Р.М.Тургунбаев, Р.А.Қошназаров

Математик анализнинг элементар математикага татбиқлари

Тошкент-2007

1-§. **Баъзи тенглама ва тенгсизликларни функциянинг содда хоссаларидан фойдаланиб ечиш**

Ушбу мақолада ўқувчиларга бир қарашда мураккаб, қийин кўринадиган баъзи тенглама ва тенгсизликларни уларда қатнашаётган функцияларнинг содда хоссалари ёрдамида ечиш усуллари қаралади.

Бундай усуллар тенглама ёки тенгсизликда икки хил характердаги функциялар қатнашганда жуда қўл келади.

1. *Аниқланиш соҳасидан фойдаланиш.* Баъзи ҳолларда, тенглама ёки тенгсизликларда қатнашаётган функцияларнинг аниқланиш соҳасини билиш тенглама ёки тенгсизликнинг ечими мавжуд эмаслигини билишга ёки ечимини топишга ёрдам беради.

Келгусида тенглама ёки тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси деганда унда қатнашаётган функциялар аниқланиш соҳаларининг умумий қисми тушунилади.

1-мисол. $\sqrt{3-x}$ =lg(x-3) тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси $3-x\geq0$ ва $x-3>0$ тенгсизликларни бир вақтда қаноатлантирувчи сонлар тўпламидан иборат. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси бўш тўплам, демак тенглама ечимга эга эмас.

Жавоб: илдизи йўқ.

Шундай қилиб, тенгламани ечмасдан унинг илдизлари йўқлигини аниқладик.

2-мисол. $2 - \sqrt{4-x^2} = \sqrt[4]{x^4-16}$ +x тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг аниқланиш соҳаси $4-x^2\geq0$ ва $x^4-16\geq0$ тенгсизликларни бир вақтда қаноатлантирувчи сонлар тўпламидан иборат. Бундан тенгламанинг аниқланиш соҳаси фақат -2 ва 2 сонлардангина иборат эканлигини кўриш қийин эмас. Бу сонларни тенгламага қуйиб текширамиз.

x=-2 да тенгламанинг чап томони 2 га, ўнг томони –2 га тенг, демак x=-2 тенгламанинг илдизи бўла олмайди.

$x=2$ да тенгламанинг чап ва ўнг томонлари 2 га тенг, демак $x=2$ тенгламанинг илдизи бўлади.

Жавоб: $x=2$.

3-мисол. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^4-1}<2^x-\dfrac{2}{1+x^2}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $x=1$ ва $x=-1$ дан иборат эканлигини кўриш кийин эмас.

$x=1$ да тенгсизликнинг чап томони 0 га, ўнг томони 1 га тенг. Демак, $x=1$ тенгсизликни канаотлантиради.

$x=-1$ да тенгсизликнинг чап томони 0, ўнг томони $-0,5$ га тенг, бундан $x=-1$ тенгсизликни канаотлантирмайди.

Жавоб: $x=1$.

4-мисол. $\lg x<\sqrt[4]{1-x^2}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $x>0$ ва $1-x^2\geq 0$ шартларни қаноатлантирувчи сонлардан иборат, яъни $0<x\leq 1$.

Равшанки, $x=1$ тенгсизлик ечими бўла олмайди. $(0,1)$ оралиқдан олинган ҳар бир x учун $\lg x<0$ ва тенгсизликнинг ўнг томони мусбат. Демак, $(0,1)$ оралиқ тенгсизлик ечими бўлади.

Жавоб: $0<x<1$

2. Функциянинг чегараланганлигидан фойдаланиш. Тенглама ва тенгсизликларни ечишда бирор тўпламда функциянинг қуйидан ёки юқоридан чегараланганлиги асосий рол ўйнайди. Масалан, M тўпламда $f(x)>A$, $g(x)<A$ булса, у холда $f(x)=g(x)$ тенглама ёки $f(x)<g(x)$ $(f(x)\leq g(x))$ тенгсизлик ечимга эга булмайди. Кўп ҳолларда $A=0$ бўлади, бунда M тўпламда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ишоралари ҳақида гап боради.

1-мисол. $\sin(2x+1)=x^2+2x+3$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Ихтиёрий x сон учун $\sin(2x+1)\leq 1$ ва $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geq 2$ ўринли, яъни тенгламанинг чап томони 1 дан катта, ўнг томони 2 дан кичик бўла олмайди. Бундан берилган тенгламанинг илдизи йўқ эканлиги келиб чикади.

Жавоб: илдизи йўқ.

2-мисол. x^3-x-sinπx=0 тенгламани ечинг.

Ечиш: Равшанки, 0, -1, 1 сонлари тенгламанинг илдизлари бўлади. Унинг бошқа илдизлари йўқлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $f(x)=x^3-x-\sin\pi x$ функциянинг тоқлигидан фойдаланамиз, яъни $x>0$, $x\neq1$ соҳани таҳлил қилиш кифоядир. Бу соҳани (0;1) ва (1;+∞) оралиқларга ажратамиз.

Берилган тенгламани $x^3-x=\sin\pi x$ кўринишда ёзиб, унинг чап ва ўнг томонидаги функцияларни юқоридаги оралиқларда текширамиз. (0;1) оралиқда $x^3<x$ бўлганлиги сабабли $g(x)=x^3-x$ функция фақат манфий қийматлар, $h(x)=\sin\pi x$ функция эса фақат мусбат қийматлар қабул қилади. Демак, (0;1) оралиқда берилган тенглама ечимга эга эмас.

$x>1$ бўлганда $g(x)$ функция фақат мусбат қийматлар, $h(x)=\sin\pi x$ функция ҳар хил ишорали қийматлар қабул қилади. Хусусан, (1;2] оралиқда $h(x)\leq0$, демак (1;2] оралиқда ҳам берилган тенглама илдизи мавжуд эмас.

Агар $x>2$ бўлса, у ҳолда $|\sin\pi x|\leq1$, $x^3-x=x(x^2-1)>2\cdot3=6$ бўлади. Бундан берилган тенгламанинг (2;+∞) оралиқда илдизи йўқ эканлиги келиб чиқади.

Демак, фақат x=0, x=-1, x=1 ларгина тенглама ечими бўлади.

Жавоб: $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

3-мисол. $\frac{1-x}{1+x} < 2^x$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: -1 дан фарқли барча сонлар тенгсизликнинг аниқланиш соҳасига тегишли. Тенгсизликнинг ўнг томонидаги $f(x)=2^x$ функция x нинг исталган қийматида мусбат қийматлар қабул қилади. Тенгсизликнинг чап томонидаги $g(x)=\frac{1-x}{1+x}$ функция (-∞;-1) ва [1;+∞) оралиқларда номусбат, (-1;1) оралиқда мусбат қийматлар қабул қилади. Бундан (-∞;-1) ёки [1;+∞) оралиқлардан олинган ҳар бир x тенгсизликни қаноатлантиради.

Энди тенгсизликни (-1;1) оралиқда текширамиз. Бу оралиқни иккита: (-1;0], (0;1) оралиққа ажратамиз.

$-1<x\le 0$ бўлсин, бу ҳолда $g(x)=1-\frac{2x}{1+x}\ge 1$, $f(x)=2^x\le 1$ бўлади. Демак, бу оралиқдаги x лар берилган тенгсизликни қаноатлантирмайди.

$0<x<1$ бўлсин, бу ҳолда $g(x)=1-\frac{2x}{1+x}<1$, $f(x)=2^x>1$ бўлади. Демак, (0;1) оралиқдан олинган x лар берилган тенгсизлик ечими бўлади. Юқорида топилган ечимларни бирлаштириб жавобни ёзамиз.

Жавоб: $-\infty<x<-1$, $0<x<+\infty$.

3. Функцияларнинг монотонлик хоссасидан фойдаланиш. Бундай ечиш усули қуйидаги тасдиқларга асосланади.

А) Агар f(x) функция E оралиқда узлуксиз ва қаътий монотон бўлса, у ҳолда f(x)=C тенглама E оралиқда кўпи билан битта илдизга эга бўлади.

Б) f(x) ва g(x) функциялар E оралиқда узлуксиз, f(x) қатъий ўсувчи, g(x) қатъий камаювчи бўлсин. У холда f(x) = g(x) тенглама E оралиқда кўпи билан битта илдизга эга бўлади.

E оралиқ $(-\infty;+\infty)$, $(a;\infty)$, $(-\infty;b)$, $[a;\infty)$, $(-\infty;b]$ чексиз оралиқлар, кесма, интервал, ярим интерваллардан иборат бўлиши мумкин.

1-мисол. $x\cdot 2^x=8$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Равшанки, агар $x\le 0$ бўлса, x тенгламанинг илдизи бўла олмайди (чунки $x\cdot 2^x\le 0$). $x>0$ бўлганда $f(x)= x\cdot 2^x$ функция узлуксиз ва қатъий ўсувчи, демак $(0;+\infty)$ оралиқда берилган тенгламанинг кўпи билан битта ечими мавжуд. x=2 тенгламанинг илдизи бўлишини кўриш қийин эмас. Демак бу ягона илдиздир.

Жавоб: x=2.

2-мисол. $2^x+3^x+4^x<3$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: $y=2^x$, $y=3^x$, $y=4^x$ функцияларнинг ҳар бири сонлар ўқида узлуксиз ва қатъий ўсувчи бўлганлиги сабабли, $y=2^x+3^x+4^x$ функция ҳам сонлар ўқида узлуксиз ва қатъий ўсувчи бўлади. Бундан $x>0$ да $2^x+3^x+4^x>3$, $x<0$ да $2^x+3^x+4^x<3$ ларга эга бўламиз. Демак, тенгсизликнинг ечими манфий сонлардан иборат.

Жавоб: x<0.

3-мисол. $\sqrt[4]{18-x}$ -$\sqrt[6]{x-2}$ =2 тенгламани ечинг.

Ечиш: Тенгламанинг аниқланиш соҳаси [2;18] кесмадан иборат. Бу тўпламда f(x)= $\sqrt[4]{18-x}$ ва g(x)=- $\sqrt[6]{x-2}$ функциялар узлуксиз ва қатъий камаювчи, демак h(x)= $\sqrt[4]{18-x}$ -$\sqrt[6]{x-2}$ функция ҳам узлуксиз ва қатъий камаювчидир. Шу сабабли h(x) функция ҳар бир қийматини фақат битта нуқтада қабул қилади. h(2)=2 эканлигини текшириш қийин эмас. Демак, x=2 тенгламанинг ягона илдизи бўлади.

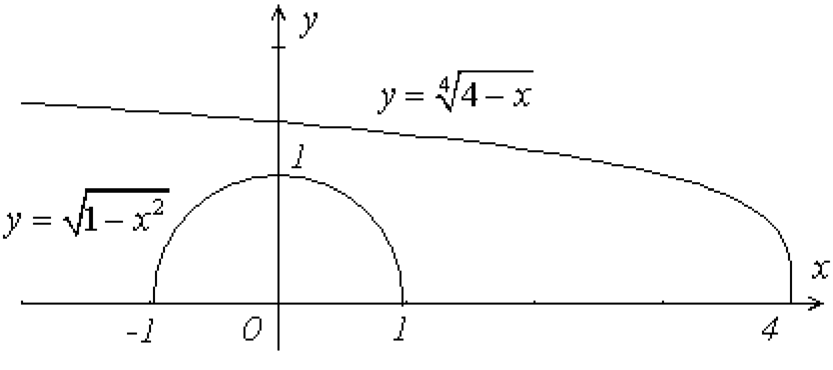
Жавоб: x=2.

4. *Графиклардан фойдаланиш*. Тенглама ва тенгсизликларни ечишда унинг чап ва ўнг томонидаги функциялар графикларининг эскизини чизиш фойдалидир. У ҳолда графиклар эскизи сонлар ўқини тенглама (тенгсизлик) ечимлари мавжудлиги равшан бўлган оралиқларга қандай ажратиш мумкинлигини аниқлашга имкон беради.

Шуни ҳам айтиш керакки, функция графигинг эскизи ечимни топишга ёрдам беради, жавоб графикдан келиб чиқади деб хулоса қилиш мумкин эмас, жавобни асослаш керак.

1-мисол. $\sqrt{1-x^2} < \sqrt[4]{4-x}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш: Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси [-1;1] кесмадан иборат. f(x)= $\sqrt{1-x^2}$ ва g(x)= $\sqrt[4]{4-x}$ функция графиклари эскизи қуйидагича (1-расм).



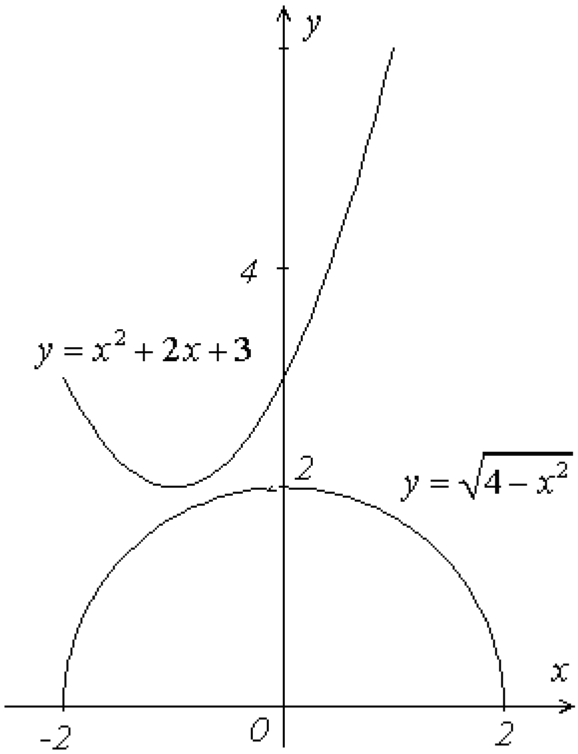
1-расм

Расмдан кўринадики, [-1;1] кесмага тегишли ҳар бир х учун берилган тенгсизлик ўринли. Шуни исбот қиламиз. [-1;1] кесмадан олинган исталган х учун $0 \le f(x) \le 1$ ва $\sqrt[4]{4-x} \ge \sqrt[4]{4-1} = \sqrt[4]{3} > 1$. Бундан эса [-1;1] дан олинган ҳар бир x учун $f(x) \le 1 < g(x)$ қўш тенгсизлик ўринли эканлиги келиб чиқади. Демак, берилган тенгсизликнинг ечими [-1;1] кесмадан иборат.

Жавоб: $-1 \le x \le 1$.

2-мисол. $x^2+2x+3=\sqrt{4-x^2}$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Тенгламанинг аниқланиш соҳаси [-2;2] кесмадан иборат. $f(x)=x^2+2x+3$ ва $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ функция графиклари эскизини чизамиз (2-расм).



2-расм

Расмдан кўринадики, f(x) функция графиги y=2 тўғри чизиқдан пастда, g(x) функция графиги эса юқорида ётмайди, ҳамда графиклар бу тўғри чизиққа ҳар хил нуқталарда уринади. Демак, тенглама ечимга эга эмас. Шуни исбот қиламиз. [-2;2] кесмадан олинган исталган х учун $\sqrt{4-x^2} \le 2$ ва

$x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geq 2$. Шунингдек $f(x)=2$ фақат $x=-1$ да, $g(x)=2$ эса фақат $x=0$ да ўринли. Бу эса тенгламанинг ечими йўқ эканлигини кўрсатади.

Жавоб: тенгламанинг ечими йўқ.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Қуйидаги тенгламаларнинг ечимга эга эмаслигини кўрсатинг:

а) $\sqrt{5-x}-\sqrt{x-8}=3$; б) $2^{|x|+1}=1-x^4$; в) $(x^2+x+1)(x^2+2x+3)=1$;

г) $\sin x=x^2+x+1$; д) $\sqrt{x}=-x^2+10x-24$.

2. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

а) $\cos x=1+x^4$; б) $x\cdot 4^x=32$; в) $12^x+5^x=13^x$;

г) $3^x+4^x=7$ д) $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}=6$; е) $4\sin\pi x=4x^2-4x+5$.

3. Қуйидаги тенгсизликларни ечинг:

а) $x\cdot 5^x>5$; б) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x-4}<1$; в) $5^x+2^x\geq 7$;

г) $\sqrt{2-x-x^2}<2x+1$; д) $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{x+14}>3$.

2-§. Ҳосиланинг ностандарт тенгламаларни ечишга татбиқи.

Ташқи кўриниши одатдаги тенгламалардан кескин фарқ қиладиган тенгламалар (масалан, $2^x=\cos x$, $x^2+4x\cos x+4=0$ ва ҳакозо), шунингдек, ташқи кўриниши одатдаги тенгламаларга ўхшайдиган, лекин, одатдаги усуллар билан ечиш мумкин бўлмайдиган тенгламалар (масалан, $\sin 7x+\cos 2x=2$, $\sin^4 x-\cos^7 x=1$ ва ҳакозо) ҳам учрайди. Бундай тенгламалар ностандарт тенгламалар деб аталади.

Ностандарт тенгламаларни ечишнинг умумий усули мавжуд эмас. Одатда, ностандарт тенгламаларни ечиш учун функцияларнинг графикларидан, турли хоссаларидан фойдаланилади. Маълумки, функцияларни текшириш, графикларини ясашда ҳосиладан фойдаланиш муҳим ахамиятга эга. Шундай экан ностандарт тенгламаларни ечишда ҳосиладан фойдаланиш мумкин бўлади ва бу тенгламанинг илдизларини топиш анча осонлашади.

Демак, ҳосиладан фойдаланиб ностандарт тенгламаларни ечиш, шунингдек, дифференциал ҳисобнинг асосий теоремаларидан кенг фойдаланиш мумкин.

Ностандарт тенглама $f(x)=0$ кўринишда берилган бўлсин. Умуман, ҳар қандай кўринишдаги тенгламаларни ҳам $f(x)=0$ кўринишга келтириш мумкин. $f(x)=0$ кўринишдаги тенгламани ечиш учун $y=f(x)$ функцияни кўриб чиқиш лозим бўлади.

$y=f(x)$ функция бирор X оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу X оралиқда $f(x)=0$ тенгламнинг илдизларини қараймиз.

Бунда бир нечта ҳол бўлиши мумкин:

а) $f(x)=0$ тенглама X оралиқда илдизга эга эмас.

Бундай ҳолда $y=f(x)$ функция графиги абсциссалар ўқи Ox дан юқорида ёки пастда жойлашган бўлиб, Ox ни кесиб ўтмаслиги аниқ. Равшанки, бу ерда $f(x)$ функция қуйидан чегараланган ва қуйи чегараси нолдан катта ёки юқоридан чегарланган ва юқори чегараси нолдан кичик бўлади, яъни шундай

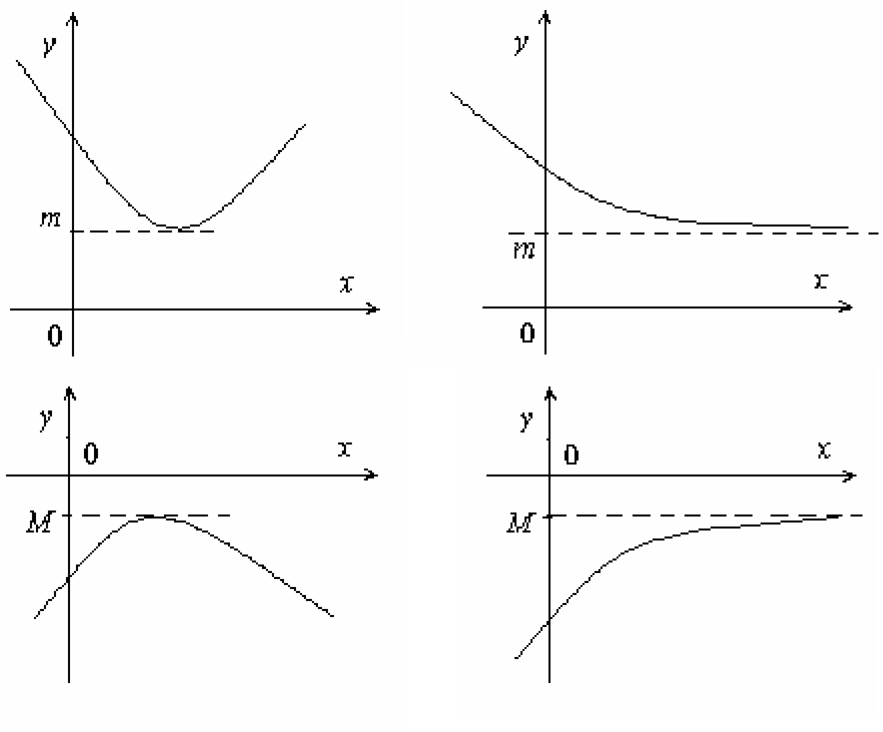
m ёки M сони топилиб, ихтиёрий $x \in X$ учун $f(x) \geq m$ ёки $f(x) \leq M$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $m>0$ ёки $M<0$ бўлади (4-чизма).

1-мисол. $e^x + |x| = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $f(x) = e^x + |x|$ функцияни қараймиз. $f(x)$ функция $(-\infty;+\infty)$да аниқланган ва узлуксиз.

$(-\infty;0]$ да $f(x) = e^x - x$ бўлиб, $f'(x) = e^x - 1,\ x \in (-\infty;0)$. Кўриш мумкинки, ихтиёрий $x \in (-\infty;0]$ учун $f'(x) = e^x - 1 \leq 0$, яъни $f(x)$ функция $(-\infty;0]$да камаювчи ва $x=0$ нуқтада $(-\infty;0]$ оралиқдаги ўзининг энг кичик қиймати $f(0)=1$га эришади: ихтиёрий $x \in (-\infty;0]$учун $f(x) \geq 1$.

$[0;+\infty)$да $f(x) = e^x + x$ бўлиб, $f'(x) = e^x + 1,\ x \in [0;+\infty)$. Бунда ихтиёрий $x \in [0;+\infty)$учун $f'(x) > 0$, яъни $f(x)$ функция $(0;+\infty]$да ўсувчи ва ўзининг



4-чизма

$[0;+\infty)$ оралиқдаги энг кичик қийматига x=0 нуқтада эришади, $f(0)=1$: ихтиёрий $x \in [0;+\infty)$учун $f(x) \geq 1$.

Демак, ихтиёрий $x \in (-\infty;+\infty)$ учун $e^x + |x| \geq 1 > 0$ бўлиб, $e^x + |x| = 0$ тенглама илдизга эга эмас.

б) $f(x)=0$ тенглама X ораликда ягона x_0 илдизга эга: $f(x_0)=0$.

Бундай ҳолда $f(x)$ функциянинг графиги Ox ўқининг фақат битта x_0 нуқтада кесиб ўтади ва қуйидагича бўлиши мумкин:

1) $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада ўзининг X оралиқдаги энг катта қиймати M га ёки энг кичик қиймати m га эришади (5 (а, б) –чизма).

2) $y=f(x)$ функция X оралиқда ёки X оралиқнинг x_0 нуқтани ўз ичига олувчи бирор бирор X' қисмида ҳамма вақт ўсувчи ёки ҳамма вақт камаювчи бўлади, яъни

$$f'(x) > 0,\ \ x \in X' \subset X \quad (6(a) - чизма)$$

ёки

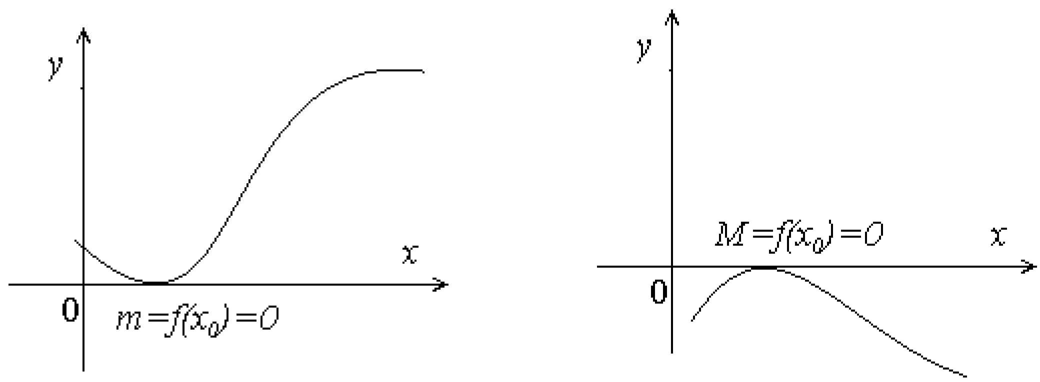
$$f'(x) < 0,\ \ x \in X' \subset X \quad (6(б) - чизма)$$

тенгсизликлардан фақат биттаси ўринли бўлади.

2-мисол. $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$ тенгламани ечинг.

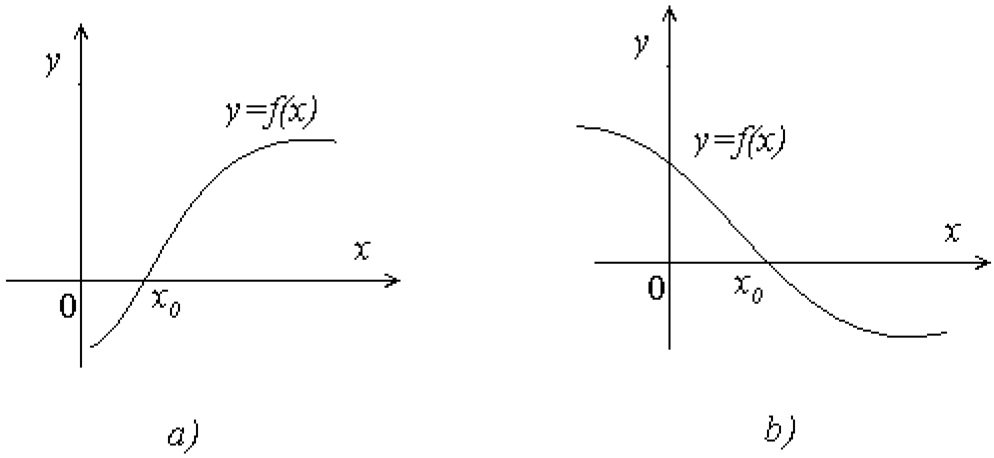
Ечиш. $f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$ функцияни қараймиз. Бу функция $(-\infty;\frac{1}{3}]$ орликда аниқланган ва бу орликда узлуксиз. $f(x)$ функция $(-\infty;\frac{1}{3})$ да чекли ҳосилага эга.

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \frac{3}{2\sqrt{1-3x}},\ x \in (-\infty;\frac{1}{3})$$



a) b)

5 - чизма



6 - чизма

Кўриш мумкин, ихтиёрий $x \in (-\infty; \frac{1}{3})$ учун $f'(x) > 0$. Шунинг учун $(-\infty; \frac{1}{3}]$ да *f(x)* функция ўсувчи. Равшанки, у ўзининг ҳар бир қийматига аниқ битта нуқтада эришади. Демак, берилган тенглама биттадан ортиқ илдизга эга эмас. Кўринадики, *x*=-1берилган тенгламанинг илдизи бўлади.

Жавоб: *x*=-1.

3-мисол. $2^{|x|} - \cos x = 0$тенгламани ечинг.

Ечиш. $f(x) = 2^{|x|}$ ва $g(x) = \cos x$функцияларни қараймиз.

Равшанки, $f(x) = 2^{|x|}$ функция $(-\infty; +\infty)$да аниқланган, узлуксиз ва x=0 нуқтада ўзининг энг кичик қийматига эришади: $f(0) = 1$.

$g(x) = \cos x$ функция ҳам $(-\infty; +\infty)$ оралиқда аниқланган, ва узлуксиз бўлиб, $-1 \leq g(x) \leq 1$ эканлиги аниқ. *x*=0 да *g(0)=1* эканлигини эътиборга олсак, $2^{|x|} - \cos x = 0$ тенглама ягона *x*=0 илдизга эга эканлигини кўришимиз мумкин.

Жавоб: *x*=0.

в) *f(x)*=0 тенглама *X* оралиқда n $(n \geq 2)$ та илдизга эга.

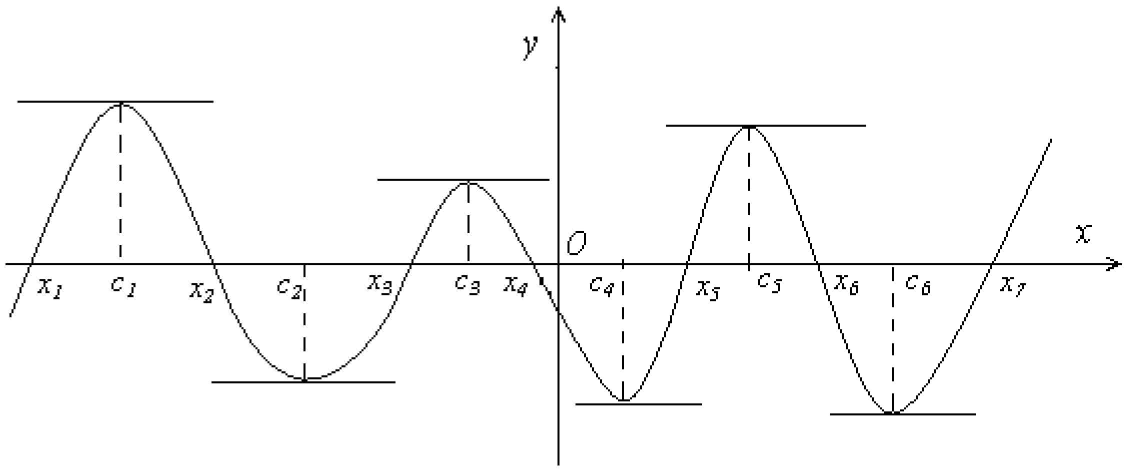
Айтайлик, *f(x)*=0 тенглама *X* оралиқда $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 2)$ илдизларга эга бўлиб, $x_1 < x_2 < ... < x_n$ бўлсин. Шу ўринда Ролл теоремасидан келиб чиқадиган теоремани кўриб ўтамиз.

$f(x)=0$ тенглама X оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

Теорема. $f(x)=0$ тенглама X оралиқда n $(n \geq 2)$ та илдизга эга бўлиши учун $f'(x)=0$ тенглама X оралиқда камида n-1 та илдизга эга бўлиши зарур.

Исботи. $f(x)=0$ тенглама X оралиқда аниқланган, узлуксиз ва чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $f(x)=0$ тенглама X оралиқда n $(n \geq 2)$ та $x_1, x_2, ..., x_n$ илдизларга эга $(f(x_1)=f(x_2)=...=f(x_n)=0)$ ва $x_1<x_2<...<x_n$ бўлсин.

Демак, $y=f(x)$ функция $[x_{k-1}; x_k] \subset X$ $(k=\overline{2,n})$ сегментда узлуксиз ва $[x_{k-1}; x_k]$ $(k=\overline{2,n})$ интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга, шунингдек, $f(x_{k-1})=f(x_k)=0$ $(k=\overline{2,n})$. У ҳолда Ролл теоремасига кўра шундай c_{k-1} $(x_{k-1}<c_{k-1}<x_k)$ $(k=\overline{2,n})$ нуқта топиладики, $f'(c_{k-1})=0$ $(k=\overline{2,n})$ бўлади. Бундан кўринадики, X оралиқда $n-1$ $(n \geq 2)$ та $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ илдизларга эга. Теорема исбот бўлди. (7-чизма).



7-чизма

Натижа. Агар $f'(x)=0$ тенглама $n-1$ $(n \geq 2)$ та илдизга эга бўлса, у ҳолда $f(x)=0$ тенглама n тадан ортиқ илдизга эга эмас.

4-мисол. $3^{x+2}-26x=29$ тенглама иккитадан ортиқ ҳақиқий илдизга эга эмаслигини исботланг.

Ечиш. Фараз қилайлик, бу тенглама 3 та x_1, x_2, x_3 илдизларга эга ва $x_1<x_2<x_3$ бўлсин.

$f(x)=3^{x+2}-26x-29$ функцияни қараймиз. $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$ ва $f(x)$ функция $(-\infty;+\infty)$ да аниқланган, узлуксиз ва ихтиёрий $x\in(-\infty;+\infty)$ учун чекли $f'(x)=3^{x+2}\ln 3-26$ ҳосилага эга. У ҳолда Ролл теоремасига $\varphi(x)$ кўра шундай $c_1\in(x_1;x_2)$ ва $c_2\in(x_2;x_3)$ нуқталар мавжудки, $f'(c_1)=f'(c_2)=0$ бўлади. Аммо, $f'(x)=0$ тенглама фақат битта илдизга эга. Бу эса фаразимизга зид. Демак, $f(x)=0$ тенглама кўпи билан иккита илдизга эга, яъни $3^{x+2}-26x=29$ тенглама кўпи билан иккита илдизга эга.

5-мисол. $3\cdot 2^{x+2}-7x=17$ тенгламани ечинг.

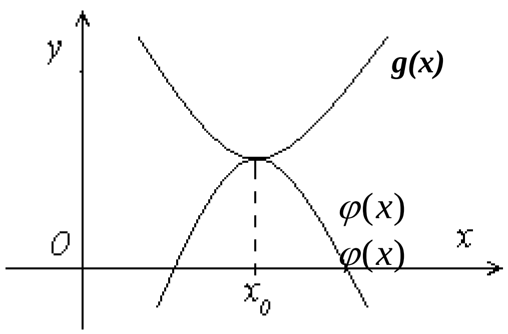
Ечиш. Эътибор берсак, $x=-2$ ва $x=1$ тенгламанинг илдизлари бўлади. Тенгламанинг бундан бошқа илдизлари бор-йўқлигини текшириб кўрамиз.

$3\cdot 2^{x+2}-7x=17$ функцияни қараймиз. $f'(x)=3\cdot 2^{x+2}\ln 2-7$ бўлиб, $f'(x)=0$ тенглама ягона илдизга эга. Бундан кўринадики, $f(x)=0$ тенглама, яъни $3\cdot 2^{x+2}-7x=17$ тенглама иккитадан ортиқ илдизга эга эмас.

Жавоб: $x_1=-2$, $x_2=1$.

Айрим ҳолларда $f(x)=0$ тенгламани $g(x)=\varphi(x)$ кўринишга келтириб ечиш анча қулай бўлиши мумкин. $(f(x)=g(x)-\varphi(x))$

Бундай ҳолда а) бирор x (нуқтада) $g(x)$ ва $\varphi(x)$ функция минимумга эришиши ёки аксинча, x_0 нуқтада $g(x)$ функция минимумга ва $\varphi(x)$ функция $\varphi(x)$



8-чизма

максимумга эришиши мумкин;

б) Бирор x_0 нуқтада $g(x)$ функция энг катта қийматга ёки аксинча, энг кичик қийматга эга бўлиши мумкин.

Равшанки, бундай ҳолларда x_0 нуқтада $g(x)=\varphi(x)$ тенгламанинг илдизи бўлади: $g(x_0)=\varphi(x_0)$ (8-чизма).

6-мисол. $x^2+2x+3=(x^2+x+1)(x^4+x^2+4)$ (*) тенгламани ечинг.

Ечиш. (*) тенглама $(-\infty;+\infty)$ оралиқда аниқланган. Ихтиёрий $x\in(-\infty;+\infty)$ учун $x^2+x+1>0$ эканлигини ҳисобга олсак, тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}=x^4+x^2+4$$

ёки

$$\frac{x+2}{x^2+x+1}=x^4+x^2+3$$

$f(x)=x^4+x^2+3$ функциянинг энг кичик қиймати $f(0)=3$ га тенг.

$g(x)=\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$ функциянинг $(-\infty;-2)$ оралиқдаги қиймати манфий, $(-2;+\infty)$ оралиқда эса $g(x)$ функция мусбат. Демак, $g(x)$ функция ўзининг энг катта қийматига $(-2;+\infty)$ оралиқда эришади. $g(x)$ функция $(-\infty;+\infty)$ да ҳосилага эга.

$$g'(x)=\frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

$x_1=-2+\sqrt{3}$ ва $x_2=-2-\sqrt{3}$ нуқталарда $g'(x)=0$ бўлади. $(-2+\sqrt{3};+\infty)$ оралиқда $g'(x)<0$ ва $(-2;-2+\sqrt{3})$ орлиқда $g'(x)>0$ бўлади. $g(x)$ функция узлуксиз бўлгани учун $[-2+\sqrt{3};+\infty)$ да камаяди, $[-2;-2+\sqrt{3}]$ оралиқда ўсади. Равшанки, $x=-2+\sqrt{3}$ нуқтада $g(x)$ функция энг катта қиймат қабул қилади:

$$g(-2+\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}<3$$

ихтиёрий x учун

$$f(x) \geq 3 > \frac{2\sqrt{3}+3}{3} \geq g(x)$$

яъни $f(x) > g(x)$ бўлиб, (*) тенглама ечимга эга эмас.

Жавоб: $\varnothing$

7-мисол. $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенглама [2;4] кесмада аниқланган. [2;4] кесмада узлуксиз бўлган $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$ функцияни қараймиз. *f(x)* функциянинг (2;4) интервалда ҳосиласи мавжуд.

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x-2)^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{4}(4-x)^{-\frac{3}{4}}.$$

$f'(x)$ фақат x=3 да нолга тенг: $f'(3) = 0$. *f(x)* функция аниқланган [2;4] кесмада узлуксиз, шунинг учун энг катта ва энг кичик қийматлари *f*(2), *f*(3), *f*(4) сонлари орасида бўлади.

$f(3) = 2,\ f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2} < 2$ бўлгани учун *f(x)* нинг энг катта қиймати *f*(3)=2 бўлади. Равшанки, тенглама ягона x=3 илдизга эга.

Жавоб: x=3.

8-мисол. $x^2 - x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламани

$$x^2 - 2x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1} - x$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенгламанинг илдизлари $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ва $g(x) = 2\sqrt[4]{2x-1} - x$ функцияларнинг кесиши ёки уриниш нуқталари абсциссаларидан иборат. Бу функциялар графикларининг жойлашишга кўра уларнинг экстремум нуқталарини топамиз.

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ функция x=1 нуқтада ўзининг энг кичик қиймати *f(1)*=1 га эришади.

$g(x) = 2\sqrt[4]{2x-1} - x$ функция $x \geq \frac{1}{2}$ да аниқланган ва

$$g'(x)=\frac{1-(2x-1)^{\frac{3}{4}}}{(2x-1)^{\frac{3}{4}}},\ x>\frac{1}{2}$$

бўлиб,

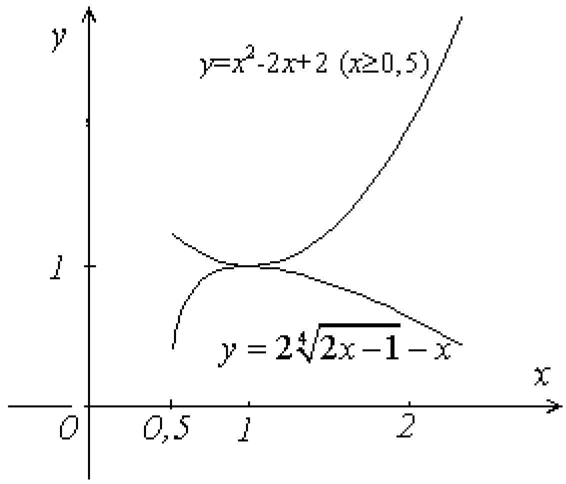
$$\frac{1}{2}<x<1\ да\ g'(x)>0,$$
$$x=1\ да\ g'(x)=0,$$
$$x>1\ да\ g'(x)<0.$$

ва *y*=*g(x)* функция $[\frac{1}{2};+\infty)$да узлуксиз бўлгани учун *g(x)* функция $[1;+\infty)$ ораликда камаювчи. Демак *f(x)* функция *x*=1 нуқтада ўзининг энг кичик қиймати, *g(x)* функция *x*=1 нуқтада ўзининг энг катта қиймати *g*(1)=1 га эришади.

Бунда кўринадики, ихтиёрий $x\in[\frac{1}{2};+\infty)$ учун $\begin{matrix} x^2-2x+2\geq 1 \\ 2\sqrt[4]{2x-1}-x\leq 1 \end{matrix}$ ва *x*=1 да *f*(1)=*g*(1)=1.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг илдизи *x*=1 ва ягона.

y=f(x) ва *y=g(x)* функциялар графикларининг бир-бирига нисбатан жойлашишини 9- **чизмада** кўрамиз.



9- чизма

Мустақил ечиш учун вазифалар

Тенгламани ечинг:

1. $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36;$ 3. $e^x - e^{-x} = 2\ln(x + \sqrt{1+x^2});$

2. $(4^x + 2)(2 - x) = 6;$ 4. $x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3;$

5. $\cos x + 2^{x^2} = 2;$ 6. $x^2 + \sqrt{x} = 2;$

3-§. Ҳосиланинг ностандарт тенгсизликларни ечишга татбиқи.

Олдинги бандда ностандарт тенгламалар қаралди. Ностандарт тенгламада тенглик белгиси тенгсизлик белгиси билан алмаштирилса, ностандарт тенгсизлик деб аталувчи тенгсизлик ҳосил бўлади.

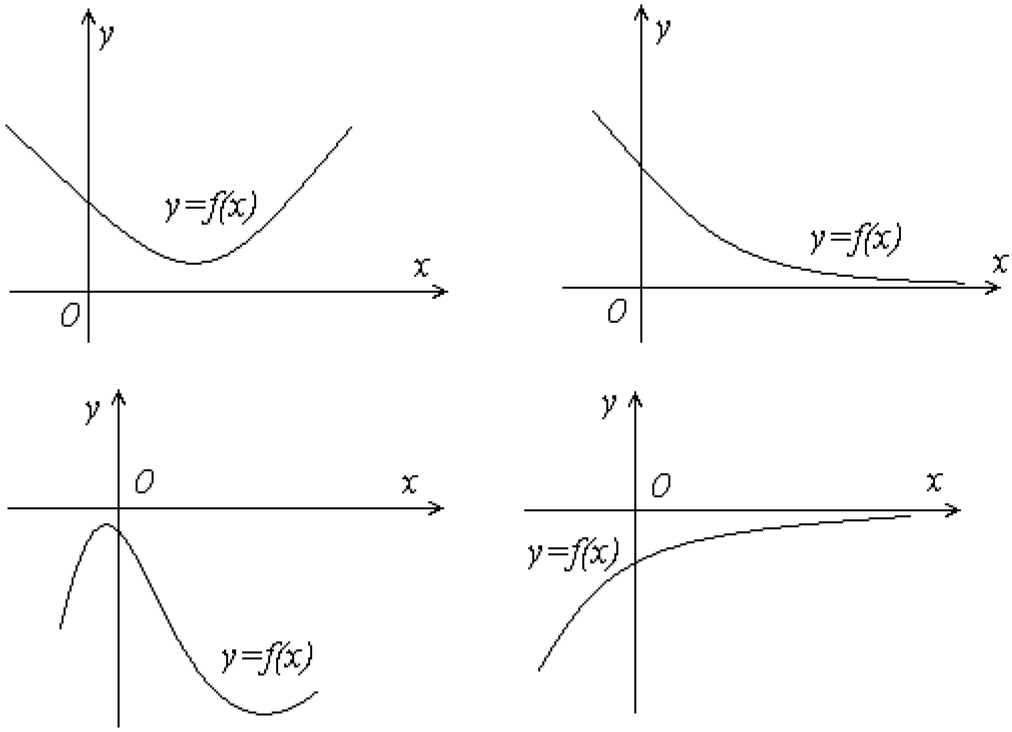
Ностандарт тенгламаларни ечишнинг умумий усули мавжуд бўлмагани каби ностандарт тенгсизликларни ечишнинг ҳам умумий усули мавжуд эмас. Шу сабабли, ностандарт тенгсизликларни ечишда ҳам функциянинг хоссаларидан, графикларидан фойдаланишга тўғри келади. Бу эса ностандарт тенгсизликларни ечишда ҳам ҳосиладан фойдаланиш мумкинлигини кўрсатади.

Ҳар қандай ностандарт тенгсизликни $f(x) > 0$ $(f(x) \geq 0)$ ва $f(x) < 0$ $(f(x) \leq 0)$ кўринишлардан бири шаклида ёзиш мумкин. Бундай кўринишдаги тенгсизликларни ечишн *y=f(x)* функциянинг ҳолати ва *f(x)*=0 тенгламанинг илдизлари ёрдамида кўриб чиқамиз.

y=f(x) функция бирор *x* ораиқда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Қуйидаги ҳолларни қараймиз:

1. *f(x)*=0 тенглама *X* ораликда илдизга эга эмас.

Равшанки, бундай ҳолда *f(x)* функциянинг графиги абциссалар ўқидан юқорида ёки пастда жойлашган бўлиб, ихтиёрий $x \in X$ учун *f(x)*>0 ёки *f(x)*<0 тенгсизликлардан бири ўринли бўлади. (10-чизма).



10-чизма

1-мисол. $e^x+e^{-x}>0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $f(x)=e^x+e^{-x}$ функцияни қараймиз. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty;+\infty)$ дан иборат ва бу оралиқда функция узлуксиз.

$f'(x)=e^x+e^{-x}$ бўлиб, фақатгина x=0 нуқтада $f'(x)$ нолга тенг: $f'(0)=0$ Шунингдек,

$$x<0 \quad да \quad f'(x)<0$$
$$x>0 \quad да \quad f'(x)>0$$

яъни, x>0 да $f(x)$ функция камаювчи, x>0 да $f(x)$ функция ўсувчи бўлади. Бундан кўринадики, x=0 нуқтада $f(x)$ функция ўзининг энг кичик қиймати f(0)=2 га эришади.

Демак, ихтиёрий $x\in(-\infty;+\infty)$ учун $f(x)\geq 2>0$, яъни $f(x)>0$ бўлиб, $e^x+e^{-x}>0$ тенгсизликнинг ечими $(-\infty;+\infty)$ дан иборат.

Жавоб: $x\in(-\infty;+\infty)$

2. $f(x)=0$ тенглама X оралиқда ягона x_0 илдизга эга.

Бу ҳолнинг ўзида ҳам бир неча вазиятлар бўлиши мумкин:

а) $f(x_0)=0$ қиймат *f(x)* функциянинг X оралиқдаги энг катта қиймати бўлади.

Равшанки, бундай вазиятда ихтиёрий $x \in X$ учун $f(x) \le 0$ бўлади (11(а)-чизма).

б) $f(x_0)=0$ қиймат *f(x)* функциянинг X оралиқдаги энг кичик қиймати бўлади.

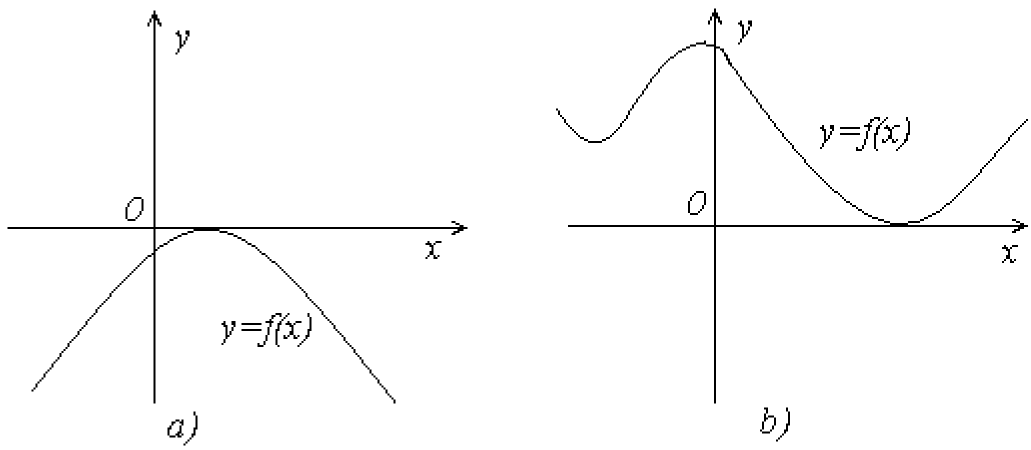
Бундай вазиятда ихтиёрий $x \in X$ учун $f(x) \ge 0$ бўлади. (11(б)-чизма).

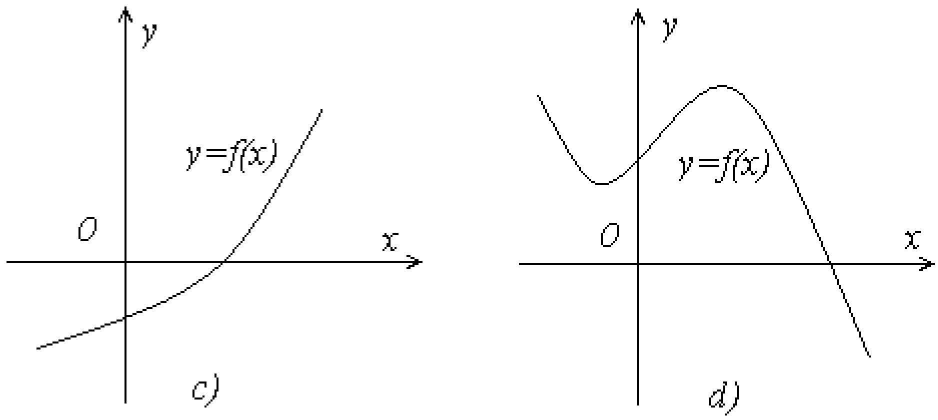
в) Бирор $\varepsilon>0$ сон топилиб, $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon) \subset X$ оралиқда f(x) функция ўсувчи.

Бундай вазиятда $x > x_0 (x \ge x_0)$ да $f(x) > 0$ $(f(x) \ge 0)$, $x < x_0 (x \le x_0)$ да $f(x) < 0$ $(f(x) \le 0)$ тенгсизликлар ўринли бўлади. (11(в)-чизма).

г) Бирор $\varepsilon>0$ сон топилиб, $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon) \subset X$ оралиқда *f(x)* функция камаювчи.

Бундай вазиятда эса $x > x_0 (x \ge x_0)$ да $f(x) < 0$ $(f(x) \le 0)$, $x < x_0 (x \le x_0)$ да $f(x) > 0$ $(f(x) \ge 0)$ тенгсизликлар ўринли бўлиши равшан. (11(г)-чизма).





2-мисол. $e^x > 1 + x$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $f(x) = e^x - x - 1$ функцияни қараймиз. Бу функция $(-\infty;+\infty)$да аниқланган ва узлуксиз.

$f'(x) = e^x - 1$ бўлиб, x=0 да $f'(0) = 0$. Осон кўриниш мумкинки,

$$x > 0 \quad да \quad f'(x) > 0$$
$$x < 0 \quad да \quad f'(x) < 0$$

яъни f(x) функция $(-\infty;0)$ да камаювчи, $(0;+\infty;)$ да ўсувчи.

Демак, x=0 нуқтада $f(x)$ функция ўзининг энг кичик қиймати f(0)=0 га эришади, яъни ихтиёрий $x \in (-\infty;+\infty)$ учун $f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$. Фақатгина x=0 да f(0)=0 эканлигини ҳисобга олсак, $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ да $f(x) = e^x - x - 1 > 0$, яъни $e^x > 1 + x$ бўлади.

Жавоб: $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

3-мисол. $20x^7 + 28x^5 + 210x - 35\sin 2x > 0$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $f(x)$=$20x^7 + 28x^5 + 210x - 35\sin 2x$ функцияни $(-\infty;+\infty)$ да аниқланган, узлуксиз ва $f'(x) = 140x^6 + 140x^4 + 210 - 70\cos 2x$ ҳосилага эга. Кўриниб турибдики, ихтиёрий $x \in (-\infty;+\infty)$ учун $f'(x) > 0$ бўлади. Бу эса $f(x)$ функциянинг ҳамма вақт ўсувчи бўлишини билдиради. Шунинг учун $f(x)$ функция ўзининг ҳар бир қийматини аниқ битта нуқтада қабул қилади.

Демак, $f(x)=0$ тенглама кўпи билан битта илдизга эга. Осон кўриш мумкинки, $f(x)=0$ тенгламанинг илдизи $x=0$ ва ягона.

$x<0$ да $f'(x)>0$

$x>0$ да $f'(x)>0$

ва демак, берилган тенгсизликнинг ечими $(0;+\infty)$ оралиқдан иборат бўлади

Жавоб: $x\in(0;+\infty)$

4-мисол. $x^{\frac{3}{2}}(1-x)<\frac{2}{5}\sqrt{\frac{27}{125}}$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $f(x)=\sqrt{x^3}(1-x)$ функцияни қараймиз. $f(x)$ функция $[0;+\infty)$ оралиқда аниқланган ва бу оралиқда узлуксиз. $f(x)$ функция $(0;+\infty)$ интервалда чекли

$$f'(x)=\sqrt{x}(\frac{3}{2}(1-x)-x)$$

ҳосилага эга бўлиб, фақатгина $x=\frac{3}{5}$ нуқтада $f'(x)$ нолга тенг.

$0<x<\frac{3}{5}$ *да* $f'(x)>0$

$x>\frac{3}{5}$ *да* $f'(x)<0$

яъни $f(x)$ функция $[0;\frac{3}{5}]$ кесмада ўсувчи ва $[\frac{3}{5};+\infty)$ оралиқда камаювчи. Демак, $x=\frac{3}{5}$ нуқтада $f(x)$ функция максимумга эга: $f(\frac{3}{5})=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{27}{125}}$ $f(0)=0$ ва $x=\frac{3}{5}$ дан ташқари ихтиёрий $x\in[0;+\infty)$ учун $f(x)<f(\frac{3}{5})=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{27}{125}}$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Демак, тенгсизликнинг ечими $[0;\frac{3}{5})\cup(\frac{3}{5};+\infty)$ оралиқдан иборат.

Жавоб: $x\in[0;\frac{3}{5})\cup(\frac{3}{5};+\infty)$

5-мисол. $2x^9-x^5+x>2$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $f(x)=2x^9-x^5+x-2$ функцияни қараймиз. $f(x)$ функция $(-\infty;+\infty)$ да аниқланган ва узлуксиз.

$f'(x)=18x^8-5x^4+1$ ва ихтиёрий $x\in(-\infty;+\infty)$ учун $f'(x)>0$. Бундан кўринадики, $f(x)$ функция ҳамма вақт ўсувчи; шунинг учун унинг графиги Ox ўқини фақат битта нуқтада кесиб ўтади. $f(1)=0$ эканлигини ҳисобга олсак, тенгсизликнинг ечими $(1;+\infty)$ оралиқдан иборат эканлигини кўриш мумкин.

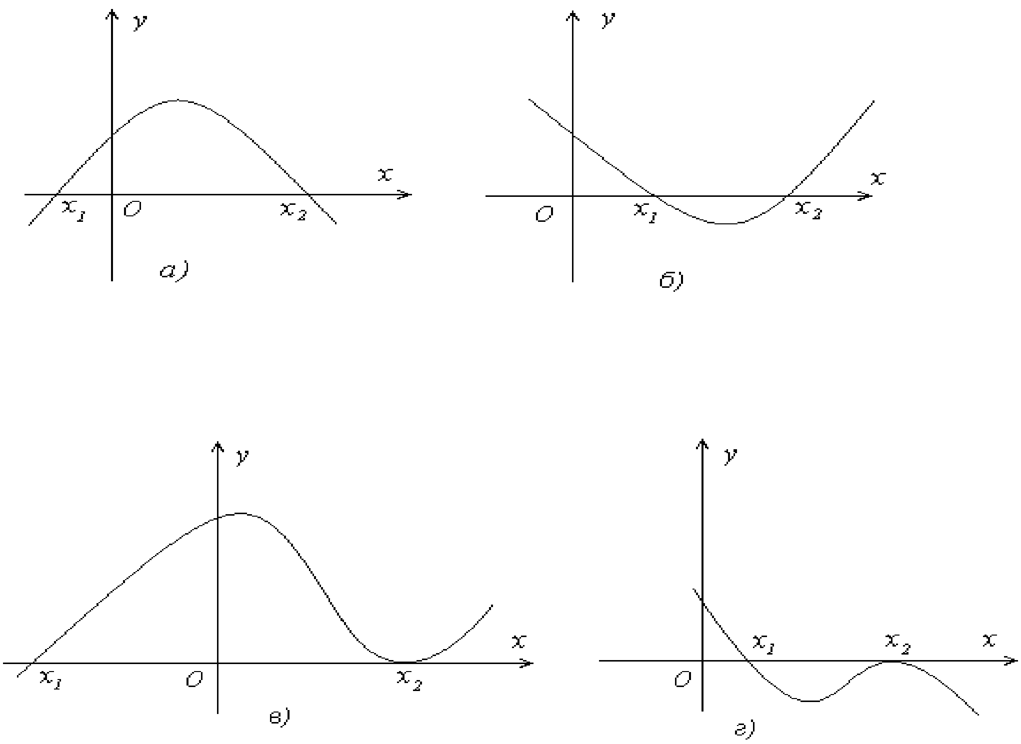
Жавоб: $x\in(1;+\infty)$.

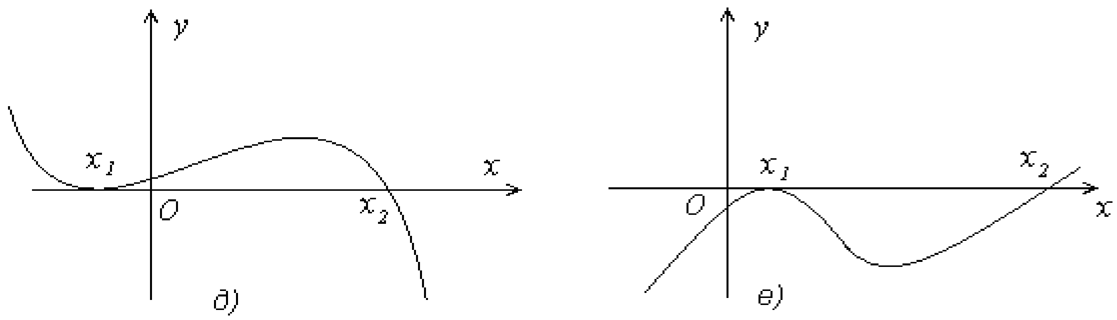
2. $f(x)=0$ тенглама X оралиқда иккита x_1 ва x_2 илдизларга эга.

Бу ҳолда ҳам бир нечта вазиятлар бўлиши мумкин:

а) Шундай $k>0$ ва $t>0$ сонлар топилиб, $f(x)$ функция $(x_1-k;\ x_1+k)$ оралиқда ўсувчи ва $(x_2-t;\ x_2+t)$ оралиқда камаювчи бўлади.

Маълумки, $f(x_1)=f(x_2)=0$ ва демак, $(x_1;x_2)$ ($[x_1;x_2]$) да $f(x)>0$ ($f(x)\geq 0$) шунингдек, $x<x_1$ ва $x>x_2$ лар учун ($x\leq x_1$ *ва* $x\geq x_2$ лар учун) $f(x)<0$ ($f(x)\leq 0$) бўлади. (12 (а)-чизма).





12-чизма

б) Шундай k>0 ва t>0 сонлар топилиб, *f(x)* функция (x_1-k; x_1+k) оралиқда камаювчи ва (x_2-t; x_2+t) оралиқда ўсувчи бўлади.

Бундай вазиятда (x_1;x_2) ([x_1;x_2]) да $f(x)<0$ $(f(x)\le 0)$, шунингдек, $x<x_1$ ва $x>x_2$ лар учун ($x\le x_1$ *ва* $x\ge x_2$ лар учун) $f(x)>0$ $(f(x)\ge 0)$ бўлади. (12 (б)-чизма).

в) Шундай k>0 сон топилиб, (x_1-k; x_1+k) оралиқда *f(x)* функция ўсувчи ва x=x_2 да *f(x)* функция минимумга эга.

Бу вазиятда $x_1<x<x_2$ ва $x>x_2$ $(x\ge x_1)$лар учун $f(x)>0$ $(f(x)\ge 0)$, $x<x_1$ $(x\le x_1)$ учун $f(x)<0$ $(f(x)\le 0)$ бўлади. (12 (в)-чизма).

г) Шундай k>0 сон топилиб, (x_1-k; x_1+k) оралиқда *f(x)* функция камаювчи ва x=x_2 да *f(x)* функция максимумга эга.

Бундай вазиятда эса $x_1<x<x_2$ ва $x>x_2$ $(x\ge x_1)$ лар учун $f(x)<0$ $(f(x)\le 0)$, $x\le x_1$ $(x\le x_2)$ учун $f(x)>0$ $(f(x)\ge 0)$ бўлади.
(12 (г)-чизма).

д) Шундай t>0 сон топилиб, (x_2-t;x_2+t) оралиқда *f(x)* функция камаювчи ва x=x_1 да *f(x)* функция минимумга эга.

Бу ерда $x<x_1$ ва $x_1<x<x_2$ лар $(x\le x_2)$ учун $f(x)>0$ $(f(x)\ge 0)$, $x>x_2$ $(x\ge x_2)$ учун $f(x)<0$ $(f(x)\le 0)$ бўлади. (12 (д)-чизма).

е) Шундай t>0 сон топилиб, (x_2-t; x_2+t) оралиқда *f(x)* функция ўсувчи ва x=x_1 да *f(x)* функция максимумга эга.

Бу вазиятда эса $x<x_1$ ва $x_1 < x < x_2$ лар $(x \le x_2)$ учун $f(x) < 0$ $(f(x) \le 0)$, $x>x_2$ $(x \ge x_2)$ учун $f(x) > 0$ $(f(x) \ge 0)$ бўлади. (12 (e)-чизма).

6-мисол. $3^{x+2} - 6x < 9$ тенгсизликни ечинг.

Ечиш. $f(x)=$ $3^{x+2} - 6x - 9$ функцияни қараймиз. $f(x)$ функция $(-\infty;+\infty)$ да аниқланган, узлуксиз ва $f'(x) = 3^{x+2}\ln 3 - 6$ ҳосилага эга. $f'(x) = 0$ тенглама ягона $x = -1 + \log_3 \dfrac{2}{\ln 3}$ илдизга эга. Бундан кўринадики, $f(x)=0$ тенглама кўпи билан иккита илдизга эга. $x_1=-1$ ва $x_2=0$ сонлари $f(x)=0$ тенгламанинг илдизларидир.

$$x < -1 + \log_3 \frac{2}{\ln 3} \quad da \quad f'(x) < 0$$

$$x > -1 + \log_3 \frac{2}{\ln 3} \quad da \quad f'(x) > 0$$

яъни, $(-\infty; -1 + \log_3 \dfrac{2}{\ln 3})$ да $f(x)$ камаювчи, $(-1 + \log_3 \dfrac{2}{\ln 3}; +\infty)$ да $f(x)$ ўсувчи, шунингдек, $-1 < -1 + \log_3 \dfrac{2}{\ln 3} < 0$ бўлгани сабабли, (-1;0) интервалда f(x)<0 бўлади.

Жавоб: $x \in (-1;0)$

Агар $f(x)=0$ тенглама иккитадан ортиқ илдизга эга бўлса, у ҳолда ҳар иккита илдизи оралиғини юқоридаги каби текшириб чиқилади.

Мустақил ечиш учун вазифалар:

1. $x^2 + 5x \ge 2;$ 2. $3^x - x > 0;$

3. $x^4 + \sqrt{x} > \cos x - 1;$ 4. $2^{x^2} > 1 - |x|;$

4-§. Ҳосиланинг айният ва тенгсизликларни исботлашга татбиқи.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар I оралиқнинг ҳар бир нуқтасида тенг ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг айирмаси I оралиқда ўзгармас сонга тенг бўлади, яъни $f(x)-g(x)=C$.

Шундай қилиб, $[a;b]$ кесмада $f(x) = g(x)$ айният ўринли эканлигини исботлаш учун

a) $[a;b]$ кесмада $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг узлуксиз,

b) $(a;b)$ дан олинган ҳар бир x да $f'(x) = g'(x)$,

(a,b) интервалган тегишли камида битта x_0 нуқтада $f(x_0) = g(x_0)$ эканлигини текшириш кифоя.

Ҳосиладан фойдаланиб айният ва тенгсизликларни исботлашни мисолларда қараймиз.

1-мисол. $x \geq 1$ да

$$2arctgx + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$$

айниятни исботланг.

Исбот. $f(x) = 2arctgx + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ функцияни $x \geq 1$ да қараймиз.

x=1 бўлганда, $f(1) = 2arctg1 + \arcsin 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$

x>1 бўлсин. У ҳолда $(2arctgx)' = \frac{2}{1+x^2}$ ва

$$(\arcsin\frac{2x}{1+x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}} \cdot (\frac{2x}{1+x^2})' =$$

$$= \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 2 \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{1}{1+x^2} = -\frac{2}{1+x^2}$$

Шунинг учун, x>1 да $f'(x) = 0$.

Демак, $f(x)$ функция x>1 да бирор ўзгармас сонга тенг. Бу сони топиш учун x га бирор 1 дан катта қиймат бериб кўрамиз, мисол учун $x = \sqrt{3}$ дейлик. $f(\sqrt{3})$ ни ҳисоблаймиз.

$$f(\sqrt{3}) = 2arctg\sqrt{3} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$$

Бундан кўринадики, $x \geq 1$ да $2arctgx + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$. Айният исботланди.

2-мисол. $|x| \neq 1$ бўлганда

$$1 + 3x^2 + 5x^4 + ... + (2n-1)x^{2n-1} = \frac{(2n-1)x^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + x + x^2 + 1}{(x^2-1)^2}$$

айниятни исботланг.

Исбот. $1 + 3x^2 + 5x^4 + ... + (2n-1)x^{2n-1} = (x + x^3 + x^5 + ... + x^{2n-1})'$ тенглик ўринли эканлиги аниқ.

$x + x^3 + x^5 + ... + x^{2n-1}$ йиғинди биринчи ҳади x, махражи x^2 бўлган геометрик прогрессиянинг n та ҳадининг йиғиндисидир. Демак,

$$x + x^3 + x^5 + ... + x^{2n-1} = \frac{x - x^{2n+1}}{1-x^2}$$

Бундан

$$1 + 3x^2 + 5x^4 + ... + (2n-1)x^{2n-2} = (\frac{x - x^{2n+1}}{1-x^2})'$$

Энди $(\frac{x - x^{2n+1}}{1-x^2})'$ ни ҳисоблаймиз.

$$(\frac{x - x^{2n+1}}{1-x^2})' = \frac{(1-(2n+1)x^{2n})(1-x^2) + 2x(x - x^{2n+1})}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{1-(2n+1)x^{2n} - x^2 + (2n+1)x^{2n+2} + 2x^2 - 2x^{2n+2}}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{1 + x^2 - (2n+1)x^{2n} + (2n-1)\cdot x^{2n+2}}{(1-x^2)^2},$$

ва бундан

$$1 + 3x^2 + 5x^4 + ... + (2n-1)x^{2n-2} =$$

$$= \frac{(2n-1)x^{2n+2} - (2n+1)x^{2n} + x^2 + 1}{(x^2-1)^2}$$

тенглик ўринли эканлигини кўришимиз мумкин. Айният исботланди.

3-мисол. $sin^2x+cos^2x=1$ айниятни исботланг.

Исбот. $f(x)= sin^2x+cos^2x$ функцияни қараймиз.

$f'(x)=2\sin x\cos x-2\cos x\sin x=0, \quad f'(x)=0$ Бундан кўринадики, *f(x)=c, c*=const. *c* ни топиш учун *x* га бирор қиймат берамиз, мисол учун *x*=0 бўлсин. У ҳолда

$f(0)=\sin^2 0+\cos^2 0=1$

Демак, $c=1$, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Исбот тугади.

4-мисол. $x\geq 0$ да

$arctgx=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ айниятни исботлайлик.

Исбот. *f(x)=* $arctgx=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ функцияни қараймиз. $(x\geq 0)$ да.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})^2}}\cdot(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})'=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}\cdot(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

Бундан кўринадики, *f(x)* бирор ўзгармас сонга тенг. Бу сони топиш учун *x* га бирор қиймат бериб кўрамиз. Мисол учун *x*=0 дейлик. У ҳолда

$f'(0)=arctg0-\arcsin 1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$. Демак, $f(x)=0$ Бундан $x\geq 0$ да $arctgx=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Исбот тугади.

5-мисол. *x*>0 да

$$arctg\frac{1}{x}+arctg\frac{x-1}{x+1}=\frac{\pi}{4}$$

айниятни исботланг.

Исбот. $f(x)=arctg\frac{1}{x}+arctg\frac{x-1}{x+1}$

функцияни *x*>0 да қараймиз.

x>0 да *f(x)* функциянинг ҳосиласи мавжуд:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=0$$

Демак, $f'(x)=0$ ва бундан кўринадики, $x>0$ да $f(x)$ бирор ўзгармас сонга тенг. x га бирор қиймат бериб кўрамиз, мисол учун

$$x=1:\ f(1)=arctg1+arctg0=\frac{\pi}{4}.$$

Демак, $x>0$ да $arctg\frac{1}{x}+arctg\frac{x-1}{x+1}=\frac{\pi}{4}$. Исбот тугади.

6-мисол. $x>0$ да $a\ln x+b=\ln(ax+b)$ тенглик ўринли бўладиган барча $(a;b)$, $(a>0, b\geq 0)$ сонлар жуфтини топинг.

Ечиш. Ихтиёрий $x>0$ ва $(a_0;b_0)$ $(a_0>0,\ b_0\geq 0)$ жуфтлик учун

$$a_0\ln x+b_0=\ln(a_0x+b_0)$$

тенглик ўринли бўлсин. Бу тенгликнинг иккала томонининг ҳам $x>0$ да ҳосиласини ҳисоблаймиз (x га нисбатан):

$$\frac{a_0}{x}=\frac{a_0}{a_0x+b_0}.$$

Бу тенглик фақатгина (1;0) жуфтлик учун ўринли. Бевосита текшириб кўриш мумкинки, (1;0) жуфтлик $a\ln x+b=\ln(ax+b)$ айният учун ҳам ўринли бўлади ва ягона.

7-мисол. $x\geq 0$ да $x^2-x^3<\frac{1}{6}$ тенгсизликни исботланг.

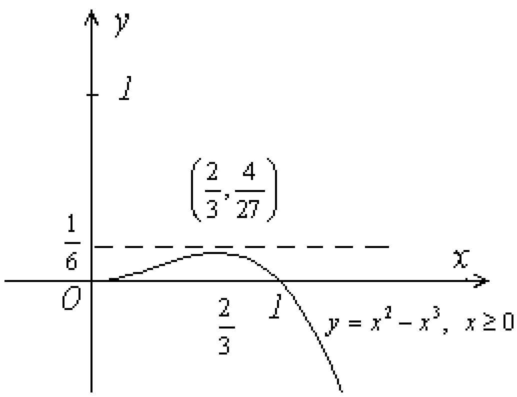
Ечиш. $x\geq 0$ да $f(x)=x^2-x^3$ функцияни қараймиз. $[0;+\infty)$ да $f(x)$ функция узлуксиз.

$$f'(x)=2x-3x^2$$

бўлиб,

$$0<x<\frac{2}{3}\ da\ f'(x)>0,\quad x=\frac{2}{3}\ da\ f'(x)=0,\ \ x>\frac{2}{3}\ da\ f'(x)<0.$$

Бундан кўринадики, $(0;\frac{2}{3})$ оралиқда *f(x)* функция ўсувчи ва $(\frac{2}{3};+\infty)$ оралиқда *f(x)* функция камаювчи бўлади. Демак, $x=\frac{2}{3}$ нуқтада *f(x)* функция максимум қийматга эга бўлади: $f(\frac{2}{3})=\frac{4}{27}$, $f(0)=0$ эканлигини ҳисобга олсак, ихтиёрий $x\in[0;+\infty)$ учун $f(x)\le\frac{4}{27}<\frac{1}{16}$, $f(x)<\frac{1}{16}$ (13-чизма).



13-чизма

Демак, $x\ge 0$ да $x^2-x^3<\frac{1}{16}$.

Исбот тугади.

8-мисол. $x\ge 0$ да

$$\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$$

тенгсизликни исботланг.

Исбот. $x\ge 0$ да $f(x)=-\sqrt{1+x}+\frac{x}{2}+1$ функцияни қараймиз.

$f(0)=0$ *f(x)* функция $x\ge 0$ да узлуксиз бўлгани учун $(0;+\infty)$ орлиқда *f(x)* функциянинг ўсувчи эканлигини исботлаш етарли.

$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}.$$

Кўриш мумкинки, $x>0$ да $\sqrt{1+x}>1$ва бундан $x>0$ да

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}>0$$

тенгсизлик ўринли. Бу эса $x>0$ да $f(x)$ функциянинг ўсувчи эканлигини кўрсатади. Исбот тугади.

9-мисол. $\ln^2 n>\ln(n-1)\cdot\ln(n+1)\ (n>2)$ тенгсизликни исботланг.

Исбот. Тенгсизликни ушбу $\frac{\ln n}{\ln n(n-1)}>\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$ кўринишда ёзиб оламиз.

$f(x)=\frac{\ln x}{\ln(x-1)}$ функцияни қараймиз. Бу функцияни $(2;+\infty)$ оралиқда кўриб чиқамиз.

$$f'(x)=\frac{\frac{\ln(x-1)}{x}-\frac{\ln x}{x-1}}{\ln^2(x-1)}=\frac{x\ln\frac{x-1}{x}-\ln(x-1)}{x(x-1)\ln^2(x-1)}$$

бўлиб, $x>2$ да $f'(x)<0$ ва $x>2$ да $f(x)$ узлуксиз. Шунинг учун, $f(x)$ функция $(2;+\infty)$ оралиқда камаювчи. Равшанки, $x>2$ да $f(x)>f(x+1)$.

Бундан кўринадики, $n>2$ да

$$\frac{\ln n}{\ln(n-1)}>\frac{\ln(n+1)}{\ln n}.$$

Тенгсизлик исботланди.

10-мисол. *a, b, c* мусбат сонлар учун

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc$$

тенгсизликни исботланг.

Исбот. $0<a\leq b\leq c$деб оламиз.

$f(x)=x^3+b^3+c^3-3xbc$ функцияни қарайлик. $f'(x)=3x^2-3bc=3(x^2bc)$ ва $0<x<b\leq c$ да $f'(x)<0$. Демак, $f(x)$ функция $[0;b]$ кесмада камаювчи. Бундан кўриш мумкинки, $f(x)\geq f(b)$ яъни,

$$x^3+b^3+c^3-3xbc\geq 2b^3+c^3-3b^2c.$$

Энди $g(x) = 2x^3 + c^3 - 3x^2c \quad (0 < x < c)$ функцияни қарайлик.

$g'(x) = 6x^2 - 6xc = 6x(x - c)$ бўлиб, $0 < x < c$ да $g'(x) < 0$. Бундан *g(x)* функциянинг [0;*c*] кесмада камаювчилиги аниқ. Натижада, $g(b) \geq g(c)$, яъни

$$2b^3 + c^3 - 3b^2c \geq 2c^3 + c^3 - 3c^2c = 0$$

Демак,

$$x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc \geq 2b^3 + c^3 - 3b^2c \geq 0,$$

$$x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc \geq 0,$$

шунингдек,

$x^3 + b^3 + c^3 \geq 3xbc$ Исбот тугади.

11-мисол. x>0 да

$$e^x > 1 + x$$

тенгсизликни исботланг.

Исбот. *b*-ихтиёрий мусбат сон бўлсин. $f(x)=e^x$ функцияни [0;*b*] кесмада қарайлик.

Лагранж теоремасига кўра,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad c \in (a;b)$$

яъни

$$\frac{e^b - 1}{b} = e^c, \quad c \in (0;b)$$

Ихтиёрий $c>0$ да $e^c>1$ бўлгани учун

$\frac{e^b - 1}{b} > 1$, яъни, $e^b>1+b$ тенгсизлик ихтиёрий *b* мусбат сон учун ўринли. Исбот тугади.

Мустақил ечиш учун вазифалар:

Тенгсизликни исботланг:

1. $e^{x^2} \geq \cos x;$

2. $2 \cdot e^x > \sin x;$

3. $\cos^2 x + 1 > \frac{1}{x^2 + 1};$

4. $\cos x + \sin x \leq \sqrt{2};$

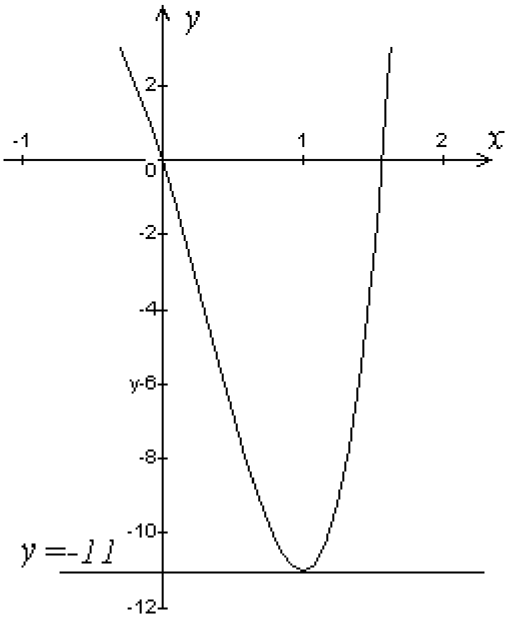
5-§. Ҳосиланинг бошқа татбиқлари.

1. Ҳосиланинг параметр қатнашган тенгламаларни ечишга татбиқи

1. Ушбу $3x^4+4x^3-6x^2-12x+a=0$ тенглама иккита турли илдизга эга бўладиган a нинг барча қийматларини топинг.

Ечиш. $f(x)=3x^4+4x^3-6x^2-12x$ узлуксиз функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топамиз. Бунинг учун функция ҳосиласини топамиз: $f'(x)=12x^3+12x^2-12x-12=12x^2(x+1)-12(x+1)=12(x^2-1)(x+1)=12(x-1)(x+1)^2$.

Демак, $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)$ да $f'(x)<0$; $x=-1$ ва $x=1$ да $f'(x)=0$; $x\in(1;+\infty)$ да $f'(x)>0$. Шундай қилиб, $y=f(x)$ функция $x=1$ нуқтада локал минимумга эга ва $f(1)=-11$ га тенг. Бундан ташқари $f(x)$ функция $(-\infty;1)$ да камаючи, $(1;+\infty)$ да ўсувчи, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.



Бундан кўринадики, берилган тенглама иккита турли илдизга бўлиши учун $y=-a$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигини икки нуқтада кесиб ўтиши лозим. Бу эса $-a>-11$, яъни $a<11$ да ўринли бўлади.

2. a нинг ҳар бир қиймати учун $x^4-4ax^3-2=0$ тенглама ҳақиқий илдизлари сонини топинг.

Ечиш. $f(x)=x^4-4ax^3-2$ функциянинг монотонлик оралиқларини топамиз. $f'(x)=4x^3-12ax^2=4x^2(x-3a)$ бўлганлиги сабабли, $f(x)$ функция $x<3a$ да камаювчи, $x>3a$ да ўсувчи бўлиб, $x=3a$ нуқтада локал максимумга эга бўлади.

Функциянинг шу нуқтадаги қиймати $f(a)=81a^4-4a\cdot27a^3-2=-3a^4-2<0$ ва $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$. Шу сабабли $f(x)=0$ тенглама $(-\infty;3a)$ ва $(3a;+\infty)$ оралиқларда биттадан илдизга эга. Демак, берилган тенглама a нинг ихтиёрий қийматида иккита илдизга эга бўлади.

3. a нинг ҳар бир қиймати учун $2x^3-3ax^2+1=0$ тенглама ҳақиқий илдизлари сонини топинг.

Ечиш. $f(x)=2x^3-3ax^2+1$ функциянинг монотонлик оралиқларини топамиз. Бу функциянинг ҳосиласини топамиз $f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$. Функциянинг стационар нуқталари $x=0$, $x=a$ лардан иборат. Бунда уч ҳол бўлиши мумкин. 1-ҳол: $a=0$, бу ҳолда тенглама ягона ечимга эга бўлади. 2-ҳол: $a<0$, бу ҳолда $x\in(-\infty;a)$ да $f'(x)>0$, демак $f(x)$ функция ўсувчи бўлади; $x\in(a;0)$ да $f'(x)<0$, $f(x)$ функция камаювчи бўлади; $x\in(0;+\infty)$ да $f'(x)>0$, $f(x)$ функция ўсувчи бўлади. Қаралаётган функция $x=a<0$ нуқтада $f(a)=-a^3+1>1$ локал максимумга, $x=0$ нуқтада $f(0)=1$ локал минимумга эришади. Бундан, агар $a<0$ бўлса, тенглама ягона ечимга эга эканлиги келиб чиқади. 3-ҳол: $a>0$, $x\in(-\infty;0)$ да $f'(x)>0$, демак $f(x)$ функция ўсувчи бўлади; $x\in(0;a)$ да $f'(x)<0$, $f(x)$ функция камаювчи бўлади; $x\in(a;+\infty)$ да $f'(x)>0$, $f(x)$ функция ўсувчи бўлади. Қаралаётган функция $x=a$ нуқтада $f(a)=-a^3+1$ локал минимумга, $x=0$ нуқтада $f(0)=1$ локал максимумга эришади. Агар $0<a<1$ бўлса, у ҳолда $f(a)>0$ бўлиб, тенглама ягона ечимга эга бўлади. Агар $a>1$ бўлса, у ҳолда $f(a)<0$ бўлиб, тенглама учта турли ечимга эга бўлади. Агар $a=1$ бўлса, у ҳолда $f(a)=0$ бўлиб, берилган тенглама учта, лекин иккитаси устма-уст тушадиган илдизга эга бўлади. Шундай қилиб, берилган тенглама $a<1$ да битта ҳақиқий ечимга, $a=1$ да иккитаси устма-уст тушувчи учта илдизга, $a>1$ да турли учта илдизга эга бўлади.

Мустақил ечиш учун топшириқлар.

1. a нинг ҳар бир қиймати учун қуйидаги тенгламаларнинг ҳақиқий илдизлари сонини топинг.

а) $x^3-6x^2-a=0$; b) $x^3-3x=a$; c) $3x^5-50x^3+135x=a$;

d) $lnx=ax$; e) $x^2e^x=a$; f) $e^x=ax^2$.

2. Тенглама берилган сондаги илдизга эга бўладиган a нинг барча қийматларини топинг.

a) $2x^3-13x^2-20x+a=0$, битта илдиз;

b) $2x^3-4x^2-30x+a=0$, иккитаси устма-уст тушувчи ва битта оддий илдизлар;

c) $x^2-x-lnx+a=0$, илдизи йўқ;

d) $5^x=ax$, иккита илдиз.

3. a нинг қандай қийматларида тенглама ечимга эга:

a) $\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x}=a$; b) $6arctgx-x^3+a=0$

4. $\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}=4$ тенглама нечта ечимга эга?

Ечиш. Берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси [2/3;+∞) оралиқдан иборат, шу оралиқда $f(x)=\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}$ функцияни қараймиз. Бу функциянинг ҳосиласи $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ га тенг. (2/3;+∞) оралиқда $f'(x)>0$ $\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}>0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1}>2\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow (x>\frac{1}{6},\ x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$, демак, $f(x)$ функция ўсувчи бўлиб, берилган тенглама кўпи билан битта илдизга эга бўлиши мумкин.

Энди x етарлича катта қиймат берамиз, масалан $x=200$, у ҳолда $f(200)=\sqrt{598}-\sqrt{399}>24-19=5>4$ бўлади. Қаралаётган функция аниқланиш соҳасида узлуксиз, шу сабабли у f(1)=0 ва f(200) орасидаги барча қийматларни, хусусан 4 қийматни ҳам қабул қилади. Демак, тенглама ягона ечимга эга.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Тенгламанинг ҳақиқий илдизлари сонини топинг.

a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+1}=9$; b) $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x-2}=1$;

c) $x^5+x^2+1=0$; d) $12x^4-14x^3-3x^2-5=0$.

2. Ҳосиланинг ифодаларни соддалаштиришга татбиқи

Ифодани кўпайтувчиларга ажратинг:

a) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$;

b) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}$.

Ечиш. a) Ушбу $f(x)=x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$ функцияни қараймиз, бунда y, z ларни ўзгармас деб оламиз. Бу функциянинг ҳосиласини топамиз ва соддалаштирамиз: $f'(x)=y^2-z^2-2xy+2xz=(y-z)(y+z)-2x(y-z)=(y-z)(y+z-2x)$. Бундан

$f(x)=(y-z)(y+z-x)x+C$, (*)

бу ерда C x га боғлиқ бўлмаган, лекин y ва z га боғлиқ бўлган сон. C ни топиш учун x га бирор қиймат, масалан $x=0$, берамиз. У ҳолда $f(0)=C=yz^2-y^2z$ бўлади. Олинган ушбу натижани (*) га қўямиз. Натижада

$f(x)=(y-z)(y+z-x)x+yz^2-y^2z=(y-z)(y+z-x)x-yz(y-z)=(y-z)(xy+xz-x^2-yz)=$
$=(y-z)(x(y-x)-z(y-x))=(y-z)(y-x)(x-z)$.

Демак, $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=(y-z)(y-x)(x-z)$.

b) $f(x)=\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}$ функцияни қараймиз, бунда y, z ларни ўзгармас деб оламиз. Бу функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f(x)=\frac{(x-y)(y+z)(z+x)+(y-z)(x+y)(z+x)+(z-x)(x+y)(y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Касрнинг суратини алоҳида кўпайтувчига ажратамиз. Бунинг учун $g(x)=(x-y)(y+z)(z+x)+(y-z)(x+y)(z+x)+(z-x)(x+y)(y+z)$ функцияни қараймиз, унинг ҳосиласини топамиз ва сўнгра соддалаштирамиз.

$g'(x)=(y+z)(z+2x-y)+(y-z)(z+2x+y)+(y+z)(-2x-y+z)=2(y+z)(z-y)+(y-z)(z+2x+y)=$
$=(y-z)(-2y-2z+z+2x+y)=(z-y)(y+z-2x)$, демак,

$g(x)=(z-y)(yx+zx-x^2)+C$ (**)

бу ерда C x га боғлиқ бўлмаган, лекин y ва z га боғлиқ бўлган сон. C ни топиш учун x га бирор қиймат, масалан $x=y$, берамиз. У ҳолда $g(y)=2y(y-z)(z+y)+2y(z-y)(y+z)=0=zy(z-y)+C$ бўлади. Бундан $C=zy(y-z)$ ҳосил бўлади. Уни (**) га қўямиз. Натижада $g(x)=(z-y)(yx+zx-x^2)+zy(y-z)=(y-z)(zy-yx-$

$zx+x^2)=$ $(y-z)(y(z-x)+x(x-z))=(y-z)(x-z)(x-y)$ ҳосил бўлади. Бу натижани $f(x)$ функция ифодасига қўямиз. У ҳолда

$$\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}=\frac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$ бўлади.

Мустақил ечиш учун вазифалар:

Ифодаларни кўпайтувчиларга ажратинг:

a) $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$; b) $(1+x^2)y^2+2(x-y)(1+xy)+1$;

c) $(x^2-1)^2+(y+1)(4x-y-1)$; d) $(a-b)(a+b-c)^2c+(b-c)(b+c-a)^2a$;

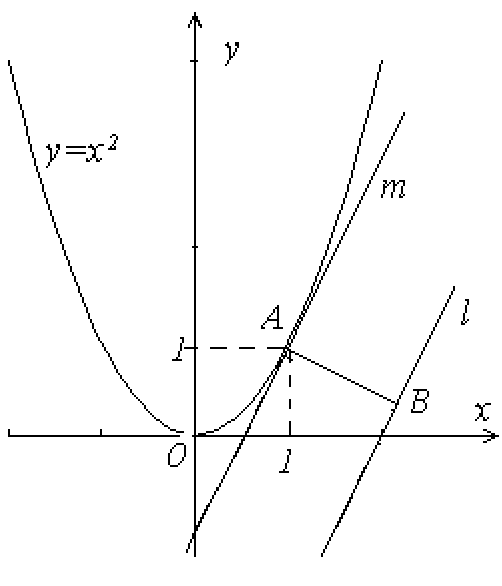
e) $\frac{(y-z)^2}{(z-x)(x-y)}+\frac{(z-x)^2}{(x-y)(y-z)}+\frac{(x-y)^2}{(y-z)(z-x)}$;

f) $\cos^2x+\cos^2(x+y)-2\cos x\cos y\cos(x+y)$.

3. Ҳосилани геометрик масала ечишга татбиқи

1. $y=x^2$ ва $y=2x-4$ функция графиклари орасидаги масофани топинг.

Ечиш. Иккита геометрик фигура орасидаги масофа деганда шу турли фигураларга тегишли бўлган нуқталар орасидаги масофаларнинг энг кичигига айтилади.



Равшанки, геометрик нуқтаи назардан изланаётган масофа берилган l тўғри чизиққа тушурилган AB перпендикуляр узунлигига тенг, бу ерда A нуқта $y=x^2$ парабола ва l тўғри чизиққа параллел бўлган m тўғри чизиқнинг уриниш нуқтаси. Шундай қилиб, масала $y=x^2$ параболага берилган l тўғри чизиққа параллел бўлган уринманинг уриниш нуытаси координатасини топиш ва шу нуқтадан берилган тўғри чизиққача бўлган масофани топишга олиб келинади. l тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти 2 га тенг. A нуқтанинг координатасини топиш учун $2x=2$ тенгламани ечиш керак, бу ерда $(x^2)'=2x$. Бундан $x=1$, демак $A(1;1)$. Бу нуқтадан берилган l тўғри чизиққача масофани топиш учун тўғри чизиқ тенгламасини $y-2x+4=0$ кўринишда ёзиб оламиз. У ҳолда маълум формулага кўра

$$d=\frac{|2-1-4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Жавоб: $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

№2 Қуйидаги функциялар графиклари орасидаги масофаларни топинг:

a) $y=-x,\ y=1/x$; b) $y=x^2,\ y=x-1$.

4. Ҳосилани сонларни таққослашга татбиқи

1. $\frac{102^{100}+1}{102^{101}+4}$ $\frac{102^{103}+1}{102^{104}+4}$ сонларни таққаосланг;

Ечиш:

$f(x)=\frac{102^{x}+1}{102^{x}+1}$ функцияни монотонлигини текширамиз;

$f\,'(x)=$

$$=\frac{102^{x}\ln 102(102^{x+1}+4)-102^{x+1}\ln(102^{x}+1)}{(102^{x}+4)^2}=\frac{102^{x}\ln 102(102^{x+1}+4-102^{x+1}-102)}{(102^{x}+4)}$$

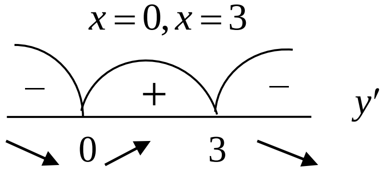
$102^x>0$, $\ln 102>0$, $4-102=-98<0 \Rightarrow f\,'(x)<0$. Демак, $\forall x$ да $f(x)$ камаювчи

y/x $f(100)=f(103)$ яъни $\frac{102^{100}+1}{102^{101}+4}>\frac{102^{103}+1}{102^{104}+4}$

2. 3ln8 8 ни таққосланг

$y=3\ln x-x$

$y' = 3\frac{1}{x} - 1 = \frac{3-x}{x}$



$f(3)$=3ln3 – 3=3(ln3 – 1) мусбат сон

$f(e^2)$=3lne^2 – e^2=6 – e^2<0.

Демак, (3; + ∝) да $f(x)$ камаювчи $f(e^2)$<0 бўлгани учун $f(8)$<0.

3ln8-8<0 ⇒ 3ln8<8.

Демак ушбу мисол ёрдамида

a≥8 бўлганда 3ln$a$>a эканлигини кўриш мумкин.

3. $\frac{1}{52} < \ln\frac{52}{51} < \frac{1}{51}$ ни исботланг.

Исбот. $f(x)=\ln x$ функцияни [51;52] кесмада қараймиз.

$f(x)$ функция [51;52] кесмада узлуксиз ва чекли $f'(x) = \frac{1}{x}$ ҳосилага эга. У ҳолда Лагранж теоремасига кўра шундай c (51<c<52) нуқта топиладики, $\frac{\ln 52 - \ln 51}{52-51} = \ln 52 - \ln 51 = \frac{1}{c}, \quad (51 < c < 52)$ тенглик ўринли бўлади. (51<c<52) бўлгани учун

$\frac{1}{51} < \ln 52 - \ln 51 < \frac{1}{51}$, яъни $\frac{1}{51} < \ln\frac{52}{51} < \frac{1}{51}$ бўлади.

4. Барча a ва b (b>a) мусбат ва $n \geq 2$ натурал сонлар учун

$n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исбот. x>0 да $f(x)=x^n$ функцияни қарайлик.

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^n - a^n}{b-a}$ га эгамиз.

$f(x)=x^n$ функция [$a;b$] кесмада узлуксиз ва ($a;b$) интервалда дифференциалланувчи бўлгани учун Лагранж теоремасига кўра шундай c (a<c<b) нуқта топиладики,

$$\frac{b^n-a^n}{b-a}= f'(c)=n\cdot c^{n-1}$$ тенглик ўринли бўлади.

Равшанки, $a^{n-1}<c^{n-1}<b^{n-1}$ бўлиб бундан эса

$$na^{n-1}<\frac{b^n-a^n}{b-a}<nb^{n-1}$$ тенгсизлик келиб чиқади. $(a>0,\, b>0,\, b>a,\, n\geq 2,\, n\in\mathbb{N})$ исбот тугади.

5. cos2006<1+cos2007 тенгсизлик ўринлими?

Ечиш. *f(x)=x+cosx* функцияни қараймиз. Бу функция $(-\infty;+\infty)$ да аниқланган ва узлуксиз.

$f'(x)=1-\sin x$ ва ихтиёрий $x\in(-\infty;+\infty)$ да $f'(x)\geq 0$ бўлгани учун f(x) функция ҳамма вақт ўсувчи. Бундан f(2006)<f(2007), яъни

2006+cos2006<2007+cos2007

cos2006<1+cos2007

тенгсизлик келиб чиқади.

Демак, cos2006<1+cos2007 тенгсизлик ўринли экан.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

Сонларни таққосланг

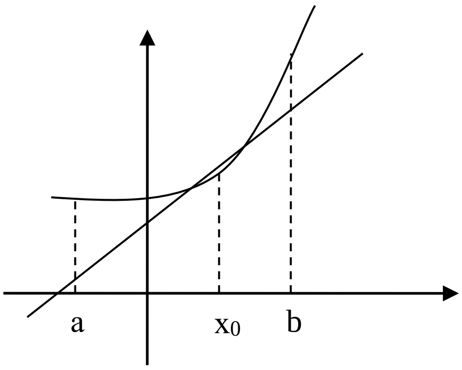
1. $\dfrac{2^{100}+2}{2^{200}+4}$ $\quad\dfrac{2^{200}+2}{2^{300}+4}$; 2. $\dfrac{\ln 6+6}{\ln 7+7}$ $\quad\dfrac{\ln 16+6}{\ln 17+7}$;

3. $\dfrac{\sqrt[5]{100}+1}{\sqrt[5]{102}+1}$ $\quad\dfrac{\sqrt[5]{104}+1}{\sqrt[5]{106}+1}$; 4. $\sin\dfrac{1}{100}<\dfrac{1}{100}$;

Эгри чизиқ уринмасининг татбиқлари.

f(*x*) функцияга ўтказилган уринма ёрдамида баъзи тенгсизликларни исботлаш мумкин.

$y = f(x)$ функция (a, b) ораликда узлуксиз бўлсин ва бир нуқтада дифференциялланувчи бўлсин. Агар $f(x)$ функция (a, b) ораликда ботиқ бўлса, у ҳолда шу ораликда, нуқтадаги ўтувчи уринма функция графигидан юқорида ётмайди, яъни



$y = f(x)$ – функция ва

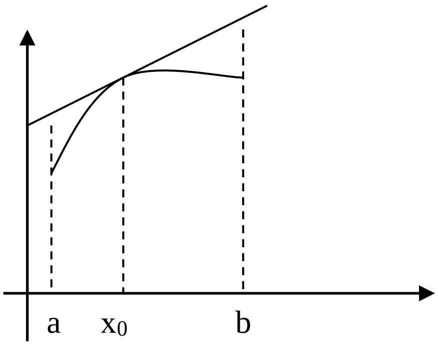
$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ – уринма учун

$f(x) \geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ўринли.

Худи шундай қаварик функция учун эса

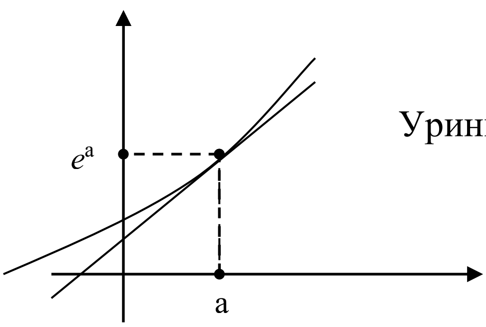
$f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ўринли.

бунда $\forall x, x_0 \in (a,b)$.



Мисол 1. ихтиёрий a ва b ҳақиқий сонлар учун $e^b \geq e^a(b-a)+e^a$ тенгсизликни исботлаш.

Маълумки $y = e^x$ функция ботиқ функция. Демак (a, e^a) нуқтада ўтказилган уринма $y = e^x$ функция графикдан юқорида жойлашмайди.



Уринма тенгламаси тузайлик.

$$y' = e^x \qquad x_0 = a$$
$$f'(a) = e^a \qquad y_0 = e^a$$

ларни ҳисобга олсак уринма тенгламаси

$$F(x)=e^a(x-a)+e^a$$
$$F(b)=e^a(b-a)+e^a$$

$f(x)=e^x$ функция уринмада юқорида бўлганлиги учун $f(b)\geq F(b)$

$$e^b\geq e^a(b-a)+e^a$$

Хусусан $a=0$ бўлганда $e^b\geq 1+b$ тенгламани ҳосил қилиш мумкмн.

Мустақил иш. 1. $\forall x,y\in R$ учун

$$x^n\geq y^n+ny^{n-1}(x-y)\qquad n\in N$$

тенгсизликни исботланг.

2. ҳар қандай $x,\ y$ мусбат ҳақиқий сонлар учун

$x\_\frac{1}{x}\geq y+\frac{1}{y}+\left(1-\frac{1}{y^2}\right)(x-y)$ тенгсизликни исботланг

3. $\forall x,y\in\left[0:\pi\right]$ сонлар учун

$\sin x-\sin y\leq(x-y)\cos y$ бўлишини исботланг.

4. $\forall x,y\in(0;+\infty)$ сонлар учун

$$ye\frac{x}{y}<x-y\quad \text{тенгсизликни исботланг.}$$

Бирор X оралиқда $x_1,x_2,....,x_n\in X$ арифметик прогрессия ҳадлари бўлсин. $y=f(x)$ функция ботиқ қавариқ бўлса, у ҳолда $(x_n,f(x_n))$ нуқтада ўринли $f(x)$ функция графигидан юқорида жойлашади, ҳусусан

$$\begin{aligned}&f(x_{k+1})<f(x_k)+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)\\&k=1,2,3,...,n-1;\\&x_{k+1}-x_k=d\end{aligned}$$

га тенг, бўлганда d – арифметик прогрессиянинг айирмаси. Демак,

$$f(x_{k+1})<f(x_k)+df'(x_k)\ ,\qquad k=1,2,....,n-1.$$

κ ларнинг ўрнига $1,2,3,...,n-1$ ларни қўйиб чиқамиз

$$f(x_2) \le f(x_1) + df'(x_1)$$
$$f(x_3) \le f(x_2) + d(f'(x_2))$$
$$f(x_4) \le f(x_3) + df'(x_3)$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad . \quad . \quad .$$
$$f(x_n) \le f(x_{n-1}) + df'(x_{n-1})$$

келтирилади.

$$f(x_n) \le f(x_1) + d(f'(x_1) + f'(x_1) + f'(x_2) + ... + f'(x_{n-1})) \qquad (2)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади.

Мисол $\ln n \le 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}$ $\qquad (n \ge 2)$

тенгсизликни исботланг.

(2) тенгсизликда $f(x) = \ln x \qquad x_n = k \qquad (k = 1, 2, ...n)$ (3)

деб оламиз у ҳолда

$$f(n) \le f(1) + f'(1) + f'(2) + ... + f'(n-1)$$

бўлиб,

$$\ln n \le 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}$$ ўринли бўлади.

Мустақил иш. Исботланг

1) $n^k > 1 + k(1 + 2^{k-1} + ... + (n-1)^{k-1}) \qquad n \ge 2,\; n, k \in N.$

2) $\sqrt{n} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \qquad n \ge 3;\; n \in N$

3) $n^n > e^{n-1}(n-1)! \qquad n \ge 2.\; n \in N$

Интеграл ёрдамида тенгсизликларни исботлаш

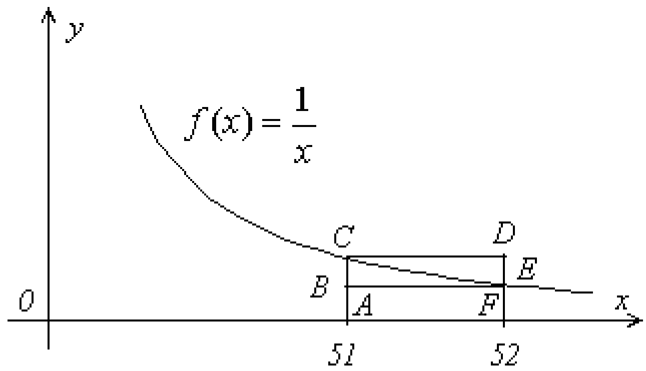
Маълумки, агар $y = f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва номанфий бўлса, у ҳолда унга мос эгри чизиқли трапециянинг S юзи $S=\int_a^b f(x)dx$ формула билан топилар эди. Шунингдек, ушбу тасдиқ ҳам ўринли: агар F фигура F_1 фигурани ўз ичида сақласа ва F фигуранинг F_1 фигурага тегишли бўлмаган камида битта ички нуқтаси мавжуд бўлса, у ҳолда F_1 фигуранинг S_1 юзи F фигуранинг S юзидан кичик бўлади, яъни $S_1<S$ бўлади. Бу тасдиқ юзнинг монотонлик хоссасини ифодалар эди.

Аниқ интегралнинг геометрик маъноси ва фигура юзининг монотонлик хоссасидан фойдаланиб баъзи тенгсизликларни исботлаш мумкин. Тенгсизликларни исботлашда функциянинг графиги, эгри чизиқли трапеция, тўғри тўртбурчак, трапеция юзларидан фойдаланиб, тенгсизликнинг геометрик “исбот”ини (қўйилган масаланинг анализини) ҳосил қиламиз. Кейин эса бу геометрик “исбот” ёрдамида аналитик исботни (анализда олинган натижаларни синтез қиламиз) бажарамиз.

Тенгсизликларни юқорида айтилган усулда исботлашга мисоллар келтирамиз.

1-мисол. $\frac{1}{52} < \ln\frac{52}{51} < \frac{1}{51}$ тенгсизликни исботланг.

Исботи. Бу тенгсизликни исботлаш учун $\ln\frac{52}{51}$ ни қуйидагича $\ln\frac{52}{51} = \ln 52 - \ln 51 = \ln x\Big|_{51}^{52} = \int_{51}^{52}\frac{dx}{x}$ ифодалаб оламиз. Равшанки, бу сон ACEF эгри чизиқли трапециянинг юзига, $\frac{1}{51}$ ва $\frac{1}{52}$ сонлари мос равишда ACDF ва ABEF тўғри тўртбурчакларнинг юзалари тенг (1-расм).



1-расм

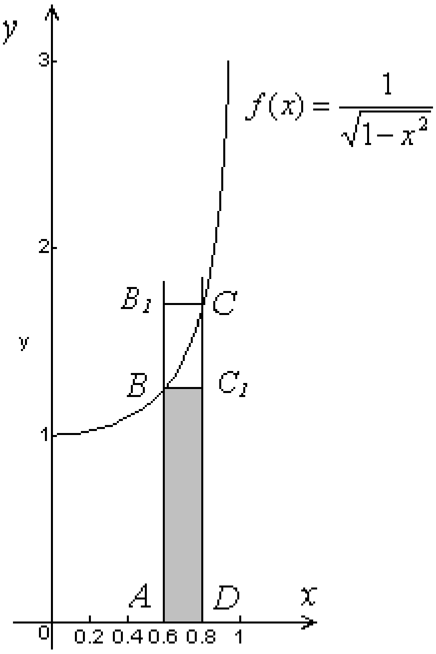
Тўртбурчаклар ва эгри чизиқли трапеция орасида қуйидаги муносабатлар ўринли: ABEF⊂ACEF⊂ACDF. Демак, фигура юзининг монотонлик хоссасига кўра $S_{ABEF} \subset S_{ACEF} \subset S_{ACDF}$ бўлади. Яъни геометрик нуқтаи назардан юқоридаги тенгсизлик ўринли бўлади. Бу геометрик тасаввурга асосланган “исбот” бўлиб, у ўз навбатида аналитик исботни амалга оширишга ёрдам беради. Аналитик исботни амалга оширишда функция ва интегралнинг хоссаларидан фойдаланамиз.

Айтайлик, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функция [51,52] кесмада берилган бўлсин. Равшанки, бу кесмада функция камаювчи, демак $\dfrac{1}{52}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{51}$ қўштенгсизлик ўринли. Бу тенгсизликни [51,52] кесмада интеграллаймиз: $\int\limits_{51}^{52}\dfrac{1}{52}dx<\int\limits_{51}^{52}\dfrac{1}{x}dx<\int\limits_{51}^{52}\dfrac{1}{51}dx$. Натижада $\dfrac{1}{52}<\ln x\Big|_{51}^{52}<\dfrac{1}{51}$, ёки $\dfrac{1}{52}<\ln\dfrac{52}{51}<\dfrac{1}{51}$ ҳосил бўлади. Тенгсизлик исбот бўлди.

2-мисол. $\dfrac{1}{4}<\arcsin 0,8-\arcsin 0,6<\dfrac{1}{3}$ тенгсизликни исботланг.

Исботи. Арксинуслар айирмасини аниқ интеграл қиймати шаклида ифодалаш мумкин: $\arcsin 0,8-\arcsin 0,6=\arcsin x\Big|_{0,6}^{0,8}=\int\limits_{0,6}^{0,8}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Бу эса, юқоридан $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функция графиги билан чегараланган (2-расм) *ABDF* эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг.

$f(0{,}6)=\dfrac{5}{4}$ ва $S_1=0{,}2\cdot\dfrac{5}{3}=\dfrac{1}{3}$ *ABEF* тўртбурчакнинг юзига, шунингдек, $f(0{,}8)=\dfrac{5}{3}$ ва $S_2=0{,}2\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{4}$ ACDF тўртбурчакнинг юзига тенг. Бу юзалар орасида $S_2<S<S_1$ муносабат ўринли. Энди юқоридаги каби, бу геометрик исботни аналитик исботга ўтказиш лозим. Бунинг учун $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функцияни [0,6;0,8] кесмада қараймиз.



2-расм

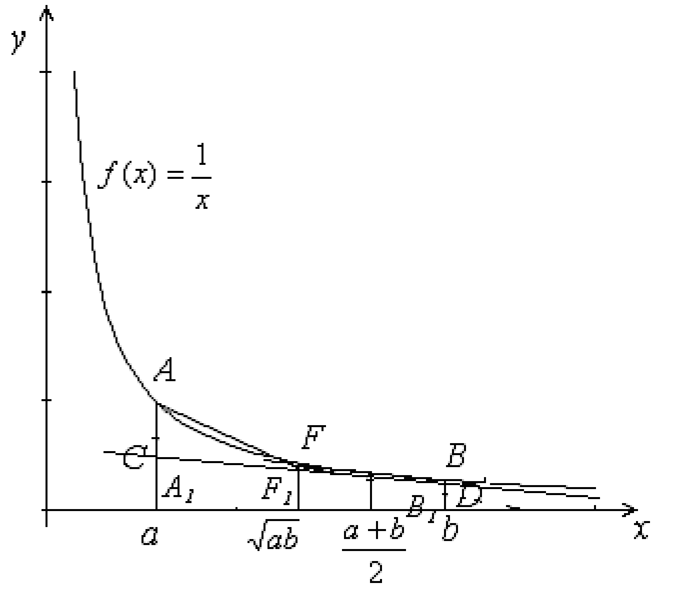
Бу функция ўсувчи бўлганлиги сабабли, ихтиёрий $x\in(0{,}6;0{,}8)$ учун $f(0{,}6)<f(x)<f(0{,}8)$ қўштенгсизлик ўринли. Бу тенгсизликни интеграллаб, исбот талаб қилинган тенгсизликни ҳосил қиламиз.

3-мисол. Айтайлик, a ва b турли мусбат сонлар бўлсин. У ҳолда қуйдаги қўш тенгсизлик ўринли эканлигини исботланг:

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}.$$

Исботи. Аниқлик учун $0<a<b$ бўлсин. У ҳолда $\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$ тенгсизлик ушбу

$$(b-a)\frac{2}{a+b}<\ln b-\ln a<(b-a)\frac{1}{\sqrt{ab}} \quad (1)$$



3-расм

тенгсизликка тенг кучли бўлади. A_1CDB_1 трапецияни қараймиз, бу ерда CD $f(x)=\dfrac{1}{x}$ гиперболанинг абсциссаси $\dfrac{a+b}{2}$ бўлган нуқтасида ўтказилган уринманинг кесмаси (3-расм). Бу уринманинг тенгламаси $Y=\dfrac{2}{a+b}-\dfrac{4}{(a+b)^2}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$ эканлигини текшириш қийин эмас. A_1CDB_1 трапецияни юзини ҳисоблаш учун унинг A_1C ва B_1D асосларини топамиз. Бу асослар мос равишда $Y(a)=\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{2(b-a)}{(a+b)^2}$ ва $Y(b)=\dfrac{2}{a+b}-\dfrac{2(b-a)}{(a+b)^2}$ га тенг. У ҳолда A_1CDB_1 трапецияни юзи $S_1=(b-a)\dfrac{2}{a+b}$ га тенг бўлади.

A_1ABB_1 эгри чизиқли трапециянинг юзи $\ln b-\ln a=\int\limits_a^b\dfrac{dx}{x}=S$, $S_1<S$ бўлганлиги сабабли (1) тенгсизликнинг чап томони “исбот” бўлди.

Энди (1) тенгсизликнинг ўнг томонини исботлаймиз. Айтайлик F гиперболанинг абсциссаси $\sqrt{ab}$ га тенг бўлган нуқтаси, S_2 иккита A_1AFF_1 ва F_1FBB_1 тўғри бурчакли трапециялардан ташкил топган A_1ABB_1 кўпбурчакнинг юзаси бўлсин. У ҳолда

$$S_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)(\sqrt{ab}-a)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{b}\right)(b-\sqrt{ab})=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{(\sqrt{ab}+a)(\sqrt{ab}-a)}{a}+\frac{(b+\sqrt{ab})(b-\sqrt{ab})}{b}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{ab-a^2}{a}+\frac{b^2-ab}{b}\right)=\frac{(b-a)}{\sqrt{ab}}.$$

$S<S_2$ бўлганлиги сабабли, тенгсизликнинг ўнг томони “исбот” бўлди.

Энди аналитик исботни бажарамиз. $f(x)=\frac{1}{x}$ функцияни [a,b] кесмада қараймиз. Бу функция қаралаётган ораликда дифференциалланувчи, ботиқ, шу сабабли унинг графиги шу графикка ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринмадан юқорида жойлашади. Бу функциянинг абсциссаси $x=\frac{a+b}{2}$ бўлган нуқтасидан ўтказилган уринмасининг тенгламасини ёзамиз: $Y=\frac{2}{a+b}-\frac{4}{(a+b)^2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$. Юқорида айтганларимизга кўра $x\neq\frac{a+b}{2}$ да $Y(x)<f(x)$. Бу тенгсизликни $[a,b]$ кесмада интеграллаб, $(b-a)\frac{2}{a+b}<\ln b-\ln a$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Тенгсизликнинг иккинчи қисмини исботлаш учун яна $f(x)=\frac{1}{x}$ функцияни $[a,b]$ кесмада ботиқ эканлигидан фойдаланамиз. Берилган кесмани $x=\sqrt{ab}$ нуқта ёрдамида иккита кесмага ажратамиз. Бу кесмаларнинг ҳар бирида қаралаётган функция ботиқ, шу сабабли ҳар бир кесмага мос функция графиги учлари мос равишда $(a, f(a))$ ва $(\sqrt{ab}, f(\sqrt{ab}))$ ҳамда $(\sqrt{ab}, f(\sqrt{ab}))$ ва $(b, f(b))$ нуқталарда бўлган ватарлардан пастда жойлашади. Айтайлик, бу ватарларнинг тенгламалари мос равишда $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ бўлсин. У ҳолда $(a,\sqrt{ab})$ ва $(\sqrt{ab},b)$ интервалларда $f(x)<y_1(x)$ ва $f(x)<y_2(x)$ тенгсизликлар ўринли бўлади. бу тенгсизликларни мос кесмаларда интеграллаймиз ва қўшамиз. Интегралнинг аддитивлик хоссасига кўра

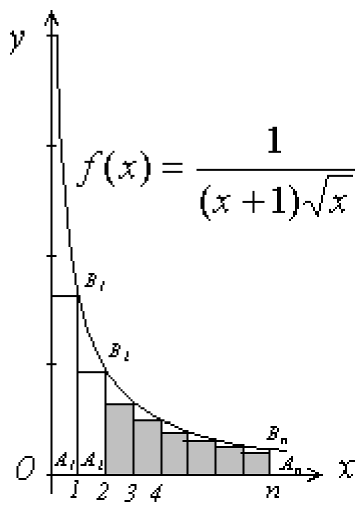
$\int_a^b f(x)dx < \int_a^{\sqrt{ab}} y_1(x)dx + \int_{\sqrt{ab}}^b y_2(x)dx$ ўринли бўлади. Бу интегралларни ҳисоблаб

$\ln b - \ln a < (b-a)\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Юқоридаги масалаларда тўғри фигураларнинг юзлари эгри чизиқли трапециянинг юзларини баҳолашга ёрдам берган эди. Энди, қуйида тўғри фигураларнинг юзларини эгри чизиқли трапеция юзлари орқали баҳолашдан фойдаланиб ечиладиган масалага мисол келтирамиз.

4-**мисол.** Ушбу тенгсизликни исботланг:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2.$$



4-расм

Исботи. Бу тенгсизликнинг чап томонидаги ҳар бир қўшилувчини асоси бирга, баландлиги мос равишда $\frac{1}{2}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{4}}, \cdots, \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг йиғиндиси деб қараш мумкин. Бу тўғри тўртбурчакларни чизиш учун аввал $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ функциянинг графигини, кейин эса тўғри тўртбурчакларни чизамиз (4-расм). Бундай тенгсизликларни исботлашда тўғри тўртбурчаклардан ташкил топган поғонали фигурани ўз ичида сақлайдиган эгри чизиқли трапецияни мақсадга мос қилиб танлаш муҳим ҳисобланади. Равшанки, асоси OA_n бўлган эгри чизиқли трапециядан фойдаланиб бўлмайди, чунки $f(x)$ функция 0 нуқтанинг атрофида чегараланмаган. Шу сабабли берилган тенгсизликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<\frac{3}{2} \qquad (2)$$

Энди (2) тенгсизликнинг чап томонини $A_1B_1B_nA_n$ эгри чизиқли трапециянинг $S_1=\int\limits_1^n\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ юзи билан солиштириш мумкин. Аммо интегрални ҳисоблаб, ($\sqrt{x}=t$ алмаштириш ёрдамида) $S_1<\frac{\pi}{2}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз, аммо бундан $S<\frac{3}{2}$ деб хулоса чиқариб бўлмайди. Бунга асосий сабаб $A_1B_1B_2A_2$ эгри чизиқли трапеция билан унда жойлашган тўғри бурчакли тўртбурчакнинг юзлари орасидаги фарқдир, чунки бу тўртбурчакнинг асоси [1;2] бўлиб, $f(x)$ функция бу кесмада тез ўсади. $A_2B_2B_3A_3$ эгри чизиқли трапеция билан унга мос тўғри бурчакли тўртбурчакнинг юзлари орасидаги фарқ ҳам анча сезиларли, шу сабабли $A_2B_2B_nA_n$ эгри чизиқли трапеция юзи S_3 ни ҳисоблаймиз:

$$S_3=\int\limits_3^n\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{n}}\frac{2dt}{t^2+1}=2(arctg\sqrt{n}-arctg\sqrt{3})<2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}.$$

Энди

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3},\text{ ва}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+4\pi}{12}<\frac{2\cdot 1{,}5+1{,}8+4\cdot 3{,}15}{12}=1{,}45<\frac{3}{2},$$ демак тенгсизлик геометрик нуқтаи назардан исбот бўлди.

Берилган тенгсизликни аналитик исботи юқоридаги тенгсизликларнинг исботи каби бажарилади.

№1 $\frac{1}{52}<\ln\frac{52}{51}<\frac{1}{51}$ тенгсизликни исботланг.

№2. Қуйидаги тенгсизликларнинг ўринли эканлигини исботланг:

a) $\sin 20^0<\frac{7}{20}$; b) $\sin 20^0>\frac{1}{3}$.

№3. Агар $x\geq 1$ бўлса, у ҳолда $e^x\geq ex$ эканлигини исботланг.

№4. Қуйидаги сонларнинг қайси бири катта $e^{\frac{1}{\pi}-\frac{1}{e}}$ ёки $\left(\frac{e}{\pi}\right)^e$?

№5. $\dfrac{a}{b} \geq \dfrac{c}{a}$ шартни қаноатлантирувчи исталган мусбат a, b, c сонлар учун $\dfrac{\lg a}{\lg b} \geq \dfrac{\lg c}{\lg a}$ тенгсизлик ўринли эканлигини исботланг.

№6.Ушбу тенгсизликни исботланг:

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}.$$

Адабиётлар:

1. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике. Начала анализа.-М.:Наука.1990.,-608с.

2. Вороной А.Н. Интеграл помогает доказывать неравенства. Математике в школе. №6. 2002.с. 66-71.