O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI AXBOROT TEXNOLOGIYALARI VA KOMMUNIKATSIYALARINI RIVOJLANTIRISH VAZIRLIGI

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI HUZURIDAGI

DASTURIY MAHSULOTLAR VA APPARAT DASTURIY MAJMUALAR YARATISH MARKAZI

N. Ravshanov, F.M.Nuraliyev, B. Yu. Palvanov

“Murakkab tizimlarni modellashtirish” laboratoriyasi

MATEMATIK VA KOMPYUTERLI MODELLASHTIRISH ASOSLARI

MA’RUZALAR TO’PLAMI

(uslubiy qo’llanma)

II-QISM

TOSHKENT– 2016

Ushbu uslubiy qo’llanma MATEMATIK VA KOMPYUTERLI MODELLASHTIRISH fanidan ma’ruza mashg’ulotlar uchun mo’ljallangan bo’lib, *Kasbiy ta’limi (informatika va axborot texnologiyalari) yo’nalishida o’qitiladigan shu fanning* namunaviy fan dasturi asosida tayyorlangan.

Uslubiy qo’llanma II qismdan iborat bo’lib, I-qismda Matematik model tushunchasi, kompyuterli model tushunchasi, berilgan masalaning matematik modelini tuzish va xatoliklarni aniqlash bayon etilgan bo’lsa, II-qismda chiziqli va chziziqsiz jarayonlarning matematik modelini qurish, ularning kompyuterda hisoblash eksperimentini o’tkazish hamda natijalarni sonli usulda ko’rsatish va grafigini taqdim etish, modellashtirishga oid tegishli masalalar yechib ko’rsatilgan.

Qo’llanmada sonli differensiallash va ularga olib keladigan masalalar, aniq integralni taqribiy hisoblash va dasturini tuzish, differensial tenglamalarni yechish usullari va kompyuterdagi dasturiy vositasi, matematika statistika elementlari, kuzatish natijalariga ishlaov berish hamda, iqtisodiy masalalar va ularni yechish usullari, transport masalalari, ularning turlari va ularga matematik modellar tuzish turli usullar orqali optimal yechimlarini topish texnologiyalari keltirilgan.

Mazkur uslubiy qo’llanma universitetlarning fizika-matematika fakulteti “Kasb ta’limi: Informatika va axborot texnologiyalari” yo’nalishida tahsil olayotgan talabalarga “Matematik va kompyuterli modellastirish asoslari” fanidan ma’ruza mashg’ulotlarida foydalanish uchun mo’ljallangan.

Qo’llanmadan oliy o’quv yurtlarining fizika-matematika fakultetining magistratura va amaliy matematika yo’nalishlarida tahsil olayotgan talabalar ham foydalanishlari mumkin.

Taqrizchilar: Mirzayev N., Muxamadiye A.Sh.

TATU huzuridagi DM va ADMYAM Ilmiy Kengashi qaroriga asosan nashrga tavsiya etilgan “27” “may” 2016 yildagi
№ ________bayonnoma.

Uslubiy ko‘rsatma TATUning ilmiy uslubiy kengashida ko‘rib chiqilgan va ma’qullangan.
(Bayonnoma №______ «___» __________ 2016 yil)

MUNDARIJA

10-Ma'ruza. Sonli differensiallash. Lagranj va Nyuton ko'phadlarini differensiallash. Xatoliklarni baholash.

REJA:

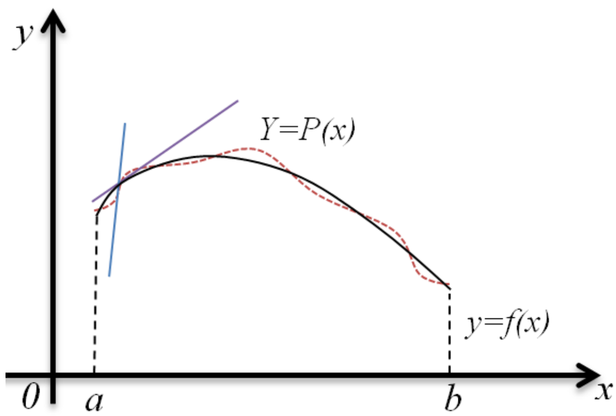
1. **Sonli differensiallash tushunchasi va usullari.**
2. **Nyutonning interpolyasion ko'phadi asosida sonli differensiallash formulasi va xatoliklarini baholash.**
3. **Logranj interpolyatsion ko'phadi asosida sonli differensiallash formulasi va xatoliklarini baholash.**

Tayanch tushunchalar. *Differensiallash, sonli differensiallsh, sonli differensiallshda xatoliklar, xatoliklar, interpolyatsiya, Interpolyatsion ko'phad, xatoliklarning baholanishi.*

Adabiyotlar:

1. *Ю. Ю. Тарасевич. Математическое и компьютерное моделирование. Изд. 4-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.*
2. *Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Издательство «Наука» Москва 1966. С. 664.*
3. *Е. В. Бошкиново и др. Численное методы и их реализация в MS Excel. Самара 2009*
4. *Ю. В. Василков, Н. Н. Василкова. Компьютерные технологии вычилений в математическом моделировании. Изд. «Финансы и статистика» М.:2002*
5. *А. С. Амридинов, А. И. Бабаяров, Б. Б. Бабажанов. «Ҳисоблаш математикаси» фанидан лаборатория ишларини бажариш бўйича услубий тавсиялар ва топшириқлар. Самарқанд: СамДУ нашри. 2008.*

Amaliy masalalarni yechishda, ko'pgina hollarda $y = f(x)$ funksiyaning berilgan nuqtalardagi ko'rsatilgan tartibli hosilasini topish talab etiladi. Keltirilgan talablarda $f(x)$ funksiyaning berilgan nuqtalardagi differensialini analitik yo'l bilan hisoblash bir qancha qiyinchiliklarni tug'diradi. Bunday hollarda odatda *sonli differensiallash usulidan* foydalaniladi.



Chizma. 1.

Sonli differensiallash formulasini kiritish uchun, berilgan $f(x)$ funksiyaning [a, b] oraliqdagi interpolyasiyasi $P(x)$ ko'phad bilan almashtiriladi va quyidagicha hisoblanadi:

$$f'(x) = P'(x), \quad a \le x \le b. \tag{1}$$

Shu tarzda $f(x)$ funksiyaning yuqori tartibli hosilasini topisga o'tiladi.

Agar $P(x)$ interpolyatsion funksiya uchun xatolik

$$R(x) = f(x) - P(x)$$

ekanligi ma'lum bo'lsa, u holda interpolyatsion funksiya hosilasi $P'(x)$ ham quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x) \tag{2}$$

Shuni ta'kidlab o'tish joizki sonli differensiallash amali, interpolyasiyalshdan ko'ra kamroq aniqlikni beradi. Haqiqatdan ham [a, b] oraliqdagi bir-birga yaqin

$$y = f(x) \text{ va } Y = P(x)$$

egri chiziqlar, shu oraliqdagi funksiyalarning hosilasi $f'(x)\, va\; P'(x)$ yaqinlashishini ta'minlash kafolatini bermasligi mumkin, yani bir nuqtadagi ikkita urinmaning burchak koeffisiyentlari kamroq yaqinlashadi (Chizma.1). Sonli differensiallashning Logranj, Nyuton, Stirling va boshqa usullari mavjud bo'lib biz ulardan ayrimlarini ko'rib o'tamiz.

Nyutonning birinchi interpolyatsion ko'phadi asosida sonli differensiallash formulasi.

Bizga $y(x)$ funksiyaning [a, b] oraliqda teng uzoqlikda joylashgan $x_i\,(i = 0, 1, 2, ..., n)$ nuqtalarda $y_i = f(x_i)$ qiymatlari bilan berilgan bo'lsin. Berilgan [a, b] oraliqda funksiyaning $y' = f'(x),\ \ y'' = f''(x),...$ hosilalarini topish uchun, $y(x)$ funksiyani $x_0,\ x_1,..., x_k\,(k \le n)$ nuqtalardagi Nuyoton interplyasion formulasi (polinumi) bilan almashtiramiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ... \tag{3}$$

bu yerda

$$q = \frac{x - x_0}{h};\ \ h = x_{i+1} - x_i;\quad i = 0, 1, 2, ...$$

Binom ko'paytmalarni qavsdan ochsak quyidagini hosil qilamiz:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{(q^2 - q)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + ... \tag{4}$$

Shunday qilib

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}\frac{dy}{dq}$$

U holda

$$y'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0+...\right] \qquad (5)$$

Shu tarzda

$$y''(x)=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(y')}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}$$

ekanligidan

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0+...\right] \qquad (6)$$

kelib chiqadi.

Shu usul bilan $y(x)$ funksiyaning ixtiyoriy tartibli hosilasini hisoblash imkoniga ega bo'lamiz.

E'tibor bersak, x ning belgilangan nuqtasidagi $y'(x),\ y''(x),\ ...$ hosilalarini topishda x_0 sifatida argumentning jadvalli qiymatiga yaqinini olishimizga to'g'ri keladi.

Bazan, $y(x)$ funksiyaning hosilasini topishda asosan berilgan x_i nuqtalardagi foydalaniladi. Bunda sonli differensiallash formulasi bir muncha qisqaradi. Shu tarzda jadvalli qiymatning har bir nuqtasini boshlang'ich nuqta deb faraz qilib olsak, unda $x=x_0,\ q=0$ ko'rinishda yozsa bo'ladi va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y'(x_0)=\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\frac{\Delta^5 y_0}{5}-...\right) \qquad (7)$$

$$y''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+...\right) \qquad (8)$$

Agar $P_k(x)$-Nyuton interpolyatsion ko'phadining chekli ayirmalari $\Delta y_0,\ \Delta^2 y_0,\ ...,\ \Delta^k y_0$ va mos ravishda xatoligi $R_k(x)=y(x)-P_k(x)$ bo'lsa, unda hosilasining xatoligi

$$R'_k(x) = y'(x) - P'_k(x)$$

bo'ladi.

Oldingi ma'ruza mashg'ulotlarimizdan ma'lumki, interpolyatsion ko'phad xatoligi quyidagi shaklda:

$$R_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_k)}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi) = h^{k+1} \frac{q(q-1)...(q-k)}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi)$$

Bu yerda ξ - $x_0, x_1, x_2, ..., x_k$ orasidagi ixtiyoriy son. Shu sababli $y(x) \in C^{(k+2)}$ ko'zlasak u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$R'_k(x) = \frac{dR_k}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} =$$

$$= \frac{h^k}{(k+1)!} \left\{ y^{(k+1)}(\xi) \frac{d}{dq}\left[q(q-1)...(q-k)\right] + q(q-1)... \frac{d}{dq}\left[y^{(k+1)}(\xi)\right] \right\}.$$

Shu yerdan $x = x_0,$ va $q = 0$ hamda $\frac{d}{dq}\left[q(q-1)...(q-k)\right]_{q=0} = (-1)^k k!,$ ekanligini bilib

$$R'_k(x_0) = (-1)^k \frac{h^k}{k+1} y^{(k+1)}(\xi). \quad (9)$$

Shunday qilib $y^{(k+1)}(\xi)$ ko'pgina hollarda baholash qiyinchilik tug'diradi, lekin h ning kichik yaqinlashishida quyidagicha hisoblash mumkin:

$$y^{(k+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{k+1} y_0}{h^{k+1}}$$

demak

$$R'_k(x_0) \approx \frac{(-1)^k}{h} \frac{\Delta^{k+1} y_0}{k+1}. \quad (11)$$

Nyutonning ikkinchi interpolyatsion ko'phadi asosida sonli differensiallash formulasi.

Funksiyani oxirgi nuqtalardagi birinchi interpolyatsion ko'phad orqali ifodalash amalyotda noqulayliklar tug'diradi. Bunday hollarda Nyutonning ikkinchi interpolyatsiyasi orqali ifodalash kerak bo'ladi. Sonli differensiallash jarayoni huddi birinchi interpolyatsion shaklda keltirib chiqariladi. Bunda ham $y(x)$ funksiyaning [a, b] oraliqda teng uzoqlikda joylashgan $x_i \, (i = 0, 1, 2, ..., n)$

nuqtalarda $y_i = f(x_i)$ qiymatlari bilan berilgan bo'lsa, $y' = f'(x),\ y'' = f''(x),...$ hosilalarini topish uchun, $y(x)$ funksiyani $x_0,\ x_1,...,\ x_k\ (k \le n)$ nuqtalardagi Nuyotonning ikkinchi interplyasion formulasi (polinumi) bilan almashtiramiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ... \qquad (12)$$

bu yerda

$$q = \frac{x - x_n}{h};\ h = x_{i+1} - x_i;\quad i = 0, 1, 2, ...$$

Binom ko'paytmalarni qavsdan ochsak quyidagini hosil qilamiz:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{(q^2+q)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_0 + ... \qquad (13)$$

Shunday qilib

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dq}$$

U holda

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_n + \frac{2q+1}{2}\Delta^2 y_n + \frac{3q^2+6q+2}{6}\Delta^3 y_n + ...\right] \qquad (14)$$

Shu tarzda

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq}\cdot\frac{dq}{dx},$$

ekanligidan

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_n + (q+1)\Delta^3 y_n + \frac{6q^2+18q+11}{12}\Delta^4 y_n + ...\right] \qquad (15)$$

kelib chiqadi.

Shu usul bilan $y(x)$ funksiyaning ixtiyoriy tartibli hosilasini hisoblash imkoniga ega bo'lamiz.

E'tibor bersak, bunda ham x ning belgilangan nuqtasidagi $y'(x),\ y''(x),\ ...$ hosilalarini topishda x_0 sifatida argumentning jadvalli qiymatiga yaqinini olishimizga to'g'ri keladi.

Shu tarzda jadvalli qiymatning har bir nuqtasini boshlang'ich nuqta deb faraz qilib olsak, unda $x = x_n,\ q = 0$ ko'rinishda yozsa bo'ladi va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y'(x_n) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_n + \frac{\Delta^2 y_n}{2} + \frac{\Delta^3 y_n}{3} + \frac{\Delta^4 y_n}{4} + \frac{\Delta^5 y_n}{5} + \dots\right) \tag{16}$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_n + \Delta^3 y_n + \frac{11}{12}\Delta^4 y_n + \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \dots\right) \tag{17}$$

Agar $P_k(x)$-Nyuton interpolyatsion ko'phadining chekli ayirmalari $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^k y_0$ va mos ravishda, xatoligi $R_k(x) = y(x) - P_k(x)$ bo'lsa, unda hosilasining xatoligi

$$R_k'(x) = y'(x) - P_k'(x)$$

bo'ladi.

Interpolyatsion ko'phad xatoligini baholash orqali, differensiallash xatoligi aniqlanadi.

$$R_k(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k-1})\dots(x - x_0)}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi) = h^{k+1}\frac{q(q+1)\dots(q+k)}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi)$$

Bu yerda ξ- $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ orasidagi ixtiyoriy son. Shu sababli $y(x) \in C^{(k+2)}$ ko'zlasak u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$R_k'(x) = \frac{dR_k}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} = \frac{h^k}{(k+1)!}\left\{y^{(k+1)}(\xi)\frac{d}{dq}\left[q(q+1)\dots(q+k)\right] + q(q+1)\dots\frac{d}{dq}\left[y^{(k+1)}(\xi)\right]\right\}.$$

Shu yerdan $x = x_n,$ va $q = 0$ hamda $\frac{d}{dq}\left[q(q+1)\dots(q+k)\right]_{q=0} = k!,$ ekanligini bilib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$R_k'(x_0) = \frac{h^k}{k+1} y^{(k+1)}(\xi). \tag{18}$$

Shunday qilib $y^{(k+1)}(\xi)$ ko'pgina hollarda baholash qiyinchilik tug'diradi, lekin h ning kichik yaqinlashishida quyidagicha hisoblash mumkin:

$$y^{(k+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{k+1} y_0}{h^{k+1}}$$

demak

$$R'_k(x_0) \approx \frac{1}{h}\frac{\Delta^{k+1} y_0}{k+1}. \tag{19}$$

Misol1. Jadvalda keltirilgan $y = \lg x$ funksiyaning qiymatlaridan foydalanib $y'(50)$ ning qiymatini birinchi interpolyatsion almashtirishda foydalanib hisoblang.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990	414	-36	5
55	1,7404	378	-31	
60	1,7782	347		
65	1,8129			

Yechish. Bu yerda *h=5*. Keltirilgan jadvalning oxirgi 3 ta ustunini chekli ayirmalar bilan to'ldiramiz, (8) formuladan foydalanib hisoblasak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y'(50) = \frac{1}{5}(0,0414 + 0,0018 + 0,0002) = 0,0087.$$

Haqiqatdan ham

$$y'_x = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{50}\cdot\frac{1}{2,302585} = 0,0087.$$

Ko'rinib turibdiki sonli usuldagi hisob natijasi bilan analitik usuldagi hisob natijalarning 4 xona aniqlikdagi yaxlitlangan qiymatlari bir xil.

Logranj interpolyatsion ko'phadi asosida sonli differensiallash formulasi va xatoliklarini baholash

Bizga $y(x)$ funksiyaning [a, b] oraliqda teng uzoqlikda joylashgan $x_i\ (i = 0, 1, 2, ..., n)$ nuqtalarda $y_i = y(x_i)$ qiymatlari bilan berilgan bo'lsin. Berilgan [a, b] oraliqda funksiyaning $y' = y'(x),\ y'' = y''(x),...$ hosilalarini topish uchun, $y(x)$ funksiyani $x_0,\ x_1,..., x_k\ (k \le n)$ nuqtalardagi Logranj interplyasion formulasi (polinumi) bilan almashtiramiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{n+1}(x) y_i}{(x - x_i)\prod'_{n+1}(x_i)}.$$

Bu yerda

$$\prod_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n).$$

U holda

$$L_n(x_i) = y_i; \quad i = 0, 1, 2, ..., n).$$

Sunday qilib

$$\frac{x - x_0}{h} = q$$

dan foydalansak

$$\prod_{n+1}(x) = h^{n+1} q(q-1)...(q-n) = h^{n+1} q^{[n+1]}$$

Bo'ladi va

$$\begin{aligned} \prod'_{n+1}(x_i) &= (x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) = \\ &= h^n i(i-1)...1(-1)...[-(n-i)] = (-1)^{n-i} h^n i!(n-i)! \end{aligned} \tag{20}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak Logranj interpolyasion ko'phadi uchun

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i}. \tag{21}$$

Endi

$$\frac{dx}{dq} = h,$$

ekanligidan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y'(x) \approx L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \frac{d}{dq} \left[\frac{q^{[n+1]}}{q-i} \right]. \tag{22}$$

Shu tartibda davom ettirilib berilgan $y(x)$ funksiyaning yuqori tartibli hosilasi topiladi. Xatoligini baholash uchun, umumiy xatolik formulasidan foydalanamiz ya'ni

$$r_n(x) = y'(x) - L'_x(x)$$

buning uchun interpolyatsion ko'phad xatoligini toppish formulasidan foydalanamiz

$$R_n(x) = y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{n+1}(x)$$

Bu yerda ξ - $x_0, x_1, x_2, ..., x_k$ orasidagi ixtiyoriy son. Shu sababli $y(x) \in C^{(k+2)}$ ko'zlasak u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$r_n(x) = R_n'(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left\{ y^{(n+1)}(\xi)\prod\nolimits_{n+1}'(x) + \prod\nolimits_{n+1}(x)\frac{d}{dx}\left[y^{(n+1)}(\xi) \right] \right\}.$$

(11) formuladan foydalansak berilgan nuqtadagi xatolik formulasini quyidagicha yozish mumkin:

$$R_n'(x_i) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i!(n-i)!}{(n+i)!} y^{(n+1)}(\xi) \tag{23}$$

Shunday qilib Nuytonning birinchi va ikkinchi interpolyatsiyasi hamda Logranj interpolyatsiyasi orqali sonli differensiallash formulasini keltirib chiqardik hamda xatoligini baholash formulasiga ega bo’ldik.

Nazorat savollari.

1) Sonli differensiallash deganda nimani tushunasiz?
2) Sonli differensiallashning qanday usullari mavjud?
3) Nyutonning birinchi interpolyatsion ko’phadi orqali sonli differensiallashni tushuntirib bering
4) Nyutonning ikkinchi interpolyatsion ko’phadi orqali sonli differensiallashni tushuntirib bering
5) Logranj interpolyatsion ko’phad orqali sonli differensiallashni tushuntirib bering
6) Sonli differensiallashda xatoliklar haqida tushuntirib bering
7) Logranj va Nyuton ko’phadi orqali sonli differensiallashda qoldiq hadini keltirib chiqaring.

11-ma’ruza. Aniq integralni taqribiy hisoblash formulalari. To‘g’ri to‘rtburchaklar, trapetsiya va Simpson formulalari. Ularning algoritmi va dasturlari. Aniqlikni baholash

REJA:

1. **Aniq integralni taqribiy hisoblash tushunchasi**
2. **Aniq integralni taqribiy hisoblash usullari**
3. **Aniq integralni hisoblash algoritmi va dasturlari. Aniqlikni baholash**

Tayanch tushunchalar: *Taqribiy integrallash formulalari, Nyuton - Kotes formulalari va ularning qoldiqlari, Trapetsiya formulasi, Simpson formulasi*

Adabiyotlar:

1. *Ю. Ю. Тарасевич. Математическое и компьютерное моделирование. Изд. 4-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.*
2. *Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Издательство «Наука» Москва 1986*
3. *Е. В. Бошкиново и др. Численное методы и их реализация в MS Excel. Самара 2009*
4. *Ю. В. Василков, Н. Н. Василкова. Компьютерные технологии вычилений в математическом моделировании. Изд. «Финансы и статистика» М.:2002*
5. *А. С. Амридинов, А. И. Бабаяров, Б. Б. Бабажанов. «Ҳисоблаш математикаси» фанидан лаборатория ишларини бажариш бўйича услубий тавсиялар ва топшириқлар. Самарқанд: СамДУ нашри. 2008.*

Aniq integralni taqribiy hisoblash

Quyidagi

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

aniq integralning qiymatini taqribiy hisoblashni qaraylik. Bu erda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz.

Berilgan funksiyani $[a,b]$ oralig'ini n ta uzunligi $h=\dfrac{b-a}{n}$ ga teng bo'lgan $[x_0,x_1],[x_1,x_2],.....,[x_{n-1},x_n]$ kesmalarga ajratamiz.

Agar tugunlarda $f(x)$ ning qiymatini $y_i = f(x_i)\ (i=0,1,2,...,n)$ kabi belgilasak

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+......+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right) \qquad (2)$$

hosil qilmiz. Ushbu (2) formula umumiy trapetsiyalar formulasi deyiladi. Bu formula geometrik nuqtai-nazardan integral ostidagi $y=f(x)$ funktsiyaning grafigini tugun nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq bilan almashtirishdan iboratdir.

Faraz qilaylik $n=2m$ juft son bo'lsin. $[a,b]$ integrallash oralig'ini n ta uzunligi $h=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{b-a}{2m}$ ga teng bo'lgan $[x_0,x_1],[x_1,x_2],.....,[x_{n-1},x_n]$ kesmalarga ajratamiz. Berilgan funksiyani har bir kesmasini parabolik funksiya bilan almashtirsak

$$\begin{aligned} I(f)=\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\big[(y_0+y_{2m})+4(y_1+y_3+......+y_{2m-1})+ \\ +2(y_2+y_4+......+y_{2m-2})\big] \end{aligned} \qquad (3)$$

bo'ladi. Keltirilgan (3) formula Simpson (parabolalar) formulasi deyiladi.

Ushbu keltirilgan (3) formula geometrik nuqtai-nazardan integral ostidagi $y=f(x)$ funktsiyaning grafigini har bir oraliqda parabolalar bilan almashtirishdan iboratdir.

Aniq integralni taqribiy hisoblash usullari

Nyuton-Kotes formulalari $J_h^{NK}(f)$**.**

$J(f)=\mathrm{int}(f,a,b))$ integralni hisoblash uchun Lagranj interpolyatsion ko'phadi formulasidan foydalanamiz:

$$J_h^{NK}(f)=J(L_n(f;x))=\int_a^b L_n(f;x)dx=\int_a^b\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)dx=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)p_i \qquad (1)$$

bu yerda

$$p_i=\int_a^b l_i(x)dx=\int_a^b\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx \qquad (2)$$

(1) formula $x_{i+1} - x_i = h$, hol uchun Nyuton - Kotes formulasi deyiladi, (2) Nyuton - Kotes koeffitsientlari deyiladi. (2) da $x = x + th$ almashtirishni bajarsak $dx = hdt,\ x \to t,\ a \to 0, b \to n,\ h = (b - a)/n$ va

$$p_i = \frac{b-a}{n}\int_0^n (-1)^{n-i}\frac{t(t-1)...(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)}dt \qquad (3)$$

ko'rinishni hosil qilamiz. (3) ni hosil qilishda

$$x - x_j = (t - j)h,\ x_i - x_j = (i - j)h$$

tengliklardan foydalandik.

To'g'ri to'rtburchaklar formulasi $J_h^{TT}(f)$.

Kvadratura formulasi (integral yig'indi)

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} p_i f(\xi_i) \qquad (4)$$

da $\xi_i = x_i + h/2,\ p_i = h,\ i = 0, 1, ..., n-1$ deb ushbu markaziy to'g'ri to'rtburchaklar formulasi $J_h^{TT}(f)$ ga kelamiz:

$$J_h^{TT}(f) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2) = h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+0.5}\ .$$

Markaziy to'g'ri to'rtburchaklar formulasida egri chiziqli trapetsiya yuzi chizmada ko'rsatilgan asoslari h va $f(x_i + h/2)$ ga teng to'g'ri to'rtburchak yuzalarining yig'indisi $J_h^{TT}(f)$ ga almashtirilmoqda.

Trapetsiya formulasi $J_h^T(f)$.

Kvadratura formulasida $\xi_i = x_i, p_0 = p_n = h/2, p_i = h, i = 1, ..., n-1$ deb olamiz

$$J_h^T(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f_i + f_{i+1}}{2}h = \frac{h}{2}\{f_0 + 2(f_1 + ... + f_{n-1}) + f_n\} \qquad (5)$$

(5) formula trapetsiya formulasi deyiladi. Trapetsiya formulasida egri chiziqli trapetsiya yuzi chizmada ko'rsatilgan asoslari f_i, f_{i+1}, h balandlikka ega trapetsiyalar yuzalarining yig'indisi $J_h^T(f)$ bilan almashtirilmoqda.

Simpson formulasi $J_h^C(f)$.

$J(f)$ integralni taqribiy hisoblash uchun $\{(x_i, f(x_i)),\ i = 0,1,...,2n\}$ jadval olib xar bir $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ $\{i = 0,1,...,2n-2\}$ kesmada Nyutonning ikkinchi darajali ko'pxadini quramiz. Bu funktsiyalar $[x_0; x_{2n}]$ kesmada uzluksiz ikkinchi darajali (parabolik) interpolyatsiya splayni $S(f, x)$ ni tashqil qiladi.

$$S(f,x)=\begin{cases} f(x_{2i})+(x-x_{2i})f[x_{2i},x_{2i+1}] \\ +(x-x_{2i})(x-x_{2i+1})f[x_{2i},x_{2i+1},x_{2i+2}] \\ x_{2i}\le x\le x_{2i+2},\ i=0.1,...,n-1 \end{cases} \tag{6}$$

so'ng $J(f)\approx J(S)=J_h^C(f)$ deb qabul qilamiz va $J_h^C(f)$ ni Simpson formulasi deb ataymiz. Ravshanki,

$$J_h^C(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} L_{2,i}(f;x)dx=\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}[f_{2i}+4f_{2i+1}+f_{2i+2}]=$$
$$\frac{h}{3}\{f_0+4(f_1+...+f_{2m-1})+2(f_2+...+f_{2m-2})+f_{2m}\}$$

Oraliq natija quyidagicha yaratiladi. $[x_0,x_2]$ kesmada Nyutonning 2-darajali interpolyatsiya ko'phadini integrallaymiz.

Lemma 1. Ushbu sodda Simpson formulasi o'rinli:

$$\int_{x_0}^{x_2} N_2(x)dx=h(f_0+4f_1+f_2)/3=J_h^C(N_2).$$

Isbot. $a_0=f_0, a_1=f[x_0,x_1], a_2=f[x_0,x_1,x_2]$ deb quyidagilarni olamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} N_2(x)dx=\int_{x_0}^{x_2}(a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)dx=2ha_0+2a_1h^2+2a_2h^3/3$$
$$=2hf_0+2h^2(f_1-f_0)/h+2\frac{h^3}{3}(f_0-2f_1+f_2)/2h^2=h(f_0+4f_1+f_2)/3=J_h^C(N_2).$$

Lemma 2. $r_h^C(f)=f(x)-J_h^C(f)$ desak $r_h^C(x^\alpha)=0, \alpha=0,1,2,3$.

Isbot. $\alpha=0,1,2$ hollar ravshan, $\alpha=3$ hol elementar ko'rsatiladi:

$$r_h^C(x^3)=\frac{1}{4}(x_2^4-x_0^4)-\frac{(x_2-x_0)}{6}[x_0^3+4(\frac{x_0+x_2}{2})^3+x_2^3]=\frac{1}{4}(x_2^4-x_0^4)-\frac{(x_2^2-x_0^2)}{6}\frac{3}{2}[x_0^2+x_2^2]=0$$

Integralni taqribiy hisoblashga doir algoritmlar va dasturlar.

Misol.

$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ integralning qiymatini trapetsiyalar va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblang.

Yechish.

$[0,1]$ kesmani $n=10$ ta $[x_0,x_1],[x_1,x_2],.....,[x_9,x_{10}]$kesmalarga ajratamiz. Har bir

x_i nuqtada $y_i=f(x_i)\,(i=0,1,2,...,10)$ qiymatlarni hisoblaymiz va quyidagi jadvalga joylashtiramiz.

i	x_i	y_i
0	0	1,000
1	0,1	0,909
2	0,2	0,833
3	0,3	0,769
4	0,4	0,715
5	0,5	0,667
6	0,6	0,625
7	0,7	0,588
8	0,8	0,556
9	0,9	0,526
10	1,0	0,500

Trapetsiyalar formulasiga ko'ra

$$I_T = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_9 + \frac{y_{10}}{2}\right) =$$

$$= 0,1 \cdot (0,5 + 0,909 + 0,833 + 0,769 + 0,715 + 0,667 + 0,625 + 0,588 +$$
$$+0,556 + 0,526 + 0,25) = 0,1 \cdot 6,938 = 0,694$$

Simpson formulasiga ko'ra

$$I_S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\right] =$$

$$= \frac{0,1}{3} \cdot \left[(0,5 + 0,25) + 4 \cdot (0,909 + 0,769 + 0,667 + 0,588 + 0,526) +\right.$$
$$\left. + 2 \cdot (0,833 + 0,715 + 0,625 + 0,556)\right] =$$
$$= \frac{0,1}{3} \cdot (0,75 + 4 \cdot 3,459 + 2 \cdot 2,729) =$$
$$= \frac{0,1}{3} \cdot (0,75 + 13,836 + 5,458) \approx 0,693$$

A) Trapetsiya usuli

```
program trapesiya;
var n,i,k:integer; a,b,h,s:real;
 function f(x:real):real; begin f:=x*x end;
 procedure trap(a,b:real;n:integer; var s:real);
 var i:integer; h:real;
 begin h:=(b-a)/n; s:=(f(a)+f(b))/2;
 for i:=1 to n-1 do s:=s+f(a+i*h); s:=s*h; end;
 begin
 write('a,b,n=');readln(a,b,n); trap(a,b,n,s);
```

```
 writeln('S=',s);
 end.
```

Programma asosida eksperimentlar o’tkazamiz.

```
a,b,n=0 1 10 S=0.335
a,b,n=0 1 20 S=0.33375
a,b,n=0 1 100 S=0.33335
a,b,n=0 1 1000 S=0.3333335
```

Natija to’g’riligi ko’rinib turibdi.

B) Simpson formulasining dasturi Simpson usuli

```
program Simpson_simpl;
var n,i,k,m:integer; a,b,h,s,s1,s2:real; //n=2m
 function f(x:real):real;
 begin f:=x*x end;
 procedure Simp(a,b:real;n:integer; var s:real);
 var i:integer; h:real;
 begin s:=f(a)+f(b); s1:=0;s2:=0; h:=(b-a)/n; m:=n div 2;
 for i:=1 to m-1 do
 begin s1:=s1+f(a+(2*i-1)*h);
 s2:=s2+f(a+(2*i)*h) end;
 s:=s+4*s1+2*s2;s:=s*h/3;
 end;
 begin
 write('a,b,n=?'); readln(a,b,n); h:=(b-a)/n; Simp(a,b,n,s);
 writeln('S=',s);
 end.
```

Programma asosida eksperimentlar o’tkazamiz.

```
a,b,n=?0 1 10 S=0.225333333333333
a,b,n=?0 1 20 S=0.273166666666667
a,b,n=?0 1 40 S=0.301645833333333
a,b,n=?0 1 80 S=0.317080729166667
a,b,n=?0 1 100 S=0.320265333333333
a,b,n=?0 1 200 S=0.326733166666667
a,b,n=?0 1 500 S=0.330677322666667
```

Natija to’g’riligi ko’rinib turibdi.

Nazariy savollar va topshiriqlar

1. Nyuton-Kotes kvadratura formulasini yozing.
2. Chap va ung to’g’ri to’rtburchaklar formulasini yozing.
3. Markaziy to’g’ri turtburchaklar formulasini yozing.
4. Trapetsiya formulasini yozing.
5. Simpson formulasini yozing.

12-ma'ruza. Oddiy differensial tenglamalarni taqriban yechish. Funksiya hosilasiga ko'ra yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini taqriban yechish. Eyler va Runge-Kutta usullari. Ularning algoritmi va dasturlari. Taqribiy yechimning geometrik ifodasi

REJA:

1. **Differensial tenglamalarni taqriban yechish usullari.**
2. **Birinchi tartibli differensial tenglamalarni taqriban yechish.**
3. **Ikkinchi tartibli differensial tenglamani sonli yechish.**

Tayanch tushunchalar: *Differensial, differensial tenglama, Koshi masalasi, Eyler usuli, Runge-Kutta usuli, qoldiq hadlar, algoritm, dastur*

Adabiyotlar:

1. *Ю. Ю. Тарасевич. Математическое и компьютерное моделирование. Изд. 4-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.*
2. *Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Издательство «Наука» Москва 1986*
3. *Е. В. Бошкиново и др. Численное методы и их реализация в MS Excel. Самара 2009*
4. *Ю. В. Василков, Н. Н. Василкова. Компьютерные технологии вычилений в математическом моделировании. Изд. «Финансы и статистика» М.:2002*
5. *А.С.Амридинов, А.И.Бабаяров, Б.Б.Бабажанов. «Ҳисоблаш математикаси» фанидан лаборатория ишларини бажариш бўйича услубий тавсиялар ва топшириқлар. Самарқанд: СамДУ нашри. 2008.*

Differensial tenglamalarni aniq yechimini topish juda kamdan kam hollardagina mumkin bo'ladi. Amaliyotda uchraydigan ko'plab masalalarga aniq yechish usullarini qo'lashning iloji bo'lmaydi. Shuning uchun bunday differensial tenglamalarni taqribiy yoki sonli usular yordamida yechishga to'g'ri keladi.

Taqribiy usullar deb shunday usullarga aytiladiki, bu hollarda yechimlar biror funktsiyalar (masalan, elementar funktsiyalar) ketma-ketligining limiti ko'rinishida olinadi.

Sonli usullar - noma'lum funktsiyaning chekli nuqtalar to'plamidagi taqribiy qiymatlarini hisoblash usullaridir. Bu hollarda yechimlar sonli jadvallar ko'rinishida ifadalanadi.

Hisoblash matematikasida yuqorida keltirilgan bu guruhlarga tegishli bo'lgan ko'plab usullar ishlab chiqilgan. Bu usullarning bir-birlariga nisbatan o'z kamchiliklari va ustunliklari mavjud. Muhandislik masalalarini yechishda shularni hisobga olgan holda u yoki bu usulni tanlab olish lozim bo'ladi.

Bizga [a, b] oraliqda $y(a)=y_0$ boshlang'ich sharti bilan berilgan $y'=f(x,y)$ differensial tenglamani yechish talab etilgan bo'lsin. Differensial tenglamaning yechimi deb differensiallanuvchi $y=y(x)$ funksiyani tenglamaga qo'yganda ayniyatga aylantiradigan ifoda aytiladi.

Differensial tenglamani sonli yechimi taqribiy qiymat bo'lib u jadval ko'rinishda ifodalandi.

Berilgan $[a,b]$ oraliqni n teng bo'laklarga bo'lib, $x_0, x_1, ..., x_n;\ x_0=a,\ x_n=b$ nuqtalardan hosil bo'lagan elementar kesmalarga ega bo'lamiz. Integrallash qadami deb $h=(b-a)/n$ kattalikka aytamiz. Bunda $x_i=a+i\cdot h,\ x_0=a,\ x_n=b\ \ i=0,1,...,n$.

Masalan, ketma-ket differensiallash usulini qo'llaganda qatorning juda ko'p hadlarini hisoblashga to'g'ri keladi va ko'p hollarda shu qatorni umumiy hadini aniqlab bo'lmaydi. Pikar algoritmini qo'llaganimizda esa, juda murakkab integrallarni hisoblashga to'g'ri keladi va ko'p hollarda integral ostidagi funktsiyalar elementar funktsiyalar orqali ifodalanmaydi. Amaliy masalalarni yechganda, yechimlarni formula ko'rinishida emas, balki jadval ko'rinishida olingani qulay bo'ladi.

Differensial tenglamalarni sonli usullar bilan yechganda yechimlar jadval ko'rinishida olinadi. Amaliy masalalarni yechishda ko'p qo'llanadigan Eyler va Runge–Kutta usullarini ko'rib chiqamiz.

Eyler usuli. Birinchi tartibli differensial tenglamani

$$y'=f(x,y)$$

[a,b] kesmada boshlang'ich shart: $x=x_0$ da $y=y_0$ ni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin. *[a,b]* kesmani $x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ nuqtalar bilan n ta teng bo'laklarga ajratamiz.

Bu erda $x_i=x_0+ih\ (i=0,1,...,n)$, $h=\frac{b-a}{n}$ – qadam.

$y'=f(x,y)$ tenglamani *[a,b]* kesmaga tegishli bo'lgan biror $[x_k\ ,\ x_{k+1}]$ kesmada integrallasak

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'dx$$

Bu erda $y(x_k)=y_k$ belgilash kiritsak

$$u_{k+1}=u_k+\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx \qquad (1)$$

Bu erda integral ostidagi funktsiyani $[x_k\ ,\ x_{k+1}]$ kesmada o'zgarmas $x=x_k$ nuqtada boshlang'ich qiymatga teng desak, Eyler formulasini hosil qilamiz:

$$y_{k+1}= y_k+\Delta y_k\ ,\ \Delta y_k=hf(x_k,y_k)$$

Ushbu jarayonni $[a,b]$ ga tegishli bo'lgan har bir kesmalarda takrorlasak, (1) ning yechimini ifodalovchi jadvalni tuzamiz..

Eyler usulini differensial tenglamalar sistemasini yechishni ham qo'llash mumkin. Quyidagi sistema uchun boshlang'ich shartga ega bo'lgan masala berilgan bo'lsin:

$$\left.\begin{aligned} y' &= f_1(x,y,z) \\ z' &= f_2(x,y,z) \end{aligned}\right\}\ x=x_0 \text{ da } u=u_0,\ z=z_0 \qquad (2)$$

(2) ning taqribiy yechimlari quyidagi formulalar bilan topiladi

$$u_{i+1}=y_i+\Delta y_i\ , \qquad z_{i+1}=z_i+\Delta z_i$$

bu erda $\Delta u_i = hf_1(x_i,y_i,z_i),\ \ \Delta z_i = hf_2(x_i,y_i,z_i),\ \ (i=0,1,\ 2,\ ...)$

Misol. Eyler usuli bilan $y' = y+(1+x)y^2$, $u(1)=-1$ masalaning yechimi $[1;1,5]$ kesmada $h=0,1$ qadam bilan topilsin.

Yechish. Masalani shartidan $x_0=1$, $u_0=-1$ topamiz va Eyler formulasidan quyidagi jadvalni tuzamiz.

I	x_i	y_i	$f(x_i\ ,y_i)$	Aniq yechim
0	1	-1	1	-1
1	1,1	-0,9	0,801	-0,909091
2	1,2	-0,8199	0,659019	-0,833333
3	1,3	-0,753998	0,553582	-0,769231
4	1,4	-0,698640	0,472794	-0,714286
5	1,5	-0,651361		-0,666667

Jadvaldan taqribiy yechim va aniq yechim orasidagi farqlarni ham ko'rishimiz mumkin.

Bu usulni takomillashtirilgan ko'rinishlaridan biri Eyler-Koshi usulidir. Eyler-Koshi usuli yordamida esa taqribiy yechimlar quyidagi formulalar orqali hisoblanadi:

$$y_{i+1} = y_i + h_i \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})}{2}$$

bu yerda

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)\,.$$

Runge-Kutta usuli

Berilgan $[x_0, b]$ kesmada hosilaga nisbatan echilgan birinchi tartibli differentsial tenglama

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

berilgan bo'lsin va $x = x_0$ nuqtada $y = y_0$ boshlang'ich shart o'rinli bo'lsin.

$h = \dfrac{b - x_0}{n}$ qadamni tanlaymiz va quyidagi belgilashni kiritamiz: $x_i = x_0 + ih$ va $y_i = y(x_i)$ $(i = 1,2,3,...,n)$. Quyidagi sonlarni qaraymiz:

$$K_1^{(i)} = hf(x_i,\ y_i),\ K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right)$$

$$K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right),\quad K_4^{(i)} = hf\left(x_i + h,\ y_i + K_3^{(i)}\right) \qquad (3)$$

Runge – Kutta usuli bo'yicha $x_{i+1} = x_i + h$ nuqtada taqribiy yechimning y_{i+1} qiymati quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \qquad (4)$$

bu erda $\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right)$ $(i = 0,1,2,...)$

Bu usul bo'yicha bajariladigan hisoblashlar quyidagi jadvalga sxema bo'yicha joylashtiriladi:

1 –jadval:

i	x	y	$K = H \cdot f(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$

	$x_0+\frac{H}{2}$	$y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2}$	$K_2^{(0)}$	$K_2^{(0)}$
	$x_0+\frac{H}{2}$	$y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}$	$K_3^{(0)}$	$K_3^{(0)}$
	x_0+H	$y_0+K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				Δy_0
1	x_1	y_1		

***1** — jadvalni to'ldirish tartibi.*

1) Jadvalning birinchi satriga $x_0,\ y_0$ berilgan qiymatlarni yozamiz.

2) $f(x_0,\ y_0)$ ni hisoblab h ga ko'paytiramiz va $K_1^{(0)}$ sifatida jadvalga yozamiz.

3) Jadvalning ikkinchi satriga $x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2}$ larni yozamiz.

4) $f(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{K_1^{(0)}}{2})$ ni hisoblab H ga ko'paytiramiz va $K_2^{(0)}$ sifatida jadvalga yozamiz.

5) Jadvalning uchinchi satriga $x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}$ larni yozamiz.

6) $f\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$ ni hisoblab h ga ko'paytiramiz va $K_3^{(0)}$ sifatida jadvalga yozamiz.

7) Jadvalning to'rtinchi satriga $x_0+h,\ y_0+K_3^{(0)}$ larni yozamiz.

8) $f\left(x_0+h,\ y_0+K_3^{(0)}\right)$ ni hisoblab H ga ko'paytiramiz va $K_4^{(0)}$ sifatida jadvalga yozamiz.

9) Δy ustuniga $K_1^{(0)},\ 2K_2^{(0)},\ 2K_3^{(0)},\ K_4^{(0)}$ larni yozamiz.

10) Δy ustundagi sonlarning yig'indisini 6 ga bo'lib, Δy_0 sifatida jadvalga yozamiz.

11) $y_1=y_0+\Delta y_0$ ni hisoblaymiz.

Keyingi navbatda $(x_1,\ y_1)$ ni boshlang'ich nuqta sifatida qarab hisoblashlarni shu singari davom qildiramiz.

Runge-Kutta usuli yordamida EHMlarda qadamni avtomatik tanlab hisoblashlar ikki marta bajariladi. Birinchisida h qadam bilan, ikkinchisida esa

$h = \frac{h}{2}$ qadam bilan. Agar bu holda olingan y_i ning qiymatlari berilgan aniqlikdan oshsa, u holda keyingi x_{i+1} nuqtagacha qadam ikkilanadi, aks holda yarim qadam qo'llaniladi.

Runge - Romberg qoidasi $y_k^{(h)}$ va $y_k^{(h/2)}$ izlanayotgan funktsiyaning mos ravishda h va $h/2$ qadamlarda hisoblangan qiymatlari, hamda ε - berilgan absolyut xatolik bo'lsin.

Barcha k larda ushbu

$$\frac{1}{15}\left|y_{2k}^{(h)} - y_k^{(H)}\right| < \varepsilon \tag{6}$$

tengsizlik bajarilganda berilgan aniqlikdagi hisoblashga erishildi deb hisoblanadi. h va $h/2$ qadamlarda izlanayotgan funktsiyaning qiymatlari hisoblanadi va (6) tengsizlik tekshiriladi. Agar (6) tengsizlik barcha k larda bajarilsa hisoblashlar yakunlanadi.

Misol. Runge - Kutta usulida [0, 0,45] kesmada $y' = x + y$ differentsial tenglamaning (Koshi masalasini) $x = 0$ da $y = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi taqribiy echimini 0.001 aniqlikda hisoblang.

Yechish. $H^4 < 0{,}001$ tengsizlikdan kelib chiqqan holda $H = 0{,}15$ qadamni tanlaymiz. U holda $n = 3$ bo'ladi va qadamni 2 marta kamaytiramiz, ya'ni $h = 0{,}075$ ni tanlaymiz, u holda $n = 6$ bo'ladi.

Qulaylik uchun hisoblash natijalarini 2 - jadvalga yozamiz. Oxirgi ustundan barcha k lar uchun (6) tengsizlik bajarilishi ko'rinib turibdi. Ya'ni hisoblashning berilgan aniqligiga erishiladi. Bu holda $y(0{,}45) = 1{,}6866$ qiymatni taqribiy topamiz. Berilgan boshlang'ich shartda qaralayotgan tenglamaning aniq yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$y = 2e^x - x - 1$$

Bundan kelib chiqadiki, $y\Big|_{x=0,45} = 2e^{0.45} - 0.45 - 1 = 1.68662$ bo'ladi va absolyut xatolik

$$\Delta y = |1{,}68662 - 1{,}6866| = 0{,}00002\,|$$

hamda nisbiy xatolik

$\delta_y = \frac{0.00002}{1.68662} \approx 0.001\%$ kabi bo'ladi.

2 -jadval

k	x	y	$K = Hf(x,y)$	Δy	x	y	$K = h\cdot f(x,y)$		$\frac{1}{15}\left\lvert K_k^{(H)} - K_{2k}^{(h)}\right\rvert$
0	0	1	0,15	0,15	0	1	0,075	0,075	
	0,075	1,075	0,1725	0,375	0,0375	1,0375	0,0806	0,1613	0
	0,075	1,0863	0,1742	0,3484	0,0375	1,0403	0,0808	0,1617	
	0,15	1,1742	0,1986	0,1937	0,075	1,0808	0,0867	0,0867	
				0,1737				0,0808	
1					0,075	1,0808	0,0867	0,0867	
					0,1125	1,1241	0,0927	0,1855	
					0,1125	1,1272	0,0920	0,1860	
					0,15	1,2668	0,1063	0,1063	
								0,0941	
2	0,15	1,1737	0	0,1986	0,15	1,1736	0,0993	0,0993	
	0,225	1,2730	0,2247	0,4494	0,1875	1,2233	0,1058	0,2116	0,000006
	0,225	1,2860	0,2267	0,4533	0,1875	1,2266	0,1061	0,2121	
	0,30	1,400	0,2551	0,2551	0,225	1,2798	0,1129	0,1129	
				0,2261				0,1060	
3					0,225	1,2796	0,1128	0,1128	
					0,2625	1,3360	0,1199	0,2398	
					0,2625	1,3395	0,1202	0,2403	
					0,3	1,5199	0,1365	0,1365	
								0,1216	
4	0,30	1,3998	0	0,2550	0,3	1,3997	0,1275	0,1275	
	0,375	1,5273	0,2852	0,5707	0,3375	0,4634	0,1351	0,2701	0,0000006
	0,375	1,5425	0,2876	0,5752	0,3375	1,4672	0,1354	0,2707	
	0,45	1,6874	0,3206	0,3206	0,375	1,5351	0,1433	0,1433	
				0,2859				0,1353	
5					0,375	1,5350	0,1433	0,1433	
					0,4125	1,6027	0,1411	0,3023	
					0,4125	1,6106	0,1517	0,3035	
					0,45	1,6867	0,1603	0,1603	
								0,1516	
6	0,45	1,6867			0,45	1,6866			0,000006

Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarni taqribiy yechish

Ikkinchi tartibli differentsial tenglama berilgan bo'lsin:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (7.1)$$

Ikki nuqtali chegaraviy masala (7.1) uchun quyidagicha qo'yiladi: $[a,b]$ kesma ichida (7.1) tenglamani qanoatlantiruvchi va kesmaning oxirida esa

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1\left[y(a),\ y'(a)\right] = 0 \\ \phi_2\left[y(b),\ y'(b)\right] = 0 \end{array}\right\} \qquad (7.2)$$

chegaraviy shartlar qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ funktsiyani topish talab qilinadi. (7.1) tenglama va (7.2) chegaraviy shartlar chiziqli bo'lgan holni qaraylik. Bunday chegaraviy masala chiziqli chegaraviy masala deyiladi. U holda differentsial tenglama va chegaraviy shartlarni quyidagicha yozish mumkin:

$$y' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (7.3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{array}\right\} \qquad (7.4)$$

bu erda $p(x),\ q(x),\ f(x)$ - $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan berilgan funktsiyalar, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ - berilgan o'zgarmaslar bo'lib

$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ va $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ shartni qanoatlantiradi.

Agar $A = B = 0$ bo'lsa, u holda (7.4) chegaraviy shart bir jinsli deyiladi. Qaralayotgan chegaraviy masalaning taqribiy yechimini topish usullari ikki guruhga bo'linadi: analitik va ayirmali usullar.

Chegaraviy masalalarni yechishning eng sodda usullaridan biri chekli ayirmalar usulidir.

Usulning yoritilishi

$[a,b]$ kesmani uzunligi h bo'lgan n ta teng kesmalarga ajratamiz, bu yerda $h = \dfrac{b-a}{n}$. Bo'linish nuqtalarining abtsissasi $x_i = x_0 + ih,$ $(i = 1, 2, 3, ..., n-1),\ x_0 = a,\ \ x_n = b$ kabi bo'ladi. Bo'linish nuqtalari x_i lar uchun $y = y(x)$ funktsiya va uning $y'(x),\ y''(x)$ hosilalarini $y_i = y(x_i),\ \ y_i' = y'(x_i)$ kabi belgilaymiz. Bulardan tashqari quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$p_i = p(x_i),\ \ q_i = q(x_i),\ \ \ f_i = f(x_i)$$

Har bir ichki tugunlarda $y'(x_i),\ \ y''(x_i)$ hosilalarni taqribiy chekli ayirmalar

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_i'' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} \qquad (7.5)$$

kesmaning chetlarda esa

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \qquad (7.6)$$

chekli ayirmalar bilan almashtiramiz.

(7.5) va (7.6) taqribiy formulalarni (7.1) tenglama va (7.2) chegaraviy shartlarga qo'yib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, \ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{array}\right\} \qquad (7.7)$$

Agar $y'(x_i)$ va $y''(x_i)$ lar o'rniga markaziy ayirmalarni qo'llasak yanada aniqroq formulalarni hosil qilamiz, ya'ni

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

U holda

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{array}\right\}, \qquad (7.7)$$

sistemani hosil qilamiz. Shunday qilib, har ikkala holda ham $n+1$ ta noma'lumlarga ega bo'lgan $n+1$ chiziqli algebraik tenglamadan iborat bo'lgan sistemaga ega bo'ldik. Agar ushbu sistemani yechish mumkin bo'lsa, u holda izlanayotgan funktsiyaning taqribiy qiymatlarini jadval shaklida hosil qilamiz. (7.1)-(7.2) chegaraviy masalaga chekli ayirmalar usulini qo'llashdan chiqadigan xatoligi quyidagicha bo'ladi:

$$|y_i - y(x_i)| \le \frac{h^2 M}{96}(b-a)^2$$

Bu yerda $y(x_i)$ - $x = x_i$ bo'lgandagi aniq yechimning qiymati va $M = \max\limits_{[a,b]} \left|y^{(4)}(x)\right|$.

MISOL.

Chekli ayirmalar usulini qo'llab quyidagi chegaraviy masalaning yechimini aniqlang:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 y'' + xy' = 1 \\ y(1) = 0 \\ y(1,4) = 0,0566 \end{array}\right\} \qquad (7.8)$$

YECHISH.

(7.7) formulani qo'llab, (7.8) tenglamalar sistemasini chekli ayirmalar orqali quyidagicha yozamiz:

$$x_i^2 \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 1$$

o'xshash hadlarni ixchamlab

$$y_{i-1}(2x_i^2 - hx_i) - 4x_i^2 y_i + y_{i+1}(2x_i^2 + hx_i) = 2h^2 \qquad (7.9)$$

hosil qilamiz. h qadamni 0,1 deb tanlasak uchta ichki tugunlarni hosil qilamiz. $x_i = 0,1i + 1 \ \left(i = 1,2,3\right)$. (7.9) tenglamani har bir tugun uchun yozsak

$$\left.\begin{array}{l} 2,31y_0 - 4,84y_1 + 2,53y_2 = 0,02 \\ 2,76y_1 - 5,76y_2 + 3,00y_3 = 0,02 \\ 3,25y_2 - 6,76y_3 + 3,51y_4 = 0,02 \end{array}\right\} \qquad (7.10)$$

sistemani hosil qilamiz.

Chegaraviy tugunlarda $y_0 = 0, y_4 = 0,0566$ ekanini bilgan holda, sistemani yechamiz va izlanayotgan funktsiyaning quyidagi qiymatlarini hosil qilamiz:

$$y_1 = 0,0046, \quad y_2 = 0,0167, \quad y_3 = 0,0345$$

(7.8) tenglamaning aniq yechimi $y = \frac{1}{2}\ln^2 x$ funktsiyadan iborat. Aniq yechimning tugunlardagi qiymatlari

$$y(x_1) = 0,0047, \ \ y(x_2) = 0,0166, \quad y(x_3) = 0,0344$$

kabi bo'ladi. Bu qiymatlardan ko'rinib turibdiki, taqribiy va aniq yechimning tugunlardagi qiymatlari orasidagi farq 0,0001 dan oshmaydi.

Tugunlar soni n katta bo'lganda (7.3)-(7.4) tenglamalar sistemasini yechish murakkablashadi. Quyida bunday hollar uchun mo'ljallangan ancha sodda usulni qaraymiz.

PROGONKA USULI.

Usulning g'oyasi quyidagicha. (7.7) sistemaning dastlabki $n-1$ tenglamalarini yozib olamiz:

$$y_{i+2}+m_i y_{i+1}+k_i y_i = h^2 f_i \qquad (7.11)$$

bu yerda $m_i=-2+hp_i$, $k_i=1-hp_i+h^2q$.

U holda (7.11) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$y_{i+1}=c_i(d_i-y_{i+2}) \qquad (7.12)$$

Bu yerdagi c_i, d_i - lar ketma – ket quyidagi formulalardan hisoblanadi:

$i=0$ bo'lganda

$$c_0=\frac{\alpha_1-\alpha_0 h}{m_0(\alpha_1-\alpha_0 h)+k_0\alpha_1},\ \alpha_0=\frac{k_0 Ah}{\alpha_1-\alpha_0 h}+f_0h^2 \qquad (7.13)$$

$i=1, 2,...,n-2$ bo'lganda

$$c_i=-\frac{1}{m_i-k_ic_{i-1}},\ d_i=f_ih^2-k_ic_{i-1}d_{i-1} \qquad (7.14)$$

Hisoblash quyidagi tartibda bajariladi:

To'g'ri yo'l. (7.14) formuladan m_i, k_i - qiymatlarni hisoblaymiz. c_0, d_0 larni formulalardan aniqlaymiz va (7.14) rekkurent formulalardan c_i, d_i larni hisoblaymiz.

Teskari yo'l. (7.14) tenglamadan agar $i=n-2$ bo'lsa, (7.1) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozish mumkin.

$$y_{n-1}=c_{n-2}(d_{n-2}-y_n), \qquad \beta_0 y_n+\beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=B$$

Ushbu sistemani y_n ga nisbatan yechib, quyidagini hosil qilamiz:

$$y_n=\frac{\beta_1 c_{n-2}d_{n-2}+Bh}{\beta_1(1+c_{n-2})+\beta_0 h} \qquad (7.15)$$

Aniqlangan c_{n-2}, d_{n-2} larni qo'llab y_n ni topamiz. So'ngra $y_i\,(i=n-1,...,1)$ larni hisoblaymiz. (7.14) rekkurent formulani ketma-ket qo'llab quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} y_{n-1}&=c_{n-2}(d_{n-2}-y_n),\\ y_{n-2}&=c_{n-3}(d_{n-3}-y_{n-1}),\\ y_1&=c_0(d_0-y_2).\end{aligned}\right\} \qquad (7.16)$$

y_0 ni (6) sistemaning oxiridan ikkinchi tenglamasidan aniqlaymiz:

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h} \tag{7.17}$$

Progonka usuli bilan bajarilgan barcha hisoblashlarni jadvalda ko'rsatish mumkin.

jadval

i	x_i	m_i	k_i	f_i	To'g'ri yo'l		Teskari yo'l
					c_i	d_i	y_i
0	x_0	m_0	k_0	f_0	c_0	d_0	y_0
1	x_1	m_1	k_1	f_1	c_1	d_1	y_1
…	…	…	…	…	…	…	…
$n-2$	x_{n-2}	m_{n-2}	k_{n-2}	f_{n-2}	c_{n-2}	d_{n-2}	y_{n-2}
$n-1$	x_{n-1}						y_{n-1}
n	x_n						y_n

MISOL. Progonka usulida

$$y'' - 2xy' - 2y = 4x$$

tenglamaning

$$y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e = 3{,}718$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimini toping.

YECHISH: Tenglamalarni $h = 0{,}1$ deb olib chekli ayirmali sitema bilan almashtiramiz:

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{0{,}01} - 2x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{0{,}1} - 2y_i = 4x_i, \quad (i = 0,1,2,...,8)$$

$$y_0 - \frac{y_1 - y_0}{0{,}1} = 0, \quad y_{10} = 3{,}718$$

o'xshash hadlarni ixchamlab

$$y_{i+2} + (-2 - 0{,}2x_i)y_{i+1} + (0{,}98 + 0{,}2x_i)y_i = -0{,}01 \cdot 4x_i$$

formulani hosil qilamiz. Bundan

$$m_i = -2 - 0{,}2x_i, \quad k_i = 0{,}98 + 0{,}2x_i, \quad f_i = 4x_i,$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \alpha_1 = -1, \quad \beta_1 = 0, \quad A = 0, \quad B = 3{,}718$$

ekani kelib chiqadi.

Hisoblashlarni yuqoridagi kabi jadvalga joylashtiramiz.

i	x_i	m_i	k_i	f_i	To'g'ri yo'l		Teskari yo'l	Aniq yechim
					c_i	d_i	y_i	y_i
0	0,0	-2,00	0,98	0,0	-0,9016	0,0000	1,117	1,000
1	0,1	-2,02	1,00	-0,4	-0,8941	-0,0040	1,229	1,110
2	0,2	-2,04	1,02	-0,8	-0,8865	-0,0117	1,363	1,241
3	0,3	-2,06	1,04	-1,2	-0,8787	-0,0228	1,521	1,394
4	0,4	-2,08	1,06	-1,6	-0,8706	-0,0372	1,704	1,574
5	0,5	-2,10	1,08	-2,0	-0,8623	-0,0550	1,916	1,784
6	0,6	-2,12	1,10	-2,4	-0,8536	-0,0761	2,364	2,033
7	0,7	-2,14	1,12	-2,8	-0,8446	-0,1007	2,455	2,332
8	0,8	-2,16	1,14	-3,2	-0,8354	-0,1290	2,800	2,696
9	0,9						3,214	3,148
10	1,0						3,718	3,718

Runge-Kutta usuli dasturi

```
Program R_Kutta;
const
n=7;
var
i : integer;
dy,x0,y0,x,y,K1,K2,K3,K4,h,y2 : real;
txt1 : text;

Function F(x1:real; y1:real) : real;
Begin
F:=x1+y1;
End;

BEGIN
x0:=0; y0:=1; h:=0.075;
assign(txt1,'R_K.otv'); rewrite(txt1);
Writeln(txt1,' Runge-Kutta usuli');

Writeln(txt1,' X Taqr.echim Aniq echim');
For i:=1 to n do begin
K1:=h*F(x0,y0);
K2:=h*F(x0+h/2,y0+K1/2);
K3:=h*F(x0+h/2,y0+K2/2);
K4:=h*F(x0+h,y0+K3);
dy:=(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
y2:=2*exp(x0)-x0-1;
Writeln(txt1,x0:8:4,' ',y0:10:6,' ',y2:10:6);
y:=y0+dy; x0:=x0+h;y0:=y;
```

```
 End;
 close(txt1);
END.
```

Progonka usulining dasturi

```
Program P1;
 Uses Crt;
 Const
 n=10;
 Var
 i,j : integer;
 A,B,A0,B0,Al0,Al1,Bet0,Bet1,h : real;
 M,K,C,D,Y,P,q,f,x : array[0..100] of real;
 f1 : text;

Procedure progonka;
 BEGIN
 for i:=0 to n-2 do Begin
 M[i]:=-2+h*p[i];
 K[i]:=1-h*p[i]+h*h*q[i]; End;
 c[0]:=(al1-al0*h)/(M[0]*(al1-al0*h)+K[0]*al1);
 d[0]:=k[0]*A0*h/(al1-al0*h)+f[0]*h*h;
 for i:=1 to n-2 do Begin
 c[i]:=1/(m[i]-k[i]*c[i-1]);
 d[i]:=f[i]*h*h-k[i]*c[i-1]*d[i-1]; End;
 y[n]:=(B0*h-Bet1*c[n-2]*d[n-2])/(Bet0*h+Bet1*(1+c[n-2]));
 for j:=1 to n-1 do Begin
 i:=n-j; y[i]:=c[i-1]*(d[i-1]-y[i+1]); End;
 y[0]:=(al1*y[1]-A0*h)/(al1-al0*h);
 END;

BEGIN {Asosiy qism}
 ClrScr;
 assign(f1,'c:Progonka.txt'); rewrite(f1);
 a:=0;  b:=1;  h:=(b-a)/n;  Al0:=1;  Al1:=-1;  Bet0:=1;  Bet1:=0;
A0:=0; B0:=3.718;
 for i:=0 to n do Begin
 x[i]:=a+i*h; p[i]:=-2*x[i]; q[i]:=-2; f[i]:=-4*x[i]; End;
 Progonka;
 for i:=0 to n do Begin
 writeln(f1,'i=',i:2,'       x=',x[i]:6:4,'       M=',M[i]:6:4,'
K=',k[i]:6:4); End;
 writeln(f1);
 for i:=0 to n do Begin
 writeln(f1,'i=',i:2,'       c=',c[i]:6:4,'       d=',d[i]:6:4,'
y=',y[i]:6:4); End;
```

```
 Close(f1);
END.
```

Nazorat savollari

1. Differensial tenglama deganda nimani tushunasiz?
2. Differensial tenglamaning taqribiy yechimini nima?
3. Differensial tenglamani sonli yechish ussulrini aytib bering
4. Koshi masalasi nima
5. Koshi masalasini yechish usullari
6. Eyler va Runge-Kutta usullari mohiyatini aytib bering
7. Chegaraviy masalalar deganda nimani tushunasiz?
8. Ikkinchi tartib koshi masalasi yechish usulllarini aytib bering.

13-ma’ruza. Matematika statistika elementlari. Kuzatish natijalariga ishlov berish. O‘rta qiymatlar va eng kichik kvadratlar usullari.

REJA:

1. **Matematika statistika elementlari.**
2. **Kuzatish natijalariga ishlov berish**
3. **O’rta qiymatlar va eng kichik kvadratlar usuli**

Taynch tushunchalar. *Tasodif, tasodifiy miqdor, kuzatish, kuzatish natijalari, taqsimot, tanlanma, nisbiy chastota, nisbiy chastotalar poligoni.*

Adabiyotlar:

1. *Ю. Ю. Тарасевич. Математическое и компьютерное моделирование. Изд. 4-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.*
2. *Б.Саматов, Т.Эргашев «Оптималлаш усуллари» фанидан маърузалар матни (Ўқув услубий қўлланма). Наманган 2010.*
3. *Е. В. Бошкиново и др. Численное методы и их реализация в MS Excel. Самара 2009*
4. *Ю. В. Василков, Н. Н. Василкова. Компьютерные технологии вычилений в математическом моделировании. Изд. «Финансы и статистика» М.:2002*
5. *А. В. Стариков И. С. Кущева. Экономико-математическое и компьютерное моделирование. Воронеж 2008.*

Statistik ehtimollik,

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1} \qquad (1)$$

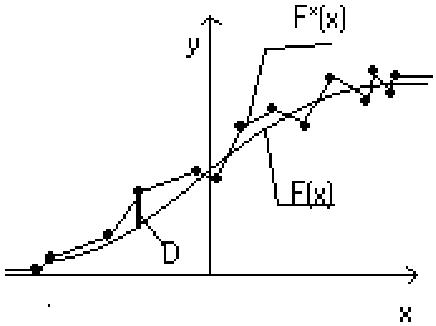
bu yerda S_x^2 - tanlanma dispersiyasi.

(1) - ifodadagi $n-1$ erkinlik darajasini sonini bildiradi. Tajriba ma’lumotlari uchun erkinlik darajasini soni quyidagicha aniqlanadi: tajriba kuzatuvlari sonidan (n) bog’liklik soni ayiriladi. Dispersiya tushunchasi boshqacha qilib aytganda ishonchsizlik darajasini miqdoriy o’lchovidir. *n* katta bo’lganda *n-1* va *n* ni bir xil deb olsa bo’ladi, aks holda mumkin emas. Tasodifiy miqdorlarni o’rtacha qiymati dispersiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (2)$$

va kuzatuvlar sonini (n) o'sishiga qarab aniqlikni o'stirish qonuni deb yuritiladi. Statistikada nazariy taqsimotga empirik taqsimotlarning yaqinlik darajasini aniqlashning bir qancha kriteriyalari mavjud.

1. Akademik A.N. Kolmogorov kriteriyasi.



$F(x)$ – nazariy taqsimot funktsiyasi

$F^*(x)$ – emperik taqsimot funktsiyasi

$D = max\left| F^*(x) - F(x) \right|,\ \lambda = D\sqrt{n}$

Jadvaldan (λ) ni qiymati aniqlanadi. Agar (λ) ehtimollik ancha kichkina bo'lsa, qurilgan gipoteza hisobga olinmaydi. Agar (λ) katta qiymatga ega bo'lsa tajriba ma'lumotlari nazariyaga mos keladi deyish mumkin. Bu kriteriyadan foydalanishning cheklanganligi shundaki, biz oldindan $F(x)$ nazariy taqsimot funktsiyasini bilishimiz zarur, bu esa oson ish emas.

2**. K. Pirson kriteriyasi**. χ^2 (*xi - kvadrat kriteriyasi*)

$$\chi^2 = \sum \frac{\left| m - F(x)N \right|^2}{F(x)N}$$

bu yerda m va $F(x)$, N – empirik va nazariy chastotalar.

Maxsus jadvaldan χ^2_{jadv} - qiymati aniqlanadi va χ^2_{his} bilan solishtiriladi $\chi^2_{his} > \chi^2_{jadv}$ tanlangan r-ehtimollik uchun (r=0,95)

3.**V.I. Romanovskiy kriteriyasi.**

$$R = \frac{\left| \sum \frac{(n_x + y_x)^2}{y_x} - B \right|}{\sqrt{2B}}$$

bu yerda B -intervallar soni.

Agar R<3 bo'lsa, empirik va nazariy taqsimot orasidagi farq tasodifiy xarakterga ega. Tajriba ma'lumotlarini A.N.Kolmogorov va V.I. Romanovskiy kriteriyalari bo'yicha baholashga misol.

Intervallar	Interval o'rtasi x_{cp}	n_x	$x_{cp}n_x$	$x_{cp}-\overline{x}$	$(x_{cp}-\overline{x})^2$	$(x_{cp}-n_x)^2 n_x$
71,005 – 72,635		4				
72,635 – 74,265		5				
74,265 – 75,895		6				
75,895 – 77,525		10				
77,525 – 79,155		11				
79,155 – 80,785		8				
80,785 – 82,415		7				
82,415 – 84,045		6				
84,045 – 85,675		5				
85,675 – 87,305		1				

$a=\dfrac{x_{o'r}-\overline{x}}{s}$	$\Phi(u)$	$n_x - y_x$	$n_x - y_x$	$(n_x-y_x)^2$	$\dfrac{(n_x-y_x)^2}{y_x}$	$\sum n_x$	$\sum y_x$

$$\Delta=\frac{h\cdot n}{s}=\frac{1{,}63\cdot 63}{3{,}768}=27{,}1;\quad y_x=\Phi(u)\cdot\Delta;\quad R=\frac{\left|\sum\dfrac{(n_x-y_x)^2}{y_x}-B\right|}{\sqrt{2B}}=0{,}59;$$

$$\lambda=\frac{2{,}52}{63}\cdot\sqrt{63}=0{,}38;\quad p(\lambda)=0{,}997;$$

Ikkala kriteriya bo'yicha ham Gauss taqsimot qonuniga bo'y sunadi.

M-darajali polinom bilan approktsimatsiyalash.

X	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	…	y_i	…	y_n

Jadval ko'rinishidagi ma'lumotlarni M-darajali polinom

$P_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_mx^m$, bu yerda $(m<n)$

ko’rinishdagi empirik funktsiya bilan almashtirish kerak bo’lsin. $P_m(x)$ polinom approktsimatsiyalovchi polinom deyiladi. EKU ga asosan noma’lum koeffitsientlar farqlari (jadval ko’rinishidagi va empirik orasidagi farqlar) kvadratlari yig’indisi eng kichik bo’ladigan qilib tanlanadi.

Jadval ko’rinishidagi berilgan funktsiya uchun masalani quyidagicha qo’yishimiz mumkin: M-darajali polinom $P_m(x)$ ni (m<=n) shunday olish kerak

$$s = \sum_{i=1}^{n} [y_i - P_m(x_i)]^2$$

kattalik eng kichik qiymat qabul qilsin.

S funktsiya ekstremumi mavjud bo’lishining zaruriy sharti quyidagidan iborat:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a_0} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial a_1} = 0, \\ .... \\ \dfrac{\partial s}{\partial a_m} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(2) formula orqali differentsiyallash natijasini noma’lum koeffitsientlarga bog’liq bo’lgan quyidagi algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo’lamiz.

Agar

$$\begin{aligned} c_j &= \sum_{i=0}^{n} x_i^j, \quad (j = 0,1,2,....,2m), \\ d_k &= \sum_{i=0}^{n} x_i^k y_i, \quad (k = 0,1,2,...,m), \end{aligned} \tag{3}$$

deb olsak (2) formulani quyidagicha yozishimiz mumkin.

$$\begin{cases} c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_m a_m = d_0, \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + ... + c_{m+1} a_m = d_1, \\ .... \\ c_m a_0 + c_{m+1} a_1 + c_{m+2} a_2 + ... + c_{2m} a_m = d_m \end{cases} \tag{4}$$

c_j va d_k koeffitsientlarni qo’lda hisoblash uchun quyidagi jadvaldan foydalanish oson. (3) formuladagi koeffitsientlar jadvaldagi mos sonlarni qo’shish orqali topiladi.

N	x_i^0	x_i	….	x_i^{2m}	y_i	$x_i\, y_i$	….	$x_i^m y_i$
1	1	x_0	…..	x_0^{2m}	y_0	$x_0 y_0$	…..	$x_0^m y_0$
2	1	x_1	….	x_1^{2m}	y_1	$x_1 y_1$	…..	$x_1^m y_1$
…	…	….	….	…..	….	….	…..	…..
n+1	1	x_n	….	x_n^{2m}	y_n	$x_n y_n$	….	$x_n^m y_n$
$\sum$	c_0	c_1	….	c_{2m}	d_0	d_1	…..	d_m

$a_1, a_2, ..., a_m$ (1) empirik bog'lanishning noma'lum koeffitsientlardir. (4) ko'rinishdagi normal tenglamalar sistemasini biror usul (masalan Gauss usuli) bilan yechish orqali aniqlanadi.

Bu laboratoriya ishida jadval ko'rinishida berilgan funktsiyani 2-darajali ko'phad bilan aproksimatsiyalaymiz.

Bu holda

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

bo'lib, normal tenglamalar sistemasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a_0} = \sum\limits_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) \cdot (-2) \\ \dfrac{\partial s}{\partial a_1} = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) \cdot (-2x_i) \\ \dfrac{\partial s}{\partial a_2} = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) \cdot (-2x_i^2) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases} \quad (6)$$

a_0, a_1, a_2 koeffitsientlarni esa (6) tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish orqali aniqlaymiz.

Misol. Tajriba natijasida quyidagi

N	1	2	3	4	5	6
X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Y	0,02	0,05	0,08	0,18	0,24	0,33

ma'lumotlar olingan bo'lsin.

Ma'lumotlarni approksimatsiyalovchi funktsiya $u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 2- darajali empirik bog'lanish ko'rinishida tanlash talab etilsin.

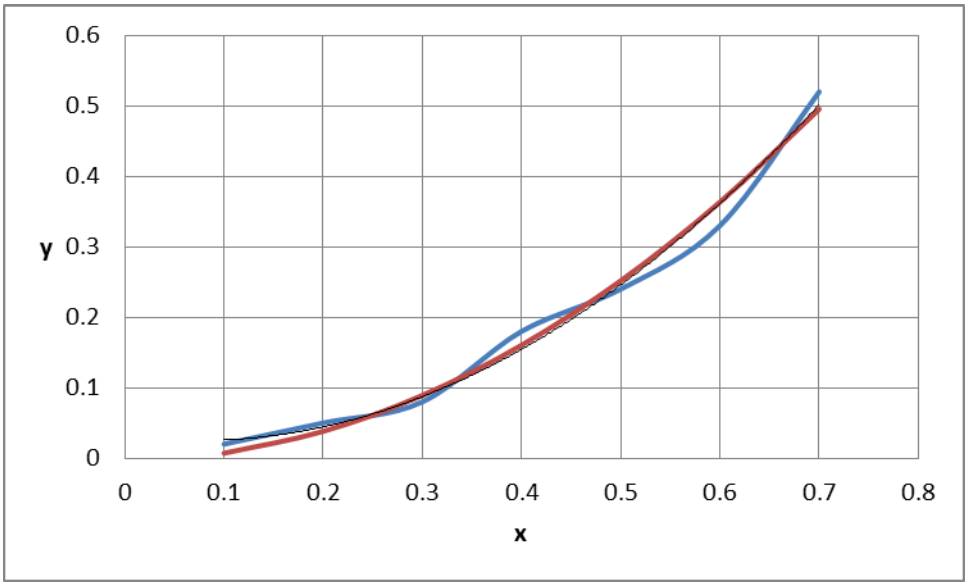
Hisoblashlarni quyidagi jadvalda keltiramiz.

N	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0,1	0,01	0,01	0,0001	0,02	0,002	0,0002
2	0,2	0,04	0,008	0,0016	0,05	0,01	0,002
3	0,3	0,09	0,027	0,0081	0,08	0,024	0,0072
4	0,4	0,16	0,064	0,0256	0,18	0,072	0,0288
5	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,24	0,12	0,06
6	0,6	0,36	0,216	0,1296	0,33	0,198	0,1188
7	0,7	0,49	0,343	0,2401	0,52	0,364	0,2548
$\sum$	2,8	1,40	0,784	0,4676	1,42	0,790	0,4718

olingan yig'indilarni (5) tenglamalar sistemasiga qo'yib, uni Gauss usuli bilan yechamiz va empirik funktsiyaga ega bo'lamiz.

$$u(x) = -0,003606 + 0,006908x + 1,00819x^2$$

Quyidagi rasmda tajriba ma'lumotlari (nuqtalar bilan) va approksimatsiyalovchi funktsiya grafiklari berilgan.



Kuzatish natijalariga ishlov berish. Tasodifiy hodisalar ustida o'tkaziladigan kuzatish natijalariga asoslanib, ommaviy tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash mumkin. Matematik statistikaning asosiy vazifasi kuzatish natijalarini (statistik ma’lumotlarni) to‘plash, ularni guruhlarga ajratish va qo‘yilgan masalaga muvofiq ravishda bu natijalarni tahlil qilish usullarini ko‘rsatishdan iborat.

Biror X tasodifiy miqdor F(x) taqsimot funksiyasiga ega deylik. X tasodifiy miqdor ustida o‘tkazilgan n ta tajriba (kuzatish) natijasida olingan $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlar to‘plamiga n hajmli tanlanma deyiladi, $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarni birbiriga bog‘liq bo‘lmagan va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin. Ba’zan $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma F(x) nazariy taqsimot funksiyaga ega bo‘lgan X bosh to‘plamdan olingan deb ham ataladi.

Bosh to‘plamdan tanlanma olingan bo‘lsin. Birorta x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta va hokazo kuzatilgan hamda

$$\sum n_1 = n$$

bo‘lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantalar, kuzatishlar soni n_i chastotalar deyiladi. Kuzatishlar sonining tanlanma hajmiga nisbatini

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

nisbiy chastotalar deyiladi. Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi. Shunday qilib, taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Aytaylik, X son belgi chastotalarining statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: n_x-belgining x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni; n – kuzatishlarning umumiy soni.

Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir x qiymati uchun (X<x) hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladi. Shunday qilib, ta’rifga ko‘ra:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

bu yerda: n_x – x dan kichik variantalar soni, n – tanlanma hajmi.

Tanlanmaning statistik taqsimotini ko‘rgazmali tasvirlash hamda kuzatilayotgan X belgining taqsimot qonuni haqida xulosalar qilish uchun poligon va gistogrammadan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k)$, nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Bu yerda x_i – tanlanma variantalari, n_i – mos chastotalar.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1, w_1), (x_2, w_2), ..., (x_k, w_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i – tanlanma variantalari, W_i –ularga mos nisbiy chastotalar.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari *h* uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{n_i}{n}$ (chastota zichligi) nisbatlarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onali figuraga aytiladi. Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari *h* uzunlikdagi oraliqlar balandliklari esa $\frac{w_i}{h}$ (nisbiy chastota zichligi) nisbatlarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onali figuraga aytiladi.

1-misol. Hajmi 30 bo‘lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan.

x_i	2	8	16
n_i	10	15	5

Nisbiy chastotalar taqsimotini tuzing.

Yechish: Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlama hajmiga bo‘lamiz.

$$W_1 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \ W_2 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \ W_3 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

u holda, nisbiy chastotalar taqsimoti

x_i	2	8	16
w_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

2-misol. Quyidagi taqsimot qatori bilan berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Yechish:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 10 + 15 + 25 = 50$$

$$W_t = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0.2; \ W_2 = \frac{15}{20} = \frac{3}{10} = 0.3; \ W_3 = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0.5$$

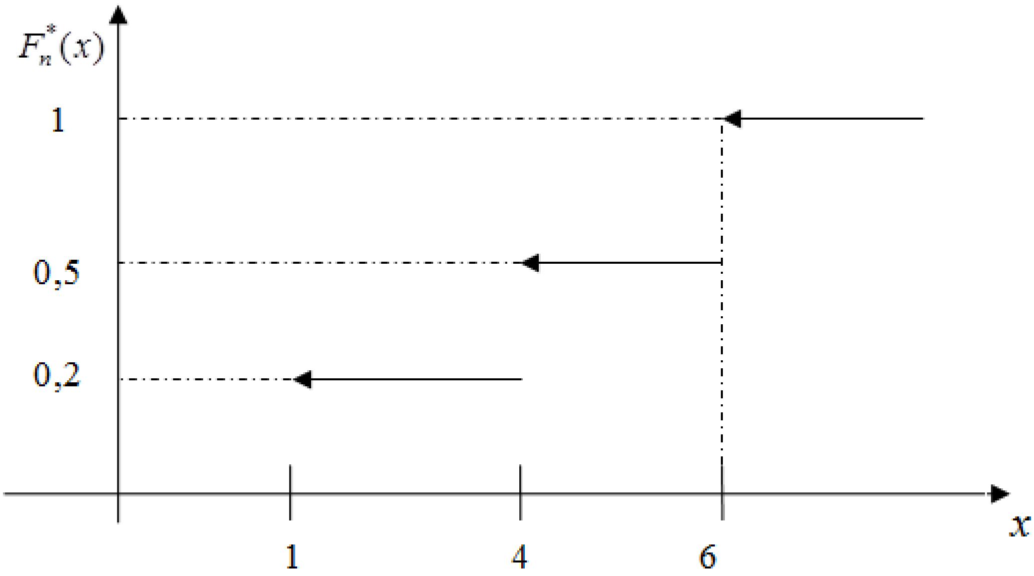
U holda, nisbiy chastotalar empirik taqsimoti

x_i	1	4	6
w_i	0.2	0.3	0.5

Empirik taqsimot funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0_i, agar, x \le 1, bo'lsa \\ 0.2, agar, 1 < x \le 4, bo'lsa \\ 0.5, agar, 4 < x \le 6, bo'lsa \\ 1, agar, x > 6, bo'lsa \end{cases}$$

Topilgan qiymatlar asosida grafikni yasaymiz.



X belgili bosh to‘plamning taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ bo‘lib, θ noma’lum parametr bo‘lsin, $x_1, x_2, ...x_n$ esa bosh to‘plamdan olingan tanlanma bo‘lsin. Tanlanmaning ixtiyoriy funksiyasi $L(x_1, x_2, ...x_n)$ statistika deyiladi.
Statistikaning kuzatilgan qiymati $L = L(x_1, x_2, ...x_n)$ θ parametrning taqribiy qiymati sifatida olinadi. Bu holda $L(x_1, x_2, ...x_n)$ statistika θ parametrning bahosi deyiladi.

$$\bar{x}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Tanlanmaning o‘rta qiymati,

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_T)^2$$

tanlanmaning dispersiyasi deyiladi.

Agar

$$ML(x_1, x_2, ..., x_n) = \theta$$

shart bajarilsa, L baho θ parametr uchun siljimagan baho deyiladi.
Agar L baho va har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P(|L - \theta| \le \varepsilon) = 1$$

munosabat bajarilsa, L baho θ parametr uchun asosli baho deyiladi.

Agar L baho uchun

$$\lim_{n\to\infty} D(L)=0$$

L baho θ parametr uchun asosli baho bo‘ladi.

Agar θ parametrning $L_1 va L_2$ siljimagan baholari berilgan bo‘lib, $D(L_1)<D(L_2)$ bo‘lsa, L_1 baho L_2 bahoga nisbatan samarali baho deyiladi.

Berilgan n hajmli tanlanmada eng kichik dispersiyali baho samarali baho bo‘ladi.

$\bar{x}_T$ –tanlanma o‘rtacha bosh to‘plam o‘rta qiymati uchun siljimagan, asosli va samarali baho bo‘ladi.

D_T -tanlanma dispersiya bosh to‘plam dispersiyasi uchun asosli baho bo‘ladi.

$S=\frac{n}{n-1}D_T$ – bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan, asosli baho bo‘ladi.

Tanlanma o‘rtacha va tanlanma dispersiyalarni hisoblashni soddalashtirish uchun ba’zan quyidagi formulalardan foydalaniladi:

$$u_i=\frac{x_i-c}{h},\ i=\overline{1,n},$$

$$\bar{u}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i,\quad \bar{x}_T=\bar{u}\cdot h+c,$$

$$D_T^u=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2,\quad D_T^x=h^2\cdot D_T^u$$

bu yerda c va h sonlari hisoblashni yengillashtiradigan qilib tanlanadi.

4-misol. Sterjenning uzunligi 5 marta o‘lchanganda quyidagi natijalar olingan: 92, 94, 103, 105, 106.

a) Sterjen uzunligining tanlanma o‘rta qiymatini toping.
b) Yo‘l qo‘yilgan xatolarning tanlanma dispersiyasini toping.

Yechish: a)Tanlanma o‘rtacha $\bar{x}_T$ ni topish uchun shartli variantalardan foydalanamiz, chunki dastlabki variantalar katta sonlardir.

$$u_i=x_i-92$$

$$\bar{x}_T=92+\frac{0+2+11+13+14}{5}=92+8=100$$

b) Tanlanma dispersiyani topamiz.

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_T)^2}{n} =$$

$$= \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2 + (105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34$$

Faraz qilaylik, $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ tanlanma berilgan bo‘lib, uning taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$bo‘lsin. $L(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ statistika θ parametr uchun statistik baho bo‘lsin.

Agar ixtiyoriy $\alpha > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topish mumkin bo‘lsa va uning uchun

$$P(|L-\theta|) < \delta) = 1-\alpha$$

bo‘lsa, u holda $(L-\delta;\ L+\delta)$ oraliq θ parametrning $1-\alpha$ ishonchlilik darajali ishonchli oralig‘i deyiladi.

X belgisi normal taqsimlangan bosh to‘plamning matematik kutilishi *a* uchun quyidagi ishonchli oraliqdan foydalaniladi:

a)

$$\overline{x}_T - t_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_T + t_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

bu yerda σ – o‘rtacha kvadratik chetlanish, t_α – Laplas funksiyasi $\Phi(t)$ ning $\Phi(t_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ bo‘ladigan qiymati.

a) σ – noma’lum bo‘lib, tanlanma hajmi n>30 bo‘lganda:

$$\overline{x_T} - t_{n-1:\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t_{n-1:\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Bu yerda S^2 – tuzatilgan tanlanma dispersiya, $t_{n-1:\alpha}$ – Styudent taqsimoti jadvalidan berilgan n va α lar bo‘yicha topiladi.

Eslatma: $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ baho aniqligi deyiladi.

X belgisi normal taqsimlangan taqsimot funksiyasining dispersiyasi σ^2 uchun quyidagi ishonchli oraliqlardan foydalaniladi:

$S^2(1-q)^2 < \sigma^2 < S^2(1+q)^2$, q <1 bo‘lganda, yoki

$S(1-q) < \sigma < S(1+q)$

$0 < \sigma^2 < S^2(1+q)^2$, q >1 bo‘lganda, yoki $0 < \sigma < S(1+q)$

5-misol. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining noma’lum matematik kutilishi *a* ni *v=0,95* ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping. Bunda $\sigma = 5$, tanlanma o‘rtacha $\overline{x_T} = 14$ va tanlanma hajmi n=25 berilgan.

Yechish: $\phi(t) = \frac{1}{2}v$ munosabatdan $\phi(t) = \frac{0,95}{2}$ =0,475 jadvaldan t=1,96 ni topamiz. Topilganlarni

$$\overline{x_T} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

formulaga qo‘yib,

$$\left(14 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}; 14 + 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}\right)$$

yoki

(12,04; 15,96)

ishonchli oraliqni topamiz.

Nazorat savollari.

1. Berilgan funktsiyalarni qanday ko’phadlar bilan approksimatsiyalash mumkin.
2. Berilgan ko’rsatmadan katta darajali ko’phadlar bilan approksimatsiyalashda qiyinligi nimada.
3. Gauss usuli ma’nosi nima?

14-ma'ruza. Matematik dasturlash va operasiyalarni tekshirish usullari bilan yechiladigan masalalar. Chiziqli dasturlash masalalarining qo'yilishi va unda qo'llaniladigan modellar. Chiziqli dasturlash masalasini yechishning grafik usuli.

REJA:

1. **Matematik dasturlash va operasiyalarni tekshirish usullari bilan yechiladigan masalalar.**
2. **Chiziqli dasturlash masalalarining qo'yilishi va unda qo'llaniladigan modellar. Chiziqli dasturlash masalalarining matematik modellari.**
3. **Chiziqli dasturlash masalasini yechishning grafik usuli. Grafik usulga keltiriladigan masalalar.**

Tayanch tushunchalar. *Dasturlash, matematik dasturlash, chiziqli dasturlash, chiziqsiz dasturlash, model, matematik model, iqtisodiy model, optimal, optimal tanlash.*

Adabiyotlar:

1. *Ю. Ю. Тарасевич. Математическое и компьютерное моделирование. Изд. 4-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.*
2. *Б.Саматов, Т. Эргашев «Оптималлаш усуллари» фанидан маърузалар матни (Ўқув услубий қўлланма). Наманган 2010.*
3. *A. Q. Rahimov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Smarqand 2010*
4. *Ю. В. Василков, Н. Н. Василкова. Компьютерные технологии вычилений в математическом моделировании. Изд. «Финансы и статистика» М.:2002*
5. *А. В. Стариков И. С. Кущева. Экономико-математическое и компьютерное моделирование. Воронеж 2008.*

Matematik dasturlashning predmeti korxona, firma, bozor, ishlab chiqarish birlashmasi, xalq xo'jalik tarmoqlari, butun xalq xo'jaligiga doir iqtisodiy jarayonlarni tasvirlovchi matematik modellardir.

Matematik modellar ko'p davrlardan buyon iqtisodiyotda ishlatilmoqda. Masalan, iqtisodiyotda qo'llanilgan, F. Kene (1758 y.) tomonidan yaratilgan model takror ishlab chiqarish modelidir.

«Iqtisodiy masalaning matematik modeli» deganda bu masalaning asosiy shartlari va maqsadining matematik formulalar yordamidagi tasviriga aytiladi.

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \qquad (i = 1, ..., m)$$

Umumiy holda matematik dasturlash masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:
shartlarni qanoatlantiruvchi $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funktsiyaning ekstremumi topilsin.

Bu yerda: ***f***, $\boldsymbol{g_i}$ – berilgan funktsiyalar, $\mathbf{b_i}$ – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Agar ***f***, $\boldsymbol{g_i}$ funktsiyalarning hammasi chiziqli funktsiyalardan iborat bo'lsa, berilgan masala chiziqli dasturlash masalasi bo'ladi.

Agar f va $\boldsymbol{g_i}$ funktsiyalardan birortasi nochiziq funktsiya bo'lsa, u holda berilgan model chiziqsiz dasturlash masalasini ifodalaydi.

Agar ***f*** yoki $\boldsymbol{g_i}$ funktsiyalar tasodifiy miqdorlarni o'z ichiga olsalar, u holda model stoxastik dasturlash masalasini ifodalaydi.

Agar ***f*** va $\boldsymbol{g_i}$ funktsiyalar vaqtga bog'liq bo'lib, masalani yechish ko'p bosqichli jarayon sifatida qaralsa, u holda berilgan model dinamik dasturlash masalasidan iborat bo'ladi.

Matematik dasturlash masalalari ichida eng yaxshi o'rganilgani chiziqli dasturlashdir. Chiziqli dasturlash usullari bilan ishlab chiqarishni rejalashtirish, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni optimal taqsimlash, optimal aralashmalar tayyorlash, optimal bichish, sanoat korxonalarini optimal joylashtirish va hokazo boshqa ko'plab masalalarni yechish mumkin.

Har qanday iqtisodiy masalani matematik dasturlash usullarini qo'llab yechishdan avval, ularning matematik modelini tuzish kerak; boshqacha aytganda berilgan iqtisodiy masalaning chegaralovchi shartlarini va maqsadini matematik formulalar orqali ifodalab olish kerak. Har qanday masalaning matematik modelini tuzish uchun:

- masalaning iqtisodiy ma'nosini o'rganib, undagi asosiy shart va maqsadni aniqlash;
- masaladagi noma'lumlarni belgilash;
- masalaning shartlarini algebraik tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalash;
- masalaning maqsadini funktsiya orqali ifodalash kerak.

Misol uchun bir nechta eng sodda iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish jarayoni bilan tanishamiz.

Ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi

Faraz qilaylik, korxonada ***m*** xil mahsulot ishlab chiqarilsin; ulardan ixtiyoriy birini $\boldsymbol{i\ (i=1,\dots,m)}$ bilan belgilaymiz. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ***n*** xil ishlab chiqarish faktorlari zarur bo'lsin. Ulardan ixtiyoriy birini $\boldsymbol{j\ (j=1,\dots,n)}$ bilan belgilaymiz.

Har bir ishlab chiqarish faktorining umumiy miqdori va bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan normasi quyidagi jadvalda berilgan

i/ch faktorlari / i/ch mahsulot turlari	1	2	3	…	n	Daromad
1	a_{11}	a_{12}	A_{13}	…	a_{1n}	C_1
2	a_{21}	a_{22}	A_{23}	…	a_{2n}	C_2
…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}	C_m
i/ch faktorining zahirasi	b_1	B_2	B_3	…	b_n	

Jadvaldagi har bir $\boldsymbol{b_j}$ – ***j***-ishlab chiqarish faktorining umumiy miqdori (zaħirasi)ni; $\boldsymbol{a_{ij}}$ – ***i***-mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan ***j***-faktorning miqdori; $\boldsymbol{c_i}$–korxonaning ***i***-mahsulotning bir birligini realizatsiya qilishdan oladigan daromadi.

Masalaning iqtisodiy ma’nosi: korxonaning ishini shunday rejalashtirish kerakki: a) hamma mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan har bir ishlab chiqarish faktorining miqdori ularning umumiy miqdoridan oshmasin; b) mahsulotlarni realizatsiya qilishdan korxonaning oladigan daromadi maksimal bo’lsin.

Rejalashtirilgan davr ichida ishlab chiqariladigan ***i***-mahsulotning miqdorini $\boldsymbol{x_i}$ bilan belgilaymiz. U holda masaladagi a) shart quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m \le b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m \le b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko’ra hamma noma’lumlar manfiy bo’lmasligi kerak, ya’ni:

$$x_i \ge 0 \quad (i=1,2,\dots m) \qquad (2)$$

Masaladagi b) shart uning maqsadini aniqlaydi. Demak masalaning maqsadi mahsulotlarni tadbiq qilishdan korxonaning oladigan umumiy daromadini maksimallashtirishdan iborat va uni

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \qquad (3)$$

chiziqli funktsiya orqali ifodalash mumkin. SHartga ko’ra $\boldsymbol{y \to max}$. Bu shartni $\boldsymbol{Y_{max}}$ ko’rinishda belgilaymiz.

Shunday qilib ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasining matematik modeli quyidagi ko'rnishda bo'ladi

$$\mathbf{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_m \geq 0,}$$

$$Y_{max} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$$

Chzizqli dasturlash masalalari. Chiziqli dasturlash masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq (\leq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq (\leq) b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq (\leq) b_m \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0, \tag{2}$$

$$Y_{\min(\max)} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{3}$$

(1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (3) chiziqli funktsiyaga minimal (maksimal) qiymat bersin. Masalaning (1) va (2) shartlari uning chegaraviy shartlari deb, (3) chiziqli funktsiya esa masalaning maqsadi yoki maqsad funktsiyasi deb ataladi.

Masaladagi barcha chegaralovchi shartlar va maqsad funktsiya chiziqli ekanligi ko'rinib turibdi. SHuning uchun ham (1)–(3) masala chiziqli dasturlash masalasi deb ataladi.

Konkret masalalarda (1) shart tenglamalar sistemasidan, «≥» yoki «≤» ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasidan yoki aralash sistemadan iborat bo'lishi mumkin. Lekin ko'rsatish mumkinki, (1)–(3) ko'rinishdagi masalani osonlik bilan quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ -----------------\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0, \tag{5}$$

$$Y_{\min} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{6}$$

(4)-(6) ko'rinish chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishi deb ataladi.

(4)–(6) masalani vektorlar yordamida quyidagicha ifodalash mumkin:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = P_0 \tag{7}$$

$$X \geq 0 \tag{8}$$

$$Y_{\min} = CX \tag{9}$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; \ldots, \; p_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad p_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

bu yerda

$S = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ – vektor–qator**.**

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – vektor–ustun.

(4)-(6) masalaning <u>matritsa ko'rinishdagi ifodasi</u> quyidagicha yoziladi:

$$AX = P_0 \tag{10}$$

$$X \geq 0, \tag{11}$$

$$Y_{\min} = CX \tag{12}$$

bu yerda $S = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ – qator vektor, $A = (a_{ij})$ – (4) sistema koeffitsientlaridan tashkil topgan matritsa; $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ va $P_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – ustun vektorlar.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; (i = 1, \ldots, m) \tag{13}$$

$$x_j \geq 0, \; (j = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

$$Y_{\min} = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \tag{15}$$

(4)-(6) masalani <u>yig'indilar yordamida</u> ham ifodalash mumkin:

<u>1-ta'rif</u>. Berilgan (4)–(6) masalaning <u>mumkin bo'lgan echimi</u> yoki <u>rejasi</u> deb, uning (4) va (5) shartlarni qanoatlantiruvchi $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorga aytiladi.

<u>2-ta'rif.</u> Agar (7) yoyilmadagi musbat x_i koeffitsientli $P_i, \; (i = 1, \ldots, m)$ vektorlar o'zaro chiziqli bog'iq bo'lmasa, u holda $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reja <u>tayanch</u> reja deb ataladi.

3-ta'rif. Agar $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tayanch rejadagi musbat komponentalar soni *m* ga teng bo'lsa, u hoda bu reja aynimagan tayanch reja, aks holda aynigan tayanch reja deyiladi.

4-ta'rif. CHiziqli funktsiya (6) ga eng kichik qiymat beruvchi $\boldsymbol{X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ tayanch reja masalaning optimal rejasi yoki optimal echimi deyiladi.

Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini. Quyidagi ko'rinishda yozilgan chiziqli dasturlash masalasini ko'ramiz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le a_i \qquad (i=\overline{1,m}) \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}) \qquad (2)$$

$$Y_{\max(\min)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3)$$

Ushbu chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini bilan tanishamiz.

Ma'lumki, **n** ta tartiblashgan $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ sonlar **n**-ligi (birlashmasi) **n** o'lchovli fazoning nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun (1)-(3) chiziqli dasturlash masalasining rejasini **n** o'lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bizga ma'lumki, bunday nuqtalar to'plami qavariq to'plamdan iborat bo'ladi. Qavariq to'plam chegaralangan (qavariq ko'pburchak), chegaralanmagan (qavariq ko'p qirrali soha) bo'lishi, bitta nuqtadan iborat bo'lishi yoki bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin.

Koordinatalari

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a$$

tenglamani qanoatlantiruvchi (x_1, x_2, …, x_n) nuqtalar to'plami gipertekislik deb ataladi. Shu sababli

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = Y$$

ko'rinishda yozilgan maqsad funktsiyani **Y** funktsiyaning turli **P** qiymatlariga mos keluvchi o'zaro parallel gipertekisliklar oilasi deb qarash mumkin.

Har bir gipertekislikning ixtiyoriy nuqtasida **Y** funktsiya bir xil qiymatni qabul qiladi (demak, o'zgarmas sathda saqlanadi). SHuning uchun ular «sath tekisliklari» deyiladi. Geometrik nuqtai nazardan chiziqli dasturlash masalasini quyidagicha ta'riflash mumkin:

(1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar ko'pburchagiga tegishli bo'lgan shunday $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ nuqtani topish kerakki, bu nuqtada *Y* maqsad funktsiya maksimum (minimum) qiymat beruvchi (3) gipertekisliklar oilasiga tegishli bo'lgan gipertekislik o'tsin. Jumladan, $\boldsymbol{n=2}$ da (1)-(3) masala quyidagicha

talqin qilinadi: (1)-(2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar ko'pburchagiga tegishli bo'lgan shunday $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ nuqtani topish kerakki, bu nuqtadan ***Y*** maqsad funktsiyaga eng katta (eng kichik) qiymat beruvchi va (3) daraja chiziqlar oilasiga tegishli bo'lgan chiziq o'tsin.

Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqiniga hamda oldingi ma'ruzalarda tanishgan chiziqli dasturlash masalasi yechimining xossalariga tayanib masalani ba'zi hollarda grafik usulda yechish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ ---------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \tag{5}$$

$$Y_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{6}$$

Ikki o'lchovli fazoda berilgan ushbu chiziqli dasturlash masalasini ko'ramiz.

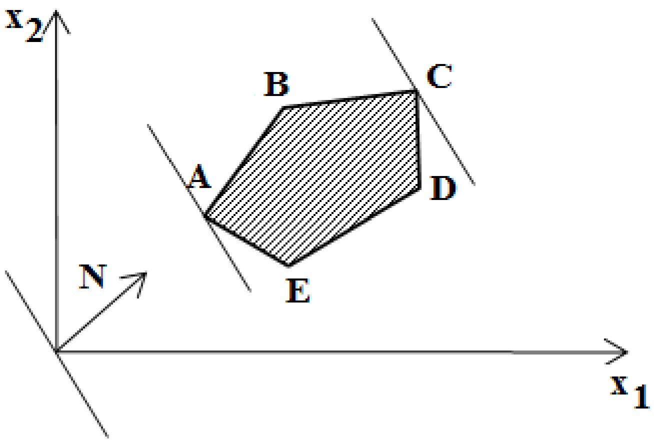
Faraz qilaylik, (4) sistema (5) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega bo'lsin. Hamda ulardan tashkil topgan to'plam chekli bo'lsin. (4) va (5) tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \left(i = 1, \ldots, m\right),$$

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0$$

chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi. Chiziqli funktsiya (6) ham ma'lum bir o'zgarmas $C_0 = const$ qiymatda $s_1x_1 + s_2x_2 = const$ to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Yechimlardan tashkil topgan qavariq to'plamni hosil qilish uchun $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \; \ldots, \; a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m, x_1 = 0, \; x_2 = 0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan ko'pburchakni yasaymiz.

Faraz qilaylik, bu ko'pburchak ABCDE beshburchakdan iborat bo'lsin



1-shakl

Chiziqli funktsiyani ixtiyoriy o'zgarmas C_0 songa teng deb olamiz. Natijada

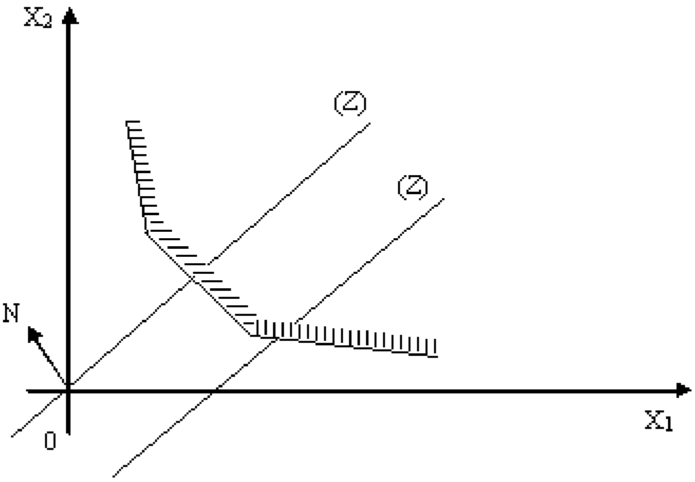
$$s_1x_1 + s_2x_2 = C_0 = const$$

to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqni $N(c_1, c_2)$ vektor yo'nalishida yoki unga teskari yo'nalishda o'ziga parallel surib borib, qavariq ko'pburchakning chiziqli funktsiyasiga eng kichik yoki eng katta qiymat beruvchi nuqtalarni aniqlaymiz.

1-shakldan ko'rinib turibdiki, chiziqli funktsiya o'zining minimal qiymatiga qavariq ko'pburchakning ***A*** nuqtasida erishadi. ***C*** nuqtada esa, u o'zining maksimal (eng katta) qiymatiga erishadi. Birinchi holda $A(x_1, x_2)$ nuqtaning koordinatalari masalaning chiziqli funktsiyaga minimal qiymat beruvchi optimal yechimi bo'ladi. Uning koordinatalari ***AB*** va ***AE*** to'g'ri chiziqlarni ifodalanuvchi tenglamalar orqali aniqlanadi.

Agar yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak chegaralanmagan bo'lsa, ikki hol bo'lishi mumkin.

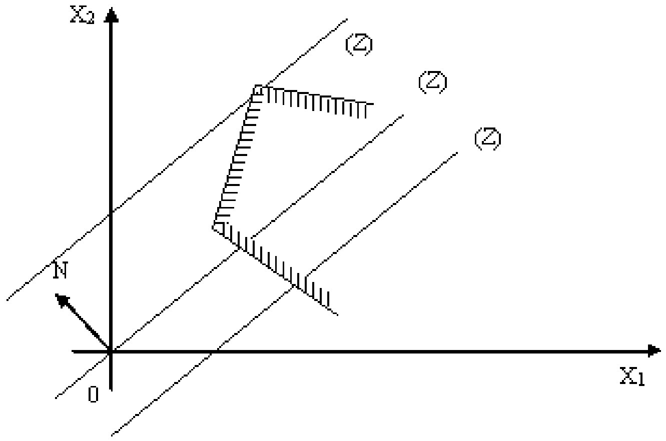
1- hol. $s_1x_1 + s_2x_2 = C_0$ to'g'ri chiziq ***N*** vektor bo'yicha yoki unga qarama-qarshi yo'nalishda siljib borib, qavariq ko'pburchakni kesib o'tadi. Ammo na minimal, na maksimal qiymatga erishmaydi. Bu holda chiziqli funktsiya quyidan va yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi:



2-shakl

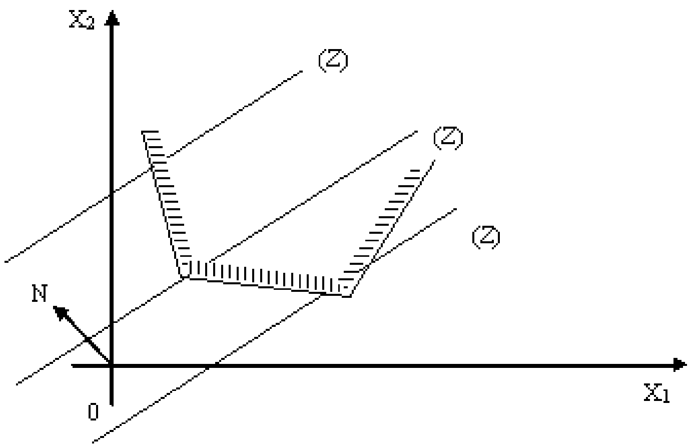
$$s_1x_1 + s_2x_2 = C_0$$

to’g’ri chiziq *N* vektor bo’yicha siljib borib qavariq ko’pburchakning birorta chetki nuqtasida o’zining minimum yoki maksimum qiymatiga erishadi. Bunday holda chiziqli funktsiya yuqoridan chegaralangan, quyidan esa chegaralanmagan:



3-shakl

yoki quyidan chegalangan, yuqoridan esa chegaralanmagan bo’lishi mumkin:



Nazorat savollari.

1. Chiziqli dasturlash masalalari deganda nimani tushunasiz?
2. Matematik dasturlash deganda nimani tushunasiz?
3. Chiziqli dasturlash masalalariga olib keladigan masalalar
4. Chiziqli dasturlash masalasining geometric ma’nosi aytib bering
5. Iqtisodiy masalalarning matematik modeli

15-ma’ruza. Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish. Sipleks usulida yechishning algoritimi va dasturi. Boshlangich bazisni topish. Simpleks usulda masalalar yechish. Simpleks jadvallar usuli. Simpleks jadval usulida yechish algoritmi. Sun’iy bazis usuli.

REJA:

1. **Chiziqli dasturlash masalalarini yechish usullari**
2. **Simpleks jadval usulida yechish.**
3. **Sun’iy basis usullari.**

Tayanch tushunchalar. *Simlek, simpleks jadval, chiziqli, chiziqli masala, suniy bazis, maqsad funksiya, minimum, maximum.*

Dansig yaratgan simpleks usul har bir tenglamada bittadan ajratilgan no’malum (bazis o’zgaruvchi) qatnashishi shartiga asoslangan. Boshqacha aytganda, ChP masalasida *m* ta o’zaro chiziqli erkli vektorlar mavjud deb qaraladi. Umumiylikni buzmagan holda bu vektorlar birinchi *m* ta $P_1, P_2, \ldots, P_m$ vektorlardan iborat bo’lsin, deylik. U holda masala quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ---------------- \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \tag{2}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to min. \tag{3}$$

(1) sistemani vektor shaklida yozib olaylik:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ m \end{pmatrix}, P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \ldots \\ a_{nm+1} \end{pmatrix}, \ldots,\ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_mx_m + P_{m+1}x_{m+1} + \ldots + P_nx_n = P_0 \tag{4}$$

bu yerda

$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_m$ vektorlar sistemasi *m*-o’lchovli fazoda o’zaro chiziqli erkli bo’lgan birlik vektorlar sistemasidan iborat. Ular *m* o’lchovli fazoning bazisini tashkil qiladi. Ushbu vektorlarga mos keluvchi $x_1,x_2,\dots,x_m$ o'zgaruvchilarni «bazis o'zgaruvchilar» deb ataladi.

x_{m+1}, $x_{m+2},\dots$, x_n – bazis bo'lmagan (erkli) o'zgaruvchilar. Agar erkli o'zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o'zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo'ladi. Natijada $X_0=(b_1,b_2,\dots,b_m, 0,\dots, 0)$ yechim hosil bo'ladi. Bu yechim boshlang'ich yechim bo'ladi. Ushbu yechimga $x_1P_1+x_2P_2+\dots+x_mP_m = P_0$ yoyilma mos keladi. Bu yoyilmadagi P_1, P_2, ..., P_m vektorlar o'zaro erkli bo'lganligi sababli topilgan joiz yechim bazis yechim bo'ladi.

Dansig usulida simpleks jadval quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
			P_1	P_2	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_l	c_l	b_l	0	0	…	0	a_{lm+1}	…	a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
$\Delta_j=Z_j-c_j$	…	$Y_0=\sum_{i=0}^{m}c_ib_i+c_0$	$\Delta_1=0$	$\Delta_2=0$	…	$\Delta_m=0$	$\Delta_{m+1}=\sum^{m} a_{im+1}c_i-c_{m+1}$	…	$\Delta_k=\sum^{m} a_{ik}c_i-c_k$	…	$\Delta_n=\sum^{m} a_{in}c_i-c_n$

Jadvaldagi C_{baz} bilan belgilangan ustun $x_1,x_2,\dots,x_m$ bazis o'zgaruvchilarning chiziqli funksiyadagi koeffisientlardan tashkil topgan vektor, ya'ni $C_{baz}=(c_1,c_2,\dots,c_m)$.

Jadvalda har bir P_j vektorning ustiga x_j noma'lumning chiziqli funksiyadagi koeffisienti c_j yozilgan. $m+1$- qatorga esa $x_1,x_2,\dots,x_m$ bazis o'zgaruvchilardagi chiziqli funksiyaning qiymati

$$Y_0=\sum_{i=1}^{m}b_ic_i+c \qquad (5)$$

hamda bazis yechimning optimallik mezonini baholovchi son

$$\Delta_j=Z_j-c_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}c_i-c_j \qquad (j=1,\dots,n)\ (6)$$

yozilgan. Bazis o'zgaruvchilarga mos keluvchi $P_1, P_2, ..., P_m$ vektorlar bazis vektorlar deb belgilangan. Bu vektorlar uchun $\Delta_j=Z_j-c_j=0\ (j=1,...,n)$ bo'ladi.

Agar barcha ustunlarda $\Delta_j \le 0$ bo'lsa, $x=(x_1,x_2,...,x_m) = (b_1,b_2,...,b_m)$ yechim optimal yechim bo'ladi. Bu yechimdagi chiziqli funksiyaning qiymati Y_0 ga teng bo'ladi.

$$\max_{\Delta_j>0}(\Delta_j)=\Delta_k$$

agar kamida bitta j uchun $\Delta_j > 0$ bo'lsa, u holda masalaning optimal yechimi topilmagan bo'ladi. Shuning uchun topilgan bazis rejani optimal rejaga yaqin bo'lgan boshqa bazis rejaga almashtirish maqsadida bazisga

$$\min_{a_{ik}>0}(b_i / a_{ik}) = b_l / a_{lk}$$

shartni qanoatlantiruvchi P_k vektorni kiritish kerak. Agar P_k bazisga kiritilsa, eski bazis vektorlardan birortasini bazisdan chiqarish kerak. Bazisdan shart o'rinli bo'lgan P_l vektor chiqariladi. Bu holda a_{lk} element hal qiluvchi element sifatida belgilandi. Shu element joylashgan j-qatordagi P_l vektor o'rniga u joylashgan ustundagi P_k vektor bazisga kiritiladi. P_l vektorning o'rniga P_k vektorni kiritish uchun simpleks jadval quyidagi formulalar asosida almashtiriladi.

$$\begin{cases} b_i' = b_i - (b_l / a_{lk}) \cdot a_{ik}, \\ b_l' = b_l / a_{lk}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{ij}' = a_{ij} - (a_{lj} / a_{lk}) \cdot a_{ik}, \\ a_{lj}' = a_{lj} / a_{lk}. \end{cases}$$

Simpleks jadval almashgandan so'ng yana qaytadan $\Delta_j \le 0$ baholar aniqlanadi. Agar barcha j lar uchun $\Delta_j \le 0$ bo'lsa, optimal yechim topilgan bo'ladi. Aks holda topilgan bazis reja boshqa bazis reja bilan almashtiriladi. Bunda quyidagi teoremalarga asoslanib ish ko'riladi.

1- teorema. Agar $X=(x_1,x_2,...,x_m)$ bazis reja uchun $\Delta_j=Z_j-c_j \le 0\ (j=1,...,n)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.

2- teorema. Agar X_0 bazis rejada tayin bir j uchun $\Delta_j=Z_j-c_j>0$ shart o'rinli bo'lsa, u holda X_0 optimal reja bo'lmaydi va shunday X_1 rejani topish mumkin bo'ladiki, uning uchun

$$Y(X_1)<Y(X_0)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar tayin bir j uchun $\Delta_j=Z_j-c_j>0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda 2- teoremaga asosan bu bazis rejani ham yangi bazis rejaga almashtirish kerak bo'ladi. Bu jarayon optimal reja topilguncha yoki masaladagi maqsad funksiyaning quyidan chegaralanmagan ekanligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Masalaning optimal yechimining mavjud bo'lmaslik sharti quyidagicha:

Agar tayin j uchun $\Delta_j=Z_j-c_j>0$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bu ustundagi barcha elementlar $a_{ij}\leq 0$ $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ bo'lsa, u holda masalaning maqsad funksiyasi chekli ekstremumga ega bo'lmaydi.

Faraz qilaylik, simpleks jadvalda optimallik sharti $(\Delta_j\leq 0,\ j=1,\dots,n)$ bajarilsin. Bu holda bu yechim

$$X_0=B^{-1}P_0$$

formula orqali topiladi. Bu yerda $B=(P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_m)$ matrisa bazis vektorlardan tashkil topgan matrisadir.

(1)-(3) masala uchun B matrisa m o'lchovli J_m - birlllik matrisadir, ya'ni $B=J_m$.

$BB^{-1}=J_m$ bo'lganligi sababli B^{-1} matrisa ham birlik matrisa bo'ladi.

Demak, $X_0=P_0=(b'_{10},\ b'_{20},\ \dots,\ b'_{m0},\ 0,\ \dots,\ 0)$ optimal yechim bo'ladi.

1-misol.

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_5=7, \\ -2x_2+4x_3+x_4=12, \\ -4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10, \end{cases}$$

masalani simpleks usul bilan yeching

$$x_j\geq 0,\quad (j=1,\ 2,\dots,\ 6)$$

$$Y=x_2-3x_3+2x_5\to min.$$

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix},P_5=\begin{pmatrix}-2\\0\\8\end{pmatrix},\ P_6=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ P_0=\begin{pmatrix}7\\12\\10\end{pmatrix}$$

Yechish. Belgilashlar kiritamiz va simpleks jadvalni to'ldiramiz

$$C'=\ (0;\ 1;\ -\ 3;\ 0;\ 2)$$

Simpleks usulning I bosqichida bazisga P_3 vektor kiritilib P_4 vektor chiqarildi, II bosqichida P_2 kiritildi va P_1 chiqarildi. Simpleks jadval (7) formulalar asosida almashtirilib borildi. III bosqichda optimal yechim topildi:

i	Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	0	1	-3	0	2	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	7	1	3	-1	0	-2	0
2	P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0
3	P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j			0	0	-1	3	0	-2	0
1	P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	-2	0
2	P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
3	P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ_j			-9	0	1/2	0	-3/4	-2	0
1	P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	-4/5	0
2	P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	-2/5	0
3	P_6	0	11	1	0	0	-1/2	6	1
Δ_j			-11	-1/5	0	0	-4/5	-8/5	0

$X = (0; 4; 5; 0; 0; 11)$, $Y_{min} = -11$.

2-Masala. Korxonada to'rt xil mahsulot tayyorlanadi. Birlik mahsulotlarning sotuv narxlari mos ravishda 2, 1, 3 va 5 ming so'mdan bo'lsin. Mahsulotlarni tayyorlash uchun energiya, xomashyo va mehnat sarflanadi. Birlik mahsulot uchun saflanadigan resurslar miqdori quyidagi jadvalda kelitirilgan.

	1 xil mahsulot	2 xil mahsulot	3 xil mahsulot	4 xil mahsulot	Resurslar
Energiya	2	3	1	2	30
Xomashyo	4	2	1	2	40
Mehnat	1	2	3	1	25

Mahsulotlarni ishlab chiqarishning shunday rejasini tuzish kerakki, mahsulotlarning sotuv narxlari yig'indisi maksimal bo'lsin.

Bu iqtisodiyot masalasini yechish uchun uning matematik modelini tuzamiz. Shu maqsadda x_1, x_2, x_3, x_4 lar orqali rejalashtirilgan mahsulotlar miqdorlarini belgilaymiz. Ularning narxi

$$\sum_{i=1}^{4} c_i x_i = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

bo'ladi. Mahsulotlarga sarflanadigan energiya miqdori $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$, xomashyo miqdori $4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$ va mehnat miqdori $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$ dan iborat bo'ladi.

Masala shartiga ko'ra, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasiga ega bo'lamiz:

$$\frac{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max}{2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30,} \qquad (1)$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 40, \qquad (2)$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 25,}{x_i \ge 0, i = \overline{1,4}.} \qquad (3)$$

Bu masalani simpleks usul yordamida yechish uchun uni kanonik ko'rinishga keltiramiz. Shu maqsadda (2) tengsizliklarga muvozanatlovchi, yordamchi, x_5, x_6 va x_7 miqdorlarni qo'shamiz. Bu miqdorlarni iqtisodiy talqin etsak, ular qaralayotgan reja uchun erkin resurslarni anglatadi. Natijada quyidagi kanonik masalaga ega bo'lamiz:

$$\frac{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max}{2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 30,} \qquad (4)$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 40, \qquad (5)$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 25,}{x_i \ge 0, i = \overline{1,7}.} \qquad (6)$$

Bu masala uchun (0,0,0,0,30,40,25) bazis reja bo'ladi va unga

$$A_B = (a_5,\, a_6,\, a_7) = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

bazis mos keladi. Demak, (4)-(6) masalani simpleks metod yordamida yechish mumkin. Dastlab, yuqorida bayon etilgan algoritm asosida birinchi simpleks jadvalni to'ldiramiz.

	S_i \ S_B		2	1	3	5	0	0	0	
b, a_i \ a_B		b,x	a_1	a_2	a_3	A_4	a_5	a_6	a_7	θ
a_5	0	30	2	3	1	2	1	0	0	15
a_6	0	40	4	2	1	2	0	1	0	20
a_7	0	25	1	2	3	1	0	0	1	25
Z		0	0	0	0	0	0	0	0	
Z-C			-2	-1	-3	-5	0	0	0	

							↑			
a_4	5	15	1	3/2	1/2	1	1/2	0	0	30
a_6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
a_7	0	10	0	1/2	5/2	0	-1/2	0	1	4
Z		75	5	15/2	5/2	5	5/2	0	0	
Z-C			3	13/2	-1/2	0	5/2	0	0	
						↑				
a_4	5	13	1	7/5	0	1	3/5	0	-1/5	
a_6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
a_3	3	4	0	1/5	1	0	-1/5	0	2/5	
Z		77	5	38/5	3	5	12/5	0	1/5	
Z-C			3	33/5	0	0	12/5	0	1/5	

Demak ikkinchi iterasiya natijasida uchinchi qadamda optimallik sharti bajarildi. Optimal reja x_{opt}=(0,0,4,13,0,10,0) bo'lib, maqsad funksiyaning joiz maksimal qiymati $c'x\,/_{\text{опт}} = 77$ bo'ladi.

Izoh. Har bir jadvalning *Z* satridagi uchinchi katakda maqsad funksiyaning mos rejadagi qiymati hosil bo'ladi va har bir iterasiyada bu qiymat oshib boradi.

Chiziqli programmalashtirish masalasini yechishning <u>Simpleks usuli</u> bir tayanch yechimdan boshqasiga o'tish asosida maqsad funksiyasiga optimal qiymat beruvchi yechimni topishga asoslangandir. Har bir tayanch yechimdan boshqasiga o'tilganda maqsad funksiya qiymati o'sib boradi (maksimallashtirish masalasi uchun) yoki kamayib boradi (minimallashtirish masalasi uchun) . Chekli qadamdagi hisoblashlardan keyin masalaning optimal yechimi topiladi yoki maqsad funksiyasi yechimlar sohasida chegaralanmaganligi aniqlanadi. Barcha hisoblash jarayonlari, bir yechimdan boshqasiga o'tish va tayanch yechimning optimallik shartlarini tekshirish <u>simpleks jadval</u> deb ataluvchi maxsus jadvalda bajariladi.

Nazorat savollari.

1. Simplek usul deganda nimani tushunasiz?
2. Simpleks usulning mohiyatini tushuntirib bering
3. Simplek jadval usulida basis tushunchasi
4. Sun'iy basis usulining mahiyatini ayting

5.

16-ma'ruza. Sun'iy bazis usulida yechish algoritmi. Sun'iy bazis usulida masalalar yechish. Chiziqli dasturlashning o'zaro ikki yoqlama masalalari va ularning matematik modellari. O'zaro ikki yoqlama simpleks- usul.

REJA:

1. **Sun'iy bazis usuli.**
2. **Chiziqli dasturlashning o'zaro ikki yoqlama masalalari.**
3. **Ikki yoqlama simpleks usuli**

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. *L. Yu. Turayeva, O. B. Soqiyeva. Matematik programmalash masalalariniyechish bo'yicha uslubiy qo'llanma. Termiz, TDU, 2010., 77 bet.*
2. *M. Raisov, R. X. Mukumova «Matematik programmalash». Uslubiy qo'llanma. Samarqand, SamISI, 2008., 188 bet.*
3. *Е. В. Башкинова, Г.Ф. Егорова, А. А. Заусаев. Численные методы и их реализация в MS Excel. Часть 2. Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2009. 44 с*

Tayanch tushunchalar. *Bazis, Sun'iy 63asis, ikki yoqlama masalalari, chiziqli dasturlash masalalari, simpleks, simpleks usul*

Agar masalaning shartlarida o'zaro erkli bo'lgan m ta birlik vektorlar (63asis vektorlar) qatnashmasa, ular sun'iy ravishda kiritiladi. Masalan, masala quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \dots,\ x_n \ge 0, \qquad (2)$$

$$Y_{max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \qquad (3)$$

Bu masalaga $\mathbf{x_{n+1} \ge 0,\ x_{n+2} \ge 0,\ \dots,\ x_{n+m} \ge 0}$ qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritilsa, quyidagi kegaytirilgan masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0, \quad \ldots,\ x_{n+m} \geq 0, \tag{5}$$

$$Y_{min} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n + 0(x_{n+1} +, \ldots + x_{n+m}) \tag{6}$$

Bu holda $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots, P_{n+m}$ vektorlar bazis vektorlar va $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ o'zgaruvchilar «bazis o'zgaruvchilar» deb qabul qilinadi.

Agar berilgan masala quyidagi ko'rinishda bo'lsa:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0, \tag{8}$$

$$Y_{min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{9}$$

bu masalaga sun'iy $\mathbf{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}$ o'zgaruvchilar kiritib quyidagi kengaytirilgan masala hosil qilinadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{10}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0, \ldots,\ x_{n+m} \geq 0, \tag{11}$$

$$Y_{min} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n + M(x_{n+1} +, \ldots + x_{n+m}) \tag{12}$$

bu erda: **M – y**etarlicha katta musbat son.

Sun'iy bazis o'zgaruvchilariga mos keluvchi $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots, P_{n+m}$ vektorlar «sun'iy bazis vektorlar» deb ataladi. Berilgan (7)-(9) masalaning optimal yechimi quyidagi teoremaga asoslanib topiladi.

<u>Teorema:</u> Agar kengaytirilgan (10)-(12) masalaning optimal yechimida sun'iy bazis o'zgaruvchilari nolga teng bo'lsa, ya'ni:

$$x_{n+i} = 0,\ (i = 1, \ldots, m)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu echim berilgan (7)-(9) masalaning ham optimal yechimi bo'ladi.

Kengaytirilgan masalaning optimal echimida kamida bitta sun'iy bazis o'zgaruvchi noldan farqli bo'lsa, unda masala echimga ega bo'lmaydi.

1-misol. Masalani sun'iy bazis usuli bilan yeching

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ (j=1,\ 2,\dots,\ 4)$$

$$Z_{max} = 5x_1+3x_2+4x_3-x_4$$

Yechish. Masalaga sun'iy $x_5 \geq 0$ $x_6 \geq 0$ o'zgaruvchilar kiritamiz va uni normal ko'rinishga keltiramiz.

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ (j=1,\ 2,\dots,\ 6)$$

$$Z_{min} = -5x_1-3x_2-4x_3+x_4+M(x_5+x_6)$$

Hosil bo'lgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz.

i	*Bazis vekt.*	C_{baz}	P_0	-5	-3	-4	1	*M*	*M*
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	*M*	3	1	3	2	2	1	0
2	P_6	*M*	3	2	2	1	1	0	1
Δ_j			6M	3M+5	5M+3*	3M+4	3M-1	0	0
1	P_2	-3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0
2	P_6	*M*	1	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1
Δ_j			M-3	4/3M+4*	0	-1/3M+2	-1/3M-3	-5/3M-1	0
1	P_2	-3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	-1/4
2	P_1	-5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4
Δ_j			-6	0	0	3*	-2	1-M	-3-M
1	P_3	-4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3
2	P_1	-5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3
Δ_j			9	0	-4	0	-5	-1-M	-2-M

Shunday qilib, simpleks usul bo'yicha 4-ta qadamdan iborat yaqinlashishda optimal yechim topildi. $\Delta_j \leq 0$. Optimal yechim $x=(1;0;1;0;0;0)$, $Y_{min}=-9$.

Kengaytirilgan masalaning optimal yechimidagi sun'iy o'zgaruvchilar 0 ga teng $(x_5=0,\ x_6=0)$. Shuning uchun (3-teoremaga asosan) berilgan masalaning optimal yechimi:

$X=(1;0;1;0)$; $Z_{min}=-9$; $Z_{max}=9$; bo'ladi.

Ma'lumki, chiziqli dasturlash usullari va, jumladan, simpleks usul iqtisodiy masalalarning eng yaxshi (optimal) yechimini topishga yordam beradi. Lekin buning o'zi kifoya emas. Optimal yechim topilgandan so'ng iqtisodiy ob'ektlar (zavod, fabrika, firma) boshliqlari oldida quyidagiga o'xshash muammolarni echishga to'g'ri keladi:

1. Xom-ashyolarning ba'zilarini oshirib, ba'zilarini qisqartirib sarf qilinsa optimal yechim qanday o'zgaradi?
2. Optimal yechimni o'zgartirmasdan xom-ashyolar sarfini qanday darajaga o'zgartirish (kamaytirish) mumkin?
3. Mahsulotga bo'lgan talab bir birlikka kamayganda (oshganda) optimal yechim qanday o'zgaradi?

SHunga o'xshash boshqa muammolarni hal qilishda ikki taraflamalik nazariyasidan foydalaniladi. Bunda nazariyaning quyidagi teoremalariga asoslaniladi.

Ikkilanish nazariyasining ikkinchi asosiy teoremasi

Berilgan masalaning mumkin bo'lgan yechimi $X^* = \left(x_1^*,\, x_2^*, \ldots,\, x_n^*\right)$ va

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* - c_j\right) = 0,\ j = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

$$y_j^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0,\ i = 1, 2, \ldots m \tag{2}$$

ikkilamchi masalaning mumkin bo'lgan yechimi $Y^* = \left(y_1^*,\, y_2^*, \ldots,\, y_n^*\right)$ optimal bo'lishlari uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va etarlidir.

Agar $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* > b_i$, bo'lsa u holda $y_i^* = 0$,

Agar $y_i^* > 0$, bo'lsa u holda $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$.

Bu shartlarni quyidagicha talqin qilish mumkin: agar ikkilamchi masalalardan birining chegaralovchi shartlari optimal yechimda qat'iy tengsizlikka aylansa, u holda ikkinchi masalaning optimal yechimidagi tegishli o'zgaruvchi 0 ga teng bo'ladi; agar birinchi masala yechimidagi noma'lum musbat qiymatga ega bo'lsa u holda ikkinchi masalada tegishli shartlar optimal rejada tenglikka aylanadi:

$$\text{agar } x_j^* > 0 \text{ bo'lsa, u holda } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j ,$$

xuddi shuningdek:

$$\text{agar } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j \text{ bo'lsa u holda } x_j^* = 0 .$$

Bundan ko'rinadiki: optimal yechimning bahosi – resurslar tanqisligi darajasining o'lchovidir. Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatiladigan xom-ashyo «tanqis (defitsit) xom-ashyo» deyiladi. Bunday xom-ashyoni oshirib sarf qilish korxonada mahsulot ishlab chiqarish darajasini oshiradi. Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatilmaydigan xom-ashyo «notanqis (kamyob bo'lmagan) xom-ashyo» hisoblanadi. Bunday xom-ashyolarni ikkilamchi bahosi nolga teng bo'ladi. Ularning miqdorini oshirish ishlab chiqarish rejasini oshirishga ta'sir qilmaydi.

Bu aytganlarni quyidagi optimal texnologiyani tanlash masalasining yechimini tahlil qilish jarayonida ko'ramiz.

1-masala. Faraz qilaylik, korxonada bir xil mahsulot 3 ta texnologiya asosida ishlab chiqarilsin. Har bir texnologiyaga I birlik vaqt ichida sarf qilinadigan xom-ashyolarning miqdori, ularning zahirasi, har bir texnologiyaning unumdorligi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Har bir texnologiya bo'yicha korxonaning ishlash vaqtini shunday topish kerakki, natijada korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlarning miqdori maksimal bo'lsin.

xom-ashyo	***Texnologiyalar***			***xom-ashyolar zahirasi***
	T1	T2	T3	
Ish kuchi (ishchi/soat)	15	20	25	1200
Birlamchi xom-ashyo (t)	2	3	2,5	150
Elektroenergiya (KVT/ch)	35	60	60	3000
Texnologiyaning unumdorligi	300	250	450	
Texnologiyalarni ishlatish rejalari	X_1	X_2	X_3	Z_{max}

$$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \le 150,$$
$$35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 300,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$$
$$z_{\max} = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3$$

Masalaning matematik modeli:

Masalani normal holga keltirib simpleks usul bilan echamiz.

B.u.	**Sb.**	**v**	300	2500	450	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_4	0	1200	15	20	25	1	0	0
X_5	0	150	2	3	2,5	0	1	0
X_6	0	3000	35	60	60	0	0	1
Δ_j		0	-300	-250	-450	0	0	0
X_3	450	48	0,6	0,8	1	0,04	0	0
X_5	0	30	0,5	1	0	-0.1	1	0
X_6	0	120	-1	12	0	-2,4	0	1
Δ_j		21600	-30	110	0	18	0	0
X_3	450	12	0	-0,4	1	0,16	-1,2	0
X_1	300	60	1	2	0	-0,2	2	0
X_6	0	180	0	14	0	-2,6	2	1
Δ_j		23400	0	170	0	12	60	0

Jadvaldan ko’rinadiki, berilgan masalaning yechimi:

$$\mathbf{x^* = (60; 0;12; 0;0; 0; 180).}$$

$$\mathbf{Z(x^*) = 23400}$$

Jumladan, T-1 texnologiyani 60 soat, T-3 ni 12 soat qo’llash kerak. T-2 ni esa umuman qo’llamaslik kerak. Ikkilamchi masalaning yechimi:

$$\mathbf{y^* = (12;60; 0). \ f(y^*) = 23400}$$

Masalaning yechimidan ko’rinadiki, $\mathbf{y_1^*=12 > 0, y_1^*=60 > 0.}$

Demak, 1-va 2-(ish kuchi va birlamchi xom-ashyo) to’la ishlatiladi. Demak, ular kamyob resurslardir. 3-resurs (elektroenergiya) kamyob emas. Uning ikkilamchi bahosi $\mathbf{y_1^*=0.}$

Berilgan masala yechimini uning shartlariga qo’yganda 1-va 2-shartlar tenglamaga aylanadi. Shuning uchun ikkilamchi masalaga tegishli o’zgaruvchilar ($\mathbf{y_1^*, y_2^*}$) musbat qiymatga ega bo’ladi. 3-shart qat’iy tengsizlikka aylanadi, shuning uchun ikkilamchi masalani tegishli o’zgaruvchisi ($\mathbf{y_3^*}$) 0 ga teng bo’ladi, bu esa elektroenergiyaning ortiqcha ekanligini ko’rsatdi.

<u>Ikki taraflamalik nazariyasining uchinchi asosiy teoremasi.</u>

$$\frac{\partial z_{\max}}{\partial b_i} = y_i^* \qquad (3)$$

Optimal yechimdagi y_i^* o’zgaruvchilarining qiymati xom-ashyolar miqdorini kichik miqdorga o’zgartirgandagi maqsad funktsiyaning o’zgarishiga teng bo’ladi. Agar (3) da $\partial b_i = \Delta b_i$, $\partial z_{max} = \Delta z_{max}$ deb qabul qilsak, $\Delta z_{max} = y_i^* \Delta b_i$ **h**osil bo’ladi.

Bundan, agar Δb_i =1 bo’lsa, $z_{max} = y_i^*$ bo’ladi, ya’ni ikkilamchi masalaning optimal yechimi xom-ashyolar miqdorini 1 birlikka oshirib sarf qilinganda maqsad funktsiyaning qancha miqdorga o’zgarishini ko’rsatadi. YUqoridagi masaladan ko’rinadiki, ish kuchini I birlikka oshirish natijasida maqsad funktsiya 12 birlikka, birlamchi xom-ashyoni I birlikka oshirish natijasida esa maqsad funktsiya 60 birlikka oshadi. Elektroenergiyasi esa ortiqcha; shuning uchun elektro energiya miqdorini oshirish maqsad funktsiyaning qiymatiga ta’sir qilmaydi.

Shunday qilib, shartli optimal baholar berilgan masalaning optimal rejasi bilan chambarchas bog’langan. Berilgan masaladagi parametrlarning har qanday o’zgarishi uning optimal yechimiga ta’sir qiladi, demak ular shartli optimal baholarning o’zgarishiga ham sabab bo’ladi.

Nazorat savollari.

1. Sun’iy basis usuli deganda nimani tushunasiz?
2. Shartli optimal ma’nosini tushuntirib bering
3. Maqsad funksiya deganda nimani tushunasiz?
4. Maqsad funksiyaning yechimi deganda nimani tushunasiz?

17-ma’ruza. Transport masalasi va uning qo‘yilishi. Transport masalasini yechish usullari. Shimoliy - g‘arb burchak va potensiallar usullari. Ta’lim jarayonini optimallashtirish masalasi va unda modellashtirish usullaridan foydalanish.

REJA:

1. **Transport masalalari va ularning qo’yilishi.**
2. **Transport masalalarini yechish usullari**
3. **Optimallashtirish masalalari va ularning qo’yilshi**

Adabiyotlar:

1. *L. Yu. Turayeva, O. B. Soqiyeva. Matematik programmalash masalalariniyechish bo’yicha uslubiy qo’llanma. Termiz, TDU, 2010., 77 bet.*
2. *M. Raisov, R. X. Mukumova «Matematik programmalash». Uslubiy qo‘llanma. Samarqand, SamISI, 2008., 188 bet.*
3. *Е. В. Башкинова, Г.Ф. Егорова, А. А. Заусаев. Численные методы и их реализация в MS Excel. Часть 2. Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2009. 44 с*

Tayanch tushunchalar. *Transport masalasi, optimal optimal yechim, usul, shimol-g’arb burchak usuli, modellashtirish.*

Transport masalasi – chiziqli dasturlashning alohida xususiyatli masalasi bo’lib bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masala xususiyligiga qaramay qo’llanish sohasi juda kengdir.

Masalaning qo’yilishi va uning matematik modeli. m-ta A_i (i = 1,2,…, m) ta’minotchilarda yig’ilib qolgan bir jinsli a_i miqdordagi mahsulotni **n**-ta $\mathbf{B}_j$ iste’molchilarga mos ravishda $\mathbf{b}_j$ **(j=1,2,…,n)** miqdorda etkazib berish talab qilinadi.

Har bir i-ta’minotchidan har bir j-iste’molchiga bir birlik yuk tashish yo’l xarajati ma’lum va u c_{ij} – so’mni tashkil qiladi.

YUk tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta’minotchilardagi barcha yuklar olib chiqib ketilsin, iste’molchilarning barcha talablari qondirilsin va shu bilan birga yo’l xarajatlarining umumiy qiymati eng kichik bo’lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun i-ta’minotchidan j-iste’molchiga etkazib berish uchun rejalashtirilgan yuk miqdorini x_{ij} orqali belgilaymiz, u holda masalaning shartlarini quyidagi jadval ko’rinishda yozish mumkin:

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahiralar
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	C_{2n} X_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	…	C_{nm} x_{nm}	a_m
Talablar	b_1	b_1	…	b_1	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

Jadvaldan ko'rinadiki, i-ta'minotchidan j-iste'molchiga rejadagi x_{ij} – birlik yuk etkazib berish yo'l xarajati c_{ij} x_{ij} – so'mni tashkil qiladi. Rejaning umumiy qiymati esa,

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

ga teng bo'ladi.

Masalaning birinchi shartiga ko'ra, ya'ni barcha yuklar olib chiqib ketilishi sharti uchun

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ (i = \overline{1,m})$$

tengliklarga ega bo'lamiz;

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ (j = \overline{1,n})$$

ikkinchi shartga ko'ra, ya'ni barcha talablar to'la qondirilishi uchun

tengliklarga ega bo'ldik;

SHunday qilib masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishni oladi:

chiziqli tenglamalar sistemasining

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

shartlarni qanoatlantiruvchi shunday yechimini topish kerakki, bu yechim

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot X_{ij}$$

chiziqli funktsiyaga eng kichik qiymat bersin.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Bu modelda

tenglik o’rinli deb faraz qilinadi. Bunday masalalar «yopiq modelli transport masalasi» deyiladi.

Teorema. Talablar hajmi zahiralar hajmiga teng bo’lgan istalgan transport masalasining optimal yechimi mavjud bo’ladi.

Boshlang’ich tayanch yechimni qurish.

Ma’lumki, ixtiyoriy chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini topish jarayoni boshlang’ich tayanch yechimini ko’rishdan boshlanadi.

Masalaning (1) va (2) sistemalari birgalikda **mn** – ta noma’lumli **m+n** – ta tenglamalarda iborat. Agar (1) sistemaning tenglamalarini hadma-had qo’shsak, va alohida (2) sistemaning tenglamalarini hadma-had qo’shsak, ikkita bir xil tenglama hosil bo’ladi. Bu esa (1) va (2) dan iborat sistemada bitta chiziqli bog’lik tenglama borligini ko’rsatadi. Bu tenglama umumiy sistemadan chiqarib tashlansa, masala **m+n-1** ta chiziqli bog’liq bo’lmagan tenglamalar sistemasidan iborat bo’lib qoladi. Demak, masalaning buzilmaydigan tayanch yechimi **m+n-1** ta musbat komponentalardan iborat bo’ladi.

SHunday qilib, transport masalasining boshlang’ich tayanch yechimi biror usul bilan topilgan bo’lsa, (x_{ij}) – matritsaning **m+n-1**ta komponentalari musbat bo’lib, qolganlari nolga teng bo’ladi. Agar transport masalasining shartlari va uning tayanch yechimi yuqoridagi jadval ko’rinishda berilgan bo’lsa, noldan farqli x_{ij} – lar joylashgan kataklar «band kataklar», qolganlari «bo’sh kataklar» deyiladi.

Agar band kataklarni vertikal yoki gorizontal kesmalar bilan tutashtirilganda yopiq ko’pburchak hosil bo’lsa, bunday hol tsikllanish deyiladi va yechim tayanch yechim bo’lmaydi. Demak, birorta yechim tayanch yechim bo’lishi uchun band kataklar soni **m+n-1** ta bo’lib tsikllanish ro’y bermasligi kerak.

Shimoliy-g’arb burchak usuli.

Transport masalasi jadval ko’rinishida berilgan bo’lsin. Yo’l xarajatlarini hisobga olmay B_1 iste’molchining talabini A_1 ta’minotchi hisobiga qondirishga kirishamiz. Buning uchun a_1 va b_1 yuk birliklaridan kichigini A_1B_1 katakning chap pastki burchagiga yozamiz. Agar $a_1 < b_1$ bo’lsa, B_1 ning ehtiyojini to’la qondirish uchun A_2B_1 katakka etishmaydigan yuk birligini A_2 dan olib yozamiz va h. k. Bu jarayonni A_mB_n katakka etguncha davom etdiramiz. Agar (5) shart o’rinli bo’lsa, bu usulda tuzilgan yechim albatta tayanch yechim bo’ladi.

1-misol. Transport masalasining boshlang’ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar					Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Minimal qiymat usuli.

Bu usulda boshlang'ich yechim qurish uchun avval yo'l xarajati eng kichik bo'lgan katakka $\boldsymbol{a_i}$ va $\boldsymbol{b_j}$ lardan kichigi yoziladi va keyingi eng kichik qiymatli katakka o'tiladi va h. k. Bu usulda tuzilgan boshlang'ich yechimni buzilmaslik va tsikllanishga tekshirish shart.

Potensiallar usuli

Biror usul bilan topilgan boshlang'ich reja umuman olganda optimal reja bo'lavermaydi, biroq usulning samarasiga qarab, optimal rejaga yaqinroq bo'liShi mumkin. g'ar qanday yopiq modelli transport masalasi optimal rejaga ega ekanligini inobatga olib, optimal rejani topish usullaridan biri bo'lgan potensiallar usulini bayon qilamiz. Bu usulda, dastlabki reja topilgandan so'ng, har bir ta'minotchi va iste'molchiga, potensial deb ataluvchi $u_i, i=\overline{1,m}$ va $v_j, j=\overline{1,n}$ sonlarni mos qo'yamiz. Bu sonlarni aniqlash uchun, jadvaldagi barcha band (yuk taqsimlangan) kataklar uchun potensiallarni aniqlovchi tenglamalar tuzamiz. Deylik, (i,j)- katak band bo'lsin. U holda u_i va v_j larni shunday tanlaymizki, ularning yig'indisi mos tarifga teng bo'lsin:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Barcha u_i va v_j miqdorlar soni n+m ta, band kataklar soni esa n+m-1 ta bo'lgani sababli, n+m ta noma'lumni topish uchun n+m-1 ta tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamalardan noma'lumlarni bir qiymatli topib bo'lmasligi tufayli, noma'lumlardan birini ixtiyoriy tanlaymiz (masalan, $u_1=0$ deb tanlaymiz), qolgan o'zgaruvchilar bir qiymatli aniqlanadi.

Optimallik shartini tekshirish maqsadida barcha bo'sh (yuk taqsimlanmagan) kattaklar uchun qalbaki tarif kiritamiz:

$$c'_{ke} = u_k + v_e .$$

So'ngra har bir bo'sh katak uchun shu katakka mos tarif va qalbaki tariflar farqini hisoblaymiz:

$$s_{ke} = c_{ke} - c'_{ke} .$$

Qaralayotgan masala uchun o'rinli bo'lgan ushbu teoremani keltiraylik:

Teorema. Transport masalasida qaralayotgan reja optimal bo'lishi uchun, barcha band kataklar uchun

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

bo'lishi va barcha bo'sh kataklar uchun

$$s_{ke} = c_{ke} - c^{/}_{ke} \geq 0$$

bo'lishi zarur va etarlidir.

Bu teorema isboti ikkilanmalik nazariyasi natijalaridan kelib chiqadi.

Optimal rejani topish algoritmini davom ettiraylik. Agar optimallik sharti bajarilsa, qaralayotgan reja optimal bo'ladi. Deylik, optimallik sharti bajarilmasin, ya'ni s_{ke} sonlar ichida manfiylari bor bo'lsin. Bunday sonlarning borligi planni yanada «yaxshilash» imkoniyatini beradi. Shu maqsadda, manfiy s_{ke} lar ichidan eng kichigini tanlaymiz (agar yagona bo'lsa o'zini, eng kichigi bir nechta bo'lsa, ulardan ixtiyoriy bittasini tanlaymiz). Tanlangan katakni qutb deb ataymiz va unga $\oplus$ ishorasini qo'yib, uni band kataklar safiga qo'shamiz. Natijada, jadvaldagi band kataklar soni n+m taga yetadi va bir uchi qutbda qolgan uchlari band kataklardan iborat yagona sikl qurish mumkin bo'ladi. So'ngra, sikl bo'ylab, qutbdan boshlab, qutbning barcha uchlariga soat strelkasi yo'nalishi bo'ylab navbat bilan $\oplus$ va - ishorasini qo'yib chiqamiz. Barcha - ishoraga mos keluvchi yuklarni taqqoslab, eng kichik yukni o'lchov miqdori sifatida qabul qilib, - ishorali kataklardagi yuk miqdoridan o'lchov miqdorini ayirib, ustun bo'yicha, $\oplus$ iShorali kataklardagi yukka qo'shamiz. Natijada yangi reja hosil bo'ladi. Yangi reja uchun yana potensiallarni aniqlab, optimallik sharti bajarilmasa, yuqoridagi tadbirlarni optimal rejani topguncha davom ettiramiz va chekli qadamdan so'ng optimal reja topiladi.

Dinamik dasturlash masalalarida iqtisodiy jarayon vaqtga bog'liq bo'ladi ҳamda butun jarayonning optimal rivojini ta'minlovchi bir qator (ketma-ket ҳar bir vaqt davri uchun) optimal yechimlar topiladi. Dinamik dasturlash masalalari ko'p bosqichli yoki ko'p qadamli deb ataladi.

Dinamik dasturlash – vaqtga bog'liq va ko'p bosqichli boshqariluvchi iqtisodiy jarayonlarni optimal rejalashtirish usullarini o'rganuvchi matematik dasturlashning bir bo'limidir.

Agar iqtisodiy jarayonning kyechishiga ta'sir ko'rsatish mumkin bo'lsa, bunday jarayon boshqariluvchi deb ataladi. Jarayoning kyechishiga ta'sir etish uchun qabul qilinuvchi qarorlar (yechimlar) to'plamiga boshqarish deb ataladi. Iqtisodiy jarayonlarda boshqarish rejalashtirishning xar bir davrida vositalarni taqsimlash, mablag' ajratish, direktiv xujjatlar qabul qilish va shu kabilar bilan ifodalanishi mumkin. Masalan, ixtiyoriy korxonaning ishlab chiqarish-boshqariluvchi jarayondir, chunki u ishlab chiqarish vositalarining tarkibi, xom ashyo ta'minoti xajmi, moliyaviy mablag'lar miqdori va xokazo bilan aniqlanadi. Rejalashtirish davridagi xar bir yil boshida xom ashyo bilan ta'minlash, ishlab chiqarish jixozlarini almashtirish, ko'shimcha mablag'lar miqdori xaqida qarorlar to'plami boshqarishdan iboratdir. Bir qarashda, eng ko'p miqdorda maxsulot ishlab chiqarish uchun korxonaga mumkin bo'lgan vositalarning xammasini berish va ishlab chiqarish jixozlaridan (stanoklaridan, texnikadan va x.k. lardan) to'la foydalanish zarurdek tuyuladi. Lekin, bu jixozlarni tezda eskirishiga (ishdan chiqishga) va natijada maxsulot ishlab chiqarish xajmining kamayishiga olib kelishi mumkin. Demak, korxonaning faoliyatini, noma'qul effektlardan xoli bo'lgan ravishda eskirgan jixozlarni almashtirish yoki o'rnini to'ldirish choralari belgilanishi lozim bo'ladi. Bu esa dastlabki davrda maxsulot kamaytirsa, keyingi davrlarda korxonaning butun ishlab chiqarish faoliyatini kuchayishiga olib kelishi mumkin. SHunday qilib, yuqoridagi iqtisodiy jarayon, xar bir davrda uning rivojlanishiga ta'sir etuvchi, bir qancha davrlardan iborat deb qaralishi mumkin. Odatda davr sifatida xo'jalik yili olinadi.

Ko'p bosqichli iqtisodiy jarayonlarni rejalashtirishda, xar bir aloxida oraliq bosqichda qaror qabul qilishda, butun jarayonning tub maqsadi ko'zlanadi. Butun jarayonning yechimi o'zaro bog'langan yechimlar ketma-ketligidan iborat bo'ladi. O'zaro bog'langan bunday yechimlar ketma-ketligi strategiya deb ataladi. Oldindan tanlangan kriteriyga nisbatan eng yaxshi natijani ta'minlovchi strategiya optimal strategiya deb ataladi. Ko'p bosqichli rejalashtirishda xar bir oraliq rejalashtirishda yechimini tanlashda butun jarayonning tub maqsadini ko'zlab yechimni tanlash printsipi optimallik printsipi deb ataladi.

Optimallashtirish masalalarini dinamik dasturlash usullari bilan yechishdan xar bir oraliq bosqichda qabul qilingan yechim butun jarayonning kelajakdagi xolatiga qanday ta'sir ko'rsatishini xisobga olish zarurdir. Xar bir bosqichda oldingi bosqich biror xolatda bo’lganligi shartida xisoblangan optimal yechim shartli optimal deb ataladi.

Dinamik dasturlashga xos bo’lgan quyidagi misolni qo’ramiz. Misol. Aytaylik, $P_1, P_2, \ldots P_n$ sanoat korxonalarning **S** sistemadan iborat faoliyatini **k** ta $t_1, t_2, \ldots t_k$ xo’jalik yilidan iborat

$$T = \sum_{i=1}^{k} t_i$$

davrga mo’ljallab rejalashtirilayotgan bo’lsin. **T** davrining boshidan korxonalarga **F** miqdordagi fondlar ajratilgan. Xar bir xo’jalik yilining boshlanishida korxonalarning barcha **S** sistemalari mablag’ bilan ta’minlanadi, ya’ni **F** fonddan ulush ajratiladi. S_0 – korxonalarga ajratilgan mablag’lar bilan foydalanuvchi sistemaning dastlabki xolati va S_k – korxonalarga berilgan barcha qo’shimcha **F** mablag’lar bilan ifodalanuvchi oxirgi xolatlari ma’lum deylik. Davrning oxirida korxonalardan olinadigan ja’mi **W** foyda eng ko’p bo’lishi uchun mavjud **F** fondlarni yillar bo’yicha korxonalar o’rtasida qanday taqsimlash maqsadga muvofiq ekanligini topish talab qilinadi. Masalaning matematik modelini tuzish maqsadida quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

x_{ij} **– i** – yil **j** – korxonalarga ajratilgan mablag’ so’mmasi

$$\begin{cases} U_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}) \\ U_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}) \end{cases}$$

u_i **– i** – davr mobaynidagi boshqaruv (bu mablag’lar miqdori va x. k. orqali ifodalanish mumkin). U xolda $U_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ vektor **i** – bosqichdagi vositalar taqsimotining yig’indisi esa quyidagi vektorlar sistemasi orqali ifodalanadi.

k yil davomidagi ja’mi daromad esa $U_1, U_2, \ldots, U_k$ boshqaruvlarga bog’liq, ya’ni $W = W(U_1, U_2, \ldots, U_k)$

Masala quyidagicha qo’yiladi:

Xar bir bosqichda shunday boshqaruvni tanlash kerakki, korxonalardan olinadigan ja’mi daromad maksimal bo’lsin.

Dinamik dasturlash masalasining umumiy qo’yilishi**.**

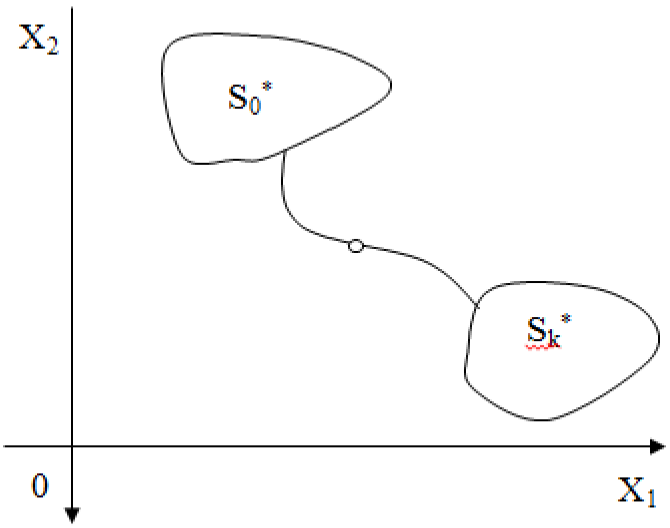
Umumiy xolda sistemaning boshlang’ich S_0 xolati va oxirgi S_k xolati aniq berilmaydi, xamda boshlang’ich xolatning butun bir S_0^* soxasi va oxirgi xolatlarning S_0^* soxasi ko’rsatiladi.

Umumiy xolda dinamik dasturlash masalasi quyidagicha ta’riflanadi:

Biror boshqariluvchi **S** sistema boshlang’ich $S_0 \in S_0^*$ xolatda bo’lsin. Vaqt o’tishi bilan sistemaning xolati o’zgaradi va u $S_k \in S_0^*$ oxirgi xolatga o’tadi, deb xisoblaylik. Sistema xolatlarining o'zgarishi biror miqdoriy **W**-mezon (kriteriy) bilan bog'liq deylik. Sistemaning o'zgarish jarayonini shunday tashkil etish kerakki, bunda **W**-mezon o'zining optimal qiymatiga erishsin.

Y-mumkin bo'lgan boshqaruvlar to'plami bo'lsin. U xolda, masala **S** sistemani $\mathbf{S_0 \in S_0^*}$ xolatdan $\mathbf{S_k \in S_0^*}$ xolatga o'tkazishga imkon beruvchi shunday $\mathbf{Y^*} \in \mathbf{Y}$ boshqaruvni topishdan iboratki, bunda **W(Y)** mezon o'zining $\mathbf{W^*=W(Y^*)}$ optimal qiymatiga erishsin.

Odatda sistemaning $\mathbf{S_0}$ xolatini sonli parametrlar bilan, masalan ajratilgan fondlar miqdori, jalb qilingan investitsiyalar miqdori, sarflangan yonilg'i miqdori va x.k. bilan ifodalash mumkin. Bu parametrlarni sistemaning koordinatalari deb ataymiz. U xolda sistemaning xolatini **S** nuqta bilan va uning bir $\mathbf{S_1}$ xolatdan $\mathbf{S_2}$ xolatga o'tishini esa **S** nuqtaning traektoriyasi bilan tasvirlash mumkin.



Nazorat savollari

1. Transport masalasi deb nimaga aytiladi?
2. Transport masalasini qaysi soxalarda qo'yiladi?
3. Transport masalasini yechish usullari.
4. Tranport masalalarning chiziqli dasturlash masalasi bilan bog'likligini tushuntirib bering
5. Dinamik dasturlash masalalari xaqida gapirib bering?
6. Dinamik dasturlashning chiziqli dasturlashdan farqi nimalarda?
7. Boshqariluvchi jarayonlar qanday jarayon?
8. Optimallik prinsipining mohiyati nimada?

18-ma'ruza. Formallashtirilgan masalalarni yechishda kompyuterdan foydalanish. Kompyuterli modellashtirish texnologiyasi. Eksperiment, uning maqsadi va vazifalari. Eksperiment turlari. Hisoblash eksperimenti. Eksperiment o'tkazish bosqichlari. Eksperimentni loyihalash, rejalashtirish va o'tkazishda yangi axborot texnologiyalaridan foydalanish. Eksperimentning matematik va dasturiy ta'minotlari. Eksperiment natijalariga ishlov berishda kompyuterdan foydalanish. Kompyuterli modellar tuzish va ulardan o'quv jarayonida foydalanish

REJA:

1. **Formallashtirilgan masalalarni yechishda kompyuterdan foydalanish. Kompyuterli modellashtirish texnologiyasi.**
2. **Eksperiment, uning maqsadi va vazifalari. Eksperiment turlari. Hisoblash eksperimenti. Eksperiment o'tkazish bosqichlari. Eksperimentni loyihalash, rejalashtirish va o'tkazishda yangi axborot texnologiyalaridan foydalanish.**
3. **Eksperimentning matematik va dasturiy ta'minotlari. Eksperimentn natijalariga ishlov berishda kompyuterdan foydalanish.**
4. **Kompyuterli modellar tuzish va ulardan o'quv jarayonida foydalanish**

Tayanch tushunchalar. *Formallashtirilgan masalalar, modellashtirish, kompyuterli modellashtirish, tajriba, eksperiment, dastur, dasturiy ta'minot.*

Adabiyotlar:

1. *Ю. Ю. Тарасевич. Математическое и компьютерное моделирование. Изд. 4-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.*
2. *Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Издательство «Наука» Москва 1966. С. 664.*
3. *Е. В. Бошкиново и др. Численное методы и их реализация в MS Excel. Самара 2009*
4. *Ю. В. Василков, Н. Н. Василкова. Компьютерные технологии вычилений в математическом моделировании. Изд. «Финансы и статистика» М.:2002*

Formallashtirish deganda ma'lum bir modelni ma'lum bir sohaga moslab ajratib tadqiq etish hamda hulosalar qilish tushuniladi. Ya'ni bitta obe'ktni turlicha yo'nalishda talqin etib uning modelini yaratish mumkin.

Eksperiment turlar:
- Fizik eksperiment;
- Kompyuterli eksperiment;
- Psixologik eksperiment;
- Tasavvur etish orqali qilinadigan eksperimenti;

Fizik eksperimentga mahsus yaratilgan sharoitda tabiy yo'l bilan o'tadigan tajribalar misol bo'la oladi.

Kompyuterli (sonli) tajriba- bu tadqiqot ob'ektining matematik modelini o'rganishda o'tkaziladigan EHMdagi sonli tajribalardir, ya'ni bunda modelning bitta parametric yordamida boshqa parametrlarini aniqlash va shu asosda hulosalar qilish

Masalani kompyuterda yechish texnologiyasi quyidagi bosqichlarda olib boriladi:

- Masalani qo'yish;
- Masalaning modelini tuzish;
- Formallashtirish;
- Algoritmni tuzish;
- Dasturlash tillari yordamida dasturini yozish;
- Hisoblash tajribasini o'tkazish.

Masalani qo'yish jarayonida uning aniqligiga va ravshanligiga e'tibor beriladi hamda nimalar berilgan va nimalarni topish kerak? degan sovolga javob berishi kerak.

Berilgan ob'ektni modellashtirishda, modellashtirish maqsadidan kelib chiqqan holda avval uni tahlil etishdan boshlanadi. Bu bosqichda obe'ktning modellashtirish husuyatlarini ifodalaovchi hamma ma'lum sube'ktlari belgilanadi. Belgilangan sub'ektlar ob'ekt modelini imkoni boricha to'liq ifodalashi lozim. Modelni tasvirlash shakllari turlicha bo'lishi mumkin, Bularga

- Modelni so'zlar orqali ifodalash;
- Modelni turli chizmalar orqali ifodalash;
- Modelni jadvallar ko'rinishida ifodalash;
- Modelni formulalar orqali ifodalash;
- Modelni sxematik ko'rinishda ifodalash;
- Hisoblash algoritmni tuzish;
- Kompyuterda dasturini tuzish
- Kompyuterda hisoblash tajribasini o'tkazish va h.k.

Modelning tasvirlangan shakli tanlangandan keyin uni formallashtirishga o'tkaziladi.

Formallashtirish bosqichining natijasi axborotli model hisoblanadi. Qurilgan modelni qarama-qarshiligi tekshiriladi va tahlil etiladi hamda uning qanchalik maqsadga muvofiqligi va adekvatligi tekshiriladi.

Ma'lumki kompyuter ma'lum bir algoritmik tilde yozilgan formallashtirilgan buyruqlar ketma-ketligida ishlaydi. Shuning uchun ham keying bosqichda kompyuterda masalani yechish uchun avval uning algoritmi tuziladi.

Algoritm- qo'yilgan masalani aniq yechishga yo'naltirilagan amallar ketma-ketligini to'gri ifodalashdir.

Algoritmni quyidagi keng tarqalgan usullarda ifodalash mumkin:

- ✓ Algoritmni so'zlar orqali ifodalash, ya'ni qo'yilgan masalani yechish uchun so'zlar orqali ifodalangan amallar ketma-ketligi;
- ✓ Algoritmni grafik usulda tasvirlash, ya'ni bajariladigan amallar ketma-ketligini blok-sxema yoki chizmalar orqali ifodalash;
- ✓ Algoritmni algoritmik tillar yordamida ifodalash, ya'ni natijalarni olish va tahlil etish uchun dasturlash tillari orqali dasturini yozish.

Dasturiy vositasi tuzilgandan keyin hisoblash tajribasi o'tkaziladi. Olingan natijalar modelning adekvatligiga tekshiriladi va shu tarzda model takomillastirib boriladi.

Yuqorida keltirib o'tilgan barcha amallar kompyuterli modellashtirish ga misol bo'la oladi.

Kompyuterli modellashtirish bizga quyidagi imkoniyatlarni taqdim etadi:

- ✓ Ob'ektning tadqiq etish ko'lamini kengatiradi- real sharoitda tadqiq etib bo'lmaydigan takrorlanuvchi, takrorlanmaydigan, yuz bergan va yuz berishi mumkin bo'lgan hodisalarni o'rganish imkoniyatini beradi;
- ✓ Ob'ektning har qanday hususiyatlarini vizuallashtirish imkoniyati;
- ✓ Dinamik jarayonlarini va hodisalarini tadqiq etish;
- ✓ Vaqtni boshqarish (tezlashtirish? Sekinlashtirish va h.k.)
- ✓ Model ustida dastlabki vaziyatiga qaytgan holda ko'p martalik tajribalar o'tkazish;
- ✓ Grafik va sonli ko'rinishdagi tavsiflarini olish;
- ✓ Sinov konstruksion nusxasini yasamay turib, optimal konstruksiyasini toppish;
- ✓ Atrof muhitga va sog'likga zarar yetkazmay turib tajribalar o'tkazish.

Kompyuterli modellashtirishning asosiy bosqichlari quyidagicha:

1. Masalaning qo'yilishi va uning tahlili;
   1.1. Model maqsadini aniqlash;
   1.2. Natijalar qanday ko'rinishda olishni aniqlashtirish;
   1.3. Modelni qurishda qanday natijalar kerakligini aniqlash;

2. Information modelini qurish;
    2.1. Modelning parametrlari va ularning o'zaro bog'liqligini aniqlash;
    2.2. Qo'yilgan masalaga qaysi parametrlar kuchli bog'langanligini baholash;
    2.3. Parametrlar o'zaro bog'liqligini matematik ifodalash;

3. Kompyuter modeliga tadbiq etish algoritmi va uslubini ishlab chiqish;
    3.1. Natijalarni olish usullarini ishlab chiqish va tanlash;
    3.2. Tanlangan usul asosida natijalarni olish uchun algoritmnni yaratish;
    3.3. Algoritmni to'griligini tekshirish;

4. Kompyuterli modelini yaratish;
    4.1. Kompyuterda tadbiq etish uchun dasturiy vositasini yaratish;
    4.2. Kompyuter modelini yaratish;
    4.3. Kompyuter modelning to'g'riligini tekshirish;

5. Tajribalar o'tkazish;
    5.1. Tadqiq etish rejasini tuzish;
    5.2. Yaratilgan kompyuter modeli asosida tajribalar o'tkazish;
    5.3. Olingan natijalarni tahlil etish;
    5.4. Hulosalar chiqarish.