  $A^n$  заданы  $k$ -плоскость  $\alpha$  и  $l$ -плоскость  $\beta$ :

$$\bar{X} = \bar{A} + t_1\bar{p}_1 + t_2\bar{p}_2 + \dots + t_k\bar{p}_k, \quad (\alpha)$$

$$\bar{Y} = \bar{B} + \lambda_1\bar{q}_1 + \lambda_2\bar{q}_2 + \dots + \lambda_l\bar{q}_l, \quad (\beta)$$

где векторы  $\bar{p}_i$  линейно независимы и векторы  $\bar{q}_j$  линейно независимы. Однако среди векторов системы

$$\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_k, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_l \quad (7.9)$$

могут быть и линейно зависимые. Таковые необходимо имеются при  $k + l > n$ . Тогда среди чисел  $t_i$  и  $\lambda_j$  существуют не равные нулю, при которых имеет место равенство:

$$t_1\bar{p}_1 + t_2\bar{p}_2 + \dots + t_k\bar{p}_k + \lambda_1\bar{q}_1 + \lambda_2\bar{q}_2 + \dots + \lambda_l\bar{q}_l = \bar{0}, \quad (7.10)$$

причем не равны нулю по крайней мере одно из  $t_i$  и одно из  $\lambda_j$ . В самом деле, если все  $t_i = 0$ , то отличное от нуля имелось бы среди  $\lambda_j$ , что противоречит условию линейной независимости векторов. Равенство (7.10)



равносильно такому:

$$t_1\bar{p}_1 + t_2\bar{p}_2 + \dots + t_k\bar{p}_k = -(\lambda_1\bar{q}_1 + \lambda_2\bar{q}_2 + \dots + \lambda_l\bar{q}_l),$$

которое означает, что существует хотя бы один общий ненулевой вектор в направляющих векторных подпространствах данных плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ .

Направление общего вектора направляющих подпространств заданных плоскостей называется *общим направлением* этих плоскостей.

Ясно, что число всех независимых общих направлений двух плоскостей равно числу линейно зависимых векторов системы (7.9).

**Определения.**  $k$ -плоскость и  $l$ -плоскость пространства  $A^n$  называются  *$m$ -параллельными*, если они не имеют общих точек (не пересекаются) и имеют  $m$  независимых общих направлений. Если число общих направлений двух непересекающихся плоскостей равно меньшей из их размерностей, то плоскости называются *сильно (вполне) параллельными*, в противном случае — *слабо параллельными*. Две плоскости, не имеющие общих точек и общих направлений называются *скрещивающимися*.

**50.2. Пересечение и сумма двух плоскостей.** Пересечением двух плоскостей называется множество всех их общих точек. Оно может быть плоскостью, прямой, одной точкой или же пусто.

*Суммой* двух плоскостей называется плоскость наименьшей размерности в которой лежат эти плоскости.

Выясним вопрос о размерности пересечения и суммы  $k$ -плоскости и  $l$ -плоскости.

**Теорема.** *Для того, чтобы плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  скрещивались, необходимо и достаточно, чтобы система векторов*

$$\overline{AB}, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_k, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_l \quad (7.11)$$

*была линейно независимой (рис. 64).*

**Необходимость.** Пусть плоскости скрещиваются. Тогда по определению система векторов (7.9) линейно независима. Если бы система (7.11) была линейно зависимой, то

$$\bar{B} - \bar{A} = \alpha_1\bar{p}_1 + \alpha_2\bar{p}_2 + \dots + \alpha_k\bar{p}_k + \beta_1\bar{q}_1 + \beta_2\bar{q}_2 + \dots + \beta_l\bar{q}_l,$$

откуда

$$\bar{A} + \alpha_1\bar{p}_1 + \alpha_2\bar{p}_2 + \dots + \alpha_k\bar{p}_k = \bar{B} - (\beta_1\bar{q}_1 + \beta_2\bar{q}_2 + \dots + \beta_l\bar{q}_l).$$

Следовательно, эти плоскости имели бы общую точку.

**Достаточность.** Пусть векторы (7.11) линейно независимы. Тогда по доказанному плоскости не имеют общих точек и общих направлений, т. е. скрещиваются.

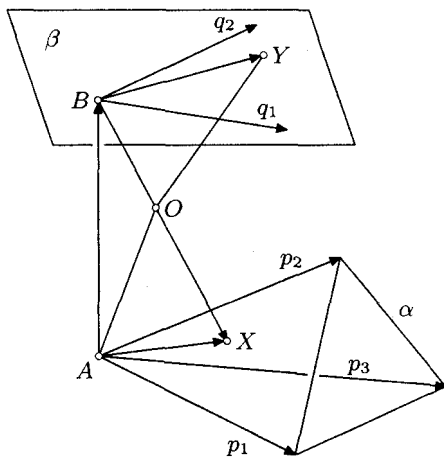


Рис. 64

**Следствие 1.** Суммой скрещивающихся  $k$ -плоскости и  $l$ -плоскости является плоскость размерности

$$s = k + l + 1. \quad (7.12)$$

**Следствие 2.** Для того, чтобы плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекались, необходимо и достаточно, чтобы система векторов (7.11) была линейно зависимой.

**Следствие 3.** Если плоскости не имеют общих точек, но имеют  $m$  независимых общих направлений, то их суммой является плоскость размерности

$$s = k + l + 1 - m, \quad (7.13)$$

поскольку каждое общее направление снижает размерность суммы на единицу.

**Теорема.** Если плоскости пересекаются и имеют  $m$  независимых общих направлений, то их пересечением является плоскость размерности  $m$ .

Действительно, пусть  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_m$  — линейно независимые векторы общих направлений. Тогда пересечением данных плоскостей является плоскость

$$\bar{X} = \bar{X}_0 + \mu_1 \bar{r}_1 + \mu_2 \bar{r}_2 + \dots + \mu_m \bar{r}_m,$$

где  $X_0$  — общая точка данных плоскостей.

**Следствие 4.** Суммой двух пересекающихся плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  размерностей  $k$  и  $l$  является плоскость размерности

$$s = k + l - m, \quad (7.14)$$

где  $m$  — размерность пересечения.

Далее, поскольку размерность  $s$  суммы плоскостей не больше размерности  $n$  всего пространства, то для пересекающихся плоскостей

$$k + l - m \leq n, \quad m \geq k + l - n$$

( $m$  — размерность пересечения), а для непересекающихся плоскостей

$$k + l + 1 - m \leq n$$

( $m$  — число независимых общих направлений).

Отсюда, в частности, следует, что две гиперплоскости либо пересекаются, либо сильно параллельны, так как  $(n-1) + (n-1) + 1 - m \leq n$ , откуда следует  $m \geq n-1$  и поэтому  $m = n-1$  (неравенство невозможно).

Для примера рассмотрим подробнее случаи взаимного расположения двух двумерных плоскостей. Для них  $k + l + 1 = 5$ , поэтому непересекающиеся двумерные плоскости могут лежать не менее чем в пятимерном пространстве. Если они имеют только одну общую точку или только одно общее направление (слабо параллельны), то они лежат в четырехмерном пространстве. Обратно, в 4-мерном пространстве две двумерные плоскости наиболее общего расположения либо пересекаются в единственной точке, либо слабо параллельны.

Если две двумерные плоскости либо имеют две общие точки, либо два общих направления, то они лежат в одном трехмерном пространстве и, следовательно, они или пересекаются по прямой, или сильно параллельны (т. е. параллельны в обычном стереометрическом смысле).

Обратимся еще к случаю прямой и трехмерной плоскости. Если они не имеют ни общей точки, ни общего направления, то их суммой является пятимерное пространство. В 4-мерном пространстве либо имеется единственная точка пересечения, либо эта прямая параллельна некоторому направлению в гиперплоскости, т. е. они параллельны. Возможен еще один случай, когда прямая лежит в гиперплоскости.

**З а д а ч а.** В четырехмерном пространстве заданы две плоскости:  $\alpha$  — тремя точками  $A(1, 1, -1, 0)$ ,  $A_1(2, -1, 0, 1)$ ,  $A_2(0, -1, 1, 0)$  и  $\beta$  — тремя точками:  $B(1, 2, 1, 2)$ ,  $B_1(1, 3, -1, 0)$ ,  $B_2(1, -1, 2, 1)$ . Определить их взаимное расположение, а также расположение прямой  $BB_1$  относительно плоскости  $\alpha$ .

**Р е ш е н и е.** Найдем направляющие векторы (базис) плоскости  $\alpha$ :

$$\vec{p}_1 = \overline{AA_1} = (1, -2, 1, 1), \quad \vec{p}_2 = \overline{AA_2} = (-1, -2, 2, 0)$$

и направляющие векторы плоскости  $\beta$ :

$$\bar{q}_1 = \overline{BB_1} = (0, 1, -2, -2), \quad \bar{q}_2 = \overline{BB_2} = (0, -3, 1, -1)$$

и запишем параметрические уравнения этих плоскостей:

$$\bar{X} = \bar{A} + t_1\bar{p}_1 + t_2\bar{p}_2 = (1 + t_1 - t_2, 1 - 2t_1 - 2t_2, -1 + t_1 + 2t_2, t_1),$$

$$\bar{Y} = \bar{B} + \lambda_1\bar{q}_1 + \lambda_2\bar{q}_2 = (1, 2 + \lambda_1 - 3\lambda_2, 1 - 2\lambda_1 + \lambda_2, 2 - 2\lambda_1 - \lambda_2).$$

Ищем общие точки плоскостей. Приравнивая соответственные координаты векторов  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$ , получаем систему:

$$\begin{cases} t_1 - t_2 = 0, \\ -2t_1 - 2t_2 = 1 + \lambda_1 - 3\lambda_2, \\ t_1 + 2t_2 = 2 - 2\lambda_1 + \lambda_2, \\ t_1 = 2 - 2\lambda_1 - \lambda_2. \end{cases}$$

Исключив из нее, например,  $t_2$  и  $\lambda_2$ , приходим к двум противоречащим друг другу уравнениям  $t_1 + \lambda_1 = 1$  и  $t_1 + \lambda_1 = -1$ . Следовательно, система несовместна, и плоскости общих точек не имеют. Согласно сделанному выше заключению, они имеют направления параллельности. Чтобы их определить, найдем вектор  $\bar{r}$ , принадлежащий обеим плоскостям:

$$\bar{r} = t_1\bar{p}_1 + t_2\bar{p}_2 = \lambda_1\bar{q}_1 + \lambda_2\bar{q}_2.$$

Из этого равенства получаем однородную линейную систему, соответствующую предыдущей:

$$\begin{cases} t_1 - t_2 = 0, \\ -2t_1 - 2t_2 = \lambda_1 - 3\lambda_2, \\ t_1 + 2t_2 = -2\lambda_1 + \lambda_2, \\ t_1 = -2\lambda_1 - \lambda_2. \end{cases}$$

Она имеет ненулевое решение  $t_1 = t_2 = -\lambda_1 = \lambda_2$ , определяющее вектор  $\bar{r} = t_1(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) = t_1(0, -4, 3, 1)$ , который при любом  $t_1 \neq 0$  определяет единственное направление параллельности.

Прямая  $BB_1$  имеет направляющий вектор  $\bar{q}_1$ , не параллельный вектору  $\bar{r}$  и поэтому она *скрещивается* с плоскостью  $\alpha$ .

## § 51. Евклидово векторное пространство

**51.1. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами.** Скалярным произведением  $\bar{a}\bar{b}$  векторов  $\bar{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $\bar{b}(b_1, b_2, \dots, b_n)$  называется число

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n. \quad (7.15)$$

По этой формуле легко проверить, что скалярное произведение векторов коммутативно, ассоциативно относительно умножения вектора на число и дистрибутивно относительно суммы векторов, поскольку этими свойствами обладают операции над действительными числами.

Если  $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то

$$\vec{r}\vec{r} = r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0. \quad (7.16)$$

Модулем  $|\vec{r}|$  вектора  $\vec{r}$  называется число

$$|\vec{r}| = \sqrt{r^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (7.17)$$

Векторное пространство  $V^n$  называется *евклидовым векторным пространством*, если в нем задана операция скалярного умножения векторов.

Для любых двух векторов этого пространства выполняется *неравенство Коши—Буняковского*:

$$(\vec{a}\vec{b})^2 \leq \vec{a}^2\vec{b}^2. \quad (7.18)$$

**Доказательство.** В силу (7.16)  $(\vec{a} - t\vec{b})^2 \geq 0$  при любом  $t$ , или

$$\vec{a}^2 - 2(\vec{a}\vec{b})t + \vec{b}^2t \geq 0.$$

Квадратный трехчлен неотрицателен тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен:  $(\vec{a}\vec{b})^2 - \vec{a}^2\vec{b}^2 \leq 0$ , что совпадает с (7.18). Очевидно, равенство имеет место лишь в случае, когда  $\vec{a} = t\vec{b}$ , т. е. когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.

Из равенства (7.18) следует, что

$$-1 \leq \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \leq 1. \quad \square$$

Углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число  $\varphi \in [0, \pi]$ , такое что

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \quad (7.19)$$

**51.2. Ортогональная система векторов.** Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. На основании определения векторы  $\vec{e}_i$  (7.3) попарно ортогональны и  $|\vec{e}_i| = 1$ . Векторный базис  $\vec{e}_i$  называется *ортонормированным базисом* евклидова пространства  $V^n$ .

*Система векторов*  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$  называется *ортогональной*, если эти векторы ненулевые и попарно ортогональны.

**Теорема.** *Ортогональная система векторов линейно независима.*

В самом деле, пусть  $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_m \bar{a}_m = \bar{0}$  и  $\bar{a}_i \bar{a}_j = 0$  при  $j \neq i$ . Умножим это равенство скалярно на вектор  $\bar{a}_i$ :

$$\lambda_1 (\bar{a}_1 \bar{a}_i) + \lambda_2 (\bar{a}_2 \bar{a}_i) + \dots + \lambda_i \bar{a}_i^2 + \dots + \lambda_m (\bar{a}_m \bar{a}_i) = 0,$$

откуда  $\lambda_i \bar{a}_i^2 = 0$ . Так как  $\bar{a}_i^2 \neq 0$ , то  $\lambda_i = 0$  при  $i = 1, 2, \dots, m$ . Следовательно, векторы  $\bar{a}_i$  линейно независимы.

**Следствие.** *Ортогональная система векторов пространства  $V^n$  содержит не более  $n$  векторов.*

**Теорема.** *Для данного вектора  $\bar{r}_1 \in V^n$  существуют векторы  $\bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$ , образующие с вектором  $\bar{r}_1$  ортогональную систему.*

**Доказательство.** Имеем базис (7.3) пространства  $V^n$ . Искомый вектор ищем в представлении его линейной комбинацией  $\bar{r}_2 = \bar{e}_2 + x\bar{r}_1$ . Согласно заданному условию  $\bar{r}_1 \bar{r}_2 = \bar{r}_1 \bar{e}_2 + x\bar{r}_1^2 = 0$ , откуда  $x = -\frac{\bar{r}_1 \bar{e}_2}{\bar{r}_1^2}$ . Тогда  $\bar{r}_2 = \bar{e}_2 - \frac{\bar{r}_1 \bar{e}_2}{\bar{r}_1^2} \bar{r}_1$ . Затем ищем  $\bar{r}_3 = \alpha \bar{r}_1 + \beta \bar{r}_2 + \bar{e}_3$ , чтобы  $\bar{r}_1 \bar{r}_3 = 0$  и  $\bar{r}_2 \bar{r}_3 = 0$ , т.е. чтобы  $\alpha \bar{r}_1^2 + \bar{r}_1 \bar{e}_3 = 0$  и  $\beta \bar{r}_2^2 + \bar{r}_2 \bar{e}_3 = 0$ , откуда  $\alpha = -\frac{\bar{r}_1 \bar{e}_3}{\bar{r}_1^2}$  и  $\beta = -\frac{\bar{r}_2 \bar{e}_3}{\bar{r}_2^2}$ , поэтому  $\bar{r}_3 = -\frac{\bar{r}_1 \bar{e}_3}{\bar{r}_1^2} \bar{r}_1 - \frac{\bar{r}_2 \bar{e}_3}{\bar{r}_2^2} \bar{r}_2 + \bar{e}_3$ . Продолжая этот процесс, построим искомую систему  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$  векторов, где

$$\bar{r}_n = \bar{e}_n - \frac{\bar{r}_1 \bar{e}_n}{\bar{r}_1^2} \bar{r}_1 - \frac{\bar{r}_2 \bar{e}_n}{\bar{r}_2^2} \bar{r}_2 - \dots - \frac{\bar{r}_{n-1} \bar{e}_n}{\bar{r}_{n-1}^2} \bar{r}_{n-1}. \quad \square$$

Описанный процесс построения ортогональной системы векторов называется *процессом ортогонализации*.

**51.3. Ортогональные подпространства.** Подпространства  $V_1^k$  и  $V_2^m$  векторного евклидова пространства  $V^n$  называются *взаимно ортогональными*, если каждый вектор одного из них ортогонален каждому вектору другого:

$$V_1 \perp V_2 \iff (\forall \bar{a} \in V_1 \text{ и } \forall \bar{b} \in V_2 \quad \bar{a}\bar{b} = 0).$$

Если при этом сумма этих подпространств есть все пространство  $V^n$ , а пересечением является только нулевой вектор, то подпространства  $V_1$  и  $V_2$  называются *ортогонально дополняющими* друг друга. Сумма их размерностей равна  $n$ .

**Теорема.** *Если  $V_1$  и  $V_2$  — взаимно дополняющие подпространства векторного пространства  $V^n$  и  $\bar{r}$  — произвольный вектор пространства  $V^n$ , то существуют единственные векторы  $\bar{a} \in V_1$  и  $\bar{b} \in V_2$  такие, что*

$$\bar{r} = \bar{a} + \bar{b}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\bar{e}_i$  — базис пространства  $V^n$ ,  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$  — базис  $V_1$ , а  $\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_n$  — базис  $V_2$ . Тогда

$$\bar{r} = (x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_k \bar{e}_k) + (x_{k+1} \bar{e}_{k+1} + \dots + x_n \bar{e}_n) = \bar{a} + \bar{b}.$$

Осталось доказать, что это разложение единственно. Предположим, что  $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$  и  $\vec{a} \neq \vec{a}_1$ ,  $\vec{a}, \vec{a}_1 \in V_1$ ,  $\vec{b}, \vec{b}_1 \in V_2$ . Тогда  $\vec{a} - \vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}$  — ненулевой вектор, принадлежащий  $V_1$  и  $V_2$ , т. е.  $V_1$  и  $V_2$  не являются взаимно дополняющими. Единственность разложения доказана.  $\square$

**Определение.** Представление  $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$  называется разложением вектора  $\vec{r}$  по подпространствам  $V_1$  и  $V_2$ , а вектор  $\vec{a}$  называется *ортогональной составляющей вектора  $\vec{r}$  в подпространстве  $V_1$*  и обозначается  $\vec{a} = C(\vec{r})$ . Модуль вектора  $\vec{a}$  называется *ортогональной проекцией вектора  $\vec{r}$  на данное подпространство*. Они определяются однозначно.

## § 52. Евклидово $n$ -мерное пространство $E^n$

В аффинном пространстве  $\mathcal{A}^n$  введем метрику заданием в нем скалярного произведения векторов. Тогда оно будет операционно богаче. Полученное геометрическое пространство давно известно из школьной геометрии. Оно называется *евклидовым пространством  $E^n$* . Его также можно получить из векторного евклидова пространства введением в нем точек. Структуру всех рассмотренных выше пространств и зависимость между ними можно представить следующей схемой.

### Структура геометрических пространств

Название пространства	Геометрические объекты		Алгебраические операции	
	точки	векторы	сложение векторов, умножение вектора на число	скалярное умножение
Векторное пространство $V^n$	—	+	+	—
Аффинное пространство $\mathcal{A}^n$	+	+	+	—
Векторное евклидово пространство $\tilde{V}^n$	—	+	+	+
Евклидово пространство $E^n$	+	+	+	+

**52.1. Длина отрезка. Уравнение  $(n - 1)$ -мерной сферы.** Если в евклидовом пространстве  $E^n$  задана ортонормированная система координат, то по формулам (7.7) и (7.17) сразу получим координатную формулу длины отрезка:

$$AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \quad (7.20)$$

Фиксируем точку  $A$ , а точку  $B$  будем считать переменной, обозначив ее координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , тогда формула (7.8) приводит к уравнению  $(n - 1)$ -мерной сферы евклидова пространства  $E^n$  как множества всех его точек, удаленных от данной точки  $A$  на заданное расстояние  $R$ :

$$(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 + \dots + (a_n - x_n)^2 = R^2. \quad (7.21)$$

Она является *поверхностью второго порядка*.

**52.2. Координатное задание  $k$ -мерной плоскости.** Пусть в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E^n$  задана гиперплоскость параметрическим уравнением (7.8) ( $k = n - 1$ ) и вектор  $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  ей ортогонален (*нормальный вектор гиперплоскости*), т.е.  $\bar{u} \bar{p}_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ). Умножив уравнение (7.8) скалярно на вектор  $\bar{u}$ , получим:  $\bar{u} \bar{X} = \bar{u} \bar{A}$ , или в координатной форме:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n = v, \quad (7.22)$$

где  $v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$ .

Итак, *гиперплоскость пространства  $E^n$  задается одним линейным уравнением с  $n$  переменными, коэффициентами при которых служат координаты нормального вектора этой гиперплоскости*.

Две гиперплоскости этого пространства пересекаются по  $(n - 2)$ -плоскости, так как  $(n - 1) + (n - 1) - n = n - 2$ . Тогда  $k$ -плоскость можно представить как пересечение  $n - k$  гиперплоскостей, т.е. задать *системой  $n - k$  линейных уравнений с  $n$  переменными*.

**52.3. Угол между прямой и  $k$ -плоскостью.** Обсудим вопрос об определении угла между прямой и  $k$ -плоскостью. Пусть  $\bar{m}$  — направляющий вектор данной прямой  $m$  и  $k$ -плоскость  $\alpha$  имеет параметрическое уравнение (7.8). Пусть  $\beta$  —  $(n - k)$ -плоскость, являющаяся ее ортогональным дополнением в пространстве  $E^n$ . Согласно теореме п. 51.3 вектор  $\bar{m}$  можно единственным образом разложить по направляющим векторным подпространствам данных плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\bar{m} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \bar{a} \subset \alpha, \quad \bar{b} \subset \beta, \quad \bar{a} = C(\bar{m}).$$

Пусть  $\bar{r}$  — направляющий вектор произвольной прямой  $\alpha$ . Обозначим  $(\bar{m}, \bar{a}) = \varphi$ ,  $(\bar{m}, \bar{r}) = \psi$ ,  $(\bar{r}, \bar{a}) = \gamma$ ,  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ . На основании представления вектора  $\bar{m}$  имеем  $\bar{m} \bar{r} = \bar{a} \bar{r} + \bar{b} \bar{r}$ . Так как по построению



$\beta \perp \alpha$  и  $\bar{b} \subset \beta$ , то  $\bar{b}\bar{r} = 0$  и поэтому  $\bar{m}\bar{r} = \bar{a}\bar{r}$ . В силу (7.19) имеем:  $|\bar{m}| \cos \psi = |\bar{a}| \cos \gamma$ , откуда

$$\cos \psi = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{m}|} \cos \gamma.$$

Если вектор  $\bar{m}$  не ортогонален плоскости  $\alpha$ , то из прямоугольного треугольника  $\frac{|\bar{a}|}{\bar{m}} = \cos \varphi$  и  $\cos \psi = \cos \varphi \cos \gamma$ . Поскольку  $0 < \cos \gamma < 1$ , то  $\cos \psi < \cos \varphi$  и, значит,  $\psi > \varphi$ .

Доказано, что если прямая  $m$  не перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , то угол  $\varphi$  между этой прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость  $\alpha$  есть наименьший из всех возможных углов  $\psi$ , образованных этой прямой  $m$  с прямыми плоскости  $\alpha$ . Он по определению принимается за угол между прямой  $m$  и плоскостью  $\alpha$ . В случае, когда  $m \perp \alpha$ , полагаем по определению  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

**52.4. Об углах между плоскостями.** Рассмотрим углы между векторами  $k$ -плоскости и  $l$ -плоскости евклидова пространства  $E^n$ . Каждое из множеств этих векторов замкнуто. Угол между векторами этих плоскостей является функцией (скалярным произведением) этих векторов, определенной на замкнутом множестве, и поэтому принимает, на этом множестве оба свои экстремальные значения — минимальное и максимальное. Изложение вопроса о их нахождении в настоящей книге сугубо элементарного характера не представляется возможным. Поэтому приходится ограничиться рассмотрением частного случая — углов между двумя двумерными плоскостями в четырехмерном пространстве. Заметим однако, что при  $k > 2$  кроме максимального и минимального значений углов существуют еще  $k - 2$  значений, находящихся между ними. Все они называются *стационарными углами* между  $k$ -плоскостями.

Пусть две произвольные двумерные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  четырехмерного пространства пересекаются в единственной точке  $O$ , и  $OA$  — некоторая прямая плоскости  $\alpha$ ,  $OB$  — некоторая прямая плоскости  $\beta$  (рис. 65). Острый угол  $AOB$  необходимо должен иметь минимальное ненулевое значение (абсолютный минимум), поскольку плоскости, кроме точки  $O$ , других общих точек не имеют. Пусть  $\widehat{AOB} = \varphi$  и есть этот абсолютный минимум. Тогда по свойству угла между плоскостями в смысле стереометрии (трехмерной геометрии) плоскость  $AOB$  перпендикулярна обеим плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ . Найденная плоскость приводит ко второй плоскости  $A_1OB_1$  с таким же свойством. В самом деле, пусть  $OA_1$  — перпендикуляр к прямой  $OA$ , лежащий в плоскости  $\alpha$ . Тогда прямая  $OA_1$  перпендикулярна к плоскости  $AOB$  и, значит, к прямой  $OB$ . Аналогично, если  $BOB_1$  — прямой угол в плоскости  $\beta$ , то  $OB_1 \perp OA$ . Таким

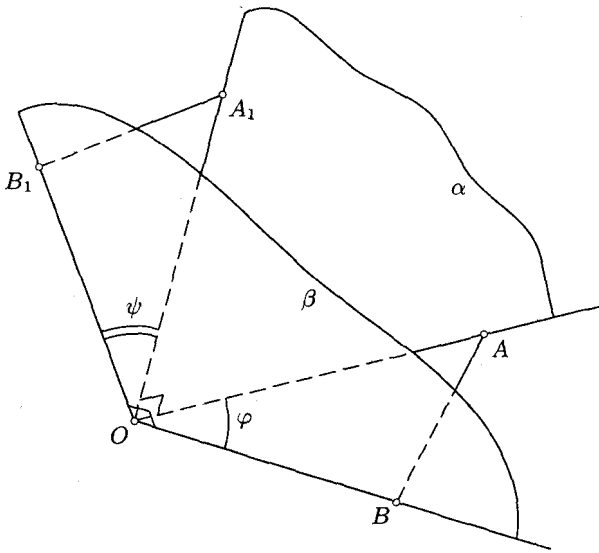


Рис. 65

образом, каждая из двух прямых  $OA$  и  $OB$  перпендикулярна каждой из прямых  $OA_1$  и  $OB_1$  и поэтому к плоскости  $A_1OB_1$ , т. е. плоскость  $A_1OB_1$  также стереометрически перпендикулярна плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ .

Доказано, что если углы  $A_1OB_1 = \psi$  и  $AOB = \varphi$  не равны, то других плоскостей, кроме двух найденных, с аналогичными свойствами не существует. В случае равенства  $\varphi = \psi$  плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  вопреки предположению пересекались бы по прямой, т. е. лежали бы в трехмерном пространстве.

Итак, две произвольные двумерные плоскости четырехмерного пространства образуют в точке их пересечения два острых угла, лежащих в двух плоскостях, которые стереометрически перпендикулярны друг другу.

Если оба эти угла прямые, то плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  ортогонально дополняют друг друга (каждая прямая одной плоскости перпендикулярна каждой прямой другой плоскости).

Имеется уравнение для вычисления пары углов между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ . Если эти плоскости заданы уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = ax_3 + bx_4, \\ x_2 = cx_3 + dx_4, \end{cases}$$

то искомые углы находятся из уравнения:

$$\operatorname{tg}^4 \varphi - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \operatorname{tg}^2 \varphi + (ad - bc)^2 = 0. \quad (7.23)$$

(Schoute P. H. Mehrdimensionale Geometrie, I. Leipzig, Göschen, 1902. S. 175)

**52.5. Расстояние от точки до гиперплоскости.** Минимальным расстоянием от точки до  $k$ -плоскости является расстояние от данной точки до основания перпендикуляра, опущенного из нее на  $k$ -плоскость. Найдем расстояние от точки  $M(m_1, m_2, \dots, m_n)$  до гиперплоскости  $\gamma$ , заданной уравнением (7.22) в ортонормированных координатах.

Параметрические уравнения перпендикуляра, опущенного из точки  $M$ , на гиперплоскость  $\gamma$ , имеют вид:

$$x_i = m_i + u_i t, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.24)$$

Основание этого перпендикуляра соответствует значению параметра  $t$ , для которого нормальный вектор  $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  гиперплоскости удовлетворяет уравнению (7.22):

$$u_1(m_1 + u_1 t) + u_2(m_2 + u_2 t) + \dots + u_n(m_n + u_n t) = v,$$

откуда

$$t = \frac{v - (u_1 m_1 + u_2 m_2 + \dots + u_n m_n)}{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}.$$

На основании формулы (7.18) искомое расстояние  $h$  от точки  $M$  до гиперплоскости  $\gamma$  равно:

$$\begin{aligned} h^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - m_i)^2 = t^2 (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2) = \\ &= \frac{(u_1 m_1 + u_2 m_2 + \dots + u_n m_n - v)^2}{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}, \\ h &= \frac{|u_1 m_1 + u_2 m_2 + \dots + u_n m_n - v|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

## § 53. Бариецентрические координаты точки аффинного пространства относительно $n$ -мерного симплекса

**53.1. Определение.** Обратимся к векторно-параметрическому уравнению (7.8)  $k$ -мерной плоскости пространства  $\mathcal{A}^n$ . При  $k = n$  оно выражает вектор  $\bar{X}$  произвольной точки  $X$  этого пространства через линейно независимые векторы  $\bar{p}_i$  и вектор  $\bar{A}$  фиксированной точки  $A$ , т. е. представляет собой уравнение всего аффинного пространства  $\mathcal{A}^n$ .

Зададим в пространстве  $n$ -мерный симплекс  $(S) = A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  как совокупность  $n + 1$  точек  $A_i$ , не лежащих в одной гиперплоскости. Векторы  $\overline{A_{n+1}A_i}$  его ребер линейно независимы. Согласно (7.8) при  $A \equiv A_{n+1}$  имеем:

$$\overline{A_{n+1}X} = \lambda_1 \overline{A_{n+1}A_1} + \lambda_2 \overline{A_{n+1}A_2} + \dots + \lambda_n \overline{A_{n+1}A_n}. \quad (7.26)$$

При любом начале  $O$  векторов это равенство эквивалентно такому:

$$\overline{X} - \overline{A_{n+1}} = \lambda_1 (\overline{A_1} - \overline{A_{n+1}}) + \lambda_2 (\overline{A_2} - \overline{A_{n+1}}) + \dots + \lambda_n (\overline{A_n} - \overline{A_{n+1}}),$$

или

$$\overline{X} = \lambda_1 \overline{A_1} + \lambda_2 \overline{A_2} + \dots + \lambda_n \overline{A_n} + (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n) \overline{A_{n+1}}.$$

Положим  $1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n = \lambda_{n+1}$ . Тогда для любой точки  $X$  будут выполняться равенства:

$$\begin{cases} \overline{X} = \lambda_1 \overline{A_1} + \lambda_2 \overline{A_2} + \dots + \lambda_n \overline{A_n} + \lambda_{n+1} \overline{A_{n+1}}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} = 1 \end{cases} \quad (7.27)$$

независимо от выбора начала  $O$  векторов.

Числа  $\lambda_i$  в силу (7.26) определяются однозначно для данной точки  $X$  и данного симплекса  $(S)$ .

**Определение.** Если имеют место соотношения (7.27), то числа  $\lambda_i$  называются *барицентрическими координатами точки  $X$  относительно симплекса  $(S)$* .

Следствие (7.26) все  $\lambda_i$ , кроме  $\lambda_{n+1}$ , являются *аффинными координатами* точки  $X$  относительно аффинной системы координат с началом  $A_{n+1}$  и базисными векторами  $\overline{e_i} = \overline{A_{n+1}A_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В частности, для вершины  $A_k$  координаты  $\lambda_k = 1$  и  $\lambda_i = 0$  при  $i \neq k$ . Формула (1.39) расстояния между точками сохраняет свой прежний вид

$$AB^2 = - \sum_{i,j=1}^n (y_i - x_i)(y_j - x_j) a_{ij}^2, \quad i < j, \quad (7.28)$$

где  $a_{ij} = |A_i A_j|$ . Доказательство аналогично.

**53.2. Симплекс как геометрическое тело.** Не прибегая к строгим определениям, отметим, что  $n$ -мерный симплекс  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  как совокупность  $n + 1$  точек, не лежащих в одной гиперплоскости аффинного пространства, *не имеет внутренности*, т. е. не является геометрическим телом. Если же к равенствам (7.27) дополнительно потребовать, чтобы значение всех координат  $\lambda_i$  удовлетворяло условию  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ , то точки  $X$  будут внутренними или же граничными точками симплекса  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ . Обратно, для каждой внутренней или же граничной точки симплекса существует определенный набор ее барицентрических координат, таких что все  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ .

Иначе говоря, симплекс  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  является геометрическим телом тогда и только тогда, когда барицентрические координаты  $\lambda_i$  его точек  $X$  неотрицательны и не больше единицы.

## § 54. Центроид симплекса и центроиды его граней

**54.1. Центроид системы точек.** Гранями различных размерностей  $k$  (где  $k < n$ )  $n$ -мерного симплекса  $(S) = A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  являются  $k$ -мерные симплексы. При этом случаи  $k = 0$  и  $k = 1$  не исключаются из рассмотрения: нульмерные симплексы — суть точки  $A_i$  — вершины данного симплекса, одномерные — отрезки  $A_i A_j$  (ребра).

Будем рассматривать точки  $A_i \in \mathcal{A}^n$  вне зависимости от размерности пространства или  $k$ -плоскости. С целью общности доказываемых ниже утверждений определим понятие центроида совокупности точек.

**Определение.** Центроидом системы  $n$  произвольных точек  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  называется точка  $G$ , определяемая вектором

$$\vec{G} = \frac{1}{n}(\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_n) \quad (7.29)$$

при произвольном выборе начала векторов.

Конечно, центроид данной системы точек не должен зависеть от выбора начала векторов. Докажем, что это действительно так. Предположим, что при выборе начала в точке  $O$  выражение (7.29) определяет некоторую точку  $G$ , а при выборе начала в точке  $O_1$  это выражение определяет другую точку  $G_1$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\vec{OO}_1 + \vec{O}_1 A_i) = \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \vec{OO}_1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{O}_1 A_i = \vec{OO}_1 + \vec{O}_1 G_1 = \vec{OG}_1. \end{aligned}$$

Следовательно, точки  $G$  и  $G_1$  совпадают.

**54.2. Зависимость центроидов подсистем с центроидом данной системы точек** выражается следующей теоремой.

**Теорема.** Если дана система  $n$  произвольных точек, то все отрезки, каждый из которых соединяет центроид  $G_k$  совокупности любых  $k$  из этих точек с центроидом  $G_{n-k}$  совокупности остальных точек, пересекаются в центроиде  $G$  данной системы и делятся им в отношении  $\lambda = (n - k) : k$  (при фиксированном  $k$ .)

Действительно, если взять, например, точки  $A_1, A_2, \dots, A_k$  и точки  $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ , то

$$\vec{G}_k = \frac{1}{k}(\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_k), \quad \vec{G}_{n-k} = \frac{1}{n-k}(\vec{A}_{k+1} + \vec{A}_{k+2} + \dots + \vec{A}_n).$$

Разделим отрезок  $G_k G_{n-k}$  в отношении  $\lambda = \frac{n-k}{k}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{G}_k + \lambda \bar{G}_{n-k}}{1 + \lambda} &= \\ &= \frac{\frac{1}{k}(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_k) + \frac{n-k}{k} \cdot \frac{1}{n-k}(\bar{A}_{k+1} + \bar{A}_{k+2} + \dots + \bar{A}_n)}{1 + \frac{n-k}{k}} = \\ &= \frac{1}{n}(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_k + \bar{A}_{k+1} + \bar{A}_{k+2} + \dots + \bar{A}_n) = \bar{G}. \end{aligned}$$

Следовательно, делящая точка совпадает с центроидом данной системы точек. Очевидно, этот же результат получим, взяв любые другие группы из  $k$  и  $n-k$  данных точек.

В частности, при  $n = 3$ ,  $k = 1$  получаем свойство медиан треугольника, при  $n = 4$ ,  $k = 1$  — свойство медиан тетраэдра, а при  $n = 4$ ,  $k = 2$  — свойство бимедиан тетраэдра. При  $k = 1$  применительно к  $n$ -мерному симплексу имеем **обобщенную теорему о медианах**: все отрезки, каждый из которых соединяет вершину симплекса с центроидом противоположащей ей гиперграни, пересекаются в центроиде данного симплекса и делятся им в отношении  $(n-1) : 1$ , считая от вершины. При фиксированном значении  $k \geq 2$  аналогичное свойство получаем для отрезков, каждый из которых соединяет центроиды двух противоположных граней симплекса.

**54.3. Центроид системы центроидов.** Имеет место более общая теорема.

**Теорема.** Если дана система  $n$  произвольных точек, то центроид системы центроидов каждой  $m$  точек совпадает с центроидом данной системы.

**Доказательство.** Очевидно, число всех центроидов равно  $C_n^m$ . Поэтому вектор  $\bar{G}_m$  их системы имеет выражение:

$$\bar{G}_m = \frac{1}{C_n^m} \left( \frac{1}{m}(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_m) + \frac{1}{m}(\bar{A}_{n-m+1} + \dots + \bar{A}_n) \right).$$

Так как в общей сумме каждый вектор  $\bar{A}_i$  содержится  $C_{n-1}^{m-1}$  раз, то

$$\begin{aligned} \bar{G}_m &= \frac{C_{n-1}^{m-1}}{m C_n^m} (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_n) = \\ &= \frac{(n-1)! m! (n-m)!}{(m-1)! (n-m)! n! m} (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_n) = \\ &= \frac{1}{n} (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_n) = \bar{G}, \end{aligned}$$

чем и заканчивается доказательство.  $\square$

Для симплекса ( $S$ ) эта теорема означает, что *центр тяжести системы центров тяжести всех его граней одной размерности совпадает с центром тяжести симплекса.*

## § 55. Параллелепипеды

**55.1. Полуплоскости и параллелепипеды.** Если в уравнении (7.8)  $k$ -мерной плоскости одному из параметров  $t_i$  придавать только неотрицательные значения  $t_i \geq 0$ , а остальным параметрам  $t_i$  ( $i \neq l$ ) — произвольные действительные значения, то мы получим  $k$ -полуплоскость, ограниченную  $(k - 1)$ -плоскостью

$$\bar{X} = \bar{A} + t_1 \bar{p}_1 + t_2 \bar{p}_2 + \dots + t_k \bar{p}_k, \quad t_i \neq t_l. \quad (7.30)$$

Если в уравнении (7.8) в *сем* параметрам  $t_i$  придавать только значения  $0 \leq t_i \leq 1$ , то этим уравнением будет *определяться  $k$ -параллелепипед*, вершины которого задаются векторами:

$$\begin{aligned} \bar{A}, \quad \bar{A}_1 = \bar{A} + \bar{p}_1, \quad \bar{A}_2 = \bar{A} + \bar{p}_2, \quad \bar{A}_{12} = \bar{A} + \bar{p}_1 + \bar{p}_2, \quad \dots, \\ \bar{A}_{12\dots k} = \bar{A} + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots + \bar{p}_k. \end{aligned}$$

В частности, 2-параллелепипеды называются *параллелограммами* (рис. 66).

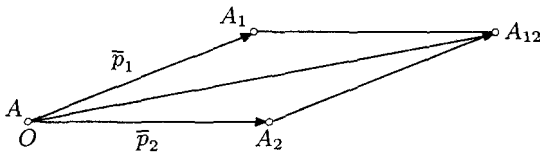


Рис. 66

Условимся обозначать  $k$ -параллелепипед с указанными вершинами  $k$ -параллелепипедом  $AA_1A_2\dots A_{12\dots k}$ . На рис. 67 изображен 3-параллелепипед  $AA_1A_2A_3A_{12}A_{13}A_{23}A_{123}$ .

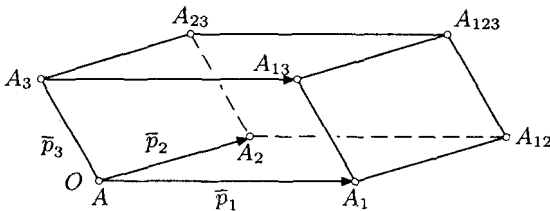


Рис. 67

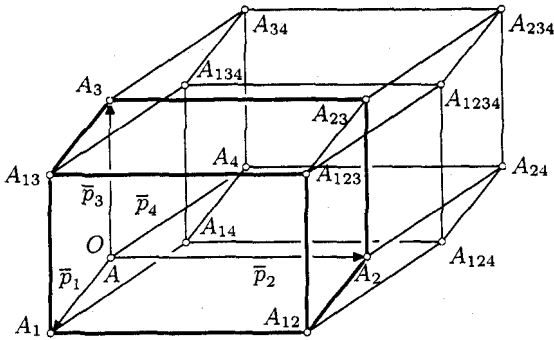


Рис. 68

**55.2. Грани параллелепипеда.** Придавая в уравнении (7.8) значения  $0 \leq t_i \leq 1$  всем параметрам  $t_i$  при  $i \neq l$ , а параметру  $t_l$  значения  $t_l = 0$  или  $t_l = 1$ , мы получим  $(k - 1)$ -параллелепипеды, являющиеся *гранями*  $k$ -параллелепипеда. Грани этих  $(k - 1)$ -параллелепипедов называются  $(k - 2)$ -гранями  $k$ -параллелепипеда. Грани этих  $(k - 2)$ -параллелепипедов называются  $(k - 3)$ -гранями  $k$ -параллелепипеда, и т. д. Таким образом,  $k$ -параллелепипед обладает  $m$ -гранями, где  $m$  пробегает значения от 0 до  $k - 1$ ; 0-грани совпадают с вершинами, 1-грани называются ребрами (при  $k = 2$  — сторонами). На рис. 68 изображены вершины и ребра 4-параллелепипеда  $AA_1A_2 \dots A_{1234}$ . Как видно из рис. 68, он имеет 16 вершин, 32 ребра, 24 2-грани и 8 3-граней.

Подсчитаем число  $N_m^k$   $m$ -граней  $k$ -параллелепипеда. Число  $N_0^k$  его вершин, очевидно, равно  $2^k$ , а число  $(k - 1)$ -граней равно  $2k$ . Докажем методом полной математической индукции, что число  $m$ -граней  $k$ -параллелепипеда равно

$$N_m^k = 2^{k-m} C_k^m. \quad (7.31)$$

В самом деле, формула (7.31) справедлива для  $k = 2$ , так как

$$N_0^2 = 2^2 C_2^0 = 2^2, \quad N_1^2 = 2C_2^1 = 2 \cdot 2.$$

Предположим, что она справедлива для  $(k - 1)$ -параллелепипедов, т. е. имеют место формулы:

$$N_m^{k-1} = 2^{k-m-1} C_{k-1}^m, \quad N_{m-1}^{k-1} = 2^{k-m} C_{k-1}^{m-1}.$$

Тогда на основании известной формулы для сочетаний

$$C_k^m = C_{k-1}^m + C_{k-1}^{m-1}$$

мы получаем, что

$$N_m^k = 2 \cdot 2^{k-m-1} \cdot C_{k-1}^m + 2^{k-m} C_{k-1}^{m-1} = 2^{k-m} C_k^m.$$



**55.3. Прямоугольный  $k$ -параллелепипед и  $k$ -куб.** Если все векторы  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_k$   $k$ -параллелепипеда попарно ортогональны, то он называется *прямоугольным*. Если к тому же длины этих векторов равны, то прямоугольный  $k$ -параллелепипед называется  *$k$ -кубом*.

## § 56. Ортогональная проекция точки и вектора на $k$ -плоскость

Прямая называется *перпендикулярной  $k$ -плоскости*, если она перпендикулярна каждой прямой этой плоскости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы направляющий вектор данной прямой был ортогонален  $k$  линейно независимым векторам этой плоскости.

Если точка  $P$  не принадлежит заданной  $k$ -плоскости  $\gamma$ , то в плоскости  $\gamma$  существует единственная точка  $H$  такая, что прямая  $PH$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ . Точка  $H$  называется *ортогональной проекцией* точки  $P$  на плоскость  $\gamma$ . Если точка  $P$  принадлежит  $\gamma$ , то она по определению считается своей ортогональной проекцией на  $\gamma$ .

Докажем существование и единственность рассматриваемой точки  $H$ . Пусть  $k$ -плоскость  $\gamma$  задана точкой  $A$  и линейно независимыми векторами  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_k$ . Тогда

$$\overline{AH} = \bar{r} = t_1 \bar{p}_1 + t_2 \bar{p}_2 + \dots + t_k \bar{p}_k.$$

Так как  $PH \perp \gamma$ , то  $\overline{PH} \cdot \bar{p}_i = 0$ , или  $(\overline{AH} - \overline{AP}) \cdot \bar{p}_i = 0$ . Если  $\overline{AP} = \bar{p}$ , то имеем систему:

$$\begin{cases} t_1 \bar{p}_1^2 + t_2 \bar{p}_1 \bar{p}_2 + \dots + t_k \bar{p}_1 \bar{p}_k = \bar{p} \bar{p}_1, \\ t_1 \bar{p}_2 \bar{p}_1 + t_2 \bar{p}_2^2 + \dots + t_k \bar{p}_2 \bar{p}_k = \bar{p} \bar{p}_2, \\ \dots \dots \dots \\ t_1 \bar{p}_k \bar{p}_1 + t_2 \bar{p}_k \bar{p}_2 + \dots + t_k \bar{p}_k^2 = \bar{p} \bar{p}_k, \end{cases} \quad (7.32)$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных  $t_i$ . Ее определитель

$$\begin{vmatrix} \bar{p}_1^2 & \bar{p}_1 \bar{p}_2 & \dots & \bar{p}_1 \bar{p}_k \\ \bar{p}_2 \bar{p}_1 & \bar{p}_2^2 & \dots & \bar{p}_2 \bar{p}_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{p}_k \bar{p}_1 & \bar{p}_k \bar{p}_2 & \dots & \bar{p}_k^2 \end{vmatrix}$$

называется *определителем Грама* векторов  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_k$ . Для линейно независимых векторов он отличен от нуля. Следовательно, система (7.32) имеет единственное решение, которое и дает коэффициенты  $t_i$  искомого вектора  $\overline{AH}$  и, значит координаты искомого проекции  $H$  точки  $P$ .

В частности, если векторы  $\bar{p}_i$  попарно ортогональны, то

$$t_i = \frac{\bar{p}\bar{p}_i}{\bar{p}_i^2}, \quad \overline{AH} = \frac{\bar{p}\bar{p}_1}{\bar{p}_1^2}\bar{p}_1 + \frac{\bar{p}\bar{p}_2}{\bar{p}_2^2}\bar{p}_2 + \dots + \frac{\bar{p}\bar{p}_k}{\bar{p}_k^2}\bar{p}_k.$$

Ортогональная проекция вектора  $\bar{p}$  на вектор  $\bar{r}$  называется *ортогональной* (скалярной) *проекцией этого вектора на плоскость  $\gamma$* .

Полученное решение позволяет найти расстояние  $|PH|$  от точки  $P$  до  $k$ -плоскости  $\gamma$ .

**Пример 1.** Найти длину и основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M(5, 1, 0, 8)$  на плоскость, проходящую через три точки:  $A(1, 2, 3, 4)$ ,  $B(2, 3, 4, 5)$ ,  $C(2, 2, 3, 7)$ . Координаты ортонормированные.

**Решение.** Для решения задачи плоскость  $ABC$  проекций будем считать заданной точкой  $A$  и направляющими векторами

$$\bar{p}_1 = \overline{AB} = (1, 1, 1, 1) \quad \text{и} \quad \bar{p}_2 = \overline{AC} = (1, 0, 0, 3).$$

Тогда система (7.32) имеет вид:

$$\begin{cases} 4t_1 + 4t_2 = 4, \\ 4t_1 + 10t_2 = 16, \end{cases} \quad \bar{p} = \overline{AM} = (4, -1, -3, 4),$$

откуда  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 2$ . Поэтому

$$\overline{AH} = -\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 = (1, -1, -1, 5)$$

и  $H(2, 1, 2, 9)$ ,  $|MH| = \sqrt{14}$ .

**Пример 2.** Вычислить координаты ортогональной проекции точки  $M(2, -1, 3, 1)$  на плоскость

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2 = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Задача аналогична предыдущей, но существенно отличается заданием плоскости проекций пересечением двух гиперплоскостей четырехмерного евклидова пространства и частным случаем их взаимного расположения: они ортогональны, так как ортогональны их нормальные векторы, при этом данная точка  $M$  принадлежит второй гиперплоскости. Эти две особенности существенно упрощают решение: искомая проекция является основанием перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на первую гиперплоскость. Этот перпендикуляр имеет параметрические уравнения:

$$x_1 = 2 + t, \quad x_2 = -1 + t, \quad x_3 = 3 + t, \quad x_4 = 1 - t.$$

Решая их совместно с уравнением первой гиперплоскости, находим  $t = -1$ . Следовательно, искомая проекция имеет координаты  $(1, -2, 2, 2)$ .

## Задачи к главе 7

(В основном заимствованы из «Сборника задач по геометрии» / Под редакцией В. Т. Базылева. М.: Просвещение, 1980. Разд. 2. Гл. 4.)

7.1. Определите размерности следующих множеств:

1) множества всех треугольников на плоскости, всех треугольников в пространстве,

2) множества всех тетраэдров,

3) множества всех окружностей пространства,

4) множества всех отрезков длины 1 на плоскости.

7.2. Даны точки  $A(1, 3, -1, 2)$  и  $B(-1, -2, 1, 3)$ . Найдите координаты точек пересечения прямой  $AB$  с координатными гиперплоскостями пространства  $\mathcal{A}^4$ .

7.3. Даны четыре вектора

$$\bar{a}_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \bar{a}_2 = (4, 3, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (-1, 1, 3, 5), \quad \bar{a}_4 = (0, 1, 2, 3).$$

Покажите, что они линейно зависимы и найдите максимальную подсистему линейно независимых из них. Выразите остальные векторы через векторы этой подсистемы.

7.4. Докажите, что точки  $A(2, 1, -3, 4)$ ,  $B(0, 1, -2, 17)$ ,  $C(3, -2, -1, 0)$ ,  $D(2, -5, 2, 9)$  принадлежат одной плоскости.

7.5. В аффинном пространстве  $\mathcal{A}^5$  дана плоскость  $\gamma = (A, \bar{a}, \bar{b})$ . Найдите параметрические и общие уравнения этой плоскости относительно аффинной системы координат  $(0, \bar{e}_i)$ , если известно, что

$$\begin{aligned} A(2, 0, 1, 0, -1), \quad \bar{a} &= \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + \bar{e}_4 + \bar{e}_5, \\ \bar{b} &= \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 - 2\bar{e}_4 + 3\bar{e}_5. \end{aligned}$$

7.6. Даны три неколлинеарные точки

$$A(1, -1, 4, -2), \quad B(0, 3, -4, 3), \quad C(2, 1, 0, -1)$$

и еще три неколлинеарные точки

$$A_1(0, 1, -1, 3), \quad B(-6, -1, -2, -3), \quad C_1(-4, 0, -1, 0).$$

Найдите координаты точки пересечения плоскостей  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

7.7. Даны две прямые  $AB$  и  $CD$ . Выясните их взаимное расположение, если

$$A(4, 0, -1, 2), \quad B(0, 3, 2, 1), \quad C(1, -1, -1, 0), \quad D(2, -1, -4, -5).$$

7.8. Даны три гиперплоскости пространства  $\mathcal{A}^4$ :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 1 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3 &= 0, \\ x_1 + 12x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Докажите, что их пересечением является плоскость.

7.9. Определите взаимное расположение плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  в пространстве  $\mathcal{A}^5$ :

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 1 + 2t_1 - 3t_2, & x_1 = 2 - \lambda_1 + \lambda_2, \\
 x_2 = 1 + t_1 - t_2, & x_2 = 4 + 2\lambda_1 - \lambda_2, \\
 (\alpha) \quad x_3 = 2 - t_1 + 2t_2, & (\beta) \quad x_3 = 3\lambda_1 + \lambda_2, \\
 x_4 = 1 + t_1 + 2t_2, & x_4 = 2 + \lambda_1 + 2\lambda_2, \\
 x_5 = 3t_1 - t_2 & x_5 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2.
 \end{array}$$

7.10. Определите взаимное расположение плоскостей  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , если  $A(4, 5, 3, 2)$ ,  $B(5, 7, 5, 4)$ ,  $C(6, 3, 4, 4)$ ;  $A_1(1, -2, 1, -3)$ ,  $B_1(3, -2, 3, -2)$ ,  $C_1(2, -4, 1, -4)$ .

7.11. Вычислите координаты ортогональной проекции точки  $M(0, -1, 2, 1)$  на гиперплоскость  $2x_1 + x_2 + x_4 - 3 = 0$ .

7.12. Вычислите расстояние от точки  $A(2, 3, -1, 1)$  до плоскости:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\
 -x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 &= 0.
 \end{aligned}$$

7.13. В ортонормированной системе координат пространства  $E^4$  даны уравнения плоскости:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 1 = 0. \end{cases}$$

Найти уравнения плоскости, вполне ортогональной к данной плоскости и содержащей точку  $P(1, -3, 2, 5)$ .

7.14. Дан симплекс  $A_1A_2A_3A_4A_5$  в пространстве  $E^4$ . Вычислите расстояние от середины ребра  $A_1A_2$  до центроида грани  $A_3A_4A_5$ , если известны длины всех его ребер.

7.15. Вычислите расстояние между центроидами граней  $A_1A_2A_3$  и  $A_1A_4A_5$  симплекса  $A_1A_2A_3A_4A_5$ , если известны длины всех его ребер.

7.16. Прямая пересекает гиперплоскости граней симплекса  $A_1A_2A_3A_4A_5$  в точках  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ . Докажите, что середины отрезков  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5$  принадлежат одной гиперплоскости.

7.17. Найдите ортогональную проекцию вектора  $(7, -4, -1, 2)$  на плоскость

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

7.18. Найдите длину диагонали  $n$ -мерного куба с ребром  $a$ .

7.19. Найдите отношение ортогональной проекции ребра  $n$ -мерного куба на его диагональ к диагонали куба.

7.20. Найдите угол между диагональю четырехмерного куба и его одномерной, двумерной и трехмерной гранями.

7.21. Найдите угол между диагональю  $n$ -мерного куба и его  $k$ -мерной гранью.

7.22. Докажите, что гиперплоскость, проведенная через концы  $n$  ребер  $n$ -мерного куба, выходящих из одной его вершины, перпендикулярна диагонали куба, выходящей из той же вершины. Найдите расстояние от вершины куба до этой гиперплоскости, если длина ребра куба равна  $a$ .

## Ответы

7.1. 1) шестимерно, девятимерно, 2) двенадцатимерно, 3) шестимерно, 4) трехмерно.

7.2.  $\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}\right), \left(-\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right), (5, 13, -5, 0)$ .

7.3. Векторы  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_2$  линейно независимы,

$$\bar{a}_3 = \frac{1}{5}(7\bar{a}_1 - 3\bar{a}_2), \quad \bar{a}_4 = \frac{1}{5}(4\bar{a}_1 - \bar{a}_2).$$

7.5.  $x_1 = 2 + t_1 + t_2, x_2 = t_1 + 2t_2, x_3 = 1 + 2t_1 + t_2, x_4 = t_1 - 2t_2,$   
 $x_5 = -1 + t_1 + 3t_2;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_4 - 8 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 - 1 = 0. \end{cases}$$

7.6.  $(-2, 1, 0, 3)$ .

7.7. Скрещиваются.

7.9. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  скрещиваются.

7.10. Плоскости не имеют общих точек, имеют одно общее направление  $\overline{AB} = \overline{C_1B_1} = (1, 2, 2, 2)$ .

7.11.  $\left(1, -\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$ .

7.12.  $\frac{\sqrt{465}}{6}$ .

7.13.  $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 16 = 0, \\ x_3 + x_4 - 7 = 0. \end{cases}$

7.17.  $(5, -5, -2, -1)$ .

7.18.  $a\sqrt{n}$ .

7.19.  $\frac{1}{n}$ .

7.20.  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ .

7.21.  $\cos \varphi = \sqrt{\frac{k}{n}}$ .

7.22.  $h = \frac{a}{\sqrt{n}}$ .

## Литература

- [1] *Атанасян Л. С.* Основы многомерной геометрии. М.: МГПИ имени Ленина, 1963.
- [2] *Гордецкий Д. З., Лейбин А. С.* Популярное введение в многомерную геометрию. Харьков: издательство Харьковского ун-та, 1964.
- [3] *Зетель С. И.* Новая геометрия треугольника. М.: Учпедгиз, 1962.
- [4] *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. Т. 1. М.: МЦНМО, 2004.
- [5] *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. Т. 2. М.: МЦНМО, 2006.
- [6] *Понарин Я. П.* Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. М.: МЦНМО, 2004.
- [7] *Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф.* Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989.
- [8] *Скопец З. А., Понарин Я. П.* Геометрия тетраэдра и его элементов. Ярославль: Верхне-Волжское книжное изд-во, 1974.
- [9] *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
- [10] *Хованский А. Н.* Аналитическая геометрия треугольника // Ученые записки Марийского пед-та. Т. 26. Йошкар-Ола, 1964. С. 5–318.
- [11] *Couderc P. et Balliccioni A.* Premier livre du Tétraèdre. Paris, 1935.
- [12] Enciclopedia delle matematiche elementari. Vol. II. P.1 (1937). P. 219–253, «La geometria del tetraedro» di G. Biggiogero a Milano.
- [13] *Thébault V.* Parmi les belles figures de la Géométrie dans l'espace (Géométrie du Tétraèdre). Paris, 1955.
- [14] *Neuberg J.* Mémoire sur le tetraèdre. Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1884.

## Предметный указатель

- Автополярный тетраэдр 99  
аналог теоремы Паскаля 103  
аналог теоремы Шлёмилъха 118  
антипараллельные сечения тетраэдра 105
- Бариецентрические координаты**  
вектора 14  
— направляющего вектора прямой 17  
— нормального вектора прямой 19  
— ортоцентра треугольника 20  
— точки относительно симплекса 178  
— — относительно тетраэдра 22  
— — относительно треугольника 11  
— центра описанной сферы 29
- бариецентрическое уравнение описанной окружности 28  
— описанной сферы 29  
— плоскости 24  
— прямой 16
- Вектор  $n$ -мерного пространства** 164  
векторы линейно независимые (зависимые) 165  
вырожденный ортоцентрический тетраэдр 126  
— треугольник 49
- Гармоническая поляра точки** относительно треугольника 39  
гиперболическая четверка прямых 110  
гиперboloид высот 95  
гиперboloидальные тетраэдры 100  
гомологичные тетраэдры 71  
гомологичные треугольники 37
- Изогональное преобразование**  
плоскости 47  
— пространства 90  
изотомические плоскости 79  
изотомическое преобразование плоскости 46  
— пространства 90
- Конфигурация Дезарга** 72  
косой параллелограмм 60  
— четырехугольник 54  
кривая Бурместера 53
- Неравенство**  
Коши—Буняковского 172  
неравенство Птолемея 55  
нормальные координаты точки относительно тетраэдра 22
- Общее направление двух плоскостей** 168  
ортогональная система векторов 172  
ортогональные подпространства 173  
ортологические косые тетраэдры 97  
— — четырехугольники 65  
— тетраэдры 96  
— треугольники 43  
ортонормированный векторный базис 172
- Параллелепипеды  $k$ -мерные** 182

- плоскости- $n$  косо́го
- четырёхугольника 66
- полярная плоскость точки
- относительно сферы 98
- относительно тетраэдра 73
- полярно сопряженные
- тетраэдры 101
- принцип взаимности 99
- пространство  $n$ -мерное
- векторное 164, 171
- — евклидово 174
- $n$ -мерное аффинное 166
- прямые Гаусса 80
- Симедиана** треугольника 35
- симплекс 163, 179
- сфера квазिवписанная
- в тетраэдр 134
- сферы квазивневписанные 137
- Лемуана 143
- Эйлера 124, 149
- сферы Аполлония 141
- Теорема Ван-Обеля** 75
- Гаусса (обобщенная) 57
- — аналог 87
- Дезарга 37
- Жергона 76
- Менелая для тетраэдра 79
- — для треугольника 56
- Плюккера 40
- Поиселе 71
- Чевы для тетраэдра 74
- — для треугольника 59
- Шаля 92, 100
- Шлёмильха 37
- — обобщенная 34
- Штейнера 95, 96
- тетраэдры Мёбиуса 102
- тетраэдры специальные
- изогональный 143
- изодинамический 138
- квазиописанный 134
- ортоцентрический 124
- прямоугольный 147
- равногранный 130
- точка Жергона треугольника
- 21
- Лемуана тетраэдра 108
- — треугольника 35
- Люилле 117
- Монжа 95
- Формула двенадцати величин**
- 111
- Монжа 110
- Центроид** системы точек 180



*Яков Петрович Понарин*

Элементарная геометрия  
Том 3. Треугольники и тетраэдры

Подписано в печать 10.12.2008 г. Формат  $60 \times 90^{1/16}$ . Бумага офсетная № 1.  
Печать офсетная. Печ. л. 12. Тираж 2000 экз. Заказ № 2

Издательство Московского центра непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».  
121099, Москва, Щубинский пер., д. 6.

---

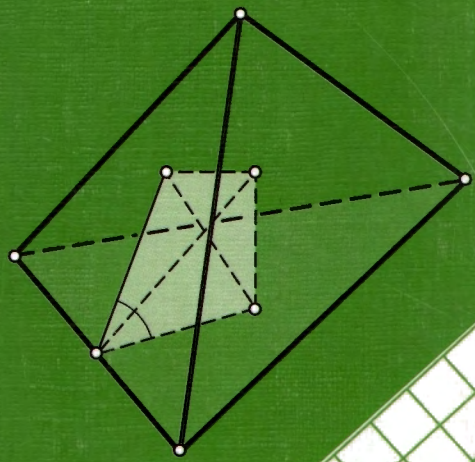
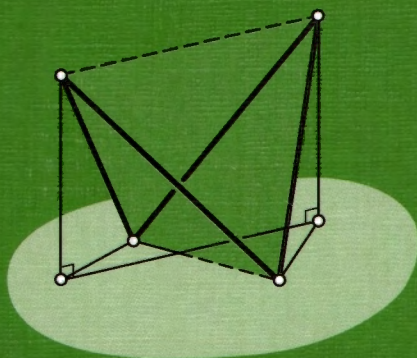
Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru

---

Пособие предназначено для учащихся старших классов школ с математической специализацией.

Оно содержит разнообразные сведения о геометрии треугольника и тетраэдра.

Представлен большой материал из богатого классического арсенала геометров прошлого.



ISBN 978-5-94057-400-2



9 785940 574002 >