O‘ZBEKSTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MASUS TA’LIM VAZIRLIGI

XURRAMOV ANVAR
KOMOLOV ESHMUROD

MATEMATIK VA KOMPYUTERLI MODELLASHTIRISH

O‘zbekston respublikasi oliy va o‘rta masus ta’lim vazirligi ta’lim muassasalarining talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etgan

Toshkent - 2 0 2 3

УДК 004.94
ББК 30

Taqrizchilar:

Yakubov M.S. – Toshkent axborot texnologiyalari universiteti, “Axborot texnologiyalari” kafedrasi professori, texnika fanlari doktori.

Rajabov B. – TVChDPI “Algebra va matematik analiz” kafedrasi professori, texnika fanlari doktori.

Xurramov A., Kamolov E.
Matematik va komputerli modellashtirish. Oliy ta’lim muassasalarining talabalari uchun darslik. Oʻzbekston respublikasi oliy va oʻrta masus ta’lim vazirligi. 2022 – 273 bet.

ББК 30

Ushbu darslik amaliy masalalarni echishda keng foydalanib kelinayotgan matematik va komputerli modellashtirish usullariga bagʻishlangan. Darslikda matematik va komputerli modellashtirishning asosiy tushunchalari, modellashtirish jarayonining asosiy bosqichlari keltirilgan boʻlib, ayrim amaliy masalalarning modellarini qurish koʻrsatib berilgan. Shuningdek matematik modellarni echishda koʻp foydalaniladigan sonli echish usullari hamda ularning ayrimlari uchun dasturiy ta’minotlar berilgan.

Mazkur darslik oliy oʻquv yurtlarining 60110600 – matematika va informatika bakalavr yoʻnalishi hamda 70110601, 70110602 va 70110701 magistratura mutaxassisliklari boʻyicha ta’lim olayotgan magistrantlarga moʻljallangan.

KIRISH

Har qanday tadqiqotchi o‘z sohasiga tegishli muammolarni hal qilish yo‘lida izlanishlar olib boradi va bu muammoni hal qilishda turli xil usullardan foydalanadi.

Jarayonlarni tahlil qilish sohasi XVIII-XIX asrlarda paydo bo‘lib u ishni tashkil qilish va ishlab chiqarishda qo‘llanila boshlandi. Sanoat korxonalaridagi ko‘pgina aniq masalalarni echimini topishda A.Smit, Charlz Bebbirt, F.Teylor, G.Gentlar ijobiy natijalarga erishgan bo‘lsa, 1840 yil Buyuk Britaniyada pochta orqali ma’lumotlarni uzatish va qabul qilish masalasining modeli (Bebbirt usuli)dan foydalana boshladi.

Keyinchalik o‘yinlar nazariyasi uchun D.Neyman, chiziqli dasturlash masalalari uchun D.Dansik va L.V.Kantorovichlar modellashtirish usullarini qo‘llab ijobiy yutuqlarga erishdi.

Quyilgan masalalarni chuqur va har tomonlama o‘rganish maqsadida uning modellari yaratiladi. Modellashtirish usullarini ishlab chiqish bevosita kibernetika fanining paydo bo‘lishi bilan bog‘liq bo‘lib, tezkor kompyuterlar bu usulni turli sohalarga tadbiq qilish imkoniyatlariga keng yo‘l ochib berdi.

Matematik modelning aniqligi u orqali olgan natijalarni haqiqiy ob’ektga qanchalik mos kelishi bilan baholanadi. Matematik modelda ob’ektning barcha xossa va xususiyatlarini e’tiborga olish murakkab bo‘lganligi uchun, unda ob’ektning eng xarakterli va muhim xususiyatlari aks ettiriladi. Binobarin, modelning adekvatligi to‘plangan ma’lumotlar hajmiga, ularning aniqlik darajasiga, tadqiqotchining malakasiga va modellashtirish jarayonida aniqlanadigan o‘zgaruvchilar ko‘lamiga bog‘liq bo‘ladi.

Bugungi kunda barcha sohalarda erishilayotgan yuksak yutuq va muvaffaqiyatlar sababi bevosita shu sohada zamonaviy komputer texnologiyalaridan keng va samarali foydalanganlik natijasidir. Keyingi paytlarda ko‘pgina soha masalalarini echishda axborot texnologiyalari hamda matematik va kompterli modellashtirish usullaridan keng foydalanib kelinmoqda. Bu esa masalalarini yanada tez va sifatli echish, natijalarni turli xil ko‘rinishda tasvirlab berish imkoniyatlarini yaratib berdi.

Darslikdan, aniq fan yo‘nalishlarida ta’lim olayotgan talabalar, shuningdek axborot texnologiyalari va jarayonlarni modellashtirish sohasi bilan shug‘ullanuvchi magistrlar hamda «Sonli usullar», «Matematik modellashtirish» va «Oliy matematika» fanlaridan bilim berayotgan o‘qituvchilar foydalanishi mumkin.

I-BOB. MATEMATIK VA KOMPUTERLI MODELLASHTIRISh ASOSLARI

1.1. Asosiy tushunchalar. Modellashtirishning asosiy bosqichlari

Amaliy masalalarning matematik va komputerli modellari odatda har xil matematik munosabatlar va dasturiy ta’minotlardan tashkil topgan bo‘lib, ular qaralayotgan masalaning eng muxim bo‘lgan xossa va xususiyatlarini o‘z ichida qamrab oladi.

Modellashtirish usullarini ishlab chiqish bevosita kibernetika fanining rivojlanishi bilan bog‘liq bo‘lib, ko‘pgina hollarda tezkor komputer imkoniyatlaridan foydalaniladi. Bu esa masalalarni tez va sifatli echish, natijalarni turli xil ko‘rinishlarda ifodalash bilan birga sarf xarajatlarni kamaytirish imkonini beradi.

Matematik va komputerli modellashtirish usuli turli amaliy masalalarni echishda keng qo‘llanib kelinmoqda. Matematik modellashtirish va komputerli modellashtirish usuli masalani tasvirlaydigan u yoki bu kattaliklarni miqdor jihatdan ifodalash, so‘ngra esa ularning bog‘liqligini o‘rganish imkoniyatini beradi. Bu usullarda bir qator (ob’ekt, jarayon, model, modellashtirish) asosiy tushunchalardan foydalaniladi.

Ob’ekt deganda turli xil xossa va xususiyatlarga ega bo‘lgan hamda biror soha jarayonini ifoda etuvchi, tabiatning biror elementi tushuniladi. Masalan paxta terish mashinasining biror qurilmasi, elektr toki o‘tqazuvchisi, qurilish materiallari, er, suv yoki suv oqayotgan truba, odam va uning organizmlari va h.k. lar ob’ektga misol bo‘la oladi.

Jarayon deganda maxsus tashkil etilgan yoki etiladigan, tizimli harakat faoliyatlar tushuniladi. Jarayonga misol sifatida klimatning o‘zgarishi; iqtisodni pasayishi; inflyatsiya; kanaldan suv oqishi; avtomobil harakati; mayatnikning tebranishi va boshqalarni keltirish mumkin.

Har bir mutaxassisning asosiy vazifasi o‘z sohasi ob’ektlarining xossa va xususiyatlarini o‘rganish va shu asosda yangi natijalarga erishishdan iborat. Ob’ektni o‘rganish va u haqida xulosalar qilish o‘ta murakkab jarayon hisoblanib, u bir necha xil usullar yordamida amalga oshiriladi va bu jarayon tadqiqotchidan etarlicha chuqur bilim hamda ko‘nikmalarga ega bo‘lishlikni talab etadi. Umuman olganda xar qanday jarayonni modellashtirish asosan ikki xil, ya’ni *analitik* va *tajriba(eksperiment)* usullari yordamida olib boriladi. Analitik usullardan biri matematik modellashtirish usuli hisoblanadi.

«Model» so‘zi lotincha «modulus» so‘zidan olingan bo‘lib, «namuna» so‘ziga mos keladi va bu tushuncha inson faoliyatining har xil soxalarida turlicha ma’nolarda foydalaniladi.

«Model» so‘zidan qadim zamonlardan foydalanib kelinsada, XX asrda kompyuterlarning paydo bo‘lishi bilan bu atamadan yanada ko‘p foydalanila boshlandi. Model yordamida odamlar orasidagi muloqat tillari, ularning yozishishlari, grafikalar rivojlandi.

Qadimgi odamlarning tosh tasvirlari, xaykalchalar, xaritalar, rasmlar, kitoblarning barchasi atrof-muxit haqidagi bilimlarni keyingi avlodlarga taqdim etish va etkazishning model shakllaridir.

Biror ob’ektning modelidan shu ob’ekt haqida etarlicha aniq va sifatli ma’lumotlar olishni tezlashtirish va mablag‘larni tejashda foydalaniladi. Shunday qilib, haqiqiy ob’ekt xususiyatlari, xatti-harakatlari yoki faoliyati haqida ma’lumotlar olish uchun uning modeli zarur bo‘ladi.

Ko‘pgina holatlarda, muayyan ob’ekt yoki jarayon uning o‘rnini bosadigan boshqa ob’ekt bilan taqqoslanadi:

- Haqiqiy ko‘prik – karton qog‘ozdan yasalgan maketi bilan;
- Qon aylanish tizimi – plakatdagi sxema bilan;
- Yer shari – globus bilan;
- Jism harakati jarayoni – tenglama bilan.

Masalan boshlang‘ich v_0 tezlik va *a* tezlanish bilan harakatlanayotgan jismning t vaqtda bosib o‘tgan yo‘lini aniqlashda:

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

formuladan foydalaniladi. Bu tenglama o‘zgarmas tezlanishli jism harakatining modeli bo‘ladi.

Masalaning quyilishiga bog‘liq ravishda har bir ob’ekt uchun bir necha modellar tuzish mumkin. Masalan ob’ekt sifatida tashqi kuch ta’siridagi to‘sin(balka) ni olsak, u holda 1) to‘sin egilishi; 2) to‘sin tebranishi; 3) to‘sin turg‘unligini aniqlash kabi masalalarning modellarini tuzishimiz mumkin.

Matematik model deb, o‘rganilayotgan ob’ekt yoki jarayonning matematik formula yoki algoritm ko‘rinishida ifodalangan xarakteristikalari orasidagi funksional bog‘lanishga aytiladi. Umuman olganda o‘rganilayotgan ob’ekt yoki jarayonning xossa va xususiyatlarini matematik munosabatlar orqali ifodalashga shu jarayonning ***matematik modeli*** deb ataladi. Matematik model qurish va uni echish jarayoni esa ***matematik modellashtirish*** deyiladi.

Ob’ekt tabiatiga, yechilayotgan masala va qo‘llaniladigan echish usullariga bog‘liq ravishda matematik modellarni quyidagi sodda sinflarga ajratish mumkin:

- chiziqli yoki chiziqsiz;
- statsionar va nostatsionar;
- uzluksiz yoki diskret;
- determinirlangan yoki stoxastik;
- aniq yoki noaniq.

Kompyuterli model deb haqiqiy ob’ekt yoki jarayonni komputer yordamida olingan modeliga aytiladi.

Komputerli model – modellashtirilayotgan tizim haqida komputer vositasi yordamida rasm, grafik, diagramma, elektron jadval, ma’lumotlar bazasi, bilimlar bazasi, animatsion tasvirlar, videoroliklar va boshqa ko‘rinishlarda ifodalangan ma’lumotlardir.

Faqat komputer xotirasida mavjud va fizik qonunlarga bo‘ysinmaydigan virtual ob’ekt (xotiradan tashqarida virtual ob’ektlar mavjud emas) komputerli model hisoblanadi.

Hozirgi paytda komputerli modellashtirishning ikki (*funksional tuzilishli* va *imitatsion*) turidan foydalanib kelinmoqda.

Komputer vositalari yordamida ifodalangan komputerli model (ob’ekt harakati traektoriyasi, atomning uch o‘lchovli modeli, fotorobot) ***funksional tuzilishli model*** deb ataladi.

Ob’ektning har xil sharoitdagi holati (mayatnikning tebranish formasi, suvdagi tuzning kotsentratsiyasi, tik otilgan jism harakati) ni ifodalovchi dastur yoki dasturlar kompleksiga ***imitatsion model*** deb ataladi.

Komputerli modellarni Excel, Word, Access, MathCad, 3D MAX kabi amaliy dasturlar va ixtiyoriy dasturlash tizimlari yordamida shakllantirish mumkin.

Asosi matematik modeldan tashkil topgan komputerli model, ***komputerli matematik model*** deb ataladi.

Har qanday jarayonni matematik modellashtirish o‘ta murakkab jarayon bo‘lib u bir necha bosqich asosida amalga oshiriladi. Bu bosqichlar bilan tanishib chiqamiz.

Birinchi bosqichda – jarayon sifat jihatdan tahlil qilinib, masala maqsadi o‘rganiladi, unga mos ma’lumotlar to‘planadi. Jarayonning barcha (geometrik, mexanik, biologik, ekologik va boshqalar) xossalari batafsil o‘rganiladi, uning asosiy ko‘rsatkichlari aniqlanadi. Bu o‘rganishlar shu sohaning etuk mutaxassislari tomonidan amalga oshiriladi. Bu bosqich ob’ekt yoki jarayonni o‘rganish bosqichi deb ataladi.

Ikkinchi bosqich – jarayonning asosiy ko‘rsatkichlarini ifodalovchi o‘zgaruvchilar orasida mavjud bo‘lgan asosiy bog‘lanishlar aniqlanadi va ular matematik munosobatlar (tenglama, tengsizlik, integral va boshqalar yoki ularning sistemalari) orqali ifodalanadi. Bu bosqich matematik model qurish bosqichi deb ataladi.

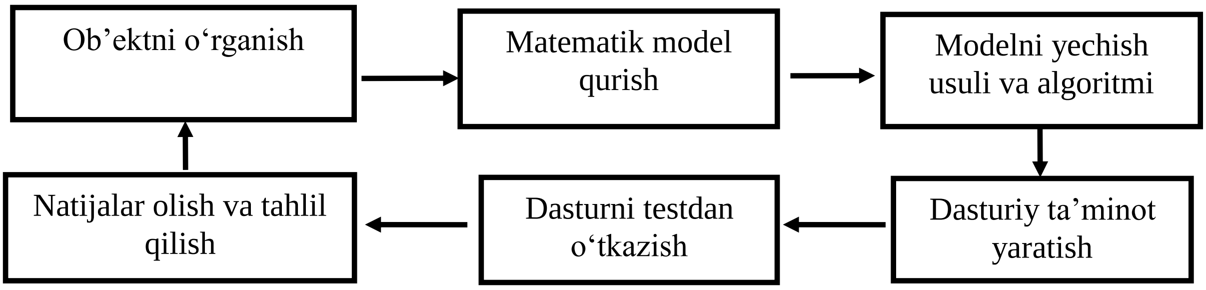
Uchinchi bosqichda – matematik modelni echish usuli mavjud bo‘lsa ular orasidan tanlanadi, aks holda modelni echish usuli ishlab chiqiladi. Yechish usuli tanlanayotganda yoki ishlab chiqilayotganda, uning aniqligiga, tejamkorligiga, soddaligiga, ommaviyligiga e’tibor beriladi. Bu bosqich matematik modelni echish bosqichi deb ataladi.

To‘rtinchi bosqichda – tanlangan yoki ishlab chiqilgan echish usuli asosida algoritm shakllantiriladi va u biror algoritm til orqali ifodalanadi, ya’ni dasturiy ta’minot yaratiladi. Bu bosqich dasturiy ta’minot yaratish bosqichi deb ataladi.

Beshinchi bosqichda – yaratilgan dastur testdan o‘kaziladi. Dasturdagi xatolar bartaraf etiladi. Bu erda ikki xil, ya’ni sintaksis (algoritmik tildagi) va algoritmik xatolar bo‘lishi mumkin. Sintaksis xatoni komputer orqali tez aniqlash va uni bartaraf etish mumkin. Algoritmik xatolarni aniqlashda esa biroz qiyinchiliklar bo‘lishi mumkin. Buning uchun masalani echish algoritmi bilan dasturga kiritilgan operatorlarning mosligi tekshirib chiqiladi. Xatolar bartaraf etilgandan so‘ng echimi aniq bo‘lgan biror masala dastur yordamida echiladi va echimlar mosligi tekshiriladi. Bu bosqich dasturni tekshirish bosqichi deb ataladi.

Oltinchi bosqichda – echilayotgan masalaning birlamchi birlamchi xossa va xususiyatlarini ifodalab beruvchi sonli boshlang‘ich qiymatlardan foydalanib har xil parametrlar (modeldagi o‘zgaruvchilar) uchun natijalar olinadi. Olingan natijalar atroflicha tahlil qilinib, turli xil xulosalar qilinadi va kerakli tavsiyalar beriladi. Ba’zi hollarda matematik modelni aniqlashtirishga ham to‘g‘ri keladi.

Modellashtirish bosqichlarini sxematik ravishda quyidagi ko‘rinishda ifodalashimiz mumkin.



1.2. Model adekvatligi

Model adekvatligi - modellashtirish jarayoni yordamida olingan natijalarning haqiqiy natijalarga mosligidir.

Analitik usulda tuzilgan matematik modelning adekvatligi, modellashtirilayotgan jarayon xossalarini matematik munosabatlar yordamida qay darajada ifodalanganligi bilan aniqlanadi. Shu bilan birga bu usulda modelning adekvatligi uning echish usullari aniqligiga ham bog‘liq bo‘ladi.

Jarayonning eksperiment modeli adekvatligi o‘tkazilgan tajribalar soni va uning sifatiga hamda ularni o‘tkazishda foydalanilgan o‘lchash asboblarining aniqlik darajasiga bog‘liq bo‘ladi. Tajribalar soni etarlicha ko‘p bo‘lib, o‘lchash asboblarining aniqligi qancha yuqori bo‘lsa, olingan natijalar haqiqiy natijalarga shuncha yaqin bo‘ladi.

Ma’lumki, matematik modellashtirish bir necha bosqichlardan iborat bo‘ladi: qaralayotgan masalaning barcha xossa va xususiyatlarini o‘rganish; masalaning matematik modelini qurish; masalaning echish algoritmini tanlash yoki ishlab chiqish; shu algoritm asosida dastur tuzish va natijalar olish hamda ularni tahlil qilish. Har qanday jarayonni matematik modellashtirishda shu bosqichlarning barchasini ketma-ket amalga oshirishga to‘g‘ri keladi. Lekin bu bosqichlarda bajariladigan amallarni har doim ham aniq bajarish imkoni bo‘lavermaydi. Masalan jarayonning matematik modelini qurishda ayrim faraz(gipoteza)larga asoslanadi.

Ko‘pgina hollarda modellarni echishda taqribiy echish usullaridan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Shu sababli har qanday jarayonni o‘rganish maqsadida tuzilgan matematik model va uni echishdan olingan natijalar shu jarayonning barcha xossa va xususiyatlarini to‘laligicha ifodalay olmaydi.

Jarayonning adekvat matematik modelini tuzish uchun, birinchidan jarayonning barcha xossa va xususiyatlarini to‘liq o‘rganish kerak bo‘lsa, ikkinchidan bu xususiyatlarning barchasi qurilgan modelda matematik munosabatlar yordamida o‘z aksini topgan bo‘lishi zarur bo‘ladi. Shu bilan birga matematik modelni echishda foydalaniladigan echish usuli etarli aniqlikga ega bo‘lishi talab etiladi.

Matematik modelning adekvat ekanligini tekshirish qanday amalga oshiriladi? Tuzilgan matematik modelni adekvat model ekanligini tekshirish usullaridan biri, olingan natijalarni, o‘tkazilgan tajriba natijalariga yoki oldindan ma’lum bo‘lgan natijalar bilan taqqoslashdir. Agar olingan natijalar, etarlicha aniqlikda o‘tkazilgan tajriba natijalariga yoki oldindan ma’lum bo‘lgan natijalarga yaqin bo‘lsa, tuzilgan matematik model shuncha adekvat hisoblanadi.

1.3. Modellarni yechish usullari

Yuqorida ta’kidlanganidek, jarayonni modellashtirish har xil tenglama, tengsizlik yoki ularning sistemalarini echishga keltiriladi. Ularni echish usullarini umuman olganda uch turga ajratish mumkin: *analitik*, *sonli* va *sonli-analitik usullar*.

Analitik usul - masala echimini aniq matematik formulalar yoki mantiqiy ifodalar bilan (analitik ko‘rinishda) tasvirlashdir. Bu usul aniq echish usuli hisoblanib, unda masala echimi berilgan boshlang‘ich qiymatlarni o‘z ichiga olgan formulalar ko‘rinishida ifodalanadi. Odatda analitik usuldan oddiy matematik modelli masalalarni echishda foydalaniladi. Chunki murakkab modelli masalalarning echimini har doim ham analitik ko‘rinishda ifodalash imkoni bo‘lavermaydi.

Sonli usul – taqribiy echish usuli hisoblanib, oliy matematika fanining hisoblash matematikasi bo‘limida o‘rganiladi. Bu usulga ko‘ra matematik modelda berilgan ba’zi bir ifodalar, taqribiy ravishda o‘ziga yaqin (ekvivalent) hamda sodda ko‘rinishga ega bo‘lgan boshqa ifodalarga almashtiriladi. Masalan funksiya hosilasi, chekli ayirmaga; aniq integral qiymati esa chekli yig‘indiga almashtiriladi. Sodda ko‘rinishga keltirilgan model ShK yordamida echiladi va masala echimi grafik yoki jadvallar shaklida ifodalanadi.

Sonli usullardan biri ***iteratsiya usuli***dir. Taqribiy echish usuli *iteratsiya usuli* deb ataladi, agar noma’lumlar ustida bir qator takrorlanuvchi amallar bajarilib, har bir amallardan keyin noma’lumlar qiymatlari aniqlashtirilsa, shu bilan birga keyingi amallarni bajarishda noma’lumlarning oldingi aniqlashtirilgan qiymatidan foydalanilsa.

Sonli-analitik usul – bu yuqorida aytilgan ikki usulning kombinatsiyasidan tashkil topgan usuldir. Bu usulda masala echimi asosan xosmas integral, cheksiz qator, maxsus funksiyalar yoki ularning kombinatsiyalari ko‘rinishida ifodalanadi, lekin natijalar olinayotganda ayrim taqribiy hisoblashlardan foydalaniladi.

1.4. Modellashtirishda xatoliklar va ularni baholash

Ma’lumki, matematik modelda jarayonning asosiy xossa va xususiyatlar o‘z aksini topadi. Modelni echishda foydalaniladigan birlamchi boshlang‘ich ma’lumotlar qiymatlari har doim aniq bo‘lavermaydi. Modellarni echishda taqribiy echish usullaridan foydalaniladi. Bularning barchasi modellashtirish jarayonida xatoliklar kelib chiqishiga sabab bo‘ladi. Savol tug‘iladi: bu xatoliklar qanday turlanadi va baholanadi? Bu savollarga javob berish har bir mutaxassis uchun juda muhim ahamiyatga ega.

Modellashtirishda xatoliklar va ularning turlari. Ma'lumki, modellashtirish jarayonining ko'pgina bosqichlarida taqribiy almashtirish yoki taqribiy hisoblashlardan foydalaniladi. Bu esa masalaning echimi qandaydir xatoliklar bilan, ya'ni masalaning taqribiy echimi hosil bo'lishiga olib keladi. Modellashtirishda hosil bo'lgan xatoliklarni qanday baholash mumkin, degan savol barcha mutaxassislarni qiziqtirib keladi. Bu savolga javob berish maqsadida *absolyut* va *nisbiy xato* tushunchalari kiritiladi.

Agar biror miqdorning aniq qiymatini x va uning taqribiy hisoblash natijasida olingan qiymatini $\bar{x}$ deb olsak, u holda *absolyut xato* deb

$$\Delta x = \left| x - \bar{x} \right|$$

ga, *nisbiy xato* deb esa,

$$\delta x = \frac{\left| x - \bar{x} \right|}{|x|} \cdot 100\% = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100\%$$

ga aytiladi.

Modellashtirishda hosil bo'ladigan xatoliklarning kelib chiqish manbalarini, asosan to'rt guruhga ajratish mumkin.

Birinchi guruh xatolar echilayotgan masalaning matematik modelini qurish bilan bog'liq xatolardir. Ma'lumki, modelda masalaning asosiy xossa va xususiyatlari e'tiborga olinadi, agar modelda masalaning barcha xususiyatlarini hisobga olish imkoni bo'lsa, u holda bu model o'ta murakkab ko'rinish oladi, natijada esa uni echish imkoni bo'lmay qoladi. Matematik model qurishda foydalanilgan gipotezalar hisobiga ba'zi xatoliklar paydo bo'ladi. Bu xatoliklar *matematik model xatosi* deb ataladi.

Ikkinchi guruh xatolar masalaning echish uchun beriladigan boshlang'ich qiymatlaridagi xatoliklardir. O'lchash va hisoblash natijasida yoki tajriba (eksperiment) usuli yordamida olingan birlamchi boshlang‘ich qiymatlar har doim ham aniq bo‘lavermaydi. Chunki bu qiymatlar o‘lchash asboblarining aniqligiga, hisoblash usullariga, tajriba o‘tkazish sharoitlariga bog‘liq bo‘ladi. Bu guruh xatoliklar odatda *qutilib bo‘lmaydigan xatolar* deb ataladi.

Uchinchi guruh xatolar masalani echish usulidagi mavjud xatolardir. Ma’lumki, aksariyat hollarda modellarni echishda analitik, ya’ni aniq usullardan foydalanish imkoniyati bo‘lavermaydi, natijada taqribiy sonli echish usullaridan foydalaniladi va masalanig taqribiy echimi hosil bo‘ladi. Bu erda yo‘l qo‘yilgan xatolar e*chish usulining xatosi* deb ataladi.

To‘rtinchi guruh xatolar bevosita Shklarda hisoblashni tashkil etish bilan bog‘liq bo‘lgan xatoliklardir. ShKlardagi hisoblashlarda sonlarni yaxlitlash uning razryadiga bog‘liq ravishda amalga oshiriladi. Bu xatolar odatda *hisoblash xatoliklari* deb ataladi.

Ayrim hollarda ba’zi xatoliklardan qutulish uchun quyidagi takliflarni e’tiborga olish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

- qiymati hisoblanadigan ifodalarni imkoni boricha soddalashtirish va unda bajariladigan amallar sonini eng kam miqdorga keltirish;

- agar bir qator sonlar ustida qo‘shish-ayirish amallarini bajarish lozim bo‘lsa, dastlab kichik sonlar ustida amallarni bajarish;

- oraliq hisoblashlarda qiymatlari deyarli teng bo‘lgan miqdorlar ustida ayirish amalini bajarmaslik.

1.5. Ba’zi bir masalalarning matematik modeli.

Masalaning matematik modelini qurish o‘ta murakkab jarayon hisoblanadi. Chunki buning uchun tadqiqotchi masalani shu soha mutaxassisi sifatida har taraflama chuqur o‘rgangan bo‘lishligi talab etiladi. Jarayonda qatnashadigan parametrlar orasidagi geometrik, mexanik, biologik, ekologik va boshqa bog‘lanishlarni to‘g‘ri ifodalay olishi kerak.

Quyida ba’zi bir amaliy masalalarning matematik modelini qurishga misollar keltirib o‘tamiz.

1-masala. Konsentratsiyasi 0,1 va 0,7 bo‘lgan ikki xil sho‘rlangan suv aralashtirib yuborildi va konsentratsiyasi 0,25 bo‘lgan xajmi 400 grammga teng aralashma hosil qilindi. Har bir sho‘rlangan suvdan qanchadan olinganligini aniqlash masalasining matematik modelini tuzing.

Ye***chish.***

1) x va y deb mos ravishda birinchi va ikkinchi sho‘r suv massalarini belgilaylik:

$$x + y = 400.$$

2) Birinchi sho‘rlangan suvdagi tuz miqdori: $0{,}1 \cdot x$;

3) Ikkinchi sho‘rlangan suvdagi tuz miqdori: $0{,}7 \cdot y$;

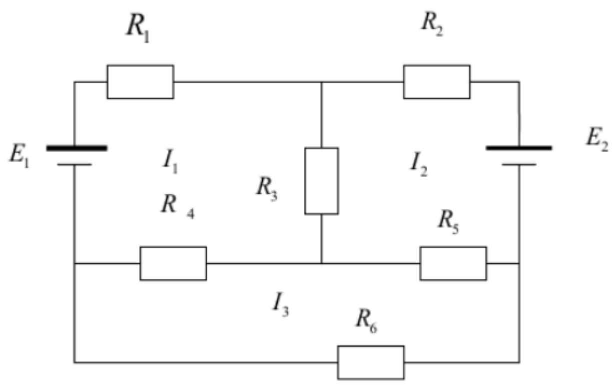
4) Aralashmadagi tuz miqdori: $0{,}1 \cdot x + 0{,}7 \cdot y = 0{,}25 \cdot 400 = 100$.

U holda quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 0{,}1 \cdot x + 0{,}7 \cdot y = 100 \end{cases}.$$

Oxirgi sistema qarayotgan masalaning matematik modeli bo‘ladi.

2-masala. Quyidagi chizmada keltirilgan elektr tarmog‘idagi tok kuchlarini aniqlash masalasining matematik modelini tuzing.



Yechish. Ma’lumki, Kirxgofning ikkinchi qonuniga asosan, har qanday yopiq sikldagi barcha kuchlanishlarning algebraik yig‘indisi 0 ga teng.

$$\begin{cases} (R_1 + R_3 + R_4)I_1 + R_3I_2 + R_4I_3 = E_1, \\ R_3I_1 + (R_2 + R_3 + R_5)I_2 - R_5I_3 = E_2, \\ R_4I_1 - R_5I_2 + (R_4 + R_5 + R_6)I_3 = 0. \end{cases}$$

Ushbu chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi qaralayotgan masalaning matematik modeli bo‘ladi.

Agar ushbu matematik modelda qatnashgan t_1,t_2,t_3 parametrlarga $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, $R_3 = 2$, $R_4 = 1$, $R_5 = 2$, $R_6 = 4$, $E_1 = 23$, $E_2 = 29$ aniq qiymatlar bersak u quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} 4I_1 + 2I_2 + I_3 = 23, \\ 2I_1 + 5I_2 - 2I_3 = 29, \\ I_1 - 2I_2 + 7I_3 = 0. \end{cases}$$

3-masala. Uch xildagi qishloq xo‘jaligi mahsulotlarini etishtirish uchun to‘rt xil y_1, y_2, y_3, y_4 xom ashyo talab qilinadi. Xom ashyo zaxiralari, birlik mahsulotni ishlab chiqish uchun zarur bo‘lgan xom ashyo miqdori, birlik mahsulotdan olinadigan foyda quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xom ashyo turlari	Xom ashyo zaxirasi	Birlik mahsulot ishlab chiqazish uchun zarur bo‘lgan xom ashyo miqdori		
		t_1	t_2	t_3
y_1	30	2	4	3
y_2	40	3	3	5
y_3	50	5	5	2
y_4	20	4	2	3
Birlik mahsulot-dan olinadigan foyda		30	20	40

Mahsulot ishlab chiqarish uchun shunday reja tuzish kerakki, xom ashyo sarfi uning zaxirasidan oshib ketmasligi va ishlab chiqilgan mahsulotdan maksimal foyda olinishi kerak.

Yechish: x_1, x_2, x_3 bilan mos ravishda ishlab chiqiladigan birinchi, ikkinchi va uchinchi mahsulot miqdorlarini belgilaylik. y_1 satridagi 2, 4, 3 sonlari mos ravishda t_1, t_2, t_3 birlik qishloq xo'jaligi mahsulotlarini etishtirish uchun zarur bo'lgan xom ashyo miqdori bo'lganligi uchun, ularni mos ravishda xom ashyo miqdorlari x_1, x_2, x_3 larga ko'paytirib qo'shsak, birinchi turdagi mahsulot tayyorlash uchun kerakli xom ashyoning umumiy sarfini hosil qilamiz:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Xom ashyoning umumiy sarfi uning zaxirasidan oshib ketmasligi kerak, ya'ni

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 30$$

Xuddi shu kabi munosabatlarni qolgan mahsulotlar uchun ham hosil qilamiz:

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 40$$
$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 50$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20$$

Mahsulotlardan olinadigan umumiy foyda esa quyidagi funksiya yordamida ifodalanadi:

$$z = 30x_1 + 20x_2 + 40x_3$$

Mahsulotdan eng ko'p foyda olish uchun x_1, x_2, x_3 larni shunday qiymatlarini aniqlashimiz kerakki, yuqoridagi funksiya o'zining maksimum qiymatiga ega bo'lishi kerak:

$$z = 30x_1 + 20x_2 + 40x_3 \to \max$$

Ma'lumki, etishtiriladigan mahsulot miqdori nomanfiy qiymatlarni qabul qilishi kerak, ya'ni $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

Yuqoridagi munosabatlarni umumlashtirib, berilgan masalaning quyidagi matematik modelini hosil qilamiz:

$$
\begin{aligned}
&z = 30x_1 + 20x_2 + 40x_3 \to \max \\
&2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 30 \\
&3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 40 \\
&5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 50 \\
&4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20 \\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Eslatib o‘tamiz, ko‘pgina iqtisodiy masalalarning matematik modeli mana shu ko‘rinishda ifodalanadi.

4-masala. Firma yangi maxsulot ishlab chiqardi va uni sotish uchun reklama e’lon qildi. Mumkin bo‘lgan barcha N ta xaridordan N_0 tasi bu reklamadan xabardor bo‘ldi. Qolgan xaridorlarga yangi maxsulot haqidagi reklama o‘zaro bir-biri bilan muloqat orqali tarqatildi. Reklamani tarqalish jarayonining matematik modelini tuzing.

Ye***chish.*** $x(t)$ − ma’lum t vaqtda reklama bilan tanishgan xaridorlar soni bo‘lsin. U xolda reklama bilan tanishmagan xaridorlar $(N - x)$ ga teng bo‘ladi. Reklama tarqalish tezligi $\frac{dx}{dt}$ reklama bilan tanish va tanish bo‘lmagan xaridorlar soniga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x), \qquad (1.5.1)$$

bu erda k − proporsionallik koeffitsienti (bu koeffitsientni kommunikabellik koeffitsienti ham deb atashadi).

Dastlab reklamadan xabardor bo‘lgan xaridorlar soni N_0 ta edi. Shuning uchun

$$t = 0 \text{ da } x(0) = N_0 \qquad (1.5.2)$$

(1.5.1) differensial tenglama va (1.5.2) boshlang‘ich shart birgalikda masalaning matematik modeli bo‘ladi.

5-masala. m massali jism v_0 boshlang‘ich tezlik bilan α burchak ostida tepaga otildi. Xavo qarshiligini hisobga olmagan holda jism harakatini aniqlash masalasining matematik modelini tuzing va uni echib, olingan natijani tahlil qiling.

Ye***chish***. $x(t)$ va $y(t)$ orqali jismning t vaqtdagi holatini ko‘rsatuvchi koordinatalarini belgilaylik. U holda Nyutonning ikkinchi qonuni $F = ma$ ga asosan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = -mg \end{cases},$$

ёки

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = C_1 \\ \dot{y}(t) = -gt + C_2 \end{cases}.$$

Boshlang‘ich shart quyidagicha berilgan bo‘lsin. $t = 0$ da $x(0) = 0;$ $y(0) = 0;$ $\dot{x}(0) = v_0 cos\alpha;$ $\dot{y}(0) = v_0 sin\alpha$. U holda $C_1 = v_0 cos\alpha;$ $C_2 = v_0 sin\alpha$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 cos\alpha \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0 sin\alpha \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x(t) = (v_0 cos\alpha)t \\ y(t) = -g\frac{t^2}{2} + (v_0 sin\alpha)t \end{cases}.$$

Olingan echimni tahlil qilamiz:

1. Jismni erga qaytib tushguncha ketgan vaqti:

$$y = 0 \Rightarrow -g\frac{t^2}{2} + (v_0 sin\alpha)t = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 sin\alpha}{g}.$$

Jismning erga tushish vaqti: $t_n = \frac{2v_0 sin\alpha}{g}$.

2. Jismni gorizontal yo‘nalish bo‘yicha bosib o‘tgan masofasi (uchish uzoqligi):

$$x(t) = (v_0 cos\alpha)t_n = \frac{v_0 cos\alpha \cdot 2v_0 sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g}.$$

3. Jismning erdan maksimal uzoqlashuvi (balandligi):

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow v_0 sin\alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 sin\alpha}{g} \Rightarrow y_{max} = \frac{v_0^2 sin\alpha}{2g}.$$

4. Jismning harakat traektoriyasi: $x(t)$ va $y(t)$ larni bilgan holda t ni

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 cos\alpha)t \\ y(t) = -g\frac{t^2}{2} + (v_0 sin\alpha)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0 cos\alpha} \\ y(t) = -g\dfrac{t^2}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{v_0 cos\alpha}\right)^2 + \dfrac{v_0 sin\alpha \cdot x}{v_0 cos\alpha} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = xtg\alpha - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha} x^2.$$

Demak, jism harakatining traektoriyasi paraboladan iborat ekan.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1-masala. Qandolatchilik fabrikasi 3 xil (A,V,S) turdagi konfet tayyorlash uchun 3 xil xom ashyodan, ya'ni shakar, shinni va meva pyurisidan foydalanadi. Jadvalda 1 tonna konfet tayyorlash uchun kerakli xom ashyo miqdori, xom ashyolar zaxirasi va 1 tonna xar xil turdagi konfetdan olinadigan foyda miqdori keltirilgan. Konfet tayyorlashdan maksimal foyda keladigan rejani tuzing.

Xom ashyo turlari	1 t. konfet tayyorlash uchun xom ashyo normasi			xom ashyo zaxirasi
	A	V	S	
Shakar	0,8	0,5	0,6	800
Shinni	0,2	0,4	0,3	600
Meva pyurisi	0	0,1	0,1	120
1 t. maxsulotdan olinadigan foyda	108	112	126	

2-masala. Mayatnik tebranish formasini aniqlash masalasining matematik modelini quring.

3-masala. Konsentratsiyasi 0,2 va 0,5 bo'lgan ikki xil suyuq modda aralashtirib yuborildi va konsentratsiyasi 0,4 bo'lgan xajmi 260 grammga teng aralashma hosil qilindi. Har bir suyuq moddadan qanchadan olinganligini aniqlash masalasining matematik modelini tuzing.

Tayanch so'z va iboralar

Ob‘ekt, model, modellashtirish, algoritm, algoritmik til, blok-sxema, absolyut xato, nisbiy xato, sonli usul, analitik usul, sonli-analitik usul, tajriba(eksperiment) usuli, iteratsiya, model adekvatligi, transsendent tenglama.

Savollar

1. Ob’ekt va uning xossalari.
2. Model deb nimaga aytiladi?
3. Modellashtirish jarayoni deb nimaga aytiladi?
4. Matematik munosabat deganda nimani tushunasiz?
5. Matematik modellarni qanday sodda sinflarga ajratish mumkin?
6. Modellashtirish jarayoni qanday asosiy bosqichlarni o‘z ichiga oladi?
7. Algoritm va uning turlari.
8. Algoritmning berilish usullari.
9. Iteratsiya usuli qanday usul?
10. Dastur va dasturlash nima?
11. Dasturlashda algoritmik til qanday tanlanadi?
11. Model adekvatligi deganda nimani tushunasiz?
12. Model adekvatligi qanday tekshiriladi?
13. Absolyut va nisbiy xato nima?
14. Modellashtirishda xatoliklar turlari va ularning kelib chiqish manbalari.
15. Matematik modelni yechish usullari.
16. Analitik usul nima?
17. Sonli usul nima?
18. Sonli-analitik usul nima?
19. Matematik modellashtirishda xatoliklarni kamaytirish uchun nimalarga e’tibor berish kerak?

II-BOB. ChIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH.

2.1. Masalaning qo‘yilishi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi(ChATS)ni yechish, modellashtirishda ko‘p uchraydigan masalalardan biridir. Chatsni qandaydir fizik jarayonning matematik modeli deb qarash mumkin. Berilgan ma’lumotlar asosida ko‘phadlar yoki maxsus egri chiziqlar qurish, differensial va integral tenglamalarni diskret algebraik sistema ko‘rinishda ifodalash Chats ni yechishga keltiriladi.

Tushinarli va qulay bo‘lishi uchun 3 ta noma’lumli 3 ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

ni ko‘rib chiqamiz. Bu erda a_{ij}, b_i lar berilgan sonlar, x_i lar noma’lumlar $(i, j = 1,2,3)$. Agar (2.1.1) sistemaga mos keluvchi asosiy determenant Δ noldan farqli, ya’ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo‘lsa, bu sistema yagona echimga ega bo‘ladi.

Chatsni echishda aniq (Gauss, Kramer, teskari matriцa) va taqribiy (ketma-ket yaqinlashish, oddiy iteratsiya, Zeydel) usullaridan foydalanish mumkin.

2.2. Kramer usuli

Kramer usuli odatda determinantlar usuli ham deb ataladi. Bu usulni (2.1.1) Chats uchun ko‘rib chiqaylik. Bu usulga ko‘ra quyidagi 4 ta 3 - tartibli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

determinantlarning qiymatlari hisoblanadi va noma'lumlar

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

Misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 14 \\ 5x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

ChATSni Kramer usuli yordamida eching.

Echish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)\cdot(-2)+1\cdot 7\cdot 0+1\cdot 5\cdot(-1)-0\cdot(-4)\cdot(-1)-1\cdot 1\cdot(-2)-$$

$$2\cdot 5\cdot 7 = 16+0-5-0+2-70=-57$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & -4 & 7 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4)\cdot(-2)+1\cdot 7\cdot 4+(-1)\cdot 14\cdot 5-(-1)\cdot(-4)\cdot 4-$$

$$1\cdot 14\cdot(-2)-1\cdot 7\cdot 5 = 8+28-70-16+28-35=-57;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 14 & 7 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}=2\cdot 14\cdot(-2)+1\cdot 7\cdot 0+(-1)\cdot 1\cdot 4-(-1)\cdot 14\cdot 0-1\cdot 1\cdot(-2)-$$

$$2\cdot 7\cdot 4=-56+0-4-0+2-56=-114;$$

$$\Delta_{x3}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 14 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot(-4)\cdot 4+1\cdot 14\cdot 0+1\cdot 1\cdot 5-1\cdot(-4)\cdot 0-1\cdot 1\cdot 4-$$

$$2\cdot 14\cdot 5=-32+0+5-0-4-140=-171;$$

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=\frac{-57}{-57}=1;\quad x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}=\frac{-114}{-57}=2;\quad x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}=\frac{-171}{-57}=3$$

Javob: $x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=3.$

2.3. Gauss usuli

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+.a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

tenglamalar sistemasini ***Gauss usuli*** – yordamida yechish algoritmini ko‘rib chiqaylik. Bu usul noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotishga asoslangan usul bo‘lib, uning algoritmi quyidagi hisoblashlar ketma-ketligidan iborat. Sistemada $a_{11}\neq 0$ bo‘lsin (agar $a_{11}=0$ bo‘lsa, sistemadagi tenglamalar o‘rinlarini almashtirib $a_{11}\neq 0$ ga ega bo‘lish mumkin). Sistemadagi birinchi tenglamaning barcha hadlarini a_{11} ga bo‘lib

$$x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3=\frac{b_1}{a_{11}} \tag{2.3.2}$$

ni hosil qilamiz.

(2.3.2) tenglamani a_{21} ga ko‘paytirib, (2.3.1) sistemaning ikkinchi tenglamasini, (2.3.2) tenglamani a_{31} ga ko‘paytirib (2.3.1) sistemaning uchinchi tenglamasini hadlab ayirsak, faqat x_2 ва x_3 larga nisbatan

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{cases} \quad (2.3.3)$$

sistemaga ega bo‘lamiz. Bu erda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j}; \;\; b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot b_1, \;\; i = 2,3; \;\; j = 2,3.$$

(2.3.3) sistemada $a_{22}^{(1)} \neq 0$ bo‘lsin. Agar $a_{22}^{(1)} = 0$ bo‘lsa, tenglamalar o‘rnini almashtirib olamiz. (2.3.3) sistemaning birinchi tenglamasini $a_{22}^{(1)}$ ga bo‘lamiz va uni $a_{32}^{(1)}$ ga ko‘paytirib, ikkinchi tenglamani ayiramiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .a_{13}x_3 = b_1 \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ \qquad\quad a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)} \end{cases} . \quad (2.3.4)$$

Bu erda $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)}$; $\quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot b_2^{(1)}, \;\; i = 3, \; j = 3.$

(2.3.4) dagi tenglamalarni quyidan yuqoriga yechib borish natijasida x_3, x_2, x_1 larga ega bo‘lamiz.

Misol. Quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases}$$

tenglamalar sitemasini Gauss usulida eching.

Yechish.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ \quad 7x_2 - 6x_3 = -15 \\ \quad 7x_2 - 5x_3 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ \quad 7x_2 - 6x_3 = -15 \\ \qquad\quad -x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ \quad 7x_2 - 6x_3 = -15 \\ \qquad\qquad x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6 = -1 \\ \quad 7x_2 - 36 = -15 \\ \qquad\qquad x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6 = -1 \\ \qquad 7x_2 = 21 \\ \qquad\; x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 6 - 6 = -1 \\ \qquad\quad x_2 = 3 \\ \qquad\quad x_3 = 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 6 \end{cases}$$

Javob: $x_1 = -1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 6.$

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish uchun tuzilgan dastur matni:

```
const n=4;    { sistemadagi tenglamalar soni }
type
    stroka=array[1..n+1] of real;
    matrisa=array[1..n] of stroka;
    vektor=array[1..n] of real;
var
   a:matrisa; x:vektor; max,c:real;
   i,j,k,m:integer;
procedure gauss_1(b:matrisa; var y:vektor);
          begin
               for i:=1 to n do
                   begin
                        max:=abs(b[i,i]); j:=i;
                        for k:=i+1 to n do if abs(b[k,i])>max then begin
                        max:=abs(b[k,i]);
                              j:=k;
                        end;
                        if j<>i then for k:=i to n+1 do
                                              begin c:=b[i,k]; b[i,k]:=b[j,k];
                                                          b[j,k]:=c;
                                                    end;
                        c:=b[i,i];
                        for k:=i to n+1 do b[i,k]:=b[i,k]/c;
```

```
                    for m:=i+1 to n do
                                begin
                                    c:=b[m,i];
                                    for k:=i+1 to n+1 do
                              b[m,k]:=b[m,k]-b[i,k]*c;
                                end;
                end;
                    y[n]:=b[n,n+1];
                    for i:=n-1 downto 1 do
                    begin
                        y[i]:=b[i,n+1];
                        for k:=i+1 to n do y[i]:=y[i]-b[i,k]*y[k]
                    end;
            end;
begin  clrscr;
    for i:=1 to n do  for j:=1 to n+1 do
    begin
        write('a[',i:1,',',j:1,']=');  read(a[i,j]);
{ Sistema koeffiцientlarini kiritish}
    end;
    gauss_1(a,x);
    writeln(‘Sistemaning echimi=:');
    for i:=1 to n do writeln('x[',i:1,']=',x[i]:10:4);
{ Sistema echimini chop etish }
     end.
```

Misol: Quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 13 \\ 3x_1 + x_2 - 10x_3 - 6x_4 = -11 \\ 9x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - 12x_3 + x_4 = 20 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usuliga tuzilgan dasturdan foydalanib eching.

Javob: $x_1 = 6{,}2167$, $x_2 = 0{,}0825$, $x_3 =$ -$0{,}6278$, $x_4 = 6{,}0018$.

2.4. Teskari matrisa usuli

(2.1.1) ni echishda teskari matrisa usuli algoritmini ko‘rib chiqamiz. Dastlab (2.1.1) sistemadagi noma’lumlar oldidagi koeffisientlardan tuzilgan uch o‘lchovli

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \qquad (2.4.1)$$

kvadrat matrisani qaraylik.

Ta’rif. A matriцaga ***teskari matrisa*** deb shunday A^{-1} matrisaga aytiladiki, uning uchun quyidagi tenglik

$$A^{-1} \cdot A = E$$

o‘rinli bo‘ladi. Bu erda E ***birlik matrisa***, ya’ni

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Teorema. Agar A matrisa elementlaridan tuzilgan determinant qiymati noldan farqli, ya’ni $\det A \neq 0$ bo‘lsa, A matrisaga teskari matrisa mavjud.

Agar A matrisaga teskari matrisa mavjud bo‘lsa, u quyidagi formula yordamida hisoblanadi

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix}$$

bu erda $\Delta = \det A$, A_{ij} - a_{ij} (i,j=1,2,3) elementlarning algebraik to‘ldiruvchilari, ya’ni (2.4.1) da i-satr va j-ustun elementlarini o‘chirishdan hosil bo‘lgan determenantning $(-1)^{i+j}$ ishora bilan olingan qiymati.

Misol. Berilgan ushbu

$$A = \begin{Vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

matriцaga teskari matrisani aniqlang.

Yechish.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 24 - 10 = 10$$

A matriцa elementlari to‘ldiruvchilarini hisoblaymiz: $A_{11} = -2;$ $A_{12} = -4;$ $A_{13} = 8;$ $A_{21} = 3;$ $A_{22} = 6;$ $A_{23} = -7;$ $A_{31} = 10;$ $A_{32} = -10;$ $A_{33} = 20.$

U holda berilgan ***A*** matrisaga teskari matrisa

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{7}{10} & 2 \end{Vmatrix}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

(2.1.1) Chatsni teskari matrisa usulida yechish uchun, uni

$$AX = B$$

(2.4.2)

ko‘rinishda yozib olamiz. Bu erda

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}; \qquad X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}; \qquad B=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}.$$

(2.4.2) tenglamaning har ikkala tomonini A^{-1} ga ko‘paytirib, va

$$A^{-1}A=E, \qquad EX=X$$

ekanliklarini e’tiborga olsak, (2.1.1) sistema yechimi uchun

$$X=A^{-1}B$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Chatsni teskari matrisa usulida yechishga tuzilgan dastur matni:

```
   const n=3;                    {tenglamalar soni}
   type vector=array[1..n] of real;
   type matr=array[1..n,1..n+1] of real;
var
   a,c: matr; b,x: vector;
   i,j,m,k: integer;
procedure umv(l1:matr; l2:vector; var l3:vector);
var i,k:integer;
begin
      for i:=1 to n do l3[i]:=0.0;
      for i:=1 to n do for k:=1 to n do
      l3[i]:=l3[i]+l1[i,k]*l2[k];
end;
procedure obrmat(ao: matr; it: integer; var a1o: matr);
   label 1;
   var lo: matr; xo,bo: vector; so: real;
begin
       m:=0; bo[1]:=1; for k:=2 to it do bo[k]:=0;
       for k:=1 to it-1 do for i:=k+1 to it do
                  begin
```

```
                    lo[i,k]:=ao[i,k]/ao[k,k];
                    for j:=k+1 to it do ao[i,j]:=ao[i,j]-lo[i,k]*ao[k,j];
                    bo[i]:=bo[i]-lo[i,k]*bo[k]
                 end;
   1:  xo[it]:=bo[it]/ao[it,it]; m:=m+1;
       for k:=it-1 downto 1 do
                      begin
                         so:=0;
                         for j:=k+1 to it do so:=so+ao[k,j]*xo[j];
                            xo[k]:=(bo[k]-so)/ao[k,k]
                       end;
    for k:=1 to it do
    if m+1=k then bo[k]:=1 else bo[k]:=0;
    for k:=1 to it-1 do for i:=k+1 to it do
    bo[i]:=bo[i]-lo[i,k]*bo[k];
    for j:=1 to it do a1o[j,m]:=xo[j];
    if m<it then goto 1
end;
begin  clrscr;
       for i:=1 to n do for j:=1 to n do
       begin
            write('A[',i:1,',',j:1,']=');
            read(A[i,j])
       end;
       for i:=1 to n do
       begin
           write('B[',i:1,']=');
           read(B[i])
       end;
```

```
obrmat(A,n,c);  umv(c,b,x);
    for i:=1 to n do begin
                    writeln('x[',i:1,']=',x[i]:8:4);
              end;
end.
```

2.5. Jordan usuli

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_n = a_2 \\ \text{.................................} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 ... + a_{nn}x_n = a_n \end{cases}$$

Yuqoridagi masala uchun dastlabki Jordan jadvalini tuzib olamiz:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$a_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
$a_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$a_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

Ushbu jadval asosida Jordan almashtirishlari quyidagi tartibda bajarilib navbatdagi jadval to‘ldiriladi:

1) Jordan almashtirishlari hal qiluvchi elementga nisbatan yechiladi. Jadvalning yuqori o‘ng burchagidagi element hal qiluvchi element sifatida tanlab olinadi. Hal qiluvchi element joylashgan satr va ustun mos ravishda hal qiluvchi satr va hal qiluvchi ustun deyiladi;

2) hal qiluvchi satrdagi son va hal qiluvchi ustundagi o‘zgaruvchi o‘rni almashtiriladi;

3) hal qiluvchi element o‘rniga unga teskari sonni yozamiz;

4) hal qiluvchi ustun elementlarini hal qiluvchi elementga bo‘lib, natijani shu elementlarga mos kataklarga yozamiz;

5) hal qiluvchi satr elementlarini hal qiluvchi elementga bo‘lib, ishorasini o‘zgartiramiz va natijani shu elementlarga mos kataklarga yozamiz;

6) qolgan kataklar to‘rtburchak qoidasi bo‘yicha to‘ldiriladi.

Masalan, (2.2) katakni to‘ldirish uchun quyidagi hisoblash bajariladi:

$$a_{22}^{1} = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}}.$$

7) hal qiluvchi elementlar diagonal bo‘yicha tanlanadi va bu jarayon nav-batdagi tanlanishi kerak bo‘lgan elementdan boshlab quyi o‘ng burchakdagi barcha elementlar nol bo‘lguncha davom ettiriladi. Aks holda jarayon hal qiluvchi element sifatida diagonalning oxirgi elementi tanlanguncha davom ettiriladi. Agar diagonalda hal qiluvchi element sifatida olinishi kerak bo‘lgan son, masalan $a_{pp} = 0$ bo‘lib, undan quyi va o‘ng tomonda noldan farqli elementlar mavjud bo‘lsa, bu sonlardan biri satr va ustunlar o‘rnini almashtirish orqali (p,p) katakka olib kelinadi va u hal qiluvchi element sifatida tanlab olinadi. Agar hosoblash diagonal bo‘ylab oxirgi (m,n) elementgacha olib borilsa, oxirgi jadval quyidagi ko‘rinishga keladi:

	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
$x_1 =$	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1n}
$x_2 =$	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x_m =$	b_{m1}	b_{m2}	$\cdots$	b_{mn}

Yuqoridagi jadval asosida tenglamalar sistemasining yechimini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}a_1 + b_{12}a_2 ... + b_{1n}a_n \\ x_2 = b_{21}a_1 + b_{22}a_2 ... + b_{2n}a_n \\ .... \\ x_n = b_{n1}a_1 + b_{n2}a_2 ... + b_{nn}a_n \end{cases}$$

Agar hisoblash jarayonida jadvalning quyi o‘ng to‘rtburchak qismida barcha elementlar nol bo‘lsa, oxirgi jadval quyidagi ko‘rinishga keladi:

	a_1	a_2	$\cdots$	a_k	x_{k+1}	$\cdots$	x_n
$x_1 =$	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1k}	b_{1k+1}	$\cdots$	b_{1n}
$x_2 =$	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2k}	b_{2k+1}	$\cdots$	b_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x_k =$	b_{k1}	b_{k2}	$\cdots$	b_{kk}	b_{kk+1}	$\cdots$	b_{kn}
$a_{k+1} =$	b_{k+11}	b_{k+12}	$\cdots$	b_{k+1k}	0	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$a_n =$	b_{n1}	b_{n2}	$\cdots$	b_{nk}	0	$\cdots$	0

Ushbu jadvalda $k+1,\ k+2,\ldots n$ - satrlar uchun quyidagi

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1,1}a_1 + b_{k+1,2}a_2 ... + b_{k+1,n}a_n \\ a_{k+2} = b_{k+2,1}a_1 + b_{k+2,2}a_2 ... + b_{k+2,n}a_n \\ .... \\ a_n = b_{n1}a_1 + b_{n2}a_2 ... + b_{nn}a_n \end{cases}$$

tengliklar to‘g‘ri bo‘lsa, tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + ... + b_{1k}a_k + b_{1,k+1}x_{k+1} + ... + b_{1n}x_n \\ x_2 = b_{21}a_1 + b_{22}a_2 + ... + b_{2k}a_k + b_{2,k+1}x_{k+1} + ... + b_{2n}x_n \\ .... \\ x_k = b_{k1}a_1 + b_{k2}a_2 .. b_{kk}a_k + b_{k,k+1}x_{k+1} + ... + b_{kn}x_n \end{cases}$$

Yuqoridan ko‘rinadiki, $x_1,\ x_2,...,x_k$ o‘zgaruvchilar $x_{k+1},...,x_n$ o‘zgaruvchilarning qiymatlariga bog‘liq bo‘ladi. $x_{k+1},...,x_n$ o‘zgaruvchilar esa ixtiyoriy qiymatlarni qabul qiladi. Bu holda tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Agar

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1,1}a_1 + b_{k+1,2}a_2 \ldots + b_{k+1,n}a_n \\ a_{k+2} = b_{k+2,1}a_1 + b_{k+2,2}a_2 \ldots + b_{k+2,n}a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = b_{n1}a_1 + b_{n2}a_2 \ldots + b_{nn}a_n \end{cases}$$

tengliklardan birortasi bajarilmay qolsa, tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lmaydi.

Misol: Quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Jordan usulida eching:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Yechish: Yuqoridagi masala uchun dastlabki Jordan jadvalini tuzib olamiz:

	x_1	x_2	x_3
4=	2	1	2
1=	1	-1	2
3=	3	1	-2

Jordan almashtirishlaridan keyin navbatdagi jadvallar quyidagi ko‘rinishga keladi:

Hal qiluvchi element sifatida $a_{22}^{1} = -3/2$ ni olib, unga nisbatan Jordan almashtirishlarini bajarib, navbatdagi jadvalni to‘ldiramiz:

	4	1	x_3
x_1	1/3	1/3	-4/3
x_2	1/3	-2/3	2/3
3=	4/3	1/3	-16⁄3

Hal qiluvchi element sifatida $a_{33}^2 = -16/3$ ni olib, unga nisbatan Jordan almashtirishlarini bajarib, navbatdagi jadvalni to‘ldiramiz:

	4	1	3
x_1	0	1/4	¼
x_2	1/2	-5/8	-1/8
x_3	1/4	1/16	-3/16

Oxirgi jadvaldan tenglamalarning ildizlarini topamiz:

$$x_1 = 4\cdot 0 + 1\cdot 1/4 + 3\cdot 1/4 = 1/4 + 3/4 = 1$$
$$x_2 = 4\cdot 1/2 - 1\cdot 5/8 - 3\cdot 1/8 = 2 - 5/8 - 3/8 = 1$$
$$x_3 = 4\cdot 1/4 + 1\cdot 1/16 - 3\cdot 3/16 = 1 - 8/16 = 1/2$$

Topilgan ildizlarni sistemaga qo‘yib, yechimning to‘g‘riligini tekshirib ko‘rish mumkin.

2.6. Ketma-ket yaqinlashish usuli

Soddalik uchun ketma-ket yaqinlashish usuli algoritmini quyidagi uch noma’lumli ChATSda ko‘rib chiqamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2.6.1)$$

Bu sistemani matrisa ko‘rinishida ifodalaymiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

yoki

$$Ax=B,$$

bu yerda $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$

(2.6.1) sistemani unga teng kuchli sistema bilan almashtiramiz

$$\begin{cases} x_1 = x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_1, \\ x_2 = x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + b_2, \\ x_3 = x_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) + b_3 \end{cases} \tag{2.6.2}$$

yoki

$$x = (E-A)x + B.$$

(2.6.2) sistemani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

va iteratsiya jarayonini quramiz:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{2.6.3}$$

yoki

$$x^{(k)} = (E-A)x^{(k-1)} + B.$$

Bu usulda, iteratsiya jarayonining yaqinlashishi uchun etarli shart quyidagicha ifodalanadi:

$$\max_j \left\{ |1-a_{jj}| + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| \right\} < 1 \quad \text{yoki} \quad \max_i \left\{ |1-a_{ii}| + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\} < 1.$$

Agar ChATSda tenglamalar soni n ta bo‘lsa, ketma-ket yaqinlashish usulining umumiy formulasi

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i$$

yoki

$$x_i^{(k)} = (1 - a_{ii}) x_i^{(k-1)} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 1{,}1x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 = 1, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}2x_3 = 3, \\ 0{,}2x_1 - 0{,}1x_2 + 1{,}2x_3 = 2 \end{cases}$$

ChATSni ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida yeching. Bu sistemani matrisa ko‘rinishida:

$$\begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0.2 \\ 0.2 & -0.1 & 1.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

yozib olamiz.

(2.6.3) formulaga asosan iteratsion jarayonni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 & -0.3 \\ -0.1 & 0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (2.6.4)$$

Dastlabki yaqinlashish sifatida nol vektorni olamiz va (2.6.4) formula yordamida birinchi yaqinlashishni aniqlaymiz:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 & -0.3 \\ -0.1 & 0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Yana bir marta iteratsiya jarayonini bajaramiz:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.2 & -0.3 \\ -0.1 & 0.1 & -0.2 \\ -0.2 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 2.8 \\ 1.7 \end{pmatrix}.$$

Ikkita ketma-ket yaqinlashish bir-biridan yetarlicha kam farq qilguncha itersiya jarayonini davom ettiramiz. Hosil qilingan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.9 \\ 2.8 \\ 1.7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.96 \\ 2.85 \\ 1.76 \end{pmatrix} \to \cdots$$

vektorlar ketma-ketligi sistemaning aniq yechimiga intiladi.

Umumiy holda iteratsiya jarayoni $\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| < \varepsilon$ shart bajarilganda tugallanadi. Bu erda ε berilgan aniqlik.

2.7. Oddiy iteratsiya usuli

ChATSda noma’lumlar soni ko‘p bo‘lganda, Kramer, Gauss, teskari matriцa usullarining aniq yechimlar beruvchi chiziqli sxema juda murakkab bo‘lib qoladi. Bunday hollarda sistema ildizlarini topish uchun taqribiy sonli yechish usullaridan foydalanish qulay bo‘ladi. Shunday usullardan biri oddiy iteratsiya usulidir. Bu usulni (2.1.1) sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{2.7.1}$$

uchun ko‘rib o‘tamiz.

Bu sistemani matriцa ko‘rinishida yozib olamiz:

$$AX = B,$$

bu erda

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix};\qquad X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix};\qquad B=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}.$$

(2.7.1) da $a_{ii}\neq 0 \ \ (i=1,2,3)$ deb faraz qilamiz. (2.7.1) dagi birinchi tenglamani x_1 ga nisbatan, ikkinchi tenglamani x_2 ga nisbatan va uchinchi tenglamani x_3 ga nisbatan yechib, quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} x_1=\beta_1+0+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3 \\ x_2=\beta_2+\alpha_{21}x_1+0+\alpha_{23}x_3 \\ x_3=\beta_3+\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+0 \end{cases} \tag{2.7.2}$$

(2.7.2) ni ushbu

$$\alpha=\begin{Vmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{Vmatrix}; \quad , \ \beta=\begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Vmatrix} \quad , \ X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$

matrisalar yordamida quyidagicha yozishimiz mumkin

$$X=\beta+\alpha X \tag{2.7.3}$$

(2.7.3) sistemani ketma-ket yaqinlashishlar usuli bilan echamiz:

$$X^{(0)}=\beta, \quad X^{(1)}=\beta+\alpha X^{(0)},\ X^{(2)}=\beta+\alpha X^{(1)},....$$

Ushbu jarayonni umumiy holda quyidagicha yozish mumkin:

$$X^{(k)}=\beta+\alpha X^{(k-1)},\ X^{(0)}=\beta,\ k=1,2,3,\ \ldots \tag{2.7.4}$$

Agar bu $\{X^{(k)}\}$ ketma-ketlikning $k\to\infty$ dagi limiti mavjud bo‘lsa, bu limit (2.7.1) sistemaning echimi bo‘ladi.

Quyidagi

$$X^{(k)}=\begin{Vmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{Vmatrix}$$

belgilashni kiritamiz.

Agar ixtiyoriy ε>0 uchun $\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|<\varepsilon$ tengsizlik barcha i =1,2,3 lar uchun bajarilsa, $X^{(k+1)}=\left(x_1^{(k+1)},x_2^{(k+1)},x_3^{(k+1)}\right)$ vektor (2.7.1) sistemaning ε

aniqlikdagi yechimi deb ataladi.

Teorema. Agar (2.7.2) sistema uchun $\sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{ij}\right| < 1$ yoki $\sum_{i=1}^{3}\left|\alpha_{ij}\right| < 1$ shartlardan birontasi bajarilsa, u holda (2.7.4) iteratsiya jarayoni boshlang‘ich yaqinlashishni tanlashga bog‘liq bo‘lmagan holda yagona yechimga yaqinlashadi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

sistemani ε=0,001 aniqlikda iteratsiya usuli bilan yeching.

Yechish: Sistema koeffisientlari uchun

$$\left.\begin{array}{l} 0,24 + |-0,08| = 0,32 < |a_{11}| = 4 \\ 0,09 + |-0,15| = 0,24 < |a_{22}| = 3 \\ 0,04 + |0,08| = 0,12 < |a_{33}| = 4 \end{array}\right\}$$

shart bajariladi.

Demak, yuqorida keltirilgan teoremaga asosan iteratsiya jarayoni yaqinlashadi. Yuqoridagi sistemadan

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3 \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3 \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2 \end{cases}.$$

ga ega bo‘lib, nolinchi yaqinlashish sifatida

$$X^{(0)} = \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \; x_1^{(0)} = 2, x_2^{(0)} = 3, x_3^{(0)} = 5,$$

ni olamiz. U holda α matrisa

$$\alpha = \begin{Vmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{Vmatrix}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

(2.7.4) formula yordamida hisoblashlarni bajaramiz:

$$X^{(1)} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2-3\cdot 0{,}06+5\cdot 0{,}02 \\ 3-2\cdot 0{,}03+5\cdot 0{,}05 \\ 5-2\cdot 0{,}01+3\cdot 0{,}02 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1{,}92 \\ 3{,}19 \\ 5{,}04 \end{Vmatrix}$$

$$x_1^{(1)} = 1{,}92; \quad x_2^{(1)} = 3{,}19; \quad x_3^{(1)} = 5{,}04.$$

$$X^{(2)} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1{,}92 \\ 3{,}19 \\ 5{,}04 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2-1{,}92\cdot 0{,}06+5{,}04\cdot 0{,}02 \\ 3-1{,}92\cdot 0{,}03+5{,}04\cdot 0{,}05 \\ 5-1{,}92\cdot 0{,}01+3{,}19\cdot 0{,}02 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1{,}9094 \\ 3{,}1944 \\ 5{,}0446 \end{Vmatrix}$$

$$x_1^{(2)} = 1{,}9094; \quad x_2^{(2)} = 3{,}1944; \quad x_3^{(2)} = 5{,}0446.$$

$$X^{(3)} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1{,}9094 \\ 3{,}1944 \\ 5{,}0446 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2-1{,}9094\cdot 0{,}06+5{,}0446\cdot 0{,}02 \\ 3-1{,}9094\cdot 0{,}03+5{,}0446\cdot 0{,}05 \\ 5-1{,}9094\cdot 0{,}01+3{,}1944\cdot 0{,}02 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1{,}90923 \\ 3{,}19495 \\ 5{,}04485 \end{Vmatrix}$$

$$x_1^{(3)} = 1{,}90923; \quad x_2^{(3)} = 3{,}19495; \quad x_3^{(3)} = 5{,}04485.$$

Natijada ushbu jadvalni hosil qilamiz:

Yaqinla-shishlar(k)	x_1	x_2	x_3	$x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}$	$x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}$	$x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)}$
0	2	3	5	-	-	-
1	1,92	3,19	5,04	0,08	0,19	0,04
2	1,9094	3,1944	5,0446	0,0106	0,0044	0,0046
3	1,90923	3,19495	5,04485	0,00017	0,00055	0,00025

Bu yerda

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 0{,}00017 < \varepsilon, \quad \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = 0{,}00055 < \varepsilon,$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = 0{,}00025 < \varepsilon$$

shartlar bajariladi. Demak, $X = X^{(3)}$ berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining ε=0,001 aniqlikdagi taqribiy yechimi bo'ladi.

Tenglamalar sistemasini iteratsiya usulida yechish uchun tuzilgan dastur matni:

```
label 1,2;
const n=3; { tenglamalar soni }
   type
     matrisa=array[1..n,1..n] of real;
     vektor=array[1..n] of real;
   var
     a,a1:matrisa; x,x0,b,b1:vektor; eps,s:real;
     i,j,k:integer;
begin  clrscr;
   for i:=1 to n do begin
   for j:=1 to n do begin
                 write('a[',i:1,',',j:1,']='); read(a[i,j]) end;
                 {Sistema koeffiцientlarini kiritish}
                 write('b[',i:1,']='); read(b[i]);
             end;
   eps:=0.0001;  { Echish aniqligini berish}
   for i:=1 to n do begin
            b1[i]:=b[i]/a[i,i];
            for j:=1 to n do a1[i,j]:=-a[i,j]/a[i,i]
         end;
            for i:=1 to n do begin
                      x0[i]:=b1[i];  a1[i,i]:=0;
```

```
                end;
    2: for i:=1 to n do
            begin
              s:=0.0;
              for j:=1 to n do s:=s+a1[i,j]*x0[j];
              x[i]:=b1[i]+s;
            end;
     k:=0;
     for i:=1 to n do if abs(x[i]-x0[i])<eps
         then begin k:=k+1; if k=n then goto 1 end
         else begin for j:=1 to n do x0[j]:=x[j]; goto 2 end;
  1:  writeln('Sistemaning taqribiy echimi:');
   for i:=1 to n do writeln('x[',i:1,']=',x[i]:8:6);
end.
```

2.6. Zeydel usuli

Bu usul algoritmini quyidagi tenglamalar sistemasini yechishda ko‘rib chiqamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Bu sistemani:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_1, \\ x_2 = x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + b_2, \\ x_3 = x_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) + b_3. \end{cases}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Noma’lumlarga ixtiyoriy ravishda dastlabki: $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, $x_3 = x_3^{(0)}$ qiymatlarini beramiz. Bu qiymatlarni birinchi tenglamaning o‘ng tamoniga qo‘yib x_1 uchun birinchi yaqinlashishni hosil qilamiz:

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - \left(a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)}\right) + b_1.$$

$x_1 = x_1^{(1)},\ x_2 = x_2^{(0)},\ x_3 = x_3^{(0)}$ larni ikkinchi tenglamaga olib borib x_2 uchun birinchi yaqinlashishni aniqlaymiz:

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - \left(a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)}\right) + b_2.$$

$x_1 = x_1^{(1)},\ x_2 = x_2^{(1)},\ x_3 = x_3^{(0)}$ larni uchinchi tenglamaga olib borib x_3 uchun birinchi yaqinlashishni aniqlaymiz:

$$x_3^{(1)} = x_3^{(0)} - \left(a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} + a_{33}x_3^{(0)}\right) + b_3$$

Shu bilan birinchi iteratsiya jarayoni tugallanadi. Keyingi iteratsiya jarayonlari xuddi shu kabi davom ettiriladi. *k*- yaqinlashishni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= x_1^{(k-1)} - \left(a_{11}x_1^{(k-1)} + a_{12}x_2^{(k-1)} + a_{13}x_3^{(k-1)}\right) + b_1,\\
x_2^{(k)} &= x_2^{(k-1)} - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k-1)} + a_{23}x_3^{(k-1)}\right) + b_2,\\
x_3^{(k)} &= x_3^{(k-1)} - \left(a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + a_{33}x_3^{(k-1)}\right) + b_3.
\end{aligned}$$

$x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ x_3^{(k)}$ larning qiymatlari $x_1^{(k-1)},\ x_2^{(k-1)},\ x_3^{(k-1)}$ larning qiymat-lariga berilgan aniqlikga erishguncha iteratsiya jarayoni davom ettiriladi.

Umumiy holda, ya’ni tenglamalar soi n ta bo‘lganda, bu usul hisoblash formulasi quyidagi

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) + b_i.$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, uning yaqinlashish sharti, ketma-ket yaqinlashish usuli yaqinlashish sharti bilan bir xil bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Berilgan

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + x_3 = 24 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = -9 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yeching.

2. Berilgan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yeching.

3. Berilgan

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 5x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = -4 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

4. Berilgan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

5. Berilgan

$$\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

matrisaga teskari saniqlang.

6. Ushbu

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$$

sistemani teskari matrisa usuli yordamida yeching.

7. Ushbu

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini iteratsiya usuli yordamida 10^{-2} aniqlikda yeching.

8. Ushbu

$$\begin{cases} 100x_1 + 30x_2 - 70x_3 = 1 \\ 15x_1 - 50x_2 - 5x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 20x_3 = 1 \end{cases}$$

sistema uchun iteratsiya jarayoni yaqinlashuvchi ekanlgini ko‘rsating va yechimni 10^{-2} aniqlikda topish uchun nechta iteratsiya jarayonini bajarish kerak?

9. Berilgan

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Zeydel usuli bilan eching.

Tayanch so‘z va iboralar

Matrisa, birlik matriцa, algebraik to‘ldiruvchi, analitik usul, sonli-analitik usul, iteratsiya usuli, teskara matrisa usuli, Gauss usuli, Kramer usuli, Zeydel usuli.

Savollar

1. Chatsni yagona echimga ega bo‘lish sharti.

2. Chatsni echishda foydalaniladigan qanday aniq usullarni bilasiz?

3. Chatsni echishda foydalaniladigan qanday taqribiy usullarni bilasiz?

4. Chatsni echishda Kramer usuli algoritmini keltiring.

5. Chatsni yechishda Gauss usuli algoritmini keltiring.

6. Birlik matrisaga ta’rif bering.

8. Teskari matrisaga ta’rif bering.

9. Teskari matrisaning mavjudlik sharti nimadan iborat?

10. Matrisa elementi uchun algebraik to‘ldiruvchi qanday aniqlanadi?

11. Chatsni echishda teskari matrisa usuli algoritmini keltiring.

12. Qanday hollarda Chatsni yechishda taqribiy yechish usullaridan foydalaniladi?

13. Chatsni yechishda iteratsiya usuli algoritmini keltiring.

14. Iteratsiya jarayonining yaqinlashish shartini aytib bering .

15. Chatsni yechishda Zeydel usuli va uning algoritmi.

16. Chatsni yechishda ketma-ket yaqinlashish usuli va uning algoritmi.

17. Jordan almashtirishi qanday almashtirish?

18. Jordan almashtirishida hal qiluvchi element qanday aniqlanadi?

19. Hal qiluvchi satr va hal qiluvchi ustun qanday aniqlanadi?

20. To‘rtburchak qoidasini aytib bering.

21. Chatsni echishda Zeydel usuli algoritmini keltiring.

III-BOB. ChIZIQSIZ VA TRANSSENDENT TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH USULLARI

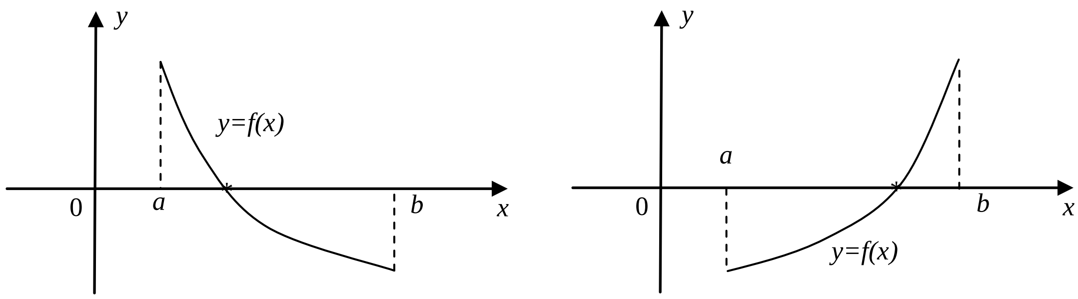
3.1. Masalaning qo‘yilishi

f(x) funksiya - [*a*,*b*] chekli oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, uning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari shu oraliqda mavjud bo‘lsin. Quyidagi:

$$f(x)=0 \tag{3.1.1}$$

tenglamani ko‘rib chiqamiz. Bu tenglama berilgan [*a*,*b*] chekli oraliqda qachon yechimga ega va bu yechim yagona bo‘ladi?

Teorema. Agar $y=f(x)$ funkiya [*a*,*b*] oraliqning chetki nuqtalarida har xil ishoralarga ega ($f(a)\cdot f(b)<0$) va uning birinchi tartibli hosilasi butun oraliqda bir xil ishoraga ega bo‘lsa, (3.1.1) tenglama [*a*,*b*] oraliqda yagona yechimga ega bo‘ladi (3.1.1-rasm).



3.1.1 - rasm

Agar *y=f(x)* funkцiya chiziqsiz ko‘rinishda bo‘lsa, (3.1.1) tenglama chiziqsiz tenglama deb ataladi.

Agar (3.1.1) tenglamani algebraik almashtirishlar yordamida algebraik tenglama ko‘rinishiga keltirish mumkin bo‘lmasa, bu tenglama transцendent tenglama deb ataladi.

Algebraik almashtirishlar deganda quyidagi almashtirishlar tushiniladi:

- *berilgan tenglamaning ikkala tamoniga bir xil algebraik ifodalarni qo‘shish;*

- *berilgan tenglamaning ikkala tamonini noldan farqli bir xil algebraik ifodalarga ko'paytirish;*
- *tenglamaning ikkala tamonini bir xil ratsional ko'rsatkichli darajaga oshirish.*

(3.1.1) transцendent tenglamaning taqribiy yechimini berilgan $\varepsilon>0$ aniqlikda topish talab qilinsin. Bu yechimni aniqlashda taqribiy sonli yechish usullar (oraliqni teng ikkiga bo'lish; vatarlar; urunmalar va oddiy iteratsiya usuli) dan foydalanish mumkin.

3.2. Transsendent tenglama ildizlarini ajratish

Ushbu

$$f(x) = 0$$

transsendent tenglama berilgan bo'lsin.

Bu tenglamani yechishdan oldin tenglama ildizlari joylashgan oraliqlarni ajratish kerak bo'ladi. Tenglamaning faqat bitta x_i ildizi joylashgan (a_i, b_i) oraliqni topish, tenglama ildizini ajratish jarayoni deyiladi. Bu jarayonni amalga oshirishda jadval yoki grafik usullaridan foydalaniladi. Bu usullarni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

Misol. $1{,}2^x + 6sin\frac{\pi x}{2} + 1 = 0$ tenglamaning $[0; 8]$ oraliqdagi ildizlarini ajrating.

Echish.

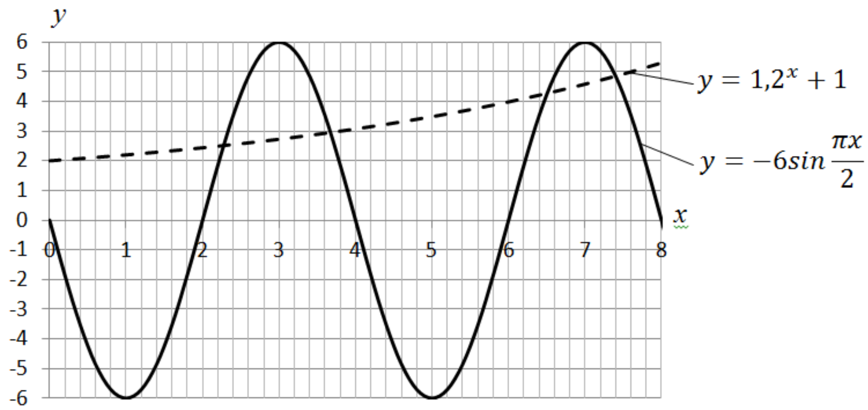
Jadval usuli. $[0; 8]$ oraliqni 0,4 qadam bilan oraliqchalarga ajratib har bir oraliqning chegara nuqtalarida $y = 1{,}2^x + 6sin\frac{\pi x}{2} + 1$ funksiya qiymatlarini hisoblab

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y	2	5,6	7,86	7,95	5,86	2,44	-0,98	-3,04	-2,91	-0,6	3,07

x	4,4	4,8	5,2	5,6	6	6,4	6,8	7,2	7,6	8
y	6,76	9,11	9,29	7,3	3,99	0,69	-1,25	-0,99	1,47	5,30

jadvalni hosil qilamiz. Bu erdan funksiya ishoralari almashgan oraliqlar uchun $x_1 \in [2; 2{,}4]$; $x_2 \in [3{,}6; 4]$; $x_3 \in [6{,}4; 6{,}8]$; $x_4 \in [7{,}2; 7{,}6]$ ga ega bo‘lamiz.

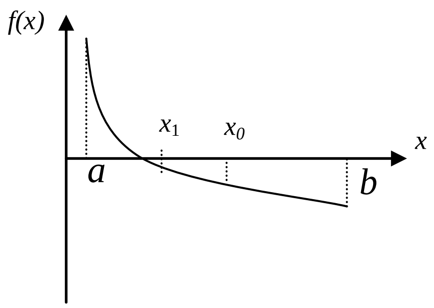
Grafik usuli. Tenglamani $1{,}2^x + 1 = -6sin\frac{\pi x}{2}$ ko‘rinishda yozib olib, $y = 1{,}2^x + 1$ va $y = -6sin\frac{\pi x}{2}$ funksiyalarning grafiklarini yasaymiz.



Grafikdan bu ikki funksiya grafiklarining kesishish nuqtalarining absissalari uchun $x_1 \in [2; 2{,}4]$; $x_2 \in [3{,}6; 4]$; $x_3 \in [6{,}4; 6{,}8]$; $x_4 \in [7{,}2; 7{,}6]$ ekanligi ega bo‘lamiz.

3.3. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuli

Bu usul algoritmi quyidagi amallar ketma-ketligidan iborat: $[a,b]$ oraliqni $x_0 = (a+b)/2$ nuqta orqali ikkita teng $[a, x_0]$ va $[x_0, b]$ oraliqlarga ajratamiz (3.3.1-rasm).



3.3.1- rasm

Agar $|a - x_0| \le \varepsilon$ bo'lsa, $x = x_0$ (3.1.1) tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy echimi bo'ladi. Bu shart bajarilmasa, $[a, x_0]$ va $[x_0, b]$ oraliqlardan (3.1.1) tenglama ildizi joylashganini tanlab olamiz va uni $[a_1, b_1]$ deb belgilaymiz. $x_1 = (a_1 + b_1)/2$ nuqta yordamida $[a_1, b_1]$ oraliqni ikkita teng $[a_1, x_1]$ va $[x_1, b_1]$ oraliqlarga ajratamiz. $|a_1 - x_1| \le \varepsilon$ bo'lsa, $x = x_1$ (3.1.1) tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy yechimi bo'ladi, aks holda $[a_1, x_1]$ va $[x_1, b_1]$ oraliqlardan (3.1.1) tenglama ildizi joylashganini tanlab olamiz va uni $[a_2, b_2]$ deb belgilaymiz. Bu hisoblashlar ketma-ketligini $|a_i - x_i| \le \varepsilon$ $(i = 2,3,4,...)$ shart bajarilguncha davom ettiramiz. Natijada (3.1.1) tenglamaning ε aniqlikdagi $x = x_i$ taqribiy yechimini hosil qilamiz.

Misol: Ushbu $2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = 0$ tenglamaning $[0{,}2;\ 4]$ oraliqdagi ildizini $\varepsilon = 0{,}001$ aniqlikda oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli yordamida aniqlang.

Echish.

A	*b*	*c*	*fa*	*fb*	*fc*
0.200	4.000	2.100	14.9760	-25.0000	-10.7880
0.200	2.100	1.150	14.9760	-10.7880	5.7943
1.150	2.100	1.625	5.7943	-10.7880	-2.2148
1.150	1.625	1.388	5.7943	-2.2148	1.9406
1.388	1.625	1.506	1.9406	-2.2148	-0.1095
1.388	1.506	1.447	1.9406	-0.1095	0.9237
1.447	1.506	1.477	0.9237	-0.1095	0.4090
1.477	1.506	1.491	0.4090	-0.1095	0.1502
1.491	1.506	1.499	0.1502	-0.1095	0.0205
1.499	1.506	1.503	0.0205	-0.1095	-0.0444
1.499	1.503	1.501	0.0205	-0.0444	-0.0120

1.499	1.501	1.500	0.0205	-0.0120	0.0043

Javob:* $x =$ *1.500

Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuliga tuzilgan dastur matni:

```
var a,b,eps,x,fa,fc,c:real;
  function f(x:real):real;
  begin
     f:=x*x-sin(x)-0.5      { f(x) funkųiya ko‘rinishi }
  end;
begin clrscr;
    write('a='); read(a);
    write('b='); read(b);
    write('eps='); read(eps);
    fa:=f(a);
       while abs(b-a)>eps do
       begin
           c:=(a+b)/2;  fc:=f(c);
           if fa*fc<=0 then b:=c else begin a:=c; fa:=fc end;
       end;
    writeln('x=',c:10:4);
end.
```

3.4. Vatarlar usuli

Bizga (3.1.1) tenglamaning $[a,b]$ oraliqdagi yechimini topish talab etilsin. Aniqlik uchun $f(a)>0$ $(f(a)<0)$ bo‘lsin. $A=A(a;f(a))$, $B=B(b;f(b))$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} \quad \text{yoki} \quad y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a).$$

Bu to‘g‘ri chiziqni Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasi absissasini x_1 deb olsak, u holda

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x_1 - a) = 0$$

tenglikga ega bo‘lamiz. Bu yerdan esa

$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a)$$

ni hosil qilamiz. Agar $b = x_0$ deb olsak,

$$x_1 = a - \frac{x_0 - a}{f(x_0) - f(a)} \cdot f(a).$$

Agar $|a - x_1| \le \varepsilon$ bo‘lsa, $x = x_1$ (3.1.1) tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy echimi bo‘ladi. Bu shart bajarilmasa, $b = x_1$ $(a = x_1)$ deb olamiz. A, B no‘qtalardan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va uning Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasini aniqlaymiz.

$A = A(a; f(a))$, $B = B(x_1; f(x_1))$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{x-a}{x_1-a} = \frac{y-f(a)}{f(x_1)-f(a)} \quad \text{yoki} \quad y = f(a) + \frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \cdot (x-a) \; .$$

Bu to‘g‘ri chiziqni Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasi absissasini x_2 deb olsak, u holda

$$f(a) + \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \cdot (x_2 - a) = 0$$

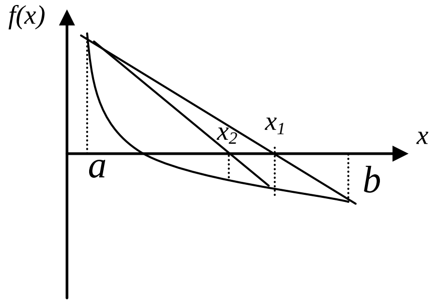
yoki

$$x_2 = a - \frac{x_1 - a}{f(x_1) - f(a)} \cdot f(a).$$

Agar $|a - x_2| \le \varepsilon$ shart bajarilsa, $x = x_2$ (3.1.1) tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy yechimi bo‘ladi, aks holda $b = x_2$ $(a = x_2)$ deb olib, yuqoridagi amallar ketma-ketligini davom ettiramiz, va quyidagi

$$x_n = a - \frac{x_{n-1} - a}{f(x_{n-1}) - f(a)} \cdot f(a)$$

tenglikga ega bo‘lamiz. Har safar $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ shartni tekshirib boramiz, agar bu shart bajarilsa x_n (3.1.1) tenglamaning ε aniqlikdagi yechimi bo‘ladi.



3.4.1-rasm

Agar $y = f(x)$ funksiya *[a, b]* oraliqda o‘suvchi bo‘lsa, x_n larni ketma-ket hisoblash formulasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$x_n = b - \frac{x_{n-1} - b}{f(x_{n-1}) - f(b)} \cdot f(b).$$

Misol. Ushbu $11x^2 + 2x - 26 = 0$ tenglamaning [0; 4] oraliqdagi ildizini $\varepsilon = 0{,}001$ aniqlikda vatarlar usuli yordamida aniklang.

Yechish. $x_n = a - \dfrac{x_{n-1} - a}{f(x_{n-1}) - f(a)} \cdot f(a)$ $\left(x_n = b - \dfrac{x_{n-1} - b}{f(x_{n-1}) - f(b)} \cdot f(b) \right).$

x_n	$f(x_{n-1})$
0.0000	-26,0000
0,5652	-21,3554
0,9742	-13,6122
1,2142	-7,3547
1,3381	-3,6281
1.3979	-1,7103
1.4257	-0,7891
1.4385	-0,3605
1.4443	-0,1639

1.4470	-0,0744
1.4482	-0,0337
1.4487	-0,0153
1,4490	-0,0069

Javob: ***x =*** ***1.4491***

Vatarlar usuliga tuzilgan dastur matni:

```
var a,b,eps,x:real;
    function f(x:real):real;
          begin
                f:=x*x-exp(-3*x)-1     { f(x) funkцiya ko'rinishi }
          end;
begin clrscr;
          write('a='); read(a);   write('b='); read(b);
          write('eps='); read(eps);
   2: x:=b;
      x:=b-f(b)*(b-a)/(f(b)-f(a));
      if abs(x-b)<eps then goto 1 else begin b:=x; goto 2 end;
   1: writeln('x=',x:8:4);
end.
```

3.5. Urinmalar usuli

Bizga (3.1.1) tenglamaning $[a,b]$ oraliqdagi yechimini topish talab etilsin. Faraz qilaylik $[a,b]$ oraliqda $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarning ishoralari o‘zgarmasdan qolsin. $f(x)$ funksiya grafigining $B = B(b_0, f(b_0))$ nuqtasidan urinma o‘tkazamiz

$$f(x) - f(b_0) = f'(b_0) \cdot (x - b_0).$$

Bu urinmaning Ox o‘qi bilan kesishgan nuqtasini b_1 deb belgilaymiz. U holda quyidagicha bo‘adi:

$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)}$$

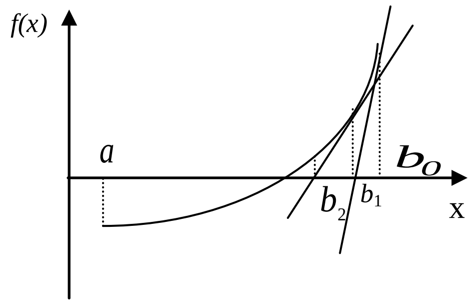
tenglikga ega bo‘lamiz. $f(x)$ funksiya grafigining $B_1 = B_1(b_1, f(b_1))$ nuqtasidan yana urinma o‘tkazamiz

$f(x) - f(b_1) = f'(b_1) \cdot (x - b_1)$

va bu urinmaning Ox o‘qi bilan kesishgan nuqtasini b_2 deb belgilaymiz va

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu jarayonni bir necha marta takrorlab, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ larni hosil qilamiz va har safar $|b_n - b_{n-1}| < \varepsilon$ shartni bajarilishini tekshirib boramiz. Qachon bu shart bajarilsa, hisoblash to‘xtatiladi va b_n (3.1.1) tenglamaning ε aniqlikdagi yechimi bo‘ladi.



3.5.1- rasm

Misol. Ushbu $2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = 0$ tenglamani urunmalar usulida taqribiy yeching ($x_0 = 3;$ $\varepsilon = 0{,}001$).

Yechish. $x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f(x_i)/f'(x_i)$	$x_i - f(x_i)/f'(x_i)$
3.000000	-24.000000	-10.000000	2.400000	0.600000
0.600000	12.672000	-9.040000	-1.401770	2.001770
2.001770	-9.031855	-17.996441	0.501869	1.499901
1.499901	0.001733	-17.499604	-0.000099	1.500000

Javob: *x=   1.500*

Paskal tilida urinmalar usuliga tuzilgan dastur matni:

```
var x0,eps,x1,a:real;
        function f(x:real):real;
                begin
                        f:= x-exp(-x)+2;      { f(x) funksiya ko‘rinishi }
                end;
        function fx(x:real):real;
                begin  fx:=1+exp(-x)      { f’(x) funksiya ko‘rinishi}
                end;
begin     clrscr;
          write('x0='); read(x0);
          write('eps='); read(eps);
          x1:=x0;
    repeat
          a:=f(x1)/fx(x1);   x1:=x1-a;
    until abs(a)<eps;
         writeln('x=',x1:10:4);
      end.
```

3.6. Oddiy iteratsiya usuli

Bizga (3.1.1) tenglamaning $[a,b]$ oraliqdagi yechimini topish talab etilsin. Bu tenglamani

$$x=\varphi(x)$$

ko‘rinishdagi teng kuchli tenglamaga almashtiramiz.

Dastlab $x_0 \in [a,b]$ yaqinlashish tanlab olamiz va

$$x_n=\varphi(x_{n-1}),\ \ n=1,2,\ldots$$

formula yordamida $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ketma-ketlikning qiymatlari hosil qilinadi.

$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ shart bajarilsa, $\bar{x} = x_n$ qiymat tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy ildizi bo‘ladi.

Iteratsiya jarayonining yaqinlashishi. $\varphi(x)$ - funksiya $[a;b]$ da aniqlangan va differensiallanuvchi, hamda $\varphi(x) \in [a;b]$ bo‘lsin. Agar $|\varphi'(x)| < 1$ shart bajarilsa, $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ketma-ketlik ixtiyoriy $x_0 \in [a;b]$ da yaqinlashuvchidir va $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ berilgan tenglamaning yagona ildizi bo‘ladi.

Oddiy iteratsiya usuliga tuzilgan dastur matni:

```
    label 1,2;
    var f0,eps,x,x0:real;
    function f(z:real):real;
    begin
        f:=exp(z)-2     { φ(x) funksiyasining ko‘rinishi}
    end;
begin  clrscr;
        write('x0='); read(x0);
        write('eps='); read(eps);
        x:=x0;
     2: f0:=f(x);
        if abs(x-f0)<=eps then goto 1 else begin x:=f0; goto 2 end;
    1: writeln('x=',x:10:6);
end.
```

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuli yordamida $x^3 + 2x - 5 = 0$ tenglamaning $[0;2]$ oraliqdagi yechimini $\varepsilon = 0{,}1$ aniqlikda toping.
2. $5x^3 + 11x^2 - 24x - 36 = 0$ tenglamani $[-2;1]$ oraliqdagi yechimini

oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuli yordamida $\varepsilon = 0{,}1$ aniqlikda toping.

3. Agar $x_0 = 0{,}5$ bo‘lsa, urinmalar usuli yordamida $x + 2^x - 2 = 0$ tenglama ildizini $\varepsilon = 0{,}1$ aniqlikda toping.

4. Agar $(x_0 = 5)$ bo‘lsa, urinmalar usuli yordamida $3x^3 - 7x^2 - 14x + 24 = 0$ tenglama ildizini $\varepsilon = 0{,}1$ aniqlikda toping.

5. Vatarlar usulidan foydalanib $x + 2\text{-}e^{-x} = 0$ tenglamaning [-1;0] oraliqdagi yechimini $\varepsilon = 0{,}1$ aniqlikda toping.

6. Agar $x_0 = 0{,}5$ bo‘lsa, $cosx$-x+1=0 tenglama ildizini $\varepsilon = 0{,}1$ aniqlikda oddiy iteratsiya usulida toping.

Tayanch so‘z va iboralar

Transцendent tenglama, algebraik almashtirish, ildizlarni ajratish, oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuli, vatarlar usuli, urinmalar usuli, iteratsiya usuli.

Savollar

1. Chiziqsiz tenglama deganda qanday tenglamani tushunasiz?
2. Transsendent tenglama deganda qanday tenglamani tushunasiz?
3. Chiziqsiz va transsendent tenglamalar orasidagi farq nimadan iborat?
4. Chiziqsiz tenglama yechimining mavjudlik sharti.
5. Qanday shartlar bajarilganda *f(x)=0* tenglama [*a*,*b*] oraliqda yagona yechimga ega bo‘ladi?
6. *f(x)=0* tenglama ildizlari qanday usulda ajratiladi?
7. Algebraik almashtirish qanday almashtirish?
8. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuli va uning algoritmi.
9. Vatarlar usuli va uning algoritmi.
10. Urinmalar usuli va uning algoritmi.

11. Oddiy iteratsiya usuli va uning yaqinlashish sharti.

IV-BOB. SONLI INTEGRALLASH USULLARI

4.1. Masalaning qo‘yilishi

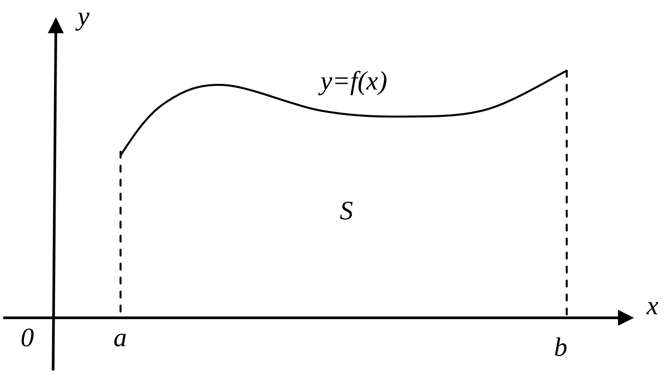
Ma’lumki, ba’zi bir jarayonlarni matematik modellashtirishda jism sirti va hajmini, jism og‘irlik markazi va inersiya momentini, qurilish materiallarida hosil bo‘ladigan kuchlanish va deformatsiyani, biror kuch ta’sirida bajarilagan ish miqdorini hisobga olishga to‘g‘ri keladi. Jarayonning bu mexanik va geometrik xususiyatlari, matematik modelda analitik yoki jadval ko‘rinishda berilgan funksiya integrali shaklida ifodalanadi. Ayrim hollarda qaralayotgan masalaning xossa va xususiyatlariga bog‘liq ravishda bu integrallar shunday ko‘rinishga ega bo‘ladiki, ularni analitik ko‘rinishda aniq integrallash imkoni bo‘lmay qoladi. Bunday hollarda integral qiymatini taqribiy hisoblashga to‘g‘ri keladi.

$[a;b]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz $f(x)$ funksiya berilgan bo‘lib quyidagi:

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{4.1.1}$$

integralni ε aniqlikda hisoblash talab qilinsin.

Oliy matematika kursidan ma’lumki, agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ oraliqda berilgan bo‘lib, $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, u holda (15.1.1) aniq integral qiymati $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng bo‘ladi (4.1.1-rasm).



4.1.1 - rasm

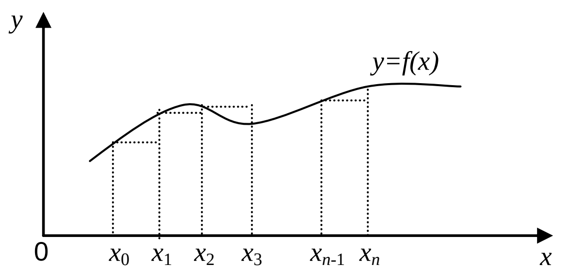
Integrallar qiymatlarini hisoblashda bir necha taqribiy usullardan foydalanish mumkin. Shu usullardan ayrimlari bilan tanishib chiqamiz.

4.2. To‘g‘rito‘rtburchak usuli

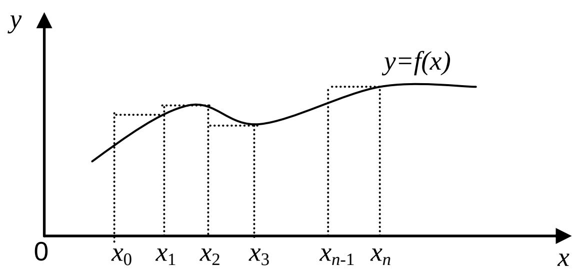
Berilgan $[a;b]$ oraliqni $h=\dfrac{b-a}{n}$ qadam bilan $n+1$ ta oraliqlarga bo‘lamiz. Hosil bo‘lgan oraliqlarda joylashgan egri chiziqli trapetsiya yuzalarini taqribiy ravishda to‘g‘ri to‘rtburchak yuziga almashtiramiz (4.2.1 va 4.2.2 rasmlar). Natijada (4.1.1) integral qiymatini taqribiy hisoblash uchun quyidagi:

$$S=h\sum_{i=0}^{n-1}y_i\,,\quad Q=h\sum_{i=1}^{n}y_i$$

formulalarga ega bo‘lamiz. Bu yerda $x_i=x_{i-1}+h$, $y_i = f(x_i)$, $i=1,2,...,n$, $x_0=a$, $x_n=b$, n – natural son.



4.2.1-расм



4.2.2-расм

To‘g‘ri to‘rtburchak usulida yo‘l qo‘yilgan xatolik quyidagicha aniqlanadi:

$$|I-S|<Mh(b-a),\quad M=max|f^{/}(z)|,\quad z\in[a;b].$$

Misol. $\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}$ integral qiymatini to‘g‘ri to‘rtburchak usuli yordamida taqribiy hisoblang va natijani integralning aniq qiymati $arctg1=\dfrac{\pi}{4}\approx 0{,}785$

bilan taqqoslang.

Yechish. Aniqlik uchun $n = 10$, $\Delta x = 0{,}1$ va $x_k = k \cdot 0{,}1$ $(k = 0{,}1{,}2{,}...{,}10)$ deb olib, integral ostidagi funksiya qiymatini $0{,}001$ aniqlikda hisoblaymiz:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1}{1+(0{,}1)^2} \approx 0{,}990, \quad y_2 = \frac{1}{1+(0{,}2)^2} \approx 0{,}962,$$

$$y_3 = \frac{1}{1+(0{,}3)^2} \approx 0{,}917, \quad y_4 \approx 0{,}862, \quad y_5 = 0{,}800, \quad y_6 \approx 0{,}735,$$

$$y_7 \approx 0{,}671, \quad y_8 \approx 0{,}610, \quad y_9 \approx 0{,}552, \quad y_{10} = 0{,}500.$$

U holda berilgan integralning taqribiy qiymati uchun

$$S = 0{,}1 \cdot (1 + 0{,}990 + 0{,}962 + 0{,}917 + 0{,}862 + 0{,}800 + 0{,}735 + \\ + 0{,}671 + 0{,}610 + 0{,}552) \approx 0{,}810$$

$$Q = 0{,}1 \cdot (0{,}990 + 0{,}962 + 0{,}917 + 0{,}862 + 0{,}800 + 0{,}735 + 0{,}671 + \\ + 0{,}610 + 0{,}552 + 0{,}500) \approx 0{,}755$$

larga ega bo‘lamiz, ya’ni 0,755<0,785<0,810. Bu yerda integralni taqribiy hisoblashda yo‘l qo‘yilgan absolyut xato $|I - S| < 0{,}028$ dan oshmasligini va nisbiy xato esa $\frac{0{,}028 \cdot 100}{0{,}785} \approx 3{,}6\%$ ga tengligini ko‘rishimiz mumkin.

Aniq integral qiymatini to‘g‘ri to‘rtburchak usulida taqribiy hisoblash uchun tuzilgan dastur matni:

```
var a,b,int:real; n:integer;
function f(x:real):real;
begin
    f:=(x*x*x- x*x+5)*exp(-2*x)*sin(x+1)      { f(x) funksiya ko‘rinishi }
end;
procedure turtburchak(a1,b1:real;n1:integer; var int1:real);
var i:integer; h1,c:real;
    begin
```

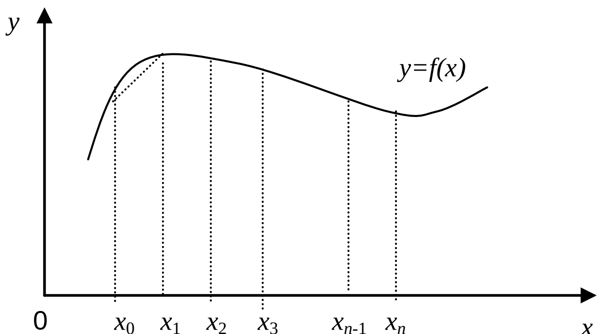
```
                h1:=(b1-a1)/n1;
                c:=0; int1:=0; c:=a1-h1/2;
                for i:=1 to n1 do
                    begin
                        c:=c+h1; int1:=int1+f(c)
                    end;
                int1:=int1*h1;
            end;
    begin clrscr;
        read(a,b,n);
        turtburchak(a,b,n,int);
        writeln('Integral =',int:10:4);
    end.
```

4.3. Trapetsiya usuli

$[a;b]$ oraliqni $x_i = a + i \cdot h$ nuqtalar bilan (bu yerda $i = 1,2,\ldots,n;$ $x_0 = a$, $x_n = b$, n - natural son) $n+1$ ta oraliqlarga ajratamiz va har bir oraliqda egri chiziqli trapetsiya yuzini taqribiy ravishda to‘g‘ri chiziqli trapetsiya yuziga almashtiramiz (4.3.1-rasm), natijada integral qiymatini hisoblash uchun quyidagi taqribiy formulaga ega bo‘lamiz:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = S$$

bu erda I - (4.1.1) integralning aniq qiymati, S - (4.1.1) integralning taqribiy qiymati, $y_i = f(x_i)$.



Xatolikni baholash:

$$|I-S| = R \le \frac{h^2}{12}(b-a)M\ , \quad M = max\left|f^{//}(z)\right|, \quad z \in [a;b].$$

Misol. $I = \int_0^{\pi} sin\, xdx$ integral qiymatini $n = 6$ uchun trapetsiya usulidan foydalanib taqribiy hisoblang.

Echish.

$$S = \frac{\pi}{6}\left(\frac{sin\,0 + sin\,\pi}{2} + sin\frac{\pi}{6} + sin\frac{2\pi}{6} + sin\frac{3\pi}{6} + sin\frac{4\pi}{6} + sin\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(0{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 0{,}5\right) \approx 1{,}9541\,.$$

Agar berilgan integralning aniq qiymati 2 ga tengligini hisobga olsak, yo‘l qo‘yilgan absolyut xato 0,0459 ga, nisbiy xato esa $\frac{0{,}0459 \cdot 100}{2} \approx 2{,}5\,\%$ ga teng ekanligini ko‘ramiz.

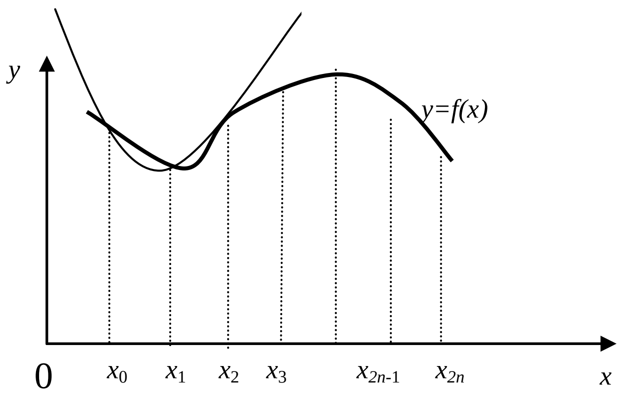
Aniq integral qiymatini trapetsiya usulida taqribiy hisoblash uchun tuzilgan dastur matni:

```
var n1:integer; a,b,i1:real;
      function f(x:real):real;
            begin
               f:=x*exp(-x*ln(2))*cos(x*x+1)
              { f(x) funksiya ko‘rinishi }
            end;
procedure trap1(a1,b1:real;N:integer; var int:real);
```

```
var i:integer; h,s:real;
        begin h:=(b1-a1)/n; s:=(f(a1)+f(b1))/2;
                for i:=1 to n-1 do s:=s+f(a1+i*h);
                int:=s*h;
        end;
begin   clrscr;
        write('a='); read(a); write('b='); read(b);
        write('N='); read(n1);
        trap1(a,b,n1,i1);
        writeln('integral=',i1:10:4);
end.
```

4.4. Simpson usuli

$[a;b]$ oraliqni $h=\dfrac{b-a}{2n}$ qadam bilan $2n$ ta oraliqlarga ajratamiz (4.4.1-rasm). $x_0=a$, $x_{2n}=b$, $y_i = f(x_i)$, $i=1,2,...,2n$. n - natural son.



4.4.1-расм

Uzunligi $2h$ ga teng bo‘lgan $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, …, $[x_{2n-2},x_{2n}]$ oraliqlar uchun Simpson formulasi

$$\int_{x_0}^{x_2} y(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)$$

ni qo‘llaymiz. Natijada integral qiymatini taqribiy hisoblash uchun

$$\int_a^b y(x)dx \approx S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

yoki

$$\int_a^b y(x)dx \approx S = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})]$$

formulaga ega bo‘lamiz. Bu formula integral qiymatini taqribiy hisoblash uchun umumlashgan Simpson formulasi deb ataladi. Oxirgi formulani

$$S = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2n} + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} \right)$$

ko‘rinishda yozish ham mumkin. Simpson usulida yo‘l qo‘yilgan xatolik quyidagicha $R \le \frac{(b-a)h^4}{180} \cdot M$, $M = max\left| f^{IV}(z) \right|$, $z \in [a,b]$ baholanadi.

Misol. Daryo kengligi 20 metrga teng. Daryo chuqurligi ko‘ndalang kesimi bo‘yicha har 2 metr oraliqda o‘lchab chiqildi. O‘lchash natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan.

x (metr)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y (metr)	0,2	0,5	0,9	1,1	1,3	1,7	2,1	1,5	1,1	0,6	0,2

Daryo ko‘ndalang kesimi yuzasini trapetsiya va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblang.

Echish. Trapetsiya formulasi bo‘yicha:

$$S = 2\left(\frac{0,2+0,2}{2} + 0,5 + 0,9 + 1,1 + 1,3 + 1,7 + 2,1 + 1,5 + 1,1 + 0,6 \right) = 22\text{м}^2$$

Simpson formulasi bo‘yicha:

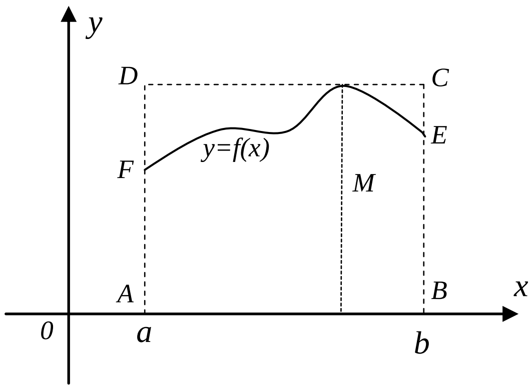
$$S = \frac{2}{3}(0,2 + 4 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,9 + 4 \cdot 1,1 + 2 \cdot 1,3 + 4 \cdot 1,7 + 2 \cdot 2,1 + 4 \cdot 1,5 +$$
$$+ 2 \cdot 1,1 + 4 \cdot 0,6 + 0,2) = 21,9\text{м}^2$$

Aniq integral qiymatini Simpson usulida taqribiy hisoblash uchun tuzilgan dastur matni:

```
var a,b,int1:real; n:integer;
  function f(x:real):real;
        begin
             f:=(x+3)*exp(x)*sin(x*x*x)   { f(x) funksiyaning ko'rinishi }
        end;
  procedure simps(a,b:real;n:integer;var int:real);
     var h,s,s1,s2:real; i:integer;
       begin  h:=(b-a)/(2*n);
               s1:=0; s2:=0;  s:=f(a)+f(b);
               for i:=1 to n do s1:=s1+f(a+(2*i-1)*h);
              for i:=1 to n-1 do s2:=s2+f(a+2*i*h);
              int:=h*(s+4*s1+2*s2)/3;
       end;
  begin     clrscr;
            write('a='); read(a);   write('b='); read(b);
            write('n='); read(n);   simps(a,b,n,int1);
            writeln('integral=',int1:10:4);
  end.
```

4.5. Monte-Karlo usuli

Bu usul extimolning geometrik va statistik ta'riflarini muvofiqlashtirishdan kelib chiqqan. Buning uchun $y = f(x)$ funksiyani $a \le x \le b$ oraliqdagi yuqori chegarasi $|f(x)| < M$ topiladi (4.5.1-rasm).



4.5.1-rasm.

U xolda

$$S_{ABCD} = M \cdot (b - a); \quad S_{ABEF} = \int_a^b f(x)dx.$$

Ikkinchi tarafdan extimolning geometrik ta'rifiga ko'ra $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakdan olingan ixtiyoriy nuqtani $ABEF$ egri chiziqli trapetsiyaga tegishli bo'lish xodisasining extimoli

$$P(A) = \frac{S_{ABEF}}{S_{ABCD}} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{S_{ABCD}}$$

$$\int_a^b f(x)dx = P(A) \cdot S_{ABCD} \qquad (4.5.1)$$

Agar A – tasodifiy hodisa $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakdan olingan ixtiyoriy nuqtani $ABEF$ egri chiziqli trapetsiyaga tegishli bo'lish xodisasi desak, bu xodisaning ehtimolini hisoblash uchun ehtimolning statistik ta'rifidan foydalanamiz. Buning uchun $[a, b]$ oraliqda tekis taqsimlangan x_i tasodifiy miqdorlar va $[0; M]$ oraliqda tekis taqsimlangan y_i tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini tuzamiz. Buning uchun komputerda mavjud bo'lgan psevdotasodifiy miqdorlar generatoridan foydalanish mumkin. Hosil bo'lgan (x_i, y_i), $(i = \overline{1, n})$ nuqtalar $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakka tegishli bo'ladi. Bu nuqtalardan $ABEF$ trapetsiyaga tegishlilarini ajratamiz. Buning uchun $y_i \le f(x_i)$ shart bajarilishi kerak. Bunday nuqtalar soni m ta bo'lsin. U holda *A* – hodisa ehtimoli uchun

$$P(A) \approx \frac{m}{n} \qquad (4.5.2)$$

formuladan foydalanish mumkin. n – qanchalik katta bo'lsa (4.5.2) formula shunchalik aniq bo'ladi. (4.5.2) formuladan *A* – hodisa ehtimoli uchun topilgan qiymatni (4.5.1) formulaga olib borib qo'yamiz va

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{m}{n}\cdot S_{ABCE} = \frac{m}{n}\cdot M\cdot(b-a)$$

formulani hosil qilamiz. Integralni bu usulda hisoblash Monte-Karlo usuli deyiladi.

Agar biz yuqorida keltirilgan taqribiy integrallash formulalari aniqligi haqida gapiradigan bo‘lsak, bu erda eng yuqori aniqlikga ega bo‘lgan usul – Simpson usulidir. Undan keyingi aniqroq usul esa – trapetsiya usuli. To‘g‘ri to‘rtburchak usuli esa bu usullar orasida eng katta xatolikka yo‘l qo‘yiladigan usul hisoblanadi.

Mustaqil echish uchun misollar

1. $\int_0^1 (2x^2-4x+2)dx$ integralni $n=5$ uchun to‘g‘ri to‘rtburchak usuli yordamida taqribiy hisoblang.
2. $\int_0^1 (5x^2-6x+1)dx$ integralni $n=10$ uchun to‘g‘ri to‘rtburchak usuli yordamida taqribiy hisoblang.
3. $\int_0^1 (x^2-x+1)dx$ integralni $n=10$ uchun trapetsiya usuli yordamida taqribiy hisoblang.
4. $\int_1^3 (2x^2+x+1)dx$ integralni $n=5$ uchun trapetsiya usuli yordamida taqribiy hisoblang.
5. $\int_0^1 (5x^2-6x+1)dx$ integralni $n=5$ uchun Simpson usuli yordamida taqribiy hisoblang.
6. $\int_0^2 (3x^2-2x-6)dx$ integralni $n=10$ uchun Simpson usuli yordamida taqribiy hisoblang.

Tayanch so‘z va iboralar

Aniq integral, trapeцiya usuli, iteratsiya usuli, Simpson usuli, Monte-

Karlo, extimol, tasodifiy xodisa, psevdotasodifiy miqdor, absolyut va nisbiy xatoliklar.

Savollar

1. Aniq integralning geometrik ma’nosini nimadan iborat?
2. Taqribiy integrallash deganda nimani tushunasiz?
3. Taqribiy integrallashda to‘g‘ri to‘rtburchak usuli va uning algoritmi.
4. Taqribiy integrallashda trapetsiya usuli va uning algoritmi.
5. Taqribiy integrallashda Simpson usuli va uning algoritmi.
6. Taqribiy integrallashda xatoliklar qanday aniqlanadi?

V-BOB. INTERPOLYATSION FORMULALAR

5.1. Asosiy tushunchalar

Funksiyani approksimatsiyalash (unga yaqin taqribiy funksiyaga aylantirish) nafaqat injenerlik amaliyotida, balki yanada murakkabroq masalalar, masalan differensial tenglamalarni yechishda ham foydalaniladi. x va y o‘zgaruvchilar orasida o‘zaro $y = f(x)$ bog‘lanish berilgan bo‘lsin. Matematika fanidan ma’lumki bu bog‘lanish analitik, grafik, jadval yoki rekkurent ko‘rinishlarda bo‘ladi. Amaliyotda, masalan o‘tkazilgan tajriba (eksperiment) natijalari asosan jadval, ya’ni $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{n}$ ko‘rinishda beriladi. Funksiyaning bu ko‘rinishda berilishi, undan foydalanish imkoniyatini chegaralab qo‘yadi. Chunki funksiya bu ko‘rinishda berilsa, uning faqat $x = x_i$ tugun nuqtalardagi qiymatlari ma’lum bo‘ladi. Amaliyotda esa y ning x_i nuqtalardan boshqa nuqtalardagi qiymatlaridan foydalanish zaruriyati paydo bo‘ladi. Bu qiymatlarni olish uchun esa, katta mablag‘ talab qiladigan tajribalar o‘tkazish kerak bo‘ladi. Qo‘shimcha tajribalar o‘tkazmasdan oraliq nuqtalarda y ning qiymatlarini taqribiy aniqlash mumkinmi? Ha, buning uchun jadval ko‘rinishda berilgan funksiyani aproksimatsiyalash formulalaridan foydalaniladi.

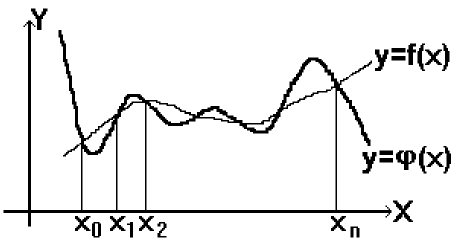
Umuman olganda, $[a,b]$ oraliqda jadval ko‘rinishda berilgan funksiyaning qiymatlaridan, shu oraliqga tegishli ixtiyoriy nuqtalarda funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblashda foydalanish mumkin. Buning uchun $y=f(x)$ funksiyani approksimatsiyalash usulidan foydalaniladi. Jadval ko‘rinishda berilgan $f(x)$ funksiyani approksimatsiyalash bu funksiyani unga yaqin qandaydir analitik $\varphi(x)$ funksiya bilan taqribiy almashtirish kerakki, ularning qiymatlari bir-biridan yetarlicha kam farq qiladi. $\varphi(x)$ funksiya approksimalovchi funksiya deb ataladi. Agar bu $\varphi(x)$ funksiya hosil qilingan bo‘lsa, ixtiyoriy x larda uning qiymatlarini hisoblash mumkin va bu qiymat taqriban *f(x)* ga teng bo‘ladi. Ko‘pgina hollarda φ(x) funksiya sifatida, ko‘phadlar olinadi:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ .$$

Bu yerda a_i sonli koeffisientlar shunday tanlanadiki, φ(x) va f(x) funksiyalar qiymatlari bir-biriga yaqin bo‘ladi.

Funksiyani approksimatsiyalashning asosiy ko‘rinishlaridan biri bu interpolyasiya (5.1.1–rasm) hisoblanadi. Shunday $\varphi(x)$ ko‘pxad qurish kerakki uning jadval nuqtalardagi qiymatlari $f(x)$ funksiya qiymatlari bilan ustma-ust tushadi, ya’ni $\varphi(x_i)=y_i$, $i= 0,1,\ ...,\ n,\ x_0=a,\ x_n=b$.

Bu yerda x_i lar har xil deb hisoblanadi ya’ni, $i\neq j$ lar uchun $x_i\neq x_j$. x_i lar interpolyasiya *tugun nuqtalari*, $\varphi(x)$ ko‘pxad esa *interpolyasiya ko‘pxadi* deb ataladi.



5.1.1- rasm

Shunday qilib, interpolyasiyaning asosiy xususiyati quyidagicha: approksimalovchi $\varphi(x)$ ko‘pxad jadval nuqtalaridan o‘tadi va *[a,b]* oraliqning boshqa nuqtalarida *f(x)* funksiyani qandaydir aniqlikda ifodalab beradi.

Agar *f(x)* funksiya *[a,b]* butun oraliqda yagona ko‘phad bilan interpolyasiya qilingan bo‘lsa, bu *global interpolyasiya* deb, agar *[a,b]* ning har xil qismlarida turli xil ko‘phadlar bilan interpolyasiya qilingan bo‘lsa, bu *lokal (bo‘lakli, ko‘pintervalli) interpolyasiya* deb ataladi.

5.2. Chekli ayirmalar

Faraz qilaylik

$$y = f(x)$$

funksiya berilgan bo‘lib, $\Delta x = h = const$ argument orttirmasi(qadam) bo‘lsin. U holda

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

ayirmaga, $y = f(x)$ funksiyaning birinchi tartibli chekli ayirmasi deb ataladi.

Xuddi shunga o‘xshash ikkinchi tartibli chekli ayirma,

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta f(x)) = f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) + f(x) =$$
$$= f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)$$

yoki

$$\Delta^2 y = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)$$

formula yordamida aniqlanadi.

Yuqori tartibli chekli ayirmalarni hisoblash uchun

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y); \qquad n = 2,3,...$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Har xil tartibli chekli ayirmalarni gorizontal (1-jadval) va diagonal (2-jadval) jadval ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

1-jadval

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

2-

jadval

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
			$\Delta^2 y_0$	
x_1	y_1			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2			
			$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Masalan x_0 va $h=1$ bo‘lganda $y=2x^3-2x^2+3x-1$ funksiya uchun chekli ayirmalar jadvali quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	-1	3	8	12
1	2	11	20	12
2	13	31	32	12
3	44	63	44	12
4	107	107	56	12
5	214	163	68	12
…	…	…	…	…

Misol. $\Delta x=1$ uchun $f(x)=x^3$ funksiyaning chekli ayirmalarini hisoblang.

Echish.

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1,$$

$$\Delta^3 f(x)=\Delta(\Delta^2 f(x))=\Delta^2 f(x+\Delta x)-\Delta^2 f(x)=6(x+1)+6-(6x+6)=6,$$

$$\Delta^4 f(x)=\Delta(\Delta^3 f(x))=\Delta^3 f(x+\Delta x)-\Delta^3 f(x)=6-6=0,$$

Ixtiyoriy $n>3$ lar uchun $\Delta^n f(x)=0$ bo‘ladi.

Agar

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+\mathrm{a}_{\mathrm{n-1}}x+a_n$$

n – tartibli ko‘phad bo‘lsa $\Delta^n P_n(x)=n!\,a_0h^n=const$, $k>n$ lar uchun esa $\Delta^k P_n(x)=0$ bo‘ladi. Bu yerda $h=\Delta x$.

Ko‘pgina hollarda $y=f(x)$ funksiyaning bir xil uzoqlikda joylashgan $x_i\ (i=0,1,2,\ldots)$ nuqtalardagi $y_i=f(x_i)$ qiymatlari berilgan bo‘ladi.

Jadval ko‘rinishda berilgan $y_i=f(x_i)$ lar uchun chekli ayirmalar

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i\ ,$$

$$\Delta^2 y_i=\Delta(\Delta y_i)=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i\ ,$$

$$\Delta^3 y_i=\Delta(\Delta^2 y_i)=\Delta^2 y_{i+1}-\Delta^2 y_i=y_{i+3}-3y_{i+2}+3y_{i+1}-y_i\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^n y_i=y_{n+i}-C_n^1y_{n+i-1}+C_n^2y_{n+i-2}-\ldots+(-1)^n y_i$$

formulalar yordamida hisoblanadi. Bu erda

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(m-1)]}{m!}.$$

5.3. Umumlashgan daraja

x sonining n-umumlashgan darajasi deb,

$x(x-h)(x-2h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-1)h]$ ko‘paytmaga aytiladi va u $x^{[n]}$ deb belgilanadi:

$$x^{[n]}=x(x-h)(x-2h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-1)h],$$

bu yerda $h-$o‘zgarmas son.

Odatda $x^{[0]}=1$ deb olinadi. $h=0$ da umumlashgan daraja oddiy daraja bilan ustma-ust tushadi: $x^{[n]}=x^n$.

Umumlashgan daraja uchun chekli ayirmalar quyidagicha hisoblanadi:

1- tartibli chekli ayirma:

$$\Delta x^{[n]}=(x+h)^{[n]}-x^{[n]}=$$

$$=(x+h)x\cdot\ldots\cdot[x-(n-2)h]-x(x-h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-1)h]=$$

$$=x(x-h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-2)h]\cdot\{(x+h)-[x-(n-1)h]\}=$$

$$=x(x-h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-2)h]\cdot nh=nhx^{[n-1]},$$

yoki

$$\Delta x^{[n]}=nhx^{[n-1]}.$$

2- tartibli chekli ayirma:

$$\Delta^2x^{[n]}=\Delta(\Delta x^{[n]})=\Delta(nhx^{[n-1]})=nh(n-1)hx^{[n-2]}=nh^2(n-1)x^{[n-2]},$$

yoki

$$\Delta^2x^{[n]}=nh^2(n-1)x^{[n-2]}$$

ko‘rinishida yoziladi.

Matematik induksiya metodi yordamida isbotlash mumkinki, $k-$ tartibli chekli ayirma uchun

$$\Delta^kx^{[n]}=n(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)]h^kx^{[n-k]}$$

formula o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $k=1, 2, 3, \ldots, n.$ Shu bilan birga $k>n$ bo‘lsa, $\Delta^kx^{[n]}=0$ bo‘ladi.

5.4. Interpolyasiya masalasining quyilishi

$[a,b]$ oraliqda $n+1$ ta $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tugun nuqtalar berilgan bo‘lib, ularda $f(x)$ funksiyaning $f(x_0)=y_0$, $f(x_1)=y_1$, $\ldots$, $f(x_n)=y_n$ qiymatlari berilgan bo‘lsin. Darajasi n dan kam bo‘lmagan shunday $F(x)$ ko‘phad tuzish talab qilinadiki, bu funksiyaning $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tugun nuqtalardagi qiymatlari mos ravishda $f(x)$ funksiya qiymatlariga teng bo‘lsin, ya’ni $F(x_0)=y_0$, $F(x_1)=y_1$, … , $F(x_n)=y_n$. Bu erda $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tugun nuqtalar interpolyasiya nuqtalari deb, $F(x)$ funksiya esa interpolyasiya funksiyasi deb ataladi.

Yuqoridagi berilgan masala, jadval ko‘rinishda berilgan $f(x)$ funksiyani $F(x)$ funksiyaga interpolyasiyalash masalasi deb ataladi.

Umuman olganda interpolyasiyalash masalasi cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lishi yoki bitta ham yechimga ega bo‘lmasligi mumkin.

Agar interpolyasiyalash masalasida $F(x)$ funksiya o‘rniga, darajasi n dan oshmaydigan $P_n(x)$ ko‘phad hosil qilish talab etilsa, u holda masala bir qiymatli yechimga ega bo‘ladi.

Hosil qilingan $y=F(x)$ interpolyasiya funksiya x ning tugun nuqtalaridan boshqa qiymatlarida $f(x)$ funksiya qiymatini taqribiy hisoblash imkoniyatini beradi.

Interpolyasiyalash masalasi matematik modellashtirish masalalarini yechishda keng foydalaniladi. Masalan o‘rganilayotgan ob’ekt eksperiment (tajriba) usulida modellashtirilgan bo‘lsa, ob’ekt xossa va xususiyatlarining o‘lchash natijalari jadval ko‘rinishida berilgan bo‘ladi. Agar ob’ektning o‘lchash (tajriba o‘tkazish) oraliqlaridagi qiymatlari kerak bo‘lsa, ular tajriba natijalar orqali tuzilgan interpolyasiya funksiyalar yordamida aniqlanadi.

5.5. Nyuton interpolyasion formulalari

Teng o‘zoqlikda joylashgan $x_i = x_i + ih$ (i = 0,1,...,n) tugun nuqtalarda $y = f(x)$ funksiyaning $y_i = f(x_i)$ qiymatlari berilgan bo‘lsin. Bu erda h – interpolyasiya qadami.

Darajasi n dan katta bo‘lmagan va x_i tugun nuqtalarda

$$P_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n) \tag{5.5.1}$$

shartlarni qanoatlantiradigan $P_n(x)$ ko‘phad tuzish talab qilinsin.

Ma’lumki, (5.5.1) formula $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ lar uchun $\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0$ tenglik bilan teng kuchli.

$P_n(x)$ ko‘phadni

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdot \ldots \cdot(x - x_{n-1})$$

ko‘rinishda, yoki

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_0)^{[3]} + \ldots + a_n(x - x_0)^{[n]} \tag{5.5.2}$$

umumlashgan daraja ko‘rinishda qidiramiz. Bu yerda $a_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ lar hozircha noma’lum koeffisientlar.

(5.5.2) da $x = x_0$ deb $P_n(x_0) = y_0 = a_0$ ni hosil qilamiz. a_1 koeffisientni topish uchun birinchi tartibli

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)^{[1]} h + 3a_3(x - x_0)^{[2]} h + \ldots + na_n(x - x_0)^{[n-1]} h$$

chekli ayirmani tuzib olamiz va u yerda $x = x_0$ deb $\Delta P_n(x_0) = \Delta y_0 = a_1 h$ yoki bundan $a_1 = \dfrac{\Delta y_0}{1!\cdot h}$ ga ega bo‘lamiz.

Xuddi yuqoridagi kabi amallarni bajarib, a_i lar uchun

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!\cdot h^i} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Topilgan a_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ larning qiymatlarini (5.5.2) ga olib borib qo‘yib

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x - x_0)^{[2]} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x - x_0)^{[n]} \tag{5.5.3}$$

Nyutonning birinchi interpolyasiya formulasini hosil qilamiz.

(5.5.3) da $q=\frac{x-x_0}{h}$ (x_0 nuqtadan x nuqtagacha bo‘lgan h qadamlar soni) yangi o‘zgaruvchi kiritib va

$$\frac{(x-x_0)^{[i]}}{h^i}=\frac{(x-x_0)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-h)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-2h)}{h}\cdot\ldots\cdot\frac{[x-x_0-(i-1)h]}{h}=$$

$$=q(q-1)(q-2)\cdot\ldots\cdot(q-i-1)\qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

ekanligini hisobga olsak, Nyutonning birinchi interpolyasiya formulasini

$$P_n(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+\frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin.

Nyutonning ikkinchi interpolyasiya formulasi

$$P_n(x)=y_n+q\Delta y_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\ldots+\frac{q(q+1)\cdot\ldots\cdot(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, bu yerda $q=\frac{x-x_n}{h}$ (x_n nuqtadan x nuqtagacha bo‘lgan h qadamlar soni).

Nyuton interpolyasiya formulalarining qaysi biridan qachon va qanday holda foydalanish maqsadga muvofiq?

Agar $x<x_0$ $(q<0)$ va x ning qiymati x_0 ga yaqin bo‘lsa, Nyutonning 1-interpolyasiya formulasidan, agar $x>x_n$ $(q>0)$ va x ning qiymati x_n ga yaqin bo‘lsa, Nyutonning 2-interpolyasiya formulasidan foydalanish yaxshi natijalarga olib keladi.

Misol. Quyidagi jadval

x	0	1	2	3	4	5
y	5,2	8,0	10,4	12,4	14,0	15,2

ko‘rinishida berilgan funksiya uchun Nyutonning 1-interpolyasiya formulasini tuzing.

Echish. Jadvaldan ko'rinib turibdiki, $x_0 = 0$ va $h = 1$. Dastlab berilgan funksiya uchun gorizontal chekli ayirmalar jadvalini tuzib olamiz.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	5,2	2,8	-0,4
1	8,0	2,4	-0,4
2	10,4	2,0	-0,4
3	12,4	1,6	-0,4
4	14,0	1,2	
5	15,2		

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki, ikkinchi tartibli ayirmalar o'zgarmas, u holda $\Delta^3 y = 0$ bo'ladi. Shu sababli (3) formuladan

$$y_2(x) = 5{,}2 + 2{,}8x - \frac{0{,}4}{2}x(x-1)$$

yoki

$$y_2(x) = 5{,}2 + 3x - 0{,}2x^2$$

ga ega bo'lamiz.

Nyuton interpolyasiya formulalari interpolyasiyalash qadami o'zgarmas bo'lganda o'rinli bo'ladi. Lekin ko'pgina hollarda funksiya qiymatlari teng uzoqlikda joylashmagan x_i lar (interpolyasiya qadami o'zgaruvchi) uchun jadval ko'rinishda beriladi. Bunday hollarda Lagranj interpolyasiya formulasidan foydalaniladi.

5.6. Lagranj interpolyasion formulasi

$[a;b]$ oraliqda o'zgaruvchi x ning $n+1$ ta $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ tugun qiymatlari va ularga mos $y = f(x)$ funksiya qiymatlari $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $\dots$, $f(x_n) = y_n$ berilgan bo'lsin.

Darajasi n dan katta bo'lmagan va x_i tugun nuqtalarda

$$L_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\dots,n) \tag{5.6.1}$$

shartlarni qanoatlantiradigan $L_n(x)$ ko‘phadni tuzish talab qilinsin.

Dastlab, shunday $p_i(x)$ ko‘phad tuzib olaylikki, u

$$p_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{агар} \quad i=j;\\ 0, & \text{агар} \quad i\neq j,\end{cases}$$

shartni qanoatlantirsin. Bu erda δ_{ij} - Kronekker belgisi.

Izlanayotgan ko‘phad n ta $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ tugun nuqtalarda nolga aylanadi, shu sababli uni

$$p_i(x)=C_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) \tag{5.6.2}$$

ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

Agar (5.6.2) da $x=x_i$ deb va

$$p_i(x_i)=C_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)=1$$

ekanligini hisobga olsak,

$$C_i=\frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \tag{5.6.3}$$

ga ega bo‘lamiz. (5.6.3) ni (5.6.2) ga qo‘yib,

$$p_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \tag{5.6.4}$$

ni hosil qilamiz.

Endi (5.6.1) shartni qanoatlantiruvchi $L_n(x)$ ko‘phadni

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} p_i(x)y_i \tag{5.6.5}$$

ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

(5.6.5) darajasi n dan katta bo‘lmagan ko‘phad bo‘lib, (5.6.1) shartni qanoatlantiradi:

$$L_n(x_j)=\sum_{i=0}^{n} p_i(x_j)y_i=p_j(x_j)y_j=y_j \qquad (j=0, 1, 2, \dots, n)$$

(5.6.4) ni (5.6.5) ga olib borib qo‘yib,

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (5.6.6)$$

Lagranjning interpolyasiya ko‘phadini hosil qilamiz.

Misol. Berilgan $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$ nuqtalarga mos ravishda $y_0=1$, $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=0$ qiymatlarni qabul qiladigan funksiya uchun Lagranj ko‘phadini tuzing.

Echish. (5.6.6) formulaga asosan

$$L_2(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot 1+\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}\cdot 0=$$

$$=6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)-9x\left(x-\frac{1}{2}\right)=(3x-1)(2x-1)-9x^2+4{,}5x=-3x^2-0{,}5x+1$$

yoki

$$L_2(x)=-3x^2-0{,}5x+1$$

ga ega bo‘lamiz.

Lagranj interpolyasiya formulasiga tuzilgan dastur matni:

```
const n=2;
type vek=array[0..n] of real;
var   i,j:integer;
      x,y:vek; x1,y1:real;
procedure lagran(x:real; k:integer; px,py:vek; var lag:real);
var s1:real;
begin
      lag:=0;
      for i:=0 to k do
            begin s1:=1.0;
```

```
                for j:=0 to i-1 do s1:=s1*(x-px[j])/(px[i]-px[j]);
                for j:=i+1 to k do s1:=s1*(x-px[j])/(px[i]-px[j]);
                lag:=lag+s1*py[i]
            end;
end;
begin
        write('x='); read(x1)
        for i:=0 to n do begin write('x[',i:1,']='); read(x[i]) end;
        for i:=0 to n do begin write('y[',i:1,']='); read(y[i]) end;
        lagran(x1,n,x,y,y1);
        writeln('y=',y1:8:5);
end.
```

5.7. Ko‘pintervalli interpolyasiya

Agar funksiya jadval ko‘rinishda berilgan bo‘lib, unda tugun nuqtalar soni n+1 ta bo‘lsa, Nyuton va Lagranj interpolyasiya formulalari n – tartibli ko‘phaddan iborat bo‘ladi. Nuqtalar soni qancha ko‘p bo‘lsa, shuncha yuqori tartibli ko‘phadlardan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Bu esa o‘z navbatida murakkab hisoblashlarni bajarishga, natijada xatoliklarga yo‘l qo‘yishga olib keladi. Xuddi shunday muammoga katta oraliqlarda interpolyasiya formulalaridan foydalanishda ham duch kelish mumkin. Chunki katta oraliqlarda aniqlik kam bo‘ladi. Agar oraliqni kichiklashtirsak u holda tugun nuqtalar soni ko‘payib, ko‘phad darajasi oshib ketadi.

Bu kabi hollarda darajasi yuqori bo‘lmagan ko‘phadlar yordamida lokal interpolyasiyalash usulidan foydalanish maqsadga muvofiq bo‘ladi. [a,b] oraliqni qandaydir $a=\gamma_0<\gamma_1<\ldots\gamma_m<\gamma_{m+1}=b$ kesmalarga ajratamiz. Bu kesmalarning har biri bir necha tugun nuqtalarni o‘z ichiga olsin. γ_0, γ_1,…γ_m, γ_{m+1} larni shunday tanlaymizki, ular jadvalda berilgan tugun nuqtalardan ayrimlariga mos kelsin. Har bir $I_k=[\gamma_{k-1},\gamma_k]$ (k=1,...,m) kesmada joylashgan tugun nuqtalar yordamida $g_k(x)$ interpolyasiya ko‘phadini tuzamiz. Bu ko‘phadning darajasi yuqori bo‘lmaydi, chunki har bir kesmada tugun nuqtalar soni ko‘p emas. $g_k(x)$ $(k=1,...,m)$ ko‘phadlarni birlashtirib $g(x)$ ko‘phadni hosil qilamiz. Bu ko‘phad odatda bo‘lakli-ko‘phad deb ataladi va u oraliqning ixtiyoriy nuqtasida $f(x)$ funksiyaning taqribiy qiymatini hisoblash imkonini beradi.

Har qanday berilgan x da funksiya qiymatini ko‘pintervalli interpolyasiya formulasi yordamida hisoblash qo‘yidagi algoritm asosida amalga oshiriladi:

1. x nuqta qaysi $[\gamma_k,\gamma_{k+1}]$ kesmaga tegishliligi aniqlanadi.
2. Shu kesmadagi tugun nuqtalar yordamida tuzilgan interpolyasiya formula yordamida funksiya qiymati $y= g_k(x)\approx f(x)$ hisoblanadi.

Ko‘pintervalli interpolyasiya formulasi quyidagi xossalarga ega:

1. Interpolyasiya ko‘phadining darajasi tugun nuqtalar soniga bog‘liq bo‘lmaydi. Haqiqatan, tugun nuqtalarni oshishi bilan kesmalar soni m ni, shunday oshirish mumkinki, natijada kesmadagi tugun nuqtalar soni oshmasdan qoladi.
2. O‘zgarmas $[a,b]$ oraliqda kesmalar soni oshishi hisobiga interpolyasiya xatoligi nolga intiladi.
3. Ko‘phad darajasi yuqori bo‘lmaganligi uchun uning qiymatlarini hisoblash qulay va unga kam vaqt sarflanadi.

Takidlab o‘tish kerakki, $g(x)$ funksiya kesmalar birlashgan γ_k nuqtada uzluksiz, lekin uning birinchi tartibli hosilasi bu nuqtada uzulishga ega. Lokal interpolyasiyalash usulining bu kamchiligini splayn funksiyasidan foydalanish orqali bartaraf etish mumkin.

5.8. Parabolik splayn funksiyalar

$[a,b]$ oraliqda o‘zi va bir necha tartibli hosilalari uzluksiz hamda $[x_i, x_{i+1}]$ kesmada algebraik ko‘phaddan iborat bo‘lgan bo‘lakli-berilgan funksiyaga *splayn funksiya* deb ataladi.

Barcha $[x_i,\ x_{i+1}]$ kesmalardagi algebraik ko‘phadlarning maksimal darajasi *splayn funksiya darajasi* deb ataladi.

Splayn funksiya darajasi va $[a,b]$ oraliqda uzluksiz hosilaning yuqori tartibi orasidagi farq splayn *funksiya defekti* deb ataladi.

Splayn funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaning tugun nuqtadagi qiymati uning shu tugun nuqtadagi *og‘ishi* deb ataladi.

Ikkinchi tartibli va defekti birga teng bo‘lgan splayn funksiya qurish masalasini ko‘rib chiqamiz. Soddalik uchun bizga to‘rtta tugun nuqtada quyidagi jadval funksiya berilgan bo‘lsin:

x	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_1	y_2	y_3	y_4

Kesmalar sifatida $I_i=[x_i,x_{i+1}]$, $i=1,2,3$ larni tanlaymiz. Har bir kesma ikkitadan tugun nuqtalarni o‘z ichiga olgan. Parobolaning uchta koeffisientini aniqlash uchun uchta tenglama zarur bo‘ladi. Berilgan nuqtalar yordamida ikkita tenglama hosil qilishimiz mumkin. Uchinchi tenglamani hosil qilish uchun kesmadagi paraboladan navbatdagi kesmadagi parobolaga silliq o‘tish shartidan foydalanamiz.

Har bir I_i kesmaga mos keluvchi parabolani

$$g_i(x) = a_{i2}x^2 + a_{i1}x + a_{i0}\ ,\ i=1,2,3$$

ko‘rinishda qidiramiz. Bu holda uchta parabolaning birlashmasidan iborat splayn funksiya to‘qqizta a_{ij} koeffisient orqali aniqlanadi. Oltita tenglamani har bir parabola berilgan tugun nuqtalardan o‘tishligi shartidan hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} &g_1(x_1) = y_1, g_1(x_2) = y_2, \\ &g_2(x_2) = y_2, g_2(x_3) = y_3, \\ &g_3(x_3) = y_3, g_3(x_4) = y_4, \end{aligned} \qquad (5.8.1)$$

Parabolalarning birlashish nuqtalarida bo‘lakli funksiyaning differensiallanuvchiligidan foydalanamiz:

$$g_1'(x_2) = g_2'(x_2), \quad g_2'(x_3) = g_3'(x_3), \qquad (5.8.2)$$

Sakkizta (5.8.1) va (5.8.2) tenglama yordamida berilgan tugun nuqtalardan o‘tuvchi cheksiz ko‘p splayn funksiya hosil qilish mumkin. Splayn funksiya yagona bo‘lishi uchun yana bitta shart kerak bo‘ladi. Bu shart splayn funksiyaning biror tugun nuqtadagi og‘ishini berish orqali aniqlanadi, masalan

$$g_1'(x_1) = d \tag{5.8.3}$$

bu yerda *d*-berilgan kattalik. Hosil qilingan tenglamalar sistemasini yechib, a_{ij} koeffisientlar aniqlanadi. Natijada I_i kesmaga mos keluvchi splayn funksiyani hosil qilamiz:

$$g(x) = g_i(x) \quad \text{agar} \quad x \in I_i\,.$$

Umumiy holda, ya’ni $y=f(x)$ funksiya n ta nuqtada berilgan bo‘lsa, splayn funksiya xuddi yuqorida keltirilgan usuldek quriladi. Tugun nuqtalarni $(n\text{-}1)$ ta $I_i=[x_i,x_{i+1}]$, $i=1,\ldots, n\text{-}1$ kesamalarga ajratamiz. Bu holda parabolalar soni ham $(n\text{-}1)$ ta bo‘ladi va ularni aniqlash uchun $3(n\text{-}1)$ ta noma’lum koeffisientlar zarur bo‘ladi. $3(n\text{-}1)$ ta noma’lumni aniqlash uchun shuncha tenglama hosil qilish kerak. Har bir parabola uchun interpolyasiya shartlari:

$$g_i(x_i) = y_i, \qquad g_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i=1,\ldots, n\text{-}1$$

yordamida $2(n\text{-}1)$ ta tenglamani hosil qilamiz.

$(n\text{-}2)$ ta nuqtada parabolalar kesishadi, bu nuqtalarda splayn funksiyaning differensiallanuvchiligidan foydalanib, yana $(n\text{-}2)$ ta tenglama hosil qilamiz:

$$g_i'(x_{i+1}) = g_{i+1}'(x_{i+1}),\; i=1,\ldots, n\text{-}2.$$

Natijada $(3n\text{-}3)$ ta noma’lumli $2(n\text{-}1)+(n\text{-}2)=3n\text{-}4$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu sistemaga yana bitta (5.8.3) tenglamani qo‘shib, splayn funksiyani bir qiymatli aniqlovchi $(3n\text{-}3)$ ta noma’lumli $(3n\text{-}3)$ ta chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz.

Dastlabki $2(n\text{-}1)$ ta interpolyasiya shartlarini qanoatlantiruvchi (5.8.1) ta tenglama quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\begin{aligned}
a_{12}x_1^2 + a_{11}x_1 + a_{10} &= y_1\\
a_{12}x_2^2 + a_{11}x_2 + a_{10} &= y_2\\
\\
a_{22}x_2^2 + a_{21}x_2 + a_{20} &= y_2\\
a_{22}x_3^2 + a_{21}x_3 + a_{20} &= y_3\\
&\dots\\
a_{n-1,2}x_{n-1}^2 + a_{n-1,1}x_{n-1} + a_{n-1,0} &= y_{n-1}\\
a_{n-1,2}x_n^2 + a_{n-1,1}x_n + a_{n-1,0} &= y_n
\end{aligned}$$

Agar $g_i'(x) = 2a_{i2}x + a_{i1}$ ekanligini hisobga olsak, (5.8.2) tenglama

$$2a_{i2}x_{i+1} + a_{i1} = 2a_{i+1,2}x_{i+1} + a_{i+1,1}$$

yoki

$$2a_{i2}x_{i+1} + a_{i1} - 2a_{i+1,2}x_{i+1} - a_{i+1,1} = 0.$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Shu sababli sistemaning splayn funksiya differensiallanuvchanligini ifodalovchi tenglamalari quyidagicha ifodalanadi:

$$2a_{12}x_2 + a_{11} - 2a_{22}x_2 - a_{21} = 0$$

$$2a_{22}x_3 + a_{21} - 2a_{32}x_3 - a_{31} = 0$$

$$2a_{n-2,2}x_{n-1} + a_{n-2,1} - 2a_{n-1,2}x_{n-1} - a_{n-1,1} = 0$$

$$2a_{12}x_1 + a_{11} = d$$

Umumiy holda splayn funksiya koeffisientlarini aniqlovchi Chats matrisa ko‘rinishda quyidagicha ifodalanadi:

$$
\begin{bmatrix}
x_1^2 & x_1 & 1 & & & & & & & \\
x_2^2 & x_2 & 1 & & & & & & & \\
 & & & x_2^2 & x_2 & 1 & & & & \\
 & & & x_3^2 & x_3 & 1 & & & & \\
 & & & & & & \cdots & & & \\
 & & & & & & & x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\
 & & & & & & & x_n^2 & x_n & 1 \\
2x_2 & 1 & 0 & -2x_2 & -1 & & & & & \\
 & & & 2x_3 & 1 & 0 & -2x_3 \quad -1 & & & \\
 & & & & & & \cdots & & & \\
 & & & & & & 2x_{n-1} \quad 1 \quad 0 & -2x_{n-1} & -1 & \\
2x_1 & 1 & & & & & & & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{12} \\ a_{11} \\ a_{10} \\ a_{22} \\ a_{21} \\ a_{20} \\ \cdots \\ a_{n-1,2} \\ a_{n-1,1} \\ a_{n-1,0}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ \ldots \\ y_{n-1} \\ y_n \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ d
\end{bmatrix}
$$

Bu sistemaning bo‘sh qoldirilgan elementlari 0 ga teng.

5.9. Kubik splayn funksiyalar

Kubik splayn funksiyalarni qurishda bir necha usullardan foydalanish mumkin. Dastlab, $I_i=[x_i,x_{i+1}]$ kesmalar uchun kubik splayn funksiya quyidagi

$$S(x)=S_i(x)=a_{i3}x^3+a_{i2}x^2+a_{i1}x+a_{i0},\quad x\in I_i$$

ko‘rinishga ega bo‘lsin.

n ta x_i, (i=1,2,...,n) tugun nuqtalarda $y=f(x)$ funksiya jadval ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. x_i, (i=1,2,...,n) tugun nuqtalar $[a,b]$ ($x_1=a$, $x_n=b$) oraliqni n-1 ta I_i, (i=1,..., n-1) kesmalarga ajratadi. Bu kesmalarning har biri uchun $S_i(x)$, (i=1,..., n-1) kubik splayn funksiya ko‘raylik. $S_i(x)$ ko‘pxad to‘rtta a_{ij}, (j=3,2,1,0), koeffisientlar orqali aniqlanadi. Butun *[a,b]* oraliq uchun esa *4(n-1)* ta a_{ij} koeffisientlarni aniqlashga to‘g‘ri keladi. Bu koeffisientlarni aniqlovchi tenglamalar sistemasi qanday ko‘rinishga ega bo‘ladi? Tenglamalar sistemasini hosil qilish uchun $S_i(x)$ funksiyaga qo‘yiladigan shartlardan foydalanamiz.

Har bir $S_i(x)$ ko‘pxadni I_i kesmadagi tugun nuqtalardan o‘tadigan qilib tanlaymiz. Bu shartlardan 2(n-1) ta

$$S_i(x_i)=y_i,\, S_i(x_{i+1})=y_{i+1},\; i=1,2,....,\, n\text{-}1 \qquad (5.9.1)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

I_i kesmalarning birlashish nuqtalari(bunday nuqtalar soni n-2 ta)da splayn funksiya differensiallanuvchiligidan, yana *2(n-2)* ta

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}),\ i=1,2,...,\ n\text{-}2$$

tenglamani hosil qilamiz. Natijada (4n-6) ta tenglamaga ega bo'lamiz. a_{ij}, (i=1,..., n-1; j=3,2,1,0) koeffisientlar soni esa 4n-4 ta. Agar [a,b] (x_1=a, x_n=b) oraliqning chetki nuqtalarida splayn funksiya egriligi nolga tengligidan foydalansak, yana ikkita

$$S_1''(x_1) = 0, S_{n-1}''(x_n) = 0, \tag{5.9.2}$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Natijada 4n-4 ta a_{ij} koeffisientlarga nisbatan 4n-4 ta (5.9.1) - (5.9.2) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu sistemani yechib, noma'lum koeffisientlarni aniqlaymiz va kubik splayn funksiyasini hosil qilamiz.

Agar bu sistemaga mos keluvchi matrisa tartibi katta ((4n-4)-tartibli matrisa) ekanligini hisobga olsak, u holda uni yechish ayrim qiyinchiliklarni keltirib chiqarishi mumkin. Shu sababli kubik splayn funksiya qurishda boshqacha usuldan foydalanamiz. Bu holda chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga mos keluvchi matrisa tartibi n-2 ga teng bo'ladi.

Kubik splayn funksiyani

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, x \in [x_i, x_{i+1}],$$
$$i=1,2,...,\ n\text{-}1. \tag{5.9.3}$$

ko'rinishda qidiramiz. Bu erdan

$$S_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2,\quad S_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i).$$

ga ega bo'lamiz.

a_i, b_i, c_i, d_i koeffisientlarni aniqlash uchun, oldingi holdagi kabi splayn funksiyaning interpolyasiya va differensiallanuvchiligi shartlaridan foydalanamiz:

$$S_i(x_i)=y_i, S_i(x_{i+1})=y_{i+1},\ i=1,2,...,\ n\text{-}1$$

$$S_i'(x_{i+1})=S_{i+1}'(x_{i+1}), S_i''(x_{i+1})=S_{i+1}''(x_{i+1}),\ i=1,...,\ n\text{-}2.$$

Agar (5.9.2) ni e'tiborga olsak, a_i, b_i, c_i, d_i koeffisientlarga nisbatan yana $4n$-4 ta noma'lumli $4n$-4 ta tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu sistemani ayrim noma'lumlarini yo'qotish hisobiga sodda ko'rinishga keltirish mumkin.

$h_i = x_{i+1} - x_i$ belgilash kiritib hosil bo'lgan sistemani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$a_i = y_i,\quad i=1,...,\ n\text{-}1, \tag{5.9.4}$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_{i+1},\quad i=1,...,\ n\text{-}1, \tag{5.9.5}$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1},\quad i=1,...,\ n\text{-}2, \tag{5.9.6}$$

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1},\quad i=1,...,\ n\text{-}2, \tag{5.9.7}$$

$$c_1 = 0, \tag{5.9.8}$$

$$2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} = 0. \tag{5.9.9}$$

(5.9.7) va (5.9.9) tengliklardan d_i ni aniqlaymiz:

$$d_i = \frac{2c_{i+1} - 2c_i}{6h_i} = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i},\quad i=1,...,n\text{-}2,\quad d_{n-1} = \frac{-c_{n-1}}{3h_{n-1}} \tag{5.9.10}$$

(5.9.5) ga d_i va a_i larning qiymatlarini olib borib qo'ysak, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$y_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^3 = y_{i+1},\quad i=1,...,n\text{-}2,$$

$$y_{n-1} + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1}^2 - \frac{c_{n-1}}{3h_{n-1}} h_{n-1}^3 = y_n.$$

Bu ikki tenglikdan

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3} h_i, i=1,...,n\text{-}2 \tag{5.9.11}$$

$$b_{n-1}=\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}-\frac{2}{3}c_{n-1}h_{n-1}.$$

ga ega bo‘lamiz. Hosil qilingan b_i va d_i ning ifodalarini (5.9.6) ga qo‘ysak:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{c_{i+1}+2c_i}{3}h_i+2c_ih_i+3\frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}h_i^2=$$

$$=\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}}-\frac{c_{i+2}+2c_{i+1}}{3}h_{i+1},\ i=1,\ldots,n-3,$$

$$\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}}-\frac{c_{n-1}+2c_{n-2}}{3}h_{n-2}+2c_{n-2}h_{n-2}+3\frac{c_{n-1}-c_{n-2}}{3h_{n-2}}h_{n-2}^2=$$

$$=\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}-\frac{2}{3}c_{n-1}h_{n-1}.$$

hosil bo‘ladi va c_i (i=1,..., n-1) koeffisientlarga nisbatan n-1 ta tenglamaga ega bo‘lamiz. Agar (5.9.8) da c_1=0 ekanligini hisobga olsak, natijada c_i ga nisbatan n-2 ta tenglamaga ega bo‘lamiz. Sodda almashtirishlar natijasida bu sistema quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \cdots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdots \\ \gamma_{n-2} \end{bmatrix} \qquad (5.9.12)$$

bu yerda $\gamma_i=3\left[\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}}-\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right].$

Umuman olganda (5.9.3) ko‘rinishdagi kubik splayn funksiyani hosil qilish algoritmi quyidagi amallar ketma-ketligidan iborat:

1. (5.9.12) sistemani yechib, $c_2,\ldots,c_{n-1}$ lar aniqlanadi. Bu yerda c_1=0.
2. (5.9.10) formula yordamida $d_1,\ldots, d_{n-1}$ lar aniqlanadi.
3. (5.9.11) formula yordamida $b_1,\ldots, b_{n-1}$ lar aniqlanadi.
4. i=1,..., n-1 lar uchun a_i=y_i deb olinadi.

Shu ko‘rinishda hosil qilingan splayn funksiya koeffisientlari tugun nuqtalarda

$$b_i = S_i'(x_i), \;\; c_i = \frac{S_i''(x_i)}{2}, \quad i = 1,\ldots,n-1$$

tengliklarni qanoatlantiradi.

Kubik splayn funkцiya qurishning yana bir usuli bilan tanishib chiqaylik. Bu usulga ko‘ra har biri o‘zgarmas h uzunlikga ega $[x_i, x_{i+1}]$ (i=1,..., n-1) kesmalarda kubik splayn funksiyani quyidagi ko‘rinishda tasvirlaymiz:

$$S_i(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2[2(x-x_i)+h]}{h^3} y_i + \frac{(x-x_i)^2[2(x_{i+1}-x)+h]}{h^3} y_{i+1} +$$

$$+\frac{(x_{i+1}-x)^2(x-x_i)}{h^2} m_i + \frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})}{h^2} m_{i+1}. \qquad (5.9.13)$$

Bu erda x_i, y_i (i=1,..., n) lar tugun nuqtalar koordinatalari; m_i – lar tugun nuqtalarda splayn funksiya og‘ishi $\left(S_i'(x_i) = m_i\right)$; h - x_i tugun nuqtalar orasidagi masofa. Tekshirib ko‘rish mumkinki, (5.9.13) kubik splayn funksiya uchun $S_i(x_i)=y_i$, $S_i(x_{i+1})=y_{i+1}$, uning hosilalari uchun $S_i'(x_i) = m_i$, $S_i'(x_{i+1}) = m_{i+1}$ tengliklar bajariladi.

Tugun nuktalarda splayn funksiya og‘ish qiymatlarini quyidagi ko‘rinishlarda berish mumkin:

1. Jadval ko‘rinishda berilgan funksiyadan ikkinchi tartibli sonli differensiallash formulalari yordamida splayn funksiya og‘ishi

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad i = 2,\ldots,n-1,$$

$$m_1 = \frac{4y_2 - y_3 - 3y_1}{2h}; \quad m_n = \frac{3y_n + y_{n-2} - 4y_{n-1}}{2h}$$

formulalar yordamida hisoblanadi va ularning qiymatlari (5.9.13) formulaga olib borib qo‘yiladi.

2. Agar tugun nuqtalarda $y_i' = f'(x_i)$ lar aniq bo‘lsa, u holda $m_i = y_i'$, i=1,..., n.

Bu ikki usulda berilgan splayn funkцiya og‘ishi *funksiyaning lokal og‘ishi* deb ataladi, chunki bu yerda splayn funksiya har bir kesmada aloxida quriladi.

3. Umumiy holda funksiya og‘ish qiymatini aniqlash uchun chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga to‘g‘ri keladi. Bu sistema tenglamalari jadvalda berilgan tugun nuqtalarda ikkinchi tartibli hosilalarning uzluksizligidan hosil qilinadi:

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i). \qquad i=2,..., n-1.$$

Natijada noma’lum m_i larga nisbatan *n-2* ta tenglamalarga ega bo‘lamiz:

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3(y_{i+1} - y_{i-1})}{h}, \quad i = 2,...,n-1.$$

Noma’lum m_i lar soni n ta va ularning yagonaligini ta’minlash uchun, yana ikkita tenglama zarur bo‘ladi. Shu sababli oxirgi sistemaga chegaraviy shartlarni ifodalovchi yana ikkita tenglik qo‘shiladi. Odatda [*a*,*b*] kesamaning chetki nuqtalarida m_1 va m_n og‘ishlar beriladi. U holda sistema quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & & \cdots & & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ m_3 \\ \cdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2 - m_1 \\ \gamma_3 \\ \cdots \\ \gamma_{n-2} \\ \gamma_{n-1} - m_n \end{bmatrix},$$

bu erda $\gamma_i = \dfrac{3(y_{i+1} - y_{i-1})}{h}$. Bu sistemani oddiy progonka usulida echish mumkin: to‘g‘ri progonka asosida progonka koeffiцientlari:

$$L_0 = 0;\ M_0 = b_0;\ L_i = -\frac{1}{L_{i-1} + 4};\quad M_i = L_i(M_{i-1} - b_i);\ (i = 1,2,3,..., n-1)$$

va teskari progonka yordamida esa m_i koeffiцientlar ketma-ket

$$\begin{cases} m_n = b_n, \\ m_i = L_i m_{i+1} + M_i \qquad (\mathrm{i = n-1, n-2,...,0}) \end{cases}$$

formula yordamida aniqlanadi.

Splayn funkцiyalarni aniqlashda chegaraviy shartlar quyidagicha beriladi:

1) agar $y_1' = f'(x_1)$ va $y_n' = f'(x_n)$, u holda $m_1 = y_1'$, $m_n = y_n'$;

2) $[a,b]$ kesmaning chetki nuqtalarida $f'(x)$ hosila qiymatlarini uchinchi tartibli sonli differenцiallash formulalari orqali berish mumkin:

$$m_1 = \frac{1}{6h}(-11y_1 + 18y_2 - 9y_3 + 2y_4),$$
$$m_n = \frac{1}{6h}(11y_n - 18y_{n-1} + 9y_{n-2} - 2y_{n-3})\ ;$$

3) $[a,b]$ kesma chetki nuqtalarida ikkinchi tartibli hosilalar berilishi mumkin: $y_1'' = f''(x_1)$, $y_n'' = f''(x_n)$. Bu holda $S_1''(x_1) = y_1''$ va $S_{n-1}''(x_n) = y_n''$ tengliklardan quyidagi chegaraviy shartlarga ega bo‘lish mumkin:

$$m_1 = -\frac{m_2}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{h}{4}y_1'',\ m_n = -\frac{m_{n-1}}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \frac{h}{4}y_n''.$$

Misol. $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda $h = \frac{\pi}{4}$ qadam bilan berilgan

x	$x_0 = 0$	$x_1 = \pi/4$	$x_2 = \pi/2$
sinx	$y_0 = 0$	$y_1 = 0.7071068$	$y_2 = 1$

y=sinx funksiya uchun kubik splayn funksiya quring va u yordamida $\sin\frac{\pi}{6}$ ning qiymatini taqribiy hisoblang.

Yechish. Splayn funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & 0 \le x \le \pi/4 \\ S_2(x), & \pi/4 \le x \le \pi/2 \end{cases}$$

U holda

$$\begin{cases} m_0 = \sin' x_0 = \cos x_0 = 1, \\ m_0 + 4m_1 + m_2 = \dfrac{3(y_2 - y_0)}{h} = \dfrac{3}{h}, \\ m_2 = \sin' x_2 = \cos x_2 = 0 \end{cases}.$$

Bu yerdan $1+4m_1=12/\pi$ yoki $m_1=(12-\pi)/(4\pi)=0,70493$ ga ega bo‘lamiz.

$$S_1(x) = \frac{x^2[2(h-x)+h]}{h^3}y_1 + \frac{(x-h)^2 x}{h^2} + m_1\frac{(x-h)x^2}{h^2}, \qquad 0 \le x \le h;$$

$$S_2(x)=\frac{(x-2h)^2[2(x-h)+h]}{h^3}y_1+\frac{(x-h)^2[2(2h-x)+h]}{h^3}+m_1\frac{(x-2h)^2(x-h)}{h^2},\qquad \mathrm{h}\le x\le 2h.$$

Xususiy xolda S_1(x) funksiya quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$S_1(x)=\frac{x^2[2(h-x)+h]}{h^3}y_1+\frac{(x-h)^2x}{h^2}+m_1\frac{(x-h)x^2}{h^2}=$$

$$=x-0{,}0050683975\cdot x^2-0{,}15514782\cdot \mathrm{x}^3\ ,\qquad 0\le x\le\frac{\pi}{4}.$$

Bu yerdan

$$\sin\frac{\pi}{6}\approx S_1\left(\frac{\pi}{6}\right)=0{,}499938.$$

Agar aniq qiymat 0,5 ekanligini hisobga olsak, bu yerda yo‘l qo‘yilgan absolyut xato 0,000062 ga nisbiy xato esa 0,0124 % ga teng ekanligini ko‘rishimiz mumkin.

Kubik splayn funksiya qurish uchun tuzilgan dastur matni:

```
const p=15;   {massivlarni aniqlash uchun yordamchi parametr}
type
   vec1=array[0..p] of real;
   vec2=array[0..p-1] of real;
   vec3=array[1..p-1] of real;
var
  i,n:integer;
  a,b1,h,s,x,x0,x1:real;
  y,m:vec1;
  b:vec3;
  l:vec2;
begin
    clrscr;
    writeln('[a,b] oraliqni bo‘lishlar soni='); read(n);
    writeln('a='); read(a);
```

```
writeln('b='); read(b1);
writeln('y[i] =');
for i:=0 to n do read(y[i]);
writeln('x  ning qiymati='); read(x);
m[0]:=1; m[n]:=0; l[0]:=0; h:=(b1-a)/n;
for i:=1 to n-1 do
            begin
               b[i]:=3*(y[i+1]-y[i-1])/h;
               l[i]:=-1/(l[i-1]+4);
               m[i]:=l[i]*(m[i-1]-b[i]);
            end;
for i:=n-1 downto 1 do
      m[i]:=l[i]*m[i+1]+m[i];
      if (x>a) and (x<b1) then
         begin
            i:=trunc((x-a)/h)+1;
            x0:=a+(i-1)*h;
            x1:=x0+h;
            s:=y[i-1]*((x-x1)*(x-x1)*(2*(x-x0)+h))/(h*h*h)+
              y[i]*((x-x0)*(x-x0)*(2*(x1-x)+h))/(h*h*h)+
              m[i-1]*(x-x1)*(x-x1)*(x-x0)/(h*h)+
              m[i]*(x-x0)*(x-x0)*(x-x1)/(h*h);
      write('x=',x:5:2,'    s=',s:8:5);
      end;
      end.
```

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\Delta x = 1$ bo‘lsa $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$ funksiya uchun 3-tartibli chekli ayirmani hisoblang.

2. Quyidagi

1,5	2,0	2,5	3,0
0,3691	0,6309	0,8340	1,0000

jadval ko‘rinishda berilgan funksiya uchun Lagranj interpolyasiya formulasini tuzing.

3. Agar $f(x)$ funkцiya quyidagi

7,1	7,6	8,1	8,6
2,8278	2,9260	3,0179	3,1043

jadval ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, Nyuton 1-interpolyasiya formulasini tuzing va u yordamida $f(7{,}65)$ ni hisoblang.

4. Agar funksiya quyidagi

24	24,1	24,2	24,3
3,1781	3,1822	3,1864	3,1905

jadval ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, Nyuton 2-interpolyasiya formulasini tuzing.

5. $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda $h=\frac{\pi}{4}$ qadam bilan berilgan

x	$x_0=0$	$x_1=\pi/4$	$x_2=\pi/2$
cosx	$y_0=1$	$y_1=0.7071068$	$y_2=0$

y=cosx funksiya uchun kubik splayn funksiya quring va u yordamida $\cos\frac{\pi}{3}$ ning qiymatini taqribiy hisoblang.

6. $[0,\pi]$ oraliqda $h=\frac{\pi}{4}$ qadam bilan berilgan

x	$x_0=0$	$x_1=\pi/4$	$x_2=\pi/2$	$x_3=3\pi/4$	$x_4=\pi$
sinx	$y_0=0$	$y_1=0.7071068$	$y_2=0$	$y_3=0.7071068$	$y_4=0$

$y = sinx$ funksiya uchun kubik splayn funksiya quring va u yordamida $\sin\frac{2\pi}{3}$ ning qiymatini taqribiy hisoblang.

Tayanch so'z va iboralar

Chekli ayirma, umumlashgan daraja, interpolyasiya, Nyuton interpolyasiya formulasi, Lagranj interpolyasiya formulasi, tugun nuqta, splayn funksiya, funksiya defekti, funksiya og'ishi.

Savollar:

1. Funksiyani approksimatsiyalash deganda nimani tushinasiz?
2. Interpolyasiya tugun nuqtalari deb qanday nuqtalarga aytiladi?
3. Interpolyasiya ko'pxadi deb qanday ko'phadga aytiladi?
4. Lokal va global interpolyasiya haqida gapirib bering.
5. Chekli ayirmaga ta'rif bering.
6. Yuqori tartibli chekli ayirmalar qanday aniqlanadi?
7. Chekli ayirma qanday hisoblanadi?
8. Chekli ayirmalarda xatolik qanday aniqlanadi?
9. Umumlashgan daraja nima va u qanday hisoblanadi?
10. Yuqori tartibli umumlashgan daraja qanday hisoblanadi?
11. Interpolyasiyalash masalasi va uning asosiy maqsadi nimadan iborat?
12. Nyuton birinchi va ikkinchi interpolyasiya formulalari.
13. Lagranj interpolyasiya formulasi.
14. Lagranj va Nyuton interpolyasiya formulalarining kamchiligi nimada?
15. Ko'pintervalli interpolyasiya deganda nimani tushunasiz?

16. Ko‘p intervalli interpolyasiyaning xossalarini aytib bering.

16. Splayn funksiyaga ta’rif bering.

17. Splayn funksiya darajasi qanday aniqlanadi?

18. Splayn funksiya og‘ishi qanday aniqlanadi?

19. Splayn funksiya defekti nima?

20. Kvadratik splayn funksiya qurish algoritmi.

21. Kubik splayn funksiya qurish algoritmi.

22. Kronekker belgisini yozib bering.

VI-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UChUN BOShLANG‘ICh ShARTLI MASALALAR

6.1. Asosiy tushunchalar

Differensial tenglama va ularning sistemalari asosan fizik masalalarni matematik modellashtirishda foydalaniladi, chunki fizikaning asosiy qonunlariga ko‘ra fizik kattaliklar orasidagi bog‘lanishlar differensial ko‘rinishda ifodalanadi.

Ta’rif. Noma’lum funksiya hosilasi yoki differensiali qatnashgan tenglama ***differensial tenglama*** deb ataladi.

Masalan quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = x + y; \;\; \dot{y} = x + y; \;\;\; y' = x + y$$

tenglamalar differensial tenglamaga misol bo‘ladi. Bu yerda y – noma’lum funksiya, x – erkli o‘zgaruvchi.

Agar noma’lum funksiya bitta erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bu tenglama oddiy differensial tenglama deb ataladi. Agar noma’lum funksiya bir necha erkli o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lsa, bu tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deb ataladi.

Differensial tenglama qatnashgan noma’lum funksiya hosilasining yung yuqori darajasi, shu tenglamaning tartibi deb ataladi. Masalan $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ tenglama birinchi tartibli, $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ tenglama esa ikkinchi tartibli tenglama bo‘ladi. n – tartibli differensial tenglama umumiy xolda $F(x,y, y^{'}...,y^{(n)}) = 0$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Differenцial tenglamani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya uning yechimi deb ataladi. Umuman olganda differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko‘p bo‘ladi. Masalan $y(x)=e^{\,x}+S$ funksiya $\frac{dy}{dx} = y$ differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi. Bu yerda S ixtiyoriy o‘zgarmas.

Agar tenglama n tartibli bo‘lsa, uning umumiy yechimi n ta o‘zgarmasga bog‘liq bo‘ladi, ya’ni $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$. Agar umumiy yechimdagi o‘zgarmaslarga aniq bir qiymatlar berilsa, u holda hosil bo‘lgan yechim xususiy yechim deb ataladi. Differensial tenglamani yechish uni integrallash deb ataladi.

Umuman olganda differensial tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Bu yechimni yagonaligini ta’minlash uchun differensial tenglama tartibiga mos ravishda, noma’lum funksiya yoki uning hosilalariga nisbatan qo‘shimcha shartlar beriladi. Qo‘shimcha shartlarning berilishiga bog‘liq ravishda differensial tenglamalar uchun ikki xil, boshlang‘ich shartli masala(Koshi masalasi) va chegaraviy masalalar hosil bo‘ladi. Agar qo‘shimcha shartlar erkli o‘zgaruvchining bitta qiymatida berilgan bo‘lsa bu masala – boshlang‘ich shartli masala deb ataladi. Qo‘shimcha shartlar esa boshlang‘ich shartlar deb ataladi. Agar qo‘shimcha shartlar erkli o‘zgaruvchining bir necha qiymatida berilgan bo‘lsa bu masala – chegaraviy masala deb ataladi. Qo‘shimcha shartlar esa chegaraviy shartlar deb ataladi.

6.2. Boshlang‘ich shartli masala

Ta’rif. $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning $y(x_0)=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi $y=y(x)$ yechimini topish masalasi, boshlang‘ich shartli masala deb ataladi.

n – tartibli differensial tenglama uchun boshlang‘ich shartli masala quyidagicha ta’riflanadi.

Ta’rif.

$$u^{(n)} = f(x, u, u'., u^{(n-1)}) \qquad (16.2.1)$$

tenglamaning

$$u(x_0) = y_0,\ u'(x_0) = y'_0.,\ u^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (6.2.2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $y=y(x)$ yechimini topish masalasi, boshlang‘ich shartli masala deb ataladi. Bu yerda y_0, y'_0,..., $y_0^{(n-1)}$ – berilgan o'zgarmas sonlar.

Ko'pgina amaliy masalalarni yechish differensial tenglamalar sistemalarini yechishga olib kelinadi. Differensial tenglamalar sistemasi uchun boshlang'ich shartli masala quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \quad .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (6.2.3)$$

tenglamalar sistemasining

$$y_1(x_0)= y_{10},\ y_2(x_0)= y_{20}, ...,\ y_n(x_0)= y_{n0}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ yechiminni aniqlang. Bu yerda y_{10}, y_{20},..., y_{n0} – berilgan o'zgarmas sonlar. Noma'lum funksiyalar hosilalariga nisbatan yechilgan (6.2.3) sistemaga normal differensial tenglamalar sistemasi deb ataladi. (6.2.1) - (6.2.2) Koshi masalasini ham normal ko'rinishga keltirish mumkin. Agar (6.2.1) - (6.2.2) da $y_1=y'$, $y_2=y''$,..., $y_{n-1}=y^{(n-1)}$ almashtirishlarni bajarsak, u holda u, y_1,..., y_{n-1} larga nisbatan

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \quad ... \\ \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, ..., y_{n-1}) \end{cases}$$

normal sitemaga ega bo'lamiz.

Differenцial tenglamalarni yechishda foydalaniladigan, usullarni ikki guruhga ajratish mumkin: aniq va taqribiy yechish usullari. Ba'zi tipdagi chiziqli differensial tenglamalar (o‘zgaruvchilarga ajraladigan, bir jinsli va boshqalar) ni aniq yechish usullari oliy matematika kursida o‘rganiladi. Oxirgi paytlarda differensial tenglamalar yordamida modellashtiriladigan amaliy masalalarni yechishda taqribiy yechish usullaridan asosiy qurol sifatida foydalanilmoqda.

Differensial tenglamalarni taqribiy yechishda foydalaniladigan ayrim usullar bilan tanishib chiqamiz.

6.3. Sonli differensiallash

x-[a, b] oraliqga tegishli ixtiyoriy x_i tugun nuqtaning qiymatlarini qabul qiluvchi erkli o‘zgaruvchi bo‘lsin. U holda ixtiyoriy tugun nuqta qiymatini

$$x + kh, \qquad k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

formula yordamida hisoblash mumkin.

$$\frac{d^s y(x)}{dx^s}\ , \qquad s \geq 1$$

ni funksiyaning tugun nuqtalardagi qiymatlari, ya’ni $y(x+kh)$ lar orqali ifodalash, $y(x)$ funkцiya hosilasini taqribiy hisoblash yoki taqribiy differensiallash deb ataladi.

Faraz qilaylik $y(x) \in C^2[a,b], \ \ x < b$ bo‘lsin. $y(x+h)$ ning ikkinchi tartibli aniqlikda Teylor qatoriga yoyilmasi

$$y(x+h) = y(x) + \frac{dy(x)}{dx}h + O(h^2)$$

dan foydalansak

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h)$$

tenglikga ega bo‘lamiz. Agar bu yerda $x = x_i$ deb olsak, birinchi tartibli hosila uchun ikki nuqtalik oldinga taqribiy hisoblash formulasi hosil bo‘ladi: $\dfrac{dy(x_i)}{dx} = \dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + O(h), \quad 0 \le i \le m\text{-}1$ (6.3.1)

Odatda sonli differensiallash formulasi deganda quyidagi

$$\frac{dy(x_i)}{dx} \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

taqribiy formula tushuniladi.

$$R = \frac{dy(x_i)}{dx} - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

ayirmaga sonli differensiallash xatosi deb ataladi. (6.3.1) formula uchun $h \to 0$ da $R = O(h)$.

Xuddi shunga o‘xshash birinchi tartibli hosila uchun ikki nuqtalik taqribiy hisoblash formulasini hosil qilish mumkin:

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} + O(h), \quad 1 \le i \le m.$$

Agar $y(x) \in C^3[a,b]$ bo‘lsa, birinchi tartibli hosila uchun yanada aniqroq ikki nuqtalik taqribiy hisoblash formulasi – markaziy ayirma formulasi mavjud va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2), \quad 1 \le i \le m\text{-}1.$$

yoki

$$\frac{dy(x_i)}{dx} \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}.$$

Birinchi tartibli hosilani taqribiy hisoblashda ko‘p nuqtali, masalan uch nuqtali

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{-y(x_{i+2}) + 4y(x_{i+1}) - 3y(x_i)}{2h} + O(h^2) \qquad (6.3.2)$$

formuladan ham foydalanish mumkin.

Umumiy holda birinchi tartibli hosila uchun ko‘p nuqtali formulaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \sum_{k=0}^{m} a_k y(x_k) + O(h^p)$$

Bu erda a_k larni shunday tanlash mumkinki, formulaning aniqlik tartibi p ga teng bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli hosilani hisoblash uchun ham taqribiy hisoblash formulalarini keltirish mumkin:

$$\frac{d^2 y(x_i)}{dx^2} = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

yoki

$$\frac{d^2 y(x_i)}{dx^2} = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}. \tag{6.3.3}$$

1-misol. $y = x^3 + e^x$ funksiya uchun $y'(2)$ ni hisoblang.

Yechish. $h = 0{,}05$ deb, quyidagi

x	1,9	1,95	2,00	2,05	2,1
y	13,5449	14,4436	15,3891	16,3830	17,4272

jadvalni tuzib olamiz. $y_0 = y(1{,}9) = 13{,}5449$; $y_1 = y(1.95) = 14{,}4436$ va $y_2 = y(2) = 15{,}3891$ $y_3 = y(2{,}05) = 16{,}3830$ $y_4 = y(2{,}1) = 17{,}4272$ ekanligini hisobga olsak, oldinga taqribiy hisoblash

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

formulasiga asosan

$$y'(2) \approx \frac{16{,}3830 - 15{,}3891}{0{,}05} = 19{,}878$$

ga ega bo‘lamiz. Agar orqaga taqribiy hisoblash $\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h}$ formulasidan foydalansak

$$y'(2) \approx \frac{15{,}3891 - 14{,}4436}{0{,}05} = 18{,}91$$

ni hosil qilamiz. Agar ikki nuqtalik taqribiy hisoblash formulasidan foydalansak

$$y'(2) \approx \frac{16,3830 - 14,4436}{2 \cdot 0,05} = 19,394$$

bo‘ladi. Agar uch nuqtali formula (6.3.2) dan foydalansak

$$y'(2) \approx \frac{-17,4272 + 4 \cdot 16,3830 - 3 \cdot 15,3891}{2 \cdot 0,05} = 19,3777$$

ga ega bo‘lamiz.

Agar $y'(2)$ ning aniq qiymati 19,3891 ekanligini hisobga olsak, taqribiy hisoblashdagi absolyut xato birinchi holda 0,4889 ga, ikkinchi holda 0,4791 ga, uchinchi holda esa 0,0049 ga va to‘rtinchi holda esa 0,0114 teng bo‘ladi. Bu hollarda nisbiy xatolar mos ravishda 2,52% , 2,47%, 0,025% va 0,059% larga teng bo‘ladi.

2-misol. $y = xe^x$ funkцiya uchun $y''(5)$ ni hisoblang.

Echish. $h = 0,05$ deb, quyidagi

x	4,95	5	5,05
y	698,8161	742,0658	787,9134

jadvalni tuzib olamiz. $y_0 = y(4,95) = 698,8161$; $y_1 = y(5) = 742,0658$ va $y_2 = y(5,05) = 787,9134$ ekanligini hisobga olsak, (6.3.3) formulaga asosan

$$y''(5) \approx \frac{787,9134 - 2 \cdot 742,0658 + 698,8161}{0,05^2} = 1039,1704$$

ga ega bo‘lamiz.

Agar $y''(5)$ ning aniq qiymati 1038,8921 ekanligini hisobga olsak, taqribiy hisoblashdagi absolyut xato 0,2783 ga, nisbiy xato esa 0,027% ga tengligi kelib chiqadi.

6.4. Ketma-ket yaqinlashish usuli

Ko‘pgina muxandislik masalalarini yechish chiziqli yoki chiziqsiz differensial tenglama uchun Koshi masalasini echishga keltiriladi. Koshi masalasini ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanib yechish mumkin. Bu usul algoritmini quyidagicha:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{6.4.1}$$

differensial tenglamaning

$$x(t_0) = x_0 \tag{6.4.2}$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topishda ko‘rib chiqaylik.

Agar (6.4.1) ni $[t_0, t]$ oraliqda t bo‘yicha integrallab, (6.4.2) shartdan foydalansak, berilgan Koshi masalasiga teng kuchli quyidagi integral tenglamaga kelamiz:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{6.4.3}$$

(6.4.3) da $x(\tau)$ o‘rniga nolinchi yaqinlashish sifatida ixtiyoriy funksiyani, masalan $x(t_0) = x_0$ ni olishimiz mumkin. U holda (6.4.1) tenglama yechimiga birinchi yaqinlashish

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0)d\tau$$

ni hosil qilamiz.

$x_1(t)$ ni (6.4.3) ga olib borib qo‘yib,

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau))d\tau$$

ikkinchi yaqinlashishni hosil qilamiz. Umumiy holda n-yaqinlashish uchun

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))d\tau$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Teorema. Agar (6.4.1), (6.4.2) Koshi masalasining yechimi $x(t)$ mavjud va u yagona bo‘lsa, u holda $n \to \infty$ da $x_n(t) \to x(t)$ bo‘ladi.

Xuddi yuqorida keltirilgan usuldan foydalanib,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, \mathrm{n})$$

differesial tenglamalar sistemasining

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, \mathrm{n})$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini ham ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida topish mumkin.

Misol. Berilgan

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x \end{cases} \tag{6.4.4}$$

differensial tenglamalar sistemasining

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{6.4.5}$$

shartni qanoatlantiruvchi yechimini ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida toping.

Echish. (6.4.1) sistema tenglamalarini $[0, t]$ oraliqda integrallab, (6.4.5) shartni hisobga olsak, quyidagi

$$x(t) = 1 + \int_0^t [x(\tau) + y(\tau)]d\tau, \quad y(t) = \int_0^t [3y(\tau) - 2x(\tau)]d\tau$$

integral tenglamalarga ega bo‘lamiz.

Nolinchi yaqinlashish sifatida $x_0 = 1$ va $y_0 = 0$ larni qabul qilamiz. U holda birinchi yaqinlashish uchun

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t d\tau = 1 + t, \quad y_1(t) = \int_0^t (-2)d\tau = -2t$$

ikkinchi yaqinlashish uchun

$$x_2(t)=1+\int_0^t(1+\tau-2\tau)d\tau=1+t-\frac{t^2}{2}\ ,$$

$$y_2(t)=\int_0^t(-6\tau-2-2\tau)d\tau=-2t-4t^2$$

uchinchi yaqinlashish uchun esa

$$x_2(t)=1+\int_0^t(1+\tau-\frac{\tau^2}{2}-2\tau-4\tau^2)d\tau=1+t-\frac{t^2}{2}-\frac{3}{2}t^3,$$

$$y_3(t)=\int_0^t(-6\tau-12\tau^2-2-2\tau+\tau^2)d\tau=-2t-4t^2-\frac{11}{3}t^3$$

formulalarga ega bo‘lamiz.

Uchinchi yaqinlashish (6.4.4), (6.4.5) masalaning aniq yechimi $x(t)=e^{2t}(\cos t-\sin t)$ va $y(t)=-2e^{2t}\sin t$ larning $t=0$ atrofida t^3 aniqlikda Fure qatoriga yoyilmasi bilan ustma-ust tushadi.

Bu usuldagi mavjud kamchiliklar quyidagilardan iborat:

1. Ba’zi yaqinlashishlarni hisoblash davomida integral qiymatini aniq hisoblash mumkin bo‘lmay qoladi;

2. $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlikning $x(t)$ ga yaqinlashish tezligi yuqori bo‘lmasligi mumkin. U holda yaqinlashishlar sonini oshirishga to‘g‘ri keladi, bu esa murakkab bo‘lgan hisoblash ishlarini bajarishni taqoza etadi;

3. Cheksiz qator ko‘rinishida hosil bo‘ladigan yechim qiymatini har doim aniq hisoblash imkoni bo‘lavermaydi.

6.5. Eyler va Eyler-Koshi usullari

Ma’lumki, amaliy masalalarni matematik modellashtrish differensial tenglama uchun Koshi, chegaraviy yoki aralash masalalarni yechishga keltiriladi. Ammo bu masalalar yechimlarini aniq ko‘rinishda har doim ham yozish imkoni bo‘lavermaydi. Bu holda berilgan masalani yechish uchun taqribiy sonli yechish usullardan foydalaniladi. Quyida shu usullarning ayrimlari bilan tanishib chiqamiz.

E***yler usuli.*** $[a,b]$ kesmada

$$y^{/}(x) = f(x,y)$$

differensial tenglamaning

$$y(a) = x_0$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi (Koshi masalasi) yechimini topish talab etilsin.

Eyler usuliga asosan $[a,b]$ kesmani n ta oraliqlarga ajratib, $x_i = a + ih = x_{i-1} + h$, $(x_0 = a)$ nuqtalarni hosil qilamiz, bu erda $h = (b\text{-}a)/n$. Hosil bo‘lgan har bir oraliqda y' hosilani taqribiy ravishda $\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}$ chekli ayirmaga almashtiramiz. Natijada noma’lum $y(x)$ funksiyaning x_i nuqtalardagi qiymatlari $y_i = y(x_i)$ ni hisoblash uchun ushbu taqribiy

$$y_i \approx y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula Eyler formulasi deb ataladi va berilgan boshlang‘ich shart yordamida noma’lum funksiyaning $x = x_i$ nuqtalardagi qiymatlarini ketma-ket topish mumkin bo‘ladi.

Misol. $y^{/}(x) = \dfrac{1}{2}xy$ tenglamaning $[0,1]$ kesmada $y(0) = 1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimining taqribiy qiymatlar jadvalini tuzing.

Ye***chish.*** Aniqlik uchun $n = 10$, $h = 0{,}1$ bo‘lsin. Ushbu

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}hx_{i-1}y_{i-1}$$

formuladan y_i ning qiymatlari topiladi, $i = 1,2,\ldots,10$.

Tekshirib ko‘rish mumkinki, berilgan masala $y = e^{\frac{x^2}{4}}$ aniq yechimga ega. Agar $x = 1$ nuqtada aniq $y(1) = e^{\frac{1}{4}} = 1{,}2840$ va taqribiy $y(1) \approx 1{,}2479$ yechimlarni solishtirsak, absolyut xato 0,0361 ga, nisbiy xato esa $\frac{0{,}0361 \cdot 100}{1{,}2840} \approx 2{,}8\%$ ga teng bo‘ladi.

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$hf(x_i, y_i)$
0	0	1	0	0
1	0,1	1	0,05	0,005
2	0,2	1,005	0,1005	0,0100
3	0,3	1,0150	0,1522	0,0152
4	0,4	1,0303	0,2061	0,0206
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537
10	1,0	1,2479		

E*yler-Koshi usuli.* Eylera usulida $u(x)$ funksiyaning x_1 nuqtadagi qiymatini aniqlashda y' hosilaning x_0 nuqtadagi qiymatidan foydalaniladi. y' ning qiymati esa x_0 nuqtadan x_1 nuqtaga o‘tishda o‘zgaradi. Shu sababli oddiy Eyler usulidagi xato katta bo‘ladi. Bu xatoni Eyler-Koshi usulidan foydalanib kamaytirish mumkin. Eyler-Koshi usulining algoritmi quyidagicha:

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})] .$$

Misol. Ushbu $y'(x) = y + x$ tenglamaning $y(0) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi echimini Eyler-Koshi usuli yordamida aniqlang ($n = 10$; $h = 0{,}1$).

k	$x_k=$	$y_k=$	$f(x_k,y_k)=$	$\bar{y}_{k+1} =$	$f(x_{k+1},\bar{y}_{k+1}) =$	$0{,}5h[f(x_k,y_k) + f(x_{k+1},\bar{y}_{k+1})]$	$y_{k+1}=$
0	0	1,0000	1,0000	1,1000	1,2000	0,1100	1,1100
1	0,1	1,1100	1,2100	1,2310	1,4310	0,1321	1,2421
2	0,2	1,2421	1,4421	1,3863	1,6863	0,1564	1,3985
3	0,3	1,3985	1,6985	1,5683	1,9683	0,1833	1,5818
4	0,4	1,5818	1,9818	1,7800	2,2800	0,2131	1,7949
5	0,5	1,7949	2,2949	2,0244	2,6244	0,2460	2,0409
6	0,6	2,0409	2,6409	2,3049	3,0049	0,2823	2,3231
7	0,7	2,3231	3,0231	2,6255	3,4255	0,3224	2,6456
8	0,8	2,6456	3,4456	2,9901	3,8901	0,3668	3,0124
9	0,9	3,0124	3,9124	3,4036	4,4036	0,4158	3,4282
10	1	3,4282					

Differensial tenglama uchun Koshi masalasini Eyler va Eyler-Koshi usulida yechishga tuzilgan dastur matni:

```
var a,b,y0,y:real; n:integer;
  function f(x,y:real):real;
  begin
     f:=y-0.5*x*x+x-1
  end;
procedure eyler(a,b,y1:real;n:integer;var y:real);
    var h,x,y0:real; i:integer;
      begin
         h:=(b-a)/n;   x:=a;
         writeln('x=',x:6:2,'    y=',y1:10:6);
         for i:=1 to n do
```

```
        begin
          y0:=f(x,y1)*h+y1;        { Eyler usuli}
            y:=f(x,y0)*h+y1;     { Eyler-Koshi usuli}
       x:=x+h;
          writeln('x=',x:6:2,'   y1=',y0:10:6,'   y2=',y:10:6);
          y1:=y;
        end;
    end;
begin
   clrscr;
   write('a='); read(a);   write('b='); read(b);
   write('n='); read(n);   write('y0='); read(y0);
   eyler(a,b,y0,n,y);
end.
```

6.6. Runge-Kutta usuli

Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \tag{6.6.1}$$

oddiy differensial tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lib, uning $[a, b]$ oraliqdagi

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \dots,\ y_n(x_0) = y_{n0} \tag{6.6.2}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsin $(x_0 = a)$.

Agar

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{va} \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

belgilashlar kiritsak, (6.6.1) va (6.6.2) ni quyidagicha yozishimiz mumkin.

$$Y = F(x,Y), \tag{6.6.3}$$

$$Y(x_0) = Y_0 \tag{6.6.4}$$

Bu yerda

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix}$$

(6.6.3) tenglamalar sistemasining (6.6.4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini Runge-Kutta usuli yordamida topamiz. Buning uchun $x_i = a +_i h,\ Y_i = F(x_i, Y_i),\ i = 1,2,\dots,n$ belgilashlarni kiritib, quyidagi hisoblashlar ketma-ketligini bajaramiz:

$$\begin{aligned}
&x_i = a + ih; \\
&k_1 = F(x_i, Y_i) * h; \\
&k_2 = F(x_i + h/2, Y_i + k_1/2) * h; \\
&k_3 = F(x_i + h/2, Y_i + k_2/2) * h; \\
&k_4 = F(x_i + h, Y_i + k_3) * h;
\end{aligned}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \tag{6.6.5}$$

Bu yerda $h = (b\text{-}a)/n$.

Bu hisoblashlar ketma-ketligi $i=1$ dan $n-1$ gacha takroriy ravishda hisoblanadi va (6.6.5) formuladan differensial tenglamaning $y_i = y(x_i)$ taqribiy sonli yechimlari topiladi.

Misol. Ushbu $y'(x) = y + x$ tenglamaning $y(0) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini Runge-Kutta usuli yordamida aniqlang ($n=10$; $h=0{,}1$).

Yechish: $y_1=y(x_1)$ ni aniqlaymiz:

$$K_1=h(x_0+y_0) = 0{,}1\cdot(0+1) = 0{,}1;$$

$$K_2=h(x_0+\frac{h}{2}+y_0+\frac{K_1}{2}) = 0{,}1\cdot(0+0{,}05+1+0{,}05) = 0{,}11;$$

$$K_3=h(x_0+\frac{h}{2}+y_0+\frac{K_2}{2}) = 0{,}1\cdot(0+0{,}05+1+0{,}055) = 0{,}1105;$$

$$K_4=h\left(x_0+h+y_0+K_3\right)=0{,}1\cdot\left(0+0{,}1+1+0{,}1105\right)=0{,}12105;$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) = 1+\frac{1}{6}\left(0{,}1+2\cdot 0{,}11+2\cdot 0{,}1105+0{,}12105\right)\approx 1{,}1103\ .$$

$y_2=y(x_2)$ ni aniqlaymiz:

$$K_1=h\left(x_1+y_1\right)=0{,}1\cdot\left(0{,}1+1{,}1103\right)=0{,}121;$$

$$K_2=h\left(x_1+\frac{h}{2}+y_1+\frac{K_1}{2}\right)=0{,}1\cdot\left(0{,}1+0{,}05+1{,}1103+0{,}0605\right)=0{,}1321;$$

$$K_3=h\left(x_1+\frac{h}{2}+y_1+\frac{K_2}{2}\right)=0{,}1\cdot\left(0{,}1+0{,}05+1{,}1103+0{,}66\right)=0{,}1326;$$

$$K_4=h\left(x_1+h+y_1+K_3\right)=0{,}1\cdot\left(0{,}1+0{,}1+1{,}1103+0{,}1326\right)=0{,}1443;$$

$$y_2 = y_1+\frac{1}{6}\left(K_1+2K_2+2K_3+K_4\right)=1{,}1103+\frac{1}{6}(0{,}121+2\cdot 0{,}1321+2\cdot 0{,}1326+0{,}1443)=1{,}2428\ .$$

Keyingi x lardagi yechimlarni yuqorida keltirilgan ketma-ketliklar yordamida aniqlaymiz:

x_k	*K1=*	*K2=*	*K3=*	*K4=*	*y=*
0.1	0,1	0,11	0,1105	0,1211	1,1103
0,2	0,1210	0,1321	0,1326	0,1443	1,2428
0,3	0,1443	0,1565	0,1571	0,1700	1,3997

0,4	0,1700	0,1835	0,1841	0,1984	1,5836
0,5	0,1984	0,2133	0,2140	0,2298	1,7974
0,6	0,2297	0,2462	0,2471	0,2645	2,0442
0,7	0,2644	0,2826	0,2836	0,3028	2,3275
0,8	0,3028	0,3229	0,3239	0,3451	2,6511
0,9	0,3451	0,36743	0,3685	0,3920	3,0192
1,0	0,3919	0,4165	0,4177	0,4437	3,4366

Differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini Runge-Kutta usulida yechishga tuzilgan dastur matni:

```
    const nurav=2;  {tenglamalar soni}
    type vector2=array[1..nurav] of real;
 var
   y0,y: vector2;
   n,i,j:integer;
   a,b,x0,x1,h:real;
 procedure pv(x: real; y: vector2; var dy: vector2);
        begin
            dy[1]:=y[1]+y[2]+4x-1;
            dy[2]:=y[1]-y[2]-2*x*x-2*x+1;
        end;
 procedure rungikytta(x: real; y0: vector2;
            var dy: vector2);
    var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vector2;
  begin
    pv(x,y0,fc);
    for i:=1 to nurav do begin fk1[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i] end;
    x:=x+0.5*h;   pv(x,v3,fc);
```

```
    for i:=1 to nurav do begin fk2[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i] end;
    pv(x,v3,fc);
    for i:=1 to nurav do begin fk3[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+fk3[i] end;
    x:=x+0.5*h;  pv(x,v3,fc);
    for i:=1 to nurav do begin fk4[i]:=h*fc[i];
    dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i]) end;
  end;
begin   clrscr;
    write('a='); read(a);          write('b='); read(b);
    write('n='); read(n);          h:=(b-a)/n;
    x0:=a;
    for i:=1 to nurav do
              begin
                write('y0[',i:1,']='); read(y0[i]);
              end;
    writeln; writeln;  write('x=',x0:5:2);
    for i:=1 to nurav do write('   y[',i:1,']=',y0[i]:10:6);
    writeln;     x1:=a;
    for j:=1 to n do begin
    rungikytta(x1,y0,y);
    x1:=a+j*h;   write('x=',x1:5:2);
    for i:=1 to nurav do write('   y[',i:1,']=',y[i]:10:6);
    x0:=x1; y0:=y;
    writeln;     end;
end.
```

Eyler usulida yo‘l quyiladigan xatolik h tartibda, Runge-Kutta usulida yo‘l qo‘yilgan xatolik esa h^4 tartibda bo‘ladi. Agar $0 < h < 1$ ekanligini hisobga olsak, u holda Runge-Kutta usuli Eyler usuliga nisbatan aniqlik darajasi yuqori ekanligi kelib chiqadi.

6.7. Chekli ayirmalar usuli

Bu usul differenцial tenglamalarni taqribiy yechish usuli bo‘lib, u noma’lum funkцiya hosilasini chekli ayirmalarga almashtirishga asoslangan. Soddalik uchun bu usul algoritmini quyidagi

$$y''(t) + A(t)y'(t) + B(t)y(t) = F(t) \qquad (6.7.1)$$

differenцial tenglamaning

$$y(0) = C_0, \qquad y'(0) = D_0 \qquad (6.7.2)$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatantiruvchi yechimini topish masalasida ko‘rib chiqaylik.

t o‘zgaruvchining aniq $t = t_i = i \cdot \Delta t$; $i = 0,1,2,3,\ldots$ (Δt - vaqt bo‘yicha integrallash qadami) deb olib, $y(t_i) = y_i$, $y'(t_i) = y_i'$, $y''(t_i) = y_i''$, $A(t_i) = A_i$, $B(t_i) = B_i$, $F(t_i) = F_i$ belgilashlarni kiritamiz.

Funksiya hosilasini bir necha usul yordamida taqribiy chekli ayirmalarga almashtirish mumkin. Shulardan biri markaziy ayirmalar usulidir. Bu usulga asosan $y(t+\tau)$ ni τ ning darajalari bo‘yicha Teylor qatoriga yoyilmasi

$$y_{i+1} = y_i + \eta y_i' + \frac{\eta^2}{2} y_i'' + \ldots \qquad (6.7.3)$$

dan foydalanamiz. (6.7.3) ni τ^2 aniqlikda

$$y_{i+1} = y_i + \eta y_i' + \frac{\eta^2}{2} y_i'' \qquad (6.7.4)$$

ko‘rinishda yozib olish mumkin.

(6.7.4) da ketma-ket $\tau = -\Delta t$ va $\tau = \Delta t$ deb olib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$y_{i-1} = y_i - \Delta t \cdot y_i^{/} + \frac{\Delta t^2}{2} y_i^{//} \tag{6.7.5}$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \cdot y_i^{/} + \frac{\Delta t^2}{2} y_i^{//} \tag{6.7.6}$$

(6.7.5) va (6.7.6) lardan y_i' va y_i'' larni topish uchun

$$y_i^{/} = \frac{1}{2\Delta t}(y_{i+1} - y_{i-1}) \tag{6.7.7}$$

$$y_i^{//} = \frac{1}{\Delta t^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \tag{6.7.8}$$

ga ega bo‘lamiz.

(6.7.7) va (6.7.8) ni (6.7.1) ga quyib,

$$y_{i+1} = \frac{1}{2 + A_i \Delta t}\left[(4 - 2B_i \Delta t^2)y_i + (A_i \Delta t - 2)y_{i-1} + 2\Delta t^2 F_i\right] \tag{6.7.9}$$

tenglikga ega bo‘lamiz.

Boshlang‘ich vaqt $t_0 = 0$ uchun $y_0 = C_0$. (6.7.9) dan foydalanib, y_{i+1} $(i = 0,1,2,...)$ larni aniqlash uchun y_{-1} qiymati zarur bo‘ladi. Bu qiymatni (6.7.7) formuladan foydalanib, $y_0^{/}$ va y_1 orqali ifodalab olamiz:

$$y_{-1} = y_1 - 2\Delta t y_0^{/} \tag{6.7.10}$$

(6.7.9) da $i = 0$ deb,

$$y_1 = \frac{1}{2 + A_0 \Delta t}\left[(4 - 2B_0 \Delta t^2)y_0 + (A_0 \Delta t - 2)y_{-1} + 2\Delta t^2 F_0\right] \tag{6.7.11}$$

(6.7.10) ni (6.7.11) ga qo‘yib, y_1 ni hisoblash uchun

$$y_1 = \frac{1}{4}\left[(4 - 2B_0 \Delta t^2)C_0 - 2\Delta t(A_0 \Delta t - 2)D_0^{/} + 2\Delta t^2 F_0\right] \tag{6.7.12}$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Natijada (6.7.9) formula $i = 1,2,3,...$ lar uchun y_{i+1} larning qiymatlarini ketma-ket hisoblash imkonini beradi.

Chekli ayirmalar usuliga tuzilgan dastur matni:

```
const nt=21; dt=1; C0=-1; D0=3.0;
type mas=array[1..nt] of real;
var y,t:mas; i:integer;
function a(x:real):real;
begin
    a:=x+1;     {A(t) – funksiya ko‘rinishi}
end;
function b(x:real):real;
begin
    b:=x-2;     {B(t) – funksiya ko‘rinishi}
end;
function f(x:real):real;
begin
    f:=x*x*x+3*x*x-2*x+7;          {F(t) – funksiya ko‘rinishi}
end;
begin
    for i:=1 to nt do t[i]:=(i-1)*dt;
    y[1]:=C0;
    y[2]:=1/4*((4-2*b(0)*sqr(dt))*C0-2*dt*(a(0)*dt-
2)*D0+2*sqr(dt)*f(0));
    for i:=2 to nt-1 do
                    y[i+1]:=1/(2+a(t[i])*dt)*((4-
2*b(t[i])*sqr(dt))*y[i]+
                    (a(t[i])*dt-2)*y[i-1]+2*sqr(dt)*f(t[i]));
    for i:=1 to nt do writeln('t=',t[i]:4:2,'  y=',y[i]:8:7);
  end.
```

6.8. Kvadratura formula usuli

Boshlang‘ich shartli differensial tenglama (Koshi masalasi)ni taqribiy yechish usullaridan biri kvadratura formulasi(integralni chekli yig‘indi bilan almashtirish)dan foydalanishga asoslangan usuldir. Bu usul algoritmini quyidagi Koshi masalasini echishda qarab chiqamiz.

[0,*t*] oraliqda

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + p\frac{dy(t)}{dt} + qy(t) = f(t) \qquad (6.8.1)$$

tenglamaning

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \qquad (6.8.2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilingan bo‘lsin. Bu yerda p, q, y_0, y_1 lar o‘zgarmaslar; $f(t)$ – berilgan funksiya.

(6.8.1) tenglamani 0 dan t gacha ikki marta integrallab va (6.8.2) boshlang‘ich shartlarni hisobga olsak,

$$y(t) - y_0 - y_1 \cdot t - p\left(\int_0^t y(s)ds - y_0 \cdot t\right) + q\int_0^t (t-s)y(s)ds = \int_0^t (t-s)f(s)ds \qquad (6.8.3)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(6.8.3) ni quyidag

$$y(t) - p\int_0^t y(s)ds = y_0 + y_1 \cdot t - p \cdot y_0 \cdot t - q\int_0^t (t-s)y(s)ds + \int_0^t (t-s)f(s)ds \quad (6.7.4)$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

(6.8.4) da $t = t_n = n\Delta t, \ (n = 1,2,3,...)$ deb, integrallarni trapetsiya formulasiga almashtiramiz va

$$y_n - pA_n y_n = y_0 + y_1 \cdot t_n - p \cdot y_0 \cdot t_n + p\sum_{i=0}^{n-1} A_i y_i -$$

$$-q\sum_{i=0}^{n-1} A_i (t_n - t_i) y_i + \sum_{i=0}^{n-1} A_i (t_n - t_i) f(t_i) \qquad (6.8.9)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu erda

$y_i = y(t_i), (i = \overline{0,n-1});\ A_0 = A_n = \frac{\Delta t}{2};\ A_j = \Delta t,\ (j=\overline{1,n-1});\ \Delta t - t$ bo‘yicha qadam.

(6.8.9) tenglikdan

$$y_n = \frac{2}{2 - p\Delta t}\Big[y0 + y1\cdot t_n - p\cdot y0\cdot t_n + p\sum_{i=0}^{n-1} A_i y_i - $$
$$ - q\sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n - t_i)y_i + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n - t_i)f(t_i)\Big] \qquad (6.8.10)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

(6.8.10) ixtiyoriy $n = 1,2,3,...$ lar uchun y_n ni topishga rekkurent formula, ya’ni oldingi t_i nuqtalarda berilgan y_i lar orqali keyingi t_{i+1} nuqtalardagi y_{i+1} larni topish formulasi bo‘ladi.

Koshi masalasini kvadratura formula usulida yechishga tuzilgan dastur matni:

```
const p=1; q=-2; y0=2; y1=1; dt=0.05; nt=21;
type mas=array[0..nt] of real;
var   i:integer;     t,a,y:mas; s1,s2,s3,s4:real;
function f(x:real):real;
begin
    f:=-2*x*x-1       { f(t) – funksiyasining ko‘rinishi}
end;
begin clrscr;
         for i:=0 to nt do begin a[i]:=dt; t[i]:=i*dt end;
         a[0]:=dt/2; y[0]:=y0; s1:=0; s2:=0; s3:=0; s4:=0;
         for i:=1 to nt do begin
                 s1:=s1+a[i-1]*y[i-1];        s2:=s2+a[i-1]*t[i-1]*y[i-1];
         s3:=s3+a[i-1]*f(t[i-1]);     s4:=s4+a[i-1]*t[i-1]*f(t[i-1]);
```

```
y[i]:=2*(y0+y1*t[i]+p*y0*t[i]-
p*s1-q*t[i]*s1+q*s2+t[i]*s3-s4)/(2+p*dt);
      end;
   for i:=0 to nt do writeln('t=',t[i]:4:2,'    y=',y[i]:10:5);
end.
```

Mustaqil echish uchun misollar

1. $[0;1]$ oraliqda $y'(x)=2x+y-1$ tenglamaning $y(0)=1$ shartni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimini $h=0{,}1$ qadam bilan Eyler usuli yordamida toping.

2. $[0;1]$ oraliqda $y'(x)=x-y$ tenglamaning $y(0)=1$ shartni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimini $h=0{,}1$ qadam bilan Eyler-Koshi usuli yordamida toping.

3. $[1;2]$ oraliqda $y'(x)=x+y$ tenglamaning $y(1)=0$ shartni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimini $h=0{,}2$ qadam bilan Runge-Kutta usuli yordamida toping.

4. Sonli differenцiallash usulidan foydalanib, $y=2x^2+e^{2x}$ bo‘lsa, $y'(2)$ ni hisoblang.

5. $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+xy(x)=x^2$ tenglamaning $y(0)+2y'(0)=1$ va $y(1)-y'(1)=3$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini $x\in[0;1]$, $h=0{,}2$ lar uchun oddiy progonka usulida toping.

6. $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+2\dfrac{dy(x)}{dx}-3y(x)=5$ tenglamaning $y(x)\big|_{x=0}=0$ va $y(x)\big|_{x=1}=0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini Bubnov-Galyorkin usuli yordamida toping.

7. $\dfrac{d^4y(x)}{dx^4}+3y(x)=x$ tenglamaning $y(0)=y''(0)=y(1)=y''(1)=0$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi echimini Bubnov-Galyorkin usuli yordamida toping.

Tayanch so'z va iboralar

Differensial tenglamalar, Koshi masalasi, chegaraviy masala, sonli differensiallash, Eyler usuli, Runge-Kutta usuli, ketma-ket yaqinlashish usuli, kvadratura formula usuli.

Savollar

1. Differensial tenglamaga ta'rif bering.
2. Differensial tenglamaning tartibi qanday aniqlanadi?
3. Koshi masalasi deganda qanday masalani tushinasiz?
4. Chegaraviy masala deganda qanday masalani tushinasiz?
5. Boshlang'ich shartli chegaraviy masalalar qanday bo'ladi?
6. Differensial tenglamaga quyiladigan qo'shimcha shartlarning vazifasi nimadan iborat?
7. Sonli differensiallash nima?
8. Sonli differensiallashda xatolik qanday aniqlanadi?
9. Markaziy ayirma qanday anqlanadi?
10. **E**yler usulining algoritmini keltiring.
11. **E**yler-Koshi usulining algoritmini keltiring.
12. Runge-Kutta usulining algoritmini keltiring.
13. Runge-Kutta usulining xatoligi nimaga teng.
14. Chekli ayirmalar usulining algoritmini keltiring.
15. Ketma-ket yaqinlashish usuli algoritmini keltiring.
16. Ketma-ket yaqinlashish usuli qachon yaqinlashuvchi bo'ladi?
17. Ketma-ket yaqinlashish usulining kamchiliklari nimadan iborat?
18. Oddiy progonka usuli va uning algoritmi.
19. Kvadratura formula usulining algoritmini keltiring.

20. Trapetsiya formulasining xatoligi nimaga teng?

VII-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY SHARTLI MASALALAR

7.1. Asosiy tushunchalar

Oldingi bobda oddiy differensial tenglama yoki ularning sistemalari uchun Koshi masalasini echish algoritmlari bilan tanishib chiqdik. Amaliy masalalarni yechishda bu tenglamalar uchun boshqa ko‘rinishdagi shartlardan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Bu shartlar erkli o‘zgaruvchining bir necha qiymatlarida funksiya yoki uning hosilasiga qo‘yilgan shartlardan iborat bo‘ladi va ular *chegaraviy shartlar* deb ataladi. Differnsial tenglamaning chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi *chegaraviy masala* deb ataladi.

Agar differensial tenglama va chegaraviy shartlar chiziqli ko‘rinishda bo‘lsa, bu masala *chiziqli chegaraviy masala* deb ataladi. Ta’kidlab o‘tamiz, chegaraviy masala har doim xam yechimga ega bo‘lavermaydi, agar u yechimga ega bo‘lsa, bu echim yagona bo‘ladi.

Quyidagi

$$r_n(x)\,y^{(n)}+r_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+r_1(x)y'+\ r_0(x)y=f(x), \qquad (7.1.1)$$

n – tartibli ($n\geq 2$), chiziqli differensial tenglamaning $[a,b]$ oraliqda $(n-1)$ – ta

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{sk}^{(j)}\cdot y^{(k)}(x_i)=\beta_s,\ S=1,2,...,n \qquad (7.1.2)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi *chiziqli chegaraviy masala* deb ataladi. Bu erda x_i, i=1, 2,..., m lar $[a,b]$ oraliqda berilgan nuqtalar; $r_j(x)$, $f(x)$ – $[a,b]$ oraliqda uzluksiz funksiyalar va $r_n(x)\neq 0$; $\alpha_{sk}^{(j)}$ va β_s - berilgan o‘zgarmas koeffisientlar.

Agar $[a,b]$ oraliqda $f(x)=0$ bo‘lsa, (7.1.1) tenglama *bir jinsli tenglama* deb, aks holda esa *bir jinsli bo‘lmagan tenglama* deb ataladi. Agar $\beta_s=0$ bo‘lsa, (7.1.2) shart *bir jinsli chegaraviy shart* deb ataladi. Agar tenglama va chegaraviy shartlar bir jinsli bo‘lsa, u xolda *chegaraviy masala* *bir jinsli* deb ataladi. (7.1.1) va (7.1.2) larni qanoatlantiruvchi *y=y(x)* funksiyani aniqlash, chegaraviy masalani echish deb ataladi.

Agar chegaraviy shart faqat ikki nuqtada $x_1=a$ va $x_2=b$ berilgan bo‘lsa bu chegaraviy masala *ikki nuqtali chegaraviy masala* deb ataladi.

Masalan chiziqli, ikkinchi tartibli:

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)\,y=d(x)$$

tenglama uchun ikki nuqtali chegaraviy shartlar quyidagi ko‘rinishlarda berilishi mumkin:

$$\begin{aligned} y(a)&=A \quad , \quad y(b)=B; \\ y'(a)&=A \quad , \quad y'(b)=B; \\ y(a)&=A \quad , \quad y'(b)=B. \end{aligned}$$

7.2. Oddiy progonka usuli

Differensial tenglamalarni taqribiy yechishning yana bir usulini ko‘rib o‘taylik. $x \in [a;b]$ oraliqda

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + q(x)y(x) = r(x) \tag{7.2.1}$$

differensial tenglamaning

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 \dfrac{dy(b)}{dx} = a_2 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 \dfrac{dy(b)}{dx} = \beta_2 \end{cases} \tag{7.2.2}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsin. Bu yerda $q(x)$, $r(x)$ - $[a;b]$ oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar bo‘lib, a_i, $\beta_i\,(i=0,1)$ - lar $a_0^2 + a_1^2 = 0$ va $O(h^2)$ shartlarni qanoatlantirsin.

Teorema. Agar $q(x)$, $r(x)$ funksiyalar $[a;b]$ oraliqda ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va $q(x) \le 0$ bo‘lsa, (7.2.1), (7.2.2) chegaraviy masala yagona $y(x)$ yechimga ega bo‘ladi.

$[a;b]$ oraliqni $x_i = a + i \cdot h$ $(0 \le i \le m, h = (b - am)/m)$ tugun nuqtalar bilan to'r(setka)ga ajratib, $y_i = y(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $r_i = r(x_i)$ belgilashlarni kiritamiz. Ichki x_i $(1 \le i \le m-1)$ nuqtalar uchun chekli ayirmalardan foydalanib, $O(h^2)$ aniqlikda (7.2.1) tenglamani

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i y_i = r_i \tag{7.2.3}$$

va (7.30) chegaraviy shartni esa

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \dfrac{\alpha_1}{2h}(-y_2 + 4y_1 - 3y_0) = \alpha_2 \\ \beta_0 y_m + \dfrac{\beta_1}{2h}(3y_m - 4y_{m-1} + y_{m-2}) = \beta_2 \end{cases} \tag{7.2.4}$$

ko'rinishda yozib olamiz.

(7.2.3) da $y_2 = r_1 h^2 - q_1 h^2 y_1 + 2y_1 - y_0$ ekanligini hisobga olib, uni (7.2.4) ga qo'yamiz va

$$\alpha_0 y_0 + \frac{\alpha_1}{2h}(-r_1 h^2 + q_1 h^2 y_1 - 2y_1 + y_0 + 4y_1 - 3y_0) = \alpha_2$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni y_0 ga nisbatan echib

$$y_0 = E_1 y_1 + D_1$$

ga ega bo'lamiz. Bu erda $E_1 = \dfrac{2\alpha_1 + \alpha_1 q_1 h^2}{2\alpha_1 - 2\alpha_0 h}$, $D_1 = -\dfrac{2\alpha_2 h + \alpha_1 r_1 h^2}{2\alpha_1 - 2\alpha_0 h}$.

Xuddi shunga o'xshash (7.2.3) da

$y_{m-2} = r_{m-1} h^2 - q_{m-1} h^2 y_{m-1} + 2y_{m-1} - y_m$ ekanligini hisobga olib va uni (7.2.4) ga qo'ysak

$$\beta_0 y_m + \frac{\beta_1}{2h}(3y_m 4y_{m-1} + r_{m-1} h^2 - q_{m-1} h^2 y_{m-1} + 2y_{m-1} - y_m) = \beta_2$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni y_m ga nisbatan yechsak

$$y_m = Q y_{m-1} + S \tag{7.2.5}$$

ni olamiz. Bu erda

$$Q = \frac{2\beta_1 + \beta_1 q_{m-1} h^2}{2\beta_1 + 2\beta_0 h}, \quad S = \frac{h(2\beta_2 - \beta_1 r_{m-1} h)}{2\beta_1 + 2\beta_0 h}.$$

(7.2.3) va (7.2.4) birgalikda $y_0, y_1, \ldots y_m$ – noma'lumlarni o'z ichiga olgan $(m+1)$ ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tashkil etadi.

Agar sistemani

$$Ay = b,$$

matrisa ko'rinishida ifodalasak, bu sistemani Gauss, Kramer koidasi, teskari matrisa usullari bilan yechish yaxshi samara bermaydi. Shu sababli bu sistemani yechish uchun progonka usulidan foydalanamiz.

Umumiy

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = r_i, \quad (1 \le i \le m-1) \qquad (7.2.6)$$

ko'rinishdagi uch diagonalli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu yerda A_i, B_i, C_i lar i ga bog'liq o'zgarmaslar.

(7.2.6) ning yechimini

$$y_i = E_{i+1} y_{i+1} + D_{i+1}, \quad (0 \le i \le m-1) \qquad (7.2.7)$$

ko'rinishda ifodalaymiz. Bu erda E_1, D_1 - lar ma'lum, E_i, D_i $(i = 2,3,...,m\text{-}1)$ - lar esa hozircha noma'lum koeffisientlar.

(7.2.7) da i ni $i-1$ ga almashtirib, $y_{i-1} = E_i y_i + D_i$ ga ega bo'lamiz va y_i o'rniga uning (7.2.7) dagi ifodasini olib kelib qo'yamiz. Natijada

$$y_{i-1} = E_i y_i + D_i = E_i(E_{i+1} y_{i+1} + D_{i+1}) + D_1 = E_i E_{i+1} y_{i+1} + E_i D_{i+1} + D_i, \quad (7.2.8)$$

$$(1 \le i \le m-1)$$

tenglikni hosil qilamiz. (7.2.7), (7.2.7) larni (7.2.8) ga olib borib quyib,

$$A_i E_i E_{i+1} y_{i+1} + A_i E_i D_{i+1} + A_i D_i - C_i E_{i+1} y_{i+1} - C_i D_{i+1} + B_i y_{i+1} - r_i = 0$$

$$(1 \le i \le m-1)$$

tenglikga ega bo'lamiz. Bu tenglikda y_{i+1} oldidagi koeffisientlarni hamda ozod hadlarni nolga tenglashtirib,

$$A_i E_i E_{i+1} - C_i E_{i+1} + B_i = 0$$

$$A_i E_i D_{i+1} + A_i D_i - C_i D_{i+1} - r_i = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu erdan E_i, D_i larni hisoblash uchun

$$\begin{cases} E_{i+1} = \dfrac{B_i}{C_i - A_i E_i}, \\ D_{i+1} = \dfrac{A_i D_i - r_i}{C_i - A_i E_i}, \quad 1 \le i \le m\text{-}1 \end{cases} \tag{7.2.9}$$

formulalarga ega bo‘lamiz. (7.2.5) to‘g‘ri progonka formulasi deb ataladi va u E_1, D_1 larni bilgan holda $E_k, D_k,\ (k = 2,3, \ldots ,m)$ larni hisoblash imkonini beradi.

E_m, D_m larning qiymatlarini aniqlab, ularni (7.2.5) ga qo‘ysak, natijada

$$y_m = Q(E_m y_m + D_m) + S$$

yoki

$$y_m = \frac{QD_m + S}{1 - QE_m}$$

ga ega bo‘lamiz. y_m ni bilgan holda, (7.2.7) formula yordamida $y_k,\ (k = m-1,\ m\text{-}2,\ \ldots ,0)$ larning qiymatlarini hisoblaymiz. Bu amal teskari progonka deb ataladi.

Teorema (progonka usulining turg‘unligi haqida). Agar $A_i > 0$, $B_i > 0, C_i \ge A_i + B_i,\ 1 \le i \le m\text{-}1;\quad 0 \le E_1 < 1,\ 0 \le Q < 1$ shartlar bajarilsa progonka usuli turg‘un bo‘ladi.

Progonka usuliga tuzilgan dastur matni:

```
const   a1=0; b1=1; m=10; h=(b1-a1)/m;
  alfa0=0.5; alfa1=0.5; alfa2=1.0;
  betta0=-3.0; betta1=2.0; betta2=-3.0;
type vektor=array[0..m] of real;
var
```

```
    x,y,a,b,c,r,d,e:vektor;
    i:integer;
    q,s,g1,g2:real;
function fq(t:real):real;
begin
     fq:=2-t        { q(x)  funksiyasining berilishi}
end;
function fr(t:real):real;
begin
     fr:=-sqr(sqr(t))/3+2*t*sqr(t)/3-sqr(t)+3*t+2   {r(x) funksiyasining
berilishi}
end;
begin
for i:=0 to m do begin
                               x[i]:=a1+i*h; a[i]:=1.0; b[i]:=1.0;
                               c[i]:=2-fq(x[i])*sqr(h);  r[i]:=fr(x[i])*sqr(h)
                         end;
g1:=2*(alfa1-alfa0*h);  e[1]:=alfa1*(2+fq(x[1])*sqr(h))/g1;
d[1]:=-h*(2*alfa2+alfa1*fr(x[1])*h)/g1;
for i:=1 to m-1 do begin
                              e[i+1]:=b[i]/(c[i]-a[i]*e[i]); d[i+1]:=(a[i]*d[i]-
r[i])/(c[i]-a[i]*e[i]);
                           end;
g2:=2*(betta1+betta0*h);    q:=betta1*(2+fq(x[m-1])*sqr(h))/g2;
s:=(2*h*betta2-betta1*fr(x[m-1])*sqr(h))/g2;
y[m]:=(q*d[m]+s)/(1-q*e[m]);
for i:=m-1 downto 0 do y[i]:=e[i+1]*y[i+1]+d[i+1];
for i:=0 to m do writeln('y[',i:1,']=',y[i]:6:4);
end.
```

7.3. Differensial progonka usuli

Ma’lumki, ko‘pgina injenerlik masalalarni yechish, o‘zgaruvchan koeffisientli differensial tenglamaning har xil chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishga keltiriladi. Boshlang‘ich shartli masalalarni echish, chegaraviy masalalarni yechishga nisbatan soddaroq. Chunki chegaraviy masalalarni berilgan aniqlikda yechish algoritmlarini qurish ancha murakkab. Boshlang‘ich shartli masalalarni esa berilgan aniqlikda yechish uchun qator algoritmlar ishlab chiqilgan bo‘lib, ularni yechishda foydalaniladigan standart dasturlar mavjud. Shu sababli berilgan chegaraviy masalalarni boshlang‘ich shartli masalalarga keltirib yechish eng qulay usullardan biridir. Differensial progonka usuli yordamida chegaraviy masalani yechish, unga teng kuchli bo‘lgan boshlang‘ish shartli masalalarni yechishga keltiriladi. Bu usulning yana bir qulaylik tomoni shundan iboratki, Koshi masalasini berilgan aniqlikda yechish uchun har bir algoritmik til o‘zining standart dasturlariga ega.

Differensial progonka usuli algoritmini quyida berilgan misolda ko‘rib chiqamiz. Ushbu

$$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = F(x) \qquad (7.3.1)$$

differensial tenglamaning

$$\begin{cases} a_{11}y'(0) + a_{12}y(0) = b_1 \\ a_{21}y'(1) + a_{22}y(1) = b_2 \end{cases} \qquad (7.3.2)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsin. Bu yerda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ –o‘zgarmaslar; $A(x), B(x), F(x)$ – $[0,1]$ oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar. $y(x)$ – noma’lum funksiya.

Differensial progonka usuliga ko‘ra (7.3.1), (7.3.2) chegaraviy masala yechimini

$$\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)=\gamma(x) \qquad (7.3.3)$$

ko‘rinishda tasvirlaymiz. Bu yerdagi $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ lar hozircha noma’lum funksiyalar.

(7.3.3) ni (7.3.1) ga olib borib qo‘yamiz va $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ larga nisbatan quyidagi:

$$\begin{cases} \alpha'(x)=\alpha(x)A(x)-\beta(x) \\ \beta'(x)=\alpha(x)B(x) \\ \gamma'(x)=-\alpha(x)F(x) \end{cases} \qquad (7.3.10)$$

birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$a_{11}y'(0)+a_{12}y(0)=b_1 \quad \text{va} \quad \alpha(0)y'(0)+\beta(0)y(0)=\gamma(0)$$

tengliklardan

$$\alpha(0)=a_{11}, \quad \beta(0)=a_{12}, \quad \gamma(0)=b_1 \qquad (7.3.11)$$

ni hosil qilamiz.

(7.3.10), (7.3.11) Koshi masalasini [0,1] oraliqda yechib, $\alpha(1)$, $\beta(1)$, $\gamma(1)$ larni aniqlaymiz. Odatda bu usul to‘g‘ri progonka usuli deb ataladi.

$$a_{21}y'(1)+a_{22}y(1)=b_2 \quad \text{va} \quad \alpha(1)y'(1)+\beta(1)y(1)=\gamma(1)$$

Tengliklardan

$$y(1)=\frac{b_2\alpha(1)-a_{21}\gamma(1)}{a_{22}\alpha(1)-a_{21}\beta(1)}, \quad y'(1)=\frac{b_2\beta(1)-a_{22}\gamma(1)}{a_{21}\beta(1)-a_{22}\alpha(1)} \qquad (7.3.12)$$

ga ega bo‘lamiz.

(7.3.1), (7.3.12) Koshi masalasini [0,1] oraliqda echib, $y(x)$ funksiyasining sonli qiymatlarini hosil qilamiz. Bu usul teskari progonka usuli deyiladi.

Differensial progonka usulining aniqligi unga teng kuchli bo‘lgan Koshi masalalarini yechish aniqligi kabi bo‘ladi. Agar Koshi masalalari yechimi to‘rtinchi tartibli Runge-Kutta usuli yordamida topilgan bo‘lsa, differensial progonka usulining aniqligi ham to‘rtinchi tartibga ega bo‘ladi.

Bu esa chegaraviy masalani differensial progonka usulida yuqori aniqlik bilan yechish imkonini beradi.

Chegaraviy masalalarni differensial progonka usulida yechishga tuzilgan dastur matni:

```
const  a11=1; a12=1; a21=1; a22=-1; b1=0; b2=2;
        ndx=11; dx=0.1;
type vek=array[1..ndx] of real;
type vek1=array[1..2] of real;
type vek2=array[1..3] of real;
var
    y0,y,yt: vek1; alf0,alf: vek2; px: vek; zlx,h:real;
    i,nx:integer;
function fa(z: real): real;
begin
        fa:=z+1; { A(x)-funksiyasining ko‘rinishi}
end;
function fb(z: real): real;
begin
        fb:=z+3;  { B(x)-funksiyasining ko‘rinishi}
end;
function ff(z: real): real;
begin
        ff:=z*z*z*z+7*z*z*z+7*z*z+5*z+4;   { F(x)-funksiyasining
ko‘rinishi }
end;
procedure pv(x: real; y: vek2; var dy: vek2);
begin
        dy[1]:=fa(x)*y[1]-y[2];
        dy[2]:=y[1]*fb(x);
```

```
        dy[3]:=y[1]*ff(x)
  end;

procedure rungikytta1(x: real; y0: vek2; var dy: vek2);
var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vek2;
begin
    pv(x,y0,fc);
    for i:=1 to 3 do begin fk1[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i] end;
    x:=x+0.5*h;
    pv(x,v3,fc);
    for i:=1 to 3 do begin fk2[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i] end;
    pv(x,v3,fc);
    for i:=1 to 3 do begin fk3[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+fk3[i] end;
    x:=x+0.5*h;
    pv(x,v3,fc);
    for i:=1 to 3 do begin fk4[i]:=h*fc[i];
    dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i])
end;
end;
procedure pv1(x: real; y: vek1; var dy: vek1);
begin
    dy[1]:=y[2];
    dy[2]:=-y[2]*fa(x)-y[1]*fb(x)+ff(x);
end;
procedure rungikytta2(x: real; y0: vek1; var dy: vek1);
var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vek1;
```

```
begin
          pv1(x,y0,fc);
          for i:=1 to 2 do begin fk1[i]:=h*fc[i];
                                   v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i]
                         end;
          x:=x+0.5*h;   pv1(x,v3,fc);
         for i:=1 to 2 do begin fk2[i]:=h*fc[i];
                                   v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i]
                        end;
         pv1(x,v3,fc);
        for i:=1 to 2 do begin fk3[i]:=h*fc[i];
                                  v3[i]:=y0[i]+fk3[i]
                       end;
        x:=x+0.5*h;  pv1(x,v3,fc);
        for i:=1 to 2 do begin fk4[i]:=h*fc[i];

dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i])
                       end;
end;
begin clrscr;
for i:=1 to ndx do px[i]:=(i-1)*dx;
alf0[1]:=a11; alf0[2]:=a12; alf0[3]:=b1;
for nx:=2 to ndx do begin zlx:=px[nx-1]; h:=dx;
                                  rungikytta1(zlx,alf0,alf);
                                  for i:=1 to 3 do alf0[i]:=alf[i];
                       end;
y0[1]:=(b2*alf[1]-a21*alf[3])/(a22*alf[1]-a21*alf[2]);
y0[2]:=(b2*alf[2]-a22*alf[3])/(a21*alf[2]-a22*alf[1]);
writeln('x=',px[ndx]:4:2,'  yy===',y0[1]:7:4);
```

```
for nx:=ndx downto 2 do begin  zlx:=px[nx]; h:=-dx;
                               rungikytta2(zlx,y0,y);
                               writeln('x=',(zlx+h):4:2,'
                   yy=',y[1]:7:4);
                               for i:=1 to 2 do y0[i]:=y[i];
                        end;
end.
```

7.4. Bubnov-Galyorkin usuli

Chegaraviy masalalarni sonli-analitik echish usullaridan biri Bubnov-Galyorkin usulidir. Bu usul chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi koordinat funksiyalarini tanlashga asoslangan. Bubnov-Galyorkin usulining algoritmini quyidagi chegaraviy masalani echishda ko‘rib chiqaylik.

$$y^{IV} + Ay = F(x) \tag{7.4.1}$$

tenglamani

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0 \tag{7.4.2}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi echimi topilsin. Bu yerda A - o‘zgarmas; *F(x)* - $[0,1]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz funksiya.

Bubnov-Galyorkin usuliga ko‘ra (7.4.1), (7.4.2) chegaraviy masalaning echimini

$$y(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin n\pi x \tag{7.4.3}$$

ko‘rinishda qidiramiz. Bu yerda a_n lar hozircha noma’lum o‘zgarmas koeffisientlar.

(7.4.3) ni (7.4.1) ga olib borib qo‘yamiz va

$$\sum_{n=1}^{N} a_n (n\pi)^4 \sin n\pi x + A\sum_{n=1}^{N} a_n \sin n\pi x = F(x) \tag{7.4.4}$$

tenglikni hosil qilamiz.

(7.4.4) tenglikning ikkala tomonini $\sin m\pi x$, $m=1,2,3,...$ larga ketma-ket ko‘paytirib uni $[0,1]$ oraliqda x bo‘yicha integrallaymiz. Agar

$$\int_0^1 \sin px \sin qx dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{агар} \quad p=q \\ 0 & \text{агар} \quad p \neq q \end{cases}$$

ekanligini hisobga olsak, natijada

$$a_m(m\pi)^4 + Aa_m = f_m$$

yoki

$$a_m = \frac{f_m}{(m\pi)^4 + A}, \quad m = 1,2,3,\ldots,N \tag{7.4.5}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $f_m = 2\int_0^1 F(x)\sin m\pi x dx$.

Topilgan a_m larni (7.4.3) ga olib borib qo‘yamiz va noma’lum $y(x)$ funkцiyani aniqlash uchun

$$y(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n \sin n\pi x}{(n\pi)^4 + A} \tag{7.4.6}$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Bubnov-Galyorkin usulining aniqligi (7.4.6) formuladagi yig‘indilar soniga va tanlangan koordinat funksiyasiga bog‘liq bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + xy(x) = x^2$ tenglamaning $y(0)+2y'(0)=1$ va $y(1)-y'(1)=3$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini $x\in[0;1]$, $h=0,2$ lar uchun oddiy progonka usulida aniqlang.

2. $\frac{d^2y(x)}{dx^2}+2\frac{dy(x)}{dx}-3y(x)=5$ tenglamaning $y(x)\big|_{x=0}=0$ va $y(x)\big|_{x=1}=0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi echimini Bubnov-Galyorkin usuli yordamida aniqlang (N=3).

3. $\frac{d^4y(x)}{dx^4}+3y(x)=x$ tenglamaning $y(0)=y^{//}(0)=y(1)=y^{//}(1)=0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini Bubnov-Galyorkin usuli yordamida aniqlang (N=3).

4. $\frac{d^2y(x)}{dx^2}+4x\frac{dy(x)}{dx}+(4x^2+2)y(x)=0$ tenglamaning $y(0)=0$ va $y(1)=e$ shartlarni qanoatlantiruvchi echimini differensial progonka usuliga tuzilgan dastur yordamida aniqlang va uni aniq yechim $y(x)=x\cdot e^{x^2}$ bilan solishtiring.

5. $(x-2)^2\frac{d^2y(x)}{dx^2}-3(x-2)\frac{dy(x)}{dx}+4y(x)=x+2$ tenglamaning $y(0)=3$ va $y(1)=1$ shartlarni qanoatlantiruvchi echimini differensial progonka usuliga tuzilgan dastur yordamida aniqlang va uni aniq yechim $y(x)=(x-2)^2+x-1$ bilan solishtiring.

Tayanch so‘z va iboralar

Differensial tenglama, Koshi masalasi, chegaraviy masala, bir jinsli tenglama, bir jinsli chegaraviy shart, ikkinuktali chegaraviy masala, oddiy progonka usuli, differensial progonka usuli, Bubnov-Galyorkin usuli, koordinat funksiyasi.

Savollar

1. Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy shartlar qanday qo‘yiladi?
2. Chiziqli chegaraviy masala qanday aniqlanadi?

3. Bir jinsli chegaraviy shart deb qanday shartga aytiladi?
4. Bir jinsli chegaraviy masala deb qanday masalaga aytiladi?
5. Ikki nuqtali chegaraviy masalaga misollar keltiring.
6. Oddiy progonka usuli va uning algoritmi.
7. To‘g‘ri va teskari progonka haqida gapirib bering.
8. Progonka usulining turg‘unligi haqidagi teoremani aytib bering.
9. Differensial progonka usulining asl mohiyati nimadan iborat?
10. Differensial progonka usulining xatoligi nimaga bog‘liq?
11. Bubnov-Galyorkin usuli yordamida qanday masalalar echiladi?
12. Bubnov-Galyorkin usulidagi xatolik nimalarga bog‘liq bo‘ladi?

VIII-BOB. XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UChUN CHEGARAVIY MASALALAR

8.1. Asosiy tushunchalar

Oldingi ikkita bobda matematik modeli boshlang‘ich yoki chegaraviy shartli oddiy differensial tenglamalarni echishga keltiriladigan masalalarni ko‘rib chiqqan edik. Bu masalalarning yechimlari bitta erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan funksiyalardan iborat edi.

Ma’lumki ko‘pgina muxandislik masalalarining yechimi bir necha o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lib, uning matematik modelida xususiy hosilalar qatnashgan bo‘ladi. Shu sababli bu masalalarning matematik modellari xususiy hosilali differensial tenglamalar va ularga qo‘yiladigan qo‘shimcha shartlar yordamida ifodalanadi. Masalan, gidrodinamika, radiotexnika, qurilish mexanikasi, diffuziya, yerning sho‘rlanishi, suyuqliklarni filtrlash, elektr zanjirida tok kuchini aniqlash kabi masalalar xususiy hosilali differensial tenglamalar yordamida modellashtiriladi. Asosan bu masalalarning echimlari, temperatura, tezlik, kuchlanish, bosim, egilish kabi fizik va geometrik kattaliklardan iborat bo‘lib, ular fazoviy koordinatalarga, hamda vaqtga bog‘liq bo‘ladi.

Misol sifatida qo‘yidagi, ya’ni birlik uzunlikga ega, bir jinsli, sirti issiqlik o‘tkazmaydigan, yetarlicha ingichka sterjenda issiqlik tarqalish masalasini ko‘rib chiqaylik. Ox o‘qini sterjen bo‘yicha yo‘naltirib va uning chap uchini $x=0$ nuqtada joylashtiramiz. Bu holda issiqlik oqimi faqat Ox o‘qi bo‘yicha tarqaladi. Agar sterjenning t vaqt va x nuqtasidagi temperaturasini $u(x,t)$, sterjen ko‘ndalang kesimi yuzasini esa a deb belgilasak, uning ixtiyoriy ko‘ndalang kesimidan o‘tadigan issiqlik miqdori $Q=-kau_x$ ga teng bo‘ladi. Bu erda $k>0$ – sterjenning issiqlik o‘tkazish koeffisienti. Agar $u_x<0$ bo‘lsa, sterjenning chap qismidagi temperatura uning o‘ng qismidagi temperaturadan katta bo‘ladi, natijada issiqlik chapdan o‘ngga harakatlana boshlaydi. Sterjenning Δx uzunlikga ega qismini ko‘rib chiqaylik. Bir vaqt o‘lchov birligida bu qismning x koordinatali kesimidan $Q_1=-kau_x|_x$, miqdorda issiqlik kirib kelsa, shu qismning $x+\Delta x$ koordinatali kesimidan esa $Q_2=-kau_x|_{x+\Delta x}$ miqdorda issiqlik chiqib ketadi. Natijada qismdagi issiqlik miqdori

$$\Delta Q=Q_1-Q_2=(-kaux)|_x-(-kaux)|_{x+\Delta x}\,. \qquad (8.1.1)$$

ga o‘zgaradi. Elementar fizika kursidan ma’lumki, qaralayotgan qismdagi issiqlik miqdori $Q=s\rho a\Delta xu_t$ ga teng bo‘ladi. Bu erda s – materialning issiqlik o‘tkazish sig‘imi, ρ – material zichligi. Bu miqdordan vaqt bo‘yicha olingan hosila qismdagi issiqlik o‘zgarishiga teng bo‘ladi:

$$\Delta Q=s\rho a\Delta xu_t. \qquad (8.1.2)$$

(8.1.1) va (8.1.2) dan $(s\rho a\Delta xu_t=(kau_x)|_{x+\Delta x}-(kau_x)|_x)$ ga ega bo‘lamiz. Bu yerda $\Delta x\to 0$ da limitga o‘tsak, $s\rho au_t=a(ku_x)_x$ yoki

$$u_t=(ku_x)_x/s\rho\,. \qquad (8.1.3)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamaga ega bo‘lamiz.

Agar $k=const$ bo‘lsa, (8.1.3) ni

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\quad (\,c=k/s\rho)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Odatda bu tenglama *issiqlik tarqalish* yoki *diffuziya* tenglamasi deb ataladi.

Bu tenglamaning xususiy yechimini aniqlash uchun unga qo‘shimcha shartlar zarur bo‘ladi. Faraz qilaylik, boshlang‘ich $t=0$ vaqtda sterjen $g(x)$ temperaturaga ega bo‘lsin:

$$u(0,x)=g(x),\ \ 0<x<1\,. \qquad (8.1.4)$$

Bu shart *boshlang‘ich shart* deb ataladi. Sterjen o‘zining chetki uchlarida o‘zgarmas α va β temperaturalarga ega bo‘lsin:

$$u(t,0)=\alpha,\ \ u(t,1)=\beta, \qquad (8.1.5)$$

(8.1.5) shartlar *chegaraviy shartlar* deb ataladi.

Shunday qilib quyidagi masalaga ega bo‘lamiz. O‘zining chetki uchlarida o‘zgarmas α va β temperaturalarga ega sterjen berilgan bo‘lib, u boshlang‘ich t=0 vaqtdagi temperaturaga $g(x)$ ega bo‘lsin. Ixtiyoriy t>0 vaqtda sterjenning istalgan x nuqtasidagi temperatura qanday aniqlanadi?

Bu masalaning matematik modeli o‘zgarmas koeffisientli xususiy hosilali differensial tenglama

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \left(c = \frac{k}{s\rho},\ 0 \le x \le 1\right)$$

va unga qo‘yilgan (8.1.4) boshlang‘ich va (8.1.5) chegaraviy shartlardan iborat bo‘ladi.

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun boshqa ko‘rinishdagi masalalarni ham keltirish mumkin. Masalan, sterjenning o‘ng chetki qismi issiqlik o‘tkazmaydigan bo‘lsa, u holda (8.1.5) chegaraviy shartlar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$u(t,0)=\alpha, \quad u_x(t,1)=0.$$

Agar qaralayotgan sterjen bir jinsli bo‘lmasa ($\rho=\rho(x)$, $s=s(x)$, $k=k(x)$), u holda (8.1.3) o‘zgaruvchan koeffisientli xususiy hosilali differensial tenglamaga aylanadi va uni yechish yanada murakkablashadi.

8.2. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni klassifikatsiyalash

Ma’lumki, asosiy fizik jarayonlar ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Bu tenglamalarni umumiy holda quyidagicha yozish mumkin:

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0, \tag{8.2.1}$$

bu yerda x,y - erkli o‘zgaruvchilar, u – noma’lum funksiya va $u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}$ – lar esa u ning xususiy hosilalari. Agar $u=u(x,y)$ funksiya (8.2.1) tenglamani ayniyatga aylantirsa, bu funksiya *tenglamaning yechimi* deb ataladi. Umumiy holda bu yechim x,y,u fazoda qandaydir sirtni ifodalaydi.

(8.2.1) tenglama

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0,$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa, u *yukori tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli tenglama* deb ataladi. Bu yerda, *a,b,c* – lar *x* va *y* ning funksiyalari yoki o‘zgarmas kattaliklar.

(8.2.1) tenglama *chiziqli tenglama* deb ataladi, agar u

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=g, \qquad (8.2.2)$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa. Bu yerda *a,b,c,d,e,f,g* – lar *x* va *y* ning funksiyalari yoki o‘zgarmas kattaliklar. Agar (8.2.2) da *g*=0 bo‘lsa, u holda bu tenglama bir *jinsli tenglama* deb ataladi.

(8.2.2) tenglamadagi *a,b,c* koeffisientlardan kamida bittasi noldan farkli bo‘lsin. Bu tenglamaning tipi *a,b,c* larga, ya’ni $D=b^2-ac$ diskriminantning qiymatiga bog‘liq bo‘ladi. Agar (8.2.2) tenglamada *D*>0 bo‘lsa, u *giperbolik*, agar *D*=0 bo‘lsa, u *parabolik*, agar *D*<0 bo‘lsa, u *elliptik* tipdagi tenglama deb ataladi. Injenerlik masalalarida ko‘p uchraydigan tenglamalar, masalan issiqlik tarqalish (diffuziya) tenglamasi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (8.2.3)$$

parabolik tipdagi, to‘lqin tarqalish tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (8.2.4)$$

giperbolik tipdagi, Laplas tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (8.2.5)$$

esa elliptik tipdagi tenglamalar bo‘ladi.

a,b,c koeffisientlar *x* va *y* larga bog‘liq bo‘lgan hollarda, tenglama tipi bir sohadan ikkinchi sohaga utganda o‘zgarishi mumkin. Bu holda tenglama *aralash tipdagi* tenglama deb ataladi. Masalan $yu''_{xx}+u''_{yy}=0$ Trikomi tenglamasi aralash tipdagi tenglamaga misol bo‘la oladi.

Bir jinsli bo‘lmagan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

Laplasa tenglamasi Puasson tenglamasi deb ataladi.

Ayrim hollarda differenцial tenglamalarni qisqa ko‘rinishda yozishda Laplas operatori - Δ dan foydalaniladi. Bu operator quyidagi ko‘rinishlarga ega:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Bu operatorlardan foydalanib, issiqlik tarqalish tenglamasini - $\Delta u=\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}$; to‘lqin tarqalish tenlamasini - $\Delta u=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ va Laplas tenglamasini - $\Delta u=0$ ko‘rinishlarda ifodalash mumkin.

8.3. Boshlang‘ich va chegaraviy shartlar

Xususiy hosilali differensial tenglamalar umumiy holda cheksiz ko‘p yechimlarga ega bo‘ladi. Bu yechimni yagonaligini ta’minlash uchun tenglamaga qo‘shimcha shartlar qo‘yiladi. Bu qo‘shimcha shartlar boshlang‘ich va chegaraviy shartlardan iborat bo‘ladi.

Boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini qidirish masalasi Koshi masalasi deb ataladi. Bu holda masala chegaralanmagan sohada yechiladi va chegaraviy shart berilmaydi. Asosan Koshi masalasi giperbolik va parabolik tipidagi chiziqli differensial tenglamalar uchun qo‘yiladi.

Masalan, giperbolik tipidagi tenglamalar uchun Koshi masalasi, quyidagicha ifodalanadi: $G(-\infty < x < +\infty)$ sohada $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$

tenglamaning $u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \psi(x)$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini aniqlang. Bu erda $\varphi,\ \psi$ - berilgan funksiyalar.

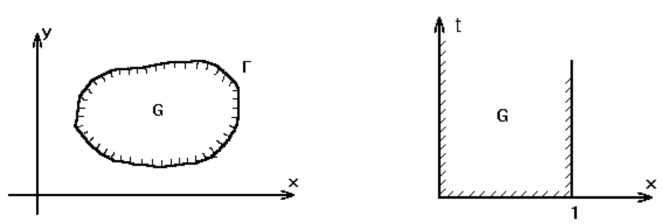
(8.2.2) tenglamaning chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u=u(x,y)$ yechimini topish masalasi, chegaraviy masala deb ataladi. Bunday masalalar elliptik tipdagi tenglamalarga qo‘yiladi.

Funksiya va funksiya hosilasining soha chegarasida berilish usullariga qarab chegaraviy shartlar quyidagi turlarga ajratiladi:

- agar soha chegarasida funksiya qiymatlari berilgan bo‘lsa, bu – 1-tur chegaraviy shart deb;
- agar soha chegarasida funksiya hosilasi qiymatlari berilgan bo‘lsa, bu – 2-tur chegaraviy shart deb;
- agar soha chegarasida funksiya va uning hosilasining chiziqli kombinatsiyasi qiymatlari berilgan bo‘lsa, bu – 3-tur chegaraviy shart deb ataladi;

Bu shartlarga to‘g‘ri kelgan chegaraviy masalalar mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi tur chegaraviy masalalar deb ataladi.

Masalan elliptik tipidagi (8.2.2) tenglama uchun chegaraviy masalalarni quyidagicha ifodalash mumkin. G chegarali G sohada (rasm-8.1a) tenglamaning shunday $u=u(x,y)$ yechimini aniqlangki, G da quyidagi shartlar bajarilsin: $u(x,y)_{\Gamma} = \varphi$ - 1-tur chegaraviy masala; $\frac{\partial u}{\partial n}_{\Gamma} = \psi$ - 2-tur chegaraviy masala; $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u(x,y)\right)_{\Gamma} = p$ - 3-tur chegaraviy masala.



а) б)

расм.8.1.

(8.2.2) chiziqli differensial tenglamaning boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u=u(x,t)$ yechimini aniqlash masalasi aralash masala deb ataladi. Aralash masalalar giperbolik va parabolik tipidagi tenglamalar uchun qo'yiladi. Masalan, giperbolik tipidagi tenglama uchun aralash masala quyidagicha ifodalanadi: G ($0<x<1$, $t>0$) sohada (rasm-7.1b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$ tenglamaning $u(x,0)=\varphi_1(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\varphi_2(x)$ ($0<x<1$, $t=0$) boshlang'ich shartlar va $\alpha_1 u(0,t)+\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\psi_1(t)$, $\alpha_2 u(1,t)+\beta_2\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=\psi_2(t)$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u=u(x,t)$ yechimini aniqlang. Bu yerda $|\alpha_1|+|\beta_1|\neq 0,\ |\alpha_2|+|\beta_2|\neq 0,\ 0<t<\infty.$

Koshi va chegaraviy masalalarni aralash masalaning xususiy holi deb qarash mumkin.

Xususiy hosilali tenglamalarga quyilgan aralash masalalarni yechishda foydalaniladigan ayrim usullar algoritmi bilan tanishib chiqaylik.

8.4. Bubnov-Galyorkin usuli

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini aniqlash uchun bir qator usullar mavjud. Shulardan biri Bubnov-Galyorkin usulidir. Bu usul algoritmini quyidagi masalada ko'rib chiqamiz. Issiqlik tarqalish tenglamasi

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ \ 0\le x\le 1,\ \ t\ge 0 \qquad (8.4.1)$$

berilgan bo'lib, uning

$$U(x,0)=f(x) \qquad (8.4.2)$$

boshlang‘ich va

$$U(0,t)=0,\ U(1,t)=0 \tag{8.4.3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi echimi $U(x,t)$ topish talab qilinsin.

Bubnov-Galyorkin usuliga ko‘ra shunday $\varphi_1(x)$, ... , $\varphi_n(x)$ bazis funksiyalarni tanlaymizki, ular o‘zaro ortoganol va $\varphi_i(0)=0$, $\varphi_i(1)=0$, $(i=1,.., n)$ shartlarni qanoatlantirsin:

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 1, & \text{агар} \quad i=j \\ 0, & \text{агар} \quad i \neq j \end{cases}$$

(8.4.1)-(8.4.3) masalaning taqribiy $u(x,t)\approx U(x,t)$ yechimini quyidagi ko‘rinishda qidiramiz:

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\varphi_i(x). \tag{8.4.4}$$

Bu yerda $c_j(t)$ koeffisientlar hozircha noma’lum funksiyalar. (8.4.4) dan

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\,\varphi_i(x), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\,\varphi''_i(x),$$

ekanligini xisobga olib, ularni (8.4.1) tenglamaga olib borib qo‘yamiz, va

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\,\varphi_i(x)=a\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\,\varphi''_i(x),\ i=1,..,n\ , \tag{8.4.5}$$

tenglikga ega bo‘lamiz. Bu tenglikning ikkala tamonini $\varphi_j(x)$ $(j=1,2,3,\ldots,n)$ larga ko‘paytirib hosil bo‘lgan tenglikni hadma-had x bo‘yicha $[0;1]$ oraliqda integrallaymiz va $c_j(t)$ larga nisbatan

$$c_j'(t)=a\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\int_0^1 \varphi''_i(x)\varphi_j(x)dx, \qquad \mathrm{j}=1,..,n \tag{8.4.6}$$

oddiy differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

(8.4.4) da $t=0$ deb, (8.4.2) boshlang‘ich shartdan foydalansak,

$$c_j(0)=\int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx, \qquad \mathrm{j}=1,..,n \tag{8.4.7}$$

ga ega bo‘lamiz. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun (8.4.6), (8.4.7) Koshi masalasini 6-bobda keltirilgan usullardan biri yordamida yechib $c_j(t)$ larni aniqlaymiz, va ularni (8.4.4) ga qo‘yib masalaning yechimini hosil qilamiz.

8.5. Fure usuli

Bu usul algoritmini uzunligi l ga teng bo‘lgan ikki uchi mahkamlangan torning erkin tebranishi masalasida ko‘rib chiqaylik. Ma’lumki, bu masalani yechish

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{8.5.1}$$

tenglamaning

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{dt}\bigg|_{t=0} = F(x) \tag{8.5.2}$$

boshlang‘ich va

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \tag{8.5.3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishga keltiriladi.

Fure usuli odatda o‘zgaruvchilarni ajratish usuli ham deb ataladi. Bu usul ikki qismdan iborat bo‘lib, birinchi qismda (8.5.1) tenglamaning (8.5.3) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsa, ikkinchi qismda esa xos funksiyalar asosida (8.5.2) shartni qanoatlantiruvchi yechim aniqlanadi.

Fure usuliga ko‘ra yechimni

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{8.5.4}$$

ko‘rinishda qidiramiz.

(8.5.4) ni ikki marta x va t lar bo‘yicha differensiallab $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = X^{//}(x)T(t)$ va $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = X(x)T^{//}(t)$ tengliklarni hosil qilamiz va ularni (8.5.1) ga qo‘yib,

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$$

yoki

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)} \tag{8.5.5}$$

ga ega bo‘lamiz.

(8.5.5) ning chap qismi faqat t ga, o‘ng qismi esa faqat x o‘zgaruvchiga bog‘liq. Agar (8.5.5) da t ni o‘zgarmas, ya’ni uning chap qismi o‘zgarmas deb, x ni ixtiyoriy ravishda o‘zgartirsak, uning o‘ng qismi ham o‘zgarmas bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash (8.5.5) da x ni o‘zgarmas, ya’ni uning o‘ng qismi o‘zgarmas deb, t ni ixtiyoriy ravishda o‘zgartirsak, uning chap qismi ham o‘zgarmasdan qoladi. Bu esa $\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$ va $\frac{X''(x)}{X(x)}$ larning bir xil o‘zgarmas kattalikga tengligini bildiradi:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=c=const \tag{8.5.6}$$

Bu erdan $T(t)$ va $X(x)$ funksiyalar mos ravishda

$$X''(x)-cX(x)=0\ ,\quad T''(t)-ca^2T(t)=0 \tag{8.5.7}$$

differenцial tenglamalarning yechimi ekanligi kelib chiqadi.

Agar (8.5.3) chegaraviy shartni hisobga olsak

$$u(x,t)\big|_{x=0}=X(0)T(t)=0$$

$$u(x,t)\big|_{x=l}=X(l)T(t)=0$$

tengliklar ixtiyoriy t lar uchun o‘rinli bo‘ladi. Bu esa

$$X(0)=0\ ,\ \ X(l)=0$$

bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi.

Natijada $X(x)$ funksiyani topish uchun

$$X''(x)-cX(x)=0 \tag{8.5.8}$$

$$X(0)=X(l)=0 \tag{8.5.9}$$

chegaraviy masalaga ega bo‘lamiz.

(8.5.8), (8.5.9) chegaraviy masala bir qarashda $X(x)\equiv 0$ trivial yechimga egadek ko‘rinadi, lekin bizdan masalaning 0 dan farqli yechimini topish talab etiladi. c ning shunday qiymatini tanlaylikki, qaralayotgan masala 0 dan farqli yechimga ega bo‘lsin. Buning uchun (8.5.8) da $X(x)=e^{rx}$ deb olib $r^2-c=0$ xarakteristik tenglamani hosil qilamiz. Bu xarakteristik tenglama uchun quyidagi hollar bo‘lishi mumkin:

1) $c=\lambda^2>0$ bo‘lsin, u holda $r=\pm\lambda$ bo‘lib,

$$X(x)=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$$

yechimga ega bo‘lamiz. (5.66) shartdan foydalansak, C_1 va C_2 lar uchun

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1e^{\lambda l}+C_2e^{-\lambda l}=0 \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘lamiz. Bu sistemaning asosiy determenanti 0 dan farqli. Haqiqatdan

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda t} & e^{-\lambda\lambda} \end{vmatrix}=e^{-\lambda t}-e^{\lambda t}\neq 0.$$

Bu erdan esa $C_1=C_2=0$ ga ega bo‘lamiz, ya’ni bu holda $X(x)\equiv 0$ trivial yechimga ega bo‘lamiz.

2) $c=0$ bo‘lsin, u holda xarakteristik tenglamaning ikkala yechimi ham 0 ga teng bo‘lib, (8.5.8), (8.5.9) chegaraviy masalaning yechimi

$$X(x)=C_1+C_2x$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar (8.5.9) shartdan foydalansak $C_1=C_2=0$ ekanligi kelib chiqadi va yana $X(x)\equiv 0$ trivial yechimga ega bo‘lamiz.

3) $c=-\lambda^2<0$ bo‘lsin, u holda $r=\pm i\lambda$ bo‘lib,

$$X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$$

yechimga ega bo‘lamiz. (8.5.9) shartdan foydalansak, $C_1 = 0$ va $C_2 \sin\lambda l = 0$ tengliklarga ega bo‘lamiz. $C_2 \neq 0$, ya’ni $X(x) \neq 0$ bo‘lishi uchun $\sin\lambda l = 0$ yoki $\lambda = \frac{k\pi}{l}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\lambda = \frac{k\pi}{l}$, ya’ni $c = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ bo‘lsa, (8.5.8), (8.5.9) chegaraviy masala 0 dan farqli yechimga ega bo‘ladi.

Agar har bir k uchun (8.5.8) ning yechimini $X_k(x)$ deb belgilasak, u holda

$$X_k(x) = A_k \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (8.5.10)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu yerda A_k lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

Keyinchalik $k = 1, 2, 3, \ldots$ deb olamiz, chunki A_k larning ixtiyoriyligidan $k = -1, -2, -3, \ldots$ larda hosil bo‘ladigan yechimlarni ham keltirib chiqarish mumkin bo‘ladi.

Har bir $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ uchun (8.5.10) ning faqat o‘zgarmas ko‘paytuvchilarga farq qiladigan cheksiz ko‘p yechimini hosil qilamiz.

$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ va $\sin\frac{k\pi x}{l}$ lar mos ravishda (8.5.8), (8.5.9) chegaraviy masalaning xos sonlari va xos funksiyalari deb ataladi.

λ_k ga (8.5.7) ning ikkinchi tenglamasini qanoatlantiruvchi $T_k(t)$ funksiya mos keladi va u

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0$$

tenglamaning umumiy yechimi sifatida

$$T_k(t) = B_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + D_k \sin\frac{k\pi a t}{l} \qquad (8.5.11)$$

ko‘rinishida aniqlanadi. Bu erda B_k va D_k lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

(8.5.10) va (8.5.11) ni (8.5.4) ga qo‘yib, (8.5.8) tenglamaning (8.5.9) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi

$$u_k(x,t) = \left(B_k \cos\frac{k\pi at}{l} + D_k \sin\frac{k\pi at}{l} \right) A_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

ni hosil qilamiz. Bu erda $a_k = A_k B_k$ va $b_k = A_k D_k$ belgilashlar kiritib, uni

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l} \right) \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (8.5.12)$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

$u_k(x,t)$ yechim torning erkin tebranishi masalasiga mos keluvchi xos funksiyalari deb ataladi.

Teorema. Agar $u_k(x,t)$ funksiyalar (8.5.1) tenglamaning bir jinsli (8.5.3) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi bo‘lsa, $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x.t)$ funksiya ham (8.5.1) tenglamaning (8.5.3) shartni qanoatlantiruvchi yechimi bo‘ladi.

Fure usulining ikkinchi qismi, xos funkцiyalar asosida (8.5.2) shartni qanoatlantiruvchi yechimni topishdan iborat. (8.5.2) ni (8.5.1) ga qo‘yib, ularni yig‘ib chiqamiz:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l} \right) \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (8.5.13)$$

Har bir k lar uchun $u_k(x,t)$ funksiya (8.5.3) chegaraviy shartni qanoatlantirganligi sababli, $u(x,t)$ funksiya uchun ham bu shart bajariladi.

Endi a_k va b_k koeffisientlarni shunday tanlaylikki, (8.5.13) yechim (8.5.2) boshlang‘ich shartni qanoatlantirsin.

(8.5.13) da $t = 0$ deb,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l} = f(x) \qquad (8.5.14)$$

ga ega bo‘lamiz.

(8.5.13) ni t bo‘yicha differensiallab, unda $t = 0$ desak

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}=F(x) \qquad (8.5.15)$$

tenglikga ega bo‘lamiz.

(8.5.14) va (8.5.15) larni $\sin\frac{n\pi x}{l}$ $(n=1,2,3,...)$ larga ko‘paytirib, $[a,b]$ oraliqda integrallaymiz. Agar

$$\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{cases}0, & \text{агар } k\neq n\\ \frac{1}{2}, & \text{агар } k=n\end{cases}$$

ekanligini hisobga olsak, a_k va b_k koeffisientlar uchun

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

formulalarga ega bo‘lamiz. Bu koeffisientlarni (8.5.13) ga qo‘yib,

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\cos\frac{k\pi at}{l}+\frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

(8.5.1) - (8.5.3) masalaning yechimini hosil qilamiz.

Misol. Fure usulidan foydalanib (8.5.1)-(8.5.3) boshlang‘ich shartli chegaraviy masalada $f(x)=1+x^2$ va $F(x)=0$ lar uchun yechimni aniqlang.

Echish. a_k va b_k koeffisientlarni aniqlaylik:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l(1+x^2)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k\cdot\left(\frac{2l^2}{k^2\pi^2}-1-l^2\right)-\frac{2l^2}{k^2\pi^2}+1\right],\ b_k=0\,.$$

Bu qiymatlarni (8.5.13) ga qo‘yib,

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[(-1)^k\cdot\left(\frac{2l^2}{k^2\pi^2}-1-l^2\right)-\frac{2l^2}{k^2\pi^2}+1\right]cos\,\frac{k\pi at}{l}\,sin\,\frac{k\pi x}{l}$$

berilgan masalaning echimiga ega bo‘lamiz.

8.6. Kvadratura formula usuli

Uzunligi L ga teng *(0* $\le x \le L$*)* sterjenda issiqlik tarqalish masalasini qarab chiqaylik. Ma’lumki, bu masalaning matematik modeli

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (8.6.1)$$

tenglamaning

$$u(x,0)=\varphi(x) \qquad (8.6.2)$$

boshlang‘ich va sterjen uchidagi fizik jarayonga bog‘liq ravishda biror chegaraviy shartni qanoatlantruvchi yechimini topishga keltiriladi. Aniqlik uchun sterjen uchlaridagi temperaturalar berilgan bo‘lsin:

$$u(0,t)=\alpha(t) \text{ va } u(L,t)=\beta(t) \qquad (8.6.3)$$

(8.6.1) - (8.6.3) boshlang‘ich shartli chegaraviy masalasini yechishda kvadratura formulasi algoritmini keltirib chiqaramiz.

(8.6.1) tenglamani t bo‘yicha *[0;t]* oraliqda integrallab va (8.6.2) boshlang‘ich shartni xisobga olsak

$$u(x,t)-\varphi(x)=a^2\int_0^t\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}d\tau$$

bu yerda $t=t_n=n\Delta t$ *(n=0,1,2,3,…)* deb, integralni biror kvadratura formulasiga almashtirsak,

$$u_n(x)-\varphi(x)=a^2\sum_{i=0}^{n}A_i\frac{d^2 u_i(x)}{d\,x^2}$$

tenglikga ega bo‘lamiz. Bu yerda $u_i(x) = u(x, t_i)$. Oxirgi tenglikni qo‘yidagicha yozib olamiz:

$$a^2 A_n \frac{d^2\, u_n(x)}{d\, x^2} - u_n(x) = a^2 \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^2\, u_i(x)}{d\, x^2} - \varphi(x)$$

yoki

$$\frac{d^2\, u_n(x)}{d\, x^2} - \frac{1}{a^2 A_n} u_n(x) = \frac{1}{A_n} \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^2\, u_i(x)}{d\, x^2} - \frac{1}{a^2 A_n} \varphi(x). \qquad (8.6.4)$$

Natijada (8.6.4) oddiy differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu erda A_i $(i=0,1,2,\ldots,n)$ lar kvadratura formulasi koeffisientlari. Xususan trapetsiya formulasi uchun $A_0 = A_n = \Delta t/2$; $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_{n-1} = \Delta t$. (8.6.4) tenglamada o‘ng tamon $t = t_n$ dan oldingi vaqtlar uchun berilganlar orqali aniqlanadi.

Agar (8.6.3) chegaraviy shartni e’tiborga olsak,

$$u_n(0) = \alpha(t_n) \text{ va } u_n(L) = \beta(t_n) \qquad (8.6.5)$$

ga ega bo‘lamiz. Natijada xar bir $t = t_n$ uchun (8.6.4) - (8.6.5) chegaraviy masalaga ega bo‘lamiz. Bu chegaraviy masalani 6-bobda keltirilgan usullardan biri yordamida yechib qo‘yilgan masalaning yechimiga ega bo‘lamiz.

Mustaqil echish uchun misollar

1. $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ tenglamaning $U(x,0)=2$ boshlang‘ich va $U(0,t)=0$, $U(1,t)=0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini Bubnov-Galyorkin usulida aniqlang. (Ko‘rsatma: $\varphi_i(x) = \sin i\pi x$ deb oling).

2. $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ tenglamaning $u\big|_{t=o} = 2$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ boshlang‘ich va $u\big|_{x=o} = 0$, $u\big|_{x=1} = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini Fure usuli yordamida aniqlang.

Tayanch so‘z va iboralar

Xususiy hosila, differensial tenglama, issiqlik tarqalish tenglamasi, to‘lqin tarqalish tenglamasi, parabolik tip, giperbolik tip, elliptik tip, 1-2-3-tur chegaraviy masalalar, bazis funkцiya, ortogonal funksiya, diffuziya masalasi, Koshi masalasi, chegaraviy masala, algoritm, Kvadratura formulasi, Bubnov-Galyorkin usuli, Fure usuli.

Savollar

1. Xususiy hosila nima?
2. Xususiy hosilali differensial tenglamaga ta’rif bering.
3. Xususiy hosilali differensial tenglama tartibi qanday aniqlanadi?
4. Xususiy hosilali differensial tenglamaning o‘lchovi qanday aniqlanadi?
5. Xususiy hosilali differensial tenglamalarga misollar keltiring.
6. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni qanday turlarga ajratish mumkin?
7. Issiqlik tarqalish (diffuziya)tenglamasini yozib bering.
8. To‘lqin tarqalish tarqalish tenglamasini yozib bering.
9. Laplas tenglamasini yozib bering.
10. Qanday operatorga Laplas operatori deb ataladi?
11. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi qanday ifodalanadi?
12. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar qanday ifodalanadi?
13. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun aralash masala qanday ifodalanadi?
14. Giperbolik tipidagi tenglamalar uchun Koshi masalasi qanday ifodalanadi?

15. Giperbolik tipidagi tenglamalar uchun aralash masalasi qanday ifodalanadi?
16. Chegaraviy shart turlari haqida gapirib bering.
17. Bubnov-Galyorkin usuli va uning algoritmi.
18. Bazis funksiya haqida gapirib bering.
19. Bazis funksiyalar qachon ortoganal deb ataladi?
20. Fure usuli va uning algoritmi.
21. Fure usulining birinchi qismida nima aniqlanadi?
22. Fure usulining ikkinchi qismida nima aniqlanadi?
23. Xos son va xos funkцiyalar haqida gapirib bering.
24. Kvadratura formulasi usuli va uning algaoritmi.

IX-BOB. INTEGRAL VA INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMALAR HAMDA ULARNI EChISh USULLARI

9.1. Asosiy tushunchalar.

Injenerlik masalalari murakkab fizik jarayonlardan tashkil topgan masalalardir. Bu jarayonlarni matematik modelda har xil usullarda hisobga olish mumkin. Matematik modelda ularni etarlicha aniqlikda hisobga olish, model adekvatligini ta'minlab beradi.

Ma'lumki, fizik jarayonlarda har xil qarshilik kuchlari paydo bo'ladi. Bu ichki qarshilik kuchlarni matematik modelda turli (differensial, integral va h.k.) ko'rinishda hisobga olish mumkin. O'tkazilgan qator tajribalar, mutaxassislar tomonidan olib borilgan ilmiy tadqiqotlar natijalari shuni ko'rsatadiki, ichki qarshilik kuchlarini hisobga olishda integral formalardan foydalanish ijobiy natijalarga olib keladi. Shu sababli fizik jarayonlarda hosil bo'ladigan ichki qarshilik kuchlarini integral formada hisobga olish amaliyotda keng foydalanilmoqda. Natijada jarayonnning matematik modeli integral yoki integro-differensial tenglamalar va ularga qo'yiladigan qo'shimcha shartlardan iborat bo'ladi.

Ta'rif. Agar tenglamada noma'lum funksiya integral ostida qatnashsa, bu tenglama integral tenglama deb ataladi.

Chiziqli integral tenglamani umumiy holda

$$g(t)y(t) - \lambda \int_{\Omega} k(t,s)y(s)ds = f(t) \qquad (9.1.1)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin. Bu erda $k(t,s)$, $g(t)$ va $f(t)$ - berilgan funksiyalar bo'lib, $k(t,s)$ - integral tenglamaning yadro funksiyasi deyiladi. $y(t)$- noma'lum funksiya, λ - berilgan sonli parametr.

Integral tenglamaning bir necha turlari mavjud:

$$\int_{\Omega} k(t,s)y(s)ds = f(t)$$

ko‘rinishdagi tenglama ((9.1.1) da $g(x)=0$ va $\lambda=-1$ bo‘lgan hol), bir jinsli bo‘lmagan 1-tur chiziqli integral tenglama deb ataladi.

$$\lambda\int_{\Omega} k(t,s)y(s)ds = y(t)$$

ko‘rinishdagi tenglama ((9.1.1) da $g(t)=1$ va $f(t)=0$ bo‘lgan hol), bir jinsli 2-tur chiziqli integral tenglama deb ataladi.

$$y(t)-\int_{\Omega} k(t,s)y(s)ds = f(t)$$

ko‘rinishdagi tenglama ((9.1.1) da $g(t)=1$ va $\lambda=1$ bo‘lgan hol), bir jinsli bo‘lmagan 2-tur chiziqli integral tenglama deb ataladi.

Ta’rif. Noma’lum funksiyaning differensialini ham o‘z ichiga olgan integral tenglamaga integro-differensial tenglama deb ataladi.

Integro-differensial tenglamaga misol sifatida quyidagi

$$\frac{dy(t)}{dt}+\lambda\int_0^t R(t,s)y(s)ds = f(t),$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\lambda\left[y(t)-\int_0^t R(t,s)y(s)ds\right] = f(t)$$

tenglamalarni keltirishimiz mumkin. Integro-differensial tenglamalarni yechish uchun tenglamada qatnashgan differensial tartibiga mos ravishda boshlang‘ich shartlar berilishi talab etiladi.

Integrallash sohasiga bog‘liq ravishda (9.1.1) tenglama Fredgolm tipidagi (Ω o‘zgarmas) yoki Volterra tipidagi (Ω o‘zgaruvchi) integral tenglamalar deb ataladi.

Integral va integro-differensial tenglamalarni aniq echimini topish o‘ta murakkab bo‘lib, ko‘pgina hollarda ularni yechishda taqribiy sonli echish usullaridan foydalaniladi. Quyida integral va integro-differensial tenglamalarni taqribiy yechish uchun bir necha sonli usullar va bu usullar algoritmi asosida tuzilgan dasturlar keltirilgan.

9.2. 1-tur Volterra tipidagi integral tenglamalar

Chiziqli 1-tur Volterra tenglamasi quyidagi

$$\int_a^t k(t,s)y(s)ds = f(t), \quad t,s \in [a,b] \qquad (9.2.1)$$

ko‘rinishga ega.

Teorema. Agar $k(a,a) \neq 0, \; f(a) = 0$ bo‘lib $k(t,s), \; f(t)$ funksiyalar (a,b) oraliqda uzluksiz $k_t^{/}(t,s), \; f^{/}(t)$ hosilalarga ega hamda $k(t,s) \neq 0$ bo‘lsa, (9.2.1) tenglama shu oraliqda uzluksiz yagona yechimga ega bo‘ladi.

(9.2.1) tenglamani yechishda kvadratura formulasidan foydalanamiz. Dastlab (9.2.1) tenglamaning ikkala tomonini t bo‘yicha bir marta differensiallab, hosil bo‘lgan ifodada $t = a$ desak,

$$y(a) = \frac{f^{/}(a)}{k(a,a)} \qquad (9.2.3)$$

tenglikni hosil qilamiz. (9.2.1) tenglamadagi integralni o‘zgarmas h qadamli trapetsiya formulasi bo‘yicha chekli yig‘indiga almashtirib, quyidagi

$$y(t_i) = y_i = \frac{2}{k(t_i,t_i)}\left[\frac{f(t_i)}{h} - \sum_{j=1}^{i-1} A_j k(t_i,t_j)y_j\right], \qquad (9.2.4)$$

rekurrent formulaga ega bo‘lish mumkin. Bu yerda $t_i = a + (i-1)h$, $i = 2,3,\ldots, \; A_1 = \frac{1}{2}, \; m > 1$ lar uchun esa $A_m = 1$.

(9.2.3) va (9.2.4) formulalar yordamida $y_i \; (i = 2,3,\ldots)$ larni ketma-ket aniqlash mumkin.

Chiziqli 1-tur Volterra tenglamasini yechish uchun tuzilgan dastur matni:

```
const
    a=0.0;        { t ning boshlang‘ich qiymati }
    n=31;         { t bo‘yicha no‘qtalar soni }
    h=0.1;        { t bo‘yicha qadam }
type  vek=array[1..n] of real;
```

```
var  y,t,c:vek;  s:real;i,j:integer;
function f(x:real):real;
begin
        f:=x*x         { f(t) funksiya ko'rinishi  }
end;
function f1(x:real):real;
begin
         f1:=2*x         { f'(t) funksiya ko'rinishi  }
end;
function r(x,y:real):real;
begin
        r:=2+x*x-y*y        { r(t,s) funksiya ko'rinishi  }
end;
   begin clrscr;
            for i:=1 to n do begin t[i]:=a+(i-1)*h; c[i]:=1.0 end;
            c[1]:=0.5; y[1]:=f1(a)/r(a,a); toch[1]:=ftoch(a);
             for i:=2 to n do
                                        begin
                                                s:=0;
                                              for j:=1 to i-1 do
s:=s+c[j]*r(t[i],t[j])*y[j];
                                                y[i]:=2/r(t[i],t[i])*(f(t[i])/h-s);
                                        end;
       for i:=1 to n do writeln(t[i]:5:2,'   ',y[i]:10:6);
   end.
```

Misol. Tuzilgan dasturdan foydalanib berilgan $a=0$, $h=0,05$, $f(t)=t^2$, $k(t,s)=2+t^2-s^2$ lar uchun olingan (9.2.1) integral tenlamaning taqribiy va aniq $y(t) = te^{-t^2/2}$ yechimlari har xil t larda quyidagi jadvalda keltirilgan.

t	Taqribiy echim	Aniq echim	t	Taqribiy echim	Aniq echim
0,0	0,000000	0,000000	1,6	0,444020	0,444860
0,2	0,197000	0,196040	1,8	0,355225	0,356218
0,4	0,370889	0,369247	2,0	0,269770	0,270671
0,6	0,503031	0,501162	2,2	0,194969	0,195628
0,8	0,582535	0,580919	2,4	0,134354	0,134723
1,0	0,607539	0,606531	2,6	0,088411	0,088523
1,2	0,584365	0,584103	2,8	0,055624	0,055555
1,4	0,525031	0,525436	3,0	0,033494	0,033327

9.3. 2-tur Volterra tipidagi integral tenglamalar

Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan 2-tur Volterra tenglamasi quyidagi

$$y(t) - \int_a^t k(t,s)y(s)ds = f(t), \quad t,s \in [a,b] \tag{9.3.1}$$

ko‘rinishga ega. Bu erda $k(t,s)$- yadro funksiyasi, $s = a$, $t = b$, $t = s$ chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak ichida va uning chegarasida uzluksiz, $f(t)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz. $y(t)$- noma’lum funksiya.

(9.3.1) tenglamani yechishda kvadratura formulasidan foydalanamiz. (9.3.1) tenglamadagi integralni o‘zgarmas h qadamli trapetsiya formulasi bo‘yicha chekli yig‘indiga almashtirib, quyidagi

$$y(t_i) = y_i = \frac{f(t_i) + h\sum_{j=1}^{i-1} A_j k(t_i,t_j)y_j}{1 - \frac{h}{2}k(t_i,t_i)}, \tag{9.3.2}$$

rekurrent formulaga ega bo‘lish mumkin. Bu yerda $t_i = a + (i-1)h$, $i = 2,3,\ldots,$ $A_1 = \frac{1}{2}$, $m > 1$ lar uchun esa $A_m = 1$. Agar (9.3.1) tenglamada $t = a$ desak,

$$y(a) = f(a) \tag{9.3.3}$$

ga ega bo‘lamiz.

(9.3.2) va (9.3.3) lar yordamida y_i $(i = 2,3,\ldots)$ larni ketma-ket aniqlash mumkin.

Chiziqli 2-tur Volterra tenglamasini yechish uchun tuzilgan dastur matni:

```
const
        a=0.0;       { t ning boshlang‘ich qiymati }
         n=21;       { t bo‘yicha nuqtalar soni }
         h=0.05;     { t bo‘yicha qadam }
   type  vek=array[1..n] of real;
   var  y,t,c:vek;
         s:real;
i,j:integer;
function f(x:real):real;
begin
        f:=(1-x*exp(2*x))*cos(1)-exp(2*x)*sin(1) { f(t) funkцiya ko‘rinishi  }
end;
function r(x,y:real):real;
begin
        r:=1-(x-y)*exp(2*x)          { r(t,s) funksiya ko‘rinishi  }
end;
   begin clrscr;
           for i:=1 to n do begin
```

```
t[i]:=a+(i-1)*h; c[i]:=1.0
         end;
    c[1]:=0.5;
    y[1]:=f(a);
    for i:=2 to n do
         begin
              s:=0;
              for j:=1 to i-1 do
s:=s+c[j]*r(t[i],t[j])*y[j];
              y[i]:=(f(t[i])+h*s)/(1-h*r(t[i],t[i])/2);
         end;
  for i:=1 to n do writeln(t[i]:5:2,'   ',y[i]:10:6);
end.
```

Misol. Tuzilgan dasturdan foydalanib, berilgan $a=0$, $h=0{,}05$, $f(t)=(1-te^{2t})\cos 1-e^{2t}\sin 1$, $k(t,s)=1-(t-s)e^{2t}$ lar uchun olingan (9.3.1) integral tenlamaning taqribiy va aniq $y(t)=e^t(\cos e^t-e^t\sin e^t)$ yechimlari har xil t larda quyidagi jadvalda keltirilgan.

t	Taqribiy echim	Aniq echim
0,0	-0,301169	-0,301169
0,2	-0,983602	-0,983569
0,4	-2,101015	-2,100915
0,6	-3,669153	-3,668947
0,8	-5,284334	-5,284021
1,0	-5,513842	-5,513636
1,2	-1,309168	-1,309882
1,4	10,545296	10,542137
1,6	25,010640	25,006065

1,8	14,346203	14,355014
2,0	-45,527236	-45,489898

9.4. Fredgolm tipidagi integral tenglamalar

Umumiy holda chiziqli bir jinsli bo‘lmagan Fredgolm tipidagi integral tenglamalar

$$\alpha y(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)ds = f(t) \qquad (9.4.1)$$

ko‘rinishga ega. Bu erda $x,s \in [a,b]$, $k(t,s)$ - yadro funksiyasi $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda aniqlangan va uzluksiz.

Agar (9.4.1) da $\alpha = 0$ va $\lambda = -1$ bo‘lsa, 1-turdagi; agar $\alpha = 1$ va $\lambda \neq 0$ bo‘lsa 2-turdagi Fredgolm integral tenglamalari hosil bo‘ladi.

$t = t_i$ $(i = 1,2,...n)$ lar uchun, (9.4.1) dagi integralni o‘zgarmas $h = \dfrac{b-a}{n-1}$ qadam bilan trapetsiya formulasiga almashtirsak,

$$\alpha y_i - \lambda h \sum_{j=1}^{n} A_j k_{ij} y_j = f_i, \ (i = 1,2,...,n) \qquad (9.4.2)$$

tenglikga ega bo‘lamiz. Bu yerda $y_i = y(t_i)$, $k_{ij} = k(t_i,t_j)$, $f_i = f(t_i)$, $t_i = a + (i-1)h$, $i = 2,3,...,$ $A_1 = \dfrac{1}{2}$, $m > 1$ lar uchun esa $A_m = 1$.

(9.4.2) da $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{агар} \quad i = j \\ 0, & \text{агар} \quad i \neq j \end{cases}$ Kroneker belgilashini kiritsak, ixtiyoriy $i = 1,2,...,n$ lar uchun

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\alpha\delta_{ij} - \lambda h A_j k_{ij}\right) y_j = f_i \qquad (9.4.3)$$

n ta y_i noma’lumlarni o‘z ichiga olgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz. (9.4.3) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yordamida echib, y_i larni aniqlaymiz.

Fredgolm tipidagi integral tenglamalarini yechish uchun tuzilgan dastur matni:

```
const   alfa=1;               { α ning qiymati }
        lambda=1;             { λ ning qiymati }
        n=37;                 { t bo'yicha nuqtalar soni }
        a=-3.14159265;        { t ning boshlang'ich qiymati }
        b=-a;                 { t ning oxirgi qiymati }
type
     matrisa=array[1..n,1..n+1] of real;
     vektor=array[1..n] of real;
   var
     aij:matrisa; t,y,c:vektor;
     h:real;i,j:integer;
function f(x:real):real;
begin
   f:=25-16*sqr(sin(x))         { f(t) funksiya berilishi }
end;
function fk(x,s:real):real;
begin
   fk:=0.3/(0.64*pi*sqr(cos((x+s)/2))-pi)
                                { k(t,s) funksiya berilishi }
end;
function d(l,m:integer):integer;
begin
   if l=m then d:=1 else d:=0;       { δij funksiya berilishi }
end;
procedure gauss(b:matrisa; var y:vektor);
var max,c:real;
```

```
          k,m:integer;
     begin
        for i:=1 to n do
          begin
            max:=abs(b[i,i]); j:=i;
            for k:=i+1 to n do if abs(b[k,i])>max then
            begin
               max:=abs(b[k,i]); j:=k;
            end;
            if j<>i then for k:=i to n+1 do
            begin
               c:=b[i,k]; b[i,k]:=b[j,k];
               b[j,k]:=c;
            end;
            c:=b[i,i];
            for k:=i to n+1 do b[i,k]:=b[i,k]/c;
            for m:=i+1 to n do
              begin
                c:=b[m,i];
                for k:=i+1 to n+1 do
                b[m,k]:=b[m,k]-b[i,k]*c;
              end;   end;
y[n]:=b[n,n+1];
            for i:=n-1 downto 1 do
            begin
              y[i]:=b[i,n+1];
              for k:=i+1 to n do
              y[i]:=y[i]-b[i,k]*y[k]
            end;
```

```
      end;
  begin
     h:=(b-a)/(n-1);
     for i:=1 to n do begin
                         t[i]:=a+(i-1)*h; c[i]:=1
                     end;
     c[1]:=0.5; c[n]:=0.5;
     for i:=1 to n do for j:=1 to n do
             aij[i,j]:=alfa*d(i,j)-h*lambda*c[j]*fk(t[i],t[j]);
           for i:=1 to n do
                     aij[i,n+1]:=f(t[i]);
     gauss(aij,y);
     for i:=1 to n do writeln('t=',t[i]:8:6,'   ',y[i]:10:9);
  end.
```

Misol. Tuzilgan dasturdan foydalanib berilgan $a=-\pi$, $b=\pi$, $\alpha=1$, $\lambda=1$, $n=37$, $f(t)=25-16\sin^2 t$, $k(t,s)=\dfrac{0{,}3}{0{,}64\pi\cos^2\dfrac{t+s}{2}}-\pi$ lar uchun olingan (9.4.1) integral tenlamaning taqribiy va aniq

$y(t)=8{,}5+\dfrac{128}{17}\cos 2t$ yechimlari har xil t larda quyidagi jadvalda keltirilgan.

t	Taqribiy echim	Aniq echim
-3,141593	16,029411784	16,029411765
-2,792527	14,267864029	14,267864011
-2,443461	9,807468605	9,807468590
-2,094395	4,735294098	4,735294086
-1,745329	1,424667324	1,424667316

-1,396263	1,424667340	1,424667334
-1,047198	4,735294138	4,735294133
-0,698132	9,807468648	9,807468644
-0,349066	14,267864050	14,267864046
-0,000000	16,029411768	16,029411765
0,349066	14,267864050	14,267864046
0,698132	9,807468648	9,807468644
1,047198	4,735294138	4,735294133
1,396263	1,424667340	1,424667334
1,745329	1,424667324	1,424667316
2,094395	4,735294098	4,735294086
2,443461	9,807468605	9,807468590
2,792527	14,267864029	14,267864011
3,141593	16,029411784	16,029411765

9.5. Kvadratura formula usuli

Ushbu

$$y''(t)+\omega^2\left[y(t)-\int_0^t R(t-\tau)y(\tau)d\tau\right]=f(t) \qquad (9.5.1)$$

integro-differensial tenglamaning

$$y(0)=a,\quad y'(0)=b \qquad (9.5.2)$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsin. Bu erda $f(t)$, $R(t)$ - $[0,t]$ oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar.

(9.5.1) - (9.5.2) Koshi masalasi yechimini, kvadratura formulasiga asoslangan taqribiy yechish algoritmi quyidagi amallar ketma-ketligidan iborat: (9.5.1) tenglamani t bo‘yicha $[0;\ t]$ oraliqda bir marta integrallab, (9.5.2) ning ikkinchi shartini hisobga olsak,

$$y'(t)-b+\omega^2\left[\int_0^t y(s)ds-\int_0^t\int_0^s R(s-\tau)y(\tau)d\tau ds\right]=\int_0^t f(s)ds$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu tenglamani yana bir marta t bo‘yicha $[0;\mathrm{t}]$ oraliqda integrallab, (9.5.2) dagi birinchi shartni hisobga olib

$$y(t)-a-bt+\omega^2\left[\int_0^t\int_0^z y(s)dsdz-\int_0^t\int_0^z\int_0^s R(s-\tau)y(\tau)d\tau dsdz\right]=\int_0^t\int_0^z f(s)dsdz$$

tenglamani hosil qilamiz. Agar oxirgi tenglikdagi integrallar uchun quyidagi

$$\int_0^t\int_0^t\ldots\int_0^t\varphi(t)dtdt\ldots dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t(t-\tau)^{n-1}\varphi(\tau)d\tau$$

formulani qo‘llasak, u quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$y(t)-a-bt+\omega^2\left[\int_0^t(t-s)y(s)ds-\int_0^t(t-s)\int_0^s R(s-\tau)y(\tau)d\tau ds\right]=$$
$$=\int_0^t(t-s)f(s)ds \qquad (9.5.3)$$

Bu tenglikdagi $\int_0^t(t-s)\int_0^s R(s-\tau)y(\tau)d\tau ds$ integralda integrallash tartibini o‘zgartirib,

$$\int_0^t(t-s)\int_0^s R(s-\tau)y(\tau)d\tau ds=\int_0^t\int_0^{t-s}(t-s-\tau)R(\tau)d\tau y(s)ds$$

ni hosil qilamiz. U holda (9.5.3) ni quyidagi

$$y(t)=a+bt-\omega^2\left[\int_0^t(t-s)y(s)ds-\int_0^t\int_0^{t-s}(t-s-\tau)R(\tau)d\tau y(s)ds\right]+$$

$$+\int_0^t (t-s)f(s)ds \qquad (9.5.4)$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladi. Bu yerda $t_n = n\cdot \Delta t \ \ (n=0,1,2,...\ )$ deb, integrallarni taqribiy ravishda trapetsiya formulasiga almashtirsak, u quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$y_n = a + bt_n - \omega^2\left[\sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n - t_i)y_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i R_{n-i} y_i\right] + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n - t_i)f(t_i) \qquad (9.5.5)$$

bu erda $y_i = y(t_i)$, $R_{n-i} = \int_0^{t_n - t_i}(t_n - t_i - \tau)R(\tau)d\tau$, $i = 0, 1, 2, ..., n$;

$A_0 = A_n = \dfrac{\Delta t}{2}$, $A_k = \Delta t$, $k = 1, 2, ..., n\text{-}1$.

(9.5.5) rekkurent formula har bir $n = 1,2,3,...$ uchun y_n larni y_j $(j = 0, 1, 2, ..., n\text{-}1)$ lar orqali topish imkonini beradi.

(9.5.1) – (9.5.2) Koshi masalasini yechish uchun tilida tuzilgan dastur matni:

```
    const nt=20; dt=0.2; ya=1; yb=1; omega_kvad=6;
    type vek=array[0..nt] of real;
    var a,y,r,t:vek; s1,s2,s3,s4,s5,tk,int1:real; i,n:integer;
function fr(z:real):real;
begin
     fr:=exp(-3*z)
end;
function fr1(z:real):real;
begin
     fr1:=(tk-z)*fr(z)
end;
function ff(z:real):real;
```

```
begin
        ff:=5.5*exp(z)+1.5*exp(-3*z)
end;
procedure simpson(a,b:real; n:integer; var int:real);
   var h,s,s1,s2:real; i:integer;
   begin
          h:=(b-a)/(2*n); s1:=0; s2:=0; s:=fr1(a)+fr1(b);
          for i:=1 to n do s1:=s1+fr1(a+(2*i-1)*h);
          for i:=1 to n-1 do s2:=s2+fr1(a+2*i*h);
           int:=h*(s+4*s1+2*s2)/3;
    end;
begin clrscr;
        for i:=0 to nt do begin t[i]:=i*dt; a[i]:=dt end;
        a[0]:=dt/2; a[nt]:=dt/2; y[0]:=ya;
        for i:=0 to nt do begin tk:=i*dt;
        simpson(0,tk,50,int1); r[i]:=int1 end;
        s1:=0; s2:=0; s3:=0; s4:=0;
        for n:=1 to nt do
                begin
                     s1:=s1+a[n-1]*y[n-1];  s2:=s2+a[n-1]*t[n-1]*y[n-1];
                        s3:=s3+a[n-1]*f(t[n-1]);   s4:=s4+a[n-1]*t[n-1]*f(t[n-
1]);  s5:=0;
                      for i:=0 to n-1 do s5:=s5+a[i]*r[n-i]*y[i];
                        y[n]:=ya+yb*t[n]-omega_kvad*(t[n]*s1-s2-s5)+t[n]*s3-
                        s4;
               end;
         for i:=0 to nt do writeln('t=',t[i]:4:2,'   y=',y[i]:7:4;
end.
```

Misol. $\omega^2 = 6$; $R(t) = e^{3t}$; $f(t) = 5,5e^t + 1,5e^{-3t}$; $a = b = 1$ lar uchun (8.5.1), (8.5.2) masalani yeching.

Echish. Dasturga kerakli boshlang‘ich ma’lumotlarni kiritamiz: nt, Δt - mos ravishda t bo‘yicha olingan tugun nuqtalar soni va qadam, $ya = a$, $yb = b$, $omega\_kvad = \omega^2$. Dastur yordamida olingan natijalar va masalaning aniq $y(t) = e^t$ yechimi t ning har xil qiymatlarida quyidagi jadvalda keltirilgan.

t	$y(t)$			Aniq echim
	$\Delta t = 0,05$	$\Delta t = 0,1$	$\Delta t = 0,2$	
1	2,7186	2,7194	2,7229	2,7183
2	7,3886	7,3871	7,3809	7,3891
3	20,0863	20,0886	20,0979	20,0855
4	54,5992	54,6024	54,6142	54,5982
5	148,4157	148,4232	148,4519	148,4132

Tayanch so‘z va iboralar

Integral tenglama, integrodifferensial tenglama, yadro funksiyasi, bir jinsli tenlama, trapetsiya formulasi, rekkurent formula, Kroneker belgisi, kvadratura formulami, Koshi masalasi.

Savollar

1. Integral tenglamaga ta’rif bering.
2. Integrodifferensial tenglamaga ta’rif bering.
3. Yadro funksiyasi haqida gapirib bering.
4. Chiziqli integral tenglama va uning turlari qanday ko‘rinishlarda bo‘ladi?

5. Qanday tenglamalar Fredgolm tipidagi tenglamalar deb ataladi va uning qanday turlari mavjud?
6. Qanday tenglamalar Volterra tipidagi tenglamalar deb ataladi?
7. Qanday tenglamaga 1-tur Volterra tenglamasi deb ataladi?
8. Qanday tenglamaga 2-tur Volterra tenglamasi deb ataladi?
9. 1-tur Volterra tenglamasi qachon uzluksiz yagona yechimga ega bo‘ladi?
10. Volterra tipidagi tenglamalarni yechishda qanday usuldan foydalaniladi?
11. Kvadratura formulasi usuli deganda qanday usulni tushunasiz?
12. Rekkurent formula – qanday formula?

X-BOB. ChIZIQLI DASTURLASH

10.1. Masalaning qo‘yilishi

Ko‘pgina iqtisodiy masalalarni yechish chiziqli dasturlash masalalarini yechishga keltiriladi. Chiziqli dasturlash masalasi umumiy holda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \ldots + c_nx_n \to max(min) \qquad (10.1.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n \le a_n \end{cases} \qquad (10.1.2)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \qquad (10.1.3)$$

bu yerda (10.1.1) maqsad funksiyasi, (10.1.2) cheklanishlar sistemasi, (10.1.3) nomanfiylik sharti deyiladi.

Masalada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (10.1.2) va (10.1.3) shartlarni qanoatlantirsin hamda (10.1.1) funksiya maksimal (minimal) qiymatni qabul qilsin.

Ushbu masalani umumiy holda simpleks usulda, o‘zgaruvchilar soni ikkita bo‘lgan holda esa, grafik usulda echish mumkin.

10.2. Grafik usul

Agar (10.1.1)-(10.1.3) masalada o‘zgaruvchilar soni ikkita bo‘lsa, bu masala quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \to max(min) \qquad (10.2.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le a_n \end{cases} \qquad (10.2.2)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \qquad (10.2.3)$$

(10.2.1) – (10.2.3) masalani grafik usulda yechishni ko‘rib chikamiz. (10.2.2) va (10.2.3) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar to‘plamiga yechimlar ko‘p burchagi deyiladi.

Teorema. Maqsad funksiyasi o‘zining optimal qiymatiga yechimlar qo‘pburchagining chegara nuqtalarida erishadi.

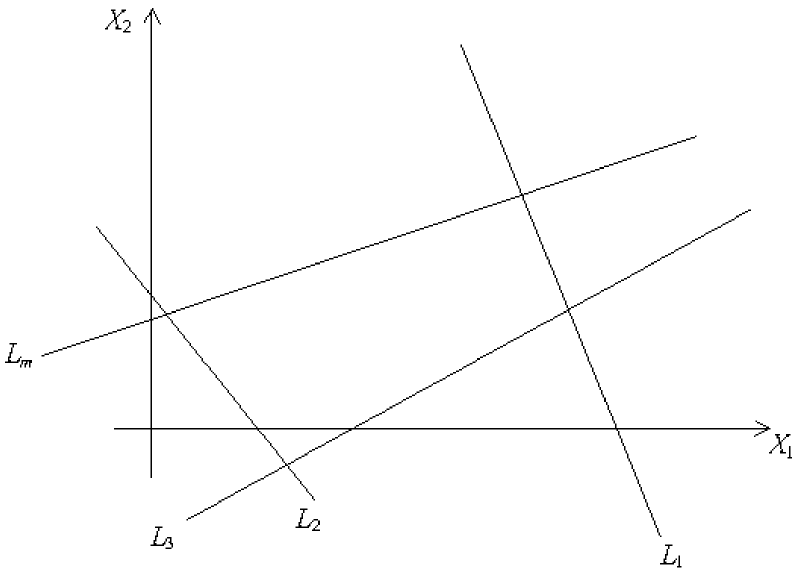
Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechish quyidagi tartibda bajariladi:

1) Berilgan masaladagi tengsizliklarga mos tenglamalarni tuzamiz va ularni mos ravishda

$$
\begin{array}{ll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 & (L_1) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2 & (L_2) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = a_n & (L_m) \\
x_1 = 0 & (L_{m+1}) \\
x_2 = 0 & (L_{m+2})
\end{array}
$$

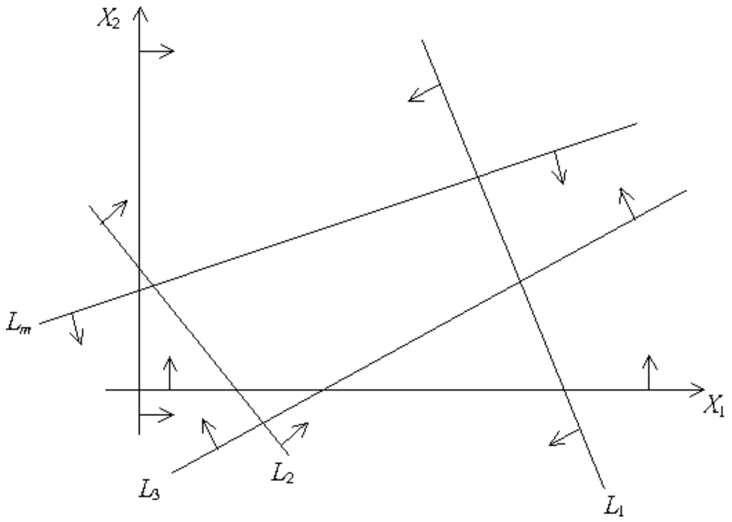
bilan belgilaymiz.

2) (L_1), (L_2), …, (L_{m+2}) tenglamalar bilan berilgan chiziqlarni X_1OX_2 koordinatalar tekisligida ifodalaymiz (10.1-rasm).



10.1-rasm

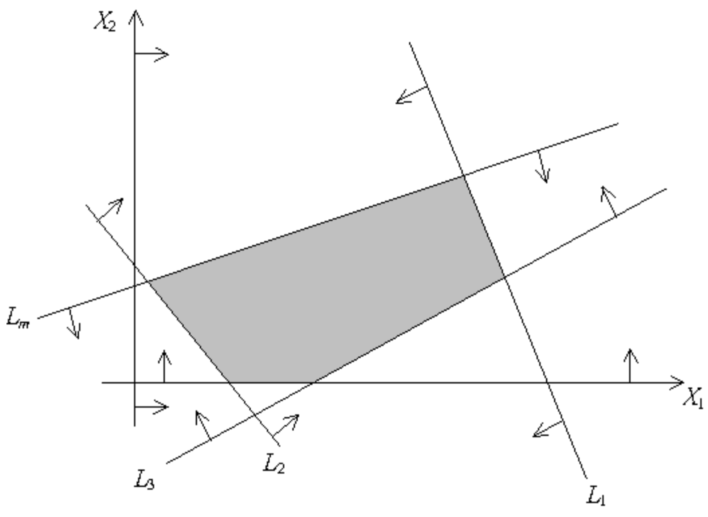
3) (10.2.2) da berilgan tengsizliklarga mos yarim tekisliklarni aniqlaymiz (10.2-rasm).



10.2-rasm

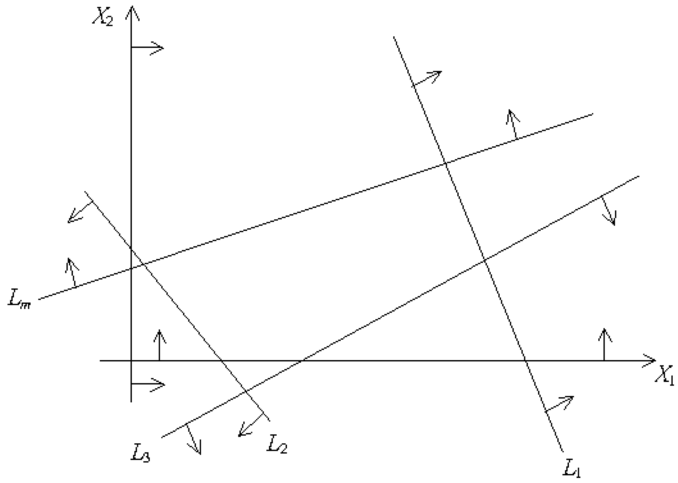
Rasmdagi har bir to‘g‘ri chiziq grafigiga qo‘yilgan strelkalar (10.2.2)-(10.2.3) tengsizliklarga mos yarim tekisliklarni aniqlaydi.

4) Yarim tekisliklarning kesishmasini qaraymiz. Agar kesishma ko‘pburchakdan iborat bo‘lsa, masalaning yechimi chekli qiymatga ega bo‘ladi. Ushbu ko‘pburchak yechimlar ko‘pburchagi bo‘lib, uning ixtiyoriy nuqtasi berilgan (10.2.2)-(10.2.3) tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradi (10.3-rasm).



10.3-rasm

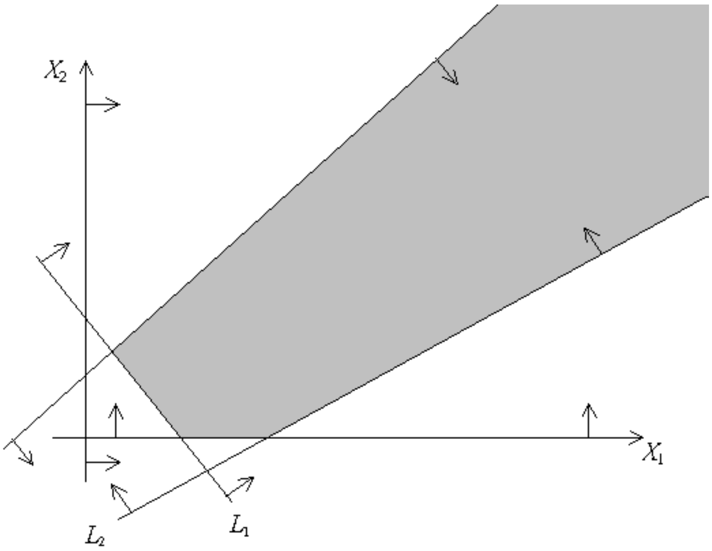
Agar kesishma bo‘sh to‘plam bo‘lsa, masala yechimga ega bo‘lmaydi (10.4-rasm).



10.4-rasm

Kesishma bo‘sh to‘plam bo‘lmagan holda masalaning optimal yechimini topish uchun o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ushbu qiymatlarda *z* maqsad funksiyasi eng katta (eng kichik) qiymatga erishsin. Bunday qiymatlar echimlar ko‘pburchagining chegaraviy nuqtalarida bo‘ladi. Agar optimal yechim ko‘pburchakning bitta uchida bo‘lsa, yechim yagona bo‘ladi, aks holda masala cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lib, ular ko‘pburchakning optimal yechim qabul qiladigan uchlarining chiziqli kombinatsiyalaridan iborat bo‘ladi.

Agar yarim tekisliklar kesishmasi cheksiz soha bo‘lsa, masala yechimining qiymati yuqoridan chegaralanmagan bo‘lishi mumkin (10.5-rasm).



10.5-rasm

Agar kesishma bo‘sh to‘plam bo‘lmasa, optimal yechim ikki xil usulda aniqlanadi.

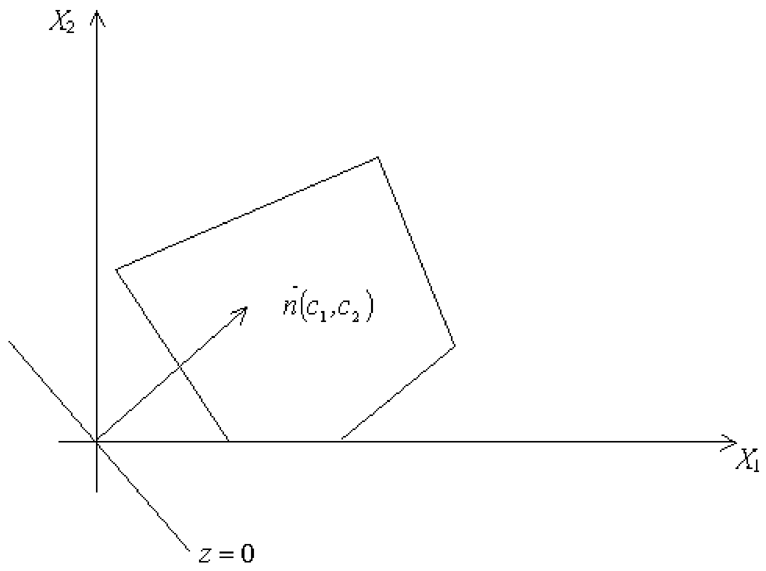
Birinchi usul:

1) Yechimlar ko‘pburchagi uchlarining koordinatalari aniqlanadi.
2) Aniqlangan koordinatalar z funksiyasiga qo‘yiladi.
3) Hosil bo‘lgan qiymatlarning eng katta yoki eng kichigi topiladi.

Ikkinchi usul:

1) $\vec{n}(c_1, c_2)$ normal vektor chiziladi.
2) Normal vektorga perpendikulyar bo‘lgan $z = 0$ to‘g‘ri chiziq chiziladi

(10.6-rasm).

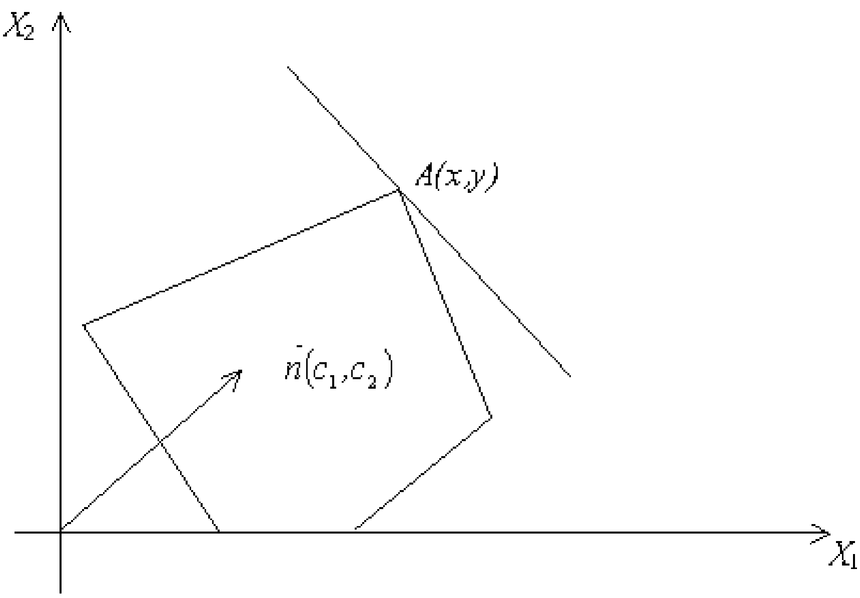


10.6-rasm

3) $z=0$ to‘g‘ri chiziq normal bo‘ylab o‘ziga nisbatan parallel holda suriladi.

4) Parallel surish jarayonida $z=0$ to‘g‘ri chiziq yechimlar ko‘pburchagiga urinadigan birinchi kiruvchi nuqtada masala minimal yechimga ega bo‘ladi, oxirgi chiquvchi nuqtada maksimal yechimga ega bo‘ladi.

Masalan, quyidagi 10.7-rasmda z funksiya $A(x,y)$ nuqtada maksimal qiymatga erishadi.



10.7-rasm

Masala. Quyidagi chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda eching:

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to max$$

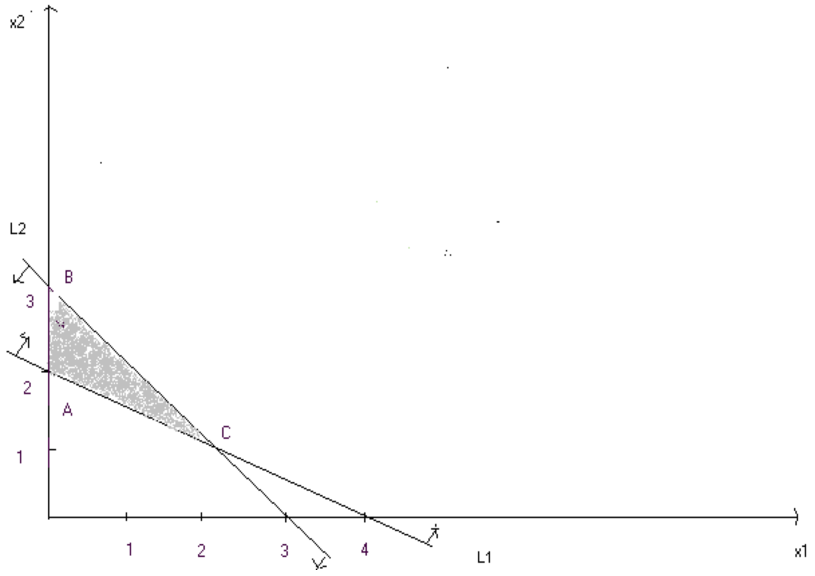
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 & L_1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 & L_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Yechish. Berilgan $(L_1),(L_2)$ tengsizliklarga mos tenglamalarni yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 & (L_1) \\ x_1 + x_2 = 3 & (L_2) \end{cases}$$

Berilgan tenglamalarga mos to‘g‘ri chiziqlarni va tengsizliklarga mos yarim tekisliklarni X_1OX_2 koordinatalar tekisligida ifodalab, yarim tekisliklar kesishmasini topamiz (10.8-rasm).

Bu erda AC to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan yuqori yarim tekislik L_1 tengsizlikni, BC to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan quyi yarim tekislik esa L_2 tengsizlikni ifodalaydi. Bo‘yalgan sohadagi nuqtalarning koordinatalari berilgan masaladagi barcha tengsizliklarni qanoatlantiradi. z maqsad funksiyasi maksimal qiymatga ABC uchburchakning chegaraviy nuqtalarida erishganligi sababli, optimal echimni topish uchun A, B, C nuqtalarning koordinatalarini topib, z funksiyasiga qo‘yamiz va ularning ichidan z funksiyaga eng katta qiymat beruvchi nuqtani tanlab olamiz.



10.8-rasm

S nuqta (L_1) va (L_2) to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo‘lganligi uchun ushbu tenglamalarni birgalikda echamiz.

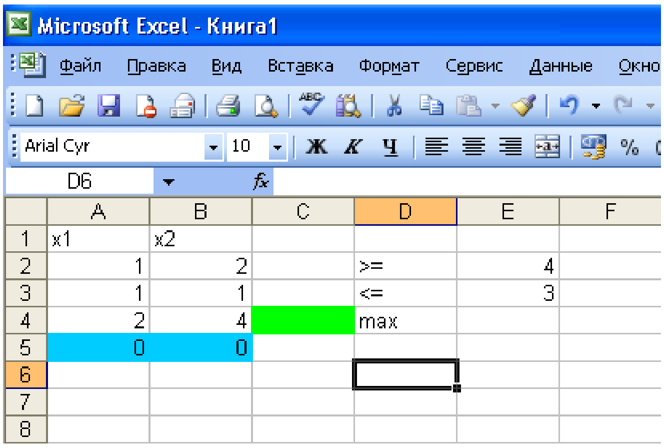
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasidan $x_1 = 2,\ x_2 = 1$ ekanligi kelib chiqadi. U holda A, B, C nuqtalarning koordinatalari quyidagicha bo‘ladi: $A(0,2),\ B(0,3),\ C(2,1)$. Ushbu nuqtalarning koordinatalarini maqsad funksiyasiga qo‘yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

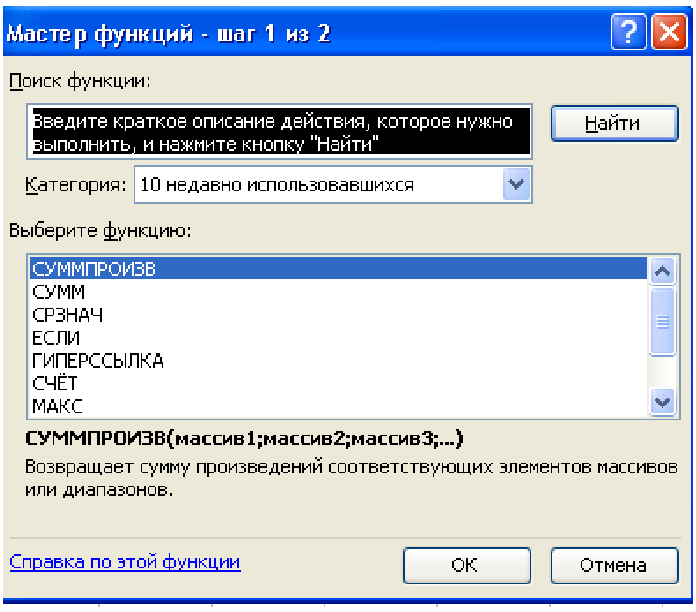
$$z_A = 2\cdot 0 + 4\cdot 2 = 8$$
$$z_B = 2\cdot 0 + 4\cdot 3 = 12$$
$$z_C = 2\cdot 2 + 4\cdot 1 = 8$$

Yuqoridagilardan ko‘rinib turibdiki *z* funksiya maksimal qiymatga V nuqtada erishadi: $z_{max} = 12,\ x_1^* = 0,\ x_2^* = 3$.

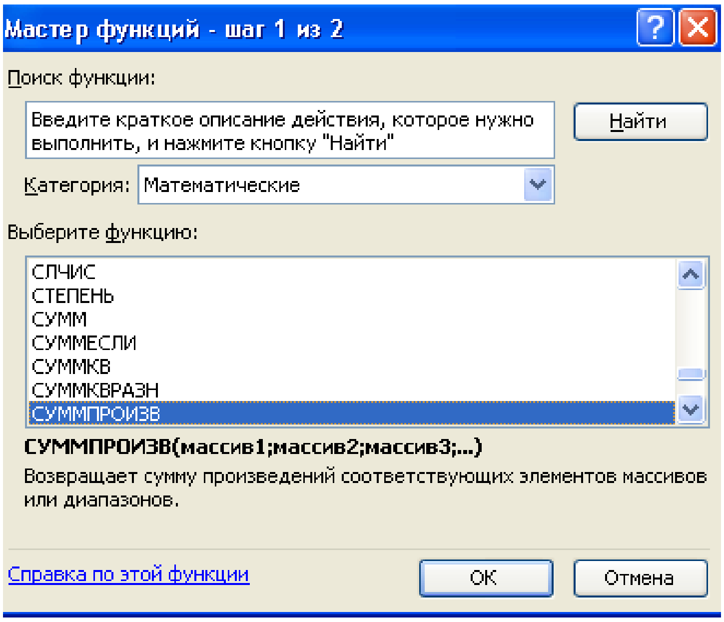
Chiziqli dasturlash masalasini amaliy dasturlar, masalan *PER*, *Excel, Mathcad* dasturlari yordamida ham yechish mumkin. Yuqoridagi masalani *Excel* elektron jadvali yordamida echamiz. Buning uchun elektron jadvalda masala tengsizliklaridagi koeffisientlar va ozod hadlarni ikkinchi va uchinchi satrlarga, z funksiya koeffisientlarini to‘rtinchi satrga, x_1 va x_2 o‘zgaruvchilarning boshlang‘ich qiymatlarini 0 ga tenglab beshinchi qatorga yozamiz. Natijada jadval quyidagi ko‘rinishga keladi:



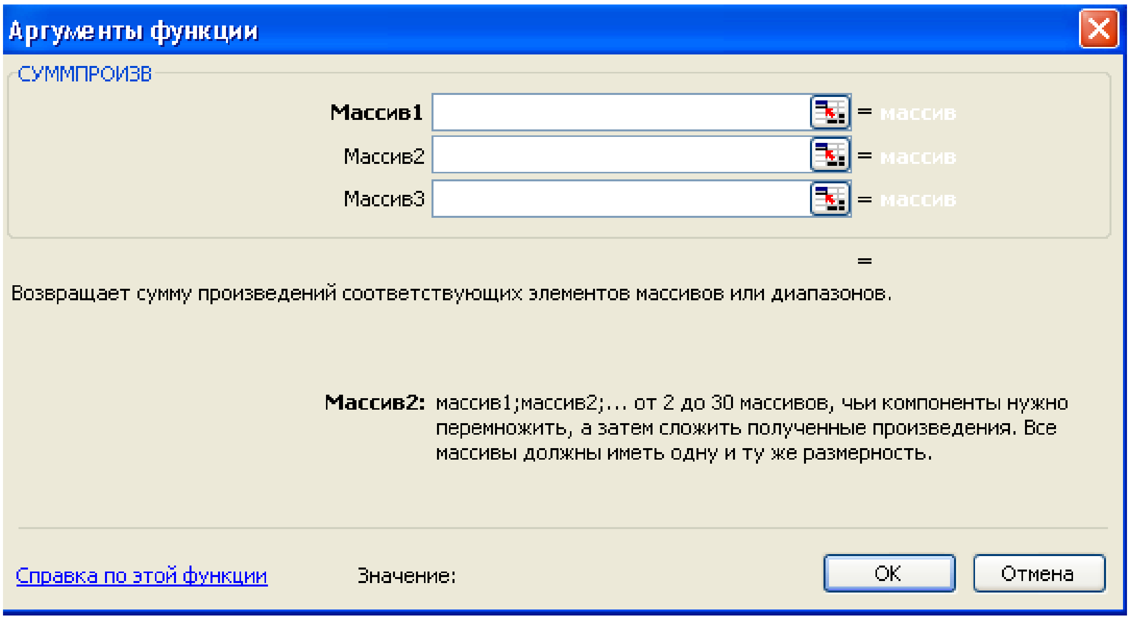
Kursorni C2 yacheykaga o‘rnatib f_x tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi muloqot oynasi hosil bo‘ladi:



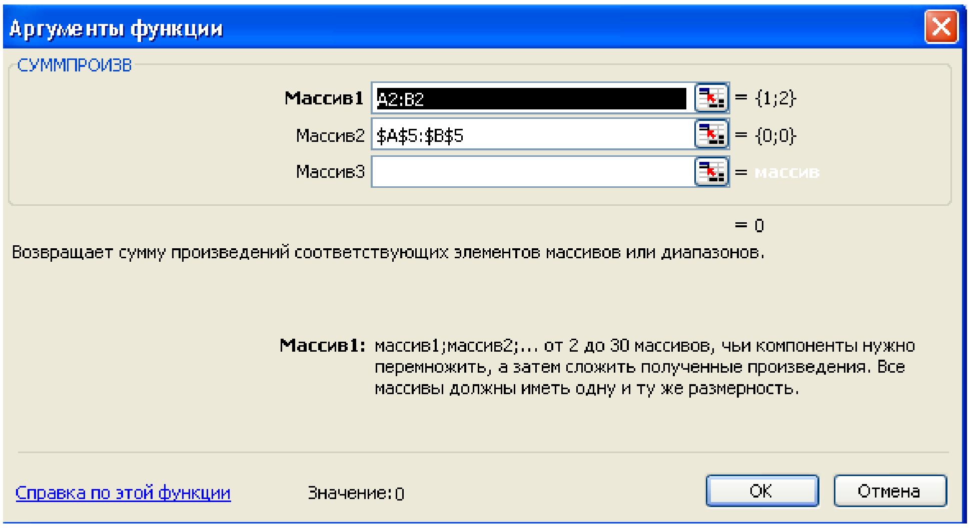
Hosil bo‘lgan muloqot oynasida «Kategoriya» bo‘limida «Matematicheskoe» punktini tanlaymiz, so‘ng «Vberite funksiya» bo‘limida «Summproizv» funksiyasini tanlaymiz.



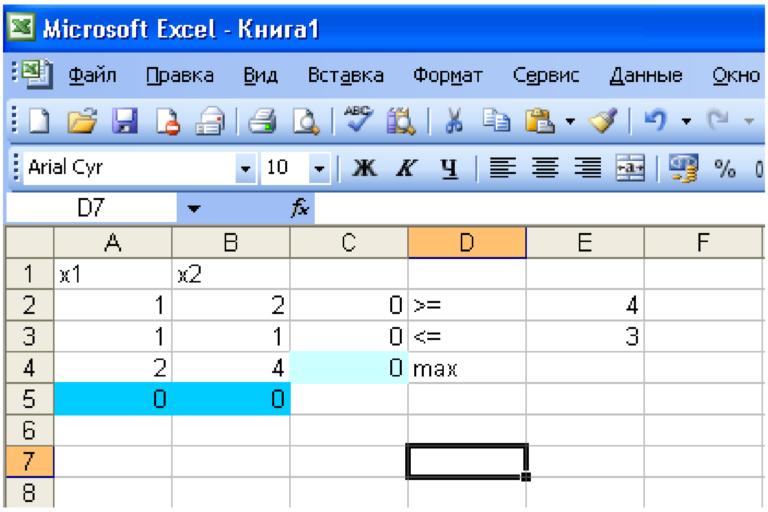
So‘ngra «OK» tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi muloqot oynasi hosil bo‘ladi:



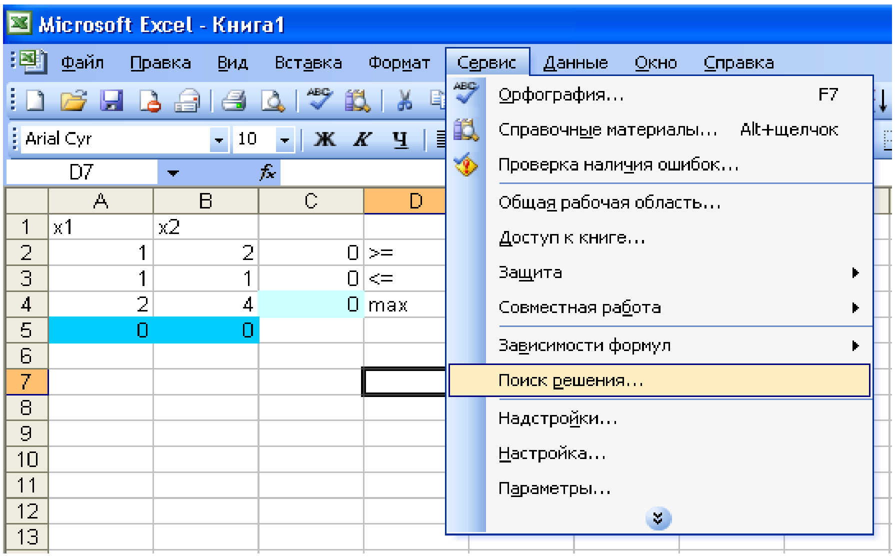
Hosil bo‘lgan navbatdagi muloqot oynasida «Massiv 1» darchasidagi tugmachani bosib, A2:B2 diapazonidagi ma’lumotlarni, «Massiv 2» darchasidagi tugmachani bosib, A5:B5 diapazonidagi ma’lumotlarni kiritamiz, «Massiv 2» darchasidagi diapazonni filtirlash uchun F4 tugmasini bosamiz:



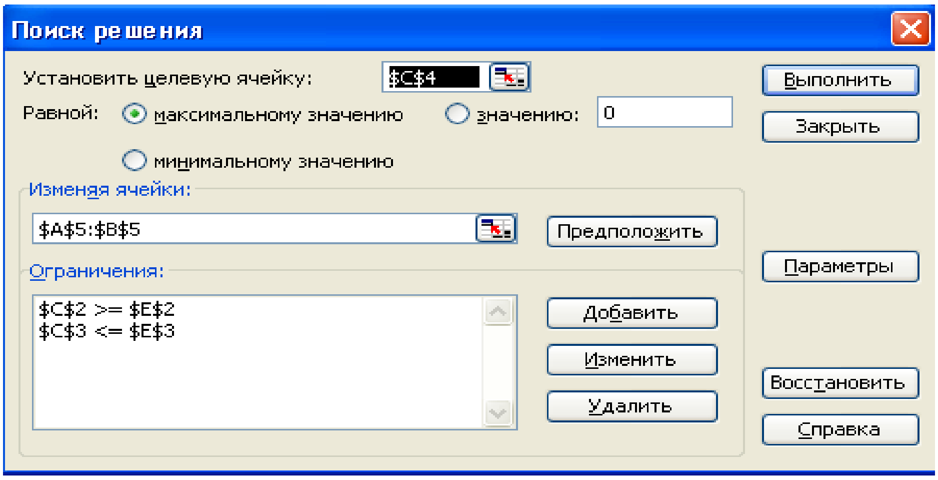
So‘ngra «OK» tugmasini bosamiz va C2 katakda hosil bo‘lgan ma’lumotni C3:C4 diapazoniga nusxa qilamiz. Natijada jadval quyidagi ko‘rinishga keladi:



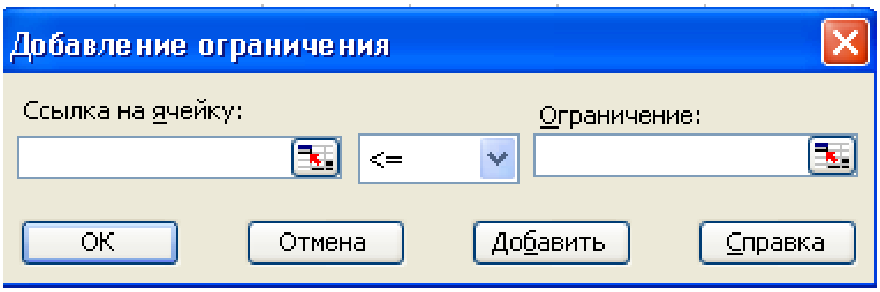
Kursorni maqsad funksiyasi koeffisientlari joylashgan C4 katakka o‘rnatib, «Servis- Poisk resheniya» buyrug‘ini beramiz.



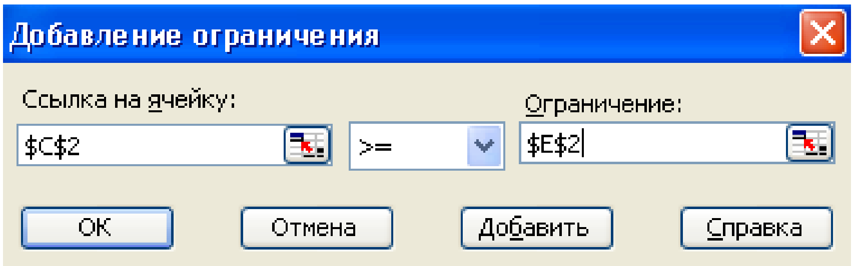
Natijada quyidagi «Poisk reshenie» muloqot oynasi hosil bo‘ladi.



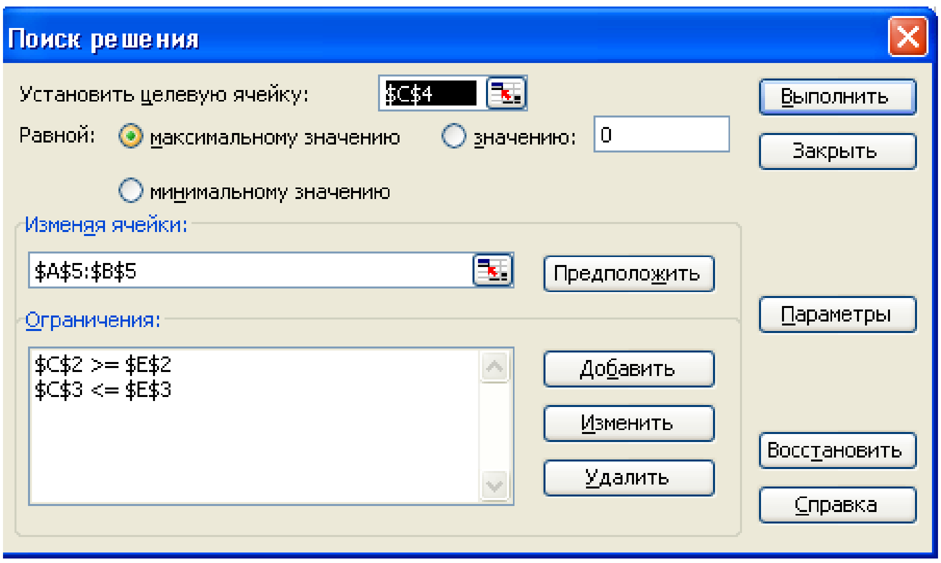
Hosil bo‘lgan muloqot oynasida «Ustanovit selevuyu yacheyka» darchasiga C4 katagini, «Izmenya yacheyki» darchasiga A5:B5 diapazonini kiritamiz. «Ogranicheniya» darchasiga o‘tib «Dobavit» tugmasini bosamiz va quyidagi oynani hosil qilamiz:



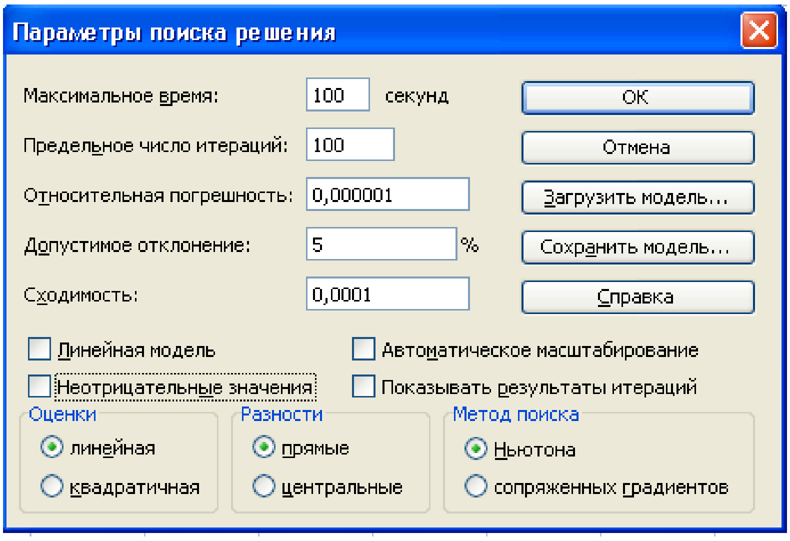
Hosil bo‘lgan muloqot oynasida «Silka na yacheyka» darchasiga C2 ni kiritamiz, tengsizlikni aniqlaymiz, «Ogranicheniya» darchasiga E2 ni kiritib, «Dobavit» tugmasini bosamiz.



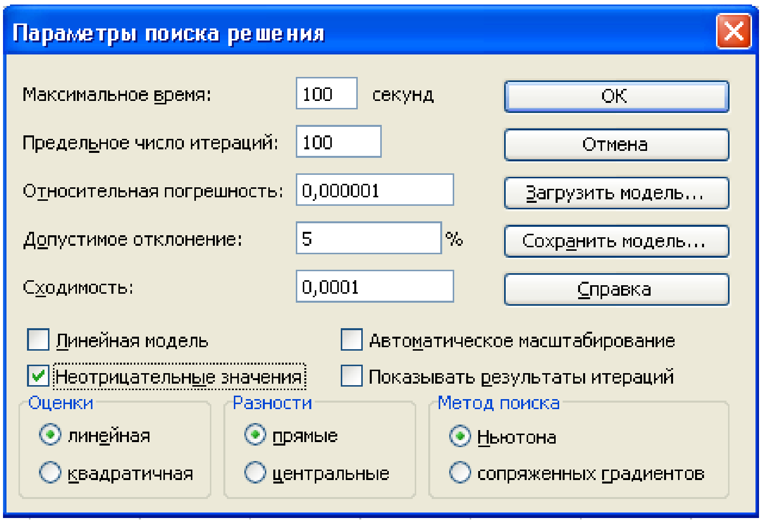
C5 : E5 diapazondagi munosabatni ham shu tariqa kiritib, «OK» tugmasini bosamiz. Natijada «Poisk resheniya» muloqot oynasiga qaytamiz:



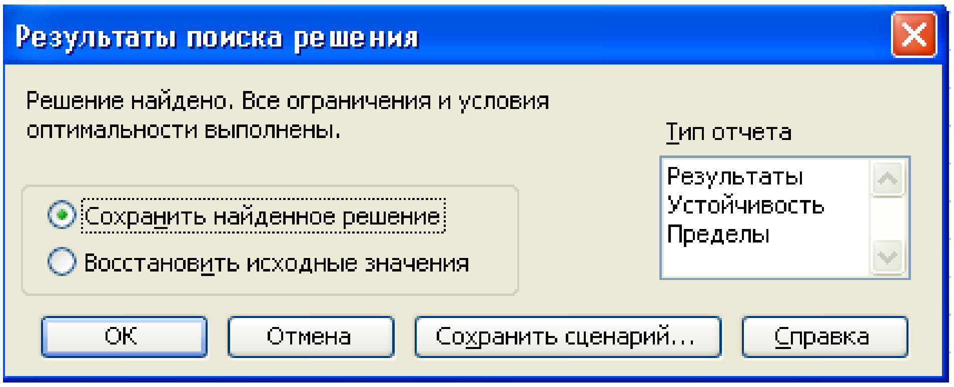
«Параметры» tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi muloqot oynasi hosil bo‘ladi:



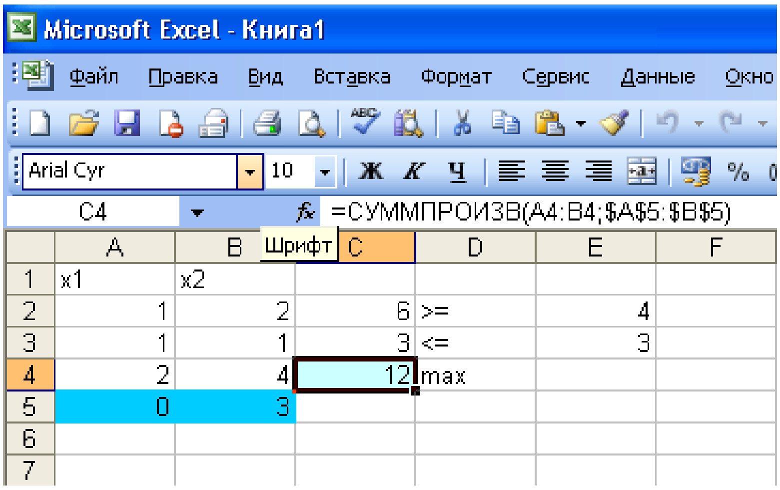
Oynadagi «Neotriцatelnoe znachenie» parametrini belgilaymiz.



«OK» tugmasini bosib, «Poisk reshenie» muloqot oynasiga qaytamiz va «Vыpolnit» tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi oynaga o‘tamiz:

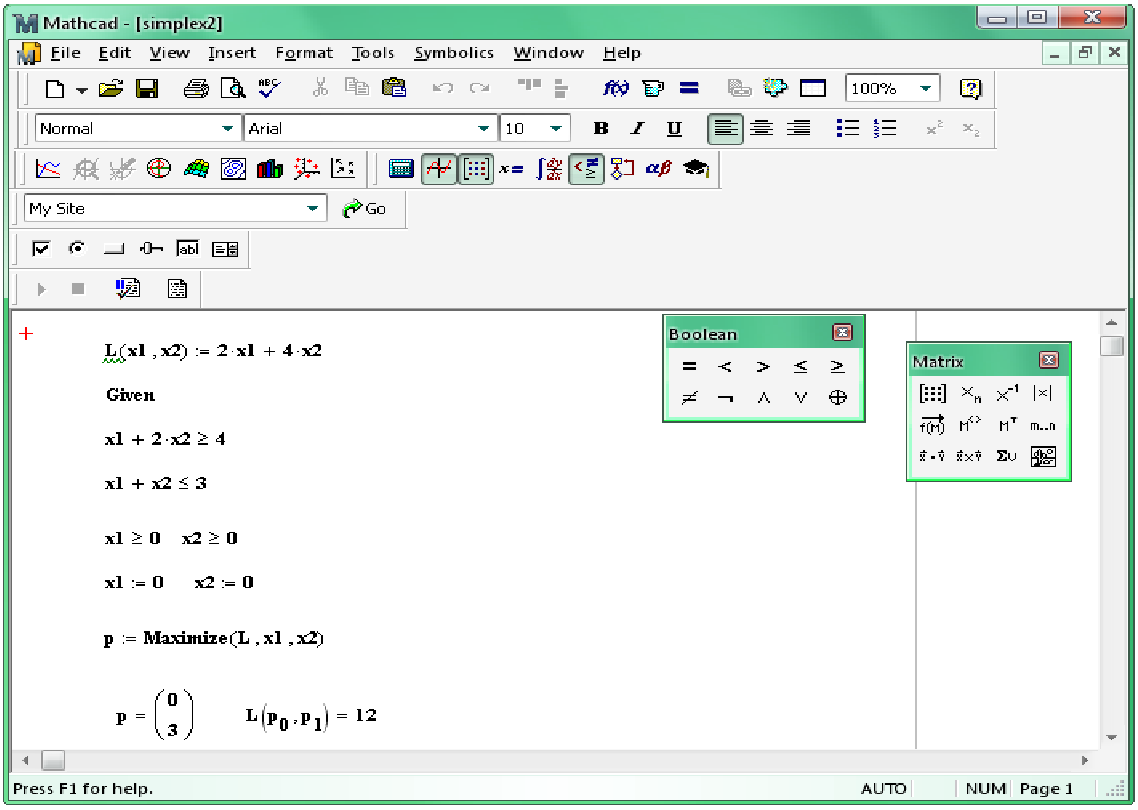


«OK» tugmasini bosamiz. Natijada yechim quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:



Ushbu rasmdan ko‘rinib turibdiki, barcha cheklanishlar bajariladi va yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $z_{max} = 12$.

MathCadda chiziqli dasturlash masalasini yechishda maxsimize va minimize funksiyalaridan foydalaniladi. Bu funksiyalar umumiy ko‘rinishda quyidagicha yoziladi: Maxsimize(<o‘zgaruvchilar ro‘yxati>) Miniimize(<o‘zgaruvchilar ro‘yxati>). MathCadda chiziqli dasturlash masalasini yechish quyidagi amallar ketma-ketligidan iborat bo‘ladi: MathCad dasturi ishga tushiriladi. Birinchi qatorga maqsad funksiyasi quyidagicha yoziladi: L(x1,x2):=2*x1+4*x2. Navbatdagi qatorga “Given” so‘zi yozilgach, keyingi qatordan quyidagi tengsizliklar sistemasi yoziladi: x1+2*x2≥4 x1+x2≤3 x1≥0 x2≥0 x3≥0. Navbatdagi qatorda o‘zgaruvchilarning boshlang‘ich qiymatlari yoziladi: x1:=0 x2:=3 So‘ng quyidagi operator kiritiladi: p:=Maxsimize(L,x1,x2). Optimal yechimni beruvchi o‘zgaruvchilarning qiymatlari r= operatori yordamida, maqsad funksiyasining optimal qiymati esa L(p0,p1)= operatori yordamida hosil qilinadi. MathCadda masalaning dasturi quyidagicha bo‘ladi:



Natija quyidagicha bo‘ladi:

$x_1 = 0, \; x_2 = 3, \; z_{max} = 12.$

10.3. Cimpleks usuli

Ma’lumki, chiziqli dasturlash masalasi umumiy holda simpleks usulda yechiladi. Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish ikki bosqichdan iborat bo‘lib, birinchi bosqichda masalaning tayanch yechimi, ikkinchi bosqichda esa optimal echim topiladi.

Tayanch echimni topish qoidasi quyidagicha:

1) (10.1.1)-(10.1.3) masalani quyidagi

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \ldots + c_nx_n \to max(min)$$

$$\begin{cases} y_1 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \ldots - a_{1n}x_n + a_1 \geq 0 \\ y_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \ldots - a_{2n}x_n + a_2 \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 \ldots - a_{mn}x_n + a_m \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

ko‘rinishga keltiramiz.

2) Yuqoridagi munosabatlardan quyidagi simpleks jadvalini tuzamiz:

	$-x_1$	$-x_2$	$\ldots$	$-x_n$	Ozod sonlar
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	a_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	a_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	a_m
$z =$	c_1	c_2	$\ldots$	c_n	

3) Ozod sonlar ustunidagi manfiy sonlarni qaraymiz. Agar ushbu sonlarning hammasi musbat bo‘lsa, u holda masalaning tayanch yechimi topilgan hisoblanadi. Agar ozod sonlar orasida bir nechta manfiy sonlar mavjud bo‘lsa, ulardan birini tanlaymiz. Faraz qilaylik l- satrdagi $a_l < 0$ ozod sonni tanlab olaylik.

	$-x_1$	$-x_2$	$\ldots$	$-x_k$	$-x_{k+1}$	$\ldots$	$-x_n$	Ozod sonlar
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1k}	a_{1k+1}	$\ldots$	a_{1n}	a_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2k}	a_{2k+1}	$\ldots$	a_{2n}	a_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_l =$	a_{l1}	a_{l2}	$\ldots$	a_{lk}	a_{lk+1}	$\ldots$	a_{ln}	a_l
$y_{l+1} =$	a_{l+11}	a_{l+12}	$\ldots$	a_{l+1k}	a_{l+1k+1}	$\ldots$	a_{l+1n}	a_{l+1}

$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_j =$	a_{jk}	a_{j2}	$\cdots.$	a_{jk}	a_{jk+1}	$\cdots$	a_{jn}	a_j
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_m =$	a_{mk}	a_{m2}	$\cdots.$	a_{mk}	a_{mk+1}	$\cdots$	a_{mn}	a_m
$z =$	c_1	c_2	$\cdots$	c_k	c_{k+1}	$\cdots$	c_n	0

4) l- satrdagi manfiy sonlarni qaraymiz. Agar ushbu satrda manfiy sonlar bo‘lmasa, masala yechimga ega bo‘lmaydi, agar manfiy sonlar bir nechta bo‘lsa, ulardan birini tanlaymiz. Masalan, k- ustundagi $a_{lk} < 0$ sonni tanlab olaylik. k- ustun hal qiluvchi ustun deyiladi.

5) Ozod sonlar va k-ustundagi mos koeffisientlar juftliklarini qaraymiz. Agar ularning ishoralari bir xil bo‘lsa, ozod sonlarni mos koeffisientlarga bo‘lamiz.

6) Hosil bo‘lgan nisbatlarning eng kichigini tanlab olamiz: $\theta = min\left(\frac{a_i}{a_{ik}}\right)_{i=\overline{1,p}}$. Bu yerda p- tanlab olingan juftliklar soni. θ ga mos keluvchi k-ustundagi element bosh element deyiladi. Agar bosh element j- satrga mos kelsa a_{jk} - bosh element bo‘ladi, j- satr hal qiluvchi satr deyiladi. Jadval quyidagi ko‘rinishga keladi:

$\downarrow$

	$-x_1$	$-x_2$	$\cdots$	$-x_k$	$-x_{k+1}$	$\cdots$	$-x_n$	Ozod sonlar
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1k}	a_{1k+1}	$\cdots$	a_{1n}	a_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2k}	a_{2k+1}	$\cdots$	a_{2n}	a_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_l =$	a_{l1}	a_{l2}	$\cdots$	a_{lk}	a_{lk+1}	$\cdots$	a_{ln}	a_l
$y_{l+1} =$	a_{l+11}	a_{l+12}	$\cdots$	a_{l+1k}	a_{l+1k+1}	$\cdots$	a_{l+1n}	a_{l+1}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

$y_j =$	a_{jk}	a_{j2}	$\dots.$	a_{jk}	a_{jk+1}	$\dots$	a_{jn}	a_j
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m =$	a_{mk}	a_{m2}	$\dots.$	a_{mk}	a_{mk+1}	$\dots$	a_{mn}	a_m
$z =$	c_1	c_2	$\dots$	c_k	c_{k+1}	$\dots$	c_n	0

7) a_{jk} elementga nisbatan simpleks almashtirishlarini bajarib navbatdagi jadvalni to‘ldiramiz:

7.1) Hal qiluvchi satr va ustundagi o‘zgaruvchilar o‘rni almashtiriladi;

7.2) Bosh element o‘rniga unga teskari sonni yozamiz;

7.3) Hal qiluvchi satr elementlarini bosh elementga bo‘lib, mos kataklarga yozamiz;

7.4) Hal qiluvchi ustun elementlarini bosh elementga bo‘lib, ishorasini o‘zgartiramiz va mos kataklarga yozamiz;

7.5) Qolgan kataklar to‘rtburchak qoidasi bo‘yicha to‘ldiriladi.

Masalan, (2.2) katakni to‘ldirish uchun quyidagi hisoblash bajariladi:

$$a_{22}^1 = \frac{a_{jk} \cdot a_{22} - a_{2k} \cdot a_{j2}}{a_{jk}}.$$

Natijada jadval quyidagi ko‘rinishga keladi:

	- x_1	- x_2	$\dots$	$-y_i$	-x_{k+1}	$\dots$	- x_n	Ozod sonlar
$y_1 =$	a'_{11}	a'_{12}	$\dots$	$-\frac{a_{1k}}{a_{jk}}$	a'_{1k+1}	$\dots$	a'_{1n}	a'_1
$y_2 =$	a'_{21}	a'_{22}	$\dots$	$-\frac{a_{2k}}{a_{jk}}$	a'_{2k+1}	$\dots$	a'_{2n}	a'_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_l =$	a'_{l1}	a'_{l2}	$\dots$	$-\frac{a_{lk}}{a_{jk}}$	a'_{lk+1}	$\dots$	a'_{ln}	a'_l
$y_{l+1} =$	a'_{l+11}	a'_{l+12}	$\dots$	$-\frac{a_{l+1k}}{a_{jk}}$	a'_{l+1k+1}	$\dots$	a'_{l+1n}	a'_{l+1}

$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_k =$	$\frac{a_{i1}}{a_{jk}}$	$\frac{a_{i2}}{a_{jk}}$	$\dots$	$\frac{1}{a_{jk}}$	$\frac{a_{ik+1}}{a_{jk}}$	$\dots$	$\frac{a_{in}}{a_{jk}}$	$\frac{a_i}{a_{jk}}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m =$	a'_{mk}	a'_{m2}	$\dots$	$-\frac{a_{mk}}{a_{jk}}$	a'_{mk+1}	$\dots$	a'_{mn}	a'_m
$z =$	c'_1	c'_2	$\dots$	$-\frac{c_k}{a_{jk}}$	c'_{k+1}	$\dots$	c'_n	z'_{max}

8) So‘ngra 3)-6) punktlar barcha ozod sonlar musbat bo‘lguncha yoki masalaning yechimi mavjud emasligi aniqlanganga qadar takrorlanadi.

Tayanch yechim topilgach optimal yechimni topishga o‘tish mumkin. Buning uchun quyidagi amallar bajariladi:

1) z satrdagi manfiy sonlar qaraladi. Agar manfiy sonlar bo‘lmasa, optimal yechim topilgan hisoblanadi va 1 - ustundagi x o‘zgaruvchilar va z ularga mos ozod sonlarga, 1- satrdagi x o‘zgaruvchilar esa nolga tenglashtiriladi. Agar z satrda bir nechta manfiy sonlar bo‘lsa, ulardan eng kichigi tanlanadi. Masalan eng kichik manfiy koeffisient c'_2 bo‘lsin.

	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-y_i$	$-x_{k+1}$	$\dots$	$-x_n$	Ozod sonlar
$y_1 =$	a'_{11}	a'_{12}	$\dots$	a'_{1k}	a'_{1k+1}	$\dots$	a'_{1n}	a'_1
$y_2 =$	a'_{21}	a'_{22}	$\dots$	a'_{2k}	a'_{2k+1}	$\dots$	a'_{2n}	a'_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_l =$	a'_{l1}	a'_{l2}	$\dots$	a'_{lk}	a'_{lk+1}	$\dots$	a'_{ln}	a'_l
$y_{l+1} =$	a'_{l+11}	a'_{l+12}	$\dots$	a'_{l+1k}	a'_{l+1k+1}	$\dots$	a'_{l+1n}	a'_{l+1}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_k =$	a'_{i1}	a'_{i2}	$\dots$	a'_{ik}	a'_{ik+1}	$\dots$	a'_{in}	a'_i

$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m =$	a'_{mk}	a'_{m2}	$\dots$	a'_{mk}	a'_{mk+1}	$\dots$	a'_{mn}	a'_m
$z =$	c'_1	c'_2	$\dots$	c'_k	c'_{k+1}	$\dots$	c'_n	z'_{max}

2) 2- ustundagi musbat sonlarni tanlaymiz. Agar ushbu ustunda musbat sonlar bo‘lmasa, masalaning optimal yechimi cheksizlikka intiladi. Agar ustunda musbat sonlar bo‘lsa, ularga mos ozod sonlarni bo‘lib, eng kichik nisbatni tanlab olamiz: $\theta = min\left(\frac{a_2}{a_{j2}}\right)_{j=\overline{1,k}}$. Bu erda k - tanlab olingan juftliklar soni.

3) Eng kichik nisbatga mos element bosh element hisoblanadi va unga nisbatan simpleks almashtirishlari bajariladi.

4) 1)-3) punktlar z qatordagi barcha sonlar musbat bo‘lguncha yoki masalaning yechimi yuqoridan chegaralamaganligi aniqlanguncha davom ettiriladi.

Agar maqsad funksiyasida $z = c_1x_1 + c_2x_2 ... + c_nx_n \to min$ bo‘lsa, u holda masala koeffisientlar ishoralari o‘zgartirilib, maksimumga keltiriladi:

$$z = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n \to max$$

va masala yuqoridagi usul bilan yechiladi. Natijada $z_{min} = -z_{max}$ bo‘ladi.

Masala:

Quyidagi chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulida yeching.

$$z = 17x_1 + x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le -1 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

Echish:

1) Berilgan masalani quyidagi

$$z = 17x_1 + x_2 + 3x_3 \to max$$

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 - x_n + 2 \geq 0 \\ y_2 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3 \geq 0 \\ y_3 = -x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 \geq 0 \\ y_4 = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots x_n \geq 0$$

ko‘rinishga keltiramiz.

Yuqoridagi berilgan masala uchun simpleks jadval tuzamiz.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	1	1	2
$y_2 =$	4	2	1	3
$y_3 =$	1	-1	2	-1
$y_4 =$	-3	2	-2	5
$z =$	-17	-1	-3	0

Ozod sonlar ustunida bitta manfiy son –1 bor. –1 joylashgan qatordagi manfiy sonlarni qaraymiz. Ushbu satrda bitta manfiy son –1 bor. –1 soni joylashgan 3-ustunni hal qiluvchi ustun sifatida qabul qilamiz. Bir xil ishorali mos ozod son va 3-ustun elementlaridan simpleks nisbatlar tuzamiz: $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-1}{-1}, \frac{5}{2}$. Bu nisbatlarning eng kichigi 1 ga teng bo‘lib, u 3-ustundagi –1 soniga mos keladi. –1 sonini bosh element sifatida qabul qilamiz. Hal qiluvchi satr esa 4-satr bo‘ladi. U holda jadval quyidagi ko‘rinishga keladi:

	$-x_1$	$-x_2$ ↓	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	1	1	2
$y_2 =$	4	2	1	3

$y_3 =$	1	-1	2	-1
$y_4 =$	-3	2	-2	5
$z =$	-17	-1	-3	0

-1 ga nisbatan simpleks almashtirishlarni bajarib, navbatdagi jadvalga o‘tamiz.

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1 =$	2	1	3	1
$y_2 =$	6	2	5	1
$x_2 =$	-1	-1	-2	1
$y_4 =$	-1	2	2	3
$z =$	-18	-1	-1	1

2-jadvalda barcha ozod sonlar musbat. Demak tayanch yechim topilgan. Endi tayanch yechimlar ichidan optimal yechimni qidiramiz. Optimal yechim mavjud bo‘lishi uchun z qatordagi barcha koeffisientlar musbat bo‘lishi kerak. Ammo z satrda uchta manfiy sonlar –18 ,-1 va –1 bor. Ulardan kichigi –18 ni tanlaymiz. Ushbu ustun hal qiluvchi ustun bo‘ladi. Ozod sonlar va 2-ustun koeffisientlari bo‘yicha simpleks nisbatlarni qaraymiz. Bu nisbatlar $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ lardan iborat. Eng kichik nisbatga mos element 6 ni bosh element sifatida tanlab olamiz.

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1 =$	2	1	3	1

$y_2 =$	6	2	5	1
$x_2 =$	-1	-1	-2	1
$y_4 =$	-1	2	2	3
$z =$	-18	-1	-1	1

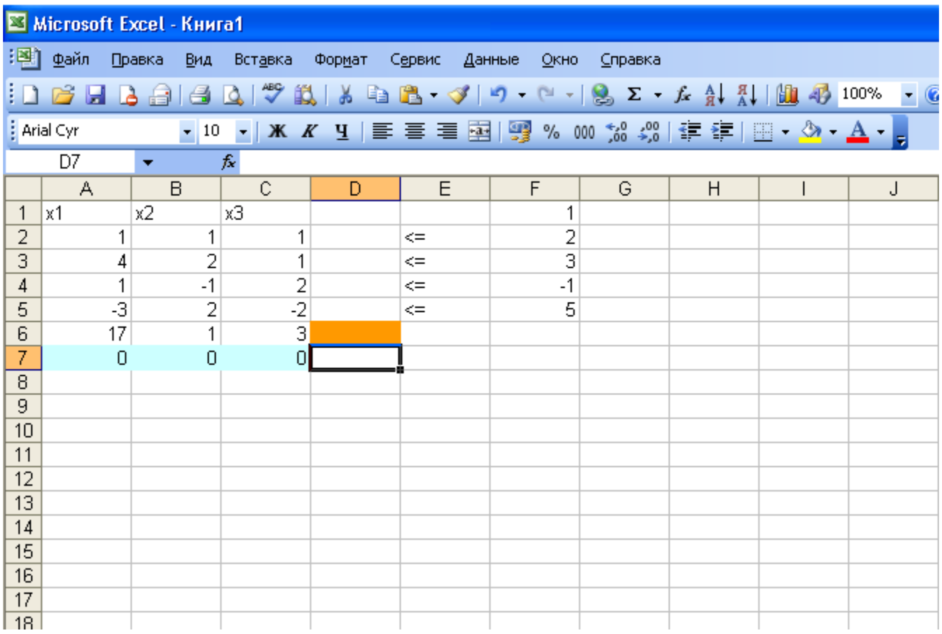
6 ga nisbatan simpleks almashtirishlarni bajarib, navbatdagi jadvalga o‘tamiz.

	-y_2	-y_3	-x_3	1
$y_1 =$	-1./3	1/3	4/3	2/3
$x_1 =$	1/6	1/3	5/6	1/6
$x_2 =$	1/6	-2/3	-7/6	7/6
$y_4 =$	1/6	7/3	17/6	19/6
$z =$	3	5	14	4

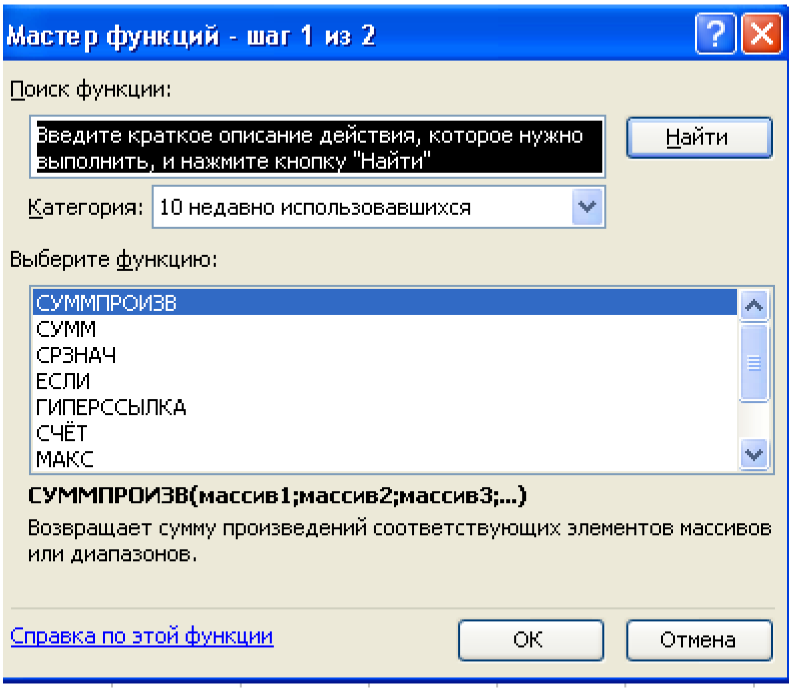
z qatordagi barcha koeffisientlar musbat bo‘ldi. Demak optimal yechim topildi. 1-ustundagi x larni ozod sonlarga tenglaymiz, 1–satrdagi x larni 0 ga tenglaymiz, z ning maksimal qiymati esa z qatordagi oxirgi songa teng bo‘ladi: $x_1 = 1/6,\ x_2 = 7/6,\ x_3 = 0,\ z_{max} = 4$.

Yuqoridagi masalani *Excel* dasturi yordamida echamiz.

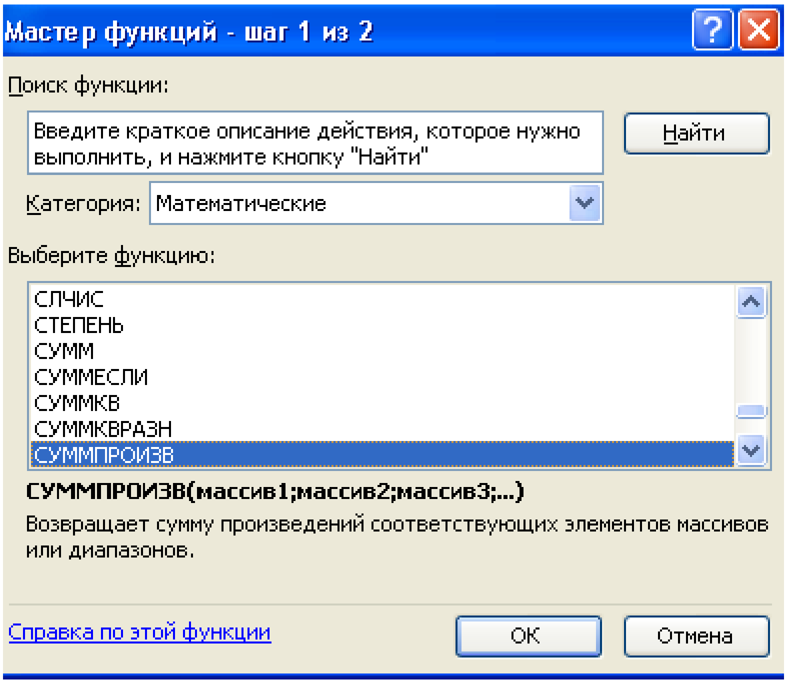
Berilgan masalaning koeffisientlarini jadvalga kiritib chiqamiz, x_1, x_2, x_3 o‘zgaruvchilarning boshlang‘ich qiymatlarini 0 ga tenglab olamiz: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Ushbu qiymatlar quyidagi jadvalning 7-qatorida berilgan.



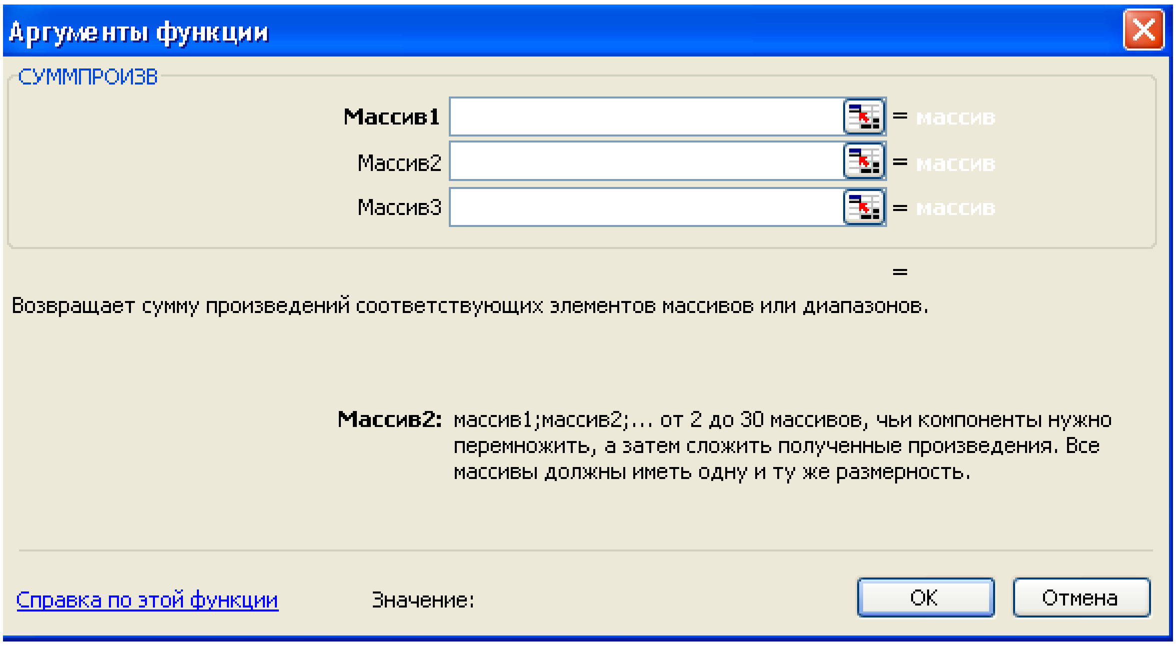
Masalani echish uchun kursorni D2 katakka qo‘yib, f_x tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi muloqot oynasi hosil bo‘ladi:



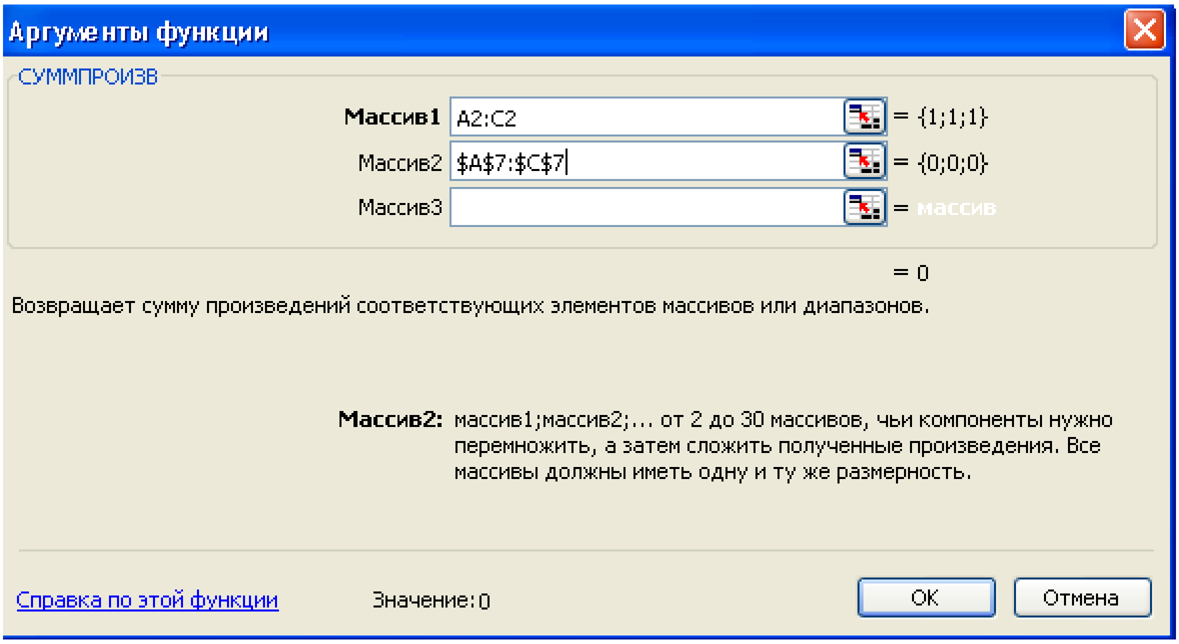
Hosil bo‘lgan muloqot oynasida «Kategoriya» bo‘limida «Matematicheskoe» punktini tanlab, so‘ng «Виберите функсу» bo‘limida «Summproizv» funkiyasini tanlaymiz.



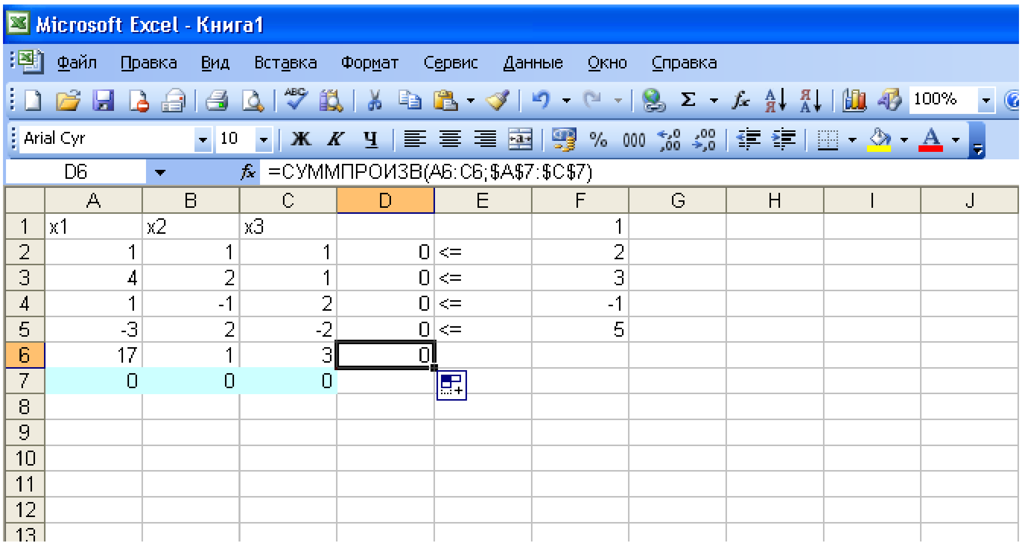
So‘ngra «OK» tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi muloqot oynasi hosil bo‘ladi:



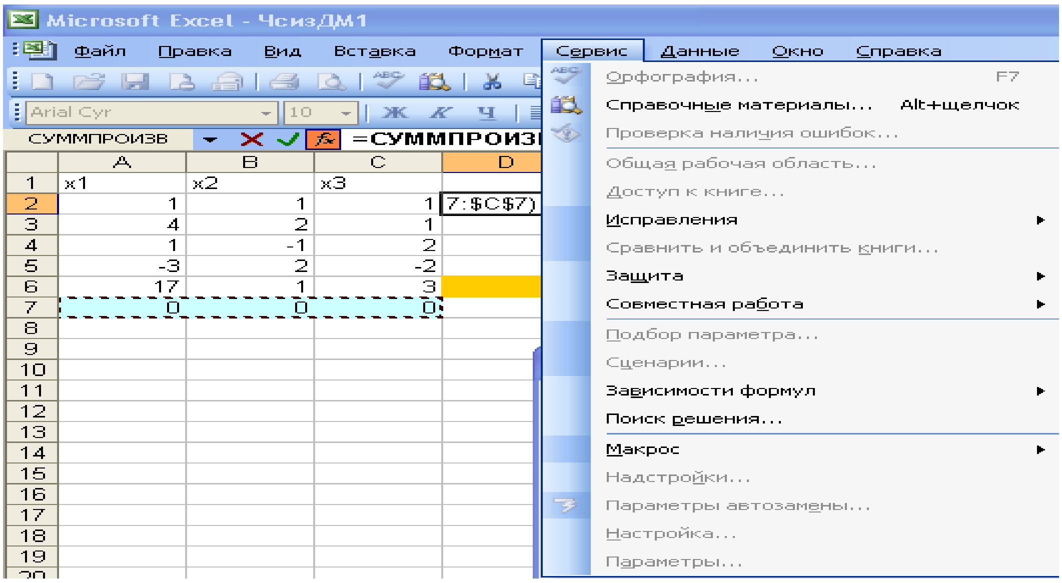
Hosil bo‘lgan navbatdagi muloqot oynasida «Massiv 1» darchasidagi tugmachani bosib, A2:C2 diapazonidagi ma’lumotlarni, «Massiv 2» darchasidagi tugmachani bosib, A7:C7 diapazonidagi ma’lumotlarni kiritamiz, «Massiv 2» darchasidagi diapazonni fiksirlash uchun F4tugmasini bosamiz:



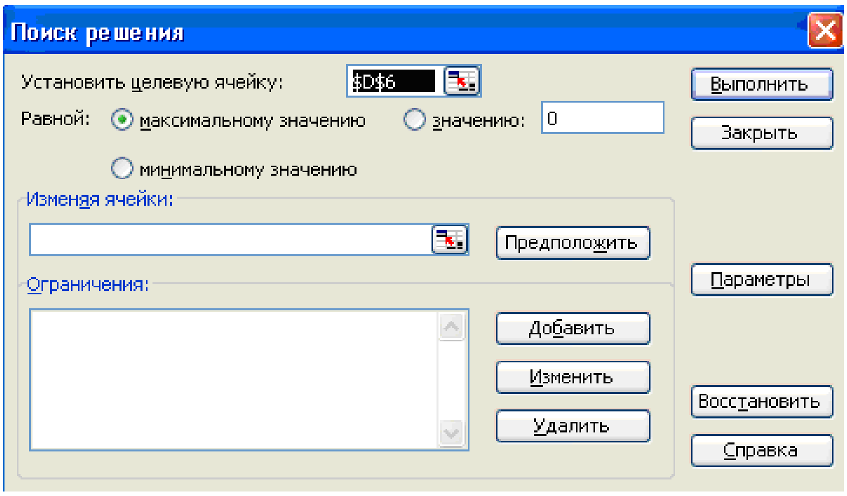
So‘ngra «OK» tugmasini bosamiz va quyidagi oynada D2 katakda hosil bo‘lgan ma’lumotni D3:D6 diapazoniga nusxa qilamiz. Natijada jadval quyidagi ko‘rinishga keladi.



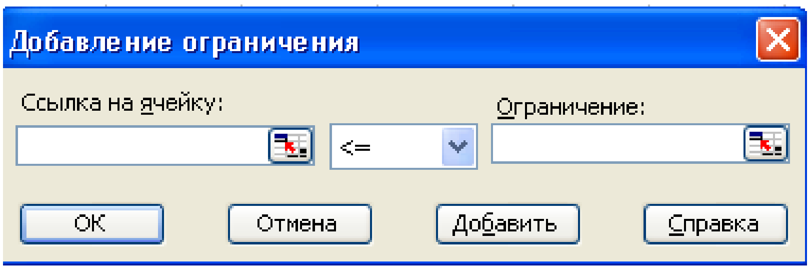
Kursorni D6 katakka o‘rnatib, «Servis-Poisk resheniya» buyrug‘ini beramiz.



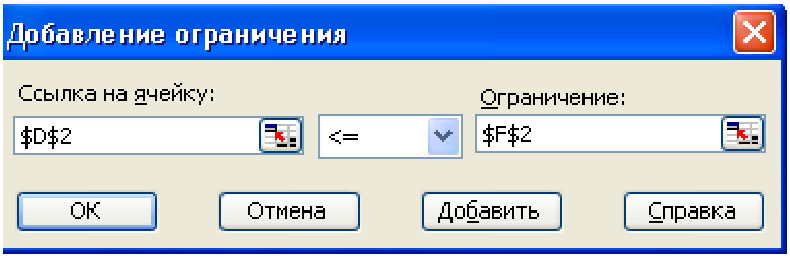
Natijada quyidagi «Poisk reshenie» muloqot oynasi hosil bo‘ladi.



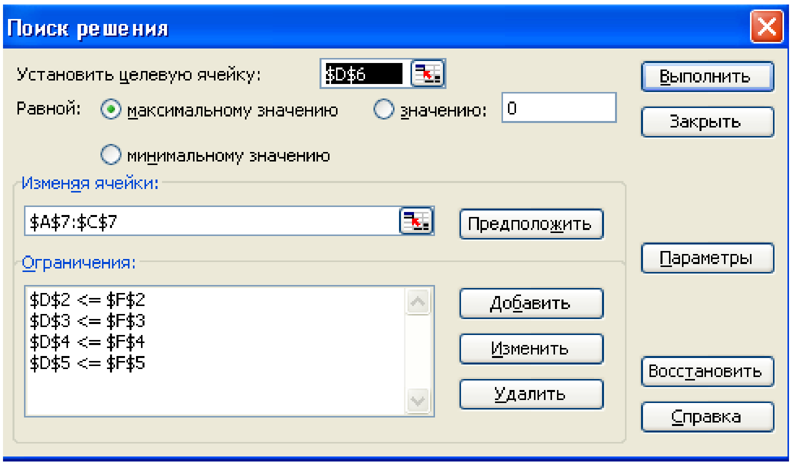
Hosil bo‘lgan muloqot oynasida « установит целаваю яцуйку» darchasiga D6 katagini, «Izmenyaya yacheyki» darchasiga A7:C7 diapazonini kiritamiz. «Ogranicheniya» darchasiga o‘tib «Dobavit» tugmasini bosamiz.



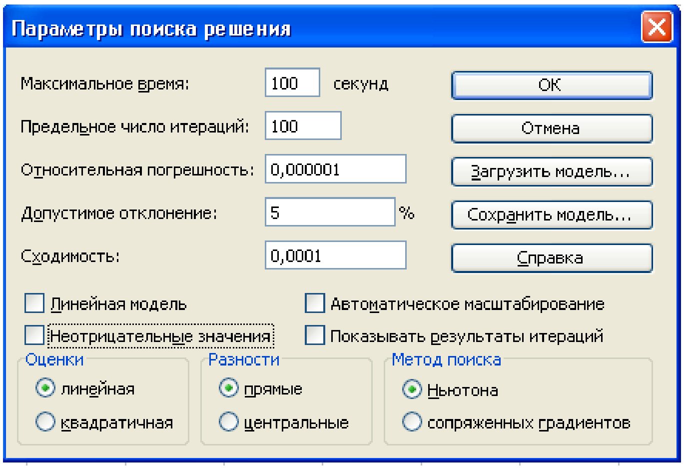
Hosil bo‘lgan muloqot oynasida «Silka na yacheyku» darchasiga D2 ni kiritamiz, tengsizlikni aniqlaymiz, «Ogranicheniya» darchasiga F2 ni kiritib, «Dobavit» tugmasini bosamiz.



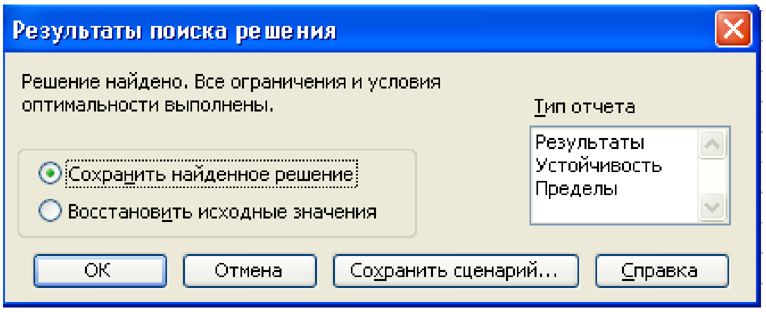
D2:F6 diapazondagi qolgan munosabatlarni ham shu tariqa kiritib chiqamiz. Oxirgi munosabatni kiritgandan keyin «OK» tugmasini bosamiz. Natijada «Poisk resheniya» muloqot oynasiga qaytamiz:



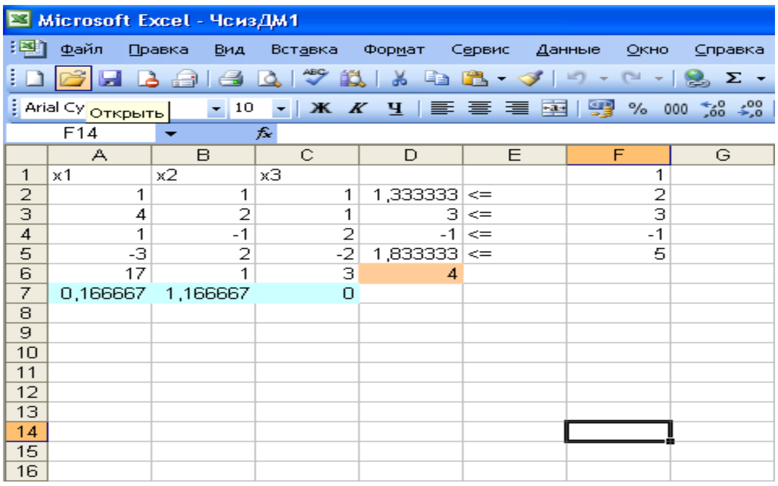
«Параметры» tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi muloqot oynasi hosil bo‘ladi:



Oynadagi «Neotriцatelnoe znachenie» parametrini belgilaymiz va «OK» tugmasini bosib, «Poisk reshenie» muloqot oynasiga qaytamiz va «Vыpolnit» tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi oynaga o‘tamiz:



«OK» tugmasini bosamiz. Natijada yechim quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:



Rasmdan ko‘rinib turibdiki, barcha cheklanishlar bajariladi va yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $x_1 = 0{,}166667$, $x_2 = 1{,}16667$, $x_3 = 0$, $z_{max} = 4$.

Yuqoridagi chiziqli dasturlash masalasini MathCad dasturida yechish quyidagi amallar ketma-ketligidan iborat:

Dastlab maqsad funsiyasi quyidagicha yoziladi:

L(x1,x2,x3):=17*x1+x2+3*x3

Given kalit so‘zidan keyin tengsizliklar sistemasi yoziladi:

x1+x2+x3≤2

4*x1+2*x2+x3≤3

x1-x2+2*x3≤-1

-3*x1+2*x2-2*x3≤5

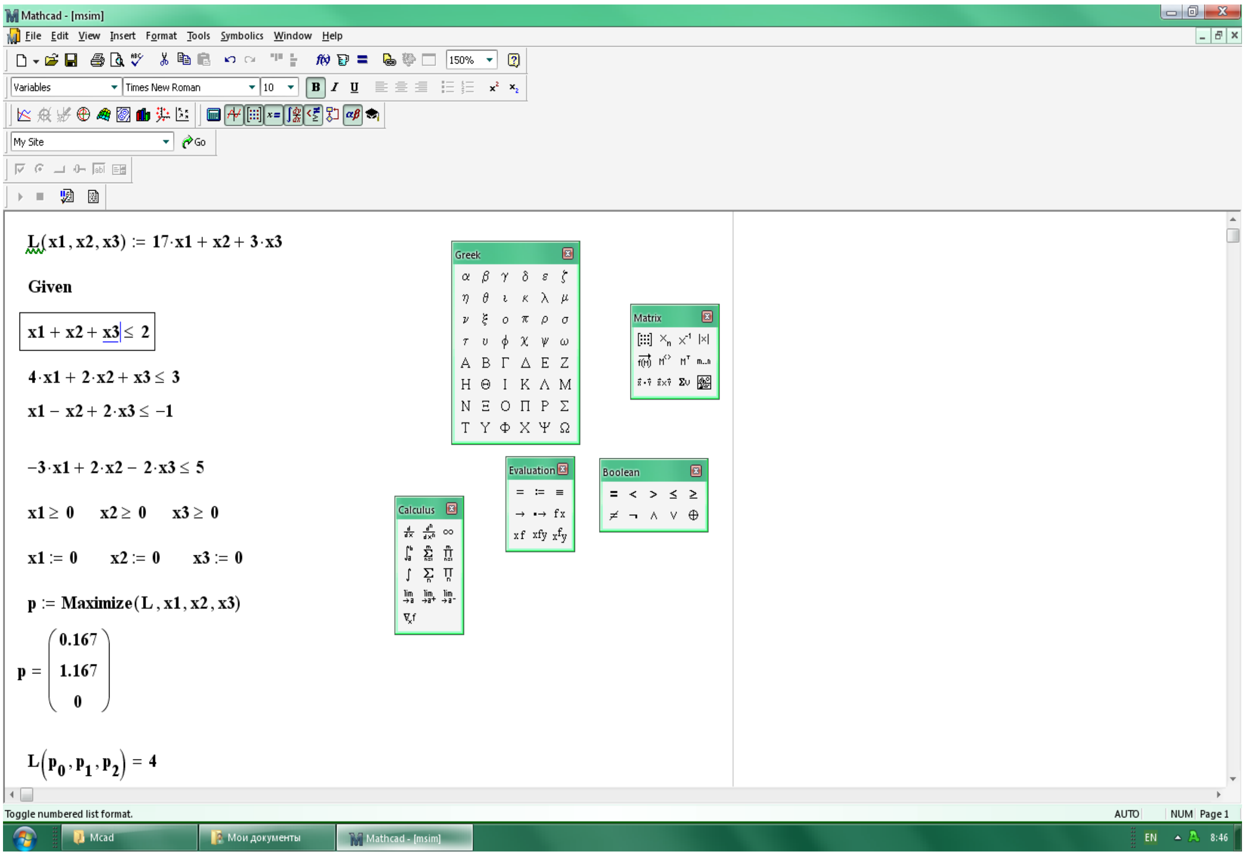
x1≥0   x2≥0   x3≥0

O‘zgaruvchilarga boshlang‘ich qiymatlar beriladi:

x1:=0   x2:=0   x3:=0

p:=Maxsimize(L,x1,x2,x3) operatori yoziladi.

Optimal yechimni beruvchi o‘zgaruvchilarning qiymatlari p= operatori yordamida, maqsad funksiyasining optimal qiymati esa L(p0,p1,p2)= operatori yordamida hosil qilinadi. MathCad dasturida masalaning dasturi quyidagicha bo‘ladi:



10.4. Chiziqli dasturlashda ikkilanganlik masalasi

Quyidagi masalalarning matematik modellarini tuzaylik:

1-masala. Korxona n xil mahsulot ishlab chiqarish uchun m xil xom ashyodan foydalanadi. Xom ashyo zaxiralari $a_1, a_2, \ldots, a_n$, birlik mahsulotlardan olinadigan foyda $c_2, c_2, \ldots c_n$, birlik mahsulotlarni ishlab chiqazish uchun zarur bo‘lgan xom ashyo miqdorlari $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nm}$ berilgan. Mahsulot ishlab chiqazishning shunday rejasini tuzish kerakki, bunda xom ashyo sarfi uning zahiralaridan oshib ketmasligi, mahsulot ishlab chiqazishdan maksimal foyda olish kerak. Ishlab chiqazilayotgan mahsulotlar hajmi noma’lum bo‘lib, ularni $x_1, x_2, \ldots x_n$ orqali belgilaymiz. 1-turdagi birlik mahsulotni ishlab chiqazish uchun zarur bo‘lgan 1-tur xom ashyo miqdori a_{11} ni 1-tur mahsulot miqdori x_1 ga ko‘paytirib, 1-tur mahsulot uchun sarflanadigan 1-tur xom ashyoning umumiy miqdori - $a_{11}x_1$

ni hosil qilamiz. Xuddi shu kabi ikkinchi, uchinchi va hokazo *n*-turdagi mahsulotlarni ishlab chiqazish uchun zarur bo‘lgan 1-turdagi xom ashyo sarfi mos ravishda $a_{12}x_2$,$a_{13}x_3$, $a_{1n}x_n$ ga teng bo‘ladi. Ushbu ifodalarni qo‘shib, 1-tur xom ashyoning umumiy sarfini hosil qilamiz:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

Shartga ko‘ra xom ashyo sarfi uning zaxirasidan oshib ketmasligi kerak:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1$$

Xuddi shu kabi qolgan xom ashyolar uchun ham yuqoridagi munosabatlarni olamiz:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le a_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_m$$

1-tur mahsulotdan olinadigan foyda c_1x_1, 2-tur mahsulotdan olinadigan foyda c_2x_2, …, *n*–tur mahsulotdan olinadigan foyda esa c_nx_n ga teng bo‘ladi. Mahsulotlardan olinadigan umumiy foyda esa quyidagi $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ ko‘rinishga kelib, maksimal foyda olish uchun ushbu funkцiyani maksimumga tekshiramiz:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$$

Mahsulot ishlab chiqazish hajmi manfiy bo‘lishi mumkin emas. Shuning uchun quyidagi munosabatlarga ega bo‘lamiz:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots, x_n \ge 0$$

Hosil qilingan munosabatlarning barchasini birlashtirib, berilgan masalaning quyidagi matematik modelini hosil qilamiz:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1$$

(10.4.1)

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le a_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le a_m$$

$$x_1 \ge 0 \ , \ x_2 \ge 0 \ , \ \ldots, x_n \ge 0$$

2-masala. Biror korxona xo‘jalikdan bir necha xil xom ashyoni sotib olmoqchi. Xom ashyolarga $u_1, \ u_2 \ , \ \ldots \ , u_m$ narxlarni shunday quyish kerakki:

1) sotib oluvchi korxona xom ashyolar narxini minimallashtirishga harakat qiladi;

2) xo‘jalik uchun shuncha miqdorda pul to‘lash kerakki, bu pul xo‘jalik xom ashyoni qayta ishlab, tayyor mahsulot holiga keltirib, undan oladigan foydasidan kam bo‘lmasin.

Xom ashyo zaxiralarini $a_1, \ a_2 \ , \ \ldots, a_n ,$ i- turdagi birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun zarur bo‘lgan j–turdagi xom ashyo miqdorini $a_{ij} , i = 1,2,...,n; \ j = 1,2,...,m$ bilan belgilaymiz. $c_1, \ c_2 \ , \ \ldots, c_n$ orqali birlik mahsulotlarning narxlarini belgilaymiz. Xom ashyolarning umumiy narxi $w = a_1 \ + a_2u_2 + ... + \ a_mu_m$ bo‘lib, uni minimallashtirish kerak, ya’ni $w = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + \ a_mu_m \to min.$ Birinchi turdagi birlik mahsulotni etishtirish uchun zarur bo‘lgan barcha xom ashyolarning umumiy narxi $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + \ a_{m1}u_m$ bo‘lib, u mahsulotning tannarxidan kam bo‘lmasligi kerak, ya’ni $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + \ a_{m1}u_m \ge c_1$. Qolgan mahsulotlar uchun ham xuddi shunday munosabatlarni hosil qilamiz:

$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + \ a_{m2}u_m \ge c_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + \ a_{mn}u_m \ge c_n$$

Xom ashyo narxlari manfiy bo‘lishi mumkin emas, ya’ni:

$$u_1 \ge 0 \ , \ u_2 \ge 0 \ , \ \ldots, u_m \ge 0$$

Yuqoridagi barcha munosabatlarni birlashtirib, berilgan masalaning quyidagi matematik modelini hosil qilamiz:

$$\begin{array}{l} w = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m \to min \\ a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \ge c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \ge c_n \\ u_1 \ge 0\ ,\ u_2 \ge 0\ ,\ \ldots,\ u_m \ge 0 \end{array} \tag{10.4.2}$$

(10.4.1) va (10.4.2) masalalardan biri to‘g‘ri masala, ikkkinchisi esa unga ikkilangan masala deyiladi.

Agar to‘g‘ri masala berilgan bo‘lsa, unga ikkilangan masalani quyidagi tartibda hosil qilinadi:

1) Ikkilangan masalaning maqsad funkцiyasi koeffisientlari to‘g‘ri masala ozod sonlaridan iborat bo‘ladi;

2) To‘g‘ri masala maqsad funksiyasi maksimumga intilsa, ikkilangan masala maqsad funksiyasi minimumga intiladi;

3) Ikkilangan masaladagi tengsizliklar soni to‘g‘ri masaladagi o‘zgaruvchilar soniga teng bo‘ladi va aksincha ikkilangan masaladagi o‘zgaruvchilar soni to‘g‘ri masaladagi tengsizliklar soniga teng bo‘ladi;

4) Ikkilangan masala tengsizliklaridagi koeffisientlar matriцasi to‘g‘ri masala tengsizliklaridagi koeffisientlar matrisasidan transponirlash orqali hosil qilinadi;

5) To‘g‘ri masaladagi tengsizliklar $\ge$ ko‘rinishida bo‘lsa, ikkilangan masaladagi tengsizliklar $\le$ ko‘rinishida bo‘ladi;

6) Ikkilangan masala ozod sonlari to‘g‘ri masala maqsad funksiyasi koeffisientlaridan tashkil topadi;

To‘g‘ri va ikkilangan masalani bitta simpleks jadval yordamida echish mumkin. Buning uchun har ikkala masala ≥ 0 ko‘rinishga keltiriladi:

To‘g‘ri masala:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$y_1 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + a_1 \geq 0$$

$$y_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + a_2 \geq 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_m = -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n + a_m \geq 0$$

$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ \ldots,\ x_n \geq 0$$

Ikkilangan masala:

$$w = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m \to min$$

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m - c_1 \geq 0$$

$$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m - c_2 \geq 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m - c_n \geq 0$$

$$u_1 \geq 0\ ,\ u_2 \geq 0\ ,\ \ldots,\ u_m \geq 0$$

Yuqoridagi munosabatlardan foydalanib quyidagi jadvalni tuzamiz:

Ikkilangan masala		$v_1 =$	$v_2 =$	...	$v_n =$	$w =$
	To‘g‘ri masala	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	1
u_1	$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	a_1
u_2	$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	a_2
...	...	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
u_m	$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	a_m
1	$z =$	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	0

Jadval ustida simpleks almashtirishlarni bajarib, masalaning optimal yechimi topiladi. To‘g‘ri masalada 2-ustundagi x o‘zgaruvchilar va z ularga mos ozod sonlarga, 2-satrdagi x o‘zgaruvchilar esa nolga tenglashtiriladi. Ikkilangan masalada 1- satrdagi u o‘zgaruvchilar va w ularga mos ozod sonlarga, 1- ustundagi u o‘zgaruvchilar esa nolga tenglashtiriladi.

Quyidagi chiziqli dasturlash masalasiga ikkilangan masala tuzing. To‘g‘ri va ikkilangan masalaning optimal yechimini toping.

$$z = 12x_1 + 6x_2 - 7x_3 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \le 12 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 8 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 \le 11 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

Yuqorida berilgan umumiy qoidalar bo‘yicha ikkilangan masalani tuzamiz:

$$w = 5u_1 + 12u_2 + 8u_3 + 11u_4 \to min$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 \ge 12 \\ u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 \ge 6 \\ -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 \ge -7 \end{cases}$$

$$u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ u_3 \ge 0,\ u_4 \ge 0$$

Ikkala masalani ham ≥ 0 ko‘rinishga keltiramiz:

$$z = 12x_1 + 6x_2 - 7x_3 \to max$$

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 + x_3 + 5 \ge 0 \\ y_2 = -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 12 \ge 0 \\ y_3 = -x_1 + 3x_2 - x_3 + 8 \ge 0 \\ y_4 = -2x_1 - 8x_2 + x_3 + 11 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

$$w = 5u_1 + 12u_2 + 8u_3 + 11u_4 \to min$$

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 - 12 \ge 0 \\ v_2 = u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 - 6 \ge 0 \\ v_3 = -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 + 7 \ge 0 \end{cases}$$

$$u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0,\ u_3 \ge 0,\ u_4 \ge 0$$

Hosil qilingan munosabatlar asosida quyidagi jadvalni tuzamiz:

Ikkilangan		$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$w =$

masala	To‘g‘ri masala	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
u_1	$y_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	2	4	-5	12
u_3	$y_3 =$	1	-3	1	8
u_4	$y_4 =$	2	8	-1	11
1	$z =$	-12	-6	7	0

To‘g‘ri masalada barcha ozod sonlar musbat bo‘lganligi uchun masalaning tayanch yechimi mavjud. Optimal yechimni topish uchun z qatordadagi eng kichik manfiy son -12 ni tanlaymiz. -12 soni joylashgan ustun hal qiluvchi ustun bo‘ladi. Hal qiluvchi ustundagi barcha koeffisientlar musbat bo‘lib, ularga mos ozod sonlarni bo‘lib, simpleks nisbatlarning eng kichigini hisoblaymiz $min\left\{\frac{5}{1},\frac{12}{2},\frac{8}{1},\frac{11}{2}\right\}=5$. Minimal nisbatga mos keluvchi koeffisient 1 ni bosh element sifatida tanlab olamiz. Hal qiluvchi satr u_1 bo‘ladi. Jadvalni quyidagi ko‘rinishda ifodalaymiz:

10.1-jadval

Ikkilangan masala		$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$w =$
	To‘g‘ri masala	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
u_1	$y_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	2	4	-5	12
u_3	$y_3 =$	1	-3	1	8
u_4	$y_4 =$	2	8	-1	11
1	$z =$	-12	-6	7	0

Simpleks almashtirishlarni bajarib, navbatdagi jadvalga o‘tamiz:

10.2-jadval

Ikkilangan masala		$u_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$w =$
	To‘g‘ri masala	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
v_1	$x_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	-2	2	-3	2
u_3	$y_3 =$	-1	-4	2	3
u_4	$y_4 =$	-2	6	1	1
1	$z =$	12	6	-5	60

10.2-jadvalda z qatorda -5 joylashgan ustun hal qiluvchi bo‘lib, bosh element esa $min\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{1}\right\}=1$ minimal nisbatga mos koeffisient 1 bo‘ladi.

Ikkilangan masala		$u_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$w =$
	To‘g‘ri masala	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
v_1	$x_1 =$	1	1	-1	5
u_2	$y_2 =$	-2	2	-3	2
u_3	$y_3 =$	-1	-4	2	3
u_4	$y_4 =$	-2	6	1	1
1	$z =$	12	6	-5	60

Simpleks almashtirishlarni bajarib, navbatdagi jadvalga o‘tamiz:

10.3-jadval

Ikkilangan		$u_1 =$	$v_2 =$	$u_4 =$	$w =$

masala	To‘g‘ri masala	$-y_1$	$-x_2$	$-y_4$	1
v_1	$x_1 =$	-1	7	1	6
u_2	$y_2 =$	-8	20	3	5
u_3	$y_3 =$	3	-16	-2	1
v_3	$x_3 =$	-2	6	1	1
1	$z =$	2	36	5	65

To‘g‘ri masalada 2-qatordagi x o‘zgaruvchilarni 0 ga tenglab, 2-ustundagi x o‘zgaruvchilarni va z funksiyasini ozod sonlarga tenglaymiz: $x_1 = 6,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ z_{max} = 65$. Ikkilangan masalada 1-ustundagi u o‘zgaruv-chilarni nolga tenglaymiz, 1-satrdagi u o‘zgaruvchilar va w funksiyani oxirgi satrdagi sonlarga tenglaymiz:

$$u_1 = 2,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_4 = 5,\ w_{min} = 65.$$

10.5. Transport masalasi va uni potensiallar usulida yechish

Yuk zaxiralari $a_1, a_2, \ldots, a_m$ bo‘lgan m ta jo‘natish punkti, yukka bo‘lgan talab $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bo‘lgan n ta qabul punktlari berilgan bo‘lib, jo‘natish punktlaridan qabul punktlariga birlik yukni tashish harajatlari $c_{ij},\ i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n$ bo‘lsin. Bu yerda i- jo‘natish punkti nomeri, j-qabul punkti nomerini bildiradi. Umumiy yuk tashish xarajatlari

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

formula orqali beriladi. Bu yerda x_{ij}- i nomerli jo‘natish punktidan j nomerli qabul punktiga tashiladigan yuk hajmi. Yuk tashish harajatlarini iloji boricha kamaytirish uchun z funksiyani minimumga intiltiramiz:

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \tag{10.5.1}$$

Yuqoridagi masala jadval ko‘rinishida quyidagicha ifodalanadi:

Qabul punktlari / Jo‘natish punktlari	1	2	…	n	Yuk zaxiralari
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Yukka bo‘lgan talab	b_1	b_2	…	b_n	

Yuk tashishning shunday tashkil etish kerakki, jo‘natish punktlaridagi barcha yuk olib chiqib ketilishi va qabul punktlaridagi yukka bo‘lgan talab to‘liq qondirilishi kerak:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{cases} \qquad (10.5.2)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases} \qquad (10.5.3)$$

Agar

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (10.5.4)$$

munosabat bajarilsa, transport masalasi yopiq masala deyiladi va masalani yechishga kirishish mumkin. Agar (10.5.4) shart bajarilmasa, masala ochiq deyiladi. Ochiq masalani yechish uchun u yopiq masalagi keltiriladi. Masalan, $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ bo‘lsin. Ushbu masalani yopiq masalagi keltirish uchun yukka bo‘lgan talabi $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ bo‘lgan qo‘shimcha qabul punkti tuziladi. Ushbu punkt uchun birlik yukni tashish xarajatlarini 0 ga teng deb olamiz: $c_{1,n+1} = c_{2,n+1} = \ldots = c_{m,n+1} = 0$. Natijada quyidagi yopiq masalani hosil qilamiz.

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	1	2	…	n	$n+1$	Юк захиралари
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	0 x_{1n+1}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	0 x_{2n+1}	a_2
…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	0 x_{mn+1}	a_m
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	…	b_n	b_{n+1}	

Agar $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ bo‘lsa, yuk zaxiralari $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ bo‘lgan qo‘shimcha jo‘natish punkti tuziladi va yuqoridagi kabi yopiq masalagi keltiriladi.

Transport masalasini yechish ikki bosqichda olib boriladi:

1) Birinchi bosqichda (10.5.2)- (10.5.4) shartlarni qanoatlantiruvchi boshlang‘ich x_{ij}, $i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n$ yechim topiladi. Boshlang‘ich rejani topishning bir necha usullari bo‘lib, ularga shimoli-g‘arb usuli, minimal element usuli va boshqalar kiradi. Shimoli- g‘arb usulida (1,1) katak tanlab olinib, $x_{11}=min(a_1,b_1)$ deb olinadi. Agar $min(a_1,b_1)=a_1$ bo‘lsa, bu 1-jo‘natish punktidagi barcha yuk 1 –qabul punktiga yuborilishini, 1-jo‘natish punktidan qolgan qabul punktlariga yuk yuborilmasligini bildiradi. Shuning uchun a_1 joylashgan satrdagi boshqa kataklarga minus qo‘yiladi. 1- qabul punktidagi yukka bo‘lgan talab $b_1^1=b_1-a_1$ bo‘lib qoladi.

Agar $min(a_1,b_1)=b_1$ bo‘lsa, 1- qabul punktidagi yukka bo‘lgan talab to‘liq qondirilganligini, 1-jo‘natish punktida esa $a_1^1=a_1-b_1$ miqdor yuk qolganligini bildiradi. 1- qabul punktiga boshqa jo‘natish punktlaridan yuk keltirilmaydi.

10.4-жадвал

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	1	2	…	n	Юк захиралари	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} –	…	c_{1n} –	a_1	0
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2	
…	…	…	…	…	…	

10.5-жадвал

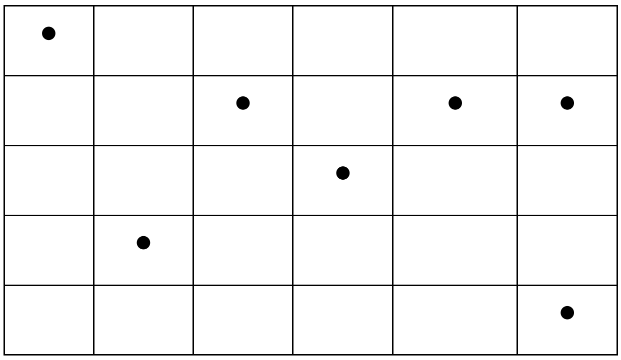
Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	1	2	…	n	Юк захиралари	
1	c_{11} x_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1	a_1^1
2	c_{21} –	c_{22}	…	c_{2n}	a_2	
…	…	…	…	…	…	
m	c_{m1} –	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m	
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	…	b_n		
	0					

Xisoblashlarni 10.4-jadval bo‘yicha davom ettirib, (2,1) katakka o‘tamiz. $x_{21} = min(a_1, b_1^1) = b_1^1$ bo‘lsin. Jadvalni yuqoridagi usul bilan to‘ldirib, quyidagini hosil qilamiz:

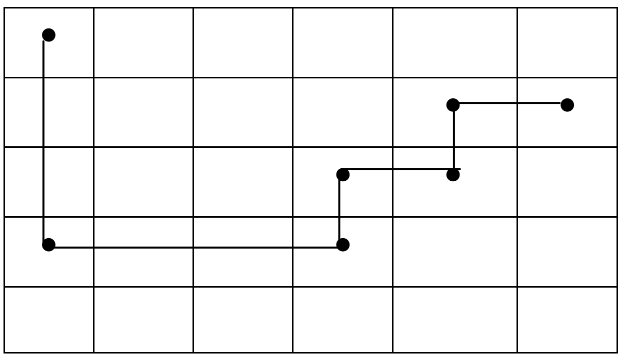
Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	1	2	…	n	Юк захиралари	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} –	…	c_{1n} –	a_1	0
2	c_{21} x_{12}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2	a_2^1
…	…	…	…	…	…	
m	c_{m1} –	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m	
Юкка бўлган талаб	b_1	b_2	…	b_n		
	b_1^1					
	0					

Shu tariqa hisoblashlarni jadvalning quyi o‘ng bo‘rchagigacha davom ettirib, jadvadagi barcha $x_{ij},\ i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n$ larni aniqlaymiz. Bunda (10.5.2)-(10.5.4) shartlar bajarilishi kerak.

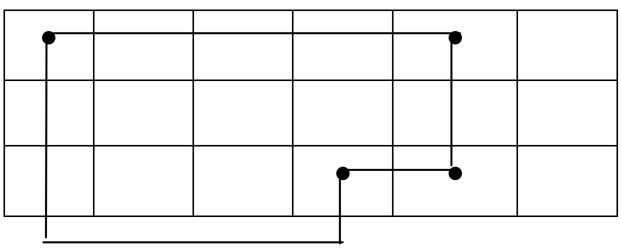
Masalaning ikkinchi bosqichida boshlang‘ich reja asosida (10.5.1) shartni qanoatlantiruvchi optimal echim topiladi. Optimal yechimni topishning potensiallar, taqsimot kabi bir necha usullari mavjud bo‘lib, biz potensiallar usulini qarab chiqamiz. Ushbu usulni qarashdan oldin hisoblash jarayonida ishlatiladigan ayrim tushunchalar bilan tanishamiz. Jadvaldagi ixtiyoriy nuqtalar to‘plami nabor deyiladi.



Naborni tashkil qiluvchi nuqtalar har bir qatorda ikkitadan oshib ketmasa, bunday nabor zanjir deyiladi.



Agar zanjir yopiq bo‘lsa, u sikl deyiladi.



•			•		

Agar jadvaldagi n ta nuqtalar to‘plami sikl tashkil qilmasa, ularga bitta nuqta qo‘shish orqali sikl hosil qilsak, bunday n ta nuqtalar to‘plami atsiklik rejani tashkil qiladi deyiladi.

Agar transport masalasida $x_{ij} > 0$ bo‘lsa, *(i,j)* katak belgilangan katak deyiladi.

Agar transport masalasida barcha kataklar uchun $v_j - u_i \le c_{ij}$ (10.5.4) shartni, belgilangan kataklar uchun esa $v_j - u_i = c_{ij}$ shartni qanoatlantiruvchi $v_j, j = 1,2,...,n;$ $u_i, i = 1,2,...,m$ sonlari mavjud bo‘lsa,

x_{ij}, $i = 1,\dots,m;$ $j = 1,\dots,n$ reja optimal bo‘ladi.

$v_j, j = 1,2,...,n;$ u_i, $i = 1,2,...,m$ sonlari esa potensiallar deyiladi.

Transport masalasini potenцiallar usulida yechish quyidagi tartibda bajariladi:

1) Belgilangan kataklar uchun $v_j - u_i = c_{ij}$, $v_j, j = 1,2,...,n;$ u_i, $i = 1,2,...,m$ shartni qanoatlantiruvchi tenglamalar sistemasi tuziladi. Bunda tenglamalar soni o‘zgaruvchilar sonidan bitta kam bo‘lgani uchun sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Sitemaning bitta xususiy echimini topib potensiallarning qiymatini aniqlaymiz;

2) Belgilanmagan kataklar uchun $v_j - u_i \le c_{ij}$ shartni tekshiramiz. Agar ushbu shart barcha kataklar uchun bajarilsa, optimal yechim topilgan hisoblanadi va $z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ funksiya qiymati hisoblanadi;

3) Agar $v_j - u_i \le c_{ij}$ shart bir nechta kataklar uchun bajarilmasa, Ushbu kataklar uchun $\delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ ayirma hisoblanadi va

$\delta_{i_0 j_0} = \max_{i,j} \delta_{ij}$ topiladi;

4) (i_0,j_0) katak belgilangan kataklar qatoriga qo‘shiladi va belgilangan kataklardan sikl tuziladi;

5) (i_0,j_0) katakdan boshlab siklni tashkil qiluvchi kataklarga ″+″ va ″-″ ishoralari navbat bilan qo‘yilib chiqiladi;

6) ″–″ ishorali kataklar uchun $\theta = min(x_{ij})$ ni aniqlaymiz;

7) ″-″ ishorali kataklardan θ ni ayirib, ″+″ ishorali kataklarga θ ni qo‘shamiz;

8) θ joylashgan katakni belgilangan kataklar qatoridan chiqazamiz.

Natijada yangi rejani hosil qilamiz va bu reja uchun (1)-(7) amallarni takrorlaymiz. Yuqoridagi hisoblashlar barcha kataklar uchun $v_j - u_i \le c_{ij}$ shart bajarilib, optimal reja topilguncha davom ettiriladi.

Kuyidagi misolni qaraymiz:

Transport masalasi quyidagi jadval ko‘rinishida berilgan bo‘lib, uni potenцiallar usuli bilan echamiz.

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари	v_j / u_i	1	2	3	4	Юк захиралари
		v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2	4	6	10	90
2	u_2	1	3	7	4	100
3	u_3	4	8	13	7	140
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330

Boshlang‘ich rejani tuzish uchun shimoli-g‘arb usulidan foydalanamiz. (1,1) katakka mos zaxira va talabning kichigini $x_{11} = 90$ deb olamiz.

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари		1	2	3	4	Юк захиралари	
	v_j / u_i	v_1	v_2	v_3	v_4		
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0
2	u_2	1	3	7	4	100	
3	u_3	4	8	13	7	140	
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330	
		20					

Yuqoridagi jadvalga ko‘ra 1-jo‘natish punktidan 1-qabul punktiga 90 birlik yuk yuboriladi, 1-jo‘natish punktida boshqa yuk qolmaydi, shuning uchun 1-jo‘natish punktidan boshqa qabul punktlariga yuk tashilmaydi, 1-qabul punktiga yana 30 birlik yuk keltirish kerak. (2,1) katakka o‘tib, shu katakka mos talab va zaxiralarning kichigini $x_{21} = 20$ deb olamiz.

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари		1	2	3	4	Юк захиралари	
	v_j / u_i	v_1	v_2	v_3	v_4		
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0
2	u_2	1 20	3	7	4	100	80
3	u_3	4 -	8	13	7	140	
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330	
		20					
		0					

(2,3) katakka o‘tib, yuqoridagi qoida bo‘yicha $x_{22} = 80$ ni aniqlaymiz.

Қабул пунктлари / Жўнатиш пунктлари		1	2	3	4	Юк захиралари		
	v_j / u_i	v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0
3	u_3	4 -	8	13	7	140		
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330		
		20	20					
		0						

Hisoblashlarni shu tariqa davom ettiramiz va oxirgi jadval quyidagi ko‘rinishga keladi:

Қабул пунктлари / Жўнатиш Пунктлари		1	2	3	4	Юк захиралари		
	v_j / u_i	v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 *90*	4 -	6 -	10 -	90	0	
2	u_2	1 20	3 80	*7* -	*4* -	100	80	0
3	u_3	4 -	8 20	*13*	*7*	140	120	
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330		
		20	20					
		0	0					

Қабул пунктлари Жўнатиш пунктлари	v_j u_i	1	2	3	4	Юк захиралари		
		v_1	v_2	v_3	v_4			
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0
3	u_3	4 -	8 20	13 80	7	140	120	40
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330		
		20	20	0				
		0	0					

Қабул пунктлари Жўнатиш пунктлари	v_j u_i	1	2	3	n	Юк захиралари			
		v_1	v_2	v_3	v_4				
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90	0		
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100	80	0	
3	u_3	4 -	8 20	13 80	7 40	140	120	40	0
Юкка бўлган талаб		110	100	80	40	330			
		20	20	0	0				
		0	0						

Shu tarzda boshlang‘ich rejani hosil qildik: $x_{11} = 90$, $x_{21} = 20, x_{22} = 80$, $x_{32} = 20$, $x_{33} = 80, x_{34} = 40, x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{23} = x_{24} = x_{31} = 0$,

$$z = 90 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 80 \cdot 3 + 20 \cdot 8 + 80 \cdot 13 + 40 \cdot 7 =$$

$$= 180 + 20 + 240 + 160 + 1040 + 280 = 1920 .$$

Masalaning optimal yechimini topish uchun oxirgi jadvalni quyidagi ko‘rinishda ifodalaymiz:

v_j \ u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	2 *90*	4 -	6 -	10 -	90
u_2	1 *20*	3 80	7 -	4 -	100
u_3	4 -	8 20	13 80	7 40	140
	110	100	80	40	

Belgilangan kataklar uchun $v_j - u_i = c_{ij}$ $v_j,\ j = 1,...,4,$ $u_i,\ i = 1,2,3$ shart bo‘yicha tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$v_1 - u_1 = 2$$
$$v_1 - u_2 = 1$$
$$v_2 - u_2 = 3$$
$$v_2 - u_3 = 8$$
$$v_3 - u_3 = 13$$
$$v_4 - u_3 = 7$$

Tenglamalar sistemasidagi noma’lumlar 7 ta, tenglamalar esa 6 ta bo‘lgani uchun sistema cheksiz ko‘p yechimga ega. Xususiy yechimni topish uchun o‘zgaruvchilardan biriga ixtiyoriy qiymat beramiz, masalan $u_1 = 0$ bo‘lsin. U holda $v_1 = 2,\ u_2 = 1,\ v_2 = 4,\ u_3 = -4,\ v_3 = 9,\ v_4 = 3$ kelib chiqadi. Potensiallarning qiymatlarini jadvalga qo‘yamiz:

v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 3$	

u_i					
$u_1 = 0$	2 90	4	6	10	90
$u_2 = 1$	1 20	3 80	7	4	100
$u_3 = -4$	4	8 20	13 80	7 40	140
	110	100	80	40	

Belgilanmagan kataklar uchun $v_j - u_i \le c_{ij}$ shartni tekshiramiz:

$$v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = c_{12}$$
$$v_3 - u_1 = 9 - 0 = 9 > 6 = c_{13}$$
$$v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}$$
$$v_3 - u_2 = 9 - 1 = 8 > 7 = c_{23}$$
$$v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24}$$
$$v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}$$

Uchta (1,3), (2,3), (3,1) kataklar uchun $v_j - u_i \le c_{ij}$ shart bajarilmaydi. Ushbu kataklar uchun $\delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ larni hisoblaymiz:

$$\delta_{13} = v_3 - u_1 - c_{13} = 9 - 6 = 3$$
$$\delta_{23} = v_3 - u_2 - c_{23} = 8 - 7 = 1$$
$$\delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 6 - 4 = 2$$

δ larning eng kattasini topamiz. Bu $\delta_{13} = 3$ bo‘lib, unga mos katakni belgilangan kataklar qatoriga qo‘shib, belgilangan kataklar yordamida цikl tuzamiz. Siklni tashkil etuvchi kataklarga (1,3) katakdan boshlab ″+″ va ″-″ ishoralarini navbat bilan qo‘yib chiqamiz:

v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 3$	

u_i					
$u_1=0$	- 2 90	4	+ 6 0	10	90
$u_2=1$	+ 1 20	- 3 80	7	4	100
$u_3=-4$	4	+ 8 20	- 13 80	7 40	140
	110	100	80	40	

"-" ishorali kataklar uchun $\theta = min\, x_{ij} = min\{90{,}80{,}80\}$ ni topamiz. Ushbu shartni qanoatlantiruvchi kataklar ikkita (2,2) va (3,3) kataklari bo‘lib, ulardan birini, masalan (3,3) katakni tanlaymiz.

v_j / u_i	$v_1=2$	$v_2=4$	$v_3=9$	$v_4=3$	
$u_1=0$	- 2 90	4	+ 6 0	10	90
$u_2=1$	+ 1 20	- 3 80	7	4	100
$u_3=-4$	4	+ 8 20	- 13 $80=\theta$	7 40	140
	110	100	80	40	

θ ni "+" ishorali kataklarga qo‘shib, "-" ishorali kataklardan ayiramiz va θ joylashgan (3,3) katakni belgilangan kataklar qatoridan chiqarib tashlaymiz. Natijada quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

v_j / u_i	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	zaxira
$u_1 =$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2 =$	1 100	3 0	7	4	100
$u_3 =$	4	8 100	13	7 40	140
talab	110	100	80	40	

Hosil bo‘lgan yangi rejada belgilangan kataklar uchun $v_j - u_i = c_{ij}$ shart orqali yuqoridagi usul bilan tenglamalar sistemasi tuzib, potenallarni aniqlaymiz:

$$v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = c_{11}$$
$$v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}$$
$$v_3 - u_2 = 6 - 1 = 5 < 7 = c_{23}$$
$$v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24}$$
$$v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}$$
$$v_3 - u_3 = 6 - (-4) = 10 < 13 = c_{33}$$

Yuqoridagi sistemada $u_1 = 0$ bo‘lsin. U holda $v_1 = 2,\ u_2 = 1,\ v_2 = 4,$ $u_3 = -4, v_3 = 6, v_4 = 3$ bo‘ladi.

v_j / u_i	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 6$	$v_4 = 3$	Zaxira
$u_1 = 0$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2 = 1$	1 100	3 0	7	4	100
$u_3 = -4$	4	8 100	13	7 40	140
talab	110	100	80	40	

Bitta (3,1) katakda $v_j - u_i \le c_{ij}$ shart bajarilmaganligi uchun, bu katakni belgilangan kataklar qatoriga qo‘shib, yuqoridagi usul bilan цikl tuzamiz. Siklni ishoralab, ″-″ ishorali kataklar uchun θ ni aniqlaymiz. ″-″ ishorali kataklardagi sonlar bir xil 100 bo‘lganligi uchun ulardan birini, masalan (3,2) katakni tanlaymiz. Natijada quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

v_j / u_i	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	zaxira
$u_1 =$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2 =$	- 1 100	+ 3 0	7	4	100
$u_3 =$	+ 4 0	- 8 100=θ	13	7 40	140
talab	110	100	80	40	

θ ni ″-″ ishorali kataklardan ayirib, ″+″ ishorali kataklarga qo‘shamiz. (3.2) katakni belgilangan kataklar qatoridan chiqarib tashlab, yangi reja uchun potensiallarni yuqoridagi usul bilan aniqlaymiz. Natijada quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

v_j / u_i	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 6$	$v_4 = 5$	Zaxira
$u_1 = 0$	2 10	4	6 80	10	90
$u_2 = 1$	1 0	3 100	7	4	100
$u_3 = -2$	4	8	13	7	140

	100			40	
talab	110	100	80	40	

Yuqoridagi jadvaldagi rejada barcha kataklar uchun $v_j - u_i \le c_{ij}$ potensiallik sharti bajariladi. Demak, masalaning optimal yechimi topildi va u quyidagicha bo‘ladi:

$$x_{11} = 10,\ x_{13} = 80,\ x_{22} = 100,\ x_{31} = 100,\ x_{34} = 40,$$

$$x_{12} = x_{14} = x_{21} = x_{23} = x_{24} = x_{32} = x_{33} = 0,$$

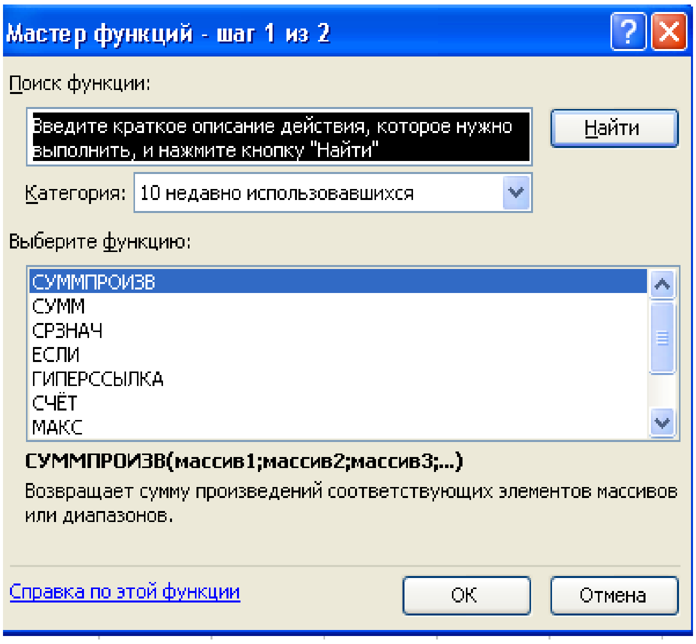
$$z_{min} = 10 \cdot 2 + 80 \cdot 6 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 40 \cdot 7 = 20 + 480 + 300 + 400 + 280 = 1480$$

.

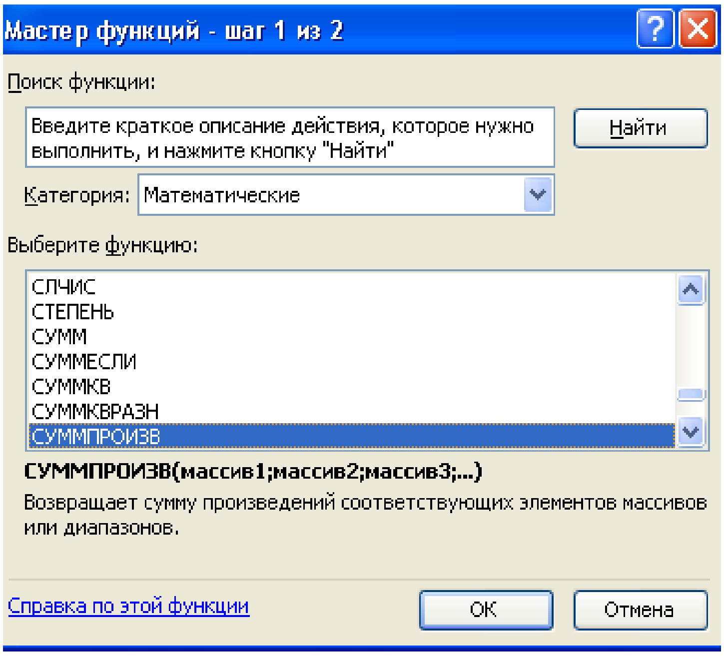
Masalani Excel dasturi yordamida yechamiz. Buning uchun birlik yuklarni tashish xarajatlarini A2:D4 diapazoniga, jo‘natish punktlaridagi yuk zaxiralarini G7:G9 diapazoniga, qabul punktlaridagi yukka bo‘lgan talabni A12:D12 diapazoniga kiritamiz. Tashiladigan yuklarning boshlang‘ich qiymatlarini 0 deb olamiz va ularni A7:D9 diapazoniga kiritamiz. (10.5.1) va (10.5.3) shartlarning bajarilishini tekshirish uchun E7:E9, A10:D10 diapazonlarini bo‘sh qoldiramiz. Natijada jadval quyidagi ko‘rinishni oladi:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Birlik yuk tashish xarajatlari						
2	2	4	6	10			
3	1	3	7	4			
4	4	8	13	7			
5							
6	Tashiladigan yuk xajmlari						Yuk zaxirasi
7	0	0	0	0		=	90
8	0	0	0	0		=	100
9	0	0	0	0		=	140
10							
11	=	=	=	=			
12	110	100	80	40	Yukka talab		
13							
14	Umumiy yuk tashish xarajati z=						
15							

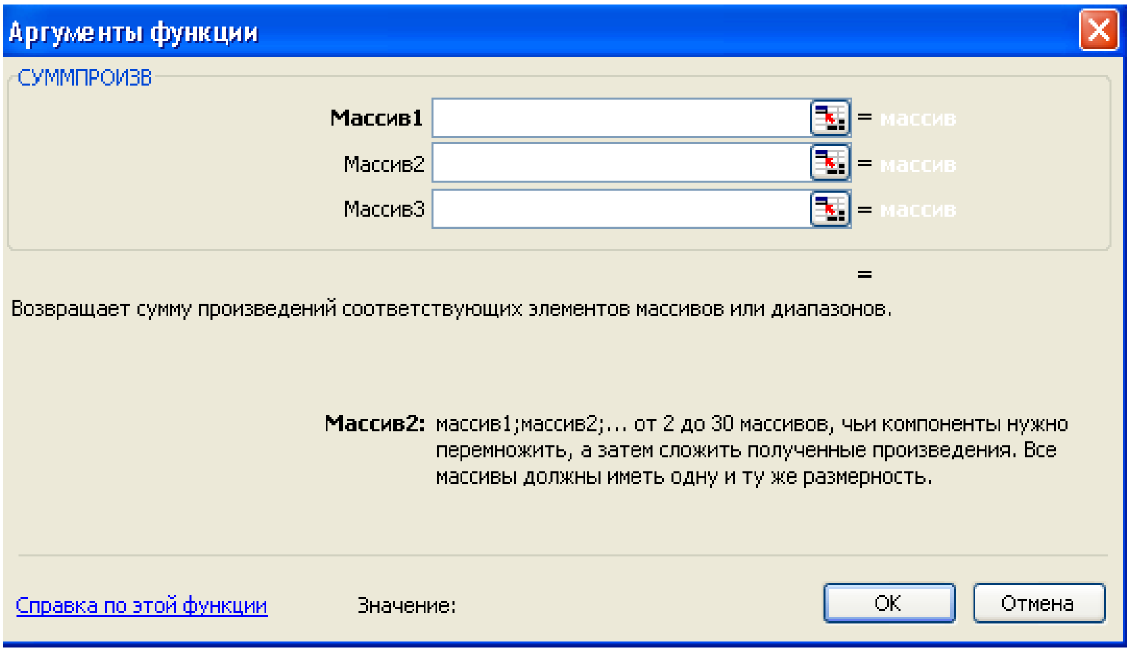
E7, E8, E9, A10,B10,C10,D10 kataklariga mos ravishda A7:D7,A8:D8, A9:D9, A7:A9, B7:B9, C7:C9, D7:D9 diapazonlariga, yuk xajmlari yig‘indilarini  tugmasi yordamida xisoblaymiz. So‘ngra kursorni D14 katagiga o‘rnatib, tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi muloqot oynasi hosil bo‘ladi:



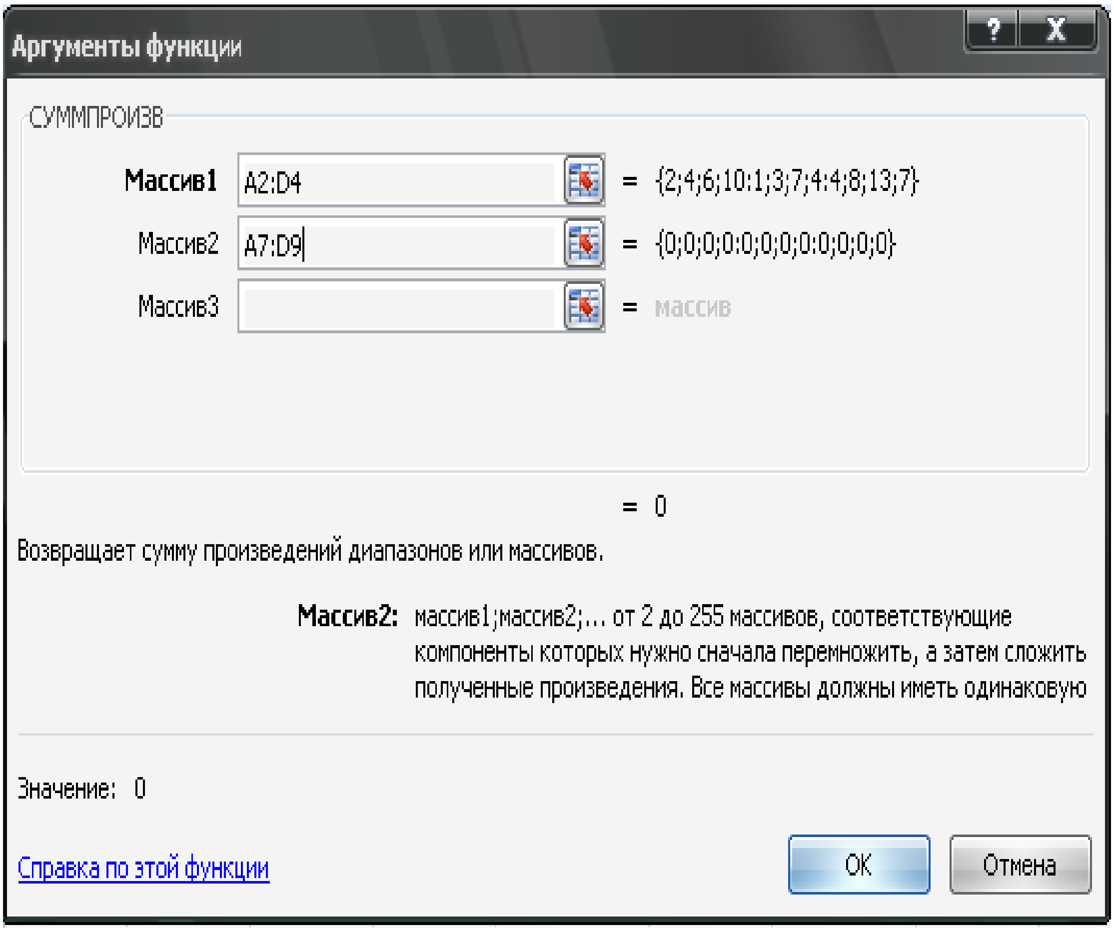
Hosil bo‘lgan muloqot oynasida «Kategoriya» bo‘limida «Matematicheskoe» punktini tanlaymiz, so‘ng «Viberite funksiyu» bo‘limida «Summproizv» funkцiyasini tanlaymiz:



So‘ngra «OK» tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi muloqot oynasi hosil bo‘ladi:



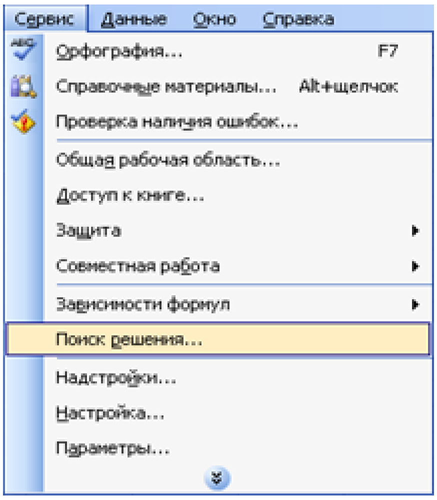
Hosil bo‘lgan navbatdagi muloqot oynasida «Massiv 1» darchasidagi tugmachani bosib, A2 : D4 diapazonidagi ma’lumotlarni, «Massiv 2» darchasidagi tugmachani bosib, A7 : D9 diapazonidagi ma’lumotlarni kiritamiz:



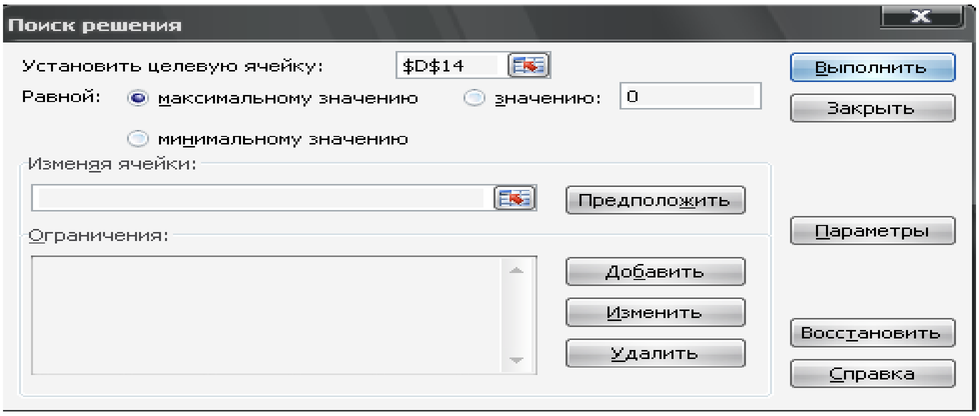
So‘ngra «OK» tugmasini bosamiz. Natijada jadval quyidagi ko‘rinishga keladi:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Birlik yuk tashish xarajatlari						
2	2	4	6	10			
3	1	3	7	4			
4	4	8	13	7			
5							
6	Tashiladigan yuk xajmlari						Yuk zaxirasi
7	0	0	0	0	0	=	90
8	0	0	0	0	0	=	100
9	0	0	0	0	0	=	140
10	0	0	0	0			
11	=	=	=	=			
12	110	100	80	40	Yukka talab		
13							
14	Umumiy yuk tashish xarajati z=			0			

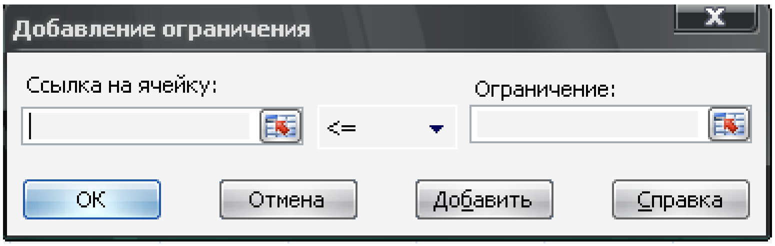
Kursorni maqsad funksiyasi joylashgan D14 katakka o‘rnatib, «Servis-Poisk resheniya» buyrug‘ini beramiz.



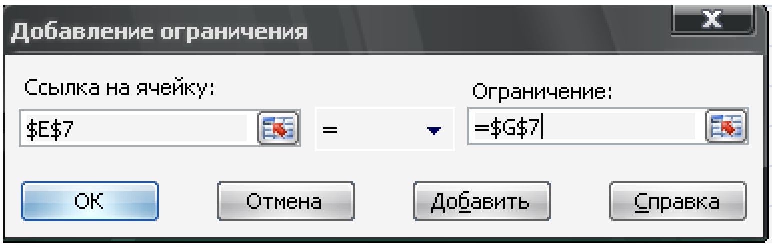
Natijada quyidagi «Poisk resheniya» muloqot oynasi hosil bo‘ladi.



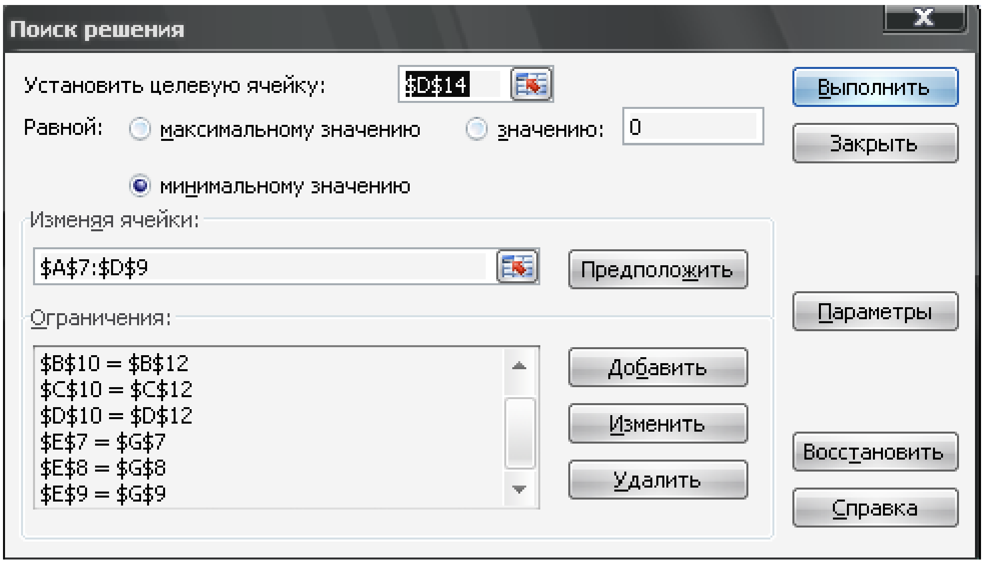
Hosil bo‘lgan muloqot oynasida «Ustanovit selevuyu yacheyku» darchasiga D14 katagi nomini o‘rnatib “minimalnomu znacheniyu” parametrini belgilaymiz, «Izmenyaya yacheyki» darchasiga $A7:D9$ diapazonini kiritamiz. «Ogranicheniya» darchasiga o‘tib «Dobavit» tugmasini bosib, quyidagi oynani hosil qilamiz:



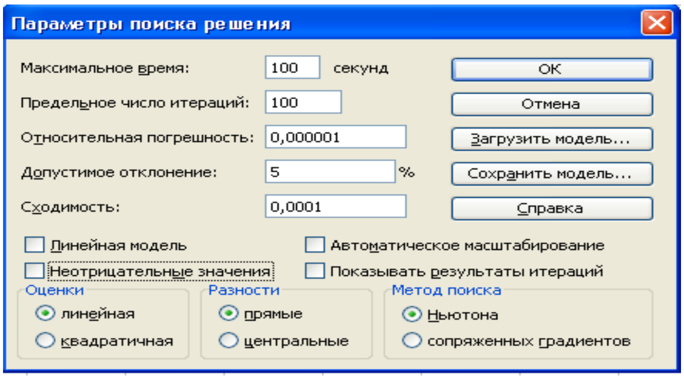
Hosil bo‘lgan muloqot oynasida «Silka na yacheyki» darchasiga E7 ni kiritamiz, tenglikni o‘rnatamiz, «Ogranicheniya» darchasiga G7 ni kiritib, quyidagini hosil qilamiz:



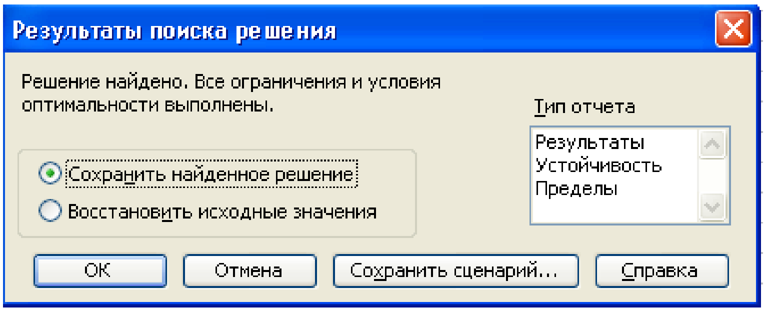
“Dobavit” tugmasini bosamiz. Diapazonlaridagi qolgan munosabatlarni ham shu tariqa belgilab chiqamiz. Oxirgi munosabatni kiritgandan keyin «OK» tugmasini bosamiz. Natijada «Poisk resheniya» muloqot oynasiga qaytamiz:



«Параметры» tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi muloqot oynasi hosil bo‘ladi:



Oynadagi «Neotrisatelnoe znachenie» parametrini belgilaymiz va «OK» tugmasini bosib, «Poisk resheniya» muloqot oynasiga qaytamiz va «Vыpolnit» tugmasini bosamiz. Natijada quyidagi oynaga o‘tamiz:



«OK» tugmasini bosamiz. Natijada echim quyidagi ko‘rinishga keladi:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	birlik yuk tashish xarajatlari							
2	2	4	6	10				
3	1	3	7	4				
4	4	8	13	7				
5								
6	Tashiladigan yuk xajmlari						Yuk zaxirasi	
7	10	0	80	0	90	=	90	
8	0	100	0	0	100	=	100	
9	100	0	0	40	140	=	140	
10	110	100	80	40				
11	=	=	=	=				
12	110	100	80	40	Yukka talab			
13								
14	Umumiy yuk tashish xarajati z=			1480				
15								

Rasmdan ko‘rinib turibdiki, barcha cheklanishlar bajariladi va echim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x_{11} = 10,\ x_{13} = 80,\ x_{22} = 100,\ x_{31} = 100,\ x_{34} = 40,$$

$$x_{12} = x_{14} = x_{21} = x_{23} = x_{24} = x_{32} = x_{33} = 0,$$

$$z_{\min} = 10 \cdot 2 + 80 \cdot 6 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 40 \cdot 7 = 20 + 480 + 300 + 400 + 280 = 1480$$

Yuqoridagi transport masalani MathCad dasturida yechamiz. Dastlab maqsad funksiyani quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

Z(x11,x12,x13,x14,x21,x22,x23,x24,x31,x32,x33,x34):=2*x11+4*x12+6*x13+10*x14+x21+3*x22+7*x23+4*x24+4*x31+8*x32+13*x33+7*x34

Given so‘zidan keyin quyidagi mantiqiy ifodalar yoziladi:

x11+x12+x13+x14═90

x21+x22+x23+x24═100

x31+x32+x33+x34═140

x11+x21+x31═110

x12+x22+x32═100

x13+x23+x33═80

x14+x24+x34═40

x11≥0 x12≥0 x13≥0 x14≥0

x21≥0 x22≥0 x23≥0 x24≥0

x31≥0 x32≥0 x33≥0 x34≥0

Noma’lumlarning boshlang‘ich qiymatlari kiritiladi:

x11:=90 x12:=0 x13:=0 x14:=0

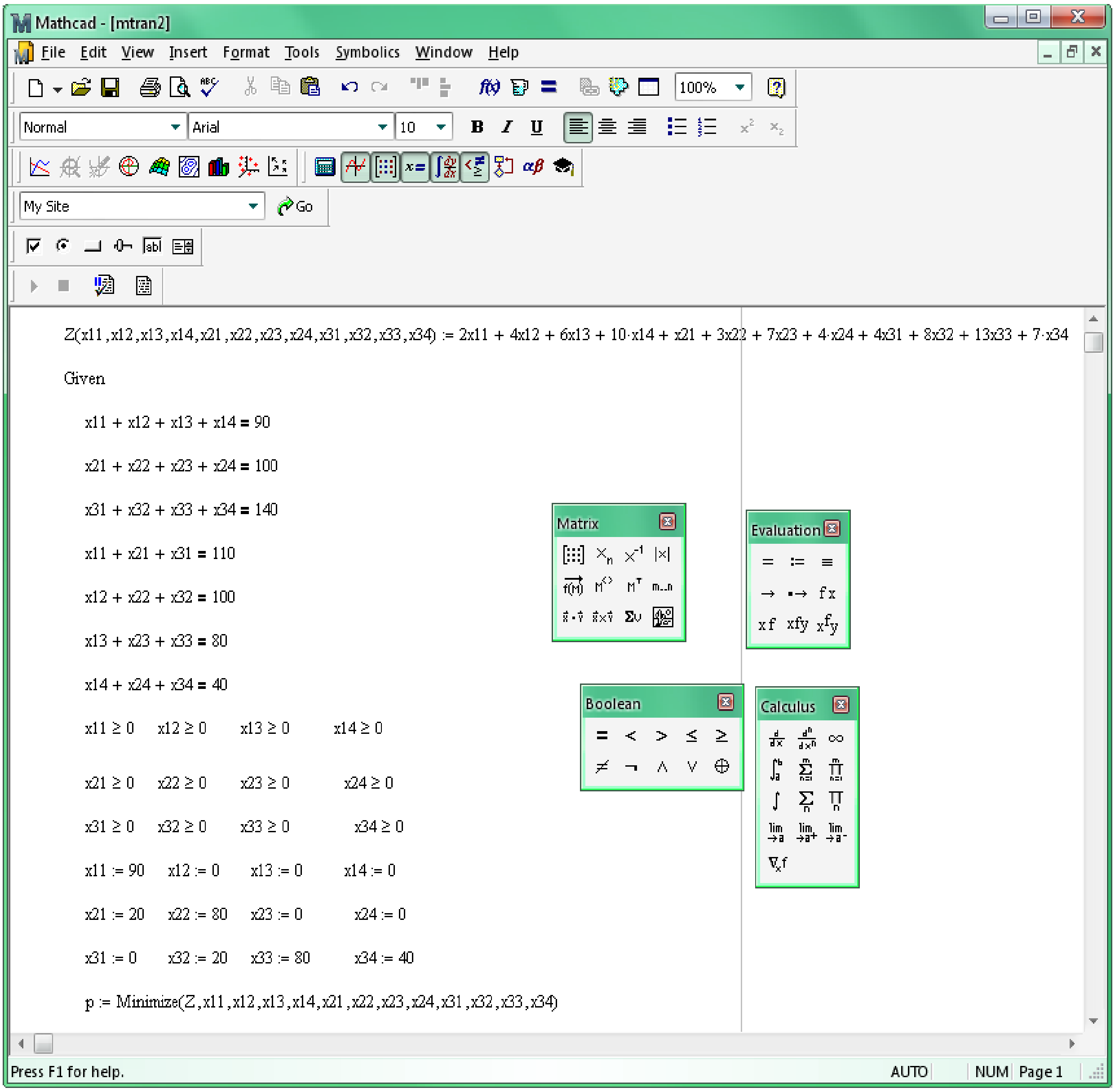
x21:=20 x22:=80 x23:=0 x24:=0

x31:=0 x32:=20 x33:=80 x34:=40

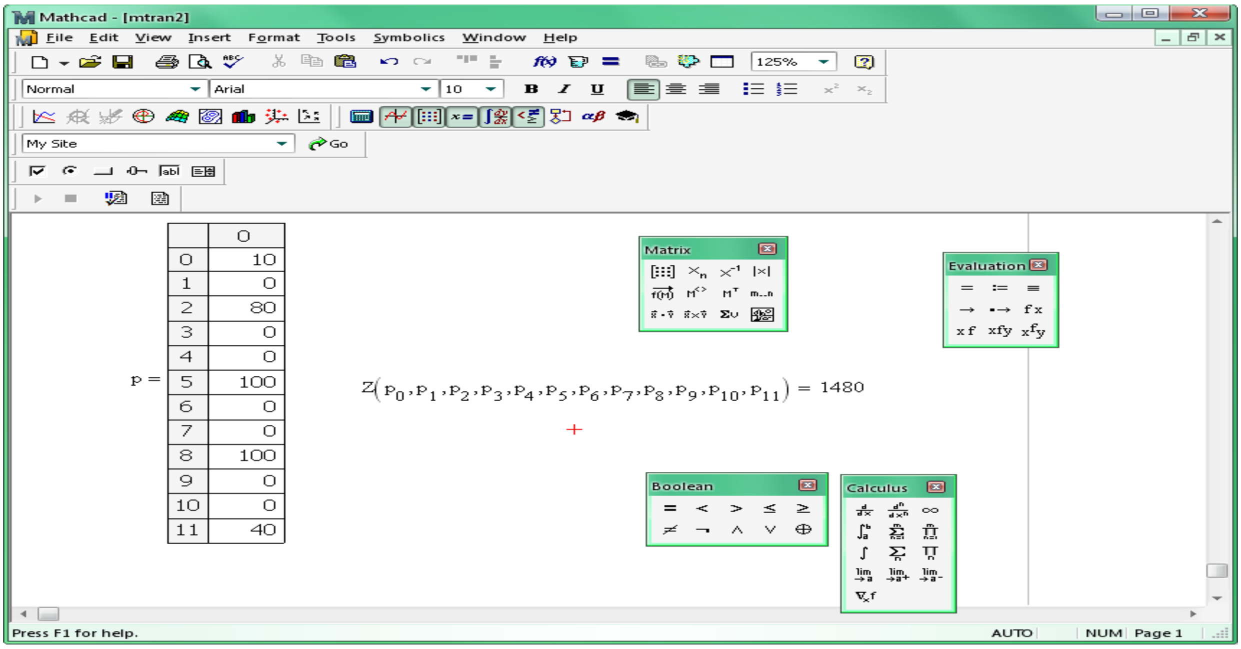
Natija chiqarish uchun quyidagi operator yoziladi:

r :=Minimize(Z, x11, x12, x13, x14, x21, x22,x23, x24, x31, x32, x33, x34)

MathCadda masalaning dasturi quyidagicha bo‘ladi:



Optimal yechimni beruvchi o‘zgaruvchilarning qiymatlari p= operatori yordamida, maqsad funksiyasining optimal qiymati esa Z(p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,p9,p10,p11)= operatori yordamida xosil qilinadi. Masalaning yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:



	0
0	10
1	0
2	80
3	0
4	0
5	100
6	0
7	0
8	100
9	0
10	0
11	40

10.6. Chiziqsiz dasturlash masalasi

Agar maqsad funksiyasi yoki tengsizliklar sistemasi o‘zgaruvchilarga nisbatan chiziqsiz ifodalarni o‘z ichichga olsa, bunday masalalar chiziqsiz dasturlash masalasi deyiladi. Chiziqsiz dasturlash masalasi umumiy ko‘rinishda quyidagicha ifodalanadi: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlarini topish kerakki, bunda quyidagi shartlar bajarilsin: $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max(min)$ (10.6.1)

$$\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq 0 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq 0 \end{array} \qquad (10.6.2)$$

(10.6.2) tengsizliklarni quyidagicha ifodalaymiz:

$$\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq 0 \\ y_2 = f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq 0 \end{array} \qquad (10.6.3)$$

$y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$ tenglamalar n o‘lchovli fazodagi gipertekisliklarni aniqlab, ular bilan chegaralangan nuqtalar to‘plami (10.6.2) shartlarni qanoatlantiradi, boshqacha qilib aytganda, mumkin bo‘lgan yechimlar to‘plamini hosil qiladi. Shu nuqtalar ichidan (10.6.1) funksiyaga optimal qiymat beradigan nuqtalarni topish kerak. (10.6.1)-(10.6.2) masalani yechishning bir necha usullari bo‘lib, ularga fazoviy to‘r uzellari usuli, tasodifiy tekshirish hamda, gradient usullari kiradi. Gradient usulini qarab chiqamiz.

$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning argumentlari bo‘yicha xususiy hosilalaridan tashkil topgan $grad\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)\right\}$ vektorga f funksiyaning gradienti deyiladi. Har bir nuqtaning o‘z gradienti bo‘lib, u berilgan nuqtada funksiyaning eng katta o‘zgarish yo‘nalishini ko‘rsatadi va shu nuqtadan o‘tuvchi sirt chizig‘iga nisbatan perpendikulyar bo‘ladi.

Masalani echish uchun dastlab, mumkin bo‘lgan yechimlar to‘plamida boshlang‘ich nuqta A ni tanlab olamiz. A nuqtada maqsad funksiyasining gradientini hisoblaymiz:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_A, \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_A, ..., \left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)_A .$$

A nuqta orqali o‘tuvchi gradientga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini tuzamiz.

$$x_1 = x_1^{(A)} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_A \cdot t$$

$$x_2 = x_2^{(A)} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_A \cdot t$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

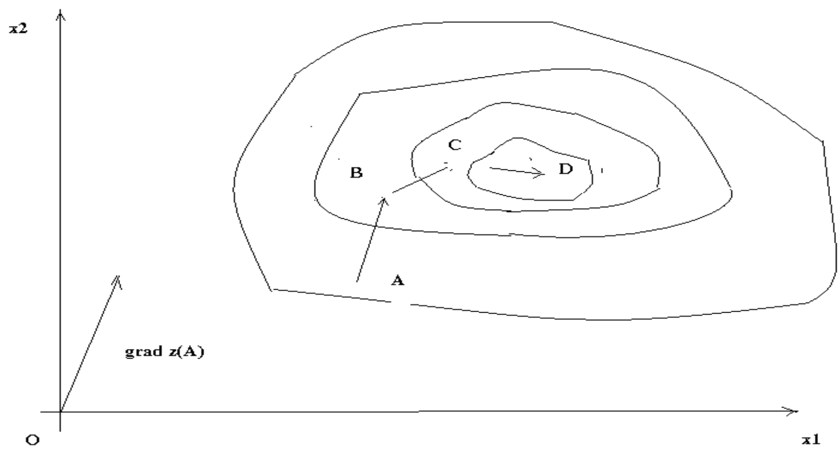
$$x_n = x_n^{(A)} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)_A \cdot t$$

Maqsad funksiyasi maksimumga tekshirilayotgan bo‘lsa, gradient yo‘nalishi bo‘ylab siljiymiz va $t > 0$ deb olamiz. Boshlang‘ich nuqtadan gradient yo‘nalishi bo‘ylab t parametr qiymati bilan aniqlanuvchi biror h

masofaga siljib, biror B nuqtaga o‘tamiz. Yangi B nuqtada yana gradientni aniqlaymiz. Aniqlangan yo‘nalish bo‘yicha yana h masofaga siljib, C nuqtaga o‘tamiz va shu tariqa jarayonni davom ettiramiz. Agar gradient tashkil etuvchilari nol qiymatni qabul qilsa, optimal yechim topilgan hisoblanadi:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,\ \dots,\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

Masalaning grafik tasviri qo‘yidagicha bo‘ladi:



Agar masala minimumga tekshirilayotgan bo‘lsa, $t < 0$ deb olinib, z funksiyaning kamayishini ko‘rsatuvchi gradient yo‘nalishiga qarama-qarshi tomonga siljiymiz.

Misol. Quyidagi chiziqsiz dasturlash masalasini yeching.

$$z = x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 2x \ \to max$$
$$x_1^2 - x_2^2 \le 9$$
$$x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

Tengsizliklar sistemasini quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$y_1 = 9 - x_1^2 + x_2^2 \ge 0$$
$$y_2 = 3 - x_2 \ge 0$$
$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$$

z funksiyasidan x_1, x_2 o‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy hosila olamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2x_1 - 3$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 2x_2 - 2.$$

(10.6.4)

Boshlang‘ich nuqta sifatida $O(0{,}0)$ nuqtani tanlaymiz. Bu nuqta berilgan masaladagi tengsizliklarni qanoatlantirib, $z_0 = 0$ bo‘ladi. O nuqta koordinatalarini (10.6.4) ifodaga qo‘yamiz.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_0 = 2 \cdot 0 - 3 = -3$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_0 = 2 \cdot 0 - 2 = -2$$

Natijada O nuqta uchun quyidagi gradientni hosil qilamiz: $grad\ z_0(-3;-2)$. O nuqta optimal bo‘lmaydi.

O nuqta orqali o‘tuvchi, gardientga parallel to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini tuzamiz:

$$x_1 = 0 - 3t$$
$$x_2 = 0 - 2t$$

Masala minimumga tekshirilayotganligi uchun $t = \text{-}1 < 0$ deb olamiz va yuqoridagi parametrik tenglamaga quyib quyidagini hosil qilamiz:

$$x_1 = 0 - 3 \cdot (-1) = 3$$
$$x_2 = 0 - 2 \cdot (-1) = 2$$

Natijada $A(3;2)$ nuqtaga o‘tamiz. A nuqtada z funksiya qiymatini hisoblaymiz:

$z_A = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2^2 - 2 \cdot 2 = 0 = z_0$. Bundan ko‘rinadiki, A va O nuqtalarda funksiya qiymati bir xil bo‘lib, bu berilgan yo‘nalishda minimum nuqtani sakrab o‘tib ketganligimizni bildiradi. Shuning uchunt t parametrning qiymatini kichikroq olamiz: $t = -0{,}5$ quyidagini hosil qilamiz:

$$x_1 = 0 - 3 \cdot (-0{,}5) = 1{,}5$$
$$x_2 = 0 - 2 \cdot (-0{,}5) = 1$$

Topilgan $B(1{,}5;1)$ nuqtada funksiya qiymati

$z_B = 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 1^2 - 2 \cdot 1 = \; = -3{,}25$ bo‘lib, boshlang‘ich qiymatga nisbatan kichraydi. Bu nuqta uchun cheklanishlarni tekshirib ko‘ramiz:

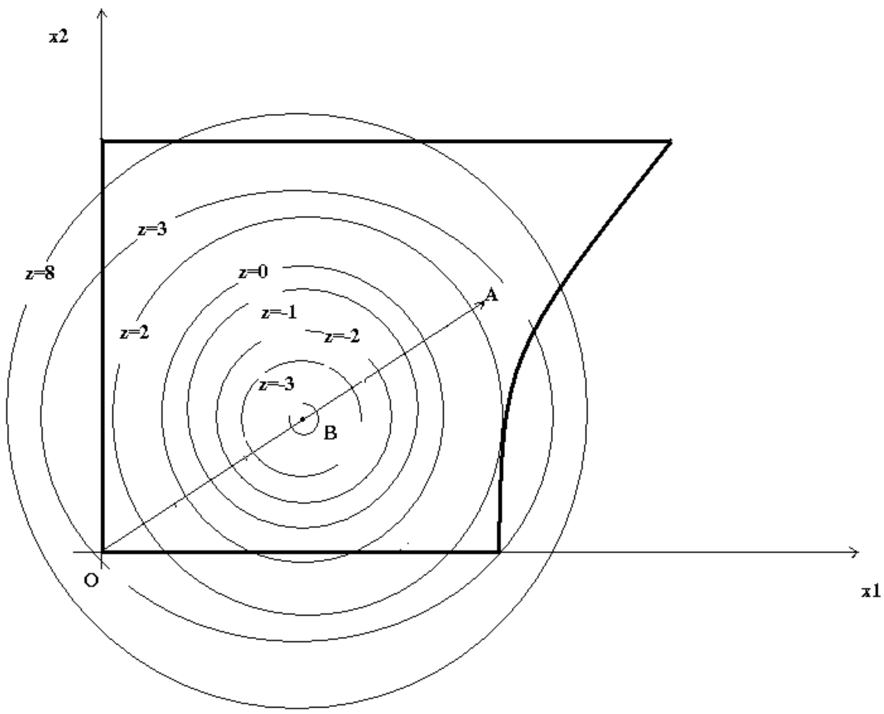
$$y_1 = 9 - 1{,}5^2 + 1^2 = 7{,}75 > 0$$
$$y_2 = 3 - 1 = 2 > 0$$

Barcha shartlar bajarilgani uchun, topilgan nuqta mumkin bo‘lgan yechimlar to‘plamiga kiradi. B nuqtada z ning gradientini hisoblaymiz:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_B = 2 \cdot 1{,}5 - 3 = 0$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_B = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$z_B(0;0)$ nol vektor bo‘lgani uchun z ning qiymatini yanada kamaytirib bo‘lmaydi.

Demak masala optimal echim B nuqtada erishadi. Masalaning grafik ifodasi quyida chizmada keltirilgan:



Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi chiziqli dasturlash masalalarini grafik va simpleks usulda yeching:

1) $z = 2x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2) $z = -x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) $z = 2x_1 - 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4) $z = 1{,}5x_1 - 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5) $z = 4 + 6x_1 + 2x_2 \to min$

6) $z = 1{,}5x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 0 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \ge -2 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7) $z = 2x_1 - 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 3 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

8) $z = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

9) $z = 2x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

10) $z = 2 + 6x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -3 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Quyidagi chiziqli dasturlash masalalarini simpleks usulda yeching va ularga ikkilangan masala tuzing:

1) $z = 2x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2) $z = -x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3) $z = 2x_1 - 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ -2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4) $z = 1{,}5x_1 - 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

5) $z = 4 + 6x_1 + 2x_2 \to min$

6) $z = x_1 + 2x_2 - x_3 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \geq -2 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7) $z = 2x_1 - 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8) $z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Quyidagi transport masalalarini eching:

1)

	1	2	3	Zaxira
1	6	2	1	70
2	4	6	4	30
3	4	2	5	20
Talab	50	40	30	

2)

	1	2	3	Zaxira
1	3	2	4	80
2	3	9	5	60
3	8	7	5	60
Talab	80	80	40	

3)

	1	2	3	Zaxira
1	5	8	4	2
2	4	5	3	14
3	4	2	5	8
Talab	4	12	8	

4)

	1	2	3	Zaxira
1	1	2	5	20
2	4	3	4	30
3	8	5	1	40
Talab	40	30	20	

5)

	1	2	3	Zaxira
1	9	6	7	90

6)

	1	2	3	Zaxira
1	15	24	12	3

2	8	8	4	20
3	10	7	4	50
Talab	70	40	50	

2	12	15	9	21
3	12	6	15	12
Talab	16	8	12	

7)

	1	2	3	Zaxira
1	15	24	12	4
2	12	6	15	16
3	12	15	9	28
Talab	8	24	18	

8)

	1	2	3	Zaxira
1	15	24	12	3
2	12	15	9	14
3	12	6	15	8
Talab	4	12	8	

9)

	1	2	3	Zaxira
1	3	5	2	20
2	4	4	1	20
3	4	4	6	50
Talab	30	20	40	

10)

	1	2	3	Zaxira
1	3	5	2	10
2	6	6	4	10
3	9	10	6	10
Talab	7	13	10	

Quyidagi chiziqsiz dasturlash masalalarini yeching:

1) $z = 2x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2) $z = x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) $z = 2x_1 - 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 5x_2^2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4) $z = x_1 - 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1^2 + 2x_2^2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5) $z = 4 + 6x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 \geq -2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \geq 0 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

6) $z = x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7) $z = 2x_1 - 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^2 \geq 3 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8) $z = 2x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1^2 + 3x_2^2 \leq 14 \\ 2x_1 - 3x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

9) $z = x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^3 \geq 1 \\ x_1 + 3x_2 + \geq 12 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

10) $z = 2 + 6x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_2^2 \geq -3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tayanch so‘z va iboralar

Chiziqli va chiziqsiz dasturlash, maqsad funksiyasi, cheklanishlar sistemasi, nomanfiylik sharti, simpleks usuli, grafik usuli, yechimlar ko‘pburchagi, normal vektor, parallel surish, maksimal va minimal yechimlar, muloqat oynasi, diapazon, massiv, tayanch yechim, optimal yechim, hal qiluvchi satr va ustun, bosh element, to‘rtburchak qoidasi, simpleks almashtirishi, MathCad dasturi, Excel dasturi, ikkilangan masalasi, transport masalasi, potensiallar usuli, ochiq va yopiq masalalar, shimoli-g‘arb usuli, gradient usuli.

Savollar

1. Chiziqli dasturlash masalasi umumiy holda qanday qo‘yiladi?

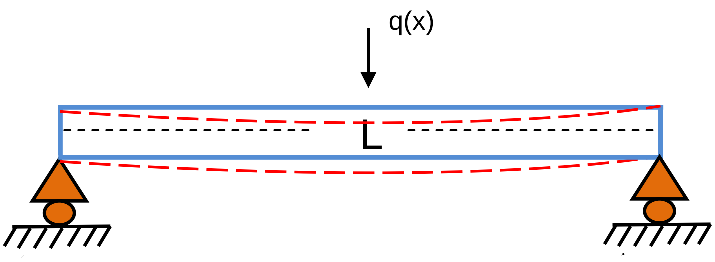
2. Maqsad funksiyasi - qanday funksiya?
3. Chiziqli dasturlash masalasi qachon grafik usulda yechiladi?
4. Simpleks usuli algoritmi qanday amallar ketma-ketligidan iborat?
5. Yechimlar ko‘pburchagi qanday ko‘pburchak?
6. Optimal yechim necha xil usulda aniqlanadi?
7. Chiziqli dasturlash masalasi Excel dasturida qanday yechiladi?
8. Chiziqli dasturlash masalasi MathCad dasturida qanday yechiladi?
9. Bosh element qanday aniqlanadi?
10. Hal qiluvchi satr va ustun qanday aniqlanadi?
11. To‘rtburchak qoidasi – qanday qoida?
12. Tayanch va optimal yechimlar qanday aniqlanadi?
13. Ikkilanganlik masalasi - qanday masala?
14. To‘g‘ri masala - qanday masala?
15. Transport masalasini ta’riflab bernig.
16. Potensiallar usuli haqida gapirib bering.
17. Shimoli-g‘arb usulining ma’nosi nimadan iborat?
18. Chiziqsiz dasturlash masalasi haqida gapirib bering.
19. Gradient usuli algoritmini keltiring.

XI-BOB. BA’ZI BIR MUXANDISLIK MASALALARINI MATEMATIK MODELLASHTIRISh

Ma’lumki, injenerlik masalalarining qator ob’ektlari xuddi sterjen yoki plastinka ko‘rinishda matematik modellashtiriladi. Tashqi kuch ta’sirida bo‘lgan sterjen va plastinkaning egilishi hamda tebranishini aniqlash amaliyotda muhim ahamiyatga ega. Markaziy simmetriya o‘qi bo‘yicha ma’lum kuch bilan siqilgan sterjen va plastinkaning turg‘unligi masalasida kritik vaqt va unga mos keluvchi kritik kuchni aniqlash ob’ektlarni tekshirishda asosiy faktor(omil)lar bo‘lib hisoblanadi. Ushbu bobda shu kabi injenerlik masalalarining matematik modellari tuzilib, ularni yechish usullari keltirilgan.

11.1. Elastik to‘sin egilishi masalasi

Uzunligi L ga teng, uchlari ixtiyoriy holda mahkamlangan, o‘zgaruvchan kesimli elastik to‘sin(balka)ning egilishi haqidagi masalani qaraylik (11.1.1-rasm). To‘singa $q(x)$ kuch ta’sir etayotgan bo‘lsin. U holda to‘sin deformatsiyalanib uning kesimlarida kuchlanishlar hosil bo‘ladi.



11.1.1 - rasm

Agar kuchlanishni σ va deformatsiyani ε deb belgilasak, ular orasidagi bog‘lanish Guk qonuniga asosan

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (11.1.1)$$

bo‘ladi. Bu erda E elastiklik moduli.

To‘sinning ixtiyoriy no‘qtasidagi egilishini $u(x)$ deb olsak, u deformatsiya bilan quyidagicha bog‘langan:

$$\varepsilon = -z\frac{d^2u}{dx^2} \tag{11.1.2}$$

(11.1.1) va (11.1.2) ni to‘sinning muvozanat tenglamasi

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0, \quad M = \iint\limits_F z\sigma dF,$$

ga qo‘yib,

$$E\frac{d^2}{dx^2}\left[J(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right] = q \tag{11.1.3}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda $J = J(x)$ – inersiya momenti, F - to‘sin ko‘ndalang kesim yuzasi, M - kuch momenti, z - to‘sin sirtidan uning o‘q kesimigacha bo‘lgan masofa.

To‘sinning uchlari ixtiyoriy ko‘rinishda mahkamlanganligi uchun $x = 0$ va $x = L$ da chegaraviy shartlarni

$$\begin{cases} G^{(0)}V^{/}(0) + D^{(0)}V(0) = T^{(0)} \\ G^{(L)}V^{/}(L) + D^{(L)}V(L) = T^{(L)} \end{cases} \tag{11.1.4}$$

ko‘rinishda berishimiz mumkin. Bu erda

$$V(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ M(x) \end{bmatrix}; \quad M(x) = J(x)\frac{d^2u}{dx^2};$$

$G^{(0)};\ D^{(0)};\ G^{(L)};\ D^{(L)}$ - kvadrat matrisalar va $T^{(0)};\ T^{(L)}$ - ikki o‘lchovli vektorlar bo‘lib, ularni tanlash orqali, ixtiyoriy chegaraviy shartlarni hosil qilishimiz mumkin.

(11.1.3) va (11.1.4) birgalikda o‘zgaruvchan kesimli to‘sinning egilishi masalasining matematik modeli bo‘ladi.

(11.1.3) va (11.1.4) da $\bar{u} = \frac{u}{u_0}$, $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\overline{J(x)} = \frac{J(x)}{J_0}$, $\bar{q} = \frac{L^4}{Eu_0J_0}q$ almashtirishlarni bajarib (va qulaylik uchun oldingi belgilashlarni saqlab qolib)

$$V^{//}(x) + R(x)V(x) = S(x) \tag{11.1.5}$$

tenglamani hosil qilamiz. (11.1.4) chegaraviy shart esa $x=0$ va $x=1$ da quyidagi

$$\begin{cases} G^{(0)}V'(0)+D^{(0)}V(0)=T^{(0)} \\ G^{(1)}V'(1)+D^{(1)}V(1)=T^{(1)} \end{cases} \qquad (11.1.6)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu yerda

$$R(x)=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{J(x)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad S(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix}.$$

(11.1.5) tenglamaning (11.1.6) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini differensial progonka usuli yordamida aniqlaymiz. Bu usulga ko‘ra yechimni

$$\alpha(x)V'(x)+\beta(x)V(x)=\gamma(x), \qquad (11.1.7)$$

ko‘rinishda qidiramiz. Bu yerda $\alpha(x)$; $\beta(x)$; $\gamma(x)$ –lar hozircha noma’lum koeffisient. Bu koeffisientlar

$$\begin{cases} \alpha'(x)+\beta(x)=0 \\ \beta'(x)-\alpha(x)\cdot R(x)=0 \\ \gamma'(x)=\alpha(x)\cdot S(x) \end{cases}$$

sistemani quyidagi

$$\begin{cases} \alpha(0)=G^{(0)} \\ \beta(0)=D^{(0)} \\ \gamma(0)=T^{(0)} \end{cases}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi echimi bo‘ladi. Sistemani yechib, $\alpha(1)$; $\beta(1)$; $\gamma(1)$ larni aniqlaymiz. Bu amallar ketma-ketligi, odatda to‘g‘ri progonka usuli deb ataladi.

(11.1.7) va (11.1.6) ning ikkinchi tenglamasida $x=1$ deb olib

$$\alpha(1)V'(1)+\beta(1)V(1)=\gamma(1),$$

$$G^{(1)}V'(1)+D^{(1)}V(1)=T^{(1)}$$

tengliklarni hosil qilamiz va ularni $V(1)$ va $V'(1)$ larga nisbatan yechib,

$$\begin{cases} V(1)=\left[G^{(1)}\beta(1)-D^{(1)}\alpha(1)\right]^{-1}\cdot\left[G^{(1)}\gamma(1)-\alpha(1)T^{(1)}\right] \\ V'(1)=-\left[G^{(1)}\beta(1)-D^{(1)}\alpha(1)\right]^{-1}\cdot\left[D^{(1)}\gamma(1)-\beta(1)T^{(1)}\right] \end{cases} \qquad (11.1.8)$$

ga ega bo‘lamiz.

(11.1.5) tenglamalar sistemasini (11.1.8) shartlarni qanoatlantiruvchi

(Koshi masalasi) yechimini aniqlaymiz. Bu qo‘yilgan masalaning yechimi bo‘ladi. Keyingi bajarilgan amallar ketma-ketligi teskari progonka usuli deb ataladi.

AVS Pascal dasturlash tilida, yuqorida keltirilgan algoritm asosida to‘sin egilishini aniqlash uchun, dasturiy ta’minot yaratilgan.

11.2. Elastik to‘sin tebranishi masalasi

Uzunligi L ga teng, uchlari sharnirli mahkamlangan, o‘zgaruvchi kesimli to‘singa $q = q(t)$ kuch ta’sir etayotgan bo‘lsin (11.1.1-rasm). To‘sinning tebranish masalasini qarab chiqamiz. To‘sinning tebranish funksiyasini $W(x,t)$ deb belgilaylik. U holda kuchlanish va deformatsiya orasidagi bog‘lanish

$$\sigma = E\varepsilon \tag{11.2.1}$$

ko‘rinishda, $W(x,t)$ va ε deformatsiya orasidagi bog‘lanish esa quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\varepsilon = -z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{11.2.2}$$

To‘sinning tebranish masalasida inersion kuch hosil bo‘lib, harakat tenglamasi Dalamber prinsipiga ko‘ra quyidagi munosabat yordamida ifodalanadi

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q = m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{11.2.3}$$

Bu yerda t - vaqt; m- to‘sin massasi; $q = q(t)$ - to‘singa ta’sir etayotgan kuch; $M = \iint\limits_F z\sigma dF$ - inersiya momenti.

(11.2.1), (11.2.2) va (11.2.3) yordamida to‘sinning tebranishini ifodalovchi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] + m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q(t) \tag{11.2.4}$$

xususiy hosilali differensial tenglamani hosil qilamiz.

(11.2.4) tenglama $x = 0$ va $x = L$ larda quyidagi chegaraviy

$$W = 0; \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \tag{11.2.5}$$

va $t = 0$ da boshlang‘ich

$$W = \varphi(x), \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = \psi(x) \tag{11.2.6}$$

shartlar bilan birgalikda, to‘sinning tebranishi haqidagi masalaning matematik modelini tashkil etadi.

Xususiy holda $F = const$ bo‘lsa, u holda

$$EJ\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q(t)$$

tenglamani olamiz.

(11.2.4)–(11.2.6) da quyidagi $\overline{W} = \frac{W}{W_0}$, $\bar{x} = \frac{x}{l}$, $\overline{J(x)} = \frac{J(x)}{J_0}$, $\overline{m} = \frac{m}{m_0}$, $\bar{t} = \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0 l^4}} \cdot t$, $\bar{q} = \frac{l^4}{EW_0 J_0} q$ almashtirishlarni bajarib (va oldingi belgilashlarni saqlab qolib) quyidagi

$$m(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[J(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] = q(t) \tag{11.2.7}$$

xususiy xosilali differensial tenglamani hosil qilamiz. (11.2.5) va (11.2.6) shartlar esa $x = 0$ va $x = 1$ da

$$W(x,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{11.2.8}$$

va $t = 0$ da

$$W(x,t) = \varphi(x), \quad \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \psi(x) \tag{11.2.9}$$

ko‘rinishni oladi.

Bubnov-Galyorkin usuliga ko‘ra (11.2.7) tenglamaning (11.2.8) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{N} y_n(t)\sin n\pi x \qquad (11.2.10)$$

ko‘rinishda qidiramiz. (11.2.10) ni (11.2.7) ga qo‘yib

$$\sum_{n=1} y_n''(t)\sin n\pi x+\sum_{n=1} y_n(t)[J(x)(n\pi)^4 \sin n\pi x-2J'(x)(n\pi)^3 \cos n\pi x-$$

$$-J''(x)(n\pi)^2 \sin n\pi x]\frac{1}{m(x)}=\frac{q(t)}{m(x)}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikni ikkala tomonini $\sin m\pi x$ ga ko‘paytirib, uni x bo‘yicha 0 dan 1 gacha oraliqda integrallaymiz va natijada

$$y_m''(t)+\sum_{n=1}^{N} a_{mn} y_n(t)=q_m(t), \quad m=1,2,\ldots,N \qquad (11.2.11)$$

ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglamalar sitemasiga ega bo‘lamiz. Bu yerda

$$a_{mn}=2\int_0^1 [J(x)(n\pi)^4 \sin n\pi x-2J'(x)(n\pi)^3 \cos n\pi x-$$

$$-J''(x)(n\pi)^2 \sin n\pi x]\frac{\sin m\pi x}{m(x)}dx,$$

$$q_m(t)=q(t)\int_0^1 \frac{\sin m\pi x}{m(x)}dx.$$

(11.2.11) tenglamalar sistemasi uchun boshlang‘ich shartlar quyidagi

$$y_m(0)=y_{mo}, \quad y_m'(0)=y_{m1} \qquad (11.2.12)$$

ko‘rinishni oladi. Bu erda

$$y_{m0}=2\int_0^1 \varphi(x)\sin m\pi x dx, \quad y_{m1}=2\int_0^1 \psi(x)\sin m\pi x dx$$

(11.2.11), (11.2.12) Koshi masalasini Runge-Kutta usulida yechamiz. Topilgan $y_n(t)$ ni (11.2.10) ga olib borib qo‘yamiz va to‘sinning tebranish $W(x,t)$ funksiyasini aniqlaymiz.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Gornostaeva T.N., Gornostaev O.M. Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie. Uchebnoe posobie – M.: Mir nauki, 2019, 123 s .
2. Maksimova, N.N. Matematicheskoe modelirovanie. Uchebno-metodicheskoe posobie. – Blagoveщensk: Izd-vo AmGU, 2019, 88 s.
3. Faysman A. Professionalnoe programmirovanie na Turbo Paskale. Toshkent, Informeks Korporeyshn, 1992. s.271.
4. Petrov A.V. Vыchislitelnaya texnika i programmirovanie. Moskva. Vыsshaya shkola. 1991. s. 479.
5. Eshmatov X., Verlan A.F., Lukyanenko S.A. Chislennыe metodы v modelirovanii. Tashkent, «Uzbekistan», 2010.
6. Kalitkin N.N., Chislennыe metodы. – M., Nauka, 1978. - 512 s.
7. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislennыe metodы. - M., Nauka, 1989. – 432 s.
8. Tixonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1977. – 736 s.
9. Koshlyakov V.S. i dr. Uravneniya v chastnыx proizvodnыx matematicheskoy fiziki. M.: Vыsshaya shkola, 1970.
10. A.E. Mudrov. Chislennыe metodы dlya PEVM na yazыkax Beysik, Fortran i Paskal. - Tomsk, 1992.
11. V.E. Alekseev i dr. Vыchislitelnaya texnika i programmirovanie. - Moskva, 1991.

MUNDARIJA

XURRAMOV ANVAR

KOMOLOV EShMUROD

MATEMATIK VA KOMPYuTERLI MODELLAShTIRISh

(DARSLIK)

Muharrir:

Musahhih:

Bosishga ruxsat etildi_________ qog‘oz o‘lchami 60x84 ____

Hajmi _____ bosma taboq ______ nusha buyurtma №