П. С. МОДЕНОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

П. С. МОДЕНОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования РСФСР в качестве учебника для заочных и вечерних отделений университетов и педагогических вузов

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1969

УДК 516

Настоящая книга предназначена в качестве учебника по аналитической геометрии для студентов механико-математических, физических и физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов. Наличие в книге задач с решениями и задач для самостоятельного решения (с ответами) позволяет использовать заочниками эту часть книги как материал семинарских занятий. Помимо традиционного материала по аналитической геометрии в книге дано понятие о линейном пространстве и линейном многообразии. Линейное отображение определяется как коллинеация, при которой сохраняется простое отношение. Изложено понятие собственных векторов. Дана метрическая теория инвариантов в аффинной системе. Рассмотрены произвольные плоские сечения поверхности второго порядка. Проективные координаты и теоремы Дезарга, Паскаля и Брианшона даны в дополнении; в основном тексте — только однородные координаты.

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

$\frac{2-2-3}{\text{БЗ } 79-1969-8}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

В главе I вводится понятие направленного отрезка, а затем известное соотношение между тремя точками, лежащими на прямой (теорема Шаля). Обобщением понятия направленного отрезка (упорядоченная пара точек) является понятие ориентированного треугольника (упорядоченная тройка точек) и ориентированного тетраэдра (упорядоченная четверка точек). Имеют место соотношения, аналогичные теореме Шаля. Включение этого материала в книгу позволяет дать общие выводы формул, относящихся к простейшим задачам по аналитической геометрии (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении, площадь треугольника, объем тетраэдра), а также получить необходимое и достаточное условие принадлежности трех точек одной прямой и принадлежности четырех точек одной плоскости. Простейшие вопросы по аналитической геометрии изложены последовательно на прямой, на плоскости и в пространстве. Это обстоятельство, а также введение понятия ориентированной плоскости и ориентированного пространства позволяет с самого начала изучения курса значительно расширить тематику задач на практических занятиях (главы I—II). Глава III посвящена понятию уравнений линии и поверхности (задачи 23—25, 29, 30 на стр. 87—88 лучше решать после прочтения глав IV—VI). В главе IV изложена векторная алгебра.

Линейные образы на плоскости и в пространстве изложены в главе V (прямая линия на плоскости) и в главе VI (плоскость и прямая линия в пространстве).

В главе VII содержится материал, относящийся к преобразованию декартовой системы координат (сюда включены углы Эйлера).

В главе VIII дан традиционный материал по каноническим уравнениям линий второго порядка, а в главе IX изложены канонические уравнения поверхностей второго порядка. В главе X даны сведения о комплексной плоскости и комплексном пространстве. В главе XI изложена общая теория линий второго порядка, а в главе XII—общая теория поверхностей второго порядка.

В главу XIII выделены понятия отображения, преобразования и группы преобразований.

Линейное отображение (и преобразование) определяется как отображение, при котором сохраняется принадлежность трех точек одной прямой и сохраняется простое отношение (глава XIV); этим удается охватить вырожденные линейные преобразования. Аффинное преобразование определяется как линейное взаимно однозначное. В той же главе XIV даны сведения о собственных векторах линейного преобразования и доказана основная теорема о представлении аффинного преобразования в виде произведения ортогонального на самосопряженное. Все изложение ведется одновременно для плоскости и пространства.

В главе XV изложены элементы проективной геометрии.

В книгу включены четыре дополнения.

В дополнении I вводится понятие ориентации плоскости и пространства рассмотрением цепей из ориентированных треугольников и тетраэдров; все относящиеся сюда определения используют лишь аксиомы соединения и порядка (и потому, например, могут быть без всяких изменений отнесены к плоскости и пространству Лобачевского).

В дополнении II излагается метрическая теория инвариантов многочлена второй степени от двух и трех переменных по отношению к преобразованию одной общей декартовой системы координат в другую. Даются понятия ковариантных и контравариантных координат вектора и точки; излагается понятие метрического тензора.

В III дополнении исследуются типы и расположение в пространстве произвольных плоских сечений поверхности второго порядка, заданной общим уравнением, в частности круговые сечения и омбилические точки.

В дополнении IV излагается понятие проективных координат на проективной плоскости и в проективном пространстве и приводятся доказательства теорем Дезарга, Паскаля и Брианшона. В основном тексте я ограничился рассмотрением однородных координат.

Выражаю глубокую благодарность академику П. С. Александрову за просмотр рукописи, обсуждение ее на кафедре высшей геометрии и топологии, за все сделанные замечания и советы. Много ценных замечаний я получил от профессора Ю. М. Смирнова. Особую признательность и благодарность я приношу доценту кафедры высшей геометрии и топологии МГУ А. С. Пархоменко, который провел очень большую работу над рукописью при ее редактировании и дал много ценных советов.

ГЛАВА I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПРЯМОЙ

§ 1. Направленные отрезки

Направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$ называется упорядоченная пара точек A и B. Первая точка A называется началом направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, а вторая точка B — его концом (рис. 1).

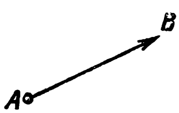


Рис. 1

В обозначении направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ порядок точек определяется порядком их записи: A — первая точка, B — вторая. Если точки A и B различны, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется ненулевым (или невырожденным), а если точки A и B совпадают, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется нулевым (или вырожденным).

§ 2. Ось. Координата направленного отрезка

*Осью называется прямая, на которой фиксировано положительное направление и выбран масштабный отрезок**

Координатой ненулевого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, лежащего на оси l, называется число $\overline{AB}$, модуль которого равен длине AB направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, измеренной масштабным отрезком оси l; оно положительно, если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ и ось l имеют одинаковое направление, и отрицательно в противном случае. Координата нулевого направленного отрезка по определению равна нулю.

---

* Часто осью называют прямую, на которой фиксировано положительное направление. В аналитической геометрии понятие оси употребляется чаще всего в том смысле, как только что указано в основном тексте.

§ 3. Ось координат. Координата точки

Осью координат называется ось, на которой фиксирована точка O, называемая началом координат.

Координатой x точки M, лежащей на оси координат, называется координата направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$:

$$x = \overline{OM}.$$

Точку M, имеющую координату x, обозначают так: $M(x)$.

Точка $E(1)$ называется единичной точкой. Отрезок, концами которого являются начало координат и единичная точка, равен масштабному отрезку (рис. 2).

Рис. 2

Ось координат можно задать, фиксируя на прямой две различные точки O и E (начало координат и единичную точку), так как при этом на прямой устанавливается положительное направление (от O к E), фиксируется масштабный отрезок OE и начало координат O.

Направленный отрезок $\overrightarrow{OE}$, началом которого является начало координат, а концом — единичная точка E оси координат, называется масштабным (или единичным) и обозначается буквой $\boldsymbol{e}$:

$$\overrightarrow{OE} = \boldsymbol{e}.$$

Координата масштабного направленного отрезка $\overrightarrow{OE}$ равна 1. Направление масштабного отрезка $\overrightarrow{OE}$ совпадает с положительным направлением оси координат.

При помощи системы координат на прямой осуществляется взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел, т. е.

1) каждой точке оси координат ставится в соответствие одно и только одно действительное число x (координата этой точки) и

2) каждое действительное число x является координатой одной и только одной точки этой прямой.

Для построения этой точки в случае $x \neq 0$ надо отложить от начала координат отрезок OM, длина которого равна $|x|$; при этом отрезок OM откладывается в положительном направлении оси, если $x > 0$, и в отрицательном, если $x < 0$. Конец M отложенного отрезка и будет точкой, координата которой равна x.

§ 4. Теорема Шаля. Координата направленного отрезка, заданного двумя точками декартовой оси координат. Расстояние между двумя точками, лежащими на оси координат

Теорема 1 (Шаля). *Если A, B, C — три любые точки оси, то*

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Доказательство. Предположим, что точки A, B, C попарно различны. Если точка B лежит между точками A и C, то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB и BC:

$$|\overline{AB}|+|\overline{BC}|=|\overline{AC}|;$$

но так как в рассматриваемом случае направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют одинаковое направление, то числа $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ имеют один и тот же знак, а потому

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Если точка C лежит между A и B, то

$$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}, \quad \overline{AB}-\overline{CB}=\overline{AC},$$

$$\overline{CB}=-\overline{BC}, \quad \overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Если точка A лежит между точками B и C, то $\overline{BA}+\overline{AC}=\overline{BC}$, $-\overline{BA}+\overline{BC}=\overline{AC}$, $\overline{BA}=-\overline{AB}$, $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

Если точки A и B совпадают, то $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{BC}=\overline{AC}$.

Если точки B и C совпадают, то $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AC}$. Наконец, если точки A и C совпадают, то

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{BA}=0=\overline{AC}.$$

Теорема 2. *Координата AB направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, заданного двумя точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ оси координат, вычисляется по формуле*

$$\overline{AB}=x_2-x_1.$$

Доказательство. На основании теоремы Шаля $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$, откуда

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=x_2-x_1.$$

Теорема 3. *Расстояние d между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ оси координат вычисляется по формуле*

$$d=|x_2-x_1|.$$

Эта теорема является следствием предыдущей.

§ 5. Деление направленного отрезка в данном отношении

Пусть на одной и той же прямой лежат два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$, *причем* $\overrightarrow{CD}$ *невырожденный направленный отрезок. Тогда отношением* $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ *в случае, если направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$ *также невырожденный, называется число* λ, *абсолютная величина которого равна отношению* $\dfrac{AB}{CD}$ *и которое положительно, если* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *имеют одинаковое направление, и отрицательно в противном случае.* Если отрезок $\overrightarrow{AB}$ вырожденный, а отрезок $\overrightarrow{CD}$ невырожденный, то будем считать, что $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=0$. Если отрезок $\overrightarrow{CD}$ вырожденный, то отношение $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ не определяется. Если отношение $\overrightarrow{AB}$ к $\overrightarrow{CD}$ равно λ, то пишут

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=\lambda.$$

Пусть на некоторой прямой задан невырожденный направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ и пусть C — какая-нибудь точка этой прямой, отличная от точки B.

Отношением, в котором точка C делит невырожденный направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, *называется число* λ, *определяемое соотношением**

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}.$$

Из этого определения следует, что $\lambda>0$, если точка C лежит между точками A и B, и $\lambda<0$ в противном случае. При этом $|\lambda|<1$, если точка A лежит между точками B и C, и $|\lambda|>1$, если точка B лежит между точками A и C. Заметим, что отношение, в котором точка C делит невырожденный направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, никогда не равно -1.

Теорема 1. *Если на оси координат заданы две различные точки* $A(x_1)$ *и* $B(x_2)$ *и если точка* $C(x)$ *делит направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$

---

* Отношение $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$ называют также простым отношением точек A, B, C и обозначают (ABC).

в отношении λ, *то*

$$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x} \quad \text{и} \quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Доказательство. Из данного определения отношения λ, в котором точка C делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, а также из определения координаты направленного отрезка, лежащего на оси, следует

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}},$$

значит, на основании теоремы 2, § 4

$$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x},$$

откуда

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Следствие. Координата середины отрезка равна полусумме координат его концов:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

В самом деле, для середины отрезка $\lambda=1$.

Теорема 2. *Каково бы ни было число* $\lambda\neq-1$, *существует и притом только одна точка* C, *которая делит невырожденный направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$ *в отношении* λ.

Доказательство. Введем на прямой AB систему координат. Предполагая, что некоторая точка $C(x)$ делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ, на основании предыдущей теоремы найдем

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

где x_1 и x_2 — координаты точек A и B. Этим доказана единственность точки C, делящей направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в данном отношении λ, т. е. доказано, что если такая точка существует, то только одна.

Далее, точка C с координатой

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ, так как из написанного соотношения следует

$$x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2, \quad x-x_1=\lambda(x_2-x), \quad \overline{AC}=\lambda\overline{CB}.$$

Точки C и B различны, так как разность их координат не равна нулю; в самом деле,

$$x - x_2 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{1+\lambda} \neq 0.$$

Поэтому $\overline{CB} \neq 0$ и из последнего равенства следует, что

$$\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}.$$

§ 6. Преобразование системы координат на прямой

Пусть на прямой введены две системы координат с одним и тем же положительным направлением оси и одним и тем же масштабным отрезком. Пусть O — начало координат в одной из этих систем (эту систему координат будем называть старой), а O' — начало координат в другой (эту систему координат будем называть новой). Пусть M — произвольная точка оси, x — координата точки M в старой системе (эту координату будем называть старой), x' — координата точки M в новой системе (эту координату будем называть новой); наконец, пусть a — координата нового начала O' в старой системе. Тогда имеет место формула

$$x = x' + a,$$

т. е. *старая координата точки, лежащей на оси координат, равна новой координате этой точки, сложенной с координатой нового начала в старой системе.*

Доказательство. На основании теоремы Шаля (§ 4, теорема 1)

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M},$$

т. е.

$$x = a + x'.$$

Рассмотренное в этом параграфе преобразование системы координат называется переносом системы координат. При переносе системы координат координата направленного отрезка не меняется. Это сразу следует из теоремы 2 § 4.

§ 7. Векторы

В настоящем параграфе дается определение вектора в трехмерном евклидовом пространстве (понятия вектора на плоскости и вектора на прямой являются частными случаями этого определения). Предварительно введем ряд дополнительных определений.

Два невырожденных направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются коллинеарными, если прямые AB и CD или параллельны, или совпадают. Вырожденный направленный отрезок считается коллинеарным любому направленному отрезку.

Будем говорить, что два невырожденных направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащих на параллельных прямых, имеют одинаковое направление, если точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC. Если же точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC, то направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют противоположное направление (рис. 3). В случае, если невырожденные направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на одной прямой a, они имеют одинаковое направление, если на любой прямой b, параллельной a, найдется невырожденный направленный отрезок $\overrightarrow{PQ}$, имеющий одинаковое направление с каждым из направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Если же любой невырожденный отрезок $\overrightarrow{PQ}$ (лежащий на прямой b, параллельной прямой a) имеет одинаковое направление с одним из отрезков $\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{CD}$ и противоположное с другим, то направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют противоположное направление. Наконец, условимся считать, что вырожденный направленный отрезок имеет одинаковое направление с любым направленным отрезком.

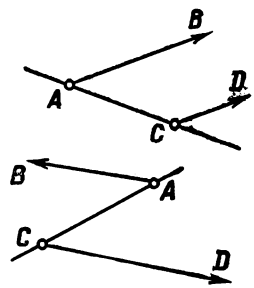


Рис. 3

Если направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, то будем писать $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$; если при этом они имеют одинаковое направление, то $\overrightarrow{AB} \downarrow\downarrow \overrightarrow{CD}$, а если противоположное, то $\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ *называются равными* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если выполнены следующие условия:

1) *равны длины отрезков AB и CD;*

2) *направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны;*

3) *направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют одинаковое направление.*

*Свободным вектором **a** называется класс всех равных между собой направленных отрезков.* Нулевым вектором называется класс всех вырожденных направленных отрезков.

Свободный вектор $\boldsymbol{a}$ часто обозначают и изображают любым из направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ того класса направленных отрезков, которым является вектор $\boldsymbol{a}$.

Отложить свободный вектор $\boldsymbol{a}$ от точки A — значит построить направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ входящий в класс направленных отрезков, образующих вектор $\boldsymbol{a}$.

В дальнейшем под словом «вектор» мы будем понимать «свободный вектор».

Рассмотрим два произвольных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Пусть $\overrightarrow{AB}$ — направленный отрезок из класса направленных отрезков, образующих вектор $\boldsymbol{a}$, а $\overrightarrow{CD}$ — направленный отрезок из класса направленных отрезков, образующих вектор $\boldsymbol{b}$.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются коллинеарными, если коллинеарны направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Если при этом направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют одинаковое направление, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют одинаковое направление, а если направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют противоположное направление, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют противоположное направление. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то будем писать $\boldsymbol{a} \| \boldsymbol{b}$; если при этом они имеют одинаковое направление, то будем писать $\boldsymbol{a} \downarrow\downarrow \boldsymbol{b}$, а если противоположное, то $\boldsymbol{a} \downarrow\uparrow \boldsymbol{b}$. Если направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, то будем говорить, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны, и писать $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Длиной или модулем вектора $\boldsymbol{a}$ называется длина* отрезка AB. Длина вектора обозначается так: $|AB|$, AB, $|\boldsymbol{a}|$, a.

Если определения, относящиеся к свободным векторам, формулируются при помощи направленных отрезков, то надо каждый раз устанавливать независимость формулировок от выбора направленных отрезков из тех классов, которыми являются рассматриваемые векторы. Эта независимость ясна для только что рассмотренных простейших случаев: определение длины вектора, коллинеарности и равенства двух векторов. В более сложных случаях (см. ниже определение координат вектора, определение суммы векторов и др.) полезно применять следующую теорему.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием равенства направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ является совпадение середины отрезка** AD с серединой отрезка BC.*

Доказательство необходимости. Дано $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Требуется доказать, что середина отрезка AD совпадает с серединой отрезка BC.

Пусть O — середина отрезка AD. Рассмотрим преобразование S симметрии относительно точки O. При этом преобразовании каждой

---

* Длину вырожденного отрезка считаем равной нулю.

** Если отрезок вырожденный, то серединой будем считать точку, с которой совпадают его концы.

точке M ставится в соответствие точка M', симметричная точке M относительно точки O, т. е. такая, что точка O является серединой отрезка MM'.

Каждый направленный отрезок $\overrightarrow{PQ}$ при преобразовании S переходит в направленный отрезок $\overrightarrow{P'Q'}$, такой, что $\overrightarrow{P'Q'}=\overrightarrow{QP}$ (рис. 4).

Пусть B'—точка, в которую при преобразовании S перейдет точка B. Так как точка A переходит в точку D, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ перейдет в направленный отрезок

$$\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$$

и, значит, точки B' и C совпадают, т. е. точка O является также и серединой отрезка BC.

Доказательство достаточности. Предположим, что середина отрезка AD совпадает с серединой отрезка BC и докажем, что

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}.$$

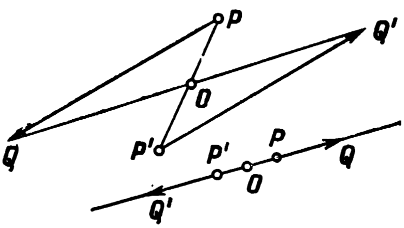


Рис. 4

Пусть O—середина отрезка AD; по условию точка O является и серединой отрезка BC. Значит, при преобразовании S симметрии относительно точки O точка A перейдет в D (рис. 5), а точка B в точку C, поэтому $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Следствие. Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Понятие вектора и векторное исчисление возникло в связи с рассмотрением в физике и механике таких понятий, как скорость, ускорение и пр. К понятию свободного вектора мы пришли из определения равенства направленных отрезков.

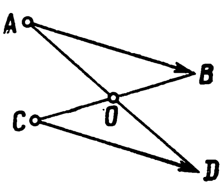


Рис. 5

Существуют и иные определения равенства двух направленных отрезков: будем говорить, что направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, если выполнены следующие условия:

1) длины отрезков AB и CD равны;

2) отрезки AB и CD принадлежат одной прямой;

3) направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют одинаковое направление.

Тогда класс всех равных между собой направленных отрезков называют **скользящим вектором**.

Понятие скользящего вектора и векторное исчисление скользящих векторов возникло в механике (статике) при изучении взаимодействия сил, приложенных к твердому телу; (силу «нельзя» переносить параллельно самой себе, но «можно» переносить вдоль линии ее действия).

ГЛАВА II

ПРОСТЕЙШИЕ ВОПРОСЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

I. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ И ВЕКТОРА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 8. Параллельное проектирование

В геометрии рассматриваются следующие три вида параллельного проектирования.

1. *Проекция точки M на прямую l параллельно прямой m.* Пусть на плоскости заданы две пересекающиеся в точке O прямые l и m.

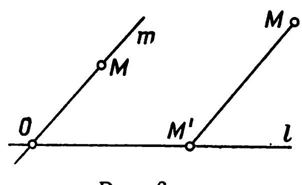


Рис. 6

Рис. 7

Если точка M не лежит на прямой m, то проекцией точки M на прямую l параллельно прямой m называется точка M' пересечения прямой l с прямой, проходящей через точку M параллельно прямой m. Если же точка M лежит на прямой m, то ее проекцией на прямую l параллельно прямой m называют точку O (рис. 6).

Если прямые l и m взаимно перпендикулярны, то рассмотренный вид проектирования оказывается ортогональным проектированием на прямую l.

Ортогональной проекцией M' точки M плоскости на прямую l, лежащую в этой плоскости, называется точка пересечения прямой l с прямой, проходящей через точку M перпендикулярно прямой l (рис. 7).

2. *Проекция точки M на плоскость π параллельно прямой l.* Пусть в пространстве задана плоскость π и пересекающая ее в точке O прямая l.

Если точка M не лежит на прямой l, то проекцией M' ее на плоскость π параллельно прямой l называется точка пересечения плоскости π с прямой, проходящей через точку M параллельно прямой l. Если же точка M лежит на прямой l, то ее проекцией на плоскость π параллельно прямой l называют точку O (рис. 8).

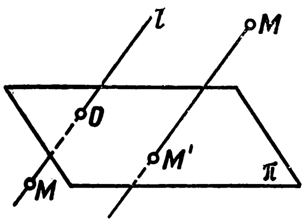


Рис. 8

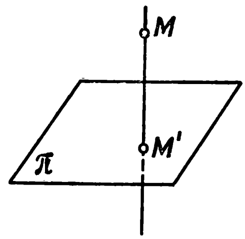


Рис. 9

Если прямая l перпендикулярна плоскости π, то рассматриваемый вид проектирования оказывается ортогональным.

Ортогональной проекцией M' точки M на плоскость π называется точка пересечения плоскости π с прямой, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости π (рис. 9).

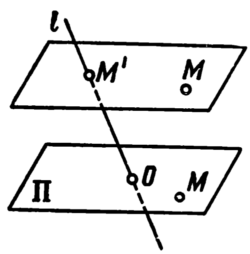


Рис. 10

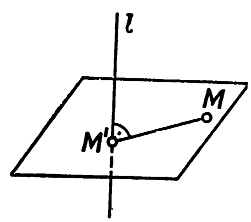


Рис. 11

3. **Проекция точки M на прямую l параллельно плоскости π.** Пусть в пространстве задана плоскость π и пересекающая ее в точке O прямая l.

Если точка M не лежит на плоскости π, то ее проекцией на прямую l параллельно плоскости π называется точка M' пересечения прямой l с плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости π. Если же точка M лежит на плоскости π, то ее проекцией на прямую l параллельно плоскости π называют точку O (рис. 10).

Если прямая l перпендикулярна плоскости π, то рассматриваемый вид проектирования оказывается ортогональным.

Ортогональной проекцией точки M на прямую l называется точка M' пересечения прямой l с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно прямой l (рис. 11).

Ортогональное проектирование точки M на прямую в пространстве можно определить и так:

ортогональной проекцией точки M на прямую l называется точка M' пересечения прямой l с прямой, проходящей через точку M и пересекающую прямую l под прямым углом (рис. 11).

§ 9. Общая декартова и декартова прямоугольная системы координат на плоскости

Общей декартовой (или аффинной) системой координат на плоскости называется упорядоченная совокупность двух пересекающихся осей координат с общим началом координат O на каждой из них (рис. 12).

Масштабные отрезки этих осей могут быть различны. Первая ось называется осью Ox, или осью абсцисс, вторая — осью Oy, или осью ординат.

Пусть M — произвольная точка плоскости. Пусть P — проекция точки M на ось Ox параллельно оси Oy, а x — координата точки P на оси Ox; Q — проекция точки M на ось Oy параллельно оси Ox, а y — координата точки Q на оси Oy. Числа x, y называются общими декартовыми (или аффинными) координатами точки M. Первая координата x называется абсциссой точки M, вторая координата y называется ординатой точки M. Точка M с координатами x, y обозначается $M(x, y)$. Абсцисса точки M равна нулю тогда и только тогда, когда точка M лежит на оси Oy; ордината y точки M равна нулю тогда и только тогда, когда точка M лежит на оси Ox. Для начала координат O (и только для этой точки) обе координаты x и y равны нулю. Точки $E_1(1, 0)$ и $E_2(0, 1)$ называются единичными точками осей координат; точка $E(1, 1)$ называется единичной точкой системы координат, параллелограмм OE_1EE_2 — масштабным параллелограммом.

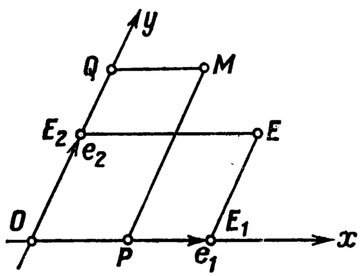


Рис. 12

Отрезки OE_1 и OE_2 являются масштабными отрезками соответственно осей Ox и Oy. Векторы

$$\overrightarrow{OE}_1 = \boldsymbol{e}_1 \text{ и } \overrightarrow{OE}_2 = \boldsymbol{e}_2$$

называются масштабными векторами соответственно осей Ox и Oy.

Общую декартову систему координат на плоскости можно задать упорядоченной парой пересекающихся прямых и единичной точкой E, не лежащей ни на одной из них.

В самом деле, пусть O — точка, в которой пересекаются эти прямые, E_1 — проекция точки E на первую из данных прямых параллельно второй, а E_2 — проекция точки E на вторую прямую параллельно первой. Тогда положительные направления прямых определяются направлениями векторов $\overrightarrow{OE}_1$ и $\overrightarrow{OE}_2$, отрезки OE_1

и OE_2 — масштабные отрезки соответственно для первой и второй осей координат.

При помощи общей декартовой системы координат на плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех упорядоченных пар действительных чисел, так как:

1) каждой точке M плоскости соответствует одна определенная упорядоченная пара действительных чисел x, y — координат этой точки;

2) каждая упорядоченная пара x, y действительных чисел ставится в соответствие одной и только одной точке M, для которой первое число x — абсцисса, а второе число y — ордината.

Для построения этой точки M в случае $x \neq 0$, $y \neq 0$ надо построить на оси Ox точку P с координатой x, а на оси Oy — точку Q с координатой y. Точка M является точкой пересечения прямых, проходящих через точки P и Q, параллельных соответственно осям Oy и Ox.

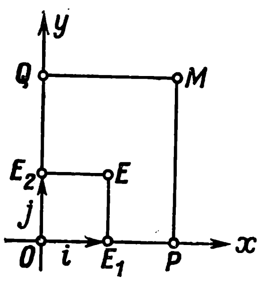


Рис. 13

Если $y=0$ или $x=0$, то дело сводится к построению точки на оси Ox или на оси Oy.

Декартовой прямоугольной системой координат на плоскости называется упорядоченная совокупность двух взаимно перпендикулярных осей координат с равными масштабными отрезками $OE_1=OE_2$ и с общим началом координат O на каждой оси (рис. 13).

Определение декартовых прямоугольных координат точки формулируется аналогично соответствующему определению общих декартовых координат точки: пусть P и Q — ортогональные проекции точки M соответственно на оси Ox и Oy, x — координата точки P на оси Ox, а y — координата точки Q на оси Oy. Числа x, y называются декартовыми прямоугольными координатами точки M.

Отметим, что часто масштабные векторы осей Ox и Oy в декартовой прямоугольной системе координат обозначают так:

$$\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{j}.$$

§ 10. Общая декартова и декартова прямоугольная системы координат в пространстве

***Общей декартовой**, или **аффинной**, **системой координат в пространстве** называется упорядоченная совокупность трех осей координат, не лежащих в одной плоскости и проходящих через одну* *точку O, являющуюся началом координат на каждой оси.* Масштабные отрезки осей координат, вообще говоря, различны (рис. 14). Точка O называется началом координат. Первая ось называется осью Ox, или осью абсцисс, вторая — осью Oy, или осью ординат, третья — осью Oz, или осью аппликат. Плоскость, проходящая через

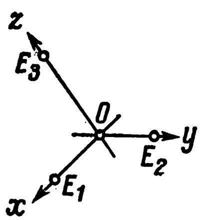


Рис. 14

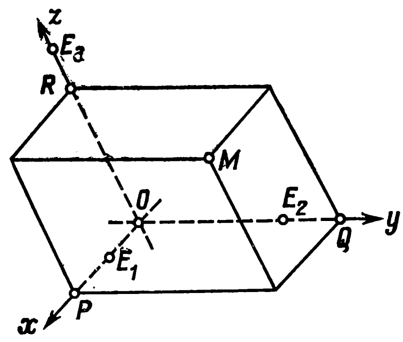


Рис. 15

две оси из трех Ox, Oy, Oz, называется координатной плоскостью; координатных плоскостей три; они обозначаются так:

$$yOz, \quad zOx \quad \text{и} \quad xOy.$$

Пусть M — произвольная точка пространства. Обозначим через P проекцию точки M на ось Ox параллельно плоскости yOz, а через x — координату точки P на оси Ox. Через Q обозначим проекцию точки M на ось Oy параллельно плоскости zOx, а через y — координату точки Q на оси Oy. Через R обозначим проекцию точки M на ось Oz параллельно плоскости xOy, а через z — координату точки R на оси Oz (рис. 15). Три числа x, y, z, взятые в этом порядке, называются общими декартовыми (или аффинными) координатами точки M. Первая координата x называется абсциссой точки M, вторая y — ординатой точки M, третья z — аппликатой точки M. Точка M с координатами x, y, z обозначается $M(x, y, z)$.

Абсцисса точки M равна нулю тогда и только тогда, когда точка M лежит на координатной плоскости yOz. Ордината точки M равна нулю тогда и только тогда, когда точка M лежит на координатной плоскости zOx. Аппликата точки M равна нулю тогда и только тогда, когда точка M лежит на координатной плоскости xOy.

Отсюда следует, что точка $M(x, y, z)$ лежит на оси Ox тогда и только тогда, когда $y = z = 0$; на оси Oy тогда и только тогда, когда $z = x = 0$ и на оси Oz тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Для начала координат (и только для этой точки) все три координаты равны нулю.

Точки $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$, $E_3(0, 0, 1)$ называются единичными точками осей координат. Точка $E(1, 1, 1)$ называется единичной точкой системы координат. Параллелепипед с вершиной в начале координат O и с ребрами OE_1, OE_2, OE_3 называется масштабным параллелепипедом. Отрезки OE_1, OE_2, OE_3 являются масштабными отрезками соответственно осей Ox, Oy, Oz. Векторы

$$\overrightarrow{OE}_1=\boldsymbol{e}_1,\quad \overrightarrow{OE}_2=\boldsymbol{e}_2,\quad \overrightarrow{OE}_3=\boldsymbol{e}_3$$

называются масштабными векторами соответственно осей Ox, Oy, Oz.

Общая декартова система координат в пространстве может быть задана упорядоченной тройкой прямых, не лежащих в одной плоскости, и проходящих через одну точку, и единичной точкой E (не лежащей в одной плоскости ни с какой парой из заданных прямых). В самом деле, проектируя единичную точку E на каждую из заданных прямых параллельно плоскости, содержащей две другие прямые, мы построим единичные точки E_1, E_2, E_3; этим самым будут определены и масштабные отрезки, и положительные направления на данных прямых.

При помощи общей декартовой системы координат устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек пространства и множеством всех упорядоченных троек действительных чисел. Здесь для построения точки M, имеющей координатами заданные числа x, y, z, поступают так: если $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, то строят на осях Ox, Oy, Oz точки P, Q, R, имеющие на этих осях координаты, соответственно равные x, y, z, и проводят через точки P, Q, R плоскости, соответственно параллельные координатным плоскостям yOz, zOx, xOy; точка M есть точка пересечения этих плоскостей. Если одна из координат x, y, z равна нулю, например $z=0$, то точка M лежит в координатной плоскости xOy и имеет в этой плоскости относительно общей декартовой системы координат, заданной осями Ox и Oy, координаты x и y; построение точки M для этого случая указано в § 9. Аналогично строится точка M, если $y=0$ (в этом случае она лежит в плоскости zOx) и если $x=0$ (в этом случае точка M лежит на плоскости yOz).

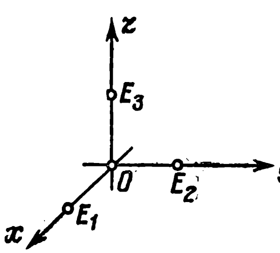


Рис. 16

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называется упорядоченная тройка попарно перпендикулярных осей координат с общим началом координат O на каждой из них и с одним и тем же масштабным отрезком для каждой оси (рис. 16).

Определение декартовых прямоугольных координат точки формулируется аналогично соответствующему определению общих декартовых координат точки, а именно: пусть P, Q, R — ортогональные проекции точки M на оси Ox, Oy, Oz (рис. 17); x — координата точки P на оси Ox, y — координата точки Q на оси Oy, а z — координата точки R на оси Oz. Три числа x, y, z называются декартовыми прямоугольными координатами точки M.

Отметим, что часто масштабные векторы осей Ox, Oy, Oz в декартовой прямоугольной системе координат обозначаются

$$\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{OE_3}=\boldsymbol{k}.$$

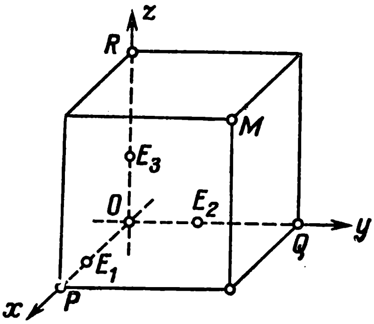


Рис. 17

§ 11. Координаты вектора на плоскости и в пространстве

Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *называется вектор* $\overrightarrow{A'B'}$, *где* A' *и* B' — *проекции точек* A *и* B.

Это определение обосновывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Проекции равных направленных отрезков равны.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Обозначим проекцию направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{A'B'}$, а проекцию направленного отрезка $\overrightarrow{CD}$ через $\overrightarrow{C'D'}$. Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то середина отрезка AD совпадает с серединой отрезка BC (теорема § 7, условие необходимости), а так как при параллельном проектировании середина отрезка проектируется в середину его проекции, то середина отрезка $A'D'$ совпадает с серединой отрезка $B'C'$, значит (теорема § 7, условие достаточности),

$$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}.$$

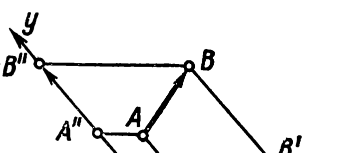


Рис. 18

Введем на плоскости общую декартову систему координат. Пусть $\overrightarrow{AB}$ — произвольный вектор, лежащий в этой плоскости, а $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{A''B''}$ — его проекции на оси Ox и Oy параллельно осям Oy и Ox (рис. 18).

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ в общей декартовой системе координат называются числа x, y, где x — координата вектора $\overrightarrow{A'B'}$ на оси Ox, а y — координата вектора $\overrightarrow{A''B''}$ на оси Oy.

* Имеется в виду любой из трех видов параллельного проектирования (§ 8).

Аналогично определяются координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в общей декартовой системе координат в пространстве: это упорядоченная тройка чисел x, y, z, где x — координата на оси Ox проекции $\overrightarrow{A'B'}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox параллельно плоскости yOz и т. д. (рис. 19).

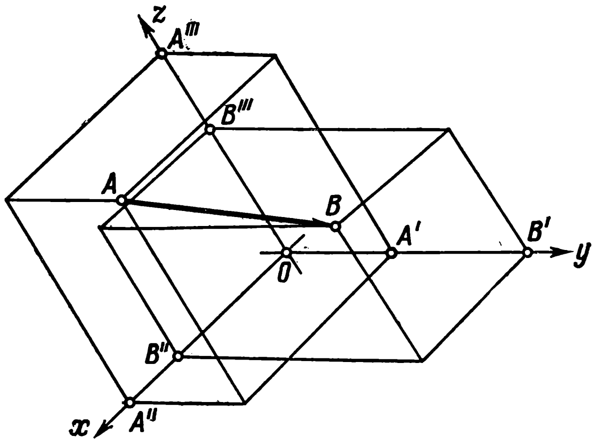


Рис. 19

Если вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты x и y (на плоскости) или x, y, z (в пространстве), то будем обозначать его $\{x, y\}$ (на плоскости) и $\{x, y, z\}$ (в пространстве) и писать $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$ и соответственно $\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}$.

Из теоремы 1 и определения координат точки следует, что координаты вектора $\boldsymbol{a}$ являются координатами его конца P, если вектор $\boldsymbol{a}$ отложен от начала координат:

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}.$$

Итак, вводя на плоскости общую декартову систему координат, можно каждому вектору $\boldsymbol{a}$ этой плоскости поставить в соответствие упорядоченную пару чисел x, y — координат этого вектора в выбранной системе координат. Обратно, каждая упорядоченная пара чисел x, y является координатами некоторого вектора $\boldsymbol{a}$. Для построения этого вектора достаточно построить точку $P(x, y)$ в выбранной системе координат. Класс всех направленных отрезков, равных направленному отрезку $\overrightarrow{OP}$, и является вектором $\boldsymbol{a}$ с координатами x, y.

Аналогичное положение имеет место и в пространстве.

Это соответствие между векторами плоскости и упорядоченными парами чисел (и соответствие между векторами пространства и упорядоченными тройками чисел) взаимно однозначно, так как два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

В самом деле, отложим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ от начала координат:

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{b}.$$

Соотношение $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ имеет место тогда и только тогда, когда точки P и Q совпадают, т. е. тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Теорема 2. *Если вектор $\overrightarrow{AB}$ задан своим началом $A(x_1, y_1)$ и концом $B(x_2, y_2)$ относительно общей декартовой системы координат, то его координаты x и y вычисляются по формулам*

$$x=x_2-x_1, \quad y=y_2-y_1.$$

Доказательство. Пусть $A'(x_1, 0)$ и $B'(x_2, 0)$ — проекции точек A и B на ось Ox параллельно оси Oy. Тогда вектор $\overrightarrow{A'B'}$ является проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox параллельно оси Oy; теперь на основании определения координаты вектора и теоремы 2 § 4 имеем

$$x=\overline{A'B'}=x_2-x_1.$$

Аналогично выводится формула $y=y_2-y_1$.

Теорема 3. *Если вектор $\overrightarrow{AB}$ задан своим началом $A(x_1, y_1, z_1)$ и концом $B(x_2, y_2, z_2)$ относительно общей декартовой системы координат в пространстве, то его координаты x, y, z вычисляются по формулам*

$$x=x_2-x_1, \quad y=y_2-y_1, \quad z=z_2-z_1.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы (только проектирование параллельно координатным осям заменяется проектированием параллельно координатным плоскостям).

Теорема 4. *Координата ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l равна длине AB этого вектора, умноженной на косинус угла φ между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l:*

$$\text{коорд. пр.}_l\, \overrightarrow{AB}=AB\cos\varphi.$$

Доказательство. Так как проекции равных направленных отрезков равны между собой, то можно считать, что вектор $\overrightarrow{AB}$ отложен от произвольной точки A оси l. Обозначим тогда через C проекцию точки B на ось l. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ ненулевой и угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l острый (рис. 20), то

$$\text{коорд. пр.}_l\, \overrightarrow{AB}=\overline{AC}=AC=AB\cos\varphi.$$

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ ненулевой и угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l тупой (рис. 21), то

$$\text{коорд. пр.}_l\ \overrightarrow{AB} = \overline{AC} = -AC = -AB\cos\psi = AB\cos\varphi.$$

Случаи $\varphi = 0$, $\varphi = 90°$, $\varphi = 180°$, а также случай, когда вектор $\overrightarrow{AB}$ нулевой (в этом случае φ — любое число) предоставляется рассмотреть читателю.

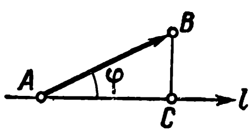


Рис. 20

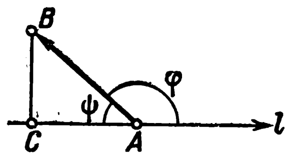


Рис. 21

Теорема 5. *Пусть l и m — две оси, образующие между собой угол φ. Пусть $\overrightarrow{AB}$ — вектор, коллинеарный оси m, а $\overline{AB}$ — его координата на этой оси. Тогда координата ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l равна координате $\overline{AB}$ этого вектора на оси m, умноженной на косинус угла φ между осями l и m:*

$$\text{коорд. пр.}_l\ \overrightarrow{AB} = \overline{AB}\cos\varphi.$$

Доказательство. Если направление вектора $\overrightarrow{AB}$ совпадает с направлением оси m, то $\overline{AB} = AB$, а, кроме того, угол φ между осями l и m равен углу между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l. Поэтому на основании предыдущей теоремы

$$\text{коорд. пр.}_l\ \overrightarrow{AB} = AB\cos\varphi = \overline{AB}\cos\varphi.$$

Если же направление вектора $\overrightarrow{AB}$ противоположно направлению оси m, то $\overline{AB} = -AB$, а, кроме того, угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l равен $\pi - \varphi$. Поэтому на основании предыдущей теоремы

$$\text{коорд. пр.}_l\ \overrightarrow{AB} = AB\cos(\pi - \varphi) = -AB\cos\varphi = \overline{AB}\cos\varphi.$$

Определение. *Назовем ломаной $\overrightarrow{A_1A_2A_3\ldots A_n}$ упорядоченную совокупность n точек пространства (порядок точек определяется порядком их записи).* Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ..., $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ *будем называть звеньями ломаной, а* $\overrightarrow{A_1A_n}$ *— замыкающей ломаной* $\overrightarrow{A_1A_2\ldots A_n}$.

Теорема 6. *Координата проекции замыкающей ломаной на ось равна сумме координат проекции ее звеньев на ту же ось.*

Доказательство. Пусть A_1', A_2', ..., A_n' — соответственно проекции точек A_1, A_2, ..., A_n на ось l. Тогда на основании теоремы Шаля имеем

$$\text{коорд. пр.}_l\ \overrightarrow{A_1A_2} + \text{коорд. пр.}_l\ \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots +$$
$$+ \text{коорд. пр.}_l\ \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1'A_2'} + \overline{A_2'A_3'} + \ldots + \overline{A_{n-1}'A_n'} =$$
$$= \overline{A_1'A_n'} = \text{коорд. пр.}_l\ \overrightarrow{A_1A_n}.$$

II. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ. ДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕННОГО ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА. ОБЪЕМ ТЕТРАЭДРА

§ 12. Расстояние между двумя точками на плоскости и в пространстве

Теорема 1. *Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, заданными относительно прямоугольной системы координат на плоскости, равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат этих точек, т. е.*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Доказательство. Предположим сначала, что $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Рассмотрим точку $M(x_2, y_1)$. Пусть $M_1'(x_1, 0)$ и $M'(x_2, 0)$ — проекции точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M(x_2, y_1)$ на ось Ox, а $M_2''(0, y_2)$ и $M''(0, y_1)$ — проекции точек $M_2(x_2, y_2)$ и $M(x_2, y_1)$ на ось Oy.

На основании теоремы 3 § 4 длины отрезков $M_1'M'$ и $M_2''M''$ равны

$$M_1'M' = |x_2 - x_1|, \quad M_2''M'' = |y_2 - y_1|.$$

Так как точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M(x_2, y_1)$ имеют одинаковые ординаты, то отрезок M_1M лежит на прямой, параллельной оси Ox, или на самой оси Ox. Поэтому длина отрезка $M_1'M'$ равна длине отрезка M_1M:

$$M_1M = |x_2 - x_1|.$$

Аналогично доказывается, что

$$MM_2 = |y_2 - y_1|.$$

Далее, $\triangle M_1MM_2$ — прямоугольный ($\angle M_1MM_2 = 90°$), так как отрезок M_1M лежит на прямой, параллельной оси Ox, или на самой оси Ox, а отрезок MM_2 лежит на прямой, параллельной оси Oy, или на самой оси Oy. Значит,

$$M_1M_2^2 = M_1M^2 + MM_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2,$$

или, обозначая M_1M_2 через d и замечая, что квадрат модуля числа равен квадрату самого этого числа, получим

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

откуда следует формула (1).

Если $y_1 = y_2$, то отрезок M_1M_2 лежит на прямой, параллельной оси Ox, или на самой оси Ox. В этом случае длина отрезка равна длине его проекции на ось Ox, т. е. $|x_2 - x_1|$. Но при $y_1 = y_2$ то же самое получится и из формулы (1):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Аналогично доказывается правильность формулы (1) в случае $x_1 = x_2$.

Теперь предположим, что направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ — ненулевой. Из предыдущих рассуждений ясно, что координаты проекций этого направленного отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$ на оси Ox и Oy соответственно равны $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ (теорема 2, § 11). С другой стороны, обозначая через α и β углы направленного отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$ с осями Ox и Oy, на основании теоремы 4 § 11 заключаем, что координаты проекций отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$ на оси Ox и Oy равны $d\cos\alpha$ и $d\cos\beta$, где d — длина отрезка M_1M_2.

Итак,

$$d\cos\alpha = x_2 - x_1, \quad d\cos\beta = y_2 - y_1,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}. \tag{2}$$

Углы α и β, которые образует направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ с осями Ox и Oy, называются его направляющими косинусами. Из формул (1) и (2) следует, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,$$

т. е. сумма квадратов направляющих косинусов равна единице. Из формул (1) и (2) как следствие находим расстояние r от точки $M(x, y)$ до начала координат (в декартовой прямоугольной системе координат) и направляющие косинусы направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}.$$

Теорема 2. *Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, заданными относительно декартовой прямоуголь-*

ной системы координат в пространстве, равно квадратному корню из суммы квадратов разностей соответствующих координат этих точек, т. е.

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{3}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$. Рассмотрим точку $M(x_2, y_2, z_1)$. Пусть $M_1'(x_1, y_1, 0)$ и $M'(x_2, y_2, 0)$ — проекции точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M(x_2, y_2, z_1)$ на плоскость xOy, а $M_2''(0, 0, z_2)$ и $M''(0, 0, z_1)$ — проекции точек $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M(x_2, y_2, z_1)$ на ось Oz. На основании теоремы 1 этого параграфа и теоремы 3 § 4 имеем

$$M_1'M'=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \quad M_2''M''=|z_2-z_1|. \tag{A}$$

Так как точки M_1 и M имеют одинаковую аппликату, то отрезок M_1M лежит в плоскости, параллельной плоскости xOy, или в самой этой плоскости, а значит $M_1'M'=M_1M$. Далее, так как точки M и M_2 имеют соответственно одинаковые абсциссы и ординаты, то отрезок MM_2 лежит или на прямой, параллельной оси Oz, или на самой оси Oz; следовательно, $MM_2=M''M_2''$. Из предыдущих рассуждений следует также, что $\triangle M_1MM_2$ прямоугольный ($\angle M_1MM_2=90°$), поэтому

$$M_1M_2^2=M_1M^2+MM_2^2.$$

Отсюда и из формул (A) следует, что

$$M_1M_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+|z_2-z_1|^2,$$

или

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

где d — длина отрезка M_1M_2. Из последней формулы следует формула (3).

Пусть теперь равны две какие-нибудь соответствующие координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, например $x_1=x_2$. Тогда отрезок M_1M_2 лежит в плоскости, параллельной плоскости yOz, или в самой этой плоскости, и его длина равна расстоянию между проекциями $P_1(0, y_1, z_1)$ и $P_2(0, y_2, z_2)$ этих точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ на плоскость yOz. Но расстояние между точками P_1 и P_2 по теореме 1 равно

$$P_1P_2=\sqrt{(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

и это число равно длине отрезка M_1M_2. С другой стороны, при $x_1=x_2$ правая часть формулы (3) обращается в тот же радикал:

$$\sqrt{(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Аналогично доказывается правильность формулы (3) в случае $y_1=y_2$ и в случае $z_1=z_2$. Итак, формула (3) доказана полностью.

Рассуждениями, аналогичными тем, которые мы проводили для плоскости, получим формулы

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d}, \quad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{d}, \quad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{d}, \tag{4}$$

где α, β, γ — углы ненулевого направленного отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$ соответственно с осями Ox, Oy, Oz; d — его длина; x_1, y_1, z_1 — координаты начала M_1; x_2, y_2, z_2 — координаты конца M_2. Из формул (4) и (3) находим

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

т. е. сумма квадратов направляющих косинусов направленного ненулевого отрезка равна единице. В частном случае из формул (3) и (4) находим расстояние r от точки $M(x, y, z)$ до начала координат и направляющие косинусы направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ (в предположении, что он ненулевой)

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}, \quad \cos\beta=\frac{y}{r}, \quad \cos\gamma=\frac{z}{r}.$$

§ 13. Деление направленного отрезка в данном отношении

Теорема 1. *Если относительно общей декартовой системы координат на плоскости заданы две различные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и точка $C(x, y)$ делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ, то λ равно тому из соотношений*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x} \text{ или } \frac{y-y_1}{y_2-y},$$

в котором знаменатель не равен нулю, и любому из них

$$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}, \tag{1}$$

если оба знаменателя x_2-x и y_2-y не равны нулю. Координаты x, y точки C выражаются через координаты точек A и B соотношениями

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

Доказательство. Спроектируем точки A, B и C на ось Ox параллельно оси Oy; проекциями будут соответственно точки $A'(x_1, 0)$, $B'(x_2, 0)$, $C'(x, 0)$.

Предположим, что точки A' и B' различны, т. е. $x_1 \neq x_2$. Так как при параллельном проектировании сохраняется порядок точек, лежащих на прямой, и отношение отрезков, лежащих на одной прямой, то точка C' делит направленный отрезок $\overrightarrow{A'B'}$ в том же отношении λ и, значит (§ 5, теорема 1):

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \qquad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Если точки A' и B' совпадают, то с ними совпадает и точка C', т. е. $x_1 = x_2 = x$. Формула

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

в этом случае не имеет места. Однако формула

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

верна, так как при $x_1 = x_2$ правая часть обращается в x_1.

Аналогично доказывается остальная часть теоремы.

Следствие. Координаты середины отрезка равны полусуммам координат его концов:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{3}$$

Теорема 2. *Если относительно общей декартовой системы координат в пространстве заданы две различные точки* $A(x_1, y_1, z_1)$ *и* $B(x_2, y_2, z_2)$ *и точка* $C(x, y, z)$ *делит направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$ *в отношении* λ, *то* λ *равно тому из отношений*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x}, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y}, \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z},$$

в котором знаменатель не равен нулю, и любому из них:

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z},$$

если все знаменатели не равны нулю. Координаты точки C *через координаты точек* A *и* B *выражаются соотношениями*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы. Надо только проектирование параллельно координатным осям заменить проектированием на оси координат параллельно координатным плоскостям.

Следствие. Координаты середины отрезка равны полусуммам координат его концов:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

§ 14. Ориентированный треугольник. Ориентированная плоскость. Площадь треугольника

Треугольником будем называть тройку точек. Если эти точки не принадлежат одной прямой, то треугольник будем называть невырожденным, а если они принадлежат одной прямой, то — вырожденным. Площадь вырожденного треугольника будем считать равной нулю.

Ориентированным треугольником $\overrightarrow{ABC}$ называется упорядоченная тройка точек A, B, C. В обозначении $\overrightarrow{ABC}$ ориентированного треугольника порядок точек определяется порядком их записи: A — первая точка, B — вторая, C — третья.

Если точки A, B, C не принадлежат одной прямой, то ориентированный треугольник $\overrightarrow{ABC}$ называется невырожденным, а если точки A, B, C принадлежат одной прямой, то — вырожденным.

Плоскость, на которой фиксирован невырожденный ориентированный треугольник E_1E_2O, называется ориентированной.

Рассмотрим произвольный невырожденный ориентированный треугольник $\overrightarrow{ABC}$, лежащий на плоскости, ориентированной треугольником $\overrightarrow{E_1E_2O}$.

Будем говорить, что треугольник $\overrightarrow{ABC}$ имеет положительную ориентацию, если треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{E_1E_2O}$ имеют одинаковую ориентацию; если же треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{E_1E_2O}$ имеют противоположную ориентацию, то треугольник $\overrightarrow{ABC}$ имеет отрицательную ориентацию.

Определение одинаковой и противоположной ориентаций двух невырожденных ориентированных треугольников, лежащих в одной плоскости, дано в дополнении I в конце книги. Можно пользоваться и следующим наглядным определением: если обходы контуров треугольников $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{E_1E_2O}$ в направлении от первых вершин ко вторым и третьим совершаются в одном направлении (оба против часовой стрелки или оба по часовой стрелке), то треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{E_1E_2O}$ имеют одинаковую ориентацию (рис. 22), а если указанные обходы совершаются в противоположных направлениях (один против часовой стрелки, а другой по часовой стрелке), то треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{E_1E_2O}$ имеют противоположную ориентацию (рис. 23).

Вырожденному ориентированному треугольнику $\overrightarrow{ABC}$ не приписывается никакой определенной ориентации (ни положительной, ни отрицательной). Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат; ориентируем ее треугольником $\overrightarrow{E_1E_2O}$, где O —

начало координат, а E_1 и E_2 — соответственно единичные точки осей Ox и Oy.

Площадью $\overline{ABC}$ *невырожденного ориентированного треугольника* $\overrightarrow{ABC}$, *лежащего в плоскости, ориентированной треугольником* $\overrightarrow{E_1E_2O}$, *называется число, абсолютная величина которого равна площади треугольника* ABC, *измеренной масштабным квадратом (т. е.*

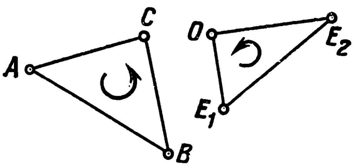


Рис. 22

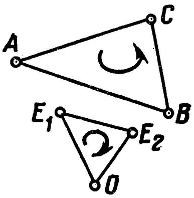


Рис. 23

квадратом со стороной $OE_1 = OE_2$), *и которое положительно, если треугольник* $\overrightarrow{ABC}$ *имеет положительную ориентацию, и отрицательно в противном случае.*

Итак,

$$|\overline{ABC}| = \text{пл.}\ \triangle\ ABC,$$

причем $\overline{ABC} > 0$, если треугольник $\overrightarrow{ABC}$ имеет положительную ориентацию, и $\overline{ABC} < 0$ в противном случае.

Если $\overrightarrow{ABC}$ — вырожденный треугольник, то будем считать, что его площадь $\overline{ABC}$ равна нулю: $\overline{ABC} = 0$.

При перестановке двух вершин невырожденного треугольника ориентация его меняется на противоположную, поэтому при круговой перестановке вершин треугольника $\overrightarrow{ABC}$ ориентация не меняется, а при нарушении кругового порядка вершин ориентация меняется на противоположную. Отсюда следует, что

$$\overline{ABC} = \overline{BCA} = \overline{CAB} = -\overline{BAC} = -\overline{ACB} = -\overline{CBA}.$$

Эти соотношения верны, конечно, и для вырожденного ориентированного треугольника.

Теорема 1 (теорема Шаля для площадей). *Пусть* A, B, C, D — *четыре произвольные точки, лежащие на плоскости* π. *Введем на этой плоскости декартову прямоугольную систему координат* xOy. *Пусть* O — *начало координат, а* OE_1 *и* OE_2 — *масштабные точки соответственно осей* Ox и Oy ($OE_1 = OE_2$). *Ориентируем плоскость* π *ориентированным треугольником* E_1E_2O. *Тогда**

$$\overline{BCD}+\overline{CAD}+\overline{ABD}=\overline{ABC}. \tag{1}$$

Доказательство. Предположим сначала, что треугольник $\overrightarrow{ABC}$ не вырождается.

1. Пусть точка D лежит внутри треугольника ABC (рис. 24); тогда **

$$\text{пл. } \triangle BCD + \text{пл. } \triangle CAD + \text{пл. } \triangle ABD = \text{пл. } \triangle ABC,$$

или

$$|\overline{BCD}|+|\overline{CAD}|+|\overline{ABD}|=|\overline{ABC}|. \tag{2}$$

В рассматриваемом случае все треугольники $\overrightarrow{BCD}$, $\overrightarrow{CAD}$, $\overrightarrow{ABD}$ и $\overrightarrow{ABC}$ имеют одинаковую ориентацию, поэтому все числа, стоящие под знаком модуля в соотношении (2), имеют один и тот же знак. Если все они положительны, то знак модуля (по определению модуля или абсолютной величины числа) можно снять. Если

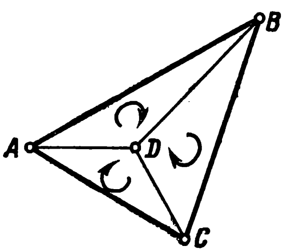


Рис. 24

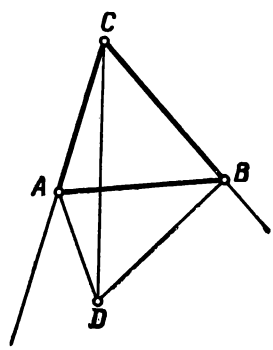


Рис. 25

все они отрицательны, то при снятии знака модуля перед каждым выражением и слева, и справа надо поставить знак минус и после перемены знака опять получим равенство (1).

2. Предположим, что точка D лежит в области, ограниченной отрезком AB и лучами, полученными продолжениями отрезков

---

* Формулу (1) можно переписать в виде $\overline{ABC}+\overline{BAD}+\overline{CBD}+\overline{ACD}=0$. Запомнить ее можно так: треугольник ABC ориентируется любым из двух возможных способов, например $\overrightarrow{ABC}$; каждый из остальных трех треугольников ориентируется так, что общие стороны двух любых треугольников оказались бы ориентированными в противоположных направлениях (например, в треугольнике ABC первой является вершина A, второй — вершина B, значит, при ориентации треугольника с вершинами A, B, D надо взять первой вершину B, второй A, а третьей D).

** Площадь измеряем масштабным квадратом.

CA и CB за точки A и B (рис. 25). Тогда

$$\text{пл.}\ \triangle\, BCD + \text{пл.}\ \triangle\, CAD - \text{пл.}\ \triangle\, ABD = \text{пл.}\ \triangle\, ABC,$$

или

$$|\overline{BCD}| + |\overline{CAD}| - |\overline{ABD}| = |\overline{ABC}|. \tag{3}$$

В рассматриваемом случае треугольники $\overrightarrow{BCD}$, $\overrightarrow{CAD}$ и $\overrightarrow{ABC}$ имеют одинаковую ориентацию, а треугольник $\overrightarrow{ABD}$ имеет ориентацию, им противоположную. Значит, $\overline{BCD}$, $\overline{CAD}$, $\overline{ABC}$ — числа одного знака, а число $\overline{ABD}$ имеет знак, им противоположный. Если, например,

$$\overline{BCD} > 0,\quad \overline{CAD} > 0,\quad \overline{ABC} > 0,\quad \overline{ABD} < 0,$$

то из равенства (3) сразу следует равенство (1), а если

$$\overline{BCD} < 0,\quad \overline{CAD} < 0,\quad \overline{ABC} < 0,\quad \overline{ABD} > 0,$$

то после перемены знаков в левой и правой частях равенства (3) снова приходим к равенству (1).

Аналогично доказывается правильность формулы (1) для случая, когда точка D лежит в области, ограниченной отрезком BC и лучами, полученными продолжением отрезков AB и AC за точки B и C, и для случая, когда точка D лежит в области, ограниченной отрезком CA и продолжениями отрезков BC и BA за точки C и A.

3. Предположим, что точка D лежит внутри угла, вертикального с внутренним углом A треугольника ABC (рис. 26). Тогда

$$\text{пл.}\ \triangle\, BCD - \text{пл.}\ \triangle\, CAD - \text{пл.}\ \triangle\, ABD = \text{пл.}\ \triangle\, ABC,$$

или

$$|\overline{BCD}| - |\overline{CAD}| - |\overline{ABD}| = |\overline{ABC}|. \tag{4}$$

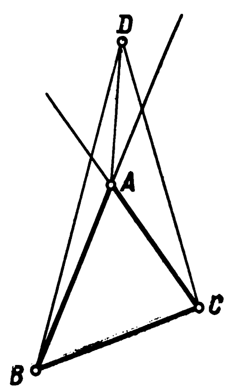


Рис. 26

Теперь числа $\overline{BCD}$ и $\overline{ABC}$ имеют одинаковые знаки, а числа $\overline{CAD}$ и $\overline{ABD}$ — знаки, им противоположные, поэтому из равенства (4) опять следует равенство (1).

Аналогично доказывается правильность формулы (1) для случая, когда точка D лежит внутри угла, вертикального с внутренним углом B или с внутренним углом C треугольника ABC.

4. Предположим, что точка D лежит на прямой BC между точками B и C (рис. 27).

В этом случае

$$\text{пл.}\ \triangle\, CAD + \text{пл.}\ \triangle\, ABD = \text{пл.}\ \triangle\, ABC,$$

или

$$|\overline{CAD}| + |\overline{ABD}| = |\overline{ABC}|. \qquad (5)$$

В рассматриваемом случае треугольники $\overrightarrow{CAD}$, $\overrightarrow{ABD}$ и $\overrightarrow{ABC}$ имеют одинаковую ориентацию, поэтому числа $\overline{CAD}$, $\overline{ABD}$ и $\overline{ABC}$

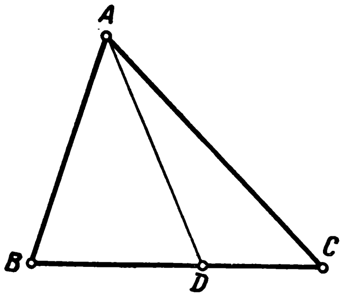


Рис. 27

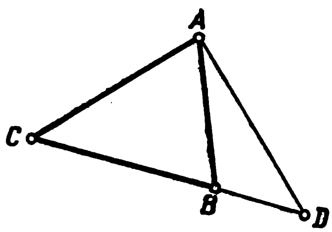


Рис. 28

одного знака, и из равенства (5) следует равенство (1) (так как в рассматриваемом случае $\overline{BCD} = 0$).

Аналогично доказывается правильность формулы (1) в случае, если точка D лежит на стороне CA между точками C и A или на стороне AB между точками A и B.

5. Предположим, что точка D лежит на продолжении отрезка BC за точку B. Тогда (рис. 28)

$$\text{пл.}\ \triangle\, CAD - \text{пл.}\ \triangle\, ABD = \text{пл.}\ \triangle\, ABC,$$

или

$$|\overline{CAD}| - |\overline{ABD}| = |\overline{ABC}|. \qquad (6)$$

В рассматриваемом случае треугольники $\overrightarrow{CAD}$ и $\overrightarrow{ABC}$ имеют одинаковую ориентацию, а треугольник $\overrightarrow{ABD}$ имеет ориентацию, им противоположную, поэтому числа $\overline{CAD}$ и $\overline{ABC}$ одного знака, а $\overline{ABD}$ имеет знак, противоположный им. Если, например, $\overline{CAD} > 0$, $\overline{ABC} > 0$, $\overline{ABD} < 0$, то из равенства (6) сразу следует равенство (1) (надо еще учесть, что $\overline{BCD} = 0$), если

$$\overline{CAD} < 0,\ \overline{ABC} < 0,\ \overline{ABD} > 0,$$

то, поменяв в обеих частях равенства (6) знаки, опять придем к равенству (1).

Аналогично доказывается правильность формулы (1) для случая, когда точка D лежит на продолжении отрезка BC за точку C, а также когда она лежит на прямой CA (на продолжении отрезка CA за точку A или за точку C) или на прямой AB (на продолжении AB за точку A или за точку B).

Наконец, читатель без труда проверит, что формула (1) верна и в том случае, когда точка D совпадает с одной из точек A, B или C.

Остается рассмотреть случай, когда точки A, B, C принадлежат одной прямой. Если при этом и точка D принадлежит той же прямой, то соотношение (1), очевидно, верно (оно обращается в равенство $0=0$). Предположим поэтому, что среди точек A, B, C, D есть три точки, не принадлежащие одной прямой. Пусть, например, точки B, C, D не принадлежат одной прямой. Тогда по доказанному имеем

$$\overline{BCA}+\overline{CDA}+\overline{DBA}=\overline{BCD},$$

или

$$\overline{BCD}-\overline{CDA}-\overline{DBA}=\overline{BCA},$$

или

$$\overline{BCD}+\overline{CAD}+\overline{ABD}=\overline{ABC}.$$

Теорема 2. *Если относительно общей декартовой системы координат xOy на плоскости заданы точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ и выбран масштабный отрезок m для измерения длин и площадей* (за единицу измерения площадей выбирается квадрат со стороной m), *то площадь $\overline{ABC}$ ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$ вычисляется по формуле*

$$\overline{ABC}=\frac{S_0}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

или

$$\overline{ABC}=\frac{S_0}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

где S_0 — площадь масштабного параллелограмма, т. е. параллелограмма, двумя сторонами которого являются масштабные отрезки OE_1 и OE_2 соответственно осей Ox и Oy.

Доказательство. Сначала предположим, что точка A лежит на оси Ox и не совпадает с началом координат ($x_1 \neq 0$, $y_1=0$), точка B лежит на оси Oy и не совпадает с началом координат ($x_2=0$, $y_2 \neq 0$), а точка C совпадает с началом координат ($x_3=y_3=0$).

Тогда

$$\frac{|\overline{ABC}|}{S_0}=\frac{\text{пл.}\triangle ABC}{S_0}=\frac{1}{2}\,\frac{\text{пл.}\triangle ABO}{\text{пл.}\triangle E_1E_2O}=\frac{1}{2}\cdot\frac{OA}{OE_1}\cdot\frac{OB}{OE_2}=$$
$$=\frac{1}{2}|x_1||y_2|=\frac{1}{2}|x_1y_2|. \tag{9}$$

Далее, если $x_1y_2>0$ (т. е. точки A и B лежат на положительных полуосях Ox и Oy или на их продолжениях), то треугольники $\overrightarrow{ABO}$ и $\overrightarrow{E_1E_2O}$ имеют одинаковую ориентацию, т. е. $\overline{ABO}>0$. Если же $x_1y_2<0$, то треугольники $\overrightarrow{ABO}$ и $\overrightarrow{E_1E_2O}$ имеют противоположную ориентацию, т. е. $\overline{ABO}<0$. Таким образом, x_1y_2 и $\overline{ABO}$ — числа одного знака, а потому из соотношения (9) следует, что

$$\overline{ABO}=\frac{S_0}{2}x_1y_2. \tag{10}$$

Последнее соотношение верно, конечно, и тогда, когда одна из точек A или B (или обе) совпадает с началом координат.

Пусть теперь точки A и B занимают на плоскости какое угодно положение, а точка C совпадает с началом координат. Обозначим через A_1 и B_1 параллельные проекции точек A и B на ось Ox параллельно оси Oy. Применяя теорему 1 Шаля для точек A, B, O, A_1, будем иметь

$$\overline{ABA_1}+\overline{BOA_1}+\overline{OAA_1}=\overline{ABO}.$$

С другой стороны, ориентация и площадь треугольника не меняются, если одну из его вершин переместить по прямой, параллельной стороне, противолежащей этой вершине, следовательно,

$$\overline{ABA_1}=\overline{AB_1A_1}$$

и предыдущее соотношение примет вид

$$\overline{AB_1A_1}+\overline{BOA_1}+\overline{OAA_1}=\overline{ABO}. \tag{11}$$

Применяя теорему 1 для точек A, B_1, O, A_1, получим

$$\overline{AB_1A_1}+\overline{B_1OA_1}+\overline{OAA_1}=\overline{AB_1O} \tag{12}$$

и так как $\overline{B_1OA_1}=0$, то из соотношений (11) и (12) следует, что

$$\overline{ABO}=\overline{BOA_1}+\overline{AB_1O}=\overline{A_1BO}+\overline{AB_1O}=$$
$$=\overline{A_1BO}-\overline{B_1AO}=\overline{A_1B_2O}-\overline{B_1A_2O},$$

где A_2 и B_2 — параллельные проекции точек A и B на ось Oy параллельно оси Ox.

Применяя формулу (10), будем иметь

$$\overline{ABO}=\frac{S_0}{2}x_1y_2-\frac{S_0}{2}x_2y_1=\frac{S_0}{2}(x_1y_2-x_2y_1).$$

Пусть, наконец, точки A, B и C занимают на плоскости какое угодно положение. Тогда

$$\overline{ABC}=\overline{BCO}+\overline{CAO}+\overline{ABO}=$$

$$=\frac{S_0}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\frac{S_0}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}+\frac{S_0}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\frac{S_0}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Отнимая из элементов первой и второй строк соответствующие элементы третьей строки и разлагая полученный определитель по элементам последнего столбца, получим

$$\overline{ABC}=\frac{S_0}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}.$$

С л е д с т в и е 1. Площадь S треугольника ABC, заданного своими вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ относительно общей декартовой системы координат, вычисляется по формуле

$$S=\frac{S_0}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{S_0}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} \tag{13}$$

(mod — знак модуля или абсолютной величины).

С л е д с т в и е 2. Для того чтобы три точки

$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3),$$

заданные относительно общей декартовой системы координат на плоскости, принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=0.$$

С л е д с т в и е 3. Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — две различные точки, заданные относительно общей декартовой системы координат. Тогда, если точки $C(x, y)$ и $C'(x', y')$ лежат по одну сторону от прямой AB, то определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

имеют один и тот же знак. Если же точки $C(x, y)$ и $C'(x', y')$ лежат по разные стороны от прямой AB, то эти определители имеют различные знаки.

В самом деле, если точки C и C' лежат по одну сторону от прямой AB, то треугольники $\overrightarrow{CAB}$ и $\overrightarrow{C'AB}$ имеют одинаковую ориентацию, а если точки C и C' лежат по разные стороны от прямой AB, то треугольники $\overrightarrow{CAB}$ и $\overrightarrow{C'AB}$ имеют противоположную ориентацию.

Замечание. Площадь S_0 масштабного параллелограмма записывают в виде

$$S_0 = \sqrt{g},$$

где $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, причем $g_{11} = OE_1^2$, $g_{22} = OE_2^2$, $g_{12} = OE_1 \cdot OE_2 \cos\omega$ (ω — угол между осями Ox и Oy).

Таким образом, формулы (7) и (8) можно записать в виде

$$\overline{ABC} = \frac{\sqrt{g}}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\overline{ABC} = \frac{\sqrt{g}}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix};$$

соответственно изменятся формулы (13).

§ 15. Ориентированный тетраэдр. Ориентированное пространство. Объем тетраэдра

В этом параграфе сформулируем определения и основные результаты для тетраэдров, аналогичные результатам предыдущего параграфа для треугольников. Доказательства этих положений могут быть даны аналогично тому, как это было сделано в § 14 для треугольников. Однако проще всего эти результаты получаются из § 41 и 42 (смешанное произведение трех векторов).

Тетраэдром будем называть четыре произвольные точки A, B, C, D пространства. Если эти точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости, то тетраэдр будем называть невырожденным, а если они принадлежат одной плоскости, то вырожденным. Объем вырожденного тетраэдра условимся считать равным нулю.

Ориентированным тетраэдром $\overrightarrow{ABCD}$ называется упорядоченная четверка точек A, B, C, D. В обозначении $\overrightarrow{ABCD}$ ориентированного тетраэдра порядок точек определяется порядком их записи: A — первая точка, B — вторая, C — третья, D — четвертая. Если точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости, то ориентированный тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ называется невырожденным, а если точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости, то ориентированный тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ называется вырожденным.

Пространство, в котором задан невырожденный ориентированный тетраэдр $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$, называется ориентированным. Если в пространстве введена общая декартова система координат, то ориентируем пространство тетраэдром $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$, где O — начало координат, а E_1, E_2, E_3 — соответственно единичные точки осей Ox, Oy, Oz.

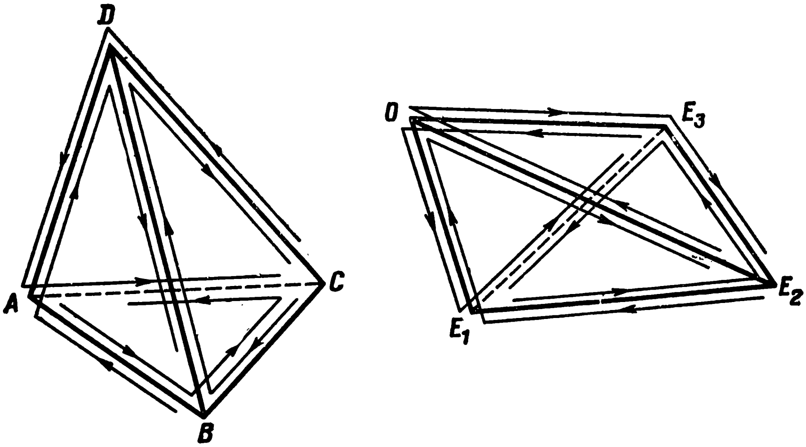


Рис. 29

Будем говорить, что невырожденный ориентированный тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ пространства, ориентированного тетраэдром $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$, имеет положительную ориентацию, если тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и *$\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$ имеют одинаковую ориентацию. Если же тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$* и *$\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$ имеют противоположную ориентацию, то тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ имеет отрицательную ориентацию.*

Определение одинаковой и противоположной ориентаций двух ориентированных тетраэдров дано в дополнении I в конце книги.

Можно пользоваться и следующим наглядным определением: ориентированные тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$ имеют одинаковую ориентацию, когда обход контура треугольника $\overrightarrow{E_1E_2E_3}$, если смотреть на плоскость $E_1E_2E_3$ с той стороны от плоскости $E_1E_2E_3$, где расположена точка O, кажется происходящим в том же направлении, в каком обходится контур треугольника $\overrightarrow{ABC}$, если смотреть на плоскость этого треугольника с той стороны от плоскости ABC, где расположена точка D (рис. 29). Если же указанные обходы производятся в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против часовой стрелки), то будем говорить, что тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{E_1F_2E_3O}$ имеют противоположную ориентацию (рис. 30).

Вместо вершин D и O можно взять две другие с одинаковым номером, например C и E_3, и сравнивать направления обходов треугольников $\overrightarrow{BAD}$ и $\overrightarrow{E_2E_1O}$, рассматривая их соответственно из точек C и E_3. Если направления этих обходов одинаковые, то тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$ имеют одинаковую ориентацию, а если противоположные, то тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$ имеют противоположную ориентацию. Читателю предлагается убедиться геометрически в том, что данное определение одинаковой и противоположной ориентаций двух тетраэдров не зависит от выбора вершин (D и O, или C и E_3, или B и E_2, или A и E_1).

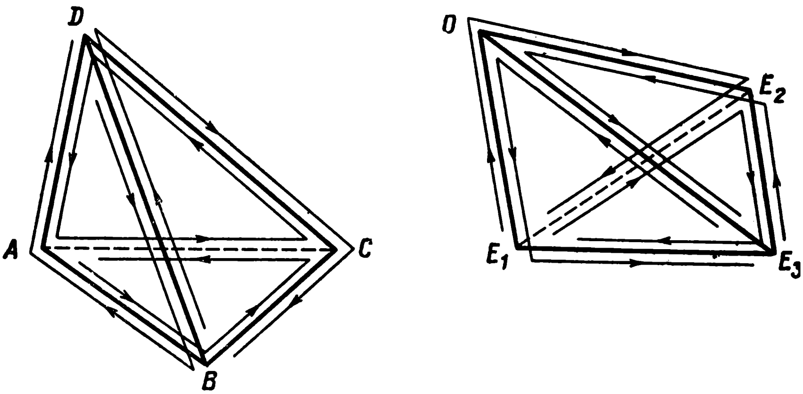


Рис 30

Вырожденным ориентированным тетраэдрам никакой определенной ориентации не приписывается (ни положительной, ни отрицательной).

Пусть пространство ориентировано тетраэдром $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$; параллелепипед с ребрами OE_1, OE_2, OE_3 назовем масштабным. Выберем масштабный отрезок m и за единицу измерения объемов примем куб, ребро которого равно масштабному отрезку (единичный куб).

Объемом $\overrightarrow{ABCD}$ невырожденного ориентированного тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$, находящегося в пространстве, ориентированном тетраэдром $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$, называется число, абсолютная величина которого равна объему V тетраэдра $ABCD$ и которое положительно, если тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ имеет положительную ориентацию и отрицательно в противном случае.

Итак,

$$|\overline{ABCD}| = V,$$

причем $\overline{ABCD} > 0$, если тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ имеет положительную ориентацию и $\overline{ABCD} < 0$, если тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ имеет отрицательную ориентацию.

Если тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ — вырожденный, то его объем считаем равным нулю: $\overline{ABCD}=0$.

При перестановке двух вершин ориентированного тетраэдра его ориентация меняется на противоположную, поэтому $\overline{ABCD}=-\overline{BACD}=\overline{BADC}=-\overline{DABC}$ и т. д.

Теорема 1 (теорема Шаля для объемов). *Для пяти произвольных точек A, B, C, D, E ориентированного пространства имеет место соотношение* *:

$$\overline{ABCE}+\overline{BADE}+\overline{CBDE}+\overline{ACDE}=\overline{ABCD}. \tag{1}$$

Теорема 2. *Если относительно общей декартовой системы координат заданы вершины тетраэдра A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2), C (x_3, y_3, z_3) и D (x_4, y_4, z_4), то*

$$\overline{ABCD}=\frac{V_0}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

или

$$\overline{ABCD}=\frac{V_0}{6}\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где V_0 — объем масштабного параллелепипеда, т. е. параллелепипеда, ребрами которого служат масштабные отрезки OE_1, OE_2, OE_3 осей координат. Этот объем V_0 может быть вычислен по формуле

$$V_0=\sqrt{g}, \tag{4}$$

* Условимся считать поверхность тетраэдра $ABCD$ ориентированной, если ориентированы все его грани, притом так, что ориентации двух любых граней порождают на ребре, принадлежащем им обоим, противоположные ориентации. Для того чтобы ориентировать поверхность тетраэдра $ABCD$, достаточно ориентировать лишь одну его грань, так как ориентация одной грани порождает в соответствии с принятым соглашением ориентации всех остальных. Таким образом, поверхность всякого тетраэдра $ABCD$ можно ориентировать только двумя способами:

$$\overrightarrow{ABC},\ \overrightarrow{BAD},\ \overrightarrow{CBD},\ \overrightarrow{ACD}\ \text{и}\ \overrightarrow{BAC},\ \overrightarrow{ABD},\ \overrightarrow{BCD},\ \overrightarrow{CAD}.$$

Порядок первых трех точек каждого слагаемого левой части равенства (1) выбран так, что соответствующие этому порядку ориентации граней тетраэдра $ABCD$ образуют ориентацию его поверхности (в правой части вместо $\overline{ABCD}$ можно записать $\overline{BADC}$ или $\overline{CBDA}$, или $\overline{ACDB}$).

Отметим, что теорема Шаля для площадей (§ 14, теорема 1) может быть записана так:

$$\overline{ABC}+\overline{BAD}+\overline{CBD}+\overline{ACD}=0.$$

Ориентированные грани $\overrightarrow{ABC}$, $\overrightarrow{BAD}$, $\overrightarrow{CBD}$, $\overrightarrow{ACD}$ образуют ориентацию поверхности вырожденного тетраэдра $ABCD$. Теоремы Шаля для площадей и объемов относятся к элементарной геометрии (см., например, Ж. Адамар. Элементарная геометрия, ч. II, стереометрия. М., Учпедгиз, 1938, прибавление G — о понятии объема, стр. 498—501, где изложено элементарное доказательство теоремы Шаля для объемов).

где

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

а числа g_{ik} определяются соотношениями

$$g_{11}=OE_1^2,\ g_{22}=OE_2^2,\ g_{33}=OE_3^2,\ g_{12}=OE_1\cdot OE_2\cos\omega_3,\ g_{23}=OE_2\cdot OE_3\cos\omega_1,$$

$$g_{31}=OE_3\cdot OE_1\cos\omega_2 \tag{6}$$

(ω_3 — угол между осями Ox и Oy, ω_1 — угол между осями Oy и Oz, ω_2 — угол между осями Oz и Ox).

Из теоремы 2 вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Если в пространстве введена общая декартова система координат и выбран масштабный отрезок m для измерения длин, причем куб, ребро которого равно масштабному отрезку m, служит для измерения объемов, то объем тетраэдра $ABCD$ с вершинами

$$A(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad B(x_2,\ y_2,\ z_2),\quad C(x_3,\ y_3,\ z_3)\quad \text{и}\quad D(x_4,\ y_4,\ z_4)$$

вычисляется по формуле

$$V=\frac{\sqrt{g}}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (7) \quad \text{или} \quad V=\frac{\sqrt{g}}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где g — квадрат объема масштабного параллелепипеда — вычисляется по формуле (5), причем g_{ik} вычисляются по формулам (6).

Следствие 2. Для того чтобы четыре точки

$$A(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad B(x_2,\ y_2,\ z_2),\quad C(x_3,\ y_3,\ z_3),\quad D(x_4,\ y_4,\ z_4),$$

заданные относительно общей декартовой системы координат, принадлежали одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\overline{ABCD}=0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}=0.$$

Следствие 3. Пусть относительно общей декартовой системы координат заданы три точки

$$A(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad B(x_2,\ y_2,\ z_2),\quad \text{и}\quad C(x_3,\ y_3,\ z_3),$$

не принадлежащие одной прямой. Тогда, если точки $D(x,\ y,\ z)$ и $D'(x',\ y',\ z')$ лежат по одну сторону от плоскости ABC, то определители

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta'=\begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x'-x_3 & y'-y_3 & z'-z_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}$$

имеют один и тот же знак, а если точки $D(x, y, z)$ и $D'(x', y', z')$ лежат по разные стороны от плоскости ABC, то определители Δ и Δ' имеют противоположные знаки.

§ 16. Углы

1. Определение угла

Углом называется совокупность двух лучей p и q, выходящих из одной точки O. Точка O называется вершиной угла, а лучи p и q — его сторонами. Если лучи p и q совпадают, то угол называется нулевым, а если один из них является продолжением другого, то развернутым.

Углы обычно измеряют в радианах или градусах. Если угол измеряется в радианах, то его величина φ принимает значения от 0 до π (величину 0 имеет нулевой угол, а величину π — развернутый). Если угол измеряют в градусах, то его величина принимает значения от 0 до 180° (величину 0° имеет нулевой угол, величину 180° — развернутый угол).

2. Ориентированный угол. Его величина. Равенство, сумма и разность величин ориентированных углов

Ориентированным углом $\widehat{pq}$ называется упорядоченная пара лучей p и q, выходящих из одной точки O. В обозначении $\widehat{pq}$ ориентированного угла порядок его сторон определяется порядком их записи: p — первая сторона, q — вторая.

Пусть на плоскости, ориентированной треугольником $\overrightarrow{E_1E_2O}$, лежит ориентированный угол $\widehat{pq}$ с вершиной в точке O, отличный от нулевого и развернутого. Возьмем на лучах p и q соответственно точки A и B, отличные от вершины O угла $\widehat{pq}$. *Будем говорить, что ориентированный угол $\widehat{pq}$ имеет положительную ориентацию, если положительную ориентацию имеет треугольник $\overrightarrow{ABO}$* (т. е. если треугольники $\overrightarrow{ABO}$ и $\overrightarrow{E_1E_2O}$ имеют одинаковую ориентацию). *Если же треугольник $\overrightarrow{ABO}$ имеет отрицательную ориентацию, то будем говорить, что угол имеет отрицательную ориентацию.* Это определение не зависит от выбора точек A и B на лучах p и q, так как если A и A' — две точки, отличные от точки O и лежащие на луче p, а B и B' — две точки, также отличные от точки O и лежащие на луче q, то треугольники $\overrightarrow{ABO}$ и $\overrightarrow{A'B'O}$ имеют одинаковую ориентацию.

Нулевому и развернутому углу не приписывается определенной ориентации (ни положительной, ни отрицательной).

Отсюда, между прочим, следует, что *плоскость можно ориентировать, задав на ней ориентированный угол* $\widehat{pq}$ (ненулевой и неразвернутый). В таком случае плоскость считается ориентированной треугольником $\overrightarrow{ABO}$, где A и B — любые точки, отличные от вершины угла $\widehat{pq}$ и лежащие соответственно на его сторонах p и q.

Величине (p, q) ориентированного угла $\widehat{pq}$, лежащего на ориентированной плоскости, приписывается бесконечное множество значений:

$$(p, q) = \alpha + 2k\pi \tag{1}$$

(k принимает все целые значения), где $|\alpha| = \varphi$, а φ — величина угла со сторонами p и q; при этом $\alpha > 0$, если угол $\widehat{pq}$ имеет положительную ориентацию, $\alpha < 0$, если угол $\widehat{pq}$ имеет отрицательную ориентацию, $\alpha = 0$, если $\widehat{pq}$ — нулевой угол, и $\alpha = \pi$, если $\widehat{pq}$ — развернутый угол.

Заметим, что α в формуле (1), называемое главным значением ориентированного угла $\widehat{pq}$, можно заменить любым другим значением величины ориентированного угла $\widehat{pq}$. Так, например, если $\alpha = \frac{\pi}{6}$, то каждое из выражений

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \frac{13\pi}{6} + 2k\pi, \quad -\frac{11\pi}{6} + 2k\pi \text{ и т. д.,}$$

где k принимает все целые значения, определяет одно и то же множество чисел.

Главное значение α величины ориентированного угла $\widehat{pq}$ заключено в полуинтервале $(-\pi, \pi]$, т. е. $-\pi < \alpha \leqslant \pi$.

Заметим, что два любых значения (p, q) величины ориентированного угла обладают тем свойством, что их разность кратна 2π (т. е. отношение этой разности к числу 2π есть число целое). В связи с этим обстоятельством формулу (1) часто записывают в виде

$$(p, q) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \tag{2}$$

(читается так: «(p, q) сравнимо с α по модулю 2π»). В последней формуле (2) число α можно считать любым значением величины ориентированного угла ($\widehat{pq}$).

Будем считать величины (p, q) и (p', q') двух ориентированных углов $\widehat{pq}$ и $\widehat{p'q'}$, лежащих на ориентированной плоскости, равными, если множество всех значений величины одного из них совпадает с множеством всех значений другого.

Величины (p, q) и (p', q') ориентированных углов $\widehat{pq}$ и $\widehat{p'q'}$, лежащих на ориентированной плоскости, равны тогда и только тогда, когда разность любых двух значений величин этих углов кратна 2π (т. е. отношение этой разности к числу 2π есть число целое). Это обстоятельство записывают так:

$$(p, q) \equiv (p', q') \pmod{2\pi}. \tag{3}$$

Таким образом, в формуле (3) можно считать, что (p, q) — любое из значений величины угла $\widehat{pq}$, а (p', q') — любое из значений величины угла $\widehat{p'q'}$.

Суммой $(p, q)+(p', q')$ величины (p, q) ориентированного угла $\widehat{pq}$ с величиной (p', q'), ориентированного угла $\widehat{p'q'}$, лежащих на ориентированной плоскости, называется бесконечное множество чисел, которое получится, если каждое из значений величины угла $\widehat{pq}$ сложить с каждым из значений величины угла $\widehat{p'q'}$.

Сумма $(p, q)+(p', q')$ величин ориентированных углов $\widehat{pq}$ и $\widehat{p'q'}$ равна сумме двух любых значений (p, q) и (p', q') величин этих углов, сложенной с $2k\pi$, где k принимает все целые значения. Например,

$$(p, q)+(q, p) \equiv 0 \pmod{2\pi}, \tag{4}$$

так как среди всех значений (p, q) и (q, p) ориентированных углов $\widehat{pq}$ и $\widehat{qp}$ найдутся два таких, сумма которых равна нулю. Разность $(p, q)-(p', q')$ величин ориентированных углов $\widehat{pq}$ и $\widehat{p'q'}$, лежащих на ориентированной плоскости, определяется аналогично тому, как была определена сумма этих величин. При вычислении разности $(p, q)-(p', q')$, и здесь можно вычесть любое из значений (p', q') из любого значения (p, q) и добавить $2k\pi$, считая, что k принимает все целые значения. При этом удобно пользоваться формой записи, аналогичной соотношению (1). Например,

$$(p, q)-(p, q) \equiv 0 \pmod{2\pi}. \tag{5}$$

3. Угол между двумя осями. Угол от одной оси до другой и его величина

Пусть l и m — две оси, имеющие общую точку O; тогда углом между осями l и m называется угол с вершиной O, сторонами p и q которого являются лучи, лежащие на осях l и m, выходящие из точки O и идущие в положительных направлениях этих осей; ориентированный угол $\widehat{pq}$ называется углом от оси l до оси m.

Если оси l и m имеют общую точку O и лежат на ориентированной плоскости, то величине (l, m) угла $\widehat{lm}$ от оси l до оси m

приписывается бесконечное множество значений:

$$(l,\ m) \equiv \alpha + 2k\pi, \tag{6}$$

где α — любое из значений угла от оси l до оси m, а k принимает все целые значения. Формулу (6) можно записать так:

$$(l,\ m) \equiv \alpha \pmod{2\pi}. \tag{7}$$

Если лучи l и m параллельны и направлены в одну сторону, то говорят, что они образуют нулевой угол и приписывают величине угла от оси l до оси m бесконечное множество значений $2k\pi$, где k принимает все целые значения:

$$(l,\ m) \equiv 0 \pmod{2\pi}. \tag{8}$$

Если лучи l и m параллельны и направлены в разные стороны, то говорят, что они образуют развернутый угол и приписывают величине угла от оси l до оси m бесконечное множество значений $(2k+1)\pi$, где k принимает все целые значения:

$$(l,\ m) \equiv \pi \pmod{2\pi}. \tag{9}$$

Равенство, сумма и разность величин $(l,\ m)$ и $(l',\ m')$ углов $\widehat{lm}$ и $\widehat{l'm'}$ от оси l до оси m и от оси l' до оси m' определяются соответственно как равенство, сумма и разность величин ориентированных углов, являющихся углами от оси l до оси m и от оси l' до оси m'.

В записях равенств этих углов, значений их суммы или разности естественно пользоваться той же формой записи, заимствованной из теории сравнения, которая была указана в п. 2 настоящего параграфа.

4. Углы между двумя прямыми. Угол от одной прямой до другой и его величина

Две прямые a и b, имеющие общую точку O, образуют четыре угла; любой из этих углов называется углом между прямыми a и b.

Любой из углов между двумя прямыми a и b, стороны которого упорядочены, притом так, что первой стороной угла является та, которая лежит на прямой a, а второй — та, которая лежит на прямой b, называется углом от прямой a до прямой b и обозначается $\widehat{ab}$.

Если прямые a и b лежат на ориентированной плоскости и имеют общую точку O, то величине $(a,\ b)$ угла $\widehat{ab}$ от прямой a до прямой b приписывается бесконечное множество значений: это множество всех значений только что указанных четырех ориентированных углов. Если α — одно из значений $(a,\ b)$ ориентированного угла $\widehat{ab}$ от прямой a до прямой b, то все значения $(a,\ b)$ заключаются в формуле

$$(a,\ b)=\alpha+k\pi, \tag{10}$$

где k принимает все целые значения. Формулу (10) можно записать и так:

$$(a,\ b)\equiv\alpha\ (\mathrm{mod}\ \pi). \tag{11}$$

Если прямые a и b параллельны, то говорят, что они образуют нулевой угол и считают

$$(a,\ b)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \pi). \tag{12}$$

Главным значением α угла $\widehat{ab}$ от прямой a до прямой b, лежащими на ориентированной плоскости, называется то из значений этого угла, которое заключено в полуинтервале $[0, \pi)$, т. е. $0\leqslant\alpha<\pi$.

Величины $(a,\ b)$ и $(a',\ b')$ двух углов $\widehat{ab}$ и $\widehat{a'b'}$ от прямой a до прямой b и от прямой a' до прямой b' считаются равными, если множество всех значений (a, b) угла $\widehat{ab}$ совпадает с множеством всех значений $(a',\ b')$ угла $\widehat{a'b'}$, иначе говоря, разность двух любых значений $(a,\ b)$ и $(a',\ b')$ углов $\widehat{ab}$ и $\widehat{a'b'}$ кратна π:

$$(a,\ b)\equiv(a',\ b')\ (\mathrm{mod}\ \pi). \tag{13}$$

Сумма и разность величин (a, b) и (a', b') углов $\widehat{ab}$ и $\widehat{a'b'}$ определяются так же, как сумма и разность величин ориентированных углов. Однако во всех соотношениях между величинами (a, b), (a', b'), (a'', b'') и т. д. углов $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$, $\widehat{a''b''}$ сравнение следует брать по модулю π. Например, если прямые a и b взаимно перпендикулярны, то

$$(a,\ b)\equiv\frac{\pi}{2}\ (\mathrm{mod}\ \pi).$$

Для двух любых прямых a и b имеют место соотношения:

$$(a,\ b)+(b,\ a)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \pi),$$
$$(a,\ b)-(a,\ b)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \pi).$$

Замечание. В дальнейшем слово „угол“ употребляется и в других ситуациях, например: угол между двумя направленными отрезками $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ — это угол с вершиной O, на сторонах p и q которого лежат соответственно точки A и B; при этом углом от направленного отрезка $\overrightarrow{OA}$ до направленного отрезка $\overrightarrow{OB}$ считается ориентированный угол $\widehat{pq}$.

Далее, угол между двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — это угол, вершина которого берется в любой точке O пространства, а стороны p и q идут соответственно в направлении векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (заметим, что здесь угол определяется неоднозначно, однако все полученные таким образом углы равны, иначе конгруэнтны). Или еще: угол, который вектор $\boldsymbol{a}$ образует с осью l — это угол, вершиной которого является произвольная точка O оси l, а сторонами p и q — соответственно луч p, выходящий из O и идущий в положительном направлении оси l, и луч q, выходящий из O и идущий в направлении вектора $\boldsymbol{a}$. При этом ориентированный угол $\widehat{pq}$ называется углом от оси l до вектора $\boldsymbol{a}$. И здесь определение угла между вектором и осью неоднозначно, но все получаемые в соответствии с этим определением углы будут равны между собой (конгруэнтны).

§ 17. Теорема Шаля для ориентированных углов

Пусть p, q, r — три луча, выходящие из точки O, лежащие на ориентированной плоскости. Тогда

$$(p, q)+(q, r) \equiv (p, r) \pmod{2\pi}. \tag{1}$$

Доказательство. Предположим сначала, что лучи p, q, r попарно различны и ни один из них не является продолжением другого. Обозначим через α_1, α_2, α_3 соответственно главные значения углов $\widehat{pq}$, $\widehat{qr}$ и $\widehat{pr}$.

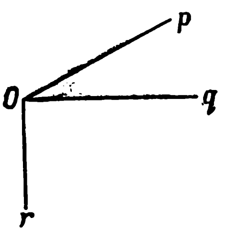


Рис. 31

Случай 1. Луч q проходит внутри угла $\widehat{pr}$ (рис. 31). Тогда сумма величины угла, образованного лучами p и q, и величины угла, образованного лучами q и r, равна величине угла, образованного лучами p и r, т. е.

$$|\alpha_1|+|\alpha_2|=|\alpha_3|.$$

Но так как углы $\widehat{pq}$, $\widehat{qr}$, $\widehat{pr}$ имеют одинаковую ориентацию, то α_1, α_2, α_3 — числа одного знака, а потому из последнего равенства следует, что

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$$

и, значит,

$$(p, q)+(q, r) \equiv (p, r) \pmod{2\pi}.$$

Случай 2. Луч r проходит внутри угла $\widehat{pq}$ (рис. 32). Тогда, на основании уже доказанного

$$(p, r)+(r, q) \equiv (p, q) \pmod{2\pi},$$

или

$$(p, q)-(r, q) \equiv (p, r) \pmod{2\pi},$$

или

$$(p, q)+(q, r) \equiv (p, r) \pmod{2\pi}.$$

Случай 3. Луч p проходит внутри угла $\widehat{qr}$ (рис. 33). Тогда

$$(q,\ p)+(p,\ r)\equiv(q,\ r)\pmod{2\pi},$$
$$-(q,\ p)+(q,\ r)\equiv(p,\ r)\pmod{2\pi},$$
$$(p,\ q)+(q,\ r)\equiv(p,\ r)\pmod{2\pi}.$$

Случай 4. Лучи p, q, r попарно различны, ни один из них не проходит внутри угла, образованного двумя другими и ни один из них не является продолжением другого. В этом случае

$$|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|=2\pi,$$

причем числа α_1 и α_2 одного знака, а α_3—число знака, им противо-

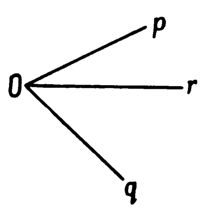


Рис. 32

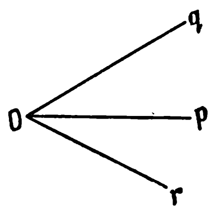


Рис. 33

положного (для случая, изображенного на рис. 34, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_3<0$, а для случая, изображенного на рис. 35, $\alpha_1<0$, $\alpha_2<0$, $\alpha_3>0$). Таким образом, имеет место одно из двух равенств:

$$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=\pm 2\pi,$$

или

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3\pm 2\pi.$$

Отсюда $(p,\ q)+(q,\ r)\equiv(p,\ r)\pmod{2\pi}$.

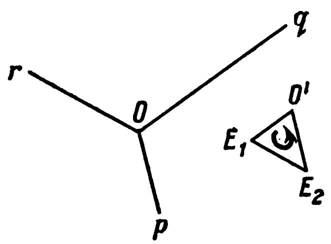


Рис. 34

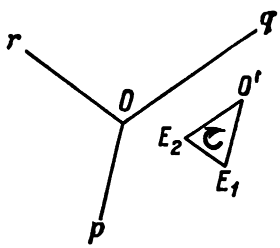


Рис. 35

Случай 5. Среди лучей p, q, r есть совпадающие. Пусть, например, совпадают лучи p и q. Тогда $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\alpha_3$ и, значит,

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3,$$

т. е.

$$(p,\ q)+(q,\ r)=(p,\ r)\ (\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

Аналогично доказывается это равенство в случае, если совпадают лучи q и r. Если совпадают лучи p и r, то $\alpha_1=-\alpha_2$, $\alpha_3=0$ и, значит, опять $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$.

Случай 6. Один из лучей p, q, r является продолжением другого. Пусть, например, луч p — продолжение луча r. Тогда либо $\alpha_1+\alpha_2=\pi$, $\alpha_3=\pi$ (рис. 36), либо $\alpha_1+\alpha_2=-\pi$, $\alpha_3=\pi$ (рис. 37), значит, либо $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$, либо $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3-2\pi$.

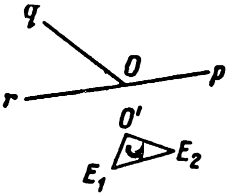


Рис. 36

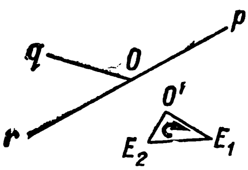


Рис. 37

Из обоих равенств следует, что

$$(p,\ q)+(q,\ r)=(p,\ r)\ (\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

Следствие. Пусть l, m, n — три луча, имеющие общую точку O и лежащие на ориентированной плоскости. Тогда

$$(l,\ m)+(m,\ n)\equiv(l,\ n)\,(\mathrm{mod}\, 2\pi). \qquad (2)$$

Теорема 2 (теорема Шаля для прямых). *Пусть a, b, c — три прямые, лежащие на ориентированной плоскости и имеющие общую точку O; тогда*

$$(a,\ b)+(b,\ c)=(a,\ c)\ (\mathrm{mod}\, \pi). \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть p, q, r — соответственно лучи, лежащие на прямых a, b, c и выходящие из точки O. На основании теоремы Шаля для углов

$$(p,\ q)+(q,\ r)\equiv(p,\ r)\ (\mathrm{mod}\, 2\pi),$$

следовательно,

$$(p,\ q)+(q,\ r)\equiv(p,\ r)\,(\mathrm{mod}\, \pi).$$

Но так как какое-нибудь значение $(p,\ q)$ есть одно из значений угла $\widehat{ab}$, одно из значений $(q,\ r)$ есть одно из значений угла $\widehat{bc}$, а одно из значений $(p,\ r)$ есть одно из значений угла $\widehat{ac}$, то из последнего соотношения следует, что

$$(a,\ b)+(b,\ c)\equiv(a,\ c)\,(\mathrm{mod}\, \pi).$$

III. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 18. Полярная система координат на плоскости

Говорят, что на плоскости введена полярная система координат, если эта плоскость ориентирована, на ней выбраны точка O — полюс, луч Ox, выходящий из точки O — полярная ось и масштабный отрезок.

Пусть M — произвольная точка плоскости, не совпадающая с полюсом (рис. 38).

Первой полярной координатой точки M, или полярным радиусом, называется расстояние r от точки M до полюса O. Второй полярной координатой точки M, или амплитудой, называется угол φ от полярной оси (от луча Ox) до луча OM.

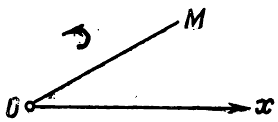


Рис. 38

Для полюса O считают $r=0$, φ — любое число.

В некоторых вопросах (например, при задании линии полярным уравнением) удобно полярному радиусу r приписывать знак; именно считают $r<0$, если амплитуду φ измеряют от полярной оси до луча, который получается продолжением луча OM за точку O.

Полярные координаты r, φ в случае, если для первой координаты r допускаются и отрицательные значения, называются обобщенными полярными координатами.

Пусть на плоскости введена полярная система координат. Введем декартову прямоугольную систему координат, принимая полюс O за начало координат, и за положительную полуось Ox — полярную ось. За ось Oy примем ось, которая получается поворотом оси Ox вокруг точки O на угол $+90°$, т. е. положительное направление на оси Oy выбирается таким, чтобы угол от оси Ox до оси Oy был равен $+90°$. Масштабный отрезок полярной системы координат примем и за масштабный отрезок декартовой системы (рис. 39). Пусть r и φ — полярные координаты произвольной точки M плоскости, не совпадающей с полюсом, а x и y — ее декартовы прямоугольные координаты в указанной выше системе.

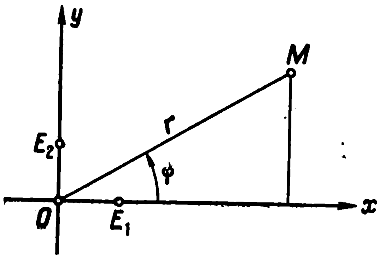


Рис. 39

По определению тригонометрических функций имеем

$$\cos\varphi=\frac{x}{r},\quad \sin\varphi=\frac{y}{r},$$

откуда

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi. \tag{1}$$

Так как

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \tag{2}$$

то

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3}$$

Формулы (1) позволяют вычислить декартовы прямоугольные координаты x и y точки M по ее полярным координатам r и φ. Формулы (2) и (3) позволяют вычислить полярные координаты r и φ точки M по ее декартовым координатам x и y.

Отметим, что формулы (1) верны и для обобщенных полярных координат (т. е. для радикала $\sqrt{x^2+y^2}$ во всех формулах (2) и (3) можно брать и отрицательное значение).

§ 19. Полярная система координат в пространстве. Полярные и сферические координаты

Рассмотрим в пространстве ориентированную плоскость П. Пусть Oz — ось, перпендикулярная плоскости П и пересекающая ее в точке O, а Ox — луч, лежащий в плоскости П и выходящий из точки O. Выберем масштабный отрезок.

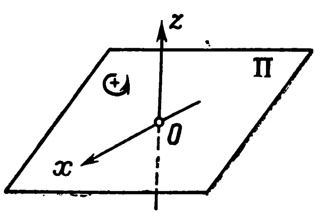


Рис. 40

Ориентированная плоскость П называется экваториальной, ось Oz — зенитной, луч Ox — полярной осью, а точка O — полюсом.

Совокупность этих элементов называется полярной системой координат в пространстве (рис. 40).

Цилиндрическими координатами точки M, не лежащей на зенитной оси, называется упорядоченная тройка чисел ρ, φ, z, где ρ и φ — полярные координаты ортогональной проекции P точки M на экваториальную плоскость (в полярной системе экваториальной плоскости с полюсом O, полярной осью Ox и выбранной единицей масштаба), а z — координата на зенитной оси Oz проекции Q точки M на зенитную ось (рис. 41). Для точек зенитной оси считают $\rho=0$, φ — любое число, а z определяется так, как указано выше.

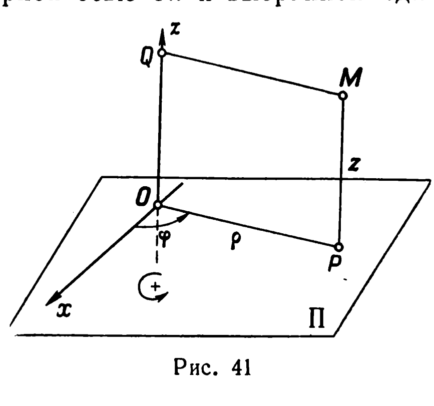


Рис. 41

Заметим, что при помощи цилиндрических координат не устанавливается взаимно однозначного соответствия между множеством всех точек пространства и множеством упорядоченных троек действительных чисел.

Сферическими координатами точки M, не лежащей на зенитной оси, называется упорядоченная тройка чисел r, φ, θ, где r — длина отрезка OM, φ — угол от полярной оси Ox до луча OP

(P — проекция M на экваториальную плоскость), а θ — угол между лучами OP и OM, который принимает значения в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, причем считается, что $\theta = 0$, если точка M лежит в экваториальной плоскости, $\theta > 0$, если луч OM образует острый угол с зенитной осью, и $\theta < 0$, если луч OM образует с зенитной осью тупой угол (рис. 42).

Если точка M лежит на зенитной оси и не совпадает с полюсом O, то считают, что φ — любое число, а $\theta = +\frac{\pi}{2}$ или $\theta = -\frac{\pi}{2}$ в зависимости от того, совпадает ли направление луча OM с направлением зенитной оси или противоположно ему. Для полюса считают $r = 0$, φ и θ — любые числа. При помощи сферических координат не устанавливается взаимно однозначного соответствия между множеством всех точек пространства и множеством упорядоченных троек действительных чисел.

Пусть в пространстве введена полярная система координат. Введем еще декартову прямоугольную систему координат, принимая за положительную полуось Ox полярную ось, за ось Oy — ось, полученную из оси Ox поворотом ее вокруг полюса в экваториальной плоскости на угол $+90°$ и зенитную ось за ось Oz (рис. 43). Пусть P — проекция точки M на экваториальную плоскость. Обозначая через ρ длину отрезка OP, находим

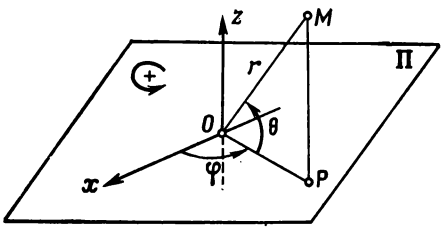


Рис. 42

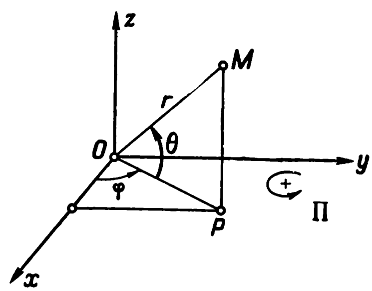


Рис.43

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

С другой стороны, $\rho = r \cos \theta$, значит,

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi, \\ y &= r \cos \theta \sin \varphi. \\ \text{Кроме того, ясно, что} \quad z &= r \sin \theta. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Формулы (1) верны и для того случая, когда точка M лежит на зенитной оси и когда она совпадает с полюсом (при дополнительных соглашениях о величинах φ и θ в этом случае).

По формулам (1) вычисляются декартовы прямоугольные координаты точки M в случае, если известны ее сферические координаты.

Из формул (1) следует, что

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$
$$x^2+y^2=\rho^2=r^2\cos^2\theta,$$

откуда

$$r\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2},$$

значит,

$$\left.\begin{aligned} r&=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\ \cos\varphi&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \sin\varphi&=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \sin\theta&=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

По этим формулам вычисляются сферические координаты r, φ, θ точки M, не лежащей на зенитной оси по ее декартовым прямоугольным координатам x, y, z (при указанном взаимном расположении этих двух систем координат).

Замечание. Вторую сферическую координату φ часто называют долготой, третью θ — широтой. Иногда вместо широты θ рассматривают угол ψ между положительным направлением зенитной оси и лучом OM, идущем из полюса O в данную точку M; величина ψ изменяется в пределах от 0 до π. Величина ψ называется зенитным расстоянием.

Так как $\theta=\frac{\pi}{2}-\psi$, то в формулах (1) и (2) (в случае, если за третью сферическую координату принимается зенитное расстояние) $\cos\theta$ и $\sin\theta$ следует заменить соответственно на $\sin\psi$ и $\cos\psi$.

§ 20. Задачи к главе II

1. Задачи с решениями

Пример 1. Точка C делит невырожденный направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ ($\neq \pm 1$). Точка D делит тот же отрезок в отношении $-\lambda$. В каком отношении делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ середина M отрезка CD.

Решение. Введем на прямой AB систему координат, принимая точку A за начало координат, а точку B за единичную точку. Тогда координаты x'

и x'' точек C и D будут

$$x'=\frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad x''=\frac{-\lambda}{1-\lambda},$$

а координата x середины M отрезка CD

$$x=\frac{x'+x''}{2}=-\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{-\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}}{1+\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}}=-\lambda^2.$$

Отсюда, между прочим, следует, что точка M лежит вне отрезка AB.

Пример 2. В точках $A(x_1)$ и $B(x_2)$ сосредоточены массы m_1 и m_2. Найти координату центра тяжести этой системы материальных точек.

Решение. Центр тяжести C лежит между точками A и B и делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $m_2:m_1$. Поэтому координата x центра тяжести определяется по формуле

$$x=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}.$$

Замечание. Методом полной индукции доказывается, что координата x центра тяжести системы из n точек:

$$M_1(x_1),\ M_2(x_2),\ \ldots,\ M_n(x_n),$$

в которых помещены массы, соответственно равные $m_1, m_2, \ldots, m_n$, определяется по формуле

$$x=\frac{x_1m_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

Пример 3. Найти координаты центра $M(x, y)$ и радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC с вершинами

$$A(1, 2),\ B(-1, 0),\ C(3, -1).$$

Решение. Имеем $MA=MB=MC$, $MA^2=MB^2=MC^2$, или $(x-1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+y^2=(x-3)^2+(y+1)^2$.

Решая эту систему уравнений, получим $x=\frac{11}{10}$, $y=-\frac{1}{10}$. Центр $M\left(\frac{11}{10}, -\frac{1}{10}\right)$; радиус

$$r=AM=\sqrt{\left(1-\frac{11}{10}\right)^2+\left(2+\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{442}}{10}$$

Пример 4. Найти центр $M(x, y)$ и радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC с вершинами:

$$A(9, 2),\ B(0, 20),\ C(-15, -10).$$

Решение. Пусть $D(x', y')$ — точка пересечения биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC со стороной BC (рис. 44). Тогда точка D делит направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$ в отношении

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{(9-0)^2+(2-20)^2}}{\sqrt{(9+15)^2+(2+10)^2}}=\frac{3}{4}.$$

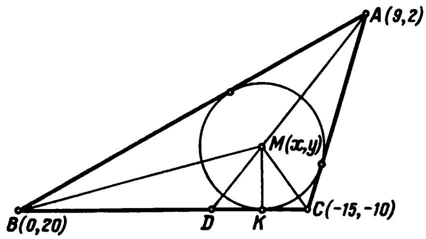


Рис. 44

Поэтому координаты точки D будут

$$x'=\frac{\frac{3}{4}\cdot(-15)}{1+\frac{3}{4}}=-\frac{45}{7},$$

$$y'=\frac{20+\frac{3}{4}\cdot(-10)}{1+\frac{3}{4}}=\frac{50}{7}.$$

Далее, так как

$$BC=\sqrt{(-15-0)^2+(-10-20)^2}=15\sqrt{5}$$

и

$$\frac{BD}{DC}=\frac{3}{4}, \text{ то } \frac{BD+DC}{DC}=\frac{7}{4}, \quad \frac{BC}{DC}=\frac{7}{4},$$

потому $DC=\frac{4}{7}\cdot 15\sqrt{5}=\frac{60\sqrt{5}}{7}$. Далее,

$$\frac{AM}{MD}=\frac{AC}{CD}=\frac{12\sqrt{5}\cdot 7}{60\sqrt{5}}=\frac{7}{5},$$

а потому координаты точки M будут

$$x=\frac{9+\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{45}{7}\right)}{1+\frac{7}{5}}=0, \quad y=\frac{2+\frac{7}{5}\cdot\frac{50}{7}}{1+\frac{7}{5}}=5.$$

Центр вписанной окружности $M(0, 5)$. Радиус MK вписанной окружности можно найти из соотношения

$$\frac{1}{2}BC\cdot MK=\text{пл. } \triangle BCM,$$

или

$$\frac{1}{2}15\sqrt{5}\cdot MK=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\left|\begin{vmatrix} 0 & 20 & 1 \\ -15 & -10 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}\right|,$$

$$\frac{15\sqrt{5}}{2}\cdot MK=\frac{15^2}{2}, \quad MK=3\sqrt{5}.$$

Пример 5. На ориентированной плоскости задан невырожденный ориентированный треугольник $\overrightarrow{ABC}$. Пусть M — произвольная точка плоскости. Числа

$$\alpha=\frac{\overline{BCM}}{\overline{ABC}}, \quad \beta=\frac{\overline{CAM}}{\overline{ABC}}, \quad \gamma=\frac{\overline{ABM}}{\overline{ABC}}$$

называются барицентрическими координатами точки M относительно ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$. Если точка M лежит внутри треугольника ABC, то все треугольники

$$\overrightarrow{BCM},\quad \overrightarrow{CAM},\quad \overrightarrow{ABM},\quad \overrightarrow{ABC}$$

имеют одинаковую ориентацию и, значит, все числа $\overline{BCM}$, $\overline{CAM}$, $\overline{ABM}$ и $\overline{ABC}$ имеют один и тот же знак; поэтому для любой точки M, лежащей внутри треугольника ABC, имеем $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Если точка M переходит через какую-нибудь одну из сторон треугольника ABC, то соответствующая барицентрическая координата меняет знак; например, для всех точек области, ограниченной отрезком BC и продолжениями отрезков AB и AC за точки B и C, имеем $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Наконец, если точка M лежит на одной из прямых BC, CA или AB, то соответствующая барицентрическая координата равна нулю.

На рисунке 45 показано распределение знаков барицентрических координат точки M в зависимости от ее положения относительно прямых BC,

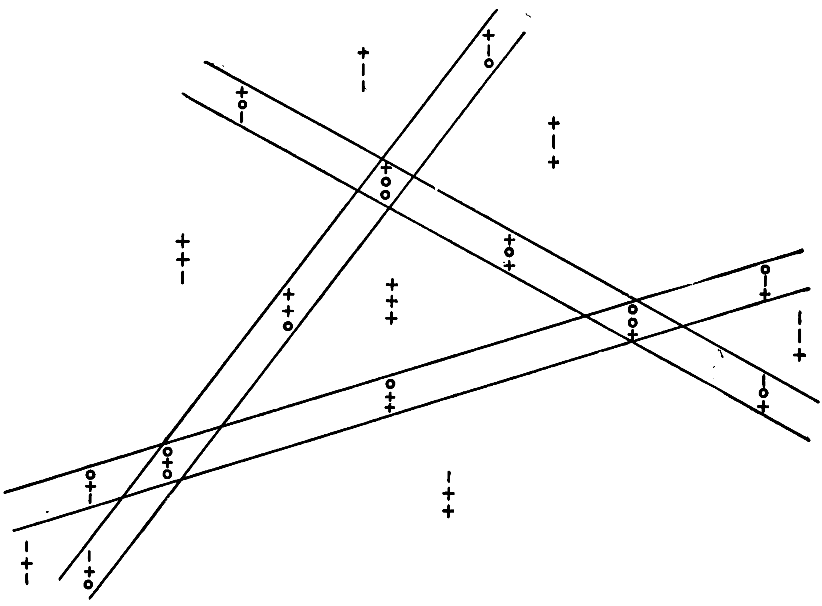


Рис 45

CA и AB (стороны изображены в виде полос). Если вершины невырожденного ориентированного треугольника заданы относительно общей декартовой системы координат $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, а точка M имеет координаты x и y, то

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x & y & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}},\quad \beta=\frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x & y & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}},\quad \gamma=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x & y & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}}$$

и, вычисляя α, β, γ, можно по их знакам (без чертежа) определить расположение точки M относительно треугольника ABC.

Пример 6. Относительно общей декартовой системы координат заданы четыре точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ и $D(x_4, y_4)$. При каком необходимом и достаточном условии эти четыре точки могут служить вершинами выпуклого четырехугольника?

Решение. Это будет тогда и только тогда, когда треугольник ABC невырожденный, а точка D находится с одной из трех областей, каждая из которых ограничена стороной треугольника ABC и продолжениями двух других за граничные точки этой стороны. Пусть α, β, γ — барицентрические координаты точки D относительно треугольника $\overrightarrow{ABC}$. Только одно из чисел α, β, γ должно быть отрицательно, а два других — положительны. Значит, искомое необходимое и достаточное условие $\alpha\beta\gamma < 0$, или

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} < 0.$$

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что если A, B, C, D — четыре произвольные точки, лежащие на оси, то

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0.$$

2. Точки P и Q делят невырожденный направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношениях, соответственно равных λ и μ ($\lambda \neq \mu$, $\mu \neq 0$). В каком отношении точки A и B делят отрезок $\overrightarrow{PQ}$?

Отв. $-\dfrac{\lambda(1+\mu)}{\mu(1+\lambda)}$, $-\dfrac{1+\mu}{1+\lambda}$.

3. Точки P, Q и R делят невырожденный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношениях, соответственно равных λ, μ и ν. В каком отношении точка R делит отрезок $\overrightarrow{PQ}$ ($\nu \neq \mu$)?

Отв. $\dfrac{(1+\mu)(\nu-\lambda)}{(1+\lambda)(\mu-\nu)}$.

4. Точки P и Q делят невырожденный направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношениях, соответственно равных λ и μ. Пусть R — середина отрезка PQ. В каком отношении точка R делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ ($\lambda+\mu \neq -2$)?

Отв. $\dfrac{\lambda+\mu+2\lambda\mu}{2+\lambda+\mu}$.

5. В точках с координатами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 помещены массы, соответственно равные 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Найти координату центра тяжести системы.

Отв 7.

6. На оси Oy найти точку, равноудаленную от точки $(-8, -4)$ и от начала координат.

Отв $(0, -10)$.

7. Найти точку $M(x, y)$, симметричную точке $A(2, -3)$ относительно прямой, проходящей через точки $B(1, 3)$ и $C(-6, -4)$.

Отв. $(-5, 4)$.

8. Найти точки пересечения с осями координат прямой, проходящей через точки $A(3, 4)$ и $B(2, -1)$.

Отв. $\left(\frac{11}{5}, 0\right)$, $(0, -11)$.

9. Найти координаты x и y центра тяжести треугольника ABC с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$.

Отв. $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

10. Даны две смежные вершины $A(-4, -7)$ и $B(2, 6)$ параллелограмма и точка $M(3, 1)$ пересечения его диагоналей. Найти две другие вершины.

Отв. $(10, 9)$ и $(4, -4)$.

11. На прямой, проходящей через точки $(4, 2)$ и $(0, -1)$, найти точки, отстоящие от точки $(-4, -4)$ на расстоянии 5.

Отв. $(-8, -7)$ и $(0, -1)$.

12. Найти расстояние от точки $(2, 0)$ до прямой, проходящей через точки $(1, 1)$ и $(5, 4)$.

Отв. $\frac{7}{5}$.

13. Две вершины треугольника находятся в точках $(5, 1)$ и $(-2, 2)$; третья вершина лежит на оси Ox. Найти координаты третьей вершины, зная, что площадь треугольника равна 10.

Отв. $(32, 0)$ и $(-8, 0)$.

14. Относительно общей декартовой системы координат даны вершины $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ невырожденного треугольника ABC. Пусть α, β, γ — барицентрические координаты точки M относительно треугольника $\overrightarrow{ABC}$. Доказать, что декартовы координаты точки M выражаются следующими формулами:

$$x=\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3, \quad y=\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3. \tag{1}$$

Обратно, если $\alpha+\beta+\gamma=1$, то точка M, декартовы координаты которой выражаются формулами (1), имеет барицентрические координаты α, β, γ.

15. В вершинах невырожденного ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$ помещены массы m_1, m_2, m_3. Найти барицентрические координаты центра тяжести этой системы материальных точек относительно треугольника.

Отв. $\alpha=\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}$, $\beta=\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}$, $\gamma=\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}$. Отсюда $\alpha:\beta:\gamma=m_1:m_2:m_3$.

16. Относительно невырожденного ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$ заданы две различные точки $P(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $Q(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ своими барицентрическими координатами. Точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{PQ}$ в отношении λ. Найти барицентрические координаты точки M.

Отв. $\alpha=\frac{\alpha_1+\lambda\alpha_2}{1+\lambda}$, $\beta=\frac{\beta_1+\lambda\beta_2}{1+\lambda}$, $\gamma=\frac{\gamma_1+\lambda\gamma_2}{1+\lambda}$.

17. Относительно невырожденного ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$, лежащего на ориентированной плоскости, заданы три точки $P(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$,

$Q(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $R(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ своими барицентрическими координатами. Найти

$$\frac{\overline{PQR}}{\overline{ABC}},$$

в частности, найти необходимое и достаточное условие принадлежности трех точек P, Q, R одной прямой.

Отв. $\dfrac{\overline{PQR}}{\overline{ABC}} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$

18. Найти в плоскости Oxz точку, равноудаленную от трех точек: $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 1, 0)$ и $C(3, 1, -1)$.

Отв. $\left(\dfrac{5}{6}, 0, -\dfrac{7}{6}\right)$.

19. Определить внутренние углы треугольника с вершинами $A(1, 2, -4)$, $B(4, 0, -10)$, $C(-2, 6, 8)$.

Отв. $A = \arccos\left(-\dfrac{89}{91}\right)$, $B = \arccos\dfrac{23}{7\sqrt{11}}$, $C = \arccos\dfrac{36}{13\sqrt{11}}$.

ГЛАВА III

ЛИНИИ, ПОВЕРХНОСТИ И ИХ УРАВНЕНИЯ

I. ЛИНИЯ И ЕЕ УРАВНЕНИЯ

§ 21. О понятии линии и ее уравнениях

Понятие линии является одним из самых трудных понятий математики. Общее определение линии дается в специальной математической дисциплине — топологии. Оно было получено лишь в 20-х годах текущего столетия советским математиком П. С. Урысоном.

Не останавливаясь на определении линий *, мы дадим лишь определение того, что называется уравнением линии.

Определение I. *Уравнением линии в декартовой системе координат называется уравнение*

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

которому удовлетворяют координаты x, y всех точек этой линии и только координаты таких точек.

В частности, уравнение линии может иметь вид

$$y = f(x). \tag{2}$$

Уравнением линии в полярной системе координат называется уравнение

$$\Phi(r, \varphi) = 0, \tag{3}$$

которому удовлетворяют полярные координаты r и φ всех точек этой линии и только координаты таких точек.

В частности, уравнение линии в полярных координатах может иметь вид

$$r = r(\varphi). \tag{4}$$

---

* См., например, А. С. Пархоменко. Что такое линия. М., Гостехиздат. 1954, или П. С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики, т. II, о канторовых многообразиях, ч. II, канторовы кривые.

Определение II. *Параметрическими уравнениями линии в декартовой системе координат называются уравнения вида*

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют одну и ту же область определения, каждому значению t из этой области соответствует точка $M(x(t),\ y(t))$ рассматриваемой линии и каждая точка M этой линии соответствует некоторому значению t из области определения функций $x(t)$ и $y(t)$, т. е. для любой точки M линии найдется такое значение t, что $x(t)$ и $y(t)$ будут координатами точки M. Аналогично определяются параметрические уравнения линии в полярных координатах.

§ 22. Примеры составления уравнений линии

Пример 1. Рассмотрим окружность S радиуса r с центром в точке $C(a, b)$ заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат (рис. 46) Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Точка M лежит на окружно

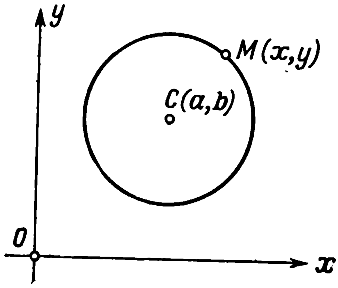


Рис. 46

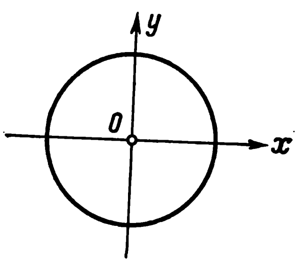


Рис. 47

сти S тогда и только тогда, когда расстояние между точками M и C равно радиусу r окружности S.

Расстояние между точками M и C равно

$$MC = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

поэтому уравнение окружности S имеет вид

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \tag{1}$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0. \tag{1'}$$

В частности, уравнение окружности радиуса r с центром в начале координат имеет вид (рис. 47)

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{2}$$

или

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \tag{2'}$$

Уравнение (1′) (и (2′)) называется нормальным уравнением окружности.

Замечание. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, а A и B — точки пересечения с окружностью S прямой, проходящей через центр C окружности (1′) и точку M. Тогда, выбирая на этой прямой положительное направление, имеем

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 &= MC^2 - r^2 = \\ &= MC^2 - CA^2 = \overline{MC}^2 - \overline{CA}^2 = \\ &= (\overline{MC} + \overline{CA})(\overline{MC} - \overline{CA}) = \\ &= (\overline{MC} + \overline{CA})(\overline{MC} + \overline{CB}) = \overline{MA}\cdot\overline{MB}.\end{aligned}$$

Произведение $\sigma = \overline{MA}\cdot\overline{MB}$ равно произведению $\overline{MP}\cdot\overline{MQ}$, где P и Q — точки пересечения с окружностью S любой секущей (на которой произвольным образом выбрано положенное направление), проходящей через точку M; оно называется степенью точки M относительно окружности S.

Таким образом, левая часть $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$ нормального уравнения окружности S, где x и y — координаты **любой** точки M плоскости есть степень точки M относительно окружности S:

$$\sigma = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2.$$

Если точка M лежит вне окружности S, то координаты $\overline{MP}$ и $\overline{MQ}$ направленных ненулевых отрезков $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$ имеют одинаковые знаки, значит $\sigma > 0$, а если точка M лежит внутри окружности S, то $\sigma < 0$; впрочем, это ясно и из того, что $\sigma = MC^2 - r^2$; отсюда также следует, что если точка M лежит вне окружности S, то ее степень относительно этой окружности равна квадрату длины отрезка MT, где T — точка прикосновения к окружности S, касательной к ней, проведенной из точки M.

Если точка M лежит на окружности S, то по крайней мере один из направленных отрезков $\overrightarrow{MP}$ или $\overrightarrow{MQ}$ — нулевой и, значит, $\sigma = 0$ — степень точки M, лежащей на окружности относительно этой окружности, равна нулю.

Пример 2. Составить уравнение линии, отношение расстояний каждой точки которой до двух данных различных точек A и B равно числу m — одному и тому же для всех точек линии.

Решение. Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, принимая за начало координат середину O отрезка AB, а точку A — за единичную точку оси Ox; тогда координаты точки A будут 1, 0, а координаты точки B будут $-1, 0$.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Она будет лежать на данной линии тогда и только тогда, когда

$$\frac{MA}{MB} = m, \text{ или } MA^2 = m^2 MB^2,$$

или

$$(x-1)^2 + y^2 = m^2\,[(x+1)^2 + y^2],$$

или, считая $m \neq 1$ после ряда тождественных преобразований, получим

$$\left(x - \frac{1+m^2}{1-m^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4m^2}{(1-m^2)^2}.$$

Это уравнение является уравнением окружности* с центром в точке $C\left(\frac{1+m^2}{1-m^2}, 0\right)$ и радиусом $r = \frac{2m}{|1-m^2|}$.

* Эта задача была рассмотрена Апполонием в работе о конических сечениях. Поэтому окружность, определяемую свойством, указанным в условии задачи, называют иногда окружностью Апполония.

Пример 3. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до трех данных точек A, B, C равна данному числу m.

Решение. Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Пусть x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 — координаты точек A, B и C. Точка $M(x, y)$ принадлежит данному геометрическому месту тогда и только тогда, когда

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=m,$$

или

$$3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-\right.$$
$$\left.-2x_2x_3-2x_3x_1+2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2-2y_1y_2-2y_2y_3-2y_3y_1\right)=m,$$

или

$$3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left[(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+\right.$$
$$\left.+(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]=m,$$

или окончательно

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\frac{m}{3}-\frac{a^2+b^2+c^2}{9},$$

где

$$x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \qquad y_0=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$

а a, b, c — длины отрезков BC, CA и AB.

Таким образом, если

$$m<\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

то данное геометрическое место пустое. Если

$$m=\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

то данное геометрическое место точек содержит только одну точку $M_0(x_0, y_0)$. Если $m>\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$, то данное геометрическое место точек является окружностью с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом $r=\frac{1}{3}\sqrt{3m-(a^2+b^2+c^2)}$.

Заметим, что если точки A, B, C неколлинеарны, то M_0 — точка пересечения медиан треугольника ABC, а a, b, c — длины его сторон.

Замечание. На основании предыдущего

$$MA^2+MB^2+MC^2=3\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=3M_0M^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Значит, сумма квадратов расстояний от точки M до точек A, B, C имеет наименьшее значение, если точка M совпадает с точкой M_0 (иначе с центром тяжести системы равных масс, помещенных в точках A, B, C).

Имеет место (и аналогично доказывается) следующее положение: сумма

$$M_1M^2+M_2M^2+\ldots+M_nM^2$$

имеет минимальное значение, если точка M совпадает с центром тяжести системы n равных масс, помещенных в точках M_1, M_2, ..., M_n (точки M_1, M_2, ..., M_n могут и не лежать в одной плоскости).

Пример 4. Составить уравнение линии, произведение расстояний любой точки которой до двух данных точек F_1 и F_2 равно данному числу b^2.

Решение. Пусть расстояние между точками F_1 и F_2 равно $2a$. За начало O декартовой прямоугольной системы координат на плоскости примем середину отрезка F_1F_2, а прямую F_1F_2 с положительным направлением от O к F_2 примем за ось Ox. Точка F_1 в выбранной системе координат имеет координаты $-a$, 0, а точка F_2—a, 0.

Согласно условию задачи

$$MF_1 \cdot MF_2 = b^2, \quad \text{или} \quad MF_1^2 \cdot MF_2^2 = b^4.$$

Применяя формулу расстояния между двумя точками, находим

$$MF_1^2 = (x+a)^2 + y^2, \quad MF_2^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

и соотношение $MF_1^2 \cdot MF_2^2 = b^4$ принимает вид

$$[(x+a)^2 + y^2]\,[(x-a)^2 + y^2] = b^4,$$
$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2\,(y^2 - x^2) = b^4 - a^4.$$

Линии, определяемые этим уравнением, называются овалами* Кассини. Изображения их (для случаев $a > b$, $a = b$, $a < b$) даны на рис. 48. Если $a = b$,

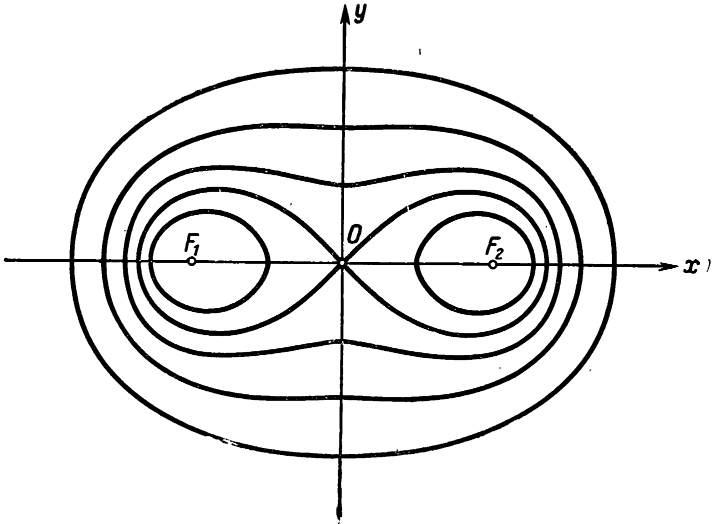


Рис. 48

т. е. если произведение расстояний от точки M до точек F_1 и F_2 равно квадрату половины расстояния между точками F_1 и F_2, то овал Кассини называется лемнискатой Бернулли (рис. 49). Уравнение лемнискаты имеет вид

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2\,(x^2 - y^2).$$

Составим уравнение лемнискаты еще в полярной системе координат, принимая точку O за полюс, а положительную полуось Ox за полярную ось.

* Овалы Кассини не всегда являются овалами в собственном смысле этого термина (выпуклая замкнутая линия).

Заменяя в уравнении лемнискаты x и y их выражениями через полярные координаты

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

получим

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

или *

$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

При изменении φ от $-\frac{\pi}{4}$ до 0 функция $a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ возрастает от 0 до $a\sqrt{2}$, а при изменении φ от 0 до $+\frac{\pi}{4}$ эта функция убывает от $a\sqrt{2}$ до 0; получается петля, расположенная в первой и четвертой четвертях; при изменении φ от $\frac{3\pi}{4}$ до $\frac{5\pi}{4}$ получается другая петля, расположенная во второй и третьей четвертях, симметричная первой относительно полюса.

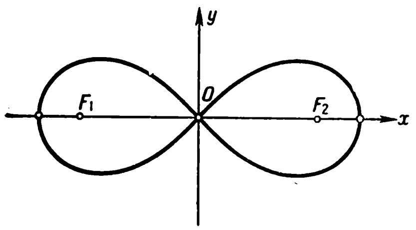


Рис. 49

Значениям φ, для которых $\cos 2\varphi < 0$ соответствуют мнимые значения функции $\sqrt{2\cos 2\varphi}$, следовательно, этим значениям φ не соответствуют никакие точки лемнискаты.

Что касается построения овалов Кассини, то точки этих линий удобнее всего строить, исходя из геометрического определения линии.

Уравнения линий иногда удобно составлять в полярной системе координат. Рассмотрим следующий пример.

Пример 5. Дана окружность C диаметра $OA = a$ и на ней точка O. Вокруг точки O вращается луч OT. Пусть прямая, на которой лежит этот луч, пересекает окружность в точке P. На этой прямой от точки P в направлении

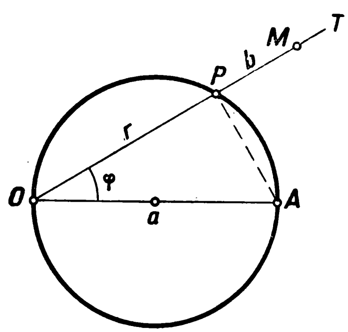


Рис. 50

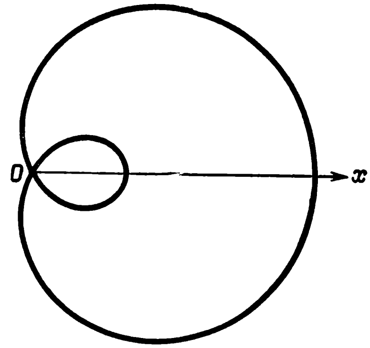


Рис. 51

луча откладываем отрезок $PM = b$. Составить уравнение линии, описываемой точкой M (рис. 50).

---

* Сокращая на r^2, мы не теряем полюса, принадлежащего лемнискате, так как при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ из уравнения $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ находим $r = 0$.

Решение. Примем точку O за полюс, а луч OA — за полярную ось Ox. Пусть r и φ — обобщенные полярные координаты точки M, а r_1, φ — обобщенные полярные координаты точки P. Тогда

$$r = r_1 + b.$$

Но

$$r_1 = a \cos \varphi,$$

где φ — угол от оси Ox до вращающегося луча *.

Поэтому полярное уравнение данной линии будет

$$r = b + a \cos \varphi.$$

Эта линия называется улиткой Паскаля. Строить ее проще всего исходя из геометрического определения (рис. 51).

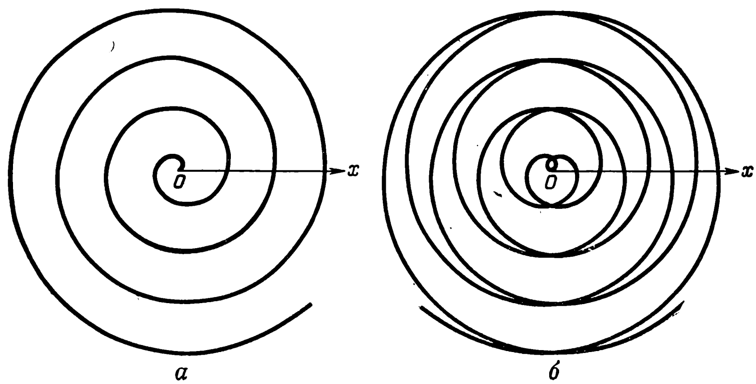


Рис. 52

Пример 6. Рассмотрим окружность радиуса a с центром в начале O декартовой прямоугольной системы координат.

Введем полярную систему координат, принимая начало координат за полюс, а за полярную ось — положительную полуось Ox (ориентация плоскости определяется выбранной декартовой системой координат, а масштабный отрезок декартовой системы координат берем в качестве масштабного и в полярной системе).

Пусть x и y — декартовы координаты произвольной точки M окружности, а a и t — полярные координаты той же точки. Тогда

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t,$$

---

* Если, например $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, то $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $r_1 = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$; это значит (в соответствии с определением обобщенных координат), что при $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ отрезок $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ надо откладывать на продолжении луча OT за точку O. Так именно и строится точка P линии, соответствующая положению луча OT в случае, когда угол от полярной оси до луча OT лежит, например, в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

где параметр t принимает все значения от 0 до 2π. Эти уравнения являются параметрическими уравнениями окружности.

Пример 7. Рассмотрим на плоскости снова две системы координат: декартову прямоугольную и полярную, находящиеся в том же отношении друг к другу, что и в предыдущем примере.

Спиралью Архимеда называется линия, уравнение которой в обобщенных полярных координатах имеет вид

$$r = at,$$

где a — фиксированное число, отличное от нуля, а r и t — полярные координаты точки (r — полярный радиус, t — амплитуда); параметр t принимает все действительные значения (рис. 52). Параметрические уравнения спирали Архимеда в указанной выше декартовой прямоугольной системе координат имеют вид

$$x = at\cos t, \qquad y = at\sin t.$$

Строить спираль Архимеда проще всего исходя из ее полярного уравнения.

Замечание. Составим параметрические уравнения траектории, описываемой точкой M в следующем сложном движении: точка M движется равномерно со скоростью v по прямой, проходящей через полюс O, а прямая равномерно вращается в плоскости вокруг точки O с угловой скоростью ω.

Примем за начало отсчета времени тот момент, когда точка M была в точке O и предположим, что в этот момент вращающаяся прямая совпадала с осью Ox. За время t точка M вращающейся прямой пройдет путь, равный $r = vt$, а прямая повернется на угол $\varphi = \omega t$. Таким образом, полярные координаты точки M:

$$r = vt, \quad \varphi = \omega t.$$

Отсюда

$$r = a\varphi,$$

где $a = \dfrac{v}{\omega}$, т. е. точка движется по спирали Архимеда.

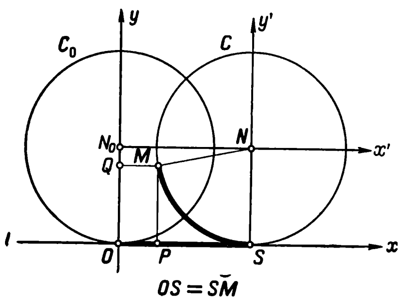


Рис. 53

Уравнения $r = vt$, $\varphi = \omega t$ являются параметрическими уравнениями спирали Архимеда в полярных координатах (считаем, что в этих уравнениях параметр t принимает все действительные значения).

Пример 8. По прямой l катится без скольжения окружность радиуса a. Составить параметрические уравнения линии, которую описывает произвольная точка катящейся окружности (циклоида).

Решение. Пусть C_0 — начальное положение катящейся окружности, N_0 — ее центр, а O — точка, в которой эта окружность касается прямой l (рис. 53). Примем точку O за начало декартовой прямоугольной системы координат, а прямую l, ориентированную в сторону движения, за ось Ox. Произвольное положение катящейся окружности обозначим через C, ее центр — через N, точку, в которую перейдет точка O окружности C_0, когда эта окружность C_0 займет положение C, обозначим через M и наконец точку касания окружности C с осью Ox обозначим через S.

Пусть P и Q — проекции точки M соответственно на оси Ox и Oy. Проведем через точку N оси Nx' и Ny' соответственно параллельные и одинаково направленные с осями Ox и Oy. Обозначив через $t = (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NS})$ значение ориентированного угла от направленного отрезка $\overrightarrow{NM}$ до направленного отрезка

$\overrightarrow{NS}$, имеем:

$$\overline{OS} = \breve{MS} = at.$$

Так как

$$(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{Nx'}) = (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NS}) + (\overrightarrow{NS}, \overrightarrow{Nx'}) = t + \frac{\pi}{2},$$

$$(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{Ny'}) = (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{Nx'}) + (\overrightarrow{Nx'}, \overrightarrow{Ny'}) = t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = t + \pi,$$

то координаты $\overline{SP}$ и $\overline{N_0Q}$ проекций направленного отрезка $\overrightarrow{NM}$ на оси Ox и Oy (соответственно параллельные осям * Nx' и Ny') будут

$$\overline{SP} = a\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -a\sin t,$$

$$\overline{N_0Q} = a\cos(t + \pi) = -a\cos t$$

и потому координаты x и y точки M:

$$x = \overline{OP} = \overline{OS} + \overline{SP} = at - a\sin t = a(t - \sin t),$$

$$y = \overline{OM} = \overline{ON_0} + \overline{N_0Q} = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Уравнения

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

где параметр t принимает все действительные значения, и являются параметрическими уравнениями циклоиды (рис. 54).

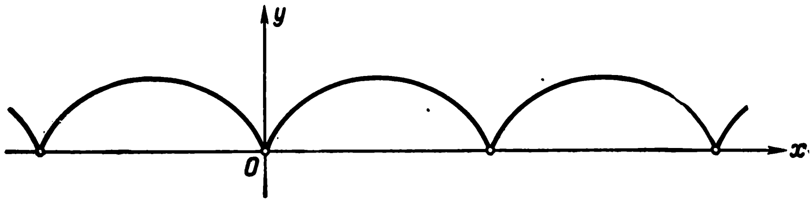


Рис. 54

Наглядное представление о циклоиде мы получаем, наблюдая за движением какой-либо точки колеса, катящегося по прямой.

II. ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 23. Поверхность и ее уравнение

Определение понятия поверхности еще труднее, чем понятие линии, и останавливаться на нем мы не будем.

Уравнением поверхности в общей декартовой или в прямоугольной системе координат называется уравнение

$$F(x, y, z) = 0,$$

* Так как оси Ox и Nx' параллельны и направлены в одну сторону, то угол от оси Ox до направленного отрезка $\overrightarrow{NM}$ равен углу от оси $\overrightarrow{Nx'}$ до того же направленного отрезка. Аналогичное заключение имеет место и по отношению к осям Oy и Ny'.

которое удовлетворяется координатами любой точки, лежащей на этой поверхности и не удовлетворяется координатами точек, не лежащих на поверхности.

Аналогично определяется уравнение поверхности в сферических координатах

$$F(r, \varphi, \theta)=0$$

и в цилиндрических координатах

$$F(\rho, \varphi, z)=0.$$

В частности, уравнение поверхности в декартовой системе координат может быть задано в виде, разрешенном относительно одной из координат, например в виде

$$z=f(x, y).$$

Наконец, поверхность может быть задана параметрическими уравнениями.

Параметрическими уравнениями поверхности П в декартовой системе координат называются уравнения вида

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v),$$

где функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$ имеют одну и ту же область определения D (которая представляет собой множество упорядоченных пар чисел u, v); каждой паре чисел u, v из этой области D соответствует точка $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ поверхности П, и для любой точки M поверхности П найдется пара чисел u, v из области D, такая, что $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ будут координатами точки M. Числа u и v называются криволинейными (или внутренними) координатами точки M. Аналогично определяются параметрические уравнения линии в цилиндрических и сферических координатах.

§ 24. Примеры составления уравнений поверхностей

Пример 1. Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат. Рассмотрим сферу S радиуса a с центром в точке $C(x_0, y_0, z_0)$. Точка $M(x, y, z)$ лежит на сфере S тогда и только тогда, когда длина отрезка CM равна a (рис. 55) или тогда и только тогда, когда $CM^2=a^2$ или (см. § 12)

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2.$$

В частности, уравнение сферы радиуса a с центром в начале координат имеет вид

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Пример 2. Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$, а кроме того, — полярную, принимая положительную полуось Ox

за полярную ось, за экваториальную плоскость — плоскость xOy, причем ориентируем ее треугольником $\overrightarrow{E_1E_2O}$ (E_1 и E_2 — масштабные точки осей Ox и Oy), а за зенитную ось — ось Oz. Рассмотрим сферу S радиуса a с центром в начале координат. Возьмем на этой сфере произвольную точку $M(x, y, z)$, обозначим

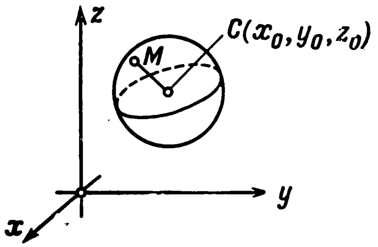


Рис. 55

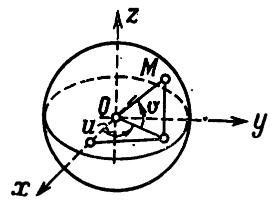


Рис. 56

ее долготу и широту соответственно через u и v (рис. 56). Тогда (см. § 19, формулы (1))

$$x = a\cos v\cos u, \quad y = a\cos v\sin u, \quad z = a\sin v;$$

таковы параметрические уравнения рассматриваемой сферы S. Криволинейные координаты точки M — это ее долгота u и широта v. Область D изменения параметров u, v такова:

$$0 \leqslant u < 2\pi, \; -\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что сферу S в сферических координатах можно записать уравнением $r = a$.

Пример 3. Составим уравнение прямой круговой конической поверхности K, вершина которой находится в начале декартовой прямоугольной системы координат, а острый угол между образующими поверхности и осью Oz (положительное направление на оси Oz не учитывается) равен α.

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка поверхности K; тогда расстояние MQ от этой точки M до оси Oz равно расстоянию $M'O$ от проекции $M'(x, y, 0)$ точки $M(x, y, z)$ в плоскость xOy до начала координат (рис. 57), т. е.

$$MQ = M'O = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

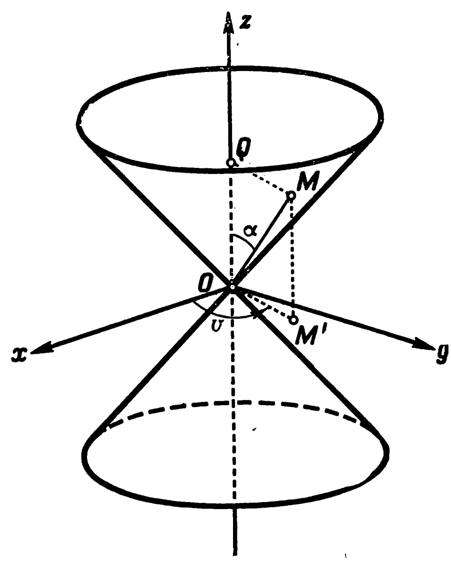


Рис. 57

С другой стороны,

$$MQ = OQ\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

а так как $OQ = |z|$, то из последних соотношений находим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |z|\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

откуда

$$x^2 + y^2 - z^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha = 0.$$

Обратно, если координаты некоторой точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют последнему уравнению, то

$$x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha,$$

откуда

$$\sqrt{x^2+y^2}=|z|\operatorname{tg}\alpha \text{ или } MQ=OQ\operatorname{tg}\alpha,$$

а значит, точка M лежит на прямой, проходящей через начало координат и наклоненной к оси Oz под углом α, т. е. точка M лежит на поверхности K.

Наряду с декартовой прямоугольной системой координат введем полярную, как это сделано в § 19 (и в предыдущем примере). Обозначим через u расстояние от точки M до начала координат, а через v — долготу точки M. Тогда

$$x=u\cos v\sin\alpha,\quad y=u\sin v\sin\alpha,\quad z=u\cos\alpha.$$

Однако этими параметрическими уравнениями не задается вся поверхность K (так как $z=u\cos\alpha\geqslant 0$). Для задания параметрическими уравнениями всей поверхности K следует считать, что u принимает все действительные значения.

Таким образом, область D изменения параметров u и v такова:

$$0\leqslant v<2\pi,\quad -\infty<u<+\infty. \qquad (D)$$

При таком выборе области D изменения параметров u и v предыдущие уравнения являются параметрическими уравнениями поверхности K.

Заметим, что часть поверхности K, соответствующая неотрицательным значениям u (т. е. одна полость конической поверхности K), в сферических координатах может быть записана уравнением вида

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

а обе полости, т. е. вся поверхность K, — двумя уравнениями:

$$\theta=\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

(знак + соответствует „верхней" части поверхности K; знак — „нижней").

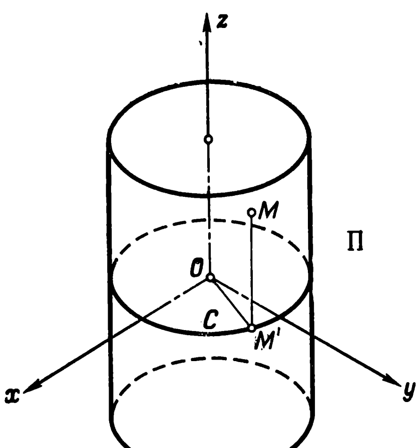


Рис. 58

Пример 4. Докажем, что уравнение

$$x^2+y^2=a^2, \text{ где } a>0,$$

в декартовой прямоугольной системе координат является уравнением прямой круговой цилиндрической поверхности П с образующими, параллельными оси Oz, причем плоскость xOy пересекает эту поверхность по окружности C радиуса a с центром в начале координат.

В самом деле, координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=a^2$ тогда и только тогда, когда координаты $M'(x, y, 0)$ проекции точки M на плоскость xOy удовлетворяют этому уравнению, а это значит, что точка M лежит на поверхности, заданной уравнением $x^2+y^2=a^2$ тогда и только тогда, когда ее проекция M' на плоскость xOy лежит на окружности C ($\sqrt{x^2+y^2}=OM'$). Значит, $x^2+y^2=a^2$ есть уравнение цилиндрической поверхности П, описанной выше (рис. 58).

Пример 5. Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат. Предположим, что плоскость α, оставаясь параллельной плоскости xOy, движется равномерно со скоростью a в положительном направлении оси Oz, а в плоскости α равномерно вращается вокруг точки пересечения ее с осью Oz прямая l с угловой скоростью ω.

Тогда поверхность, описываемая прямой l в указанном сложном движении, называется геликоидом (рис. 59).

Составим параметрические уравнения геликоида, считая, что в начальный момент времени $v=0$ плоскость α совпадает с плоскостью xOy, а прямая l совпадает с осью Ox. Возьмем на геликоиде произвольную точку $M\ (x,\ y,\ z)$.

Ориентируем прямую l и положим $\overline{NM}=u$, где N — точка пересечения прямой l с осью Oz (рис. 60).

Пусть v — промежуток времени, за который прямая l из своего начального положения перейдет в положение прямой MN. Обозначим через R проекцию точки

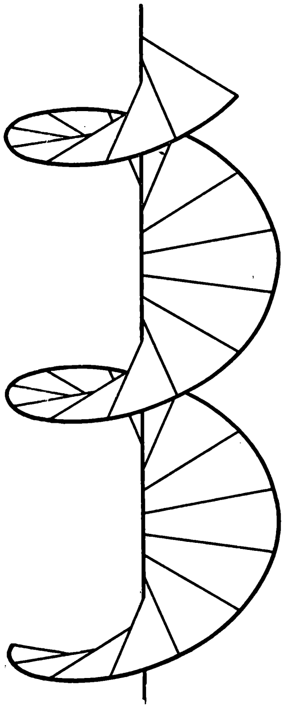


Рис. 59

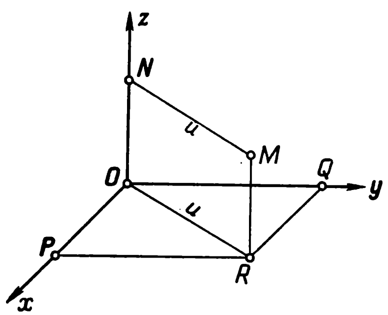


Рис. 60

M на плоскость xOy, а через P и Q — проекции точки R соответственно на оси Ox и Oy. Тогда $\overline{OR}=u$, а угол от оси Ox до OR равен ωv. Поэтому

$$x=\overline{OP}=\overline{OR}\cos(\omega v)=u\cos(\omega v),$$

$$y=\overline{OQ}=\overline{OR}\sin(\omega v)=u\sin(\omega v),$$

$$z=\overline{RM}=av.$$

Итак, параметрические уравнения геликоида:

$$x=u\cos(\omega v),\quad y=u\sin(\omega v),\quad z=av.$$

Параметры u и v принимают все действительные значения.

§ 25. Цилиндрические и конические поверхности

1. Цилиндрические поверхности

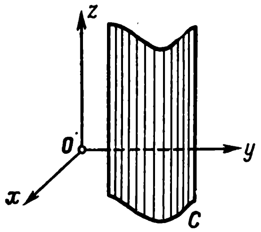
Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная параллельными между собой прямыми λ, называемыми ее образующими.

Если какая-нибудь плоскость, пересекающая все образующие цилиндрические поверхности, пересекает ее по линии C, то эта линия называется **направляющей** этой цилиндрической поверхности.

Теорема 1. *Если в пространстве введена общая декартова система координат, и уравнение*

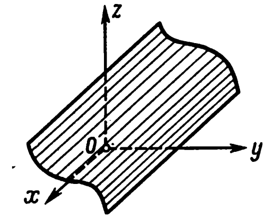
$$F(x, y) = 0$$

в плоскости xOy является уравнением некоторой линии C, то это уравнение в пространстве есть уравнение цилиндрической поверхности Π с направляющей линией C, а образующие параллельны оси Oz (рис. 61).



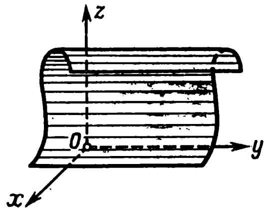
$F(x,y)=0$

Рис. 61



$F(y,z)=0$

Рис. 62



$F(z,x)=0$

Рис. 63

Доказательство. Точка $M(x, y, z)$ лежит на цилиндрической поверхности Π тогда и только тогда, когда проекция $M'(x, y, 0)$ точки M на плоскость xOy параллельно оси Oz лежит на линии C, т. е. тогда и только тогда, когда выполняется уравнение $F(x, y) = 0$.

Теорема 2 (обратная). *Если Π — цилиндрическая поверхность, направляющей которой является плоская линия C, а образующие поверхности Π параллельны некоторой прямой l, не лежащей в плоскости линии C, то существует система координат, в которой уравнение поверхности Π имеет вид*

$$F(x, y) = 0.$$

Доказательство. Введем общую декартову систему координат $Oxyz$, совмещая плоскость xOy с плоскостью, в которой расположена линия C, и принимая за ось Oz — ось, параллельную прямой l. Пусть

$$F(x, y) = 0$$

уравнение линии C в плоскости xOy. На основании предыдущей теоремы это уравнение в пространстве во введенной системе координат является цилиндрической поверхностью П.

Замечание 1. Аналогичные заключения имеют место для уравнений вида $F(y, z) = 0$ и $F(z, x) = 0$ (рис. 62 и 63).

Замечание 2. Если линия C на плоскости xOy задана параметрическими уравнениями $x = x(u)$, $y = y(u)$, то параметрические уравнения поверхности П с направляющей C, образующие которой параллельны оси Oz, можно записать в виде

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = v.$$

Пример 1. Уравнение

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = a^2$$

в декартовой прямоугольной системе xOy на плоскости является уравнением окружности C с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом a. Если ввести ось Oz, не лежащую в плоскости xOy, то в полученной общей декартовой системе координат $Oxyz$ это же уравнение в пространстве является уравнением наклонного цилиндра, образующие которого параллельны оси Oz, а направляющая — окружность C. Сечения этой цилиндрической поверхности плоскостями, параллельными плоскости xOy, — окружности, полученные переносом окружности C вдоль оси Oz.

Пример 2. Уравнение

$$y = ax^2+bx+c, \quad \text{где } a \neq 0,$$

в декартовой прямоугольной системе координат xOy на плоскости является уравнением параболы C. Присоединяя ось Oz, не лежащую в плоскости xOy, получим пространственную систему координат $Oxyz$, относительно которой уравнение $y = ax^2+bx+c$ является уравнением цилиндра, направляющая которого — парабола C, а образующие параллельны оси Oz (параболический цилиндр).

2. Конические поверхности

Определение 1. *Конической поверхностью называется поверхность, образованная множеством прямых λ, проходящих через одну точку S, называемую вершиной этой поверхности. Прямые λ называются образующими конической поверхности.*

Если какая-нибудь плоскость, не проходящая через вершину конической поверхности и пересекающая все ее образующие, пересекает коническую поверхность по линии C, то эта линия называется направляющей конической поверхности.

Определение 2. *Функция $F(x, y, z)$ называется однородной, если она обладает следующими свойствами:*

1) *если точка (x, y, z) входит в область определения функции $F(x, y, z)$, то точка (kx, ky, kz), где k — любое число, также входит в область определения этой функции;*

2) *существует такое число n, что для любой точки (x, y, z) из области определения функции $F(x, y, z)$ и для любого числа k выполняется соотношение*

$$F(kx, ky, kz) = k^n F(x, y, z).$$

Число n называется показателем однородности.

Теорема. *Если уравнение*

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ — однородная функция, в декартовой системе координат является уравнением поверхности K, то эта поверхность коническая, причем вершина конуса лежит в начале координат.

Доказательство. Если точка $M(x, y, z)$ (отличная от начала координат) лежит на поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, то на той же поверхности лежит точка (kx, ky, kz), где k — любое число. В самом деле,

$$F(kx, ky, kz) = k^n F(x, y, z) = 0. \qquad (1)$$

Если k принимает все действительные значения, то точка (kx, ky, kz) описывает всю прямую, проходящую через точку M и начало координат O, так как точка (kx, ky, kz) в случае $k \neq 0$ делит направленный отрезок $\overrightarrow{MO}$ в отношении $\frac{1-k}{k}$. Действительно, вычисляя координаты делящей точки по формулам § 13, получим

$$\frac{x + \frac{1-k}{k} \cdot 0}{1 + \frac{1-k}{k}} = kx, \qquad \frac{y + \frac{1-k}{k} \cdot 0}{1 + \frac{1-k}{k}} = ky, \qquad \frac{z + \frac{1-k}{k} \cdot 0}{1 + \frac{1-k}{k}} = kz.$$

Начало координат (в случае $n > 0$) также принадлежит поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, так как, полагая в соотношении (1) $k = 0$, получим

$$F(0, 0, 0) = 0.$$

Таким образом, если на поверхности K лежит какая-нибудь точка, не совпадающая с началом координат, то на ней лежит вся прямая, проходящая через эту точку и начало координат. Итак, поверхность образована прямыми, проходящими через начало координат, т. е. является конической поверхностью с вершиной в начале координат.

Замечание. Обратная теорема интереса не представляет, так как для любой конической поверхности K с вершиной в начале координат функцию $F(x, y, z)$ можно определить так: она равна нулю во всех точках этой поверхности и не определена ни в одной другой точке пространства. Такая функция $F(x, y, z)$ однородна и уравнение $F(x, y, z)=0$ является уравнением поверхности K.

§ 26. Поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, обладающая следующим свойством: любое ее сечение плоскостью, проходящей через точку поверхности, перпендикулярной к некоторой прямой l (ось вращения), содержит окружность (параллель), центр которой лежит на прямой l и которая проходит через взятую точку.

Меридианом поверхности вращения называют ее сечение плоскостью, проходящей через ось вращения. Иногда меридианом называют сечение поверхности вращения полуплоскостью, ограниченной осью вращения.

Говорят, что поверхность вращения получается вращением ее меридиана (любого) вокруг оси l (рис. 64).

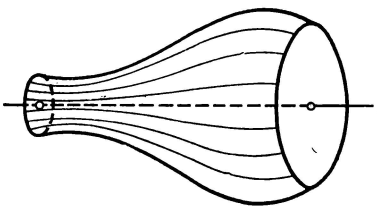


Рис. 64

Теорема. *Пусть относительно декартовой прямоугольной системы координат xOy на плоскости задан меридиан* C поверхности вращения уравнением*

$$F(x, y)=0. \tag{1}$$

Тогда уравнение поверхности Π, образованной вращением линии C вокруг оси Ox в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ (рис. 65), *будет иметь вид*

$$F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0. \tag{2}$$

Доказательство. Расстояние от произвольной точки $M(x, y, z)$ пространства до оси Ox равно $\sqrt{y^2+z^2}$. Поэтому точка $M(x, y, z)$ пространства лежит на поверхности Π тогда и только тогда, когда точка P плоскости xOy с абсциссой x и ординатой $\sqrt{y^2+z^2}$ лежит на данном ее меридиане, т. е. тогда и только тогда, когда выполнено соотношение (2).

Замечание. Если уравнением $F(x, y)=0$ задано сечение поверхности Π положительной полуплоскостью xOy (т. е. полуплоскостью, для всех точек которой $y>0$), то уравнение поверхности Π имеет вид

$$F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0 \tag{3}$$

(см. ниже пример 3 и пример 4, случай $b>a>0$), а если уравнением $F(x, y)=0$ задано сечение поверхности Π отрицательной

* Здесь под меридианом мы понимаем сечение поверхности вращения плоскостью xOy.

полуплоскостью xOy (т. е. полуплоскостью, для всех точек которой $y<0$), то уравнение поверхности П имеет вид

$$F(x,\ -\sqrt{y^2+z^2})=0 \tag{4}$$

(см. ниже пример 4, случай $-b>a>0$).

Если, наконец, уравнение $F(x, y)=0$ определяет на различных интервалах изменения x сечение поверхности П, то положительной, то отрицательной полуплоскостью xOy, то перед радикалом надо брать знак $+$ (уравнение (3)) или знак $-$ (уравнение (4)) соответственно интервалу изменения x (см. пример 5).

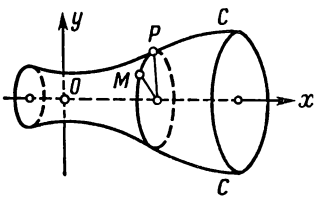


Рис. 65

Пример 1. Рассмотрим уравнение окружности радиуса a с центром в начале декартовой прямоугольной системы координат xOy. При вращении этой окружности вокруг оси Ox получим сферу радиуса a с центром в начале координат. Уравнение этой сферы на основании предыдущей теоремы имеет вид

$$x^2+(\sqrt{y^2+z^2})^2=a^2, \quad \text{или} \quad x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Пример 2. Рассмотрим прямую, заданную уравнением $y=kx$ относительно декартовой прямоугольной системы координат.

Уравнение поверхности вращения, полученной при вращении этой прямой вокруг оси Ox, т. е. уравнение прямого кругового конуса с вершиной в начале координат, имеющего своей осью Ox, имеет вид

$$\pm\sqrt{y^2+z^2}=kx$$

(знак $+$ берется для тех значений x, для которых $kx>0$, а знак $-$ для тех значений x, для которых $kx<0$), или

$$y^2+z^2-k^2x^2=0.$$

Тангенс угла α между осью Ox и образующей этого конуса равен

$$\operatorname{tg}\alpha=k.$$

Пример 3. Рассмотрим прямую, параллельную оси Ox, заданную уравнением $y=b$ $(b>0)$ относительно декартовой прямоугольной системы координат. Уравнение поверхности, полученной при вращении этой прямой вокруг оси Ox, т. е. уравнение прямого круглого цилиндра радиуса b, ось которого совпадает с осью Ox, имеет вид

$$\sqrt{y^2+z^2}=b, \quad \text{или} \quad y^2+z^2=b^2.$$

Пример 4. Рассмотрим окружность радиуса a с центром в точке $(0, b)$, лежащем на оси Oy, заданную уравнением

$$x^2+(y-b)^2=a^2$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат.

Поверхность, полученная вращением этой окружности вокруг оси Ox, имеет уравнение

$$x^2+(\pm\sqrt{y^2+z^2}-b)^2=a^2,$$

причем, если $b > a > 0$, то перед радикалом надо взять только знак $+$, если $-b > a > 0$, то только знак $-$. Если $|b| < a$, то $\pm$. Упрощая последнее уравнение, получим

$$x^2+y^2+z^2+b^2-a^2=\pm 2b\sqrt{y^2+z^2}, \tag{1}$$

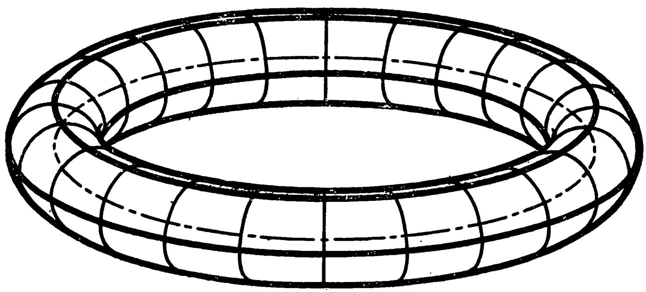


Рис. 66

которое эквивалентно уравнению

$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2=4b^2(y^2+z^2). \tag{2}$$

Если $b > a > 0$, то эта поверхность называется тором (рис. 66). Получим параметрические уравнения этого тора. Пусть C — центр окружности произ-

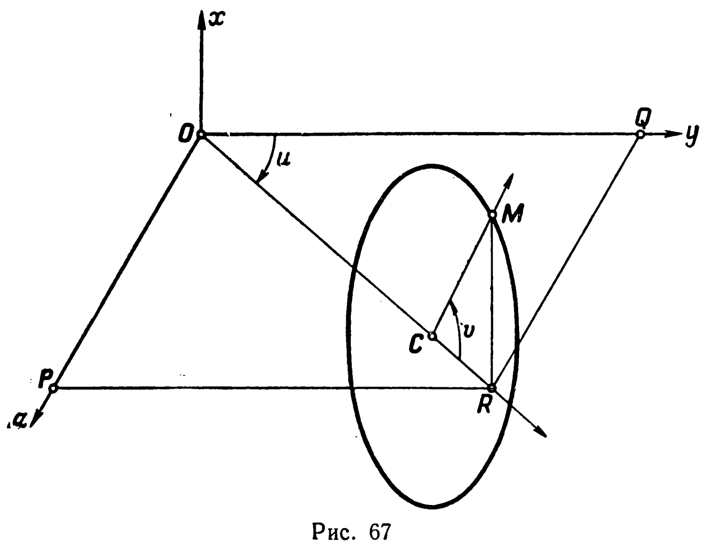


Рис. 67

вольного сечения тора полуплоскостью, проходящей через ось Ox; $M(x, y, z)$ — произвольная точка, лежащая на окружности (C); R — проекция точки M на плоскость zOy, а P и Q — проекции точки R на оси Oz и Oy (рис. 67). Обозначим через u угол от оси Oy до оси OC в плоскости yOz, а через v — угол от луча $\overrightarrow{OC}$ до луча $\overrightarrow{CM}$ в плоскости COx (которая ориентирована ориентированным углом $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{Ox}$, см. § 16, п. 2).

Тогда

$$x=\overline{RM}=CM\sin v=a\sin v,\ y=\overline{OQ}=\overline{OR}\cos u=(\overline{OC}+\overline{CR})\cos u=(b+a\cos v)\cos u,$$

$$z=\overline{OP}=\overline{OR}\cos\left(u-\frac{\pi}{2}\right)=\overline{OR}\sin u=(b+a\cos v)\sin u.$$

Итак, параметрические уравнения тора:

$$x=a\sin v,\quad y=(b+a\cos v)\cos u,\quad z=(b+a\cos v)\sin u. \tag{3}$$

Область D изменения параметров u и v такова:

$$0\leqslant u<2\pi,\quad 0\leqslant v<2\pi \tag{D}$$

Параметр u называется долготой точки M тора, а параметр v — широтой. Исключим из уравнений (3) параметры u и v. Имеем

$$x^2+y^2+z^2=a^2\sin^2 v+(b+a\cos v)^2=a^2+b^2+2ab\cos v,$$

откуда

$$x^2+y^2+z^2+b^2-a^2=2b\,(b+a\cos v).$$

Далее,

$$y^2+z^2=(b+a\cos v)^2,$$

значит,

$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2=4b^2\,(y^2+z^2)$$

то же уравнение, что и полученное выше.

Замечание. Можно (а если не опираться на первый способ решения, то и нужно) доказать, что если координаты x, y, z точки M удовлетворяют последнему уравнению, то найдутся такие числа u и v из полуинтервала $[0,2\pi)$, что x, y, z будут выражаться формулами (3).

Пример 5. Поверхность, полученная при вращении вокруг оси Ox синусоиды, заданной уравнением $y=\sin x$ относительно декартовой прямоугольной системы координат, выражается уравнением

$$\pm\sqrt{y^2+z^2}=\sin x,\quad\text{или}\quad y^2+z^2=\sin^2 x,$$

а поверхность, полученная вращением той же синусоиды вокруг Oy, выражается уравнением

$$y=\sin(\pm\sqrt{x^2+z^2}),\quad\text{или}\quad y^2=\sin\sqrt{x^2+z^2}.$$

§ 27. Линия в пространстве и ее уравнения

Линия в пространстве может быть задана двумя уравнениями

$$F(x,y,z)=0,\quad \Phi(x,y,z)=0 \tag{1}$$

поверхностей, пересекающихся по этой линии. Линию в пространстве иногда задают параметрически:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t), \tag{2}$$

причем параметрические уравнения линии в пространстве определяются так же, как и параметрические уравнения линии на плоскости.

Если поверхность S задана параметрически:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v), \tag{3}$$

то линию C, лежащую на этой поверхности, часто определяют одним уравнением $f(u,v)=0$ (в частности $u=u(v)$ или $v=v(u)$) между криволинейными координатами u и v. Уравнение

$$f(u,v)=0 \tag{4}$$

называется уравнением линии C, если любая пара значений u, v, удовлетворяющая уравнению (4), не выходит из общей области определения D функций $x(u, v)$, $y(u, v)$ и $z(u, v)$, а точка M с координатами $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ лежит на линии C. Обратно, для любой точки M линии C найдется пара чисел u, v, входящая в область D и такая, что $f(u, v)=0$, а $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ — координаты точки M.

В частности, линии, выражаемые уравнениями $u=C_1$, $v=C_2$, где C_1 и C_2 — постоянные, называются координатными линиями поверхности S, заданной параметрическими уравнениями (3). Вместо одного уравнения (4) линию C на поверхности S задают и параметрически (в криволинейных координатах u, v):

$$u=u(t), \quad v=v(t). \tag{5}$$

Эти два уравнения называются внутренними уравнениями линии, лежащей на поверхности S, заданной уравнениями (3), если функции $u(t)$ и $v(t)$ имеют общую область определения D_1; любому числу t из области D_1 соответствует пара чисел $u(t)$, $v(t)$, не выходящих из области D и таких, что точка $M[x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))]$ лежит на линии C. Обратно, для любой точки M линии C существует число t, обладающее указанным свойством.

§ 28. Примеры уравнений линий в пространстве

Пример 1. Уравнения

$$x^2+y^2=a^2, \qquad z=0$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат выражают окружность C радиуса a с центром в начале координат, лежащую в плоскости xOy, так как первое уравнение, т. е. $x^2+y^2=a^2$ есть уравнение круглого цилиндра радиуса a, осью которого является Oz, а $z=0$ есть уравнение плоскости xOy. Эти две поверхности пересекаются по окружности C.

Пример 2. Пусть точка M движется равномерно по окружности радиуса a так, что радиус OM этой окружности вращается с постоянной угловой скоростью ω, а плоскость окружности движется равномерно и поступательно в пространстве так, что ее центр перемещается по прямой, перпендикулярной плоскости окружности, с постоянной скоростью v. Тогда точка M описывает линию, называемую обыкновенной винтовой линией.

Примем центр окружности в начальном ее положении за начало координат, плоскость, в которой она расположена, — за плоскость xOy, а прямую, проходящую через центр окружности перпендикулярно ее плоскости, — за ось Oz (рис. 68) (оси Ox и Oy взаимно перпендикулярны).

Пусть $M_0(a, 0, 0)$ — начальное положение движущейся точки. За время t точка M_0 пройдет по окружности дугу, равную ωt, а в направлении оси Oz пройдет путь vt.

Следовательно, ее координаты в момент t будут:

$$x=a\cos\omega t, \quad y=a\sin\omega t, \quad z=vt.$$

Произведем замену параметра, полагая

$$\omega t=u, \quad vt=\frac{v}{\omega}u=ku, \quad \text{где} \quad k=\frac{v}{\omega};$$

получим

$$x = a\cos u, \quad y = a\sin u, \quad z = ku. \tag{1}$$

Эти уравнения и являются параметрическими уравнениями винтовой линии. Они выражают закон движения точки по этой винтовой линии. Параметр u принимает все действительные значения. Если заменить на противоположное направление вращения радиуса (или перемещение плоскости окружности), то получим винтовую линию противоположной нарезки.

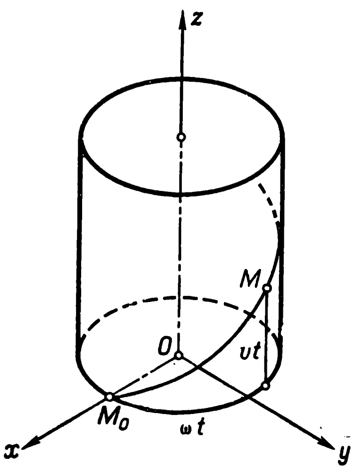


Рис. 68

Различают правую и левую винтовые линии (рис. 69).

Математически имеет смысл говорить лишь о винтовых линиях противоположных или одинаковых ориентаций; понятие о правой и левой винтовых линиях имеет лишь физический смысл.

Пример 3. Рассмотрим параметрические уравнения сферы с центром в начале координат и радиусом a (система координат декартова прямоугольная):

$$x = a\cos v\cos u, \qquad 0 \leqslant u < 2\pi,$$
$$y = a\cos v\sin u, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2},$$
$$z = a\sin v$$

(см. пример 2, § 24).

Координатными линиями $u = C$, где C — число из полуинтервала $[0, 2\pi)$, являются сечения этой сферы полуплоскостями, проходящими через ось Oz; это — полумеридианы сферы $\left(\text{если за полюсы принять точки } \left(0, 0, \pm\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Координатными линиями $v = C$, где C — число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, являются сечения сферы плоскостями, перпендикулярными оси Oz; это — параллели. Уравнения $v = -\frac{\pi}{2}$, $v = \frac{\pi}{2}$ выполняются соответственно только для полюсов $\left(0, 0, -\frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right)$.

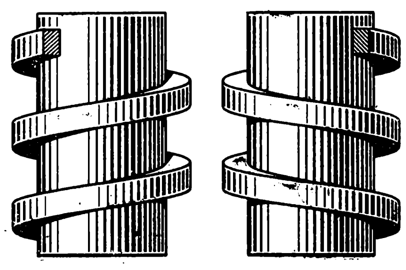


Рис. 69

Пример 4. Рассмотрим прямой круговой цилиндр радиуса a, ось которого совпадает с осью Oz. Уравнение этого цилиндра можно записать в виде

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

но можно записать и в параметрической форме:

$$x = a\cos u, \qquad 0 \leqslant u < 2\pi,$$
$$y = a\sin u, \qquad -\infty < v < +\infty, \tag{D}$$
$$z = v,$$

где u — угол от оси Ox до луча OM', а M' — проекция произвольной точки $M(x, y, z)$, лежащей на поверхности цилиндра, в плоскость xOy. Линейное однородное уравнение

$$v = ku, \quad \text{где} \quad k \neq 0,$$

есть внутреннее уравнение винтовой линии, лежащей на рассматриваемом цилиндре. Параметрические уравнения этой винтовой линии:

$$x = a\cos u, \quad y = a\sin u, \quad z = ku$$

(см. уравнения (1) примера 2 этого параграфа).

В заключение отметим координатные линии цилиндра, заданного параметрическими уравнениями (1). Линии $u = C$ — это прямолинейные образующие цилиндра, так как если u имеет постоянное значение из полуинтервала $[0,2\pi)$, то точка $M(x, y, z)$ поверхности цилиндра проектируется в фиксированную точку $M'(a\cos C, a\sin C, 0)$, и при изменении v от $-\infty$ до $+\infty$ точка $M(a\cos C, a\sin C, v)$ описывает прямолинейную образующую, проходящую через точку M'. Линии $v = C$ (где C — любое число) являются окружностями, по которым плоскость, перпендикулярная к оси цилиндра, пересекает этот цилиндр.

§ 29. Задачи к главе III для самостоятельного решения

1. На плоскости фиксированы две различные точки A и B; фиксировано положительное число k. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$MA^2 + MB^2 = k.$$

Отв. Пустое множество, если $k < \frac{AB^2}{2}$; середина отрезка AB, если $k = \frac{AB^2}{2}$; окружность с центром в середине отрезка AB, если $k > \frac{AB^2}{2}$.

2. На плоскости фиксированы две различные точки A и B; фиксировано число k. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

Отв. Прямая, перпендикулярная AB.

3. Дана точка O и прямая l, не проходящая через O. Пусть P — переменная точка прямой l. На луче OP берется точка M, такая, что $OP \cdot OM = k$, где k — данное положительное число. Найти геометрическое место точек M.

Отв. Окружность.

4. Написать в полярных координатах уравнение прямой, перпендикулярной полярной оси и отсекающей на ней отрезок $OA = a$.

Отв. $r = \frac{a}{\cos\varphi}$.

5. Написать уравнение окружности радиуса a в полярных координатах, принимая за полюс точку O на окружности, а за полярную ось проходящий через нее диаметр OA.

Отв. $r = 2a\cos\varphi$.

6. Прямоугольник, две стороны которого совпадают с осями координат, изменяется так, что его диагональ сохраняет постоянную величину a. Линия, описываемая основанием перпендикуляра, опущенного из вершины прямоугольника, противоположной началу координат, на его диагональ, называется астроидой. Найти ее уравнение, принимая за оси координат неподвижные стороны прямоугольника (рис. 70).

Отв. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

7. Даны точка O и прямая, находящаяся от точки O на расстоянии $OA=a$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий данную прямую в переменной точке B. На этом луче по обе стороны от точки B откладываются отрезки $BM_1=BM_2=b$. Написать в полярных координатах уравнение линии (конхоида Никомеда), описываемой точками M_1 и M_2 при вращении луча, принимая за полюс точку O, а за полярную ось — перпендикуляр OA, опущенный из точки O на данную прямую; перейти затем к декартовым координатам, принимая за начало системы точку O, а за ось абсцисс прямую OA (рис. 71).

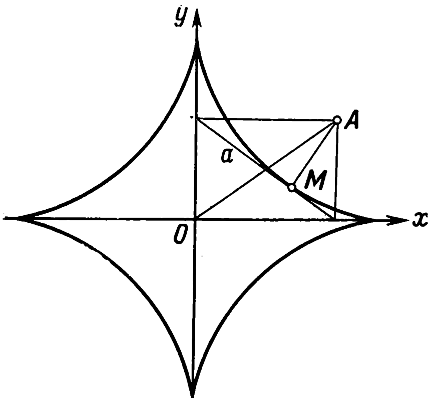


Рис. 70

Отв. $r=\dfrac{a}{\cos\varphi}\pm b$, или

$$(x^2+y^2)(x-a)^2-b^2x^2=0.$$

8. Даны точка O и прямая, находящаяся от точки O на расстоянии $OA=a$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий прямую в переменной точке B. На этом луче по обе стороны от точки B откладываются равные отрезки $BM_1=BM_2=AB$. Составить уравнение линии (строфоида), описываемой точками M_1 и M_2 при вращении луча, в полярных координатах,

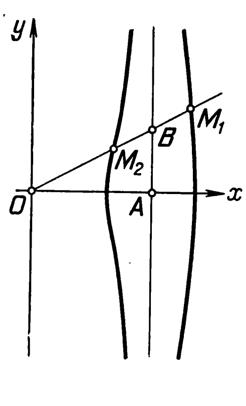


Рис. 71

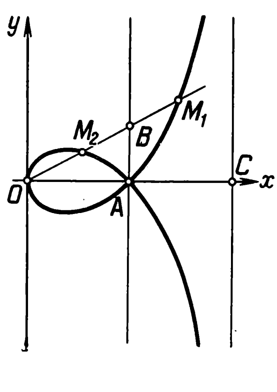


Рис. 72

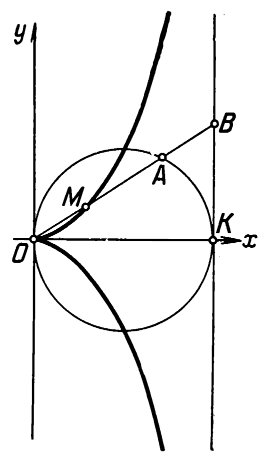


Рис. 73

принимая за полюс точку O и за полярную ось перпендикуляр OA, опущенный из O на данную прямую. Перейти затем к декартовым координатам, принимая за начало координат точку O и за ось абсцисс прямую OA (рис. 72).

Отв. $r=\frac{a}{\cos\varphi}\pm a\operatorname{tg}\varphi$, или $(x^2+y^2)(x-a)^2-a^2y=0$.

9. На окружности радиуса a взята точка O и через точку K, диаметрально противоположную точке C, к окружности проведена касательная. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий окружность и касательную соответственно в точках A и B. На этом луче от точки O откладываем отрезок OM, равный отрезку AB луча, заключенному между окружностью и касательной. Линия, описываемая точкой M при вращении луча, называется циссоидой Диоклеса. Написать ее уравнение в полярных координатах, принимая за полюс точку O и за полярную ось диаметр OK. Перейти затем к декартовым координатам (рис. 73).

Отв. $r=\frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, или $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$.

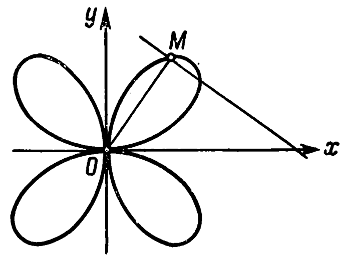


Рис. 74

10. На окружности радиуса a взята точка O и через нее проведен диаметр OA. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий окружность в переменной точке B. На этом луче по обе стороны от точки B откладываются отрезки $BM_1=BM_2=AB$. Написать уравнения линий, описываемых точками M_1 и M_2 при вращении луча.

Отв. Две окружности

$$(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2,\quad (x-a)^2+(y+a)^2=2a^2.$$

11. Отрезок постоянной длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Найти линию, описываемую при этом движении отрезка основанием перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на отрезок (в полярных и декартовых координатах) (рис. 74).

Отв. $r=a\sin 2\varphi$, $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$.

12. На окружности радиуса a взята точка O. Через точку K, диаметрально противоположную O, к окружности проведена касательная. Вокруг точки O вращается прямая, пересекающая окружность и касательную соответственно в точках A и B. Из точки A проводится прямая, параллельная касательной, а из точки B — прямая, параллельная диаметру OK. Найти геометрическое место точек пересечения этих прямых (верзьера Марии Аньези), принимая за начало прямоугольной системы координат точку O, а за ось абсцисс диаметр OK (рис. 75).

Отв. $x=2a\cos^2\varphi$, $y=2a\operatorname{tg}\varphi$; $x=\frac{8a^3}{y^2+4a^2}$

13. Круг радиуса r катится по кругу радиуса R, оставаясь вне его. Найти параметрические уравнения линии, описываемой точкой катящегося круга (эпициклоида), принимая за начало координат центр неподвижного круга, а за параметр — угол t между положительным направлением оси абсцисс и радиусом неподвижного круга, идущим в точку касания подвижного круга с неподвижным. В начальном положении подвижная окружность касалась неподвижной в точке пересечения последней с осью абсцисс (рис. 76).

Отв. $x=(R+r)\cos t-r\cos\frac{R+r}{r}t,$

$$y=(R+r)\sin t-r\sin\frac{R+r}{r}t.$$

14. Круг радиуса r катится по кругу радиуса R, оставаясь внутри него. Написать параметрические уравнения линии, описываемой точкой катящегося круга (гипоциклоида). Выбор системы координат и обозначений такой же, как и в предыдущей задаче (рис. 77).

Отв. $x=(R-r)\cos t+r\cos\frac{R-r}{r}t,$

$y=(R-r)\sin t-r\sin\frac{R-r}{r}t.$

15. Показать, что при $R=4r$ гипоциклоида обращается в астроиду

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

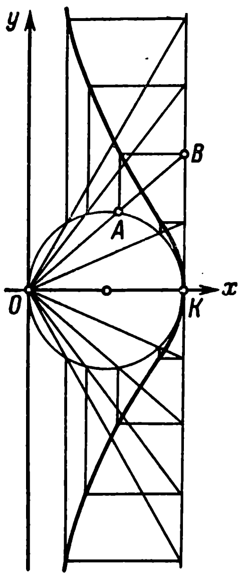


Рис. 75

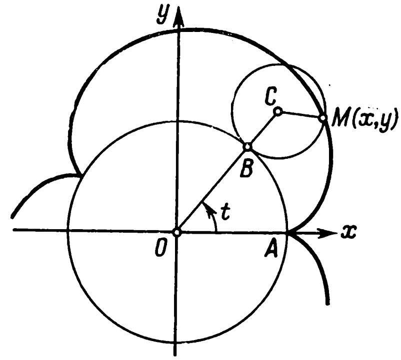


Рис. 76

16. Показать, что при $R=2r$ гипоциклоида обращается в диаметр неподвижного круга.

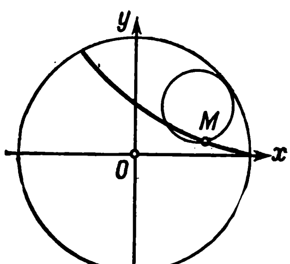


Рис. 77

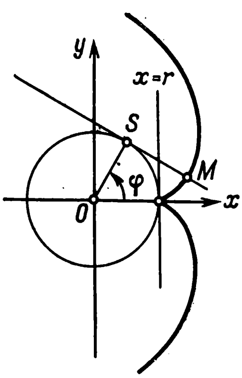


Рис. 78

17. Отрезок постоянной длины движется так, что один его конец скользит по окружности $x^2+y^2=r^2$, а другой — по оси Ox (шатунно-кривошипный механизм). Составить уравнение кривой, которую описывает точка отрезка, разделяющая его на части a и b.

Отв. $4a^2x^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=\left(r^2-a^2-x^2-\frac{2a+b}{b}y^2\right)^2$.

18. По окружности $x^2+y^2=r^2$ катится прямая, начальное положение которой $x=r$. Определить траекторию точки катящейся прямой, принимая за начальное ее положение точку $(r, 0)$ (эвольвента окружности) (рис. 78).

Отв. $x=r(\cos t+t\sin t)$, $y=r(\sin t-t\cos t)$.

19. Уравнением какой поверхности является уравнение

$$x=y$$

в декартовой прямоугольной системе координат?

Отв. Плоскость, делящая пополам вертикальные двугранные углы, образованные координатными плоскостями xOz и yOz.

20. Какие поверхности выражаются уравнениями

$$x=a \quad (a\neq 0), \quad y=b \quad (b\neq 0), \quad z=c \quad (c\neq 0)$$

в общей декартовой системе координат?

Отв. Плоскости, параллельные координатным.

21. Какие поверхности выражаются уравнениями

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

в общей декартовой системе координат?

Отв. Координатные плоскости.

22. Какую поверхность определяет уравнение

$$y^2-x^2=0$$

в декартовой прямоугольной системе координат?

Отв. Две биссекториальные плоскости между координатными плоскостями yOz и zOx.

23. Составить уравнение цилиндрической поверхности, направляющей которой является окружность $z=0$, $x^2+y^2=2Ry$ $(R>0)$, а образующие параллельны вектору $\{a, b, 1\}$.

Отв. $(x-az)^2+(y-bz)^2=2R(y-bz)$.

24. Составить уравнение цилиндра, описанного около сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, образующие которого параллельны вектору $\{l, m, n\}$.

Отв. $(x^2+y^2+z^2)(l^2+m^2+n^2)=R^2(l^2+m^2+n^2)+(lx+my+nz)^2$.

25. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $(0, 0, c)$, направляющей которой является лемниската Бернулли $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

Отв. $(x^2+y^2)^2=\frac{2a^2}{c^2}(z-c)^2(x^2-y^2)$.

26. Составить уравнение поверхности вращения, полученной вращением параболы $y^2=2px$ вокруг оси Oy.

Отв. $y^4=4p^2(x^2+z^2)$.

27. Составить уравнения поверхностей вращения, полученных вращением лемнискаты Бернулли $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ вокруг осей Ox и Oy.

Отв. Вокруг оси Ox: $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2(x^2-y^2-z^2)$.
Вокруг оси Oy: $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2(x^2-y^2+z^2)$.

28. Плоскость вращается вокруг одной из своих прямых с постоянной угловой скоростью. Прямая, лежащая в этой плоскости, вращается вокруг одной из своих точек с угловой скоростью, вдвое меньшей угловой скорости вращения плоскости. Составить параметрические уравнения поверхности, образованной движением этой прямой.

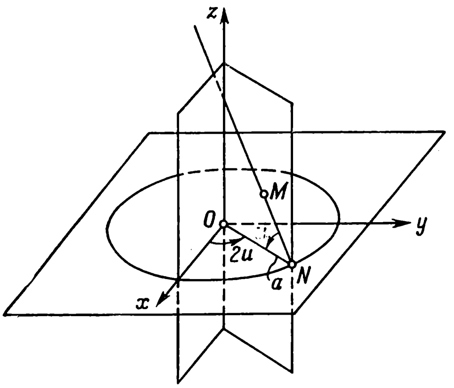


Рис. 79

Указание. Направим ось Oz по оси вращения, а ось Ox расположим в начальном положении вращающейся плоскости перпендикулярно оси Oz (рис. 79). Допустим, кроме того, что прямая, вращающаяся вокруг точки N, в начальном своем положении была параллельна оси Oz и точка N отстоит от оси вращения на расстоянии, равном a (так, что эта точка описывает окружность радиуса a с центром O, расположенную в плоскости xOy). Обозначая угол от оси Ox до луча ON через $2u$ и полагая $\overline{NM}=v$, получим

$$x=(a-v\sin u)\cos 2u,$$
$$y=(a-v\sin u)\sin 2u,$$
$$z=v\cos u.$$

Исключая u и v, получим уравнение поверхности в декартовых координатах:

$$y(x^2+y^2+z^2-a^2)+2z(x^2+y^2-ax)=0.$$

Чтобы представить себе вид этой поверхности, достаточно взять не бесконечную прямую MN, а конечный отрезок, длина которого меньше a; тогда полученная поверхность будет так называемым листом Мебиуса (рис. 80).

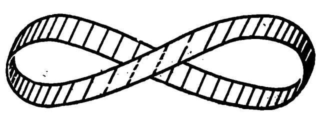


Рис. 80

29. Составить уравнение поверхности, образующие которой параллельны плоскости xOy, пересекают ось Oz и линию, заданную уравнениями $xyz=a^3$, $x^2+y^2=b^2$.

Отв. $b^2xyz=a^3(x^2+y^2)$.

30. Две равные параболы имеют общую вершину в начале координат; главные оси лежат на оси Ox, но противоположны по направлению; одна парабола лежит в плоскости xOy, другая — в плоскости xOz. Составить уравнение поверхности, образованной прямыми, параллельными плоскости $y-z=0$ и пересекающими данные параболы.

Отв. $y^2-z^2=2px$.

31. Вокруг оси Oz вращается линия $x=f(z)$, $y=g(z)$. Составить уравнение поверхности вращения.

Отв. $x^2+y^2=f^2(z)+g^2(z)$.

32. Вокруг оси Oz вращается прямая, по которой пересекаются плоскости $x=a$ и $y=kz$. Составить уравнение поверхности вращения.

Отв. $x^2+y^2=a^2+k^2z^2$.

33. Составить параметрические уравнения линии Вивиани, по которой сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$ пересекается с цилиндром $x^2+y^2-ay=0$.

Отв. $x=a\sin t\cos t$, $y=a\sin^2 t$, $z=a\cos t$.

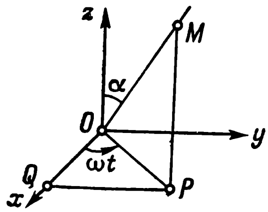


Рис. 81

34. Плоскость, первоначально совпадающая с плоскостью xOz и содержащая прямую, выходящую из начала координат под углом α к оси Oz, вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Одновременно, точка, выходящая из начала координат, движется по указанной прямой с постоянной скоростью v. Составить уравнения траектории движущейся точки (коническая спираль) (рис. 81).

Отв. $x=vt\sin\alpha\cos\omega t$, $y=vt\sin\alpha\sin\omega t$, $z=vt\cos\alpha$.

ГЛАВА IV

ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

В § 7 гл. II дано определение вектора (класс всех равных между собой направленных отрезков), а в § 11 гл. II — определение координат вектора. В дополнение к сказанному в § 7 и 11 введем следующее определение: если вектор $\boldsymbol{a}$ есть класс всех направленных отрезков, равных направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$, то класс направленных отрезков, равных направленному отрезку $\overrightarrow{BA}$, называется вектором, симметричным вектору $\boldsymbol{a}$, и обозначается $-\boldsymbol{a}$.

В этой главе излагаются основы векторной алгебры, причем для координат вектора будет дано еще одно определение (по существу эквивалентное тому, которое дано в § 11). Векторная алгебра позволяет решать с полной общностью и проще многие задачи, решение которых в координатах достаточно трудно (например, расстояние между двумя точками в общей декартовой системе координат, объем ориентированного тетраэдра в общей декартовой системе координат и т. д.). Кроме того, векторная алгебра служит удобным средством для изложения теории прямой линии на плоскости, теории плоскости и прямой в пространстве, в вопросах, связанных с линейными преобразованиями, а также с линиями и поверхностями второго порядка.

§ 30. Сумма векторов

Суммой $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор, начало которого находится в произвольной точке A пространства, а конец строится следующим образом: отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, *равный вектору* $\boldsymbol{a}$, *а от точки* B *вектор* $\overrightarrow{BC}$, *равный вектору* $\boldsymbol{b}$; *тогда точка* C *и будет концом вектора* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (рис. 82.).

Если произвести указанное построение, взяв вместо A любую другую точку P, то получим направленный отрезок $\overrightarrow{PR}$, равный направленному отрезку $\overrightarrow{AC}$.

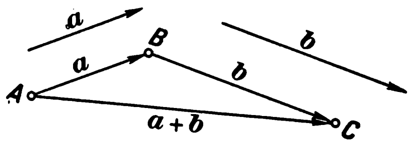


Рис. 82

В самом деле, пусть P — произвольная точка пространства, а Q и R — такие точки, что $\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{QR}=\boldsymbol{b}$. Из равенства $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PQ}$ следует $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BQ}$ (см. теорему § 7), а из равенства $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{QR}$ следует $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{CR}$, значит $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CR}$, а потому (снова применяем теорему § 7) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PR}$.

Сумму двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно построить и так: откладываем от произвольной точки O векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$$

и строим параллелограмм $OACB$ со сторонами OA и OB. Тогда

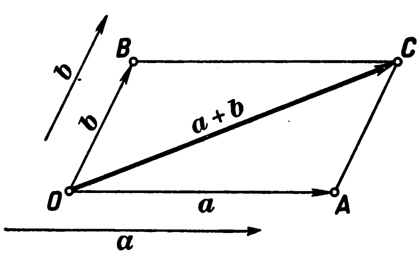


Рис. 83

$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (рис. 83).

Сумма двух векторов обладает следующими свойствами:

$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ (ассоциативность), (1)

$\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$, (2)

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$, (3)

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (коммутативность). (4)

Доказательство ассоциативности суммы. Рассмотрим три произвольных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Пусть A — произвольная точка, а B, C и D — такие точки, что

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD},$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

Свойства (2) и (3) очевидны.

Доказательство коммутативности суммы. Рассмотрим два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от произвольной точки A

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a},$$

а от точки B отложим вектор $\boldsymbol{b}$:

$$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}.$$

Отложим теперь сначала от точки A вектор $\boldsymbol{b}$:

$$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}.$$

Тогда в силу равенства $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ имеем $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, т. е. $\overrightarrow{DC}$ есть вектор $\boldsymbol{a}$, отложенный от точки D. Таким образом, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ и потому

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.$$

§ 31. Разность векторов

Разностью $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ *векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *называется такой вектор* $\boldsymbol{x}$, *что* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.

Разность $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ двух векторов всегда существует и единственна. В самом деле, докажем сначала существование разности, т. е. докажем, что каковы бы ни были векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, всегда существует такой вектор $\boldsymbol{x}$, что $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.

Отложим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ от одной и той же точки O:

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}.$$

Тогда на основании определения суммы двух векторов

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA},$$

т. е.

$$\boldsymbol{b} + \overrightarrow{BA} = \boldsymbol{a},$$

полагая $\overrightarrow{BA} = \boldsymbol{x}$, будем иметь (рис. 84)

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}.$$

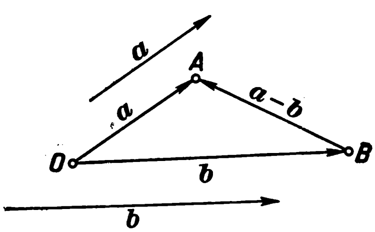


Рис. 84

Докажем, что существует только один вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий последнему равенству. Предположим, что существует еще вектор $\boldsymbol{x}_1$, такой, что $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{a}$. Тогда

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}_1,$$

откуда

$$-\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}_1),$$
$$[(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}]+\boldsymbol{x}=[(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}]+\boldsymbol{x}_1,$$
$$0+\boldsymbol{x}=0+\boldsymbol{x}_1,$$
$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1.$$

Отметим еще равенство

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

В самом деле,

$$[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})]+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+[(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}.$$

§ 32. Произведение числа на вектор

Произведением $\lambda\boldsymbol{a}$ *числа* λ *на вектор* $\boldsymbol{a}$ *в случае* $a\neq 0$, $\lambda\neq 0$, *называется вектор, коллинеарный вектору* $\boldsymbol{a}$, *модуль которого равен* $|\lambda||\boldsymbol{a}|$ *и который направлен в ту же сторону, что и вектор* $\boldsymbol{a}$, *если* $\lambda>0$, *и в противоположную, если* $\lambda<0$. *Если* $\lambda=0$ *или* $\boldsymbol{a}=0$, *то по определению* $\lambda\boldsymbol{a}=0$.

Произведение числа λ на вектор $\boldsymbol{a}$ обладает следующими свойствами:

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, \tag{1}$$
$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}, \tag{2}$$
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}, \tag{3}$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}. \tag{4}$$

Свойство (1) сразу следует из данного определения произведения числа на вектор.

Для доказательства свойства (2) заметим, что в случае $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\boldsymbol{a}\neq 0$ оба вектора $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ и $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ имеют одну и ту же длину, равную $|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|$, и одно и то же направление (такое же, как $\boldsymbol{a}$, если λ и μ — числа одного знака, и противоположное с $\boldsymbol{a}$, если λ и μ — числа разных знаков).

Соотношение (2), очевидно, также верно, если $\lambda=0$, или $\mu=0$, или $\boldsymbol{a}=0$.

Докажем свойство (4). Предположим, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, а $\lambda\neq 0$. Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от точки A

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},$$

а вектор $\boldsymbol{b}$ от точки B

$$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

Построим векторы $\overrightarrow{AB'}=\lambda\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{AC'}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ (рис. 85). Из подобия треугольников ABC и $AB'C'$ следует (как в случае $\lambda>0$, так и в случае $\lambda < 0$), что $\overrightarrow{B'C'} = \lambda \boldsymbol{b}$. Но $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}$, следовательно,

$$\lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} = \lambda (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

Случай коллинеарности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ предоставляется рассмотреть читателю (вопрос в этом случае сводится к свойствам (3) и (2)). Доказательство свойства (3) предоставляется читателю (надо доказать, что векторы $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a}$ и $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$ имеют одинаковые модули и направление).

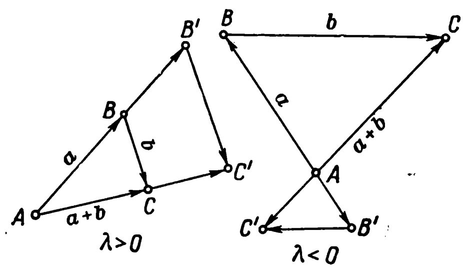


Рис. 85

Замечание 1. Вектор $-\boldsymbol{a}$, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$, равен $-1 \cdot \boldsymbol{a}$.

Замечание 2. Частное $\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}$, где $\lambda \neq 0$, определяется как произведение $\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$.

Замечание 3. Если $\boldsymbol{a} \neq 0$, то вектор

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{a}^\circ$$

есть единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\boldsymbol{a}$. Отсюда

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ.$$

Замечание 4. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и $\boldsymbol{a} \neq 0$, то отношением $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$ называется число λ, такое, что $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и направлены в одну сторону, то

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|},$$

а если — в разные стороны, то

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = -\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Если $\boldsymbol{b} = 0\ (\boldsymbol{a} \neq 0)$, то $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = 0$.

Отношение неколлинеарных векторов не определяется.

Замечание 5. Из замечания 4 и определения координаты точки, лежащей на оси координат (§ 2), следует, что координату точки M на оси координат с началом O и единичной точкой E

можно определить так:

$$x = \frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OE}}, \text{ или } x = \frac{\overrightarrow{OM}}{\boldsymbol{e}},$$

т. е. координата точки M, лежащей на декартовой оси координат, равна отношению вектора $\overrightarrow{OM}$ к масштабному вектору.

Из последнего соотношения следует, что

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{e}.$$

§ 33. Теоремы о проекциях векторов

Теорема 1. *Проекция суммы двух векторов* (имеется в виду любой из трех видов параллельного проектирования) *равна сумме их проекций:*

$$\text{пр. } (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{пр. } \boldsymbol{a} + \text{пр } \boldsymbol{b}.$$

Доказательство. Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от произвольной точки A:

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a},$$

а от точки B отложим вектор $\boldsymbol{b}$:

$$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

Пусть A', B', C' — проекции точек A, B и C. Тогда по определению проекции вектора

$$\text{пр. } \boldsymbol{a} = \overrightarrow{A'B'}, \text{ пр. } \boldsymbol{b} = \overrightarrow{B'C'}, \text{ пр. } (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \overrightarrow{A'C'}$$

и так как

$$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'},$$

то

$$\text{пр. } (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{пр. } \boldsymbol{a} + \text{пр. } \boldsymbol{b}.$$

Теорема 2. *Проекция произведения числа λ на вектор $\boldsymbol{a}$ равна произведению числа λ на проекцию вектора $\boldsymbol{a}$, т. е.*

$$\text{пр. } (\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \text{ пр. } \boldsymbol{a}.$$

Доказательство. Отложим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$ от произвольной точки A:

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \lambda\boldsymbol{a} = \lambda\overrightarrow{AB};$$

отсюда

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}.$$

Пусть A', B' и C' — проекции точек A, B и C. Так как при параллельном проектировании сохраняется порядок точек на прямой и отношение отрезков, лежащих на одной прямой, то, предполагая, что точки A' и B' различны (в этом случае различны и точки A и B), имеем

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'B'}} = \lambda,$$

откуда

$$\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}, \text{ или пр. } (\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \text{ пр. } \boldsymbol{a}.$$

Если точки A' и B' совпадают, но точки A и B различны, то точка C' совпадает с точками A' и B' и соотношение

$$\text{пр. } (\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \text{ пр. } \boldsymbol{a}$$

верно и в этом случае. Оно, очевидно, верно и в том случае, если совпадают точки A и B $(\boldsymbol{a} = 0)$.

§ 34. Теоремы о координатах векторов

Теорема 1. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *лежат на оси, то координата их суммы равна сумме координат слагаемых, т. е.* коорд. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) =$ $=$ коорд. $\boldsymbol{a} +$ коорд. $\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от любой точки A оси координат, на которой лежит этот вектор:

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a},$$

а от точки B отложим вектор $\boldsymbol{b}$:

$$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

Далее,

$$\text{коорд. } \boldsymbol{a} = \overline{AB}, \text{ коорд. } \boldsymbol{b} = \overline{BC}, \text{ коорд. } (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \overline{AC}$$

и на основании теоремы Шаля:

$$\text{коорд. } (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{коорд. } \boldsymbol{a}. + \text{коорд. } \boldsymbol{b}.$$

Теорема 2. *Если вектор* $\boldsymbol{a}$ *лежит на оси, то координата произведения числа* λ *на вектор* $\boldsymbol{a}$ *равна произведению числа* λ *на коор-*

динату вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\text{коорд. } (\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \text{ коорд. } \boldsymbol{a}.$$

Доказательство. Предположим, что $\lambda \neq 0$ и $\boldsymbol{a} \neq 0$. Отложим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$ от произвольной точки A оси:

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \lambda \boldsymbol{a}.$$

Тогда коорд. $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$, коорд. $(\lambda\boldsymbol{a}) = \overline{AC}$ и требуется доказать, что

$$\overline{AC} = \lambda \overline{AB}.$$

Имеем

$$|\overline{AC}| = AC = |\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{a}| = |\lambda|\, AB = |\lambda|\,|\overline{AB}| = |\lambda \overline{AB}|.$$

Если $\lambda > 0$, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют одинаковое направление, значит, $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ — числа одного знака и $\overline{AC} = \lambda\overline{AB}$. Если же $\lambda < 0$, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют противоположное направление, значит, $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ — числа разных знаков, а $\overline{AB}$ и $\lambda\overline{AC}$ — числа одного знака, следовательно, $\overline{AC} = \lambda\overline{AB}$.

Равенство коорд. $(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda$ коорд. $\boldsymbol{a}$ верно также в случае $\lambda = 0$ и в случае $\boldsymbol{a} = 0$.

§ 35. Сумма, разность и произведение числа на вектор в координатах

Теорема 1. *Координаты суммы двух векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых, т. е. если относительно общей декартовой системы координат на плоскости заданы векторы*

$$\boldsymbol{a} = \{x_1,\ y_1\} \text{ и } \boldsymbol{b} = \{x_2,\ y_2\},$$

то

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2\}.$$

Если относительно общей декартовой системы координат в пространстве заданы векторы

$$\boldsymbol{a} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\} \text{ и } \boldsymbol{b} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\},$$

то

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2\}.$$

Доказательство. Пусть в общей декартовой системе координат на плоскости $\boldsymbol{a} = \{x_1,\ y_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{x_2,\ y_2\}$. Спроектируем векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ на ось Ox параллельно оси Oy. Пусть пр. $\boldsymbol{a}$, пр. $\boldsymbol{b}$ и пр. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ — эти проекции. На основании теоремы 1 § 33 и теоремы 1 § 34 имеем

коорд. пр. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ = коорд. (пр. $\boldsymbol{a}$ + пр. $\boldsymbol{b}$) = коорд. пр. $\boldsymbol{a}$ + коорд. пр. $\boldsymbol{b}$. Но по определению координат вектора коорд. пр. $\boldsymbol{a}=x_1$, коорд. пр. $\boldsymbol{b}=x_2$, а коорд. пр. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ есть первая координата вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

Таким образом, первая координата вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ равна x_1+x_2. Аналогично доказывается, что вторая координата вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ равна y_1+y_2.

В случае пространства надо проектировать данные векторы на оси параллельно координатным плоскостям.

Следствие. Координаты разности $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ двух векторов равны разностям соответствующих координат $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. если относительно общей декартовой системы координат на плоскости даны векторы

$$\boldsymbol{a}=\{x_1,\ y_1\} \text{ и } \boldsymbol{b}=\{x_2,\ y_2\},$$

то

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{x_1-x_2,\ y_1-y_2\}.$$

Если относительно общей декартовой системы координат в пространстве даны векторы

$$\boldsymbol{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\} \text{ и } \boldsymbol{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\},$$

то

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2\}.$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

и

$$-\boldsymbol{b}=\{-x_2,\ -y_2,\ -z_2\}.$$

Теорема 2. *Координаты произведения числа на вектор равны произведениям этого числа на соответствующие координаты вектора, т. е. если относительно общей декартовой системы координат задан вектор* $\boldsymbol{a}=\{x,\ y\}$ *(на плоскости) или* $\boldsymbol{a}=\{x,\ y,\ z\}$ *(в пространстве), то*

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x,\ \lambda y\} \quad \text{(на плоскости)},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z\} \text{ (в пространстве)}.$$

Доказательство. Проведем доказательство для плоскости (доказательство для пространства аналогично). Пусть пр. $\boldsymbol{a}$ — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось Ox параллельно оси Oy. В силу теоремы 2 § 33 и теоремы 2 § 34 имеем

коорд. пр. $(\lambda\boldsymbol{a})=$ коорд. $(\lambda$ пр. $\boldsymbol{a})=\lambda$ (коорд. пр. $\boldsymbol{a})=\lambda x$.

Аналогично доказывается, что вторая координата вектора $\lambda\boldsymbol{a}$ равна λy.

§ 36. Линейная зависимость векторов. Линейная комбинация векторов. Коллинеарность векторов. Компланарность векторов

Определение. *Векторы* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *называются линейно зависимыми, если существуют числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *среди которых есть по крайней мере одно, не равное нулю, такие, что*

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_k\boldsymbol{a}_k=0.$$

Сумма произведений чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ на векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, т. е. вектор

$$\boldsymbol{p}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_k\boldsymbol{a}_k$$

называется *линейной комбинацией** векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

Если вектор $\boldsymbol{p}$ представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, то говорят также, что вектор $\boldsymbol{p}$ *разложен* по векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

Данное выше определение линейной зависимости векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, очевидно, эквивалентно такому: векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы, если один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных (или разложен по остальным).

Теорема 1. *Для того чтобы два вектора* $\boldsymbol{a}_1$ *и* $\boldsymbol{a}_2$ *были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.*

Доказательство необходимости. Дано: векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ линейно зависимы. Требуется доказать, что они коллинеарны. Так как векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ линейно зависимы, то существуют числа λ_1 и λ_2, не равные нулю одновременно, и такие, что

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2=0.$$

Пусть, например, $\lambda_1\neq 0$; тогда

$$\boldsymbol{a}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_2;$$

отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны.

Доказательство достаточности. Дано: векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны. Требуется доказать, что они линейно зависимы.

Если $\boldsymbol{a}_1=0$, то имеет место равенство $1\cdot\boldsymbol{a}_1+0\cdot\boldsymbol{a}_2=0$, а это означает, что векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ линейно зависимы ($\lambda_1=1\neq 0$). Если же $\boldsymbol{a}_1\neq 0$, то, полагая $\frac{\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1}=\lambda$, находим $\boldsymbol{a}_2=\lambda\boldsymbol{a}_1$, или $1\cdot\boldsymbol{a}_2-\lambda\cdot\boldsymbol{a}_1=0$, значит векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ линейно зависимы.

Определение. *Три вектора называются компланарными, если, будучи отложенными от одной точки, оказываются лежащими в одной плоскости.*

---

* В этом определении не исключается случай $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$. Тогда линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ дает нулевой вектор.

Теорема 2. *Для того чтобы три вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.*

Доказательство необходимости. Дано: векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы. Требуется доказать, что они компланарны.

Так как векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы, то существуют числа λ_1, λ_2, λ_3, среди которых есть хотя бы одно, не равное нулю, такие, что

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=0.$$

Пусть, например, $\lambda_3\neq 0$; тогда

$$\boldsymbol{a}_3=-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\boldsymbol{a}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\boldsymbol{a}_2.$$

Векторы $-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\boldsymbol{a}_1$ и $-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны соответственно векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$; очевидно, сумма таких векторов, т. е. вектор $\boldsymbol{a}_3$ будет компланарен с векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Доказательство достаточности. Дано: векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ компланарны. Требуется доказать, что эти векторы линейно зависимы.

Если векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны, то они линейно зависимы (теорема 1 настоящего параграфа), т. е. найдутся числа λ_1 и λ_2, из которых по крайней мере одно не равно нулю и такие, что $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2=0$, но тогда и $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+0\cdot\boldsymbol{a}_3=0$, т. е. векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы. Пусть векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ неколлинеарны. Отложим векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ от одной и той же точки O:

$$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1,\quad \overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}_2,\quad \overrightarrow{OA_3}=\boldsymbol{a}_3.$$

Так как векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ компланарны, то точки O, A_1, A_2, A_3 лежат в одной плоскости. Спроектируем точку A_3 на прямую OA_1 параллельно прямой OA_2; пусть P — эта проекция. Тогда $\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_3}$ и так как

$$\overrightarrow{OP}\parallel\boldsymbol{a}_1 \text{ и } \boldsymbol{a}_1\neq 0,\quad \overrightarrow{PA_3}\parallel\boldsymbol{a}_2 \text{ и } \boldsymbol{a}_2\neq 0,$$

то, полагая

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\boldsymbol{a}_1}=\lambda_1,\quad \frac{\overrightarrow{PA_3}}{\boldsymbol{a}_2}=\lambda_2,$$

находим

$$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1,\quad \overrightarrow{PA_3}=\lambda_2\boldsymbol{a}_2,$$

так что

$$\boldsymbol{a}_3=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2,$$

т. е. векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ — линейно зависимы.

Теорема 3. *Всякие четыре вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ в пространстве линейно зависимы.*

Доказательство. Предположим, что векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ некомпланарны. Отложим все векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ от одной и той же точки O:

$$\overrightarrow{OA}_1=\boldsymbol{a}_1,\quad \overrightarrow{OA}_2=\boldsymbol{a}_2,\quad \overrightarrow{OA}_3=\boldsymbol{a}_3,\quad \overrightarrow{OA}_4=\boldsymbol{a}_4.$$

Пусть P — проекция точки A_4 на плоскость OA_1A_2 параллельно прямой OA_3, а Q — проекция точки P на прямую OA_1 параллельно прямой OA_2. Тогда

$$\boldsymbol{a}_4=\overrightarrow{OA}_4=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PA}_4.$$

Векторы $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PA}_4$ соответственно коллинеарны векторам $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$. Полагая

$$\frac{\overrightarrow{OQ}}{\boldsymbol{a}_1}=\lambda_1,\quad \frac{\overrightarrow{QP}}{\boldsymbol{a}_2}=\lambda_2,\quad \frac{\overrightarrow{PA}_4}{\boldsymbol{a}_3}=\lambda_3,$$

получим

$$\overrightarrow{OQ}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1,\quad \overrightarrow{QP}=\lambda_2\boldsymbol{a}_2,\quad \overrightarrow{PA}_4=\lambda_3\boldsymbol{a}_3$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{a}_4=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3,$$

т. е. векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ линейно зависимы.

Теорема 4. *Для того чтобы два ненулевых вектора* $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ *были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны*.*

Докажем теорему для случая, когда векторы заданы своими координатами относительно общей декартовой системы координат в пространстве.

Доказательство необходимости. Дано: векторы $\boldsymbol{a}_1=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\boldsymbol{a}_2=\{x_2, y_2, z_2\}$ коллинеарны; требуется доказать, что их координаты пропорциональны.

Так как $\boldsymbol{a}_1\neq 0$, то, полагая $\frac{\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1}=\lambda$, получим $\boldsymbol{a}_2=\lambda\boldsymbol{a}_1$, т. е.

$$\{x_2, y_2, z_2\}=\lambda\{x_1, y_1, z_1\},$$

или

$$x_2=\lambda x_1,\quad y_2=\lambda y_1,\quad z_2=\lambda z_1.$$

* Упорядоченная совокупность чисел называется ненулевой, если среди чисел этой совокупности есть по крайней мере одно, не равное нулю. Будем говорить, что упорядоченные ненулевые пары чисел x_1, y_1 и x_2, y_2 пропорциональны, если существует такое число $\lambda\neq 0$, что $x_2=\lambda x_1$, $y_2=\lambda y_1$. Аналогично определяется пропорциональность двух ненулевых упорядоченных троек чисел. Пропорциональность двух упорядоченных пар чисел x_1, y_1 и x_2, y_2 мы будем писать и в форме $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$, причем условимся, что если какой-либо знаменатель в этой пропорции равен нулю, то это означает, что равен нулю соответствующий числитель. Аналогично будем понимать пропорцию $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$. При указанном соглашении относительно пропорции это определение пропорциональности совпадает с тем, которое дано в начале сноски.

Доказательство достаточности. Дано: координаты векторов

$$\boldsymbol{a}_1=\{x_1, y_1, z_1\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a}_2=\{x_2, y_2, z_2\}$$

пропорциональны. Требуется доказать, что эти векторы коллинеарны.

Пусть

$$x_2=\lambda x_1, \quad y_2=\lambda y_1, \quad z_2=\lambda z_1;$$

тогда $\boldsymbol{a}_2=\lambda\boldsymbol{a}_1$ и, значит, векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны.

Теорема 5. *Для того чтобы два вектора $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, заданные своими координатами относительно общей декартовой системы координат на плоскости*

$$\boldsymbol{a}_1=\{x_1, y_1\}, \quad \boldsymbol{a}_2=\{x_2, y_2\}$$

или относительно общей декартовой системы координат в пространстве

$$\boldsymbol{a}_1=\{x_1, y_1, z_1\}, \quad \boldsymbol{a}_2=\{x_2, y_2, z_2\},$$

были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{(в случае плоскости)}, \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{(в случае пространства)}. \tag{2}$$

Докажем теорему для случая, когда векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ заданы своими координатами относительно общей декартовой системы координат в пространстве.

Доказательство необходимости. Дано: векторы $\boldsymbol{a}_1=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\boldsymbol{a}_2=\{x_2, y_2, z_2\}$ коллинеарны. Требуется доказать, что выполнены соотношения (2). Если векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ ненулевые и коллинеарны, то их координаты пропорциональны, а потому равенства (2) выполнены (определитель, в котором две строки пропорциональны, равен нулю). Если $\boldsymbol{a}_1=0$ или $\boldsymbol{a}_2=0$ (или $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=0$), то равенства (2), очевидно, также выполнены.

Доказательство достаточности. Дано, что соотношения (2) выполнены. Требуется доказать, что векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны.

Если $x_1=y_1=z_1=0$ (т. е. $\boldsymbol{a}_1=0$), то векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны. Пусть хотя бы одно из чисел x_1, y_1, z_1 не равно нулю, например $x_1\neq 0$. Положим $\frac{x_2}{x_1}=\lambda$. Тогда $x_2=\lambda x_1$, и из соотношения

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0, \quad \text{или} \quad x_1y_2-x_2y_1=0,$$

находим

$$x_1y_2-\lambda x_1y_1=0, \quad x_1(y_2-\lambda y_1)=0,$$

и так как $x_1 \neq 0$, то $y_2-\lambda y_1=0$, т. е. $y_2=\lambda y_1$.

Аналогично из соотношения

$$\begin{vmatrix} z_1 x_1 \\ z_2 x_2 \end{vmatrix}=0, \quad \text{или} \quad z_1x_2-z_2x_1=0,$$

находим

$$z_1\lambda x_1-x_1z_2=0, \quad x_1(\lambda z_1-z_2)=0,$$

и так как $x_1 \neq 0$, то $\lambda z_1-z_2=0$, т. е. $z_2=\lambda z_1$. Итак,

$$x_2=\lambda x_1, \ y_2=\lambda y_1, \ z_2=\lambda z_1 \quad \text{или} \quad \boldsymbol{a}_2=\lambda \boldsymbol{a}_1,$$

т. е. векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны.

Теорема 6. *Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов*

$$\boldsymbol{a}_1=\{x_1, y_1, z_1\}, \quad \boldsymbol{a}_2=\{x_2, y_2, z_2\}, \quad \boldsymbol{a}_3=\{x_3, y_3, z_3\},$$

заданных своими координатами относительно общей декартовой системы координат, является равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Доказательство. На основании предыдущей теоремы векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ будут компланарны тогда и только тогда, когда найдутся три числа λ_1, λ_2, λ_3, не равные нулю одновременно, такие, что

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=0,$$

или

$$\lambda_1\{x_1, y_1, z_1\}+\lambda_2\{x_2, y_2, z_2\}+\lambda_3\{x_3, y_3, z_3\},$$

или

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3=0, \quad \lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3=0, \quad \lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3=0.$$

Эта система соотношений относительно λ_1, λ_2, λ_3 линейная и однородная. Но для того чтобы линейная однородная система n уравнений с n неизвестными имела ненулевое решение (т. е. решение, в котором хотя бы одно из неизвестных не равно нулю), необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю.

Из доказанных теорем вытекают такие следствия.

Три попарно различные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, заданные своими координатами относительно общей декартовой системы координат на плоскости, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_3M_1}$ и $\overrightarrow{M_3M_2}$ коллинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда координаты их пропорциональны:

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=0^*.$$

Три попарно различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, заданные своими координатами относительно общей декартовой системы координат в пространстве, принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_3M_1}$ и $\overrightarrow{M_3M_2}$ коллинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3},$$

(см. сноску на стр. 101),

или

$$\begin{vmatrix} y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} z_1-z_3 & x_1-x_3 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=0.$$

Точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2), \quad M_3(x_3, y_3, z_3), \quad M_4(x_4, y_4, z_4),$$

заданные своими координатами относительно общей декартовой системы координат в пространстве, принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_4M_1}$, $\overrightarrow{M_4M_2}$, $\overrightarrow{M_4M_3}$ компланарны, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}=0.$$

§ 37. Базис и координаты вектора

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\boldsymbol{e}_1$ *и* $\boldsymbol{e}_2$, *лежащих в этой плоскости.*

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

---

* Эта форма записи необходимого и достаточного условия принадлежности точек M_1, M_2, M_3 одной прямой не требует оговорки, сделанной в начале формулировки следствия; иначе говоря, среди точек M_1, M_2, M_3 могут быть совпадающие (и даже все три точки M_1, M_2, M_3 могут сливаться в одну).

Теорема 1. *Всякий вектор* $\boldsymbol{a}$, *компланарный с двумя неколлинеарными векторами* $\boldsymbol{e}_1$ *и* $\boldsymbol{e}_2$, *может быть и притом единственным образом разложен* * *по этим векторам.*

Доказательство существования разложения. Отложим все векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{a}$ от одной и той же точки O:

$$\overrightarrow{OE}_1=\boldsymbol{e}_1,\quad \overrightarrow{OE}_2=\boldsymbol{e}_2,\quad \overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}.$$

Тогда в силу компланарности векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{a}$ точки O, E_1, E_2, A лежат в одной плоскости.

Пусть P — проекция точки A на прямую OE_1 параллельно прямой OE_2 (рис. 86). Тогда

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA},$$

а так как векторы $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{PA}$ соответственно коллинеарны ненулевым векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, то, полагая

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\boldsymbol{e}_1}=x,\quad \frac{\overrightarrow{PA}}{\boldsymbol{e}_2}=y,$$

будем иметь

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1,\ \overrightarrow{PA}=y\boldsymbol{e}_2,$$

так что

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2.$$

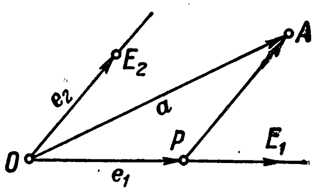


Рис. 86

Доказательство единственности разложения. Пусть существует *еще другое* разложение

$$\boldsymbol{a}=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2.$$

Тогда

$$x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2,$$

или

$$(x-x')\,\boldsymbol{e}_1+(y-y')\,\boldsymbol{e}_2=0.$$

Если хотя бы одна из разностей $x-x'$ и $y-y'$ была не равна нулю, то последнее соотношение означало бы, что векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ линейно зависимы, а потому коллинеарны (§ 36, теорема 1), значит,

$$x-x'=0,\ y-y'=0,\ \text{т. е. }\ x=x',\ y=y'.$$

Теорема 2. *Всякий вектор* $\boldsymbol{a}$ *пространства может быть и притом единственным образом разложен по трем некомпланарным векторам* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

---

* См. начало § 36, где дано определение понятия разложения любого вектора по нескольким векторам.

Доказательство существования разложения. Отложим все векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}$ от одной и той же точки O:

$$\overrightarrow{OE}_1=\boldsymbol{e}_1,\quad \overrightarrow{OE}_2=\boldsymbol{e}_2,\quad \overrightarrow{OE}_3=\boldsymbol{e}_3,\quad \overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}.$$

Пусть Q — проекция точки A на плоскость E_1OE_2 параллельно прямой OE_3, а P — проекция точки Q на прямую OE_1 параллельно прямой OE_2 (рис. 87).

Так как

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QA}$$

и векторы $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{QA}$ соответственно коллинеарны векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то, полагая

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\boldsymbol{e}_1}=x,\quad \frac{\overrightarrow{PQ}}{\boldsymbol{e}_2}=y,\quad \frac{\overrightarrow{QA}}{\boldsymbol{e}_3}=z,$$

будем иметь

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1,\quad \overrightarrow{PQ}=y\boldsymbol{e}_2,\quad \overrightarrow{QA}=z\boldsymbol{e}_3,$$

значит,

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3.$$

Доказательство единственности разложения. Предположим, что существует еще разложение

$$\boldsymbol{a}=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2+z'\boldsymbol{e}_3.$$

Тогда

$$x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2+z'\boldsymbol{e}_3,$$

или

$$(x-x')\boldsymbol{e}_1+(y-y')\boldsymbol{e}_2+(z-z')\boldsymbol{e}_3=0.$$

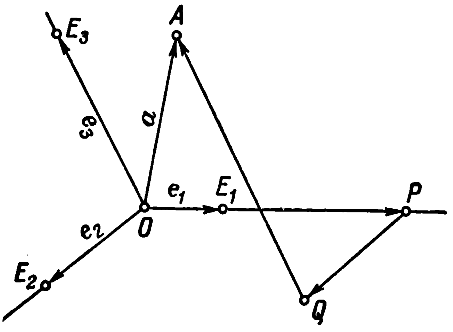


Рис. 87

Если хотя бы одна из разностей $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ была отлична от нуля, то последнее соотношение означало бы, что векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ линейно зависимы, а потому компланарны (§ 36, теорема 2), значит,

$$x-x'=0,\quad y-y'=0,\quad z-z'=0,$$

т. е.

$$x=x',\quad y=y',\quad z=z'.$$

Теорема 3. *Коэффициенты в разложении вектора* $\boldsymbol{a}$, *лежащего в некоторой плоскости, по масштабным векторам* $\boldsymbol{e}_1$ *и* $\boldsymbol{e}_2$ *общей декартовой системы координат на этой плоскости являются координатами вектора* $\boldsymbol{a}$.

Доказательство. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ лежит на плоскости, в которой введена общая декартова система координат xOy с масштабными векторами $\overrightarrow{OE}_1 = \boldsymbol{e}_1$ и $\overrightarrow{OE}_2 = \boldsymbol{e}_2$.

Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от начала координат $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ и разложим его по векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$:

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2.$$

Выберем на осях Ox и Oy точки P и Q, такие, что

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e}_1, \quad \overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{e}_2. \tag{1}$$

Тогда

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

и, значит, $\overrightarrow{OP}$ — проекция вектора $\overrightarrow{OA}$ на ось Ox параллельно оси Oy, а $\overrightarrow{OQ}$ — проекция вектора $\overrightarrow{OA}$ на ось Oy параллельно оси Ox. Далее, из соотношений (1) следует, что

$$x = \frac{\overrightarrow{OP}}{\boldsymbol{e}_1}, \quad y = \frac{\overrightarrow{OQ}}{\boldsymbol{e}_2},$$

т. е. x и y — координаты вектора $\boldsymbol{a}$ (см. § 11, гл. II, а также замечание 5 к § 32).

Теорема 4. *Коэффициенты в разложении вектора $\boldsymbol{a}$ по масштабным векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ общей декартовой системы координат в пространстве являются координатами вектора $\boldsymbol{a}$.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Замечание 1. Назовем радиусом-вектором произвольной точки M плоскости или пространства вектор $\overrightarrow{OM}$, где O — фиксированная точка плоскости (или пространства). Из доказанных теорем 3 и 4 этого параграфа следует, что общие декартовы координаты точки M равны координатам ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, где O — начало координат.

Замечание 2. Теоремы 3 и 4 являются уточнениями теорем 1 и 2 в части, касающейся существования разложения любого вектора по двум неколлинеарным векторам на плоскости и по трем некомпланарным векторам в пространстве.

Замечание 3. Утверждение теорем 3 и 4 может быть принято и за определение координат вектора.

§ 38. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением $\boldsymbol{ab}$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в случае, если эти векторы ненулевые, называется произведение их модулей на косинус угла между ними

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi.$$

Если ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и направлены в одну сторону, то угол между ними считается равным нулю, а если ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, но имеют противоположное направление, то угол между ними считается равным π.

Наконец, если $\boldsymbol{a}=0$ или $\boldsymbol{b}=0$ (или $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=0$), то скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ по определению считается равным нулю.

Если считать величину угла нулевого вектора с любым вектором равной любому числу, то скалярное произведение двух векторов можно определить для любых двух векторов как произведение их модулей на косинус угла между ними (считая этот угол любым числом, если один или оба вектора равны нулю).

Из этого определения следует, что скалярный квадрат $\boldsymbol{a}^2$ вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. скалярное произведение $\boldsymbol{aa}$ равно квадрату модуля вектора $\boldsymbol{a}$.

В самом деле,

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{aa}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2.$$

Отсюда

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2},$$

т. е. модуль вектора равен квадратному корню из его скалярного квадрата.

Скалярное произведение двух векторов обладает следующими свойствами:

$$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba} \quad \text{(коммутативность)}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{ab}) \quad \text{(ассоциативность умножения на число)}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac} \quad \text{(дистрибутивность)}. \tag{3}$$

Свойство (1) сразу следует из определения скалярного произведения.

Для доказательства свойств (2) и (3) заметим, что в силу теоремы 4 § 11 имеем

$$\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi=|\boldsymbol{a}|\ \text{коорд. пр.}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

Доказательство свойства (2):

$$\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\ \text{коорд. пр.}_{\boldsymbol{a}}(\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\ \text{коорд.}\,(\lambda\ \text{пр.}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b})=$$
$$=|\boldsymbol{a}|\,\lambda\ \text{коорд. пр.}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{ab}).$$

Доказательство свойства (3):

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\ \text{коорд. пр.}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$$
$$=|\boldsymbol{a}|(\text{коорд. пр.}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\text{коорд. пр.}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})=$$
$$=|\boldsymbol{a}|\ \text{коорд. пр.}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\ \text{коорд. пр.}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}.$$

§ 39. Выражение скалярного произведения в координатах

*Ортонормированным базисом называется упорядоченная тройка **i, j, k** единичных и попарно ортогональных векторов.*

Пусть относительно ортонормированного базиса заданы два вектора своими координатами *:

$$\boldsymbol{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\},\quad \boldsymbol{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\},$$

т. е.

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$

На основании свойств (1)—(3) скалярного произведения (§ 38) находим

$$\boldsymbol{ab}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=x_1x_2\boldsymbol{i}^2+y_1y_2\boldsymbol{j}^2+z_1z_2\boldsymbol{k}^2+$$
$$+(x_1y_2+x_2y_1)\boldsymbol{ij}+(y_1z_2+y_2z_1)\boldsymbol{jk}+(z_1x_2+z_2x_1)\boldsymbol{ki}.$$

Но так как $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные и попарно ортогональные векторы, то

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1,\quad \boldsymbol{ij}=\boldsymbol{jk}=\boldsymbol{ki}=0,$$

значит,

$$\boldsymbol{ab}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, \tag{1}$$

т. е. *скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе, равно сумме произведений их соответствующих координат.*

В частности,

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}^2|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{2}$$

где

$$\boldsymbol{a}=\{x,\ y,\ z\},$$

т. е. *модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат, взятых относительно ортонормированного базиса.*

Теперь из формулы

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}$$

находим косинус угла φ между двумя ненулевыми векторами, заданными своими координатами

$$\boldsymbol{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\},\quad \boldsymbol{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$$

относительно ортонормированного базиса; именно

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{3}$$

---

* В дальнейшем можно считать, что $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы осей Ox, Oy, Oz декартовой прямоугольной системы координат. Однако фиксирование начала координат в пространстве не обязательно при определении координат вектора, как коэффициентов разложения его по векторам базиса.

Из формулы (3) находим следующее необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух ненулевых векторов:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0, \tag{4}$$

т. е. *необходимым и достаточным условием ортогональности двух ненулевых векторов является равенство нулю суммы произведений соответствующих координат, взятых относительно ортонормированного базиса.*

Теорема. *Координаты x, y, z вектора $\boldsymbol{a}$ относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого вектора на единичные векторы базиса.*

Доказательство. На основании теоремы 4 § 37 имеем

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

Умножая скалярно обе части этого равенства поочередно на $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ в силу свойств скалярного произведения и соотношений

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1, \quad \boldsymbol{ij}=\boldsymbol{jk}=\boldsymbol{ki}=0$$

получим

$$x=\boldsymbol{ai}, \quad y=\boldsymbol{aj}, \quad z=\boldsymbol{ak}. \tag{5}$$

В частности, если вектор $\boldsymbol{a}$ единичный, то

$$x=\boldsymbol{ai}=\cos\alpha, \quad y=\boldsymbol{aj}=\cos\beta, \quad z=\boldsymbol{ak}=\cos\gamma,$$

где α, β, γ — углы между вектором $\boldsymbol{a}$ и векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Так как вектор $\boldsymbol{a}$ единичный, то

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=1,$$

а в силу формулы (2)

$$|\boldsymbol{a}|^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma.$$

Таким образом,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{6}$$

Косинусы углов вектора $\boldsymbol{a}$ с векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ортонормированного базиса называются направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{a}$ или направляющими косинусами оси, имеющей направление вектора $\boldsymbol{a}$.

Мы видим, что сумма квадратов направляющих косинусов оси равна 1.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ не единичный, то из соотношений (5) находим

$$x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \quad y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta, \quad z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$

и так как $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{7}$$

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка, заданная своими координатами относительно декартовой прямоугольной системы координат, а $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ — ее радиус-вектор. Как было доказано,

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы соответственно осей Ox, Oy и Oz.

Умножая скалярно обе части этого равенства поочередно на $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, получим

$$x = \boldsymbol{ri}, \quad y = \boldsymbol{rj}, \quad z = \boldsymbol{rk}, \tag{8}$$

т. е. декартовы прямоугольные координаты точки M равны скалярным произведениям радиуса-вектора этой точки на единичные векторы осей координат.

На плоскости формулы (1) — (8) примут вид:
скалярное произведение

$$\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2, \tag{1'}$$

модуль вектора

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2'}$$

угол между ненулевыми векторами

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, \tag{3'}$$

необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0, \tag{4'}$$

координаты вектора относительно ортонормированного базиса

$$x = \boldsymbol{ai}, \quad y = \boldsymbol{aj}, \tag{5'}$$

соотношение между направляющими косинусами оси

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1, \tag{6'}$$

выражения для направляющих косинусов оси, заданной ненулевым вектором

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{7'}$$

декартовы прямоугольные координаты точки (или координаты ее радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$)

$$x = \boldsymbol{ri}, \quad y = \boldsymbol{rj}. \tag{8'}$$

Базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ предполагается ортонормированным, а координаты всех векторов в формулах (1') — (8') предполагаются заданными относительно этого ортонормированного базиса.

§ 40. Угол от одного вектора до другого на ориентированной плоскости

Теорема 1. *Введем на плоскости ортонормированный базис* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ (этим самым плоскость ориентирована). *Пусть* $\boldsymbol{a}=\{x_1, y_1\}$ *и* $\boldsymbol{b}=\{x_2, y_2\}$ *— ненулевые векторы, координаты которых даны относительно базиса* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. *Обозначим через* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *любое из значений ориентированного угла* $\widehat{\boldsymbol{ab}}$. *Тогда имеют место формулы:*

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}, \tag{1}$$

$$\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1x_2+y_1y_2}, \tag{3}$$

причем последняя формула имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *не взаимно перпендикулярны.*

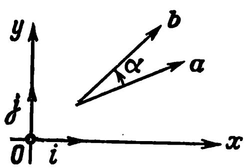


Рис. 88

Доказательство. На основании теоремы Шаля имеем

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}) \pmod{2\pi}, \tag{4}$$

или

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b})-(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}) \pmod{2\pi}. \tag{5}$$

Введем декартову прямоугольную систему координат, выбирая произвольно начало координат O; направим ось Ox по вектору $\boldsymbol{i}$, ось Oy по вектору $\boldsymbol{j}$ и примем эти векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ за масштабные соответственно для осей Ox и Oy (рис. 88).

На основании определения тригонометрических функций имеем

$$\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}, \quad \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}; \tag{6}$$

$$\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b})=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}, \quad \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b})=\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \tag{7}$$

Отсюда и из соотношения (5) находим

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b})+\sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})\sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b})=$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}},$$

$$\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b})\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})-\sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b})=$$
$$=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

Из полученных выражений для $\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ в случае $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ получаем формулу (3).

Замечание. Если на плоскость введен ортонормированный базис, то координаты единичного вектора $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}^2 = 1$) равны соответственно $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, где α — угол от вектора $\boldsymbol{i}$ до вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. $\alpha = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})$. Это следует из формул (6) $(x_1^2 + y_1^2 = 1)$.

Теорема 2. *Если на плоскости введен ортонормированный базис* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ (этим плоскость ориентирована) *и относительно этого базиса задан ненулевой вектор*

$$\boldsymbol{a} = \{x, y\},$$

а вектор $\boldsymbol{b}$ *получен из вектора* $\boldsymbol{a}$ *поворотом на угол* α*, *то*

$$\boldsymbol{b} = \{x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha\}. \tag{8}$$

Доказательство. Из соотношения (4) находим

$$\left.\begin{aligned} \cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}) &= \cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),\\ \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}) &= \cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

По определению тригонометрических функций

$$\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}) = \frac{x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}) = \frac{y}{|\boldsymbol{a}|},$$

$$\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}) = \frac{x'}{|\boldsymbol{b}|},\quad \sin(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}) = \frac{y'}{|\boldsymbol{b}|},$$

где x', y' — координаты вектора $\boldsymbol{b}$.

Из этих формул и соотношений (9) следует, что

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,\quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{10}$$

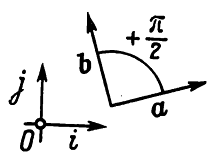


Рис. 89

Следствие. Будем обозначать через $[\boldsymbol{a}]$ вектор, полученный из ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$, лежащего в ориентированной плоскости, поворотом на угол $+\frac{\pi}{2}$. Тогда если в ортонормированном базисе

$$\boldsymbol{a} = \{x, y\},$$

то

$$[\boldsymbol{a}] = \{-y, x\}.$$

В самом деле, это сразу следует из формул (10), если положить в них $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (рис. 89).

* То есть $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha \pmod{2\pi}$ и $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$.

§ 41. Объем ориентированного параллелепипеда

Назовем параллелограммом ABDC совокупность граничных точек A, B, C, D двух равных между собой направленных отрезков $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Точки A, B, C, D назовем вершинами параллелограмма $ABDC$; отрезки AB, CD, AC, BD назовем сторонами параллелограмма, а отрезки AD и BC — его диагоналями. Если вершины A, B, C, D параллелограмма принадлежат одной прямой, то такой параллелограмм будем называть вырожденным.

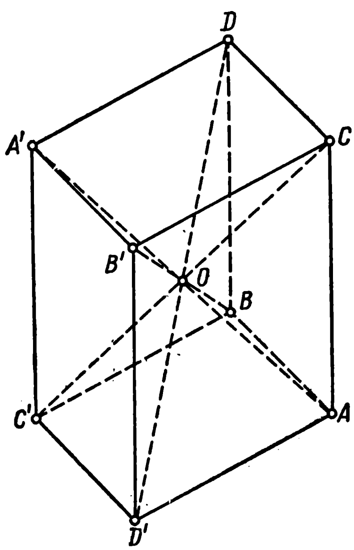


Рис. 90

Совокупность вершин двух параллелограммов ABDC и A′B′D′C′, симметричных друг другу относительно некоторой точки O, назовем параллелепипедом (точки A, B, C, D симметричны соответственно точкам A', B', C', D' относительно точки O). Назовем вершинами параллелепипеда вершины этих параллелограммов; отрезки AA', BB', CC', DD' — диагоналями параллелепипеда; стороны параллелограммов $ABDC$, $A'B'C'D'$, а также отрезки AD', DA', BC', $B'C$ — ребрами параллелепипеда. Гранями параллелепипеда назовем параллелограммы $ABDC$, $A'B'D'C'$, $ABC'D'$, $A'B'CD$, $ACB'D'$, $A'C'BD$ (рис. 90).

Если вершины параллелепипеда принадлежат одной плоскости, то он называется вырожденным.

Параллелепипед однозначно определяется заданием трех его направленных ребер, выходящих из одной вершины, например

$$\overrightarrow{DA'},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DC}.$$

Ориентированным параллелепипедом называется параллелепипед, у которого упорядочены три ребра, выходящие из одной вершины. Ориентированный параллелепипед будем обозначать так: $(\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$, где $\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ — три его направленные ребра, выходящие из одной вершины и упорядоченные записью $\overrightarrow{DA'}$ — первое ребро, $\overrightarrow{DB}$ — второе, $\overrightarrow{DC}$ — третье.

Замечание. Каждому ориентированному параллелепипеду $(\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ можно поставить в соответствие ориентированный тетраэдр $\overrightarrow{A'BCD}$ (§ 18) и, обратно, всякий ориентированный тетраэдр $\overrightarrow{A'BCD}$ ставится в соответствие и притом только одному ориентированному параллелепипеду $(\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$. Так как всякий невырожденный тетраэдр можно ориентировать только двумя различными противоположными способами (см. § 15), то и всякий невырожденный параллелепипед можно также ориентировать только двумя противоположными способами.

Пространство, в котором введен невырожденный ориентированный параллелепипед $(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3})$ (базисный параллелепипед), называется ориентированным.

Будем говорить, что невырожденный ориентированный параллелепипед $\Pi(\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ имеет положительную ориентацию, если он одинаково ориентирован с базисным параллелепипедом; если же эти параллелепипеды имеют противоположные ориентации, то параллелепипед Π имеет отрицательную ориентацию. Произведем кратчайший поворот от направленного отрезка $\overrightarrow{DA'}$ к направленному отрезку $\overrightarrow{DB}$ в плоскости $DA'B$ и будем наблюдать его с той стороны от этой плоскости, где расположена точка C. Произведем кратчайший поворот от направленного отрезка $\overrightarrow{OE_1}$ к направленному отрезку $\overrightarrow{OE_2}$ в плоскости OE_1E_2 и будем наблюдать его с той стороны от этой плоскости, где расположена точка E_3. Если эти повороты совершаются в одном направлении, то упорядоченные тройки $\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OE_3}$ имеют одинаковую ориентацию (см. § 15, а также дополнение I), а параллелепипед Π и базисный параллелепипед имеют одинаковую ориентацию. В противном случае — противоположную.

Каждому ориентированному параллелепипеду $(\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ можно поставить в соответствие упорядоченную тройку свободных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, определяемых соотношениями

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{DA'}, \ \boldsymbol{b} = \overrightarrow{DB}, \ \boldsymbol{c} = \overrightarrow{DC}.$$

Если же задана упорядоченная тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторов, то имеется бесконечное множество ориентированных параллелепипедов, каждому из которых ставится в соответствие эта упорядоченная тройка векторов: точка D выбирается произвольно, а затем от точки D откладываются векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$:

$$\overrightarrow{DA'} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{DB} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{DC} = \boldsymbol{c}.$$

Все такие параллелепипеды получаются всеми переносами любого из них. Понятие ориентации (положительной и отрицательной) упорядоченных точек направленных отрезков $\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ (не лежащих в одной плоскости) переносится и на упорядоченные тройки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарных векторов, а именно, говорят, что упорядоченная тройка некомпланарных векторов ориентированного пространства имеет положительную ориентацию, если положительную ориентацию имеет упорядоченная тройка направленных отрезков $\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$, которые мы получим, от-

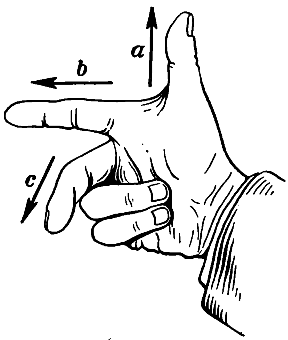


Рис. 91

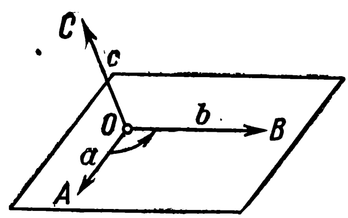


Рис. 92

кладывая векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ от произвольной точки D. Если же упорядоченная тройка $\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ имеет отрицательную ориентацию, то и упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имеет отрицательную ориентацию. Это определение не зависит от выбора точки D.

Замечание. Иногда вводят понятия правой и левой упорядоченных троек некомпланарных векторов; именно, упорядоченная тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарных векторов называется правой, если по векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ можно направить соответственно большой, указательный и средний пальцы правой руки (рис. 91) или если кратчайший поворот от вектора $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ к вектору $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ в плоскости OAB кажется происходящим против часовой стрелки, если смотреть на плоскость OAB со стороны конца C вектора $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ (рис. 92).

Аналогично определяется левая упорядоченная тройка некомпланарных векторов (рис. 93 и 94). Однако эти понятия имеют лишь физический смысл. В математике имеет смысл говорить лишь об одинаковой или противоположной ориентации двух упорядоченных некомпланарных троек векторов; этим самым множество всех таких троек делится на два класса: две упорядоченные некомпланарные тройки векторов принадлежат одному классу, если они одинаково ориентированы, и к разным, если они ориентированы противоположно. Какой из классов упорядоченных некомпланарных векторов назвать «правым», а какой «левым» — безразлично.

Определение. *Объемом невырожденного ориентированного параллелепипеда* ($\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$), *находящегося в ориентированном пространстве, называется число, равное по абсолютной величине объему параллелепипеда с ребрами* $\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$, *положительное,*

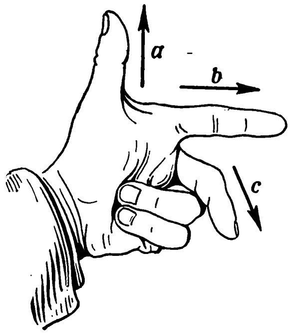


Рис. 93

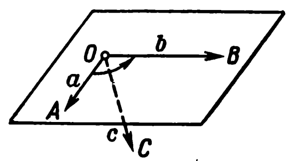


Рис. 94

если упорядоченная тройка направленных ребер $\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ *имеет положительную ориентацию, и отрицательное, если упорядоченная тройка* $\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ *имеет отрицательную ориентацию.*

Объем вырожденного ориентированного параллелепипеда условимся считать равным нулю.

Поставим в соответствие упорядоченной тройке направленных отрезков $\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ упорядоченную тройку $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторов:

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{DA'},\ \boldsymbol{b}=\overrightarrow{DB},\ \boldsymbol{c}=\overrightarrow{DC}.$$

Имеется бесконечное множество ориентированных параллелепипедов, каждому из которых ставится в соответствие та же упорядоченная тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторов. Эти ориентированные параллелепипеды получаются всеми переносами любого из них и имеют поэтому один и тот же объем; этот объем мы будем обозначать $\boldsymbol{abc}$ и говорить, что это объем ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (взятых в этом порядке).

Объем $\boldsymbol{abc}$ ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, обладает следующими свойствами:

$$\boldsymbol{abc}=\boldsymbol{bca}=\boldsymbol{cab}=-\boldsymbol{bac}=-\boldsymbol{acb}=-\boldsymbol{cba} \qquad (1)$$

(т. е. от круговой перестановки множителей он не меняется, а при нарушении кругового порядка множителей меняет знак, сохраняя абсолютную величину),

$$\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{abc}+\boldsymbol{abd} \text{ (дистрибутивность)}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{ab}(\lambda\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{abc}) \text{ (ассоциативность по отношению к числу)}. \tag{3}$$

Доказательство. Для доказательства свойства (1) достаточно только заметить, что упорядоченная тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарных векторов не меняет ориентации при круговой перестановке этих векторов и меняет ориентацию при нарушении кругового порядка.

Для доказательства свойств (2) и (3) докажем предварительно следующую лемму.

Лемма. *Объем* $\boldsymbol{abc}$ *ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *равен площади* S *параллелограмма, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$, *умноженной на координату ортогональной проекции вектора* $\boldsymbol{c}$ *на ось* l, *единичный вектор* $\boldsymbol{e}$ *которой перпендикулярен к векторам* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *и в случае, если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *неколлинеарны, направлен так, что тройка векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}$ *имеет положительную ориентацию:*

$$\boldsymbol{abc}=S\text{ коорд. пр.}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{c}. \tag{4}$$

Доказательство. Предположим, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарны. Отложим векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{e}$ от одной и той же точки:

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c},\quad \overrightarrow{OE}=\boldsymbol{e}.$$

Тогда абсолютная величина координаты проекции вектора $\boldsymbol{c}$ на вектор $\boldsymbol{e}$ будет высотой параллелепипеда с ребрами OA, OB и OC, а значит,

$$|\boldsymbol{abc}|=S\,|\text{коорд. пр.}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{c}|,$$

так как и $\boldsymbol{abc}$ и $S\,|\text{коорд. п.}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{c}|$ равны объему параллелепипеда с ребрами OA, OB, OC.

Далее, если тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имеет положительную ориентацию, то точки C и E лежат по одну сторону от плоскости OAB и, значит, коорд. пр.$_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{c}>0$, а если тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имеет отрицательную ориентацию, то точки C и E лежат по разные стороны от плоскости OAB и, значит, коорд. пр.$_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{c}<0$.

В первом случае $\boldsymbol{abc}>0$, во втором $\boldsymbol{abc}<0$, значит, числа $\boldsymbol{abc}$ и коорд. пр.$_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{c}$ одного знака.

В случае, если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, соотношение (4), очевидно, также выполняется $(0=0)$.

Теперь свойства (2) и (3) доказываются так:

$$\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=S\text{ коорд. пр.}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=S\,(\text{коорд. пр.}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{c}+\text{коорд. пр.}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{d})=$$
$$=S\text{ коорд. пр.}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{c}+S\text{ коорд. пр.}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{d}=\boldsymbol{abc}+\boldsymbol{abd}.$$

Доказанное свойство дистрибутивности объема ориентированного параллелепипеда относительно сложения верно по отношению к любому множителю.

В самом деле, имеем, например:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=-(\boldsymbol{ad}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}))=-(\boldsymbol{adb}+\boldsymbol{adc})=$$
$$=-\boldsymbol{adb}-\boldsymbol{adc}=\boldsymbol{abd}+\boldsymbol{acd}.$$

Доказательство свойства (3):

$$\boldsymbol{ab}(\lambda\boldsymbol{c})=S\text{ коорд. пр.}_e(\lambda\boldsymbol{c})=S\text{ коорд. }(\lambda\text{ пр.}_e\,\boldsymbol{c})=$$
$$=\lambda S\text{ коорд. пр.}_e\,\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{abc}).$$

§ 42. Объем ориентированного параллелепипеда в координатах. Объем тетраэдра

Ориентируем пространство ортонормированным базисом $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Пусть относительно этого базиса заданы три вектора своими координатами:

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{c}=x_3\boldsymbol{i}+y_3\boldsymbol{j}+z_3\boldsymbol{k}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{abc}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})(x_3\boldsymbol{i}+y_3\boldsymbol{j}+z_3\boldsymbol{k}).$$

В силу того, что объем ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, обладает свойствами дистрибутивности и ассоциативности по отношению к умножению любого множителя на число (свойства (2) и (3) § 41), правая часть последнего равенства может быть представлена в виде суммы двадцати семи слагаемых ($3\times3\times3=27$):

$$(x_1\boldsymbol{i})(x_2\boldsymbol{i})(x_3\boldsymbol{i})+(x_1\boldsymbol{i})(x_2\boldsymbol{i})(y_3\boldsymbol{j})+\ldots$$

В этой сумме смешанных произведений обратятся в нуль все те, которые образованы тремя компланарными векторами. Останется

$$\boldsymbol{abc}=(x_1\boldsymbol{i})(y_2\boldsymbol{j})(z_3\boldsymbol{k})+(x_1\boldsymbol{i})(z_2\boldsymbol{k})(y_3\boldsymbol{j})+(y_1\boldsymbol{j})(x_2\boldsymbol{i})(z_3\boldsymbol{k})+$$
$$+(y_1\boldsymbol{j})(z_2\boldsymbol{k})(x_3\boldsymbol{i})+(z_1\boldsymbol{k})(x_2\boldsymbol{i})(y_3\boldsymbol{j})+(z_1\boldsymbol{k})(y_2\boldsymbol{j})(x_3\boldsymbol{i})=$$
$$=x_1y_2z_3\boldsymbol{ijk}+x_1z_2y_3\boldsymbol{ikj}+x_2y_1z_3\boldsymbol{jik}+$$
$$+x_3y_1z_2\boldsymbol{jki}+x_2y_3z_1\boldsymbol{kij}+x_3y_2z_1\boldsymbol{kji},$$

и так как

$$\boldsymbol{ijk}=\boldsymbol{jki}=\boldsymbol{kij}=1,\qquad \boldsymbol{ikj}=\boldsymbol{jik}=\boldsymbol{kji}=-1,$$

то

$$\boldsymbol{abc}=x_1y_2z_3-x_1z_2y_3-x_2y_1z_3+x_3y_1z_2+x_2y_3z_1-x_3y_2z_1,$$

или

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \tag{1}$$

Замечание 1. Если пространство ориентировано произвольным базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то вместо формулы (1) получим

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3. \tag{2}$$

Замечание 2. Предположим, что известны длины базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и углы между ними. Это равносильно тому, что известны скалярные произведения $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k$ (i, $k=1$, 2, 3). Обозначим эти скалярные произведения так:

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k=g_{ik}.$$

Введем в пространстве ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и пусть векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ в этом базисе имеют координаты

$$\boldsymbol{e}_1=\{a_1,\ b_1,\ c_1\},\qquad \boldsymbol{e}_2=\{a_2,\ b_2,\ c_2\},\qquad \boldsymbol{e}_3=\{a_3,\ b_3,\ c_3\};$$

тогда на основании доказанного выше

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

и, значит (используем формулу для умножения двух определителей, выполняя умножение «строк на строки»),

$$(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)^2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1 & a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1 & a_3a_2+b_3b_2+c_3c_2 & a_3^2+b_3^2+c_3^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1^2 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2^2 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

Обозначая последний определитель буквой g, получим

$$\boldsymbol{abc}=\sqrt{g}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{3'}$$

Если в пространстве относительно декартовой прямоугольной системы координат заданы четыре точки:

$$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad M_2(x_2,\ y_2,\ z_2),\quad M_3(x_3,\ y_3,\ z_3),\quad M_4(x_4,\ y_4,\ z_4),$$

то объем V ориентированного параллелепипеда с ребрами $\overrightarrow{M_4M_1}$, $\overrightarrow{M_4M_2}$, $\overrightarrow{M_4M_3}$ вычисляется по формуле

$$V=\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Доказательство следует из формулы (1) этого параграфа и того обстоятельства, что

$$\overrightarrow{M_4M_1}=\{x_1-x_4, \quad y_1-y_4, \quad z_1-z_4\},$$
$$\overrightarrow{M_4M_2}=\{x_2-x_4, \quad y_2-y_4, \quad z_2-z_4\},$$
$$\overrightarrow{M_4M_3}=\{x_3-x_4, \quad y_3-y_4, \quad z_3-z_4\}.$$

Следствие. Объем ориентированного тетраэдра $\overrightarrow{M_1M_2M_3M_4}$ (см. § 15) вычисляется по формуле

$$\overline{M_1M_2M_3M_4}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Замечание. В случае общей декартовой системы координат перед определителями в формулах (4) и (5) следует поставить множитель $\sqrt{g}$ (см. формулу (3′)). Если надо вычислить объем параллелепипеда или тетраэдра (неориентированных), определители в формулах (4) и (5) надо взять по модулю.

§ 43. Векторное произведение

Определение. *Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, лежащие в ориентированном пространстве, неколлинеарны, то векторным произведением $[\boldsymbol{ab}]$ вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется вектор, определяемый следующими тремя условиями.*

1. *Модуль векторного произведения $[\boldsymbol{ab}]$ равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними:*

$$|[\boldsymbol{ab}]|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi.$$

2. *Векторное произведение $[\boldsymbol{ab}]$ перпендикулярно и вектору $\boldsymbol{a}$ и вектору $\boldsymbol{b}$:*

$$[\boldsymbol{ab}]\perp\boldsymbol{a}, \qquad [\boldsymbol{ab}]\perp\boldsymbol{b}.$$

3. *Упорядоченная тройка векторов*

$$\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b}, \quad [\boldsymbol{ab}]$$

имеет положительную ориентацию.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю по определению: если $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, то $[\boldsymbol{ab}]=0$.

З а м е ч а н и е. Если ориентировать пространство правой тройкой, то направление векторного произведения $[\boldsymbol{ab}]$ (в случае, если

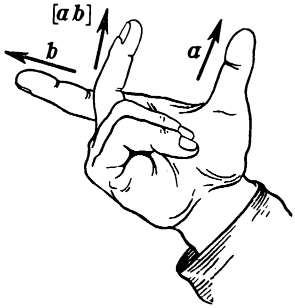


Рис. 95

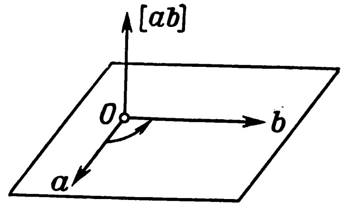


Рис. 96

векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны) определяется по следующему правилу:

если большой палец правой руки направить по вектору $\boldsymbol{a}$, указательный — по вектору $\boldsymbol{b}$, а средний расположить перпендикулярно большому и указательному, то средний палец укажет на направление вектора $[\boldsymbol{ab}]$ (рис. 95).

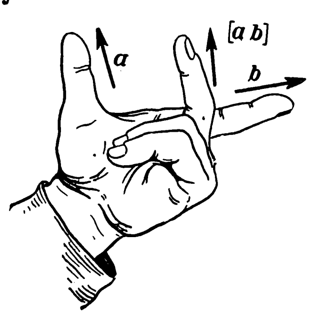


Рис. 97

Или если смотреть на плоскость векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, отложенных от одной точки со стороны стрелки векторного произведения $[\boldsymbol{ab}]$, отложенного от той же точки, то кратчайший поворот от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ кажется происходящим против часовой стрелки (рис. 96).

Если пространство ориентировать левой тройкой, то направление векторного произведения определяется аналогично по правилу трех пальцев левой руки (рис. 97).

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Отложим их от одной и той же точки O:

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}.$$

На основании данного определения векторного произведения модуль векторного произведения равен площади параллелограмма со сторонами OA и OB; иногда говорят так: модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, отложенных от одной точки.

Если рассматривать и вырожденные параллелограммы, причем считать, что площадь вырожденного параллелограмма равна нулю, то модуль векторного произведения $[\boldsymbol{ab}]$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ во всех случаях.

§ 44. Смешанное произведение трех векторов

Определение. *Смешанным произведением трех векторов* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, *лежащих в ориентированном пространстве, называется скалярное произведение вектора* $[\boldsymbol{ab}]$ *на вектор* $\boldsymbol{c}$, *т. е.* $[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}$.

Теорема. *Смешанное произведение* $[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}$ *равно объему ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Доказательство. В § 38 для скалярного произведения двух векторов была доказана формула

$$\boldsymbol{pq} = |\boldsymbol{p}| \text{ коорд. пр.}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{q}.$$

Пусть векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ некомпланарны. Тогда на основании леммы § 41 имеем

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c} = |[\boldsymbol{ab}]| \text{ коорд. пр.}\,\boldsymbol{c} = S \text{ коорд. пр.}\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{abc},$$

причем проектирование ведется на ось, имеющую направление вектора $[\boldsymbol{ab}]$.

В случае, если векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ компланарны, равенство

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{abc},$$

очевидно $(0 = 0)$.

Следствие.

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}].$$

Доказательство.

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = [\boldsymbol{bc}]\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}].$$

§ 45. Координаты векторного произведения

Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — ортонормированный базис. Пусть в этом базисе

$$\boldsymbol{a} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}, \qquad \boldsymbol{b} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\}.$$

Координаты вектора в ортонормированном базисе можно рассматривать как скалярные произведения этого вектора на векторы базиса. Пользуясь формулой (1) § 42 для объема ориентированного параллелепипеда в координатах и замечая, что

$$\boldsymbol{i} = \{1,\ 0,\ 0\}, \qquad \boldsymbol{j} = \{0,\ 1,\ 0\}, \qquad \boldsymbol{k} = \{0,\ 0,\ 1\},$$

находим координаты векторного произведения:

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{i} = \boldsymbol{abi} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{abj} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},$$

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{abk} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, если в ортонормированном базисе

$$\boldsymbol{a} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}, \qquad \boldsymbol{b} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\},$$

то

$$[\boldsymbol{ab}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

§ 46. Свойства векторного произведения

Векторное произведение двух векторов обладает следующими свойствами:

$$[\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ba}], \tag{1}$$

$$[(\lambda\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}] = \lambda\,[\boldsymbol{ab}], \tag{2}$$

$$[\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})] = [\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{ac}]. \tag{3}$$

Они вытекают из выражений для векторного произведения в координатах. Докажем, например, последнее свойство. Пусть в ортонормированном базисе

$$\boldsymbol{a} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}, \qquad \boldsymbol{b} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\}, \qquad \boldsymbol{c} = \{x_3,\ y_3,\ z_3\}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \{x_2 + x_3,\ y_2 + y_3,\ z_2 + z_3\}$$

и, следовательно,

$$[\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})] =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2+y_3 & z_2+z_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2+z_3 & x_2+x_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2+x_3 & y_2+y_3 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$+ \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= [\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{ac}].$$

§ 47. Двойное векторное произведение

Вектор $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$ называется двойным векторным произведением. Векторы $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$ компланарны; в самом деле это так, если векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны. Если же векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны, то вектор $[\boldsymbol{bc}]$ им перпендикулярен, а вектор $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$, перпендикулярный вектору $[\boldsymbol{bc}]$, будет компланарен с векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Отсюда следует, что вектор $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$ можно разложить по векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Приводимая ниже формула и дает разложение этого вектора по векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}).$$

Для доказательства этой формулы введем ортонормированный базис, взяв первый единичный вектор $\boldsymbol{i}$ базиса коллинеарным вектору $\boldsymbol{a}$ и расположив второй единичный вектор $\boldsymbol{j}$ этого базиса перпендикулярно $\boldsymbol{i}$ и так, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{j}$ были компланарны.

Тогда

$$\boldsymbol{a} = \{x_1,\ 0,\ 0\}, \qquad \boldsymbol{b} = \{x_2,\ y_2,\ 0), \qquad \boldsymbol{c} = \{x_3,\ y_3,\ z_3\},$$

значит,

$$[\boldsymbol{bc}] = \{y_2z_3,\ -x_2z_3,\ x_2y_3 - x_3y_2\},$$

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \{0,\ -x_1(x_2y_3 - x_3y_2),\ -x_1x_2z_3\},$$

$$\boldsymbol{ac} = x_1x_3, \qquad \boldsymbol{ab} = x_1x_2,$$

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}) = x_1x_3\{x_2,\ y_2,\ 0\} - x_1x_2\{x_3,\ y_3,\ z_3\} = \{x_1x_2x_3,\ x_1x_3y_2,\ 0\} -$$
$$- \{x_1x_2x_3,\ x_1x_2y_3,\ x_1x_2z_3\} = \{0,\ x_1x_3y_2 - x_1x_2y_3, -x_1x_2z_3\} =$$
$$= \{0,\ -x_1(x_2y_3 - x_3y_2),\ -x_1x_2z_3\} = [\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]].$$

Отметим еще формулу

$$[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}).$$

Доказательство:

$$[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}] = -[\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]] = -(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{cb}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{cb}).$$

§ 48. Площадь параллелограмма и треугольника в пространстве

Площадь параллелограмма, построенного на двух неколлинеарных векторах $\boldsymbol{a} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\}$, отложенных от одной точки и заданных своими координатами относительно ортонормированного базиса, равна $|[\boldsymbol{ab}]|$ и, следовательно, вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Пусть относительно прямоугольной системы координат в пространстве заданы три вершины параллелограмма:

$$A(x_1,\ y_1,\ z_1), \qquad B(x_2,\ y_2,\ z_2), \qquad C(x_3,\ y_3,\ z_3).$$

Тогда его площадь вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_3 & x_1 - x_3 \\ z_2 - z_3 & x_2 - x_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}^2}.$$

В самом деле, площадь параллелограмма с тремя данными вершинами A, B, C равна $S=|[\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}]|$. Остается заметить, что

$$\overrightarrow{CA}=\{x_1-x_3,\quad y_1-y_3,\quad z_1-z_3\},$$
$$\overrightarrow{CB}=\{x_2-x_3,\quad y_2-y_3,\quad z_2-z_3\},$$
$$[\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}]=\left\{\begin{vmatrix} y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} z_1-z_3 & x_1-x_3 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}\right\}$$

и что модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Замечание. Площадь S треугольника ABC с вершинами

$$A(x_1,\ y_1,\ z_1),\qquad B(x_2,\ y_2,\ z_2),\qquad C(x_3,\ y_3,\ z_3),$$

заданными относительно декартовой прямоугольной системы координат, вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_3 & x_1-x_3 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}^2}.$$

§ 49. Примеры и задачи к главе IV

1. Задачи с решениями

Пример 1. Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 98). Пусть $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$. Тогда $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. Возводя обе части этого равенства

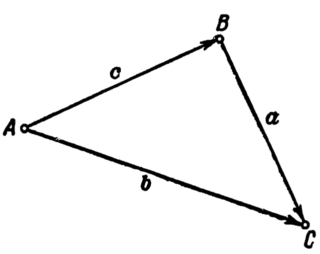


Рис. 98

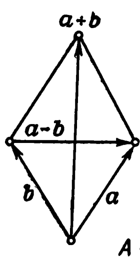


Рис. 99

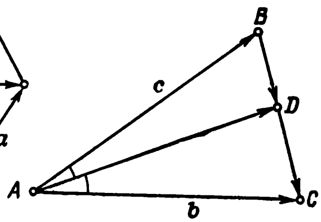


Рис. 100

скалярно в квадрат, получим $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{bc}$. Но $\boldsymbol{a}^2=a^2$, $\boldsymbol{b}^2=b^2$, $\boldsymbol{c}^2=c^2$, $\boldsymbol{bc}=bc\cos A$, поэтому $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ — теорема косинусов. Заметим, что эта формула верна и для вырожденного треугольника.

Пример 2. Рассмотрим ромб (рис. 99). Составим скалярное произведение вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ на вектор $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=a^2-b^2=0.$$

Но если скалярное произведение двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ равно нулю, то эти векторы взаимно перпендикулярны. Таким образом, доказана теорема: диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Пример 3. Пусть AD — биссектриса внутреннего угла A треугольника ABC. Выразим длину x биссектрисы AD через длины c и b сторон AB и AC и угол A между ними. Полагая $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{x}$, имеем (рис. 100)

$$\frac{c}{b}=\frac{BD}{DC}=\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}=\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x}}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{x}=\frac{b\boldsymbol{c}+c\boldsymbol{b}}{b+c},$$

значит,

$$x=\sqrt{\boldsymbol{x}^2}=\sqrt{\frac{b^2c^2+c^2b^2+2bc\boldsymbol{bc}}{(b+c)^2}}=\frac{\sqrt{2b^2c^2+2b^2c^2\cos A}}{b+c}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Пример 4. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на ненулевой вектор $\boldsymbol{b}$. Рассмотреть числовой пример: $\boldsymbol{a}=\{1,\ 4,\ 8\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,\ 2,\ -2\}$.

Решение. Отложим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ от одной точки O: $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. Пусть C — проекция точки A на прямую OB. Искомая проекция $\overrightarrow{OC}$. Очевидно, $\overrightarrow{OC}=\lambda\boldsymbol{b}$, остается определить λ. Так как $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, то $(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}=0$, откуда $\lambda=\frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{b}^2}$. Итак, $\text{пр.}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{b}^2}\boldsymbol{b}$. В случае $\boldsymbol{a}=\{1,\ 4,\ 8\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,\ 2,\ -2\}$ имеем

$$\text{пр.}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{1\cdot1+4\cdot2-8\cdot2}{1+4+4}\{1,\ 2,\ -2\}=-\frac{7}{9}\{1,\ 2,\ -2\}=\left\{-\frac{7}{9},\ -\frac{14}{9},\ \frac{14}{9}\right\}.$$

Пример 5. В вершине куба приложены три силы, разные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба. Определить величину равнодействующей.

Решение. Примем данную вершину за начало координат, а исходящие из нее ребра — за оси координат. Пусть, например, сила $\boldsymbol{F}_1$, величина которой равна 1, лежит в плоскости xOy; тогда ее координаты

$$\boldsymbol{F}_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right\}.$$

Пусть сила $\boldsymbol{F}_2$, величина которой равна 2, лежит в плоскости yOz; тогда ее координаты

$$\boldsymbol{F}_2=\left\{0,\ \frac{2}{\sqrt{2}},\ \frac{2}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Пусть сила $\boldsymbol{F}_3$, величина которой равна 3, лежит в плоскости zOx; тогда ее координаты

$$\boldsymbol{F}_3=\left\{\frac{3}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Равнодействующая этих трех сил

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\left\{\frac{4}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{5}{\sqrt{2}}\right\},$$

следовательно, ее величина

$$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{\frac{16}{2}+\frac{9}{2}+\frac{25}{2}}=5.$$

Пример 6. Одна из вершин параллелепипеда находится в точке $M(1, 2, 3)$, а концы ребер, выходящих из этой вершины, — в точках $A(9, 6, 4)$, $B(3, 0, 4)$ и $C(5, 2, 6)$. Найти косинус угла между диагональю MD этого параллелепипеда, выходящей из точки M, и его ребром MA. Система координат прямоугольная.

Решение.

$$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC},$$

$$\overrightarrow{MA}=\{8,\ 4,\ 1\},\quad \overrightarrow{MB}=\{2, -2,\ 1\},\quad \overrightarrow{MC}=\{4,\ 0,\ 3\},$$

откуда

$$\overrightarrow{MD}=\{14,\ 2,\ 5\},$$

$$\cos \widehat{AMD}=\frac{\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MA}|\,|\overrightarrow{MD}|}=\frac{8\cdot 14+4\cdot 2+1\cdot 5}{\sqrt{8^2+4^2+1}\ \sqrt{14^2+2^2+5^2}}=\frac{25}{27}.$$

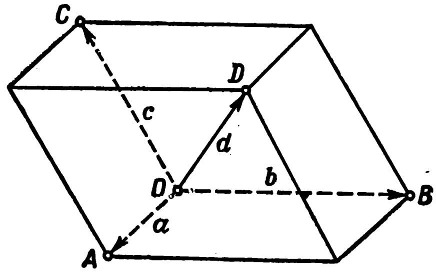


Рис. 101

Пример 7. Вычислить длину d диагонали OD параллелепипеда, зная длины $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ трех его ребер, выходящих из вершины O, и углы

$$\widehat{BOC}=\alpha,\quad \widehat{COA}=\beta,\quad \widehat{AOB}=\gamma$$

между ними. Вычислить также углы φ_1, φ_2, φ_3 между $\overrightarrow{OD}$ и ребрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Решение. Имеем (рис. 101)

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

Отсюда

$$d=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{bc}+2\boldsymbol{ca}+2\boldsymbol{ab}}=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\alpha+2ca\cos\beta+2ab\cos\gamma}.$$

Далее,

$$\cos\varphi_1=\frac{\boldsymbol{ad}}{ad}=\frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{ad}=\frac{a^2+ab\cos\gamma+ac\cos\beta}{ad}=$$
$$=\frac{a+b\cos\gamma+c\cos\beta}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\alpha+2ca\cos\beta+2ab\cos\gamma}}.$$

Аналогично найдем

$$\cos\varphi_2=\frac{a\cos\gamma+b+c\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\alpha+2ca\cos\beta+2ab\cos\gamma}},$$

$$\cos\varphi_3=\frac{a\cos\beta+b\cos\alpha+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\alpha+2ca\cos\beta+2ab\cos\gamma}}.$$

Пример 8. Доказать тождество

$$[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{xy}] = (\boldsymbol{ax})\,(\boldsymbol{by}) - (\boldsymbol{ay})\,(\boldsymbol{bx}).$$

Доказательство.

$$[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{xy}] = \boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{xy}]] = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{by}) - \boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{bx})) = (\boldsymbol{ax})\,(\boldsymbol{by}) - (\boldsymbol{ay})\,(\boldsymbol{bx}).$$

Пример 9. Вычислить внутренние двугранные углы трехгранного угла, плоские углы которого a, b, c.

Предварительное замечание. Для вычисления двугранных углов методом векторной алгебры можно поступать так: найти вектор $\boldsymbol{x}$, перпендикулярный грани p двугранного угла и направленный внутрь * этого угла. Найти вектор $\boldsymbol{y}$, перпендикулярный грани q угла и направленный во внешнюю сторону двугранного угла. Тогда угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ будет равен линейному углу рассматриваемого двугранного угла (рис. 102). Для нахождения вектора $\boldsymbol{x}$, перпендикулярного грани p, можно найти пару неколлинеарных векторов, лежащих в этой грани, и взять их векторное произведение. Аналогично находится и вектор $\boldsymbol{y}$.

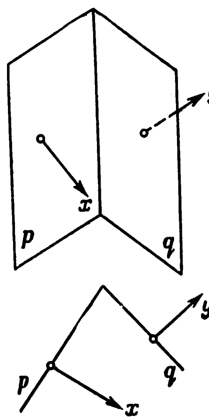


Рис. 102.

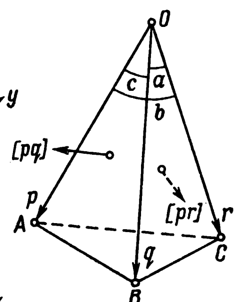


Рис. 103.

Решение. Рассмотрим единичные векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, идущие по ребрам данного трехгранного угла (рис. 103). Найдем косинус линейного угла для двугранного угла, по ребру которого направлен вектор p. Вектор $[\boldsymbol{pq}]$ перпендикулярен грани OAB и направлен во внешнюю сторону двугранного угла $B\,(AO)\,C$. Вектор $[\boldsymbol{pr}]$ перпендикулярен грани OAC и направлен внутрь того же угла. Обозначая внутренние двугранные углы данного трехгранного угла буквами A, B, C, имеем:

$$\cos A = \frac{[\boldsymbol{pq}]\,[\boldsymbol{pr}]}{|\,[\boldsymbol{pq}]\,|\,|\,[\boldsymbol{pr}]\,|} = \frac{\boldsymbol{p}^2\,(\boldsymbol{qr}) - (\boldsymbol{pr})\,(\boldsymbol{qp})}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Аналогично находим

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}, \qquad \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Замечание. Построим сферу радиуса 1, центром которой является вершина данного трехгранного угла. Грани трехгранного угла высекут из сферы сферический треугольник ABC (ограниченный дугами $\smile BC$, $\smile CA$ и $\smile AB$ больших кругов построенной сферы). Так как радиус сферы равен 1, то длины сторон

* Отложим вектор $\boldsymbol{x}$, перпендикулярный грани p, от любой точки этой грани; если его конец и точки другой грани q лежат по одну сторону от плоскости, в которой расположена грань p, то будем говорить, что вектор $\boldsymbol{x}$ направлен внутрь двугранного угла pq. Если же конец вектора $\boldsymbol{x}$, отложенного от любой точки грани p, и точки грани q лежат по разные стороны от плоскости, в которой расположена грань p, то будем говорить, что вектор $\boldsymbol{x}$ направлен во внешнюю сторону угла pq.

$\overset{\smile}{BC}$, $\overset{\smile}{CA}$ и $\overset{\smile}{AB}$ сферического треугольника ABC соответственно равны a, b, c. Углом A сферического треугольника ABC при вершине A назовем угол, стороны которого касаются дуг AB и AC в точке A, причем эти стороны идут в направлении от A к B и от A к C (рис. 104). Аналогично определяются углы B и C сферического треугольника ABC. Ясно, что угол A сферического треугольника ABC является линейным углом внутреннего двугранного угла $B(AO)C$. Таким образом, полученные выше формулы дают решение следующей задачи сферической тригонометрии: найти углы A, B, C сферического треугольника ABC, если даны его стороны

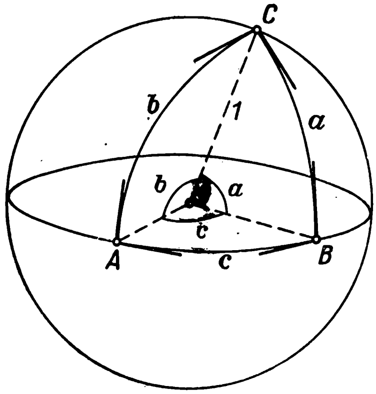


Рис. 104

$$\overset{\smile}{BC}=a,\quad \overset{\smile}{CA}=b,\quad \overset{\smile}{AB}=c.$$

Пример 10. $ABCD$—произвольный тетраэдр (невырожденный). Возьмем на какой-нибудь его грани, например на грани ABC, произвольную точку S и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{SS'}=\boldsymbol{d}$, модуль которого равен площади грани ABC, перпендикулярный грани ABC и направленный так, что точки S' и D лежат по разные стороны от плоскости грани ABC. Аналогично построим вектор $\overrightarrow{PP'}=\boldsymbol{a}$ для грани BCD, вектор $\overrightarrow{QQ'}=\boldsymbol{b}$ для грани ACD и вектор $\overrightarrow{RR'}=\boldsymbol{c}$ для грани ABD (рис 105). Доказать, что

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=0.$$

Доказательство. Положим $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{y}$, $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{z}$. Тогда $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}$, $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$. Ориентируем пространство тетраэдром $\overline{ABCD}$. Тогда будем иметь

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{zy}],\quad \boldsymbol{b}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{xz}],\quad \boldsymbol{c}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{yx}],$$

$$\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})].$$

Отсюда

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{zy}]+\frac{1}{2}[\boldsymbol{xz}]+$$
$$+\frac{1}{2}[\boldsymbol{yx}]+\frac{1}{2}[\boldsymbol{xy}]-\frac{1}{2}[\boldsymbol{zy}]-\frac{1}{2}[\boldsymbol{xz}]+$$
$$+\frac{1}{2}[\boldsymbol{zz}]=0.$$

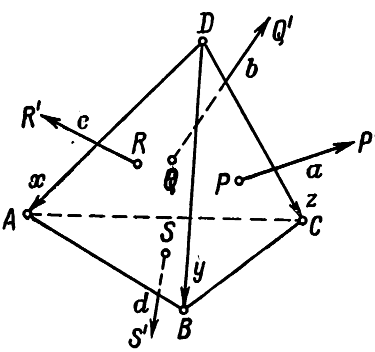


Рис. 105

Пример 11. Доказать тождество:

$$(\boldsymbol{abc})(\boldsymbol{xyz})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{ax} & \boldsymbol{ay} & \boldsymbol{az} \\ \boldsymbol{bx} & \boldsymbol{by} & \boldsymbol{bz} \\ \boldsymbol{cx} & \boldsymbol{cy} & \boldsymbol{cz} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Пользуясь формулой для двойного векторного произведения, имеем

$$[[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{pc}]]=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{abc})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{abp})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{pca})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{pcb}).$$

Положим в этом тождестве $p=[xy]$; получим

$$[xy](abc)=c(ab[xy])+b([xy]ca)-a([xy]cb)=$$
$$=c([ab][xy])+b([xy][ca])-a([xy][cb])=$$
$$=c((ax)(by)-(ay)(bx))+b((xc)(ya)-(xa)(yc))-a((xc)(yb)-(xb)(yc)).$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на z, найдем

$$(abc)(xyz)=(cz)((ax)(by)-(ay)(bx))+(bz)((xc)(ya)-(xa)(yc))-$$
$$-(az)((xc)(yb)-(xb)(yc))=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{vmatrix}.$$

Замечание. Доказанное соотношение выражает собой формулу для умножения двух определителей третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} =$$
$$=\begin{vmatrix} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 & a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3 & a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3 & b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3 & b_1z_1+b_2z_2+b_3z_3 \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3 & c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3 & c_1z_1+c_2z_2+c_3z_3 \end{vmatrix}$$

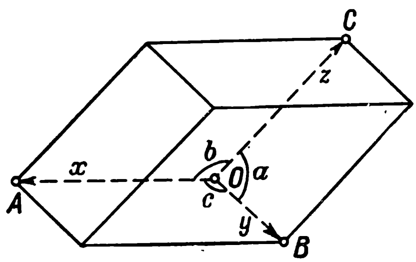


Рис. 106.

(a_1, a_2, a_3 — координаты вектора a в ортонормированном базисе i, j, k; b_1, b_2, b_3 — координаты вектора b в том же базисе и т. д.).

Пример 12. Вычислить объем V параллелепипеда, зная длины его ребер $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$, выходящих из одной вершины O, и плоские углы между ними (рис. 106):

$$\widehat{BOC}=a, \quad \widehat{COA}=b, \quad \widehat{AOB}=c.$$

Решение (см. предыдущий пример).

$$V=|xyz|=\sqrt{(xyz)^2}=$$
$$=\sqrt{\begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{vmatrix}}=\sqrt{\begin{vmatrix} x^2 & xy\cos c & zx\cos b \\ xy\cos c & y^2 & yz\cos a \\ xz\cos b & yz\cos a & z^2 \end{vmatrix}}=$$
$$=xyz\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}}=xyz\sqrt{1+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c}.$$

Пример 13. В треугольной пирамиде $OABC$ даны длины ребер $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ и плоские углы при вершине O: $\widehat{BOC}=\alpha$, $\widehat{COA}=\beta$, $\widehat{AOB}=\gamma$. Вычислить кратчайшее расстояние между прямыми OA и BC и найти положение точек P и Q соответственно на прямых OA и BC, для которых отрезок PQ перпендикулярен прямым OA и BC (рис. 107).

Решение. Сначала выведем общую формулу для кратчайшего расстояния между двумя скрещивающимися (или пересекающимися) прямыми (рис. 108). Назовем направляющим вектором прямой всякий ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — направляющие векторы двух скрещивающихся (или пересекающихся) прямых p и q. Вектор $[\boldsymbol{ab}]$ имеет направление общего перпендикуляра к прямым p и q. Пусть дан еще вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, концы которого лежат соответственно на прямых p и q. Тогда кратчайшее расстояние δ равно длине проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на общий перпендикуляр к двум прямым p и q или (что то же самое) — длине проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на вектор $[\boldsymbol{ab}]$:

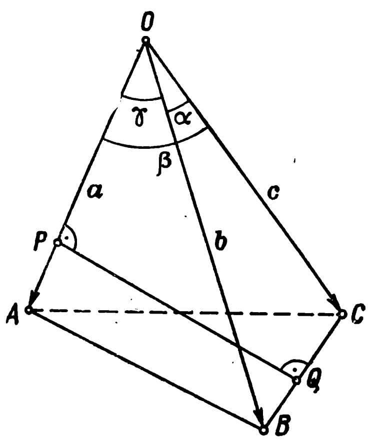


Рис. 107

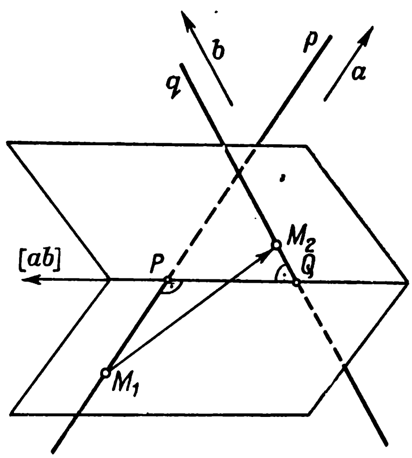


Рис. 108

$$\delta=|\text{пр.}_{[\boldsymbol{ab}]}\overrightarrow{M_1M_2}|.$$

Но

$$|[\boldsymbol{ab}]\overrightarrow{M_1M_2}|=|[\boldsymbol{ab}]|\,|\text{пр.}_{[\boldsymbol{ab}]}\overrightarrow{M_1M_2}|=\delta\,|[\boldsymbol{ab}]|,$$

следовательно,

$$\delta=\frac{|[\boldsymbol{ab}]\overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\boldsymbol{ab}]|}, \quad \text{или} \quad \delta=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\,\boldsymbol{ab}|}{|[\boldsymbol{ab}]|}.$$

Введем теперь векторы

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}.$$

Тогда $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ — направляющий вектор прямой BC. В качестве вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ можно взять, например, вектор $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ и, значит,

$$\delta=\frac{|\boldsymbol{ba}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})|}{|[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})]|}=\frac{|\boldsymbol{abc}|}{|[\boldsymbol{ab}]-[\boldsymbol{ac}]|}=\frac{|\boldsymbol{abc}|}{\sqrt{([\boldsymbol{ab}]-[\ \boldsymbol{a}])^2}}=$$
$$=\frac{|\boldsymbol{abc}|}{\sqrt{[\boldsymbol{ab}]^2+[\boldsymbol{ac}]^2-2[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{ac}]}}=$$
$$=\frac{|\boldsymbol{abc}|}{\sqrt{a^2b^2\sin^2\gamma+a^2c^2\sin^2\beta-2(a^2(\boldsymbol{bc})-(\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{ab}))}}=$$
$$=\frac{|\boldsymbol{abc}|}{\sqrt{a^2b^2\sin^2\gamma+a^2c^2\sin^2\beta-2a^2bc(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)}}=$$
$$=\frac{abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}}{a\sqrt{b^2\sin^2\gamma+c^2\sin^2\beta-2bc(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)}}=$$
$$=\frac{bc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}}{\sqrt{b^2\sin^2\gamma+c^2\sin^2\beta-2bc(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)}}.$$

Для определения положения точек P и Q на прямых OA и BC заметим, что $\overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CQ}=\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$, и вопрос сводится к нахождению чисел λ и μ (если $0<\lambda<1$, то точка P лежит между точками O и A и $OP=\lambda|\boldsymbol{a}|$ и т. д.). Имеем:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{c}+\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-\lambda\boldsymbol{a},$$

и так как $\overrightarrow{PQ}\perp\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{PQ}\perp\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{a}\overrightarrow{PQ}=0$, $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\overrightarrow{PQ}=0$, т. е.

$$\boldsymbol{ac}+\mu\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-\lambda\boldsymbol{a}^2=0,$$
$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2-\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0.$$

Мы получили линейную систему двух уравнений относительно λ и μ:

$$\lambda\boldsymbol{a}^2-\mu\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ac},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}).$$

Решая эту систему, получим

$$\lambda=\frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{ac} & -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\\ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) & -(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}^2 & -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) & -(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2\end{vmatrix}}=\frac{(\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{cb}-\boldsymbol{c}^2)-\boldsymbol{ac}(\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{bc})}{-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{bc})+(\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ac})^2}=$$
$$=\frac{(ab\cos\gamma-ac\cos\beta)(cb\cos\alpha-c^2)-ac\cos\beta(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)}{-a^2(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)+(ab\cos\gamma-ac\cos\beta)^2}=$$
$$=\frac{c[(b\cos\gamma-c\cos\beta)(b\cos\alpha-c)-\cos\beta(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)]}{-a[b^2+c^2-2bc\cos\alpha+(b\cos\gamma-c\cos\beta)^2]},$$

$$\mu=\frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ac}\\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\end{vmatrix}}{-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ac})^2}=\frac{\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{cb}-\boldsymbol{c}^2)-\boldsymbol{ac}(\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ac})}{-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ac})^2}=$$
$$=\frac{c[b\cos\alpha-c-\cos\beta(b\cos\gamma-c\cos\beta)]}{-b^2-c^2+2bc\cos\alpha+(b\cos\gamma-c\cos\beta)^2}.$$

Пример 14. $ABCD$ — прямоугольник (рис. 109). Отрезок EF параллелен плоскости этого прямоугольника и проектируется на эту плоскость в отрезок $GH \| AD \| BC$, причем точки G и H находятся на равных расстояниях от AB и CD, а отрезок GH — на равных расстояниях от AD и BC. Дано:

$$AB=a, \quad AD=b, \quad EG=h, \quad EF=c.$$

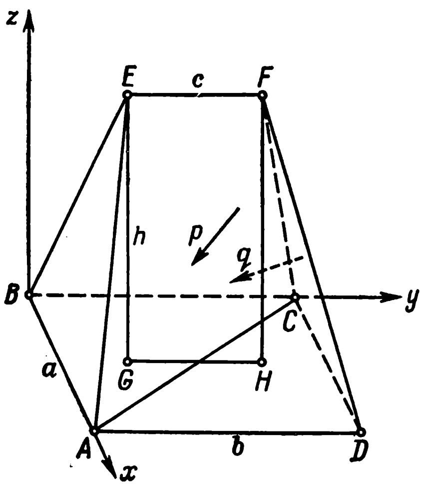


Рис. 109

1) Найти косинус двугранного угла $C\ (FD)\ A$. 2) Найти кратчайшее расстояние между прямыми BE и AC (многогранник $EFABCD$ называется клином).

Решение. 1) Принимая точку B за начало координат, BA — за ось Ox, BC — за ось Oy и располагая ось Oz перпендикулярно плоскости $ABCD$, будем иметь

$$B(0,\ 0,\ 0), \quad A(a,\ 0,\ 0), \quad D(a,\ b,\ 0), \quad C(0,\ b,\ 0),$$

$$E\left(\frac{a}{2},\ \frac{b-c}{2},\ h\right), \quad F\left(\frac{a}{2},\ \frac{b+c}{2},\ h\right).$$

Отсюда находим

$$\overrightarrow{FE}=\{0,\ -c,\ 0\},$$
$$\overrightarrow{FD}=\left\{\frac{a}{2},\ \frac{b-c}{2},\ -h\right\},$$
$$\overrightarrow{FC}=\left\{-\frac{a}{2},\ \frac{b-c}{2},\ -h\right\}.$$

Далее,

$$[\overrightarrow{FE}\,\overrightarrow{FD}]=\left\{\begin{vmatrix} -c & 0 \\ \frac{b-c}{2} & -h \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -h & \frac{a}{2} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & -c \\ \frac{a}{2} & \frac{b-c}{2} \end{vmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{ch,\ 0,\ \frac{ac}{2}\right\} \downarrow\downarrow \{2h,\ 0,\ a\}=p,$$

$$[\overrightarrow{FC}\,\overrightarrow{FD}]=\left\{\begin{vmatrix} \frac{b-c}{2} & -h \\ \frac{b-c}{2} & -h \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -h & -\frac{a}{2} \\ -h & \frac{a}{2} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} & \frac{b-c}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{b-c}{2} \end{vmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{0,\ -ah,\ -a\frac{b-c}{2}\right\} \downarrow\downarrow \{0,\ -2h,\ -(b-c)\}=q.$$

Таким образом,

$$\cos\varphi=\cos C\,(FD)\,A=\frac{pq}{pq}=\frac{-a(b-c)}{\sqrt{4h^2+a^2}\,\sqrt{4h^2+(b-c)^2}}.$$

Отметим, что если $c<b$ (как на рис. 109), то $\cos\varphi<0$, угол φ тупой; если $c>b$, то $\cos\varphi>0$, угол φ острый; если $c=b$, то $\cos\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$; в этом случае клин превращается в прямую призму.

2) $\overrightarrow{AC}=\{-a,\ b,\ 0\}=\boldsymbol{x},\quad \overrightarrow{BE}=\left\{\frac{a}{2},\ \frac{b-c}{2},\ h\right\}\downarrow\downarrow\{a,\ b-c,\ 2h\}=\boldsymbol{y},$

$$[\boldsymbol{xy}]=\{2bh,\ 2ah,\ a(c-2b)\};\quad \overrightarrow{AE}=\left\{-\frac{a}{2},\ \frac{b-c}{2},\ h\right\}.$$

Кратчайшее расстояние δ между AC и BE равно:

$$\delta=\frac{|\overrightarrow{AE}\,[\boldsymbol{xy}]|}{|[\boldsymbol{xy}]|}=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix}-\frac{a}{2} & \frac{b-c}{2} & h\\ -a & b & 0\\ a & b-c & 2h\end{vmatrix}}{\sqrt{4h^2(a^2+b^2)+a^2(c-2b)^2}}=\frac{2abh}{\sqrt{4h^2(a^2+b^2)+a^2(c-2b)^2}}.$$

Пример 15. Найти векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, если известны их сумма $\boldsymbol{a}\neq 0$, скалярное произведение p и векторное произведение $\boldsymbol{b}\neq 0$. Дано, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны (если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не ортогональны, то задача не имеет решений).

Решение. Имеем систему

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{xy}=p,\quad [\boldsymbol{xy}]=\boldsymbol{b},\quad \text{причем } \boldsymbol{ab}=0.$$

Из первого уравнения находим $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}.$$

Подставляя это значение $\boldsymbol{y}$ во второе и третье уравнения, получим

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})=p,\quad [\boldsymbol{xa}]=\boldsymbol{b}.$$

Из соотношения $[\boldsymbol{xa}]=\boldsymbol{b}$ следует, что вектор $\boldsymbol{x}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{b}$, а так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональные и ненулевые, то вектор $\boldsymbol{x}$ компланарен векторам $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{ab}]$; эти векторы ненулевые и ортогональные, значит, по ним можно разложить вектор $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu[\boldsymbol{ab}].$$

Подставляя это значение $\boldsymbol{x}$ в уравнение $[\boldsymbol{xa}]=\boldsymbol{b}$, получим

$$[(\lambda\boldsymbol{a}+\mu[\boldsymbol{ab}])\,\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{b},$$

$$\mu[[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^2\mu=\boldsymbol{b},$$

значит,

$$\mu=\frac{1}{\boldsymbol{a}^2},\quad \boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}+\frac{[\boldsymbol{ab}]}{\boldsymbol{a}^2}.$$

Теперь соотношение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})=p$, или $\boldsymbol{ax}-\boldsymbol{x}^2=p$, примет вид

$$\lambda\boldsymbol{a}^2-\lambda^2\boldsymbol{a}^2-\frac{\boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{a}^2}=p,$$

откуда

$$\lambda=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4(b^2+pa^2)}}{2a^2}.$$

Если $a^4<4(b^2+pa^2)$, то задача не имеет решений. Если $a^4=4(b^2+pa^2)$, то $\lambda=\frac{1}{2}$ и задача имеет одно решение:

$$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\frac{[\boldsymbol{ab}]}{\boldsymbol{a}^2},\quad \boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{a}}{2}-\frac{[\boldsymbol{ab}]}{\boldsymbol{a}^2}.$$

Наконец, если $a^4 > 4(b^2+pa^2)$, то задача имеет два решения:

$$x = \frac{a^2+\sqrt{a^4-4(b^2+pa^2)}}{2a^2}a + \frac{[ab]}{a^2},$$

$$y = \frac{a^2-\sqrt{a^4-4(b^2+pa^2)}}{2a^2}a - \frac{[ab]}{a^2},$$

или

$$x = \frac{a^2-\sqrt{a^4-4(b^2+pa^2)}}{2a^2}a + \frac{[ab]}{a^2},$$

$$y = \frac{a^2+\sqrt{a^4-4(b^2+pa^2)}}{2a^2}a - \frac{[ab]}{a^2}.$$

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Даны радиусы-векторы r_1, r_2, r_3 трех последовательных вершин A, B, C параллелограмма. Найти радиус-вектор четвертой вершины D.

Отв. $r_1+r_3-r_2$.

2. Доказать, что для четырех любых точек A, B, C, D пространства выполняется соотношение

$$\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}=0.$$

3. Доказать, что

$$[ab]^2+(ab)^2=a^2b^2.$$

4. Даны три некомпланарных вектора a, b, c и скалярные произведения α, β, γ неизвестного вектора x на эти векторы: $ax=\alpha$, $bx=\beta$, $cx=\gamma$. Найти вектор x.

Отв. $x=\dfrac{\alpha[bc]+\beta[ca]+\gamma[ab]}{abc}$.

5. Даны три вектора $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$, $\overrightarrow{OC}=c$. Векторы a и b неколлинеарны. Пусть H — проекция точки C на плоскость OAB. Найти вектор $\overrightarrow{CH}$.

Отв. $\overrightarrow{CH}=-\dfrac{abc}{[ab]^2}[ab]$.

6. Даны два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{OA}=a$ и $\overrightarrow{OB}=b$. Окружность с центром S касается прямых OB и OA в точке A. Найти вектор $\overrightarrow{OS}$.

Отв. $\overrightarrow{OS}=\dfrac{[b[ab]]a^2 \pm [[ab]a](ab)}{[ab]^2}$.

7. Даны три компланарных вектора x, a, b, причем a и b неколлинеарны. Выразить коэффициенты разложения вектора x по векторам a и b через эти векторы.

Отв. $x=\dfrac{(xb[ab])a+(x[ab]a)b}{[ab]^2}$.

8. Даны три компланарных вектора $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$, $\overrightarrow{OC}=c$, причем векторы a и b неколлинеарны. Пусть M — точка пересечения прямых AB и OC. Найти вектор $\overrightarrow{OM}=x$.

Отв. $x=\dfrac{[ab]^2}{[cb][ab]+[ac][ab]}c$.

9. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. Пусть S — центр сферы, проходящей через точки O, A, B, C. Найти вектор $\overrightarrow{OS}$.

Отв. $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\boldsymbol{a}^2[\boldsymbol{bc}]+\boldsymbol{b}^2[\boldsymbol{ca}]+\boldsymbol{c}^2[\boldsymbol{ab}]}{2\boldsymbol{abc}}$.

10. Даны векторы $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. Векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны. Пусть H — проекция точки A на плоскость OBC. Найти вектор $\overrightarrow{OH}$.

Отв. $\overrightarrow{OH}=\boldsymbol{a}-\dfrac{\boldsymbol{abc}}{[\boldsymbol{bc}]^2}[\boldsymbol{bc}]$.

11. Даны четыре вектора $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ и $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарны. Пусть M — точка пересечения прямой OD с плоскостью ABC. Найти вектор $\overrightarrow{OM}$.

Отв. $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\boldsymbol{abc}}{\boldsymbol{dbc}+\boldsymbol{dca}+\boldsymbol{dab}}\boldsymbol{d}$.

ГЛАВА V

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 50. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой.

Теорема 1. *В общей декартовой системе координат уравнение прямой p, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$, имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}=0, \tag{1}$$

или

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \tag{1'}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$ плоскости. Точка $M(x, y)$ лежит на прямой p тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0\}$ и $\{l, m\}$ коллинеарны. Условием коллинеарности этих векторов является равенство (§ 36, теорема 5):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}=0,$$

или *

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Уравнение (1) или (1′) называется каноническим уравнением прямой.

---

* Если один из знаменателей l или m равен нулю, то уравнение (1′) означает, что равен нулю соответствующий числитель.

§ 51. Общее уравнение прямой

Теорема 1. *В общей декартовой системе координат прямая выражается уравнением первой степени:*

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Перепишем каноническое уравнение прямой (§ 50) в виде

$$mx - ly + ly_0 - mx_0 = 0.$$

Полагая $m = A$, $-l = B$, $ly_0 - mx_0 = C$, приведем его к виду

$$Ax + By + C = 0.$$

Это уравнение первой степени, так как вектор $\boldsymbol{a} = \{l, m\}$ ненулевой, а потому A и B одновременно в нуль не обращаются ($A = m$, $B = -l$).

Теорема 2 (обратная). *Всякое уравнение первой степени*

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

в общей декартовой системе координат является уравнением прямой.

Доказательство. Пусть x_0, y_0 — какое-нибудь решение уравнения

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{т. е.} \quad Ax_0 + By_0 + C = 0. \tag{3}$$

Данное уравнение будет эквивалентно уравнению, которое мы получим, отняв почленно из уравнения (2) равенство (3):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0.$$

По доказанному в предыдущей теореме это уравнение, а следовательно и уравнение (2), является уравнением прямой, направляющим вектором которой является вектор $\boldsymbol{a} = \{-B, A\}$ и которая проходит через точку (x_0, y_0).

Уравнение $Ax + By + C = 0$ называется общим уравнением прямой.

§ 52. Направляющий вектор прямой

Из предыдущего параграфа следует, что если прямая задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0$$

относительно общей декартовой системы координат, то вектор $\{-B, A\}$ и всякий ненулевой вектор, с ним коллинеарный, является направляющим вектором этой прямой.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием того, что вектор* $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$ *коллинеарен прямой, заданной относительно общей декартовой системы координат уравнением*

$$Ax+By+C=0,$$

является условие

$$Al+Bm=0. \tag{1}$$

Доказательство. Отложим вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$ от любой точки $M_0(x_0, y_0)$ данной прямой. Конец P отложенного вектора будет иметь координаты x_0+l, y_0+m. Вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$ коллинеарен данной прямой тогда и только тогда, когда точка P лежит на данной прямой, т. е. тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$A(x_0+l)+B(y_0+m)+C=0,$$

или

$$Al+Bm=0$$

($Ax_0+By_0+C=0$, так как точка M_0 лежит на данной прямой).

Если прямая задана общим уравнением

$$Ax+By+C=0$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат, то вектор

$$\boldsymbol{n}=\{A, B\}$$

перпендикулярен этой прямой.

В самом деле,

$$\boldsymbol{an}=-B\cdot A+A\cdot B=0,$$

значит, вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен направляющему вектору $\{-B, A\}$ данной прямой, а потому вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен и самой прямой.

Для общей декартовой системы координат это положение, вообще говоря, не имеет места. Вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B\}$, координаты которого служат коэффициентами в общем уравнении $Ax+By+C=0$ прямой относительно общей декартовой системы координат, будем называть главным вектором этой прямой.

Главный вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B\}$ прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$ относительно общей декартовой системы координат, неколлинеарен этой прямой. В самом деле ($l=A$, $m=B$), $A\cdot A+B\cdot B=A^2+B^2\neq 0$.

§ 53. Частные случаи расположения прямой относительно системы координат

Прямая $Ax+By+C=0$ коллинеарна оси Ox тогда и только тогда, когда $A=0$, так как направляющий вектор $\{-B, A\}$ прямой $Ax+By+C=0$ коллинеарен оси Ox тогда и только тогда, когда вторая координата этого вектора равна нулю.

Уравнение прямой $Ax+By+C=0$ в случае, если эта прямая коллинеарна оси Ox, имеет, таким образом, вид $By+C=0$, или $y=b$ $\left(\text{где } b=-\frac{C}{B}\right)$.

Аналогично доказывается, что прямая $Ax+By+C=0$ коллинеарна оси Oy тогда и только тогда, когда $B=0$, т. е. тогда и только тогда, когда общее уравнение $Ax+By+C=0$ прямой имеет вид $Ax+C=0$, или $x=a$ $\left(a=-\frac{C}{A}\right)$.

Необходимым и достаточным условием того, что прямая $Ax+By+C=0$ проходит через начало координат, является равенство $C=0$, так как в случае $C=0$ и только в этом случае уравнение $Ax+By+C=0$ удовлетворяется координатами начала координат.

Таким образом, общее уравнение прямой, проходящей через начало координат, имеет вид $Ax+By=0$, и обратно (т. е. любое однородное уравнение $Ax+By=0$ первой степени определяет прямую, проходящую через начало координат).

§ 54. Параметрические уравнения прямой

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей направляющий вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$, в общей декартовой системе координат имеют вид

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt.$$

Доказательство. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Точка $M(x, y)$ будет лежать на данной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, \ y-y_0\}$ и $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$ коллинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда они отличаются числовым множителем

$$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{a}, \tag{1}$$

или в координатах

$$x-x_0=lt, \quad y-y_0=mt,$$

откуда

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt.$$

Если t принимает все действительные значения, то точка M с этими координатами описывает всю данную прямую.

Замечание 1. Из соотношения (1) находим

$$t = \frac{\overrightarrow{M_0M}}{\boldsymbol{a}},$$

т. е. t есть координата точки M на данной прямой в следующей системе координат: M_0 — начало координат, $\boldsymbol{a}$ — масштабный вектор.

Замечание 2. Вводя радиусы-векторы $\overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r}_0$ и $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$ точек M_0 и M, можно соотношение (1) переписать так:

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{a},$$

откуда

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}.$$

Это уравнение называется параметрическим уравнением прямой в векторной форме, проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и имеющей направляющий вектор $\boldsymbol{a}$.

§ 55. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Теорема. *Уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, *заданные относительно общей декартовой системы координат, можно записать в одном из следующих видов:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \tag{1}$$

или

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

или

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

или в параметрической форме

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

(в этих уравнениях t есть координата точки M на прямой M_1M_2 в следующей системе координат: M_1 — начало координат, M_2 — единичная точка).

Доказательство. За направляющий вектор прямой можно взять вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, \ y_2 - y_1\};$$

далее остается применить результаты § 50 и 54.

§ 56. Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая p не проходит через начало общей декартовой системы координат и пересекает обе оси координат: ось Ox в точке $(a, 0)$, а ось Oy в точке $(0, b)$.

Абсцисса a и ордината b точек пересечения прямой с осями Ox и Oy часто называются отрезками, отсекаемыми прямой на осях координат.

Уравнение прямой p будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках.*

§ 57. Угловой коэффициент прямой

Определение. *Угловым коэффициентом k прямой p, заданной относительно общей декартовой системы координат, называется отношение второй координаты направляющего вектора $\boldsymbol{a} = \{l, m\}$ этой прямой к его первой координате:*

$$k = \frac{m}{l}.$$

Прямые, параллельные оси Oy, и сама ось Oy не имеют углового коэффициента, так как первая координата любого направляющего вектора всех таких прямых равна нулю.

Для каждой прямой, пересекающей ось Oy, угловой коэффициент имеет вполне определенное значение, не зависящее от выбора направляющего вектора.

В самом деле, если $\{l, m\}$ и $\{l', m'\}$ — два направляющих вектора одной и той же прямой, пересекающей ось Oy, то $l \neq 0$, $l' \neq 0$ и, следовательно (§ 36, теорема 4),

$$k = \frac{m}{l} = \frac{m'}{l'}.$$

В декартовой прямоугольной системе координат угловой коэффициент k прямой, пересекающей ось Oy, равен тангенсу угла α от оси Ox до направляющего вектора этой прямой:

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

В самом деле, если угол от оси Ox до вектора $\boldsymbol{a}$ равен α, то на основании теоремы 4 § 11 координата l ортогональной проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на ось Ox равна

$$l = |\boldsymbol{a}| \cos \alpha.$$

Угол от оси Oy до вектора $\boldsymbol{a}$ равен $\alpha-\frac{\pi}{2}$, а потому на основании той же теоремы

$$m=|\boldsymbol{a}|\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=|\boldsymbol{a}|\sin\alpha.$$

Из этих соотношений и следует, что

$$k=\frac{m}{l}=\operatorname{tg}\alpha.$$

§ 58. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k, в общей декартовой системе координат имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{1}$$

Уравнение (1) следует из канонического уравнения прямой (§ 50).

Уравнение прямой p, имеющей угловой коэффициент k и пересекающей ось Oy в точке $(0, b)$, в общей декартовой системе координат имеет вид

$$y=kx+b. \tag{2}$$

Доказательство. Уравнение (2) следует из уравнения (1), если в нем положить $y_0=b$, $x_0=0$.

Число b называют иногда «начальной ординатой» прямой p, а уравнение (2) — уравнением прямой с данной начальной ординатой и данным угловым коэффициентом.

§ 59. Взаимное расположение двух прямых

Теорема. *Пусть относительно общей декартовой системы координат даны уравнения двух прямых*

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{1}$$

Тогда необходимое и достаточное условие того, что эти прямые пересекаются, имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}. \tag{2}$$

Необходимое и достаточное условие того, что эти прямые параллельны, имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}. \tag{3}$$

Необходимое и достаточное условие того, что эти прямые совпадают, имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{4}$$

Необходимое и достаточное условие совпадения двух прямых, заданных общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

относительно общей декартовой системы координат, можно сформулировать и так: существует такое число $\lambda \neq 0$, что

$$A_1=\lambda A_2, \quad B_1=\lambda B_2, \quad C_1=\lambda C_2,$$

или так: существует такое число $\lambda \neq 0$, что имеет место тождество относительно x и y

$$A_1x+B_1y+C_1 \equiv \lambda (A_2x+B_2y+C_2).$$

Эта теорема следует из того, что условия (2) — (4) являются необходимыми и достаточными признаками того, что система (1) имеет соответственно только одно решение, не имеет решений или является неопределенной (т. е. имеет бесконечное множество решений).

Замечание. Условие $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

а условие $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_1}$ в виде $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}=0.$

Условие

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}=0,$$

есть необходимое и достаточное условие того, что две прямые, заданные относительно общей декартовой системы координат уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

или параллельны, или совпадают (иначе, что эти прямые коллинеарны).

§ 60. Пучок прямых

Собственным пучком прямых называется множество всех прямых, проходящих через одну точку (центр пучка) и лежащих в одной плоскости.

Несобственным пучком прямых называется множество всех параллельных между собой прямых, лежащих в одной плоскости.

Теорема 1. *Для того чтобы три прямые, заданные общими уравнениями*

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2&=0,\\ A_3x+B_3y+C_3&=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

относительно общей декартовой системы координат, принадлежали одному пучку (собственному или несобственному) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

Доказательство необходимости. Дано: три прямые (1) принадлежат одному пучку. Требуется доказать, что $\Delta=0$.

Пусть три прямые, заданные уравнениями (1), принадлежат одному собственному пучку. Это означает, что существует точка (x_0, y_0), принадлежащая всем этим прямым. Координаты этой точки удовлетворяют всем трем уравнениям (1):

$$\begin{aligned} A_1x_0+B_1y_0+C_1&=0,\\ A_2x_0+B_2y_0+C_2&=0,\\ A_3x_0+B_3y_0+C_3&=0. \end{aligned}$$

Таким образом, столбцы определителя Δ линейно зависимы, значит, он равен нулю.

Если прямые, заданные уравнениями (1), принадлежат одному несобственному пучку, то первые два столбца определителя Δ пропорциональны, и, значит, он также равен нулю.

Доказательство достаточности. Дано $\Delta=0$. Требуется доказать, что прямые, определяемые уравнениями (1), принадлежат одному пучку.

Предположим, что прямые не принадлежат одному пучку; тогда среди них есть пересекающиеся. Пусть, например, пересекаются первая и вторая прямые. Подставляя координаты

$$x_0=\frac{-\begin{vmatrix} C_1 & B_1\\ C_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},\quad y_0=\frac{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}$$

точки пересечения первой и второй прямых в левую часть уравнения третьей прямой, получим

$$-A_3\frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} - B_3\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} + C_3 = \frac{A_3\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_3\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_3\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\Delta}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = 0,$$

значит, точка (x_0, y_0) пересечения первых двух прямых лежит на третьей прямой, а *это значит*, что три данные прямые принадлежат одному пучку вопреки предположению.

Теорема 2. *Пусть в общей декартовой системе координат заданы две различные прямые l' и l'' общими уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Для того чтобы третья прямая l, заданная также общим уравнением

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

относительно той же системы координат, принадлежала пучку, определяемому двумя первыми прямыми, необходимо и достаточно, чтобы левая часть уравнения прямой l была линейной комбинацией левых частей уравнений прямых l' и l''.

Доказательство необходимости. Дано: прямая l принадлежит пучку прямых, определяемых прямыми l' и l''. Требуется доказать, что найдутся два таких числа λ и μ, что будет выполнено тождество, справедливое при всех значениях x и y:

$$A_3x + B_3y + C_3 = \lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2).$$

В самом деле, если прямые l', l'', l принадлежат одному пучку, то $\Delta = 0$ (теорема 1); но первые две строки определителя Δ линейно независимы (так как прямые l' и l'' различны), значит (в силу условия $\Delta = 0$), третья строка есть линейная комбинация двух первых, т. е. существуют такие числа λ и μ, что

$$A_3 = \lambda A_1 + \mu A_2, \quad B_3 = \lambda B_1 + \mu B_2, \quad C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2.$$

Умножая обе части первого равенства на произвольное число x, обе части второго равенства на произвольное число y, обе части третьего на 1 и складывая, получим

$$A_3x + B_3y + C_3 = \lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2).$$

Доказательство достаточности. Дано:

$$A_3x + B_3y + C_3 = \lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2)$$

(тождество, справедливое при всех значениях x и y). Требуется доказать, что $\Delta=0$.

В самом деле, из данного тождества следует

$$A_3=\lambda A_1+\mu A_2,$$
$$B_3=\lambda B_1+\mu B_2,$$
$$C_3=\lambda C_1+\mu C_2,$$

а значит, $\Delta=0$, так как третья строка определителя Δ есть линейная комбинация двух первых.

Уравнение

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{2}$$

где λ и μ не равны нулю одновременно, называют уравнением пучка прямых, определяемых двумя различными прямыми l' и l'', общие уравнения которых в общей декартовой системе имеют вид

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{3}$$

Как было доказано, уравнение всякой прямой пучка, определяемого двумя различными прямыми (3), может быть записано в виде (2).

Обратно, если уравнение (2) (при λ и μ, не равных нулю одновременно) — уравнение первой степени (т. е. коэффициенты при x и y одновременно в нуль не обращаются), то оно является уравнением прямой, принадлежащей пучку прямых, определяемому прямыми (3), так как для трех уравнений (3) и (2) условие $\Delta=0$ выполнено.

Если прямые l' и l'' пересекаются, то при любых λ и μ, не равных нулю одновременно, уравнение (2) будет уравнением первой степени, так как если бы коэффициенты при x и y в этом уравнении оба были равны нулю:

$$\lambda A_1+\mu A_2=0,\quad \lambda B_1+\mu B_2=0,$$

то прямые l' и l'' были бы коллинеарны, что противоречит предположению.

Но если прямые l' и l'' параллельны, то коэффициенты при x и y в уравнениях (3) пропорциональны, а значит, найдутся числа λ и μ, не равные нулю одновременно, при которых уравнение (2) не будет уравнением первой степени (например, или при $\lambda=B_2$, $\mu=-B_1$, или при $\lambda=-A_2$, $\mu=A_1$).

Это следует учитывать, если пользоваться уравнением (2) пучка прямых, определяемого двумя параллельными прямыми.

§ 61. Взаимное расположение трех прямых

Пусть относительно общей декартовой системы координат заданы общие уравнения трех прямых:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

$$\delta_1=\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \quad \delta_2=\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \quad \delta_3=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

На основании предыдущего получаем следующие необходимые и достаточные признаки взаимного расположения трех данных прямых.

1. Если $\Delta\neq 0$, $\delta_1\neq 0$, $\delta_2\neq 0$, $\delta_3\neq 0$, то три данные прямые попарно пересекаются и не принадлежат одному пучку, т. е.

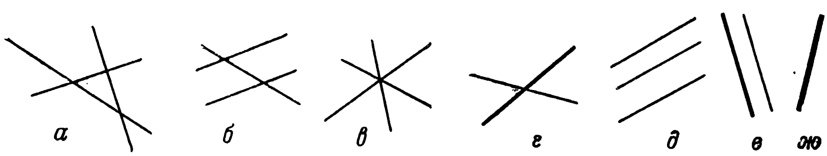


Рис. 110

точки пересечения попарно различны и не принадлежат одной прямой (рис. 110,*а*).

2. Если $\Delta\neq 0$, но только один из трех определителей δ_1, δ_2, δ_3 равен нулю, то три данные прямые не принадлежат одному пучку ($\Delta\neq 0$); две прямые параллельны, а третья их пересекает (рис. 110,*б*).

3. Если $\Delta=0$, $\delta_1\neq 0$, $\delta_2\neq 0$, $\delta_3\neq 0$, то три данные прямые попарно различны и проходят через одну точку (рис. 110,*в*).

4. Если $\Delta=0$, но только один из определителей δ_1, δ_2, δ_3 равен нулю, то две прямые совпадают, а третья их пересекает (рис. 110,*г*).

5. Если $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$ (в этом случае и $\Delta=0$), но коэффициенты ни одной пары уравнений не пропорциональны, то три данные прямые попарно параллельны (рис. 110,*д*).

6. Если $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$ и коэффициенты только одной пары уравнений пропорциональны, то две прямые совпадают, а третья им параллельна (рис. 110, *е*).

7. Если соответствующие коэффициенты всех уравнений пропорциональны, то уравнения определяют совпадающие прямые (рис. 110, *ж*).

§ 62. Геометрический смысл неравенства первой степени с двумя неизвестными

Теорема 1. *Пусть относительно общей декартовой системы координат прямая линия задана общим уравнением*

$$Ax+By+C=0.$$

Тогда для координат x, y всех точек M (x, y), лежащих по одну сторону от этой прямой, выполняется неравенство

$$Ax+By+C>0,$$

а для координат x, y всех точек M (x, y), лежащих по другую сторону от этой прямой,—неравенство (рис. 111)

$$Ax+By+C<0.$$

Доказательство. Пусть M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2)—две произвольные точки, лежащие по разные стороны от прямой l, заданной уравнением

$$Ax+By+C=0.$$

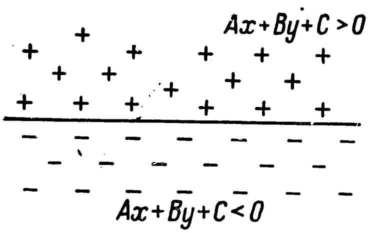


Рис. 111

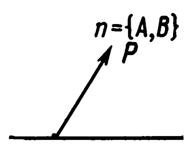


Рис. 112

Это значит, что существует внутренняя точка $M(x, y)$ отрезка M_1, M_2, лежащая на прямой l. Пусть λ — отношение, в котором точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тогда координаты точки M через координаты точек M_1 и M_2 выражаются соотношениями

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Так как точка M лежит на прямой l, то координаты точки M удовлетворяют уравнению прямой l:

$$A\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+B\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+C=0,$$

откуда

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

Точка M — внутренняя точка отрезка M_1M_2, поэтому $\lambda>0$, значит, числа Ax_1+By_1+C и Ax_2+By_2+C — разных знаков. Если теперь считать точку M_1 фиксированной, а точку M_2 переменной (но лежащей все время по разные стороны с точкой M_1, относительно прямой l), то становится ясно, что Ax_2+By_2+C имеет один и тот же знак (противоположный знаку Ax_1+By_1+C) для переменной точки M_2. Фиксируя точку M_2, и считая, что M_1 — переменная точка (лежащая с точкой M_2 по разные стороны от прямой l),

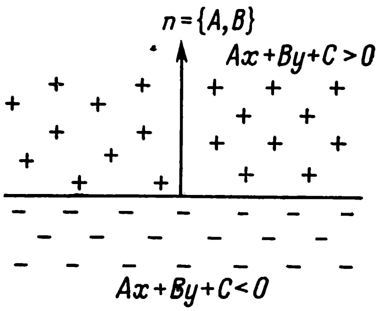


Рис. 113

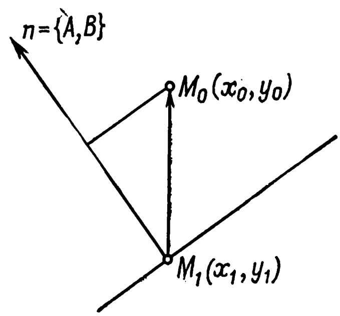


Рис. 114

докажем, что Ax_1+By_1+C имеет один и тот же знак, противоположный знаку Ax_2+By_2+C. Полуплоскость, для координат всех точек которой $Ax+By+C>0$, будем называть *положительной*, а полуплоскость, для координат всех точек которой $Ax+By+C<0$, будем называть *отрицательной*.

Теорема 2. *Пусть относительно общей декартовой системы координат прямая линия задана общим уравнением* $Ax+By+C=0$. *Тогда, если отложить главный вектор* $\boldsymbol{n}=\{A, B\}$ *этой прямой от любой точки* $M_0(x_0, y_0)$ *этой прямой* $\overrightarrow{M_0P}=\boldsymbol{n}$, *то конец* P *отложенного вектора будет находиться в положительной полуплоскости от данной прямой* (рис. 112).

Доказательство. Точка P имеет координаты x_0+A, y_0+B. Подставляя их соответственно вместо x и y в левую часть уравнения $Ax+By+C=0$, получим $A(x_0+A)+B(y_0+B)+C=$ $=Ax_0+By_0+C+A^2+B^2=A^2+B^2>0$.

Если система координат декартова прямоугольная, то (см. § 52) главный вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B\}$ при этом еще ортогонален прямой $Ax+By+C=0$ (рис. 113).

Рассмотрим ненулевой вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$, заданный относительно общей декартовой системы координат, и прямую λ, заданную общим уравнением $Ax+By+C=0$ относительно той же системы координат.

Возьмем на прямой λ произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ и отложим от нее вектор $\boldsymbol{a}$: $\overrightarrow{M_0P}=\boldsymbol{a}$. Тогда точка P будет иметь координаты x_0+l, y_0+m. Подставим эти координаты в левую часть $Ax+By+C$ данного уравнения. Получим $A(x_0+l)+B(y_0+m)+$ $+C=Ax_0+By_0+C+Al+Bm$. Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на данной прямой, то число Ax_0+By_0+C равно нулю, значит, результат подстановки координат точки P в левую часть $Ax+By+C$ уравнения данной прямой будет равен $Al+Bm$. Отсюда следует, что если $Al+Bm>0$, то конец P вектора $\boldsymbol{a}$, отложенного от любой точки прямой λ, лежит в положительной полуплоскости от прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$. Будем говорить, что в этом случае вектор $\boldsymbol{a}$ направлен в положительную полуплоскость от прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$. Если же

$$Al+Bm<0,$$

то конец P вектора $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$, отложенного от любой точки M_0 прямой $Ax+By+C=0$, лежит в отрицательной полуплоскости от этой прямой. В этом случае будем говорить, что вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$ направлен в отрицательную полуплоскость от прямой $Ax+By+C=0$.

Эти соображения используются в общей теории линий второго порядка при исследовании направления вектора, коллинеарного оси параболы, заданной общим уравнением (причем систему координат можно считать общей декартовой).

§ 63. Расстояние от точки до прямой

Теорема. *Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной общим уравнением*

$$Ax+By+C=0$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат, вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ — произвольная точка данной прямой. Так как вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B\}$ является нормальным к данной прямой (система координат декартова прямоугольная), то (рис. 114)

$$d=|\text{коорд. пр}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{M_1M_0}|=\frac{|\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_1M_0}|}{n}=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$
$$=\frac{|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

так как $A_1x_1+By_1+C=0$ и значит, $-Ax_1-By_1=C$.

§ 64. Нормальное уравнение прямой

Уравнение

$$Ax+By+C=0$$

прямой, заданной относительно декартовой прямоугольной системе координат, называется нормальным, если нормальный вектор

$$\boldsymbol{n}=\{A, B\}$$

к этой прямой является единичным, т. е. если $A^2+B^2=1$.

Для приведения к нормальному виду общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат, следует умножить левую часть данного уравнения на число M

$$AMx+BMy+CM=0$$

и выбрать M так, чтобы вектор $\{AM, BM\}$ был единичным:

$$(AM)^2+(BM)^2=1;$$

отсюда

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Таким образом, для каждой прямой всегда получим два нормальных уравнения

$$\pm\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Это ясно и из того, что существуют два различных единичных вектора, перпендикулярных к данной прямой.

Множители $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, при умножении на любой из которых левой части общего уравнения

$$Ax+By+C=0$$

прямой, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат, уравнение переходит в нормальное, называются **нормирующими множителями**. Радикал $\sqrt{A^2+B^2}$ есть модуль нормального вектора $\boldsymbol{n}=\{A, B\}$ к данной прямой, так что $M=\pm\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}$.

Коэффициенты нормального уравнения прямой, заданной уравнением

$$Ax+By+C=0 \quad (A^2+B^2=1)$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат, имеют простой геометрический смысл:

$$A=\boldsymbol{ni}=\cos\alpha, \quad B=\boldsymbol{nj}=\cos\beta, \quad |C|=p,$$

где α и β — соответственно углы между масштабными векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ осей координат Ox, Oy и главным вектором $\boldsymbol{n}=\{A, B\}$ прямой $Ax+By+C=0$, а p — расстояние от начала координат до этой прямой (положить $x_0=y_0=0$ в формуле (1) § 63 и учесть, что $A^2+B^2=1$).

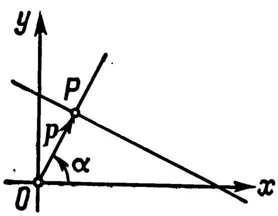


Рис. 115

Если относительно декартовой прямоугольной системы координат прямая задана нормальным уравнением $Ax+By+C=0$, т. е. $A^2+B^2=1$, причем $C<0$, то A и B являются косинусом и синусом угла α от положительного направления оси Ox до вектора $\overrightarrow{OP}$, где P — основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую, а $|C|=p$ — длина этого перпендикуляра (рис. 115).

В самом деле, если $C<0$, то начало координат лежит в отрицательной полуплоскости от прямой $Ax+By+C=0$ (см. § 62), значит, векторы $\overrightarrow{OP}$ и $\{A, B\}$ не только коллинеарны (оба они перпендикулярны данной прямой), но и направлены в одну сторону. Поэтому угол α от оси Ox до вектора $\overrightarrow{OP}$ равен углу α от вектора $\boldsymbol{i}=\{1, 0\}$ до главного вектора $\{A, B\}$ данной прямой и, значит (см. § 40, формула (8))

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}_\alpha=\{\cos\alpha, \sin\alpha\}.$$

То обстоятельство, что $|C|=p$, где p — расстояние от начала координат до данной прямой, следует из формулы (1) § 63, в которой надо положить $x_0=y_0=0$, $A^2+B^2=1$. Таким образом, нормальное уравнение прямой, не проходящей через начало координат, можно записать (а часто так и пишут) в виде

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \tag{1}$$

где α и p имеют значения, указанные выше.

Для приведения общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$ к нормальному виду (1) следует воспользоваться теоремой § 59, в силу которой существует множитель (нормирующий множитель), такой, что соответствующие коэффициенты уравнений

$$AMx+BMy+CM=0, \quad x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

соответственно равны

$$AM=\cos\alpha, \quad BM=\sin\alpha, \quad CM=-p.$$

Отсюда

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

причем из условия $CM=-p<0$ следует, что знак M противоположен знаку C.

Если прямая задана нормальным уравнением относительно декартовой прямоугольной системы координат, то расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до этой прямой равно абсолютной величине результата подстановки координат точки M_0 в левую часть нормального уравнения (см. § 63):

$$d=|Ax_0+By_0+C| \quad (A^2+B^2=1),$$

или

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|$$

(см. уравнение (1)).

Замечание. Иногда расстоянию от точки до прямой приписывают знак, называют такое расстояние *отклонением* и полагают

$$\delta=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p.$$

Если прямая $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ не проходит через начало координат, то начало координат лежит в отрицательной полуплоскости от прямой $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$. Поэтому $\delta<0$ для полуплоскости, содержащей начало координат, а для полуплоскости, не содержащей начало координат, $\delta>0$.

§ 65. Угол между двумя прямыми; условие перпендикулярности двух прямых

Пусть две прямые заданы относительно декартовой прямоугольной системы координат общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{1}$$

Тогда угол между векторами

$$\boldsymbol{n}_1=\{A_1, B_1\} \text{ и } \boldsymbol{n}_2=\{A_2, B_2\}$$

равен одному из углов, образованных этими прямыми, а значит, косинусы этих углов будут вычисляться по формуле

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (2)$$

Отсюда находим необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Заметим, что если данные прямые параллельны, то векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ коллинеарны, и мы получим $\cos\varphi_{1,2} = \pm 1$ (в этом случае считаем $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$).

Замечание. Так как главный вектор $\boldsymbol{n} = \{A, B\}$ прямой, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$ относительно декартовой прямоугольной системы координат, перпендикулярен этой прямой и направлен в положительную полуплоскость от данной прямой (рис. 116), то по формуле

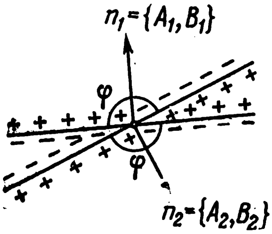


Рис. 116

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (3)$$

(где для радикалов берутся положительные значения) вычисляется косинус того угла между двумя прямыми

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

(заданными относительно декартовой прямоугольной системы координат), внутри которого лежат точки, принадлежащие разноименным полуплоскостям от данных прямых (положительной полуплоскости для одной прямой и отрицательной для другой). Конечно, это обстоятельство зависит от уравнений, которыми заданы прямые; например, при перемене знаков в левой части одного из уравнений (1) по формуле (3) будет вычислен косинус угла, смежного с φ (так как при перемене знаков в левой части уравнения прямой положительные и отрицательные полуплоскости меняются местами).

§ 66. Угол от одной прямой до другой в ориентированной плоскости

При вычислении угла от прямой l' до прямой l''

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (1)$$

(система координат декартова прямоугольная) заметим, что угол φ от вектора $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ до вектора $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ равен одному из значений угла от прямой l' до прямой l''. Поэтому, вычислив этот угол φ по формулам (1) и (2) § 40

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \tag{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \tag{3}$$

следует в качестве всех его значений взять $\varphi + k\pi$, где k принимает все целые значения.

Если данные прямые не взаимно перпендикулярны, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \tag{4}$$

Обозначая через φ_1 угол от оси Ox до первой прямой l' через φ_2, угол от оси Ox до второй прямой l'' через φ_2, угол от первой прямой l' до второй l'' через λ (рис. 117) на основании теоремы Шаля для прямых, будем иметь

$$(Ox,\ l') + (l',\ l'') \equiv (Ox,\ l'') \pmod{\pi},$$

или

$$\varphi_1 + \varphi \equiv \varphi_2 \pmod{\pi},$$

или

$$\varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1 \pmod{\pi}. \tag{5}$$

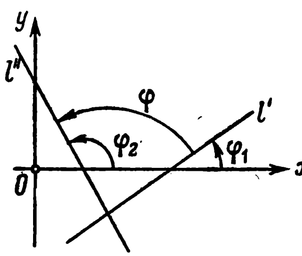


Рис. 117

Если прямые l' и l'' не перпендикулярны и ни одна из них не коллинеарна оси Oy, то, обозначая через k_1 и k_2 их угловые коэффициенты, из соотношения (5) находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2},$$

или окончательно

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{6}$$

Формулу можно получить и из формулы (4), если последнюю переписать так:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}}{1 + \left(-\frac{A_2}{B_2}\right)\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)}$$

и заметить, что так как направляющие векторы данных прямых таковы $\{-B_1,\ A_1\}$ и $\{-B_2,\ A_2\}$, то их угловые коэффициенты

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Если две прямые (1) не параллельны и не совпадают с осью Oy, то необходимое и достаточное условие их перпендикулярности $A_1A_2+B_1B_2$, которое следует из формулы (2), можно переписать так:

$$-\frac{A_1}{B_1}\cdot-\frac{A_2}{B_2}+1=0,$$

или

$$k_1k_2+1=0,$$

или

$$k_2=-\frac{1}{k_1},$$

где k_1 и k_2—угловые коэффициенты этих прямых.

§ 67. Примеры и задачи к главе V

1. Задачи с решениями

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (1,3) параллельно прямой $3x+5y+1=0$. Система координат общая декартова.

Решение. 1-й способ. Разрешая данное уравнение относительно y

$$y=-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5},$$

находим угловой коэффициент данной прямой: $k_1=-\frac{3}{5}$. Угловой коэффициент k_2 искомой прямой равен k_1: $k_2=-\frac{3}{5}$. Искомое уравнение (§ 58)

$$y-3=-\frac{3}{5}(x-1),\quad \text{или}\quad 3x+5y-18=0.$$

2-й способ. Искомое уравнение можно взять в виде

$$3x+5y+C=0.$$

Так как эта прямая должна проходить через точку (1, 3), то

$$3+15+C=0,\quad C=-18,$$

и искомое уравнение

$$3x+5y-18=0.$$

3-й способ. Уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0, y_0), коллинеарную прямой $Ax+By+C=0$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Поэтому искомое уравнение

$$3(x-1)+5(y-3)=0,\quad \text{или}\quad 3x+5y-18=0.$$

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (1, 3) перпендикулярно прямой $3x+5y+1=0$. Система координат прямоугольная.

Решение. 1-й способ. Разрешая данное уравнение относительно y

$$y=-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5},$$

находим угловой коэффициент данной прямой: $k_1=-\frac{3}{5}$. Угловой коэффициент искомой прямой $k_2=\frac{5}{3}$. Искомое уравнение

$$y-3=\frac{5}{3}(x-1), \quad \text{или} \quad 5x-3y+4=0$$

2-й способ. Искомое уравнение можно взять в виде

$$5x-3y+C=0.$$

Так как эта прямая должна проходить через точку (1, 3), то

$$5\cdot 1-3\cdot 3+C=0, \text{ откуда } C=4,$$

и искомое уравнение

$$5x-3y+4=0.$$

3-й способ. Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) перпендикулярно прямой $Ax+By+C=0$, имеет вид

$$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0.$$

Поэтому искомое уравнение

$$5(x-1)-3(y-3)=0, \quad \text{или} \quad 5x-3y+4=0.$$

4-й способ. Вектор $\{3, 5\}$ перпендикулярен данной прямой, поэтому он является направляющим вектором искомой прямой. Искомое уравнение (§ 50)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=0, \quad \text{или} \quad 5x-3y+4=0.$$

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, 3)$ и образующей с прямой l, заданной уравнением $3x+5y+1=0$, острый угол φ, такой, что $\operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{7}$. Система координат прямоугольная.

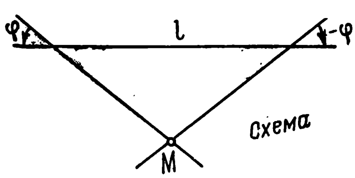


Рис. 118

Решение. 1-й способ. Искомых прямых две (рис. 118). Угол от одной из искомых прямых до данной равен φ, а от другой из искомых до данной равен $-\varphi$. Угловой коэффициент данной прямой равен $k_1=-\frac{3}{5}$ Пусть k_2 — угловой коэффициент искомой прямой. Для одной из искомых прямых будем иметь

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\frac{3}{5}-k_2}{1-\frac{3}{5}k_2},$$

для другой

$$\operatorname{tg}(-\varphi)=\frac{-\frac{3}{5}-k_2}{1-\frac{3}{5}k_2},$$

или

$$\frac{4}{7}=\frac{3+5k_2}{-5+3k_2}, \quad -\frac{4}{7}=\frac{3+5k_2}{-5+3k_2}.$$

Решая эти уравнения получим

$$k_2' = -\frac{41}{23}, \quad k_2'' = -\frac{1}{47}.$$

Искомые уравнения

$$y-3 = -\frac{41}{23}(x-1), \quad y-3 = -\frac{1}{47}(x-1),$$

или

$$41x+23y-110=0, \quad x+47y-142=0.$$

2-й способ. Так как $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{7}$ и φ — острый угол, то

$$\sin\varphi = \frac{4}{\sqrt{65}}, \quad \cos\varphi = \frac{7}{\sqrt{65}}.$$

Поворачивая вектор $n = \{3,5\}$, нормальный к данной прямой, на углы φ и $-\varphi$, получим векторы, нормальные к искомым прямым (рис. 119).

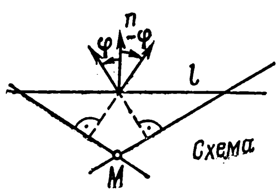


Рис. 119

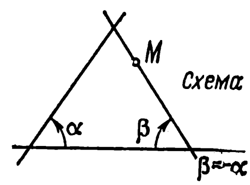


Рис. 120

Пусть a_φ — вектор, полученный из вектора $a = \{x, y\}$ поворотом на угол φ; тогда $a_\varphi = \{x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ x\sin\varphi + y\cos\varphi\}$ (§ 40, формула (8)).

Таким образом,

$$n_\varphi = \left\{3\frac{7}{\sqrt{65}} - 5\frac{4}{\sqrt{65}},\ 3\cdot\frac{4}{\sqrt{65}} + 5\frac{7}{\sqrt{65}}\right\} \parallel \{1,47\},$$

$$n_{-\varphi} = \left\{3\cdot\frac{7}{\sqrt{65}} + 5\frac{4}{\sqrt{65}},\ -3\cdot\frac{4}{\sqrt{65}} + 5\cdot\frac{7}{\sqrt{65}}\right\} \parallel \{41,23\}.$$

Искомые уравнения:

$$x-1+47(y-3)=0, \quad 41(x-1)+23(y-3)=0,$$

или

$$x+47y-142=0, \quad 41x+23y-110=0.$$

Пример 4. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $x+2y=0$, а одной из боковых сторон — прямая $x-y+5=0$. Составить уравнение другой боковой стороны, зная, что она проходит через точку M **(4,2)**.

Решение. Угловой коэффициент стороны основания $k_1 = -\frac{1}{2}$.

Угловой коэффициент данной боковой стороны $k_2 = 1$.

Тангенс угла от основания до данной боковой стороны

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Тангенс угла β от основания до искомой боковой стороны равен тангенсу угла от основания до данной боковой стороны, но имеет противоположный знак (рис. 120). Следовательно, $\operatorname{tg}\beta=-3$; с другой стороны,

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{k_3-k_1}{1+k_1k_3},$$

где k_3 — угловой коэффициент другой боковой стороны. Так как

$$\operatorname{tg}\beta=-3,\quad k_1=-\frac{1}{2},\quad \text{то}\quad -3=\frac{k_3+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}k_3};$$

отсюда $k_3=7$.

Уравнение искомой боковой стороны

$$y-2=7(x-4),\quad \text{или}\quad 7x-y-26=0.$$

2-й способ. Так как тангенс угла α от основания до данной боковой стороны равен 3, то (α — острый угол) $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$, значит, $\sin\beta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ ($\beta=-\alpha$ — угол от основания до искомой боковой стороны). Направляющий вектор основания $a=\{-2,1\}$. Направляющий вектор искомой стороны

$$a_\beta=\left\{-2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}+1\cdot\frac{3}{\sqrt{10}},\ 2\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}\parallel\{1,7\}.$$

Искомое уравнение

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=0,\quad \text{или}\quad 7x-y-26=0.$$

Пример 5. Составить уравнение прямой, отстоящей от точки $M_0(x_0, y_0)$ на расстоянии d и образующей с прямой $Ax+By+C=0$ острый угол α.

Решение. Искомых прямых четыре (рис. 121). Поворачивая вектор $n=\{A, B\}$, нормальный к данной прямой, на углы φ и $-\varphi$, получим векторы

$$n_\varphi=\{A\cos\varphi-B\sin\varphi,\ A\sin\varphi+B\cos\varphi\},$$
$$n_{-\varphi}=\{A\cos\varphi+B\sin\varphi,\ -A\sin\varphi+B\cos\varphi\},$$

нормальные к искомым прямым. Возьмем искомые уравнения в виде

$$(A\cos\varphi\mp B\sin\varphi)(x-x_0)+(\pm A\sin\varphi+B\cos\varphi)(y-y_0)+C=0.$$

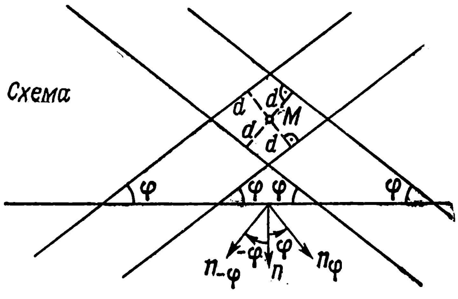


Рис. 121

Так как расстояние от точки (x_0, y_0) до искомой прямой должно быть равно d, то, нормируя последнее уравнение и полагая затем $x=x_0$, $y=y_0$, получим

$$d=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

отсюда

$$C = \pm d\sqrt{A^2+B^2}$$

Итак, искомые уравнения:

$$(A\cos\varphi - B\sin\varphi)(x-x_0) + (A\sin\varphi + B\cos\varphi)(y-y_0) + d\sqrt{A^2+B^2} = 0,$$
$$(A\cos\varphi - B\sin\varphi)(x-x_0) + (A\sin\varphi + B\cos\varphi)(y-y_0) - d\sqrt{A^2+B^2} = 0,$$
$$(A\cos\varphi + B\sin\varphi)(x-x_0) + (-A\sin\varphi + B\cos\varphi)(y-y_0) + d\sqrt{A^2+B^2} = 0,$$
$$(A\cos\varphi + B\sin\varphi)(x-x_0) + (-A\sin\varphi + B\cos\varphi)(y-y_0) - d\sqrt{A^2+B^2} = 0.$$

Пример 6. Определить положение точки $M(1,5)$ относительно треугольника ABC с вершинами

$$A(2,\ -1),\quad B(3,\ 1),\quad C(4,\ 0).$$

Решение. 1-й способ. Составляем уравнения прямых AB, BC, AC:

$$2x - y - 5 = 0, \qquad (AB)$$
$$x + y - 4 = 0, \qquad (BC)$$
$$x - 2y - 4 = 0. \qquad (CA).$$

Подставляя координаты точек C, A, B соответственно в уравнения противоположных сторон AB, BC и CA, получим

$$2\cdot4 - 0 - 5 = 3 > 0,\quad 2-1-4 = -3 < 0,\quad 3-2-4 = -3 < 0.$$

Подставляя координаты точки M в уравнения тех же сторон AB, BC и CA, имеем

$$2\cdot1 - 5 - 5 = -8 < 0,\quad 1+5-4 = 2 > 0,\quad 1-10-4 = -13 < 0.$$

Значит, точка M лежит по разные стороны с точкой C относительно AB, по разные стороны с точкой A относительно BC и по одну сторону с точкой B относительно AC (сделать точный чертеж).

2-й способ. Вычислим барицентрические координаты точки M относительно треугольника $\overrightarrow{ABC}$:

$$\alpha = \frac{\overline{BCM}}{\overline{ABC}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{3} < 0,$$

$$\beta = \frac{\overline{CAM}}{\overline{ABC}} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{13}{3} > 0, \qquad \gamma = \frac{\overline{ABM}}{\overline{ABC}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{8}{3} < 0$$

Выводы те же.

Пример 7. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми

$$3x - 4y + 7 = 0,\qquad 5x + 12y - 1 = 0.$$

Решение. Точка $M(x,\ y)$ лежит на одной из биссектрис углов, образованных данными прямыми тогда и только тогда, когда расстояния d_1 и d_2 от этой точки M до данных прямых равны между собой: $d_1 = d_2$, т. е.

$$\frac{|3x-4y+7|}{5} = \frac{|5x+12y-1|}{13} = 0.$$

Для всех точек $M(x, y)$ одной из биссектрис функции $3x-4y+7$ и $5x+12y-1$ имеют одинаковые знаки (и обращаются в нуль в точке пересечения прямых); для всех точек $M(x, y)$ другой биссектрисы эти функции разных знаков (рис. 122).

Значит, уравнение одной из биссектрис имеет вид

$$\frac{3x-4y+7}{5}=\frac{5x+12y-1}{13},$$

а уравнение другой

$$\frac{3x-4y+7}{5}=-\frac{5x+12y-1}{13},$$

или

$$7x-56y+48=0, \qquad 32x+4y+43=0.$$

Пример 8. Составить уравнение биссектрисы того угла между двумя прямыми $x+y+2=0$, $x+7y+3=0$, в котором лежит точка $A(2, -1)$.

Решение. Подставляя координаты точки A в левые части уравнений данных прямых, получим $2-1+2=3>0$, $2-7+3=-2<0$. Значит, точка A лежит в тех полуплоскостях от данных прямых, для координат точек которых $x+y+2>0$, $x+7y+3<0$. Искомая биссектриса проходит, следовательно, в тех областях (на которые плоскости делятся данными прямыми), для координат точек которых функции $x+y+2$ и $x+7y+3$ имеют разные знаки. Значит, уравнение искомой биссектрисы:

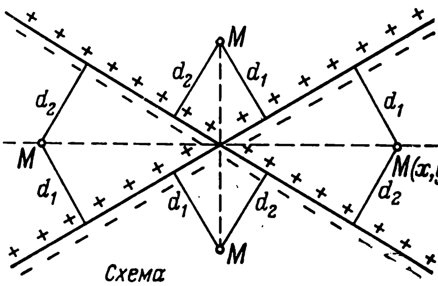


Рис. 122

$$\frac{x+y+2}{\sqrt{2}}=-\frac{x+7y+3}{\sqrt{50}}, \quad \text{или} \quad 6x+12y+13=0.$$

Пример 9. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника, стороны которого BC, CA и AB заданы соответственно уравнениями

$$x-y=0, \qquad (BC)$$
$$x+y=0, \qquad (CA)$$
$$x+2y+1=0. \qquad (AB)$$

Решение. Решая данные уравнения попарно, находим вершины треугольника

$$A(1, -1), \quad B\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad C(0, 0).$$

Подставляя координаты точки C в уравнение AB, получим

$$0+2\cdot 0+1=1>0.$$

Подставляя координаты точки B в уравнение прямой AC, получим

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}<0.$$

Значит, для координат всех точек, лежащих внутри внутреннего угла A треугольника ABC, имеем $x+2y+1>0$, $x+y<0$, а потому искомая биссектриса проходит в тех областях, на которые плоскость делится прямыми AB и AC, для координат точек которых функции $x+2y+1$ и $x+y$ имеют разные знаки. Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}}=-\frac{x+2y+1}{\sqrt{5}},$$

или

$$(\sqrt{2}+\sqrt{5})\,x+(\sqrt{5}+2\sqrt{2})\,y+\sqrt{2}=0.$$

Пример 10. Найти косинус внутреннего угла A треугольника, уравнения сторон которого:

$$x-y=0,\ (BC)\qquad x+y=0,\ (CA)\qquad x+2y+1=0.\ (AB)$$

Решение. 1-й способ. Решая данные уравнения попарно, найдем вершины треугольника

$$A(1,\ -1),\quad B\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right),\qquad C(0,\ 0).$$

Теперь находим векторы

$$\overrightarrow{AB}=\left\{-\frac{1}{3}-1,\ -\frac{1}{3}+1\right\}=\left\{-\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right\},\quad \overrightarrow{AC}=\{0-1,\ 0+1\}=\{-1,1\};$$

вместо вектора $\overrightarrow{AB}$ можно взять вектор $\{-2,1\}$, который коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$ и направлен в ту же сторону. Внутренний угол A треугольника есть угол между векторами $\{-2,1\}$ и $\{-1,1\}$, значит,

$$\cos A=\frac{(-2)(-1)+1\cdot 1}{\sqrt{(-2)^2+1^2}\ \sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

2-й способ. Подставляя координаты точки C в левую часть уравнения AB, получим $1>0$, а подставляя координаты точки B в левую часть уравнения AC, получим $-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}<0$. Значит, из уравнений

$$x+y=0,\qquad x+2y+1=0$$

угол A определяется по формуле (3) § 65:

$$\cos A=\frac{1\cdot 1+1\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Пример 11. Определить тангенсы внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями

$$2x+3y-6=0,\quad 2x-y-5=0,\quad x-3y-4=0.$$

Решение. Обозначим стороны треугольника цифрами 1, 2, 3 в том порядке, как они заданы, и пусть их угловые коэффициенты соответственно равны k_1, k_2, k_3:

$$k_1=-\frac{2}{3},\quad k_2=2,\quad k_3=\frac{1}{3}.$$

Тогда тангенсы углов φ_{12}, φ_{23} и φ_{31} от первой стороны до второй, от второй до третьей и от третьей до первой будут:

$$\operatorname{tg}\varphi_{12}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=-8,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{23}=\frac{k_3-k_2}{1+k_2k_3}=-1,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{31}=\frac{k_1-k_3}{1+k_1k_3}=-\frac{9}{7}.$$

Но три угла от первой стороны до второй, от второй до третьей и от третьей до первой являются либо все внутренними углами треугольника, либо все внешними. Так как в данном случае все три тангенса — числа отрицательные, то углы φ_{12}, φ_{23} и φ_{31} — внешние. Внутренние углы треугольника дополняют их до 180°, поэтому тангенсы внутренних углов треугольника будут 8, 1 и $\frac{9}{7}$.

Пример 12. Относительно декартовой прямоугольной системы координат даны две пересекающиеся и невзаимно перпендикулярные прямые:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Дана точка $M_0(x_0, y_0)$. При каком необходимом и достаточном условии точка M_0 лежит в остром угле, образованном данными прямыми?

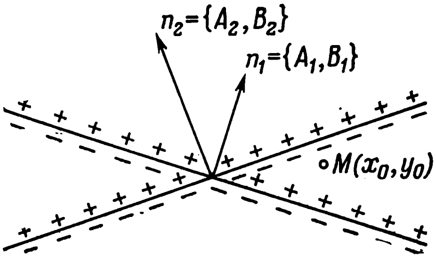


Рис. 123

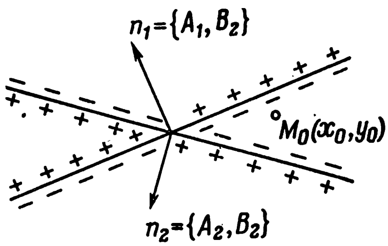


Рис. 124

Решение. Предположим сначала, что угол между векторами $n_1=\{A_1, B_1\}$ и $n_2=\{A_2, B_2\}$ острый (рис. 123). Тогда их скалярное произведение $n_1n_2=A_1A_2+B_1B_2$ положительно: $A_1A_2+B_1B_2>0$. Если точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит в остром угле, образованном данными прямыми, то числа $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ и $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ разных знаков. Таким образом,

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)<0. \qquad (1)$$

Если же угол между векторами n_1 и n_2 тупой (рис. 124), то $A_1A_2+B_1B_2<0$, и если точка M_0 лежит внутри острого угла, образованного данными прямыми, то числа $A_1x_0+B_1y_0+C_1$ и $A_2x_0+B_2y_0+C_2$ одного знака, значит, соотношение (1) снова выполняется. Таким образом, соотношение (1) является необходимым условием того, что точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит внутри острого угла, образованного данными прямыми. Повторяя аналогичные рассуждения, докажем, что необходимое условие того, что точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит внутри тупого угла, образованного данными прямыми, имеет вид

$$(A_1A_2+B_1B_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)>0. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что соотношение (1) является и *достаточным* условием того, что точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит внутри острого угла, образованного прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$.

Пример 13. Составить уравнение биссектрисы острого угла между двумя прямыми

$$x+y+1=0, \quad x-7y-3=0.$$

Решение. Так как для координат x, y всех точек, лежащих внутри острого угла, образованного данными прямыми, выполняется неравенство

$$[1\cdot 1+1\cdot(-7)](x+y+1)(x-7y-3)<0,$$

то функции $x+y+1$ и $x-7y-3$ для координат всех внутренних точек острых углов имеют одинаковые знаки. Значит, уравнение искомой биссектрисы

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{2}}=\frac{x-7y-3}{\sqrt{50}}, \text{ или } x+3y+2=0.$$

Пример 14. Вычислить площадь $\overline{ABC}$ ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$, стороны которого относительно декартовой прямоугольной системы координат заданы уравнениями

$$\begin{aligned} &A_1x+B_1y+C_1=0, && (BC)\\ &A_2x+B_2y+C_2=0, && (CA)\\ &A_3x+B_3y+C_3=0. && (AB)\end{aligned}$$

Обозначим через

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} \tag{1}$$

матрицу, присоединенную к матрице

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{pmatrix}; \tag{2}$$

элементы матрицы (1) являются алгебраическими дополнениями соответствующих элементов матрицы (2), например,

$$a_1=\begin{vmatrix} B_2 & C_2\\ B_3 & C_3\end{vmatrix}=B_2C_3-B_3C_2 \text{ и т. д.}$$

Тогда вершины A, B, C треугольника ABC будут иметь координаты

$$A\left(\frac{a_1}{c_1}, \frac{b_1}{c_1}\right), \quad B\left(\frac{a_2}{c_2}, \frac{b_2}{c_2}\right), \quad C\left(\frac{a_3}{c_3}, \frac{b_3}{c_3}\right)$$

и, следовательно,

$$\overline{ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{a_1}{c_1} & \frac{b_1}{c_1} & 1\\ \frac{a_2}{c_2} & \frac{b_2}{c_2} & 1\\ \frac{a_3}{c_3} & \frac{b_3}{c_3} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2c_1c_2c_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

Но

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 & a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2 & a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3\\ a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 & a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 & a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3\\ a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1 & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2 & a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0\\ 0 & \Delta & 0\\ 0 & 0 & \Delta\end{vmatrix}=\Delta^3, \text{ где } \Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2$$

и окончательно

$$\overline{ABC} = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Пример 15. Найти косинус внутреннего угла A треугольника ABC, стороны которого заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

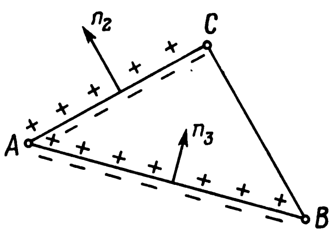


Рис. 125

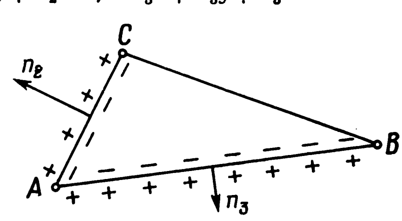


Рис. 126

Решение (см. предыдущий пример). Подставляя координаты вершины $B\left(\frac{a_2}{c_2}, \frac{b_2}{c_2}\right)$ в левую часть уравнения стороны CA, получим

$$A_2 \frac{a_2}{c_2} + B_2 \frac{b_2}{c_2} + C_2 = \frac{\Delta}{c_2}, \quad \text{где } \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}.$$

Подставляя координаты вершины $C\left(\frac{a_3}{c_3}, \frac{b_3}{c_3}\right)$ в левую часть уравнения стороны AB, получим

$$A_3 \frac{a_3}{c_3} + B_3 \frac{b_3}{c_3} + C_3 = \frac{\Delta}{c_3}, \quad \text{где } c_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, если числа $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ разных знаков, то косинус угла между векторами $n_2 = \{A_2, B_2\}$ и $n_3 = \{A_3, B_3\}$ равен косинусу внутреннего угла A треугольника ABC (рис. 125):

$$\cos A = \frac{A_2A_3 + B_2B_3}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}\sqrt{A_3^2 + B_3^2}}.$$

Если же числа $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ имеют один и тот же знак, то косинус угла между векторами $n_2 = \{A_2, B_2\}$ и $n_3 = \{A_3, B_3\}$ от косинуса внутреннего угла A треугольника ABC отличается знаком, т. е. (рис. 126)

$$\cos A = -\frac{A_2A_3 + B_2B_3}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}\sqrt{A_3^2 + B_3^2}}.$$

Пример 16. Найти барицентрические координаты α, β, γ точки $M(x, y)$ относительно треугольника $\overrightarrow{ABC}$, стороны которого заданы уравнениями

$$
\begin{aligned}
&A_1x+B_1y+C_1=0, &&(BC)\\
&A_2x+B_2y+C_2=0, &&(CA)\\
&A_3x+B_3y+C_3=0 &&(AB)
\end{aligned}
$$

Решение (см. пример 14):

$$\alpha=\frac{\overline{MBC}}{\overline{ABC}}=\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1\\ \frac{a_2}{c_2} & \frac{b_2}{c_2} & 1\\ \frac{a_3}{c_3} & \frac{b_3}{c_3} & 1\end{vmatrix}}{\frac{\Delta^2}{c_1c_2c_3}}=\frac{c_1}{\Delta^2}\begin{vmatrix} x & y & 1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

Далее находим

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1x+B_1y+C_1 & A_2x+B_2y+C_2 & A_3x+B_3y+C_3\\ a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 & a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 & a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3\\ a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1 & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2 & a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} A_1x+B_1y+C_1 & A_2x+B_2y+C_2 & A_3x+B_3y+C_3\\ 0 & \Delta & 0\\ 0 & 0 & \Delta\end{vmatrix}=\Delta^2(A_1x+B_1y+C_1)$$

и окончательно

$$\alpha=\frac{c_1}{\Delta}(A_1x+B_1y+C_1).$$

Аналогично находим β и γ. Итак,

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix} A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}}(A_1x+B_1y+C_1),\quad \beta=\frac{\begin{vmatrix} A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}}(A_2x+B_2y+C_2),$$

$$\gamma=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}}(A_3x+B_3y+C_3).$$

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2,5) и равноудаленной от точек (— 1,2) и (5,4).

Отв. $x-2=0$, $x-3y+13=0$.

2. Найти проекцию точки (—5,6) на прямую $7x-13y-105=0$.

Отв. (2, —7).

3. Найти точку, симметричную точке (—2,9) относительно прямой $2x-3y+18=0$

Отв. (2,3).

4. Даны две вершины $(-6,2)$ и $(2, -2)$ треугольника и точка $(1, 2)$ пересечения его высот. Найти третью вершину.

Отв. $(2,4)$.

5. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $(3, -4)$ и уравнения двух высот $7x-2y-1=0$, $2x-7y-6=0$.

Отв. $2x+7y+22=0$, $7x+2y-13=0$, $x-y+2=0$.

6. Найти косинус угла между прямыми $2x-7y+3=0$, $x+5y=0$, в котором лежит точка $(3, 1)$.

Отв. $\arccos\dfrac{33}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{26}}$.

7. Составить уравнения прямых, перпендикулярных к прямой $2x+6y-3=0$ и отстоящих от точки $(5,4)$ на расстоянии $\sqrt{10}$.

Отв. $3x-y-21=0$, $3x-y-1=0$.

8. Составить уравнение прямой, отстоящей от точки $(1,1)$ на расстоянии 2, а от точки $(2,3)$ на расстоянии 4.

Отв. $4x+3y+3=0$, $y+1=0$.

9. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $7x-y+4=0$, $x+y-2=0$ и точка $(3,5)$ на его основании. Составить уравнение основания.

Отв. $3x+y-14=0$.

10. Даны уравнения $4x+y-6=0$, $2x+y-2=0$, $x-2=0$ медиан треугольника и его площадь $S=3$. Найти вершины треугольника.

Отв. $(2, -4)$, $(1, 2)$, $(3, -4)$, или $(2, 0)$, $(3, -6)$, $(1, 0)$.

11. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $(2, -4)$ и уравнения биссектрис двух углов $x+y-2=0$, $x-3y-6=0$.

Отв. $x+7y-6=0$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$.

12. Даны уравнения $x+4=0$, $4x+7y+5=0$ биссектрис двух внутренних углов треугольника и уравнение $3x+4y=0$ стороны, соединяющей вершины, из которых выходят данные биссектрисы. Составить уравнения двух других сторон.

Отв. $3x-4y+24=0$, $5x+12y+16=0$.

13. Даны уравнения $3x+y-3=0$, $3x+4y=0$ двух сторон треугольника и уравнение $x-y+5=0$ биссектрисы одного из его внутренних углов. Составить уравнение третьей стороны.

Отв. $x+3y-13=0$.

14. Даны три прямые $A_kx+B_ky=0$, $k=1, 2, 3$. При каком необходимом и достаточном условии третья прямая проходит в остром угле, образованном двумя первыми?

Отв. $(A_1A_2+B_1B_2)\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} > 0$.

ГЛАВА VI

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 68. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку компланарно двум неколлинеарным векторам

Теорема. *В общей декартовой системе координат уравнение плоскости* π, *проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *компланарной двум неколлинеарным векторам* $\boldsymbol{a}=\{l_1, m_1, n_1\}$ *и* $\boldsymbol{b}=\{l_2, m_2, n_2\}$, *имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

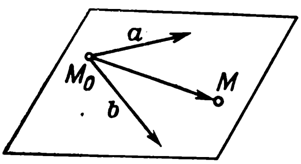


Рис. 127

Доказательство. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства. Точка $M(x, y, z)$ лежит на плоскости π тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ компланарны (рис. 127). Необходимое и достаточное условие компланарности этих векторов имеет вид (§ 36, теорема 6)

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 69. Общее уравнение плоскости

Теорема 1. *В общей декартовой системе координат плоскость выражается уравнением первой степени*

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Доказательство. Фиксируем на плоскости π произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и возьмем два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{a}=\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{l_2, m_2, n_2\}$, каждый из которых компланарен плоскости π. Тогда на основании предыдущего параграфа уравнение плоскости π можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

Так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, то по крайней мере один из определителей

$$A=\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю (§ 36, теорема 5), следовательно, уравнение **(1)** первой степени относительно x, y, z. Если еще положить

$$-x_0\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}-z_0\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}=D,$$

то уравнение (1) примет вид

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ называется общим уравнением плоскости.

Теорема 2 (обратная). *Всякое уравнение первой степени*

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

в общей декартовой системе координат является уравнением плоскости.

Доказательство. Пусть x_0, y_0, z_0 — какое-нибудь решение данного уравнения, т. е.

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \qquad (3)$$

Данное уравнение будет эквивалентно уравнению, которое мы получим, отняв почленно из уравнения (2) равенство (3):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (4)$$

Одно из чисел A, B, C не равно 0; пусть, например, $A\neq 0$, тогда уравнение (4) эквивалентно уравнению

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix}=0. \qquad (5)$$

В самом деле, последнее уравнение после раскрытия определителя примет вид

$$A^2(x-x_0)+AB(y-y_0)+AC(z-z_0)=0,$$

или (так как $A\neq 0$)

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Далее, векторы

$$\boldsymbol{r}=\{-B, A, 0\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{q}=\{-C, 0, A\}$$

неколлинеарны, поскольку один из определителей

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix}=A^2, \quad \begin{vmatrix} 0 & -B \\ A & -C \end{vmatrix}=AB, \quad \begin{vmatrix} -B & A \\ -C & 0 \end{vmatrix}=AC$$

не равен нулю (в силу условия $A\neq 0$ не равен нулю первый определитель). Поэтому уравнение (5), а значит и данное уравнение (1), определяет (на основании предыдущей теоремы) плоскость, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) компланарно двум неколлинеарным векторам (в случае $A\neq 0$):

$$\boldsymbol{r}=\{-B, A, 0\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{q}=\{-C, 0, A\}.$$

Аналогично доказывается, что данная плоскость (в случае $B\neq 0$) компланарна векторам $\boldsymbol{p}=\{0, -C, B\}$ и $\boldsymbol{r}=\{-B, A, 0\}$, между собой неколлинеарным, а в случае $C\neq 0$ — векторам

$$\boldsymbol{p}=\{0, -C, B\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{q}=\{-C, 0, A\},$$

которые также неколлинеарны. В декартовой прямоугольной системе координат вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ перпендикулярен плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. В самом деле, возьмем на плоскости, заданной общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ относительно декартовой прямоугольной системы координат, две произвольные различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0, \quad Ax_2+By_2+Cz_2+D=0,$$

откуда

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0,$$

или

$$\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_1M_2}=0.$$

Значит, вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен любой прямой M_1M_2, лежащей на данной плоскости, значит, перпендикулярен самой плоскости.

В общей декартовой системе координат вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ может и не быть перпендикулярным плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$; этот вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ будем называть главным вектором плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ относительно общей декартовой системы координат.

§ 70. Условие компланарности вектора и плоскости

Теорема. *Пусть относительно общей декартовой системы координат в пространстве заданы вектор* $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ *и плоскость своим общим уравнением*

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Тогда необходимое и достаточное условие компланарности вектора $\boldsymbol{a}$ *и данной плоскости имеет вид*

$$Al+Bm+Cn=0.$$

Доказательство этой теоремы такое же, как и доказательство теоремы § 52.

Из доказанной теоремы следует, что главный вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ плоскости, заданной общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ относительно общей декартовой системы координат, некомпланарен этой плоскости. В самом деле,

$$A\cdot A+B\cdot B+C\cdot C=A^2+B^2+C^2\neq 0.$$

§ 71. Частные случаи расположения плоскости относительно системы координат

Из предыдущего параграфа следует, что плоскость, заданная общим уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0$$

относительно общей декартовой системы координат, будет или параллельна, или проходить через ось Ox тогда и только тогда, когда $A=0$, так как в качестве направляющего вектора оси Ox можно взять вектор $\{1, 0, 0\}$.

Аналогично условия $B=0$ и $C=0$ являются необходимыми и достаточными условиями того, что плоскость соответственно параллельна или проходит через ось Oy, параллельна или проходит через ось Oz.

Отсюда следует, что плоскость параллельна или совпадает с одной из координатных плоскостей тогда и только тогда, когда в общем ее уравнении $Ax+By+Cz+D=0$ два из коэффициентов A, B, C обращаются в нуль.

Таким образом, уравнения $Ax+D=0$, $By+D=0$, $Cz+D=0$, или

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c$$

и только уравнения первой степени такого вида в случае $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ являются уравнениями плоскостей, параллельных координатным. В частности, уравнения координатных плоскостей имеют вид

$$x=0 \quad (\text{плоскость } yOz)$$
$$y=0 \quad (\text{плоскость } zOx)$$
$$z=0 \quad (\text{плоскость } xOy).$$

Отметим, наконец, что необходимым и достаточным условием того, что плоскость, заданная общим уравнением (1), проходит через начало координат, является равенство

$$D=0.$$

§ 72. Параметрические уравнения плоскости

Параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ компланарно двум неколлинеарным между собой векторам:

$$\boldsymbol{a}=\{l_1, m_1, n_1\}, \quad \boldsymbol{b}=\{l_2, m_2, n_2\},$$

в общей декартовой системе координат имеют вид

$$x=x_0+ul_1+vl_2, \quad y=y_0+um_1+vm_2, \quad z=z_0+un_1+vn_2. \qquad (1)$$

Доказательство. Произвольная точка $M(x, y, z)$ пространства лежит на данной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ компланарны, иначе, когда они линейно зависимы. Но так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, то вектор $\overrightarrow{M_0M}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

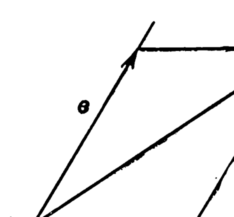


Рис. 128

$$\overrightarrow{M_0M}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}. \qquad (2)$$

Переходя к координатам, получим

$$x-x_0=ul_1+vl_2, \quad y-y_0=um_1+vm_2,$$
$$z-z_0=un_1+vn_2,$$

откуда и следуют соотношения (1).

Замечание 1. Параметры u и v имеют следующее геометрическое значение: это общие декартовы координаты точки M данной плоскости в системе координат: M_0 — начало координат, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — масштабные векторы соответственно первой и второй осей координат (рис. 128).

Замечание 2. Если $\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$, $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ — радиусы-векторы точек M_0 и M, то соотношение (2) можно переписать так:

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}.$$

Это уравнение называется векторным параметрическим уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ компланарно двум неколлинеарным между собой векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

§ 73. Уравнение плоскости, проходящей через две точки компланарно данному вектору

На основании § 68 уравнение плоскости, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ компланарно вектору $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$, который неколлинеарен вектору

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\},$$

в общей декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

§ 74. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не принадлежащие одной прямой

На основании § 68 уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ M_3(x_3, y_3, z_3),$$

заданные относительно общей декартовой системы координат и не принадлежащие одной прямой, как плоскости, проходящей через точку $M_3(x_3, y_3, z_3)$ компланарно двум неколлинеарным векторам $\overrightarrow{M_3M_1}=\{x_1-x_3, y_1-y_3, z_1-z_3\}$ и $\overrightarrow{M_3M_2}=\{x_2-x_3, y_2-y_3, z_2-z_3\}$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Параметрические уравнения этой плоскости π можно записать так:

$$\begin{aligned} x&=x_3+u(x_1-x_3)+v(x_2-x_3),\\ y&=y_3+u(y_1-y_3)+v(y_2-y_3),\\ z&=z_3+u(z_1-z_3)+v(z_2-z_3). \end{aligned}$$

Параметры u и v имеют следующее геометрическое значение: это общие декартовы координаты точки плоскости π в общей декартовой системе координат, в которой за начало координат берется точка M_3, а за единичные точки осей M_3u и M_3v соответственно точки M_1 и M_2.

§ 75. Уравнение плоскости в отрезках

Если плоскость не проходит через начало координат и пересекает все оси общей декартовой системы координат соответственно в точках $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$, то ее уравнение на основании предыдущего параграфа можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ a & 0 & -c \\ 0 & b & -c \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Это уравнение называется уравнением плоскости в отрезках.

§ 76. Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть относительно общей декартовой системы координат две плоскости заданы своими общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \tag{2}$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Для того чтобы плоскости, заданные уравнениями (1) и (2) в общей декартовой системе координат, пересекались, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие коэффициенты при x, y, z в уравнениях (1) и (2) не были пропорциональны.

2. Для того чтобы плоскости, заданные уравнениями (1) и (2) в общей декартовой системе координат, были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие коэффициенты при x, y, z в уравнениях (1) и (2) были пропорциональны, но чтобы свободные члены не были им пропорциональны, т. е. чтобы существовало такое число $\lambda \neq 0$, что

$$A_2=\lambda A_1,\ B_2=\lambda B_1,\ C_2=\lambda C_1,\ D_2\neq\lambda D_1.$$

или

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1\equiv\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2). \tag{3}$$

3. Для того чтобы плоскости, заданные уравнениями (1) и (2) в общей декартовой системе координат, совпадали, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты уравнений (1) и (2) были пропор-

циональны, т. е. существовало такое число $\lambda \neq 0$, что

$$A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1,\ D_2 = \lambda D_1.$$

Докажем сначала достаточность признаков.

1. Если тройки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 непропорциональны, то найдутся пары соответствующих чисел из этих троек, например A_1, B_1 и A_2, B_2, которые также непропорциональны.

Полагая в данных уравнениях (1) и (2) $z=0$, получим уравнения

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + D_2 = 0,$$

определяющие в плоскости xOy уравнения прямых, по которым плоскости (1) и (2) пересекают плоскость xOy (следы плоскостей (1) и (2) на координатной плоскости xOy). В силу того, что пары A_1, B_1 и A_2, B_2 непропорциональны, эти следы пересекаются, следовательно, пересекаются и данные плоскости.

2. Уравнение (2) эквивалентно следующему:

$$\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1z + D_2 = 0, \text{ или } A_1x + B_1y + C_1z + \frac{D_2}{\lambda} = 0. \quad (2')$$

Свободные члены D_1 и $\frac{D_2}{\lambda}$ уравнений (1) и (2′) в силу условия $D_2 \neq \lambda D_1$ различные, значит, любое решение уравнения (1) не является решением уравнения (2′); это значит, что ни одна из точек, лежащих на плоскости, заданной уравнением $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, не лежит на плоскости, заданной уравнением $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, следовательно, эти плоскости параллельны.

3. Если $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, $D_2 = \lambda D_1$ $(\lambda \neq 0)$, то левые части данных уравнений (1) и (2) отличаются числовым множителем, не равным нулю, а значит, эквивалентны.

Необходимость всех признаков доказывается сразу методом от противного.

Замечание. Для того чтобы плоскости, заданные общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

относительно общей декартовой системы координат, пересекались, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий.

1. Хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля.

2. Главные векторы $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ данных плоскостей были бы неколлинеарны.

3. $$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Необходимое и достаточное условие параллельности двух плоскостей заключается в выполнении одного из условий.

1. $$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

но хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

2. Главные векторы $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ данных плоскостей коллинеарны, но

$$\frac{\boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{n}_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

3. $$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Необходимое и достаточное условие совпадения двух плоскостей заключается в выполнении одного из условий.

1. $$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = $$
$$= \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Главные векторы $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ данных плоскостей коллинеарны и

$$\frac{\boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{n}_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

3. $$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Все это лишь другие формулировки уже доказанной теоремы.

§ 77. Уравнения прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Параметрические уравнения прямой

В общей декартовой системе координат уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и имеющей направляющий вектор* $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$, *будут*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{1}$$

(эти уравнения называются каноническими уравнениями прямой), *или в параметрической форме*

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt, \tag{2}$$

или в векторно-параметрической форме

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}.$$

Действительно, пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка; она лежит на прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, коллинеарной вектору $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$ и $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ коллинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Так как $\boldsymbol{a}\neq 0$, то необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\boldsymbol{a}$ можно записать еще и так:

$$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{a},$$

или

$$\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}=t\{l, m, n\},$$

откуда сразу получаются уравнения (2).

Соотношение

$$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{a}$$

эквивалентно такому:

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t\boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M. Из последнего уравнения находим

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}.$$

Параметр t есть координата точки M данной прямой в следующей системе координат на этой прямой: M_0 — начало координат, $\boldsymbol{a}$ — масштабный вектор.

§ 78. Уравнения прямой, проходящей через две точки

Уравнения прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, заданные относительно общей декартовой системы координат, можно записать в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

или в параметрической форме

$$x=x_1+t(x_2-x_1), \quad y=y_1+t(y_2-y_1), \quad z=z_1+t(z_2-z_1).$$

Доказательство. За направляющий вектор прямой можно взять вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$, после чего остается применить результаты предыдущего параграфа.

§ 79. Взаимное расположение двух прямых

Следующие утверждения выражают необходимые и достаточные признаки взаимного расположения двух прямых в пространстве, заданных каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

относительно общей декартовой системы координат.

Прямые скрещиваются, т. е. не лежат на одной плоскости	$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}\neq 0$
Прямые пересекаются	$\Delta=0$, но векторы $\boldsymbol{a}=\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{l_2, m_2, n_2\}$ неколлинеарны (иначе их координаты непропорциональны)
Прямые параллельны	векторы $\boldsymbol{a}=\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{l_2, m_2, n_2\}$ коллинеарны, но вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ им не коллинеарен
Прямые совпадают	Все три вектора: $\boldsymbol{a}=\{l_1, m_1, n_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{l_2, m_2, n_2\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ — коллинеарны

Доказательство. Докажем достаточность указанных признаков.

1. Рассмотрим вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$$

и направляющие векторы данных прямых

$$\boldsymbol{a} = \{l_1,\ m_1,\ n_1\} \text{ и } \boldsymbol{b} = \{l_2,\ m_2,\ n_2\}.$$

Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то эти векторы некомпланарны, следовательно, данные прямые не лежат на одной плоскости.

2. Если $\Delta = 0$, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны, следовательно, данные прямые лежат в одной плоскости, а так как в случае 2 направляющие векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ этих прямых предполагаются неколлинеарными, то прямые пересекаются.

3. Если направляющие векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ данных прямых коллинеарны, то прямые или параллельны, или совпадают. В случае 3 прямые параллельны, так как по условию вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, начало которого находится в точке M_1 первой прямой, а конец — в точке M_2 второй прямой, не коллинеарен этим векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

4. Если все векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны, то, очевидно, прямые совпадают.

Необходимость признаков доказывается методом от противного.

§ 80. Взаимное расположение прямой и плоскости

Следующие утверждения дают необходимые и достаточные признаки взаимного расположения прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \tag{1}$$

и плоскости, заданной общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

относительно общей декартовой системы координат.

Плоскость и прямая пересекаются: $Al + Bm + Cn \neq 0$.

Плоскость и прямая параллельны: $Al + Bm + Cn = 0$,
$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

Прямая лежит на плоскости: $Al + Bm + Cn = 0$,
$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Докажем сначала достаточность указанных признаков. Запишем уравнения данной прямой в параметрическом виде:

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt. \tag{3}$$

Подставляя в уравнение (2) координаты произвольной точки данной прямой, взятые из формул (3), будем иметь

$$A(x_0+lt)+B(y_0+mt)+C(z_0+nt)+D=0,$$

или

$$(Al+Bm+Cn)\,t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{4}$$

1. Если $Al+Bm+Cn\neq 0$, то уравнение (4) имеет относительно t единственное решение:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn},$$

а, значит, данная прямая и данная плоскость имеют только одну общую точку, т. е. пересекаются.

2. Если

$$Al+Bm+Cn=0, \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0,$$

то уравнение (4) не удовлетворяется ни при каком значении t, т. е. на данной прямой нет ни одной точки, лежащей на данной плоскости, следовательно, данные прямая и плоскость параллельны.

3. Если

$$Al+Bm+Cn=0, \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

то уравнение (4) удовлетворяется при любом значении t, т. е. все точки данной прямой лежат на данной плоскости, значит, данная прямая лежит на данной плоскости.

Выведенные нами достаточные условия взаимного расположения прямой и плоскости являются и необходимыми и доказываются сразу методом от противного.

Из доказанного следует необходимое и достаточное условие $Al+Bm+Cn=0$ того, что вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ компланарен плоскости, заданной общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ относительно общей декартовой системы координат.

§ 81. Прямая как линия пересечения двух плоскостей

В общем случае прямую p в общей декартовой системе координат можно задать уравнениями двух плоскостей:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \tag{1}$$

пересекающихся по этой прямой.

Для приведения прямой, заданной двумя пересекающимися плоскостями (1), к каноническому виду надо найти какое-нибудь решение x_0, y_0, z_0 системы (1). Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на прямой, по которой пересекаются плоскости (1). Далее, вектор $\boldsymbol{a}$ с координатами

$$l=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad n=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

является направляющим вектором данной прямой, так как он ненулевой и компланарен каждой из данных плоскостей. В самом деле, применяя необходимое и достаточное условие компланарности вектора и плоскости, получим

$$A_1 l + B_1 m + C_1 n = A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

и аналогично

$$A_2 l + B_2 m + C_2 n = 0,$$

так что вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ коллинеарен прямой, по которой пересекаются плоскости (1).

Канонические уравнения прямой (1) можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

§ 82. Пучок плоскостей

Собственным пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну прямую.

Несобственным пучком плоскостей называется множество всех параллельных между собой плоскостей.

Теорема 1. *Для того чтобы три плоскости, заданные общими уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

относительно общей декартовой системы координат, принадлежали одному пучку, собственному или несобственному, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

был равен или двум, или единице.

Доказательство необходимости. Пусть три плоскости (1) принадлежат одному пучку. Требуется доказать, что $\operatorname{Rg} M \leqslant 2$.

Предположим сначала, что три данные плоскости принадлежат собственному пучку. Тогда система (1) имеет бесконечное множество решений; это будет тогда и только тогда, когда $\operatorname{Rg} M \leqslant 2$, так как если $\operatorname{Rg} M = 3$, то система (1) или имеет единственное решение, или несовместна, смотря по тому, будет ли определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля или равен нулю.

Если три данные плоскости принадлежат несобственному пучку, то ранг матрицы

$$m = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

равен 1, а значит, ранг матрицы M равен или двум, или единице.

Доказательство достаточности. Дано: $\operatorname{Rg} M \leqslant 2$. Требуется доказать, что три данные плоскости принадлежат одному пучку.

Если $\operatorname{Rg} M \leqslant 2$, то и $\operatorname{Rg} m \leqslant 2$. Пусть $\operatorname{Rg} M = \operatorname{Rg} m = 2$. Тогда система (1) совместна, имеет бесконечное множество решений, а среди данных плоскостей есть пересекающиеся, т. е. три данные плоскости принадлежат одному собственному пучку.

Если $\operatorname{Rg} m = 1$, $\operatorname{Rg} M = 2$, то все плоскости коллинеарны (две из них непременно параллельны, а третья может и совпадать с одной из параллельных плоскостей).

Если $\operatorname{Rg} M = 1$, то и $\operatorname{Rg} m = 1$, и все плоскости совпадают.

Теорема 2. *Пусть в общей декартовой системе координат заданы две различные плоскости π_1 и π_2 общими уравнениями:*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Для того чтобы третья плоскость π, заданная также общим уравнением

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

относительно той же системы координат, принадлежала пучку, определяемому плоскостями π_1 и π_2, необходимо и достаточно, чтобы левая часть уравнения плоскости π была линейной комбинацией левых частей уравнений плоскостей π_1 и π_2.

Доказательство необходимости. Дано: плоскость π принадлежит пучку плоскостей, определяемому плоскостями π_1 и π_2. Требуется доказать, что существуют числа λ и μ, такие, что будет выполнено тождество, справедливое при всех значениях x, y, z:

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 =$$
$$= \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2).$$

В самом деле, если три плоскости π, π_1 и π_2 принадлежат одному пучку, то $\operatorname{Rg} M \leqslant 2$, где

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Первые две строки этой матрицы линейно независимы (поскольку плоскости π_1 и π_2 различны), а так как $\operatorname{Rg} M \leqslant 2$, то третья строка есть линейная комбинация двух первых, т. е. существуют числа λ и μ, такие, что

$$A_3 = \lambda A_1 + \mu A_2, \quad B_3 = \lambda B_1 + \mu B_2,$$
$$C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2, \quad D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2.$$

Умножая обе части первого равенства на x, обе части второго на y, обе части третьего на z и складывая почленно полученные равенства и равенство $D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2$, получим доказываемое тождество.

Доказательство достаточности. Пусть тождество

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 =$$
$$= \lambda (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu (A_2x + B_2y + C_2z + D_2)$$

справедливо при всех значениях x, y и z. Требуется доказать, что плоскость π принадлежит пучку, определяемому плоскостями π_1 и π_2.

Из данного тождества следуют соотношения

$$A_3 = \lambda A_1 + \mu A_2, \quad B_3 = \lambda B_1 + \mu B_2, \quad C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2, \quad D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2,$$

так что третья строка матрицы M есть линейная комбинация двух первых, а потому $\operatorname{Rg} M \leqslant 2$.

Уравнение

$$\lambda (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (1)$$

где λ и μ не равны нулю одновременно, называются уравнением пучка плоскостей, определяемого двумя различными плоскостями π_1 и π_2, уравнения которых в общей декартовой системе координат таковы:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (2)$$

Как было доказано, уравнение всякой плоскости пучка, определяемого различными плоскостями (2), может быть записано в виде (1).

Обратно, если уравнение (1), в котором хотя бы одно из чисел λ и μ не равно нулю, есть уравнение первой степени, то оно является уравнением плоскости, принадлежащей пучку, определяемому плоскостями (2). В самом деле, третья строка матрицы M, составленной из коэффициентов уравнений (2) и (1), имеет вид

$$\lambda A_1+\mu A_2, \quad \lambda B_1+\mu B_2, \quad \lambda C_1+\mu C_2, \quad \lambda D_1+\mu D_2,$$

т. е. является линейной комбинацией двух других, поэтому $\operatorname{Rg} M \leqslant 2$.

Если плоскости π_1 и π_2 пересекаются, а λ и μ не равны нулю одновременно, то все коэффициенты при x, y, z в уравнении (1) не могут быть равны нулю, так как если бы имели место соотношения

$$\lambda A_1+\mu A_2=0, \quad \lambda B_1+\mu B_2=0, \quad \lambda C_1+\mu C_2=0,$$

то плоскости π_1 и π_2 были бы коллинеарны вопреки предположению.

Но если плоскости π_1 и π_2 параллельны, то существуют такие числа λ и μ, среди которых хотя бы одно не равно нулю, и такие, что в уравнении (1) все коэффициенты при x, y и z равны нулю.

§ 83. Взаимное расположение трех плоскостей

Пусть относительно общей декартовой системы координат заданы три плоскости общими уравнениями:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3&=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Введем следующие обозначения:

$$\delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad m=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \quad M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

и обозначим главные векторы данных плоскостей так:

$$\boldsymbol{n}_1=\{A_1,\ B_1,\ C_1\},\ \boldsymbol{n}_2=\{A_2,\ B_2,\ C_2\},\ \boldsymbol{n}_3=\{A_3,\ B_3,\ C_3\}.$$

На основании предыдущего получаем следующие необходимые и достаточные признаки взаимного расположения трех плоскостей.

1. Если $\delta \neq 0$, то три данные плоскости имеют и притом только одну общую точку, так как в случае $\delta \neq 0$ система (1) имеет и притом только одно решение: это решение, т. е. координаты единственной общей точки, принадлежащей трем данным плоскостям, мы получим, решив систему (1) (например, по формулам Крамера) (рис. 129, *а*).

2. Если $\operatorname{Rg} m=2$, $\operatorname{Rg} M=3$ и среди главных векторов $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ нет коллинеарных, то система несовместна ($\operatorname{Rg} M > \operatorname{Rg} m$); пло-

скости попарно пересекаются, причем прямые пересечения попарно различны (рис. 129, *б*).

3. Если $\mathrm{Rg}\, m=2$, $\mathrm{Rg}\, M=3$, но среди главных векторов $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ есть два коллинеарных (они не могут быть все три коллинеарны, так как $\mathrm{Rg}\, m=2$), то система несовместна; причем две плоскости параллельны, а третья их пересекает (рис. 129, *в*).

4. Если $\mathrm{Rg}\, m=2$, $\mathrm{Rg}\, M=2$ и среди главных векторов $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ нет коллинеарных, то плоскости попарно различны и проходят через одну прямую (рис. 129, *г*).

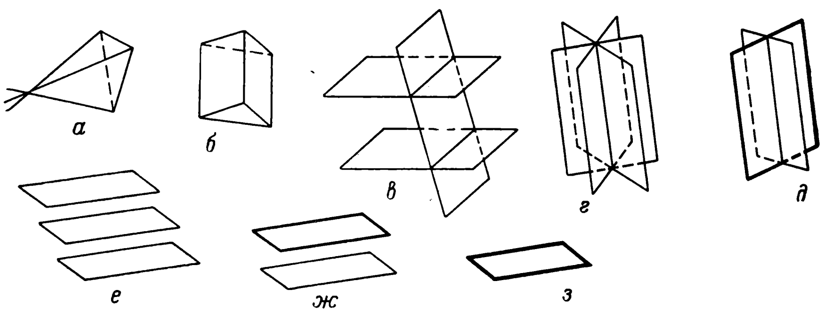


Рис. 129

5. Если $\mathrm{Rg}\, m=2$, $\mathrm{Rg}\, M=2$ и среди главных векторов $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ есть два коллинеарных, то две плоскости совпадают, а третья их пересекает (рис. 129, *д*).

6. Если $\mathrm{Rg}\, m=1$, но коэффициенты любой пары из уравнений (1) непропорциональны, то плоскости попарно параллельны (рис. 129, *е*).

7. Если $\mathrm{Rg}\, m=1$, но среди уравнений (1) есть только два, коэффициенты которых пропорциональны, то две плоскости совпадают, а третья им параллельна (рис. 129, *ж*).

8. Если $\mathrm{Rg}\, M=1$, то все плоскости совпадают (рис. 129, *з*).

§ 84. Связка плоскостей

Собственной связкой плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну точку (центр связки).

Несобственной связкой плоскостей называется множество всех плоскостей, компланарных одной прямой.

Теорема 1. *Для того чтобы четыре плоскости, заданные относительно общей декартовой системы координат уравнениями*

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3&=0,\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4&=0, \end{aligned} \tag{1}$$

принадлежали одной связке (собственной или несобственной), необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство необходимости. Дано: четыре плоскости (1) принадлежат одной связке. Требуется доказать, что $\Delta = 0$.

Если четыре данные плоскости принадлежат одной собственной связке, то, обозначая через (x_0, y_0, z_0) центр этой связки, будем иметь

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0, \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0,$$
$$A_3x_0 + B_3y_0 + C_3z_0 + D_3 = 0, \quad A_4x_0 + B_4y_0 + C_4z_0 + D_4 = 0.$$

Таким образом, столбцы определителя Δ линейно зависимы, значит, он равен нулю.

Если четыре данные плоскости, заданные уравнениями (1), принадлежат одной несобственной связке, то существует ненулевой вектор $\{l, m, n\}$, компланарный всем этим плоскостям, и, значит,

$$A_1l + B_1m + C_1n = 0, \quad A_2l + B_2m + C_2n = 0,$$
$$A_3l + B_3m + C_3n = 0, \quad A_4l + B_4m + C_4n = 0,$$

так что первые три столбца определителя Δ линейно зависимы, а значит $\Delta = 0$.

Доказательство достаточности. Дано: $\Delta = 0$. Требуется доказать, что четыре плоскости (1) принадлежат одной связке.

Если ранг матрицы

$$m = \begin{pmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \\ A_4B_4C_4 \end{pmatrix}$$

равен трем, то среди четырех данных плоскостей есть три такие, которые имеют единственную общую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пусть, например,

$$\begin{vmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда это будут три первые плоскости.

Первые три строки матрицы

$$M = \begin{pmatrix} A_1B_1C_1D_1 \\ A_2B_2C_2D_2 \\ A_3B_3C_3D_3 \\ A_4B_4C_4D_4 \end{pmatrix}$$

линейно независимы, а так как $\Delta=0$, то последняя строка есть линейная комбинация первых трех:

$$A_4=\lambda A_1+\mu A_2+\nu A_3,\quad B_4=\lambda B_1+\mu B_2+\nu B_3,$$
$$C_4=\lambda C_1+\mu C_2+\nu C_3,\quad D_4=\lambda D_1+\mu D_2+\nu D_3;$$

отсюда следует тождество, справедливое при всех x, y, z:

$$A_4x+B_4y+C_4z+D_4=\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+$$
$$+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\nu(A_3x+B_3y+C_3z+D_3).$$

Из этого тождества следует, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, являющаяся пересечением первых трех плоскостей, лежит и на четвертой плоскости, т. е. четыре данные плоскости принадлежат одной собственной связке.

Если $\operatorname{Rg} M<3$ (отсюда уже следует, что $\Delta=0$), то среди главных векторов $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$, $\boldsymbol{n}_4$ данных плоскостей есть не более двух линейно независимых.

Пусть $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ линейно независимы, следовательно неколлинеарны, а векторы $\boldsymbol{n}_3$ и $\boldsymbol{n}_4$ — их линейные комбинации:

$$\boldsymbol{n}_3=\lambda\boldsymbol{n}_1+\mu\boldsymbol{n}_2,\quad \boldsymbol{n}_4=\lambda'\boldsymbol{n}_1+\mu'\boldsymbol{n}_2. \tag{2}$$

Система уравнений

$$A_1l+B_1m+C_1n=0,\quad A_2l+B_2m+C_2n=0$$

имеет ненулевое решение

$$\left(\text{например,}\quad l=\begin{vmatrix} B_1C_1\\ B_2C_2\end{vmatrix},\quad m=\begin{vmatrix} C_1A_1\\ C_2A_2\end{vmatrix},\quad n=\begin{vmatrix} A_1B_1\\ A_2B_2\end{vmatrix}\right).$$

В силу соотношений (2) будем также иметь

$$A_3l+B_3m+C_3n=0,\quad A_4l+B_4m+C_4n=0,$$

т. е. четыре данные плоскости принадлежат одной несобственной связке, так как ненулевой вектор $\{l, m, n\}$ всем им компланарен.

Если наконец, $\operatorname{Rg} m=1$, то четыре данные плоскости коллинеарны, а значит также принадлежат одной связке.

Теорема 2. *Пусть*

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \tag{3}$$

три плоскости, не принадлежащие одному пучку. Для того чтобы плоскость

$$A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \tag{4}$$

принадлежала связке, определяемой плоскостями (3), *необходимо и достаточно, чтобы левая часть уравнения* (4) *была линейной* *комбинацией левых частей уравнений* (3):

$$A_4x+B_4y+C_4z+D_4=\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+ \\ +\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\nu(A_3x+B_3y+C_3z+D_3) \qquad (5)$$

(*тождество при всех значениях* x, y, z).

Доказательство необходимости. Дано: плоскость (4) входит в связку, определяемую плоскостями (3). Требуется доказать, что существуют такие числа λ, μ и ν, при которых соотношение (5) является тождеством.

Так как плоскости (3) не входят в один пучок, то ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1B_1C_1D_1 \\ A_2B_2C_2D_2 \\ A_3B_3C_3D_3 \end{pmatrix}$$

равен 3, а так как плоскость (4) входит в связку, определяемую плоскостями (3), то

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1B_1C_1D_1 \\ A_2B_2C_2D_2 \\ A_3B_3C_3D_3 \\ A_4B_4C_4D_4 \end{vmatrix}=0. \qquad (6)$$

Отсюда следует, что четвертая строка этого определителя есть линейная комбинация первых трех:

$$\begin{aligned} A_4&=\lambda A_1+\mu A_2+\nu A_3, \\ B_4&=\lambda B_1+\mu B_2+\nu B_3, \\ C_4&=\lambda C_1+\mu C_2+\nu C_3, \\ D_4&=\lambda D_1+\mu D_2+\nu D_3. \end{aligned} \qquad (7)$$

Поэтому соотношение (5) есть тождество относительно x, y, z.

Доказательство достаточности. Предположим, что существуют такие λ, μ и ν, при которых соотношение (5) есть тождество относительно x, y, z. Требуется доказать, что плоскость (4) входит в связку, определяемую плоскостями (3).

Если соотношение (5) есть тождество относительно x, y, z, то из него следуют равенства (7), а следовательно $\Delta=0$, так как четвертая строка определителя Δ есть линейная комбинация трех первых. Но если $\Delta=0$, то четыре плоскости, заданные уравнениями (3) и (4), принадлежат одной связке.

Уравнение

$$\begin{aligned}\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\\+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\\+\nu(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0,\end{aligned}\tag{8}$$

в котором хотя бы одно из чисел λ, μ, ν не равно нулю, а

$$\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\end{aligned}\tag{9}$$

общие уравнения трех плоскостей, заданных относительно общей декартовой системы координат и не принадлежащих одному пучку, называется уравнением связки плоскостей, определяемой тремя данными плоскостями.

Как было доказано, в таком виде может быть записано уравнение всякой плоскости, входящей в связку плоскостей, определяемую тремя данными плоскостями.

Обратно, если λ, μ, ν выбраны произвольно, но так, что уравнение (8) есть уравнение первой степени относительно x, y, z, то оно есть уравнение плоскости, входящей в связку, определяемую тремя плоскостями (не входящими в один пучок), уравнения которых в общей декартовой системе координат таковы:

$$\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.\end{aligned}$$

Если плоскости (9) имеют только одну общую точку, а среди чисел λ, μ, ν хотя бы одно не равно нулю, то в уравнении (8) коэффициенты при x, y, z одновременно в нуль не обращаются, так как если λ, μ, ν не равны нулю одновременно и

$$\begin{aligned}\lambda A_1+\mu A_2+\nu A_3=0,\\\lambda B_1+\mu B_2+\nu B_3=0,\\\lambda C_1+\mu C_2+\nu C_3=0,\end{aligned}\tag{10}$$

то

$$\begin{vmatrix}A_1B_1C_1\\A_2B_2C_2\\A_3B_3C_3\end{vmatrix}=0,$$

и три данные плоскости или не имеют ни одной общей точки, или имеют бесконечное множество общих точек.

Если же три данные плоскости попарно пересекаются по трем различным прямым (рис. 129, *б*) или две из них параллельны и третья их пересекает (рис. 129, *в*), то существует ненулевой вектор $\{\lambda, \mu, \nu\}$, компланарный каждой из плоскостей (9), т. е. будут выполнены соотношения (10), а в таком случае уравнение (8) не будет уравнением первой степени (коэффициенты при x, y, z равны нулю).

§ 85. Геометрический смысл неравенства первой степени с тремя неизвестными

Теорема 1. *Пусть относительно общей декартовой системы координат задана плоскость π общим уравнением*

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{1}$$

Тогда для координат x, y, z всех точек $M(x, y, z)$, лежащих по одну сторону от плоскости π, выполняется неравенство

$$Ax+By+Cz+D>0,$$

а для координат x, y, z всех точек $M(x, y, z)$, лежащих по другую сторону от плоскости π,— неравенство

$$Ax+By+Cz+D<0.$$

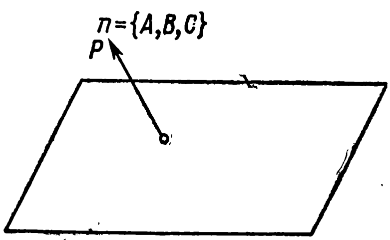


Рис. 130.

Плоскость π делит пространство на два полупространства. То полупространство, для координат всех точек которого

$$Ax+By+Cz+D>0,$$

будем называть *положительным*, а другое, для координат всех точек которого

$$Ax+By+Cz+D<0,$$

— *отрицательным*.

Теорема 2. *Пусть относительно общей декартовой системы координат плоскость π задана общим уравнением*

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Тогда, если отложить главный вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ этой плоскости от любой точки M_0 этой плоскости $\overrightarrow{M_0P}=\boldsymbol{n}$, то конец P отложенного вектора будет находиться в положительном полупространстве от данной плоскости π (рис. 130).

Теоремы 1 и 2 доказываются аналогично тому, как были доказаны теоремы 1 и 2 в § 62.

Если система координат — декартова прямоугольная, то главный вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ перпендикулярен к данной плоскости.

Рассуждениями, вполне аналогичными тем, которые были проведены на стр. 152, доказывается, что условие

$$Al+Bm+Cn>0$$

является необходимым и достаточным условием того, что вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$, заданный относительно общей декартовой системы координат, направлен в положительное полупространство от плоскости, заданной уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0$$

относительно той же системы координат.

Это соображение может быть использовано при определении направления вектора, коллинеарного особому направлению эллиптического параболоида, заданного общим уравнением относительно общей декартовой системы координат (§ 166), а также при определении направления вектора, имеющего особое направление относительно параболического цилиндра (§ 166), заданного общим уравнением относительно общей декартовой системы координат.

§ 86. Расстояние от точки до плоскости

Теорема. *Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат общим уравнением*

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

вычисляется по формуле (1)

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Доказательство теоремы ничем не отличается от доказательства теоремы § 63.

§ 87. Нормальное уравнение плоскости

Уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

плоскости, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат, называется **нормальным**, если главный вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$, перпендикулярный к этой плоскости, **единичный**, т. е. если

$$A^2+B^2+C^2=1. \tag{2}$$

Для приведения к нормальному виду общего уравнения плоскости, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат, надо умножить левую часть данного уравнения на такое число M (нормирующий множитель), чтобы в уравнении

$$MAx + MBy + MCz + MD = 0$$

вектор $\{AM, BM, CM\}$ стал единичным, т. е. чтобы

$$M^2A^2 + M^2B^2 + M^2C^2 = 1,$$

откуда

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3}$$

Таким образом, для каждой плоскости всегда получим два нормальных уравнения

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0. \tag{4}$$

И это естественно: для любой плоскости существуют два и только два различных единичных вектора, перпендикулярных к ней. Множители

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{5}$$

называются нормирующими множителями уравнения $Ax+By+Cz+D=0$.

Радикал $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ есть модуль главного вектора $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$, который в случае декартовой прямоугольной системы координат является нормальным к плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad |\boldsymbol{n}| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}. \tag{6}$$

Таким образом,

$$M = \pm\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}. \tag{7}$$

Коэффициенты нормального уравнения плоскости, заданной уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат, равны косинусам углов α, β, γ, которые нормальный вектор $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$ к плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, образует с осями координат. В самом деле,

$$\begin{aligned} A &= \{A, B, C\}\{1, 0, 0\} = \boldsymbol{ni} = \cos\alpha, \\ B &= \{A, B, C\}\{0, 1, 0\} = \boldsymbol{nj} = \cos\beta, \\ C &= \{A, B, C\}\{0, 0, 1\} = \boldsymbol{nk} = \cos\gamma. \end{aligned} \tag{8}$$

Наконец, $|D|=p$, где p — расстояние от начала координат до данной плоскости (для доказательства в формуле (1) § 86 следует положить $x_0=y_0=z_0=0$ и заметить, что $A^2+B^2+C^2=1$).

Если относительно декартовой прямоугольной системы координат плоскость задана нормальным уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

т. е. $A^2+B^2+C^2=1$, причем $D<0$, то A, B, C являются направляющими косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ луча l, выходящего из начала координат и пересекающего данную плоскость, причем $|D|=p$, где p — расстояние от начала координат до рассматриваемой плоскости. Действительно, если $D<0$, то начало координат лежит в отрицательном полупространстве плоскости, заданной уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0$$

и, значит, луч l, выходящий из начала координат и пересекающий данную плоскость, одинаково направлен с нормальным (главным) вектором $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Но так как $|D|=p$, где p — расстояние от начала координат до плоскости, заданной нормальным уравнением, то нормальное уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ плоскости в случае $D<0$ имеет вид

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{9}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы луча, выходящего из начала координат и пересекающего плоскость, а p — расстояние от начала координат до этой плоскости.

Для приведения к нормальному виду (9) общего уравнения

$$Ax+By+Cz+D=0$$

плоскости, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат в случае, если эта плоскость не проходит через начало координат, воспользуемся результатами § 76 (см. § 76, соотношение (3)), согласно которому существует такое число $M\neq 0$, что имеет место тождество (относительно x, y, z)

$$MAx+MBy+MCz+MD=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p,$$

или

$$MA=\cos\alpha, \qquad MB=\cos\beta, \qquad MC=\cos\gamma, \qquad MD=-p.$$

Так как направляющие косинусы любого луча в декартовой прямоугольной системе координат связаны соотношением $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, то $(MA)^2+(MB)^2+(MC)^2=1$, откуда

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

причем в силу того, что

$$MD = -p < 0,$$

знак M следует выбрать противоположным знаку p.

Если плоскость задана нормальным уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат, то расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до этой плоскости вычисляется по формуле

$$d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|,$$

т. е. расстояние от точки до плоскости, заданной нормальным уравнением относительно декартовой прямоугольной системы координат, равно абсолютной величине результата подстановки координат данной точки в левую часть уравнения плоскости (см. § 86).

Если плоскость не проходит через начало координат и задана относительно декартовой прямоугольной системы координат уравнением

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы луча, выходящего из начала координат и пересекающего эту плоскость, а p — расстояние от начала координат до рассматриваемой плоскости, то расстояние d от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до этой плоскости вычисляется по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|.$$

§ 88. Угол между двумя плоскостями. Условие перпендикулярности двух плоскостей

Косинусы углов между двумя плоскостями, заданными уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{1}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{2}$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат, выражаются формулой

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{3}$$

Угол между векторами $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, нормальными соответственно к данным плоскостям, равен одному из углов, образованных этими плоскостями, именно тому из углов, образованных плоскостями (1) и (2), внутренние точки которого находятся в положительном полупространстве от одной плоскости и в отрицательном полупространстве от другой плоскости (рис. 131). Поэтому, обозначая через φ_1 один из углов, образованных данными плоскостями, а через φ_2 — угол, смежный с углом φ_1, и применяя формулу $\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ для косинуса угла α между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, мы и получим формулу (3).

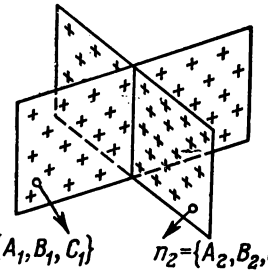


Рис. 131

Следствие. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух плоскостей, заданных общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат, является равенство

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

§ 89. Угол между двумя прямыми. Условие перпендикулярности двух прямых

Углом между двумя прямыми в пространстве называется любой из углов между двумя параллельными им прямыми, проходящими через произвольную точку пространства. Таким образом, две прямые в пространстве (если они неперпендикулярны) образуют между собой два различных угла: один острый, другой тупой. Сумма этих углов равна π.

Пусть $\boldsymbol{a} = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{l_2, m_2, n_2\}$ — направляющие векторы данных прямых, заданных относительно декартовой прямоугольной системы координат. Угол между этими векторами равен одному из углов, образованных данными прямыми. Следовательно, косинусы углов между двумя данными прямыми выражаются формулой

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Отсюда получаем необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых:

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0;$$

для того чтобы две прямые были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений соответствующих координат направляющих векторов этих прямых была равна нулю.

§ 90. Угол между прямой и плоскостью. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Углом между прямой и плоскостью (если они неперпендикулярны) называется меньший из двух углов между этой прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. Если же прямая и плоскость перпендикулярны, то угол между ними считается равным $\frac{\pi}{2}$. Пусть относительно декартовой прямоугольной системы координат задана плоскость Π общим уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0$$

и прямая p — каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

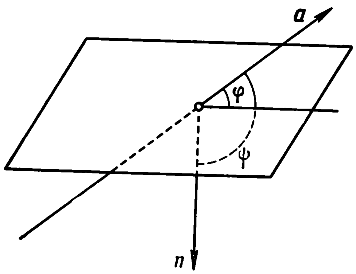


Рис. 132

Косинус угла ψ между вектором $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$, перпендикулярным данной плоскости, и направляющим вектором $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ данной прямой по абсолютной величине равен синусу угла φ между данной прямой и данной плоскостью (рис. 132). Но косинус угла ψ между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$ равен

$$\cos\psi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

следовательно, синус угла φ между данной прямой и данной плоскостью определится по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Если прямая, заданная уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

перпендикулярна плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

то направляющий вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ прямой коллинеарен вектору $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$, перпендикулярному данной плоскости. Поэтому координаты этих векторов пропорциональны, т. е. существует такое отличное от нуля число λ, что

$$A=\lambda l, \qquad B=\lambda m, \qquad C=\lambda n,$$

или

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Обратно, если выполнены эти соотношения, то векторы $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ и $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ коллинеарны, т. е. направляющий вектор данной прямой коллинеарен вектору $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$, перпендикулярному данной плоскости, следовательно, данная прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

Итак, для того чтобы прямая и плоскость, заданная относительно декартовой прямоугольной системы координат, были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы координаты направляющего вектора прямой были пропорциональны коэффициентам при x, y, z в уравнении плоскости.

§ 91. Уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую

Уравнения перпендикуляра, опущенного из точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$

на прямую, заданную каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат, можно записать в виде

$$l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0,$$

так как первое из этих уравнений выражает плоскость, проходящую через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно данной прямой, а второе — плоскость, проходящую через данную точку и данную прямую. Эти две плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку M_1 и пересекающей данную прямую под углом 90° (рис. 133).

§ 92. Уравнения общего перпендикуляра к двум неколлинеарным прямым

Пусть две прямые p и q заданы своими каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат. Предположим, что направляющие векторы этих прямых

$$\boldsymbol{a}=\{l_1, m_1, n_1\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b}=\{l_2, m_2, n_2\}$$

неколлинеарны, т. е. что данные прямые или скрещиваются, или пересекаются. Пусть l — прямая, которая пересекает обе прямые под углом 90°.

Тогда за направляющий вектор прямой l можно взять векторное произведение $[\boldsymbol{ab}]$ направляющих векторов данных прямых:

$$[\boldsymbol{ab}]=\left\{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Общий перпендикуляр l к двум данным прямым можно определить как прямую, по которой пересекается плоскость π_1, проходящая через прямую p компланарно вектору $[\boldsymbol{ab}]$, с плоскостью π_2, проходящей через прямую q компланарно $[\boldsymbol{ab}]$ (рис. 134).

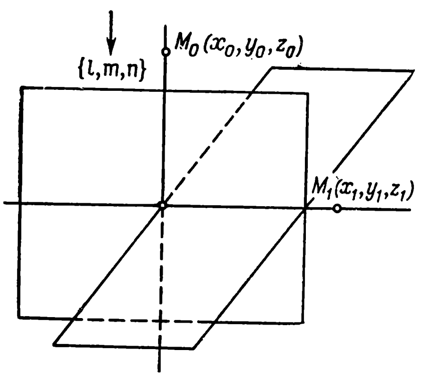


Рис. 133

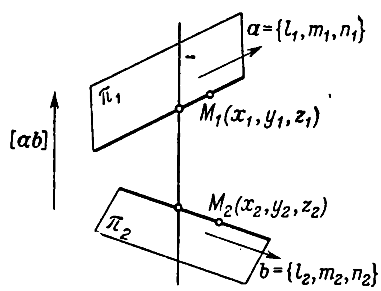


Рис. 134

Уравнение плоскости π_1 имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}=0, \tag{1}$$

так как эта плоскость проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ прямой p и компланарна векторам $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{ab}]$. Аналогично составляем уравнение плоскости π_2:

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Общий перпендикуляр l к данным прямым выражается уравнениями (1) и (2).

§ 93. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть в пространстве заданы точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и прямая l каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат.

Расстояние d от точки M_1 до прямой l можно определить как высоту параллелограмма, сторонами которого служит вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ и направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ прямой l, отложенный от точки M_0 этой прямой. Поэтому для определения расстояния d рассмотрим модуль векторного произведения:

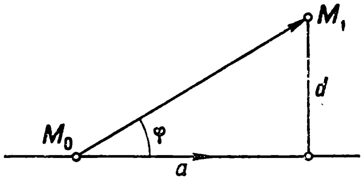


Рис. 135

$$|[\overrightarrow{M_0M_1}\boldsymbol{a}]|=|\overrightarrow{M_0M_1}||\boldsymbol{a}|\sin\varphi,$$

но $|\overrightarrow{M_0M_1}|\sin\varphi=d$, следовательно (рис. 135),

$$|[\overrightarrow{M_0M_1}\boldsymbol{a}]|=d|\boldsymbol{a}|,$$

откуда

$$d=\frac{|[\overrightarrow{M_0M_1}\boldsymbol{a}]|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Так как

$$\overrightarrow{M_0M_1}=\{x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0\},$$
$$\boldsymbol{a}=\{l,\ m,\ n\},$$

то

$$[\overrightarrow{M_0M_1}\boldsymbol{a}]=\left\{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m & n\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0\\ n & l\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0\\ l & m\end{vmatrix}\right\},$$

поэтому

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0\\ n & l\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0\\ l & m\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

§ 94. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Если две прямые скрещиваются, т. е. не лежат в одной плоскости, то кратчайшее расстояние между ними (как доказывается в элементарной геометрии) есть длина отрезка общего перпендикуляра к этим двум прямым, концы которого лежат на этих прямых. Отсюда следует, что кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно величине ортогональной проекции любого отрезка M_1M_2, концы которого лежат на этих прямых (рис. 136), на любую прямую, перпендикулярную к данным; это очевидно при проектировании точек M_1 и M_2 на общий перпендикуляр к данным прямым; величина проекции не изменится, если спроектировать отрезок M_1M_2 на **любую** прямую, параллельную этому перпендикуляру. Пусть две скрещивающиеся прямые заданы каноническими уравнениями

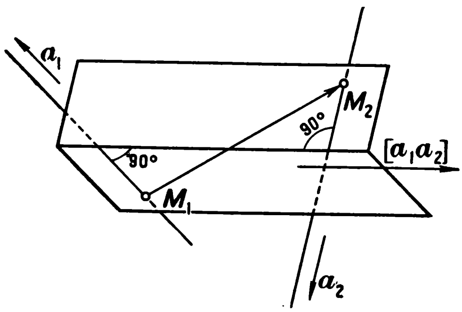


Рис. 136

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат. Кратчайшее расстояние между ними равно абсолютной величине проекции вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\},$$

начало $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и конец $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ которого лежат соответственно на первой и второй прямых, на прямую, параллельную вектору

$$[\boldsymbol{ab}]=\left\{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}\right\},$$

перпендикулярному направляющим векторам

$$\boldsymbol{a}=\{l_1,\ m_1,\ n_1\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b}=\{l_2,\ m_2,\ n_2\}$$

данных прямых.

Так как

$$|[\boldsymbol{ab}]\overrightarrow{M_1M_2}|=|[\boldsymbol{ab}]|\,|\text{пр}_{[\boldsymbol{ab}]}\overrightarrow{M_1M_2}|=|[\boldsymbol{ab}]|\,d,$$

то кратчайшее расстояние d между данными скрещивающимися прямыми вычисляется по формуле

$$d=\frac{|\boldsymbol{ab}\overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\boldsymbol{ab}]|},$$

или в координатах

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Отметим, что эта формула верна и для двух пересекающихся прямых: числитель обратится в нуль, знаменатель отличен от нуля, и мы получим $d=0$ в соответствии с определением кратчайшего расстояния между двумя пересекающимися прямыми.

Если две прямые параллельны, то кратчайшее расстояние между ними равно расстоянию от любой точки первой прямой до любой точки второй прямой.

§ 95. Примеры и задачи к главе VI

1. Задачи с решениями

Пример 1. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (2, 3, 1) на плоскость

$$3x+y+2z-11=0.$$

Решение. В прямоугольной системе координат вектор $\{3, 1, 2\}$ перпендикулярен данной плоскости, поэтому для искомой прямой известна точка (2, 3, 1) и направляющий вектор $\{3, 1, 2\}$.

Ее уравнения:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (1, 2, -1) компланарно векторам $\{1, 7, 0\}$ и $\{4, 3, 2\}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$14x-2y-25z-35=0.$$

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (3, 2, 1) и прямую

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

Решение. Искомая плоскость проходит через точки $M_1(3, 2, 1)$ и $M_2(2, -3, 1)$ и параллельна вектору $a=\{4, 1, 2\}$, следовательно, она параллельна вектору

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1, -5, 0\}$$

и, значит, ее уравнение

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$10x-2y-19z-7=0.$$

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$M_1(2, 5, 1),\ M_2(6, 3, 2),\ M_3(1, 1, 1).$$

Решение. Искомая плоскость параллельна векторам

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{4, -2, 1\} \text{ и } \overrightarrow{M_3M_1}=\{1, 4, 0\},$$

поэтому ее уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$4x-y-18z+15=0.$$

Пример 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+7}{4}=\frac{z+3}{1}.$$

Решение. Направляющий вектор $\{3, 4, 1\}$ данной прямой служит нормальным вектором плоскости, поэтому уравнение плоскости будет

$$3x+4y+z=0.$$

Пример 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (3, 1, 1) и перпендикулярной плоскостям

$$3x-y+2z+4=0, \quad x+2y-z+5=0.$$

Решение. Так как векторы

$$\{3, -1, 2\} \text{ и } \{1, 2, -1\}$$

перпендикулярны соответственно первой и второй из данных плоскостей, а искомая плоскость должна быть перпендикулярна данным плоскостям, то искомая плоскость будет параллельна этим векторам, а поскольку она к тому же проходит через точку (3, 1, 1), то ее уравнение будет

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$3x-5y-7z+3=0.$$

Пример 7. Найти проекцию точки (1, 2, 5) на плоскость

$$2x+y-z=0.$$

Решение. Уравнения прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости, будут

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{-1},$$

или в параметрической форме:

$$x=1+2t, \quad y=2+t, \quad z=5-t.$$

Подставляя это в уравнение данной плоскости, получим

$$2(1+2t)+2+t-5+t=0;$$

отсюда

$$t=\frac{1}{6}.$$

Координаты проекции:

$$x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}, \quad y=2+\frac{1}{6}=\frac{13}{6}, \quad z=5-\frac{1}{6}=\frac{29}{6}.$$

Проекция

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{6}, \frac{29}{6}\right).$$

Пример 8. Найти проекцию точки (3, 2, 1) на прямую

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через данную точку (3, 2, 1) перпендикулярно данной прямой:

$$x-3+y-2+2(z-1)=0, \quad \text{или} \quad x+y+2z-7=0. \qquad (2)$$

Решаем систему (1), (2):

$$x=2+t, \quad y=-3+t, \quad z=2t,$$

$$2+t-3+t+4t-7=0, \quad t=\frac{4}{3},$$

$$x=2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}, \quad y=-3+\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}, \quad z=\frac{8}{3}.$$

Замечание. При составлении уравнений прямой не следует всегда стремиться получить уравнения прямой в виде

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}. \qquad (3)$$

Часто удобнее найти уравнения двух различных плоскостей проходящих через прямую:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

эти два уравнения и будут уравнениями прямой, и их вовсе не обязательно приводить к виду (3). Рассмотрим ряд примеров.

Пример 9. Найти проекцию прямой

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{1}$$

на плоскость

$$x+2y+3z+4=0.$$

Решение. Так как проекция лежит в данной плоскости, то

$$x+2y+3z+4=0$$

есть одно из уравнений проекции.

Второе уравнение будет уравнением проектирующей плоскости. Проектирующая плоскость проходит через данную прямую, следовательно, она проходит через точку (2, —2,1) и компланарна вектору $\{3, 4, 1\}$. Так как проектирующая плоскость перпендикулярна плоскости

$$x+2y+3z+4=0,$$

то она компланарна вектору $\{1, 2, 3\}$, перпендикулярному этой плоскости. Итак, уравнение проектирующей плоскости

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$5x-4y+z-19=0.$$

Искомые уравнения проекции:

$$x+2y+3z+4=0,\quad 5x-4y+z-19=0.$$

Пример 10. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки 3, 2, 1) на прямую

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{1}.$$

Решение. Рассмотрим плоскость π_1, проходящую через данную точку (3, 2, 1) и перпендикулярную к данной прямой, т. е к вектору $\{2, 4, 1\}$. Уравнение этой плоскости

$$2(x-3)+4(y-2)+z-1=0,$$

или

$$2x+4y+z-15=0$$

Рассмотрим плоскость π_2, проходящую через данную точку и данную прямую.

Эта плоскость проходит через точки $M_1(3, 2, 1)$ и $M_2(0, 0, -3)$ и параллельна направляющему вектору данной прямой $\{2, 4, 1\}$. Имеем

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{3, 2, 4\}.$$

Следовательно, уравнение плоскости π_2

$$\begin{vmatrix} x & y & z+3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$14x-5y-8z-24=0.$$

Плоскости π_1 и π_2 пересекаются по прямой l, которая проходит через данную точку и перпендикулярна данной прямой, поэтому уравнения

$$2x+4y+z-15=0,\quad 14x-5y-8z-24=0$$

и будут уравнениями прямой l.

Пример 11. Дана прямая

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$$

и плоскость

$$x+2y-z=0.$$

Через точку, в которой эта прямая пересекает данную плоскость, проведена прямая, перпендикулярная к данной прямой и лежащая в данной плоскости. Составить уравнения этой прямой.

Решение. Одно из уравнений прямой есть уравнение данной плоскости

$$x+2y-z=0$$

Составим уравнение плоскости π, проходящей через искомую прямую и данную; эта плоскость проходит через точку (1, 0, 0) и параллельна вектору $a=\{2, 3, 4\}$ Далее, вектор $b=\{1, 2, -1\}$ перпендикулярен данной плоскости, поэтому вектор $[ab]=\{-11, 6, 1\}$ будет направляющим вектором искомой прямой и, значит, параллелен плоскости π. Таким образом, уравнение плоскости π

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ -11 & 6 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$21x+46y-45z-21=0.$$

Итак, искомая прямая определяется уравнениями

$$x+2y-z=0, \quad 21x+46y-45z-21=0.$$

Пример 12. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (2, 1, 0) и пересекающей две прямые:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}.$$

Решение. Искомую прямую можно рассматривать как прямую, по которой пересекаются две плоскости, проходящие через данную точку и одну из данных прямых.

Уравнения этих плоскостей (см. пример 3)

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$3y-z-3=0, \quad x-3z-2=0$$

— искомые уравнения прямой.

Пример 13. Составить уравнения общего перпендикуляра к двум прямым:

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}.$$

Решение. Направляющими векторами данных прямых являются соответственно векторы $\boldsymbol{a}=\{8, 4, 1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{2, -2, 1\}$. Вектор $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{ab}]$, являющийся векторным произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$, перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Вектор

$$\boldsymbol{c}=\{6, -6, -24\} \parallel \{1, -1, -4\}.$$

Искомый общий перпендикуляр к двум данным прямым можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей: одна плоскость проходит через первую из данных прямых компланарно вектору $\boldsymbol{c}$, другая — через вторую данную прямую компланарно вектору $\boldsymbol{c}$. Уравнения этих плоскостей:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 8 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$5x-11y+4z+5=0, \quad x+y=0.$$

Пример 14. Составить векторно-параметрическое уравнение прямой l, проходящей через точку M_0, определяемую радиусом-вектором $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, и пересекающей под острым углом α прямую m, которая проходит через точку M_1, определяемую радиусом-вектором $\overrightarrow{OM_1}=\boldsymbol{r}_1$, и коллинеарна единичному вектору $\boldsymbol{a}$. Точка M_0 не лежит на прямой m.

Решение. Вектор $[[(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{a}]$ лежит в плоскости π, проходящей через точку M_0 и прямую m, и перпендикулярен вектору $\boldsymbol{a}$. Вектор

$$\boldsymbol{b}=\frac{[[(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{a}]}{|[(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}]|}$$

будет единичным вектором, лежащим в плоскости π и перпендикулярным вектору $\boldsymbol{a}$ (рис. 137). Векторы

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}\cos\alpha+\boldsymbol{b}\sin\alpha \quad \text{и} \quad \boldsymbol{q}=-\boldsymbol{a}\cos\alpha+\boldsymbol{b}\sin\alpha$$

будут единичными направляющими векторами искомых прямых (их будет две). Уравнения этих прямых:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\left(\boldsymbol{a}\cos\alpha+\frac{[[(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{a}]}{|[(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}]|}\sin\alpha\right),$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\left(-\boldsymbol{a}\cos\alpha+\frac{[[(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{a}]}{|[(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}]|}\sin\alpha\right).$$

Пример 15. Прямая p с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ проходит через точку M_1, определяемую радиусом-вектором $\overrightarrow{OM_1}=\boldsymbol{r}_1$; прямая q с направляющим вектором $\boldsymbol{b}$ проходит через точку M_2, определяемую радиусом-вектором $\overrightarrow{OM_2}=\boldsymbol{r}_2$. Прямые p и q неколлинеарны. Найти радиусы-векторы $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ концов P и Q

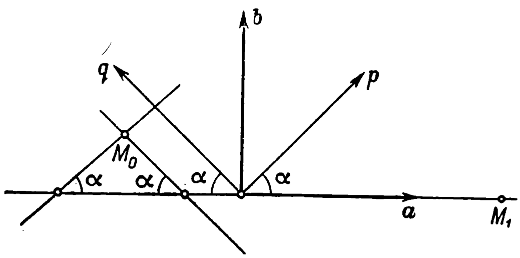


Рис. 137

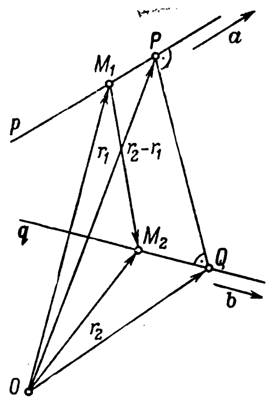


Рис. 138

наименьшего отрезка PQ, концы которого лежат соответственно на данных прямых p и q.

Решение. Очевидно, $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{r}_2+\mu\boldsymbol{b}$ (рис. 138). Отсюда

$$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1+\mu\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}.$$

Так как $\overrightarrow{PQ}\perp\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{PQ}\perp\boldsymbol{b}$, то $\overrightarrow{PQ}\,\boldsymbol{a}=0$, $\overrightarrow{PQ}\boldsymbol{b}=0$, или подробнее:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+\mu\boldsymbol{ab}-\lambda\boldsymbol{a}^2=0,\\&\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+\mu\boldsymbol{b}^2-\lambda\boldsymbol{ab}=0,\end{aligned}\right\}\quad\text{или}\quad\left.\begin{aligned}&\lambda\boldsymbol{ab}-\mu\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1),\\&\lambda\boldsymbol{a}^2-\mu\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1).\end{aligned}\right\}$$

Разрешая эту систему относительно λ и μ, получим

$$\lambda=\frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1) & -\boldsymbol{b}^2\\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1) & -\boldsymbol{ab}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\boldsymbol{ab} & -\boldsymbol{b}^2\\ \boldsymbol{a}^2 & -\boldsymbol{ab}\end{vmatrix}}=\frac{\boldsymbol{b}^2(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1))-(\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1))}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{ab})^2}=$$

$$=\frac{\boldsymbol{b}\,[[\boldsymbol{ab}]\,(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]}{[\boldsymbol{ab}]^2}=\frac{[\boldsymbol{ab}]\,(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{b}}{[\boldsymbol{ab}]^2}$$

и аналогично

$$\mu=\frac{[\boldsymbol{ab}]\,(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}}{[\boldsymbol{ab}]^2}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}_1+\frac{[\boldsymbol{ab}](\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{b}}{[\boldsymbol{ab}]^2}\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{r}_2+\frac{[\boldsymbol{ab}](\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}}{[\boldsymbol{ab}]^2}\boldsymbol{b}.$$

Пример 16. Составить уравнение прямой l, проходящей через начало координат, образующей угол α с прямой m, не проходящей через начало координат и заданной уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}$ — единичный вектор), при условии, что кратчайшее расстояние между прямыми l и m равно δ.

Решение. Вопрос сводится к определению направляющего вектора $\boldsymbol{b}$ искомой прямой; будем считать этот искомый вектор $\boldsymbol{b}$ единичным. По условию

$$\delta=\frac{|\boldsymbol{bar}_0|}{|[\boldsymbol{ba}]|}=\frac{|\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ar}_0]|}{\sin\alpha},\quad \boldsymbol{ab}=\cos\alpha,\quad \boldsymbol{b}^2=1.$$

Разложим вектор $\boldsymbol{b}$ по векторам $\boldsymbol{a}$, $[\boldsymbol{ar}_0]$ и $[[\boldsymbol{ar}_0]\boldsymbol{a}]$:

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu[\boldsymbol{ar}_0]+\nu[[\boldsymbol{ar}_0]\boldsymbol{a}].$$

Умножая обе части этого равенства скалярно один раз на $\boldsymbol{a}$, другой раз на $[\boldsymbol{ar}_0]$, получим

$$\boldsymbol{ba}=\lambda,\quad \boldsymbol{b}[\boldsymbol{ar}_0]=\mu[\boldsymbol{ar}_0]^2,$$

или

$$\lambda=\cos\alpha,\quad \mu=\frac{\boldsymbol{bar}_0}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}.$$

Но $|\boldsymbol{bar}_0|=\delta\sin\alpha$, значит, $\boldsymbol{bar}_0=\pm\delta\sin\alpha$.

Итак,

$$\lambda=\cos\alpha,\quad \mu=\pm\frac{\delta\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cos\alpha\pm\frac{\delta\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}[\boldsymbol{ar}_0]+\nu[[\boldsymbol{ar}_0]\boldsymbol{a}].$$

Так как $\boldsymbol{b}^2=1$, то

$$1=\cos^2\alpha+\frac{\delta^2\sin^2\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}+\nu^2[\boldsymbol{ar}_0]^2,$$

$$\nu=\pm\frac{\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}\sqrt{[\boldsymbol{ar}_0]^2-\delta^2}.$$

Если $[\boldsymbol{ar}_0]^2<\delta^2$, то задача не имеет решения. Если $[\boldsymbol{ar}_0]^2=\delta^2$, то $\nu=0$ и задача имеет два решения:

$$\boldsymbol{r}=\left(\boldsymbol{a}\cos\alpha+\frac{\delta\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}[\boldsymbol{ar}_0]\right)t,$$

$$\boldsymbol{r}=\left(\boldsymbol{a}\cos\alpha-\frac{\delta\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}[\boldsymbol{ar}_0]\right)t.$$

Если $[\boldsymbol{ar}_0]^2>\delta^2$, то задача имеет четыре решения:

$$\boldsymbol{r}=\left(\boldsymbol{a}\cos\alpha+\frac{\delta\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}[\boldsymbol{ar}_0]+\frac{\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}\sqrt{[\boldsymbol{ar}_0]^2-\delta^2}[[\boldsymbol{ar}_0]\boldsymbol{a}]\right)t,$$

$$\boldsymbol{r}=\left(\boldsymbol{a}\cos\alpha-\frac{\delta\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}[\boldsymbol{ar}_0]+\frac{\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}\sqrt{[\boldsymbol{ar}_0]^2-\delta^2}[[\boldsymbol{ar}_0]\boldsymbol{a}]\right)t,$$

$$\boldsymbol{r}=\left(\boldsymbol{a}\cos\alpha+\frac{\delta\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}[\boldsymbol{ar}_0]-\frac{\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}\sqrt{[\boldsymbol{ar}_0]^2-\delta^2}[[\boldsymbol{ar}_0]\boldsymbol{a}]\right)t,$$

$$\boldsymbol{r}=\left(\boldsymbol{a}\cos\alpha-\frac{\delta\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}[\boldsymbol{ar}_0]-\frac{\sin\alpha}{[\boldsymbol{ar}_0]^2}\sqrt{[\boldsymbol{ar}_0]^2-\delta^2}[[\boldsymbol{ar}_0]\boldsymbol{a}]\right)t$$

2. Задачи для самостоятельного решения

1. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0, z_0) лежит между двумя параллельными плоскостями:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad Ax+By+Cz+E=0 \quad (D \neq E)?$$

Отв. $(Ax_0+By_0+Cz_0+D)(Ax_0+By_0+Cz_0+E) < 0$.

2. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную плоскости $5x-2y+5z-10=0$ и образующую с плоскостью $x-4y-8z+12=0$ угол $45°$.

Отв. $x+20y+7z=0$ и $x-z=0$.

3. Найти угол между двумя плоскостями $3x+y-2z+4=0$, $x-7y+2z=0$, в котором лежит точка $(1, 1, 1)$.

Отв. $\arccos\left(-\dfrac{4}{3\sqrt{21}}\right)$.

4. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0, z_0) лежит в остром угле, образованном двумя пересекающимися и не взаимно перпендикулярными плоскостями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0?$$

Отв.

$$(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2) < 0.$$

5. Доказать, что плоскости $11x+10y+2z=0$, $3x+4y=0$, $x-y+z-1=0$ образуют призму и вычислить ее внутренний двугранный угол, образованный первыми двумя плоскостями.

Отв. $\arccos\dfrac{73}{75}$.

6. Составить уравнение биссекторной плоскости угла между двумя плоскостями $3x+5y-4z+1=0$, $x-z-5=0$, в котором лежит начало координат.

Отв. $8x+5y-9z-24=0$.

7. Составить уравнение биссекторной плоскости острого угла между плоскостями $3x-4y+6z-2=0$ и yOz.

Отв. $(3+\sqrt{61})\,x-4y+6z-2=0$.

8. Через прямую $2x=y=2z$ провести плоскость p так, чтобы данная прямая была биссектрисой угла, образуемого линиями пересечения плоскости p с плоскостями $y=0$ и $x+y=0$.

Отв. $y-2z=0$.

9. Найти точку, симметричную точке $(2, 7, 1)$ относительно плоскости $x-4y+z+7=0$.

Отв. $(4, -1, 3)$.

10. Найти точку, симметричную точке $(4, 3, 10)$ относительно прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}.$$

Отв. $(2, 9, 6)$.

11. Даны две вершины треугольника $A(-4, -1, 2)$ и $B(3, 5, -16)$. Найти третью вершину C, зная, что середина стороны AC лежит на оси Oy, а середина стороны BC — на плоскости xOz.

Отв. $C(4, -5, -2)$.

12. Вычислить объем $\overline{ABCD}$ ориентированного тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$, грани которого заданы уравнениями

$$\begin{aligned} &A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad (CBD),\\ &A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (ACD),\\ &A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \qquad (BAD),\\ &A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \qquad (ABC). \end{aligned}$$

Отв.

$$\overline{ABCD}=\frac{1}{6}\,\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{vmatrix}^3}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_4 & B_4 & C_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_3 & B_3 & C_3\\ A_4 & B_4 & C_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_4 & B_4 & C_4\end{vmatrix}}.$$

13. Даны четыре точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ и $D(x_4, y_4, z_4)$, не принадлежащие одной плоскости. Как определить положение точки $M(x, y, z)$ относительно тетраэдра $ABCD$?

Решение. Пусть в ориентированном пространстве задан ориентированный невырожденный тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$. Пусть M — произвольная точка пространства. Числа

$$\alpha=\frac{\overline{CBDM}}{\overline{ABCD}},\quad \beta=\frac{\overline{ACDM}}{\overline{ABCD}},\quad \gamma=\frac{\overline{BADM}}{\overline{ABCD}},\quad \delta=\frac{\overline{ABCM}}{\overline{ABCD}}$$

называются барицентрическими координатами точки M относительно тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$. Если точка M лежит внутри тетраэдра $ABCD$, то все тетраэдры

$$\overrightarrow{CBDM},\ \overrightarrow{ACDM},\ \overrightarrow{BADM},\ \overrightarrow{ABCM}\ \text{и}\ \overrightarrow{ABCD}$$

имеют одинаковую ориентацию и, значит, все числа

$$\overline{CBDM},\ \overline{ACDM},\ \overline{BADM},\ \overline{ABCM},\ \overline{ABCD}$$

одного знака, следовательно, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\delta>0$. При переходе точки M через одну из плоскостей граней тетраэдра $ABCD$ соответствующая барицентрическая координата меняет знак. Если точка M находится в плоскости одной из граней тетраэдра $ABCD$, то соответствующая барицентрическая координата равна нулю. Если точки A, B, C, D, M заданы своими координатами $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, $M(x, y, z)$ относительно аффинной системы координат в пространстве, то

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\\ x & y & z & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}},\qquad \beta=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\\ x & y & z & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}},$$

$$\gamma=\frac{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\\ x & y & z & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}}, \qquad \delta=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x & y & z & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}}.$$

Зная знаки α, β, γ, δ, можно определить положение точки $M(x, y, z)$ относительно тетраэдра $ABCD$. Пусть, например, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma < 0$, $\delta < 0$. Тогда точка M лежит в области, ограниченной продолжениями граней CAB и DAB за ребро AB и продолжениями граней DCA и DBC за вершины A и B. Если, например, $\alpha < 0$, $\beta = 0$, $\gamma > 0$, $\delta < 0$, то точка M лежит в плоскости ACD внутри угла, вертикального углу ACD.

Точка M может занимать 65 различных положений относительно плоскостей, в которых расположены грани тетраэдра $ABCD$, и прямых, по которым пересекаются эти плоскости. Каждому такому положению точки M будет соответствовать своя комбинация знаков для α, β, γ, δ.

14. Относительно общей декартовой системы координат даны вершины $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ и $D(x_4, y_4, z_4)$ невырожденного тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$. Пусть α, β, γ, δ — барицентрические координаты точки M относительно тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$. Доказать, что декартовы координаты точки M выражаются формулами:

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3+\delta x_4,\\ y &= \alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3+\delta y_4,\\ z &= \alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3+\delta z_4.\end{aligned} \tag{1}$$

Обратно, если $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$, то точка M, декартовы координаты которой выражаются формулами (1), имеет барицентрические координаты α, β, γ, δ.

15. В вершинах A, B, C, D невырожденного тетраэдра помещены массы, соответственно равные m_1, m_2, m_3, m_4. Найти барицентрические координаты центра тяжести этой системы материальных точек относительно тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$.

Отв. $\alpha=\dfrac{m_1}{m_1+m_2+m_3+m_4}$, $\beta=\dfrac{m_2}{m_1+m_2+m_3+m_4}$,

$\gamma=\dfrac{m_3}{m_1+m_2+m_3+m_4}$, $\delta=\dfrac{m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$.

Отсюда

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta=m_1:m_2:m_3:m_4.$$

16. Относительно невырожденного ориентированного тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$, лежащего в ориентированном пространстве, даны четыре точки $P(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$, $Q(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$, $R(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3)$ и $S(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4, \delta_4)$ своими барицентрическими координатами. Найти

$$\frac{\overline{PQRS}}{\overline{ABCD}}.$$

Найти, в частности, необходимое и достаточное условие принадлежности четырех точек P, Q, R, S одной плоскости.

Отв.

$$\frac{\overline{PQRS}}{\overline{ABCD}}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3\\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3\\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4\end{vmatrix}=0.$$

17. Относительно общей декартовой системы координат даны три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие в одной плоскости с началом координат. Дана еще точка $M(x, y, z)$, не совпадающая с началом координат. При каком необходимом и достаточном условии прямая OM пересекает плоскость треугольника ABC в его внутренней точке?

Отв. Числа $\begin{vmatrix}x & y & z\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}x & y & z\\ x_3 & y_3 & z_3\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}x & y & z\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$ одного знака.

18. Вычислить барицентрические координаты α, β, γ, δ точки $M(x, y, z)$ относительно тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$, грани которого заданы уравнениями

$$\begin{aligned}
&A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, && (BCD),\\
&A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, && (ACD),\\
&A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, && (ABD),\\
&A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0. && (ABC).
\end{aligned}$$

Отв.

$$\begin{aligned}
\alpha&=\frac{\delta_1}{\Delta}(A_1x+B_1y+C_1z+D_1),\\
\beta&=\frac{\delta_2}{\Delta}(A_2x+B_2y+C_2z+D_2),\\
\gamma&=\frac{\delta_3}{\Delta}(A_3x+B_3y+C_3z+D_3),\\
\delta&=\frac{\delta_4}{\Delta}(A_4x+B_4y+C_4z+D_4),
\end{aligned}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{vmatrix},$$

$$\delta_1=\begin{vmatrix}A_3 & B_3 & C_3\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_4 & B_4 & C_4\end{vmatrix},\quad \delta_2=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_3 & B_3 & C_3\\ A_4 & B_4 & C_4\end{vmatrix},\quad \delta_3=\begin{vmatrix}A_2 & B_2 & C_2\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_4 & B_4 & C_4\end{vmatrix},\quad \delta_4=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}.$$

ГЛАВА VII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 96. Перенос декартовой системы координат

Рассмотрим на плоскости две общие декартовы системы координат xOy и $x'O'y'$, имеющие соответственно одинаковые масштабные векторы (рис. 139). В таком случае говорят, что одна из этих систем получена переносом другой. Систему xOy будем называть старой, а систему $x'O'y'$ — новой.

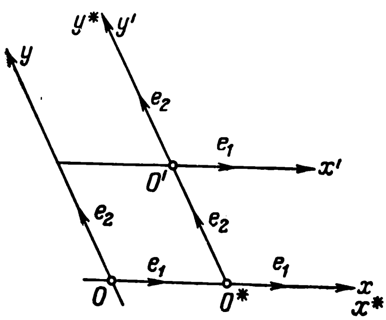


Рис. 139

Обозначим через x_0, y_0 координаты нового начала O' в старой системе.

Рассмотрим проекцию O^* точки O на ось Ox параллельно оси Oy и введем промежуточную систему координат $x^*O^*y^*$, полученную переносом системы xOy, при котором точка O переходит в точку O^*. Точка O^* в системе xOy имеет координаты x_0, 0, а точка O' в системе $x^*O^*y^*$ имеет координаты 0, y_0.

Пусть M — произвольная точка плоскости; x, y — координаты точки M в системе xOy; x^*, y^* — координаты точки M в системе $x^*O^*y^*$; x', y' — координаты точки M в системе $x'Oy'$.

На основании § 6 имеем

$$x = x^* + x_0, \quad y^* = y$$

и аналогично, рассматривая переход от системы $x^*O^*y^*$ к системе $x'O'y'$, будем иметь

$$x^* = x', \quad y^* = y' + y_0.$$

Таким образом, окончательно

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \tag{1}$$

т. е. *старые координаты x, y точки M соответственно равны суммам новых координат x', y' этой точки M с соответствующими координатами x_0, y_0 нового начала координат в старой системе.*

Для двух общих декартовых систем координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, полученных одна из другой переносом, т. е. имеющих соответственно одинаковые масштабные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (рис. 140), имеют место формулы

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0, \tag{2}$$

где x, y, z — координаты любой точки M в системе $Oxyz$; x', y', z' — координаты точки M в системе $O'x'y'z'$; x_0, y_0, z_0 — координаты точки O' в системе $Oxyz$.

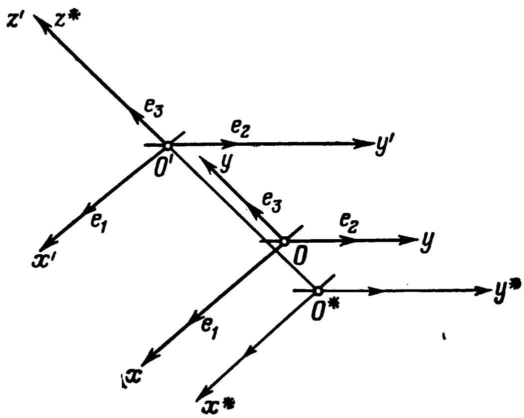


Рис.

В самом деле, пусть $O^*(x_0, y_0, 0)$ — проекция точки O' на плоскость xOy параллельно оси Oz. Рассмотрим систему координат $O^*x^*y^*z^*$, полученную переносом системы $Oxyz$. Тогда

$$x = x^* + x_0, \quad y = y^* + y_0, \quad z = z^*.$$

В системе $O^*x^*y^*z^*$ точка O' имеет координаты 0, 0, z_0. Следовательно, $x^* = x'$, $y^* = y'$, $z^* = z' + z_0$. Отсюда и из предыдущих соотношений получаем формулы (2). Формулы (1) и (2) называют формулами переноса системы координат.

Так как координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, равны $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, то из формул (1) и (2) следует, что при переносе общей декартовой системы координат, координаты вектора не меняются.

§ 97. Преобразование общей декартовой системы координат на плоскости

Рассмотрим на плоскости две общие декартовы системы координат xOy и $x'Oy'$, имеющие общее начало координат O. Пусть в системе xOy масштабные векторы осей Ox и Oy будут соответственно $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, а в системе $x'Oy'$ масштабные векторы осей Ox' и Oy' будут $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ (рис. 141).

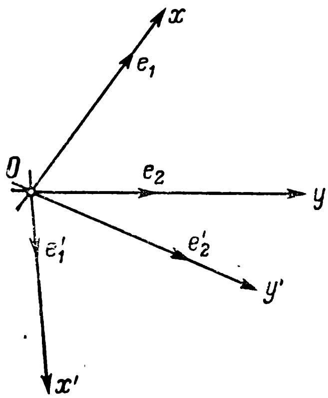


Рис. 141

Рассмотрим произвольную точку M плоскости; пусть x и y — ее координаты в системе xOy, а x' и y' — в системе $x'Oy'$. Обозначим, наконец, через $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор точки M, т. е. положим $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$.

Разлагая радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M по векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, а также по векторам $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$, будем иметь

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=x'\boldsymbol{e}_1'+y'\boldsymbol{e}_2'. \tag{1}$$

Разложим векторы $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ по векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1' &= a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2,\\ \boldsymbol{e}_2' &= a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2.\end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя в соотношение (1) вместо $\boldsymbol{e}_1'$ и $\boldsymbol{e}_2'$ их выражения из формул (2), получим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}=x'\boldsymbol{e}_1'+y'\boldsymbol{e}_2' &= x'(a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2)+y'(a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2)=\\ &=(a_{11}x'+a_{12}y')\,\boldsymbol{e}_1+(a_{21}x'+a_{22}y')\,\boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2.$$

Отсюда и из предыдущего разложения $\boldsymbol{r}$ по векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ в силу единственности разложения вектора по базису находим

$$\begin{aligned}x &= a_{11}x'+a_{12}y',\\ y &= a_{21}x'+a_{22}y'.\end{aligned} \tag{3}$$

Матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от системы xOy к системе $x'Oy'$. Числа, расположенные в ее первом *столбце*, являются координатами вектора $\boldsymbol{e}_1'$ оси Ox' в системе xOy (или в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$), а числа, расположенные во втором столбце, — координатами вектора $\overset{\prime}{e}_2$ в системе xOy (или в базисе e_1, e_2).

Так как векторы $\overset{\prime}{e}_1$ и $\overset{\prime}{e}_2$ неколлинеарны, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (4)$$

т. е. матрица A — невырожденная.

Обратно, если (4) — любая невырожденная матрица и на плоскости введена общая декартова система координат xOy, то, рассматривая векторы $\overset{\prime}{e}_1$ и $\overset{\prime}{e}_2$, определяемые формулами (2), можно утверждать, что эти векторы неколлинеарны, и интерпретировать соотношения (3) как формулы, связывающие координаты x, y произвольной точки M плоскости в системе xOy с координатами x', y' той же точки M в системе $x'Oy'$ с тем же началом координат и масштабными векторами $\overset{\prime}{e}_1$ и $\overset{\prime}{e}_2$ осей Ox' и Oy'.

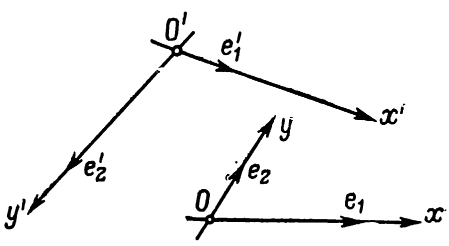


Рис. 142

Рассмотрим теперь на плоскости две общие декартовы системы координат xOy и $x'O'y'$ (рис. 142); обозначим масштабные векторы осей Ox и Oy в системе xOy соответственно через e_1 и e_2, а в системе $x'O'y'$ масштабные векторы осей $O'x'$ и $O'y'$ обозначим соответственно через $\overset{\prime}{e}_1$ и $\overset{\prime}{e}_2$. Введем промежуточную систему координат $x''O'y''$ с началом координат в точке O', полученную переносом системы xOy. Обозначим координаты произвольной точки M плоскости в системах xOy, $x''O'y''$ и $x'O'y'$ соответственно через

$$x,\ y; \qquad x'',\ y''; \qquad x',\ y'.$$

Тогда

$$x'' = a_{11}x' + a_{12}y', \quad y'' = a_{21}x' + a_{22}y', \qquad (5)$$

где a_{11} и a_{21} — координаты вектора $\overset{\prime}{e}_1$ в базисе e_1, e_2, а a_{12} и a_{22} — координаты вектора $\overset{\prime}{e}_2$ в базисе e_1, e_2.

Далее, на основании § 96

$$x = x'' + a_1, \qquad y = y'' + a_2, \qquad (6)$$

где a_1 и a_2 — координаты начала координат O' системы $x'O'y'$ относительно системы xOy. Из формул (5) и (6) находим

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_1, \quad y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_2. \qquad (7)$$

Так как координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала, то старые координаты x, y вектора через его новые координаты x', y' при общем преобразовании общей декартовой системы координат имеют вид

$$x = a_{11}x' + a_{12}y', \quad y = a_{21}x' + a_{22}y'. \tag{8}$$

§ 98. Преобразование общей декартовой системы координат в пространстве

Аналогично доказывается, что если в пространстве введены две общие декартовы системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$ с общим началом O и если масштабные векторы осей Ox, Oy, Oz соответственно $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, а масштабные векторы осей Ox', Oy', Oz' соответственно $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$, то, обозначая через x, y, z координаты произвольной точки M пространства в системе $Oxyz$, а через

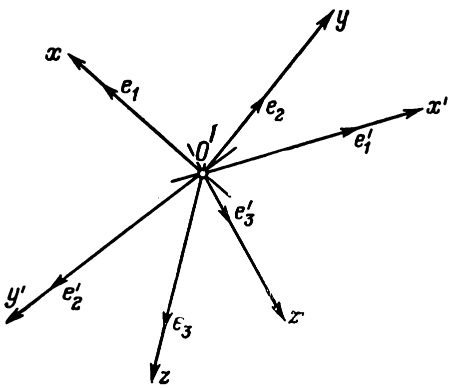


Рис. 143

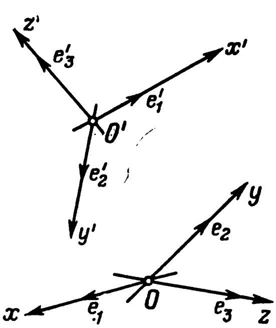


Рис. 144

x, y, z, а через x', y', z' — координаты той же точки M в системе $O'x'y'z'$, будем иметь (рис. 143)

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', \end{aligned} \tag{1}$$

причем

$$\boldsymbol{e}'_1 = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}, \quad \boldsymbol{e}'_2 = \{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}, \quad \boldsymbol{e}'_3 = \{a_{13}, a_{23}, a_{33}\} \tag{2}$$

(координаты векторов $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ даны в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) и, далее, матрица перехода

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

невырожденная, т. е.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Обратно, если A — любая невырожденная матрица и в пространстве введена общая декартова система координат, то соотношения (1) связывают координаты x, y, z и x', y', z' одной и той же точки M пространства в системе $Oxyz$ и в системе $Ox'y'z'$ с началом координат в точке O и масштабными векторами осей Ox', Oy', Oz', заданными равенствами (2) относительно системы $Oxyz$.

Если в пространстве введены две общие декартовы системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$ (рис. 144), то координаты x, y, z любой точки M пространства в системе $Oxyz$ через координаты x', y', z' той же точки M в системе $O'x'y'z'$ выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} x&=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z'+a_1, \\ y&=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'+a_2, \\ z&=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'+a_3, \end{aligned} \qquad (4)$$

где a_{ik} имеют прежний геометрический смысл, а a_1, a_2, a_3 — координаты начала координат O' системы $O'x'y'z'$ в системе $Oxyz$.

При этом общем преобразовании общей декартовой системы координат старые координаты x, y, z вектора $\boldsymbol{a}$ через его новые координаты x', y', z' выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} x&=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z', \\ y&=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z', \\ z&=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'. \end{aligned}$$

§ 99. Преобразование декартовой прямоугольной системы координат на плоскости

1. Переход от одной декартовой прямоугольной системы координат на плоскости к другой декартовой прямоугольной системе с той же ориентацией и с тем же началом координат

Предположим, что на плоскости введены две декартовы прямоугольные системы координат xOy и $x'Oy'$ с общим началом координат O, имеющие одинаковую ориентацию (рис. 145). Обозначим единичные векторы осей Ox и Oy соответственно через $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, а единичные векторы осей Ox' и Oy' через $\boldsymbol{i}'$ и $\boldsymbol{j}'$. Наконец, пусть α — угол от оси Ox до оси Ox'. Пусть x и y — координаты произвольной точки M в системе xOy, а x' и y' — координаты той же точки M в системе $x'Oy'$.

Так как угол от оси Ox до вектора $\boldsymbol{i}'$ равен α, то координаты вектора $\boldsymbol{i}'$

$$\boldsymbol{i}' = \{\cos\alpha, \ \sin\alpha\}.$$

Угол от оси Ox до вектора $\boldsymbol{j}'$ равен $\alpha + \frac{\pi}{2}$; поэтому координаты вектора $\boldsymbol{j}'$:

$$\boldsymbol{j}' = \left\{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha, \quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha\right\}.$$

Формулы (3) § 97 принимают вид

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Матрица перехода от одной декартовой прямоугольной системы координат xOy к другой прямоугольной системе $x'Oy'$ с той же ориентацией имеет вид

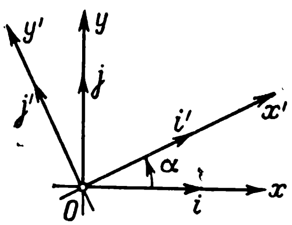


Рис. 145

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{3}$$

называется ортогональной, если сумма квадратов элементов, расположенных в каждом столбце, равна 1, а сумма произведений соответствующих элементов разных столбцов равна нулю, т. е. если

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, матрица (2) перехода от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе с той же ориентацией ортогональная. Отметим еще, что определитель этой матрицы равен $+1$:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1. \tag{5}$$

Обратно, если задана ортогональная матрица (3) с определителем, равным $+1$, и на плоскости введена декартова прямоугольная система координат xOy, то в силу соотношений (4) векторы $\boldsymbol{i}' = \{a_{11}, a_{21}\}$ и $\boldsymbol{j}' = \{a_{12}, a_{22}\}$ единичные и взаимно перпендикулярные, следовательно, координаты вектора $\boldsymbol{i}'$ в системе xOy равны $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, где α — угол от вектора $\boldsymbol{i}$ до вектора $\boldsymbol{i}'$, а так как вектор

$\boldsymbol{j}'$ единичный и получен из вектора $\boldsymbol{i}'$ поворотом на $+\frac{\pi}{2}$, то либо $\boldsymbol{j}' = \{-\sin\alpha, \ \cos\alpha\}$, либо $\boldsymbol{j}' = \{\sin\alpha, \ -\cos\alpha\}$.

Вторая возможность исключается, так как если бы мы имели $\boldsymbol{j}' = \{\sin\alpha, \ \cos\alpha\}$, то $\operatorname{Det} A = -1$, а нам дано, что $\operatorname{Det} A = 1$.

Значит, $a_{12} = -\sin\alpha$, $a_{22} = \cos\alpha$ и матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

т. е. является матрицей перехода от одной прямоугольной системы координат xOy к другой прямоугольной системе $x'Oy'$, имеющей ту же ориентацию, причем $(Ox, Ox') = \alpha$.

2. Переход от одной декартовой прямоугольной системы координат на плоскости к другой прямоугольной системе с противоположной ориентацией и с тем же началом координат

Пусть на плоскости введены две декартовы прямоугольные системы координат xOy и $x'Oy'$ с общим началом координат O, но имеющие противоположную ориентацию. Обозначим угол от оси Ox до оси Ox' через α (ориентацию плоскости зададим системой xOy).

Так как угол от оси Ox до вектора $\boldsymbol{i}'$ равен α, то координаты вектора $\boldsymbol{i}'$

$$\cos\alpha, \quad \sin\alpha.$$

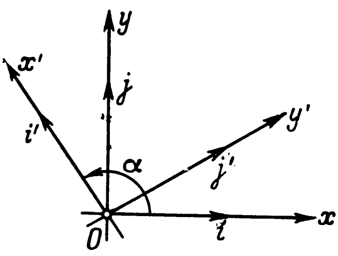


Рис. 146

Теперь угол от вектора $\boldsymbol{i}'$ до вектора $\boldsymbol{j}'$ равен $-\frac{\pi}{2}$ (рис. 146), поэтому угол от оси Ox до вектора $\boldsymbol{j}'$ равен (по теореме Шаля для углов) $\alpha + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \alpha - \frac{\pi}{2}$ и потому координаты вектора $\boldsymbol{j}'$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha.$$

Формулы (3) § 97 принимают вид

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha, \qquad y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha. \tag{6}$$

Матрица перехода

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

ортогональная, но ее определитель равен -1:

$$\operatorname{Det} A = -1. \tag{7}$$

Обратно, любая ортогональная матрица с определителем, равным -1, задает преобразование одной прямоугольной системы координат на плоскости в другую прямоугольную с тем же началом, но противоположной ориентации. Итак, если две декартовы прямоугольные системы координат xOy и $x'Oy'$ имеют общее начало, то

$$x = c_{11}x' + c_{12}y', \quad y = c_{21}x' + c_{22}y',$$

где x, y — координаты любой точки в системе xOy; x' и y' — координаты той же точки в системе $x'Oy'$, а

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

ортогональная матрица.

Обратно, если

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

произвольная ортогональная матрица, то соотношениями

$$x = c_{11}x' + c_{12}y', \quad y = c_{21}x' + c_{22}y'$$

выражается преобразование декартовой прямоугольной системы координат в декартову прямоугольную систему с тем же началом координат; c_{11}, c_{21} — координаты в системе xOy единичного вектора i', дающего положительное направление оси Ox'; c_{12}, c_{22} — координаты в системе xOy единичного вектора j', дающего положительное направление оси Oy'.

В случае

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 1$$

системы координат xOy и $x'Oy'$ имеют одинаковую ориентацию, а в случае $\Delta = -1$ — противоположную.

3. Общее преобразование одной декартовой прямоугольной системы координат на плоскости в другую прямоугольную систему

На основании пунктов 1 и 2 этого параграфа, а также на основании § 96 заключаем, что если на плоскости введены прямоугольные системы координат xOy и $x'O'y'$, то координаты x и y произвольной точки M плоскости в системе xOy с координатами x' и y' той же точки M в системе $x'O'y'$ связаны соотношениями

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, + x_0, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0, \tag{8}$$

если системы xOy и $x'O'y'$ имеют одинаковую ориентацию, и соотношениями

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + x_0, \quad y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + y_0, \tag{9}$$

если системы xOy и $x'O'y'$ имеют противоположную ориентацию.

В формулах (8) и (9) x_0 и y_0—координаты точки O' в системе xOy, а $\alpha=(Ox, O'x')$, причем ориентация плоскости определяется системой xOy.

Общее преобразование декартовой прямоугольной системы координат в декартову прямоугольную можно записать и в виде

$$x=c_{11}x'+c_{12}y'+c_1, \quad y=c_{21}x'+c_{22}y'+c_2, \tag{10}$$

где

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

ортогональная матрица, а c_1, c_2—координаты начала O' системы координат $x'O'y'$ в системе xOy.

Заметим, что старые и новые координаты x, y и x', y' вектора при общем преобразовании декартовой прямоугольной системы координат связаны соотношениями

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

в случае, если системы xOy и $x'O'y'$ имеют одинаковую ориентацию, и соотношениями

$$x=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha, \quad y=x'\sin\alpha-y'\cos\alpha$$

в случае, если эти системы имеют противоположную ориентацию, или же в виде

$$x=c_{11}x'+c_{12}y', \quad y=c_{21}x'+c_{22}y', \tag{11}$$

где

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

ортогональная матрица. Преобразование (10) и (11) будем называть ортогональным.

§ 100. Переход от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе в пространстве

Введем в пространстве две прямоугольные системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ с общим началом координат. Обозначим через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ единичные векторы осей Ox, Oy, Oz, а через $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$—единичные векторы осей Ox', Oy', Oz' (рис. 147).

Координаты единичного вектора в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, т. е. в базисе, векторы которого единичные и попарно ортогональные, являются косинусами углов между этим единичным вектором и векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Обозначая углы между вектором $\boldsymbol{i}'$ и векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ через α_1, β_1, γ_1, углы между вектором

$\boldsymbol{j}'$ и векторами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ через α_2, β_2, γ_2 и углы между вектором $\boldsymbol{k}'$ и векторами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ через α_3, β_3, γ_3, будем иметь (§ 98)

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3, \end{aligned} \qquad (1)$$

где x, y, z — координаты произвольной точки M в системе $Oxyz$, а x', y', z' — координаты той же точки M в системе $Ox'y'z'$.

Матрица перехода имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Она ортогональная, т. е. сумма квадратов элементов, расположенных в каждом столбце, равна 1, так как векторы $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ единичные, а сумма произведений соответствующих элементов двух любых различных столбцов равна нулю (так как векторы $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ попарно ортогональные).

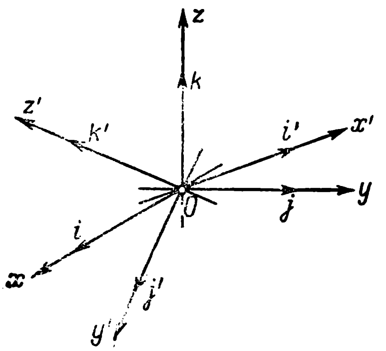


Рис. 14.7

Так как определитель $\operatorname{Det} A$ равен

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}',$$

а векторы $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ — единичные и попарно ортогональные, то этот определитель равен ± 1; он равен $+1$, если упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ имеет ту же ориентацию, что и упорядоченная тройка $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, и -1, если эти упорядоченные тройки векторов имеют противоположную ориентацию.

Можно сказать и так: детерминант матрицы A равен ± 1 в зависимости от того, имеют ли системы $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ одинаковую или противоположную ориентацию.

Отметим частный случай преобразования декартовой прямоугольной системы координат в декартову прямоугольную той же ориентации при условии, что оси Oz и Oz' совпадают. В этом случае формулы (1) принимают вид

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \quad z = z', \qquad (2)$$

где φ — угол от оси Ox до оси Ox' в плоскости xOy, причем ориентацию этой плоскости задаем системой координат xOy. В этом частном случае будем говорить, что система $Ox'y'z'$ получается из системы $Oxyz$ поворотом вокруг оси Oz на угол φ.

Обратно, пусть задана ортогональная матрица третьего порядка:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

т. е.

$$\begin{gathered} a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=1, \\ a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=1, \\ a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=1, \\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0, \\ a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}=0, \\ a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31}=0. \end{gathered} \tag{4}$$

Введем в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Векторы

$$\boldsymbol{i}'=\{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}, \ \boldsymbol{j}'=\{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}, \ \boldsymbol{k}'=\{a_{13}, a_{23}, a_{33}\} \tag{5}$$

в силу соотношений (4) единичные и попарно ортогональные. Рассмотрим систему $Ox'y'z'$ с единичными векторами $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$.

Тогда формулы

$$\begin{aligned} x&=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z', \\ y&=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z', \\ z&=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z' \end{aligned} \tag{6}$$

связывают координаты x, y, z и x', y', z' одной и той же точки M в системах $Oxyz$ и $Ox'y'z'$.

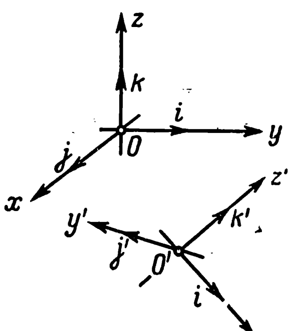


Рис. 148

Если в пространстве введены две декартовы прямоугольные системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, то координаты x, y, z любой точки M пространства в системе $Oxyz$ через координаты x', y', z' той же точки в системе $O'x'y'z'$ выражаются соотношениями (рис. 148):

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3+x_0, \\ y&=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3+y_0, \\ z&=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3+z_0, \end{aligned}$$

где α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 — углы между осями Ox, Oy, Oz, $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$:

	Ox	Oy	Oz
$O'x'$	α_1	β_1	γ_1
$O'y'$	α_2	β_2	γ_2
$O'z'$	α_3	β_3	γ_3

а x_0, y_0, z_0 — координаты точки O' в системе $Oxyz$.

Старые и новые координаты x, y, z и x', y', z' вектора $\boldsymbol{a}$ при общем преобразовании декартовой прямоугольной системы координат в декартову прямоугольную имеют вид

$$x = x' \cos\alpha_1 + y' \cos\alpha_2 + z' \cos\alpha_3,$$
$$y = x' \cos\beta_1 + y' \cos\beta_2 + z' \cos\beta_3,$$
$$z = x' \cos\gamma_1 + y' \cos\gamma_2 + z' \cos\gamma_3.$$

Матрицей A', транспонированной к матрице A, называется матрица, полученная из матрицы A заменой строк матрицы A столбцами.

Нетрудно видеть, что матрица A будет ортогональной тогда и только тогда, когда

$$AA' = E,$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

единичная матрица.

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей, то

$$\mathrm{Det}\,(AA') = \mathrm{Det}\,A \cdot \mathrm{Det}\,A' = (\mathrm{Det}\,A)^2 = \mathrm{Det}\,E = 1$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Det}\,A = \pm 1,$$

т. е. ортогональная матрица A — невырожденная и ее детерминант равен или $+1$, или -1.

Из соотношения $AA' = E$ следует, что $A' = A^{-1}$ (и обратно), т. е. ортогональная матрица может быть определена как такая, для которой сопряженная равна обратной.

Так как определитель ортогональной матрицы A равен ± 1, то для ортогональной матрицы алгебраическое дополнение каждого ее элемента или равно элементу, расположенному симметрично рассматриваемому относительно главной диагонали (в случае $\operatorname{Det} A = 1$), или отличается от него знаком (в случае $\operatorname{Det} A = -1$). Например, если матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ортогональная и $\operatorname{Det} A = 1$, то алгебраическое дополнение элемента a_{21} будет

$$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}.$$

Алгебраическое дополнение элемента a_{31}:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{13} \text{ и т. д.}$$

Это свойство ортогональной матрицы третьего порядка можно установить, введя в пространстве две декартовы прямоугольные системы координат: одну $Oxyz$ с единичными векторами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, другую $Ox'y'z'$ с единичными векторами

$$\boldsymbol{i}' = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}, \quad \boldsymbol{j}' = \{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}, \quad \boldsymbol{k}' = \{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}.$$

Рассмотрим векторные произведения $[\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}']$, $[\boldsymbol{k}'\boldsymbol{i}']$ и $[\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}']$. Они соответственно равны $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$, если базисы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ имеют одинаковую ориентацию, и $-\boldsymbol{i}', -\boldsymbol{j}', -\boldsymbol{k}'$, если противоположную.

§ 101. Углы Эйлера

Преобразование декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ в декартову прямоугольную систему координат $Ox'y'z'$ с тем же началом O определяется формулами (1) предыдущего параграфа. Между девятью коэффициентами ($\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$, $i = 1, 2, 3$) имеется шесть соотношений, а именно:

$$\cos\alpha_i \cos\alpha_k + \cos\beta_i \cos\beta_k + \cos\gamma_i \cos\gamma_k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Значит, преобразование одной прямоугольной системы координат в другую прямоугольную с тем же началом зависит от трех параметров.

Эйлер показал, что если $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ — две прямоугольные системы координат, имеющие одинаковую ориентацию, то преобразование одной системы координат в другую можно заменить тремя преобразованиями, каждое из которых является поворотом вокруг осей координат одной из данных систем и вспомогательных прямоугольных систем координат.

Так как плоскости xOy и $x'Oy'$ имеют общую точку, то они имеют и общую прямую. Ориентируем эту прямую; получим ось $O\xi$ (рис. 149).

Рассмотрим еще ось $O\eta$, перпендикулярную осям Oz и $O\xi$ и направленную так, что системы $Oxyz$ и $O\xi\eta z$ имеют одинаковую ориентацию; эти системы имеют общую ось Oz, поэтому вторая система получается из первой поворотом вокруг оси Oz на некоторый угол φ, значит (§ 100, формулы (2))

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \\ y &= \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

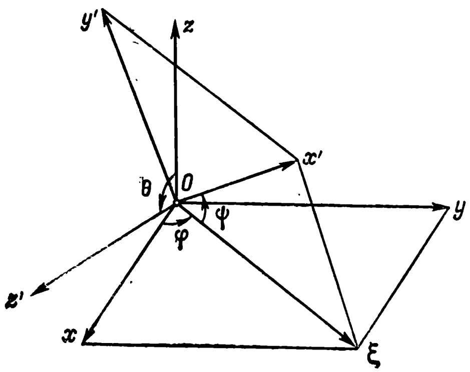


Рис. 149

Перейдем теперь от системы $O\xi\eta z$ к прямоугольной системе $O\xi\eta'z'$ (ось Oz' перпендикулярна оси $O\xi$, так как ось $O\xi$ лежит в плоскости $x'Oy'$; ось $O\eta'$ перпендикулярна осям $O\xi$ и Oz' и направлена так, чтобы обе системы $O\xi\eta z$ и $O\xi\eta'z'$ имели одинаковую ориентацию).

Система $O\xi\eta'z'$ из системы $O\xi\eta z$ получается поворотом вокруг оси $O\xi$ на некоторый угол θ; значит,

$$\begin{aligned} \eta &= \eta'\cos\theta - z'\sin\theta, \\ z &= \eta'\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Система $O\xi\eta'z'$ имеет ту же ориентацию, что и система $Oxyz$, а значит ту же ориентацию, что и система $Ox'y'z'$. Поэтому система $Ox'y'z'$ получается из системы $O\xi\eta'z'$ поворотом вокруг оси Oz' на некоторый угол ψ, следовательно,

$$\begin{aligned} \xi &= x'\cos\psi - y'\sin\psi, \\ \eta' &= x'\sin\psi + y'\cos\psi. \end{aligned} \tag{3}$$

В формулах (1)—(3) x, y, z — координаты произвольной точки M пространства в системе $Oxyz$; ξ, η, z — координаты той же точки в системе $O\xi\eta z$; ξ, η', z' — координаты той же точки в системе $O\xi\eta'z'$ и x', y', z' — координаты той же точки в системе $Ox'y'z'$.

Исключая из написанных соотношений ξ, η, η', получим

$$x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) - y'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + \\ + z'\sin\varphi\sin\theta,$$

$$y = x'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) - y'(\sin\varphi\sin\psi - \\ - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z'\cos\varphi\sin\theta,$$

$$z = x'\sin\psi\sin\theta + y'\cos\psi\sin\theta + z'\cos\theta.$$

Углы φ, ψ, θ называются углами Эйлера. Матрица этого преобразования ортогональная, так как она является матрицей перехода от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе (той же ориентации); это следует и из того, что она является произведением матриц

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

каждая из которых — ортогональная.

Если какая-нибудь из осей Ox, Oy, Oz совпадает с соответствующей осью Ox', Oy', Oz', то формулы упрощаются (одну систему координат можно перевести в другую одним поворотом).

Замечание. Углы φ, θ и ψ могут принимать значения от 0 до 2π (как углы от одного луча до другого на соответствующей координатной плоскости). Однако если положительное направление оси $O\xi$ выбрать так, чтобы тройка лучей Oz, Oz', $O\xi$ имела такую же ориентацию, как и тройка Ox, Oy, Oz, то угол θ будет принимать значения от 0 до π.

ГЛАВА VIII

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ КАНОНИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

§ 102. Эллипс и его каноническое уравнение

Определение. *Эллипсом называется геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть данное число $2a$, большее, чем расстояние $2c$ между фокусами.*

Пусть M — произвольная точка эллипса, а F_1 и F_2 — его фокусы. Отрезки MF_1 и MF_2 так же, как и длины этих отрезков, называются фокальными радиусами точки M эллипса. В силу данного определения эллипса (рис. 150)

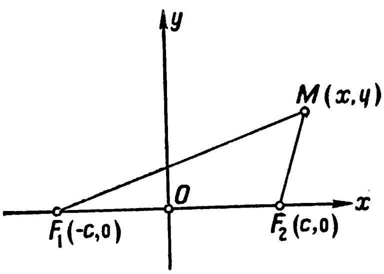


Рис. 150

$$MF_1 + MF_2 = 2a. \qquad (1)$$

Из определения эллипса вытекает следующий способ его вычерчивания. Воткнем в чертежную доску две булавки и накинем на них замкнутую нить, длина которой равна $2a+2c$. Натянем нить карандашом (рис. 151) и будем передвигать его, держа нить все время натянутой. Карандаш опишет эллипс, так как сумма MF_1+MF_2 расстояний от острия M карандаша до точек F_1 и F_2, в которые воткнуты булавки, во время движения острия карандаша по бумаге не будет изменяться, оставаясь равной $2a$.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат, принимая середину отрезка F_1F_2 за начало координат, а за ось Ox — прямую F_1F_2, ориентированную от точки F_1 к точке F_2. В выбранной системе координат фокус F_1 будет иметь координаты $-c$, 0, а фокус F_2 — координаты c, 0. Обозначая координаты точки M эллипса через x и y, будем иметь

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2},$$
$$MF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

и соотношение (1) принимает вид

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (2)$$

Возводя обе части уравнения (2) в квадрат, получим

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+x^2-2cx+c^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

или

$$a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=a^2-cx.$$

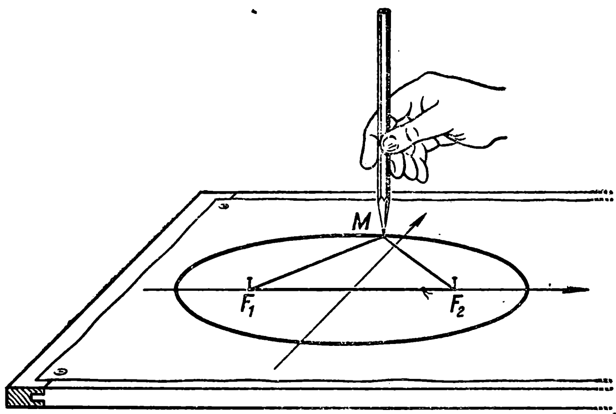


Рис. 151

Возводя обе части этого уравнения в квадрат, получим

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

или

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Так как по условию $a>c$, то $a^2-c^2>0$. Обозначая a^2-c^2 через b^2

$$a^2-c^2=b^2, \qquad (3)$$

получим

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (4)$$

Мы доказали, что координаты любой точки $M(x, y)$ эллипса удовлетворяют уравнению (4). Однако уравнение (4) еще нельзя назвать уравнением эллипса, так как не доказано обратное предложение, а именно: если числа x и y удовлетворяют уравнению (4), то точка M с координатами x и y удовлетворяет соотношению

$$MF_1+MF_2=2a,$$

т. е. лежит на эллипсе.

Докажем это. Пусть координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (4). Тогда

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=$$
$$=\sqrt{x^2+2xc+c^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+2cx+b^2+c^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx+a^2}=\sqrt{\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2}=\left|a+\frac{cx}{a}\right|$$

и аналогично

$$MF_2=\left|a-\frac{cx}{a}\right|.$$

Так как

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

то $|x|\leqslant a$, а так как $0<c<a$, то $a+\frac{cx}{a}>0$ и $a-\frac{cx}{a}>0$, следовательно,

$$MF_1=a+\frac{cx}{a}, \qquad MF_2=a-\frac{cx}{a}, \tag{5}$$

откуда

$$MF_1+MF_2=2a.$$

Таким образом, (4) есть уравнение эллипса, так как доказано, что координаты любой точки M эллипса, т. е. любой точки, для которой

$$MF_1+MF_2=2a,$$

удовлетворяют уравнению (4), и, обратно, если два числа x и y удовлетворяют уравнению (4), то точка M с этими координатами x и y удовлетворяет соотношению

$$MF_1+MF_2=2a,$$

т. е. лежит на эллипсе.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

называется каноническим уравнением эллипса.

§ 103. Исследование формы эллипса

Так как в каноническое уравнение эллипса координаты x и y входят в четной степени (именно во второй), то если на эллипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

лежит точка $M(x, y)$, т. е. координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1), то на том же эллипсе лежат точки $M'(x, -y)$ и $M''(-x, y)$, симметричные с точкой M относительно осей Ox и Oy, и точка $M'''(-x, -y)$, симметричная с точкой M относительно начала координат (рис. 152). Поэтому оси координат Ox и Oy для эллипса, заданного каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

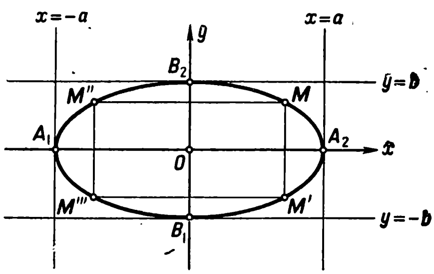


Рис. 152

являются осями симметрии, а начало координат — центром симметрии. Ниже мы покажем, что всякий эллипс имеет единственный центр симметрии, а если он не является окружностью, то — только две оси симметрии.

Из уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

следует, что для координат любой его точки имеют место соотношения

$$|x|\leqslant a, \qquad |y|\leqslant b.$$

Геометрически это значит, что эллипс расположен внутри прямоугольника, сторонами которого являются прямые

$$x=a, \quad x=-a, \quad y=b, \quad y=-b.$$

Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются вершинами эллипса. Таким образом, эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

имеет четыре вершины:

$$A_1(-a, 0), \qquad A_2(a, 0), \qquad B_1(0, -b), \qquad B_2(0, b).$$

Полуосью эллипса называется отрезок (а также длина этого отрезка), одним концом которого является центр симметрии эллипса, а другим — одна из его вершин; a называется бо́льшей полуосью эллипса, а b — меньшей полуосью.

Отрезок A_1A_2, граничными точками которого являются вершины A_1 и A_2 эллипса, расположенные на оси симметрии, содержащей фокусы (а также длина $2a$ этого отрезка), называется большей осью эллипса, а отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ — меньшей осью эллипса.

Разрешая уравнение эллипса относительно ординаты y, беря для y лишь неотрицательное значение

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{2}$$

и считая, что $0 \leqslant x \leqslant a$, получим точки эллипса (1), лежащие в первой четверти. Из уравнения (2) следует, что функция y на сегменте $0 \leqslant x \leqslant a$ — убывающая функция, причем $x = 0$ при $y = b$ и $x = a$ при $y = 0$ (рис. 153).

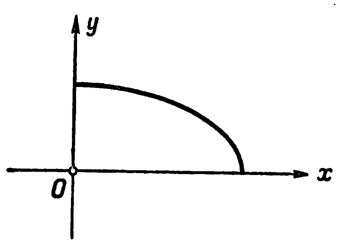


Рис. 153

График эллипса в целом мы получим, добавив к дуге, заданной уравнением (2), дуги, ей симметричные относительно осей координат и начала координат. В результате получим замкнутую линию (см. рис. 152).

Замкнутая линия является выпуклой, если любая прямая пересекает ее не более чем в двух точках. Эллипс есть выпуклая замкнутая линия, так как решая уравнение (1) эллипса совместно с уравнением прямой $y = kx + m$ или $x = p$, получим уравнение второй степени относительно x или y, значит, любая прямая пересекает эллипс не более чем в двух точках.

Итак, эллипс — замкнутая выпуклая линия, имеющая центр симметрии и две (взаимно перпендикулярные) оси симметрии.

Условимся уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называть каноническим уравнением эллипса и в том случае, когда $a = b$ и когда $a < b$.

В случае $a = b$ уравнение принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

т. е. является уравнением окружности радиуса a с центром в начале координат. Таким образом, мы рассматриваем окружность как частный случай эллипса. Этот частный случай соответствует совпадению фокусов F_1 и F_2 с центром окружности. В случае $a < b$ большей полуосью будет b, меньшей a, фокусы расположены на оси Oy на расстоянии $\sqrt{b^2 - a^2}$ от центра эллипса.

В дальнейшем, если не будет специальной оговорки, мы будем предполагать, что в каноническом уравнении (1) эллипса $a > b$.

Отношение половины расстояния между фокусами эллипса (фокальное расстояние) к большей полуоси эллипса называется эксцентриситетом эллипса и обозначается буквой e:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Так как $0 \leqslant c < a$, то $0 \leqslant e < 1$, т. е. эксцентриситет эллипса есть неотрицательное число, меньшее 1.

Отметим, что

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

Следовательно, эксцентриситет определяется отношением полуосей эллипса, и, обратно, отношение полуосей эллипса определяет его эксцентриситет. Если эксцентриситет равен нулю $e = 0$, то $a = b$ и эллипс является окружностью. Чем ближе эксцентриситет e к 1, тем меньше $\sqrt{1-e^2}$ и, значит, тем меньше отношение меньшей полуоси к большей. Таким образом, эксцентриситет характеризует степень «вытянутости» эллипса.

Формулы (5) § 102 теперь можно записать:

$$r_1 = a + ex, \qquad r_2 = a - ex, \tag{3}$$

где

$$r_1 = MF_1, \qquad r_2 = MF_2.$$

§ 104. Директрисы эллипса

Две прямые, перпендикулярные оси эллипса, на которой расположены его фокусы, и отстоящие от центра эллипса на расстоянии $\frac{a}{e}$, где a — большая полуось эллипса, а e — его эксцентриситет, называются директрисами эллипса.

Окружность (для которой $e = 0$) не имеет директрис; таким образом, понятие директрис дается собственно для эллипса, т. е. для эллипса с неравными полуосями. Если эллипс задан каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

причем $a > b$ (фокусы расположены на оси Ox), то уравнения директрис имеют вид

$$x = \frac{a}{e} \quad \text{и} \quad x = -\frac{a}{e}.$$

Так как собственно для эллипса $0 < e < 1$, то $\frac{a}{e} > a$ и, значит, директрисы эллипса отстоят от его центра дальше, чем вершины (рис. 154). Фокус и директриса эллипса, расположенные по одну сторону от меньшей оси эллипса, называются соответствующими друг другу.

Таким образом, фокусу $F_1(-c,\ 0)$ соответствует директриса $x=-\frac{a}{e}$, а фокусу $F_2(c,\ 0)$ — директриса $x=\frac{a}{e}$.

Теорема. *Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния от этой точки до фокуса эллипса к расстоянию от той же точки до директрисы, соответствующей рассматриваемому фокусу, было равно эксцентриситету эллипса.*

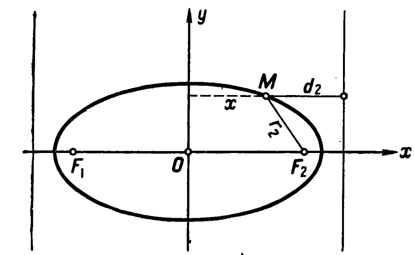


Рис. 154

Доказательство необходимости. Рассмотрим, например, фокус $F_2(c,\ 0)$ и соответствующую ему директрису $x=\frac{a}{e}$.

Расстояние r_2 от точки $M(x,\ y)$ эллипса до фокуса $F_2(c,\ 0)$ вычисляется по формуле $r_2=a-ex$ (§ 103, формулы (3)).

Расстояние d_2 от той же точки $M(x,\ y)$ эллипса до прямой

$$x=\frac{a}{e}$$

вычисляется по формуле

$$d_2=\left|x-\frac{a}{e}\right|$$

(что следует из рис. 154, но может быть получено и по формуле расстояния от точки до прямой; см. § 63, уравнение $x-\frac{a}{e}=0$ — нормальное).

Итак,

$$d_2=\left|x-\frac{a}{e}\right|=\left|\frac{ex-a}{e}\right|=\frac{|ex-a|}{e}=\frac{a-ex}{e}=\frac{r_2}{e}.$$

Отсюда

$$\frac{r_2}{d_2}=e.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{r_1}{d_1}=e,$$

где r_1 есть расстояние от точки M эллипса до его фокуса F_1, а d_1 — расстояние от той же точки до директрисы $x=-\frac{a}{e}$, соответствующей фокусу F_1.

Доказательство достаточности. Возьмем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a>b$. Рассмотрим, например, фокус $F_2(c, 0)$ этого эллипса и соответствующую ему директрису $x=\frac{a}{e}$.

Пусть $M(x, y)$ — такая точка, что

$$\frac{r_2}{d_2}=e,$$

где r_2 — расстояние от точки M до фокуса F_2, а d_2 — расстояние от точки M до директрисы $x=\frac{a}{e}$.

Докажем, что точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

В самом деле, так как

$$r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \qquad d_2=\left|x-\frac{a}{e}\right|,$$

то из соотношения

$$\frac{r_2}{d_2}=e, \text{ или } r_2^2=e^2d_2^2,$$

находим

$$(x-c)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2.$$

Упрощая это уравнение, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

а это и означает, что точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе.

Расстояние m от фокуса эллипса до его директрисы равно

$$m=\frac{a}{e}-c,$$

а эксцентриситет определяется формулой

$$e=\frac{c}{a}.$$

Из этих соотношений находим

$$a=\frac{me}{1-e^2}, \quad c=\frac{e^2m}{1-e^2}.$$

Отсюда следует, что если на плоскости задана произвольно точка F, прямая, не проходящая через эту точку F (отстоящая от точки F на расстоянии m) и задано произвольное положительное число e, меньшее 1, то существует эллипс, для которого точка F — фокус, заданная прямая — директриса, а e — эксцентриситет. Центр этого эллипса находится на расстоянии

$$c = \frac{e^2 m}{1-e^2}$$

от точки F (по одну сторону с точкой F от данной прямой), а большая полуось

$$a = \frac{me}{1-e^2}.$$

Отсюда и из только что доказанной теоремы следует, что эллипс можно определить как геометрическое место точек, для каждой из которых отношение расстояния от данной точки F к расстоянию до данной прямой d, не проходящей через точку F, равно данному положительному числу, меньшему 1.

Исключение составляет окружность, которая указанным свойством не обладает.

§ 105. Эллипс как образ окружности при равномерном сжатии к ее диаметру

Фиксируем на плоскости прямую l, а также число $k \neq 0$ (положительное или отрицательное).

Пусть M — произвольная точка плоскости. Проведем через точку M прямую m, перпендикулярную прямой l; обозначим через P точку пересечения прямых l и m. Поставим в соответствие точке M точку M', такую, что

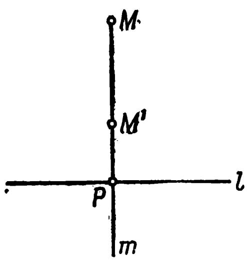


Рис. 155

$$\vec{PM'} = k\vec{PM}$$

(такая точка M' существует и притом только одна). Заметим, что если $k > 0$, то точки M и M' лежат по одну сторону от прямой l, а если $k < 0$, то — по разные.

Рассмотрим преобразование точек плоскости, при котором точке M ставится в соответствие точка M' (рис. 155). Это преобразование называется равномерным сжатием плоскости к прямой l, число k — коэффициентом сжатия. Точка M' называется образом точки M, а точка M — прообразом точки M' при рассматриваемом преобразовании.

Если прямую l ориентировать и принять ее за ось Ox декартовой прямоугольной системы координат, то координаты образа $M'(x', y')$ через координаты прообраза $M(x, y)$ будут выражаться соотношениями (рис. 156)

$$y' = ky,\ x' = x \left(\text{на рис. 156 } k \text{ выбрано равным } \frac{1}{3}\right). \qquad (1)$$

Заметим, что если $|k| > 1$, то фактически происходит растяжение плоскости от прямой l; однако и в случае $|k| > 1$ это преобразование будем называть сжатием (с коэффициентом сжатия, таким, что $|k| > 1$).

При сжатии плоскости к прямой l каждая точка M прямой l совпадает с ее образом M'. То же обстоятельство, но уже для всех точек плоскости имеет место, если $k = 1$. Если $k = -1$, то имеем симметрию относительно прямой l. Подробно о преобразованиях плоскости и пространства см. гл. XIII и XIV.

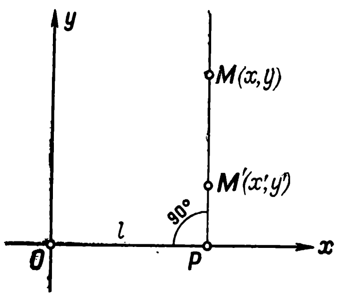


Рис. 156

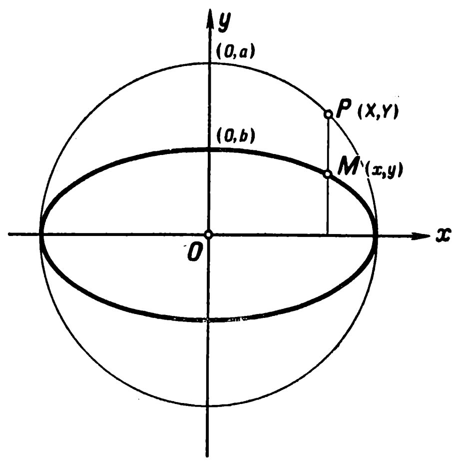


Рис. 157

Теорема. *При равномерном сжатии плоскости к диаметру окружности образом окружности является эллипс.*

Обратно, *каждый эллипс может быть получен как образ окружности при равномерном сжатии плоскости к диаметру этой окружности.*

Доказательство. Рассмотрим окружность

$$X^2 + Y^2 = a^2 \qquad (2)$$

радиуса a с центром в начале координат.

Произведем равномерное сжатие плоскости к оси Ox с коэффициентом сжатия $0 < k < 1$.

Пусть при этом сжатии образом точки $(0, a)$ будет точка $(0, b)$ (рис. 157); тогда $b = ka$ и коэффициент k сжатия выразится в виде

$$k = \frac{b}{a}. \qquad (3)$$

Таким образом, формулы (1) принимают вид

$$x=X, \quad y=\frac{b}{a}Y, \tag{4}$$

откуда

$$X=x, \quad Y=\frac{ay}{b}$$

и, значит, координаты любой точки (x, y), являющейся образом точки окружности

$$X^2+Y^2=a^2,$$

удовлетворяют уравнению

$$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=1,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5}$$

Обратно, если координаты x и y удовлетворяют уравнению вида (5), то координаты

$$X=x, \quad Y=\frac{a}{b}y$$

удовлетворяют уравнению (2), т. е. произвольный эллипс (5) является образом окружности при равномерном сжатии плоскости к диаметру окружности.

§ 106. Параметрические уравнения эллипса

Пусть дан эллипс каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Рассмотрим окружность

$$X^2+Y^2=a^2, \tag{2}$$

которая переходит в данный эллипс в результате сжатия

$$x=X, \quad y=\frac{b}{a}Y. \tag{3}$$

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка данного эллипса, $P(X, Y)$ — ее прообраз на окружности (2). Обозначим через φ угол от положительного направления оси Ox до луча OP.

Тогда

$$X=a\cos\varphi, \quad Y=a\sin\varphi$$

и, следовательно,

$$x=a\cos\varphi, \quad y=\frac{b}{a}Y=\frac{b}{a}a\sin\varphi=b\sin\varphi.$$

Уравнения

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi$$

и являются параметрическими уравнениями эллипса.

Параметр φ называется **эксцентрическим углом** точки эллипса. Если задана точка M эллипса, то для нахождения φ надо построить окружность на большей оси эллипса как на диаметре и через точку M провести прямую, параллельную малой оси эллипса. Точка $P(X, Y)$ пересечения этой прямой с окружностью, лежащая по ту же сторону от большей оси эллипса, что и точка M, является прообразом точки $M(x, y)$ при равномерном сжатии (3); угол от оси Ox до луча OP и является эксцентрическим углом φ, соответствующим взятой точке M на эллипсе (рис. 158):

$$\varphi = (Ox, OP).$$

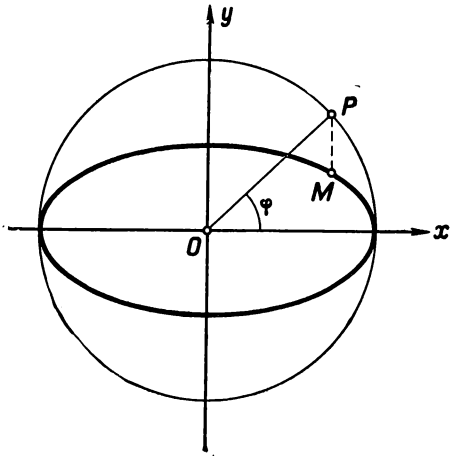


Рис. 158

§ 107. Построение эллипса по точкам

Построим две окружности с центром в начале координат, радиусы которых a и b равны соответственно большой и малой полуосям эллипса. Проведем из начала координат произвольный луч, пересекающий эти окружности соответственно в точках A и B. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную оси Ox, а через точку B — прямую, перпендикулярную оси Oy. Пусть M — точка пересечения этих прямых. Тогда точка M лежит на эллипсе с полуосями a и b, для которого оси координат являются осями симметрии. В самом деле, координаты точки A

$$a\cos\varphi, \quad a\sin\varphi,$$

а координаты точки B

$$b\cos\varphi, \quad b\sin\varphi.$$

Так как точка M лежит на прямой, проходящей через точку A перпендикулярно оси Ox, то точки A и M имеют одинаковые абсциссы, а так как точка M лежит на прямой, проходящей через точку B перпендикулярно оси Oy, то точки M и B имеют одинаковые ординаты, поэтому абсцисса точки M равна $x = a\cos\varphi$, а ордината $y = b\sin\varphi$. Следовательно, точка M лежит на эллипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Проводя через точку O различные лучи, мы указанным путем построим сколько угодно точек эллипса (рис. 159).

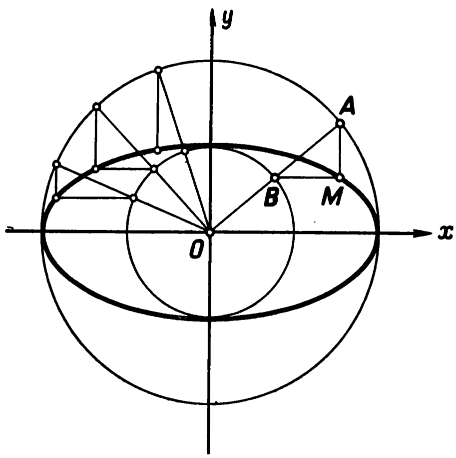


Рис. 159

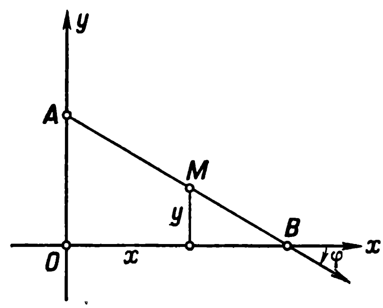


Рис. 160

§ 108. Вычерчивание эллипса непрерывным движением

Пусть отрезок AB постоянной длины скользит своими концами A и B по двум взаимно перпендикулярным прямым. Примем эти прямые за оси декартовой прямоугольной системы координат (рис. 160). Фиксируем на движущейся прямой AB произвольную точку $M(x, y)$, отличную от точек A и B. Докажем, что точка M при указанном скольжении отрезка AB опишет эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где

$$a = AM, \quad b = BM.$$

В самом деле,

$$x = \text{коорд. пр.}_{Ox}\,\overrightarrow{AM}, \quad y = \text{коорд. пр.}_{Oy}\,\overrightarrow{BM}.$$

Если векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ имеют одинаковое направление, то, полагая $(Ox, \overrightarrow{AM}) = \varphi$, будем иметь (теорема 4 § 11) $x = a\cos\varphi$, $y = b\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = b\sin\varphi$.

Если же векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ имеют противоположное направление, то, полагая

$$(\overrightarrow{AM},\ Ox)=\varphi,$$

будем иметь

$$(Ox, \overrightarrow{AM}) = -(\overrightarrow{AM},\ Ox) = -\varphi,$$

$$(Oy, \overrightarrow{BM}) = (Oy,\ Ox) + (Ox,\ \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BM}) =$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \varphi + \pi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

и, значит, по-прежнему

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = b\sin\varphi.$$

В обоих случаях φ изменяется от 0 до 2π, значит, точка $M(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ описывает эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

целиком.

На указанном принципе основан прибор, называемый эллиптическим циркулем. В металлической доске сделаны два прореза под прямым углом. В этих прорезах ходят ползуны, к которым прикреплена шарнирами A и B линейка AB. На линейке в любом ее месте при помощи муфты M может быть закреплен карандаш. Из предыдущих рассуждений следует, что при непрерывном движении линейки острие карандаша опишет эллипс (рис. 161).

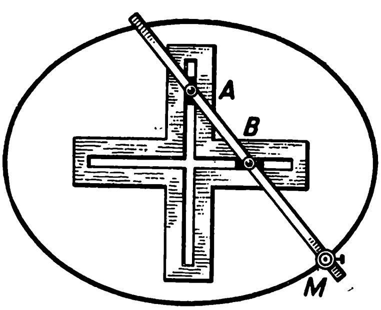


Рис. 161

§ 109. Эллипс как ортогональная проекция окружности

Пусть в плоскости α дан эллипс с полуосями a и b; его можно рассматривать как образ окружности C при равномерном сжатии плоскости α к ее диаметру с коэффициентом сжатия $k=\frac{b}{a}$. Проведем через бо́льшую ось эллипса плоскость β, наклоненную к плоскости α под углом ω, таким, что

$$\cos\omega = \frac{b}{a},$$

и построим в плоскости β на большей оси эллипса как на диаметре окружность C^* (рис. 162). Тогда данный эллипс является ортогональной проекцией построенной окружности C^* на плоскость α.

В самом деле, пусть R — произвольная точка окружности C^*, а M — ее ортогональная проекция на плоскость α. Докажем, что точка M лежит на данном эллипсе. Опустим из точки R перпендикуляр RQ на бо́льшую ось эллипса и соединим точку Q с точкой M. Прямая QM также будет перпендикулярна AB (на основании теоремы о трех перпендикулярах). Таким образом, угол MQR является линейным углом двугранного угла между плоскостями α и β, а потому

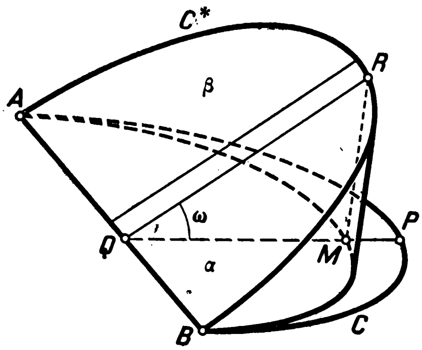


Рис. 162

$$QM = QR\cos\omega = RQ\,\frac{b}{a},$$

откуда

$$\frac{QM}{QR} = \frac{b}{a}.$$

Продолжим луч QM за точку M до встречи с окружностью C в точке P. Так как $QR = QP$ и направленные отрезки $\overrightarrow{QM}$ и $\overrightarrow{QP}$ направлены в одну сторону, то

$$\frac{\overrightarrow{QM}}{\overrightarrow{QP}} = \frac{b}{a},$$

и, следовательно, точка M лежит на эллипсе. Обратно, пусть точка M лежит на рассматриваемом эллипсе, т. е.

$$\frac{\overrightarrow{QM}}{\overrightarrow{QP}} = \frac{b}{a}.$$

Обозначим через R точку плоскости β, проекцией которой является точка M. Тогда $QR \perp AB$, а потому

$$\frac{MQ}{QR} = \cos\omega = \frac{b}{a}.$$

Итак,

$$\frac{MQ}{QR} = \frac{MQ}{PQ},$$

откуда

$$QR = QP$$

и, значит, точка R лежит на окружности C^*.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что всякий эллипс можно спроектировать ортогонально в окружность; для этого надо в качестве плоскости проекции взять плоскость, проходящую через малую ось эллипса и наклоненную к плоскости, в которой лежит эллипс, под углом ω, таким, что (рис. 163)

$$\cos\omega = \frac{b}{a}.$$

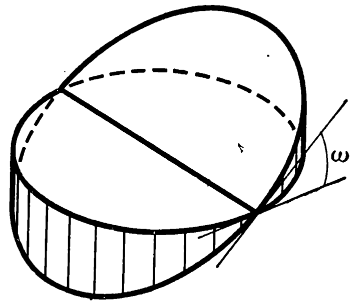


Рис. 163

Обратно, если некоторая плоская линия проектируется в окружность, то эта линия является эллипсом. Отсюда следует, что плоскость, пересекающая все образующие какого-нибудь прямого круглого цилиндра, рассекает его по эллипсу, так как если это сечение спроектировать в плоскость, пересекающую все образующие цилиндра под прямым углом, то в проекции получится окружность.

§ 110. Касательная к эллипсу

Уравнение касательной в неособой точке (x_0, y_0) к линии, заданной неявным уравнением*

$$F(x, y) = 0,$$

пишется в виде

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0, \tag{1}$$

где $F'_x(x_0, y_0)$ и $F'_y(x_0, y_0)$ — значения частных производных от функции $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Для эллипса, заданного каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

уравнение касательной в точке (x_0, y_0), лежащей на этом эллипсе, имеет вид

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0,$$

или $\left(\text{так как } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1\right)$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

* См. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. М., Физматгиз, 1958, гл. VII, § 2, стр. 530.

§ 111. Оптическое свойство эллипса

Теорема. *Касательная к эллипсу в произвольной его точке M_0 является биссектрисой внешнего угла M_0 треугольника $F_1F_2M_0$, имеющего своими вершинами фокусы F_1 и F_2 эллипса и данную точку M_0.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в данной на нем точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0.$$

Отношение расстояний h_1 и h_2 от фокусов $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ эллипса до касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ равно отношению модулей результатов подстановки координат фокусов F_1 и F_2 в левую часть уравнения касательной:

$$h_1:h_2=\left|-\frac{cx_0}{a^2}-1\right|:\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right|=\left|1+\frac{ex_0}{a}\right|:\left|1-\frac{ex_0}{a}\right|=$$
$$=|a+ex_0|:|a-ex_0|=r_1:r_2.$$

Отметим, что результаты подстановок $-\frac{cx_0}{a^2}-1$ и $\frac{cx_0}{a^2}-1$ координат фокусов $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ в левую часть уравнения касательной — числа одного знака:

$$-\frac{cx_0}{a^2}-1=-\frac{ex_0}{a}-1=-\frac{ex_0+a}{a}=-\frac{r_1}{a}<0,$$
$$\frac{cx_0}{a^2}-1=\frac{ex_0}{a}-1=-\frac{a-ex_0}{a}=-\frac{r_2}{a}<0,$$

поэтому оба фокуса F_1 и F_2 расположены по одну сторону от касательной к эллипсу в произвольной его точке.

Обозначим через P_1 и P_2 основания перпендикуляров, опущенных из фокусов эллипса на касательную к нему, проведенную в точке M_0 (рис. 164). Тогда $\triangle F_1P_1M_0 \sim \triangle F_2P_2M_0$, так как оба они прямоугольные, и по доказанному

$$\frac{F_1P_1}{F_2P_2}=\frac{F_1M_0}{F_2M_0},$$

поэтому

$$\angle F_1M_0P_1=\angle F_2M_0P_2,$$

следовательно, угол $F_1M_0P_1$ равен углу P_1M_0Q, где точка Q лежит на продолжении отрезка F_2M_0 за точку M_0.

Из этой теоремы непосредственно вытекает способ построения касательной к эллипсу в произвольной его точке.

Доказанной теореме можно дать следующую физическую интерпретацию: если поместить в один из фокусов эллипса источник света, то лучи после отражения от эллипса соберутся в другом

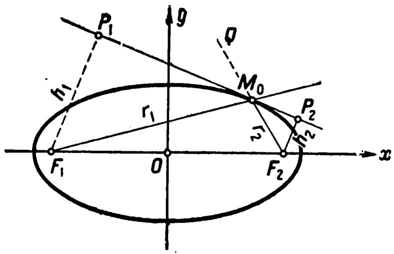


Рис. 164

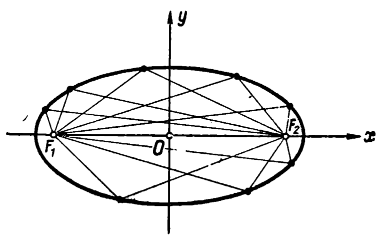


Рис. 165

фокусе, так как световой луч отражается от эллипса, как от касательной, проведенной к эллипсу, в точке падения луча (рис. 165). Слово «фокус» по латыни означает «очаг».

§ 112. Гипербола и ее каноническое уравнение

Определение. *Гиперболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть*

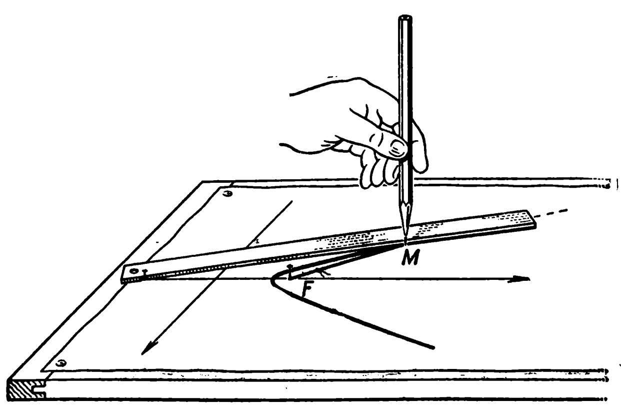


Рис. 166

данное положительное число $2a$, меньшее, чем расстояние $2c$ между фокусами.

Пусть M — произвольная точка гиперболы, а F_1 и F_2 — ее фокусы. Отрезки F_1M и F_2M так же, как и их длины, называются фокальными радиусами гиперболы. Поэтому

$$|F_1M - F_2M| = 2a. \qquad (1)$$

Из определения гиперболы вытекает следующий способ ее вычерчивания (рис. 166). Берем линейку, длина которой больше $2a$, и к одному ее концу прикрепляем нить такой длины, чтобы разность между длиной линейки и длиной нити была равна $2a$. Второй конец линейки закрепляем в одном фокусе так, чтобы линейка могла свободно вращаться вокруг него, а второй конец нити закрепляем в другом фокусе. Если удерживать острием карандаша нить в натянутом вдоль линейки положении, как указано на рис. 166, то при вращении линейки карандаш перемещается и его острие описывает ветвь гиперболы, внутри которой лежит тот фокус, в котором закреплена нить.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат, принимая середину отрезка F_1F_2 за начало координат, а за ось Ox — прямую F_1F_2, ориентированную от точки F_1 к точке F_2. В выбранной системе координат фокус F_1 имеет координаты $-c$, 0, а фокус F_2 — координаты c, 0. Обозначая координаты точки M гиперболы через x и y, будем иметь

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

и соотношение (1) принимает вид

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Преобразуя это уравнение так же, как и для эллипса (§ 102)

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ и т. д.},$$

получим уравнение

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Однако теперь $a < c$. Обозначая разность $a^2 - c^2$ через $-b^2$:

$$a^2 - c^2 = -b^2,$$

или

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad (2)$$

имеем

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Итак, координаты любой точки гиперболы удовлетворяют уравнению (3). Докажем обратное: если координаты некоторой точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (3), то

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

Для этого найдем расстояния $r_1 = MF_1$ и $r_2 = MF_2$ от этой точки до точек F_1 и F_2:

$$r_1 = MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 + 2cx + c^2 - b^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = \left|\frac{cx}{a} + a\right|$$

и аналогично

$$r_2 = MF_2 = \left|\frac{cx}{a} - a\right|.$$

Из равенства

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

следует, что $|x| \geqslant a$.

Если $x \geqslant a$, то в силу соотношения $c > a > 0$ будем иметь

$$\frac{cx}{a} + a > 0, \quad \frac{cx}{a} - a > 0,$$

а потому

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{cx}{a} + a \\ r_2 &= \frac{cx}{a} - a \end{aligned}\right\} \text{ если } x \geqslant a. \tag{4}$$

Если же $x \leqslant -a$, то

$$\frac{cx}{a} + a < 0, \quad \frac{cx}{a} - a < 0,$$

а потому

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -\left(\frac{cx}{a} + a\right) \\ r_2 &= -\left(\frac{cx}{a} - a\right) \end{aligned}\right\} \text{ если } x \leqslant -a. \tag{5}$$

Таким образом, если $x \geqslant a$, то $r_1 - r_2 = 2a$, а если $x \leqslant -a$, то $r_1 - r_2 = -2a$; в обоих случаях

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Итак, мы доказали, что координаты любой точки гиперболы удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

и обратно: если координаты точки удовлетворяют этому уравнению, то эта точка лежит на рассматриваемой гиперболе.

Следовательно, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

является уравнением гиперболы; оно называется каноническим уравнением гиперболы.

§ 113. Исследование формы гиперболы

Так как в каноническое уравнение гиперболы координаты x и y входят во второй степени, то оси Ox и Oy являются осями симметрии гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

а начало координат — центром симметрии. Ниже мы покажем, что каждая гипербола имеет единственный центр симметрии и только две (взаимно перпендикулярные) оси симметрии.

Из уравнения (1) следует, что

$$|x|\geqslant a,$$

т. е. или $x\geqslant a$, или $x\leqslant -a$. Геометрически это означает, что между прямыми $x=a$ и $x=-a$ нет ни одной точки гиперболы (1).

Ось симметрии Oy не пересекает гиперболу, заданную уравнением (1), и называется мнимой осью; ось Ox пересекает гиперболу (1) в двух точках:

$$A_1(-a,\ 0) \text{ и } A_2\ (a,\ 0).$$

Эта ось называется действительной осью гиперболы. Точки, в которых действительная ось пересекает гиперболу, называются вершинами гиперболы.

Числа a и b в каноническом уравнении (1) гиперболы называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы.

Решая уравнение (1) относительно y, беря для y лишь положительное значение:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{2}$$

и считая $x\geqslant a$, мы получим точки гиперболы (1), лежащие в первой четверти. Из уравнения (2) следует, что y в полуинтервале $a\leqslant x<+\infty$ есть возрастающая функция; при этом

$$\lim_{x\to+\infty} y=+\infty.$$

Всякая прямая пересекает гиперболу не более чем в двух точках, так как прямая определяется уравнением первой степени, а гипербола — второй.

Рассмотрим уравнение прямой

$$y=\frac{b}{a}x. \tag{3}$$

Найдем расстояние d от точки M (x, y), лежащей на дуге гиперболы, определяемой уравнением (2), до прямой (3); переписывая уравнение (3) в виде $bx-ay=0$, находим

$$d=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|bx-b\sqrt{x^2-a^2}|}{c}=$$
$$=\frac{b}{c}\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|=\frac{ba^2}{c\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|}.$$

Отсюда следует, что на полуинтервале $[a, +\infty)$ расстояние d от точки $M(x, y)$ рассматриваемой части гиперболы до прямой (3) есть убывающая функция от x и $\lim\limits_{x\to+\infty} d=0$ (рис. 167). Прямая, определяемая уравнением

$$y=\frac{b}{a}x,$$

называется асимптотой гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

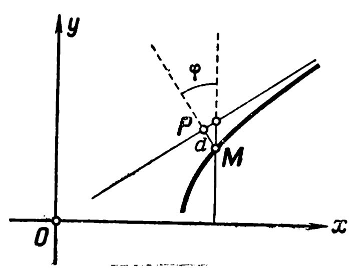


Рис. 167

В силу того что гипербола, заданная каноническим уравнением, симметрична относительно начала координат, расстояние от точки $M(x, y)$, лежащей на дуге гиперболы, заданной уравнением $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, до прямой $y=\frac{b}{a}x$ стремится к нулю при $x\to-\infty$. Так как гипербола, заданная каноническим уравнением, симметрична и относительно оси Oy, то она имеет вторую асимптоту

$$y=-\frac{b}{a}x,$$

которая обладает свойством, аналогичным свойству первой асимптоты по отношению к дугам гиперболы, расположенным во второй и четвертой четвертях.

Асимптоты гиперболы являются диагоналями* прямоугольника с вершинами $P(a, b)$, $Q(a, -b)$, $R(-a, b)$, $S(-a, -b)$.

* Здесь под диагональю прямоугольника мы понимаем всю прямую, соединяющую противоположные вершины прямоугольника.

При одной и той же абсциссе x ординаты точки ветви гиперболы, лежащей в первой четверти, с ординатой точки асимптоты $y=\frac{b}{a}x$ связаны неравенством

$$\frac{b}{a}x > \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Отсюда и из того, что гипербола симметрична относительно осей координат, следует, что она имеет две ветви, заключенные в

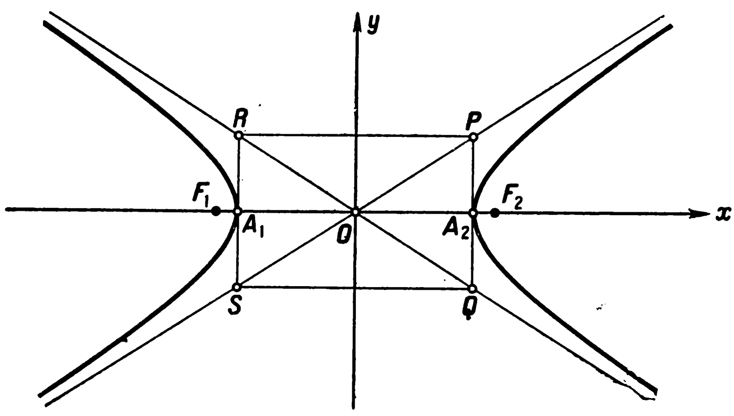


Рис. 168

двух областях: одна из них ограничена отрезком PQ и продолжениями отрезков OP и OQ за точки P и Q, другая симметрична этой области относительно мнимой оси гиперболы (рис. 168).

Гипербола, у которой полуоси равны, называется равносторонней. Каноническое уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$x^2-y^2=a^2.$$

Уравнения асимптот равносторонней гиперболы таковы:

$$y=\pm x,$$

это биссектрисы углов между ее осями симметрии. Асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны.

Обратно, если асимптоты гиперболы взаимно перпендикулярны, то ее полуоси равны между собой и, значит, гипербола равносторонняя.

§ 114. Эксцентриситет и директрисы гиперболы

Отношение расстояния от центра гиперболы до фокуса к действительной полуоси гиперболы называется эксцентриситетом гиперболы и обозначается буквой e:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Так как для гиперболы $0 < a < c$, то

$$e > 1,$$

эксцентриситет гиперболы больше 1. Формулы (4) и (5) § 112 можно теперь переписать так:

$$\begin{aligned} r_1 &= ex + a, \\ r_2 &= ex - a, \end{aligned} \quad \text{если } x \geqslant a, \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned} r_1 &= -(ex + a), \\ r_2 &= -(ex - a), \end{aligned} \quad \text{если } x \leqslant -a. \tag{2}$$

Эти четыре формулы можно объединить:

$$\begin{aligned} r_1 &= |ex + a|, \\ r_2 &= |ex - a|, \end{aligned} \quad \text{где } |x| \geqslant a. \tag{3}$$

Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и отстоящие от центра гиперболы на расстоянии $\frac{a}{e}$, называются директрисами гиперболы.

Если гипербола задана каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то уравнения директрис имеют вид

$$x = \frac{a}{e} \text{ и } x = -\frac{a}{e}.$$

Так как эксцентриситет гиперболы больше 1, то директрисы гиперболы отстоят от ее центра на расстоянии, меньшем действительной полуоси (рис. 169). Фокус и директриса гиперболы, расположенные по одну сторону от мнимой оси, называются соответствующими друг другу. Таким образом, фокусу $F_1(-c, 0)$ соответствует директриса

$$x = -\frac{a}{e},$$

а фокусу F_2 $(c, 0)$ — директриса

$$x = \frac{a}{e}.$$

Теорема. *Для того чтобы точка лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния от этой точки до фокуса гиперболы к расстоянию от той же точки до директрисы, соответствующей рассматриваемому фокусу, было равно эксцентриситету гиперболы.*

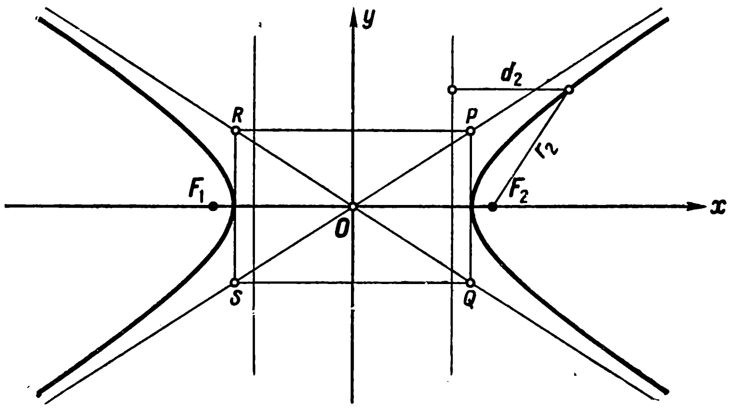


Рис. 169

Доказательство необходимости. Рассмотрим, например, фокус $F_2(c, 0)$ и соответствующую ему директрису

$$x=\frac{a}{e}.$$

Расстояние r_2 от точки M (x, y) гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

до фокуса $F_2(c, 0)$ равно

$$r_2=|ex-a|,$$

а расстояние от той же точки M (x, y) до директрисы $x=\frac{a}{e}$ равно

$$d_2=\left|x-\frac{a}{e}\right|=\frac{|ex-a|}{e}=\frac{r_2}{e}.$$

Отсюда

$$\frac{r_2}{d_2}=e.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{r_1}{d_1}=e,$$

где r_1 есть расстояние от точки $M(x, y)$ гиперболы до ее фокуса $F_1(-c, 0)$, а d_1 — расстояние от той же точки M до директрисы $x=-\frac{a}{e}$, соответствующей фокусу F_1.

Доказательство достаточности такое же, как и в теореме § 104.

Расстояние от фокуса F_2 до директрисы $x=\frac{a}{e}$ гиперболы равно

$$m=c-\frac{a^2}{c},$$

а эксцентриситет

$$e=\frac{c}{a};$$

отсюда

$$a=\frac{me}{e^2-1}, \qquad c=\frac{me^2}{e^2-1}.$$

Если задана произвольная точка F, прямая d, не проходящая через точку F, и число $e>1$, то существует, и притом только одна, гипербола, эксцентриситет которой равен e, F — фокус, а d — соответствующая директриса.

Центр O этой гиперболы отстоит от точки F на расстоянии

$$c=\frac{me^2}{e^2-1},$$

причем точки O и F расположены по разные стороны от прямой d (рис. 170), а большая полуось этой гиперболы равна

$$a=\frac{me}{e^2-1}.$$

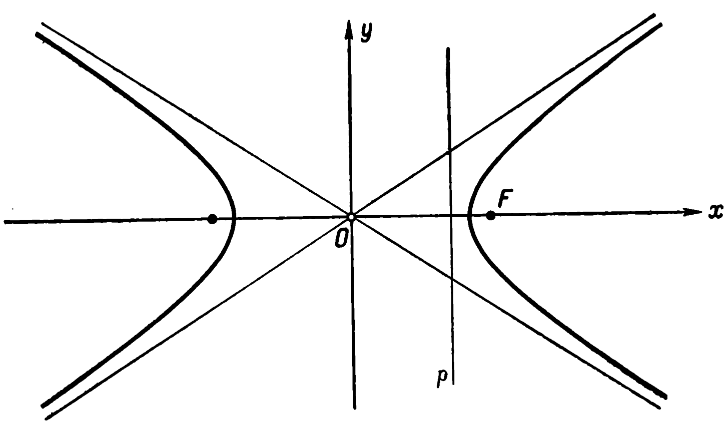


Рис. 170

Доказанная теорема и последнее утверждение позволяют дать гиперболе другое определение, эквивалентное принятому выше: гипербола есть геометрическое место точек, для каждой из которых отношение расстояния от данной точки F к расстоянию до данной прямой d, не проходящей через точку F, равно данному числу $e>1$.

§ 115. Параметрические уравнения гиперболы

Перепишем уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

в виде

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1.$$

Отсюда видно, что

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\neq 0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\neq 0.$$

Положим

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t;$$

тогда $t\neq 0$ и

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{t};$$

следовательно,

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right). \tag{1}$$

Мы доказали, что координаты любой точки гиперболы могут быть представлены в виде (1), где $t\neq 0$. Обратно, при любом $t\neq 0$ точка с координатами (1) лежит на гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

в чем можно убедиться, подставляя в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

вместо x и y их выражения из формул (1). Следовательно, уравнения (1) являются параметрическими уравнениями гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Если точка $M(x, y)$ лежит на той ветви гиперболы, для точек которой $x\geqslant a$, то

$$\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\geqslant 0,\quad \text{или}\quad \frac{a}{2}\,\frac{t^2+1}{t}\geqslant 0,$$

следовательно, $t>0$. Обратно, если $t>0$, то $x\geqslant a$, т. е. точка $M(x, y)$ лежит на указанной ветви гиперболы. При изменении t в полуинтервале $(0, 1]$ значение x убывает от $+\infty$ до a, а значение y возрастает от $-\infty$ до 0; при изменении t в полуинтервале $[1, +\infty)$ значение x возрастает от a до $+\infty$, а значение y возрастает от 0 до $+\infty$ (рис. 171). При $t=1$ получаем правую вершину $(a, 0)$ гиперболы. При отрицательных значениях t получаем левую ветвь. При этом если t изменяется в полуинтервале $(-\infty, -1]$, то значение x возрастает от $-\infty$ до $-a$, а значение y возраста-

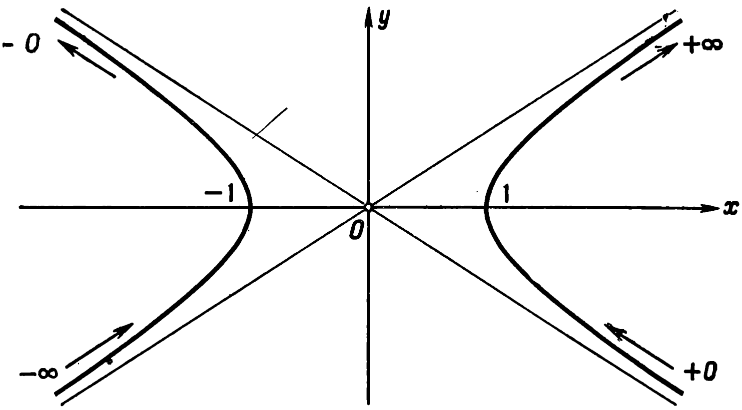


Рис. 171

ет от $-\infty$ до 0, а если t изменяется в полуинтервале $[-1, 0)$, то значение x убывает от $-a$ до $-\infty$, а значение y возрастает от 0 до $+\infty$.

§ 116. Сопряженные гиперболы

Две гиперболы, заданные уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

в одной и той же декартовой прямоугольной системе координат с одними и теми же значениями полуосей a и b, называются **сопряженными** (рис. 172).

Выше доказано, что всякая гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

может быть выражена параметрическими уравнениями

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), \quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right);$$

параметрические уравнения гиперболы, сопряженной с данной, будут

$$x=\frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right), \quad y=\frac{b}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

§ 117. Уравнение гиперболы, отнесенной к асимптотам

Перепишем уравнения асимптот гиперболы в виде

$$bx \pm ay = 0.$$

Введем новую систему координат, принимая за начало координат по-прежнему центр O гиперболы, а за масштабные векторы осей Ox' и Oy' — единичные направляющие векторы асимптот*

$$e_1' = \left\{ \frac{a}{c}, -\frac{b}{c} \right\}, \quad e_2' = \left\{ \frac{a}{c}, \frac{b}{c} \right\}.$$

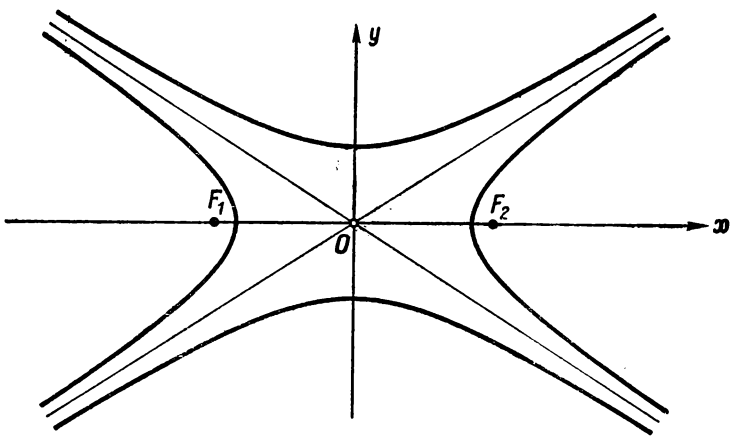


Рис. 172

Тогда формулы преобразования координат будут иметь вид

$$x = \frac{a}{c} x' + \frac{a}{c} y', \quad y = -\frac{b}{c} x' + \frac{b}{c} y',$$

следовательно,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{4x'y'}{c^2},$$

и, значит, уравнение гиперболы, отнесенной к асимптотам, имеет вид

$$x'y' = \frac{c^2}{4}.$$

Обратно, при любом $C \neq 0$ уравнение $x'y' = C$ определяет гиперболу; осями координат служат ее асимптоты и если ввести но-

---

* Из этих выражений находим косинус того угла φ между асимптотами гиперболы, в котором лежит сама гипербола:

$$\cos\varphi = e_1' e_2' = \frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{2 - e^2}{e^2}.$$

вую декартову прямоугольную систему координат, принимая за новые оси ориентированные прямые, являющиеся биссектрисами углов между асимптотами Ox' и Oy', то получим каноническое уравнение гиперболы.

Сопряженные гиперболы определяются уравнениями

$$x'y' = C \text{ и } x'y' = -C \qquad (C \neq 0).$$

§ 118. Касательная к гиперболе

Уравнение касательной к гиперболе, заданной каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на этой гиперболе, можно записать в виде (см. § 110)

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0, \text{ или } \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

§ 119. Оптическое свойство гиперболы

Теорема. *Касательная к гиперболе в произвольной ее точке является биссектрисой внутреннего угла M_0 треугольника $F_1M_0F_2$, имеющего своими вершинами фокусы гиперболы и данную точку M_0.*

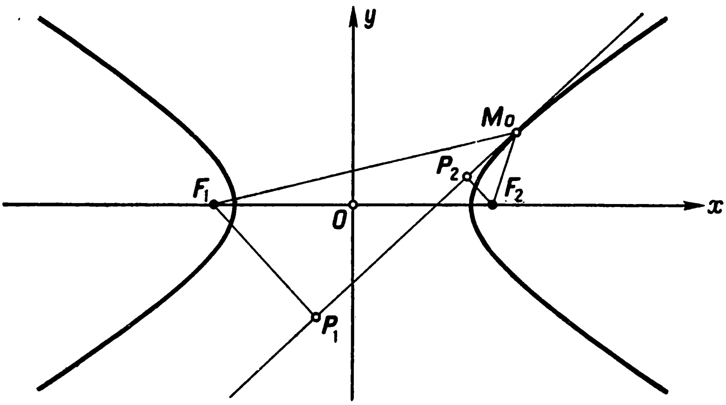


Рис. 173

Доказательство. Опустим из фокусов F_1 и F_2 перпендикуляры F_1P_1 и F_2P_2 на касательную. Так же как для эллипса (§ 111) доказывается, что (рис. 173)

$$\frac{F_1P_1}{F_2P_2} = \frac{F_1M_0}{F_2M_0},$$

поэтому $\triangle F_1M_0P_1 \sim \triangle F_2M_0P_2$, и, следовательно,

$$\angle F_1M_0P_1 = \angle F_2M_0P_2.$$

Результаты подстановок координат фокусов $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ в выражение $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} - 1$ — числа разных знаков, откуда следует, что фокусы гиперболы лежат по разные стороны от любой касательной к ней.

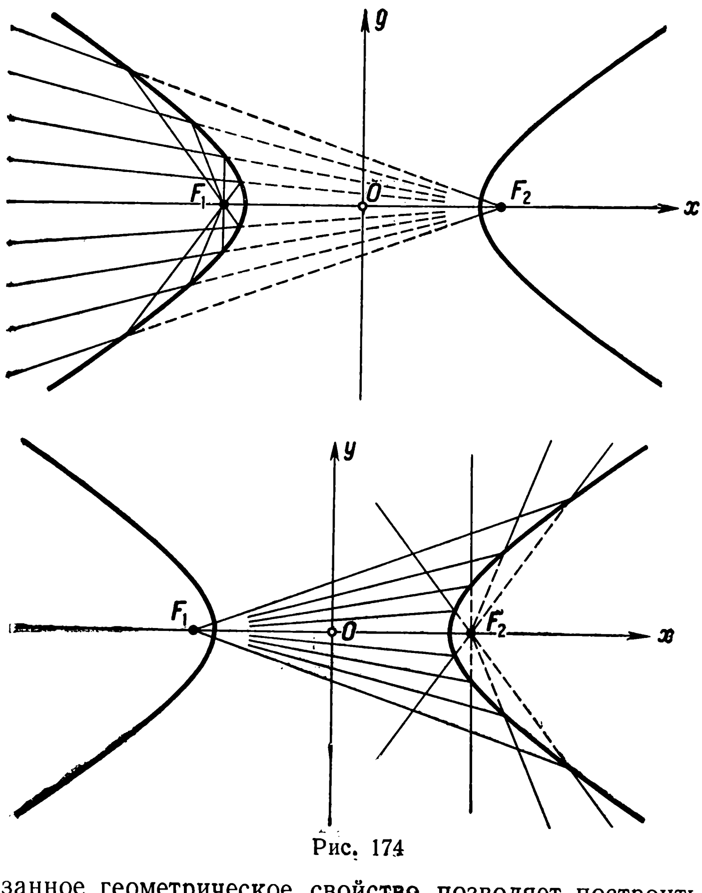


Рис. 174

Указанное геометрическое свойство позволяет построить касательную к гиперболе в произвольной точке M_0: точку M_0 соединяем с фокусами F_1 и F_2 гиперболы и угол $F_1M_0F_2$ делим пополам; биссектриса этого угла и является касательной к гиперболе в точке M_0.

Доказанной теореме можно дать оптическое истолкование, аналогичное тому, какое было дано для эллипса (рис. 174).

§ 120. Парабола и ее каноническое уравнение

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, не проходящей через фокус, и называемой директрисой.

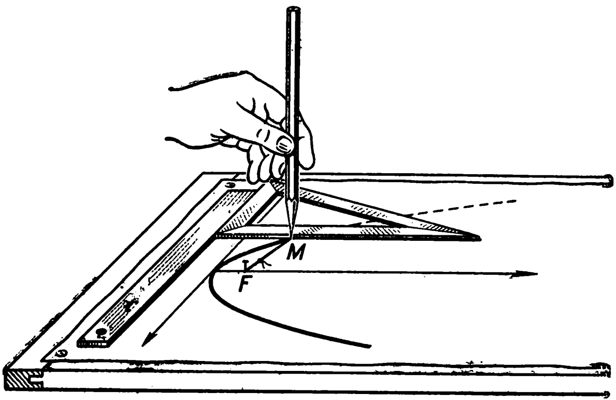


Рис. 175

Расстояние от фокуса параболы до ее директрисы называется параметром параболы.

Эксцентриситет параболы принимается равным единице. Из определения параболы вытекает способ ее построения. Закрепим вдоль директрисы линейку. К линейке приставим меньшим катетом угольник, и к вершине противолежащего острого угла прикрепим нить, равную по длине другому катету. Второй конец нити закрепим в фокусе. Если перемещать угольник вдоль линейки, удерживая нить натянутой карандашом, как указано на рис. 175, то карандаш опишет параболу.

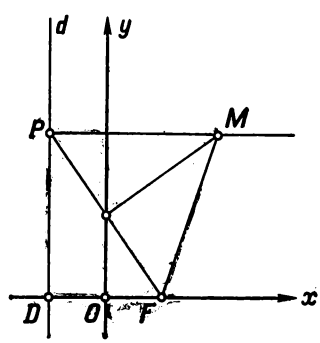


Рис. 176

Опустим из фокуса F перпендикуляр на директрису d и точку пересечения этого перпендикуляра с директрисой параболы обозначим буквой D. Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, поместив начало координат O в середине отрезка FD, принимая за ось Ox прямую DF, с положительным направлением от O к F (рис. 176).

Расстояние FD от фокуса F до директрисы d обозначим буквой p (параметр параболы). В выбранной системе координат фокус F имеет координаты

$$\frac{p}{2},\ 0;$$

уравнение директрисы

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{1}$$

Пусть $M\ (x,\ y)$ — произвольная точка плоскости. Обозначим через r расстояние MF от точки M до фокуса параболы, а через d — расстояние MP от точки M до директрисы этой параболы.

Точка $M\ (x,\ y)$ лежит на данной параболе тогда и только тогда, когда

$$r = d.$$

Так как

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad \text{а} \quad d = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

то уравнение параболы имеет вид

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \tag{2}$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

или

$$y^2 = 2\,px. \tag{3}$$

Уравнение (3) называется каноническим уравнением параболы.

§ 121. Исследование формы параболы

Так как ордината y в каноническое уравнение параболы входит во второй степени, то ось Ox является осью симметрии параболы:

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Ниже мы докажем, что это единственная ось симметрии параболы (и что парабола не имеет центра симметрии).

Точка пересечения параболы с ее осью симметрии называется вершиной параболы. Парабола (1) имеет только одну вершину (0, 0).

Из уравнения (1) следует, что $x \geqslant 0$ (так как $p > 0$, а $x = \frac{y^2}{2p}$).

Разрешая уравнение $y^2 = 2px$ относительно y и беря для y лишь неотрицательное значение

$$y = \sqrt{2px},$$

видим, что в полуинтервале $[0, +\infty)$ y — возрастающая функция x, причем

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

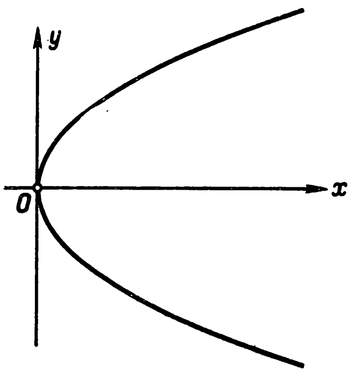


Рис. 177

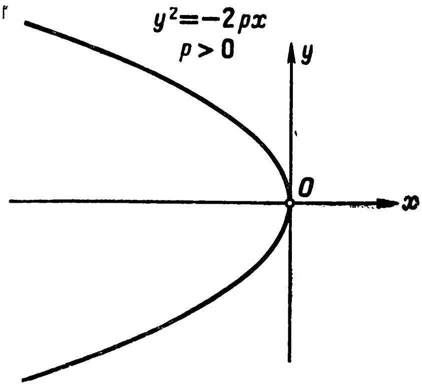


Рис. 178

Всякая прямая пересекает параболу не более чем в двух точках (так как прямая определяется уравнением первой степени, а парабола — уравнением второй степени). Проведенное исследование дает представление о форме параболы (рис. 177).

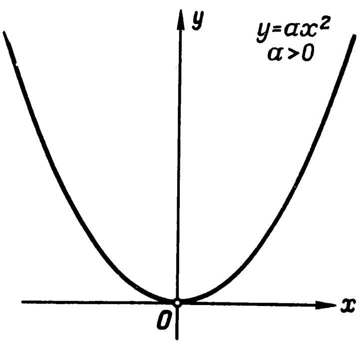


Рис. 179

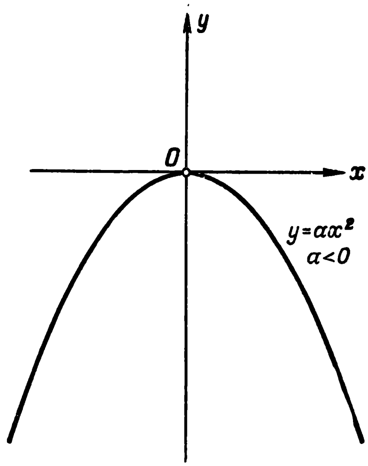


Рис. 180

Замечание. Уравнение

$$y^2 = -2px, \qquad (2)$$

где $p > 0$, сводится к уравнению $y^2 = 2px$ заменой x на $-x$, т. е. путем преобразования системы координат, которое соответствует изменению положительного направления оси Ox на противоположное. Отсюда следует, что парабола $y^2=-2px$ симметрична с параболой $y^2=2px$ относительно оси Oy (рис. 178). Аналогичными рассуждениями устанавливаем, что каждое из уравнений

$$x^2=2py, \tag{3}$$

$$x^2=-2py, \tag{4}$$

где $p>0$, определяет параболу с вершиной в начале координат и осью симметрии Oy (рис. 179, 180).

Уравнение (3) и (4) пишут часто в виде, разрешенном относительно ординаты y:

$$y=ax^2,$$

где $a\neq 0$ $\left(|a|=\frac{1}{2p}\right)$.

§ 122. Построение параболы по точкам

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — какая-нибудь фиксированная точка параболы $y^2=2px$, а $M(x, y)$ — произвольная точка той же параболы. Обозначим через $P(x', y_0)$ точку пересечения прямой OM с прямой M_0D, проходящей через точку M_0 параллельно оси параболы. Пусть S и T — проекции точек M и P на ось параболы, а K — проекция точки M на прямую, проходящую через вершину параболы перпендикулярно ее оси (рис. 181). Докажем, что

$$\frac{DP}{DM_0}=\frac{OK}{OD}.$$

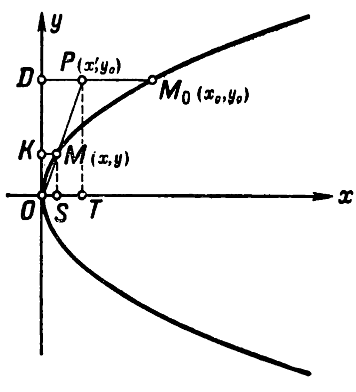


Рис. 181

В самом деле, из подобия треугольников OMS и OPT имеем

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y_0}.$$

Далее,

$$y^2=2px, \quad y_0^2=2px_0,$$

значит,

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^2=\frac{x}{x_0}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{x'}\right)^2=\frac{x}{x_0},$$

откуда

$$\frac{x'}{x_0}=\frac{x}{x'}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{DP}{DM_0}=\frac{KM}{DP}, \quad \text{или} \quad \frac{DP}{DM_0}=\frac{OK}{OD}.$$

Отсюда вытекает следующий способ построения параболы по точкам, если заданы ось симметрии параболы, ее вершина и какая-нибудь точка M_0, лежащая на этой параболе: пусть O — вершина, Ox — ось, направленная в сторону вогнутости параболы, и M_0 — какая-нибудь точка параболы. Опустим из точки M_0 перпендикуляр M_0D на ось Oy, перпендикулярную к оси Ox; разделим отрезок OD на n равных между собой частей и отрезок DM_0 — на такое же число n равных между собой частей. Перенумеруем точки деления так, как указано на рис. 182. Точка пересечения прямой Oi с прямой, параллельной оси Ox и проходящей через точку того же номера i оси Oy, лежит на параболе.

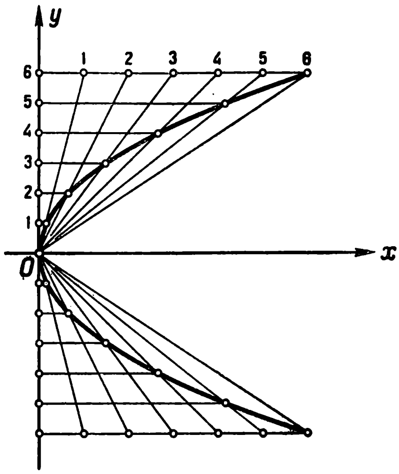


Рис. 182

Аналогично строятся точки параболы, лежащие в четвертой четверти.

§ 123. Касательная к параболе

В курсах математического анализа доказывается *, что если функция $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ имеет производную, то уравнение касательной к линии, выражаемой уравнением $y=f(x)$ в точке (x_0, y_0), где $y_0=f(x_0)$, имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Если парабола задана уравнением

$$y=ax^2, \quad a\neq 0, \tag{1}$$

то уравнение касательной к ней в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y-y_0=2ax_0(x-x_0),$$

или

$$y+y_0=2ax_0x, \tag{2}$$

так как

$$y_0=ax_0^2.$$

* См. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа М., „Наука“, 1965, гл. I, § 2.

Если парабола задана уравнением

$$y^2 = 2px, \tag{3}$$

то уравнение касательной к ней в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Полагая в уравнении (2) $x = 0$, находим точку $B(0, -y_0)$, пересечения касательной к параболе (3) с ее осью симметрии.

Отсюда вытекает следующий способ построения касательной к параболе в данной на ней точке M_0. Опускаем из точки M_0

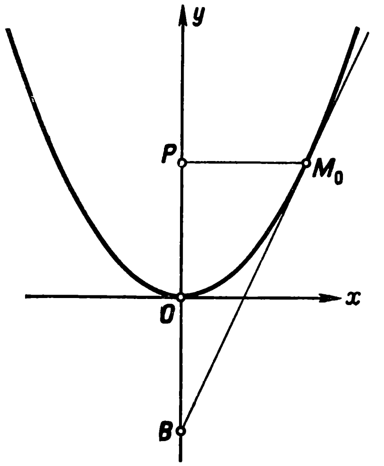


Рис. 183

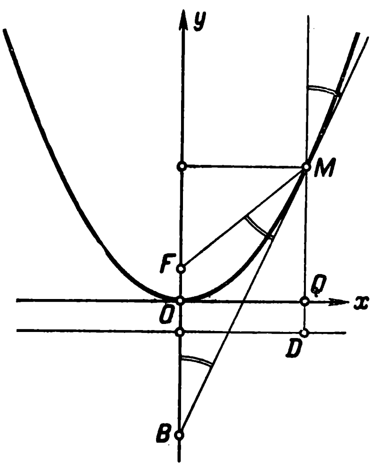


Рис. 184

перпендикуляр M_0P на ось симметрии параболы и откладываем на оси симметрии параболы отрезок $OB = OP$ (рис. 183). Прямая M_0B — касательная к параболе в точке M_0.

§ 124. Оптическое свойство параболы

Теорема. *Касательная к параболе является биссектрисой угла FMD между фокальным радиусом MF точки касания и перпендикуляром MD, опущенным из нее на директрису.*

Доказательство. Имеем (рис. 184)

$$MD = FM, \quad MD = MQ + QD = y_0 + QD.$$

Но

$$y_0 = OB, \quad QD = OF,$$

следовательно,

$$MD = OB + OF = FB.$$

Поэтому треугольник BFM равнобедренный и, значит,

$$\angle FMB = \angle FBM;$$

но $\angle FBM = \angle BMD$, следовательно, $\angle FMB = \angle BMD$.

Эта теорема имеет следующее оптическое истолкование: если в фокусе F параболического зеркала поместить источник света, то лучи, отразившись от зеркала, образуют пучок параллельных лучей. Указанное свойство параболического зеркала применяется при устройстве зеркальных прожекторов (рис. 185).

§ 125. Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы

Пусть L — какая-нибудь из изученных нами линий второго порядка: эллипс, гипербола или парабола (в случае, если L — гипербола, мы имеем в виду лишь одну ее ветвь).

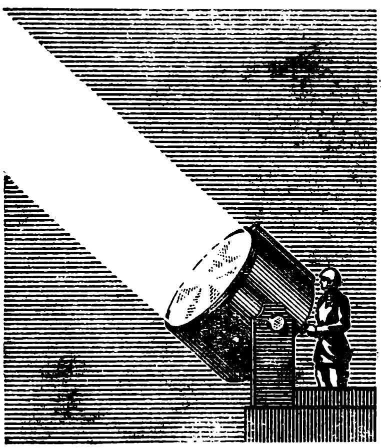


Рис 185

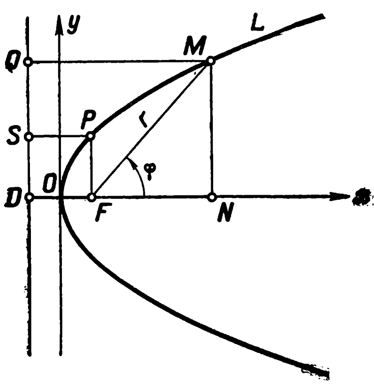


Рис. 186

Будем называть фокальной осью линии L ту из ее осей симметрии, которая проходит через фокус линии L.

Введем полярную систему координат, совмещая полюс с фокусом F линии L (в случае гиперболы мы берем фокус, ближайший к вершине рассматриваемой ветви); пусть D — основание перпендикуляра, опущенного из фокуса F на директрису, соответствующую этому фокусу (в случае параболы — просто на директрису) (рис. 186). Полярную ось расположим на прямой DF, причем ее положительное направление примем от D к F. Обозначая через r расстояние от произвольной точки M линии L до фокуса F, а через d — расстояние от той же точки M до директрисы, соответствующей этому фокусу, будем иметь

$$\frac{r}{d}=e, \tag{1}$$

где e — эксцентриситет линии L.

Находим

$$d=QM=DF+FN=DF+r\cos\varphi.$$

Проведем через фокус F перпендикуляр к фокальной оси линии L, и пусть P — одна из точек пересечения этого перпендикуляра с линией L. Так как соотношение (1) верно для всех точек линии L, в частности и для точки P, то

$$\frac{FP}{SP}=e,$$

откуда

$$SP=\frac{FP}{e}.$$

Половина длины фокальной хорды (т. е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно к фокальной оси) называется фокальным параметром*.

Таким образом,

$$SP=\frac{p}{e}$$

и, следовательно,

$$d=\frac{p}{e}+r\cos\varphi.$$

Отсюда и из равенства (1) находим полярное уравнение линии в виде

$$r=\frac{p}{1-e\cos\varphi}. \tag{2}$$

Уравнение (2) используется в механике и астрономии.

§ 126. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения

Рассмотрим поверхность прямого кругового конуса, неограниченно простирающуюся по обе стороны от его вершины.

Плоскость, проходящая через вершину конуса, может занимать относительно этого конуса следующие три положения:

1) иметь с конусом только одну общую точку (вершину конуса, рис. 187);

* В том случае, когда линия L — парабола, $FP=PS$, следовательно, фокальный параметр $p=DF$, т. е. параметр параболы равен расстоянию от фокуса этой параболы до ее директрисы. В этом случае величина p совпадает с параметром параболы, с которым мы встречались ранее, обозначая его той же буквой.

2) касаться конуса вдоль его образующей (рис. 188);

3) пересекать конус по двум различным его образующим (рис. 189).

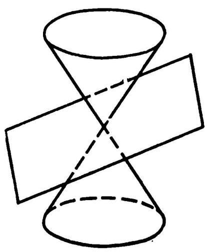


Рис. 187

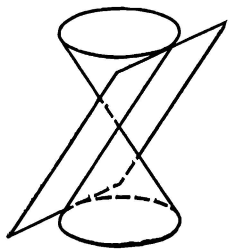


Рис. 188

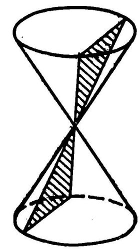


Рис. 189

Поэтому плоскость, не проходящая через вершину конуса, может занимать относительно конуса следующие три возможных положения:

1) пересекать все образующие конуса;

2) быть параллельной только одной образующей конуса;

3) быть параллельной двум различным образующим конуса.

Теорема. *Плоскость, не проходящая через вершину прямого кругового конуса, пересекает его по эллипсу, если она пересекает все*

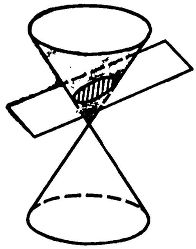


Рис. 190

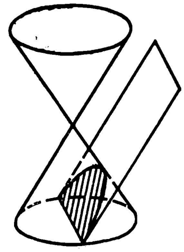


Рис. 191

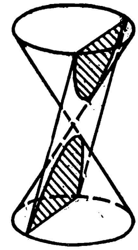


Рис. 192

образующие конуса (рис. 190); *по параболе, если она параллельна только одной образующей конуса* (рис. 191), *и по гиперболе, если она параллельна двум образующим конуса* (рис. 192).

Доказательство. Пусть плоскость π, не проходящая через вершину прямого кругового конуса (и не перпендикулярная ее оси), пересекает поверхность конуса по линии C (рис. 193). Впишем в этот конус сферу, касающуюся плоскости π. Обозначим через F точку прикосновения сферы с плоскостью π, через S—окружность, по которой сфера касается конической поверхности, а через π' — плоскость, в которой лежит окружность S. Возьмем на линии C

произвольную точку M и проведем через нее образующую конуса; точку пересечения этой образующей с плоскостью π' обозначим через A. Пусть P — ортогональная проекция точки M на плос-

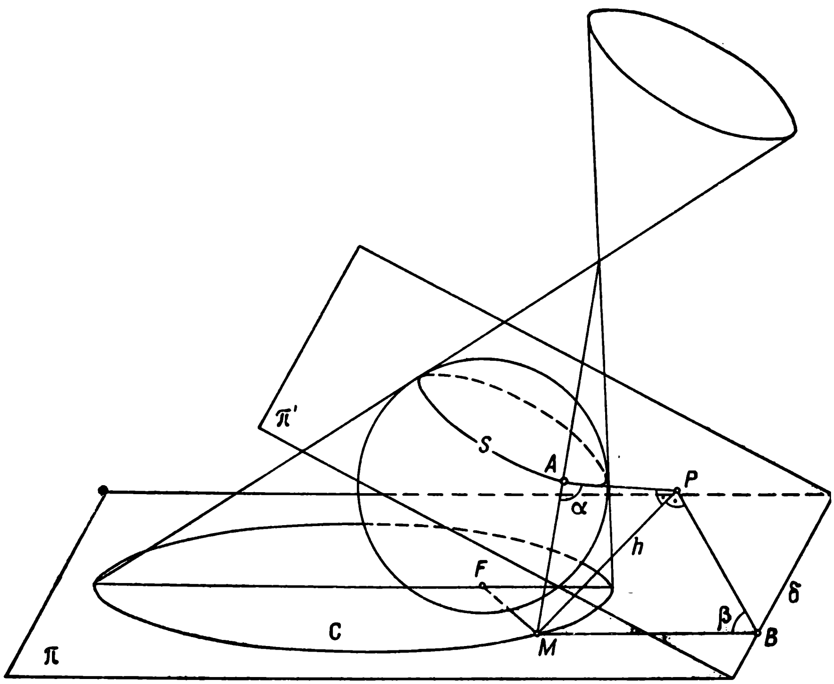


Рис. 193

кость π', а B — ортогональная проекция точки P на прямую δ, по которой пересекаются плоскости π и π' (тогда $MB \perp \delta$).

Имеем $MF = MA$ (как отрезки касательных, проведенных из точки M к одной и той же сфере) и далее:

$$MP = MA \sin\alpha = MF \sin\alpha, \quad MP = MB \sin\beta,$$

где α — угол образующих конической поверхности с плоскостью π', а β — острый угол между плоскостями π и π'.

Из последних соотношений находим

$$\frac{MF}{MB} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

т. е. все точки линии C принадлежат либо эллипсу Γ, либо гиперболе Γ, либо параболе Γ; F — фокус, δ — соответствующая этому фокусу директриса, а $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = e$ — эксцентриситет.

Если плоскость π пересекает все образующие конической поверхности (рис. 194), то $\alpha > \beta$. Значит, $\sin\alpha > \sin\beta$, эксцентриситет $e < 1$; если $\alpha = \beta$, т. е. плоскость π параллельна только одной образующей, то эксцентриситет $e = 1$, если, наконец, $\alpha < \beta$, то плоскость π параллельна двум образующим и эксцентриситет $e > 1$.

Докажем, что и обратно: любая точка линии Г принадлежит линии C; тогда можно утверждать, что линия C совпадает с линией Г, т. е. что сечение C прямого кругового конуса плоскостью, не проходящего через ее вершину, есть или эллипс, или гипербола, или парабола.

В самом деле, предположим, что на линии Г есть точка M, не лежащая на линии C. Проведем через точку M прямую, лежащую в плоскости π и пересекающую коническую поверхность в двух различных точках P и Q; точки P и Q лежат очевидно на линии C, а по доказанному, следовательно, и на линии Г. Мы пришли к противоречию, заключающемуся в том, что прямая линия MPQ пересекает линию Г (эллипс, гиперболу или параболу) в трех различных точках M, P и Q.

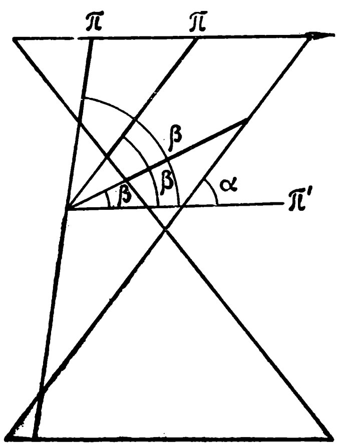


Рис. 194

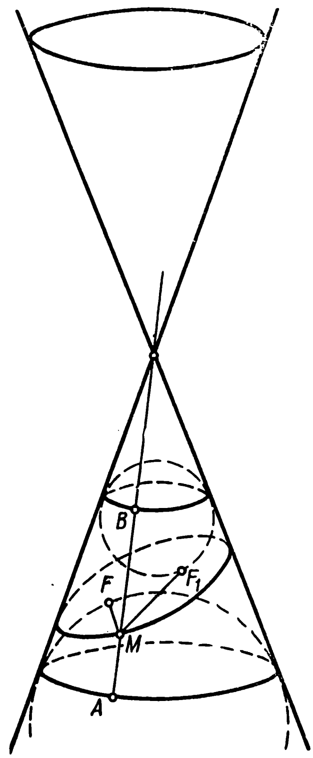


Рис. 195

Замечание. Второй фокус F' эллипса или гиперболы является точкой прикосновения к плоскости π второй сферы, вписанной в коническую поверхность и касающейся плоскости π.

При этом для любой точки линии C, плоскость которой пересекает все образующие (рис. 195), имеем $MF = MA$, $MF_1 = MB$

и $MF_1+MF=AB=\text{const}$, а для любой точки линии C, плоскость которой параллельна двум образующим конической поверхности, $MF=MA$, $MF_1=MB$ и $MF_1-MF=AB=\text{const}$ (рис. 196).

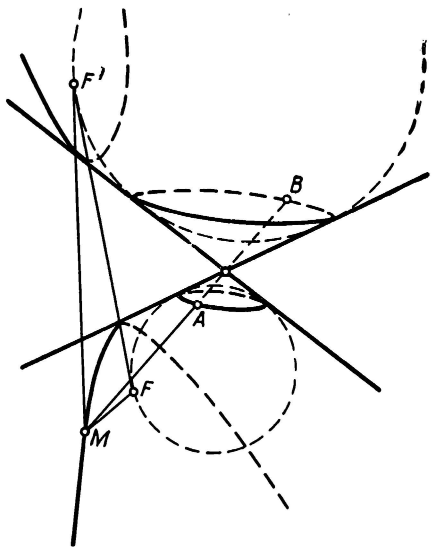


Рис. 196

Сферы, касающиеся конической поверхности и секущей плоскости, называются шарами Данделена.

§ 127. Примеры и задачи к главе VIII

1. Задачи с решениями

Пример 1. Составить уравнения касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1,$$

проведенных из точки A (12, -3).

Решение. Уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

имеет вид

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1,$$

где (x_0, y_0) — точка касания. Уравнение касательной к данному эллипсу будет иметь вид

$$\frac{x_0x}{32}+\frac{y_0y}{18}=1.$$

Так как касательная проходит через точку $A(12, -3)$, то координаты точки A должны удовлетворять этому уравнению; подставляя в последнее уравнение вместо x и y координаты точки A, получим

$$\frac{12x_0}{32}-\frac{3y_0}{18}=1, \quad \text{или} \quad 9x_0-4y_0=24. \tag{1}$$

Но точка прикосновения (x_0, y_0) лежит на данном эллипсе, поэтому

$$\frac{x_0^2}{32}+\frac{y_0^2}{18}=1. \tag{2}$$

Решая систему уравнений (1) и (2), находим два решения

$$x_0'=4, \quad y_0'=3; \quad x_0''=\frac{4}{5}, \quad y_0''=-\frac{21}{5}.$$

Искомых касательных две; их уравнения получим, подставляя в уравнение

$$\frac{x_0x}{32}+\frac{y_0y}{18}=1$$

вместо x_0 и y_0 один раз 4 и 3, другой раз $\frac{4}{5}$ и $-\frac{21}{5}$:

$$\frac{4x}{32}+\frac{3y}{18}=1, \quad \frac{\frac{4}{5}x}{32}-\frac{\frac{21}{5}y}{18}=1,$$

или

$$3x+4y-24=0, \quad 3x-28y-120=0.$$

Пример 2. Составить уравнение гиперболы, асимптотами которой являются прямые

$$y=\pm 2x$$

и которая проходит через точку A (1, 3).

Решение. Биссектрисы угла между асимптотами гиперболы являются осями гиперболы. Но биссектрисами углов между данными прямыми служат оси координат. Значит, осями гиперболы служат оси координат и потому ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

если действительная ось совпадает с осью Ox, и в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \tag{2}$$

если действительная ось совпадает с осью Oy. Так как мы не знаем, какой из этих случаев имеет место в данной задаче, то необходимо исследовать обе возможности. Предположим сначала, что уравнение гиперболы имеет вид (1), тогда из условия прохождения гиперболы (1) через данную точку (1, 3) имеем

$$\frac{1}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1. \tag{3}$$

Так как угловой коэффициент одной из асимптот гиперболы (1) равен $\frac{b}{a}$, то в нашем случае

$$\frac{b}{a}=2, \quad \text{или} \quad \frac{b^2}{a^2}=4. \tag{4}$$

Решая совместно систему уравнений (3) и (4) относительно a^2 и b^2, находим

$$a^2=-\frac{5}{4}<0, \quad b^2=-5<0,$$

что невозможно. Таким образом, не существует гиперболы, действительной осью которой является ось Ox и которая удовлетворяет условиям задачи.

Возьмем теперь искомое уравнение в виде (2). Подставляя в это уравнение вместо x и y координаты точки A, получим

$$\frac{1}{a^2}-\frac{9}{b^2}=-1$$

и, кроме того, по-прежнему

$$\frac{b}{a}=2, \quad \text{или} \quad \frac{b^2}{a^2}=4.$$

Решая теперь эту систему, находим

$$a^2=\frac{5}{4}, \quad b^2=5$$

и искомое уравнение

$$\frac{x^2}{\frac{5}{4}}-\frac{y^2}{5}=-1.$$

Пример 3. Через точку $A(2, 1)$ провести такую хорду параболы $y^2=4x$, которая делилась бы в данной точке пополам.

Решение. Пусть $y=kx+b$ — уравнение искомой хорды. Ординаты y_1 и y_2 точки пересечения этой прямой с данной параболой определяются из уравнения

$$y^2=4\,\frac{y-b}{k}.$$

Откуда следует, что

$$y_1+y_2=\frac{4}{k}.$$

Но $\frac{y_1+y_2}{2}$ — ордината середины хорды, и эта ордината должна быть равна ординате данной точки. Таким образом, $\frac{2}{k}=1$, откуда $k=2$ и искомое уравнение

$$y-1=2(x-2), \quad \text{или} \quad 2x-y-3=0.$$

Пример 4. Доказать, что произведение расстояний от фокусов эллипса до любой касательной к нему равно квадрату малой полуоси.

Доказательство. Пусть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

уравнение эллипса. Возьмем уравнение касательной к нему в произвольной точке (x_0, y_0):

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Находим расстояния от фокусов $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ до этой касательной

$$d_1=\frac{\left|-\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}, \quad d_2=\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Отсюда

$$d_1d_2=\frac{\left|\frac{c^2x_0^2}{a^4}-1\right|}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}=\frac{\left|\frac{(a^2-b^2)\,x_0^2}{a^4}-1\right|}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}=\frac{\left|\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{b^2x_0^2}{a^4}-1\right|}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}=$$

$$=\frac{\left|1-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{b^2x_0^2}{a^4}\right|}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}=\frac{\left|\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{b^2x_0^2}{a^4}\right|}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}=b^2\,\frac{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}=b^2.$$

Пример 5. Фокус линии второго порядка находится в точке $F\,(3,\ 0)$, директрисой, соответствующей этому фокусу, является прямая $x=12$. Определить вид линии и составить ее уравнение, зная, что она проходит через точку $A\,(7,\ 3)$.

Решение. Расстояние от точки A до точки F равно

$$AF=\sqrt{(7-3)^2+(3-0)^2}=5.$$

Расстояние от точки $A\,(7,\ 3)$ до директрисы равно

$$d_0=|\,7-12\,|=5.$$

Так как $AF=d_0$, то эксцентриситет линии равен 1 и, значит, искомая линия — парабола.

Пусть $M\,(x,\ y)$ — произвольная точка этой параболы. Тогда

$$MF=\sqrt{(x-3)^2+y^2},$$

а расстояние от точки M до директрисы $x-12=0$ равно

$$d=|\,x-12\,|$$

Отсюда

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=|\,x-12\,|, \qquad \text{или} \qquad y^2+18x-135=0.$$

Пример 6. Найти фокусы и директрисы равносторонней гиперболы $xy=8$.

Решение. Действительной осью данной гиперболы является биссектриса первого и третьего координатных углов.

Решая ее уравнение $y=x$ совместно с уравнением гиперболы $xy=8$, найдем вершины гиперболы

$$A_1\,(\sqrt{8},\ \sqrt{8}),\quad A_2\,(-\sqrt{8},\ -\sqrt{8}).$$

Длину действительной полуоси гиперболы найдем как расстояние от центра гиперболы до ее вершины: $a=4$. Так как эксцентриситет равносторонней гиперболы

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}, \quad \text{то} \quad c=a\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$$

Так как фокусы лежат на действительной оси гиперболы, совпадающей с биссектрисой первого и третьего координатных углов, и отстоят от центра гиперболы на расстоянии $c=4\sqrt{2}$, то координаты фокусов $F_1\,(4,\ 4)$, $F_2\,(-4,\ -4)$. Расстояние от центра до директрисы

$$d=\frac{a^2}{c}=\frac{16}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2},$$

поэтому координаты точки пересечения директрисы с действительной осью

$$D_1(2,\ 2) \quad \text{и} \quad D_2(-2,\ -2).$$

Так как директрисы перпендикулярны действительной оси гиперболы, а угловой коэффициент последней равен 1, то угловой коэффициент директрисы равен -1, поэтому уравнения директрис будут:

$$y-2=-(x-2), \quad \text{или} \quad x+y-4=0,$$

и

$$y+2=-(x+2), \quad \text{или} \quad x+y+4=0.$$

Пример 7. Найти точки эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b,$$

в которых нормаль к эллипсу наиболее удалена от его центра. Найти это наибольшее расстояние.

Решение. Пусть $(x_0,\ y_0)$ — искомая точка. Уравнение нормали к данному эллипсу в этой точке имеет вид

$$-\frac{y_0}{b^2}(x-x_0)+\frac{x_0}{a^2}(y-y_0)=0,$$

или

$$-\frac{y_0}{b^2}x+\frac{x_0}{a^2}y+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x_0y_0=0,$$

или

$$-\frac{y_0}{b^2}x+\frac{x_0}{a^2}y+\frac{c^2}{a^2b^2}x_0y_0=0.$$

Расстояние d от центра данного эллипса до этой нормали равно

$$d=\frac{\frac{c^2}{a^2b^2}|x_0y_0|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Подставим сюда выражения для x_0 и y_0 через эксцентрический угол φ точки $(x_0,\ y_0)$ данного эллипса:

$$x_0=a\cos\varphi, \quad y_0=b\sin\varphi;$$

получим

$$d=\frac{\frac{c^2}{ab}|\sin\varphi\cos\varphi|}{\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{a^2}}}=\frac{c^2|\sin\varphi\cos\varphi|}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}}.$$

В силу того что эллипс симметричен относительно своих осей, можно ограничиться рассмотрением значений φ из интервала $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. В таком случае

$$d=\frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}}=\frac{c^2}{\sqrt{a^2\sec^2\varphi+b^2\operatorname{cosec}^2\varphi}}=$$

$$=\frac{c^2}{\sqrt{a^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)+b^2(1+\operatorname{ctg}^2\varphi)}}=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+a^2\operatorname{tg}^2\varphi+b^2\operatorname{ctg}^2\varphi}}=$$

$$=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+2ab+(a\operatorname{tg}\varphi-b\operatorname{ctg}\varphi)^2}}$$

Отсюда следует, что d будет наибольшим, если $a\operatorname{tg}\varphi-b\operatorname{ctg}\varphi=0$, и это наибольшее значение d равно

$$d_{\max}=\frac{c^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b.$$

Решая уравнение

$$a\operatorname{tg}\varphi-b\operatorname{ctg}\varphi=0,$$

находим

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{b}{a},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right),$$

следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\qquad \sin\varphi=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}.$$

Искомая точка $\left(\text{для } 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ имеет координаты

$$x_0=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\qquad y_0=\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}.$$

Всего искомых точек четыре:

$$\left(\pm\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\quad \pm\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right).$$

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение семейства всех эллипсов, имеющих одни и те же фокусы $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$.

Отв. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$

2. Составить уравнения касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

проходящих через точку (10,4).

Отв. $y=4,\quad 16x-15y-100=0.$

3. При каком необходимом и достаточном условии прямая

$$Ax+By+C=0$$

1) касается эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

2) пересекает эллипс,
3) не пересекает его?

Отв. 1) $A^2a^2+B^2b^2-C^2=0$; 2) $A^2a^2+B^2b^2-C^2>0$; 3) $A^2a^2+B^2b^2-C^2<0$.

4. Доказать, что касательные к эллипсу отсекают на двух касательных к нему, проведенных в концах большей оси, отрезки, произведение которых равно квадрату малой полуоси эллипса.

5. Доказать, что отрезок любой касательной к эллипсу, заключенный между касательными, проведенными в концах большей оси, виден из любого фокуса под прямым углом.

6. Найти геометрическое место точек, из которых эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

виден под прямым углом.

Отв. Окружность $x^2+y^2=a^2+b^2$.

7. Эллипс при движении по плоскости касается двух взаимно перпендикулярных прямых. Какую линию описывает его центр?

Отв. Окружность.

8. Составить уравнение эллипса, фокусы которого $(-3, 0)$ и $(3, 0)$ и который касается прямой $x+y-5=0$.

Отв. $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$.

9. Найти геометрическое место проекций какого-нибудь фокуса эллипса на касательные к нему.

Отв. Окружность.

10. Найти геометрическое место точек, симметричных с каким-либо фокусом эллипса относительно касательных к нему.

Отв. Окружность.

11. Найти произведение расстояний от любого фокуса эллипса до параллельных, касательных к нему.

Отв. Квадрат меньшей полуоси.

12. При каком условии из точки (x_0, y_0) можно провести касательные к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Составить уравнение линии, распадающейся на касательные, проведенные к данному эллипсу из этой точки.

Отв. $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$;

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1\right)^2=0.$$

13. Найти углы между касательными, проведенными из точки (x_0, y_0) к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Отв.

$$\operatorname{ctg} \alpha_{1,2} = \pm \frac{x_0^2 + y_0^2 - a^2 - b^2}{2ab\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1}}.$$

14. Доказать, что сумма квадратов обратных величин длин двух взаимно перпендикулярных радиусов эллипса есть величина постоянная.

15. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус эллипса делит проходящую через него хорду, есть величина постоянная. Доказать, что и отношение произведения этих отрезков к длине хорды также постоянно.

16. Найти длину отрезков (считая от центра гиперболы), отсекаемых директрисами гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

на ее асимптотах.

Отв. a.

17. Доказать, что директриса гиперболы проходит через проекцию соответствующего ей фокуса на любую из асимптот. Найти также расстояние от любого фокуса гиперболы до любой из асимптот.

Отв. Длина мнимой полуоси.

18. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная.

19. Составить уравнения касательных к гиперболе

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1,$$

проходящих через точку M (1, 4).

Отв. $x = 1$, $5x - 2y + 3 = 0$.

20. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax + By + C = 0$ 1) касается гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

2) пересекает гиперболу; 3) не пересекает ее?

Отв. 1) $a^2A^2 - b^2B^2 - C^2 = 0$; $a^2A^2 - b^2B^2 \neq 0$; 2) $a^2A^2 - b^2B^2 - C^2 < 0$ (исключая асимптоты); 3) $a^2A^2 - b^2B^2 - C^2 > 0$.

21. Определить произведение расстояний от любого фокуса гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

до любой касательной к ней.

Отв. b^2.

22. Определить геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых касаются гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Отв. Пустое множество, если $a^2 < b^2$; окружность $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$, если $a > b$.

23. Доказать, что расстояние от любой точки M гиперболы до ее фокуса F равно отрезку прямой, проходящей через эту точку параллельно асимптоте, заключенному между точкой M и директрисой, соответствующей фокусу F.

24. Составить уравнение гиперболы, зная уравнения ее асимптот $y=\pm\frac{1}{2}x$ и уравнение $5x-6y-8=0$ одной из касательных в ней.

Отв. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

25. Найти геометрическое место проекций какого-либо фокуса гиперболы на касательные к ней.

Отв Окружность.

26. Найти геометрическое место точек, симметричных с каким-нибудь фокусом гиперболы относительно касательных к ней.

Отв. Окружность.

27. 1) При каком условии из точки (x_0, y_0) можно провести к гиперболе две различные касательные? Составить уравнение пары этих касательных. 2) При каком условии из точки (x_0, y_0) к данной гиперболе можно провести только одну касательную? Составить ее уравнение.

Отв. 1) $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$, $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\neq 0$;

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}-1\right)^2=0.$$

2) При условии $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0$, причем x_0 и y_0 не равны нулю одновременно, или при условии, что $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$. Если $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$, то уравнение касательной имеет вид $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$, а если $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0$, но x_0 и y_0 не равны нулю одновременно, т. е. точка (x_0, y_0) лежит на асимптоте гиперболы, но не совпадает с ее центром, то уравнение касательной имеет вид $\left(1+\frac{x_0^2}{a^2}\right)\frac{x}{a}+\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}-\frac{2x_0}{a}=0$ $\left(\text{если точка } (x_0, y_0) \text{ лежит на асимптоте } y=\frac{b}{a}x\right)$.

28. Найти углы между касательными к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

проведенными из точки (x_0, y_0).

Отв. $\operatorname{ctg}\alpha_{1,2}=\pm\frac{x_0^2+y_0^2-a^2+b^2}{2ab\sqrt{-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+1}}$ $\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1<0\right)$.

29. Доказать, что произведение отрезков, отсекаемых касательной к гиперболе на ее асимптотах (считая от центра), равно квадрату расстояния от центра до фокуса.

30. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

и произвольной касательной к ней.

Отв. ab.

31. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе в точке M_0, заключенный между ее асимптотами, точкой M_0 делится пополам.

32. Вычислить площадь параллелограмма, одна из вершин которого есть точка гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

а две стороны параллелограмма лежат на асимптотах.

Отв. $\frac{1}{2}ab$.

33. При каком необходимом и достаточном условии касательные, проведенные из точки (x_0, y_0) к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

касаются различных ее ветвей?

Отв. $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<0$.

34. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0) лежит в области, ограниченной одной из ветвей гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

и двумя соответствующими лучами, выходящими из центра гиперболы и идущими по ее асимптотам?

Отв. $0<\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$.

35. Доказать, что софокусные эллипс и гипербола (т. е. эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы) пересекаются ортогонально.

36. Доказать, что отрезок произвольной касательной к гиперболе, заключенный между двумя данными касательными к этой гиперболе, виден из любого фокуса под прямым углом.

37. Доказать, что точки пересечения касательной к гиперболе с ее асимптотами лежат на одной окружности с фокусами.

38. Доказать, что прямые, соединяющие какие-либо две фиксированные точки гиперболы с произвольной переменной точкой той же гиперболы, отсекают на любой ее асимптоте отрезок постоянной длины.

39. Доказать, что две равносторонние гиперболы, асимптоты одной из которых являются осями симметрии другой, ортогональны.

40. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус гиперболы делит проходящую через него хорду, постоянна. Доказать, что отношение произведения этих отрезков к длине хорды также постоянно.

41. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax+By+C=0$ 1) касается параболы $y^2=2px$; 2) пересекает параболу $y^2=2px$; 3) не пересекает параболу.

Отв. 1) $B^2p-2AC=0$; 2) $B^2p-2AC>0$; 3) $B^2p-2AC<0$,

42. Найти геометрическое место проекций фокуса параболы на касательные к ней.

Отв. Касательная к параболе в ее вершине.

43. Найти геометрическое место точек, симметричных фокусу параболы относительно касательных к ней.

Отв. Директриса.

44. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых касательные, проведенные к параболе, взаимно перпендикулярны.

Отв. Директриса.

45. Доказать, что фокус параболы и точки прикосновения двух касательных к параболе, проведенных из любой точки директрисы, принадлежат одной прямой.

46. Доказать, что отрезок произвольной касательной к параболе, заключенный между двумя фиксированными касательными к ней, проектируется на директрису в отрезок постоянной длины.

47. Доказать, что если точка перемещается по одной из касательных к параболе, то угол между прямой, соединяющей эту точку с фокусом, и второй касательной к параболе, проходящей через ту же точку, сохраняет постоянную величину.

48. Пусть M — точка пересечения касательных к параболе в точках M_1 и M_2, а F — фокус параболы. Доказать, что

$$1)\ MF^2 = M_1F \cdot M_2F;\quad 2)\ \frac{M_1F}{M_2F} = \left(\frac{M_1M}{M_2M}\right)^2.$$

49. Доказать, что прямые, соединяющие основания перпендикуляров, опущенных из каждой точки одной стороны треугольника на две другие его стороны, касаются одной и той же параболы. Фокусом этой параболы служит основание соответствующей высоты треугольника. Директрисой является прямая, соединяющая основания двух других высот.

50. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус параболы делит проходящую через него хорду, постоянна. Доказать, что отношение произведения длин этих отрезков к длине хорды также постоянно.

51. Фокус эллипса проектируется в переменную точку M на переменную плоскость, проходящую через касательную к эллипсу и образующую с плоскостью эллипса постоянный угол. Доказать, что $OM = \text{const}$ (O — центр эллипса).

52. Рассмотрим семейство C_λ линий второго порядка:

$$x^2 - 2y + \lambda (y^2 - 2x) = 0.$$

Исследовать линию при условии, что λ принимает все действительные значения. Вычислить ее полуоси и эксцентриситет.

Отв. C_0 — парабола; C_λ при $\lambda > 0$ — эллипс (C_1 — окружность), C_λ при $\lambda < 0$ и $\lambda \neq -1$ — гипербола; C_{-1} — две пересекающиеся прямые. Если $\lambda \neq 0$, то координаты центра $\lambda,\ \frac{1}{\lambda}$.

Если $\lambda \neq 0$, то уравнение преобразуется к виду

$$(x-\lambda)^2 + \lambda\left(y - \frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{\lambda^3+1}{\lambda}.$$

Центр $I\left(\lambda,\ \frac{1}{\lambda}\right)$; производя параллельный перенос осей

$$X = x - \lambda,\quad Y = y - \frac{1}{\lambda},$$

получим

$$X^2+\lambda Y^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}.$$

Если $0<\lambda<1$, то фокальной осью является ось IY, полуоси $a=\sqrt{\frac{\lambda^3+1}{\lambda}}<\sqrt{\frac{\lambda^3+1}{\lambda^2}}=b$, эксцентриситет $e=\sqrt{1-\lambda}$. В случае $\lambda>1$ фокальной осью является ось IX. Полуоси $a=\sqrt{\frac{\lambda^3+1}{\lambda}}>\sqrt{\frac{\lambda^3+1}{\lambda^2}}=b$, эксцентриситет $e=\sqrt{1-\frac{1}{\lambda}}$. В случае $-1<\lambda<0$ фокальная ось гиперболы C_λ — ось IY, полуоси действительная $b=\sqrt{\frac{\lambda^3+1}{\lambda^2}}$, мнимая $a=\sqrt{-\frac{\lambda^3+1}{\lambda}}$, эксцентриситет $e=\sqrt{1-\lambda}$. В случае $\lambda<-1$ фокальная ось — ось IX, полуоси $a=\sqrt{\frac{\lambda^3+1}{\lambda}}$, $b=\sqrt{-\frac{\lambda^3+1}{\lambda^2}}$, эксцентриситет $e=\sqrt{1-\frac{1}{\lambda}}$.

ГЛАВА IX

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ КАНОНИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

§ 128. Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Будем считать, что $a \geqslant b \geqslant c$. Если на эллипсоиде (1) лежит точка (x, y, z), то на нем лежат и точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ (с любым набором знаков плюс и минус). Отсюда следует, что для

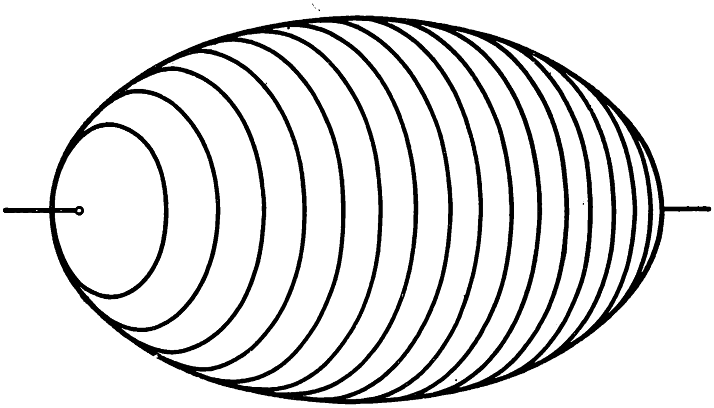


Рис. 197

эллипсоида (1) начало координат O является его центром симметрии и называется центром эллипсоида; оси координат являются осями симметрии и называются главными осями; плоскости координат являются плоскостями симметрии и называются главными плоскостями.

Если $a > b > c$, то эллипсоид (1) называется трехосным.

Если $a > b = c$, то эллипсоид (1) называется вытянутым эллипсоидом вращения; он получается вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вокруг его большой оси (рис. 197).

Если $a = b > c$, то эллипсоид (1) называется сжатым эллипсоидом вращения; он получается вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вокруг его малой оси (рис. 198).

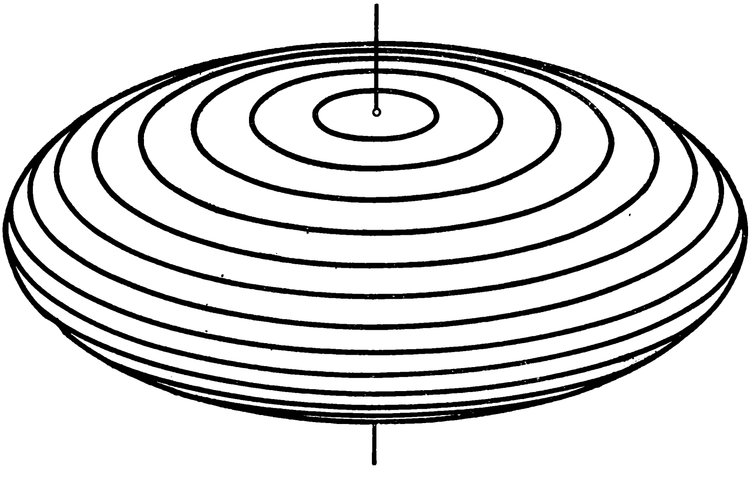


Рис. 198

Если $a = b = c$, то эллипсоид (1) является сферой радиуса a с центром в начале координат.

Вершинами трехосного эллипсоида называются точки пересечения эллипсоида с его главными осями. Трехосный эллипсоид имеет шесть вершин $(\pm a,\ 0,\ 0)$, $(0,\ \pm b,\ 0)$, $(0,\ 0,\ \pm c)$.

Из уравнения (1) следует, что

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \quad |z| \leqslant c.$$

Это означает, что эллипсоид (1) лежит внутри прямоугольного параллелепипеда с вершинами $(\pm a,\ \pm b,\ \pm c)$. Каждая грань этого параллелепипеда имеет с эллипсоидом (1) только одну общую точку — его вершину.

Плоскость xOy пересекает эллипсоид (1) по линии, выраженной уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad z=0,$$

или эквивалентной системой

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0. \tag{2}$$

Аналогично плоскость yOz пересекает эллипсоид (1) по линии, уравнения которой

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0, \tag{3}$$

а плоскость zOx по линии

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0. \tag{4}$$

Линии (2), (3), (4) суть эллипсы. Эти эллипсы, т. е. сечения эллипсоида (1) его главными плоскостями, называются главными сечениями.

Рассмотрим сечения эллипсоида (1) плоскостями, параллельными какой-нибудь координатной плоскости, например плоскостями, параллельными плоскости xOy, т. е. плоскостями, выражаемыми уравнением

$$z=h,$$

где h — произвольное действительное число.

Уравнения линии сечения имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad z=h,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1, \quad z=h,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h. \tag{5}$$

Если $|h|>c$, то первому уравнению этой системы не удовлетворяет ни одна пара действительных чисел x, y, т. е. система (5) не имеет действительных решений x, y, z. Это означает, что плоскость $z=h$ при $|h|>c$ не пересекает эллипсоид (1).

При $h=\pm c$ первое уравнение системы (5) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,$$

откуда $x=y=0$. Таким образом, плоскости $z=\pm c$ встречают эллипсоид (1) в его вершинах $(0,\ 0,\ \pm c)$. Наконец, если $|h|<c$, то систему уравнений, выражающих линию сечения, можно переписать так:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1, \quad z=h,$$

или

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1, \quad z=h.$$

Эти уравнения являются уравнениями эллипса, лежащего в плоскости сечения $z=h$; центр этого эллипса — точка $(0, 0, h)$, оси симметрии параллельны осям Ox и Oy, а полуоси равны

$$a'=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \quad b'=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

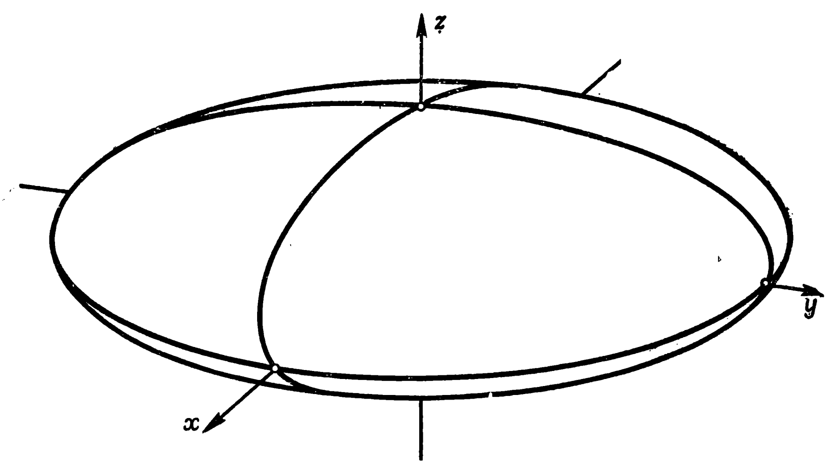


Рис. 199

Рассмотренные сечения дают представление о форме эллипсоида (рис. 199). Отметим, что эллипсоид (1) может быть получен из сферы $X^2+Y^2+Z^2=1$, если произвести три равномерных сжатия:

$$x=aX, \quad y=bY, \quad z=cZ$$

к трем попарно перпендикулярным плоскостям yOz, zOx и xOy, проходящим через центр этой сферы *.

§ 129. Однополостный гиперболоид

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Будем считать, что $a \geqslant b$. Так же как в предыдущем параграфе доказывается, что для однополостного гиперболоида (1) начало координат является центром симметрии (центр), оси координат — осями симметрии (главные оси), а координатные плоскости — плоскостями симметрии (главные плоскости).

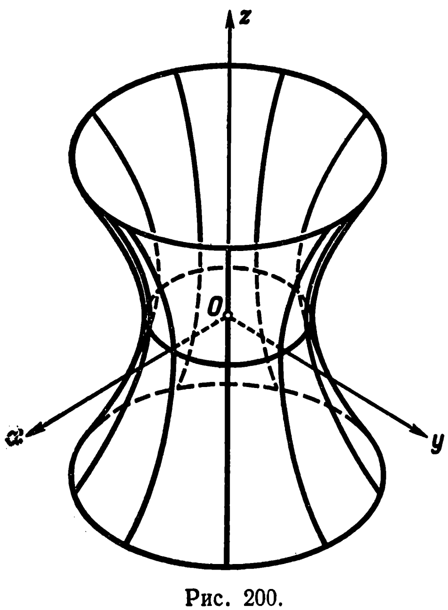


Рис. 200.

Если в уравнении (1) $a=b$, то однополостный гиперболоид (1) называется однополостным гиперболоидом вращения, так как может быть получен вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг ее мнимой оси (рис. 200).

Вершинами однополостного гиперболоида называются точки пересечения гиперболоида с его главными осями. Гиперболоид (1) в случае $a \neq b$ имеет четыре вершины $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$.

Плоскость xOy пересекает однополостный гиперболоид (1) по эллипсу, выражаемому уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0,$$

* Равномерное сжатие пространства к плоскости определяется аналогично тому, как было определено в § 105 равномерное сжатие плоскости к прямой: фиксируем в пространстве плоскость П и фиксируем число $k \neq 0$. Пусть M — произвольная точка пространства, а P — ее ортогональная проекция на плоскость П. Поставим в соответствие точке M точку M', такую, что $\overrightarrow{PM'}=k\overrightarrow{PM}$. Это соответствие и называется равномерным сжатием пространства к плоскости П с коэффициентом сжатия, равным k.

называемому **горловым** эллипсом однополостного гиперболоида (1). Плоскость yOz пересекает однополостный гиперболоид (1) по гиперболе, выражаемой уравнениями

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0,$$

а плоскость xOz — по гиперболе, выражаемой уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0.$$

Рассмотрим сечения однополостного гиперболоида (1) плоскостями, параллельными координатной плоскости xOy, т. е. плоскостями $z=h$.

Уравнения линии сечения будут

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad z=h;$$

эта система уравнений эквивалентна следующей:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=1, \quad z=h,$$

или

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1, \quad z=h.$$

Этими уравнениями выражается эллипс с полуосями

$$a'=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad b'=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \tag{2}$$

с центром на оси Oz в точке $(0, 0, h)$ и осями, параллельными соответственно осям Ox и Oy. Из выражений (2) следует, что

$$a' \geqslant a, \quad b' \geqslant b,$$

т. е. горловой эллипс является наименьшим из всех эллипсов, по которым однополостный гиперболоид (1) рассекается плоскостями, параллельными плоскости xOy.

Плоскость $x=h$, параллельная плоскости yOz, пересекает однополостный гиперболоид (1) по линии, выражаемой уравнениями

$$\frac{h^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=h,$$

или

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}, \quad x=h.$$

Если $|h| < a$, то этими уравнениями определяется гипербола C с центром в точке $(h, 0, 0)$, лежащая в плоскости $x=h$, действительная ось которой параллельна оси Oy, а мнимая—оси Oz. Полуоси этой гиперболы:

$$b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}} \text{ (действительная полуось),}$$

$$c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}} \text{ (мнимая полуось).}$$

Если $|h|=a$, то уравнения линии сечения имеют вид

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad x=\pm a.$$

Уравнения

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad x=a$$

являются уравнениями двух пересекающихся прямых p и q:

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0, \quad x=a \text{ — прямая } p;$$

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0, \quad x=a \text{ — прямая } q.$$

Аналогично уравнения

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad x=-a$$

являются уравнениями двух прямых:

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0, \quad x=-a \text{ и } \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0, \quad x=-a.$$

Если $|h|>a$, то в сечении получается гипербола, уравнения которой

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2}=1, \quad x=h.$$

Действительная ось этой гиперболы параллельна оси Oz, мнимая—оси Oy; центр лежит в точке $(h, 0, 0)$.

Асимптоты всех гипербол, получающихся при пересечении однополостного гиперболоида (1) плоскостями $x=h\,(h\neq\pm a)$, параллельны прямым, получающимся при пересечении гиперболоида плоскостями $x=\pm a$.

Сечения плоскостями $y=h$, параллельными плоскости xOz, аналогичны рассмотренным.

Все эти сечения дают представление о форме поверхности однополостного гиперболоида (рис. 201).

Всякий однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

можно получить из однополостного гиперболоида вращения

$$\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1,$$

производя равномерное сжатие

$$X=\frac{b}{a}x, \quad Y=y, \quad Z=z$$

к плоскости yOz.

Однополостный гиперболоид (1) можно получить из *равностороннего* однополостного гиперболоида вращения $X^2+Y^2-Z^2=1$, производя равномерные сжатия $x=aX$, $y=bY$, $z=cZ$ соответственно к плоскостям yOz, zOx и xOy с коэффициентами сжатия, равными a, b, c.

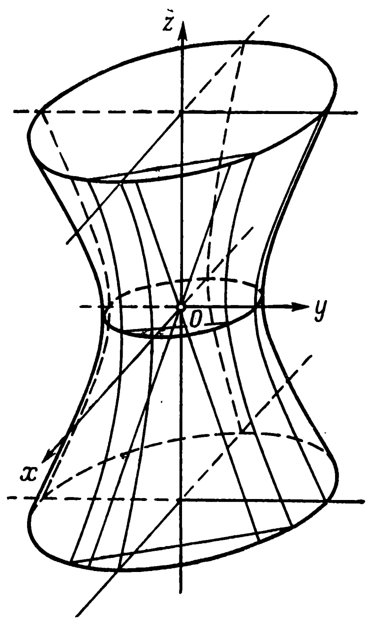


Рис. 201

§ 130. Двуполостный гиперболоид

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (1)$$

Начало координат является центром симметрии (ц е н т р) двуполостного гиперболоида, оси координат — осями симметрии (г л а в н ы е о с и), координатные плоскости — плоскостями симметрии (г л а в н ы е п л о с к о с т и).

Если в уравнении (1) $a=b$, то двуполостный гиперболоид (1) называется двуполостным гиперболоидом вращения, так как может быть получен вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

вокруг ее действительной оси Oz (рис. 202).

Вершинами двуполостного гиперболоида называются точки его пересечения с главной осью Oz. Двуполостный гиперболоид (1) имеет две вершины $(0, 0, \pm c)$.

Плоскости xOz и yOz пересекают двуполостный гиперболоид

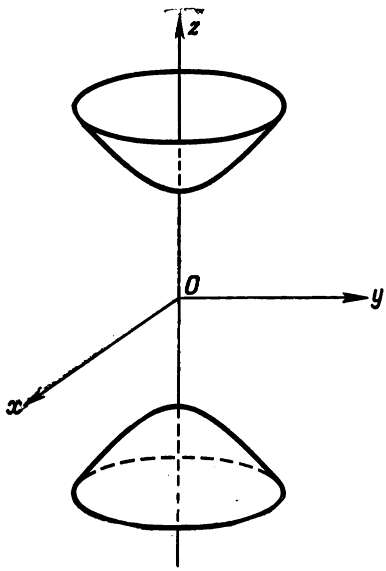


Рис. 202

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

по гиперболам

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad y=0 \quad \text{и}$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad x=0.$$

Сечение двуполостного гиперболоида плоскостью $z=h$ выражается уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, \quad z=h.$$

Если $|h|<c$, то первое уравнение не имеет действительных решений — плоскость $z=h$ не пересекает поверхности.

Если $h=\pm c$, то

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,$$

откуда

$$x=y=0,$$

плоскости $z=\pm c$ встречают поверхность двуполостного гиперболоида в его вершинах $(0, 0, \pm c)$. Если $|h|>c$, то уравнения линии сечения можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1, \quad z=h.$$

Этими уравнениями выражается эллипс с полуосями

$$a'=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \qquad b'=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$$

с центром в точке $(0, 0, h)$ и осями, соответственно параллельными осям Ox и Oy.

Плоскость $x=h$ пересекает поверхность двуполостного гиперболоида по линии, выражаемой уравнениями

$$\frac{h^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad x=h,$$

или

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\right)^2}=1,\quad x=h,$$

т. е. по гиперболе с центром в точке $(h, 0, 0)$, лежащей в плоскости $x=h$. Действительная ось этой гиперболы параллельна оси Oz, мнимая — оси Oy.

Аналогично исследуются сечения поверхности плоскостями $y=h$ (рис. 203).

Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

можно получить аффинным сжатием

$$X=\frac{b}{a}x,\quad Y=y,\quad Z=z$$

к плоскости yOz двуполостного гиперболоида вращения

$$\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=-1,$$

или из *равностороннего* двуполостного гиперболоида вращения

$$X^2+Y^2-Z^2=-1$$

тремя сжатиями

$$x=aX,\quad y=bY,\quad z=cZ.$$

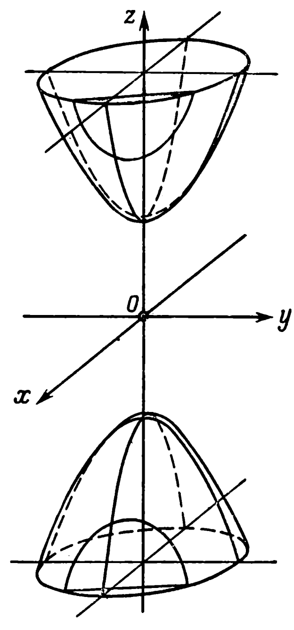


Рис. 203

§ 131. Конус второго порядка

Конусом второго порядка называется поверхность, уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{1}$$

(считаем, что в этом уравнении $a \geqslant b$). Начало координат, оси координат и координатные плоскости являются соответственно центром симметрии, осями симметрии и плоскостями симметрии и называются вершиной, главными осями и главными плоскостями. О с ь ю к о н у с а (1) обычно называют ось Oz.

Основное свойство конуса: если на конусе (1) лежит точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (не совпадающая с вершиной), то на нем лежат все точки прямой OM_0, проходящей через вершину O и эту точку M_0. В самом деле, если $M(x, y, z)$ — произвольная точка, лежащая на прямой OM_0, то

$$x=\lambda x_0, \quad y=\lambda y_0, \quad z=\lambda z_0$$

и потому

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\lambda^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0.$$

Таким образом, поверхность (1) образована прямыми, проходящими через начало координат. Поэтому для представления вида этой поверхности достаточно рассмотреть ее сечение какой-нибудь плоскостью $z=h$, параллельной плоскости xOy. В сечении получится эллипс, уравнения которого

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2}=1, \quad z=h.$$

Центр этого эллипса C лежит на оси Oz в точке $(0, 0, h)$, а значит, поверхность (1) образована прямыми, соединяющими начало координат со всеми точками эллипса C (рис. 204).

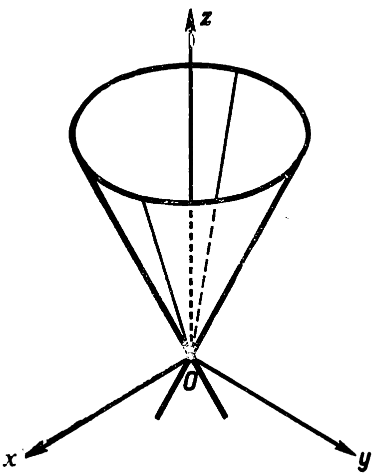


Рис. 204

Конус (1) может быть получен в результате равномерного сжатия

$$X=\frac{b}{a}x, \quad Y=y, \quad Z=z$$

к плоскости yOz конуса вращения

$$\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0,$$

полученного вращением вокруг оси Oz прямой

$$\frac{X}{b}-\frac{Z}{c}=0, \quad Y=0$$

или в результате сжатий к плоскостям yOz, zOx, xOy: $x=aX$, $y=bY$, $z=cZ$ из *равностороннего* конуса вращения $X^2+Y^2-Z^2=0$.

§ 132. Асимптотический конус гиперболоидов

Два гиперболоида (один однополостный, другой двуполостный)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1 \qquad (1)$$

называются **сопряженными**.

Конус второго порядка, выражаемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (2)$$

называется **асимптотическим** конусом для обоих гиперболоидов.

Докажем, что любая плоскость, проходящая через ось Oz, пересекает поверхность (1) по сопряженным гиперболам, а асимптотический конус (2) — по двум прямым, которые для этих сопряженных гипербол являются асимптотами. В самом деле, повернем оси координат вокруг оси Oz на угол α. Уравнения (1) и (2) в новой системе координат $Ox'y'z'$ будут иметь вид

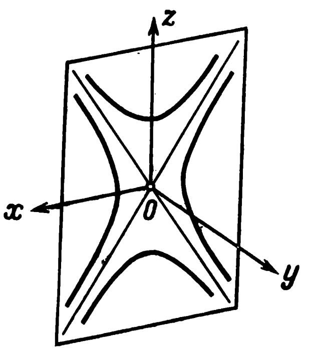


Рис. 205

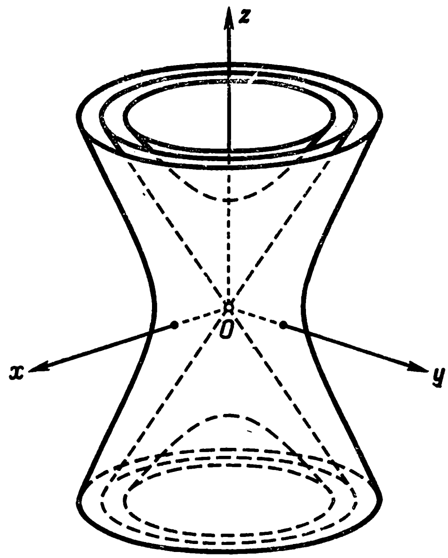


Рис. 206

$$\frac{(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2}{a^2}+\frac{(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1, \qquad (1')$$

$$\frac{(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2}{a^2}+\frac{(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (2')$$

Сечения этих поверхностей плоскостью $x'Oz$ выражаются уравнениями

$$x'^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1, \quad y'=0; \qquad (1'')$$

$$x'^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad y'=0. \qquad (2'')$$

Из уравнений видно, что сечениями являются две сопряженные гиперболы (1″) с полуосями $a'=\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}}$, $b'=c$, а прямые (2″) — асимптотами этих гипербол (рис. 205).

Заметим, что все гиперболоиды семейства

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=C$$

имеют общий асимптотический конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ (рис 206).}$$

§ 133. Эллиптический параболоид

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \text{ где } p>0,\ q>0. \tag{1}$$

Будем считать, что $p \geqslant q$. Если $p=q$, то эллиптический параболоид (1) — это параболоид вращения, так как получается вращением параболы

$$y^2=2pz$$

вокруг оси Oz, являющейся осью параболы.

Ось Oz является осью симметрии эллиптического параболоида (1) (она называется осью параболоида), а плоскости xOz и yOz — плоскостями симметрии (главные плоскости). Начало координат для эллиптического параболоида (1) является точкой пересечения этой поверхности с ее осью и называется вершиной.

Плоскость $z=h$ пересекает эллиптический параболоид (1) по линии

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad z=h, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h, \quad z=h. \tag{2}$$

Если $h<0$, то первое уравнение не имеет действительных решений, так как $p>0$, $q>0$; это означает, что плоскость $z=h$ при $h<0$ не пересекает эллиптический параболоид (1). Если $z=0$, то $x=y=0$, т. е. плоскость xOy имеет с эллиптическим параболоидом только одну общую точку — вершину (0, 0, 0). Если $h>0$, то, переписав уравнения (2) в виде

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2ph})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2qh})^2}=1, \quad z=h,$$

видим, что сечением является эллипс с центром в точке $(0, 0, h)$ и полуосями $a=\sqrt{2ph}$ и $b=\sqrt{2qh}$.

Плоскость xOz пересекает эллиптический параболоид (1) по параболе

$$x^2=2pz, \quad y=0,$$

а плоскость yOz — по параболе

$$y^2 = 2qz, \quad x = 0.$$

Таким образом, числа p и q — параметры парабол, получающихся в сечении параболоида его плоскостями симметрии (рис. 207).

Рассмотрим сечения эллиптического параболоида плоскостями, параллельными плоскости xOz, т. е. плоскостями, выражаемыми уравнением

$$y = t.$$

Уравнения линии сечения:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad y = t,$$

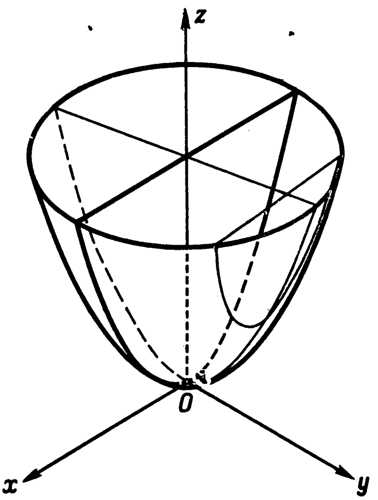


Рис. 207

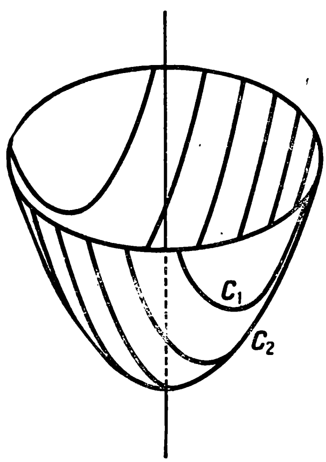


Рис. 208

или

$$\frac{x^2}{p} = 2z - \frac{t^2}{q}, \quad y = t,$$

или

$$x^2 = 2p\left(z - \frac{t^2}{2q}\right), \quad y = t.$$

Эти уравнения выражают параболу вершиной

$$\left(0, \; t, \; \frac{t^2}{2q}\right),$$

ось которой выражается уравнениями

$$x=0,\ y=t$$

и одинаково направлена с осью Oz. Параметр параболы

$$x^2=2p\left(z-\frac{t^2}{2q}\right),\ y=t$$

равен p, т. е. параметру главного сечения эллиптического параболоида плоскостью xOz.

Аналогичная картина получается и для сечений эллиптического параболоида (1) плоскостями, параллельными плоскости yOz.

Таким образом, эллиптический параболоид может быть образован параллельным переносом параболы C_1, при котором вершина параболы C_1 перемещается по параболе C_2; плоскость параболы C_2 перпендикулярна плоскости параболы C_1, а оси этих парабол параллельны и одинаково направлены (рис. 208).

Эллиптический параболоид (1) является образом параболоида вращения $X^2+Y^2=2qZ$ при равномерном сжатии пространства

$$X=\sqrt{\frac{q}{p}}\,x,\ Y=y,\ Z=z$$

к плоскости yOz $\left(\text{коэффициент сжатия } \sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

§ 134. Гиперболический параболоид

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ \text{где } p>0 \text{ и } q>0. \tag{1}$$

Для гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

плоскости xOz и yOz являются плоскостями симметрии, а ось Oz — осью симметрии.

Ось симметрии гиперболического параболоида называется просто его осью. Точка, в которой ось гиперболического параболоида пересекает эту поверхность, называется вершиной. Гиперболический параболоид (1) имеет вершину в начале координат.

Плоскости xOz и yOz, являющиеся для гиперболического параболоида (1) плоскостями симметрии, называются главными плоскостями гиперболического параболоида.

Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

в случае $p \neq q$ имеет только одну ось симметрии (ось Oz); если же $p = q$, то параболоид имеет еще две оси симметрии:

$$y = x,\ z = 0 \quad \text{и} \quad y = -x,\ z = 0.$$

В самом деле, если координаты точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению

$$x^2 - y^2 = 2pz,$$

то этому же уравнению удовлетворяют координаты точки $M'(y, x, -z)$, симметричной с точкой $M(x, y, z)$ относительно прямой $y = x$, $z = 0$. Так же доказывается, что прямая $y = -x$, $z = 0$ является осью симметрии.

Плоскость xOy пересекает гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

по двум прямым:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0,\ z = 0, \text{ или } \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0,\ z = 0,$$

и

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0,\ z = 0.$$

Плоскость $z = h$, параллельная плоскости xOy, пересекает гиперболический параболоид по гиперболе C_1:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h,\ z = h.$$

Если $h > 0$, то эти уравнения можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2ph})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2qh})^2} = 1,\ z = h,$$

это гипербола, расположенная в плоскости $z = h$ с центром в точке $(0, 0, h)$, действительная ось которой параллельна оси Ox, а мнимая — параллельна оси Oy.

Если $h < 0$, то уравнения линии сечения можно представить в виде

$$\frac{y^2}{(\sqrt{-2qh})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{-2ph})^2} = 1,\ z = h,$$

это гипербола C_2, расположенная в плоскости $z = h$ с центром в точке $(0, 0, h)$, действительная ось которой параллельна оси Oy, а мнимая — оси Ox. Асимптоты всех гипербол, получающихся при пересечении гиперболического параболоида (1) плоскостями $z = h$,

$h \neq 0$, параллельны прямым, по которым этот параболоид пересекается с плоскостью $z=0$.

Плоскость xOz пересекает гиперболический параболоид (1) по параболе C_3:

$$x^2 = 2pz, \quad y = 0,$$

а плоскость yOz — по параболе C_4:

$$y^2 = -2qz, \quad x = 0.$$

Мы видим, что числа p и q являются параметрами парабол, получающихся в сечении гиперболического параболоида (1) его главными плоскостями.

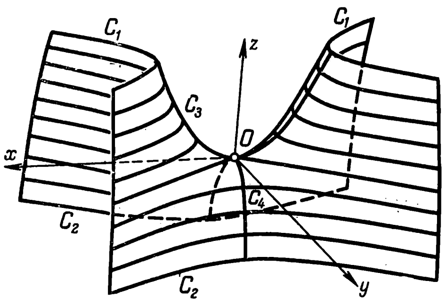


Рис. 209

Рассмотрим сечения гиперболического параболоида (1) плоскостями, параллельными плоскости xOz, т. е. плоскостями, выражаемыми уравнением

$$y = t.$$

Уравнения линии сечения имеют вид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad y = t, \quad \text{или}$$

$$x^2 = 2p\left(z + \frac{t^2}{2q}\right), \quad y = t.$$

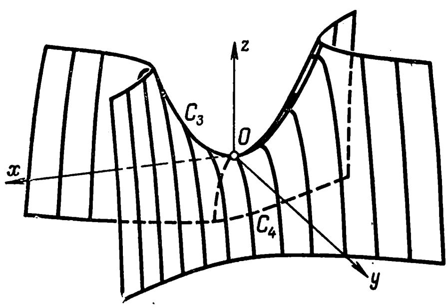


Рис. 210

Эти уравнения выражают параболу C_5 с вершиной в точке

$$\left(0, \ t, \ -\frac{t^2}{2q}\right),$$

ось которой выражается уравнениями

$$x = 0, \quad y = t,$$

а направление оси совпадает с положительным направлением оси Oz. Параметр параболы

$$x^2 = 2p\left(z + \frac{t^2}{2q}\right), \quad y = t$$

равен p, т. е. параметру главного сечения гиперболического параболоида плоскостью xOz.

Аналогичная картина получается и для сечений гиперболического параболоида плоскостями, параллельными плоскости yOz (рис. 209).

Таким образом, гиперболический параболоид может быть образован параллельным переносом параболы C_4, при котором вершина параболы C_4 перемещается по параболе C_3; плоскость параболы C_3 перпендикулярна плоскости параболы C_4, а оси этих парабол параллельны и противоположно направлены (рис. 210).

§ 135. Цилиндры второго порядка

Существует три типа цилиндров второго порядка: эллиптический (рис. 211)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

гиперболический (рис. 212)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

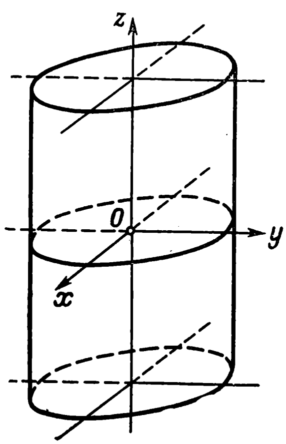


Рис. 211

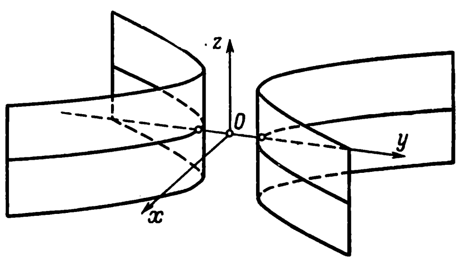


Рис. 212

параболический (рис. 213)

$$y^2=2px. \tag{3}$$

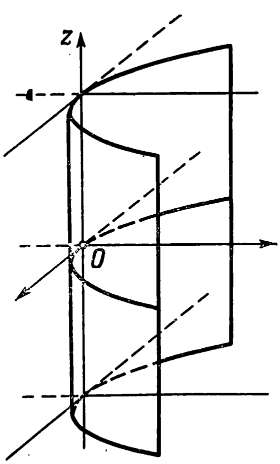


Рис. 213

Эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры суть поверхности, образованные прямыми линиями, проходящими через точки эллипса, гиперболы и параболы перпендикулярно плоскости каждой из этих линий. Эти линии — эллипс, гипербола, парабола — называются направляющими, а прямые, лежащие на поверхности цилиндра, — его образующими. Для цилиндров, заданных уравнениями (1), (2) и (3), направляющими линиями являются соответственно эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0,$$

гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0,$$

парабола

$$y^2=2px,\quad z=0,$$

а образующие параллельны оси Oz.

§ 136. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида

1. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида

Определение. *Прямая, все точки которой лежат на поверхности второго порядка, называется прямолинейной образующей этой поверхности.*

Мы знаем, что конические и цилиндрические поверхности второго порядка имеют прямолинейные образующие, причем каждая из этих поверхностей может быть образована движением прямой в пространстве.

Оказывается, что среди всех поверхностей второго порядка, кроме цилиндра, конуса и пар плоскостей, прямолинейными образующими обладают еще однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид, причем, так же как в случае цилиндра и конуса, обе эти поверхности могут быть образованы движением прямой в пространстве.

В этом пункте мы рассмотрим прямолинейные образующие однополостного гиперболоида.

Теорема 1. *Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две и только две его прямолинейные образующие.*

Доказательство. Пусть (x_0, y_0, z_0) — произвольная точка однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

и

$$x=x_0+lt,\quad y=y_0+mt,\quad z=z_0+nt \tag{2}$$

параметрические уравнения проходящей через нее прямой.

Чтобы найти точки, общие поверхности (1) и прямой (2), подставим в уравнение (1) вместо x, y, z их выражения из формул (2):

$$\frac{(x_0+lt)^2}{a^2}+\frac{(y_0+mt)^2}{b^2}-\frac{(z_0+nt)^2}{c^2}=1,$$

или

$$\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}-\frac{nz_0}{c^2}\right)t+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$

Так как точка (x_0, y_0, z_0) лежит на поверхности (1), то

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1, \qquad (1')$$

и последнее уравнение принимает вид

$$\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0l}{a^2}+\frac{y_0m}{b^2}-\frac{z_0n}{c^2}\right)t=0. \qquad (3)$$

Для того чтобы прямая (2) целиком лежала на поверхности (1), необходимо и достаточно, чтобы все ее точки лежали на этой поверхности, т. е. чтобы уравнение (3) удовлетворялось при всех значениях t, а это возможно тогда и только тогда, когда оба коэффициента при t^2 и t равны нулю:

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0, \qquad (4)$$

$$\frac{x_0l}{a^2}+\frac{y_0m}{b^2}-\frac{z_0n}{c^2}=0. \qquad (5)$$

Мы получили два уравнения относительно координат l, m, n направляющего вектора прямой (2). Из уравнения (4) следует, что $n\neq 0$, так как в противном случае $(n=0)$ мы имели бы

$$l=m=0.$$

Так как для определения направления прямой (2) играют роль лишь отношения $l:m:n$ и по доказанному $n\neq 0$, то можно положить $n=c$. Тогда система уравнений (4) и (5) примет вид

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}=1, \qquad (4')$$

$$\frac{x_0l}{a^2}+\frac{y_0m}{b^2}=\frac{z_0}{c}. \qquad (5')$$

Эта система имеет два действительных и различных решения. В самом деле, присоединяя к системе (4′), (5′) тождество*

$$\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)-\left(\frac{x_0l}{a^2}+\frac{y_0m}{b^2}\right)^2=\left(\frac{y_0l}{ab}-\frac{x_0m}{ab}\right)^2, \qquad (6)$$

в силу уравнений (4′), (5′) и (1′) находим

$$\left(\frac{y_0l}{ab}-\frac{x_0m}{ab}\right)^2=1, \quad \text{или} \quad \frac{y_0l}{ab}-\frac{x_0m}{ab}=\pm 1.$$

---

* Тождество $\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)-(a_1b_1+a_2b_2)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2$ называется тождеством Лагранжа и проверяется раскрытием скобок в левой части. Тождество (6) получается из тождества Лагранжа, если положить

$$a_1=\frac{l}{a}, \quad a_2=\frac{m}{b}, \quad b_1=\frac{x_0}{a}, \quad b_2=\frac{y_0}{b}.$$

Итак, для определения координат l и m направляющего вектора $\{l, m, c\}$ прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (1), проходящих через точку (x_0, y_0, z_0), мы имеем систему

$$\frac{x_0 l}{a^2}+\frac{y_0 m}{b^2}=\frac{z_0}{c}, \tag{7}$$

$$\frac{y_0 l}{ab}-\frac{x_0 m}{ab}=\pm 1, \tag{8}$$

эквивалентную системе (4′), (5′). Беря в правой части уравнения (8) $+1$, получим

$$l_1=a\frac{\frac{x_0 z_0}{ac}+\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}},\quad m_1=b\frac{\frac{y_0 z_0}{bc}-\frac{x_0}{a}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}},\quad n_1=c. \tag{9_1}$$

Если же в правой части уравнения (8) взять -1, то получим

$$l_2=a\frac{\frac{x_0 z_0}{ac}-\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}},\quad m_2=b\frac{\frac{y_0 z_0}{bc}+\frac{x_0}{a}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}},\quad n_2=c. \tag{9_2}$$

Таким образом, найдены направляющие векторы $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$ прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (1), проходящие через его точку (x_0, y_0, z_0). Теорема доказана.

Каждая из образующих пересекает плоскость xOy в точке, лежащей на горловом эллипсе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0.$$

Поэтому за точку (x_0, y_0, z_0) образующей всегда можно взять точку $(x_0, y_0, 0)$. Для такой точки

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,\ z_0=0$$

и формулы (9_1) и (9_2) принимают вид

$$l_1=\frac{ay_0}{b},\quad m_1=-\frac{bx_0}{a},\quad n_1=c; \tag{10_1}$$

$$l_2=-\frac{ay_0}{b},\quad m_2=\frac{bx_0}{a},\quad n_2=c. \tag{10_2}$$

Разобьем множество образующих на два семейства: к первому семейству отнесем образующие

$$\frac{x-x_0}{\frac{ay_0}{b}}=\frac{y-y_0}{-\frac{bx_0}{a}}=\frac{z}{c}, \tag{I}$$

ко второму

$$\frac{x-x_0}{-\frac{ay_0}{b}}=\frac{y-y_0}{\frac{bx_0}{a}}=\frac{z}{c}, \tag{II}$$

где x_0, y_0, 0 — координаты точки горлового эллипса.

Теорема 2. *Две прямолинейные образующие однополостного гиперболоида, принадлежащие к разным семействам, всегда лежат в одной плоскости и параллельны в том и только в том случае, когда они проходят через диаметрально противоположные точки горлового эллипса.*

Доказательство. Пусть $(x_1, y_1, 0)$ и $(x_2, y_2, 0)$ — произвольные точки горлового эллипса, а

$$\frac{x-x_1}{\frac{ay_1}{b}}=\frac{y-y_1}{-\frac{bx_1}{a}}=\frac{z}{c},$$

$$\frac{x-x_2}{-\frac{ay_2}{b}}=\frac{y-y_2}{\frac{bx_2}{a}}=\frac{z}{c}$$

проходящие через них образующие разных семейств.

Применяя необходимое и достаточное условие компланарности двух прямых, будем иметь

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ \frac{ay_1}{b} & -\frac{bx_1}{a} & c \\ -\frac{ay_2}{b} & \frac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix}=$$

$$=c\left[(x_2-x_1)\begin{vmatrix} -\frac{bx_1}{a} & 1 \\ \frac{bx_2}{a} & 1\end{vmatrix}-(y_2-y_1)\begin{vmatrix} \frac{ay_1}{b} & 1 \\ -\frac{ay_2}{b} & 1\end{vmatrix}\right]=$$

$$=c\left[\frac{b}{a}(x_1^2-x_2^2)+\frac{a}{b}(y_1^2-y_2^2)\right]=abc\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}\right)=$$

$$=abc\,(1-1)=0.$$

Образующие параллельны в том и только в том случае, если

$$\frac{ay_1}{b}:\frac{-bx_1}{a}:c=-\frac{ay_2}{b}:\frac{bx_2}{a}:c,$$

откуда

$$x_2=-x_1,\quad y_2=-y_1.$$

Теорема 3. *Две прямолинейные образующие однополостного гиперболоида, принадлежащие одному семейству, скрещиваются.*

Доказательство. Пусть

$$\frac{x-x_1}{\frac{ay_1}{b}}=\frac{y-y_1}{-\frac{bx_1}{a}}=\frac{z}{c} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{\frac{ay_2}{b}}=\frac{y-y_2}{-\frac{bx_2}{a}}=\frac{z}{c}$$

две различные образующие одного семейства. Имеем

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ \frac{ay_1}{b} & -\frac{bx_1}{a} & c \\ \frac{ay_2}{b} & -\frac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix} = c\left[\frac{b}{a}(x_2-x_1)^2+\frac{a}{b}(y_2-y_1)^2\right]\neq 0.$$

Точно так же убедимся в том, что скрещиваются две любые образующие другого семейства.

Из теорем 1 и 3 следует, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две образующие, принадлежащие разным семействам.

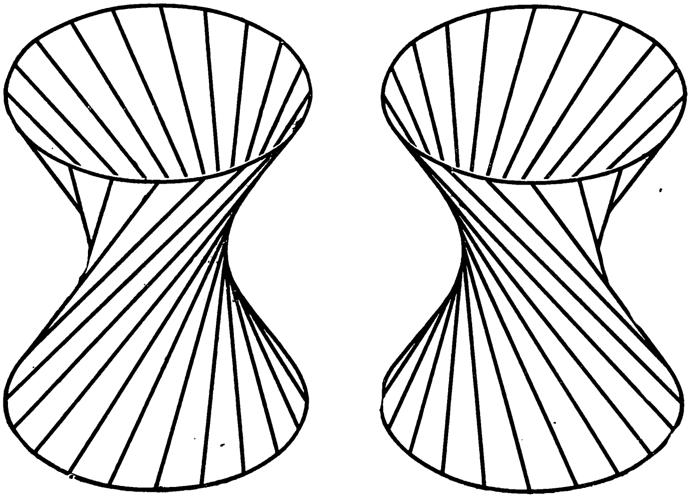


Рис. 214

Отсюда следует, что однополостный гиперболоид есть геометрическое место точек, принадлежащих всем прямолинейным образующим одного семейства (рис. 214).

Однополостный гиперболоид вращения можно получить вращением одной из его прямолинейных образующих вокруг оси вращения.

Теорема 4. *Никакие три прямолинейные образующие однополостного гиперболоида, принадлежащие одному семейству, не параллельны одной плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим направляющие векторы

$$\left\{\frac{ay_1}{b}, -\frac{bx_1}{a}, c\right\},$$
$$\left\{\frac{ay_2}{b}, -\frac{bx_2}{a}, c\right\},$$
$$\left\{\frac{ay_3}{b}, -\frac{bx_3}{a}, c\right\}$$

трех образующих одного семейства.

Имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{ay_1}{b} & -\frac{bx_1}{a} & c \\ \frac{ay_2}{b} & -\frac{bx_2}{a} & c \\ \frac{ay_3}{b} & -\frac{bx_3}{a} & c \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как точки $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$, $(x_3, y_3, 0)$ как точки горлового эллипса не лежат на одной прямой. Таким образом, направляющие векторы рассматриваемых образующих некомпланарны.

Для отыскания двух семейств прямолинейных образующих однополостного гиперболоида практически можно поступать так: перепишем каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

однополостного гиперболоида в виде

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

и рассмотрим два семейства прямых: одно, заданное уравнениями

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

дополненное двумя прямыми*

$$\left.\begin{matrix} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \\ 1 + \frac{y}{b} = 0 \end{matrix}\right\} \text{ и } \left.\begin{matrix} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \\ 1 - \frac{y}{b} = 0 \end{matrix}\right\}, \qquad (\mathrm{I}')$$

* Первая из этих двух прямых соответствует значению $u=0$, второе значению $u=\infty$. Доказательство того, что плоскости, заданные уравнениями (I′), пересекаются, предоставляется читателю.

и другое, заданное уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=v\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{v}\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ \text{дополненное двумя прямыми} \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0 \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{array}\right\} \text{ и } \begin{array}{l} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0, \\ 1+\dfrac{y}{b}=0. \end{array} \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{II}')$$

Из уравнений (I′) и (II′) следует, что

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

т. е. все эти прямые лежат на поверхности заданного однополостного гиперболоида.

Для нахождения уравнений образующих, проходящих через данную точку (x_0, y_0, z_0), следует в уравнения (I′) и (II′) подставить x_0, y_0, z_0 вместо x, y и z. Тогда будут найдены u и v.

Таким образом могут быть получены, например, уравнения

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\frac{x_0}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\frac{x_0}{a}\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{aligned} \qquad (\mathrm{I}'')$$

и

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\frac{x_0}{a}\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \left(1-\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\frac{x_0}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{aligned} \qquad (\mathrm{II}'')$$

образующих, проходящих через любую точку $(x_0, y_0, 0)$ горлового эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0$$

однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Из уравнений (I″) и (II″) находим направляющие векторы соответственно прямых (I″) и (II″):

$$\{l_1, m_1, n_1\}=\left\{\frac{ay_0}{b}, -\frac{bx_0}{a}, c\right\},$$

$$\{l_2, m_2, n_2\}=\left\{-\frac{ay_0}{b}, \frac{bx_0}{a}, c\right\}.$$

Таким образом, семейство прямолинейных образующих (I′) совпадает с тем семейством, которое выше было названо семейством (I), а семейство образующих (II′) совпадает с семейством (II).

2. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида

Теорема 1. *Через каждую точку гиперболического параболоида*

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \text{ где } p>0 \text{ и } q>0, \tag{1}$$

проходят две и только две его прямолинейные образующие.

Доказательство. Пусть (x_0, y_0, z_0) — произвольная точка гиперболического параболоида (1), а

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt \tag{2}$$

параметрические уравнения прямой, проходящей через эту точку.

Для того чтобы прямая (2) целиком лежала на поверхности (1), необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\frac{(x_0+lt)^2}{p}-\frac{(y_0+mt)^2}{q}-2(z_0+nt)=0,$$

или

$$\left(\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}\right)t^2+2\left(\frac{x_0l}{p}-\frac{y_0m}{q}-n\right)t+\frac{x_0^2}{p}-\frac{y_0^2}{q}-2z_0=0,$$

или

$$\left(\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}\right)t^2+2\left(\frac{x_0l}{p}-\frac{y_0m}{q}-n\right)t=0$$

выполнялось при всех значениях t, а это возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}=0, \frac{x_0l}{p}-\frac{y_0m}{q}-n=0.$$

Из первого уравнения находим

$$m=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,l.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением

$$\frac{x_0l}{p}-\frac{y_0m}{q}-n=0,$$

находим

$$l_1:m_1:n_1=\sqrt{p}:\sqrt{q}:\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right),$$

$$l_2:m_2:n_2=\sqrt{p}:-\sqrt{q}:\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}+\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right).$$

Теорема доказана. Мы видим, что прямолинейные образующие, параллельные вектору $\{l_1, m_1, n_1\}$, параллельны плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0,$$

а прямолинейные образующие, параллельные вектору $\{l_2, m_2, n_2\}$, параллельны плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

Разобьем множество всех прямолинейных образующих гиперболического параболоида на два семейства, относя к первому семейству все образующие, параллельные плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0,$$

а ко второму семейству — образующие, параллельные плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

Как мы видели в § 134, плоскость xOy пересекает гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

по паре прямых

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \quad z=0 \qquad (\lambda)$$

и

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \quad z=0. \qquad (\mu)$$

Прямая λ принадлежит первому семейству, а прямая μ — второму. Выше было доказано, что через каждую точку гиперболического параболоида проходит по одной образующей из каждого семейства. Следовательно, через каждую точку прямой λ проходит еще по одной образующей второго семейства. Прямая μ принадлежит второму семейству и, следовательно, через каждую ее точку проходит еще по одной образующей из первого семейства. Образующими, пересекающими прямые λ или μ, исчерпываются все прямолинейные образующие гиперболического параболоида (1).

В самом деле, прямые λ и μ пересекают друг друга; всякая же другая прямолинейная образующая гиперболического параболоида (1) пересекает плоскость xOy, а значит, и одну из прямых λ или μ, ибо плоскости, параллельные плоскости xOy, пересекают гиперболический параболоид (1) по гиперболам и, значит, не содержат его прямолинейных образующих.

Таким образом, первое семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида (1) является множеством всех прямолинейных образующих, пересекающих прямую μ:

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0,\quad z=0,$$

а второе семейство есть множество всех прямолинейных образующих гиперболического параболоида (1), пересекающих прямую λ:

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0,\quad z=0.$$

Гиперболический параболоид есть геометрическое место точек, принадлежащих всем прямолинейным образующим одного семейства (рис. 215).

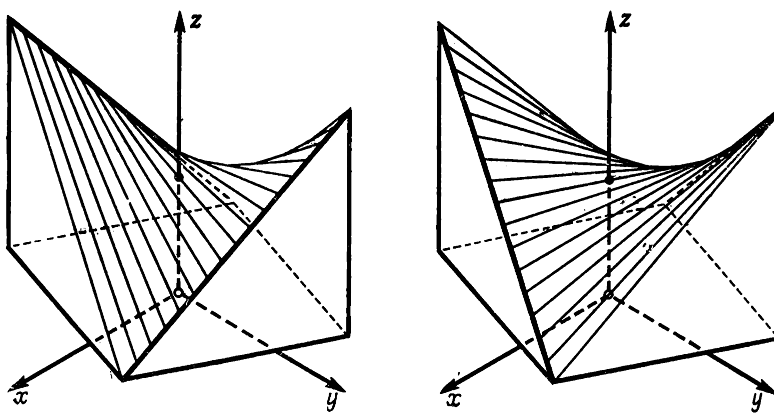


Рис. 215

Теорема 2. *Две прямолинейные образующие гиперболического параболоида из разных семейств пересекаются.*

Доказательство. Возьмем две прямолинейные образующие разных семейств:

$$\frac{x-x_1}{\sqrt{p}}=\frac{y-y_1}{\sqrt{q}}=\frac{z-z_1}{\dfrac{x_1}{\sqrt{p}}-\dfrac{y_1}{\sqrt{q}}}$$

и

$$\frac{x-x_2}{\sqrt{p}}=\frac{y-y_2}{-\sqrt{q}}=\frac{z-z_2}{\dfrac{x_2}{\sqrt{p}}+\dfrac{y_2}{\sqrt{q}}},$$

проходящие через точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) гиперболического параболоида. Эти прямые непараллельны (их направляющие векторы неколлинеарны) и лежат в одной плоскости, так как

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & \frac{x_1}{\sqrt{p}}-\frac{y_1}{\sqrt{q}} \\ \sqrt{p} & -\sqrt{q} & \frac{x_2}{\sqrt{p}}+\frac{y_2}{\sqrt{q}} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2-x_1)\left(x_2\sqrt{\frac{q}{p}}+y_2+x_1\sqrt{\frac{q}{p}}-y_1\right)-$$

$$-(y_2-y_1)\left(x_2+\sqrt{\frac{p}{q}}y_2-x_1+\sqrt{\frac{p}{q}}y_1\right)+$$

$$+(z_2-z_1)\left(-2\sqrt{pq}\right)=$$

$$=(x_2^2-x_1^2)\sqrt{\frac{q}{p}}-(y_2^2-y_1^2)\sqrt{\frac{p}{q}}-2\sqrt{pq}\,(z_2-z_1)=$$

$$=\sqrt{pq}\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{p}-\frac{y_2^2-y_1^2}{q}-2z_2+2z_1\right)=$$

$$=\sqrt{pq}\left[\frac{x_2^2}{p}-\frac{y_2^2}{q}-2z_2-\left(\frac{x_1^2}{p}-\frac{y_1^2}{q}-2z_1\right)\right]=0.$$

Поэтому прямые пересекаются.

Теорема 3. *Две прямолинейные образующие гиперболического параболоида, принадлежащие разным семействам, скрещиваются.*

Доказательство. Возьмем две разные образующие, принадлежащие, например, первому семейству. Они проходят через две разные точки прямой μ:

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \quad z=0$$

и параллельны плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0,$$

пересекающей прямую μ. Таким образом, эти образующие лежат в параллельных плоскостях и потому не пересекаются. Но они не могут быть и параллельны, так как в противном случае все образующие второго семейства, пересекая эти две образующие в силу теоремы 2, лежали бы в плоскости, проходящей через эти две параллельные образующие. Это противоречиво, так как параболоид есть геометрическое место точек, принадлежащих всем образующим одного семейства.

Замечание. Уравнения двух семейств прямолинейных образующих гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

можно взять в виде: одна серия

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}=2u, \quad \dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}=\dfrac{z}{u}, \\ \text{дополненная еще одной прямой} \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}=0, \ z=0 \ (\mu), \end{array}\right\} \tag{3}$$

и другая серия

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}=\dfrac{z}{v}, \quad \dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}=2v, \\ \text{дополненная прямой} \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}=0, \ z=0. \ (\lambda) \end{array}\right\} \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что уравнениями (3) задается та серия прямолинейных образующих, которая выше была названа «второй», а уравнениями (4) — серия, которая выше была названа «первой».

§ 137. Примеры и задачи к главе IX

1. Задачи с решениями

Пример 1. Определить вид и расположение поверхности

$$2x^2-3y^2-3z^2+4x+6z-5=0$$

Решение.

$$2(x^2+2x+1)-2-3y^2-3(z^2-2z+1)+3-5=0,$$

$$2(x+1)^2-3y^2-3(z-1)^2=4,$$

$$\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{y^2}{\frac{4}{3}}-\frac{(z-1)^2}{\frac{4}{3}}=1,$$

$$-\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}+\frac{(z-1)^2}{\frac{4}{3}}=-1.$$

Положим

$$x+1=X, \quad y=Y, \quad z-1=Z, \tag{1}$$

тогда уравнение примет вид

$$-\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{\frac{4}{3}}+\frac{Z^2}{\frac{4}{3}}=-1.$$

Это уравнение определяет двуполостный гиперболоид вращения (вокруг оси $O'X$).

Формулы (1) можно переписать в виде

$$x=X-1, \quad y=Y, \quad z=Z+1.$$

Отсюда видно, что уравнение приводится к каноническому виду параллельным переносом осей координат. Начало новой системы $O'XYZ$ находится в точке $(-1, 0, 1)$, эта точка является центром гиперболоида. Ось вращения l совпадает с новой осью $O'X$, т. е. прямой, проходящей через точку $(-1, 0, 1)$ параллельно оси Ox. Полуоси гиперболоида

$$a=\sqrt{2}, \qquad b=c=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Этот гиперболоид можно получить вращением вокруг действительной оси гиперболы:

$$\frac{Y^2}{\frac{4}{3}}-\frac{X^2}{2}=1, \quad Z=0,$$

уравнения которой даны относительно новой системы координат.

Пример 2. Определить вид и расположение поверхности

$$3x^2+4y^2-12x+8y+17z=0.$$

Решение.

$$3(x^2-4x+4)-12+4(y^2+2y+1)-4+17z=0,$$
$$3(x-2)^2+4(y+1)^2+17z-16=0,$$
$$3(x-2)^2+4(y+1)^2+17\left(z-\frac{16}{17}\right)=0,$$
$$\frac{(x-2)^2}{\frac{17}{6}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{17}{8}}=-2\left(z-\frac{16}{17}\right).$$

Положим

$$x-2=X, \quad y+1=Y, \quad z-\frac{16}{17}=Z,$$

или

$$x=X+2, \quad y=Y-1, \quad z=Z+\frac{16}{17}.$$

Последнее уравнение примет вид

$$\frac{X^2}{\frac{17}{6}}+\frac{Y^2}{\frac{17}{8}}=-2Z.$$

Оно определяет эллиптический параболоид, для которого

$$p=\frac{17}{6}, \quad q=\frac{17}{8}.$$

Ось параболоида имеет отрицательное направление оси $O'Z$, вершина находится в точке $\left(2, -1, \frac{16}{17}\right)$.

Пример 3. Определить вид и расположение поверхности

$$z^2=3x+4y+15.$$

Решение. Повернем оси координат вокруг оси Oz на угол, определяемый соотношениями

$$\cos\varphi=\frac{4}{5}, \quad \sin\varphi=-\frac{3}{5}.$$

Формулы преобразования будут иметь вид

$$x^* = \frac{4x-3y}{5},$$

$$y^* = \frac{3x+4y}{5}, \quad z^* = z.$$

Отсюда

$$3x+4y = 5y^* \tag{1}$$

и уравнение

$$z^2 = 3x+4y+15$$

принимает вид

$$z^{*2} = 5y^*+15, \text{ или } z^{*2} = 5(y^*+3).$$

Положим

$$x^* = X, \quad y^*+3 = Y, \quad z^* = Z; \tag{2}$$

тогда получим

$$Z^2 = 5Y,$$

т. е. уравнение параболического цилиндра. Из формул (1) и (2) находим

$$X = \frac{4x-3y}{5}, \quad Y = \frac{3x+4y}{5}+3, \quad Z = z.$$

Направляющей этого цилиндра служит парабола с параметром $p = \frac{5}{2}$, лежащая в плоскости $X = 0$, т. е. в плоскости

$$4x-3y = 0.$$

Плоскость симметрии цилиндра, перпендикулярная к плоскости направляющей, есть плоскость $Z = 0$, или $z = 0$, т. е. плоскость xOy.

Плоскость, касательная к цилиндру, перпендикулярная к указанной плоскости симметрии, будет $Y = 0$, т. е.

$$3x+4y+15 = 0.$$

Для всех точек цилиндра $Y > 0$, т. е. цилиндр лежит в том полупространстве от плоскости $3x+4y+15 = 0$, для всех точек которого

$$3x+4y+15 > 0.$$

Пример 4. Определить вид и расположение поверхности

$$z^2 = 2xy.$$

Решение. Производя поворот осей вокруг оси Oz на угол α, будем иметь

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \quad z = z'$$

и уравнение примет вид

$$z'^2 = 2\left[x'^2\cos\alpha\sin\alpha + x'y'(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - y'^2\sin\alpha\cos\alpha\right].$$

Подберем угол α так, чтобы в этом уравнении обратился в нуль коэффициент при $x'y'$:

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0.$$

Отсюда можно взять $\cos\alpha = \sin\alpha$, следовательно, $\alpha = 45°$. Так как при этом $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то последнее уравнение примет вид

$$z'^2 = 2\left(\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}\right), \text{ или } z'^2 + y'^2 - x'^2 = 0,$$

это конус вращения с вершиной в начале координат.

Угол между осью вращения и образующими равен 45°. Осью конуса является новая ось Ox', т. е. биссектриса угла xOy.

Пример 5. Подобным образом приводится к каноническому виду уравнение

$$z = xy.$$

После поворота осей вокруг оси Oz на угол 45° получим

$$x'^2 - y'^2 = 2z',$$

это гиперболический параболоид.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Дан однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$$

и плоскость $x = 5$. Найти вид и полуоси линии пересечения данной поверхности и данной плоскости.

Отв. Гипербола, действительная полуось равна $\frac{4}{3}$, мнимая полуось равна $\frac{8}{3}$, центр $(5, 0, 0)$; действительная ось параллельна оси Oz, мнимая ось параллельна оси Oy.

2. Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1,$$

проходящих через его точку $(4, 3, 2)$.

Отв. $\frac{x}{4} + \frac{z}{2} = 1 + \frac{y}{3}$, $\frac{x}{4} - \frac{z}{2} = 1 - \frac{y}{3}$ и

$\frac{x}{4} - \frac{z}{2} = 0$, $1 - \frac{y}{3} = 0$.

3. Определить вид и расположение поверхности

$$3x^2 + 4y^2 - 12x + z = 0.$$

Отв. Эллиптический параболоид, вершина $(2, 0, 12)$; ось параболоида имеет отрицательное направление оси Oz; каноническое уравнение

$$\frac{X^2}{\frac{1}{6}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{8}} = 2Z.$$

4. Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если известно, что он проходит через окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = x$, и через точку $(3, 1, 1)$.

Отв
$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{7{,}2} = 1.$$

5. Доказать, что сумма чисел, обратных квадратам длин трех любых попарно перпендикулярных радиусов эллипсоида, постоянна.

6. Доказать, что плоскости, проходящие через концы трех попарно перпендикулярных радиусов эллипсоида, касаются шара, вписанного в куб, который (куб) вписан в эллипсоид.

7. Определить угол между прямолинейными образующими однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$, проходящими через произвольную его точку.

Отв. Если $x-z=u(1-y)$, $u(x+z)=1+y$ и $x-z=v(1+y)$, $v(x+z)=$ $=1-y$ — две образующие, то

$$\cos\varphi_{1,2}=\pm\frac{(uv-1)^2}{(u^2+1)(v^2+1)}.$$

8. Доказать, что проекции прямолинейных образующих поверхности

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0)$$

на плоскость xOz касаются параболы $x^2=2pz$, $y=0$.

9. На гиперболическом параболоиде $x^2-y^2=2z$ найти геометрическое место точек пересечения двух взаимно перпендикулярных образующих.

Отв. Две прямые (образующие): 1) $x-y=0$, $z=0$ и 2) $x+y=0$, $z=0$.

10. Доказать, что проекции на плоскость горлового эллипса линий, по которым поверхность однополостного гиперболоида рассекается касательными плоскостями к его асимптотическому конусу, касаются этого эллипса.

11. Доказать, что проекция прямолинейной образующей однополостного гиперболоида на плоскость горлового эллипса касается последнего.

12. Пусть C — сечение параболоида вращения некоторой плоскостью. Доказать, что проекция C на плоскость, перпендикулярную оси параболоида, есть окружность.

13. Доказать, что если p' и q' — параметры парабол, получаемых в сечении эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0)$$

двумя его взаимно перпендикулярными плоскостями, проходящими через ось Oz, то

$$\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

14. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных скрещивающихся прямых в пространстве.

Отв. Гиперболический параболоид.

15. Доказать, что любая плоскость, проходящая через прямолинейную образующую одной из серии однополостного гиперболоида, проходит через прямолинейную образующую другой серии.

16. Доказать, что любая плоскость, проходящая через прямолинейную образующую гиперболического параболоида в случае, если она не параллельна оси этой поверхности, проходит еще через одну прямолинейную образующую этого гиперболического параболоида другой серии.

17. Прямая

$$x=1+2t,\quad y=-3+3t,\quad z=t$$

вращается вокруг оси Oz. Составить уравнение поверхности вращения.

Отв. $x^2+y^2=13z^2-14z+10$ — однополостный гиперболоид.

18. Найти геометрическое место центров сфер, касающихся плоскости xOy и сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Отв. $x^2+y^2=a^2\pm 2az$ — два параболоида вращения.

19. Найти поверхность, образованную прямой, которая пересекает параболы

$$y^2=2x,\ z=0 \text{ и } z^2=-2x,\ y=0,$$

оставаясь параллельной плоскости $y-z=0$.

Отв. $y^2-z^2=2x$ — гиперболический параболоид.

20. Составить уравнение геометрического места прямых, касающихся сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и пересекающих две прямые

$$x=1,\ y=0 \text{ и } x=-1,\ z=0.$$

Отв. $x^2 \pm 2yz=1$ — однополостные гиперболоиды.

21. Найти прямолинейные образующие однополостного гиперболоида

$$x^2+y^2=2(z^2+1),$$

проходящие через точку (1, 1, 0).

Отв.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1},\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}.$$

22. Определить угол прямолинейной образующей однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ с касательной к окружности горлового сечения в той точке, в которой эта окружность пересекается с рассматриваемой образующей.
Отв. 45°.

23. Найти проекции прямолинейных образующих гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0)$$

в плоскость xOy.

Отв. Два семейства параллельных прямых

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=C_1,\quad z=0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=C_2,\quad z=0,$$

где C_1 и C_2 принимают все действительные значения.

24. При каком необходимом и достаточном условии точка $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит внутри эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Отв.

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}<1.$$

25. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых отношение расстояний до двух скрещивающихся прямых пространства равно данному числу k.

Отв. Однополостный гиперболоид, если $k \neq 1$; гиперболический параболоид, если $k=1$.

26. Составить параметрические уравнения
1° эллипсоида,
2° однополостного гиперболоида,
3° двуполостного гиперболоида,
4° гиперболического параболоида.

Отв. 1° $x = a\cos u\cos v, \quad y = b\cos u\sin v, \quad z = c\sin u.$

$$2^\circ \quad x = a\frac{uv+1}{u+v}, \quad y = b\frac{v-u}{u+v}, \quad z = c\frac{uv-1}{u+v}$$

(координатные линии — прямолинейные образующие).

$$3^\circ \quad x = a\cos u \operatorname{tg} v, \quad y = b\sin u \operatorname{tg} v, \quad z = \frac{c}{\cos v}.$$

$$4^\circ \quad x = \sqrt{p}\,(u+v), \quad y = \sqrt{q}\,(u-v), \quad z = 2uv$$

(координатные линии — прямолинейные образующие).

27. Доказать, что проекции прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

на плоскость xOz касаются гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0,$$

являющейся сечением данного однополостного гиперболоида плоскостью xOz.

ГЛАВА X

КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ И КОМПЛЕКСНОЕ ПРОСТРАНСТВО. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

§ 138. Комплексная плоскость и комплексное пространство

1. Комплексная плоскость

Комплексной плоскостью назовем множество всех упорядоченных пар комплексных чисел, а каждую такую упорядоченную пару комплексных чисел — точкой комплексной плоскости.

Направленным отрезком комплексной плоскости назовем упорядоченную пару точек этой плоскости.

Если на комплексной плоскости заданы четыре точки:

$$A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2),\ C(x_3,\ y_3),\ D(x_4,\ y_4)$$

(x_i, y_i — комплексные числа), то два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ условимся считать равными тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$x_2-x_1=x_4-x_3 \quad \text{и} \quad y_2-y_1=y_4-y_3.$$

Совокупность всех равных между собой направленных отрезков назовем вектором комплексной плоскости.

Если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ задан своим началом $A(x_1,\ y_1)$ и концом $B(x_2,\ y_2)$, то числа x_2-x_1 и y_2-y_1 будем называть координатами вектора $\boldsymbol{a}$, являющегося классом всех направленных отрезков, равных направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$. При этом будем писать

$$\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1\}.$$

Суммой $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и произведением $\lambda\boldsymbol{a}$ числа λ на вектор $\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}=\{x_1, y_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{x_2, y_2\}$, будем называть векторы:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{x_1+x_2, y_1+y_2\}, \tag{1}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1, \lambda y_1\}. \tag{2}$$

Вектор $\boldsymbol{a}=\{0, 0\}$ будем называть нулевым или нуль-вектором. Если $\boldsymbol{a}$ — нулевой вектор, то будем писать $\boldsymbol{a}=0$.

Векторы $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$ и $\boldsymbol{b}=\{-x, -y\}$ будем называть противоположными друг другу и писать $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$, или $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$.

Сумма векторов и произведение числа на вектор обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &1^\circ\ \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c},\\ &2^\circ\ \boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a},\\ &3^\circ\ \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0,\\ &4^\circ\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\\ &5^\circ\ 1.\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\\ &6^\circ\ \lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a},\\ &7^\circ\ (\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\\ &8^\circ\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}. \end{aligned} \tag{3}$$

Замечание. При изучении операций сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число в главе IV мы по существу пользовались только этими свойствами векторов.

Пусть в произвольном множестве M определены две операции над его элементами: 1) операция сложения, т. е. двум любым элементам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, входящим в множество M, ставится в соответствие элемент того же множества M, называемый их суммой: $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$;

2) любому комплексному числу λ и любому элементу $\boldsymbol{a}$ из множества M ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{b}$ из множества M, называемый произведением числа λ на этот элемент: $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

Если при этом выполнены все свойства (3), то множество M называется линейным пространством, а его элементы — векторами (свойство 2° при этом формулируется так: в множестве M существует элемент 0, такой, что для любого элемента $\boldsymbol{a}$ из множества M выполняется равенство $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$; свойство 3° — так: для любого элемента $\boldsymbol{a}$ из множества M найдется элемент $\boldsymbol{b}$ из множества M, такой, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$; этот элемент $\boldsymbol{b}$ обозначается $-\boldsymbol{a}$).

Теория линейных пространств изучается в курсах линейной алгебры *.

Определение линейной зависимости векторов комплексной плоскости такое же, как и в § 36. Два линейно зависимых вектора называются также коллинеарными. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда или $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, или $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

* Свойство 4° может быть доказано из остальных (даже без использования свойства 6°).

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\boldsymbol{a}=\{x_1, y_1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{x_2, y_2\}$ является равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0.$$

На комплексной плоскости существуют два линейно независимых вектора (например, $\{1, 0\}$ и $\{0, 1\}$), но всякие три вектора линейно зависимы.

Базисом на комплексной плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

Всякий вектор $\boldsymbol{a}$ можно и притом единственным способом разложить по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, т. е. существует и притом только одна пара чисел x и y, таких, что

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2.$$

Числа x и y называются координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ (то, что выше названо координатами вектора, это его координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1=\{1, 0\}$ $\boldsymbol{e}_2=\{0, 1\}$).

Декартовой системой координат на комплексной плоскости называется совокупность точки O (начало координат) и базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$, где M — любая точка комплексной плоскости, а O — фиксированная точка (в частности, начало координат), называется радиусом-вектором точки M. Координаты x и y радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M в декартовой системе координат $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$$

называются координатами точки M в этой системе (то, что названо координатами точки, — это ее координаты, если за начало координат принята точка $O(0, 0)$, а за базис — векторы $\boldsymbol{e}_1=$ $=\{1,0\}$, $\boldsymbol{e}_2=\{0,1\}$).

Если на комплексной плоскости введены две системы координат $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ и $(O', \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$, то координаты x и y точки M в системе $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ через координаты x' и y' той же точки в системе $(O', \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ выражаются соотношениями $x=a_{11}x'+$ $+a_{12}y'+x_0$, $y=a_{21}x'+a_{22}y'+y_0$, где x_0, y_0 — координаты точки O' в системе $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, а $\{a_{11}, a_{21}\}$ и $\{a_{12}, a_{22}\}$ — координаты векторов $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

В самом деле, разложим векторы $\boldsymbol{e}'_1$ и $\boldsymbol{e}'_2$ по векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$:

$$\boldsymbol{e}'_1=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2=a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2. \tag{4}$$

Тогда

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+x'\boldsymbol{e}'_1+y'\boldsymbol{e}'_2=$$
$$=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+x'(a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_1)+y'(a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2)=$$
$$=(a_{11}x'+a_{12}y'+x_0)\boldsymbol{e}_1+(a_{21}x'+a_{22}y'+y_0)\boldsymbol{e}_2.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2.$$

Значит, в силу единственности разложения вектора по базису имеем

$$x=a_{11}x'+a_{12}y'+x_0,\quad y=a_{21}x'+a_{22}y'+y_0. \tag{5}$$

Введем на комплексной плоскости систему координат $(O,\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$. Пусть $\boldsymbol{a}=\{l,\ m\}$ — какой-нибудь ненулевой вектор; фиксируем еще точку $M_0(x_0,\ y_0)$. Пусть $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$ — ее радиус-вектор. Множество концов M радиусов-векторов $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$, определяемых соотношением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}, \tag{6}$$

где t принимает все комплексные значения, называется прямой, лежащей на комплексной плоскости. Вектор $\boldsymbol{a}$ называется направляющим вектором прямой (6). Координаты x и y точки M прямой (6) через координаты l, m направляющего вектора $\boldsymbol{a}$ и через координаты x_0, y_0 точки M_0 выражаются соотношениями

$$x=x_0+lt,\quad y=y_0+mt, \tag{7}$$

это параметрические уравнения прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$, можно записать в виде

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-t(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1), \tag{8}$$

где $\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{r}_2=\overrightarrow{OB}$, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ произвольной точки прямой AB. В параметрической форме

$$x=x_1+t(x_2-x_1),\quad y=y_1+t(y_2-y_1). \tag{9}$$

Из уравнений (7) следует, что уравнение прямой, лежащей на комплексной плоскости, можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}=0, \tag{10}$$

или

$$mx-ly+ly_0-mx_0=0,$$

или

$$Ax+By+C=0, \tag{11}$$

т. е. уравнение любой прямой, лежащей на комплексной плоскости в любой системе координат $(O,\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$, — уравнение первой степени.

Обратно, пусть на комплексной плоскости введена система координат $(O,\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ и задано уравнение первой степени

$$Ax+By+C=0. \tag{12}$$

Пусть x_0, y_0 — какое-нибудь решение этого уравнения, т. е. имеет место следующее числовое равенство:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Уравнение (12) эквивалентно уравнению

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13), следовательно и эквивалентное ему уравнение (12), является уравнением прямой линии, проходящей через точку (x_0, y_0), направляющий вектор которой $\boldsymbol{a} = \{-B, A\}$.

Теорема. *Для того чтобы точки A, B и C комплексной плоскости лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ были коллинеарны.*

Доказательство необходимости. Пусть точки A, B, C лежат на прямой

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}.$$

Обозначая через $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ их радиусы-векторы, будем иметь

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0 + t_1\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + t_2\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_0 + t_3\boldsymbol{a}.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 = (t_3 - t_1)\,\boldsymbol{a},$$
$$\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3 = (t_2 - t_3)\,\boldsymbol{a},$$

значит, векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны.

Доказательство достаточности. Пусть векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны. Если точки B и C совпадают, то существует, очевидно, прямая, на которой лежат точки A, B и C. Если точки B и C различны (но векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны), то существует такое число t, что

$$\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{CB},$$

или

$$\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 = t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3),$$

или

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_3 + t(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2),$$

т. е. точка A лежит на прямой

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_3 + t(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2),$$

проходящей через точки B и C.

Если точки A, B, C принадлежат одной прямой, а точки B и C различны, то, как указывалось выше, существует такое число λ, что

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC}.$$

Это число λ называется отношением направленного отрезка $\overrightarrow{AC}$ к направленному отрезку $\overrightarrow{BC}$:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Если точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ различны, а точка $C(x, y)$ лежит на прямой AB, не совпадает с точкой B и если

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda,$$

то говорят, что точка C делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ. Координаты точки C через координаты точек A и B выражаются соотношениями

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{14}$$

Обратно, каково бы ни было комплексное число $\lambda \neq -1$, формулами (14) определяются координаты точки, делящей невырожденный направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении λ. В частности,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{15}$$

координаты середины отрезка с концами $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

2. Комплексное пространство

Комплексным пространством будем называть множество всех упорядоченных троек (x, y, z) комплексных чисел, а любую такую тройку чисел (x, y, z) — точкой комплексного пространства. Числа x, y, z будем называть координатами этой точки.

Определение направленного отрезка, вектора, его координат, определение суммы векторов и произведения числа на вектор даются аналогично соответствующим определениям этих понятий для комплексной плоскости. При этом имеют место все соотношения (3), т. е. множество всех векторов комплексного пространства является линейным пространством.

Определение линейной зависимости векторов комплексного пространства такое же, как и для комплексной плоскости (см. также § 36). Два линейно зависимых вектора называются коллинеарными. Три линейно зависимых вектора комплексного пространства называются компланарными.

В комплексном пространстве имеются три линейно независимых вектора, например $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 1\}$, но всякие четыре вектора линейно зависимы.

Базисом комплексного пространства называется упорядоченная тройка $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ некомпланарных координат.

Всякий вектор $\boldsymbol{a}$ может быть и притом единственным образом разложен по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3. \tag{16}$$

Числа x, y, z называются координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Вместо соотношения (16) мы часто будем писать

$$\boldsymbol{a} = \{x, y, z\}.$$

Векторы

$$\boldsymbol{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \boldsymbol{b} = \{x_2, y_2, z_2\},$$

заданные относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, линейно зависимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

меньше 2.

Три вектора

$$\boldsymbol{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \ \boldsymbol{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \quad \boldsymbol{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$$

компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Декартовой системой координат в комплексном пространстве называется совокупность точки O и базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$ называется радиусом-вектором точки M комплексного пространства. Координаты $\overrightarrow{OM}$, т. е. числа x, y, z такие, что

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3,$$

называются координатами точки M в системе $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ (таким образом, то, что мы называли координатами точки M в начале этого пункта,— это координаты точки M в системе O $(0, 0, 0)$, $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 1\}$).

Если в комплексном пространстве введены две системы координат $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и $(O', \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$, то координаты x, y, z точки M в системе $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ через координаты x', y', z'

той же точки M в системе (O', e_1', e_2', e_3') выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + x_0, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + y_0, \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + z_0, \end{aligned} \tag{18}$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты точки O' в системе (O, e_1, e_2, e_3), а коэффициенты a_{ik} имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} e_1' &= \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}, \\ e_2' &= \{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}, \\ e_3' &= \{a_{13}, a_{23}, a_{33}\} \end{aligned} \tag{19}$$

(координаты векторов e_1', e_2', e_3' даны в системе O, e_1 e_2, e_3).

Доказательство такое же, как в случае комплексной плоскости.

Прямой комплексного пространства, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ коллинеарно вектору $a = \{l, m, n\} \neq 0$, называется множество концов всех радиусов-векторов $\overrightarrow{OM}$, определяемых соотношением

$$r = r_0 + ta, \tag{20}$$

где t принимает все комплексные значения. В параметрической форме уравнения прямой имеют вид

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt. \tag{21}$$

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки A и B, определяемые радиусами-векторами $\overrightarrow{OA} = r_1$ и $\overrightarrow{OB} = r_2$, имеет вид

$$r = r_1 + t(r_2 - r_1), \tag{22}$$

или в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1), \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1). \end{aligned} \tag{23}$$

Теорема п. 1 этого параграфа имеет место и для комплексного пространства и доказывается так же.

Так же, как и на комплексной плоскости, определяется понятие отношения, в котором точка C делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$; имеют место формулы, аналогичные формулам (14) и (15) (добавляется еще по одному соотношению).

Пусть $a = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $b = \{l_2, m_2, n_2\}$ — два неколлинеарных вектора, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка комплексного пространства, а $\overrightarrow{OM_0} = r_0$ ее радиус-вектор. Плоскостью П, проходящей через точку M_0 компланарно векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, называется множество концов $\overrightarrow{OM}$ всех радиусов-векторов $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$, определяемых соотношением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}, \tag{24}$$

где параметры u и v принимают все комплексные значения. Числа u и v — это координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$, где M — любая точка плоскости П в базисе $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

В параметрической форме плоскость П определяется уравнениями

$$\begin{aligned} x&=x_0+l_1u+l_2v,\\ y&=y_0+m_1u+m_2v,\\ z&=z_0+n_1u+n_2v. \end{aligned} \tag{25}$$

Отсюда следует, что координаты x, y, z всех точек комплексной плоскости П удовлетворяют уравнению

$$\Delta=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \tag{26}$$

и обратно: если координаты некоторой точки (x, y, z) удовлетворяют этому уравнению, то в силу линейной независимости второй и третьей строк определителя Δ первая его строка является линейной комбинацией второй и третьей:

$$x-x_0=ul_1+vl_2,\quad y-y_0=um_1+vm_2,\quad z-z_0=un_1+vn_2,$$

откуда следуют отношения (25), т. е. точка (x, y, z) принадлежит плоскости П.

Из уравнения (26) сразу следует, что любая плоскость выражается уравнением первой степени:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{27}$$

Обратно, уравнение (27) первой степени всегда можно записать в виде (26) (см. § 69); поэтому всякое уравнение первой степени является уравнением плоскости.

Отложим вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ от любой точки плоскости. Если его конец при этом также будет лежать на этой плоскости, то будем говорить, что вектор $\boldsymbol{a}$ компланарен плоскости.

Необходимым и достаточным условием компланарности вектора $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ и плоскости, заданной общим уравнением (27), является равенство

$$Al+Bm+Cn=0$$

(доказательство такое же, как и в § 70).

Отметим, что в комплексном пространстве главный вектор $\{A, B, C\}$ плоскости, заданной уравнением (27), может быть ей компланарен. Пример:

$$3x+4y+5iz+2=0.$$

Имеем

$$\{A, B, C\}=\{3, 4, 5i\}$$

и далее

$$3\cdot 3+4\cdot 4+5i\cdot 5i=0.$$

Наконец, прямую в комплексном пространстве можно задать парой различных плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{28}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \tag{29}$$

имеющих общую точку.

В самом деле, если множество всех решений уравнения (28) не совпадает с множеством всех решений уравнения (29) (плоскости различны!), но имеется точка (x_0, y_0, z_0), лежащая как на плоскости (28), так и на плоскости (29), то множество всех решений системы (28), (29) имеет вид

$$\begin{aligned} x&=x_0+t\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \\ y&=y_0+t\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \\ z&=z_0+t\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{30}$$

а эти уравнения являются уравнениями прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) с направляющим вектором

$$\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

§ 139. Плоские алгебраические линии

1. Определение плоской алгебраической линии и ее порядка

Целой рациональной функцией над полем комплексных чисел называется функция, которая получается, если над аргументами и комплексными числами производятся только операции сложения, вычитания и умножения *.

Например,

$$u=(3+4i)\,xy^2-\frac{2}{\sqrt{3}}+2+i$$

* Деление на комплексное число, не равное нулю, рассматривается как умножение на число, обратное этому числу.

целая рациональная функция от трех аргументов. Аналогично формулируется определение целой рациональной функции над полем действительных чисел.

Степенью целой рациональной функции u называется максимальное значение суммы $p+q+r+\ldots$ показателей аргументов в выражении вида

$$Ax^p y^q z^r \ldots,$$

суммой которых является функция u.

В приведенном выше примере функция u третьей степени.

Алгебраическим уравнением называется уравнение, которое мы получим, приравняв нулю целую рациональную функцию.

Степенью алгебраического уравнения

$$F(x, y, z, \ldots)=0$$

называется степень целой рациональной функции F. Множество всех точек $M(x, y)$ комплексной плоскости, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$F(x, y)=0,$$

называется плоской алгебраической линией. Порядком алгебраической линии, заданной уравнением

$$F(x, y)=0,$$

называется степень этого уравнения, иначе степень целой рациональной функции $F(x, y)$.

Пусть

$$F(x, y)=0 \tag{1}$$

уравнение алгебраической линии n-го порядка в системе координат $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Перейдем к другой системе $(O', \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')$. Тогда (см. п. 1 предыдущего параграфа)

$$x=a_{11}x'+a_{12}y'+x_0, \quad y=a_{21}x'+a_{22}y'+y_0$$

и уравнение $F(x, y)=0$ в новой системе координат примет вид

$$F(a_{11}x'+a_{12}y'+x_0, \ a_{21}x'+a_{22}y'+y_0)=0, \tag{2}$$

т. е. снова является алгебраическим.

Так как x и y через x' и y' выражаются линейными соотношениями, то степень последнего уравнения не выше степени уравнения $F(x, y)=0$. Но степень последнего уравнения (2) не может быть и ниже степени уравнения $F(x, y)=0$, так как x' и y' через x и y также выражаются линейно, а потому, если бы степень уравнения (2) была ниже степени $F(x, y)=0$, то при замене x' и y' их выражениями через x и y в уравнении (2) получили бы уравнение $F(x, y)=0$ степени более низкой, чем n.

Таким образом, во всех декартовых системах координат алгебраическая линия определяется алгебраическим уравнением и имеет один и тот же порядок. Говорят, что алгебраический характер уравнения алгебраической линии и ее порядок инвариантны (т. е. неизменны) по отношению к преобразованию декартовой системы координат.

В аналитической геометрии на плоскости изучаются главным образом алгебраические линии первого и второго порядка, т. е. линии, заданные относительно общей декартовой системы координат уравнениями

$$Ax+By+C=0,\quad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

2. Пересечение алгебраических линий. Пересечение алгебраической линии с прямой

Пусть заданы уравнения двух алгебраических линий:

$$F(x,\ y)=0,\quad \Phi(x, y)=0 \tag{3}$$

(F и Φ — целые рациональные функции от x и y). Для нахождения координат точек пересечения линий, заданных уравнениями (3), надо решить эту систему (3), так как координаты каждой точки, лежащей на обеих линиях, должны удовлетворять обоим уравнениям этих линий.

Докажем, в частности, следующую теорему.

Теорема 1. *Прямая линия или совсем не имеет общих точек с алгебраической линией, или целиком входит в ее состав, или пересекает ее в конечном числе точек, причем это число не превосходит порядок линии.*

Доказательство. Пусть

$$F(x,\ y)=0 \tag{4}$$

уравнение алгебраической линии n-го порядка (т. е. F — целая рациональная функция от x и y степени n).

Рассмотрим произвольную прямую, заданную параметрическими уравнениями

$$x=x_0+lt,\quad y=y_0+mt. \tag{5}$$

Для определения координат точек, принадлежащих одновременно алгебраической поверхности (4) и прямой (5), надо исследовать следующее уравнение относительно t:

$$F(x_0+lt,\ y_0+mt)=0. \tag{6}$$

Это уравнение относительно t имеет степень не выше n. Может представиться три случая.

1. Уравнение (6) не имеет корней. Это значит, что прямая (5) и поверхность (4) не имеют ни одной общей точки.

2. Соотношение (6) является тождеством относительно t. Это значит, что все точки прямой (5) лежат на линии (4), иначе прямая (5) входит в состав линии (4).

3. Соотношение (6) является уравнением относительно t степени k, большей или равной 1 (но меньшей или равной n, как указано выше). В таком случае прямая (5) пересекает поверхность (4) в k точках. Если среди k корней есть кратные, например, число $t=t_1$ является s-кратным корнем уравнения (6), то будем говорить, что точка (x_0+lt_1, y_0+mt_1) является s-кратной точкой пересечения прямой с линией.

Примеры. 1. Прямая

$$x=t,\ y=t$$

не имеет ни одной общей точки с линией

$$x^2-y^2-1=0,$$

так как соотношение (6) здесь принимает вид $-1=0$.

2. Прямая

$$x=t,\ y=t$$

входит в состав линии

$$x^2-y^2=0,$$

так как соотношение (6) обращается в тождество $0=0$.

3. Прямая

$$x=t,\ y=t+1$$

пересекает линию второго порядка

$$x^2-y^2-1=0$$

в одной точке. В самом деле, уравнение (6) принимает вид

$$t^2-t^2-2t-1-1=0,$$

откуда $t=-1$ и, значит, единственная точка пересечения имеет координаты

$$x=-1,\ y=0.$$

4. Прямая

$$x=t,\ y=0$$

пересекает линию *второго* порядка

$$x^2-y^2-1=0$$

в двух точках (1, 0) и (—1, 0).

5. Прямая $x=1$, $y=t$ пересекает линию

$$x^2-y^2-1=0$$

в двух совпадающих точках (1,0), так как уравнение (6) здесь принимает вид

$$t^2=0$$

и имеет двойной корень $t=0$.

3. Распадение алгебраических линий

Если левая часть уравнения алгебраической линии разлагается в произведение двух целых рациональных функций, степень каждой из которых больше или равна 1, т. е.

$$F(x, y) \equiv F_1(x, y) \cdot F_2(x, y),$$

где $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ — целые рациональные функции от x и y, степень каждой из которых больше или равна 1, то говорят, что данная алгебраическая линия распадается на алгебраические линии, определяемые уравнениями

$$F_1(x, y) = 0 \text{ и } F_2(x, y) = 0.$$

Например, линия

$$x^2 - y^2 = 0$$

распадается на две:

$$x + y = 0, \quad x - y = 0;$$

каждое из этих уравнений является уравнением прямой, проходящей через начало координат.

Линия

$$x^2 + y^2 = 0$$

также распадается на две:

$$y + ix = 0, \quad y - ix = 0;$$

имеется только одна точка (0, 0) с действительными координатами, лежащая на этой линии.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. *Если в состав алгебраической линии*

$$F(x, y) = 0 \tag{7}$$

порядка $n > 1$ входит прямая

$$Ax + By + C = 0, \tag{8}$$

т. е. координаты всех точек прямой $Ax + By + C = 0$ удовлетворяют и уравнению $F(x, y) = 0$, то левая часть $F(x, y)$ уравнения (7) может быть представлена в виде

$$F(x, y) = (Ax + By + C) F_1(x, y),$$

где $F_1(x, y)$ — целая рациональная функция от x и y, степень которой на единицу меньше степени $F(x, y)$.

Доказательство. Целую рациональную функцию $F(x, y)$ степени n от двух аргументов x и y можно представить в виде

$$F(x, y) = a_0 x^n + a_1(y) x^{n-1} + \ldots + a_n(y), \tag{9}$$

где a_0 — число, а $a_1(y), \ldots, a_n(y)$ — целые рациональные функции от y, степеней, соответственно не бо́льших $1, 2, \ldots, n$. Предположим, что $A \neq 0$, тогда уравнение (8) можно разрешить относительно x:

$$x = -\frac{B}{A} y - \frac{C}{A}.$$

По условию

$$F\left(-\frac{B}{A} y - \frac{C}{A},\ y\right) \equiv 0,$$

поэтому на основании теоремы Безу функция (9) делится на

$$x + \frac{B}{A} y + \frac{C}{A}.$$

Частное

$$\varphi(x, y) = a_0 x^{n-1} + \left[a_1(y) - \left(\frac{B}{A} y + \frac{C}{A}\right) a_0\right] x^{n-2} + \ldots$$

является целой рациональной функцией $\varphi(x, y)$, степень которой на 1 меньше степени $F(x, y)$. Итак,

$$F(x, y) = \left(x + \frac{B}{A} y + \frac{C}{A}\right) \varphi(x, y),$$

или

$$F(x, y) = (Ax + By + C) F_1(x, y),$$

где

$$F_1(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{A}.$$

§ 140. Алгебраические поверхности

1. Определение алгебраической поверхности

Алгебраической поверхностью называется множество всех точек $M(x, y, z)$ комплексного пространства, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (1)$$

Порядком алгебраической поверхности называется степень целой рациональной функции $F(x, y, z)$. Так же, как п. 1. § 139, доказывается, что алгебраический характер уравнения (1) и порядок алгебраической поверхности инвариантны по отношению к преобразованию декартовой системы координат.

В аналитической геометрии в пространстве изучаются главным образом поверхности первого и второго порядка, т. е. поверхности, заданные относительно декартовой системы координат уравнениями

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy + Gx + Hy + Kz + L = 0.$$

2. Пересечение алгебраической поверхности с прямой и плоскостью

Теорема 1. *Прямая линия или совсем не имеет с алгебраической поверхностью общих точек, или целиком принадлежит этой поверхности, или пересекает ее в конечном числе точек; в последнем случае число точек пересечения не более порядка алгебраической поверхности.*

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 1 § 139; пусть

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

уравнение алгебраической поверхности, а

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt \tag{2}$$

параметрические уравнения произвольной прямой. Для нахождения координат точек, принадлежащих одновременно заданной поверхности (1) и прямой (2), надо исследовать уравнение относительно t:

$$F(x_0 + lt, \quad y_0 + mt, \quad z_0 + nt) = 0. \tag{3}$$

Степень этого уравнения не выше n. Если оно не имеет корней, то прямая (2) и поверхность (1) не имеют ни одной общей точки. Если соотношение (3) выполняется при всех значениях* t, то все точки прямой (2) лежат на поверхности (1), иначе прямая (2) целиком лежит на поверхности (1). Если, наконец, уравнение (3) относительно t имеет степень k, такую, что $1 \leqslant k \leqslant n$, то прямая (2) пересекает поверхность (1) в k точках (среди которых могут быть и совпадающие).

Примеры. 1. Прямая

$$x = t, \quad y = t, \quad z = 1$$

не имеет ни одной общей точки с поверхностью второго порядка

$$x^2 - y^2 - 2z = 0.$$

2. Прямая

$$x = t, \quad y = t, \quad z = 0$$

целиком лежит на поверхности

$$x^2 - y^2 - 2z = 0.$$

---

* Для этого достаточно, чтобы равенство (3) выполнялось при $n+1$ различных значениях t.

3. Прямая

$$x=0,\quad y=0,\quad z=t$$

и поверхность *второго* порядка

$$x^2-y^2-2z=0$$

имеют только одну общую точку (0, 0, 0).

4. Прямая

$$x=t,\quad y=0,\quad z=1$$

пересекает поверхность второго порядка

$$x^2-y^2-2z=0$$

в двух точках

$$(\sqrt{2},\ 0,\ 1) \text{ и } (-\sqrt{2},\ 0,\ 1).$$

5. Прямая

$$x=t,\quad y=0,\quad z=0$$

пересекает поверхность

$$x^2-y^2-2z=0$$

в одной двойной точке: (0, 0, 0) (сравнить с примером 3).

Теорема 2. *Плоскость или совсем не имеет с алгебраической поверхностью общих точек, или целиком входит в ее состав, или пересекает ее по плоской алгебраической линии, порядок которой не больше порядка данной поверхности.*

Доказательство. Пусть

$$F(x,\ y,\ z)=0 \tag{4}$$

уравнение алгебраической поверхности n-го порядка (F — целая рациональная функция от x, y, z степени n).

Рассмотрим произвольную плоскость П, проходящую через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ компланарно двум неколлинеарным векторам

$$\boldsymbol{a}=\{l_1,\ m_1,\ n\} \text{ и } \boldsymbol{b}=\{l_2,\ m_2,\ n_2\}.$$

Параметрические уравнения этой плоскости

$$x=x_0+l_1u+l_2v,\qquad y=y_0+m_1u+m_2v,\qquad z=z_0+n_1u+n_2v, \tag{5}$$

где u и v — координаты точки M этой плоскости в системе координат с началом в точке M_0 и базисными векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Уравнение, связывающее координаты u, v точки M плоскости П, которая (точка M) лежит и на поверхности (4), имеет вид

$$F(x_0+l_1u+l_2v,\quad y_0+m_1u+m_2v,\quad z_0+n_1u+n_2v)=0. \tag{6}$$

Если это уравнение относительно u и v не имеет ни одного решения, то поверхность (4) и плоскость (5) не имеют ни одной общей точки.

Если соотношение (6) является тождеством относительно u и v, то все точки плоскости (5) лежат на поверхности (4), иначе плоскость П входит в состав данной алгебраической поверхности.

Если, наконец, соотношение (6) является уравнением относительно u и v степени $1 \leqslant k \leqslant n$, то оно является в указанной выше системе координат (M_0, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$) уравнением алгебраической линии порядка k.

Примеры. 1. Плоскость

$$x=u, \quad y=u, \quad z=v$$

не имеет с поверхностью (также плоскость!):

$$x-y+1=0$$

ни одной общей точки.

2. Плоскость

$$x=u, \quad y=u, \quad z=v$$

входит в состав поверхности

$$x^2-y^2=0.$$

3. Плоскость

$$x=u, \quad y=u, \quad z=v$$

пересекает поверхность второго порядка

$$x^2-y^2-2z=0$$

по прямой

$$v=0$$

(т. е. по линии первого порядка).

4. Плоскость

$$x=u, \quad y=v, \quad z=0$$

пересекает поверхность *второго* порядка

$$x^2+y^2+z^2=1$$

по линии второго порядка

$$u^2+v^2=1.$$

3. Распадение алгебраических поверхностей

Если левая часть уравнения

$$F(x, y, z)=0$$

алгебраической поверхности разлагается в произведение двух целых рациональных функций, степень каждой из которых больше или равна 1

$$F(x, y, z)=\varphi(x, y, z)\cdot\psi(x, y, z),$$

то говорят, что данная алгебраическая поверхность *распадается* на алгебраические поверхности, определяемые уравнениями

$$\varphi(x, y, z)=0 \quad \text{и} \quad \psi(x, y, z)=0.$$

Например, поверхность второго порядка, заданная уравнением

$$x^2+2xy+y^2-z^2=0,$$

или

$$(x+y)^2-z^2=0,$$

или

$$(x+y+z)(x+y-z)=0$$

распадается на две поверхности первого порядка (плоскости), уравнения которых

$$x+y+z=0, \quad x+y-z=0.$$

Теорема 3. *Если в состав алгебраической поверхности*

$$F(x, y, z)=0 \tag{7}$$

порядка $n>1$ *входит плоскость*

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{8}$$

то целая рациональная функция $F(x, y, z)$ *может быть представлена в виде*

$$F(x, y, z)=(Ax+By+Cz+D)\,F_1(x, y, z),$$

где $F_1(x, y, z)$ — *целая рациональная функция от* x, y, z, *степень которой на единицу меньше степени* $F(x, y, z)$.

Эта теорема доказывается так же, как и теорема 2 § 139, только здесь коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в выражении

$$F(x, y, z)=a_0x^2+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

являются целыми рациональными функциями от y и z степеней соответственно не больше $1, 2, \ldots, n$ (a_0 — число).

ГЛАВА XI

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ ОБЩИМ УРАВНЕНИЕМ

§ 141. Теорема о том, что всякое уравнение второй степени с двумя неизвестными определяет эллипс, гиперболу, параболу или две прямые

Общее уравнение линии второго порядка будем писать в виде

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0.$$

Все коэффициенты обозначены одной буквой a с индексами, указывающими, какая координата и в какой степени умножается на этот коэффициент (a_{11} — коэффициент при $x^2=x\cdot x$ и т. д.).

Через a_{12}, a_1 и a_2 обозначены соответственно половины коэффициентов при xy, x и y для симметрии последующих формул.

Все эти коэффициенты можно предполагать и комплексными, так же как и значения x и y. Однако мы ограничимся рассмотрением того случая, когда a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a — действительные числа. Комплексные прямые и комплексные точки будем вводить лишь в связи с рассмотрением точек пересечения линии второго порядка с прямой и в связи с распадением линии второго порядка на две прямые. Систему координат можно предполагать общей декартовой, однако в § 141—143 предполагаем, что система координат прямоугольная.

Теорема 1. *Общее уравнение*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0 \tag{1}$$

линии второго порядка, заданной относительно прямоугольной системы координат, при помощи поворота и переноса осей коорди-

*нат можно привести к одному из следующих видов**:

$$a'_{11}X^2+a'_{22}Y^2+D=0, \quad \text{где} \quad a'_{11}\neq 0, \quad a'_{22}\neq 0,$$

$$a'_{11}X^2+2a'_2Y=0, \quad \text{где} \quad a'_{11}\neq 0, \quad a'_2\neq 0,$$

$$a'_{11}X^2+D=0, \quad \text{где} \quad a'_{11}\neq 0.$$

Эти уравнения будем называть простейшими уравнениями линии второго порядка.

Доказательство. Докажем сначала, что можно повернуть оси xOy на такой угол α, что в преобразованном уравнении коэффициент при произведении $x'y'$ новых координат обратится в нуль **.

Итак, предполагая, что $a_{12}\neq 0$, повернем оси xOy пока на произвольный угол α. Тогда координаты x и y точки M в системе xOy через координаты x' и y' той же точки M в системе $x'Oy'$ будут выражаться соотношениями

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

а уравнение (1) примет вид

$$a_{11}(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+2a_{12}(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+$$
$$+a_{22}(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+2a_1(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+$$
$$+2a_2(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+a=0,$$

или

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a=0,$$

где

$$a'_{11}=a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\sin^2\alpha, \tag{2}$$

$$a'_{12}=a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+(a_{22}-a_{11})\sin\alpha\cos\alpha, \tag{3}$$

$$a'_{22}=a_{11}\sin^2\alpha-2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\cos^2\alpha, \tag{4}$$

$$a'_1=a_1\cos\alpha+a_2\sin\alpha, \tag{5}$$

$$a'_2=-a_1\sin\alpha+a_2\cos\alpha. \tag{6}$$

Условие

$$a'_{12}=0$$

---

* Здесь по существу речь идет о том, и это будет доказано, что при помощи ортогонального преобразования целую рациональную функцию (а не уравнение!)

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a$$

можно преобразовать к одному из следующих простейших видов:

$$a'_{11}X^2+a'_{22}Y^2+D, \quad a'_{11}X^2+2a'_2Y, \quad a'_{11}X^2+D, \quad \text{где} \quad a'_{11}\neq 0, \quad a'_{22}\neq 0, \; a'_2\neq 0.$$

** Если в данном уравнении (1) $a_{12}=0$, то эту часть рассуждений, относящихся к доказательству теоремы, следует опустить.

принимает вид

$$a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (a_{22} - a_{11})\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{7}$$

При повороте на угол α, определяемый этим соотношением, в преобразованном уравнении коэффициент a'_{12} обратится в нуль и оно примет вид

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a = 0. \tag{8}$$

I случай: $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$.

Преобразуем уравнение (8) к виду

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_1}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{22}\left(y' + \frac{a'_2}{a'_{22}}\right)^2 + a - \frac{a'^2_1}{a'_{11}} - \frac{a'^2_2}{a'_{22}} = 0. \tag{1'}$$

Производя перенос осей $x'Oy'$ так, чтобы новым началом координат стала точка

$$O'\left(-\frac{a'_1}{a'_{11}},\ -\frac{a'_2}{a'_{22}}\right)$$

(координаты этой точки даны относительно системы $x'Oy'$) и обозначая новую систему координат через $XO'Y$, будем иметь

$$X = x' + \frac{a'_1}{a'_{11}}, \quad Y = y' + \frac{a'_2}{a'_{22}},$$

так что уравнение (8) примет вид

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + D = 0, \tag{I}$$

где

$$D = a - \frac{a'^2_1}{a'_{11}} - \frac{a'^2_2}{a'_{22}}.$$

II случай: или $a'_{22} = 0$, $a'_2 \neq 0$, или $a'_{11} = 0$, $a'_1 \neq 0$.

Предположим, что $a'_{22} = 0$, $a'_2 \neq 0$. Тогда уравнение (8) имеет вид

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a = 0, \tag{1''}$$

или

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_1}{a'_{11}}\right)^2 + 2a'_2y' + a - \frac{a'^2_1}{a'_{11}} = 0,$$

или

$$a'_{11}\left(x'+\frac{a'_1}{a'_{11}}\right)^2+2a'_2\left(y'+\frac{a-\frac{a'^2_1}{a'_{11}}}{2a'_2}\right)=0.$$

Производя перенос осей $x'Oy'$ так, чтобы новым началом координат стала точка $O'\left(-\frac{a'_1}{a'_{11}},\ -\frac{a-\frac{a'^2_1}{a'_{11}}}{2a'_2}\right)$ (координаты этой точки даны относительно системы $x'Oy'$), и обозначая новую систему через $XO'Y$, будем иметь

$$X=x'+\frac{a'_1}{a'_{11}},\quad Y=y'+\frac{a-\frac{a'^2_1}{a'_{11}}}{2a'_2},$$

так что уравнение (1″) примет вид

$$a'_{11}X^2+2a'_2Y=0$$

(это уравнение параболы).

III случай: или $a'_{22}=a'_2=0$, или $a'_{11}=a'_1=0$. Предположим, что $a'_{22}=a'_2=0$. Тогда уравнение (8) имеет вид

$$a'_{11}x'^2+2a'_1x'+a=0,$$

или

$$a'_{11}\left(x'+\frac{a'_1}{a'_{11}}\right)^2+a-\frac{a'^2_1}{a'_{11}}=0. \qquad (1''')$$

Перенося оси $x'Oy'$ так, чтобы новым началом координат стала точка

$$O'\left(-\frac{a'_1}{a'_{11}},\ 0\right),$$

и обозначая новую систему координат через $XO'Y$, будем иметь

$$X=x'+\frac{a'_1}{a'_{11}},\quad Y=y',$$

так что уравнение (1‴) примет вид

$$a'_{11}X^2+D=0,$$

где

$$D=a-\frac{a'^2_1}{a'_{11}}.$$

Теорема 2. *Общее уравнение линии второго порядка*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0, \qquad (9)$$

заданное относительно общей декартовой системы координат, определяет одну из следующих девяти линий (см. таблицу).

Таблица

Группа	№	Уравнение линии	Название линии
I	1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллипс
	2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	мнимый эллипс
	3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	две мнимые пересекающиеся прямые
	4	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гипербола
	5	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	две пересекающиеся прямые
II	6	$x^2=2py$	парабола
III	7	$x^2=a^2\ (a\neq 0)$	две параллельные прямые
	8	$x^2=-a^2\ (a\neq 0)$	две мнимые параллельные прямые
	9	$x^2=0$	две совпадающие прямые

Доказательство. Перейдем от общей декартовой системы координат к декартовой прямоугольной. Как было доказано в § 139, п. 1, порядок линии при этом не изменится и данная линия в декартовой прямоугольной системе координат будет определяться уравнением того же вида (9) (но уже с другими значениями коэффициентов a_{ik}, a_i и a). Но в предыдущей теореме доказано, что если общее уравнение линии второго порядка задано относительно декартовой прямоугольной системы координат, то оно при помощи преобразования прямоугольной системы координат в прямоугольную может быть приведено к одному из следующих простейших видов*:

$$a'_{11}x^2+a'_{22}y^2+D=0, \quad a'_{11}\neq 0, \quad a'_{22}\neq 0, \qquad \text{(I)}$$
$$a'_{11}x^2+2a'_2y=0, \quad a'_{11}\neq 0, \quad a'_2\neq 0, \qquad \text{(II)}$$
$$a'_{11}x^2+D=0, \quad a'_{11}\neq 0. \qquad \text{(III)}$$

* Здесь через x и y мы обозначаем координаты точек в той системе координат, в которой уравнение линии является простейшим.

Рассмотрим, какой вид могут принять простейшие уравнения (I), (II) и (III) линии второго порядка в зависимости от знаков коэффициентов этих уравнений.

I. 1. Если a'_{11} и a'_{22} одного знака, а D имеет противоположный знак, то, деля обе части уравнения (I) на $-D$ и полагая $-\frac{D}{a'_{11}}=a^2$, $-\frac{D}{a'_{22}}=b^2$, приведем уравнение (I) к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

это каноническое уравнение эллипса.

2. Если a'_{11}, a'_{22} и D одного знака, то уравнение (I) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

и определяет мнимый эллипс (на мнимом эллипсе нет, очевидно, ни одной точки (действительной), так как если x и y — действительные числа, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 0\Big)$.

3. Если $D=0$, а a'_{11} и a'_{22} одного знака, то уравнение (I) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0.$$

Это уравнение удовлетворяется только при $x=y=0$. Но так как

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{y}{b}+i\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}-i\frac{x}{a}\right),$$

то говорят, что это уравнение распадается на пару мнимых прямых

$$\frac{y}{b}\pm i\frac{x}{a}=0,$$

пересекающихся в действительной точке $O'(0, 0)$.

4. Если a'_{11} и a'_{22} разных знаков, а $D\neq 0$, то уравнение (I) приводится к виду

$$\frac{x^2}{-\frac{D}{a'_{11}}}-\frac{y^2}{\frac{D}{a'_{22}}}=1.$$

Считая, что

$$-\frac{D}{a'_{11}}>0,\quad \frac{D}{a'_{22}}>0,$$

и полагая $-\frac{D}{a'_{11}}=a^2$, $\frac{D}{a'_{22}}=b^2$, получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\left(\text{если } -\frac{D}{a'_{11}}<0,\ \frac{D}{a'_{22}}<0,\right.$ то получим $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и, производя поворот осей на угол 90°, т. е. полагая $x=-y'$, $y=x'$, будем иметь $\left.\frac{x'^2}{b^2}-\frac{y'^2}{a^2}=1\right)$.

5. Если a'_{11} и a'_{22} разных знаков, а $D=0$, то уравнение (I) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

и определяет две пересекающиеся прямые:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

II. Уравнение (II) можно привести к виду

$$x^2=2py,$$

где $p=-\frac{a'_2}{a'_{11}}\neq 0$. Число p можно считать положительным, так как в противном случае достаточно изменить положительное направление оси Oy на противоположное.

III. Уравнение (III) приводится к виду

$$x^2=-\frac{D}{a'_{11}},\ \text{или}\ x^2=a^2,\ x^2=-a^2,\ x^2=0$$

в зависимости от того, будет

$$-\frac{D}{a'_{11}}>0,\ -\frac{D}{a'_{11}}<0\ \text{или же}\ D=0.$$

§ 142. Теория инвариантов

В настоящем параграфе понадобятся следующие теоремы.

Теорема 1. *Произведем над переменными x и y квадратичной формы*

$$\varphi=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2 \tag{1}$$

линейное однородное преобразование

$$\begin{aligned} x&=c_{11}x'+c_{12}y',\\ y&=c_{21}x'+c_{22}y'; \end{aligned} \tag{2}$$

квадратичная форма φ примет вид

$$\varphi' = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2. \tag{3}$$

Тогда между матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

квадратичных форм (1) *и* (3) *и матрицей*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \tag{5}$$

преобразования (2) *имеет место соотношение*

$$B = C'AC, \tag{6}$$

где

$$C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \tag{7}$$

матрица, полученная транспонированием матрицы C.

Теорема 2. *Произведем над переменными x, y и z квадратичной формы*

$$\varphi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx \tag{8}$$

линейное однородное преобразование

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'; \end{aligned} \tag{9}$$

квадратичная форма φ примет вид

$$\varphi' = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{31}z'x'. \tag{10}$$

Тогда между матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} \tag{11}$$

и матрицей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{12}$$

преобразования (9) *имеет место то же самое соотношение* (6):

$$B = C'AC, \tag{13}$$

где C' — матрица, полученная транспонированием матрицы C.

Обе теоремы имеют место для квадратичных форм от любого числа переменных *. Отметим некоторые следствия из этих теорем.

Следствие 1. Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей и так как определитель не меняется при транспонировании, то из соотношения (6) или (13) следует, что

$$\operatorname{Det} B = \operatorname{Det} A \cdot (\operatorname{Det} C)^2. \tag{14}$$

Следствие 2. Если над переменными x и y целой рациональной функции второй степени

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a \tag{15}$$

производится линейное неоднородное преобразование

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_2, \end{aligned} \tag{16}$$

то функция f преобразуется в функцию

$$f' = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a' \tag{17}$$

с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a' \end{pmatrix}, \tag{18}$$

причем

$$B = C'AC, \tag{19}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

а C' — матрица, полученная транспонированием матрицы C.

В самом деле, целая рациональная функция f может быть получена из квадратичной формы

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1xz + 2a_2yz + az^2 \tag{15'}$$

при $z = 1$, а неоднородное преобразование (16) получается из однородного:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_1z', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_2z', \\ z &= \phantom{c_{11}x' + c_{12}y' + c_1}z' \end{aligned} \tag{16'}$$

при $z' = 1$.

* См. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. М., «Наука», 1965, гл. 6, § 26, стр. 166.

Так как

$$\operatorname{Det} C = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \tag{22}$$

то из соотношения (19) следует

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^2. \tag{23}$$

Следствие 3.

Так как при преобразовании (16) квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{24}$$

входящая в состав функции f, перейдет в квадратичную форму

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2, \tag{25}$$

входящую в состав функции f', если над переменными x и y произвести однородное преобразование

$$x = c_{11}x' + c_{12}y', \quad y = c_{21}x' + c_{22}y', \tag{26}$$

то

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

В самом деле, подставляя в выражение (15) вместо x и y их значения из формул (16), мы увидим, что коэффициенты при x'^2, $x'y'$ и y'^2 не зависят от c_1 и c_2 ($a'_{11} = a_{11}c_{11}^2 + 2a_{12}c_{11}c_{21} + a_{22}c_{21}^2$ и т. д.).

Из соотношения (27) следует, что

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^2. \tag{28}$$

Определение. *Целая рациональная функция*

$$I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a) \tag{29}$$

от коэффициентов целой рациональной функции

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a \tag{30}$$

называется ортогональным инвариантом, если имеет место равенство

$$I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a) = I(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_1, a'_2, a'), \tag{31}$$

где a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_1, a'_2, a' — *коэффициенты целой рациональной* *функции*

$$f' = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a', \tag{32}$$

*которую мы получим, производя ортогональное преобразование**

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y + c_2 \end{aligned} \tag{33}$$

над переменными x и y целой рациональной функции f.

Теорема 3. *Три функции***

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{34}$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}, \tag{35}$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} \tag{36}$$

являются ортогональными инвариантами целой рациональной функции

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a.$$

Доказательство. Так как определитель ортогонального преобразования равен ± 1, то его квадрат равен 1 и инвариантность I_2 и K_3 следует из соотношений (28) и (23).

Для доказательства того, что $I_1 = a_{11} + a_{22}$ также является ортогональным инвариантом, заметим прежде всего, что коэффициенты при x^2, xy и y^2 не меняются при преобразовании переноса

$$x = x' + c_1, \quad y = y' + c_2. \tag{37}$$

В самом деле, при этом преобразовании функция f преобразуется в функцию

$$f' = a_{11}(x' + c_1)^2 + 2a_{12}(x' + c_1)(y' + c_2) + a_{22}(y' + c_2)^2 + \\ + 2a_1(x' + c_1) + 2a_2(y' + c_2) + a,$$

и коэффициентами при x'^2, $x'y'$ и y'^2 будут соответственно a_{11}, $2a_{12}$ и a_{22}. Поэтому достаточно доказать, что $I_1 = a_{11} + a_{22}$ — инвариант однородного ортогонального преобразования

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y'. \end{aligned} \tag{38}$$

---

* См. формулы (10) § 99, п. 3.

** I_2 называется дискриминантом квадратичной формы $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ (входящей в состав функции f).

При преобразовании (38) функция f преобразуется в функцию

$$f' = a_{11}(c_{11}x' + c_{12}y')^2 + 2a_{12}(c_{11}x' + c_{12}y')(c_{21}x' + c_{22}y') +$$
$$+ a_{22}(c_{21}x' + c_{22}y')^2 + 2a_1(c_{11}x' + c_{12}y') + 2a_2(c_{21}x' + c_{22}y') + a,$$

значит,

$$a'_{11} = a_{11}c_{11}^2 + 2a_{12}c_{11}c_{21} + a_{22}c_{21}^2,$$
$$a'_{22} = a_{11}c_{12}^2 + 2a_{12}c_{12}c_{22} + a_{22}c_{22}^2,$$

откуда

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(c_{11}^2 + c_{12}^2) + 2a_{12}(c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22}) + a_{22}(c_{21}^2 + c_{22}^2).$$

Но так как матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

ортогональная, то $c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1$, $c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1$, $c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} = 0$ и потому

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}.$$

Теорема 4. *Функция*

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}$$

является инвариантом однородного ортогонального преобразования; если же функция

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a$$

однородным ортогональным преобразованием может быть приведена к виду

$$f' = a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' + a',$$

то K_2 является и ортогональным инвариантом.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a - \lambda(x^2 + y^2);$$

производя однородное ортогональное преобразование

$$x = c_{11}x' + c_{12}y', \quad y = c_{21}x' + c_{22}y',$$

получим функцию *

$$F' = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a' - \lambda(x'^2 + y'^2).$$

* $x^2 + y^2 = (c_{11}x' + c_{12}y')^2 + (c_{21}x' + c_{22}y')^2 = (c_{11}^2 + c_{21}^2)x'^2 + 2(c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22})x'y' + (c_{12}^2 + c_{22}^2)y'^2 = x'^2 + y'^2$; $c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$, $c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0$, $c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1$, так как матрица (c_{ik}) ортогональная.

По доказанному K_3 является ортогональным инвариантом. Используя это по отношению к функции F, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22}-\lambda & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a' \end{vmatrix}.$$

Приравнивая коэффициенты при λ первой степени в левой и правой частях этого равенства, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_1 \\ a'_1 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_2 \\ a'_2 & a' \end{vmatrix}.$$

Предположим теперь, что существует однородное ортогональное преобразование ω_1, при котором функция f принимает вид

$$f' = a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' + a'.$$

Докажем, что тогда функция K_2 является ортогональным инвариантом. В самом деле, пусть ω — произвольное ортогональное преобразование. Рассмотрим ортогональное преобразование

$$\omega' = \omega\omega_1^{-1}; \text{ тогда } \omega = \omega'\omega_1.$$

Далее, представим ω' в виде произведения однородного ортогонального преобразования ω_3 на перенос ω_2; тогда

$$\omega = \omega_3\omega_2\omega_1.$$

После **однородного** ортогонального преобразования ω_1 функция f перейдет в функцию

$$f_1 = a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' + a'$$

и по доказанному K_2 не изменится. Произведем преобразование переноса ω_2:

$$x' = x'' + x_0, \quad y' = y'' + y_0.$$

Функция f_1 перейдет в функцию

$$f_2 = a'_{11}(x''+x_0)^2 + 2a'_1(x''+x_0) + a' = a'_{11}x''^2 + 2(a'_{11}x_0 + a'_1)x'' + \\ + a'_{11}x_0^2 + 2a'_1x_0 + a'.$$

Подсчитывая функцию K_2, для функций f_1 и f_2 будем иметь

$$K'_2 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_1 \\ a'_1 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_1 \\ a'_1 & a' \end{vmatrix},$$

$$K''_2 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{11}x_0 + a'_1 \\ a'_{11}x_0 + a'_1 & a'_{11}x_0^2 + 2a'_1x_0 + a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a'_{11}x_0^2 + 2a'_1x_0 + a' \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}'^2 x_0^2 + 2a_1' a_{11}' x_0 + a_{11}' a' - a_{11}'^2 x_0^2 - 2a_1' a_{11}' x_0 - a_1'^2 = a_{11}' a' - a_1'^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}' & a_1' \\ a_1' & a' \end{vmatrix} = K_2'.$$

Таким образом, функция K_2 не меняется при переносе. Наконец, однородное ортогональное преобразование ω_3 опять не изменит K_2. Значит, K_2 не изменится и в результате преобразования $\omega_3\omega_2\omega_1$, которое равно ω.

§ 143. Определение канонического уравнения линии второго порядка при помощи инвариантов. Распадение линии второго порядка на две прямые

Теорема 1. *Для того чтобы линия второго порядка, заданная общим уравнением относительно декартовой прямоугольной системы координат, относилась к первой группе, необходимо и достаточно, чтобы $I_2 \neq 0$, ко второй: $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$, к третьей: $I_2 = 0$, $K_3 = 0$, $I_1 \neq 0$.*

Доказательство необходимости.

1. Предположим, что линия второго порядка принадлежит к первой группе, т. е. ее общее уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0,$$

заданное относительно прямоугольной системы координат, преобразованием прямоугольной системы координат в прямоугольную (т. е. ортогональным преобразованием) может быть приведено к виду

$$a_{11}' X^2 + a_{22}' Y^2 + D = 0, \text{ где } a_{11}' \neq 0, \ a_{22}' \neq 0.$$

В таком случае

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{vmatrix} = a_{11}' a_{22}' \neq 0.$$

2. Предположим, что линия второго порядка принадлежит ко второй группе, т. е. ее общее уравнение при помощи преобразования прямоугольной системы координат может быть приведено к виду

$$a_{11}' X^2 + 2a_2' Y = 0,$$

где $\quad a_{11}' \neq 0, \quad a_2' \neq 0.$

В таком случае $I_2 = 0$, $K_3 = -a_{11}' a_2'^2 \neq 0$.

3. Предположим, что линия второго порядка принадлежит к третьей группе, т. е. ее общее уравнение при помощи преобразо-

вания прямоугольной системы координат может быть приведено к виду

$$a'_{11}X^2+D=0,$$

где $a'_{11}\neq 0$.

В таком случае $I_2=0$, $K_3=0$, $I_1=a'_{11}\neq 0$.

Доказательство достаточности получается сразу методом от противного:

1) предположим, что $I_2\neq 0$; требуется доказать, что линия второго порядка принадлежит к I группе. Предположим, что эта линия принадлежит ко II или III группе; тогда (в силу необходимости) $I_2=0$, и мы приходим к противоречию.

Аналогично доказывается, что в случае $I_2=0$, $K_3\neq 0$ линия принадлежит ко II группе, а в случае $I_2=0$, $K_3=0$ к III.

Теорема 2. *Если линия второго порядка задана общим уравнением относительно декартовой прямоугольной системы координат, то ее простейшие уравнения имеют вид*

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\frac{K_3}{I_2}=0, \tag{I}$$

$$I_1X^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}Y=0, \tag{II}$$

$$I_1X^2+\frac{K_2}{I_1}=0, \tag{III}$$

соответственно тому, является ли эта линия линией I, II *или* III *группы, причем* λ_1 *и* λ_2 *— корни уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0,$$

называемого характеристическим.

Доказательство. 1. Пусть линия второго порядка принадлежит к I группе; тогда ее простейшее уравнение имеет вид

$$a'_{11}X^2+a'_{22}Y^2+D=0,$$

где

$$a'_{11}\neq 0 \text{ и } a'_{22}\neq 0.$$

Находим

$$I_2=\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix}=a'_{11}a'_{22},$$

$$I_1=a'_{11}+a'_{22},$$

так что a'_{11} и a'_{22} — корни λ_1 и λ_2 уравнения

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$$

и, далее,

$$K_3 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22}D = I_2 D,$$

откуда

$$D = \frac{K_3}{I_2}.$$

2. Пусть линия второго порядка является линией II группы (т. е. является параболой). Тогда ее простейшее уравнение имеет вид

$$a'_{11}X^2 + 2a'_2 Y = 0.$$

Находим

$$I_1 = a'_{11}, \quad K_3 = -I_1 a_2'^2,$$

откуда

$$a'_2 = \pm \sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}.$$

3. Пусть, наконец, линия второго порядка является линией III группы, т. е. ее простейшее уравнение имеет вид

$$a'_{11}X^2 + D = 0.$$

Находим

$$I_2 = 0, \ K_3 = 0, \ I_1 = a'_{11};$$

но так как для линий III группы и K_2 является ортогональным инвариантом, то

$$K_2 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix} = a'_{11}D = I_1 D,$$

откуда

$$D = \frac{K_2}{I_1}.$$

Теорема 3. *В следующей таблице даны необходимые и достаточные признаки каждого из девяти классов линии второго порядка:*

Таблица

№	Название линии	Признак
1	Эллипс	$I_2 > 0 \quad I_1K_3 < 0$
2	Мнимый эллипс	$I_2 > 0 \quad I_1K_3 > 0$
3	Две мнимые пересекающиеся прямые	$I_2 > 0 \quad K_3 = 0$
4	Гипербола	$I_2 < 0 \quad K_3 \neq 0$
5	Две пересекающиеся прямые	$I_2 < 0 \quad K_3 = 0$
6	Парабола	$I_2 = 0 \quad K_3 \neq 0$
7	Две параллельные прямые	$I_2 = 0 \quad K_3 = 0 \quad K_2 < 0$
8	Две мнимые параллельные прямые	$I_2 = 0 \quad K_3 = 0 \quad K_2 > 0$
9	Две совпадающие прямые	$I_2 = 0 \quad K_3 = 0 \quad K_2 = 0$

Докажем сначала достаточность этих признаков.

1. Если $I_2 > 0$, $I_1 K_3 < 0$, то корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$ имеют одинаковый знак ($I_2 = \lambda_1\lambda_2$). Так как $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ и $I_1 K_3 < 0$, то знак I_1 одинаков со знаками λ_1 и λ_2, а K_3 имеет знак, им противоположный. Отсюда следует, что простейшее уравнение (I) приводится к виду:

$$\frac{X^2}{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}} + \frac{Y^2}{-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}} = 1,$$

и так как $-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2} > 0$, $-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2} > 0$, то это уравнение является каноническим уравнением эллипса с полуосями

$$a = \sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}}, \quad b = \sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}}.$$

2. Если $I_2 > 0$, $I_1 K_3 > 0$, то λ_1, λ_2 и K_3 имеют одинаковые знаки и, значит, простейшее уравнение, которое мы теперь перепишем в виде

$$\frac{X^2}{\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}} + \frac{Y^2}{\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}} = -1,$$

является уравнением мнимого эллипса $\left(\frac{K_3}{\lambda_1 I_3} > 0, \ \frac{K_3}{\lambda_2 I_2} > 0\right)$.

3. Если $I_2 > 0$, $K_3 = 0$, то простейшее уравнение принимает вид

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0,$$

причем λ_1 и λ_2 в силу условия $I_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$ имеют одинаковые знаки; последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{X^2}{\frac{1}{|\lambda_1|}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{|\lambda_2|}} = 0,$$

или

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0,$$

где $a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$; оно является уравнением двух мнимых пересекающихся прямых.

4. Если $I_2 < 0$, $K_3 \neq 0$, то λ_1 и λ_2 разных знаков. Обозначим через λ_1 тот из корней характеристического уравнения, который имеет знак, противоположный знаку K_3, и перепишем простейшее уравнение (I) так:

$$\frac{X^2}{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}} - \frac{Y^2}{\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}} = 1.$$

Здесь

$$-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2} > 0, \quad \frac{K_3}{\lambda_2 I_2} > 0.$$

и, полагая

$$-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2} = a^2, \quad \frac{K_3}{\lambda_2 I_2} = b^2 > 0,$$

получаем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

5. Если $I_2 < 0$, $K_3 = 0$, то простейшее уравнение имеет вид

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0.$$

Здесь λ_1 и λ_2 разных знаков ($\lambda_1 \lambda_1 = I_2 < 0$); считая $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{X^2}{\frac{1}{\lambda_1}} - \frac{Y^2}{-\frac{1}{\lambda_2}} = 0,$$

или

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0,$$

где $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}$, $b^2 = -\frac{1}{\lambda_2}$. Последнее уравнение является уравнением двух пересекающихся прямых.

6. Если $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$, то простейшее уравнение

$$I_1 X^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\; Y = 0$$

является уравнением параболы.

7. Если $I_2 = K_3 = 0$, то простейшее уравнение имеет вид

$$I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0, \text{ или } I_1^2 X^2 + K_2 = 0.$$

Отсюда следует, что если $K_2 < 0$, то это уравнение является уравнением двух параллельных прямых, если $K_2 > 0$, то уравнением двух мнимых параллельных прямых, а если $K_2 = 0$, то уравнением двух совпадающих прямых.

Достаточность всех признаков доказана. Необходимость доказывается методом от противного. Пусть, например, общее уравнение линии второго порядка, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат, является уравнением эллипса; требуется доказать, что $I_2 > 0$, $I_1 K_3 < 0$. Предполагая $I_2 \leqslant 0$, заключаем, что данное уравнение является уравнением одной из линий 4—9, указанных в таблице на стр. 354.

Итак, $I_2>0$. Предполагая $I_1K_3\geqslant 0$, заключаем, что данное уравнение является либо уравнением мнимого эллипса, либо уравнением двух мнимых пересекающихся прямых. Значит, $I_1K_3<0$.

Аналогично методом от противного с использованием доказанной достаточности признаков, указанных в таблице на стр. 354, доказывается необходимость **всех** этих признаков.

Следствие. Для того чтобы линия второго порядка, заданная общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$$

относительно аффинной системы координат, распадалась на две прямые, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$K_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}=0.$$

Доказательство. Из доказанной теоремы следует, что если для линии первой группы $K_3=0$, то соответствующее уравнение $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=0$ является уравнением двух прямых, а если $K_3\neq 0$, то уравнение линии первой группы не является уравнением двух прямых. Для параболы (вторая группа) $K_3\neq 0$, а для всех линий второго порядка третьей группы, каждая из которых распадается на две прямые, $K_3=0$. Следствие доказано для прямоугольной системы. Однако при переходе к общей декартовой системе координат в силу соотношения (23) § 142 условие $K_3=0$ является необходимым и достаточным условием распадения линии второго порядка на две прямые и в общей декартовой системе координат. В самом деле, формулы (16) § 142 можно рассматривать как формулы преобразования декартовой прямоугольной системы координат в любую общую декартову, а потому

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}\neq 0.$$

§ 144. Центр линии второго порядка

Определение. *Центром линии второго порядка называется центр симметрии этой линии, т. е. точка S, обладающая следующим свойством: если на линии лежит точка* M, то на этой же линии лежит точка M', симметричная точке M относительно S.*

Теорема 1. *Пусть относительно общей декартовой системы координат задана линия второго порядка общим уравнением*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0. \qquad (1)$$

Для того чтобы начало координат являлось ее центром, необходимо и достаточно, чтобы в уравнении (1) *отсутствовали члены с*

* В этом определении мы имеем в виду и комплексные «точки», лежащие на данной линии.

x и y в первой степени, т. е. чтобы

$$a_1 = a_2 = 0,$$

иначе, чтобы уравнение линии имело вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a = 0. \tag{2}$$

Доказательство достаточности. Если $a_1 = a_2 = 0$, то уравнение линии имеет вид (2), и если ему удовлетворяют координаты x и y точки M, то ему удовлетворяют и координаты $-x$, $-y$ точки M', симметричной M относительно начала координат.

Доказательство необходимости. Пусть начало координат является центром линии (1). Предположим вопреки утверждению теоремы, что по крайней мере одно из чисел a_1 или a_2 отлично от нуля. Возьмем на линии (1) произвольную точку M (x, y). Ее координаты удовлетворяют уравнению (1), а так как начало координат является центром симметрии линии (1), то уравнению (1) удовлетворяют и координаты точки $M'(-x, -y)$, симметричной точке M относительно начала координат, т. е.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_1x - 2a_2y + a = 0.$$

Из этого соотношения и из соотношения (1) находим

$$a_1x + a_2y = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек линии (1).

На основании теоремы 2, п. 3, § 139 функция

$$\varphi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a$$

может быть представлена в виде произведения двух линейных функций от x и y, одной из которых является форма

$$a_1x + a_2y.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два:

$$a_1x + a_2y = 0, \quad px + qy + r = 0.$$

Но так как координаты всех точек линии (1) удовлетворяют уравнению $a_1x + a_2y = 0$, то последние два уравнения являются уравнениями одной и той же прямой, значит,

$$\frac{p}{a_1} = \frac{q}{a_2}, \quad r = 0,$$

а уравнение $\varphi = 0$ или

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

приводится к виду

$$k(a_1x + a_2y)^2 = 0,$$

т. е. не содержит членов с x и y в первой степени вопреки предположению.

Теорема 2. *Если относительно общей декартовой системы координат задана линия второго порядка общим уравнением*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0,$$

то координаты x_0, y_0 ее центра определяются из системы уравнений

$$a_{11}x+a_{12}y+a_1=0, \quad a_{21}x+a_{22}y+a_2=0, \tag{3}$$

причем в случае несовместности этой системы линия не имеет центра (т. е. является параболой).

Доказательство. Произведем перенос данной декартовой системы координат так, чтобы новым началом координат стала точка $O'(x_0, y_0)$. Обозначая координаты произвольной точки $M(x, y)$ в новой системе $x'O'y'$ через x' и y', будем иметь

$$x=x'+x_0, \quad y=y'+y_0,$$

и уравнение (1) примет вид

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+2(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)x'+2(a_{21}x_0+$$
$$+a_{22}y_0+a_2)y'+a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_1x_0+2a_2y_0+a=0.$$

На основании предыдущей теоремы точка $O'(x_0, y_0)$ является центром данной линии тогда и только тогда, когда

$$a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1=0,$$
$$a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2=0.$$

Если

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0,$$

то система (3) имеет единственное решение, т. е. линия (1) имеет единственный центр.

Если система (3) неопределенная, т. е. имеет бесконечное множество решений, то линия (1) имеет бесконечное множество центров — прямую центров, так как в случае неопределенности системы множество всех ее решений есть множество всех решений одного уравнения первой степени относительно x и y.

Замечание. Данное в этом параграфе определение центра линии второго порядка носит геометрический характер лишь по отношению к тем действительным линиям второго порядка, которые имеют хотя бы одну точку; для мнимого эллипса и двух мнимых параллельных прямых это определение носит уже аналитический характер, так как приходится привлекать понятие мнимых точек. Кроме того, при доказательстве необходимости в теореме 1 мы снова обращались к понятию мнимых точек. Поэтому надо показать, что система уравнений (3), из которой находятся координаты центра, определяет всегда одну и ту же точку, независимо от выбора системы координат*, или остается несовместной при любом выборе системы координат.

Можно изменить определение центра линии, чтобы оно стало геометрическим на евклидовой плоскости, не зависящим от выбора координатной системы. Это будет сделано ниже и по отношению к понятию центра, и по отношению к асимптотическим направлениям, и по отношению к направлениям, сопряженным относительно линии второго порядка. Только после этого можно утверждать, что данная в § 143 классификация линий второго порядка по группам I, II, III является классификацией этих линий по характеру их места центров: линии группы I имеют единственный центр (начало координат в их простейшем уравнении); линии группы II не имеют центра (парабола); линии группы III имеют прямую центров (ось $O'Y$ в простейшем уравнении). В этом можно убедиться, составляя систему (3) для каждого из уравнений:

$$a_{11}'X^2+a_{22}'Y^2+D=0,\ a_{11}'\neq 0,\ a_{22}'\neq 0, \tag{I}$$

$$a_{11}'X^2+2a_2'Y=0,\ a_{11}'\neq 0,\ a_2'\neq 0, \tag{II}$$

$$a_{11}'X^2+D=0,\ a_{11}'\neq 0. \tag{III}$$

§ 145. Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления. Классификация линий по числу и действительности асимптотических направлений

Предположим, что относительно общей декартовой системы координат задана линия второго порядка общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0. \tag{1}$$

Будем исследовать пересечение этой линии с прямой, уравнения которой возьмем в параметрической форме:

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt. \tag{2}$$

Здесь (x_0, y_0)—некоторая точка прямой, а $\{l, m\}$—ее направляющий вектор. Для нахождения координат точек пересечения прямой (2) с линией (1) надо найти значения параметра t, при которых точка прямой (2) лежит на линии (1). Подставляя в уравнение (1) вместо x и y их выражения из формул (2), получим:

$$(a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2)t^2+2[l(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)+m(a_{21}x_0+a_{22}y_0+$$
$$+a_2)]t+a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_1x_0+2a_2y_0+a=0. \tag{3}$$

*Читателю предлагается проверить, что понятие середины $C(x, y)$ отрезка AB с концами $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ как точки с координатами $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ не зависит от выбора системы координат, даже если точки A и B—мнимые Для доказательства надо воспользоваться формулами преобразования общей декартовой системы координат (см. § 138, п. 1, формулы (5)).

Если в этом уравнении коэффициент при t^2 отличен от нуля, то уравнение (3) имеет два корня (действительных различных, мнимых различных, или действительных совпадающих), и, значит, прямая (2) пересекает линию (1) в двух точках (соответственно действительных различных, комплексных сопряженных, или действительных совпадающих).

Если же

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0, \tag{4}$$

то прямая с направляющим вектором $\{l, m\}$ либо пересекает линию второго порядка только в одной точке (это будет тогда и только тогда, когда коэффициент при t^2 в уравнении (3) равен нулю, а коэффициент при t не равен нулю), либо не пересекает ее (это будет тогда и только тогда, когда коэффициенты при t^2 и t в уравнении (3) равны нулю, а свободный член не равен нулю), либо входит в состав данной линии (это будет тогда и только тогда, когда соотношение (3) является тождеством относительно t). Будем говорить, что прямая имеет асимптотическое направление по отношению к данной линии второго порядка, если координаты l, m ее направляющего вектора удовлетворяют уравнению (4). Мы будем говорить также, что вектор $\{l, m\}$ имеет асимптотическое направление.

По отношению к асимптотическим направлениям линии второго порядка делятся на три группы.

A. Линии эллиптического типа; это линии второго порядка, не имеющие действительных асимптотических направлений (эллипс, мнимый эллипс, две мнимые пересекающиеся прямые).

B. Линии гиперболического типа; это линии второго порядка, имеющие два действительных асимптотических направления (гипербола, две пересекающиеся прямые).

C. Линии параболического типа; это линии второго порядка, имеющие одно асимптотическое направление (парабола, две параллельные прямые).

Теорема. *Необходимым и достаточным условием того, что линия второго порядка, заданная общим уравнением* (1) *относительно общей декартовой системы координат, не имеет асимптотических направлений (действительных), т. е. является линией эллиптического типа, является условие*

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Необходимым и достаточным условием того, что эта линия имеет два различных действительных асимптотических направления, т. е. является линией гиперболического типа, является условие

$$I_2 < 0,$$

а необходимым и достаточным условием того, что эта линия имеет только одно асимптотическое направление, т. е. является линией параболического типа, является условие

$$I_2 = 0.$$

Доказательство. Координаты вектора $\{l, m\}$, имеющего асимптотическое направление, определяются из уравнения

$$a_{11} l^2 + 2a_{12} lm + a_{22} m^2 = 0.$$

Так как вектор $\{l, m\}$ ненулевой, то имеет смысл рассматривать по крайней мере одно из отношений

$$k = \frac{m}{l} \quad \text{или} \quad k' = \frac{l}{m}.$$

Уравнение

$$a_{11} l^2 + 2a_{12} lm + a_{22} m^2 = 0,$$

следовательно, эквивалентно одному из уравнений (или $a_{11} \neq 0$ или $a_{22} \neq 0$):

$$a_{22} k^2 + 2a_{12} k + a_{11} = 0, \quad \text{или} \quad a_{11} k'^2 + 2a_{12} k' + a_{22} = 0.$$

Для того чтобы решения любого из этих уравнений были комплексными (сопряженными), действительными различными, или совпадающими, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соответственно условие

$$I_2 > 0, \; I_2 < 0, \; I_2 = 0.$$

В первом случае ($I_2 > 0$) линия не имеет действительных асимптотических направлений и является линией эллиптического типа; во втором случае ($I_2 < 0$) линия имеет два различных действительных асимптотических направления и является линией гиперболического типа; в третьем случае ($I_2 = 0$) линия имеет одно (действительное) асимптотическое направление и является линией параболического типа. В последнем случае угловой коэффициент $k = \frac{m}{l}$ единственного асимптотического направления определяется одним из соотношений

$$k = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}};$$

если $a_{12} = a_{22} = 0$, то асимптотическим направлением является направление оси Oy, так как уравнение, определяющее координаты векторов, имеющих асимптотические направления, принимает вид $a_{11} l^2 = 0$, откуда $l = 0$.

Остается рассмотреть случай $a_{11} = a_{22} = 0$.

Уравнение линии принимает вид

$$2a_{12} xy + 2a_1 x + 2a_2 y + a = 0,$$

а уравнение, из которого находятся координаты векторов, имеющих асимптотическое направление:

$$2a_{12}lm = 0,$$

следовательно, либо $l = 0$, либо $m = 0$, т. е. линия имеет два различных действительных асимптотических направления — направления осей координат (заметим, что $I_2 = -a_{12}^2 < 0$, значит, линия гиперболического типа).

Обратно, если оси координат имеют асимптотические направления, то уравнение

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

должно удовлетворяться и при $l=0$, и при $m=0$, т. е.

$$a_{11} = a_{22} = 0,$$

значит уравнение линии имеет вид

$$2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

или для двух пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

координаты l, m векторов, имеющих асимптотическое направление, определяются из уравнения

$$\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} = 0,$$

т. е. это соответственно или направления асимптот гиперболы, или направления рассматриваемых прямых.

Для параболы

$$x^2 = 2py$$

уравнение, определяющее координаты вектора $\{l, m\}$ асимптотического направления, имеет вид

$$l^2 = 0, \text{ т. е. } l = 0,$$

значит, асимптотическое направление параболы есть направление ее оси. Если, наконец, уравнение линии второго порядка определяет две параллельные (или совпадающие) прямые, то асимптотическим направлением является направление этих прямых.

§ 146. Диаметр, сопряженный данному неасимптотическому направлению

1. Общая теория

Теорема 1. *Геометрическим местом середин хорд линии второго порядка, параллельных вектору неасимптотического направления, является прямая линия; эта прямая линия называется диаметром данной линии, сопряженным рассматриваемым параллельным хордам. Если линия второго порядка задана относительно общей декартовой системы координат общим уравнением*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0, \tag{1}$$

а ее хорды параллельны ненулевому вектору $\{l,m\}$ (неасимптотического направления), то уравнение диаметра, сопряженного этим хордам, имеет вид

$$l(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+m(a_{21}l+a_{22}m+a_2)=0. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть прямая p, коллинеарная вектору $\{l, m\}$ неасимптотического направления по отношению к линии (1), пересекает эту линию в точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Обозначим через M_0 середину отрезка M_1M_2. Уравнения указанной прямой можно записать в виде

$$x=x_0+lt, \qquad y=y_0+mt. \tag{3}$$

Значения параметра t, соответствующие координатам точек M_1 и M_2, определяются из уравнения

$$(a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2)\,t^2+2\,[l\,(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)+$$
$$+m\,(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)]\,t+a_{11}x_0{}^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0{}^2+$$
$$+2a_1x_0+2a_2y_0+a=0,$$

которое получим, подставив в уравнение (1) вместо x и y их выражения из формул (3).

Пусть t_1 и t_2 — корни этого уравнения. Так как t_1 и t_2 — это координаты точек M_1 и M_2 на прямой p с началом координат в точке M_0 и масштабным вектором $\{l, m\}$, а точка M_0 — середина M_1M_2, то точка M_0 на прямой p в указанной системе координат имеет координату $t=\frac{t_1+t_2}{2}$, а так как, с другой стороны, из соотношений (3) ясно, что $t=0$ для точки $M_0(x_0, y_0)$, то $t_1+t_2=0$ и потому

$$l\,(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)+m\,(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)=0.$$

Это соотношение, таким образом, является необходимым и достаточным условием того, что хорда, имеющая направление вектора $\{l, m\}$, точкой $M_0(x_0, y_0)$ делится пополам.

С другой стороны, каждая прямая, параллельная вектору $\{l, m\}$, пересекает линию (1) в двух точках (действительных различных, мнимых различных, или действительных совпадающих), а потому геометрическим местом середин хорд линии (1), параллельных вектору $\{l, m\}$, является *вся* прямая, уравнение которой

$$l(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+m(a_{21}x+a_{22}y+a_2)=0. \qquad (4)$$

В этом уравнении коэффициенты при x и y одновременно в нуль не обращаются, так как если бы мы имели

$$a_{11}l+a_{12}m=0, \quad a_{21}l+a_{22}m=0,$$

то было бы выполнено и соотношение

$$l(a_{11}l+a_{12}m)+m(a_{21}l+a_{22}m)=0,$$

или

$$a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0,$$

т. е. вектор $\{l, m\}$ имел бы асимптотическое направление.

Из уравнения (4) находим координаты l' и m' направляющего вектора диаметра, сопряженного хордам, параллельным ненулевому вектору $\{l, m\}$:

$$l'=-(a_{21}l+a_{22}m), \quad m'=a_{11}l+a_{12}m. \qquad (5)$$

Умножая первое из этих соотношений на $-m'$, второе на l' и складывая, получим

$$a_{11}ll'+a_{12}(lm'+l'm)+a_{22}mm'=0. \qquad (6)$$

Таково необходимое условие, связывающее координаты ненулевого вектора $\{l, m\}$, параллельного хордам линии второго порядка, заданной общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$$

относительно аффинной системы координат, и координаты ненулевого вектора $\{l', m'\}$, параллельного диаметру, сопряженному этим хордам.

Условие (6) и достаточно, так как из него следует, что

$$l':m'=-(a_{21}l+a_{22}m):(a_{11}l+a_{12}m),$$

т. е. $\{l', m'\}$ — ненулевой вектор, параллельный диаметру (4). Соотношение (6) выполняется для асимптотического направления линии второго порядка, если в нем положить $l=l'$ и $m=m'$ (так как тогда мы получим $a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0$), поэтому асимптотическое направление линии второго порядка часто называют самосопряженным.

Теорема 2. *Если линия второго порядка является линией, имеющей единственный центр, и если рассмотреть семейство параллельных хорд этой линии, не имеющих асимптотического направ-*

ления, то диаметр, им сопряженный, также не имеет асимптотического направления; если взять семейство хорд линии второго порядка, параллельных этому диаметру, то диаметр, им сопряженный, будет параллелен хордам первоначального семейства.

Доказательство. Пусть относительно общей декартовой системы координат задана линия второго порядка общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0.$$

Предположим, что эта линия имеет единственный центр, т. е.

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Возьмем любой ненулевой вектор $\{l, m\}$, не имеющий асимптотического направления, и рассмотрим уравнение диаметра

$$l(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+m(a_{21}x+a_{22}y+a_2)=0,$$

сопряженного хордам, параллельным вектору $\{l, m\}$. Направляющий вектор $\{l', m'\}$ этого диаметра имеет координаты

$$l'=-(a_{21}l+a_{22}m), \quad m'=a_{11}l+a_{12}m.$$

Векторы $\{l, m\}$ и $\{l', m'\}$ неколлинеарны, так как

$$\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}=lm'-l'm=$$
$$=l(a_{11}l+a_{12}m)+m(a_{21}l+a_{22}m)=$$
$$=a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2\neq 0.$$

Вектор $\{l', m'\}$ не имеет асимптотического направления. В самом деле, так как $I_2\neq 0$, то числа $a_{11}l'+a_{12}m'$ и $a_{21}l'+a_{22}m'$ не обращаются в нуль одновременно. Поэтому уравнение

$$(a_{11}l'+a_{12}m')l+(a_{21}l'+a_{22}m')m=0, \tag{7}$$

в котором l и m рассматриваются как неизвестные, не может иметь два линейно независимых решения. Но одним из его решений является пара координат вектора $\{l, m\}$, направлению которого сопряжен диаметр с направляющим вектором $\{l', m'\}$, неколлинеарным вектору $\{l, m\}$. Значит, координаты вектора $\{l', m'\}$ не удовлетворяют уравнению (7), т. е.

$$(a_{11}l'+a_{12}m')l'+(a_{21}l'+a_{22}m')m'\neq 0,$$

или

$$a_{11}l'^2+2a_{12}l'm'+a_{22}m'^2\neq 0,$$

т. е. $\{l', m'\}$ — вектор, не имеющий асимптотического направления линии (1).

Теперь из соотношения

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{22}mm' = 0$$

в силу его симметрии относительно пар чисел l, m и l', m' следует, что если линия второго порядка имеет единственный центр, то диаметр, сопряженный хордам, параллельным вектору $\{l', m'\}$, коллинеарен вектору $\{l, m\}$.

Определение. *Два диаметра линии, имеющей единственный центр, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому, называются сопряженными.*

Условие

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{22}mm' = 0$$

можно теперь интерпретировать как необходимое и достаточное условие сопряженности двух диаметров линии второго порядка, имеющей единственный центр и заданной уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

относительно общей декартовой системы координат. Если $l \neq 0$ и $l' \neq 0$, то это необходимое и достаточное условие сопряженности можно записать в виде

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0,$$

где $k = \frac{m}{l}$ и $k' = \frac{m'}{l'}$ — угловые коэффициенты сопряженных диаметров.

Теорема 3. *Если линия второго порядка имеет единственный центр, то любая прямая неасимптотического направления, проходящая через ее центр, является диаметром этой линии.*

Доказательство. Если линия, заданная уравнением $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$, имеет единственный центр, то прямые

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0$$

пересекаются в ее центре ($I_2 \neq 0$), но в таком случае уравнение любой прямой p, проходящей через центр линии, можно записать в виде

$$l(a_{11}x + a_{12}y + a_1y) + m(a_{21}l + a_{22}m + a_2) = 0,$$

где хотя бы одно из чисел l или m не равно 0.

Значит, прямая p является диаметром линии, сопряженным хордам, параллельным вектору $\{l, m\}$, если этот вектор неасимптотического направления. Но из неасимптотичности направления прямой p вытекает неасимптотичность сопряженного ей направления $\{l, m\}$, следовательно, прямая p является диаметром.

Теорема 4. *Если линия второго порядка является линией параболического типа, то диаметр, сопряженный хордам линии, параллельным неасимптотическому направлению, имеет асимптотическое направление.*

Доказательство. Вектор $\{l', m'\}$, коллинеарный диаметру, сопряженному хордам, имеющим неасимптотическое направление $\{l, m\}$, имеет координаты

$$l' = -(a_{21}l + a_{22}m), \quad m' = a_{11}l + a_{12}m$$

(см. доказательство теоремы 2). Отсюда в силу $I_2 = 0$ находим

$$a_{11}l' + a_{12}m' = -I_2 m = 0, \quad a_{21}l' + a_{22}m' = I_2 l = 0,$$

значит,

$$l'(a_{11}l' + a_{12}m') + m'(a_{21}l' + a_{22}m') = 0,$$

или

$$a_{11}l'^2 + 2a_{12}l'm' + a_{22}m'^2 = 0.$$

Заметим, что векторы $\{-a_{12}, a_{11}\}$ и $\{-a_{22}, a_{21}\}$, по крайней мере один из которых ненулевой, имеют асимптотическое направление для линии параболического типа.

Теорема 5. *Если линия — парабола, то диаметром является любая прямая, имеющая асимптотическое направление относительно этой линии.*

Доказательство. Если линия является параболой, то на основании теоремы 4 все ее диаметры имеют асимптотическое направление. Докажем, что и обратно: любая прямая p, имеющая асимптотическое направление параболы, является ее диаметром. Возьмем на прямой p произвольную точку (x_0, y_0) и выберем ненулевой вектор $\{l, m\}$, не имеющий асимптотического направления, и такой, чтобы его координаты удовлетворяли соотношению

$$l(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + m(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0.$$

Для этого достаточно положить

$$l = -(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2), \qquad m = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1.$$

Вектор $\{l, m\}$ ненулевой, так как для параболы, заданной общим уравнением, система $a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0$, $a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0$ несовместна. Этот вектор не имеет асимптотического направления, так как, предполагая обратное, из последних соотношений (в силу $I_2 = 0$) найдем

$$a_{11}l + a_{12}m = a_{12}a_1 - a_{11}a_2 = 0, \quad a_{21}l + a_{22}m = a_{22}a_1 - a_{12}a_2 = 0$$

и система

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0$$

оказалась бы совместной.

Значит, при указанном выборе l и m уравнение

$$l(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+m(a_{21}x+a_{22}y+a_2)=0$$

будет уравнением прямой p.

Замечание. Если линия имеет прямую центров, то каждая точка этой прямой должна принадлежать каждому из диаметров линии. Таким образом, прямая центров оказывается единственным диаметром линии; так как в рассматриваемом случае линия второго порядка есть пара параллельных (или совпадающих) прямых, а линия центров есть прямая, лежащая посередине между ними, то эта последняя прямая и будет единственным диаметром линии (распадающейся на две параллельные или совпадающие прямые).

2. Диаметры линий второго порядка, заданных каноническими уравнениями

Если эллипс задан каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

то уравнение диаметра, сопряженного хордам, параллельным ненулевому вектору $\{l, m\}$, имеет вид

$$\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}=0,$$

а уравнение диаметра, сопряженного с ним,

$$mx-ly=0.$$

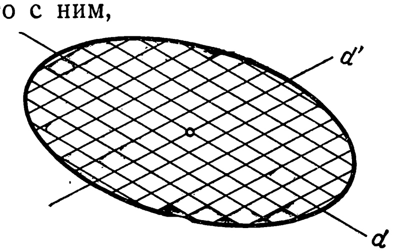


Рис. 216

На рис. 216 изображен эллипс, два его сопряженных диаметра и хорды, параллельные каждому из них.

Если гипербола задана каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

и ненулевой вектор $\{l, m\}$ не имеет асимптотического направления (т. е. не коллинеарен ни одному из векторов $\{a \pm b\}$), то уравнение диаметра, сопряженного хордам, параллельным этому вектору, имеет вид

$$\frac{lx}{a^2}-\frac{my}{b^2}=0,$$

а уравнение диаметра, ему сопряженного,

$$mx-ly=0.$$

На рис. 217 изображена гипербола, ее сопряженные диаметры d и d' и хорды, параллельные каждому из них.

Уравнение диаметра параболы

$$y^2 - 2px = 0,$$

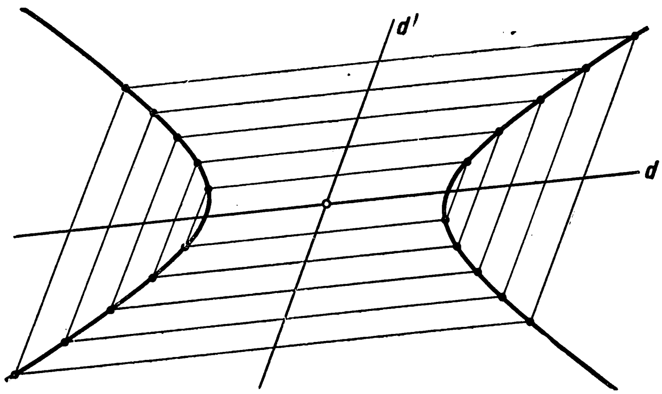


Рис. 217

сопряженного хордам, параллельным ненулевому вектору $\{l, m\}$, имеет вид

$$-lp + my = 0, \text{ или } y = \frac{p}{k},$$

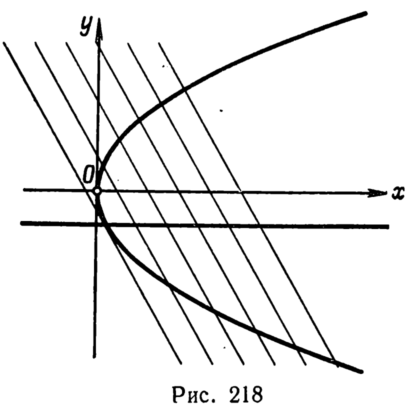


Рис. 218

где k — угловой коэффициент хорд.

Все диаметры параболы параллельны ее оси. На рис. 218 дано одно из семейств параллельных хорд параболы и сопряженный им диаметр.

§ 147. Касательная к линии второго порядка

Пусть относительно общей декартовой системы координат на плоскости линия второго порядка задана общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0. \qquad (1)$$

Будем называть точку $M_0(x_0, y_0)$, лежащую на этой линии, неособой, если среди чисел *

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1, \quad a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2$$

есть хотя бы одно, не равное нулю.

* Эти числа являются значениями в точке $M_0(x_0, y_0)$ половин частных производных первого порядка от левой части уравнения (1).

Ясно, что точка M_0, лежащая на линии (1), является особой тогда и только тогда, когда она является центром линии (1).

Таким образом, среди линий эллиптического типа только линия, распадающаяся на две мнимые пересекающиеся прямые, имеет особую точку (это точка их пересечения); среди линий гиперболического типа особую точку имеет пара пересекающихся прямых (это также точка их пересечения) и, наконец, среди линий параболического типа особые точки имеет пара совпадающих прямых (особыми точками являются все точки прямой, с которой совпадают рассматриваемые прямые).

Определение. *Касательной к линии второго порядка в неособой точке, лежащей на этой линии, называется прямая, проходящая через эту точку, пересекающая данную линию в двукратной точке или сливающаяся с прямой, входящей в состав данной линии.*

Теорема 1. *Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — неособая точка линии второго порядка, заданной относительно общей декартовой системы координат уравнением*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0. \tag{1}$$

Тогда уравнение касательной к этой линии в точке M_0 имеет вид

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)y+a_1x_0+a_2y_0+a=0. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнения прямой

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \tag{3}$$

проходящей через данную неособую точку $M_0(x_0, y_0)$ линии (1). Найдем точки пересечения прямой (3) с линией (1). Подставляя в уравнение (1) x_0+lt и y_0+mt вместо x и y, получим

$$a_{11}(x_0+lt)^2+2a_{12}(x_0+lt)(y_0+mt)+a_{22}(y_0+mt)^2+\\+2a_1(x_0+lt)+2a_2(y_0+mt)+a=0,$$

или

$$(a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2)t^2+\\+2[l(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)+m(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)]t+\\+a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_1x_0+2a_2y_0+a=0.$$

Но по предположению точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на данной линии, поэтому

$$a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_1x_0+2a_2y_0+a=0,$$

и последнее уравнение принимает вид

$$(a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2)t^2+\\+2[l(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)+m(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)]t=0. \tag{4}$$

Одним из корней этого уравнения является $t=0$; при этом из соотношений (3) находим $x=x_0$, $y=y_0$, т. е. координаты точки M_0.

Для того чтобы прямая (3) являлась касательной к линии 1), необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$(a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2)\,t+$$
$$+2\,[l\,(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)+m\,(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)]=0 \qquad (4')$$

имело и второй корень, равный нулю $t=0$, а для этого необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$l\,(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)+m\,(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)=0.$$

Таким образом, координаты направляющего вектора касательной

$$\begin{aligned} l&=-(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2),\\ m&=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1 \end{aligned} \qquad (5)$$

(этот вектор ненулевой, так как точка $M_0(x_0,\ y_0)$ по предположению неособая).

Если вектор $\{l,\ m\}$, координаты которого определяются соотношениями (5), неасимптотического направления, т. е.

$$a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0,$$

то уравнение (4′) имеет только корень $t=0$, а если вектор $\{l,\ m\}$ имеет асимптотическое направление, т. е.

$$a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0,$$

то уравнение (4′) обращается в тождество, прямая (3) входит в состав данной линии (1) и, значит, согласно принятому определению является касательной к линии (1) в точке $M_0(x_0,\ y_0)$.

Итак, уравнения касательной к линии (1) в ее неособой точке $M_0(x_0,\ y_0)$ имеют вид

$$\begin{aligned} x&=x_0-(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)\,t,\\ y&=y_0+(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)\,t, \end{aligned}$$

или

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)(x-x_0)+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)(y-y_0)=0,$$

или

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)\,x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)\,y-$$
$$-a_{11}x_0^2-2a_{12}x_0y_0-a_{22}y_0^2-a_1x_0-a_2y_0,$$

и так как

$$a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_1x_0+2a_2y_0+a=0,$$

то окончательно

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)\,x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)\,y+a_1x_0+a_2y_0+a=0.$$

Теорема 2. *Пусть относительно общей декартовой системы координат линия второго порядка задана общим уравнением*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0.$$

Пусть диаметр

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_1)\,l+(a_{21}x+a_{22}y+a_2)\,m=0 \tag{6}$$

этой линии, сопряженной хордам, имеющим неасимптотическое направление $\{l, m\}$, *пересекает рассматриваемую линию в неособой точке* $M_0(x_0, y_0)$. *Тогда касательная к этой линии в точке* M_0 *параллельна хордам, которым сопряжен диаметр* (6).

Доказательство. Так как диаметр (6) проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, то

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)\,l+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)\,m=0$$

и так как $M_0(x_0, y_0)$ — неособая точка рассматриваемой линии, то можно считать, что

$$l=-(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2), \quad m=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1,$$

а это — координаты направляющего вектора касательной к рассматриваемой линии второго порядка в неособой ее точке (см. выше формулы (5)).

Замечание. Данное в этом параграфе определение касательной к линии второго порядка в ее неособой точке $M_0(x_0, y_0)$ совпадает с определением касательной к линии, которое дается в курсах математического анализа. Здесь линия задана уравнением вида $F(x, y)=0$. Функция $F(x, y)$ при $x=x_0$, $y=y_0$ обращается в нуль, а частные производные от нее по x и y, т. е. $2(a_{11}x+a_{12}y+a_1)$ и $2(a_{21}x+a_{22}y+a_2)$ согласно условию теоремы 1 одновременно в нуль не обращаются. Функция $F(x, y)$ — целая рациональная функция от x и y. Значит, уравнение касательной к линии можно записать в виде*

$$F'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0)(y-y_0)=0,$$

или

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)(x-x_0)+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)(y-y_0)=0.$$

§ 148. Уравнение линии второго порядка, отнесенной к двум ее сопряженным диаметрам; уравнение линии второго порядка, отнесенной к касательной и сопряженному к ней диаметру

Теорема 1. *Пусть относительно общей декартовой системы координат линия второго порядка задана общим уравнением*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0. \tag{1}$$

Для того чтобы одна из осей имела направление диаметра, сопряженного хордам, параллельным другой оси, необходимо и до-

---

* См. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. М., Физматгиз, 1958, гл. VII, § 2, стр. 530.

статочно, чтобы $a_{12}=0$, т. е. *чтобы уравнение имело вид*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0.$$

Доказательство. Пусть, например, ось Ox не имеет асимптотического направления. Тогда координаты вектора, параллельного диаметру, сопряженному хордам, параллельным оси Ox, будут

$$l'=-a_{12}, \quad m'=a_{11}.$$

Но вектор $\{l', m'\}$ коллинеарен оси Oy тогда и только тогда, когда $l'=a_{12}=0$.

Теорема 2. *Пусть относительно общей декартовой системы координат задана линия второго порядка общим уравнением*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0 \tag{2}$$

и пусть она имеет единственный центр. Тогда, если оси координат являются сопряженными диаметрами этой линии, а начало координат—ее центром, то уравнение линии имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a=0,$$

где $a_{11}\neq 0$ и $a_{22}\neq 0$.

Обратно, если уравнение линии, имеющей единственный центр, имеет относительно некоторой общей декартовой системы координат уравнение

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a=0,$$

где $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$, *то начало координат является центром линии, а оси координат ее сопряженными диаметрами.*

Доказательство. Если оси координат являются сопряженными диаметрами линии (2), то $a_{12}=0$ (теорема 1 этого параграфа); так как начало координат является центром линии, то в уравнении (2) отсутствуют x и y в первой степени.

Обратно, если уравнение линии второго порядка, заданное относительно общей декартовой системы координат, имеет вид $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a=0$, то начало координат является центром линии (теорема 1, достаточность, § 144).

Линия имеет единственный центр, значит,

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\,a_{22}\neq 0,$$

откуда $a_{11}\neq 0$ и $a_{22}\neq 0$; наконец, так как в уравнении $a_{11}x^2+{}$ $+a_{22}y^2+a=0$ коэффициент при xy равен 0, то оси координат являются сопряженными диаметрами этой линии (теорема 1, достаточность).

Теорема 3. 1°. *Если общая декартова система координат по отношению к эллипсу расположена так, что:*

(S_1) 1) *оси координат являются сопряженными диаметрами эллипса;*

2) *единичной точкой оси Ох является любая точка пересечения одного из диаметров с эллипсом;*

3) *единичной точкой оси Оу является любая точка пересечения другого диаметра с эллипсом,—то уравнение имеет вид*

$$x^2+y^2=1.$$

Обратно, если относительно некоторой общей декартовой системы координат дано уравнение

$$x^2+y^2=1,$$

то это—уравнение эллипса, а система координат по отношению к нему обладает свойствами (S_1).

2°. *Если общая декартова система координат по отношению к гиперболе расположена так, что:*

(S_2) 1) *оси координат являются сопряженными диаметрами гиперболы;*

2) *единичной точкой E системы координат является точка пересечения любой из асимптот гиперболы с касательной в любой из точек пересечения одного из этих диаметров с гиперболой, то уравнение гиперболы имеет вид*

$$x^2-y^2=1.$$

Обратно, если относительно некоторой общей декартовой системы координат дано уравнение

$$x^2-y^2=1,$$

то это уравнение гиперболы, а система координат по отношению к ней обладает свойствами (S_2).

3°. *Если общая декартова система координат по отношению к параболе расположена так, что:*

(S_3) 1) *осью Оу является касательная к параболе в любой точке О, лежащей на этой параболе;*

2) *осью Ох является диаметр параболы, проходящей через точку О;*

3) *единичная точка E системы координат лежит на параболе, то уравнение параболы имеет вид*

$$y^2=x.$$

Обратно, если относительно некоторой общей декартовой системы координат дано уравнение

$$y^2=x,$$

то это уравнение параболы, причем система координат по отношению к этой параболе обладает свойствами (S_3).

Доказательство. 1°. Так как оси координат являются сопряженными диаметрами эллипса, то его уравнение имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a=0$$

(теорема 2 этого параграфа). Так как точки (1, 0) и (0, 1) принадлежат эллипсу, то

$$a_{11}+a=0,\ a_{22}+a=0,$$

и последнее уравнение принимает вид

$$-ax^2-ay^2+a=0,\ \text{или}\ x^2+y^2=1.$$

Обратно, линия $x^2+y^2=1$ имеет единственный центр. На основании той же теоремы 2 для линии, заданной уравнением

$$x^2+y^2=1,$$

оси координат являются сопряженными диаметрами линии и пересекают ее в четырех точках $(\pm1, 0)$, $(0, \pm1)$. Но этим свойством по отношению к сопряженным диаметрам обладает только эллипс.

2°. Так как оси координат являются сопряженными диаметрами гиперболы, то ее уравнение имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a=0.$$

Точка (1, 0) должна лежать на этой гиперболе, а точка (1, 1) на одной из ее асимптот

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2=0.$$

Значит,

$$a_{11}+a=0,\ a_{11}+a_{22}=0$$

и уравнение гиперболы принимает вид

$$-ax^2+ay^2+a=0,\ \text{или}\ x^2-y^2=1.$$

Обратно, линия $x^2-y^2=1$ имеет единственный центр, а на основании теоремы 2 этого параграфа оси координат являются ее сопряженными диаметрами. Один из этих диаметров (ось Ox) пересекает линию в двух точках $(\pm1, 0)$, а другой (ось Oy) ее не пересекает. Этим свойством по отношению к сопряженным диаметрам обладает только гипербола. Далее, точка (1, 0) лежит на гиперболе $x^2-y^2=1$, а точка (1, 1) — на ее асимптоте $y=x$.

3°. Диаметр параболы имеет направление, сопряженное по отношению касательной к параболе в той точке, в которой он пересекает эту параболу, поэтому в общем уравнении параболы должно быть $a_{12}=0$. Так как, кроме того, начало координат O лежит на параболе, то $a=0$. Уравнение параболы имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y=0.$$

Уравнение касательной к этой параболе в начале координат имеет вид

$$a_1x+a_2y=0,$$

а так как касательной в начале координат является ось Oy, то это уравнение эквивалентно уравнению

$$x=0,$$

значит,

$$a_1\neq 0,\ a_2=0;$$

последнее уравнение принимает вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x=0,\ \text{где}\ a_1\neq 0.$$

Здесь $a_{22}\neq 0$, так как в противном случае уравнение определяло бы две прямые $x=0$ и $a_{11}x+2a_1=0$. Если бы еще было $a_{11}\neq 0$, то линия имела бы центр (притом единственный), а парабола центра не имеет. Значит, $a_{11}=0$, и уравнение параболы принимает вид

$$a_{22}y^2+2a_1x=0.$$

Так как единичная точка лежит на этой параболе, то

$$a_{22}+2a_1=0.$$

Значит, $2a_1=-a_{22}$, и последнее уравнение принимает вид

$$a_{22}y^2-a_{22}x=0,\ \text{или}\ y^2=x.$$

Обратно, все диаметры линии $y^2=x$ параллельны оси Ox. В самом деле, координаты векторов, имеющих асимптотическое направление относительно линии $y^2=x$, определяются из уравнения $m^2=0$, т. е. ось Ox имеет асимптотическое направление.

Пусть $\{l,\ m\}$, $m\neq 0$, — любой вектор, не имеющий асимптотического направления относительно линии $y^2=x$. Уравнение диаметра, ему сопряженного,

$$-\frac{1}{2}l+my=0,\ \text{или}\ y=\frac{l}{2m},$$

все диаметры линии $y^2=x$ параллельны между собой; этим свойством обладает только парабола. Далее, уравнение касательной к линии $y^2-x=0$ в точке $(0,\ 0)$ имеет вид $x=0$ — это ось Oy.

Уравнение диаметра, сопряженного хордам, параллельным вектору $\{0,\ 1\}$, имеет вид $y=0$ — это ось Ox. Наконец, единичная точка $(1,\ 1)$, очевидно, лежит на линии $y^2=x$.

Теорема 4. *Если неособую точку линии второго порядка принять за начало координат, за ось Ox — диаметр, проходящий через эту точку, а за ось Oy — касательную к линии второго поряд-*

ка в этой точке, то уравнение линии примет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x=0, \text{ где } a_1\neq 0,\ a_{22}\neq 0,$$

и обратно, всякое такое уравнение в случае $a_1\neq 0$, $a_{22}\neq 0$ является уравнением линии второго порядка, по отношению к которой система координат обладает сформулированными выше свойствами.

Доказательство. Так как касательная к линии второго порядка в ее неособой точке имеет направление, которому сопряжен диаметр, проходящий через эту точку, то в общем уравнении линии коэффициент при xy равен нулю (теорема 1, § 148). Далее, так как линия проходит через начало координат, то $a=0$.

Уравнение линии имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y=0.$$

Уравнение касательной к этой линии в начале координат имеет вид

$$a_1x+a_2y=0,$$

и так как оно должно быть эквивалентно уравнению $x=0$ оси Oy, то $a_1\neq 0$, $a_2=0$, и последнее уравнение принимает вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_1x=0.$$

Обратно, если $a_1\neq 0$, то начало координат — неособая точка линии. Уравнение касательной к этой линии в точке (0, 0) имеет вид $x=0$ — ось Oy. Диаметр, сопряженный хордам, параллельным вектору $\{0, 1\}$ (не имеющему асимптотического направления в силу $a_{22}\neq 0$), имеет уравнение $y=0$ — ось Ox.

Замечание к § 144—146. Как было указано в замечании к § 144, а также, как ясно из содержания § 144—146, определения, относящиеся к понятиям центра линии второго порядка, асимптотических направлений и сопряженности диаметров, не для всех линий второго порядка носили геометрический характер, а потому нуждались в доказательстве инвариантности относительно преобразования одной общей декартовой системы координат в другую.

Однако этим определениям можно придать во всех случаях геометрический характер (а следовательно, снять необходимость в доказательстве инвариантности определений и ряда с ними связанных результатов относительно преобразования декартовой системы координат). Для этого вместо одной линии, заданной общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0,$$

или $f=0$ (через f обозначена левая часть уравнения линии), рассмотрим семейство линий $f=C$, где C принимает все действительные значения.

Если уравнение $f=0$ есть уравнение или действительного эллипса, или мнимого эллипса, или уравнение двух мнимых пересекающихся прямых, то в семейство $f=C$ включаются все эллипсы с общим центром * и гомотетичные друг другу, причем центром гомотетии является их общий центр. В самом деле, после перено-

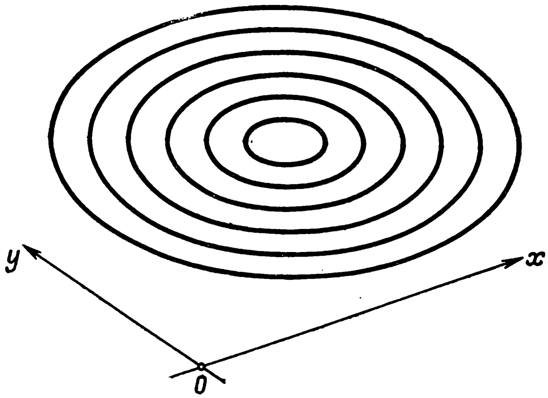


Рис. 219.

са начала координат в центр линии получим вместо $f=0$ уравнение

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+a'=0,$$

а вместо уравнения $f=C$ — уравнение

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+a'-C=0.$$

Если $a'\neq 0$ и $a'-C\neq 0$, то одно из этих уравнений переходит в другое заменой x и y на λx и λy (при подходящем выборе λ).

На рис. 219 изображено семейство действительных эллипсов, входящих в семейство линий второго порядка $f=C$ эллиптического типа.

Если линия $f=0$ гиперболического типа, то нет необходимости включать ее в семейство $f=C$, но можно это и сделать (рис. 220). Семейство $f=C$ будет состоять из всех соасимптотических гипербол, при этом гиперболы, лежащие в одной и той же паре вертикальных углов, образованных их общими асимптотами, гомотетичны друг другу относительно центра.

---

* Так как координаты центра определяются из системы

$$a_{11}x+a_{12}y+a_1=0,$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_2=0,$$

т. е. из системы уравнений, не содержащих свободного члена уравнения линии второго порядка.

Если $f=0$ — уравнение параболы, то $f=C$ есть уравнения парабол, полученных из $f=0$ параллельным переносом (рис. 221).

Если, наконец, $f=0$ есть уравнение пары параллельных прямых (действительных или мнимых, или уравнение пары совпадающих прямых), то семейство $f=C$ включает в себя все пары параллельных прямых с общей линией центров.

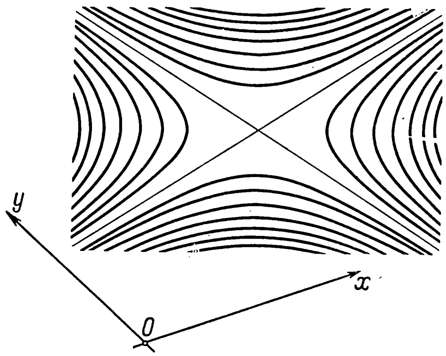


Рис. 220

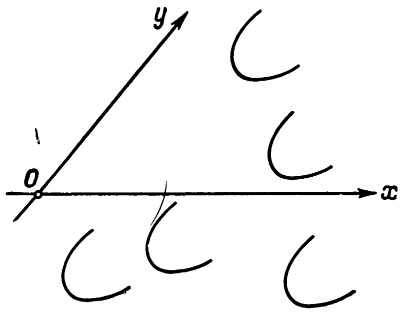


Рис. 221

Теперь определения, данные в § 144—146, можно модифицировать так:

центром линии второго порядка, заданной общим уравнением $f=0$ относительно общей декартовой системы координат, назовем центр симметрии любой действительной линии семейства

$$f=C.$$

Направление называется неасимптотическим относительно линии второго порядка, заданной общим уравнением $f=0$ в аффинной системе координат, если для действительной линии $f=C$, не являющейся парой совпавших прямых, найдется прямая этого направления, пересекающая линию $f=C$ в двух действительных и различных точках.

Направления, не обладающие этим свойством, назовем асимптотическими.

Два диаметра второго порядка, заданной общим уравнением $f=0$ относительно общей декартовой системы координат, называются сопряженными, если каждый из них делит пополам хорды действительной линии семейства $f=C$, параллельные другому, и т. д.

§ 149. Главные направления и главные диаметры

Определение. *Неасимптотическое направление линии второго порядка называется главным, если оно перпендикулярно диаметру, сопряженному с хордами, имеющими это направление. Этот диаметр называется главным диаметром линии второго порядка. Он является осью симметрии линии.*

Теорема 1. *Координаты l, m вектора (ненулевого), имеющего главное направление относительно линии второго порядка, заданной общим уравнением*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0 \tag{1}$$

относительно декартовой **прямоугольной** *системы координат, определяются из системы*

$$\begin{aligned} a_{11}l+a_{12}m&=\lambda l,\\ a_{21}l+a_{22}m&=\lambda m, \end{aligned} \tag{2}$$

где λ — отличный от нуля корень квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

или

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0, \tag{3'}$$

где

$$I_1=a_{11}+a_{22}, \tag{4}$$

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть ненулевой вектор $\{l,\ m\}$ не имеет асимптотического направления относительно линии (1). Тогда уравнение диаметра, сопряженного с хордами линии (1), параллельными вектору $\{l,\ m\}$, имеет вид (§ 146, п. 1)

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_1)l+(a_{21}x+a_{22}y+a_2)m=0,$$

или

$$(a_{11}l+a_{12}m)x+(a_{21}l+a_{22}m)y+a_1l+a_2m=0. \tag{6}$$

Так как система координат прямоугольная, то этот диаметр перпендикулярен хордам, параллельным ненулевому вектору $\{l,\ m\}$ тогда и только тогда, когда ненулевые векторы

$$\{a_{11}l+a_{12}m,\ a_{21}l+a_{22}m\} \text{ и } \{l,\ m\}$$

коллинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что

$$\begin{aligned} a_{11}l+a_{12}m&=\lambda l,\\ a_{21}l+a_{22}m&=\lambda m. \end{aligned} \tag{7}$$

В этих соотношениях $\lambda\neq 0$, так как в противном случае мы имели бы

$$a_{11}l+a_{12}m=0,\quad a_{21}l+a_{22}m=0,$$

откуда

$$(a_{11}l+a_{12}m)l+(a_{21}l+a_{22}m)m=0, \text{ или } a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0,$$

т. е. вектор $\{l,\ m\}$ имел бы асимптотическое направление.

Далее, переписывая систему (7) в виде

$$(a_{11}-\lambda)l+a_{12}m=0,$$
$$a_{21}l+(a_{22}-\lambda)m=0$$

и замечая, что она имеет ненулевое решение l, m, заключаем, что

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Обратно, уравнение (8) всегда имеет действительные корни λ_1 и λ_2; в самом деле, переписывая его в виде

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\ \lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0, \tag{9}$$

находим дискриминант:

$$\Delta=(a_{11}+a_{22})^2-4\ (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geqslant 0.$$

Случай 1. $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$ и $\lambda_1\neq\lambda_2$ (эллипс действительный или мнимый, гипербола, две пересекающиеся прямые, действительные или мнимые).

В этом случае система (7) при $\lambda=\lambda_1$ принимает вид

$$\begin{aligned} a_{11}l+a_{12}m&=\lambda_1 l,\\ a_{21}l+a_{22}m&=\lambda_1 m \end{aligned} \tag{10}$$

и в силу условия

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 \end{vmatrix}=0$$

имеет ненулевое решение l_1, m_1.

Из соотношений (10) для этого решения, которые принимают вид

$$\begin{aligned} a_{11}l_1+a_{12}m_1&=\lambda_1 l_1,\\ a_{21}l_1+a_{22}m_1&=\lambda_1 m_1, \end{aligned} \tag{11}$$

находим

$$(a_{11}l_1+a_{12}m_1)\,l_1+(a_{21}l_1+a_{22}m_1)\,m_1=\lambda_1(l_1^2+m_1^2)\neq 0,$$

или

$$a_{11}l_1^2+2\,a_{12}l_1m_1+a_{22}m_1^2\neq 0.$$

Значит, это решение не имеет асимптотического направления линии (1), а в силу соотношений (10) ненулевой вектор $\{l_1,\ m_1\}$ имеет главное направление линии (1).

Аналогично при $\lambda=\lambda_2$ из системы (7) находим ненулевой вектор $\{l_2,\ m_2\}$, такой, что

$$\begin{aligned} a_{11}l_2+a_{12}m_2&=\lambda_2 l_2,\\ a_{21}l_2+a_{22}m_2&=\lambda_2 m_2, \end{aligned} \tag{12}$$

также имеющий главное направление относительно линии (1).

Докажем, что векторы $\{l_1, m_1\}$ и $\{l_2, m_2\}$ взаимно перпендикулярны. Из соотношений (11) и (12) находим

$$(a_{11}l_1+a_{12}m_1)\,l_2+(a_{21}l_1+a_{22}m_1)m_2=\lambda_1\,(l_1l_2+m_1m_2),$$
$$(a_{11}l_2+a_{12}m_2)l_1+(a_{21}l_2+a_{22}m_2)m_1=\lambda_2(l_1l_2+m_1m_2).$$

Левые части этих равенств одинаковы, значит, $\lambda_1(l_1l_2+m_1m_2)=$ $=\lambda_2(l_1l_2+m_1m_2)$, или $(\lambda_1-\lambda_2)\,(l_1l_2+m_1m_2)=0$, откуда $(\lambda_1\neq\lambda_2)$

$$l_1l_2+m_1m_2=0,$$

т. е. векторы $\{l_1, m_1\}$ и $\{l_2, m_2\}$ взаимно перпендикулярны. Отсюда также следует, что в случае $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$, $\lambda_1\neq\lambda_2$ система (7) при $\lambda=\lambda_1$ имеет ненулевое решение, но не может иметь двух линейно независимых решений (то же и при $\lambda=\lambda_2$). Иначе говоря, линия имеет два и только два взаимно перпендикулярных и главных диаметра.

Случай 2. $\lambda_1=\lambda_2\neq 0$ (окружность действительная, нулевая или мнимая).

В этом случае асимптотических направлений нет и любое направление является главным; уравнение (6) диаметра, сопряженного хордам, параллельным ненулевому вектору $\{l, m\}$, принимает вид

$$a_{11}lx+a_{11}my+a_1l+a_2m=0 \tag{13}$$

и является уравнением прямой, перпендикулярной вектору

$$\{l,\ m\}\ (a_{11}\neq 0).$$

Главным диаметром в этом случае является любая прямая (13), проходящая через центр линии.

Случай 3. $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq 0$ (парабола, две параллельные или совпадающие прямые).

В этом случае $I_2=0$. Система (7) при $\lambda=\lambda_2$ имеет ненулевое решение l_2, m_2; вектор $\{l_2, m_2\}$ не имеет асимптотического направления линии (1) и имеет главное направление.

При $\lambda=\lambda_1=0$ система (7) принимает вид

$$a_{11}l+a_{12}m=0,\ \ a_{21}l+a_{22}m=0;$$

эта система имеет ненулевое решение l_1, m_1, однако вектор $\{l_1, m_1\}$ имеет асимптотическое направление, так как из соотношений

$$a_{11}l_1+a_{12}m_1=0,\ \ a_{21}l_1+a_{22}m_1=0$$

следует, что

$$a_{11}l_1^2+2a_{12}l_1m_1+a_{22}m_1^2=0.$$

Векторы $\{l_1, m_1\}$, $\{l_2, m_2\}$ и здесь ортогональны (в силу того что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, доказательство дано выше). Отсюда следует, что система

$$a_{11}l + a_{12}m = 0, \quad a_{21}l + a_{22}m = 0$$

в этом случае имеет одно ненулевое решение, но не имеет двух линейно независимых решений. Из последних соотношений следует, что векторы

$$\{-a_{12}, a_{11}\} \text{ и } \{-a_{22}, a_{21}\} \tag{14}$$

имеют асимптотическое направление (в случае, если уравнение (1) является уравнением параболы, или двух параллельных или двух совпадающих прямых); при этом по крайней мере один из этих векторов ненулевой.

Так как вектор, имеющий главное направление, перпендикулярен асимптотическому направлению, то главное направление линии (1) в случае $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ определяется одним из векторов или $\{a_{11}, a_{12}\}$, или $\{a_{21}, a_{22}\}$ (один из которых ненулевой).

Таким образом, в случае линии параболического типа имеется только один главный диаметр; его уравнение

$$a_{11}(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + a_{12}(a_{21}x + a_{22}y + a_2) = 0,$$

или

$$a_{21}(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + a_{22}(a_{21}x + a_{22}y + a_2) = 0.$$

При этом надо взять то из уравнений, в котором коэффициенты при $a_{11}x + a_{12}y + a_1$ и $a_{21}x + a_{22}y + a_2$ одновременно не равны нулю, и любое из них, если оба вектора $\{a_{11}, a_{12}\}$ и $\{a_{21}, a_{22}\}$ ненулевые.

В случае параболы — это ее ось симметрии; для двух параллельных или совпадающих прямых главный диаметр совпадает с местом центров линии.

Заметим, что в случае $I_2 \neq 0$ направление любого главного диаметра является главным, а в случае $I_2 = 0$ главным будет направление, перпендикулярное к единственному главному диаметру.

§ 150. Определение расположения линии второго порядка по отношению к прямоугольной системе координат

Для определения расположения линии второго порядка, заданной общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \tag{1}$$

относительно прямоугольной системы координат, достаточно знать параметры, характеризующие данную линию и ту систему координат, в которой уравнение линии является каноническим.

Если уравнение (1) является уравнением эллипса, то надо найти его полуоси, центр и направление оси, на которой лежат его фокусы (или оси, к ней перпендикулярной).

Если уравнение (1) является уравнением гиперболы, то надо найти ее полуоси, центр и направление действительной (или мнимой) оси.

Если уравнение (1) является уравнением параболы, то надо найти ее параметр, вершину и направление одного из двух лучей оси, например того, на котором лежит фокус.

Если линия сводится к одной точке, то надо найти ее координаты.

Наконец, если линия распадается на две действительные прямые, то надо найти (в данной системе координат) уравнение каждой из них *.

Если в уравнении (1) $a_{12}=0$, то расположение линии определяется при помощи одного переноса (см. примеры ниже). Пусть $a_{12}\neq 0$. Как было доказано в § 141 (теорема 1), уравнение (1) при помощи поворота осей координат xOy на угол α и последующего переноса можно привести к одному из следующих видов:

$$a'_{11}X^2+a'_{22}Y^2+D=0, \quad \text{где} \quad a'_{11}\neq 0, \quad a'_{22}\neq 0;$$
$$a'_{11}X^2+2a'_2Y=0, \quad \text{где} \quad a'_{11}\neq 0, \quad a'_2\neq 0;$$
$$a'_{11}X^2+D=0, \quad \text{где} \quad a'_{11}\neq 0,$$

а в § 143 были найдены значения коэффициентов простейших уравнений (с помощью теории инвариантов) и их мы записали в виде

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\frac{K_3}{I_2}=0, \qquad \text{(I)}$$
$$\lambda_1X^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\,Y=0, \qquad \text{(II)} \qquad (2)$$
$$\lambda_1X^2+\frac{K_2}{I_1}=0. \qquad \text{(III)}$$

Переписывая формулы (2) и (3) § 141 в виде

$$\lambda_1=a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\sin^2\alpha,$$
$$0=a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+(a_{22}-a_{11})\sin\alpha\cos\alpha,$$

имеем

$$\lambda_1\cos\alpha=a_{11}\cos^3\alpha+2a_{12}\sin\alpha\cos^2\alpha+a_{22}\sin^2\alpha\cos\alpha,$$
$$0=-\sin\alpha a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+(a_{11}-a_{22})\sin^2\alpha\cos\alpha$$

и складывая, получим

$$\lambda_1\cos\alpha=a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha,$$

откуда угловой коэффициент новой оси $O'X$ для каждого из простейших уравнений (2) линий второго порядка

$$\operatorname{tg}\alpha=k=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}, \qquad (3)$$

---

* Вопрос о расположении мнимых линий мы не рассматриваем.

где λ_1 — тот корень характеристического уравнения, который является коэффициентом при X^2 в каждом из простейших уравнений (2).

1°. Если уравнение (1) является уравнением эллипса, то простейшее уравнение имеет вид

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0.$$

Считая, что через λ_1 обозначен меньший по абсолютной величине корень характеристического уравнения ($|\lambda_1| < |\lambda_2|$), и переписывая последнее уравнение в виде

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}}\right)^2} = 1,$$

или

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a = \sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}}, \qquad b = \sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}},$$

заключаем, что $a > b$, так что по формуле (3) определяется угловой коэффициент бо́льшей оси эллипса.

Координаты центра эллипса находятся из системы

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_1 &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

2°. Если уравнение (1) является уравнением гиперболы, то ее простейшее уравнение имеет снова вид (I). Обозначая через λ_1 корень характеристического уравнения, имеющий тот знак, что и K_3, перепишем уравнение (I) в виде

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}}\right)^2} = 1,$$

или

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a = \sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}}$$

длина действительной полуоси, а

$$b = \sqrt{\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}}$$

длина мнимой полуоси.

По формуле (3) определяем теперь угловой коэффициент действительной оси $O'X$. Координаты центра находим по-прежнему из системы (4).

3°. Если уравнение (1) является уравнением параболы, то ее простейшее уравнение имеет вид

$$\lambda_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\,Y = 0 \qquad (\lambda_1 = I_1),$$

откуда параметр параболы

$$p = \sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}.$$

Вершина параболы находится так: возьмем на параболе точку (x, y). Координаты вектора $\boldsymbol{n}$, нормального к касательной, к параболе в этой точке таковы:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_1, \qquad a_{21}x + a_{22}y + a_2.$$

Для того чтобы точка (x, y) являлась вершиной параболы, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\boldsymbol{n}$ имел направление диаметров параболы (асимптотическое направление), т. е. чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_1 &= -a_{12}t, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_2 &= a_{11}t \end{aligned} \tag{5}$$

(см. теорема 4, § 146). Умножая эти равенства соответственно на $-a_{12}$ и a_{11} и складывая почленно, будем иметь

$$a_2a_{11} - a_1a_{12} = (a_{11}^2 + a_{12}^2)\,t,$$

откуда

$$t = \frac{a_2a_{11} - a_1a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2}. \tag{6}$$

Переписывая уравнение параболы в виде

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_1)\,x + (a_{21}x + a_{22}y + a_2)\,y + a_1x + a_2y + a = 0,$$

в силу соотношений (5) имеем

$$(-a_{12}x + a_{11}y)\,t + a_1x + a_2y + a = 0. \tag{7}$$

Таким образом, для нахождения координат вершины параболы надо решить линейную систему (5), (7), где t определяется формулой (6).

По формуле (3) ($\lambda_1 \neq 0$) находим угловой коэффициент касательной к параболе в ее вершине (а если в формуле (3) взять $\lambda_1 = 0$, то она определит угловой коэффициент диаметров параболы).

Для нахождения вектора, коллинеарного диаметрам параболы и идущего в сторону ее вогнутости, заметим, что уравнение (1) в силу $I_2=0$ можно всегда переписать в виде

$$(\alpha x+\beta y)^2+px+qy+r=0. \tag{8}$$

Точка (x_0, y_0) пересечения прямых

$$\alpha x+\beta y=0, \qquad px+qy+r=0$$

всегда лежит на данной параболе (эти прямые всегда пересекаются в случае, если уравнение (1) является уравнением параболы). Уравнение

$$px+qy+r=0$$

является касательной к параболе в этой точке M_0, а

$$\alpha x+\beta y=0$$

уравнение диаметра, проходящего через точку касания. Парабола, уравнение которой записано в виде (8), лежит в отрицательной полуплоскости от прямой $px+qy+r=0$, а главный вектор $\{p, q\}$ этой касательной направлен в положительную полуплоскость от прямой $px+qy+r=0$. Поэтому если ненулевой вектор $\{-a_{12}, a_{11}\}$ $(a_{12}\neq 0)$, коллинеарный диаметрам параболы (1), направлен в отрицательную полуплоскость от прямой $px+qy+r=0$, т. е. $-a_{12}p+a_{11}q<0$, то вектор $\{-a_{12}, a_{11}\}$, коллинеарный диаметрам параболы, направлен в сторону ее вогнутости, а если $-a_{12}p+a_{11}q>0$, то в сторону выпуклости.

В случае $-a_{12}p+a_{11}q>0$ вектор $\{a_{12}, -a_{11}\}$ коллинеарен оси параболы и направлен в сторону ее вогнутости.

Замечание. Последний вопрос определения направляющего вектора диаметров параболы (1) решен в предположении, что уравнение (1) параболы задано относительно общей декартовой системы координат.

§ 151. Примеры и задачи к главе XI

1. Задачи с решениями

Пример 1. Исследовать уравнение

$$4x^2+9y^2+8x-36y+4=0.$$

Преобразуем это уравнение так:

$$4(x^2+2x+1)-4+9(y^2-4y+4)-36+4=0,$$

или

$$4(x+1)^2+9(y-2)^2-36=0.$$

Производя перенос осей координат так, чтобы новым началом координат была точка $(-1, 2)$, т. е. полагая $X=x+1$, $Y=y-2$, получим

$$4X^2+9Y^2-36=0, \quad \text{или} \quad \frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1 \qquad (\text{рис. } 222).$$

Пример 2. Исследовать уравнение

$$x^2+4x-y+5=0, \quad \text{или} \quad y=x^2+4x+5.$$

Имеем

$$y=(x+2)^2+1, \quad y-1=(x+2)^2, \quad Y=X^2,$$

где $X=x+2$, $Y=y-1$. Уравнение выражает параболу (рис. 223).

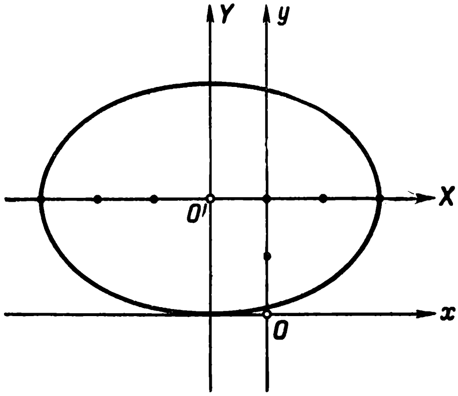


Рис. 222

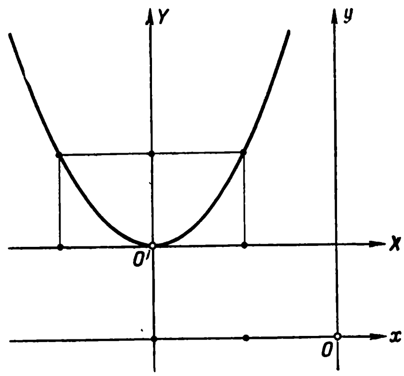


Рис. 223

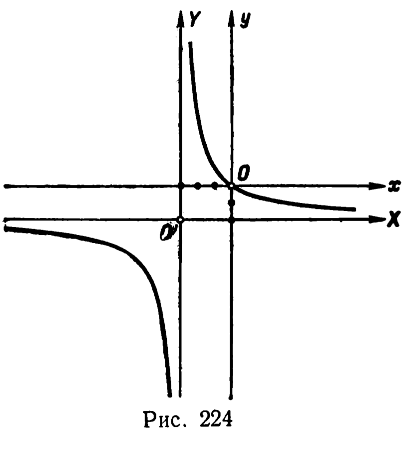


Рис. 224

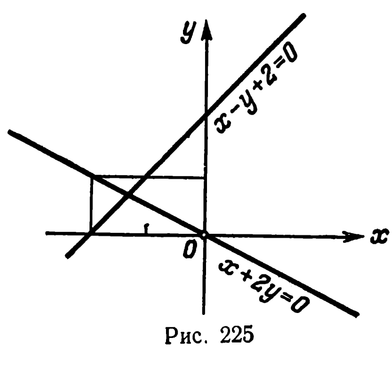


Рис. 225

Пример 3. Исследовать уравнение

$$xy+2x+3y=0.$$

Преобразуем уравнение так:

$$xy+2x+3y+6=6,$$

или

$$(x+3)(y+2)=6, \quad XY=6,$$

где $X=x+3$, $Y=y+2$. Уравнение выражает равностороннюю гиперболу с центром в точке $(-3, -2)$ (рис. 224).

Пример 4. Исследовать уравнение

$$x^2+xy-2y^2+2x+4y=0.$$

Так как $I_2<0$, $K_3=0$, то это уравнение выражает две действительные пересекающиеся прямые. Преобразуем левую часть этого уравнения так:

$$x^2+xy-2y^2+2x+4y=x^2+x(y+2)+\frac{(y+2)^2}{4}-2y^2+4y-\frac{(y+2)^2}{4}=$$
$$=\left(x+\frac{y+2}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{4}y^2-3y+1\right)=\left(x+\frac{y+2}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}y-1\right)^2=$$
$$=\left(x+\frac{y+2}{2}+\frac{3}{2}y-1\right)\left(x+\frac{y+2}{2}-\frac{3}{2}y+1\right)=(x+2y)(x-y+2).$$

Данное уравнение определяет две прямые (рис. 225):

$$x+2y=0,\quad x-y+2=0.$$

Другой вариант решения. Из уравнений

$$x+\frac{1}{2}y+1=0,\quad \frac{1}{2}x-2y+2=0$$

находим координаты центра линии (в данном случае точку пересечения тех прямых, на которые распадается эта линия)

$$x=-\frac{4}{3},\qquad y=\frac{2}{3}.$$

Из уравнения

$$1+k-2k^2=0$$

находим угловые коэффициенты асимптотических направлений данной линии (т. е. угловые коэффициенты тех прямых, на которые распадается линия)

$$k_1=1,\quad k_2=-\frac{1}{2}.$$

Уравнения прямых, на которые распадается линия:

$$y-\frac{2}{3}=x+\frac{4}{3}\quad \text{и}\quad y-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{3}\right),$$

или

$$x-y+2=0,\quad x+2y=0.$$

Пример 5. Исследовать уравнение

$$5x^2+2xy+2y^2+14x+4y+10=0.$$

Так как $K_3=0$, то это уравнение выражает две прямые. Преобразуем левую его часть так:

$$5\left(x^2+2\,\frac{y+7}{5}\,x\right)+2y^2+4y+10=5\left[x^2+2\,\frac{y+7}{5}\,x+\left(\frac{y+7}{5}\right)^2\right]+$$
$$+2y^2+4y+10-5\left(\frac{y+7}{5}\right)^2=5\left(x+\frac{y+7}{5}\right)^2+\frac{(3y+1)^2}{5}.$$

Данное уравнение выражает две мнимые пересекающиеся прямые. Единственную точку плоскости, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, найдем, разрешая систему

$$x+\frac{y+7}{5}=0,\qquad 3y+1=0;$$

отсюда искомая точка

$$M\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}\right).$$

Другой вариант решения. Так как $I_2 > 0$, $K_3 = 0$, то данное уравнение определяет две мнимые пересекающиеся прямые, т. е. удовлетворяется координатами только одной точки. Эта точка является центром данной линии, поэтому ее координаты получим, решив систему уравнений

$$5x+y+7=0,\quad x+2y+2=0.$$

Пример 6. Найти форму, размеры и расположение линии второго порядка

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0.$$

Находим

$$I_2=-9<0,\quad K_3=81\neq 0,$$

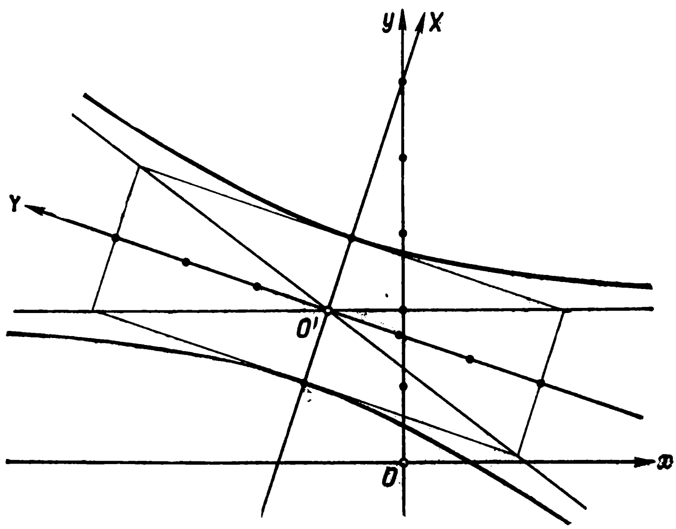


Рис. 226

следовательно, данное уравнение определяет гиперболу. Далее, $I_1=0+8=8$; характеристическое уравнение

$$\lambda^2-8\lambda-9=0;$$

его корни

$$\lambda_1=9,\qquad \lambda_2=-1.$$

Простейшее уравнение

$$9X^2-Y^2-\frac{81}{9}=0;$$

каноническое уравнение

$$\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{9}=1.$$

Координаты центра $O'(-1,\ 2)$ находим из системы

$$3y-6=0,\qquad 3x+8y-13=0.$$

Угловой коэффициент действительной оси гиперболы

$$k=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}=3 \quad \text{(рис. 226)}.$$

Пример 7. Исследовать уравнение

$$x^2+2xy+y^2-8x+4=0.$$

Находим

$$I_2=0, \quad K_3=-16\neq 0, \quad I_1=2;$$

данное уравнение является уравнением параболы. Простейшее уравнение

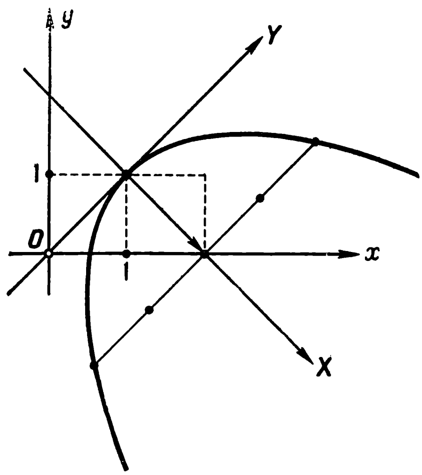


Рис. 227

$$2Y^2-2\sqrt{-\frac{-16}{2}}\,X=0;$$

каноническое уравнение

$$Y^2=2\sqrt{2}X.$$

Так как

$$-a_{12}p+a_{11}q=8>0,$$

то вектор $\{1, -1\}$ направлен от вершины параболы к ее фокусу. Координаты вершины параболы найдем, решая систему

$$x+y-4+x+y=0,$$
$$x^2+2xy+y^2-8x+4=0,$$

или

$$x+y=2, \qquad (x+y)^2=8x-4,$$

откуда $x=1$, $y=1$. Вершина O' (1, 1) (рис. 227).

Пример 8. Составить уравнения асимптот гиперболы

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0.$$

Решение. Если изменять свободный член в уравнении гиперболы, то получим уравнение семейства гипербол с общими асимптотами, причем в это семейство войдет линия второго порядка, распадающаяся на пару асимптот данной гиперболы. В самом деле, координаты векторов, имеющих асимптотическое направление, и координаты центра гиперболы определяются из уравнений, в которые не входит свободный член уравнения. Итак, уравнение пары асимптот данной гиперболы можно записать в виде

$$6xy+8y^2-12x-26y+C=0;$$

число C находят из условия распадения этой линии на две прямые:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & C \end{vmatrix}=0, \quad C=20;$$

искомое уравнение (сокращаем на 2):

$$3xy+4y^2-6x-13y+10=0.$$

Оно распадается на два:

$$3x+4y-5=0, \quad y-2=0,$$

это и есть уравнения асимптот данной гиперболы.

Замечание 1. Можно решать задачу и так: из уравнения $6lm+8m^2=0$ найти координаты векторов, имеющих асимптотическое направление: $\{1, 0\}$ и $\{-4, 3\}$, а из системы

$$3y-6=0, \quad 3x+8y-13=0$$

найти координаты центра гиперболы: $x=-1$, $y=2$.

Искомые уравнения

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x+1 & y-2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$y-2=0, \qquad 3x+4y-5=0.$$

Замечание 2. После того как найдены векторы

$$\{1, 0\} \text{ и } \{-4, 3\}$$

сами асимптоты можно найти как самосопряженные диаметры:

$$1\cdot(3y-6)+0\cdot(3x+8y-13)=0,$$
$$-4(3y-6)+3(3x+8y-13)=0,$$

или

$$y-2=0, \quad 3x+4y-5=0.$$

Пример 9. Найти фокусы и директрисы линии второго порядка

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0.$$

Решение. Находим

$$I_2=-9<0, \qquad K_3=81\neq 0,$$

следовательно, данное уравнение определяет гиперболу.

Находим I_1:

$$I_1=0+8=8.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2-8\lambda-9=0;$$

его корни

$$\lambda_1=9, \qquad \lambda_2=-1$$

(через λ_1 здесь обозначен корень, имеющий тот же знак, что и K_3). Простейшее уравнение

$$9X^2-Y^2-\frac{81}{9}=0, \quad \text{или} \quad \frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{9}=1,$$

откуда $a=1$, $b=3$, следовательно, $c=\sqrt{10}$.

Координаты центра определяются из уравнений

$$3y-6=0, \qquad 3x+8y-13=0,$$

откуда

$$x=-1, \quad y=2;$$

центр

$$O'(-1,\ 2).$$

Угловой коэффициент действительной оси

$$k=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}=\frac{9-0}{3}=3.$$

Пусть α — угол наклона действительной оси гиперболы к оси Ox, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha=3,$$

следовательно,

$$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}},\qquad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}},$$

а так как новое начало координат — центр гиперболы $O'(-1,\ 2)$, то формулы преобразования координат примут вид

$$x=\frac{X-3Y}{\sqrt{10}}-1,\qquad y=\frac{3X+Y}{\sqrt{10}}+2. \tag{α}$$

Так как координаты фокусов в новой системе $XO'Y$ суть соответственно

$$X_1=-\sqrt{10},\quad Y_1=0;\quad X_2=\sqrt{10},\quad Y_2=0,$$

то их координаты в начальной системе xOy получим, подставив в последние формулы вместо X и Y их значения:

$$x_1=\frac{-\sqrt{10}-3\cdot 0}{\sqrt{10}}-1=-2,\qquad y_1=\frac{-3\sqrt{10}+0}{\sqrt{10}}+2=-1,$$

$$F_1(-2,\ -1);\qquad x_2=\frac{\sqrt{10}-3\cdot 0}{\sqrt{10}}-1=0,$$

$$y_2=\frac{3\sqrt{10}+0}{\sqrt{10}}+2=5,\qquad F_2(0,\ 5).$$

Уравнения директрис в новой системе координат

$$X=\pm\frac{a^2}{c},$$

т. е. в нашем случае

$$X=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Выражая из формул (α) координаты X и Y через x и y, получим

$$X=\frac{x+1+3(y-2)}{\sqrt{10}},\qquad Y=\frac{-3(x+1)+y-2}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда уравнения директрис будут

$$\frac{x+1+3(y-2)}{\sqrt{10}}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}},$$

или

$$x+1+3y-6=\pm 1,$$

или

$$x+3y-6=0,\qquad x+3y-4=0.$$

Пример 10. Найти координаты фокусов и уравнения директрис линии второго порядка

$$x^2+2xy+y^2-8x+4=0.$$

Находим

$$I_2=0, \quad K_3=-16\neq 0;$$

данное уравнение определяет параболу. Далее,

$$I_1=1+1=2, \qquad p=\sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}=\sqrt{-\frac{-16}{8}}=\sqrt{2}.$$

Далее, так как $-a_{12}p+a_{11}q=-1\cdot-8+1\cdot 0>0$, то вектор $\{a_{12}, -a_{11}\}=\{1, -1\}$ направлен от вершины параболы к ее фокусу.

Обозначая через α угол от оси Ox до направления этого вектора, находим

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Координаты вершины находим из системы уравнений

$$x^2+2xy+y^2-8x+4=0, \quad x+y-2=0,$$

или

$$(x+y)^2-8x+4=0, \quad x+y=2,$$

или

$$4-8x+4=0, \quad x+y=2;$$

отсюда $x=1$, $y=1$. Вершина $O'(1, 1)$.

Формулы преобразования координат:

$$x=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}+1, \quad y=\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}+1. \qquad (\beta)$$

Координаты фокуса в новой системе

$$X=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad Y=0,$$

а в начальной

$$x=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+0}{\sqrt{2}}+1=\frac{3}{2}, \quad y=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+0}{\sqrt{2}}+1=\frac{1}{2}.$$

Решая уравнения (β) относительно X и Y, получим

$$X=\frac{x-1-(y-1)}{\sqrt{2}}=\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad Y=\frac{x-1+y-1}{\sqrt{2}}=\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}.$$

Уравнение директрисы в новой системе

$$X=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а в начальной

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{или} \quad x-y+1=0.$$

Пример 11. Дано общее уравнение линии второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0 \qquad (1)$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат. Дано $I_2 \neq 0$. Составить уравнение линии второго порядка, распадающейся на пару главных осей этой линии.

Решение. Уравнения главных осей данной линии

$$\begin{aligned} &a_{11}x + a_{12}y + a_1 + k_1(a_{21}x + a_{22}y + a_2) = 0, \\ &a_{11}x + a_{12}y + a_1 + k_2(a_{21}x + a_{22}y + a_2) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где k_1 и k_2 — угловые коэффициенты главных осей. Уравнение линии второго порядка, распадающейся на две прямые (2), запишется так:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_1)^2 + (k_1 + k_2)(a_{11}x + a_{12}y + a_1)(a_{21}x + a_{22}y + a_2) - \\ -(a_{21}x + a_{22}y + a_2)^2 = 0,$$

так как $k_1 k_2 = -1$.

Угловые коэффициенты k_1 и k_2 определяются из уравнения

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$$

(это уравнение получается из уравнения, приведенного на стр. 341, если поделить левую часть последнего на $\cos^2\alpha$).

Из последнего уравнения следует, что

$$k_1 + k_2 = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}},$$

а значит, искомое уравнение

$$a_{12}(a_{11}x + a_{12}y + a_1)^2 + (a_{22} - a_{11})(a_{11}x + a_{12}y + a_1)(a_{21}x + a_{22}y + a_2) - \\ - a_{12}(a_{21}x + a_{22}y + a_2)^2 = 0.$$

Замечание. Если данная линия распадается на две пересекающиеся прямые, то последнее уравнение распадается на уравнения пары биссектрис углов между ними.

Пример 12. Пусть общее уравнение линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0, \tag{1}$$

заданное относительно общей декартовой системы координат, является уравнением параболы Доказать, что тогда вектор $\omega = \{A_1, A_2\}$, где A_1 и A_2 — алгебраические дополнения элементов a_1 и a_2 в определителе

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix},$$

ненулевой, коллинеарен оси параболы и направлен в сторону вогнутости параболы.

Решение. Так как $K_3 = a_1A_1 + a_2A_2 \neq 0$, то из двух чисел A_1 или A_2 хотя бы одно не равно нулю и, значит, вектор ω ненулевой. Далее,

$$\omega = \{A_1, A_2\} = \{a_{21}a_2 - a_1a_{22}, a_{12}a_1 - a_{11}a_2\} = a_1\{-a_{22}, a_{12}\} + a_2\{a_{12}, -a_{11}\}.$$

Из этого соотношения следует, что вектор ω коллинеарен диаметрам параболы (1), так как он является линейной комбинацией векторов $\{-a_{22}, a_{12}\}$ и $\{a_{12}, -a_{11}\}$, каждый из которых коллинеарен диаметрам параболы (1).

Если $a_{11} > 0$ или $a_{22} > 0$, то уравнение параболы (1) можно записать в виде

$$(\sqrt{a_{11}}\,x + \sqrt{a_{22}}\,y)^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

и на основании § 150 вектор $\{A_1, A_2\}$ направлен в сторону вогнутости параболы (1) тогда и только тогда, когда он направлен в отрицательную полуплоскость от прямой

$$2a_1x+2a_2y+a=0,$$

а это будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$a_1A_1+a_2A_2<0.$$

Но это условие выполняется, так как

$$a_1A_1+a_2A_2=K_3=-\left(a_1\sqrt{a_{22}}-a_2\sqrt{a_{11}}\right)^2.$$

Если же $a_{11}<0$ или $a_{22}<0$, то уравнение (1) можно переписать в виде

$$\left(x\sqrt{-a_{11}}+y\sqrt{-a_{22}}\right)^2-2a_1x-2a_2y-a=0.$$

Парабола лежит теперь в положительной полуплоскости от прямой

$$2a_1x+2a_2y+a=0$$

и, значит, вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен в сторону ее вогнутости, если

$$a_1A_1+a_2A_2>0.$$

Но это выполняется, так как в случае $a_{11}<0$ или $a_{22}<0$ имеем

$$a_1A_1+a_2A_2=K_3=\left(a_1\sqrt{-a_{22}}-a_2\sqrt{-a_{11}}\right)^2>0.$$

Итак, вектор $\boldsymbol{\omega}=\{A_1,\ A_2\}$ всегда направлен в сторону вогнутости параболы.

Пример 13. Найти огибающую семейства прямых, рассекающих данный треугольник ABC на две равновеликие части.

Решение. В данное семейство прямых входят, очевидно, медианы данного треугольника. Прямая Δ, отличная от медиан и пересекающая, например, отрезки AB и AC соответственно в точках u и v, принадлежит данному семейству, если площадь треугольника Auv равна половине площади треугольника ABC. Отсюда

$$Au\cdot Av=\frac{S}{2},$$

значит, прямая uv касается дуги $\breve{\beta\gamma}$ гиперболы с асимптотами AB и AC. Концами β и γ этой дуги гиперболы являются середины медиан BB' и CC'. Между прочим, точкой M касания прямой uv с указанной дугой гиперболы является середина отрезка uv.

Искомая огибающая состоит из указанной дуги $\breve{\beta\gamma}$ и дуг $\breve{\beta\alpha}$, $\breve{\alpha\gamma}$ двух других гипербол, аналогичных дуге $\breve{\beta\gamma}$ (сделать чертеж).

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что расстояние от центра эллипса до прямой, проходящей через концы двух его взаимно перпендикулярных диаметров, есть величина постоянная.

2. Найти сумму квадратов длин сопряженных радиусов эллипса с полуосями a и b.

Отв. a^2+b^2.

3. Вычислить площадь параллелограмма со сторонами OM и OM', где OM и OM' — два сопряженных радиуса эллипса, полуоси которого равны a и b.

Отв. ab.

4. Найти сумму длин двух хорд эллипса с полуосями a и b, проходящих через его фокус и параллельных двум его сопряженным диаметрам.

Отв. $2\dfrac{a^2+b^2}{a}$.

5. Доказать, что сопряженные диаметры равносторонней гиперболы одинаково наклонены к ее асимптотам.

6. Доказать, что сопряженные диаметры гиперболы кососимметричны относительно одной из ее асимптот по направлению другой асимптоты.

7. Назовем сопряженными радиусами OM и OM' гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

два отрезка, лежащие на сопряженных диаметрах этой гиперболы, причем концами этих отрезков являются центр симметрии данной гиперболы и точки M и M' пересечения сопряженных диаметров гиперболы с данной гиперболой и с гиперболой

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

сопряженной с данной.

Доказать, что если

$$M\left[\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\ \frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]$$

конец одного из сопряженных радиусов, то конец другого

$$M'\left[\frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),\ \frac{b}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right].$$

8. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

проходящих через концы его сопряженных диаметров.

Отв. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2$.

9. Концы сопряженных диаметров эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

соединены хордами. Определить геометрическое место их середин.

Отв. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}$.

10. Доказать, что вершины ромба, описанного около эллипса, лежат на его осях.

11. Определить эллипс наибольшей площади, вписанный в данный параллелограмм.

Отв. Эллипс, касающийся сторон параллелограмма в их серединах.

12. Определить геометрическое место середин хорд эллипса, отсекающих от них сегменты постоянной площади.

Отв. Эллипс.

13. Доказать, что диагонали параллелограмма, стороны которого касаются эллипса, являются сопряженными диаметрами этого эллипса.

14. Доказать, что произведение отрезков MP_1 и MP_2 касательной P_1MP_2 к эллипсу (M — точка прикосновения), где P_1 и P_2 — точки, в которых рассматриваемая касательная пересекается с двумя произвольными параллельными, касательными к эллипсу, постоянно.

15. Вычислить площадь эллипса с полуосями a и b.

Отв πab

16. На эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через центр эллипса и делящий пополам площадь эллиптического сектора OM_1M_2 (O — центр эллипса)

Отв. $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$.

17. Найти все аффинные преобразования (см. § 175—179), переводящие эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в себя.

Отв.
$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi-\frac{b}{a}y\sin\varphi,\\ y' &= \frac{a}{b}x\sin\varphi+y\cos\varphi,\end{aligned}\right\}\ \text{или}\ \left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi+\frac{a}{b}y\sin\varphi,\\ y' &= \frac{b}{a}x\sin\varphi-y\cos\varphi\end{aligned}\right\}$$

(φ — любое число).

18. Найти все афинные преобразования, переводящие гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

в себя.

Отв.
$$x'=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+\frac{1}{2}\frac{a}{b}\left(-\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)y,$$
$$y'=\frac{1}{2}\left(-\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{b}{a}x+\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)y,$$

где λ — любое число, не равное нулю.

19. Рассмотрим два радиуса гиперболы, таких, что площадь гиперболического сектора, образованного этими радиусами и дугой гиперболы, имеет данную величину.

Доказать, что:

1) хорды, соединяющие концы этих радиусов, касаются некоторой гиперболы, гомотетичной данной, причем точками касания служат середины хорд;

2) сегменты гиперболы, заключенные между этими хордами и дугой гиперболы, имеют постоянную площадь;

3) треугольник, имеющий сторонами одну из хорд и касательные к гиперболе в ее концах, имеет постоянную площадь.

20. Определить аффинное преобразование, которое параболу $y^2=2px$ переводит в ту же параболу.

Отв. $x'=\frac{\lambda^2}{2p}(2px-2my+m^2)$, $y'=\lambda(y-m)$,

где λ — любое число, не равное нулю, а m — любое число.

21. Определить все унимодулярные, т. е. такие преобразования $x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1$, $y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2$, для которых $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$, при которых парабола $y^2 = 2px$ переходит в себя.

Отв.

$$x' = \frac{1}{2p}(2px - 2my + m^2), \quad y' = y - m.$$

22. Определить геометрическое место середин хорд параболы $y^2 = 2px$, отсекающих от этой параболы сегменты постоянной площади.

Отв. $y^2 = 2p(x - a)$, где a — расстояние от вершины данной параболы до хорды, перпендикулярной к ее оси и отсекающей от данной параболы сегмент данной площади.

23. При каком необходимом и достаточном условии две линии второго порядка, заданные общими уравнениями

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0,$$
$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + b = 0,$$

имеют одни и те же главные направления.

Отв.
$$\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} = \frac{b_{11} - b_{22}}{b_{12}}.$$

Это условие эквивалентно следующему:

$$AB = BA, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

24. Найти геометрическое место центров равносторонних гипербол, проходящих через три фиксированные точки, не принадлежащие одной прямой.

Отв. Окружность.

25. Относительно прямоугольной системы координат линия второго порядка задана уравнением

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$$

Доказать, что эта линия — гипербола. Найти длины ее полуосей, координаты центра, уравнения действительной и мнимой осей, уравнения асимптот, координаты фокусов, координаты вершин, уравнения касательных в вершинах.

Отв. $I_2 = -4 < 0$, $K_3 = 144 \neq 0$, гипербола; действительная полуось $a = 3$, мнимая полуось $b = 6$; центр $(3, -4)$; действительная ось $2x - y - 10 = 0$, мнимая ось $x + 2y + 5 = 0$; асимптоты $y + 4 = 0$, $4x + 3y = 0$; фокусы $(6, 2)$, $(0, -10)$; соответствующие им директрисы $x + 2y + 2 = 0$, $x + 2y + 8 = 0$; вершины

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}} + 3, \ \frac{6}{\sqrt{5}} - 4\right), \quad \left(-\frac{3}{\sqrt{5}} + 3, \ -\frac{6}{\sqrt{5}} - 4\right);$$

касательные в вершинах $x + 2y + 5 \pm 3\sqrt{5} = 0$.

26. Какая линия второго порядка определяется условием $I_1 = 0$, $K_3 \neq 0$?

Отв. Равносторонняя гипербола.

27. Линия второго порядка, заданная общим уравнением $\varphi(x, y) = 0$ второй степени, распадается на две параллельные прямые. При каком необходимом и достаточном условии точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит между ними?

Отв.
$$I_1\varphi(x_0, y_0) < 0.$$

28. Линия второго порядка, заданная общим уравнением $\varphi(x, y) = 0$, распадается на две пересекающиеся и не взаимно перпендикулярные прямые. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0) лежит внутри острого угла, образованного этими прямыми?

Отв. $I_1\varphi(x_0, y_0) < 0$.

29. При каком необходимом и достаточном условии линия, заданная уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат, распадается на две взаимно перпендикулярные прямые?

Отв. $I_1 = 0, \quad K_3 = 0$.

30. Доказать, что если общее уравнение $\varphi(x, y) = 0$ линии второго порядка, заданное относительно аффинной системы координат, определяет гиперболу, то уравнение $\varphi(x, y) = \frac{K_3}{I_2}$ определяет пару ее асимптот.

31. Общее уравнение линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0,$$

заданное относительно декартовой прямоугольной системы координат, определяет гиперболу. При каком необходимом и достаточном условии эта гипербола лежит внутри острых углов, образованных ее асимптотами?

Отв. $I_1K_3 < 0$.

32. Общие уравнения двух линий второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0,$$
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + b = 0,$$

заданные относительно аффинной системы координат, являются уравнениями двух гипербол. При каком необходимом и достаточном условии их ветви будут находиться в разных парах вертикальных углов, образованных их общими асимптотами?

Отв. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & b \end{vmatrix} < 0.$

33. Составить уравнение эллипса, зная его центр (2,1) и концы (5,1), (0,3) двух его сопряженных радиусов.

Отв. $4x^2 + 8xy + 13y^2 - 24x - 42y + 9 = 0$

34. Составить уравнение гиперболы, зная ее асимптоты $x - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ и одну из касательных $4x + y + 5 = 0$.

Отв. $2x^2 - xy - x + y + 5 = 0$.

35. Составить уравнение параболы, зная ее ось $x + y + 1 = 0$ и зная, что она проходит через точки (0, 0) и (0, 1).

Отв. $x^2 + 2xy + y^2 + 5x - y = 0$.

36. Составить уравнение гиперболы, зная один из ее фокусов $(-2, 2)$ и асимптоты $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$,

Отв. $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + 18y - 39 = 0$

37. Доказать, что линия второго порядка, проходящая через вершины какого-нибудь треугольника и точку пересечения его высот, является равносторонней гиперболой.

ГЛАВА XII

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ ОБЩИМ УРАВНЕНИЕМ

§ 152. Теорема о том, что всякое уравнение второй степени с тремя неизвестными определяет эллипсоид, гиперболоид, параболоид, конус, цилиндр или две плоскости

Теорема 1. *Всякая квадратичная форма однородным ортогональным преобразованием может быть приведена к такому виду (каноническому), чтобы преобразованная форма не содержала членов с произведением новых переменных, взятых попарно.*

Коэффициентами преобразованной формы будут корни характеристического уравнения.

Общее доказательство этой теоремы дается в курсах высшей алгебры *.

Здесь дадим геометрическое доказательство этой теоремы для случая квадратичной формы от трех переменных:

$$\varphi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx. \qquad (1)$$

Доказательство. Введем в пространстве ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Переменные x, y, z рассматриваем как координаты вектора $\{x, y, z\}$ в этом базисе. Введем новый ортонормированный базис $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$. Координаты x, y, z произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ через координаты x', y', z' того же вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ выражаются соотношениями (1) § 100. Этими соотношениями выражается ортогональное преобразование Ω_1, поскольку матрица A этого преобразования — ортогональная.

Подставляя в выражение (1) вместо x, y, z их значения из формул (1) § 100, получим

$$\varphi' = a_{11}(x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)^2 + \\ + a_{22}(x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)^2 + \ldots \qquad (1')$$

* См. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. М., „Наука“, 1965, гл. 8, § 37, стр. 226.

Докажем сначала, что ортонормированный базис $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ можно выбрать так, что в выражении (1') обратятся в нуль коэффициенты при $z'x'$ и $y'z'$. Выписывая из соотношения (1') половины коэффициентов при $z'x'$ и $y'z'$ и приравнивая их нулю, получим уравнения, которые можно записать в виде

$$\begin{gathered}(a_{11}\cos\alpha_3+a_{12}\cos\beta_3+a_{13}\cos\gamma_3)\cos\alpha_1+\\+(a_{21}\cos\alpha_3+a_{22}\cos\beta_3+a_{23}\cos\gamma_3)\cos\beta_1+\\+(a_{31}\cos\alpha_3+a_{32}\cos\beta_3+a_{33}\cos\gamma_3)\cos\gamma_1=0,\\(a_{11}\cos\alpha_3+a_{12}\cos\beta_3+a_{13}\cos\gamma_3)\cos\alpha_2+\\+(a_{21}\cos\alpha_3+a_{22}\cos\beta_3+a_{23}\cos\gamma_3)\cos\beta_2+\\+(a_{31}\cos\alpha_3+a_{32}\cos\beta_3+a_{33}\cos\gamma_3)\cos\gamma_2=0.\end{gathered}$$

Эти соотношения означают, что вектор

$$\{a_{11}\cos\alpha_3+a_{12}\cos\beta_3+a_{13}\cos\gamma_3,\quad a_{21}\cos\alpha_3+a_{22}\cos\beta_3+a_{23}\cos\gamma_3,\quad a_{31}\cos\alpha_3+a_{32}\cos\beta_3+a_{33}\cos\gamma_3\}$$

должен быть ортогонален векторам

$$\boldsymbol{i}'=\{\cos\alpha_1,\quad \cos\beta_1,\quad \cos\gamma_1\}\ \text{ и }\ \boldsymbol{j}'=\{\cos\alpha_2,\quad \cos\beta_2,\quad \cos\gamma_2\},$$

иначе коллинеарен вектору

$$\boldsymbol{k}'=\{\cos\alpha_3,\quad \cos\beta_3,\quad \cos\gamma_3\},$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned}a_{11}\cos\alpha_3+a_{12}\cos\beta_3+a_{13}\cos\gamma_3&=\lambda\cos\alpha_3,\\a_{21}\cos\alpha_3+a_{22}\cos\beta_3+a_{23}\cos\gamma_3&=\lambda\cos\beta_3,\\a_{31}\cos\alpha_3+a_{32}\cos\beta_3+a_{33}\cos\gamma_3&=\lambda\cos\gamma_3,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

или

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\cos\alpha_3+a_{12}\cos\beta_3+a_{13}\cos\gamma_3&=0,\\a_{21}\cos\alpha_3+(a_{22}-\lambda)\cos\beta_3+a_{23}\cos\gamma_3&=0,\\a_{31}\cos\alpha_3+a_{32}\cos\beta_3+(a_{33}-\lambda)\cos\gamma_3&=0.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Так как вектор $\boldsymbol{k}'$ должен быть единичным ($\cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1$) и так как система (3) линейная, однородная относительно $\cos\alpha_3$, $\cos\beta_3$, $\cos\gamma_3$, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0.\tag{4}$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением формы φ. Оно третьей степени относительно λ. Но так как все числа a_{ik} мы считаем действительными, то уравнение (4) имеет по крайней мере один действительный корень. Оставляя пока в стороне случай, когда уравнение (4) имеет трехкратный корень, можно утверждать, что уравнение (4) имеет простой действительный корень, который обозначим так: $\lambda=\lambda_3$. Подставляя это значение $\lambda=\lambda_3$ в систему (3), получим систему

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_3)\cos\alpha_3+a_{12}\cos\beta_3+a_{13}\cos\gamma_3&=0,\\ a_{21}\cos\alpha_3+(a_{22}-\lambda_3)\cos\beta_3+a_{23}\cos\gamma_3&=0,\\ a_{31}\cos\alpha_3+a_{32}\cos\beta_3+(a_{33}-\lambda_3)\cos\gamma_3&=0.\end{aligned}\qquad(5)$$

Система (5) не может иметь относительно $\cos\alpha_3$, $\cos\beta_3$, $\cos\gamma_3$ два линейно независимых решения. В самом деле, в противном случае матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_3 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda_3 & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{32}-\lambda_3\end{pmatrix}$$

имела бы ранг, меньший 2, и, значит, производная от характеристического определителя

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix},$$

которая равна

$$\Delta'(\lambda)=-\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix},$$

при $\lambda=\lambda_3$ обращалась бы в нуль, т. е. корень $\lambda=\lambda_3$ характеристического уравнения имел бы кратность больше 1 вопреки предположению.

Итак, существуют только два противоположных единичных вектора

$$\boldsymbol{k}'=\{\cos\alpha_3,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_3\}\ \text{и}\ \boldsymbol{k}''=\{-\cos\alpha_3,\ -\cos\beta_3,\ -\cos\gamma_3\},$$

координаты которых удовлетворяют системе (5). Выбирая любой из них

$$\boldsymbol{k}'=\{\cos\alpha_3,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_3\},$$

располагая векторы

$$\boldsymbol{i}'=\{\cos\alpha_1,\ \cos\beta_1,\ \cos\gamma_1\},\quad \boldsymbol{j}'=\{\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2\}$$

перпендикулярно вектору $\boldsymbol{k}'$ и друг другу, получим, что форма (1') примет вид

$$\varphi'=a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'.$$

Теперь произведем поворот осей $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz'; этому повороту соответствует ортогональное преобразование Ω_2

$$\left.\begin{aligned} x' &= x''\cos\alpha - y''\sin\alpha, \\ y' &= x''\sin\alpha + y''\cos\alpha, \\ z' &= z'', \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

которое, как было показано в § 141, можно выбрать таким, что форма $a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2$ преобразуется в форму $a''_{11}x''^2 + a''_{22}y''^2$.

При ортогональном преобразовании $\Omega = \Omega_2\Omega_1$ форма φ преобразуется в форму

$$\varphi'' = a''_{11}x''^2 + a''_{22}y''^2 + a''_{33}z''^2. \qquad (1'')$$

Теорема доказана. Отметим (и это очень важно для дальнейшего), что

$$\begin{aligned} a''_{33} = a'_{33} &= (a_{11}\cos\alpha_3 + a_{12}\cos\beta_3 + a_{13}\cos\gamma_3)\cos\alpha_3 + \\ &+ (a_{21}\cos\alpha_3 + a_{22}\cos\beta_3 + a_{23}\cos\gamma_3)\cos\beta_3 + \\ &+ (a_{31}\cos\alpha_3 + a_{32}\cos\beta_3 + a_{33}\cos\gamma_3)\cos\gamma_3 = \\ &= \lambda_3\cos^2\alpha_3 + \lambda_3\cos^2\beta_3 + \lambda_3\cos^2\gamma_3 = \lambda_3. \end{aligned}$$

Так как форма φ'' не содержит произведений координат $x''y''$ и $x''z''$, то $a''_{11} = \lambda_1$, где λ_1 — также корень того же характеристического уравнения (4) отличный от λ_3, и аналогично $a''_{22} = \lambda_2$, где λ_2 — корень характеристического уравнения (4).

Таким образом, канонический вид формы φ имеет вид

$$\varphi'' = \lambda_1x''^2 + \lambda_2y''^2 + \lambda_3z''^2,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — корни характеристического уравнения формы φ. Из доказанного следует также, что:

1) все корни характеристического уравнения действительны;

2) если все корни λ_1, λ_2, λ_3 простые, то, подставляя в систему (3) λ_1 вместо λ и заменяя α_3, β_3, γ_3 на α_1, β_1, γ_1, получим систему, из которой можно найти только два (взаимно противоположных) единичных вектора новой оси Ox', а при $\lambda = \lambda_2$ только два (также взаимно противоположных) единичных вектора новой оси Oy';

3) если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то форма φ'' имеет вид

$$\varphi'' = \lambda_1x''^2 + \lambda_1y''^2 + \lambda_3z''^2$$

и при любом ортогональном преобразовании Ω_2 она не будет менять этого вида, так как из формул (6) следует, что $x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$. Таким образом, уже при ортогональном преобразовании Ω_1 форма φ перейдет в форму

$$\varphi' = \lambda_1x'^2 + \lambda_1y'^2 + \lambda_3z'^2.$$

Так как координаты вектора $\boldsymbol{i}'$ ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, в котором форма φ не содержит произведений $x'y'$ и $x'z'$, находятся всегда из системы (3), в которой надо положить $\lambda=\lambda_1$, то в случае $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$ система (3) (в которой λ заменено на λ_1, а α_3, β_3, γ_3 на α_1, β_1, γ_1) имеет два линейно независимых решения. В качестве векторов $\boldsymbol{i}'$ и $\boldsymbol{j}'$, как мы уже указывали, можно в этом случае взять два любых вектора, ортогональных вектору $\boldsymbol{k}'$ и между собой.

4) Если, наконец, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, то форма φ' имеет вид

$$\varphi'=\lambda_1(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Но из соотношений (1) § 100 следует, что для любого однородного ортогонального преобразования

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2,$$

значит, форма φ с самого начала имеет канонический вид

$$\varphi=\lambda_1(x^2+y^2+z^2).$$

Теорема 2. *Общее уравнение*

$$\begin{gathered}a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+\\+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0\end{gathered}\tag{7}$$

поверхности второго порядка, заданное относительно общей декартовой системы координат, при помощи преобразования системы координат в прямоугольную систему можно преобразовать к одному из следующих пяти простейших уравнений:*

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2+D=0,\ \text{где}\ \lambda_1\neq0,\ \lambda_2\neq0,\ \lambda_3\neq0,\tag{I}$$

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+2a_3'Z=0,\ \text{где}\ \lambda_1\neq0,\ \lambda_2\neq0,\ a_3'\neq0,\tag{II}$$

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+D=0,\ \text{где}\ \lambda_1\neq0,\ \lambda_2\neq0,\tag{III}$$

$$\lambda_1X^2+2a_2'Y=0,\ \text{где}\ \lambda_1\neq0,\ a_2'\neq0,\tag{IV}$$

$$\lambda_1X^2+D=0,\ \text{где}\ \lambda_1\neq0.\tag{V}$$

---

* Здесь, как и в § 141, по существу идет речь о том, что целую рациональную функцию второй степени от трех аргументов:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a$$

при помощи некоторого неоднородного ортогонального (см. ниже доказательство теоремы) преобразования можно привести к одному из следующих пяти видов:

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2+D,\quad \text{где}\quad \lambda_1\neq0,\ \lambda_2\neq0,\ \lambda_3\neq0;$$

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+2a_3'Z,\quad \text{где}\quad \lambda_1\neq0,\ \lambda_2\neq0,\ a_3'\neq0;$$

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+D,\quad \text{где}\quad \lambda_1\neq0,\ \lambda_2\neq0;$$

$$\lambda_1X^2+2a_2'Y,\quad \text{где}\quad \lambda_1\neq0,\ a_2'\neq0;$$

$$\lambda_1X^2+D,\quad \text{где}\quad \lambda_1\neq0.$$

Доказательство. Перейдем сначала от общей декартовой системы координат к декартовой прямоугольной. Так как при преобразовании декартовой системы координат порядок поверхности не меняется (§ 140, п. 1), то при переходе к декартовой прямоугольной системе координат уравнение (7) перейдет в уравнение такого же вида. Поэтому с самого начала предполагаем, что уравнение (7) дано относительно декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$.

В теореме 1 этого параграфа доказано, что можно от прямоугольной системы координат $Oxyz$ перейти к другой прямоугольной системе $Ox'y'z'$, такой, что в системе $Ox'y'z'$ уравнение (7) преобразуется в следующее:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + 2a_3' z' + a = 0, \tag{8}$$

где λ_1, λ_2 и λ_3 — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

При этом координаты $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$ единичных векторов $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ новых осей Ox', Oy', Oz' находятся соответственно из систем:

$$\begin{gathered} (a_{11}-\lambda_i)\cos\alpha_i + a_{12}\cos\beta_i + a_{13}\cos\gamma_i = 0, \\ a_{21}\cos\alpha_i + (a_{22}-\lambda_i)\cos\beta_i + a_{23}\cos\gamma_i = 0, \\ a_{31}\cos\alpha_i + a_{32}\cos\beta_i + (a_{33}-\lambda_i)\cos\gamma_i = 0, \\ i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{10}$$

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_3 \neq \lambda_1$, то получаем единственную тройку новых осей Ox', Oy', Oz' (с точностью до выбора на них положительных направлений). Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то из системы (10) при $i = 3$ находим единственную ось Oz' (с точностью до выбора на ней положительного направления), а оси Ox' и Oy' располагаем перпендикулярно к оси Oz' и друг к другу. Если, наконец, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то уже начальное уравнение (7) не содержит членов с xy, yz и zx и квадратичная форма φ, входящая в левую часть уравнения (7), имеет вид $\lambda(x^2 + y^2 + z^2)$.

I случай. Предположим, что в уравнении (8)

$$\lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0, \ \lambda_3 \neq 0.$$

Тогда уравнение (8) можно переписать в виде

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z' + \frac{a_3'}{\lambda_3}\right)^2 + D = 0, \tag{11}$$

где

$$D = a - \frac{a_1'^2}{\lambda_1} - \frac{a_2'^2}{\lambda_2} - \frac{a_3'^2}{\lambda_3}.$$

Производя перенос системы $Ox'y'z'$ так, чтобы новым началом координат была точка

$$O'\left(-\frac{a_1'}{\lambda_1},\quad -\frac{a_2'}{\lambda_2},\quad -\frac{a_3'}{\lambda_3}\right),$$

где координаты точки O' даны относительно системы $Ox'y'z'$, и обозначая координаты точек в новой системе через X, Y, Z, будем иметь

$$X = x' + \frac{a_1'}{\lambda_1},\quad Y = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2},\quad Z = z' + \frac{a_3'}{\lambda_3},$$

и уравнение (11) примет вид

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + D = 0, \tag{I}$$

где

$$\lambda_1 \neq 0,\quad \lambda_2 \neq 0,\quad \lambda_3 \neq 0.$$

II случай. Предположим, что в уравнении (8)

$$\lambda_1 \neq 0,\quad \lambda_2 \neq 0,\quad \lambda_3 = 0,\quad a_3' \neq 0.$$

Тогда уравнение (8) преобразуем так:

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}\right)^2 + 2a_3'\left(z' + \frac{D}{2a_3'}\right) = 0,$$

где

$$D = a - \frac{a_1'^2}{\lambda_1} - \frac{a_2'^2}{\lambda_2}.$$

Перенося систему $Ox'y'z'$ так, чтобы новым началом координат стала точка

$$O'\left(-\frac{a_1'}{\lambda_1},\quad -\frac{a_2'}{\lambda_2},\quad -\frac{D}{2a_3'}\right)$$

(координаты точки O' даны относительно системы $Ox'y'z'$), т. е. полагая

$$X = x' + \frac{a_1'}{\lambda_1},\quad Y = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2},\quad Z = z' + \frac{D}{2a_3'},$$

приведем уравнение (8) к виду

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2a_3' Z = 0, \tag{II}$$

где

$$\lambda_1 \neq 0,\quad \lambda_2 \neq 0,\quad a_3' \neq 0.$$

III случай. В уравнении (8)

$$\lambda_1 \neq 0,\quad \lambda_2 \neq 0,\quad \lambda_3 = 0,\quad a_3' = 0,$$

Тогда уравнение (8) имеет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + a = 0,$$

или

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a_2'}{\lambda^2}\right)^2 + D = 0, \tag{12}$$

где

$$D = a - \frac{a_1'^2}{\lambda_1} - \frac{a_2'^2}{\lambda_2}.$$

Производя перенос системы координат $Ox'y'z'$ так, чтобы новым началом координат была точка

$$O'\left(-\frac{a_1'}{\lambda_1}, -\frac{a_2'}{\lambda_2}, 0\right),$$

т. е. полагая

$$X = x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}, \quad Y = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}, \quad Z = z',$$

приведем уравнение (12) к виду

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + D = 0, \tag{III}$$

где

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0.$$

IV с л у ч а й. В уравнении (8) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, но хотя бы один из коэффициентов a_2' или a_3' отличен от нуля.

Если $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $a_2' \neq 0$, $a_3' = 0$ или $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $a_3' \neq 0$, $a_2' = 0$, то при помощи одного только переноса осей уравнение (8) можно преобразовать к виду

$$\lambda_1 X^2 + 2a_2' Y = 0,$$

или (если $a_3' \neq 0$, $a_2' = 0$) к виду

$$\lambda_1 X^2 + 2a_3' Z = 0.$$

Если же $a_2' \neq 0$ и $a_3' \neq 0$, то при помощи переноса осей $Ox'y'z'$ избавимся в уравнении (8) от первой степени x'' и оно в некоторой системе $O'x''y''z''$ примет вид

$$\lambda_1 x''^2 + 2a_2' y'' + 2a_3' z'' = 0.$$

Производя затем поворот осей $O'x''y''z''$ вокруг новой оси $O'x''$

$$X = x'', \quad Y = \frac{a_2' y'' + a_3' z''}{\sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}}, \quad Z = \frac{a_3' y'' - a_2' z''}{\sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}},$$

приведем последнее уравнение к виду

$$\lambda_1 X^2 + 2\sqrt{a_2'^2 + a_3'^2}\, Y = 0,$$

или, обозначая половину коэффициента при Y по-прежнему через a_2':

$$\lambda_1 X^2 + 2a_2' Y = 0. \qquad \text{(IV)}$$

V случай. $\lambda_2 = \lambda_3 = a_2 = a_3 = 0$.
Уравнение (8) имеет вид

$$\lambda_1 x'^2 + 2a_1' x' + a = 0$$

и переносом осей координат приводится к виду

$$\lambda_1 X^2 + D = 0, \text{ где } \lambda_1 \neq 0. \qquad \text{(V)}$$

Теорема 3. *Общее уравнение*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx +$$
$$+ 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

поверхности второго порядка, заданное относительно общей декартовой системы координат, выражает одну из следующих семнадцати поверхностей:

1° эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

2° мнимый эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$;

3° однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

4° двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$;

5° конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$;

6° мнимый конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$;

7° эллиптический параболоид $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, $p > 0$, $q > 0$;

8° гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, $p > 0$, $q > 0$;

9° эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

10° мнимый эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$;

11° две мнимые пересекающиеся плоскости $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$;

12° гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

13° две пересекающиеся плоскости $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$;

14° параболический цилиндр $x^2=2py$, $p>0$;
15° две параллельные плоскости $x^2=a^2$, $a\neq 0$;
16° две мнимые параллельные плоскости $x^2=-a^2$, $a\neq 0$;
17° две совпадающие плоскости $x^2=0$.

Согласно двум предыдущим теоремам нужно рассмотреть следующие случаи *.

I случай. $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+D=0$, $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$, $\lambda_3\neq 0$. (I)

1) λ_1, λ_2, λ_3 одного знака, а D имеет знак, им противоположный. В этом случае уравнение (I) можно переписать так:

$$\frac{x^2}{-\frac{D}{\lambda_1}}+\frac{y^2}{-\frac{D}{\lambda_2}}+\frac{z^2}{-\frac{D}{\lambda_3}}=1,$$

и так как $-\frac{D}{\lambda_1}>0$, $-\frac{D}{\lambda_2}>0$, $-\frac{D}{\lambda_3}>0$, то можно положить

$$-\frac{D}{\lambda_1}=a^2, \quad -\frac{D}{\lambda_2}=b^2, -\frac{D}{\lambda_3}=c^2;$$

тогда получим уравнение 1°.

2) λ_1, λ_2, λ_3 и D одного знака. В этом случае уравнение (I) перепишем в виде

$$\frac{x^2}{\frac{D}{\lambda_1}}+\frac{y^2}{\frac{D}{\lambda_2}}+\frac{z^2}{\frac{D}{\lambda_3}}=-1,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

где

$$a^2=\frac{D}{\lambda_1}, \quad b^2=\frac{D}{\lambda_2}, \quad c^2=\frac{D}{\lambda_3}.$$

3) λ_1 и λ_2 одного знака, а λ_3 и D противоположного. Перепишем уравнение (I) в виде

$$\frac{x^2}{-\frac{D}{\lambda_1}}+\frac{y^2}{-\frac{D}{\lambda_2}}-\frac{z^2}{\frac{D}{\lambda_3}}=1.$$

Так как $-\frac{D}{\lambda_1}>0$, $-\frac{D}{\lambda_2}>0$, $\frac{D}{\lambda_3}>0$, то можно положить

$$-\frac{D}{\lambda_1}=a^2, \quad -\frac{D}{\lambda_2}=b^2, \quad \frac{D}{\lambda_3}=c^2,$$

и мы приходим к уравнению 3°.

4) λ_1, λ_2 и D одного знака, а λ_3 противоположного.

* В простейших уравнениях I—V поверхностей второго порядка относительно декартовой прямоугольной системы координат (см. условие теоремы 2 § 152) снова будем обозначать координаты буквами x, y, z.

Перепишем уравнение (I) в виде

$$\frac{x^2}{\frac{D}{\lambda_1}}+\frac{y^2}{\frac{D}{\lambda_2}}-\frac{z^2}{-\frac{D}{\lambda_3}}=-1, \text{ или } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

где

$$a^2=\frac{D}{\lambda_1},\quad b^2=\frac{D}{\lambda_2},\ c^2=-\frac{D}{\lambda_3}.$$

5) λ_1 и λ_2 одного знака, λ_3 имеет знак, им противоположный, и $D=0$.

В этом случае уравнение (I) можно переписать так:

$$|\lambda_1|\,x^2+|\lambda_2|\,y^2-|\lambda_3|\,z^2=0,$$

или

$$\frac{x^2}{\frac{1}{|\lambda_1|}}+\frac{y^2}{\frac{1}{|\lambda_2|}}-\frac{z^2}{\frac{1}{|\lambda_3|}}=0, \text{ или } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

где

$$a^2=\frac{1}{|\lambda_1|},\quad b^2=\frac{1}{|\lambda_2|},\quad c^2=\frac{1}{|\lambda_3|}.$$

6) λ_1, λ_2, λ_3 одного знака, а $D=0$. В этом случае уравнение (I) можно переписать так:

$$|\lambda_1|\,x^2+|\lambda_2|\,y^2+|\lambda_3|\,z^2=0, \text{ или } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

II случай. $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+2a_3'z=0,\ \lambda_1\neq0,\ \lambda_2\neq0,\ a_3'\neq0.$ (II)

7) λ_1 и λ_2 одного знака.

Выбором положительного направления оси Oz можно добиться того, что коэффициент при z в уравнении (II) будет иметь знак, противоположный знаку λ_1 и λ_2. В таком случае уравнение (II) можно переписать так:

$$\frac{x^2}{-\frac{a_3'}{\lambda_1}}+\frac{y^2}{-\frac{a_3'}{\lambda_2}}=2z,$$

или, полагая

$$-\frac{a_3'}{\lambda_1}=p,\ -\frac{a_3'}{\lambda_2}=q$$

($p>0$ и $q>0$, так как a_3' имеет знак, противоположный знаку λ_1 и λ_2), будем иметь:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z.$$

8) λ_1 и λ_2 разных знаков.

Положительное направление оси Oz всегда можно выбрать так, чтобы знак a_3' был противоположен знаку λ_1. Переписывая тогда уравнение (II) в виде

$$\frac{x^2}{-\frac{a_3'}{\lambda_1}} - \frac{y^2}{\frac{a_3'}{\lambda_2}} = 2z$$

и замечая, что

$$-\frac{a_3'}{\lambda_1} = p > 0, \quad \frac{a_3'}{\lambda_2} = q > 0,$$

получим уравнение 8°:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Аналогично исследуются случаи III, IV, V, приводящие к уравнениям 9° — 17°.

Рассмотрение поверхностей, определяемых уравнениями (III), (IV) и (V), проводится так же, как в § 141 исследовались линии второго порядка, простейшие уравнения которых мы обозначали соответственно через (I), (II) и (III).

§ 153. Теория инвариантов

В настоящем параграфе будет использована теорема, сформулированная в § 142, но для случая трех и четырех переменных.

Именно произведем над переменными x, y, z целой рациональной функции F второй степени от этих переменных

$$F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a \tag{1}$$

линейное неоднородное преобразование:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + c_1, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + c_2, \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть

$$F' = a_{11}'x'^2 + a_{22}'y'^2 + a_{33}'z'^2 + 2a_{12}'x'y' + 2a_{23}'y'z' + 2a_{31}'z'x' + \\ + 2a_1'x' + 2a_2'y' + 2a_3'z' + a' \tag{3}$$

функция, в которую при этом преобразуется функция F. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

и

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В самом деле, квадратичная форма, входящая в состав функции F, преобразуется в квадратичную форму, входящую в состав функции F' при *однородном* преобразовании

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда следует формула (4).

Далее, функция F может быть получена из квадратичной формы:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2a_1xt + 2a_2yt + 2a_3zt + at^2$$

при $t = 1$, а неоднородное преобразование (2) получается из однородного:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + c_1t', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + c_2t', \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c_3t', \\ t &= \phantom{c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c_3} t' \end{aligned}$$

при $t' = 1$.

Из этих соображений получается формула (5) *. Из соотношений (4) и (5) следует, что при линейном преобразовании (2) над переменными x, y, z целой рациональной функции F, при котором она переходит в функцию F', имеют место соотношения:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}^2, \quad (4')$$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}^2. \quad (5')$$

Определение. *Целая рациональная функция от коэффициентов многочлена второй степени называется ортогональным инвариантом этого многочлена относительно ортогонального преобразования,*

* См А. Г. Курош. Курс высшей алгебры, изд. 6. М., Физматгиз, 1965, § 26, стр. 169.

если она сохраняет свое значение при неоднородных ортогональных преобразованиях переменных.

Теорема 1. *Функции* *

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$K_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33} \tag{10}$$

являются ортогональными инвариантами целой рациональной функции второй степени от трех аргументов:

$$F=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+$$
$$+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a.$$

Доказательство. Так как определитель ортогонального преобразования равен ± 1, то его квадрат равен 1 и инвариантность I_3 и K_4 следует из соотношений (4′) и (5′) настоящего параграфа.

Для доказательства того, что I_2 и I_1 также являются ортогональными инвариантами, заметим прежде всего, что коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{31} являются инвариантами переноса:

$$x=x'+c_1, \quad y=y'+c_2, \quad z=z'+c_3. \tag{11}$$

Это доказывается так же, как и в § 142. Поэтому достаточно доказать, что I_2 и I_1 являются инвариантами однородного ортогонального преобразования:

$$\begin{aligned} x&=c_{11}x'+c_{12}y'+c_{13}z', \\ y&=c_{21}x'+c_{22}y'+c_{23}z', \\ z&=c_{31}x'+c_{32}y'+c_{33}z'. \end{aligned} \tag{12}$$

При этом преобразовании имеет место соотношение

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

(это доказывается так же, как и соответствующее равенство x^2+ $+y^2=x'^2+y'^2$ в теореме 4 § 142).

* I_3 называется дискриминантом формы φ.

Рассмотрим вспомогательную квадратичную форму

$$\psi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx - \\ -\lambda(x^2 + y^2 + z^2). \qquad (13)$$

При ортогональном преобразовании (12) она перейдет в форму

$$\psi' = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{31}z'x' - \\ -\lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2). \qquad (14)$$

По доказанному дискриминант квадратичной формы является ортогональным инвариантом, значит,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22}-\lambda & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Это равенство верно при всех значениях λ, следовательно, равны соответствующие коэффициенты при λ^2 и λ в левой и правой частях, т. е.

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{31} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. *Функции*

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix} \qquad (16)$$

являются инвариантами однородного ортогонального преобразования. Эти функции K_3 и K_2 называются «семиинвариантами» (полуинвариантами).

Если же функция

$$F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a$$

однородным ортогональным преобразованием может быть приведена к виду

$$F' = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a, \qquad (17)$$

то K_3 является ортогональным инвариантом, а если F однородным ортогональным преобразованием может быть приведена к виду

$$F' = a_{11}x'^2 + 2a'_1x' + a, \qquad (18)$$

то K_2 (и K_3) является ортогональным инвариантом.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a - \lambda(x^2 + y^2 + z^2).$$

Производя однородное ортогональное преобразование (12), получим функцию

$$\Phi' = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{31}z'x' + \\ + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a' - \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2), \text{ где } a' = a.$$

По доказанному K_4 — ортогональный инвариант. Используя это по отношению к функции Φ, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22}-\lambda & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}-\lambda & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a' \end{vmatrix}$$

(тождество относительно λ). Приравнивая коэффициенты при λ и λ^2 в левой и правой частях, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{31} & a'_{33} & a'_3 \\ a'_1 & a'_3 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} & a'_2 \\ a'_{32} & a'_{33} & a_3 \\ a'_2 & a'_3 & a' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_1 \\ a'_1 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_2 \\ a'_2 & a' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{33} & a'_3 \\ a'_3 & a' \end{vmatrix}.$$

Предположим теперь, что существует однородное ортогональное преобразование ω_1, при котором функция F переходит в функцию (17). Для функции (17) семиинвариант K_3 имеет значение

$$K_3 = K'_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a' \end{vmatrix}, \qquad (19)$$

равное его значению, вычисленному по формуле (15). Определитель

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a' \end{vmatrix}$$

не меняется, если над переменными x' и y' функции (17) совершить преобразование переноса ω_2: $x'=x''+c_1$, $y'=y''+c_2$ (это следует из теоремы 2 § 142, формула (23), где $c_{11}=c_{22}=1$, $c_{12}=c_{21}=0$).

Пусть ω — произвольное ортогональное преобразование. Рассмотрим ортогональное преобразование $\omega'=\omega\omega_1^{-1}$; тогда $\omega=\omega'\omega_1$. Далее, представим ортогональное преобразование ω' в виде произведения однородного ортогонального преобразования ω_3 на перенос ω_2; тогда

$$\omega=\omega_3\omega_2\omega_1.$$

После однородного ортогонального преобразования ω_1 функция F перейдет в функцию (17) и по доказанному K_3 не изменится и будет равен его значению, вычисленному по формуле (19).

При преобразовании переноса ω_2 функция F' перейдет в функцию

$$F''=a''_{11}x''^2+a''_{22}y''^2+2a''_{12}x''y''+2a''_1x''+2a''_2y''+a''$$

и по доказанному

$$K_3=K'_3=K''_3=\begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_1 \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_2 \\ a''_1 & a''_2 & a'' \end{vmatrix},$$

наконец, после однородного ортогонального преобразования ω_3 функция F'' перейдет в функцию

$$F'''=a'''_{11}x'''^2+a'''_{22}y'''^2+a'''_{33}z'''^2+2a'''_{12}x'''y'''+\ldots$$

и, следовательно, $K_3=K'_3=K''_3=K'''_3=$

$$=\begin{vmatrix} a'''_{11} & a'''_{12} & a'''_1 \\ a'''_{21} & a'''_{22} & a'''_2 \\ a'''_1 & a'''_2 & a''' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'''_{11} & a'''_{13} & a'''_1 \\ a'''_{31} & a'''_{33} & a'''_3 \\ a'''_1 & a'''_3 & a''' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'''_{22} & a'''_{23} & a'''_2 \\ a'''_{32} & a'''_{33} & a'''_3 \\ a'''_2 & a'''_3 & a''' \end{vmatrix}.$$

Аналогично доказывается, что K_2 является ортогональным инвариантом, если функция F однородным ортогональным преобразованием может быть приведена к виду

$$F'=a'_{11}x'^2+2a'_1x'+a'.$$

§ 154. Определение канонического уравнения поверхности второго порядка при помощи инварианта

В таблице 1 указаны необходимые и достаточные признаки того, что поверхность второго порядка является поверхностью I, II, III, IV или V групп:

Таблица 1

Номер группы	Признак группы
I	$I_3 \neq 0$
II	$I_3 = 0 \quad K_4 \neq 0$
III	$I_3 = 0 \quad K_4 = 0 \quad I_2 \neq 0$
IV	$I_3 = 0 \quad K_4 = 0 \quad I_2 = 0 \quad K_3 \neq 0$
V	$I_3 = 0 \quad K_4 = 0 \quad I_2 = 0 \quad K_3 = 0 \quad I_1 \neq 0$

Доказательство. Если поверхность второго порядка задана общим уравнением относительно декартовой прямоугольной системы координат, то, как было показано в § 152, оно при преобразовании данной декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ в другую декартову прямоугольную систему $Ox'y'z'$ может быть преобразовано к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + 2a_3' z' + a = 0,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — корни характеристического уравнения.

Если все они отличны от нуля, то уравнение поверхности переносом осей может быть приведено к простейшему уравнению поверхностей первой группы. Если один из корней характеристического уравнения, например λ_3, равен нулю, но $a_3' \neq 0$, то — к простейшему уравнению поверхностей второй группы.

Если один из корней равен 0, например $\lambda_3 = 0$ и $a_3' = 0$, то к простейшему уравнению поверхностей третьей группы и т. д.

1. Пусть поверхность второго порядка является поверхностью I группы. Тогда, как было показано в § 152, уравнение этой поверхности при помощи преобразования прямоугольной системы координат в прямоугольную систему можно привести к виду

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + D = 0,$$

где $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. В таком случае

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0.$$

2. Пусть поверхность второго порядка является поверхностью II группы. Тогда (§ 152) ее уравнение при помощи преобразования

прямоугольной системы координат в прямоугольную может быть приведено к виду

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2a_3' Z = 0,$$

где λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения ($\lambda_3 = 0$) и $a_3' \neq 0$. Находим

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3' \\ 0 & 0 & a_3' & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_1 \lambda_2 a_3'^2 \neq 0.$$

3. Пусть поверхность второго порядка является поверхностью III группы. Тогда (§ 152) ее уравнение при помощи преобразования прямоугольной системы координат в прямоугольную систему может быть приведено к виду

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + D = 0,$$

где λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения. Отсюда находим

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{vmatrix} = 0.$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0.$$

4. Пусть поверхность второго порядка является поверхностью IV группы. Тогда ее уравнение при помощи преобразования прямоугольной системы координат в прямоугольную систему координат может быть приведено к виду

$$\lambda_1 X^2 + 2a_2' Y = 0,$$

где λ_1 — отличный от нуля корень характеристического уравнения

$(\lambda_2=\lambda_3=0)$, причем $a_2'\neq 0$. Отсюда находим

$$I_3=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$K_4=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_2'\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_2' & 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$I_2=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$K_3=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2'\\ 0 & a_2' & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & a_2'\\ 0 & 0 & 0\\ a_2 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\lambda_1 a_2'^2\neq 0.$$

5. Пусть, наконец, поверхность второго порядка является поверхностью V группы. Тогда ее уравнение при помощи преобразования прямоугольной системы координат в прямоугольную систему координат может быть приведено к виду

$$\lambda_1 X^2+D=0,$$

где λ_1 — отличный от нуля корень характеристического уравнения $(\lambda_2=\lambda_3=0)$. Отсюда

$$I_3=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$K_4=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & D\end{vmatrix}=0,$$

$$I_2=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$K_3=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & D\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & D\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & D\end{vmatrix}=0,$$

$$I_1=\lambda_1\neq 0.$$

Необходимость признаков доказана. Так как эти признаки попарно несовместимы, то они и достаточны.

Теорема 2. I. *Если поверхность второго порядка, заданная общим уравнением относительно прямоугольной системы координат, яв-*

ляется поверхностью I *группы, то ее простейшее уравнение имеет вид*

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{K_4}{I_3} = 0,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — *корни характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0.$$

II. *Если поверхность второго порядка является поверхностью* II *группы, то ее простейшее уравнение имеет вид*

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}\, Z = 0,$$

где λ_1 *и* λ_2 — *отличные от нуля корни характеристического уравнения.*

III. *Если поверхность второго порядка является поверхностью* III *группы, то ее простейшее уравнение имеет вид*

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0,$$

где λ_1 *и* λ_2 — *отличные от нуля корни характеристического уравнения.*

IV. *Если поверхность второго порядка является поверхностью* IV *группы, то ее простейшее уравнение имеет вид*

$$I_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\, Y = 0.$$

V. *Наконец, если поверхность второго порядка является поверхностью* V *группы, то ее простейшее уравнение имеет вид**

$$I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0.$$

Доказательство. I. Если поверхность второго порядка является поверхностью I группы, то ее каноническое уравнение имеет вид

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + D = 0,$$

где

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 \neq 0.$$

* В случаях IV и V инвариант I_1 равен отличному от нуля корню характеристического уравнения.

Находим

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 D = I_3 D,$$

следовательно, $D = \frac{K_4}{I_3}$.

II. Если поверхность второго порядка является поверхностью II группы, то ее каноническое уравнение имеет вид

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2a_3' Z = 0,$$

где λ_1 и λ_2 — отличные от нуля корни характеристического уравнения и $a_3' \neq 0$. Отсюда находим

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3' \\ 0 & 0 & a_3' & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_1\lambda_2 a_3'^2 = -I_2 a_3'^2,$$

следовательно, $a_3' = \pm\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}$.

Аналогично доказываются остальные утверждения теоремы.

Теорема 3. *В таблице 2 даны необходимые и достаточные признаки каждого из семнадцати классов поверхностей второго порядка.*

Доказательство необходимости. В этом параграфе было доказано, что если относительно декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ поверхность второго порядка задана общим уравнением, то преобразованием данной системы координат $Oxyz$ в декартову прямоугольную $O'XYZ$ данное уравнение можно преобразовать к одному из следующих простейших уравнений:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{K_4}{I_3} = 0, \quad \text{если } I_3 \neq 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}\, Z = 0, \quad \text{если } I_3 = 0 \;\; K_4 \neq 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0, \quad \text{если } I_3 = 0 \;\; K_4 = 0 \;\; I_2 \neq 0 \qquad \text{(III)}$$

$$\lambda_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\, Y = 0, \quad \text{если } I_3 = 0 \;\; K_4 = 0 \;\; I_2 = 0 \;\; K_3 \neq 0 \qquad \text{(IV)}$$

$$\lambda_1 X^2 + \frac{K_2}{\lambda_1} = 0, \quad \text{если } I_3 = 0 \;\; K_4 = 0 \;\; I_2 = 0 \;\; K_3 = 0 \;\; I_1 \neq 0. \qquad \text{(V)}$$

Во всех этих уравнениях λ_i — отличные от нуля корни характеристического уравнения, а инварианты I_i и K_i вычисляются по формулам, указанным в § 153.

Таблица 2

№	Название поверхности	Признак
1	Эллипсоид	$I_2>0 \quad I_1I_3>0 \quad K_4<0$
2	Мнимый эллипсоид	$I_2>0 \quad I_1I_3>0 \quad K_4>0$
3	Мнимый конус	$I_2>0 \quad I_1I_3>0 \quad K_4=0$
4	Однополостный гиперболоид	$I_3\neq 0$, $K_4>0$ и или $I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$
5	Двуполостный гиперболоид	$I_3\neq 0$, $K_4<0$ и или $I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$
6	Конус второго порядка	$I_3\neq 0$, $K_4=0$ и или $I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$
7	Эллиптический параболоид	$I_3=0$, $K_4<0$
8	Гиперболический параболоид	$I_3=0$, $K_4>0$
9	Эллиптический цилиндр	$I_3=0 \quad K_4=0 \quad I_2>0 \quad I_1K_3<0$
10	Мнимый эллиптический цилиндр	$I_3=0 \quad K_4=0 \quad I_2>0 \quad I_1K_3>0$
11	Две мнимые пересекающиеся плоскости	$I_3=0 \quad K_4=0 \quad I_2>0 \quad K_3=0$
12	Гиперболический цилиндр	$I_3=0 \quad K_4=0 \quad I_2<0 \quad K_3\neq 0$
13	Две пересекающиеся плоскости	$I_3=0 \quad K_4=0 \quad I_2<0 \quad K_3=0$
14	Параболический цилиндр	$I_3=0 \quad K_4=0 \quad I_2=0 \quad K_3\neq 0$
15	Две параллельные плоскости	$I_3=0 \quad K_4=0 \quad I_2=0 \quad K_3=0 \quad K_2<0$
16	Две мнимые параллельные плоскости	$I_3=0 \quad K_4=0 \quad I_2=0 \quad K_3=0 \quad K_2>0$
17	Две совпадающие плоскости	$I_3=0 \quad K_4=0 \quad I_2=0 \quad K_3=0 \quad K_2=0$

1°. Если уравнение (I) является уравнением эллипсоида, то числа λ_1, λ_2 и λ_3 одного знака, а число $\frac{K_4}{I_3}$ имеет знак, им противоположный. Но так как $I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, то $K_4<0$, и далее,

$$I_2=\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2>0, \quad I_1I_3=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3>0.$$

2°. Если уравнение (I) является уравнением мнимого эллипсоида, то все числа λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{K_4}{I_3}$ одного знака; так как $I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, то $K_4>0$. Соотношения $I_2>0$ и $I_1I_3>0$ доказываются так же, как и в 1°.

3°. Если уравнение (I) является уравнением мнимого конуса, то λ_1, λ_2, λ_3 одного знака, а $\frac{K_4}{I_3}=0$, откуда $K_4=0$; неравенства $I_2>0$, $I_1I_3>0$ получаются так же, как и в 1°.

4°. Если уравнение (I) является уравнением однополостного гиперболоида, то из чисел λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{K_4}{I_3}$ два положительны, а два отрицательны; если, например, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, $\frac{K_4}{I_3} < 0$, то $I_3 < 0$, $K_4 > 0$ и если, например, $I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0$, то $I_1 I_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ имеет знак, противоположный знаку $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Докажем, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant 0$ (тогда $I_1 I_3 \leqslant 0$). В самом деле, если бы мы имели $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$, то $-\lambda_3 > \lambda_1 + \lambda_2$, $-\lambda_3\lambda_1 > \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2$, $\quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1^2 < 0$, $\quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 < 0$ вопреки предположению. Тот же результат ($I_3 \neq 0$, $K_4 > 0$, или $I_2 \leqslant 0$, или $I_1 I_3 \leqslant 0$) получим, предположив, что $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$, $\frac{K_4}{I_3} > 0$. Выкладки рекомендуется произвести читателю самостоятельно.

5°. Если уравнение (I) является уравнением двуполостного гиперболоида, то два из корней λ_1, λ_2, λ_3 имеют одинаковый знак с $\frac{K_4}{I_3}$, а третий корень — знак, им противоположный. Пусть, например, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\frac{K_4}{I_3} > 0$, $\lambda_3 < 0$. Тогда $K_4 < 0$, $I_3 < 0$, а то, что или $I_2 \leqslant 0$, или $I_1 I_3 \leqslant 0$, доказывается так же, как в случае 4°.

6°. Если уравнение (I) является уравнением конуса второго порядка, то $\frac{K_4}{I_3} = 0$, откуда $K_4 = 0$; $I_3 \neq 0$, и далее, два из корней λ_1, λ_2, λ_3 имеют одинаковый знак, а третий — знак, им противоположный. Отсюда, как и в случае 4°, доказывается, что или $I_2 \leqslant 0$, или $I_1 I_3 \leqslant 0$.

Перейдем к исследованию поверхностей второго порядка II группы.

7°. Если уравнение (II) является уравнением эллиптического параболоида, то λ_1 и λ_2 в уравнении (II) — числа одного знака, а, значит, $I_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$ и из уравнения (II) следует, что $K_4 < 0$ $\left(\text{число } -\frac{K_4}{I_2} \text{ под радикалом в уравнении (II) положительно}\right)$.

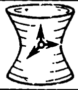
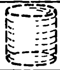
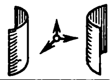
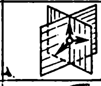
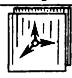
8°. Если же уравнение (II) является уравнением гиперболического параболоида, то числа λ_1 и λ_2 разных знаков, значит, $I_2 = \lambda_1\lambda_2 < 0$, и из условия $-\frac{K_4}{I_2} > 0$ находим $K_4 > 0$.

Рассмотрение остальных случаев по существу уже было сделано в теореме 3 § 143.

Достаточность всех признаков доказывается методом от противного (эти признаки взаимно исключают друг друга).

Результаты предыдущих исследований помещены в табл. 3.

Таблица 3

Место центров	Признак места центров	Номер класса	Признак класса	Поверхность	Название	Простейшее уравнение	Каноническое уравнение
Точка	$I_3 \neq 0$	1	$I_2>0, I_1I_3>0, K_4<0$		Эллипсоид	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+\frac{K_4}{I_3}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$
		2	$I_2>0, I_1I_3>0, K_4>0$		Мнимый эллипсоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$
		3	$I_2>0, I_1I_3>0, K_4=0$		Мнимый конус		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
		4	$I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$, $K_4>0$		Однополостный гиперболоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$
		5	$I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$, $K_4<0$		Двуполостный гиперболоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$
		6	$I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$, $K_4=0$		Конус второго порядка		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Нет центра	$I_3=0, K_4\neq 0$	7	$K_4<0$		Эллиптический параболоид	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}\,z=0$	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$ $p>0; q>0$
		8	$K_4>0$		Гиперболический параболоид		$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0$ $p>0; q>0$
Прямая	$I_3=0, K_4=0, I_2\neq 0$	9	$I_2>0, I_1K_3<0$		Эллиптический цилиндр	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{K_3}{I_2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$
		10	$I_2>0, I_1K_3>0$		Мнимый эллиптический цилиндр		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$
		11	$I_2>0, K_3=0$		Две мнимые пересекающ. плоскости		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
		12	$I_2<0, K_3\neq 0$		Гиперболический цилиндр		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$
		13	$I_2<0, K_3=0$		Две пересекающиеся плоскости		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
Нет центра	$I_3=0, K_4=0, I_2=0, K_3\neq 0$	14			Параболический цилиндр	$\lambda_1x^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\,y=0$	$x^2-2py=0$
Плоскость	$I_3=0, K_4=0, I_2=0, K_3=0$	15	$K_2<0$		Две параллельные плоскости	$\lambda_1x^2+\frac{K_2}{I_1}=0$	$x^2-a^2=0$ $a\neq 0$
		16	$K_2>0$		Две мнимые параллельные плоскости		$x^2+a^2=0$ $a\neq 0$
		17	$K_2=0$		Две совпадающие плоскости		$x^2=0$

Класс поверхности второго порядка I группы можно определить и не решая характеристического уравнения, воспользовавшись следующей теоремой Декарта: если все корни уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

с действительными коэффициентами являются вещественными числами, то число положительных корней этого уравнения равно числу перемен знаков в последовательности

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

коэффициентов этого уравнения.

Так как корни характеристического уравнения

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$$

всегда действительны, то этим правилом можно пользоваться для определения знаков коэффициентов простейшего уравнения

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2+\frac{K_4}{I_3}=0$$

поверхностей I группы.

Если поверхность принадлежит ко II и III группам, то один из корней характеристического уравнения равен нулю, а два других — корни квадратного уравнения. В случае, если поверхность принадлежит к IV или V группе, ее простейшее уравнение находится без решения характеристического уравнения. Поэтому теорему Декарта естественно применять лишь по отношению к поверхностям I группы. В соответствии с этой теоремой число положительных корней характеристического уравнения равно числу перемен знаков в последовательности

$$1,\ -I_1,\ I_2,\ -I_3.$$

Замечание. Если в n-мерном евклидовом пространстве * задана поверхность второго порядка ** уравнением

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_ix_k+2\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+a=0,$$

то ортогональным преобразованием это уравнение можно привести к одному

* n-мерным евклидовым пространством будем называть совокупность всех конечных упорядоченных последовательностей чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, каждую такую упорядоченную последовательность будем называть «точкой», а числа x_i — ее координатами. См. В. А. Ильин и Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. М., „Наука“, 1965, гл. XIV, § 1, п. 4.

** То есть множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

из следующих $2n+1$ простейших уравнений:

$$\lambda_1 X_1^2+\lambda_2 X_2^2+\ldots+\lambda_n X_n^2+\frac{K_{n+1}}{I_n}=0, \text{ если } I_n\neq 0, \tag{I}$$

$$\lambda_1 X_1^2+\lambda_2 X_2^2+\ldots+\lambda_{n-1} X_{n-1}^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_{n+1}}{I_{n-1}}}X_n=0, \tag{II}$$

$$\text{если } I_n=0,\quad K_{n+1}\neq 0,$$

$$\lambda_1 X_1^2+\lambda_2 X_2^2+\ldots+\lambda_{n-1} X_{n-1}^2+\frac{K_n}{I_{n-1}}=0, \text{ если } I_n=0,\ K_{n+1}=0,\ I_{n-1}\neq 0 \tag{III}$$

и т. д.

$$\lambda_1 X_1^2+\frac{K_2}{I_1}=0, \text{ если } I_n=0,\ K_{n+1}=0,\ I_{n-1}=0,\ \ldots,\ I_2=0,\ K_3=0,$$

$$I_1\neq 0, \tag{2n—1}$$

где λ_i в каждом случае — отличные от нуля корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

I_n — определитель матрицы (a_{ik}), I_{n-1} — сумма диагональных миноров $n-1$ порядка определителя I_n, I_{n-2} — сумма диагональных миноров $n-2$ порядка определителя I_n и т. д., наконец, $I_1=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$. Далее,

$$K_{n+1}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a \end{vmatrix},$$

а K_n, K_{n-1}, K_{n-2}, ... получаются из выражений для I_{n-1}, I_{n-2}, I_{n-3}, ... окаймлением определителей, входящих в выражения для I_k соответствующими коэффициентами линейной формы $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ и свободным членом a уравнения поверхности *.

§ 155. Центр поверхности второго порядка

Определение. *Центром поверхности второго порядка называется центр симметрии этой поверхности.*

Теорема 1. *Пусть относительно общей декартовой системы координат задана поверхность второго порядка общим уравнением*

$$\Phi=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+$$
$$+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0. \tag{1}$$

* См. Г. Е. Шилов. Введение в теорию линейных пространств. М., Гостехиздат, 1956, гл. II, § 77, стр. 218—233.

Для того чтобы начало координат было центром этой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы в ее уравнении отсутствовали члены с x, y и z в первой степени, т. е. чтобы

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

иначе, чтобы уравнение (1) *имело вид*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + a = 0. \qquad (2)$$

Доказательство необходимости. Предположим, что начало координат является центром поверхности (1). Возьмем на поверхности (1) произвольную точку $M(x, y, z)$. Ее координаты будут удовлетворять уравнению (1), а так как начало координат является центром симметрии поверхности (1), то уравнению (1) будут удовлетворять и координаты точки $M'(-x, -y, -z)$, симметричной точке M относительно начала координат, т. е.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx - \\ - 2a_1x - 2a_2y - 2a_3z + a = 0. \qquad (3)$$

Из этого соотношения и из соотношения (1) находим

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек поверхности (1). Предположим, что хотя бы одно из чисел a_1, a_2, a_3 не равно нулю. Тогда все точки поверхности лежат в плоскости

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0.$$

Это может быть тогда и только тогда, когда уравнение (1) определяет две плоскости, совпадающие с плоскостью

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0.$$

На основании теоремы § 140, п. 3, левая часть уравнения (1) разлагается в произведение двух линейных относительно x, y, z множителей, одним из которых является форма $a_1x + a_2y + a_3z$:

$$\Phi = (a_1x + a_2y + a_3z)(Ax + By + Cz + D).$$

Плоскость, заданная уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

на основании сделанного выше замечания должна совпадать с плоскостью $a_1x + a_2y + a_3z = 0$, значит,

$$A:B:C = a_1:a_2:a_3, \quad D = 0$$

и потому

$$\Phi = k(a_1x + a_2y + a_3z)^2.$$

Мы приходим к противоречию с тем, что в уравнении (1) хотя бы один из коэффициентов при x, y или z в первой степени отличен от нуля.

Теорема 2. *Если относительно общей декартовой системы координат поверхность второго порядка задана общим уравнением*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0, \qquad (4)$$

то координаты x_0, y_0, z_0 *ее центра определяются из системы*

$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1&=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2&=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3&=0, \end{aligned} \qquad (5)$$

причем в случае несовместности этой системы поверхность не имеет центра.

Доказательство. Произведем параллельный перенос данной декартовой системы координат, при котором новым началом координат будет точка $O'(x_0, y_0, z_0)$. Обозначая старые координаты произвольной точки M через x, y, z, а новые ее координаты — через x', y', z', будем иметь

$$x=x'+x_0,\quad y=y'+y_0,\quad z=z'+z_0,$$

и уравнение (1) примет вид

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{23}y'z'+2_{31}z'x'+ \\ +2(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1)x'+2(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2)y'+ \\ +2(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_3)z'+\Phi(x_0, y_0, z_0)=0,$$

где $\Phi(x_0, y_0, z_0)$ — результат подстановки координат x_0, y_0, z_0 точки O' в левую часть уравнения (1).

На основании теоремы 1 точка $O'(x_0, y_0, z_0)$ будет центром поверхности (1) тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1&=0,\\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2&=0,\\ a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_3&=0. \end{aligned}$$

§ 156. Классификация поверхностей второго порядка по характеру места центров

Пусть поверхность второго порядка задана общим уравнением

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0 \qquad (1)$$

относительно общей декартовой системы координат.

Рассмотрим матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3\end{pmatrix}.$$

В таблице даны необходимые и достаточные признаки характера места центров поверхности, заданной уравнением (1).

Таблица

Ранг A	Ранг A*	Характер места центров
3	3	точка
2	3	нет центра
2	2	прямая
1	2	нет центра
1	1	плоскость

В самом деле, если каждое из уравнений (5) § 155 является уравнением первой степени, т. е. в каждом из уравнений (5) хотя бы один из коэффициентов при x, y или z не равен нулю, то табл. 1 сразу следует из § 83 о взаимном расположении трех плоскостей.

Впрочем, эта таблица следует и из общей теории систем линейных уравнений*.

Теорема. *Классификация поверхностей второго порядка по группам* (I)—(V) (теорема 2, § 152) *совпадает с классификацией поверхностей второго порядка по характеру их места центров, иначе по рангам матриц:*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \text{ и } A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3\end{pmatrix}.$$

Предполагается, что поверхность второго порядка задана общим уравнением относительно общей декартовой системы координат.

Доказательство. Обозначим через B матрицу квадратичной формы, входящей в левую часть каждого из простейших уравнений (I)—(V) поверхности второго порядка (теорема 2, § 152):

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Тогда $B=C'AC$, где C — матрица из коэффициентов при X, Y, Z в преобразовании

$$\begin{aligned} x&=c_{11}X+c_{12}Y+c_{13}Z+c_1,\\ y&=c_{21}X+c_{22}Y+c_{23}Z+c_2,\\ z&=c_{31}X+c_{32}Y+c_{33}Z+c_3,\end{aligned}$$

* См. Г. Е. Шилов. Введение в теорию линейных пространств. М., Гостехиздат, 1956, гл. 3, § 22, стр. 60.

выражающем координаты x, y, z точки в данной системе $Oxyz$ через координаты X, Y, Z той же точки в системе $O'XYZ$ (уже прямоугольной), в которой уравнение поверхности имеет простейший вид (I)—(V).

Так как

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

невырожденная матрица, то ранги матриц A и B равны между собой.

Для поверхностей I группы $\operatorname{Rg} B=3$, значит, и $\operatorname{Rg} A=3$. Для поверхностей II и III групп $\operatorname{Rg} B=2$, значит, и $\operatorname{Rg} A=2$. Для поверхностей IV и V групп $\operatorname{Rg} B=1$, значит, и $\operatorname{Rg} A=1$.

Далее, если $\operatorname{Rg} A=3$ (т. е. поверхность принадлежит к I группе), то и $\operatorname{Rg} A^*=3$.

Если поверхность принадлежит к III или V группам, то, составляя систему уравнений (5) § 155, определяющую координаты центра поверхности для простейших уравнений (III) и (V), убедимся, что эта система совместна (причем для поверхностей III группы местом центров является ось $O'Z$, а для поверхностей V группы — плоскость $O'ZY$). Значит, для поверхностей III и V групп система (5) также совместна, а потому на основании теоремы Кронекера — Капелли* $\operatorname{Rg} A=\operatorname{Rg} A^*$. Поэтому для поверхностей III группы $\operatorname{Rg} A=\operatorname{Rg} A^*=2$, а для поверхностей V группы $\operatorname{Rg} A=\operatorname{Rg} A^*=1$.

Наконец, для поверхностей II и IV групп система (5), составленная для их простейших уравнений, несовместна, т. е. эти поверхности не имеют центра. Значит, несовместна и сама система (5), следовательно, $\operatorname{Rg} A^*>\operatorname{Rg} A$. Но для поверхности II группы $\operatorname{Rg} A=2$, значит, $\operatorname{Rg} A^*=3$. Для поверхности IV группы $\operatorname{Rg} A=1$, значит, $\operatorname{Rg} A^*=2$.

Поверхность второго порядка, имеющая единственный центр, называется **центральной**. Центральными поверхностями являются эллипсоиды — действительные и мнимые, гиперболоиды — однополостные и двуполостные и конусы — действительные и мнимые. Для того чтобы поверхность, заданная общим уравнением относительно общей декартовой системы координат, была центральной, необходимо и достаточно, чтобы определитель квадратичной формы, входящей в левую часть уравнения этой поверхности, был отличен от нуля:

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0.$$

* См. Г. Е. Шилов. Введение в теорию линейных пространств. М., Гостехиздат, 1956, гл. 3, § 22, стр. 60.

§ 157. Конические и цилиндрические поверхности второго порядка, заданные общим уравнением

1. Конические поверхности

Определение конических и цилиндрических поверхностей было дано в § 25. Мы перенесем эти определения и на поверхности второго порядка. Если поверхность второго порядка является конической, то ее вершина — центр этой поверхности, причем лежит он на самой поверхности.

Теорема 1. *Для того чтобы поверхность второго порядка, заданная относительно общей декартовой системы координат общим уравнением*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+\\+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0, \qquad (1)$$

являлась уравнением конической поверхности с вершиной в начале координат, необходимо и достаточно, чтобы в этом уравнении отсутствовали как члены с первыми степенями координат, так и свободный член.

Доказательство необходимости. Пусть уравнение (1) является уравнением конической поверхности с вершиной в начале координат. Так как вершина конической поверхности лежит на этой поверхности, т. е. начало координат лежит на данной поверхности, то из уравнения (1) следует, что $a=0$. Далее, уравнения (5) § 155, определяющие координаты центра поверхности, должны удовлетворяться при $x=y=z=0$. Отсюда $a_1=a_2=a_3=0$, и уравнение (1) принимает вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx=0. \qquad (2)$$

Доказательство достаточности очевидно, так как уравнение (2) однородное относительно x, y, z. Уравнение (2) после приведения к простейшему виду таково:

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2=0,$$

значит, среди поверхностей второго порядка коническими поверхностями являются следующие:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (мнимый конус второго порядка)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (действительный конус второго порядка)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (две мнимые пересекающиеся плоскости)

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (две действительные пересекающиеся плоскости)

$x^2=0$ (две совпадающие плоскости)

Остальные поверхности второго порядка не конические, так как они либо не имеют центра, а если имеют его, то он не лежит на рассматриваемой поверхности.

Теорема 2. *Для того чтобы поверхность второго порядка, заданная относительно общей декартовой системы координат общим уравнением* (1), *была конической, необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix}$$

были равны между собой.

Доказательство необходимости. Пусть поверхность второго порядка, заданная уравнением (1) относительно общей декартовой системы координат $Oxyz$, является уравнением конической поверхности. Пусть $O'(c_1, c_2, c_3)$ — вершина этой поверхности. Произведем перенос системы $Oxyz$ так, чтобы новым началом координат стала вершина O' данной конической поверхности. Тогда уравнение (1) примет вид

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{23}y'z'+2a_{31}z'x'=0,$$

а матрица B преобразуется в следующую:

$$B'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Но при преобразовании переноса

$$x=x'+c_1,\quad y=y'+c_2,\quad z=z'+c_3 \tag{3}$$

ранг матрицы B не меняется; это следует из формулы (5) § 153 и того обстоятельства, что матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

фигурирующая в равенстве (5) § 153, здесь, т. е. при переносе (3), принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а следовательно является невырожденной. Но ранги матриц A и B' равны между собой, следовательно, равны и ранги матриц A и B.

Доказательство достаточности. Предположим, что ранги матриц A и B равны между собой. Тогда равны и ранги матриц

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{pmatrix},$$

значит, поверхность имеет центр (или даже прямую центров, или плоскость центров). Произведем перенос осей $Oxyz$ так, чтобы новым началом координат в новой системе координат $O'x'y'z'$ стал центр поверхности. Тогда коэффициенты при x', y', z' в преобразованном уравнении обратятся в нуль и оно примет вид

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{23}y'z'+2a_{31}z'x'+F(x_0, y_0, z_0)=0,$$

где $F(x_0, y_0, z_0)$ есть результат подстановки координат x_0, y_0, z_0 центра O' поверхности в левую часть уравнения (1) этой поверхности. Как мы уже указывали, ранг матрицы B при переносе не изменится. Но B преобразуется при этом в матрицу:

$$B'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}.$$

Ранги матриц B' и B равны, значит, равны ранги матриц A и B'. Но если $F(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, то ранг матрицы B' больше ранга матрицы A, поэтому $F(x_0, y_0, z_0)=0$. Значит, центр $O'(x_0, y_0, z_0)$ поверхности второго порядка лежит на самой этой поверхности. Но этим свойством обладают только конические поверхности второго порядка.

2. Цилиндрические поверхности

В § 25 было доказано, что поверхность является цилиндрической тогда и только тогда, когда существует система координат, в которой уравнение поверхности имеет вид

$$F(x, y)=0.$$

При этом образующие поверхности параллельны оси Oz, а ее направляющей является, например, линия, определяемая уравнениями

$$F(x, y)=0, \quad z=0$$

(см. теоремы 1 и 2 § 25).

Теорема 3. *Для того чтобы поверхность второго порядка, заданная общим уравнением*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0 \qquad (4)$$

относительно общей декартовой системы координат, была цилиндрической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0,\quad K_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}=0.$$

Доказательство необходимости. Если уравнение (4) является уравнением цилиндрической поверхности, то преобразованием системы координат $Oxyz$ в систему $Ox'y'z'$ уравнение (4) может быть преобразовано к виду

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_1x'+2a'_2y'+a=0. \qquad (5)$$

Но так как при преобразовании системы координат координаты x, y, z точки M в системе $Oxyz$ через координаты x', y', z' той же точки M в системе $Ox'y'z'$ выражаются соотношениями вида

$$x=c_{11}x'+c_{12}y'+c_{13}z', \\ y=c_{21}x'+c_{22}y'+c_{23}z' \\ z=c_{31}x'+c_{32}y'+c_{33}z',$$

то, обозначая через Δ определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix},$$

будем иметь

$$I'_3=I_3\Delta^2,\quad K'_4=K_4\Delta^2$$

(см. соотношения (4′) и (5′) § 153). Вычисляя I'_3 и K'_4 по уравнению (5), получим

$$I_3=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,\quad K'_4=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 & a'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'_1 & a'_2 & 0 & a \end{vmatrix}=0,$$

значит, и $I_3=0$, и $K_4=0$.

Доказательство достаточности. Пусть $I_3=0$ и $K_4=0$. Преобразуя данное уравнение (4) к простейшему виду, в силу соотношений $I_3=0$, $K_4=0$ заключаем, что и для простейшего уравнения поверхности будем иметь $I_3' = 0$, $K_4' = 0$. Значит, поверхность, заданная уравнением (4), принадлежит к III, IV и V группам, а все эти поверхности цилиндрические*.

Таким образом, цилиндрическими поверхностями второго порядка являются все поверхности групп III, IV и V и только эти поверхности:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (действительный эллиптический цилиндр)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (мнимый эллиптический цилиндр)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (две мнимые пересекающиеся плоскости)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (гиперболический цилиндр)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (две действительные пересекающиеся плоскости)

$x^2 = 2py$ (параболический цилиндр)

$x^2 = a^2$ (две параллельные плоскости)

$x^2 = -a^2$ (две мнимые параллельные плоскости)

$x^2 = 0$ (две совпадающие плоскости).

3. Распадение поверхности второго порядка

Теорема 4. *Для того чтобы поверхность второго порядка, заданная уравнением*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0,$$

распадалась на две плоскости, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix}$$

был меньше или равен 2.

Доказательство. Канонические уравнения поверхностей второго порядка, распадающиеся на две плоскости, имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad x^2 - a^2 = 0, \quad x^2 - a^2 = 0, \quad x^2 = 0.$$

Составляя матрицу M для каждого из этих уравнений, убедимся в том, что для четырех первых уравнений $\operatorname{Rg} M = 2$, а для последнего $\operatorname{Rg} M = 1$. Для канонических уравнений всех остальных

* Соотношения $I_3 = K_4 = 0$ инвариантны относительно преобразования системы координат.

поверхностей $\operatorname{Rg} M > 2$. При переходе к любой общей системе координат ранг матрицы M не изменяется, так как она умножается слева и справа на невырожденную матрицу. Следовательно, условие $\operatorname{Rg} M \leqslant 2$ является необходимым и достаточным условием распадения поверхности второго порядка на две плоскости в любой общей декартовой системе координат (а не только в канонической).

§ 158. Пересечение поверхности второго порядка с прямой. Асимптотические направления, асимптотический конус и конус асимптотических направлений

Предположим, что относительно общей декартовой системы координат поверхность второго порядка задана общим уравнением

$$\begin{gathered} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Будем исследовать пересечение этой поверхности с прямой, уравнения которой возьмем в параметрической форме:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt. \tag{2}$$

Здесь (x_0, y_0, z_0) — некоторая точка прямой, а $\{l, m, n\}$ — ее направляющий вектор.

Подставляя в левую часть уравнения (1) вместо x, y и z их выражения из формул (2), получим следующее уравнение относительно t:

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{3}$$

где

$$A = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} B = l(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1) + \\ + m(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2) + \\ + n(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3), \end{gathered} \tag{5}$$

$$C = F(x_0, y_0, z_0) \tag{6}$$

($F(x_0, y_0, z_0)$ — результат подстановки в левую часть уравнения (1) вместо x, y, z координат точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$).

Координаты точек пересечения прямой (2) с поверхностью (1) получим при тех значениях t, которые являются корнями уравнения (3).

Если в уравнении (3) коэффициент при t^2 отличен от нуля, то уравнение (3) имеет два корня, значит, прямая (2) пересекает поверхность (1) в двух точках.

Если же

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl = 0, \tag{7}$$

то прямая с направляющим вектором $\{l, m, n\}$ либо пересекает поверхность (1) только в одной точке, либо не пересекает ее, либо входит в состав поверхности (1). В этом случае говорим, что направляющий вектор $\{l, m, n\}$ имеет асимптотическое направление относительно поверхности (1). Итак, координаты векторов, имеющих асимптотическое направление, определяются из соотношения (7).

Уравнение

$$\varphi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0 \tag{8}$$

как однородное уравнение относительно x, y, z определяет коническую поверхность (действительную или мнимую), образованную прямыми, проходящими через начало координат. Координаты x, y, z точки M, лежащей на образующей конуса, являются координатами вектора $\overrightarrow{OM}$. Таким образом, образующие конуса (8) — прямые, имеющие асимптотические направления поверхности (1) и обратно: любое асимптотическое направление является направлением одной из образующих конуса (8). Конус, определяемый уравнением (8), а также любой конус, полученный переносом этого конуса, называется *конусом асимптотических направлений* поверхности (1) (вершина конуса, заданного уравнением (8), находится в начале координат).

Асимптотическим конусом поверхностей второго порядка, имеющих центр, называется конус асимптотических направлений, вершина которого лежит в центре поверхности.

Таким образом, асимптотический конус эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; мнимого эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$; мнимого конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

т. е. является мнимым.

Асимптотический конус однополостного и двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

а асимптотический конус конуса второго порядка совпадает с ним самим.

Далее, так как гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, \ q > 0)$$

не имеет центра, то у него согласно данному выше определению нет асимптотического конуса. Один из конусов асимптотических направлений выражается уравнением

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0,$$

и он распадается на две пересекающиеся плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \text{ и } \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

Все конусы асимптотических направлений получаются всеми переносами этой пары плоскостей.

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0)$$

также не имеет асимптотического конуса, а все его конусы асимптотических направлений получаются всеми переносами двух мнимых пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0, \text{ или } \frac{x}{\sqrt{p}}+i\frac{y}{\sqrt{q}}=0,\ \frac{x}{\sqrt{p}}-i\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

У эллиптического цилиндра (действительного или мнимого) и у пары мнимых пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

асимптотический конус состоит из двух мнимых пересекающихся плоскостей

$$\frac{x}{a}\pm i\frac{y}{b}=0.$$

У гиперболического цилиндра и пары пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

асимптотический конус распадается на две действительные пересекающиеся плоскости

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \text{ и } \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

У параболического цилиндра $y^2=2px$ конусом асимптотических направлений является плоскость $y=0$ — плоскость симметрии этой поверхности, проходящая через ось направляющей: $y=2px$, $z=0$, и любая из плоскостей, ей параллельная. Наконец, у пары параллельных или пары совпадающих плоскостей асимптотический конус совпадает с плоскостью центров поверхности.

Конус асимптотических направлений (для поверхностей, имеющих центр) получается из асимптотического конуса любым переносом.

Пусть поверхность, заданная общим уравнением

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0 \qquad (9)$$

относительно общей декартовой системы координат, имеет единственный центр. Замечая, что I_3 и K_4 — инварианты переноса общей декартовой системы координат, заключаем, что уравнение данной поверхности после параллельного переноса осей координат, при котором новым началом координат будет центр поверхности, примет вид

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{23}y'z'+2a_{31}z'x'+\frac{K_4}{I_3}=0.$$

Значит, уравнение

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=\frac{K_4}{I_3}$$

является уравнением асимптотического конуса центральной поверхности, заданной общим уравнением (9) относительно общей декартовой системы координат.

§ 159. Диаметральная плоскость, сопряженная данному неасимптотическому направлению. Особые направления относительно поверхности второго порядка

Теорема 1. *Геометрическим местом середин параллельных хорд поверхности второго порядка является плоскость. Эта плоскость называется диаметральной плоскостью данной поверхности, сопряженной хордам данного направления. Если поверхность второго порядка задана относительно общей декартовой системы координат общим уравнением*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0, \qquad (1)$$

а ее хорды коллинеарны вектору $\{l, m, n\}$ *(не имеющему асимптотического направления), то уравнение диаметральной плоскости, сопряженной этим хордам, имеет вид*

$$l(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1)+ \\ +m(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2)+ \\ +n(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3)=0. \qquad (2)$$

Доказательство этой теоремы такое же, как и теоремы 1 § 146.

Из уравнения (2) следует, что все диаметральные плоскости поверхностей второго порядка содержат геометрическое место ее центров, если оно не пусто, так как уравнение (2) удовлетворяется, если

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Вектор $\boldsymbol{a} = \{l, m, n\}$ некомпланарен диаметральной плоскости, сопряженной его направлению, так как главный вектор плоскости (2) имеет координаты

$$\boldsymbol{a}^* = \{a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n,\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n,\ a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n\},$$

откуда

$$l(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n) + m(a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n) + n(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n) = \\ = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{23}mn + 2a_{31}nl \neq 0.$$

Теорема 2. *Если существует вектор $\boldsymbol{b}$ неасимптотического направления, компланарный диаметральной плоскости, сопряженной хордам поверхности второго порядка, коллинеарным вектору $\boldsymbol{a}$, то вектор $\boldsymbol{a}$ будет компланарен диаметральной плоскости, сопряженной хордам этой поверхности, коллинеарным вектору $\boldsymbol{b}$.*

Доказательство. Пусть вектор $\boldsymbol{b} = \{l_1, m_1, n_1\}$ компланарен плоскости (2) и не имеет асимптотического направления поверхности (1). Тогда

$$l_1(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n) + m_1(a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n) + \\ + n_1(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n) = 0,$$

или

$$l(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1) + m(a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1) + \\ + n(a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1) = 0,$$

а это и означает, что вектор $\{l, m, n\}$ компланарен диаметральной плоскости, сопряженным хордам, коллинеарным вектору $\{l_1, m_1, n_1\}$.

Из доказанной теоремы следует, что если диаметральные плоскости δ_1 и δ_2, сопряженные направлениям двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ (не имеющих асимптотического направления) пересекаются, и прямая их пересечения не имеет асимптотического направления относительно поверхности второго порядка, то диаметральная плоскость, сопряженная направлению хорд поверхности, параллельных этой прямой, компланарна векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Мы получаем в этом случае три диаметральные плоскости, обладающие тем свойством, что любая из них сопряжена с направлением прямой, по которой пересекаются две другие.

Замечание. При определении центра поверхности второго порядка, асимптотических направлений, диаметральной плоскости и при доказательстве ряда теорем, связанных с этими определениями, предполагалось использование «мнимых» точек.

Как указывалось по отношению к линиям второго порядка, можно включить и рассматриваемую поверхность второго порядка, заданную общим уравнением $\Phi=0$ относительно общей декартовой системы координат, в семейство поверхностей $\Phi=\text{const}$. Для эллипсоида и мнимого конуса такое семейство будет включать в себя все эллипсоиды, гомотетичные друг другу, причем центром гомотетии будет их общий центр. Для гиперболоидов и конуса второго порядка семейство $\Phi=\text{const}$ будет состоять из всех соасимптотических гиперболоидов, т. е. гомотетичных между собой однополостных и двуполостных гиперболоидов и их общего асимптотического конуса. Для параболоидов семейство $\Phi=\text{const}$ будет состоять из поверхностей, полученных параллельным переносом данной поверхности вдоль ее оси симметрии. Для остальных поверхностей семейства $\Phi=\text{const}$ будут характеризоваться их сечениями плоскостью, не параллельной образующим (т. е. дело сведется к аналогичному замечанию, сделанному выше для линий второго порядка).

Все определения и доказательства теорем для семейств $\Phi=\text{const}$ могут быть проведены с использованием только точек трехмерного евклидова пространства и потому все они инвариантны относительно преобразования системы координат, так как аналитические выводы, относящиеся к центру, асимптотическим направлениям, диаметральным плоскостям, не зависят от свободного члена общего уравнения поверхности.

Определение. *Особым направлением относительно поверхности второго порядка называется направление прямой, параллельной всем диаметральным плоскостям этой поверхности.*

Теорема 3. *Пусть относительно общей декартовой системы координат задана поверхность второго порядка общим уравнением*

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+\\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда если это уравнение является уравнением центральной поверхности (т. е. поверхности, имеющей единственный центр), то у нее нет особых направлений. Все остальные поверхности имеют особые направления. Для того чтобы ненулевой вектор $\{l_0, m_0, n_0\}$ имел особое направление относительно поверхности (3), *необходимо и достаточно, чтобы его координаты удовлетворяли соотношениям*

$$\begin{aligned} a_{11}l_0+a_{12}m_0+a_{13}n_0&=0,\\ a_{21}l_0+a_{22}m_0+a_{23}n_0&=0,\\ a_{31}l_0+a_{32}m_0+a_{33}n_0&=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Из уравнения (2) следует, что вектор $\{l_0, m_0, n_0\}$ имеет особое направление тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$l_0(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n) + m_0(a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n) + \\ + n_0(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n) = 0,$$

или

$$(a_{11}l_0 + a_{12}m_0 + a_{13}n_0)\,l + (a_{21}l_0 + a_{22}m_0 + a_{23}n_0)\,m + \\ + (a_{31}l_0 + a_{32}m_0 + a_{33}n_0)\,n = 0, \tag{5}$$

где $\{l, m, n\}$ — любой вектор, не имеющий асимптотического направления. Так как всегда можно выбрать три неколлинеарных вектора $\{l_i, m_i, n_i\}$, имеющих относительно поверхности (3) неасимптотическое направление, то однородное относительно l, m, n уравнение (5) имеет три линейно независимых решения $\{l_i, m_i, n_i\}$, а это возможно тогда и только тогда, когда все коэффициенты при l, m и n в уравнении (5) обращаются в нуль; таким образом, соотношения (4) выполняются. Если поверхность имеет единственный центр, то

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

и, значит, система (4) не имеет ненулевых решений l_0, m_0, n_0, особых направлений нет.

Для всех остальных поверхностей $I_3 = 0$ и система (4) имеет ненулевые решения.

Если ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

равен 2 (поверхности II и III групп), то система (4) имеет ненулевые решения l_0, m_0, n_0, но не имеет двух линейно независимых решений. Это значит, что поверхности II и III групп имеют лишь одно особое направление. Составляя систему (4) для простейших уравнений этих поверхностей, убедимся, что особое направление — это направление оси $O'Z$ в простейших уравнениях этих поверхностей.

Если $\operatorname{Rg} A = 1$, то система (4) имеет два линейно независимых решения $\{l_0', m_0', n_0'\}$ и $\{l_0'', m_0'', n_0''\}$. Все решения системы (4) являются всеми линейными комбинациями этих двух. Это значит, что для поверхностей IV и V групп существует плоскость, такая, что любая прямая, параллельная этой плоскости, имеет особое направление и этими направлениями исчерпываются все особые направления этих поверхностей (это плоскость $YO'Z$ в простейших уравнениях (IV) и (V)).

§ 160. Касательная плоскость

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на поверхности второго порядка, заданной относительно общей декартовой системы координат уравнением

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0, \qquad (1)$$

называется *неособой*, если среди трех чисел:

$$a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1, \quad a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2, \\ a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_3$$

есть хотя бы одно, не равное нулю*.

Таким образом, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на поверхности второго порядка, является особой тогда и только тогда, когда является ее центром (см. § 155), иначе, когда поверхность коническая, а точка M_0 — вершина этой поверхности (§ 157, п. 1).

Определение. *Касательной прямой к поверхности второго порядка в данной на ней неособой точке называется прямая, проходящая через эту точку, пересекающая поверхность второго порядка в двукратной точке или являющаяся прямолинейной образующей поверхности.*

Теорема. *Касательные прямые к поверхности второго порядка в данной на ней неособой точке* (x_0, y_0, z_0) *лежат в одной плоскости, называемой касательной плоскостью к поверхности в рассматриваемой точке. Уравнение касательной плоскости имеет вид*

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+ \\ +F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt \qquad (3)$$

параметрические уравнения прямой, проходящей через неособую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности второго порядка, заданной уравнением (1). Подставляя в уравнение (1)

$$x_0+lt, \quad y_0+mt, \quad z_0+nt$$

вместо x, y и z, получим

$$(a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{12}lm+2a_{23}mn+2a_{31}nl)\,t^2+ \\ +2\left[F'_x(x_0, y_0, z_0)\,l+F'_y(x_0, y_0, z_0)\,m+F'_z(x_0, y_0, z_0)\,n\right]t+ \\ +2F(x_0, y_0, z_0)=0. \qquad (4)$$

* Эти числа являются значениями в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ половин частных производных по x, y и z от левой части уравнения (1); в дальнейшем будем обозначать их соответственно $F'_x(x_0, y_0, z_0)$, $F'_y(x_0, y_0, z_0)$, $F'_z(x_0, y_0, z_0)$, а в соответствии с этим левую часть уравнения (1) будем обозначать через $2F$.

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности (1), то $2F(x_0, y_0, z_0)=0$, и из уравнения (4) находим $t=0$ (это значение t соответствует точке M_0). Для того чтобы точка пересечения прямой (3) с поверхностью (1) была двойной, или чтобы прямая (3) целиком лежала на поверхности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)\,l+F'_y(x_0, y_0, z_0)\,m+F'_z(x_0, y_0, z_0)\,n=0; \tag{5}$$

если при этом $a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{12}lm+2a_{23}mn+2a_{31}nl\neq 0$, то точка пересечения прямой (3) с поверхностью (1) двойная, а если $a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{12}lm+2a_{23}mn+2a_{31}nl=0$, то прямая (3) целиком лежит на поверхности (1).

Из соотношения (5) и соотношений (3) следует, что координаты x, y, z любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на любой касательной к поверхности (1), удовлетворяют уравнению

$$\begin{gathered}F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+\\ +F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0. \qquad (6)\end{gathered}$$

Обратно, если координаты какой-нибудь точки $M(x, y, z)$ отличной от M_0, удовлетворяют этому уравнению, то координаты $l=x-x_0$, $m=y-y_0$, $n=z-z_0$ вектора $\overrightarrow{M_0M}$ удовлетворяют соотношению (5), а значит, прямая M_0M — касательная к рассматриваемой поверхности.

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — неособая точка поверхности (1), то среди чисел

$$F'_x(x_0, y_0, z_0),\quad F'_y(x_0, y_0, z_0),\quad F'_z(x_0, y_0, z_0)$$

есть по крайней мере одно, не равное нулю; значит, (6) — уравнение первой степени относительно x, y, z — это уравнение плоскости, касательной к поверхности (1) в данной на ней неособой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Замечание. Левая часть уравнения (1) получается из квадратичной формы от четырех аргументов:

$$\begin{gathered}2F=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+\\ +2a_1xt+2a_2yt+2a_3zt+at^2,\end{gathered}$$

если считать, что $t=1$. Эту квадратичную форму можно записать в виде

$$\begin{gathered}2F=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1t)\,x+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2t)\,y+\\ +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3t)\,z+(a_1x+a_2y+a_3z+at)\,t,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}2F=xF'_x(x, y, z, t)+yF'_y(x, y, z, t)+zF'_z(x, y, z, t)+\\ +tF'_t(x, y, z, t), \qquad (7)\end{gathered}$$

где F'_x, F'_y, F'_z, F'_t — половины частных производных по x, y, z и t от функции $2F$.

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности (1), то $2F(x_0, y_0, z_0)=0$, и из тождества (7) находим

$$x_0F'_x(x_0, y_0, z_0, t_0)+y_0F'_y(x_0, y_0, z_0, t_0)+z_0F'_z(x_0, y_0, z_0, t_0)+\\ +t_0F'_t(x_0, y_0, z_0, t_0)=0$$

($t_0=1$). Отсюда следует, что уравнение (6) касательной плоскости к поверхности (1) в данной на ней неособой точке можно записать в виде

$$xF'_x(x_0, y_0, z_0, t_0)+yF'_y(x_0, y_0, z_0, t_0)+zF'_z(x_0, y_0, z_0, t_0)+\\ +tF'_t(x_0, y_0, z_0, t_0)=0, \tag{8}$$

где $t=t_0=1$.

Исходя из канонических уравнений поверхностей второго порядка и уравнения (8) легко составить уравнения касательных плоскостей к эллипсоиду, гиперболоидам, параболоидам и т. д. в данной на них точке (x_0, y_0, z_0): касательная плоскость к эллипсоиду

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1,$$

к однополостному и двуполостному гиперболоиду

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=\pm 1,$$

к конусу в точке (x_0, y_0, z_0), не являющейся его вершиной,

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=0,$$

к эллиптическому и гиперболическому параболоиду

$$\frac{x_0x}{p}\pm\frac{y_0y}{q}=z+z_0 \text{ и т. д.}$$

§ 161. Пересечение касательной плоскости с поверхностью второго порядка

Примем неособую точку O поверхности второго порядка за начало координат общей декартовой системы координат, оси Ox и Oy расположим в плоскости, касательной к поверхности в точке O. Тогда в общем уравнении поверхности

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+\\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0 \tag{1}$$

свободный член равен нулю: $a=0$, а уравнение плоскости, касающейся поверхности в начале координат, должно иметь вид

$$z=0.$$

Согласно уравнению (6) § 160 уравнение плоскости, касательной к поверхности (1) в начале координат, имеет вид

$$a_1x+a_2y+a_3z=0,$$

и так как это уравнение должно быть эквивалентно уравнению $z=0$, то $a_1=a_2=0$, $a_3\neq 0$.

Итак, в выбранной системе координат уравнение поверхности (1) имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_3z=0. \quad (2)$$

Обратно, если $a_3\neq 0$, то это уравнение является уравнением поверхности, проходящей через начало координат O, а плоскость $z=0$ — касательная к этой поверхности в точке O. Уравнения линии, по которой касательная плоскость к поверхности в точке O пересекает поверхность (2), имеют вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0, \quad z=0.$$

Если

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,$$

то это две мнимые пересекающиеся прямые; если $\delta<0$, то две действительные прямые; если $\delta=0$, но хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равен нулю, то линия пересечения — две совпадающие прямые. Наконец, если $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$, то плоскость $z=0$ входит в состав данной поверхности, а сама поверхность распадается, следовательно, на пару плоскостей.

§ 162. Эллиптические, гиперболические или параболические точки поверхности второго порядка

В настоящем параграфе рассмотрим только действительные и нераспадающиеся поверхности второго порядка.

Пусть O — неособая точка такой поверхности. Так как поверхность мы предполагаем нераспадающейся, то касательная плоскость к поверхности в точке O не может входить в состав самой поверхности. Могут представиться три случая.

1°. *Касательная плоскость к поверхности в точке O пересекает ее по двум мнимым пересекающимся прямым. В этом случае точка O называется эллиптической точкой поверхности.*

2°. *Касательная плоскость к поверхности в точке O пересекает ее по двум действительным прямым, пересекающимся в точке касания. В этом случае точку O будем называть гиперболической.*

3°. *Касательная плоскость к поверхности в точке O пересекает ее по двум совпадающим прямым. В этом случае точку O будем называть параболической.*

Теорема. *Пусть поверхность второго порядка задана общим уравнением*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0 \qquad (1)$$

относительно общей декартовой системы координат $Oxyz$ и пусть данное уравнение (1) является уравнением действительной нераспадающейся поверхности второго порядка. Тогда если

$$K_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}<0,$$

то все точки поверхности — эллиптические, если $K_4>0$, то все точки поверхности — гиперболические, и если $K_4=0$, то — параболические.

Доказательство. Введем новую систему координат $Mx'y'z'$, выбирая за начало координат любую неособую точку M данной поверхности и располагая оси Mx' и My' в плоскости, касательной к поверхности в точке M. Уравнение (1) при переходе к системе координат $Mx'y'z'$ преобразуется в уравнение вида (см. § 161)

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{23}y'z'+2a'_{31}z'x'+2a'_3z'=0, \qquad (2)$$

где $a'_3\neq 0$. Вычислим определитель K'_4 для этого уравнения:

$$K'_4=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_3 \\ 0 & 0 & a'_3 & 0 \end{vmatrix}=-a'^2_3\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}.$$

Так как при переходе от одной общей декартовой системы координат к другой знак K_4 не меняется, то знаки K_4 и K'_4 одинаковы, а, значит, знаки

$$K_4 \text{ и } \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}$$

противоположны. Поэтому если $K_4<0$, то

$$\delta=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}>0$$

и, как следует из § 161, касательная плоскость к поверхности в точке M пересекает поверхность по двум мнимым пересекающимся прямым, т. е. M — эллиптическая точка.

Если $K_4 > 0$, то $\delta < 0$, касательная плоскость к поверхности в точке M пересекает ее по двум прямым, пересекающимся в точке M; точка M — гиперболическая.

Если, наконец, $K_4 = 0$, то и $\delta = 0$; касательная плоскость к поверхности в точке M пересекает ее по паре совпадающих прямых; точка M — параболическая.

Ограничиваясь, как уже было указано, действительными нераспадающимися поверхностями второго порядка и вычисляя K_4, например, по каноническим уравнениям этих поверхностей, убедимся в том, что:

1) эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид состоят из эллиптических точек;

2) двуполостный гиперболоид и гиперболический параболоид состоят из гиперболических точек;

3) действительный конус второго порядка (вершина исключается), эллиптический (действительный), гиперболический и параболический цилиндры состоят из параболических точек.

§ 163. Простейшие уравнения поверхностей второго порядка в общей декартовой системе координат

В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые общие декартовы системы координат, в которых уравнение поверхности второго порядка имеет простейший вид.

1°. Эллипсоид. Примем за начало координат центр O эллипсоида, за ось Ox — произвольную ось, проходящую через его центр O, за ось Oy — произвольную ось, проходящую через точку O и лежащую в диаметральной плоскости, сопряженной направлению оси Ox, и, наконец, за ось Oz — ось, являющуюся пересечением диаметральной плоскости, сопряженной направлению оси Ox, с диаметральной плоскостью, сопряженной направлению оси Oy. Оси Ox и Oy лежат в диаметральной плоскости, сопряженной направлению оси Oz (теорема 2 § 159).

В выбранной системе координат в уравнении эллипсоида будут отсутствовать члены с первыми степенями координат x, y, z (так как центр поверхности является началом координат), а также члены с произведениями xy, yz и zx. В самом деле, уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению оси Oz, т. е. вектору $\{0, 0, 1\}$, имеет вид

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

(уравнение (2) § 159), а с другой стороны, это уравнение должно иметь вид

$$z = 0 \text{ (плоскость } xOy).$$

Отсюда

$$a_{31}=a_{32}=0, \quad a_{33}\neq 0.$$

Аналогично доказывается, что $a_{12}=0$ (и что $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$). Итак, уравнение эллипсоида в выбранной системе координат

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a=0. \tag{1}$$

Выберем теперь в качестве единичной точки оси Ox любую из двух точек пересечения этой оси с эллипсоидом. Аналогично произведем выбор единичных точек на осях Oy и Oz. Тогда координаты точек $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ должны удовлетворять уравнению (1):

$$a_{11}+a=0, \quad a_{22}+a=0, \quad a_{33}+a=0,$$

и уравнение (1) принимает вид

$$-ax^2-ay^2-az^2+a=0,$$

или $(a\neq 0)$

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Обратно, в любой общей декартовой системе координат уравнение $x^2+y^2+z^2=1$ является уравнением эллипсоида, причем начало координат — это центр поверхности, а каждая координатная плоскость сопряжена к направлению координатной оси, не лежащей в этой плоскости.

В самом деле, поверхность, заданная уравнением $x^2+y^2+z^2-1=0$, действительная, имеет единственный центр (он совпадает с началом координат) и $K_4<0$.

Но единственная поверхность, обладающая этими свойствами, — эллипсоид.

2°. Однополостный гиперболоид. Примем за начало координат центр O поверхности, за ось Oz — произвольную ось, проходящую через центр O, не имеющую асимптотического направления и не пересекающую поверхность (из всех прямых, проходящих через центр поверхности, таким свойством обладают только прямые, проходящие внутри асимптотического конуса однополостного гиперболоида).

Если принять за плоскость xOy диаметральную плоскость, сопряженную оси Oz, то уравнение однополостного гиперболоида в такой системе будет иметь вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a=0,$$

причем a_{33} и a — числа одного знака, так как Oz не пересекает поверхность. Далее,

$$K_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=aa_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

и так как для однополостного гиперболоида $K_4 > 0$, а $aa_{33} > 0$, то

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Отсюда следует, что любой ненулевой вектор $\{l, m, 0\}$, компланарный плоскости xOy, не имеет асимптотического направления, так как уравнение

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

в силу того, что $\delta > 0$, имеет только нулевое решение.

Отсюда следует, что если ось Oy выбрать в диаметральной плоскости, сопряженной оси Oz, за ось Ox — прямую, по которой пересекаются диаметральные плоскости, сопряженные направлениям осей Oz и Oy (а они пересекаются, так как первая из них проходит через ось Oy, но в ней не лежит ось Oz, а вторая проходит через ось Oz и в ней не лежит ось Oy), то, как и в случае эллипсоида, получим систему координат, в которой начало координат является центром поверхности, а каждая из плоскостей yOz, zOx и xOy — диаметральной плоскостью, сопряженной соответственно направлению оси Ox, Oy и Oz.

В такой системе координат уравнение однополостного гиперболоида имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a = 0. \qquad (2)$$

Здесь a_{33} и a — числа одного знака, а так как

$$K_4 = a_{11}a_{22}a_{33}a > 0,$$

то числа a_{11} и a_{22} также одного знака, причем знак чисел a_{11} и a_{22} противоположен знаку чисел a_{33} и a, в противном случае (2) являлось бы уравнением мнимой поверхности. Отсюда сразу следует, что ось Ox пересекает поверхность в двух точках E_1 и E_1', а ось Oy также пересекает поверхность (2) в двух точках E_2 и E_2'.

Прямая, по которой пересекаются плоскости

$$x = \sqrt{-\frac{a}{a_{11}}}, \qquad y = \sqrt{-\frac{a}{a_{22}}},$$

касательные к поверхности (2) в точках E_1 и E_2, пересекает поверхность (2) в двух точках E и E', так как, подставляя эти значения x и y в уравнение (2), получим уравнение $a_{33}z^2 = a$, имеющее два действительных и различных корня. Выбирая любую из точек E или E' за единичную точку системы координат, заключаем, что точка E_1 пересечения оси Ox с поверхностью имеет координаты $1, 0, 0$, т. е. является единичной точкой этой оси, а точка E_2 пересечения оси Oy с поверхностью имеет координаты $0, 1, 0$, т. е. является единичной точкой оси Oy.

Таким образом, из уравнения (2) имеем

$$a_{11}+a=0, \quad a_{22}+a=0, \quad a_{11}+a_{22}+a_{33}+a=0.$$

Отсюда

$$a_{11}=-a, \quad a_{22}=-a, \quad a_{33}=a$$

и уравнение (2) принимает вид

$$-ax^2-ay^2+az^2+a=0,$$

или

$$x^2+y^2-z^2=1. \tag{II}$$

Обратно, уравнение (II) в любой системе координат является уравнением однополостного гиперболоида, центр которого совпадает с началом координат, ось Oz не пересекает поверхность, оси Ox и Oy пересекают ее (а плоскость xOy пересекает поверхность по эллипсу $x^2+y^2=1$, $z=0$) и, наконец, каждая из плоскостей yOz, zOx и xOy является диаметральной плоскостью, сопряженной соответственно направлениям осей Ox, Oy, Oz.

В самом деле, уравнение $x^2+y^2-z^2-1=0$ является уравнением действительной невырождающейся поверхности второго порядка, имеющей единственный центр, для которой $K_4>0$. Всеми этими свойствами обладает только однополостный гиперболоид.

3°. Двуполостный гиперболоид. Выберем за начало координат центр поверхности, за ось Oz — любую прямую, проходящую через центр поверхности и пересекающую ее (т. е. идущую внутри асимптотического конуса), а за плоскость xOy — диаметральную плоскость, сопряженную оси Oz. Так же, как в случае однополостного гиперболоида, доказывается, что в плоскости xOy нет ни одного асимптотического направления, следовательно, всегда можно выбрать оси Ox и Oy, так что каждая координатная плоскость является диаметральной плоскостью, сопряженной направлению той оси, которая не лежит в этой плоскости. Уравнение двуполостного гиперболоида в этой системе координат будет иметь вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a=0. \tag{3}$$

Однако теперь числа a_{33} и a разных знаков, а числа a_{11} и a_{22} одинаковых знаков. Знак чисел a_{11} и a_{22} противоположен знаку числа a_{33}, так как если бы числа a_{11}, a_{22} и a_{33} имели одинаковый знак, а a — знак, им противоположный, то уравнение (3) было бы уравнением эллипсоида. Таким образом, числа a_{11}, a_{22}, a одного знака, а число a_{33} имеет знак, им противоположный. Не нарушая общности, можно считать, что

$$a_{11}>0, \quad a_{22}>0, \quad a>0, \quad a_{33}<0.$$

Примем за единичную точку двуполостного гиперболоида (3) точку, в которой пересекаются следующие три плоскости:

1) плоскость

$$z = \sqrt{-\frac{a}{a_{33}}},$$

касательная к поверхности (3) в одной из точек пересечения оси Oz с этой поверхностью;

2) плоскость

$$\sqrt{a_{22}}\,y - \sqrt{-a_{33}}\,z = 0,$$

касательная к асимптотическому конусу поверхности (3) вдоль образующей этого конуса, лежащей в плоскости yOz;

3) плоскость

$$\sqrt{a_{11}}\,x - \sqrt{-a_{33}}\,z = 0,$$

касательная к асимптотическому конусу поверхности (3) вдоль образующей этого конуса, лежащей в плоскости xOz. Тогда

$$1 = \sqrt{-\frac{a}{a_{33}}}, \quad \sqrt{a_{22}} = \sqrt{-a_{33}}, \quad \sqrt{a_{11}} = \sqrt{-a_{33}},$$

откуда

$$a_{33} = -a, \quad a_{22} = a, \quad a_{11} = a,$$

и уравнение (3) примет вид

$$ax^2 + ay^2 - az^2 + a = 0,$$

или

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1. \tag{III}$$

Обратно, это уравнение является уравнением двуполостного гиперболоида, центром поверхности является начало координат, координатные плоскости yOz, zOx и xOy — диаметральные плоскости, сопряженные соответственно направлениям осей Ox, Oy и Oz. Ось Oz пересекает поверхность в двух точках, а плоскость xOy поверхность (III) не пересекает. Единичная точка указана выше.

В самом деле, уравнение (III) является уравнением действительной поверхности второго порядка, имеющей единственный центр, причем существует плоскость, проходящая через этот центр и не пересекающая поверхность. Этими свойствами из всех поверхностей второго порядка обладает только двуполостный гиперболоид.

Можно рассуждать иначе: поверхность (III) имеет действительный асимптотический конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и для нее $K_4 < 0$. Этими двумя свойствами обладает только двуполостный гиперболоид.

4°. Эллиптический параболоид. Выберем любую точку O поверхности за начало координат, за ось Oz — любую ось, проходящую через точку O и имеющую особое направление относительно поверхности, а за плоскость xOy плоскость, касательную к поверхности в точке O.

Заметим, что ни одна из касательных плоскостей к эллиптическому параболоиду не содержит особого направления этой поверхности. В самом деле, касательная плоскость к эллиптическому параболоиду в любой его точке имеет с эллиптическим параболоидом только одну общую точку O — точку касания. Любая прямая, проходящая через точку O и лежащая в плоскости, касающейся эллиптического параболоида в точке O, пересекает поверхность эллиптического параболоида в двукратной точке O, а прямая особого направления, проходящая через точку O, пересекает эллиптический параболоид в одной (не кратной) точке O. Отсюда следует, что выбранная нами ось Oz не лежит в плоскости xOy, касающейся эллиптического параболоида в точке O.

Так как уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной общим уравнением в ее неособой точке, в случае если эта точка является началом координат, имеет вид

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0,$$

и эта плоскость принята нами за плоскость xOy, то $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$. Кроме того, $a = 0$, так как начало координат лежит на поверхности. Далее, так как вектор $\{0, 0, 1\}$ имеет особое направление, то система

$$a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n = 0,$$
$$a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n = 0,$$
$$a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n = 0$$

должна удовлетворяться при $l = 0$, $m = 0$, $n = 1$ откуда

$$a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0.$$

Уравнение поверхности в выбранной системе координат имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_3z = 0,$$

где $a_3 \neq 0$.

Так как для эллиптического параболоида $K_4 < 0$ и $a_3 \neq 0$, то

$$K_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \end{vmatrix} = -a_3^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} < 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Отсюда следует, что в касательной плоскости xOy к поверхности эллиптического параболоида нет ненулевых векторов $\{l, m, 0\}$, имеющих асимптотическое направление. Выберем за ось Oy произвольную ось, лежащую в касательной плоскости к поверхности. Диаметральная плоскость сопряженная направлению оси Oy, имеет уравнение

$$a_{21}x + a_{22}y = 0,$$

значит, проходит через ось Oz. Примем за ось Ox прямую, по которой пересекаются касательная плоскость к поверхности в точке O с диаметральной плоскостью, сопряженной оси Oy. (Плоскость yOz будет тогда диаметральной плоскостью, сопряженной направлению оси Ox.)

Так как плоскость xOz является диаметральной плоскостью, сопряженной оси Oy то уравнение

$$a_{21}x + a_{22}y = 0$$

должно приводиться к уравнению $y=0$, т. е. $a_{12}=0$, $a_{22} \neq 0$. Итак, в выбранной системе координат уравнение эллиптического параболоида имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_3z = 0. \tag{4}$$

Из условия $K_4 < 0$ и того, что $a_3 \neq 0$, находим $a_{11}a_{22} > 0$, так что a_{11} и a_{22} — числа одного знака. Не нарушая общности, можно считать, что знак a_3 противоположен знаку a_{11} и a_{22} (в противном случае достаточно изменить направление оси Oz на противоположное).

Рассмотрим сечение эллиптического параболоида плоскостью $z=1$:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_3 = 0, \quad z = 1.$$

Это уравнения эллипса. Пусть P — одна из точек пересечения этого эллипса с его диаметром $y=0$, $z=1$, а Q — одна из точек пересечения с другим диаметром $x=0$, $z=1$. Принимая параллельные проекции точек P и Q на оси Ox и Oy по направлению оси Oz за единичные точки осей Ox и Oy, получим

$$a_{11} + 2a_3 = 0, \quad a_{22} + 2a_3 = 0.$$

Теперь уравнение (4) принимает вид

$$x^2 + y^2 - z = 0. \tag{IV}$$

Обратно, уравнение (IV) является уравнением эллиптического параболоида, так как поверхность (IV) не имеет центра и для уравнения (IV) $K_4 < 0$. Плоскость xOy—касательная к поверхности (IV) в начале координат. Ось Oz имеет особое направление. Плоскости xOz и yOz — две диаметральные плоскости, сопряженные соответственно направлениям осей Oy и Ox.

5°. Гиперболический параболоид. Как и в случае эллиптического параболоида примем за начало координат любую точку O поверхности, за ось Oz — ось, проходящую через эту точку и имеющую особое направление относительно поверхности, а за плоскость xOy — плоскость, касательную к гиперболическому параболоиду в точке O.

Как и в случае эллиптического параболоида, докажем, что ось Oz не лежит в плоскости xOy (здесь любая прямая, проходящая через точку O и лежащая в касательной плоскости к гиперболическому параболоиду в точке O, либо пересекает его в двукратной точке, либо лежит на поверхности; прямая же, проходящая через точку O и имеющая особое направление, пересекает поверхность в одной простой точке O).

Уравнение гиперболического параболоида в выбранной системе координат имеет вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_3z=0, \quad \text{где } a_3\neq 0; \qquad \text{(A)}$$

однако здесь

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}<0$$

и в плоскости xOy имеются асимптотические направления относительно рассматриваемой поверхности. Отметим, что эти асимптотические направления являются направлениями действительных прямых

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2, \quad z=0, \qquad \text{(B)}$$

по которым поверхность гиперболического параболоида пересекается касательной плоскостью в точке O.

Выберем в качестве оси Oy ось, лежащую в касательной плоскости к поверхности (A) в точке $O(0, 0, 0)$ и не совпадающую ни с одной из прямых (B), т. е. не имеющую асимптотического направления относительно поверхности. Диаметральная плоскость, сопряженная оси Oy относительно поверхности (A), будет иметь уравнение

$$a_{21}x+a_{22}y=0,$$

и если ее принять за ось Ox, то будем иметь $a_{12}=0$, $a_{22}\neq 0$, и уравнение (A) примет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_3z=0.$$

Здесь (в силу условия $K_4>0$) a_{11} и a_{22} — числа разных знаков.

Выбором единичной точки системы координат последнее уравнение можно привести к виду

$$x^2-y^2=z. \qquad \text{(V)}$$

Обратно, уравнение (V) является уравнением гиперболического параболоида, так как эта поверхность не имеет центра, и для уравнения (V) $K_4>0$. Начало координат лежит на поверхности. Ось Oz имеет особое направление. Плоскости xOz и yOz — диаметральные плоскости, сопряженные соответственно осям Oy и Ox. Плоскость xOy является плоскостью, касательной к поверхности в начале координат.

Читателю рекомендуется сформулировать и решить аналогичные вопросы для следующих поверхностей второго порядка:

$$x^2+y^2-z^2=0$$

— действительный невырождающийся конус второго порядка;

$$x^2+y^2=1, \qquad x^2-y^2=1, \qquad y^2=x$$

— действительные нераспадающиеся цилиндрические поверхности второго порядка.

§ 164. Главные направления поверхности второго порядка

Определение. *Главным направлением поверхности второго порядка называется неасимптотическое направление этой поверхности, обладающее тем свойством, что диаметральная плоскость, сопряженная этому направлению, перпендикулярна к нему.*

Пусть поверхность второго порядка задана общим уравнением

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+ \\ +2a_2y+2a_3z+a=0 \tag{1}$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат.

Пусть вектор $a=\{l, m, n\}$ имеет главное направление. Тогда он будет коллинеарен вектору

$$a^*=\{a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n, \quad a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n, \quad a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n\},$$

нормальному к диаметральной плоскости, сопряженной направлению вектора a (§ 159, теорема 1).

Следовательно,

$$\begin{aligned} a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n&=\lambda l, \\ a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n&=\lambda n, \\ a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n&=\lambda n, \end{aligned} \tag{2}$$

или

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)l+a_{12}m+a_{13}n&=0, \\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)m+a_{23}n&=0, \\ a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda)n&=0, \end{aligned} \tag{2'}$$

и так как вектор $\{l, m, n\}$ ненулевой, то

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

или

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0, \tag{4}$$

где I_1, I_2, I_3 — инварианты ортогонального преобразования (§ 153).

Таким образом, если вектор $a=\{l, m, n\}$ имеет главное направление относительно поверхности (1), то имеют место соотношения (2), где λ — корень характеристического уравнения (3). Этот корень λ характеристического уравнения не равен нулю, так как в противном случае вектор $\boldsymbol{a}$ имел бы относительно поверхности (1) особое, следовательно и асимптотическое, направление.

Обратно, любой ненулевой вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$, координаты которого определены из системы (2), где λ — отличный от нуля корень характеристического уравнения, имеет главное направление относительно поверхности (1). В самом деле, при $\lambda\neq 0$ и $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}\neq 0$ из соотношений (2) следует, что

$$l(a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n)+m(a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n)+n(a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n)= \\ =\lambda(l^2+m^2+n^2)\neq 0,$$

или

$$a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{12}lm+2a_{23}mn+2a_{31}nl\neq 0,$$

т. е. вектор $\boldsymbol{a}$ не имеет асимптотического направления. Соотношения (2) теперь выражают то, что этот вектор ортогонален диаметральной плоскости, сопряженной его направлению.

§ 165. Число главных направлений поверхности второго порядка

Докажем следующие положения.

1°. Если $\lambda=\lambda_1$ — простой корень характеристического уравнения, то система (2) § 164 имеет ненулевое решение, но не может иметь два линейно независимых решения.

В самом деле, если бы система (2) (при $\lambda=\lambda_1$) имела два линейно независимых решения, то ранг определителя $\Delta(\lambda)$ был бы ниже 2 и потому $\Delta'(\lambda_1)=0$, т. е. λ_1 было бы корнем уравнения $\Delta(\lambda)=0$, кратность больше 1.

2°. Если $\lambda_1\neq\lambda_2$, то ненулевые векторы $\boldsymbol{a}_1=\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\boldsymbol{a}_2=\{l_2, m_2, n_2\}$, которые мы получим из системы (2) при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$, ортогональны друг другу.

В самом деле, из соотношений

$$\begin{aligned} a_{11}l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1&=\lambda_1 l_1,\\ a_{21}l_1+a_{22}m_1+a_{23}n_1&=\lambda_1 m_1,\\ a_{31}l_1+a_{32}m_1+a_{33}n_1&=\lambda_1 n_1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} a_{11}l_2+a_{12}m_2+a_{13}n_2&=\lambda_2 l_2,\\ a_{21}l_2+a_{22}m_2+a_{23}n_2&=\lambda_2 m_2,\\ a_{31}l_2+a_{32}m_2+a_{33}n_2&=\lambda_2 n_2 \end{aligned}$$

находим

$$l_2(a_{11}l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1)+m_2(a_{21}l_1+a_{22}m_1+a_{23}n_1)+ \\ +n_2(a_{31}l_1+a_{32}m_1+a_{33}n_1)=\lambda_1(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2),$$

$$l_1(a_{11}l_2+a_{12}m_2+a_{13}n_2)+m_1(a_{21}l_2+a_{22}m_2+a_{23}n_2)+ \\ +n_1(a_{31}l_2+a_{32}m_2+a_{33}n_2)=\lambda_2(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2).$$

Левые части этих равенств тождественны, значит,

$$\lambda_1 (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = \lambda_2 (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2),$$

или

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = 0,$$

и так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$

а это значит, что $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$.

Из доказанного, а также из предыдущего параграфа приходим к следующим выводам.

I. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_3 \neq \lambda_1$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, то поверхность имеет только три попарно перпендикулярных главных направления.

II. Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, то поверхность имеет одно главное направление, соответствующее корню $\lambda = \lambda_3$, и всякое направление, к нему перпендикулярное, также будет главным. В этом случае поверхность второго порядка является поверхностью вращения.

III. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$, то любое направление является главным (сфера).

IV. Если $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_3 = 0$, то поверхность имеет два главных взаимно перпендикулярных направления.

V. Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, то любое направление, перпендикулярное вектору, соответствующему корню λ_3, будет главным (поверхность вращения).

VI. Если $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то имеется одно главное направление, соответствующее корню λ_1.

Диаметральная плоскость, соответствующая главному направлению, называется главной диаметральной плоскостью. Главные диаметральные плоскости — это плоскости симметрии поверхности, а главные направления — это направления прямых, не имеющих асимптотического направления, перпендикулярных к этим плоскостям симметрии.

Замечание. Все центральные поверхности, не являющиеся поверхностями вращения, имеют по три плоскости симметрии, попарно перпендикулярные друг другу, и по три оси симметрии, имеющие главные направления, перпендикулярные к плоскостям симметрии и проходящие через центр поверхности.

Каждая из центральных поверхностей вращения обладает плоскостью симметрии, проходящей через ее центр и перпендикулярной к оси вращения. Кроме того, плоскостями симметрии будут все плоскости, проходящие через ось вращения. Осью симметрии в этом случае будет ось вращения, а также всякая прямая, проходящая через центр поверхности и перпендикулярная к оси вращения. Все оси симметрии идут по главным направлениям.

Эллиптический параболоид, не являющийся параболоидом вращения, и каждый гиперболический параболоид имеют по две перпендикулярные друг к другу плоскости симметрии, являющиеся главными диаметральными плоскостями. Линия их пересечения является осью симметрии поверхности*. В отличие от осей симметрии центральных поверхностей ось симметрии параболоида имеет не главное, а особое направление, причем ось симметрии, являющаяся линией пересечения плоскостей симметрии, пересекает параболоид в одной точке — в его вершине.

Параболоид вращения имеет одну ось симметрии — ось вращения. Всякая плоскость, проходящая через нее, является главной диаметральной плоскостью.

Рассмотрение главных диаметральных плоскостей и осей симметрии для остальных поверхностей второго порядка предоставляется читателю.

§ 166. Определение расположения поверхности второго порядка по отношению к декартовой прямоугольной системе координат

Постановка вопроса о расположении поверхности второго порядка, заданной общим уравнением относительно прямоугольной системы координат, аналогична постановке этого вопроса для линий второго порядка, а именно, помимо канонического уравнения поверхности второго порядка надо знать ту (каноническую) систему координат, в которой уравнение поверхности имеет канонический вид, а для этого необходимо знать новое начало координат этой системы и направления ее осей.

Для центральных поверхностей достаточно найти координаты центра из системы

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 = 0,\\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 = 0,\\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

и координаты векторов, имеющих главные направления, из системы

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\, l + a_{12}m + a_{13}n = 0,\\ a_{21}l + (a_{22} - \lambda)\, m + a_{23}n = 0,\\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33} - \lambda)\, n = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где вместо λ надо подставлять корни характеристического уравнения.

В случае центральных поверхностей вращения достаточно найти координаты центра и координаты направляющего вектора

* Гиперболический параболоид, который пересекается с касательной плоскостью в его вершине по двум взаимно перпендикулярным образующим, имеет эти прямые своими осями симметрии.

оси вращения, соответствующего простому корню характеристического уравнения. В случае сферы достаточно определить координаты ее центра и радиус.

В случае, если общее уравнение поверхности второго порядка является уравнением эллиптического или гиперболического цилиндра, вопрос о расположении решается так: уравнения (1) являются уравнениями места центров (прямая); координаты векторов главных направлений (если данная поверхность не является круговым цилиндром) находятся из системы (2), куда надо подставлять вместо λ отличные от нуля корни характеристического уравнения.

Если рассматриваемое уравнение является уравнением прямого кругового цилиндра, то для определения его расположения достаточно знать уравнения его оси (уравнения (1)) и радиус.

Для нахождения свободного члена D в простейшем уравнении

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + D = 0 \tag{3}$$

эллиптического или гиперболического цилиндра можно и не пользоваться для вычисления D семиинвариантом K_3, т. е. не пользоваться формулой

$$D = \frac{K_3}{I_2}.$$

Число D в простейшем уравнении равно результату подстановки координат любого из центров в левую часть данного уравнения поверхности (это, между прочим, верно по отношению к простейшему уравнению любой из поверхностей, имеющих центр). Координаты же какого-нибудь центра (в случае эллиптического и гиперболического цилиндра) находятся из уравнений (1).

Для параболоидов надо определить координаты вершины O', координаты векторов e_1', e_2', имеющих главные направления, координаты вектора e_3', к ним перпендикулярного, и каноническое уравнение в системе $O'XYZ$, в которой за положительные направления осей $O'X$, $O'Y$ и $O'Z$ взяты соответственно направления векторов e_1', e_2' и e_3'. Для параболоида вращения достаточно определить координаты вершины и координаты вектора, коллинеарного оси вращения.

В отличие от центральных поверхностей при определении направления вектора e_3' нам нужно знать не только прямую, направление которой этот вектор определяет, но и направление того луча этой прямой, который проходит внутри параболы, являющейся сечением параболоида плоскостью XOZ канонической системы координат.

Докажем, что вектор $e_3' = \{l_3, m_3, n_3\}$, координаты которого определяются из системы ($\lambda_3 = 0$)

$$\begin{aligned} a_{11}l + a_{21}m + a_{23}n &= 0, \\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n &= 0, \\ a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

будет направлен внутрь сечения параболоида плоскостью XOZ тогда и только тогда, когда

$$\lambda_1 (a_1 l_3 + a_2 m_3 + a_3 n_3) < 0. \tag{5}$$

В самом деле, будем считать векторы

$$e_1' = \{l_1, m_1, n_1\}, \qquad e_2' = \{l_2, m_2, n_2\}, \qquad e_3' = \{l_3, m_3, n_3\}$$

единичными. Не изменяя начала координат, направим новые оси координат Ox', Oy', Oz' соответственно по этим векторам. Тогда формулы преобразования координат будут иметь вид

$$\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z', \end{aligned}$$

а общее уравнение параболоида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_1x + 2a_2y + \\ + 2a_3z + a = 0$$

примет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + 2a_3'z' + a = 0,$$

где

$$a_3' = a_1 l_3 + a_2 m_3 + a_3 n_3.$$

Далее, при помощи переноса осей мы преобразуем последнее уравнение к простейшему:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2a_3'Z = 0,$$

причем по-прежнему

$$a_3' = a_1 l_3 + a_2 m_3 + a_3 n_3.$$

Сечение параболоида

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2a_3 Z = 0$$

плоскостью XOZ является параболой, уравнения которой

$$\lambda_1 X^2 + 2a_3'Z = 0, \qquad Y = 0.$$

Значит, если $\lambda_1 a_3' < 0$, то ось $O'Z$ направлена внутрь сечения, а если $\lambda_1 a_3' > 0$, то — во внешнюю сторону этого сечения. Для определения знака произведения

$$\lambda_1 a'_3 = \lambda_1 (a_1 l_3 + a_2 m_3 + a_3 n_3)$$

несущественно, будет вектор $e'_3 = \{l_3, m_3, n_3\}$ единичный или нет.

Поэтому окончательно, если

$$\lambda_1 (a_1 l_3 + a_2 m_3 + a_3 n_3) < 0,$$

где координаты вектора $e'_3 = \{l_3, m_3, n_3\}$ определены из системы (4), то вектор e'_3 направлен внутрь параболы, являющейся сечением поверхности

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2a'_3 Z = 0$$

плоскостью $XO'Z$, а если

$$\lambda_1 (a_1 l_3 + a_2 m_3 + a_3 n_3) > 0,$$

то — в противоположную сторону.

Замечание. Обозначим через $\tilde{a}_{ik}$ алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе I_3. Тогда каждый из векторов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \{\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{13}\}, \\ \boldsymbol{q} &= \{\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{23}\}, \\ \boldsymbol{r} &= \{\tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{32}, \tilde{a}_{33}\}, \end{aligned}$$

как это следует из системы (4), будет коллинеарен вектору e'_3. Значит, вектору e'_3 будет коллинеарна и следующая линейная их комбинация:

$$-(a_1\boldsymbol{p} + a_2\boldsymbol{q} + a_3\boldsymbol{r}) = -\{a_1\tilde{a}_{11} + a_2\tilde{a}_{21} + a_3\tilde{a}_{31},$$
$$a_1\tilde{a}_{12} + a_2\tilde{a}_{22} + a_3\tilde{a}_{23}, \; a_1\tilde{a}_{13} + a_2\tilde{a}_{23} + a_3\tilde{a}_{33}\} =$$
$$= \left\{ -\begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix} \right\} = \{A_1, A_2, A_3\},$$

где A_1, A_2, A_3 — алгебраические дополнения элементов a_1, a_2, a_3 в определителе K_4.

Вектор $\{A_1, A_2, A_3\}$ ненулевой (так как в противном случае мы получили бы, что $K_4 = 0$).

Подставляя в выражение

$$\lambda_1 (a_1 l_3 + a_2 m_3 + a_3 n_3)$$

вместо l_3, m_3 и n_3 соответственно A_1, A_2, A_3 и замечая, что

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = K_4$$

(так как алгебраическое дополнение элемента a в определителе K_4 равно $I_3 = 0$), заключаем, что если

$$\lambda_1 K_4 < 0,$$

то вектор

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$

направлен внутрь сечения параболоида

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2a_3' Z = 0$$

плоскостью $XO'Z$, а если $\lambda_1 K_4 > 0$, то — в противоположном направлении.

Для эллиптического параболоида $K_4 < 0$, а корни λ_1 и λ_2 одного знака. Значит, если эти корни положительны, то вектор $\{A_1, A_2, A_3\}$ направлен внутрь указанного сечения, а если — отрицательны, то — наружу. Для гиперболического параболоида λ_1 и λ_2 разных знаков, а $K_4 > 0$. Поэтому считая $\lambda_1 > 0$, заключаем, что вектор $\{A_1, A_2, A_3\}$ направлен внутрь сечения этой поверхности плоскостью $XO'Z$. Вершина параболоида находится так.

Возьмем на поверхности параболоида точку (x, y, z). Координаты вектора, нормального к касательной плоскости в этой точке поверхности, таковы:

$$\begin{aligned} &a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1, \\ &a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2, \\ &a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 \end{aligned}$$

и, значит, точка (x, y, z) будет вершиной поверхности тогда и только тогда, когда эти координаты пропорциональны координатам вектора, коллинеарного особому направлению, т. е.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 &= l_3 t, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 &= m_3 t, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 &= n_3 t. \end{aligned} \tag{6}$$

Умножая эти равенства соответственно на l_3, m_3, n_3 и складывая почленно, в силу соотношений (4) получим

$$a_1 l_3 + a_2 m_3 + a_3 n_3 = t\,(l_3^2 + m_3^2 + n_3^2).$$

Отсюда находим

$$t = \frac{a_1 l_3 + a_2 m_3 + a_3 n_3}{l_3^2 + m_3^2 + n_3^2}. \tag{7}$$

Переписывая уравнение поверхности в виде

$$\begin{aligned} &(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1)\,x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2)\,y + \\ &+ (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3)\,z + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

в силу соотношений (6) получим

$$(l_3 x + m_3 y + n_3 z)\,t + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a = 0. \tag{9}$$

Таким образом, для нахождения координат вершины надо решить *линейную* систему (6), (9).

Предположим, что общее уравнение поверхности второго порядка является уравнением параболического цилиндра. Пусть C — парабола, по которой плоскость, перпендикулярная к образующим параболического цилиндра, пересекает эту поверхность, а π — плоскость, в которой расположена парабола C. Обозначим через $e_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $e_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ векторы, лежащие в плоскости π, первый из которых перпендикулярен к оси параболы C, а второй ей коллинеарен. Обозначим через $e_3 = \{l_3, m_3, n_3\}$ вектор, коллинеарный образующим цилиндра. Будем считать все векторы e_1, e_2, e_3 единичными. Произведем преобразование системы координат: не меняя начала координат O, направим новые оси Ox', Oy', Oz' соответственно по векторам e_1, e_2, e_3. Формулы преобразования координат тогда имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z', \end{aligned}$$

а уравнение параболического цилиндра в системе $Ox'y'z'$ таково:

$$\lambda_1 x'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a = 0, \tag{A}$$

где

$$a_2' = a_1l_2 + a_2m_2 + a_3n_2.$$

Переносом осей координат последнее уравнение приводится к виду

$$\lambda_1 X^2 + 2a_2'Y = 0,$$

причем по-прежнему $a_2' = a_1l_2 + a_2m_2 + a_3n_2$.

Таким образом, если $\lambda_1 a_2' < 0$, или

$$l_1(a_1l_2 + a_2m_2 + a_3n_2) < 0, \tag{10}$$

то вектор $\{l_2, m_2, n_2\}$ направлен по оси параболы внутрь параболы, а если

$$l_1(a_1l_2 + a_2m_2 + a_3n_2) > 0, \tag{11}$$

то — в противоположном направлении.

Остается показать, как находятся векторы e_1, e_2, e_3. Из соотношения (A) следует, что в начальной системе координат $Oxyz$ уравнение всякого параболического цилиндра можно записать в виде

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0.$$

Уравнения

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \qquad 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

являются уравнениями прямолинейной образующей этого цилиндра, и из них мы находим координаты вектора e_3', коллинеарного образующим. Координаты вектора e_1', имеющего главное направление, находим из системы (2), где надо положить $\lambda = I_1$. Вектор e_2' находим как вектор, перпендикулярный к e_1' и e_3'. При исследовании знака произведения

$$I_1 (a_1 l_2 + a_2 m_2 + a_3 n_2)$$

вектор $e_2' = \{l_2, m_2, n_2\}$ можно считать не единичным (так же как и векторы e_1' и e_3').

Зная вектор, имеющий главное направление, можно составить уравнение главной диаметральной плоскости. Уравнение этой плоскости совместно с уравнением самой поверхности определяет прямую, по которой указанная главная диаметральная плоскость пересекает поверхность. Из этих двух уравнений легко найти координаты какой-нибудь одной точки этой прямой.

В заключение отметим, что если общее уравнение поверхности определяет пару плоскостей, то вопрос о ее расположении решается разложением на линейные множители левой части данного уравнения.

§ 167. Примеры и задачи к главе XII

1. Задачи с решениями

Пример 1. Даны эллипсоид

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1 \tag{1}$$

и плоскость

$$3x + 4y + 6z - 12 = 0. \tag{2}$$

Установить, пересекает ли эта плоскость данный эллипсоид (по действительной линии) и в утвердительном смысле найти центр линии сечения.

Решение. Запишем уравнение плоскости (2) в параметрической форме:

$$x = 6u, \qquad y = 6v, \qquad z = 2 - 3u - 4v, \tag{3}$$

или

$$\boldsymbol{r} = \{6u, \; 6v, \; 2-3u-4v\} = \{0, \; 0, \; 2\} + u\,\{6, 0, -3\} + v\,\{0, 6, \; -4\}.$$

Таким образом, u и v — общие декартовы координаты точки M плоскости (2) с началом координат в точке (0, 0, 2) и масштабными векторами $e_1 = \{6, 0, -3\}$ и $e_2 = \{0, 6, -4\}$.

Уравнение линии сечения на плоскости (2) в этой системе координат имеет вид

$$4u^2 + 9v^2 + (2 - 3u - 4v)^2 = 1,$$

или

$$13u^2 + 24uv + 25v^2 - 12u - 16v + 3 = 0.$$

Координаты u, v центра сечения определятся из системы

$$13u+12v-6=0,$$
$$12u+25v-8=0;$$
$$u=\frac{54}{181}, \qquad v=\frac{32}{181}.$$

Из соотношений (3) находим координаты центра M сечения в данной системе координат $Oxyz$:

$$x=\frac{324}{181}, \qquad y=\frac{192}{181}, \qquad z=\frac{72}{181}.$$

Далее, так как

$$\frac{\left(\frac{324}{181}\right)^2}{9}+\frac{\left(\frac{192}{181}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{72}{181}\right)^2}{1}<1,$$

то точка M лежит внутри данного эллипсоида, т. е. сечение является действительной линией, именно — эллипсом в силу того, что

$$I_2=\begin{vmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 25 \end{vmatrix}>0.$$

Заметим, что систему координат $Oxyz$ можно считать общей декартовой.

Пример 2. Даны двуполостный гиперболоид

$$x^2+y^2-z^2=-4 \qquad (1)$$

и плоскость

$$x+y-z+3=0. \qquad (2)$$

Установить, пересекает ли плоскость гиперболоид (по действительной линии) и в утвердительном случае определить вид линии пересечения. Система координат общая декартова.

Решение. Запишем уравнение данной плоскости в параметрической форме

$$x=u, \qquad y=v, \qquad z=u+v+3,$$

или

$$\boldsymbol{r}=\{u,\ v,\ u+v+3\}=\{0,\ 0,\ 3\}+\{1,\ 0,\ 1\}u+\{0,\ 1,\ 1\}v.$$

Значит, u и v — координаты точки M плоскости в общей декартовой системе координат с началом в точке $(0, 0, 3)$ и масштабными векторами $e_1=\{1, 0, 1\}$ и $e_2=\{0, 1, 1\}$.

Уравнение линии сечения в этой системе координат на плоскости (2) имеет вид

$$u^2+v^2-(u+v+3)^2+4=0,$$

или

$$2uv+6u+6v+5=0.$$

Так как

$$I_2<0, \qquad K_3\neq 0,$$

то это уравнение гиперболы.

Замечание. Здесь, как и в предыдущем примере, можно предполагать, что система координат $Oxyz$ общая декартова. Если же система прямоугольная и требуется определить не только тип линии, но и ее каноническое уравнение и расположение, то вместо базиса $e_1=\{1, 0, 1\}$, $e_2=\{0, 1, 1\}$ на данной плоскости можно перейти к ортонормированному базису. Сделать это можно так:

выберем k так, чтобы вектор e_1+ke_2 был ортогонален вектору e_1, т. е.

$$e_1(e_1+ke_2)=0, \quad e_1^2+ke_1e_2=0, \quad 2+k=0, \quad k=-2, \quad \text{значит,}$$

$$f_1=e_1+ke_2=\{1, 0, 1\}-2\{0, 1, 1\}=\{1, -2, -1\}.$$

Теперь векторы

$$e_1=\{1, 0, 1\} \quad \text{и} \quad f_1=\{1, -2, -1\}$$

ортогональны (и, конечно, компланарны данной плоскости). Нормируем их:

$$e_1^*=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \quad f_1^*=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}.$$

Уравнение плоскости (2) можно теперь записать в виде

$$r=\{0, 0, 3\}+u\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}+v\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\},$$

значит,

$$x=\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{6}}, \quad y=-\frac{2v}{\sqrt{6}}, \quad z=3+\frac{u}{\sqrt{2}}-\frac{v}{\sqrt{6}}.$$

и в декартовой прямоугольной системе координат Muv уравнение линии сечения:

$$\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{6}}\right)^2+\frac{2v^2}{3}-\left(3+\frac{u}{\sqrt{2}}-\frac{v}{\sqrt{6}}\right)^2+4=0$$

и т. д. (теперь применима вся теория ортогональных инвариантов).

Пример 3. Определить вид поверхности второго порядка:

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0.$$

Решение.

$$I_1=7, \quad I_2=0, \quad I_3=-36, \quad K_4=36.$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^3-7\lambda^2+36=0$.
Его коэффициенты: $+1$, -7, $+36$. Здесь имеются две перемены знака: при переходе от $+1$ к -7 и от -7 к $+36$; значит, уравнение имеет два положительных корня и один отрицательный.

Кроме того, $\frac{K_4}{I_3}=-1<0$; следовательно, данная поверхность — однополостный гиперболоид.

Пример 4. Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат уравнением

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0.$$

Находим

$$I_3=-36, \; K_4=36, \; I_1=7.$$

Так как $I_1I_3<0$, $K_4>0$, то данное уравнение выражает однополостный гиперболоид. Далее, $I_2=0$.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3-7\lambda^2+36=0$$

имеет корни

$$\lambda_1=3, \; \lambda_2=6, \; \lambda_3=-2.$$

Простейшее уравнение

$$3X^2+6Y^2-2Z^2+\frac{36}{-36}=0,$$

или

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{Z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$$

Координаты центра поверхности найдем, разрешая систему

$$x+y+3z-1=0,\quad x+5y+z+3=0,\quad 3x+y+z+1=0,$$

откуда

$$x=-\frac{1}{3},\quad y=-\frac{2}{3},\quad z=\frac{2}{3}.$$

Центр

$$O'\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right).$$

Обозначая через l_1, m_1, n_1 координаты вектора, коллинеарного бо́льшей оси горлового эллипса, находим эти координаты из системы

$$(1-3)\,l_1+m_1+3n_1=0,$$
$$l_1+(5-3)\,m_1+n_1=0,$$
$$3l_1+m_1+(1-3)\,n_1=0,$$

откуда

$$\{l_1,\ m_1,\ n_1\}=\{1,\ -1,\ 1\}.$$

Аналогично находим векторы

$$\{l_2,\ m_2,\ n_2\}=\{1,\ 2,\ 1\},\quad \{l_3,\ m_3,\ n_3\}=\{1,\ 0,\ -1\},$$

дающие направления осей: меньшей оси горлового эллипса и оси поверхности. Тем самым расположение поверхности определено.

Составим еще формулы преобразования координат. Найдем сначала единичные векторы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, идущие в положительных направлениях осей $O'X$, $O'Y$, $O'Z$:

$$\boldsymbol{i}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\ \boldsymbol{j}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right\},\ \boldsymbol{k}'=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\};$$

отсюда

$$x=\frac{X}{\sqrt{3}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}+\frac{Z}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3},$$
$$y=-\frac{X}{\sqrt{3}}+\frac{2Y}{\sqrt{6}}-\frac{2}{3},$$
$$z=\frac{X}{\sqrt{3}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}-\frac{Z}{\sqrt{2}}+\frac{2}{3};$$
$$X=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[x+\frac{1}{3}-\left(y+\frac{2}{3}\right)+z-\frac{2}{3}\right],$$
$$Y=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[x+\frac{1}{3}+2\left(y+\frac{2}{3}\right)+z-\frac{2}{3}\right],$$
$$Z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[x+\frac{1}{3}-\left(z-\frac{2}{3}\right)\right].$$

или

$$X=\frac{x-y+z-1}{\sqrt{3}},\quad Y=\frac{x+2y+z+1}{\sqrt{6}},\quad Z=\frac{x-z+1}{\sqrt{2}}.$$

Пример 5. Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат уравнением

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x-2y=0. \qquad (1)$$

Первый способ решения. Составляем систему уравнений, определяющих координаты центра:

$$2x-y+2=0,\quad -x+y+z-1=0,\quad y+2z=0.$$

Эти уравнения являются уравнениями трех плоскостей, проходящих через одну прямую. Полагая $y=z=0$, находим точку $(-1,\ 0,\ 0)$, являющуюся одним из центров поверхности. Направляющий вектор прямой центров $\{1,\ 2,\ -1\}$, а сами уравнения прямой центров

$$x=-1+t,\quad y=2t,\quad z=-t.$$

Перенося оси координат так, чтобы новым началом координат стала точка $(-1,\ 0,\ 0)$, получим, что в новой системе координат уравнение поверхности имеет вид

$$2x'^2+y'^2+2z'^2-2x'y'+2y'z'+D=0, \qquad (2)$$

где D — результат подстановки координат точки $(-1,\ 0,\ 0)$ в левую часть уравнения (1), т. е. $D=-2$.

Уравнение (2) принимает вид

$$2x'^2+y'^2+2z'^2-2x'y'+2y'z'-2=0.$$

Составляя и решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda=0,$$

получим

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=0.$$

Поэтому, повернув оси $O'x'y'z'$ вокруг точки $O'(-1,\ 0,\ 0)$ так, чтобы оси $O'x'$ и $O'y'$ пошли по главным направлениям, соответствующим корням $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=3$, получим уравнение поверхности в виде (свободный член -2 не изменится)

$$2X^2+3Y^2-2=0,$$

или

$$\frac{X^2}{1}+\frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}=1.$$

Координаты вектора, коллинеарного меньшей оси направляющего эллипса, являющегося сечением поверхности плоскостью $XO'Y$, найдем, решая систему

$$\begin{aligned}(2-3)\,l_1-m_1+0\cdot n_1&=0,\\ -l_1+(1-3)\,m_1+n_1&=0,\\ 0\cdot l_1+m_1+(2-3)\,n_1&=0,\end{aligned}$$

откуда

$$\{l_1,\ m_1,\ n_1\}=\{-1,\ 1,\ 1\}.$$

Аналогично из системы

$(2-2)\,l_2-m_2+0\cdot n_2=0,\qquad -l_2+(1-2)\,m_2+n_2=0,\qquad 0\cdot l_2+m_2+(2-2)\,n_2=0$

находим вектор

$$\{l_2,\ m_2,\ n_2\}=\{1,\ 0,\ 1\},$$

коллинеарный бо́льшей оси указанного эллипса.

Уравнения плоскостей симметрии, проходящих через ось:

$$-(2x-y+2)+(-x+y+z-1)+y+2z=0,$$
$$2x-y+2+0\cdot(-x+y+z-1)+y+2z=0,$$

или

$$x-y-z+1=0,\quad x+z+1=0.$$

Второй способ. Находим

$$I_3=0,\ K_4=0,\ I_2=6,\ K_3=-12,\ I_1=5,$$
$$I_2>0,\ I_1K_3<0;$$

уравнение выражает эллиптический цилиндр. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda=0.$$

Его корни

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=0.$$

Простейшее уравнение

$$2X^2+3Y^2-\frac{12}{6}=0;$$

каноническое:

$$\frac{X^2}{1}+\frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}=1.$$

Уравнения оси:

$$2x-y+2=0,\ -x+y+z-1=0,\ \ y+2z=0$$

Отсюда находим вектор

$$\{1,\ 2,\ -1\},$$

имеющий направление оси.

Главные направления и главные диаметральные плоскости находим так, как указано в первом способе.

Пример 6. Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат уравнением

$$y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0.$$

Решение.

$$I_3=\begin{vmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&1&0\end{vmatrix}=0,$$

$$K_4=\begin{vmatrix}0&1&2&-2\\1&1&1&-1\\2&1&0&0\\-2&-1&0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$I_2=\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-6,$$

$$K_3=\begin{vmatrix}0&1&-2\\1&1&-1\\-2&-1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&2&-2\\2&0&0\\-2&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$I_1=0+1+0=1;$$

так как $I_3=K_4=0$, $I_2<0$, $K_3=0$, то данное уравнение определяет пару пересекающихся плоскостей.

Чтобы найти уравнения этих плоскостей, разложим левую часть данного уравнения на линейные относительно x, y, z множители:

$$\begin{gathered}y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=y^2+2(x+z-1)y+4xz-4x=\\=y^2+2(x+z-1)y+(x+z-1)^2+4xz-4x-(x+z-1)^2=\\=(x+y+z-1)^2+4xz-4x-x^2-2xz-z^2-1+2x+2z=\\=(x+y+z-1)^2-x^2+2xz-2x-z^2+2z-1=(x+y+z-1)^2-\\-(x^2-2xz+2x+z^2-2z+1)=(x+y+z-1)^2-[x^2+2(1-z)x+(1-z)^2]=\\=(x+y+z-1)^2-(x-z+1)^2=(2x+y)(y+2z-2).\end{gathered}$$

Отсюда находим уравнения плоскостей, на которые распадается данная поверхность:

$$2x+y=0,\quad y+2z-2=0.$$

Пример 7. Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат уравнением

$$5x^2-y^2+z^2+4xy+6zx+2x+4y+6z-8=0$$

Находим

$$I_3=0,\quad K_4=16$$

Данное уравнение выражает гиперболический параболоид.

Далее

$$I_1=5,\quad I_2=-14.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3-5\lambda^2-14\lambda=0;$$

его корни

$$\lambda_1=7,\quad \lambda_2=-2,\quad \lambda_3=0$$

Координаты l_1, m_1, n_1 вектора, коллинеарного оси $O'X$, находим из системы

$$\begin{gathered}(5-7)l_1+2m_1+3n_1=0,\\2l_1+(-1-7)m_1+0\cdot n_1=0,\\3l_1+0\cdot m_1+(1-7)n_1=0,\end{gathered}$$

откуда

$$\{l_1,\ m_1,\ n_1\}=\{4,\ 1,\ 2\}$$

Аналогично из системы

$$\begin{gathered}(5+2)l_2+2m_2+3n_2=0,\\2l_2+(-1+2)m_2+0\cdot n_2=0,\\3l_2+0\cdot m_2+(1+2)n_2=0\end{gathered}$$

находим вектор

$$\{l_2,\ m_2,\ n_2\}=\{-1,\ 2,\ 1\},$$

коллинеарный оси $O'Y$. Вектор

$$\{l_3,\ m_3,\ n_3\}=\{1,\ 2,\ -3\},$$

коллинеарный оси поверхности, находим из системы

$$\begin{aligned}5l_3+2m_3+3n_3&=0,\\ 2l_3-m_3+0\cdot n_3&=0,\\ 3l_3+0\cdot m_3+n_3&=0\end{aligned}$$

как вектор, соответствующий значению $\lambda_3=0$.

Простейшее уравнение

$$7X^2-2Y^2-2\sqrt{\frac{16}{14}}Z=0,$$

а каноническое

$$\frac{X^2}{\dfrac{4}{7\sqrt{14}}}-\frac{Y^2}{\dfrac{2}{\sqrt{14}}}=2Z.$$

Так как

$$a_1l_3+a_2m_3+a_3n_3=1\cdot1+2\cdot2-3\cdot3<0,$$

то вектор $\{1,\ 2,\ -3\}$ направлен в положительном направлении оси параболы

$$7X^2-2\sqrt{\frac{8}{7}}Z=0,\quad Y=0.$$

Вершину

$$O'\left(-\frac{617}{392},\ -\frac{113}{196},\ \frac{1011}{392}\right)$$

находим из системы

$$\begin{aligned}5x+2y+3z+1&=t,\\ 2x-y\qquad +2&=2t,\\ 3x\qquad +z+3&=-3t,\\ (x+2y-3z)\,t+x+2y+3z-8&=0.\end{aligned}$$

Сначала находим

$$t=\frac{a_1l_3+a_2m_3+a_3n_3}{l_3^2+m_3^2+n_3^2}=\frac{1\cdot1+2\cdot2-3\cdot3}{1+4+9}=-\frac{2}{7}\ \text{и т. д.}$$

Пример 8. Определить вид и расположение поверхности, заданной относительно декартовой прямоугольной системы координат уравнением

$$x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0.$$

Находим

$$I_3=0,\quad K_4=0,\quad I_2=0,\quad K_3=-18\neq0;$$

данное уравнение является уравнением параболического цилиндра. Перепишем его в виде

$$(x+y+2z)^2-6z+1=0.$$

Уравнения

$$x+y+2z=0, \quad -6z+1=0$$

являются уравнениями прямолинейной образующей; из этих уравнений находим вектор

$$e_3'=\{-1,\ 1,\ 0\},$$

коллинеарный образующим.

Координаты вектора e_1', идущего по единственному главному направлению, находим из системы ($I_1=6$)

$$-5l_1+m_1+2n_1=0, \quad l_1-5m_1+2n_1=0, \quad 2l_1+2m_1-2n_1=0,$$

откуда

$$e_1'=\{1,\ 1,\ 2\}.$$

Наконец, вектор e_2', коллинеарный оси сечения параболического цилиндра плоскостью, перпендикулярной образующим:

$$e_2'=[e_3'\ e_1']\parallel\{1,\ 1,\ -1\}.$$

Простейшее уравнение

$$6X^2-2\sqrt{-\frac{-18}{6}}\,Y=0,$$

а каноническое

$$X^2=\frac{1}{\sqrt{3}}Y.$$

Так как

$$a_1l_2+a_2m_2+a_3n_2=0\cdot 1+0\cdot 1-3(-1)>0,$$

то вектор $\{1,\ 1,\ -1\}$ направлен по оси сечения

$$X^2=\frac{1}{\sqrt{3}}Y, \quad Z=0$$

в сторону выпуклости этой параболы.

Уравнение главной диаметральной плоскости

$$x+y+2z+x+y+2z+2(2x+2y+4z-3)=0,$$

или

$$x+y+2z-1=0.$$

Уравнения

$$(x+y+2z)^2-6z+1=0, \quad x+y+2z-1=0,$$

или

$$-3z+1=0, \quad x+y+2z-1=0, \tag{λ}$$

являются уравнениями прямолинейной образующей, по которой главная диаметральная плоскость пересекает данный параболический цилиндр. На этой образующей лежит, например, точка $\left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$. Уравнение плоскости, касательной к параболическому цилиндру вдоль образующей λ, имеет вид

$$x+y-\frac{1}{3}-\left(z-\frac{1}{3}\right)=0, \quad \text{или} \quad x+y-z=0.$$

Пример 9. Исследовать в зависимости от значений параметра m характер поверхности, заданной уравнением

$$x^2+(2m^2+1)(y^2+z^2)-2xy-2xz-2yz-2m^2+3m-1=0.$$

Решение.

$$I_3=4(m^2+1)(m-1)(m+1),$$
$$K_4=-4(m^2+1)(m-1)^2(2m-1)(m+1),$$
$$I_2=4m^2(m^2+2),$$
$$K_3=-4m^2(m^2+2)(m-1)(2m-1),$$
$$I_1=4m^2+3.$$

Инвариант I_3 обращается в нуль при $m=-1$ и $m=1$, инвариант K_4 — при $m=1$ и $m=\frac{1}{2}$. Поэтому рассмотрим следующие интервалы изменения параметра m и значения m: 1) $m<-1$; $I_3>0$, $I_2>0$, $I_1>0$. Последовательность коэффициентов

$$1,\ -I_1,\ I_2,\ -I_3$$

имеет три перемены знаков, значит, все корни λ_1, λ_2, λ_3 характеристического уравнения положительны. Далее, $K_4<0$ при $m<-1$, значит, данное уравнение является при $m<-1$ уравнением эллипсоида.

2) $m=-1$. Тогда $I_3=0$, $K_4=0$, $I_2>0$, $K_3<0$, $I_1>0$ — эллиптический цилиндр.

3) $-1<m<\frac{1}{2}$; тогда $I_3<0$, $I_2>0$, $I_1>0$, $K_4>0$. В последовательности

$$1,\ -I_1,\ I_2,\ -I_3$$

две перемены знака. Два корня характеристического уравнения положительны, один отрицателен, $\frac{K_4}{I_3}<0$ — однополостный гиперболоид.

4) $m=\frac{1}{2}$; тогда $I_3<0$, $I_2>0$, $I_1>0$, $K_4=0$ — конус (действительный).

5) $\frac{1}{2}<m<1$; тогда $I_3<0$, $I_2>0$, $I_1>0$, $K_4<0$ — двуполостный гиперболоид.

6) $m=1$; тогда $I_3=0$, $K_4=0$, $I_2>0$, $K_3=0$ — две мнимые пересекающиеся плоскости.

7) $m>1$; тогда $I_3>0$, $I_2>0$, $I_1>0$, $K_4<0$ — эллипсоид.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. При каком необходимом и достаточном условии эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

и плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0$$

1) касаются, 2) пересекаются, 3) не пересекаются?

Отв. 1) $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2=D^2$;
2) $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2>D^2$; 3) $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2<D^2$.

2. Составить уравнение диаметральной плоскости эллипсоида

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1,$$

делящей пополам хорды, коллинеарные вектору $a=\{2,\ 1,\ 2\}$.

Отв. $32x+9y+72z=0$.

3. Составить уравнение плоскости, пересекающей эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

по эллипсу, центр которого находится в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Дано, что

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}<1.$$

Отв. $$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}.$$

4. Найти на эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние от центра эллипсоида до касательной плоскости в этой точке имеет одно и то же значение, равное d (полодия).

Отв. $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\qquad \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{d^2}.$$

5. Составить уравнения прямой, на которой расположены центры сечений эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

плоскостями, параллельными плоскости $Ax+By+Cz=0$.

Отв $$\frac{x}{a^2A}=\frac{y}{b^2B}=\frac{z}{c^2C}$$

6. Пусть $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — внешняя точка эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Составить уравнение конуса с вершиной в данной точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, описанного около данного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Отв.

$$\left[\frac{x_0(x-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2}\right]^2=$$

$$=\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left[\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}\right].$$

7. Найти геометрическое место точки пересечения трех взаимно перпендикулярных плоскостей, каждая из которых касается эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Отв. Сфера.

8. Какой вид будет иметь уравнение эллипсоида, если за плоскость xOy принять плоскость кругового сечения, проходящего через центр эллипсоида, а за ось Oz — диаметр, сопряженный этой плоскости.

Отв. $x^2+y^2+k^2z^2=1$, где $k>0$.

9. Определить геометрическое место точки пересечения трех взаимно перпендикулярных плоскостей к параболоиду

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=2z.$$

Отв. Плоскость

$$z=-\frac{A+B}{2}.$$

10. Составить уравнение цилиндра с образующими, коллинеарными вектору $a=\{l,\ m,\ n\}$, описанного около однополостного или двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1.$$

Отв. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\pm 1\right)\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)-\left(\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}-\frac{nz}{c^2}\right)^2=0.$

11. Как запишется уравнение однополостного гиперболоида, если за начало координат принять точку O этой поверхности, за оси Ox и Oy — прямолинейные образующие, проходящие через эту точку, а за ось Oz — диаметр, сопряженный плоскостям, параллельным плоскости xOy?

Отв. $xy+\lambda z^2+2\mu z=0,\quad \lambda\neq 0,\quad \mu\neq 0.$

12. Как запишется уравнение двуполостного гиперболоида, если за начало координат принять произвольную точку O этой поверхности, за оси Ox и Oy — две прямые, лежащие в касательных плоскости в точке O, имеющие сопряженные направления относительно любого сечения плоскостью, параллельной касательной, а за ось Oz — прямую, проходящую через центр поверхности?

Отв. $2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}.$

13. Какой вид примет уравнение однополостного гиперболоида, если за плоскость xOy принять плоскость кругового сечения, проходящего через центр поверхности, за начало координат — центр поверхности, а за ось Oz принять:

1) диаметр, сопряженный плоскости xOy,
2) нормаль к плоскости xOy, проходящую через центр поверхности?

Отв 1) $x^2+y^2-k^2z^2=\mu^2,\quad k\neq 0,\quad \mu\neq 0;$
2) $x^2+y^2+\alpha z^2+2\beta xz+2\gamma yz+a=0,\quad \alpha<\beta^2+\gamma^2,\quad a<0.$

14. Какой вид примет уравнение двуполостного гиперболоида, если принять за плоскость xOy плоскость, проходящую через центр поверхности, параллельную плоскости круговых сечений, а за ось Oz принять:

1) диаметр, сопряженный плоскости xOy,

2) нормаль к плоскости xOy, проходящую через центр поверхности?

Отв. 1) $x^2+y^2-k^2z^2=-\mu^2$, $k\neq 0$, $\mu\neq 0$;

2) $x^2+y^2+\alpha z^2+2\beta xz+2\gamma yz+a=0$,

где $\alpha<\beta^2+\gamma^2$, $a>0$.

15. Составить уравнения прямой, на которой лежат центры сечений эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0),$$

плоскостями, параллельными плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Отв. $x=-\dfrac{Ap}{C}$, $y=-\dfrac{Bq}{C}$.

16. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — внешняя точка эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0).$$

Составить уравнение конуса второго порядка с вершиной в точке M_0, описанного около этой поверхности. Составить уравнение плоскости, в которой лежит линия прикосновения конуса с поверхностью.

Отв. 1) $\left(\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}-2z\right)\left(\dfrac{x_0^2}{p}+\dfrac{y_0^2}{q}-2z_0\right)-\left(\dfrac{x_0x}{p}+\dfrac{y_0y}{q}-z-z_0\right)^2=0$;

2) $\dfrac{x_0x}{p}+\dfrac{y_0y}{q}=z+z_0$.

17. Доказать, что геометрическое место вершин трехгранных углов, все плоские углы которого прямые, а грани касаются данного эллиптического параболоида, есть плоскость, перпендикулярная к оси параболоида.

18. Доказать, что если p' и q' — параметры парабол, получаемых в сечении эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\quad q>0)$$

двумя его сопряженными диаметральными плоскостями, то

$$p'+q'=p+q.$$

19. Доказать, что конус второго порядка, с вершиной в фокусе меридианального сечения параболоида вращения (т. е. сечения, проходящего через ось вращения), направляющей которого служит любое плоское сечение этого параболоида, есть конус вращения.

20. Какой вид примет уравнение гиперболического параболоида, если за начало координат принять произвольную точку O поверхности, за оси Ox и Oy — две прямолинейные образующие, проходящие через точку O, а за ось Oz — прямую, параллельную оси параболоида?

Отв. $z=\lambda xy$, где $\lambda\neq 0$.

21. Доказать, что геометрическое место вершин трехгранных углов, все плоские углы которого прямые, а грани касаются гиперболического параболоида, есть плоскость, перпендикулярная к оси этого гиперболического параболоида.

22. Доказать, что если p' и q' — параметры парабол, получаемых в сечении гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\quad q>0)$$

двумя сопряженными диаметральными плоскостями, то

$$p' - q' = p - q.$$

23. Доказать, что касательная плоскость в вершине гиперболического параболоида делит пополам отрезок прямолинейной образующей, заключенный между двумя главными плоскостями этой поверхности.

24. Доказать, что параметрические уравнения

$$x = \sqrt{p}\,(u+v),\ \ y = \sqrt{q}\,(u-v),\ \ z = 2uv,\ \text{где } p > 0,\ \ q > 0,$$

суть уравнения гиперболического параболоида. Какие линии определяют уравнения $u = \text{const}$, $v = \text{const}$?

25. Доказать, что если две плоскости касаются конуса второго порядка вдоль его образующих, то хорды, параллельные линии пересечения этих плоскостей, делятся пополам плоскостью, проходящей через указанные образующие.

26. Доказать, что геометрическое место центров поверхностей второго порядка, проходящих через две пары противоположных ребер тетраэдра, есть прямая, соединяющая середины ребер третьей пары.

27. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 6yz - 4x - y - 2z = 0,$$

которая (плоскость) проходит через прямую $4x - 5y = 0,\ \ z - 1 = 0$.

Отв. $4x - 5y - 2z + 2 = 0$.

28. Определить λ и μ так, чтобы уравнение

$$x^2 - y^2 + 3z^2 + (\lambda x + \mu y)^2 - 1 = 0$$

определяло круглый цилиндр.

Отв. $\lambda = \pm 1,\ \ \mu = \pm \sqrt{2}$.

29. Определить k так, чтобы конус $x^2 - 2xy + kz^2 = 0$ был конусом вращения и найти ось вращения.

Отв. $k = 1 \pm \sqrt{5}$ (два конуса). Оси:

$$1)\ z = 0,\ (1+\sqrt{5})\,x - 2y = 0;\quad 2)\ z = 0,\ (1-\sqrt{5})\,x - 2y = 0.$$

30. Какой вид примет общее уравнение $\varphi = 0$ невырождающейся действительной поверхности второго порядка, если за плоскость xOy принять касательную плоскость, точку прикосновения — за начало координат, а оси Ox и Oy направить по главным направлениям кривой, по которой данная поверхность рассекается плоскостью, параллельной касательной?

Отв. $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_3z = 0$.

31. Доказать, что, для того чтобы в конус второго порядка можно было вписать трехгранный угол, ребра которого попарно перпендикулярны (прямоугольный триэдр), необходимо и достаточно, чтобы $I_1 = 0$.

32. Общее уравнение $\varphi = 0$ поверхности второго порядка определяет гиперболический цилиндр. Что определяет уравнение

$$\varphi - \frac{K_3}{I_2} = 0?$$

Отв. Две его асимптотические плоскости.

33. Пусть общее уравнение поверхности второго порядка определяет гиперболоид. При каком необходимом и достаточном условии точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит между поверхностью этого гиперболоида и поверхностью его асимптотического конуса?

Отв. Результат подстановки координат данной точки в левую часть уравнения гиперболоида должен быть заключен между 0 и $\frac{K_4}{I_3}$.

34. Общее уравнение поверхности второго порядка определяет две пересекающиеся плоскости. Найти котангенсы углов между ними.

Отв. $\operatorname{ctg}\alpha_{1,2} = \pm \frac{I_1}{2\sqrt{-I_2}}$.

35. Общее уравнение поверхности второго порядка определяет эллиптический цилиндр. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0, z_0) лежит внутри этого цилиндра?

Отв. $I_1\varphi(x_0, y_0, z_0) < 0$.

36. Общее уравнение поверхности второго порядка определяет две параллельные плоскости. Найти расстояние между ними.

Отв. $d = 2\frac{\sqrt{-K_2}}{|I_1|}$.

37. Как запишется уравнение круглого конуса, касающегося плоскостей xOz и yOz по прямым Ox и Oy?

Отв. $z^2 = \pm 2xy$.

38. Составить уравнение поверхности второго порядка, пересекающей плоскости координат по гиперболам $x=0$, $yz=a$; $y=0$, $xz=b$; $z=0$, $xy=c$.

Отв. $\frac{xy}{c} + \frac{yz}{a} + \frac{zx}{b} = 1$.

39. Составить уравнение поверхности второго порядка, пересекающей плоскость xOy по двум прямым, а плоскости xOz и yOz — по окружностям радиуса r, касающимся оси Oz в начале координат и расположенным в положительных полуплоскостях

Отв $(x+y-r)^2+z^2=r^2$ (эллиптический цилиндр)

40. Составить уравнение параболоида вращения, проходящего через окружность $x-z=0$, $x^2+y^2+z^2-2x-2z=0$ и точку $(1, 1, 0)$.

Указание. Предварительно составить уравнение параболоида относительно новой системы координат, координатная плоскость $x'O'y'$ которой совпадает с плоскостью $x-z=0$.

Отв $x^2+2y^2+z^2+2xz-3x-5z=0$.

41. Составить уравнения:

1) однополостного гиперболоида; 2) гиперболического параболоида, принимая за начало координат какую-нибудь точку O поверхности, за оси Ox и Oy — прямолинейные образующие, проходящие через эту точку, а за ось Oz — проходящий через эту точку диаметр,

Отв. 1) $a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{3}z=0$; 2) $a_{12}xy+a_{3}z=0$.

42. Найти геометрическое место вершин конусов второго порядка, имеющих общую направляющую окружность, при условии, что на поверхности каждого такого конуса имеются три попарно перпендикулярные образующие.

Отв. $x^2+y^2+2z^2=r^2$, где r — радиус данной окружности.

43. Доказать, что для того чтобы главные оси двух поверхностей второго порядка были соответственно параллельны, необходимо и достаточно, чтобы матрицы квадратичных форм, входящих в состав левых частей уравнений поверхностей, были перестановочны.

44. Найти геометрическое место вершин конусов вращения, проходящих через эллипс

$$z=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b).$$

Отв. Гипербола

$$y=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1.$$

ГЛАВА XIII

ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 168. Отображение и преобразование

Если каждому элементу x множества* M поставлен в соответствие элемент y множества M', то говорят, что задано отображение множества M **во** множество M'. Элемент y называется образом элемента x, а элемент x — прообразом элемента y.

Если при отображении множества M во множество M' каждый элемент y множества M' имеет прообраз x в множестве M, то говорят, что множество M отображается **на** множество M'.

Отображение множества M на множество M' называется взаимно однозначным, если:

1) *каждый элемент x множества M имеет и притом только один образ y из множества M'* и

2) *каждый элемент y из множества M' имеет и притом только один прообраз x во множестве M.*

Это определение эквивалентно такому:

1) *каждый элемент x множества M имеет и притом только один образ y из множества M';*

2) *каждый элемент y из множества M' имеет прообраз x из множества M;*

3) *двум любым различным элементам x и x' из множества M соответствуют два различных образа y и y' из множества M'.*

Если множество M отображается на множество M' взаимно однозначно, то отображение, при котором любому элементу y из множества M' ставится в соответствие прообраз x этого элемента y, называется обратным данному; отображение, обратное взаимно однозначному отображению, очевидно, также взаимно однозначно.

Отображение множества M в себя называется преобразованием множества.

---

* Определения и понятия, введенные в § 168—170, относятся к произвольным множествам; для аналитической геометрии эти множества суть прямая, плоскость, пространство или какие-нибудь фигуры, лежащие на плоскости или в пространстве.

Взаимно однозначным преобразованием множества называется взаимно однозначное отображение множества на себя.

Тождественным (или единичным) преобразованием E множества M называется преобразование, при котором каждому элементу x из множества M ставится в соответствие этот же элемент.

Если A — какое-нибудь взаимно однозначное преобразование множества M, то обратное преобразование обозначим A^{-1}.

§ 169. Произведение преобразований

Пусть A и B — два каких-нибудь преобразования множества M. Возьмем произвольный элемент x во множестве M.

Пусть y — образ элемента x при преобразовании B, а z — образ элемента y при преобразовании A. Тогда соответствие, при котором элементу x соответствует элемент z, является преобразованием. Это преобразование называется **произведением** преобразования A на преобразование B и обозначается AB.

Очевидно,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где A — любое взаимно однозначное преобразование множества, A^{-1} — ему обратное, а E — тождественное.

Докажем, что произведение преобразований **ассоциативно**, т. е. если A, B и C — три любых преобразования множества M, то

$$A(BC) = (AB)C.$$

В самом деле, пусть x — любой элемент множества M, y — его образ при преобразовании C, z — образ элемента y при преобразовании B и t — образ элемента z при преобразовании A.

На основании определения произведения преобразований элементу x при преобразовании BC соответствует элемент z, а элементу y при преобразовании AB — элемент t. Значит (опять на основании определения произведения преобразований), элементу x при преобразовании $(AB)C$, и при преобразовании $A(BC)$ соответствует один и тот же элемент t, а это и означает, что $(AB)C = A(BC)$.

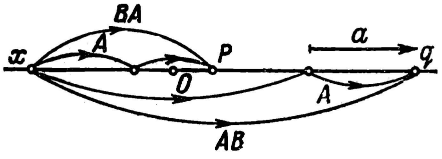


Рис. 228

Отметим еще, что *произведение двух взаимно однозначных преобразований есть взаимно однозначное преобразование.*

Пример. Пусть M — множество всех точек какой-нибудь прямой l. Обозначим через B преобразование, при котором точке x прямой l ставится в соответствие точка x', симметричная точке x относительно точки O прямой l, а через A обозначим преобразование, которое точке x прямой l ставит в соответствие точку x'' той же прямой, такую, что $\overrightarrow{xx''}=a$, где a — заданный вектор на прямой l. На рис. 228 построены точки p и q, соответствующие точке x при преобразованиях BA и AB. Эти точки различны, значит, различны и преобразования BA и AB, иначе произведение преобразований (вообще говоря) некоммутативно.

§ 170. Группа преобразований

Пусть Г есть множество, элементами которого являются взаимно однозначные преобразования множества M. Тогда *множество* Г *называется группой преобразований* (*множества* M), *если выполнены следующие два условия.*

I. *Если A и B — два любых преобразования из множества* Г, *то преобразование AB также входит во множество* Г.

II. *Если A — любое преобразование из множества* Г, *то преобразование A^{-1} также входит во множество* Г.

Из этого определения следует, что всякая группа преобразований содержит тождественное преобразование; в самом деле, пусть A — какое-нибудь преобразование, входящее в группу Г. На основании условия II A^{-1} также входит в группу Г, а на основании условия I в группу Г входит произведение AA^{-1}, которое есть тождественное преобразование.

Подмножество Γ_1 элементов группы Г называется подгруппой группы Г, если Γ_1 само является группой.

ГЛАВА XIV

ЛИНЕЙНЫЕ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 171. Линейные преобразования и линейные отображения множества точек пространства, плоскости или прямой

В этом параграфе рассмотрим линейные преобразования множества всех точек пространства. Для случая плоскости все рассмотрения носят аналогичный характер.

Линейным преобразованием f множества всех точек пространства называется отображение множества всех точек этого пространства **в** *себя, при котором трем любым точкам A, B и C, принадлежащим одной прямой, соответствуют три точки A', B', C', также принадлежащие одной прямой и притом так, что если между* **направленными отрезками** *$\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ имеет место соотношение*

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB},$$

то и **направленные отрезки** *$\overrightarrow{A'C'}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ связаны соотношением*

$$\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}.$$

Образ A' точки A при линейном преобразовании f иногда будем обозначать fA.

Аналогично определяется линейное преобразование множества всех точек плоскости и линейное преобразование множества всех точек прямой, а также линейное отображение одной плоскости на другую и линейное отображение одной прямой на другую.

Примером линейного преобразования плоскости является параллельное проектирование на плоскость и прямую. В самом деле, если A, B, C — три точки, принадлежащие одной прямой, то их параллельные проекции A', B', C' также принадлежат одной прямой, причем если

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB},$$

то

$$\overrightarrow{A'B'}=\lambda\overrightarrow{A'B'},$$

так как при параллельном проектировании сохраняется порядок точек, лежащих на одной прямой, и отношение отрезков, лежащих на одной прямой.

Если даны два линейных преобразования f и g множества всех точек пространства, то их произведением fg в соответствии с § 169 назовем преобразование, которое точке M ставит в соответствие точку $f(gM)$ (это преобразование, очевидно, линейное). Произведение линейных преобразований (как и произведение любых преобразований) ассоциативно:

$$f(gh) = (fg)h.$$

Замечание. Данное здесь определение линейного преобразования пространства переносится без изменения на комплексное пространство, комплексную плоскость или комплексную прямую.

§ 172. Линейные преобразования множества векторов пространства, плоскости или прямой

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех векторов пространства. Поставим в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{a}$ вектор $f\boldsymbol{a}$. Если это соответствие удовлетворяет двум условиям:

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f\boldsymbol{a} + f\boldsymbol{b},$$
$$f(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda f\boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — любые векторы, а λ — любое число, то оно называется *линейным преобразованием множества всех векторов трехмерного пространства*.

Аналогично определяется линейное преобразование множества всех векторов плоскости или прямой, линейное отображение множества всех векторов одной плоскости в множество всех векторов другой плоскости, а также линейное отображение множества всех векторов, принадлежащих одной прямой, в множество всех векторов другой прямой.

Примером линейного преобразования множества всех векторов $\boldsymbol{x}$ трехмерного пространства может служить следующая функция вектора $\boldsymbol{x}$:

$$f\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}],$$

где $\boldsymbol{a}$ — фиксированный вектор.

В самом деле,

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})] = [\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}] + [\boldsymbol{a}\boldsymbol{y}] = f\boldsymbol{x} + f\boldsymbol{y},$$
$$f(\lambda\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{x})] = \lambda[\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}] = \lambda f\boldsymbol{x}.$$

Если даны два линейных преобразования f и g множества всех векторов пространства, то их произведением fg называется преобразование, которое вектору $\boldsymbol{a}$ ставит в соответствие вектор $f(g\boldsymbol{a})$

(это преобразование, очевидно, линейное). Произведение линейных преобразований ассоциативно: $f(gh)=(fg)h$. Суммой $f+g$ линейных преобразований множества всех векторов пространства называется линейное преобразование, которое вектору $\boldsymbol{a}$ ставит в соответствие вектор $f\boldsymbol{a}+g\boldsymbol{a}$ (это преобразование, очевидно, линейное).

Пусть, наконец, f — линейное преобразование множества всех векторов пространства. Тогда линейное преобразование, которое вектору $\boldsymbol{a}$ ставит в соответствие вектор $\lambda f\boldsymbol{a}$, называется произведением числа λ на линейное преобразование f.

§ 173. Свойства линейных преобразований множества точек пространства, плоскости или прямой

Теорема 1. *При линейном преобразовании равные направленные отрезки переходят в равные.*

Доказательство. Пусть f — линейное преобразование и $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Требуется доказать, что $f\overrightarrow{AB}=f\overrightarrow{CD}$.

Обозначим образы точек A, B, C, D при линейном преобразовании f соответственно через A', B', C', D'. Из равенства $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ следует, что середина отрезка AD совпадает с серединой отрезка BC. В силу определения линейного преобразования образы середин отрезков AD и BC будут серединами отрезков $A'D'$ и $B'C'$, а так как середины AD и BC совпадают, то и середины отрезков $A'D'$ и $B'C'$ совпадают; но отсюда следует, что $f(\overrightarrow{AB})=f(\overrightarrow{CD})$ $(\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'})$.

Из доказанной теоремы следует, что всякое линейное преобразование f множества всех точек пространства порождает преобразование множества всех векторов пространства (его мы будем также обозначать буквой f). В самом деле, пусть f — линейное преобразование множества всех точек пространства, а $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор. Пусть $\overrightarrow{AB}$ — произвольный направленный отрезок, входящий в класс равных между собой направленных отрезков, образующих вектор $\boldsymbol{a}$. Обозначим через A' и B' образы точек A и B при преобразовании f. Поставим в соответствие вектору $\boldsymbol{a}$ вектор $f\boldsymbol{a}$, который является классом всех направленных отрезков, равных направленному отрезку $\overrightarrow{A'B'}$.

Из доказанной теоремы следует, что если задан свободный вектор $\boldsymbol{a}$, то указанное соответствие от $\boldsymbol{a}$ к $f\boldsymbol{a}$ однозначно определено.

Теорема 2. *При линейном преобразовании множества всех точек пространства образ суммы двух векторов равен сумме образов слагаемых, т. е.*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f\boldsymbol{a}+f\boldsymbol{b}.$$

Доказательство. Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от точки A

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB},$$

а от точки B отложим вектор $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}.$$

Пусть A', B' C' — образы точек A, B, C при линейном преобразовании f; тогда

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{A'B'}=f\overrightarrow{AB}=f\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{B'C'}=f\overrightarrow{BC}=f\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{A'C'}=f\overrightarrow{AC}=f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Но $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{A'C'}$, значит,

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f\boldsymbol{a}+f\boldsymbol{b}.$$

Теорема 3. *При линейном преобразовании множества всех точек пространства образ произведения числа на вектор равен произведению этого числа на образ рассматриваемого вектора, т. е.*

$$f(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda f\boldsymbol{a}.$$

Доказательство. Отложим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ от одной и той же точки A:

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB},\quad \lambda\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$$

и утверждение теоремы сразу следует из определения линейного преобразования множества точек пространства.

Из теорем 1 и 2 следует, что линейное преобразование множества всех точек пространства порождает *линейное* преобразование множества всех векторов пространства.

Имея в дальнейшем дело с линейными преобразованиями множества точек и множества векторов, будем различать эти понятия терминами: линейное точечное преобразование и линейное векторное преобразование.

Из теорем 2 и 3 вытекает теорема 4 о линейной комбинации векторов.

Теорема 4. *При линейном преобразовании образом линейной комбинации векторов является линейная комбинация их образов* *соответственно с теми же коэффициентами:*

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 f a_1 + \lambda_2 f a_2 + \ldots + \lambda_n f a_n.$$

Теорема 5. *При линейном точечном преобразовании пространства оно отображается или на пространство, или на плоскость, или на прямую, или в точку.*

Доказательство. Введем в пространстве общую декартову систему координат с началом в точке O и масштабными векторами e_1, e_2, e_3. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства, O' и M' — образы точек O и M при линейном преобразовании f. Так как

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

то

$$f\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'} = xfe_1 + yfe_2 + zfe_3.$$

I случай. Векторы fe_1, fe_2, fe_3 линейно независимы, следовательно, некомпланарны.

Тогда каждая точка M' пространства при преобразовании f имеет прообраз. В самом деле, если векторы fe_1, fe_2, fe_3 некомпланарны, то вектор $\overrightarrow{O'M'}$ можно разложить по этим векторам: $\overrightarrow{O'M'} = xfe_1 + yfe_2 + zfe_3$ и мы видим, что точка M' является образом точки M, определяемой радиусом-вектором

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Таким образом, в этом случае пространство отображается на пространство (а не в пространство). Это отображение к тому же взаимно однозначно, так как разные прообразы M и N, определяемые радиусами-векторами:

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3, \quad \overrightarrow{ON} = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3,$$

имеют разные образы M' и N', такие, что

$$\overrightarrow{O'M'} = xfe_1 + yfe_2 + zfe_3,$$
$$\overrightarrow{O'N'} = x_1fe_1 + y_1fe_2 + z_1fe_3.$$

В самом деле, если предположить, что точки M' и N' совпадают, то в силу того, что точки $M(x, y, z)$ и $N(x_1, y_1, z_1)$ различны, мы получили бы

$$xfe_1 + yfe_2 + zfe_3 = x_1fe_1 + y_1fe_2 + z_1fe_3,$$
$$(x - x_1)fe_1 + (y - y_1)fe_2 + (z - z_1)fe_3 = 0,$$

т. е. векторы fe_1, fe_2, fe_3 оказались бы линейно зависимыми (ибо в силу различия точек M и N хотя бы одна из разностей $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ отлична от нуля).

II случай. Векторы fe_1, fe_2, fe_3 линейно зависимы (следовательно, компланарны), но среди них есть два линейно независимых (следовательно, неколлинеарных).

Пусть fe_1 и fe_2 — неколлинеарные векторы. Так как векторы fe_1, fe_2, fe_3 компланарны, то из соотношения $\overrightarrow{O'M'}=xfe_1+ + yfe_2+zfe_3$ следует, что точка M' лежит в плоскости, проходящей через точку O' компланарно векторам fe_1 и fe_2. Так как векторы fe_1 и fe_2 неколлинеарны, то *любая* точка M' этой плоскости имеет прообраз в рассматриваемом линейном преобразовании; в самом деле, если M' — любая точка указанной плоскости, то вектор $\overrightarrow{O'M'}$ можно разложить по векторам fe_1 и fe_2:

$$\overrightarrow{O'M'}=xfe_1+yfe_2$$

и прообразом точки M' при линейном преобразовании является точка M, определяемая радиусом-вектором

$$\overrightarrow{OM}=xe_1+ye_2.$$

Таким образом, в этом случае пространство отображается на плоскость (а не в плоскость).

III случай. Векторы fe_1, fe_2, e_3 попарно коллинеарны, но среди них есть ненулевой вектор.

Пусть, например, $fe_1\neq 0$. Так как векторы fe_1, fe_2, fe_3 попарно коллинеарны, то из соотношения $\overrightarrow{O'M'}=xfe_1+yfe_2+zfe_3$ следует, что точка M' лежит на прямой, проходящей через точку O' коллинеарно вектору fe_1.

Вместе с тем любая точка $M'(x, y, z)$ этой прямой имеет прообраз; это будет, например, точка M, определяемая радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}=xe_1$.

IV случай. $fe_1=fe_2=fe_3=0$. В этом случае $\overrightarrow{O'M'}=0$ для любой точки M' и все пространство отображается в одну точку O'.

Теорема 6 (обратная). *Рассмотрим в пространстве две произвольные точки* O и O', *три некомпланарных вектора* e_1, e_2, e_3 *и три произвольных вектора* e_1', e_2', e_3' (они могут быть и компланарными).

Пусть M — произвольная точка пространства и пусть

$$\overrightarrow{OM}=xe_1+ye_2+ze_3.$$

Поставим точке M в соответствие точку M', определяемую относительно точки O' радиусом-вектором

$$\overrightarrow{O'M'}=xe_1'+ye_2'+ze_3'.$$

Тогда такое соответствие есть линейное точечное преобразование.

Доказательство. Пусть A, B, C — три коллинеарные точки, связанные соотношением

$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

Пусть x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 — соответственно координаты точек A, B, C в общей декартовой системе координат с началом координат в точке O и масштабными векторами e_1, e_2, e_3, а A', B', C', O' — образы точек A, B, C, O. Тогда

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OA}&=x_1e_1+y_1e_2+z_1e_3,\\ \overrightarrow{OB}&=x_2e_1+y_2e_2+z_2e_3,\\ \overrightarrow{OC}&=x_3e_1+y_3e_2+z_3e_3;\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{O'A'}&=x_1e_1'+y_1e_2'+z_1e_3',\\ \overrightarrow{O'B'}&=x_2e_1'+y_2e_2'+z_2e_3',\\ \overrightarrow{O'C'}&=x_3e_1'+y_3e_2'+z_3e_2'.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из соотношений (1) и (2) находим

$$(x_3-x_1)e_1+(y_3-y_1)e_2+(z_3-z_1)e_3=$$
$$=\lambda\left[(x_2-x_1)e_1+(y_2-y_1)e_2+(z_2-z_1)e_3\right],$$

откуда в силу некомпланарности векторов e_1 e_2 e_3

$$x_3-x_1=\lambda(x_2-x_1),\quad y_3-y_1=\lambda(y_2-y_1),\quad z_3-z_1=\lambda(z_2-z_1),$$

значит,

$$(x_3-x_1)e_1'+(y_3-y_1)e_2'+(z_3-z_1)e_3'=$$
$$=\lambda\left[(x_2-x_1)e_1'+(y_2-y_1)e_2'+(z_2-z_1)e_3'\right],$$

или

$$\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}.$$

Теорема 7. *Если при линейном точечном преобразовании f пространства два неколлинеарных вектора e_1 и e_2 отображаются в два неколлинеарных вектора fe_1 и fe_2, то всякая плоскость π, компланарная векторам e_1 и e_2, отображается и притом взаимно однозначно на некоторую плоскость π', компланарную векторам fe_1 и fe_2.*

Доказательство. Возьмем на плоскости π произвольную точку O; пусть O' — образ точки O при преобразовании f. Обозначим через π' плоскость, проходящую через точку O' компланарно векторам fe_1 и fe_2. Тогда плоскость π линейным преобразованием f отображается взаимно однозначно на плоскость π'.

В самом деле, пусть M — произвольная точка плоскости π. Вектор $\overrightarrow{OM}$ можно разложить по векторам e_1 и e_2:

$$\overrightarrow{OM}=xe_1+ye_2.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{O'M'} = xfe_1 + yfe_2,$$

где M' — образ точки M при преобразовании f. Из последнего соотношения следует, что точка M' лежит в плоскости π'.

Далее, если M' — любая точка плоскости π', то вектор $\overrightarrow{O'M'}$ можно разложить по векторам fe_1 и fe_2 (эти векторы по условию неколлинеарны):

$$\overrightarrow{O'M'} = xfe_1 + yfe_2,$$

и прообразом точки M' в плоскости π является точка M, определяемая радиусом-вектором

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2.$$

Наконец, две различные точки M и N плоскости π отображаются при преобразовании f в две различные точки M' и N', так как из соотношений

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2, \quad \overrightarrow{ON} = x_1e_1 + y_1e_2$$

следует

$$\overrightarrow{O'M'} = xfe_1 + yfe_2, \quad \overrightarrow{O'N'} = x_1fe_1 + y_1fe_2$$

и точки M' и N' различны, так как различны точки M и N, а векторы fe_1 и fe_2 неколлинеарны.

Теорема 8. *Если при линейном преобразовании f пространства ненулевой вектор e_1 переходит в ненулевой вектор fe_1, то всякая прямая, коллинеарная вектору e_1, отображается и притом взаимно однозначно на некоторую прямую, коллинеарную вектору fe_1.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Следующие теоремы для плоскости доказываются аналогично соответствующим теоремам для пространства.

Теорема 9. *При линейном отображении плоскость отображается или на плоскость, или на прямую, или в точку, причем в случае отображения на плоскость оно будет взаимно однозначным.*

Теорема 10 (обратная). *Введем общую декартову систему координат с началом в точке O и масштабными векторами e_1 и e_2. В той же или другой плоскости π' возьмем точку O' и два вектора e_1' и e_2' (может быть, линейно зависимые). Поставим в соответствие произвольной точке $M(x, y)$ плоскости π, заданной радиусом-вектором $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$, точку M', определяемую радиусом-вектором $\overrightarrow{O'M'} = xe_1' + ye_2'$. Такое отображение будет линейным отображением плоскости π в плоскость π' (если плоскости π и π' совпадают, то следует говорить о преобразовании плоскости π).*

Теорема 11. *Если при линейном отображении f плоскости какой-либо ненулевой вектор $\boldsymbol{e}_1$ отображается на ненулевой вектор $f\boldsymbol{e}_1$, то любая прямая l плоскости π, коллинеарная вектору $\boldsymbol{e}_1$, отображается и притом взаимно однозначно на прямую l' плоскости π', коллинеарную вектору $f\boldsymbol{e}_1$ (если прямые l и l' совпадают, то следует говорить о линейном преобразовании прямой l).*

§ 174. Линейные преобразования в координатах

Введем в пространстве общую декартову систему координат с началом в точке O и масштабными векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и обозначим через O' образ точки O, а через $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ — образы векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ при каком-нибудь точечном линейном преобразовании f. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства, а M' — ее образ при рассматриваемом линейном преобразовании f. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \tag{1}$$

и потому

$$\overrightarrow{O'M'} = xf\boldsymbol{e}_1 + yf\boldsymbol{e}_2 + zf\boldsymbol{e}_3. \tag{2}$$

Разложим векторы $f\boldsymbol{e}_1$, $f\boldsymbol{e}_2$, $f\boldsymbol{e}_3$ и $\overrightarrow{OO'}$ по векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\left.\begin{aligned} f\boldsymbol{e}_1 &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3, \\ f\boldsymbol{e}_2 &= a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3, \\ f\boldsymbol{e}_3 &+ a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{OO'} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3. \tag{4}$$

Из соотношений (2), (3), (4) найдем

$$\begin{gathered} \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{O'M'} + \overrightarrow{OO'} = x(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3) + \\ + y(a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3) + z(a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3) + \\ + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3. \end{gathered}$$

Отсюда находим координаты x', y', z' точки M' (как коэффициенты при $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$):

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

будем называть матрицей линейного преобразования f, а матрицу

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{pmatrix}$$

расширенной матрицей линейного преобразования f.

При линейном преобразовании множества всех векторов пространства координаты вектора $f\boldsymbol{a}=\{x', y', z'\}$ в любом базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ через координаты вектора $\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}$ в том же базисе выражаются линейными однородными соотношениями. В самом деле, разлагая $\boldsymbol{a}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,$$

находим

$$f\boldsymbol{a}=xf\boldsymbol{e}_1+yf\boldsymbol{e}_2+zf\boldsymbol{e}_3,$$

и полагая

$$f\boldsymbol{e}_1=\{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}, \quad f\boldsymbol{e}_2=\{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}, \quad f\boldsymbol{e}_3=\{a_{13}, a_{23}, a_{33}\},$$

получим

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z. \end{aligned} \tag{6}$$

Матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

будем называть матрицей, соответствующей линейному преобразованию f множества всех векторов пространства.

Если даны два линейных преобразования f и g в координатах:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1, \\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2, \\ z' &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3, \end{aligned} \quad (f) \qquad \begin{aligned} x' &= b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z+b_1, \\ y' &= b_{21}x+b_{22}y+b_{23}z+b_2, \\ z' &= b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z+b_3, \end{aligned} \quad (g)$$

то линейное преобразование fg в координатах запишется так:

$$\begin{aligned} x' = a_{11}(b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z+b_1)+a_{12}(b_{21}x+b_{22}y+b_{23}z+b_2)+ \\ +a_{13}(b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z+b_3)+a_1, \\ y' = a_{21}(b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z+b_1)+a_{22}(b_{21}x+b_{22}y+b_{23}z+b_2)+ \\ +a_{23}(b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z+b_3)+a_2, \\ z' = a_{31}(b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z+b_1)+a_{32}(b_{21}x+b_{22}y+b_{23}z+b_2)+ \\ +a_{33}(b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z+b_3)+a_3, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
x' &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})\,x + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})\,y + \\
&\quad + (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33})\,z + a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 + a_1, \\
y' &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})\,x + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})\,y + \\
&\quad + (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33})\,z + a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 + a_2, \\
z' &= (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31})\,x + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32})\,y + \\
&\quad + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33})\,z + a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 + a_3.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что линейному преобразованию fg соответствует матрица AB, где A и B — матрицы, соответствующие линейным преобразованиям f и g (это, конечно, верно и в том случае, если рассматриваются линейные преобразования множества всех векторов пространства). Если линейное преобразование f невырожденное (взаимно однозначно), то линейное преобразование f^{-1}, обратное для f, в координатах выражается соотношениями

$$\begin{aligned}
x &= A_{11}(x' - a_1) + A_{12}(y' - a_2) + A_{13}(z' - a_3), \\
y &= A_{21}(x' - a_1) + A_{22}(y' - a_2) + A_{23}(z' - a_3), \\
z &= A_{31}(x' - a_1) + A_{32}(y' - a_2) + A_{33}(z' - a_3),
\end{aligned}$$

которые мы получим, разрешив уравнения (f) относительно x, y и z. В этих соотношениях (A_{ik}) — матрица A^{-1}, обратная для матрицы A. Таким образом, если линейному преобразованию f соответствует матрица A и если f — невырожденное линейное преобразование, то линейному преобразованию f^{-1}, обратному для f, соответствует матрица A^{-1}, обратная для A (это верно и в том случае, если f — преобразование множества всех векторов пространства).

Если f и g — линейные преобразования множества всех векторов пространства, если им соответствуют матрицы A и B, то линейному преобразованию $f+g$ соответствует матрица $A+B$. Наконец, если f — линейное преобразование множества всех векторов пространства, то преобразованию λf соответствует матрица λA, где A — матрица, соответствующая преобразованию f.

Мы показали, что при любом точечном линейном преобразовании f координаты x', y', z' образа M' точки M через координаты x, y, z точки M выражаются линейными соотношениями.

Верно и обратное положение: если в пространстве введена общая декартова система координат и каждой точке $M(x, y, z)$ ставится в соответствие точка $M'(x', y', z')$, координаты которой через координаты точки M выражаются линейными соотношениями (5), то такое соответствие есть точечное линейное преобразование.

В самом деле, рассмотрим точку O' и векторы $\overrightarrow{OO'}$ fe_1, fe_2, fe_3, определяемые соотношениями (4) и (3); тогда

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + xfe_1 + yfe_2 + zfe_3,$$

или

$$\overrightarrow{O'M'} = xf\boldsymbol{e}_1 + yf\boldsymbol{e}_2 + zf\boldsymbol{e}_3,$$

в то время как

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3.$$

Остается сослаться на теорему 6 предыдущего параграфа.

Таким образом, точечное линейное преобразование пространства можно было определить линейными соотношениями (5), выражающими координаты образа M' через координаты прообраза M, и такое определение было бы эквивалентно данному выше.

Проще доказывается аналогичное положение для множества векторов: линейное преобразование $f\boldsymbol{a}$ множества векторов пространства можно определить как преобразование, при котором вектору $\boldsymbol{a} = \{x, y, z\}$, заданному своими координатами относительно общей декартовой системы координат, ставится в соответствие вектор $f\boldsymbol{a} = \{x', y', z'\}$, координаты которого выражаются через x, y, z соотношениями (6). Для доказательства надо проверить выполнимость соотношений

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f\boldsymbol{a} + f\boldsymbol{b}, \quad f(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda f\boldsymbol{a}$$

для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и любого числа λ.

Если линейное преобразование множества всех точек пространства в некоторой общей декартовой системе координат выражается соотношениями (5), то соответствующее ему линейное преобразование множества всех векторов пространства в той же системе координат выражается соотношениями (6) с теми же значениями a_{ik} (это следует из того, что координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разностям соответствующих координат конца B и начала A этого вектора).

Аналогично доказывается, что линейное преобразование плоскости в координатах записывается в виде

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2,$$

где O' (a_1, a_2) — образ начала координат O, а $f\boldsymbol{e}_1 = \{a_{11}, a_{21}\}$ и $f\boldsymbol{e}_2 = \{a_{12}, a_{22}\}$ — образы масштабных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

Линейное преобразование прямой в координатах имеет вид

$$x' = a_{11}x + a_1,$$

где $O'(a_1)$ — образ начала координат, а a_{11} — координата образа $f\boldsymbol{e}_1$ масштабного вектора $\boldsymbol{e}_1$. Если же речь идет о линейном отображении плоскости π в плоскость π' или прямой l в прямую l', то формулы остаются теми же, только надо предположить, что имеются две общие декартовы системы координат: одна в плоскости π, другая в плоскости π' (или одна на прямой l, другая на прямой l');

при этом если за начало координат в плоскости π' (или на прямой l') взять образ точки O, то формулы будут не только линейными, но и однородными ($x'=a_{11}x+a_{12}y$, $y'=a_{21}x+a_{22}y$ для отображения плоскости в плоскость и $x'=a_{11}x$ для отображения прямой в прямую).

Теорема. *Введем в пространстве две системы координат:* $O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и $\Omega, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3$ (O и Ω — начала координат).

Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \textit{и} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

*соответственно матрица линейного преобразования** f *в этих базисах.*

Рассмотрим матрицу

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

элементы которой являются коэффициентами разложения векторов $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3$ *по базису* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}_1 &= c_{11}\boldsymbol{e}_1 + c_{21}\boldsymbol{e}_2 + c_{31}\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{s}_2 &= c_{12}\boldsymbol{e}_1 + c_{22}\boldsymbol{e}_2 + c_{32}\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{s}_3 &= c_{13}\boldsymbol{e}_1 + c_{23}\boldsymbol{e}_2 + c_{33}\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Тогда

$$B=C^{-1}AC \quad \textit{и} \quad \operatorname{Det} B=\operatorname{Det} A.$$

Доказательство. Рассмотрим линейное преобразование g множества всех векторов пространства, которое векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ переводит соответственно в векторы $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3$:

$$g\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{s}_1, \quad g\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{s}_2, \quad g\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{s}_3.$$

Матрицей этого преобразования в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ будет C. Согласно условию теоремы

$$\begin{aligned} f\boldsymbol{s}_1 &= b_{11}\boldsymbol{s}_1 + b_{21}\boldsymbol{s}_2 + b_{31}\boldsymbol{s}_3, \\ f\boldsymbol{s}_2 &= b_{12}\boldsymbol{s}_1 + b_{22}\boldsymbol{s}_2 + b_{32}\boldsymbol{s}_3, \\ f\boldsymbol{s}_3 &= b_{13}\boldsymbol{s}_1 + b_{23}\boldsymbol{s}_2 + b_{33}\boldsymbol{s}_3, \end{aligned}$$

* f — линейное преобразование множества всех точек пространства или множества всех векторов пространства (в последнем случае достаточно ввести в рассмотрение два базиса: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3$).

или

$$\begin{aligned}
fge_1 &= b_{11}ge_1 + b_{21}ge_2 + b_{31}ge_3,\\
fge_2 &= b_{12}ge_1 + b_{22}ge_2 + b_{32}ge_3,\\
fge_3 &= b_{13}ge_1 + b_{23}ge_2 + b_{33}ge_3,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
fge_1 &= g(b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + b_{31}e_3),\\
fge_2 &= g(b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + b_{32}e_3),\\
fge_3 &= g(b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3),
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
g^{-1}fge_1 &= b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + b_{31}e_3,\\
g^{-1}fge_2 &= b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + b_{32}e_3,\\
g^{-1}fge_3 &= b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3.
\end{aligned}$$

Таким образом, матрица линейного преобразования $g^{-1}fg$ (в базисе e_1, e_2, e_3) есть матрица B. Но матрица линейного преобразования g^{-1} есть C^{-1}, а матрица произведения линейных преобразований равна произведению матриц сомножителей.

Значит,

$$B = C^{-1}AC.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{Det}\,B = \mathrm{Det}\,C^{-1}\,\mathrm{Det}\,A\,\mathrm{Det}\,C = \frac{1}{\mathrm{Det}\,C}\,\mathrm{Det}\,A\,\mathrm{Det}\,C = \mathrm{Det}\,A,$$

т. е. определитель матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Аналогичные положения имеют место на плоскости.

§ 175. Аффинные преобразования и аффинные отображения

Линейное точечное преобразование пространства (плоскости или прямой) называется аффинным, если оно взаимно однозначно.

Линейное точечное отображение плоскости на плоскость или прямой на прямую называется аффинным, если оно взаимно однозначно.

Из § 172 (теорема 5, I случай) следует, что линейное преобразование пространства будет взаимно однозначным, т. е. аффинным тогда и только тогда, когда при этом преобразовании какие-нибудь три некомпланарных вектора переходят снова в некомпланарные векторы.

Замечание. Если преобразование пространства аффинное, то оно *любую* тройку некомпланарных векторов переводит в некомпланарную тройку. В самом деле, предположим, что какие-нибудь три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ при аффинном преобразовании f переходят в компланарные векторы $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$.

Отложим векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ от произвольной точки O пространства

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}.$$

Пусть O', A', B', C' — образы точек O, A, B, C при преобразовании f. Тогда

$$\overrightarrow{O'A'}=\boldsymbol{a}',\quad \overrightarrow{O'B'}=\boldsymbol{b}',\quad \overrightarrow{O'C'}=\boldsymbol{c}'.$$

Так как по предположению векторы $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$ компланарны, то точки O', A', B', C' лежат в одной плоскости и, значит, преобразование f любую точку M пространства переводит в точку этой плоскости. Значит, f — не взаимно однозначное преобразование, что противоречит предположению. Отсюда также следует, что при аффинном преобразовании два неколлинеарных вектора переходят в два неколлинеарных вектора, а любой ненулевой вектор переходит в ненулевой вектор.

Аналогичные положения имеют место для аффинных отображений плоскости на плоскость и для аффинных преобразований плоскости, а также для прямых.

Если точечное линейное преобразование пространства задано в координатах

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1,\\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2,\\ z' &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3, \end{aligned} \tag{1}$$

то оно будет взаимно однозначным, следовательно аффинным, тогда и только тогда, когда

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0,$$

так как при заданном образе $M'(x', y', z')$ он будет иметь один и только один прообраз $M(x, y, z)$ тогда и только тогда, когда система (1) имеет при заданных x', y', z' одно и только одно решение x, y, z, а необходимым и достаточным условием этого является неравенство $\Delta\neq 0$.

Аналогично точечное линейное отображение плоскости π в плоскость π' или точечное линейное преобразование плоскости π будет взаимно однозначным (т. е. аффинным) тогда и только тогда, когда оно два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ плоскости π переводит в два неколлинеарных вектора.

Если точечное линейное отображение плоскости π на плоскость π', или точечное линейное преобразование плоскости π, задано в координатах

$$x'=a_{11}x+a_{12}y+a_1,\quad y'=a_{21}x+a_{22}y+a_2,$$

то оно будет взаимно однозначным, следовательно аффинным, тогда и только тогда, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При аффинном преобразовании пространства любая плоскость π отображается аффинно на некоторую плоскость π', которая, в частности, может совпасть с плоскостью π. Говорят, что аффинное преобразование пространства порождает аффинное отображение плоскостей пространства.

Наконец, линейное отображение прямой p на прямую p' или преобразование прямой p будет взаимно однозначным тогда и только тогда, когда оно ненулевой вектор e_1 прямой p переводит в ненулевой вектор.

Аффинное преобразование пространства порождает аффинные отображения прямых пространства. Аффинное отображение плоскости на плоскость порождает аффинное отображение прямых, лежащих в этих плоскостях.

Если линейное отображение прямой на прямую или преобразование прямой задано в координатах

$$x' = a_{11}x + a_1,$$

то оно будет взаимно однозначным, следовательно аффинным, тогда и только тогда, когда $a_{11} \neq 0$.

§ 176. Геометрическая теория аффинных преобразований *

Аффинное отображение плоскости π на плоскость π' (и аффинное преобразование пространства) можно определить как такое взаимно однозначное отображение плоскости π на плоскость π', при котором три любые точки плоскости π, принадлежащие одной прямой, отображаются в три точки плоскости π', также принадлежащие одной прямой.

Из этого определения следует, что такое отображение линейное. Доказательство этого положения достаточно сложное, поэтому разделим его на ряд теорем **.

---

* Все данные здесь определения и теоремы относятся к действительной плоскости и действительному пространству. Данное здесь определение аффинного отображения и аффинного преобразования в случае действительной плоскости и действительного пространства не эквивалентно определению, данному в предыдущем параграфе, которое можно отнести, со всеми вытекающими из него свойствами, для комплексного пространства и комплексной плоскости.

** Таким образом, под аффинным отображением плоскости π на плоскость π' во всех последующих теоремах мы подразумеваем взаимно однозначное отображение, сохраняющее прямолинейное расположение точек. Доказательство линейности взаимно однозначного преобразования пространства, сохраняющего прямолинейное расположение точек, не содержит никаких дополнительных трудностей

Теорема 1. *При аффинном отображении α плоскости π на плоскость π' множество всех точек произвольной прямой l, лежащей на плоскости π, отображается и притом взаимно однозначно на множество всех точек некоторой прямой l', лежащей на плоскости π'.*

Прямая l' называется образом прямой l, а прямая l — прообразом прямой l' при аффинном отображении α.

Доказательство. Возьмем на прямой l две различные точки A и B. Пусть A' и B' — их образы при аффинном отображении α. Тогда множество всех точек прямой l отображается во множество всех точек прямой l', проходящей через точки A' и B'.

Обратно, прообраз C любой точки C' прямой $A'B'$ лежит на прямой AB. В самом деле, допустим, что на прямой l' есть точка C', прообраз C которой не лежит на прямой AB. Возьмем любую точку M, лежащую на плоскости π. Из трех пар прямых:

$$MA,\ BC;\ MB,\ CA;\ MC,\ AB$$

есть по крайней мере одна пара пересекающихся. Пусть, например, MA и BC пересекаются в точке P. Так как точки B, P и C принадлежат одной прямой, то их образы B', P', C' также принадлежат одной прямой, именно прямой l'. Далее, точки P, M и A принадлежат одной прямой, следовательно, их образы P', M' и A' также лежат на одной прямой, а так как точки P' и A' лежат на прямой l' и различны, то точка M' лежит на прямой l'.

Таким образом, образы всех точек M плоскости π лежат на прямой l' и, значит, преобразование α не взаимно однозначное — противоречие.

Итак, доказано, что прообраз C любой точки C' прямой l' лежит на прямой l. Значит, отображение α порождает отображение множества всех точек прямой l на множество всех точек прямой l'. Это отображение взаимно однозначное в силу взаимной однозначности отображения α.

Замечание. В процессе доказательства установлено, что при аффинном отображении α плоскости π на плоскость π' три точки плоскости π, не принадлежащие одной прямой, отображаются в три точки плоскости π', также не принадлежащие одной прямой.

Следовательно, отображение, обратное аффинному, снова аффинное.

Теорема 2. *При аффинном отображении α плоскости π на плоскость π' образы p' и q' параллельных прямых p и q суть параллельные прямые, а образы p' и q' пересекающихся прямых p и q суть пересекающиеся прямые; при этом точка M' пересечения прямых p' и q' является образом точки M пересечения прямых p и q.*

Доказательство. Если прямые p и q параллельны, т. е. не имеют ни одной общей точки, то их образы p' и q' при аффинном отображении α также не имеют ни одной общей точки, т. е. $p' \parallel q'$.

Если прямые p и q пересекаются, т. е. имеют и притом только одну общую точку M, то и прямые p' и q' имеют только одну общую точку M', являющуюся образом точки M.

Теорема 3. *При аффинном отображении α плоскости π на плоскость π' середина O произвольного отрезка AB переходит в середину O' отрезка $A'B'$* (A' и B' — *образы точек A и B при отображении* α).

Доказательство. Возьмем на плоскости π произвольную точку C, не лежащую на прямой AB, соединим ее с точками A и B и проведем через точку A прямую, параллельную BC, а через точку B — прямую, параллельную AC; точку пересечения проведенных прямых обозначим через D. Прямые CD и AB пересекаются в точке O, являющейся серединой отрезка AB. После аффинного отображения α точки A, B, C, D перейдут в точки A', B', C', D', такие, что $A'D' \| C'B'$ и $A'C' \| B'D'$, причем прямые $A'B'$ и $C'D'$ пересекаются в точке O', являющейся образом точки O. В силу того что $A'D' \| C'B'$ и $A'C' \| B'D'$ точка O' является серединой отрезка $A'B'$.

Теорема 4. *Если разделить отрезок AB на n равных частей*

$$AO_1 = O_1O_2 = \ldots = O_{n-1}B,$$

то

$$A'O_1' = O_1'O_2' = \ldots = O_{n-1}'B',$$

где A', O_1', O_2', ..., O_{n-1}', B' — образы точек A, O_1, O_2, ..., O_{n-1}, B при аффинном отображении α плоскости π на плоскость π'.

Эта теорема является следствием предыдущей.

Из этой теоремы следует, что если точка C делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в рациональном отношении λ, то образ C' точки C при аффинном отображении α плоскости π на плоскость π' делит отрезок $\overrightarrow{A'B'}$ в том же отношении λ.

Основная трудность, которую нам еще предстоит преодолеть, — это доказательство того, что простое отношение (ABC) трех точек, принадлежащих одной прямой плоскости π, инвариантно при аффинном отображении плоскости π на плоскость π' и в том случае, когда (ABC) — иррациональное число.

Теорема 5 (Дарбу). *Рассмотрим аффинное отображение α плоскости π на плоскость π'. Пусть AB — произвольный отрезок, лежащий на плоскости π, а C — какая-нибудь точка прямой AB, внешняя для отрезка AB. Тогда образ C' точки C при отображении α является внешней точкой для отрезка $A'B'$, где A' и B' — образы точек A и B при отображении α.*

Доказательство. Проведем через точки A и B две параллельные прямые p и q и построим два неравных отрезка P_1P_2 и Q_1Q_2, лежащих соответственно на прямых p и q, таких, что точка A является серединой отрезка P_1P_2, а точка B — серединой отрезка Q_1Q_2. Прямые P_1Q_1 и P_2Q_2 пересекаются в точке M, лежащей на прямой AB; прямые P_1Q_2 и P_2Q_1 также пересекаются в точке N, лежащей на прямой AB. Обозначим через C середину отрезка MN и докажем, что:

1) точка C лежит вне отрезка AB;

2) изменяя отрезки P_1P_2 и Q_1Q_2, можно придать точке C любое положение на прямой AB вне отрезка AB.

1. Введем на прямой AB систему координат и пусть точки A и B во введенной системе имеют координаты x_1 и x_2.

Так как

$$\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}} = -\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{Q_1Q_2}} = \lambda,$$

то координаты x_M и x_N точек M и N определяются соотношениями

$$x_M = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \quad x_N = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},$$

а координата точки C

$$x = \frac{1}{2}(x_M + x_N) = \frac{x_1 - \lambda^2 x_2}{1-\lambda^2}.$$

Отсюда следует, что точка C делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $-\lambda^2$ и потому лежит вне отрезка AB.

2. Так как $\lambda = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{Q_1Q_2}}$, а выбор длин и направлений отрезков P_1P_2 и Q_1Q_2 произволен, то λ может принимать все действительные значения кроме 0 и ± 1 (так как мы считаем отрезки P_1P_2 и Q_1Q_2 невырожденными и предполагаем, что $P_1P_2 \neq Q_1Q_2$). Отсюда следует, что число $-\lambda^2$ принимает все отрицательные значения кроме -1, а это и означает, что точка C может занимать на прямой AB любое положение вне отрезка AB.

Произведем теперь аффинное отображение α плоскости π на плоскость π'. Пусть A', B' P_1', P_2', Q_1', Q_2', M', N', C' — образы точек A, B, P_1, P_2, Q_1, Q_2, M, N, C. В силу предыдущих теорем $P_1'P_2' \parallel Q_1'Q_2'$ и точки A' и B' соответственно середины отрезков $P_1'P_2'$ и $Q_1'Q_2'$; точка M' пересечения прямых $P_1'Q_1'$ и $P_2'Q_2'$ лежит на прямой $A'B'$; точка N' пересечения прямых $P_1'Q_2'$ и $P_2'Q_1'$ также лежит на прямой $A'B'$. Наконец, точка C' середина отрезка $A'B'$ и внешняя точка для отрезка $A'B'$ (это доказывается точно так же, как выше было доказано, что точка C лежит вне отрезка AB).

Из доказанной теоремы следует, что при аффинном отображении α плоскости π на плоскость π' любая внутренняя точка C отрезка AB, лежащего на плоскости π, отображается во внутреннюю точку C' отрезка $A'B'$.

В самом деле, в противном случае аффинное отображение α^{-1} плоскости π' на плоскость π, обратное для α, отображало бы внешнюю точку C' отрезка $A'B'$ во внутреннюю точку C отрезка AB, что противоречит теореме Дарбу.

Теорема 6. *При аффинном отображении α плоскости π на плоскость π' сохраняется простое отношение трех точек, принадлежащих одной прямой.*

Доказательство. Возьмем на плоскости π три произвольные попарно различные точки A, B и C и обозначим простое отношение (ABC) через λ:

$$(ABC)=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\lambda.$$

Рассмотрим аффинное отображение α плоскости π на плоскость π'. Пусть A', B', C' — образы точек A, B и C при этом отображении. Обозначим простое отношение $(A'B'C')$ через λ':

$$(A'B'C')=\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}=\lambda';$$

требуется доказать, что $\lambda=\lambda'$. Предположим, что точка C — внутренняя точка отрезка AB (так что $\lambda>0$), тогда в силу следствия из теоремы Дарбу точка C' — внутренняя точка отрезка $A'B'$ (так что и $\lambda'>0$). Предположим, что $\lambda>\lambda'$. Разделим направленный отрезок $\overrightarrow{A'B'}$ в отношении λ:

$$\frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{D'B'}}=\lambda.$$

Разделим отрезок $A'B'$ на n равных частей и выберем n столь большим, чтобы одна из точек деления O' попала между точками C' и D'. Так как (при $\lambda>\lambda'$) точка D' лежит между точками C' и B', то и точка O' лежит между C' и B', а следовательно, прообраз O точки O' лежит между точками C и B. Теперь находим

$$\frac{\overrightarrow{A'O'}}{\overrightarrow{O'B'}}=\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{OB}},\quad \frac{\overrightarrow{A'O'}}{\overrightarrow{O'B'}}<\frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{D'B'}}=\lambda,\quad \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\lambda<\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{OB}},$$

и мы пришли к противоречию.

Если точка C лежит вне отрезка AB, например точка B лежит между точками A и C, то

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}=\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'C'}},$$

и прибавляя к обеим частям этого равенства по 1, получим

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}.$$

Аналогично доказывается инвариантность простого отношения при аффинном отображении в случае когда точка A лежит между точками B и C. Итак, доказано, что аффинное отображение линейное.

§ 177. Свойства аффинных преобразований и отображений

Теорема 1*. *Произведение двух аффинных преобразований есть снова аффинное преобразование.*

Доказательство. Пусть f и g — два аффинных преобразования. Рассмотрим три произвольные точки A, B и C, принадлежащие одной прямой, и пусть A', B C' — образы точек A, B, C при аффинном преобразовании f, а A'', B'', C'' — образы точек A', B', C' при аффинном преобразовании g.

Так как точки A, B, C принадлежат одной прямой, то существует такое число λ, что $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ но тогда в силу линейности отображения f $\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$, значит (в силу того, что g также линейное преобразование) $\overrightarrow{A''C''}=\lambda\overrightarrow{A''B''}$. Таким образом, произведение gf есть линейное преобразование. К тому же оно и взаимно однозначно (ибо произведение двух любых взаимно однозначных преобразований есть взаимно однозначное преобразование), следовательно, gf — аффинное преобразование.

Теорема 2. *Преобразование f^{-1}, обратное к аффинному преобразованию, также является аффинным.*

Доказательство. Пусть A', B', C' — три произвольные точки, принадлежащие одной прямой и связанные соотношением $\overrightarrow{A'C'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$; докажем, что тем же соотношением будут связаны их прообразы при аффинном преобразовании α.

В самом деле, пусть A и B — прообразы точек A' и B'. Построим точку C, такую, что $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$. Пусть C^* — образ точки C при аффинном преобразовании f. Тогда $\overrightarrow{A'C^*}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$. Значит, $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'C^*}$, т. е. точка C^* совпадает с точкой C', поэтому C — прообраз C'. Кроме того, ясно, что f^{-1} взаимно однозначное пре-

---

* В теоремах 1 и 2 имеются в виду аффинные преобразования пространства, плоскости или прямой, причем в дальнейшем под аффинным преобразованием будем понимать точечное линейное и взаимно однозначное преобразование пространства, плоскости или прямой (§ 175).

образование (так как преобразование, обратное любому взаимно однозначному преобразованию, снова взаимно однозначно).

Следствие. Из теорем 1 и 2 следует, что множество всех аффинных преобразований пространства образует группу.

Точно так же доказывается, что множество всех аффинных преобразований плоскости образует группу так же, как и множество всех аффинных преобразований прямой образует группу.

Теорема 3. *При аффинном преобразовании пространства*

1) *две параллельные плоскости переходят в две параллельные плоскости;*

2) *две пересекающиеся плоскости* π_1 *и* π_2 *переходят в две пересекающиеся плоскости* π_1' *и* π_2'; *образом прямой* (π_1, π_2), *по которой пересекаются плоскости* π_1 *и* π_2, *является прямая* (π_1', π_2') *пересечения плоскостей* π_1' *и* π_2'; *при этом отображение прямой* (π_1, π_2) *на прямую* (π_1', π_2') — *аффинное;*

3) *две параллельные прямые переходят в две параллельные прямые;*

4) *две пересекающиеся прямые* p *и* q *переходят в две пересекающиеся прямые* p' *и* q', *причем образом точки* M *пересечения прямых* p *и* q *является точка* M' *пересечения прямых* p' *и* q';

5) *две скрещивающиеся прямые переходят в две скрещивающиеся прямые;*

6) *если прямая* p *параллельна плоскости* π, *то и прямая* p', *являющаяся образом прямой* p, *параллельна плоскости* π', *в которую переходит плоскость* π *при данном аффинном преобразовании;*

7) *если прямая* p *и плоскость* π *пересекаются, то пересекаются прямая* p' *и плоскость* π', *являющиеся их образами, причем точка пересечения* M' *является образом точки* M *пересечения прямой* p *и плоскости* π.

Доказательство. 1. Если бы образы двух параллельных плоскостей имели хотя бы одну общую точку M', то ее прообраз M должен лежать на каждой из данных параллельных плоскостей, что невозможно.

2. Если плоскости π_1 и π_2 пересекаются, π_1' и π_2' — соответственно образы плоскостей π_1 и π_2, то образ любой точки прямой (π_1, π_2) должен лежать и на плоскости π_1', и на плоскости π_2', т. е. на линии (π_1', π_2') их пересечения. Таким образом, прямая (π_1, π_2) отображается в прямую (π_1', π_2'). Так как преобразование, обратное аффинному, снова аффинное, то и обратно, прямая (π_1', π_2') аффинно отображается в прямую (π_1, π_2). Поэтому прямая (π_1, π_2) отображается на прямую (π_1, π_2). Линейность и взаимная однозначность этого отображения (т. е. аффинность) следуют из того, что f — аффинное преобразование.

3. Две параллельные прямые p и q всегда лежат в одной плоскости π. Их образы p' и q' при аффинном преобразовании f бу-

дут лежать на плоскости π', являющейся образом плоскости π при аффинном преобразовании f. Прямые p' и q' параллельны, так как если бы они имели общую точку M', то ее прообраз M должен лежать и на прямой p, и на прямой q, что невозможно.

Положения п, 4, 5, 6, 7 доказываются аналогично.

Теорема 4. *Существует и притом только одно аффинное преобразование пространства, которое любые четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, переводит в произвольные четыре точки A', B', C', D', также не лежащие в одной плоскости.*

Доказательство существования. Так как точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ некомпланарны. Точно также некомпланарны и векторы $\overrightarrow{D'A'}$, $\overrightarrow{D'B'}$ и $\overrightarrow{D'C'}$. Рассмотрим две системы координат: одну с началом в точке D и масштабными векторами $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{e}_3$ и другую с началом в точке D' и масштабными векторами $\overrightarrow{D'A'}=\boldsymbol{e}_1'$, $\overrightarrow{D'B'}=\boldsymbol{e}_2'$, $\overrightarrow{D'C'}=\boldsymbol{e}_3'$.

Пусть M — произвольная точка пространства и x, y, z — ее координаты в первой системе. Поставим в соответствие точке M такую точку M', которая во второй системе имеет те же координаты x, y, z, какие имеет точка M в первой системе. Это соответствие является аффинным преобразованием, так как оно взаимно однозначно и линейно. Это преобразование переводит точки A, B, C, D соответственно в точки A', B', C', D', так как точки первой четверки имеют в первой системе такие же координаты, какие точки второй четверки имеют во второй системе.

Доказательство единственности. Предположим, что существует другое аффинное преобразование, переводящее точки A, B, C, D соответственно в точки A', B', C', D'. В силу линейности преобразования любой точке M, имеющей в первой системе координаты x, y, z, должна соответствовать точка M', которая имеет во второй системе такие же координаты, какие точка M имеет в первой системе. Следовательно, это преобразование совпадает с тем, которое было построено при доказательстве существования.

Следствие. Аффинное преобразование пространства, которое оставляет неподвижными четыре точки, не лежащие в одной плоскости, есть тождественное преобразование.

Замечание. Аналогично доказывается, что аффинное отображение плоскости на плоскость или аффинное преобразование плоскости определяется и притом однозначно соответствием двух неколлинеарных троек точек.

Аффинное отображение прямой на прямую или аффинное преобразование прямой определяется и притом однозначно заданием двух пар соответственных точек.

§ 178. Аффинные преобразования в координатах

Пусть даны два аффинных преобразования пространства f и g относительно общей декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3, \end{aligned} \qquad \operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (f)$$

и

$$\begin{aligned} x' &= b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z + b_1, \\ y' &= b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z + b_2, \\ z' &= b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z + b_3, \end{aligned} \qquad \operatorname{Det} B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (g)$$

Преобразование g переводит точку $M(x, y, z)$ в точку $M'(x'\ y', z')$, определяемую формулами (g), а преобразование f точку $M'(x', y'\ z')$ переводит в точку $M''(x'', y'', z'')$ с координатами

$$\begin{aligned} x'' &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_1, \\ y'' &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_2, \\ z'' &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_3. \end{aligned}$$

Значит, мы получим преобразование fg в координатах, если в последние формулы вместо x', y', z' подставим их выражения из формул (g); сделав это, получим

$$\begin{aligned} x'' = {} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})\,x + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})\,y + \\ & + (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33})\,z + a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 + a_1, \\ y'' = {} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})\,x + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})\,y + \\ & + (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33})\,z + a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 + a_2, \\ z'' = {} & (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31})\,x + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32})\,y + \\ & + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33})\,z + a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 + a_3. \end{aligned}$$

Отметим, что матрица C преобразования fg равна произведению матрицы A преобразования f на матрицу B преобразования g:

$$C = AB.$$

Отсюда

$$\operatorname{Det} C = \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} B,$$

и так как $\operatorname{Det} A \neq 0$ и $\operatorname{Det} B \neq 0$, то и $\operatorname{Det} C \neq 0$. Мы еще раз доказали теорему о том, что произведение двух аффинных преобразований есть аффинное преобразование.

Заменяя в соотношениях (f) x, y, z соответственно на x', y', z', а x', y', z' соответственно на x, y, z и разрешая затем полученные соотношения относительно x', y', z', получим формулы, дающие в координатах преобразование f^{-1}, обратное f:

$$\begin{aligned} x' &= a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{13}z + a'_1, \\ y' &= a'_{21}x + a'_{22}y + a'_{23}z + a'_2, \\ z' &= a'_{31}x + a'_{32}y + a'_{33}z + a'_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Матрица $B = (a'_{ik})$ этого линейного преобразования есть матрица, обратная для матрицы A аффинного преобразования f:

$$B = A^{-1},$$

а потому

$$\operatorname{Det} B = \frac{1}{\operatorname{Det} A} \neq 0.$$

Следовательно, формулами (1) дается аффинное преобразование.

При аффинном преобразовании f, заданном формулами (f), координаты вектора $\boldsymbol{a}' = \{x', y', z'\}$, являющегося образом вектора $\boldsymbol{a} = \{x, y, z\}$, выражаются теми же соотношениями (f), в которых надо положить $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, т. е. координаты x', y', z' образа $\boldsymbol{a}'$ вектора $\boldsymbol{a} = \{x, y, z\}$ являются линейными однородными функциями координат x, y, z:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \quad \text{где} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема. *Рассмотрим в ориентированном пространстве произвольную упорядоченную тройку векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. *Пусть* $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$ — *образы этих векторов при аффинном преобразовании* (2). *Тогда объемы* $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}'$ *и* $\boldsymbol{abc}$ *ориентированных параллелепипедов, построенных на этих тройках векторов, связаны соотношением*

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{abc} \cdot \Delta, \quad \text{где} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\boldsymbol{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$, $\boldsymbol{a}' = \{x'_1, y'_1, z'_1\}$, $\boldsymbol{b}' = \{x'_2, y'_2, z'_2\}$, $\boldsymbol{c}' = \{x'_3, y'_3, z'_3\}$.

Тогда

$$\begin{aligned} x'_i &= a_{11}x_i + a_{12}y_i + a_{13}z_i, \\ y'_i &= a_{21}x_i + a_{22}y_i + a_{23}z_i, \quad i = 1, 2, 3. \\ z'_i &= a_{31}x_i + a_{32}y_i + a_{33}z_i, \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь находим

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}' = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3.$$

Подставляя сюда вместо x_i', y_i', z_i' $(i=1,\ 2,\ 3)$ их выражения из формул (3) и используя формулу для произведения двух определителей третьего порядка, получим

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3,$$

или

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{abc}\cdot\Delta, \tag{4}$$

так как

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3.$$

Из доказанной теоремы следует, что при аффинном преобразовании пространства отношение объемов ориентированных тетраэдров (невырожденных) не меняется.

В самом деле, если $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ — три некомпланарных вектора, а $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{q}'$, $\boldsymbol{r}'$ — их образы при аффинном преобразовании (2), то

$$\boldsymbol{p}'\boldsymbol{q}'\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{pqr}\cdot\Delta.$$

Отсюда и из соотношения (4) (в силу того что $\Delta \neq 0$) получим

$$\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}'}{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{q}'\boldsymbol{r}'} = \frac{\boldsymbol{abc}}{\boldsymbol{pqr}}.$$

Отметим еще ряд следствий: если $\Delta > 0$, то аффинное преобразование (f) сохраняет ориентации ориентированных параллелепипедов, а если $\Delta < 0$, то меняет их ориентации на противоположные.

Если $|\Delta| = 1$, то объемы всех параллелепипедов при таком аффинном преобразовании сохраняются.

Множество Γ_1 всех аффинных преобразований пространства, сохраняющих объемы, образует группу, являющуюся подгруппой группы Γ всех аффинных преобразований.

Если $\Delta = 1$, то сохраняются и объемы, и ориентации тетраэдров; множество всех аффинных преобразований пространства, сохраняющих объемы и ориентацию, также образует группу Γ_2, являющуюся подгруппой группы Γ_1 аффинных преобразований, сохраняющих объемы.

Если $\operatorname{Det} A = -1$, то объемы тетраэдров сохраняются, но ориентации их меняются на противоположные (множество таких преобразований не образует группы).

Если при аффинном преобразовании пространства имеется неподвижная точка (т. е. точка O, образом которой является она сама), то такое аффинное преобразование называется центроаффинным. Если принять неподвижную точку центроаффинного преобразования за начало общей декартовой системы координат, то центроаффинное преобразование в координатах запишется так:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Множество всех центроаффинных преобразований пространства образует группу Γ_3, являющуюся подгруппой группы Γ всех аффинных преобразований пространства. Множество всех центроаффинных преобразований, сохраняющих объемы, образует группу Γ_4, являющуюся подгруппой группы Γ_1 и подгруппой Γ_3. Множество всех центроаффинных преобразований, сохраняющих объемы и ориентацию, является группой Γ_5; эта группа является подгруппой групп Γ, Γ_1, Γ_3, Γ_4.

Аналогичное положение имеет место и для аффинных преобразований плоскости, только вместо объемов ориентированных параллелепипедов надо говорить о площадях ориентированных треугольников (или ориентированных параллелограммов).

§ 179. Примеры аффинных преобразований

Пример 1. Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат и поставим в соответствие точке $M(x, y)$ точку $M'(x', y')$ с координатами

$$x' = x, \quad y' = ky, \tag{1}$$

где $k > 0$.

Матрица этого преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\operatorname{Det} A = k \neq 0$, следовательно, преобразование (1) — аффинное. Пусть $P(x, 0)$ — проекция точки $M(x, y)$ на ось Ox Образом P' точки P будет она сама. Далее, $\overrightarrow{PM'} = \{0, ky\}$, $\overrightarrow{PM} = \{0, y\}$, значит, $\overrightarrow{PM'} = k\overrightarrow{PM}$ (рис. 229). Отсюда название этого преобразования: аффинное сжатие к оси Ox. Это преобразование мы уже использовали выше (см. § 105) и называли его равномерным сжатием плоскости к прямой На рис. 230 дан образ фигуры при сжатии для $k = \frac{1}{2}$. Для построения образа фигуры при сжатии заключаем фигуру в прямоугольник и прямыми, параллельными его сторонам, делим этот прямоугольник на равные прямоугольники. Затем строим образы вершин прямоугольника — это будут вершины параллелограмма. Делим этот параллелограмм на равные параллелограммы соответственно таким же числом (как и для прямоугольника) прямых, параллельных его сторонам, и врисовываем по клеткам образ начального рисунка.

Пример 2. Преобразование

$$x' = x, \quad y' = ky, \qquad k > 0,$$

заданное относительно общей декартовой системы координат, также является аффинным. Оно называется косым сжатием к оси Ox по направлению оси Oy;

если $P(x, 0)$ — проекция произвольной точки $M(x, y)$ плоскости на ось Ox параллельно оси Oy, а $M'(x, ky)$ — образ точки M в рассматриваемом преобразовании, то $\overrightarrow{PM'} = k\,\overrightarrow{PM}$. Косое сжатие называется иногда родством (рис. 231). На рис. 232 дана фигура и ее образ при косом сжатии к оси Ox.

Пример 3. Линейное преобразование, заданное относительно прямоугольной (или общей декартовой) системы координат соотношениями

$$x' = x + ky, \quad y' = y, \qquad k \neq 0,$$

называется сдвигом относительно оси Ox.

Сдвиг есть центроаффинное преобразование с детерминантом

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

так как образом точки $O(0, 0)$ является сама эта точка. При сдвиге сохраняются площади и ориентация ($\operatorname{Det} A = 1$)

Если $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, а $M'(x + ky, y)$ — ее образ при сдвиге, то $\overrightarrow{MM'} = \{ky, 0\}$, т. е. каждая точка M «сдвигается» по направлению оси Ox на расстояние, пропорциональное ее ординате (отсюда следует, что точки, лежащие по разные стороны от оси Ox, сдвигаются в противоположных направлениях) (рис. 233).

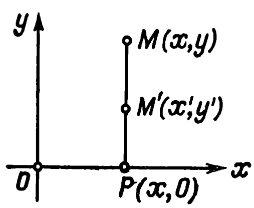


Рис. 229

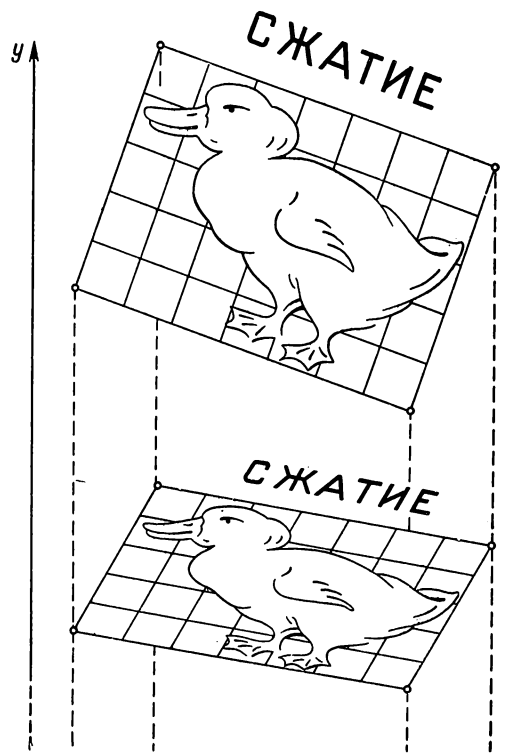


Рис. 230

На рисунке 234 показан образ фигуры при сдвиге.

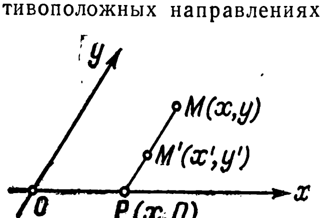


Рис. 231

Пример 4. Преобразование гомотетии с центром гомотетии в начале координат и коэффициентом гомотетии, равным k, выражается соотношениями:

$$x' = kx, \quad y' = ky \text{ (рис. 235).}$$

Так как

$$\operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2 > 0,$$

то гомотетия — центроаффинное преобразование, сохраняющее ориентацию.

На рисунке 236 дана фигура и ее образ при гомотетии с коэффициентом $k=2$.

Пример 5. Рассмотрим линейное преобразование плоскости, заданное относительно общей декартовой системы координат соотношениями

$$x' = \frac{1}{k}x, \quad y' = ky, \quad k \neq 0.$$

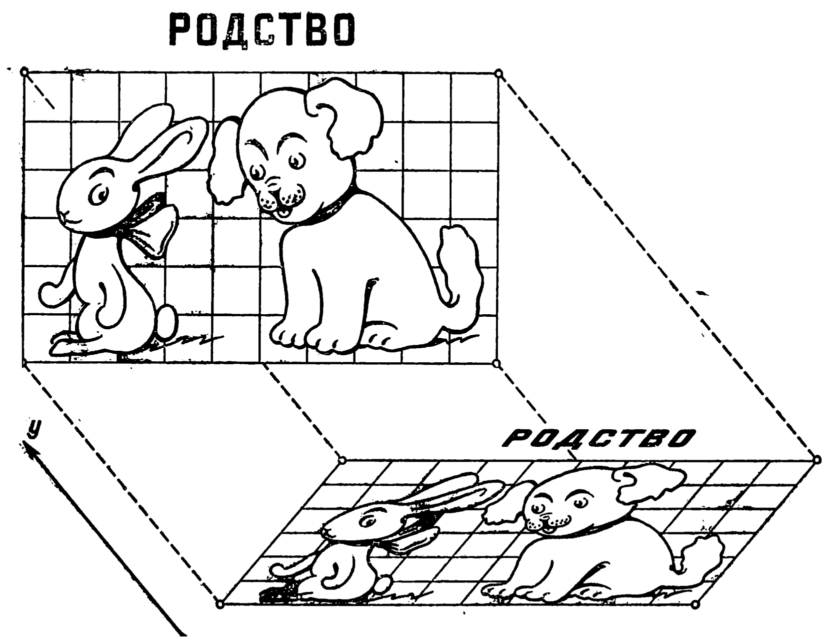


Рис. 232

Это преобразование — центроаффинное, так как данные соотношения линейные однородные и детерминант

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = 1.$$

При этом преобразовании сохраняются площади и ориентация. Оно представляет собой произведение двух косых сжатий: одно к оси Ox по направлению оси Oy с коэффициентом k, другое к оси Oy по направлению оси Ox с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Так как $x'y' = xy$, то при рассматриваемом преобразовании каждая гипербола $xy = C$ $(C \neq 0)$ отображается на себя (рис. 237 и 238); прообраз $\left(kx, \frac{y}{k}\right)$ точки (x, y) при этом преобразовании также лежит на той же гиперболе $xy = C$, на которой лежит точка (x, y). Любая точка оси Ox переходит в точку оси Ox; любая точка оси Oy переходит в точку той же оси. Это преобразование называется гиперболическим поворотом, или лоренцевым преобразованием Оно рассматривается в теории относительности.

На рис. 239 дан образ фигуры при гиперболическом повороте.

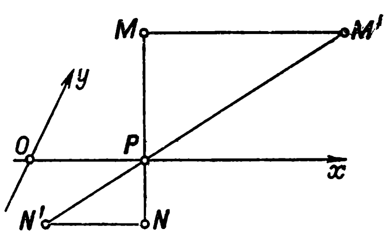


Рис. 233

Пример 6. Рассмотрим семейство парабол

$$y = ax^2 + c,$$

где a — фиксированное отрицательное число, а c — параметр (рис. 240). Пусть M (x, y) — произвольная точка плоскости. Перенесем точку M в направлении вектора a, перпендикулярного оси параболы, на одно и то же расстояние h для всех точек плоскости. Пусть точка M перейдет при этом переносе в точку P. Проведем через точку P прямую, параллельную оси параболы, и пусть эта прямая пересечет ту из парабол семейства $y = ax^2 + c$, на которой лежит точка M, в точке M'. Поставим точке M в соответствие точку M'. Докажем, что это соответствие есть аффинное преобразование. В самом деле, пусть точка M (x, y) лежит на пара-

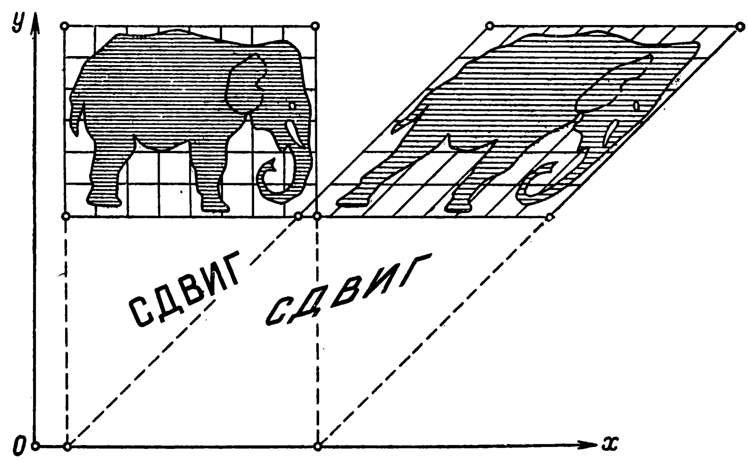


Рис. 234

боле $y = ax^2 + c$. Точка M' (x', y') лежит на той же параболе, поэтому

$$y' = ax'^2 + c.$$

Но по определению рассматриваемого преобразования имеем

$$x' = x + h,$$

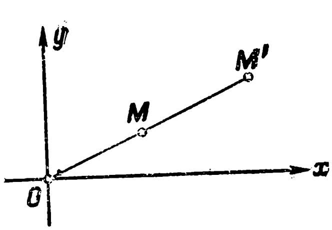


Рис. 235

поэтому

$$y' = a(x + h)^2 + c = ax^2 + 2ahx + ah^2 + c,$$

и так как

$$ax^2 + c = y,$$

то

$$y' = 2ahx + y + ah^2.$$

Итак,

$$x' = x + h, \quad y' = 2ahx + y + ah^2.$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2ah & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Значит, построенное аффинное преобразование сохраняет площади и ориентацию; оно называется параболическим поворотом. При параболическом повороте каждая парабола семейства парабол

$$y = ax^2 + b$$

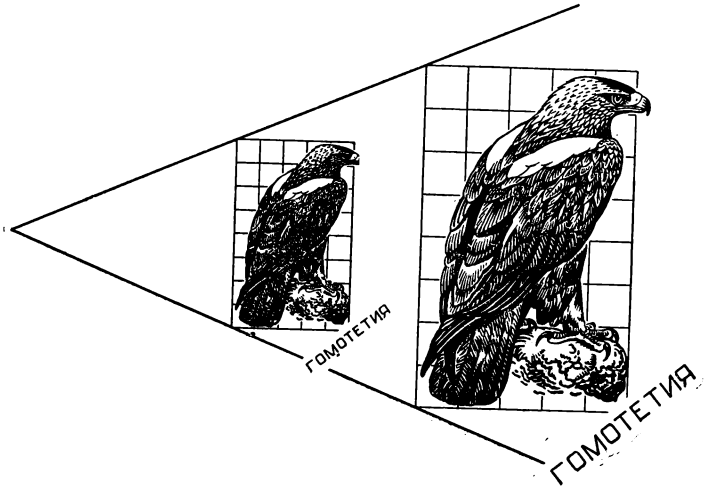


Рис. 236

переходит в себя. Параболическому повороту можно дать следующее механическое истолкование. Пусть из различных точек вертикали в различные моменты времени, но с одной и той же начальной скоростью выбрасываются материальные точки. Тогда все они будут описывать параболы с общей осью (если рассматривать движение в пустоте). За произвольный промежуток времени в горизонтальном направлении все точки пройдут одно и то же расстояние и каждая точка останется на своей траектории, т. е. сила тяжести над движущимися точками произведет параболический поворот.

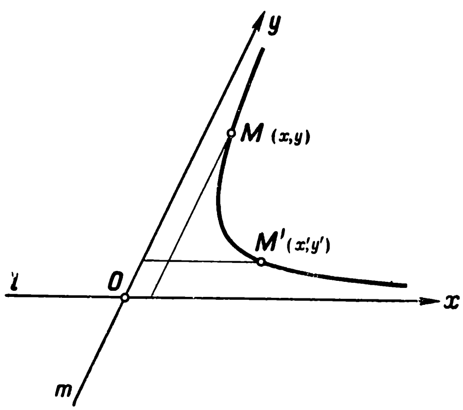


Рис. 237

Таким образом, например, площадь треугольника ABC, образованного свободно летящими точками, не будет меняться с течением времени (если, конечно, точки были выброшены из точек одной вертикали с одинаковыми начальными скоростями (рис. 241)). На рисунке 242 дан образ фигуры при параболическом повороте.

Пример 7. Формулами

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = kz \quad (k > 0)$$

определяется линейное преобразование пространства. Оно аффинное, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k \neq 0.$$

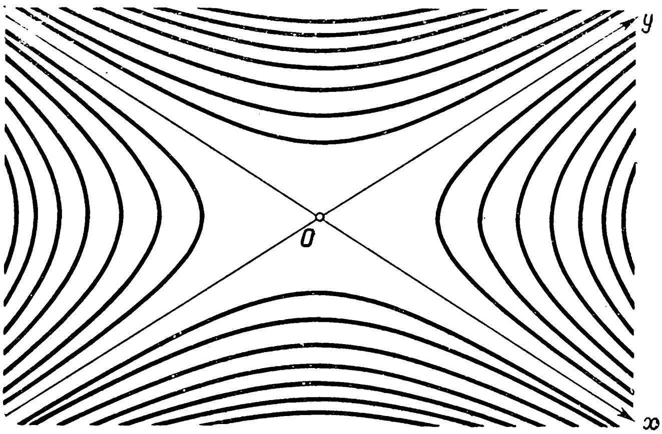


Рис. 238

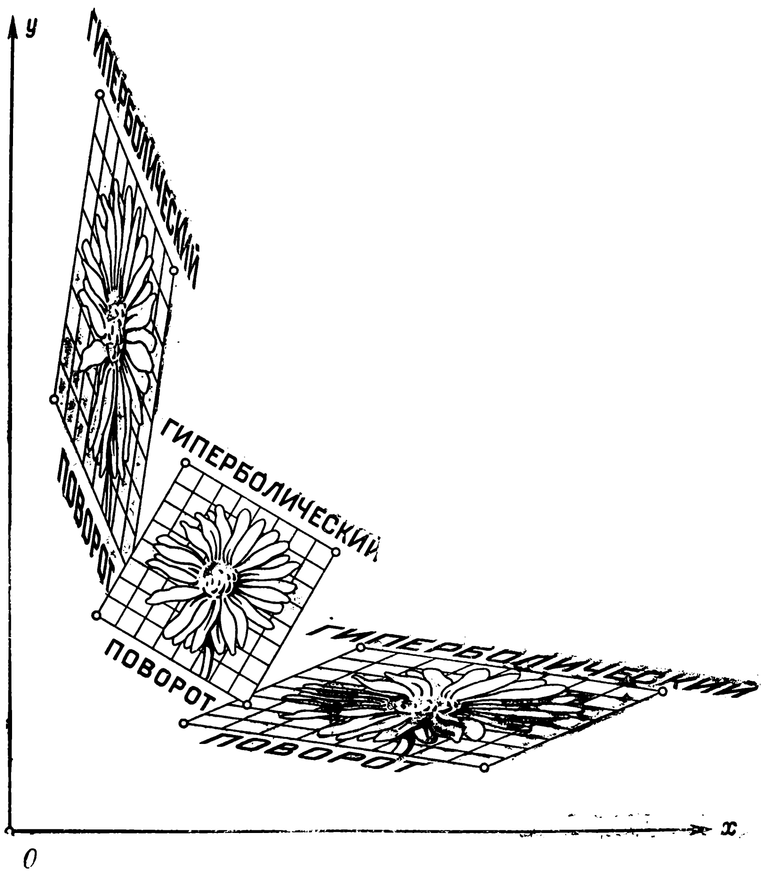


Рис. 239

Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка, $M'(x', y', z')$ — ее образ при этом преобразовании, а $P(x, y, 0)$ — параллельная проекция точки $M(x, y, z)$ в пло-

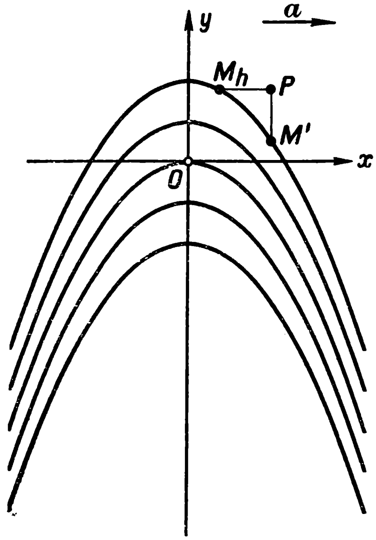


Рис. 240

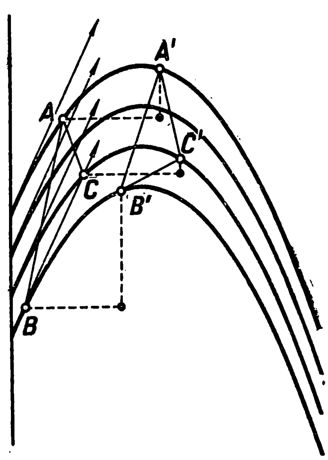


Рис. 241

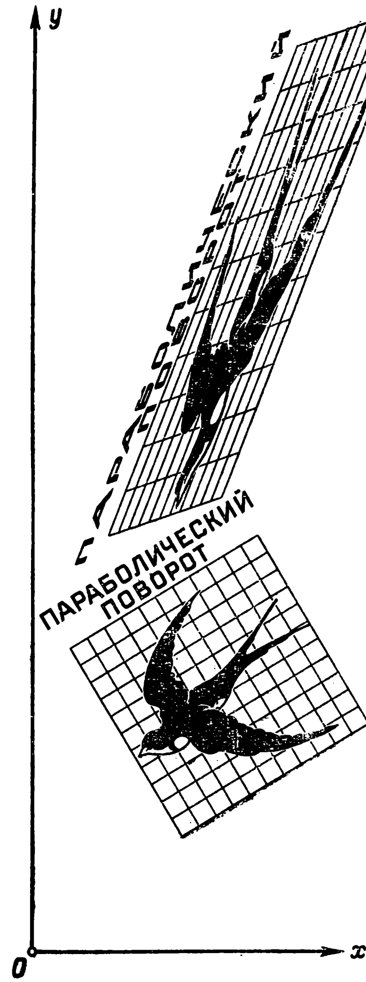


Рис. 242

скость xOy параллельно оси Oz, то $\overrightarrow{PM'} = k\,\overrightarrow{PM}$. Это преобразование называется аффинным сжатием пространства к плоскости xOy по направлению оси Oz (рис. 243). На рис. 244 дана фигура и ее образ при аффинном сжатии к плоскости xOy по направлению оси Oz.

Пример 8. Формулами

$$x' = x + kz, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (k \neq 0)$$

определяется центроаффинное преобразование, так как формулы линейные, однородные и

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

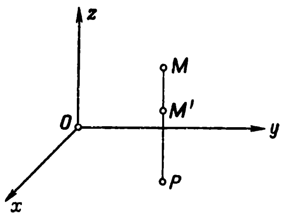


Рис. 243

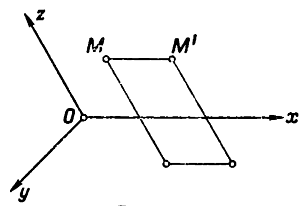


Рис. 245

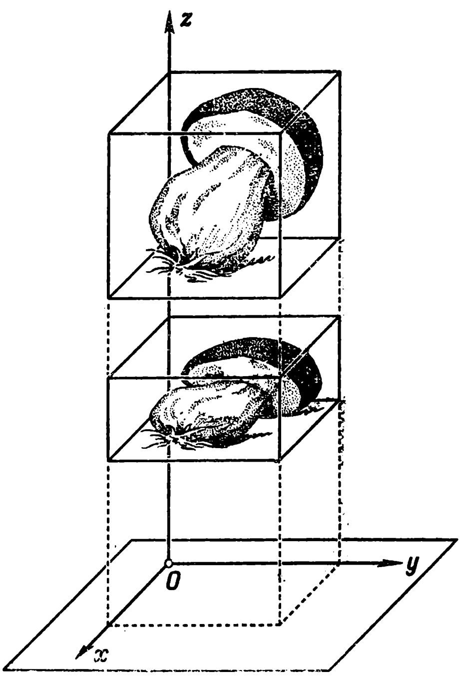


Рис. 244

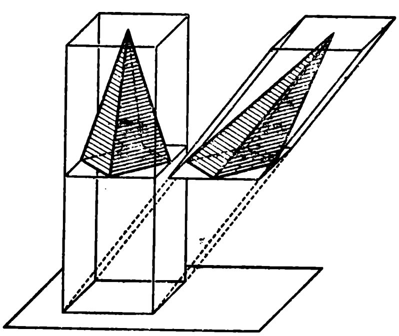


Рис. 246

Это аффинное преобразование называется сдвигом пространства относительно плоскости xOy по направлению оси Ox (рис. 245). При сдвиге сохраняются объемы и ориентация. Если M — произвольная точка пространства, а M' — ее образ, то $\overrightarrow{MM'} = \{kz, 0, 0\}$, т. е. все точки пространства сдвигаются по направлению оси Ox на величину, пропорциональную аппликате; точки, лежащие по разные стороны от плоскости xOy, сдвигаются в противоположные стороны. На рисунке 246 дана фигура и ее образ при сдвиге относительно плоскости xOy по направлению оси Ox.

§ 180. Ортогональные преобразования и движения

Ортогональным преобразованием пространства называется преобразование множества всех точек пространства, обладающее следующим свойством: если A и B — две произвольные точки, а A' и B' — их образы, то $AB = A'B'$.

Иначе говоря, *ортогональным преобразованием пространства называется преобразование, при котором сохраняются длины отрезков.*

Аналогичное определение дается для ортогонального преобразования плоскости и для ортогонального отображения плоскости на плоскость.

Теорема 1. *Ортогональное преобразование есть линейное преобразование.*

Доказательство. Рассмотрим три попарно различные точки A, B, C, принадлежащие одной прямой. Пусть точка B лежит между точками A и C; тогда $AB + BC = AC$. Пусть A', B', C' — образы точек A, B, C при ортогональном преобразовании ω. Тогда

$$A'B' = AB,\ B'C' = BC,\ A'C' = AC,$$

значит,

$$A'B' + B'C' = A'C',$$

следовательно, точки A', B', C' попарно различны, принадлежат одной прямой и точка B' лежит между A' и C'. Отсюда следует, что если $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, то и $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$.

И для плоскости, и для пространства имеют место следующие утверждения, вытекающие непосредственно из определения ортогонального преобразования: произведение двух ортогональных преобразований есть ортогональное преобразование; преобразование, обратное ортогональному, снова ортогональное.

Иначе говоря, *множество всех ортогональных преобразований пространства образует группу.*

Эта группа является *подгруппой* группы аффинных преобразований пространства.

Аналогичные положения имеют место и для плоскости.

Ортогональные преобразования пространства, сохраняющие ориентацию, называются движениями, или ортогональными преобразованиями первого рода.

Множество всех движений пространства также образует группу; эта группа есть подгруппа группы всех ортогональных преобразований пространства.

Аналогичные положения имеют место и для плоскости.

Ортогональные преобразования пространства, меняющие ориентацию, иногда называют движениями второго рода. Совокупность движений второго рода группы не образует (аналогично и для плоскости).

Теорема 2. *Существует и притом только одно ортогональное преобразование пространства первого рода, которое три неколлинеарные точки A, B, C переводит соответственно в три неколлинеарные точки A', B', C', такие, что $B'C'=BC$, $C'A'=CA$, $A'B'=AB$.*

Доказательство. Докажем существование и единственность ортогонального преобразования, не меняющего ориентации и переводящего точки A, B, C соответственно в точки A', B', C'. Возьмем в пространстве две точки O и O', такие, чтобы тетраэдры $\overrightarrow{ABCO}$ и $\overrightarrow{A'B'C'O'}$ были равны и имели одинаковую ориентацию. Существует и притом только одно аффинное преобразование, которое точки A, B, C, O переводит соответственно в точки A', B', C', O'. При этом если M и N — две произвольные точки пространства, то, разлагая векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ по векторам

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c},$$

будем иметь

$$\overrightarrow{OM}=x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}+z_1\boldsymbol{c},$$
$$\overrightarrow{ON}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}+z_2\boldsymbol{c},$$
$$\overrightarrow{O'M'}=x_1\boldsymbol{a}'+y_1\boldsymbol{b}'+z_1\boldsymbol{c}',$$
$$\overrightarrow{O'N'}=x_2\boldsymbol{a}'+y_2\boldsymbol{b}'+z_2\boldsymbol{c}',$$

где M' и N' — образы точек M и N при этом аффинном преобразовании, а $\boldsymbol{a}'=\overrightarrow{O'A'}$, $\boldsymbol{b}'=\overrightarrow{O'B'}$, $\boldsymbol{c}'=\overrightarrow{O'C'}$. Отсюда находим

$$MN^2=\left(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}\right)^2=(x_2-x_1)^2\boldsymbol{a}^2+(y_2-y_1)^2\boldsymbol{b}^2+(z_2-z_1)^2\boldsymbol{c}^2+$$
$$+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\boldsymbol{ab}+2(y_2-y_1)(z_2-z_1)\boldsymbol{bc}+2(z_2-z_1)(x_2-x_1)\boldsymbol{ca},$$
$$M'N'^2=\left(\overrightarrow{O'N'}-\overrightarrow{O'M'}\right)^2=(x_2-x_1)^2\boldsymbol{a}'^2+(y_2-y_1)^2\boldsymbol{b}'^2+(z_2-z_1)^2\boldsymbol{c}'^2+$$
$$+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'+2(y_2-y_1)(z_2-z_1)\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}'+2(z_2-z_1)(x_2-x_1)\boldsymbol{c}'\boldsymbol{a}'.$$

Но так как тетраэдры $ABCO$ и $A'B'C'O'$ равны, то $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}'^2$, $\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{b}'^2$, $\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{c}'^2$, $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{bc}=\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}'$, $\boldsymbol{ca}=\boldsymbol{c}'\boldsymbol{a}'$ и, значит, $MN=M'N'$.

Значит, указанное выше аффинное преобразование — ортогональное; при этом оно первого рода, так как тетраэдры $\overrightarrow{ABCO}$ и $\overrightarrow{A'B'C'O'}$ имеют одинаковую ориентацию.

Единственность ортогонального преобразования первого рода, переводящего точки A, B, C соответственно в точки A', B', C', следует из того, что всякое ортогональное преобразование, переводящее точки A, B, C в точки A', B', C', переводит точку O в точку O^*, такую, что $OA=O^*A'$, $OB=O^*B'$, $OC=O^*C'$, и такую, что тетраэдр $\overrightarrow{A'B'C'O^*}$ имеет ориентацию, одинаковую с тетраэдром

$\overrightarrow{ABCO}$. Но тем же свойством обладает тетраэдр $\overrightarrow{A'B'C'O'}$ и никакого другого тетраэдра, обладающего этими свойствами, нет. Значит, точка O^* совпадает с O'. Теперь единственность ортогонального преобразования первого рода, переводящего точки A, B, C соответственно в точки A', B', C', следует из теоремы 4 § 177.

Теорема, аналогичная доказанной, имеет место и на плоскости.

§ 181. Ортогональные преобразования в координатах

1. Ортогональные преобразования плоскости

Введем на плоскости прямоугольную систему координат xOy с началом O и единичными векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Пусть O' — образ точки O при ортогональном преобразовании ω, а $\boldsymbol{i}'$ и $\boldsymbol{j}'$ — образы векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ при том же преобразовании. Векторы $\boldsymbol{i}'$ и $\boldsymbol{j}'$ — единичные взаимно перпендикулярные.

В силу линейности ортогонального преобразования точке M, имеющей в системе O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ координаты x и y, соответствует точка M', имеющая те же координаты относительно системы O', $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$.

Как и в общем случае, выводим

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + x_0, \quad y = a_{21}x + a_{22}y + y_0,$$

где x', y' — координаты точки M' в системе xOy, $\{a_{11}, a_{21}\} = \boldsymbol{i}'$, $\{a_{12}, a_{22}\} = \boldsymbol{j}'$ (координаты векторов $\boldsymbol{i}'$ и $\boldsymbol{j}'$ даны в системе xOy), а x_0 и y_0 — координаты точки O' в системе xOy.

Но, как было показано выше (§ 99, п. 1 и 2), в случае, если базисы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$ имеют одинаковую ориентацию, то

$$\boldsymbol{i}' = \{\cos\alpha, \ \sin\alpha\}, \quad \boldsymbol{j}' = \{-\sin\alpha, \ \cos\alpha\},$$

так что

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где α — угол от вектора $\boldsymbol{i}$ до вектора $\boldsymbol{i}'$ (ориентация определяется системой xOy), а если базисы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$ имеют противоположную ориентацию, то

$$\boldsymbol{i}' = \{\cos\alpha, \ \sin\alpha\}, \ \boldsymbol{j}' = \{\sin\alpha, -\cos\alpha\},$$

значит,

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_0, \qquad y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + y_0. \tag{2}$$

В соотношениях (1) и (2) x_0 и y_0 — координаты образа O' начала координат системы xOy при рассматриваемом ортогональном преобразовании.

Определитель из коэффициентов при x и y в преобразовании (1) равен $+1$, а в преобразовании (2) равен -1.

Обратно, формулами (1) при любых α, x и y задается относительно декартовой прямоугольной системы координат ортогональное преобразование. В самом деле, если $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — две произвольные точки, то

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Обозначая через $A'(x_1', y_1')$, $B'(x_2', y_2')$ образы точек A и B, при ортогональном преобразовании (1) будем иметь

$$x_1'=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha+x_0,\quad y_1'=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha+y_0;$$
$$x_2'=x_2\cos\alpha-y_2\sin\alpha+x_0,\quad y_2'=x_2\sin\alpha+y_2\cos\alpha+y_0$$

и, далее,

$$A'B'=\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2}=$$
$$=\sqrt{[(x_2-x_1)\cos\alpha-(y_2-y_1)\sin\alpha]^2+[(x_2-x_1)\sin\alpha+(y_2-y_1)\cos\alpha]^2}=$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=AB.$$

Вместе с тем ортогональное преобразование (1) сохраняет ориентации всех треугольников. Аналогично доказывается, что формулами (2) при любых α, x, y задается также ортогональное преобразование, которое в отличие от ортогонального преобразования (1) меняет ориентацию любого треугольника на противоположную.

2. Ортогональные преобразования пространства

Введем в пространстве прямоугольную систему O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ с началом O и единичными векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Пусть O' — образ точки O при ортогональном преобразовании ω, а $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ — образы векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ при том же преобразовании. Векторы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ также единичные и попарно ортогональные.

В силу линейности ортогонального преобразования точке M, имеющей в системе O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ координаты x, y, z, соответствует точка M', имеющая те же координаты x, y, z в системе O', $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$.

Как и в общем случае, выводим

$$x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+x_0,$$
$$y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+y_0,$$
$$z'=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+z_0,$$

где x', y', z' — координаты точки M' в системе $Oxyz$, $\{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}=\boldsymbol{i}'$, $\{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}=\boldsymbol{j}'$, $\{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}=\boldsymbol{k}'$ (координаты векторов $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ даны в системе $Oxyz$), а x_0, y_0, z_0 — координаты точки O' в системе $Oxyz$ (§ 100). Координаты единичного вектора $\boldsymbol{i}'$ в прямоугольной системе $Oxyz$ равны $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, где α_1, β_1, γ_1 — углы между вектором $\boldsymbol{i}'$ и соответственно векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; координаты единичного вектора $\boldsymbol{j}'$ в той же системе равны $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$, где α_2, β_2, γ_2 — углы между вектором $\boldsymbol{j}'$ и соответственно векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, координаты единичного вектора $\boldsymbol{k}'$ в системе $Oxyz$ равны $\cos\alpha_3$, $\cos\beta_3$, $\cos\gamma_3$, где α_3, β_3, γ_3 — углы между вектором $\boldsymbol{k}'$ и соответственно векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Итак, ортогональное преобразование в координатах запишется так:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 + x_0, \\ y' &= x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3 + y_0, \\ z' &= x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3 + z_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где x', y', z' — координаты точки M' относительно системы $Oxyz$; x_0, y_0, z_0 — координаты образа O' точки O относительно той же системы, а α_i, β_i, γ_i, $i = 1, 2, 3$, — углы между векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$:

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\boldsymbol{k}'$	α_3	β_3	γ_3

Детерминант матрицы преобразования (3) равен ± 1.

Матрица ортогонального преобразования — ортогональная. Обратно, соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3, \end{aligned}$$

где (a_{ik}) — ортогональная матрица, определяется ортогональное преобразование. В самом деле (аналогично тому, как это делалось для плоскости), из условий

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \quad a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1,$$

$$\begin{aligned} a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0, \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0, \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} &= 0 \end{aligned}$$

следует сохранение длины любого отрезка:

$$\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} = \\ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

§ 182. Примеры ортогональных преобразований

Пример 1. Введем на плоскости прямоугольную систему координат и поставим в соответствие каждой точке $M(x, y)$ плоскости точку $M'(x', y')$

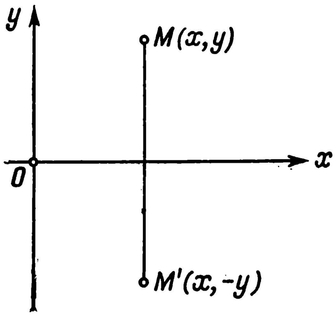


Рис. 247

Рис. 248

симметричную точке M относительно оси Ox (рис. 247). Тогда

$$x' = x, \quad y' = -y.$$

Симметрия плоскости относительно прямой есть ортогональное преобразование второго рода.

На рисунке 248 показано преобразование симметрии фигуры вместе с надписью к ней «симметрия».

Рис. 249

Формулами $x'=x$, $y'=y$, $z'=-z$ относительно прямоугольной системы координат определяется ортогональное преобразование, называемое симметрией пространства относительно плоскости (рис. 249).

Пример 2. Фиксируем вектор $\boldsymbol{a}\neq 0$. Поставим в соответствие точке A пространства точку A', такую, что $\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{a}$ (рис. 250). Это преобразование называется переносом. Если B — любая другая точка, а B' — ее образ при переносе, то $\overrightarrow{BB'}=\boldsymbol{a}$, и из равенства $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$ следует, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$, т. е. $AB=A'B'$, иначе перенос — ортогональное преобразование.

Если ввести декартову прямоугольную систему координат и обозначить координаты вектора $\boldsymbol{a}$ через a, b, c, через x, y, z обозначить координаты точки A, а через x', y', z' — координаты образа A' точки A при переносе, то из равенства $\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{a}$ найдем

$$x'=x+a,\quad y'=y+b,\quad z'=z+c.$$

Матрица переноса есть единичная матрица

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

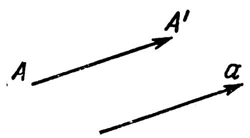


Рис. 250

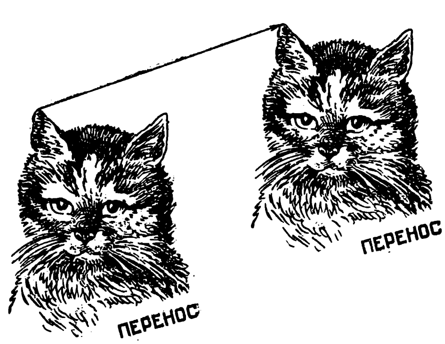


Рис. 251

следовательно, перенос есть движение. Множество всех переносов пространства образует группу. Эта группа переносов является подгруппой группы движения. На рисунке 251 дан образ фигуры при переносе.

§ 183. Подобные преобразования

Подобным преобразованием пространства называется преобразование множества всех точек пространства, обладающее следующим свойством: если A и B — две произвольные точки, а A' и B' — их образы, то $A'B'=kAB$, где k — положительное число, одно и то же для всех пар точек пространства, называемое коэффициентом подобия.

То же определение подобного преобразования принимается и для плоскости, и для прямой.

Так же как и для ортогональных преобразований, доказывается, что подобное преобразование есть аффинное преобразование и что в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости в случае сохранения ориентации оно выражается соотношениями

$$x'=k(x\cos\alpha-y\sin\alpha)+x_0,\qquad y'=k(x\sin\alpha+y\cos\alpha)+y_0;$$

где $O'(x_0, y_0)$—образ начала координат, а α—угол от единичного вектора $\boldsymbol{i}$ оси Ox до его образа $k\boldsymbol{i}'$ ($\boldsymbol{i}'$—также единичный вектор), а в случае изменения ориентации на противоположную—соотношениями

$$x'=k(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+x_0,\qquad y'=k(x\sin\alpha-y\cos\alpha)+y_0.$$

Для пространства

$$x'=k(x\cos\alpha_1+y\cos\alpha_2+z\cos\alpha_3)+x_0,$$
$$y'=k(x\cos\beta_1+y\cos\beta_2+z\cos\beta_3)+y_0,$$
$$z'=k(x\cos\gamma_1+y\cos\gamma_2+z\cos\gamma_3)+z_0,$$

где $O'(x_0, y_0, z_0)$—образ начала O декартовой прямоугольной системы координат, $M(x, y, z)$—произвольная точка пространства, $M'(x', y', z')$—ее образ при подобном преобразовании, α_1, β_1, γ_1—углы между образом $k\boldsymbol{i}'$ вектора $\boldsymbol{i}$ и векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; α_2, β_2, γ_2—углы между образом $k\boldsymbol{j}'$ вектора $\boldsymbol{j}$ и векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, α_3, β_3, γ_3—углы между образом $k\boldsymbol{k}'$ вектора $\boldsymbol{k}$ и векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Подобные преобразования пространства (и плоскости) так же, как и аффинные преобразования, делятся на подобные преобразования первого и второго рода в зависимости от того, сохраняют ли они ориентацию, или меняют ее на противоположную.

Множество всех подобных преобразований пространства образует группу. Эта группа является подгруппой группы аффинных преобразований пространства, а группа ортогональных преобразований—подгруппой группы подобных преобразований.

Множество Г всех подобных преобразований пространства, не меняющих ориентации, есть также группа, являющаяся подгруппой группы всех подобных преобразований.

Множество движений пространства есть подгруппа группы Г.

Теорема 1. *Существует и притом только одно подобное преобразование пространства как первого, так и второго рода, которое три точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой, переводит в три точки A', B', C', также не принадлежащие одной прямой, и такие, что $B'C'=kBC$, $C'A'=kCA$, $A'B'=kAB$.* Эту теорему можно доказать аналогично соответствующей теореме для ортогональных преобразований.

Отметим, в частности, формулировку для плоскости.

Теорема 2. *Существует и притом только одно подобное преобразование плоскости как первого, так и второго рода, которое две различные точки A и B переводит соответственно в две различные точки A' и B'. Коэффициент этого подобного преобразования равен $\frac{A'B'}{AB}$.*

§ 184. Собственные векторы линейного преобразования

Назовем *собственным вектором линейного преобразования множества всех векторов пространства всякий ненулевой вектор* $\boldsymbol{e}$, *образ которого при линейном преобразовании* f *коллинеарен вектору* $\boldsymbol{e}$:

$$f\boldsymbol{e}=\lambda\boldsymbol{e}. \tag{1}$$

Число λ назовем *собственным значением*, соответствующим собственному вектору $\boldsymbol{e}$.

Очевидно, что если вектор $\boldsymbol{e}$ собственный, то и всякий вектор $k\boldsymbol{e}$ $(k\neq 0)$, ему коллинеарный, будет также собственным с тем же собственным значением, так как из равенства $f\boldsymbol{e}=\lambda\boldsymbol{e}$ следует

$$f(k\boldsymbol{e})=kf\boldsymbol{e}=k\lambda\boldsymbol{e}=\lambda(k\boldsymbol{e}). \tag{2}$$

Пусть линейное преобразование f задано относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\begin{aligned} x'&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z,\\ y'&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\\ z'&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z, \end{aligned}$$

где x, y, z — координаты произвольного вектора $\boldsymbol{a}$, а x', y', z' — координаты его образа $f\boldsymbol{a}$.

Для того чтобы вектор $\boldsymbol{e}=\{x,\ y,\ z\}$ был собственным, необходимо и достаточно, чтобы $f\boldsymbol{e}=\{x',\ y',\ z'\}=\lambda\{x,\ y,\ z\}$, т. е. чтобы

$$x'=\lambda x,\qquad y'=\lambda y,\qquad z'=\lambda z,$$

или

$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z&=\lambda x,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z&=\lambda y,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z&=\lambda z, \end{aligned} \tag{3}$$

откуда

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x+a_{12}y+a_{13}z&=0,\\ a_{21}x+(a_{22}-\lambda)y+a_{23}z&=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+(a_{33}-\lambda)z&=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Относительно x, y, z эта система однородная, значит, для того чтобы она имела ненулевое решение x, y, z, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{5}$$

или

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0, \tag{6}$$

где

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \tag{7}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Уравнение (5) или (6) называется *характеристическим* уравнением линейного преобразования f; оно третьей степени, поэтому если считать, что коэффициенты этого уравнения — действительные числа, то оно имеет по крайней мере один действительный корень $\lambda = \lambda_1$. Подставляя это значение $\lambda = \lambda_1$ в систему (4), получим линейную однородную систему относительно x, y, z; так как определитель этой системы равен нулю, то она имеет ненулевое решение x, y, z. Это ненулевое решение будет удовлетворять и соотношениям (3), т. е. соотношениям

$$x' = \lambda_1 x, \qquad y' = \lambda_1 y, \qquad z' = \lambda_1 z,$$

или

$$f\mathbf{e} = \lambda_1 \mathbf{e}.$$

Таким образом, в трехмерном пространстве всякое линейное преобразование имеет по крайней мере один (с точностью до множителя, не равного нулю) собственный вектор, и собственное значение, соответствующее этому собственному вектору, является корнем характеристического уравнения.

На плоскости это не так: уравнение, аналогичное уравнению (5), имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{5'}$$

или

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0, \tag{6'}$$

где

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \tag{7'}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{8'}$$

и уравнение (5') может иметь мнимые корни (тогда собственных векторов нет). Однако если корни характеристического уравнения действительны, то и на плоскости имеется собственный вектор.

Теорема. *Значения выражений*

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а следовательно, и корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

не зависят от выбора базиса e_1, e_2, e_3 *декартовой системы координат, в котором задано линейное преобразование* f.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

матрица линейного преобразования f в базисе e_1, e_2, e_3. Рассмотрим наряду с преобразованием f линейное преобразование g с матрицей

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} = A - \lambda E$$

(E — единичная матрица). При переходе к другому базису матрица A линейного преобразования f преобразуется в матрицу $(b_{ik}) = B = C^{-1}AC$, а матрица G линейного преобразования g преобразуется в матрицу

$$C^{-1}GC = C^{-1}(A - \lambda E)C = C^{-1}AC - C^{-1}\lambda EC = C^{-1}AC - \lambda E =$$

$$= B - \lambda E = \begin{pmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$

(см. теорему в конце § 174).

На основании той же теоремы имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

(тождество относительно λ). Отсюда следует, что равны коэффициенты при λ в одинаковых степенях, т. е.

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=b_{11}+b_{22}+b_{33},$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

§ 185. Самосопряженное линейное преобразование и его собственные векторы

Линейное преобразование f множества всех векторов пространства называется самосопряженным (или симметрическим), если для двух любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ выполнено соотношение

$$\boldsymbol{a}f\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}f\boldsymbol{a}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы линейное преобразование было симметрическим, необходимо и достаточно, чтобы матрица этого преобразования*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

заданного относительно ортонормированного базиса, была симметрической.

Доказательство необходимости. Пусть f — симметрическое линейное преобразование. Введем в пространстве ортонормированный базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Тогда координаты x', y', z' образа вектора $\{x, y, z\}$ через координаты этого последнего будут выражаться соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z. \end{aligned}$$

Отсюда находим $f\boldsymbol{i}=f\{1, 0, 0\}=\{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}$, значит, $\boldsymbol{j}f\boldsymbol{i}=\{0, 1, 0\}\{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}=a_{21}$. Аналогично найдем $\boldsymbol{i}f\boldsymbol{j}=a_{12}$. Но так как $\boldsymbol{j}f\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}f\boldsymbol{j}$, то $a_{12}=a_{21}$. Аналогично доказывается, что $a_{13}=a_{31}$ и $a_{23}=a_{32}$.

Доказательство достаточности. Если $a_{12}=a_{21}$, $a_{13}=a_{31}$ и $a_{23}=a_{32}$, то для двух произвольных векторов $\boldsymbol{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$

и $\boldsymbol{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$ имеем

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}f\boldsymbol{b}&=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}\{a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}z_2,\ a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_{23}z_2,\\
&a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}z_2\}=x_1(a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}z_2)+y_1(a_{21}x_2+a_{22}y_2+\\
&+a_{23}z_2)+z_1(a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}z_2)=x_2(a_{11}x_1+a_{21}y_1+a_{31}z_1)+\\
&+y_2(a_{12}x_1+a_{22}y_1+a_{32}z_1)+z_2(a_{13}x_1+a_{23}y_1+a_{33}z_1)=\\
&=x_2(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}z_1)+y_2(a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}z_1)+\\
&+z_2(a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}z_1)=x_2x_1'+y_2y_1'+z_2z_1'=\\
&=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}\{x_1',\ y_1',\ z_1'\}=\boldsymbol{b}f\boldsymbol{a}.
\end{aligned}$$

Теорема 2. *Если f — симметрическое линейное преобразование, то все корни его характеристического уравнения действительны.*

Доказательство. Введем в пространстве ортонормированный базис $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$.

Тогда матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \tag{1}$$

симметрического преобразования f будет симметричной $(a_{ik}=a_{ki})$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Предположим, что оно имеет мнимый корень $\lambda_1=\alpha+\beta i$, где α и β — действительные числа и $\beta\neq 0$. Рассмотрим линейную однородную систему

$$\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda_1)x+a_{12}y+a_{13}z&=0,\\
a_{21}x+(a_{22}-\lambda_1)y+a_{23}z&=0,\\
a_{31}x+a_{32}y+(a_{33}-\lambda_1)z&=0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Так как определитель этой системы равен нулю, то она имеет ненулевое решение $x,\ y,\ z$. Таким образом, имеются три числа $x,\ y,\ z$, не равные нулю одновременно, при которых будут выполнены соотношения (3) или соотношения

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=\lambda_1x, \tag{4}$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=\lambda_1y, \tag{5}$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=\lambda_1z. \tag{6}$$

Умножая обе части равенства (4) на $\bar{x}$, обе части равенства (5) на $\bar{y}$ и обе части равенства (6) на $\bar{z}$ и складывая, получим (в силу

$a_{12}=a_{21},\ a_{13}=a_{31},\ a_{23}=a_{32})$

$$a_{11}x\bar{x}+a_{22}y\bar{y}+a_{33}z\bar{z}+a_{12}(x\bar{y}+\bar{x}y)+ \\ +a_{23}(y\bar{z}+\bar{y}z)+a_{31}(z\bar{x}+\bar{z}x)= \\ =\lambda_1(x\bar{x}+y\bar{y}+z\bar{z})=\lambda_1(|x|^2+|y|^2+|z|^2).$$

Если в левой части этого равенства заменить все числа им сопряженными, то получим число, сопряженное тому, которое было в левой части; с другой стороны, при замене x, y, z соответственно на $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, а $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ соответственно на x, y, z левая часть не изменится (заметим, что $\bar{a}_{ik}=a_{ik}$), значит, левая часть есть действительное число; мы пришли к противоречию, так как

$$\lambda_1(|x|^2+|y|^2+|z|^2)$$

число мнимое. Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, имеют место и на плоскости и доказываются аналогично. В частности, отсюда следует, что любое линейное симметрическое преобразование плоскости имеет собственный вектор.

Теорема 3. *Всякое симметрическое линейное преобразование пространства имеет три попарно перпендикулярных собственных вектора. Собственными значениями этих векторов являются корни характеристического уравнения соответствующего преобразования f.*

Доказательство. Как было показано выше, любое линейное преобразование пространства, в частности и данное симметрическое, имеет собственный вектор $\boldsymbol{i}$ (будем считать его единичным):

$$f\boldsymbol{i}=\lambda_1\boldsymbol{i}.$$

Докажем, что симметрическое линейное преобразование f каждый вектор, перпендикулярный вектору $\boldsymbol{i}$, переводит в вектор, перпендикулярный вектору $\boldsymbol{i}$. В самом деле, если $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{i}$, то

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{a}=0.$$

Но тогда в силу симметрии линейного преобразования f

$$\boldsymbol{i}f\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}f\boldsymbol{i}=\boldsymbol{a}\lambda_1\boldsymbol{i}=\lambda_1\boldsymbol{a}\boldsymbol{i}=0.$$

Значит, линейное преобразование f преобразует множество всех векторов, компланарных плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{i}$, в себя, а так как преобразование f симметрическое, то в этой плоскости есть собственный вектор $\boldsymbol{j}$ (будем считать его единичным):

$$f\boldsymbol{j}=\lambda_2\boldsymbol{j}.$$

Вектор $\boldsymbol{k}\,(|\boldsymbol{k}|=1)$, перпендикулярный векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, также будет собственным, так как из условий

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{j}\boldsymbol{k}=0$$

следует

$$\boldsymbol{i}f\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}f\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\lambda_1\boldsymbol{i}=0,\quad \boldsymbol{j}f\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}f\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\lambda_2\boldsymbol{j}=0.$$

Значит, вектор $f\boldsymbol{k}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ так же, как и вектор $\boldsymbol{k}$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{k}$ и $f\boldsymbol{k}$ коллинеарны и потому

$$f\boldsymbol{k}=\lambda_3\boldsymbol{k}.$$

Введем в пространстве ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, состоящий из собственных векторов, рассматриваемого преобразования f, тогда координаты x', y', z' образа вектора $\{x, y, z\}$ через координаты этого последнего выражаются формулами

$$x'=\lambda_1 x,\quad y'=\lambda_2 y,\quad z'=\lambda_3 z,$$

а матрицей преобразования f в такой системе будет матрица

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой матрицы будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix}\lambda_1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

и его корни $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$, $\lambda=\lambda_3$. В силу инвариантности корней λ_1, λ_2, λ_3 характеристического уравнения относительно преобразования базиса числа λ_1, λ_2, λ_3 являются корнями характеристического уравнения, соответствующего линейному симметрическому преобразованию f в любом базисе (даже и не ортонормированном).

Замечание 1. 1) Если $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_2\neq\lambda_3$, $\lambda_3\neq\lambda_1$, то линейное симметрическое преобразование f имеет единственную тройку (с точностью до постоянных множителей, отличных от нуля) собственных векторов, так как любой вектор $\{x, y, z\}$ перейдет в вектор $\{\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z\}$, неколлинеарный вектору $\{x, y, z\}$, если хотя бы две из координат вектора $\{x, y, z\}$ не равны нулю.

2) Если $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$, то собственными векторами являются вектор $\boldsymbol{k}$, соответствующий собственному значению $\lambda=\lambda_3$, и все векторы к нему перпендикулярные. В самом деле, векторы

$$\{x, y, z\}\text{ и }\{\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z\}$$

в случае $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$ коллинеарны тогда и только тогда, когда или $z=0$, или $x=y=0$.

Если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, то любой (ненулевой) вектор является собственным.

Замечание 2. Если относительно декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ задано общее уравнение

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+2a_2y+\\+2a_3z+a=0$$

поверхности второго порядка, то этому уравнению в данной системе координат можно поставить в соответствие симметрическое линейное преобразование множества всех векторов пространства, определяемое соотношениями

$$x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z,\quad y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\quad z'=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z.$$

Будем рассматривать векторы $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$ и $f\boldsymbol{r}=\{x', y', z'\}$ как радиусы-векторы точек $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$. В таком случае квадратичная форма, входящая в левую часть уравнения поверхности, является скалярным произведением векторов $\boldsymbol{r}$ и $f\boldsymbol{r}$:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx=\boldsymbol{r}f\boldsymbol{r}.$$

Повернем оси координат $Oxyz$ вокруг точки O так, чтобы новые оси Ox', Oy' и Oz' пошли по направлениям трех единичных и попарно ортогональных собственных векторов $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ преобразования f. Тогда

$$\boldsymbol{r}f\boldsymbol{r}=(x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}')f(x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}')=\\=(x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}')(x'f\boldsymbol{i}'+y'f\boldsymbol{j}'+z'f\boldsymbol{k}')=\\=(x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}')(x'\lambda_1\boldsymbol{i}'+y'\lambda_2\boldsymbol{j}'+z'\lambda_3\boldsymbol{k}')=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2.$$

Мы видим теперь, что в § 152 при преобразовании системы координат новой оси Oz' сначала придавалось направление собственного вектора линейного преобразования f, соответствующее данному уравнению, а затем поворотом вокруг оси Oz' осям Ox' и Oy' придавались также направления собственных векторов этого преобразования. В § 164, 165 и 166 мы по существу имели дело с собственными векторами линейного преобразования, которое ставится в соответствие заданному уравнению поверхности.

Все сказанное относится к уравнению линии второго порядка, заданной общим уравнением относительно декартовой прямоугольной системы координат.

В действительном n-мерном евклидовом пространстве общую теорию поверхностей второго порядка следует строить по такому плану: сначала изложить теорию линейных преобразований множества векторов этого пространства, сформулировать определение собственного вектора и доказать, что самосопряженное линейное преобразование имеет n попарно ортогональных (и единичных) собственных векторов $\boldsymbol{i}_k$; квадратичная форма f, входящая в левую часть общего уравнения поверхности в системе $(O, \boldsymbol{i}_k)$, примет вид

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\ldots+\lambda_nx_n^2,$$

где λ_k — корни характеристического уравнения и т. д. (см. сноску на стр. 428).

§ 186. Представление аффинного преобразования в виде произведения ортогонального преобразования и трех сжатий к попарно перпендикулярным плоскостям

Теорема 1. *Каково бы ни было аффинное преобразование пространства, существуют три попарно перпендикулярных вектора, образы которых также попарно перпендикулярны.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай центроаффинного преобразования, так как всякое аффинное преобразование можно представить в виде произведения переноса на центроаффинное преобразование, а при переносе всякий вектор переходит в равный ему вектор.

Итак, рассмотрим какое-нибудь центроаффинное преобразование f. Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$, принимая за начало координат O неподвижную точку этого преобразования. Тогда в координатах рассматриваемое преобразование будет иметь вид

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \tag{1}$$

причем этими же формулами определяются координаты x', y', z' образа $\{x', y', z'\}$ вектора $\{x, y, z\}$.

Обозначим через A матрицу преобразования (1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

а через A' — матрицу, полученную транспонированием матрицы A:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} a_{21} a_{31} \\ a_{12} a_{22} a_{32} \\ a_{13} a_{23} a_{33} \end{pmatrix}.$$

Составим произведение

$$A'A =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 & a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33} \\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32} & a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 & a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33} \\ a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31} & a_{13}a_{12}+a_{23}a_{22}+a_{33}a_{32} & a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix}.$$

Будем обозначать образ любого вектора e при аффинном преобразовании через Ae, где A — матрица этого аффинного преобразования. Отметим, что для любых двух векторов

$$e_1 = \{x_1, y_1, z_1\} \text{ и } e_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$$

скалярные произведения e_1Ae_2 и $e_2A'e_1$ равны между собой:

$$e_1Ae_2=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}\{a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}z_2,\ a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_{23}z_2,\ a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}z_2\}=x_1(a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}z_2)+y_1(a_{21}x_2+a_{22}y_2+$$
$$+a_{23}z_2)+z_1(a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}z_2)=x_2(a_{11}x_1+a_{21}y_1+a_{31}z_1)+$$
$$+y_2(a_{12}x_1+a_{22}y_1+a_{32}z_1)+z_2(a_{13}x_1+a_{23}y_1+a_{33}z_1)=$$
$$=\{x_2,\ y_2,\ z_2,\}\{a_{11}x_1+a_{21}y_1+a_{31}z_1,\ a_{12}x_1+a_{22}y_1+a_{32}z_1,\ a_{13}x_1+a_{23}y_1+a_{33}z_1\}=e_2A'e_1.$$

Так как матрица $A'A$ симметрическая, то соответствующее ей центроаффинное преобразование (имеющее ту же неподвижную точку O, что и преобразование A) также симметрическое и, значит, имеет три попарно перпендикулярных собственных вектора e_1, e_2, e_3, т. е.

$$A'Ae_1=\lambda_1e_1,\quad A'Ae_2=\lambda_2e_2,\quad A'Ae_3=\lambda_3e_3.$$

Обозначим образы векторов e_1, e_2, e_3 при аффинном преобразовании A через e_1', e_2', e_3':

$$Ae_1=e_1',\quad Ae_2=e_2',\quad Ae_3=e_3'.$$

Имеем

$$e_1'e_2'=e_1Ae_2=e_2A'e_1=e_2A'Ae_1=e_2\lambda_1e_1=0$$

и аналогично $e_2'e_3'=0$, $e_3'e_1'=0$, т. е. векторы e_1', e_2', e_3' попарно перпендикулярны (все эти векторы, очевидно, ненулевые в силу взаимной однозначности рассматриваемого центроаффинного преобразования).

Теорема 2. *Всякое аффинное преобразование f можно представить в виде произведения ортогонального преобразования ω и трех аффинных сжатий k_1, k_2, k_3 к трем попарно перпендикулярным плоскостям:*

$$f=\omega k_1k_2k_3.$$

Доказательство. Пусть e_1, e_2, e_3 — три попарно перпендикулярных вектора, которые при аффинном преобразовании f снова переходят в перпендикулярные векторы

$$fe_1=e_1',\quad fe_2=e_2',\quad fe_3=e_3'.$$

Отложим векторы e_1, e_2, e_3 от какой-нибудь точки O:

$$\overrightarrow{OE}_1=e_1,\quad \overrightarrow{OE}_2=e_2,\quad \overrightarrow{OE}_3=e_3.$$

Пусть O' — образ точки O при аффинном преобразовании f. Отложим векторы e_1', e_2', e_3' от точки O':

$$\overrightarrow{O'E_1'}=e_1',\quad \overrightarrow{O'E_2'}=e_2',\quad \overrightarrow{O'E_3'}=e_3'.$$

Точки E_1', E_2', E_3' — образы точек E_1, E_2, E_3 при аффинном преобразовании f.

Рассмотрим сжатия k_1, k_2, k_3 к плоскостям OE_2E_3, OE_3E_1, OE_1E_2, при которых векторы $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OE_3}$ перейдут в векторы $\overrightarrow{OE_1^*}$, $\overrightarrow{OE_2^*}$, $\overrightarrow{OE_3^*}$, имеющие длины, соответственно равные длинам векторов $\overrightarrow{O'E_1'} = e_1'$, $\overrightarrow{O'E_2'} = e_2'$ и $\overrightarrow{O'E_3'} = e_3'$.

Существует ортогональное преобразование ω, которое точки O, E_1^* E_2^*, E_3^* переводит соответственно в точки O', E_1', E_2', E_3'. Произведение $\omega k_1 k_2 k_3$ является аффинным преобразованием и оно так же, как и аффинное преобразование f, переводит точки O, E_1, E_2, E_3 соответственно в точки O', E_1', E_2', E_3'.

Следовательно (§ 177, теорема 4),

$$f = \omega k_1 k_2 k_3.$$

§ 187. Применение аффинных преобразований к исследованию свойств линий второго порядка

Аффинные преобразования могут быть использованы при исследовании геометрических свойств линий второго порядка, причем это исследование можно в ряде случаев проводить синтетически.

Пример 1. Применим теорию аффинных преобразований к исследованию некоторых свойств эллипса. Для этого заметим, что всякий эллипс можно рассматривать как образ окружности при аффинном преобразовании.

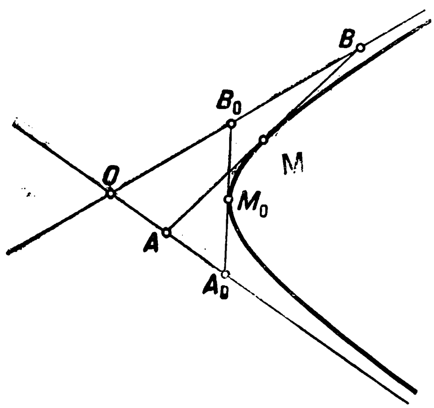


Рис. 252

1°. Так как окружность C имеет центр симметрии, и только один, то и эллипс K имеет центр симметрии (являющийся образом центра окружности C), и притом только один.

2°. Так как середины параллельных хорд окружности лежат на одной прямой, а при аффинном преобразовании параллельные хорды окружности C перейдут в параллельные хорды эллипса K и середины хорд окружности — в середины хорд эллипса, то и середины параллельных хорд эллипса лежат на одной прямой.

3° Если через центр эллипса K провести произвольную прямую d', то найдется другая прямая d, проходящая через центр эллипса K, такая, что каждая из прямых d и d' делит пополам хорды эллипса, параллельные другой прямой. Это свойство эллипса имеет место в силу того, что оно имеет место для двух взаимно перпендикулярных диаметров окружности, и в силу основных свойств аффинного преобразования (сохранение параллельности, середины отрезка и т. д.).

Пример 2. Пусть M — произвольная точка гиперболы, A и B — точки пересечения с асимптотами касательной к гиперболе в точке M; тогда

1°. $MA = MB$.

2°. Площадь $\triangle OAB$ имеет одну и ту же величину при любом положении точки M на гиперболе (рис. 252).

В самом деле, если M_0 — вершина гиперболы, а A_0 и B_0 — точки, в которых касательная к гиперболе в точке M_0 пересекает ее асимптоты, то $M_0A_0 = M_0B_0$. Рассмотрим гиперболический поворот (§ 179, пример 5), преобразующий данную гиперболу в себя и переводящий точку M_0 в точку M. При этом касательная к гиперболе в точке M_0 перейдет в касательную к гиперболе в точке M и точка M будет серединой отрезка AB в силу того,

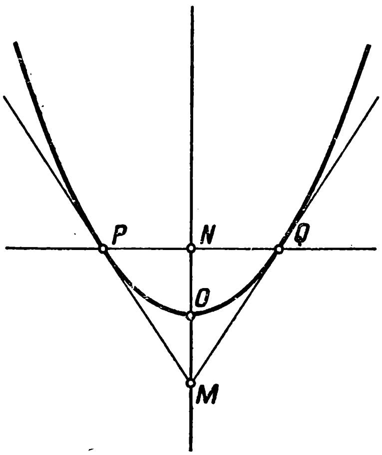


Рис. 253

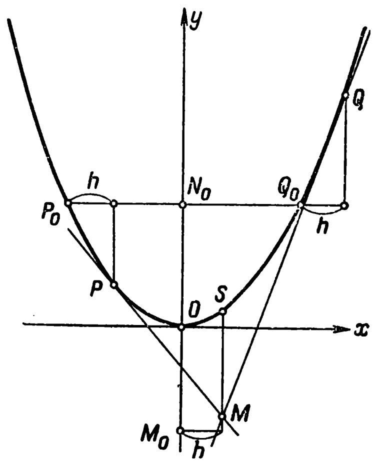


Рис. 254

что гиперболический поворот есть аффинное преобразование; а в силу того что это преобразование сохраняет площади, имеем

$$\text{пл. } \triangle OA_0B_0 = \text{пл. } \triangle OAB.$$

Пример 3. Из § 123 вытекает следующий способ построения касательной к параболе из точки M, лежащей на ее оси: строим $ON = OM$, $PQ \perp MN$, тогда MP и MQ — касательные к параболе (рис. 253).

Пусть точка M не лежит на параболе (рис. 254). Проведем через точку M прямую, параллельную оси параболы, и пусть эта прямая пересечет параболу в точке S. Рассмотрим параболический поворот, переводящий точку S в точку O. Строим образ M_0 точки M при этом повороте. Далее,

$$ON_0 = OM_0, \quad P_0Q_0 \perp M_0N_0.$$

Теперь сделаем параболический поворот, обратный рассмотренному. Точка M_0 вернется в точку M, а касательные M_0P_0 и M_0Q_0 (эти прямые на рис. 254 не показаны) перейдут в касательные MP и MQ к параболе.

Аффинные преобразования применяются в основном к тем свойствам линий второго порядка, которые связаны с понятием параллельности, отношения параллельных отрезков, отношения площадей, касательной к линии второго порядка, диаметра, асимптоты.

§ 188. Аффинная классификация линий второго порядка

Определение. *Две линии второго порядка принадлежат одному и тому же аффинному классу, если существует аффинное преобразование, переводящее одну из этих линий в другую. Если же одну линию никаким аффинным преобразованием нельзя перевести в другую, то эти линии принадлежат различным аффинным классам (линии аффинно неэквивалентны).*

Теорема. *Все линии второго порядка делятся на 9 аффинных классов:*

1°. *Эллипсы.*
2°. *Мнимые эллипсы.*
3°. *Пары мнимых пересекающихся прямых.*
4°. *Гиперболы.*
5°. *Пары пересекающихся прямых.*
6°. *Параболы.*
7°. *Две параллельные прямые.*
8°. *Две мнимые параллельные прямые.*
9°. *Две совпадающие прямые.*

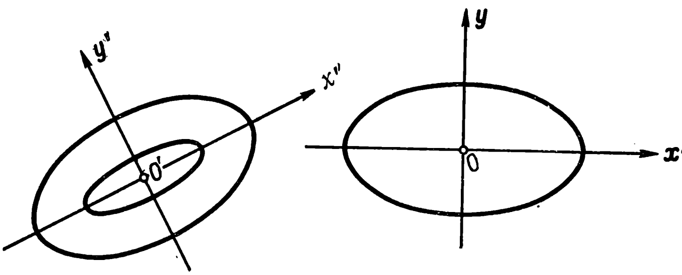


Рис. 255

Доказательство. Докажем сначала, что всякие две линии, принадлежащие одному классу, аффинно эквивалентны. Возьмем два любых эллипса на плоскости, и пусть их канонические уравнения (вообще говоря, в разных системах координат) будут (рис. 255):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1.$$

Производя аффинные сжатия,

$$x'=\frac{a'}{a}X, \quad y'=\frac{b'}{b}Y$$

к осям $O'y'$ и $O'x'$, мы преобразуем эллипс

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1$$

в эллипс

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,$$

конгруэнтный эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Теперь эллипс $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ совмещается с эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ движением. Так как аффинные сжатия и движения — аффинные преобразования, то и результирующее преобразование, переводящее второй эллипс в первый, также аффинное.

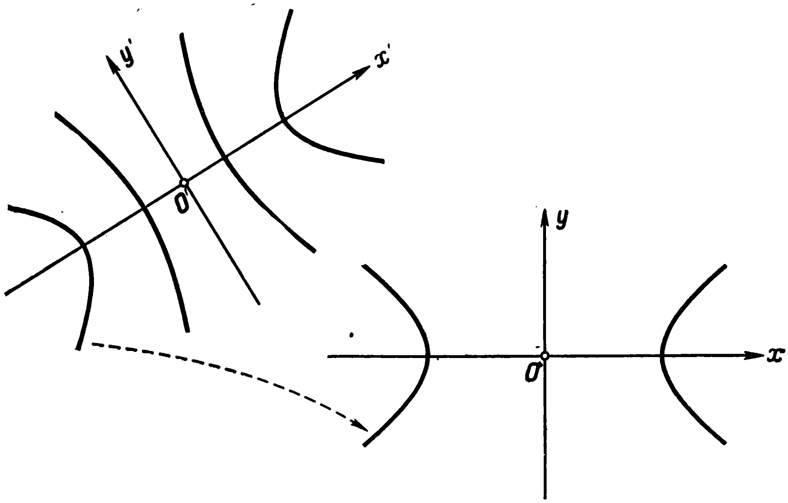


Рис. 256

Гипербола. Доказательство того, что любая гипербола может быть аффинно преобразована в любую другую гиперболу, проводится аналогично (рис. 256).

Парабола. Рассмотрим две параболы $y^2=2px$ и $y'^2=2p'x'$. Произведем преобразование гомотетии $x'=\frac{p'}{p}X$, $y'=\frac{p'}{p}Y$. Тогда парабола $y'^2=2px'$ перейдет в линию $\frac{p'^2}{p^2}Y^2=2\frac{p'^2}{p}X$, или $Y^2=2pX$, т. е. снова в параболу, параметр которой равен p.

Теперь парабола $Y^2=2pX$ с параболой $y^2=2px$ совмещается движением (рис. 257). Таким образом, все параболы не только аффинно эквивалентны, но даже подобны.

Рассмотрение остальных случаев не представляет затруднений.

Перейдем к доказательству второй части теоремы: всякие две линии, принадлежащие разным классам, аффинно неэквивалентны. Прежде всего заметим, что так как аффинное преобразование выражается линейными соотношениями в координатах, то образ любой линии второго порядка при любом аффинном преобразовании есть линия второго порядка.

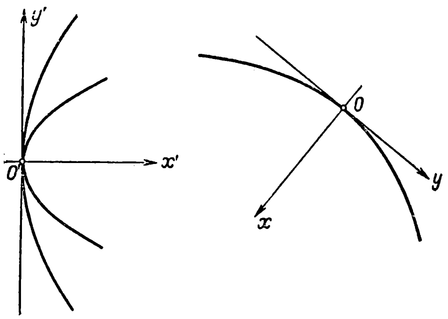


Рис. 257

Эллипс нельзя преобразовать аффинно ни в одну из других линий, указанных в условии теоремы, так как среди всех линий второго порядка эллипс — единственная линия, лежащая в ограниченной части плоскости и содержащая бесконечное множество точек (действительных). Это свойство множества сохраняется при любом аффинном преобразовании, поэтому образом эллипса при любом аффинном преобразовании будет снова эллипс.

Гипербола от всех остальных линий второго порядка, перечисленных в условии теоремы, отличается тем, что имеет две ветви и не содержит трех точек, лежащих на одной прямой; эти свойства сохраняются при аффинном преобразовании, поэтому аффинным образом гиперболы будет гипербола.

Парабола от всех остальных линий второго порядка, указанных в условии теоремы, отличается тем, что является неограниченной линией, имеющей одну ветвь, и не содержит трех точек, принадлежащих одной прямой; это свойство сохраняется при аффинном преобразовании.

Две пересекающиеся прямые при аффинном преобразовании переходят в две пересекающиеся прямые, а две параллельные прямые — в две параллельные прямые.

Если линия второго порядка распадается на две мнимые пересекающиеся прямые, т. е. на плоскости есть только одна точка, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, то после аффинного преобразования образом этой точки будет точка, т. е. образом двух мнимых пересекающихся прямых будут снова две мнимые пересекающиеся прямые.

Мнимый эллипс аффинно неэквивалентен двум мнимым параллельным прямым, так как мнимый эллипс имеет единственный центр, а две мнимые параллельные прямые — прямую центров, а эти свойства сохраняются при любом аффинном преобразовании.

Доказанная теорема позволяет назвать проведенную выше классификацию линий второго порядка аффинной.

Таким образом, аффинной классификацией линий второго порядка является разделение всех линий второго порядка на 9 аффинных классов, в каждый из которых включаются все линии второго порядка, такие, что любые две из них могут быть переведены одна в другую некоторым аффинным преобразованием; если же линии второго порядка принадлежат разным аффинным классам, то никаким аффинным преобразованием одна линия не может быть переведена в другую.

Простейшие представители девяти аффинных классов линий второго порядка таковы:

1) $x^2+y^2=1$	эллипс
2) $x^2+y^2=-1$	мнимый эллипс
3) $x^2+y^2=0$	две мнимые пересекающиеся прямые
4) $x^2-y^2=1$	гипербола
5) $x^2-y^2=0$	две действительные пересекающиеся прямые
6) $y^2=x$	парабола
7) $x^2=1$	две параллельные прямые
8) $x^2=-1$	две мнимые параллельные прямые
9) $x^2=0$	две совпадающие прямые

§ 189. Аффинная классификация поверхностей второго порядка

Определение. *Две поверхности второго порядка принадлежат одному и тому же аффинному классу, если существует аффинное преобразование, переводящее одну из поверхностей в другую. Если же одна поверхность второго порядка никаким аффинным преобразованием не может быть переведена в другую, то эти две поверхности второго порядка принадлежат различным аффинным классам.*

Теорема. *Все поверхности второго порядка делятся на* 17 *аффинных классов, названия которых даны в теореме* 3 § 152.

Доказательство теоремы состоит из двух частей.

1. Любые две поверхности второго порядка, принадлежащие одному и тому же классу из числа семнадцати, указанных в теореме 3 § 152, могут быть аффинным преобразованием переведены друг в друга. Это доказывается совершенно так же, как для линий второго порядка.

2. Любые две поверхности, принадлежащие к разным классам из числа семнадцати, указанных выше, никаким аффинным преобразованием нельзя преобразовать друг в друга. Принцип доказательства этого положения состоит в том, что сравнивая две поверхности, мы указываем такое свойство, инвариантное относительно аффинного преобразования, которым обладает одна поверхность и не обладает другая.

Мнимый эллипсоид, мнимый эллиптический цилиндр и две мнимые параллельные плоскости не содержат ни одной действительной точки и, значит, аффинно не могут быть преобразованы ни в одну из поверхностей остальных аффинных классов, так как при аффинном преобразовании действительные точки переходят в действительные.

Две пересекающиеся плоскости, две параллельные плоскости и две совпадающие плоскости не могут быть аффинно преобразованы ни в одну из поверхностей остальных аффинных классов, так как только они состоят из плоскостей Параллельные плоскости не могут быть преобразованы в пересекающиеся, а различные — в совпадающие. Две мнимые пересекающиеся плоскости содержат только одну действительную прямую, и никакая другая поверхность второго порядка не обладает этим свойством.

Среди поверхностей остальных аффинных классов эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид отличаются от поверхностей остальных аффинных классов тем, что не содержат прямолинейных образующих, а между собой — тем, что эллипсоид — поверхность ограниченная, тогда как двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид — поверхности неограниченные; при этом двуполостный гиперболоид состоит из двух кусков, а эллиптический параболоид — из одного куска. Это различие сохранится при любом аффинном преобразовании.

Среди остающихся линейчатых поверхностей конус отличается от поверхностей остальных классов тем, что представляет собой поверхность, образованную прямыми, проходящими через одну точку и не лежащими в одной плоскости, а эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры — тем, что образованы параллельными прямыми. Друг от друга эти три поверхности отличаются тем, что сечения их плоскостями, не параллельными образующим, будут соответственно эллипсами, гиперболами, параболами. Наконец, однополостный гиперболоид от гиперболического параболоида отличается тем, что первая поверхность имеет центр симметрии, а вторая — нет.

Мнимый эллипсоид имеет единственный центр, мнимый цилиндр — прямую центров, и две мнимые параллельные плоскости — плоскость центров. Так как это свойство инвариантно по отношению к любому аффинному преобразованию, то эти поверхности принадлежат к трем различным (аффинным) классам.

§ 190. Примеры и задачи к главе XIV

1. Задачи с решениями

Пример 1. Докажем, что если ортогональное преобразование пространства первого рода имеет одну неподвижную точку O, то существует прямая, проходящая через точку O, все точки которой неподвижны при этом ортогональном преобразовании.

В силу того что рассматриваемое преобразование ортогональное, собственное значение, соответствующее собственному вектору, может быть равно или $+1$, или -1. Если $\lambda=+1$, то конец A собственного вектора $\overrightarrow{OA}$ останется неподвижным, значит, неподвижными будут все точки прямой OA, т. е. данное ортогональное преобразование первого рода оставляет на месте все точки некоторой прямой, проходящей через неподвижную точку O.

Если $\lambda=-1$, а два других корня характеристического уравнения — комплексные (сопряженные), то $\operatorname{Det} A<0$, т. е. данное ортогональное преобразование второго рода. Если $\lambda=-1$, а два других корня характеристического уравнения действительны, то один из них равен $+1$, а другой -1 (ибо $\operatorname{Det} A=1$ и в силу ортогональности преобразования корни характеристического уравнения по модулю равны 1), а значит, данное преобразование является симметрией относительно прямой OA ($\overrightarrow{OA}$ — собственный вектор, соответствующий корню $+1$).

Если однородное ортогональное преобразование первого рода задано в базисе e_1, e_2, e_3 соотношениями

$$x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z,\quad y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\quad z'=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z,$$

то координаты вектора, дающего направление прямой, все точки которой неподвижны, находятся из системы ($\lambda=1$):

$$(a_{11}-1)x+a_{12}y+a_{13}z=0,\quad a_{21}x+(a_{22}-1)y+a_{23}z=0,\quad a_{31}x+a_{32}y+(a_{33}-1)z=0.$$

Эта система имеет ненулевое решение в силу того, что ее определитель равен сумме ($\lambda=1$ — корень характеристического уравнения).

Пример 2. Докажем, что всякое подобное преобразование пространства с коэффициентом подобия $k\neq 1$ имеет и притом только одну неподвижную точку.

В самом деле, полагая $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$ в формулах подобного преобразования ((a_{ik}) — ортогональная матрица)

$$\begin{aligned} x'&=k(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)+a_1,\\ y'&=k(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)+a_2,\\ z'&=k(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)+a_3, \end{aligned}$$

получим систему

$$\begin{gathered} \left(a_{11}-\frac{1}{k}\right)x+a_{12}y+a_{13}z+\frac{a_1}{k}=0,\\ a_{21}x+\left(a_{22}-\frac{1}{k}\right)y+a_{23}z+\frac{a_2}{k}=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+\left(a_{33}-\frac{1}{k}\right)z+\frac{a_3}{k}=0. \end{gathered}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\frac{1}{k} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\frac{1}{k} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\frac{1}{k} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, так как ортогональное преобразование не может иметь собственных значений, не равных по модулю единице. Следовательно, написанная выше система всегда имеет решение и притом только одно, т. е. рассматриваемое преобразование обладает единственной неподвижной точкой.

Пример 3. Найти все линейные преобразования множества всех векторов плоскости и пространства, каждое из которых всякий вектор $\boldsymbol{a}$ переводит в вектор $f\boldsymbol{a}$, ортогональный вектору $\boldsymbol{a}$. Эти линейные преобразования называются антисимметрическими.

Решение. Пусть f — линейное преобразование, обладающее указанным свойством, т. е.

$$\boldsymbol{a}f\boldsymbol{a}=0,$$

каков бы ни был вектор $\boldsymbol{a}$. Отсюда следует, что для двух любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ будем иметь

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,f\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0,$$

или

$$\boldsymbol{a}f\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}f\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}f\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}f\boldsymbol{b}=0,$$

или

$$\boldsymbol{a}f\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}f\boldsymbol{a}.$$

Случай плоскости. Введем на плоскости ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Пусть в этом базисе $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$, $f\boldsymbol{a}=\{a_{11}x+a_{12}y,\ a_{21}x+a_{22}y\}$. Так как $a_{11}=\boldsymbol{i}f\boldsymbol{i}$, $a_{22}=\boldsymbol{j}f\boldsymbol{j}$, то $a_{11}=a_{22}=0$. Так как $a_{12}=\boldsymbol{i}f\boldsymbol{j}$, $a_{21}=\boldsymbol{j}f\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{i}f\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}f\boldsymbol{i}$, то $a_{21}=-a_{12}$. Таким образом, координаты x', y' вектора $f\boldsymbol{a}$, являющегося образом вектора $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$, выражаются через координаты x и y соотношениями (полагаем $a_{21}=\lambda$)

$$x'=-\lambda y, \quad y'=\lambda x,$$

где λ — любое число. Это преобразование заключается в повороте вектора $\boldsymbol{a}$ на угол $+\frac{\pi}{2}$ и умножении повернутого вектора на число λ.

Случай пространства. Введем в пространстве ортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и пусть в этом базисе $\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}$, а вектор $f\boldsymbol{a}$ имеет координаты

$$x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z, \quad y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z, \quad z'=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z.$$

Рассуждая так же, как и выше, докажем, что

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0, \quad a_{12}=-a_{21}, \quad a_{31}=-a_{13}, \quad a_{23}=-a_{32}.$$

Полагая $a_{12}=c$, $a_{31}=b$, $a_{23}=a$, получим

$$x'=cy-bz, \quad y'=-cx+az, \quad z'=bx-ay.$$

Таким образом, x', y', z' — координаты векторного произведения вектора $\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}$ на вектор $\boldsymbol{p}=\{a, b, c\}$:

$$f\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}].$$

Очевидно и обратно: если $\boldsymbol{p}$ — фиксированный вектор, то преобразование, которое вектору $\boldsymbol{a}$ ставит в соответствие вектор $f\boldsymbol{a}$, равный

$$f\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}],$$

линейное и $\boldsymbol{a}f\boldsymbol{a}=0$.

Матрица, соответствующая антисимметрическому линейному преобразованию в ортонормированном базисе, антисимметрична: на плоскости

$$A=\begin{pmatrix}0 & -\lambda\\ \lambda & 0\end{pmatrix},$$

в пространстве

$$A=\begin{pmatrix}0 & c & -b\\ -c & 0 & a\\ b & -a & 0\end{pmatrix}.$$

Обратно, всякая антисимметрическая матрица соответствует в ортонормированном базисе некоторому антисимметрическому преобразованию.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Двойной прямой аффинного преобразования плоскости называется такая прямая, которая при этом аффинном преобразовании переходит в себя (не обязательно, чтобы точки этой прямой были неподвижными при этом аффинном преобразовании). Найти двойные прямые аффинного преобразования

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2,$$

Отв. Если уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

имеет мнимые корни, то двойных прямых нет.

Если корни уравнения (1) действительны, различны и ни один из них не равен 1, то существуют две и только две двойные прямые.

Если корни уравнения (1) действительны, различны, один из корней не равен 1, а другой равен 1, то *имеется* пучок параллельных между собой двойных прямых и еще одна двойная прямая, их пересекающая.

Если уравнение (1) имеет двойной корень λ, не равный 1, и если хотя бы одно из чисел $a_{11}-\lambda$, a_{12}, a_{21}, $a_{22}-\lambda$ не равно нулю, то имеется только одна двойная прямая.

Если уравнение (1) имеет двойной корень λ, не равный 1, и если $a_{11}-\lambda = a_{12} = a_{21} = a_{22}-\lambda = 0$, то двойной прямой является любая прямая, проходящая через точку $\left(\frac{a_1}{1-\lambda}, \frac{a_2}{1-\lambda}\right)$, и этим исчерпываются все двойные прямые.

Если оба корня уравнения (1) равны 1, но среди чисел $a_{11}-\lambda$, a_{12}, a_{21}, $a_{22}-\lambda$ есть хотя бы одно, не равное нулю, то имеется пучок параллельных между собой двойных прямых.

Если оба корня λ уравнения (1) равны нулю и $a_{11}-\lambda = a_{12} = a_{21} = a_{22}-\lambda = 0$, то данное аффинное преобразование имеет вид $x' = x + a_1$, $y' = y + a_2$; если a_1 и a_2 не равны нулю одновременно, то двойной прямой является любая прямая, параллельная вектору $\{a_1, a_2\}$. Если $a_1 = a_2 = 0$, то данное аффинное преобразование тождественное: $x' = x$, $y' = y$ и двойной является любая прямая.

2. Относительно общей декартовой системы координат задано аффинное преобразование

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2,$$

Написать формулы этого аффинного преобразования в новой системе координат $\overset{*}{O}\overset{*}{x}\overset{*}{y}$, если переход от системы Oxy к системе $\overset{*}{O}\overset{*}{x}\overset{*}{y}$ определяется соотношениями

$$x = c_{11}\overset{*}{x} + c_{12}\overset{*}{y} + c_1, \quad y = c_{21}\overset{*}{x} + c_{22}\overset{*}{y} + c_2.$$

Отв. $\overset{*}{x}{}' = b_{11}\overset{*}{x} + b_{12}\overset{*}{y} + b_1$, $\overset{*}{y}{}' = b_{21}\overset{*}{x} + b_{22}\overset{*}{y} + b_2$,
где числа b_{ik}, b_i определяются из следующего матричного равенства:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти все аффинные преобразования плоскости, квадрат каждого из которых равен единичному преобразованию.

Отв. 1) тождественное преобразование; 2) симметрия относительно любой точки плоскости; 3) «косая» симметрия относительно любой прямой в направлении любой другой (ее пересекающей) прямой.

4. Дано ортогональное преобразование первого рода:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \quad z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Это преобразование может быть осуществлено поворотом на некоторый угол φ вокруг неподвижной прямой. Найти этот угол.

Отв. $\varphi = \arccos \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}$.

5. Найти ортогональное преобразование первого рода, зная направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ неподвижной прямой, определяющей это преобразование, и угол φ поворота.

Отв. Выбирая начало радиусов-векторов в любой неподвижной точке преобразования, обозначая через $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор любой точки пространства, а через $\boldsymbol{r}'$ радиус-вектор образа M' точки M при данном преобразовании, будем иметь

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}\cos\varphi + [\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}]\sin\varphi + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})(1 - \cos\varphi).$$

6. Доказать, что если линейное преобразование $\mathfrak{f}$ множества всех векторов пространства удовлетворяет соотношению

$$\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{f} + 1 = 0,$$

то оно вырожденное.

7. Пусть $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ — произвольные линейные преобразования множества всех векторов пространства. Доказать, что преобразования $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}\mathfrak{f}$ имеют одни и те же собственные значения.

8. Доказать, что преобразование

$$x' = 2x - y, \quad y' = 3x - y$$

периодическое. Существует ли базис, в котором это преобразование является вращением?

9. Пусть линейным преобразованиям $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ множества всех векторов пространства соответствуют матрицы A и B:

$$\mathfrak{f} \longrightarrow A, \quad \mathfrak{g} \longrightarrow B.$$

Доказать, что тогда

$$\mathfrak{f} \pm \mathfrak{g} \longrightarrow A \pm B, \quad \lambda\mathfrak{f} \longrightarrow \lambda A.$$

10. Линейное преобразование $\mathfrak{f}'$ множества всех векторов пространства (или плоскости) называется сопряженным к линейному преобразованию $\mathfrak{f}$ (этого множества), если для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ выполняется соотношение

$$\boldsymbol{a}\mathfrak{f}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\mathfrak{f}'\boldsymbol{a}.$$

Доказать, что для всякого линейного преобразования $\mathfrak{f}$ существует ему сопряженное и притом только одно. Найти матрицу, соответствующую линейному преобразованию $\mathfrak{f}'$, если преобразованию $\mathfrak{f}$ в ортонормированном базисе соответствует матрица A.

Отв. В ортонормированном базисе преобразованию $\mathfrak{f}'$ соответствует матрица A', полученная транспонированием матрицы A.

11. Доказать соотношения

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (\lambda f') = \lambda f', \quad (fg)' = g'f'$$

(см. предыдущую задачу).

12. Доказать, что если f и g — невырожденные линейные преобразования множества всех векторов пространства, то

$$(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}.$$

13. Доказать, что если f — невырожденное линейное преобразование множества всех векторов пространства, то

$$(f^{-1})' = (f')^{-1}.$$

14. Назовем линейное преобразование ω множества всех векторов пространства ортогональным, если

$$\omega\omega' = 1$$

(1 — тождественное преобразование). Доказать, что если ω — ортогональное преобразование, то

1) $|\boldsymbol{a}| = |\omega \boldsymbol{a}|$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$ (сохранение длины вектора);

2) $\boldsymbol{ab} = \omega\boldsymbol{a}\omega\boldsymbol{b}$ (сохранение скалярного произведения);

3) $\omega' = \omega^{-1}$;

4) матрица Ω, соответствующая ω в ортонормированном базисе, ортогональная.

15. Доказать, что если линейное преобразование f множества всех векторов плоскости обладает следующим свойством: $f' = -f$ (антисимметричность), то

$$\omega = \frac{1-f}{1+f} \tag{1}$$

ортогональное преобразование первого рода. Обратно, если ω — ортогональное преобразование первого рода и -1 не является собственным значением этого преобразования, то

$$f = \frac{1-\omega}{1+\omega}$$

антисимметрическое (т. е. $f' = -f$).

З а м е ч а н и е. $(1-f)(1+f)^{-1} = (1+f)^{-1}(1-f)$ (доказать!), поэтому произведение это можно обозначать д р о б ь ю $\frac{1-f}{1+f}$.

Найти матрицу, соответствующую матрице ω, исходя из соотношения (1) и считая, что преобразованию f соответствует в ортонормированном базисе матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Доказать, что всякое линейное преобразование f множества всех векторов пространства тождественно удовлетворяет своему характеристическому уравнению, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-f & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-f & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-f \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

взятому в **л ю б о м** базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *.

---

* Это тождество называют часто уравнением Гамильтона — Кэли.

Замечание. В соотношении (1) под a_{ik} подразумевается линейное преобразование, которое вектору $\boldsymbol{a}$ ставит в соответствие вектор $a_{ik}\boldsymbol{a}$. Следует еще заметить, что при перемножении целых рациональных функций от одного и того же линейного преобразования

$$X = a_0 f^n + a_1 f^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad Y = b_0 f^m + b_1 f^{m-1} + \ldots + b_m$$

порядок множителей не играет роли, т. е. $XY = YX$ (в этом можно убедиться, умножая один раз X на Y, другой раз Y на X — получится одна и та же целая рациональная функция от линейного преобразования f: $a_0b_0 f^{m+n} + (a_1b_0 + a_0b_1) f^{m+n-1} + \ldots$).

Таким образом, имеет смысл говорить об определителе Δ, элементами которого являются целые рациональные функции от одного и того же линейного преобразования f.

Решение. Пусть в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ вектору $\boldsymbol{a} = \{x, y, z\}$ соответствует вектор $f\boldsymbol{a} = \{x', y', z'\}$ с координатами

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \quad z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Вектор $\boldsymbol{e}_1 = \{1, 0, 0\}$ при преобразовании f переходит в вектор

$$f\boldsymbol{e}_1 = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\} = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3.$$

Аналогично

$$f\boldsymbol{e}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3, \quad f\boldsymbol{e}_3 = a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3.$$

Из последних трех соотношений следует

$$\begin{aligned} (a_{11} - f)\,\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3 &= 0, \\ a_{12}\boldsymbol{e}_1 + (a_{22} - f)\,\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3 &= 0, \\ a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + (a_{33} - f)\,\boldsymbol{e}_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

(здесь a_{ik} рассматривается как линейное преобразование, при котором вектору $\boldsymbol{a}$ ставится в соответствие вектор $a_{ik}\boldsymbol{a}$).

Из соотношений (2) следует, что

$$\begin{vmatrix} a_{22} - f & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} - f \end{vmatrix} [(a_{11} - f)\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3] -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} - f \end{vmatrix} [a_{12}\boldsymbol{e}_1 + (a_{22} - f)\,\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3] +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} - f & a_{32} \end{vmatrix} [a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + (a_{33} - f)\,\boldsymbol{e}_3] = 0,$$

или

$$\Delta \boldsymbol{e}_1 = 0,$$

где Δ — линейное преобразование, определяемое формулой

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - f & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - f & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - f \end{vmatrix}.$$

Аналогично получим $\Delta\boldsymbol{e}_2 = 0$ и $\Delta\boldsymbol{e}_3 = 0$. Отсюда следует, что $\Delta\boldsymbol{a} = 0$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$. В самом деле, пусть

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3;$$

тогда

$$\Delta\boldsymbol{a} = x\Delta\,\boldsymbol{e}_1 + y\Delta\,\boldsymbol{e}_2 + z\Delta\,\boldsymbol{e}_3 = 0.$$

Итак, Δ — нулевое преобразование.

Замечание 1. Так как сумме и произведению линейных преобразований соответствуют сумма и произведение соответствующих им матриц, то матрица

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}-A & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-A & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-A \end{vmatrix}\equiv 0, \tag{3}$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(в определителе D числа a_{ik} рассматриваются как скалярные матрицы $a_{ik}E$, где E — единичная матрица).

Все доказанные положения верны и для линейных преобразований множества всех векторов плоскости.

Соотношение, аналогичное соотношению (3), имеет место для любой квадратной матрицы n-го порядка:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}-A & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-A & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-A \end{vmatrix}\equiv 0, \tag{4}$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а числа a_{ik} в соотношении (4) рассматриваются как скалярные матрицы $a_{ik}E$.

Замечание 2. Из доказанного следует, что, например, для линейного преобразования $\mathfrak{f}$ множества всех векторов плоскости всякая целая рациональная функция от $\mathfrak{f}$ n-й степени

$$g=a_0\mathfrak{f}^n+a_1\mathfrak{f}^{n-1}+\dots+a_n$$

сводится к линейной функции $p\mathfrak{f}+q$ от преобразования $\mathfrak{f}$. В самом деле, так как преобразование $\mathfrak{f}$ тождественно удовлетворяет соотношению

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mathfrak{f} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\mathfrak{f} \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\mathfrak{f}^2-I_1\mathfrak{f}+I_2=0,$$

где

$$I_1=a_{11}+a_{22},\quad I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

то

$$\mathfrak{f}^2=I_1\mathfrak{f}-I_2$$

и, далее,

$$\mathfrak{f}^3-I_1\mathfrak{f}^2+I_2\mathfrak{f}=0,$$

$$\mathfrak{f}^3=I_1\mathfrak{f}^2-I_2\mathfrak{f}=I_1(I_1\mathfrak{f}-I_2)-I_2\mathfrak{f}=\left(I_1^2-I_2\right)\mathfrak{f}-I_1I_2 \text{ и т. д.}$$

Представим $\mathfrak{f}^n$ в виде $p\mathfrak{f}+q$, где n — целое положительное число, а $\mathfrak{f}$ — линейное преобразование множества всех векторов плоскости.

Из соотношения

$$f^2 - I_1 f + I_2 = 0$$

следует, что

$$f^n - I_1 f^{n-1} + I_2 f^{n-2} = 0, \tag{5}$$

где n — целое положительное число, большее или равное 2.

Рассмотрим сначала числовую последовательность x_n, удовлетворяющую соотношению

$$x_n - I_1 x_{n-1} + I_2 x_{n-2} = 0, \qquad n \geqslant 3, \tag{6}$$

и предположим сначала, что $I_2 \neq 0$ *.

Докажем, что существует геометрическая прогрессия $x_n = \lambda^{n-1}$ (где $\lambda \neq 0$), удовлетворяющая этому соотношению. Имеем

$$\lambda^{n-1} - I_1 \lambda^{n-2} + I_2 \lambda^{n-3} = 0,$$

и так как $\lambda \neq 0$, то

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0. \tag{7}$$

Так как $I_2 \neq 0$, то это уравнение имеет корни λ_1 и λ_2, не равные нулю. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то уравнению (6) удовлетворяют две прогрессии λ_1^{n-1} и λ_2^{n-1}, а также произвольная их линейная комбинация $C_1 \lambda_1^{n-1} + C_2 \lambda_2^{n-1}$, где C_1 и C_2 — произвольные числа.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$ ($\neq 0$), то уравнению (6) удовлетворяет помимо прогрессии λ_1^{n-1} еще последовательность $(n-1)\lambda_1^{n-1}$. В самом деле,

$$(n-1)\lambda_1^{n-1} - I_1 (n-2)\lambda_1^{n-2} + I_2 (n-3)\lambda_1^{n-3} =$$
$$= \lambda_1^{n-3}\left[(n-1)\lambda_1^2 - I_1 (n-2)\lambda_1 + I_2 (n-3)\right];$$
$$(n-1)\lambda_1^2 - I_1 (n-2)\lambda_1 + I_2 (n-3) = (n-1)\left(\lambda_1^2 - I_1\lambda_1 + I_2\right) + I_1\lambda_1 - 2I_2.$$

Так как $\lambda_1 = \lambda_2$, то $I_1 = 2\lambda_1$, $I_2 = \lambda_1^2$, и, значит,

$$I_1 \lambda_1 - 2I_2 = 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1^2 = 0.$$

Ясно, что решением соотношения (6) является также (в случае $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$) линейная комбинация

$$[C_1 + C_2 (n-1)]\,\lambda_1^{n-1}$$

указанных двух последовательностей.

Возвращаясь к соотношению (5), видим, что последовательность линейных преобразований

$$1,\ f,\ f^2,\ \ldots,\ f^n,\ \ldots$$

является возвратной последовательностью второго порядка.

Если $I_2 \neq 0$ и корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения линейного преобразования f не равны друг другу, то последовательность линейных преобразований

$$1,\ f,\ f^2,\ \ldots,\ f^n,\ \ldots \tag{8}$$

и последовательность

$$g\lambda_1^{n-1} + h\lambda_2^{n-1}, \tag{9}$$

* Последовательность, для которой каждый член, начиная с третьего, выражается одной и той же линейной комбинацией двух предыдущих, называется возвратной последовательностью второго порядка.

где g и h — любые линейные преобразования множества всех векторов плоскости, удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению

$$x_n - l_1 x_{n-1} + l_2 x_{n-2} = 0.$$

Выберем g и h так, чтобы два первых члена последовательности (9) были равны соответственно двум первым членам последовательности (8):

$$g + h = 1, \quad \lambda_1 g + \lambda_2 h = f.$$

Отсюда

$$g = \frac{f - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad h = \frac{f - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

и последовательность (9) принимает вид

$$\frac{f - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^{n-1} + \frac{f - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2^{n-1}. \tag{10}$$

Но так как последовательности (8) и (10) удовлетворяют к тому же еще одному и тому же рекуррентному соотношению (6), то

$$f^n = \frac{f - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^n + \frac{f - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2^n$$

при всех натуральных n. Задача решена в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, то последовательность (8) и последовательность

$$t_n = [g + h(n-1)]\, \lambda_1^{n-1} \tag{11}$$

удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению (6). Выберем g и h так, чтобы при $h = 1$ и $h = 2$ соответственно $t_1 = 1$, $t_2 = f$:

$$1 = g, \quad f = (g + h)\lambda_1, \quad h = \frac{f - \lambda_1}{\lambda_1}.$$

Значит, искомая последовательность

$$t_n = \left(1 + (n-1)\frac{f - \lambda_1}{\lambda_1}\right)\lambda_1^{n-1} \quad \text{и} \quad f^n = \left(1 + n\frac{f - \lambda_1}{\lambda_1}\right)\lambda_1^n$$

при всех натуральных n.

Если, наконец, $l_2 = 0$, то $f^2 = l_1 f$, $f^3 = l_1 f^2 = l_1^2 f$ и вообще $f^n = l_1^{n-1} f$.

Читателю предлагается доказать, что если f линейное преобразование множества всех векторов пространства, то

1) если собственные значения преобразования f попарно различны $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_3 \neq \lambda_1$, то

$$f^n = g\lambda_1^n + h\lambda_2^n + s\lambda_3^n,$$

где линейные преобразования g, h и s определяются из системы

$$g + h + s = 1, \quad \lambda_1 g + \lambda_2 h + \lambda_3 s = f, \quad \lambda_1^2 g + \lambda_2^2 h + \lambda_3^2 s = f^2;$$

2) если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то

$$f^n = (g + hn)\lambda_2^n + s\lambda_3^n,$$

де линейные преобразования g, h и s определяются из системы

$$\begin{gathered} g + s = 1 \\ (g + h)\lambda_2 + s\lambda_3 = f, \\ (g + 2h)\lambda_2 + s\lambda_3^2 = f^2; \end{gathered}$$

3) если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, то

$$f^n=(g+nh+n^2s)\,\lambda_1^n,$$

где

$$g=1,\quad (g+h+s)\,\lambda_1=f,\quad (g+2h+4s)\,\lambda_1^2=f^2.$$

В случае, если одно из собственных значений линейного преобразования f равно нулю, последовательность f^n является возвратной последовательностью первого порядка. Исходя из применяемого здесь отображения множества линейных преобразований на множество квадратных матриц, можно сформулировать соответствующие предложения для матриц.

Рассмотрим числовой пример: дана матрица

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}.$$

Найти A^n.

Находим собственные значения:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&3\\1&5-\lambda&1\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$\lambda_1=3,\quad \lambda_2=6,\quad \lambda_3=-2.$$

Значит,

$$A^n=P\cdot 3^n+Q\cdot 6^n+R\,(-2)^n,$$

где P, Q, S—матрицы, определяемые из системы

$$P+Q+R=E,\quad 3P+6Q-2R=A,\quad 9P+36Q+4R=A^2.$$

Отсюда находим

$$P=\frac{1}{15}(-A^2+4A+12E)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$Q=\frac{1}{24}(A^2-A-6E)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix},$$

$$R=\frac{1}{40}(A^2-9A+18E)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^n=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}3^{n-1}+\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}6^{n-1}+\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}(-2)^{n-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}3^{n-1}+6^{n-1}-(-2)^{n-1}&-3^{n-1}+2\cdot 6^{n-1}&3^{n-1}+6^{n-1}+(-2)^{n-1}\\-3^{n-1}+2\cdot 6^{n}&3^{n-1}+4\cdot 6^{n-1}&-3^{n-1}+2\cdot 6^{n-1}\\3^{n-1}+6^{n-1}+(-2)^{n-1}&-3^{n-1}+2\cdot 6^{n-1}&3^{n-1}+6^{n-1}-(-2)^{n-1}\end{pmatrix}.$$

17. Пусть f — линейное преобразование множества всех векторов плоскости (или пространства). Введем следующие определения:

$$e^f = 1 + f + \frac{f^2}{2!} + \ldots + \frac{f^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sin f = f - \frac{f^3}{3!} + \frac{f^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{f^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\cos f = 1 - \frac{f^2}{2!} + \frac{f^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{f^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\ln(1+f) = f - \frac{f^2}{2} + \frac{f^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{f^n}{n} + \ldots,$$

$$(1+f)^k = 1 + kf + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2} f^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} f^n + \ldots$$

Доказать, что $\sin^2 f + \cos^2 f = 1$ (1 — единичное преобразование),

$$\sin(f \pm g) = \sin f \cos g \pm \cos f \sin g,$$
$$\cos(f \pm g) = \cos f \cos g \mp \sin f \sin g,$$
$$e^f e^g = e^{f+g},$$
$$(e^f)' = e^{f'},$$
$$(e^f)^{-1} = e^{f^{-1}}.$$

Доказать, что если f — антисимметрическое преобразование, то e^f — ортогональное преобразование.

Замечание. Суммой ряда

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots,$$

элементами которого являются линейные преобразования множества всех векторов пространства (или плоскости), называется предел последовательности

$$s_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

частичных сумм этого ряда.

Линейное преобразование s называется пределом последовательности s_n линейных преобразований, если для любого вектора x и любого положительного ε существует такое число N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|s_n x - sx| < \varepsilon$.

Если $(a_{ik}^{(n)})$ — матрица, соответствующая линейному преобразованию s_n в любом базисе, то для того чтобы последовательность s_n имела предел, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{n \to \infty} a_{ik}^{(n)} = a_{ik}$$

При этом линейное преобразование s, соответствующее матрице (a_{ik}), и будет пределом последовательности s_n.

Решение. Пусть, например, f есть линейное преобразование множества всех векторов плоскости и пусть собственные значения λ_1 и λ_2 этого преобразования отличны от нуля и не равны друг другу:

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Тогда

$$f^n = \frac{f - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^n + \frac{f - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2^n$$

(стр. 553).

Отсюда в силу принятых выше определений

$$\sin f = \frac{f-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\sin\lambda_1 + \frac{f-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\sin\lambda_2,$$

$$\cos f = \frac{f-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\cos\lambda_1 + \frac{f-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cos\lambda_2.$$

Отсюда

$$\sin^2 f + \cos^2 f = \frac{f^2-2\lambda_2 f+\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} + \frac{f^2-2\lambda_1 f+\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} +$$

$$+2\sin\lambda_1\sin\lambda_2\,\frac{f^2-(\lambda_1+\lambda_2)f+\lambda_1\lambda_2}{-(\lambda_1-\lambda_2)^2} + 2\cos\lambda_1\cos\lambda_2\,\frac{f^2-(\lambda_1+\lambda_2)f+\lambda_1\lambda_2}{-(\lambda_1-\lambda_2)^2}.$$

Но $f^2-(\lambda_1+\lambda_2)f+\lambda_1\lambda_2 = f^2 - I_1 f + I_2 = 0$, значит, остается

$$\sin^2 f + \cos^2 f = \frac{2f^2-2(\lambda_1+\lambda_2)f+\lambda_1^2+\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} =$$

$$= \frac{2(\lambda_1+\lambda_2)f-2\lambda_1\lambda_2-2(\lambda_1+\lambda_2)f+\lambda_1^2+\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} = 1 \text{ и т. д.}$$

ГЛАВА XV

ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 191. Проективная плоскость

1. Первая модель проективной плоскости

Пусть дана плоскость π и принадлежащая ей прямая. Присоединим к множеству точек прямой новый элемент, природа которого для нас совершенно безразлична. Мы получим новое множество, состоящее из точек рассматриваемой прямой и вновь присоединенного элемента. Это новое множество называется *проективной прямой*, соответствующей взятой обыкновенной прямой. Элемент, вновь присоединенный к множеству точек обыкновенной прямой, называется *несобственной*, или бесконечно удаленной, точкой проективной прямой.

Условимся в следующем: если на плоскости взять две пересекающиеся прямые, то соответствующие им проективные прямые имеют различные несобственные точки, т. е. эти проективные прямые образуются присоединением двух различных элементов к множествам точек обыкновенных прямых. Если же прямые параллельны, то условимся, что соответствующие им проективные прямые имеют одну и ту же несобственную точку, т. е. эти проективные прямые получаем присоединением одного и того же элемента к каждому из множеств точек взятых прямых.

Совокупность всех несобственных точек, т. е. совокупность всех вновь присоединенных элементов, назовем несобственной, или бесконечно удаленной, проективной прямой.

Множество, состоящее из всех точек рассматриваемой евклидовой плоскости π и всех несобственных точек, называется проективной плоскостью.

Условимся в следующей терминологии: точки и прямые евклидовой плоскости и самою евклидову плоскость будем называть обыкновенными точками, обыкновенными прямыми и обыкновенной плоскостью. Обыкновенные точки, рассматриваемые как элементы множества, являющегося проективной прямой, или проективной плоскостью, будем называть собственными точками.

Все прямые проективной плоскости, кроме несобственной, будем называть собственными прямыми проективной плоскости. Далее, будем говорить, что точка (как собственная, так и несобственная), которая принадлежит множеству, составляющему проективную прямую, лежит на этой прямой, или что проективная прямая проходит через эту точку.

Покажем следующее.

1. *Через любые две различные точки проективной плоскости проходит и притом только одна прямая.*

В самом деле, если эти две точки собственные, то существует и притом только одна обыкновенная прямая, проходящая через эти точки, которой соответствует вполне определенная проективная прямая, проходящая (по принятой нами терминологии) через две эти точки.

Если одна из точек собственная, а другая — несобственная, то из пучка обыкновенных параллельных прямых, к каждой из которых присоединена эта несобственная точка, нужно выбрать ту, которая проходит через данную собственную точку. Проективная прямая, которую мы получим, присоединив к ней данную несобственную точку, и будет той единственной собственной прямой, которая проходит через две данные точки.

Если, наконец, обе данные точки несобственные, то они по определению лежат на единственной несобственной прямой.

2. *Любые две различные прямые проективной плоскости имеют и притом только одну общую точку.*

В самом деле, если обе прямые собственные, то они соответствуют двум различным обыкновенным прямым; если эти прямые пересекаются, то данные проективные прямые имеют различные несобственные точки, значит, указанная выше обыкновенная точка пересечения является единственной точкой, общей для двух данных проективных прямых. Если же обыкновенные прямые, которым соответствуют данные проективные прямые, параллельны, то данные проективные прямые по определению имеют общую им обеим несобственную точку, и эта точка является единственной точкой, общей для данных прямых. Наконец, если одна из данных проективных прямых несобственная, а другая собственная, то единственной их общей точкой является несобственная точка данной собственной прямой.

Мы видим, что на проективной плоскости нет параллельных прямых: всякие две проективные прямые проективной плоскости пересекаются.

2. Вторая модель проективной плоскости

Назовем проективной плоскостью собственную связку прямых и плоскостей трехмерного пространства с центром в точке O. Каждую прямую связки будем называть «точкой» проективной плоскости, а каждую плоскость связки «прямой» проективной плоскости.

Ясно, что 1) через две любые «точки» проективной плоскости проходит и притом только одна «прямая» (это означает, что через две любые различные прямые связки проходит и притом только одна плоскость этой связки) и 2) две любые «прямые» проективной плоскости всегда пересекаются в одной «точке» (т. е. две любые различные плоскости связки имеют и притом только одну общую прямую).

Между двумя построенными моделями проективных плоскостей можно установить взаимно однозначное соответствие, притом такое, что трем любым точкам одной модели, лежащим на одной прямой, будут во второй модели соответствовать три точки, лежащие также на одной прямой.

В самом деле, пусть π — евклидова плоскость, пополнением которой несобственными точками получена проективная плоскость Π (первая модель). Расположим плоскость π так, чтобы она не проходила через центр O связки прямых и плоскостей, и поставим в соответствие каждой прямой связки точку плоскости π, в которой эта прямая пересекает плоскость π, а каждой плоскости связки поставим в соответствие прямую, по которой эта плоскость пересекает плоскость π.

Далее, прямой связки, параллельной плоскости π, поставим в соответствие ту несобственную точку, которая присоединена к прямым плоскости π, параллельным рассматриваемой прямой связки и, наконец, плоскости связки, которая параллельна плоскости π, поставим в соответствие несобственную прямую плоскости Π. Это соответствие удовлетворяет высказанным выше требованиям.

Замечание. Мы построили две модели проективной плоскости. Изучение проективной геометрии можно производить на любой из них. Первая модель имеет то преимущество, что связывает понятие проективной плоскости с представлением об обыкновенной евклидовой плоскости; построения, относящиеся к проективной плоскости, могут быть при этом выполняемы на обыкновенной плоскости (которой соответствует данная проективная). Достоинством второй модели проективной плоскости является возможность свести изучение свойств проективной плоскости к изучению соответствующих свойств обыкновенного трехмерного евклидова пространства.

Можно построить и другие модели проективной плоскости.

§ 192. Однородные координаты точки и прямой на проективной плоскости

1. Первая модель проективной плоскости

Введем на евклидовой плоскости π общую декартову систему координат. Дополним эту плоскость несобственными точками до проективной плоскости П.

Возьмем на этой проективной плоскости собственную точку M. Пусть X и Y — ее координаты. Будем называть любую тройку чисел x_1, x_2, x_3 **однородными** координатами точки M, если $x_3 \neq 0$ и если

$$\frac{x_1}{x_3} = X, \quad \frac{x_2}{x_3} = Y.$$

Из этого определения следует, что если x_1, x_2, x_3 — однородные координаты собственной точки M проективной плоскости, то три числа kx_1, kx_2, kx_3, где k — любое число, не равное нулю, также будут однородными координатами точки M.

Таким образом, однородные координаты собственной точки — это три любые числа из класса $x_1 : x_2 : x_3$ всех пропорциональных между собой троек чисел, таких, что последнее число $x_3 \neq 0$. Это обстоятельство отмечают следующей записью:

$$M(x_1 : x_2 : x_3).$$

Например, запись $M(1:2:-2)$ означает, что однородные координаты точки M — это числа $1, 2, -2$, или $2, 4 -4$, или -3, -6, 6 и т. д., аффинные же декартовы координаты этой точки

$$X = -\frac{1}{2}, \quad Y = -1.$$

Пусть теперь M — несобственная точка. Рассмотрим какой-нибудь вектор $\boldsymbol{a}$, не равный нулю и коллинеарный тем собственным прямым проективной плоскости, на которых лежит точка M.

Обозначим координаты вектора $\boldsymbol{a}$ через x_1, x_2.

Вектор с координатами kx_1, kx_2, где k — любое число, не равное нулю, также ненулевой, коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$ и собственным прямым, на которых лежит несобственная точка M. Назовем любую тройку чисел из класса троек kx_1, kx_2, 0 однородными координатами несобственной точки M и будем писать

$$M(x_1 : x_2 : 0).$$

Итак, однородные координаты несобственной точки M — это любая тройка чисел из класса пропорциональных между собой троек $x_1 : x_2 : 0$, где x_1, x_2 — координаты какого-нибудь ненулевого вектора, коллинеарного собственным прямым, на которых лежит точка M.

Так, например, несобственная точка оси Ox: $(1:0:0)$, так как $e_1=\{1, 0\}\parallel Ox$. Несобственная точка оси Oy:$(0:1:0)$, так как $e_2=\{0, 1\}\parallel Oy$. Отметим еще, что начало координат имеет однородные координаты $0:0:1$, а единичная точка E — однородные координаты $1:1:1$.

Теорема. *Всякая прямая на проективной плоскости выражается однородным уравнением первой степени*

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

и обратно, всякое такое уравнение является уравнением некоторой прямой на проективной плоскости.

Доказательство. Пусть π — обыкновенная плоскость, а Π — соответствующая ей проективная плоскость. Введем на плоскости π общую декартову систему координат и возьмем на плоскости Π любую собственную прямую Λ.

Пусть $u_1X+u_2Y+u_3=0$ — уравнение той обыкновенной прямой λ плоскости π, присоединением к которой несобственной точки получена прямая Λ. Если x_1, x_2, x_3 — однородные координаты любой собственной точки M прямой Λ, то

$$X=\frac{x_1}{x_3}, \qquad Y=\frac{x_2}{x_3}$$

и, значит,

$$u_1\frac{x_1}{x_3}+u_2\frac{x_2}{x_3}+u_3=0,$$

или

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0.$$

Если же M — несобственная точка прямой Λ и x_1, x_2, 0 — ее однородные координаты, то вектор $\{x_1, x_2\}$ коллинеарен прямой λ, значит, $u_1x_1+u_2x_2=0$, или

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0.$$

Аналогично доказывается, что если точка $(x_1:x_2:x_3)$ (собственная или несобственная) не лежит на прямой Λ, то

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3\neq 0.$$

Если Λ — несобственная прямая, то ее уравнение имеет вид

$$x_3=0.$$

Обратно, всякое однородное уравнение

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

первой степени относительно x_1, x_2, x_3 является уравнением собственной прямой, если хотя бы одно из чисел u_1 или u_2 не равно нулю, и несобственной, если $u_1=u_2=0$, $u_3\neq 0$.

Любые три числа из класса $u_1:u_2:u_3$ троек чисел, пропорциональных коэффициентам в уравнении проективной прямой, называются координатами этой прямой.

Проективную прямую вместе с ее координатами будем обозначать $[u_1:u_2:u_3]$.

Две прямые совпадают тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

2. Вторая модель проективной плоскости

Покажем теперь, как можно ввести координаты точек и прямых для второй модели проективной плоскости.

Введем в пространстве общую декартову систему координат $Oxyz$, принимая за начало координат центр O связки, а за оси координат три прямые Ox, Oy, Oz связки, не лежащие в одной плоскости (рис. 258). Возьмем произвольную «точку», т. е. произ-

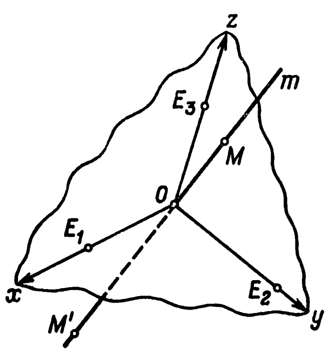


Рис. 258

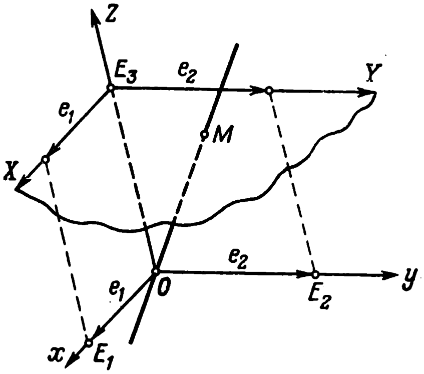


Рис. 259

вольную прямую m связки; выберем на этой прямой m произвольную точку M, не совпадающую с центром O связки. Пусть x, y, z—координаты точки M в системе $Oxyz$. Три числа x, y, z называются **проективными координатами** выбранной точки M. Если взять на прямой m другую точку $M'(x', y', z')$, не совпадающую с O, то

$$x:y:z=x':y':z'$$

и, обратно, если

$$x:y:z=x':y':z',$$

то точка $M'(x', y', z')$ лежит на прямой OM. Поэтому любые три числа, пропорциональные числам x, y, z, также являются проективными координатами выбранной точки M. Таким образом, каждой «точке» проективной плоскости соответствует класс пропорциональных троек ее координат. Так как уравнение всякой плоскости, проходящей через начало координат, имеет вид

$$ux+vy+wz=0$$

и, обратно, всякое такое уравнение является уравнением плоскости связки, то и для этой модели проективной плоскости верна теорема: всякая «прямая» проективной плоскости выражается линейным однородным уравнением $ux+vy+wz=0$, где или $u \neq 0$, или $v \neq 0$, или $w \neq 0$ и, обратно, любое такое уравнение выражает «прямую».

Любые три числа из класса $u:v:w$ троек чисел, пропорциональных коэффициентам в уравнении «прямой», называются координатами этой «прямой» (во второй модели). Две «прямые» совпадают тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

3. Связь проективных координат точки во второй модели с однородными координатами точки в первой модели

Проведем через точку $E_3(0, 0, 1)$ плоскость π, параллельную плоскости xOy. Введем на плоскости π систему координат, принимая за начало координат точку E_3, за оси координат прямые E_3X и E_3Y, соответственно параллельные прямым Ox и Oy и одинаково с ними направленные; масштабные отрезки на осях E_3X и E_3Y выберем соответственно равными масштабным отрезкам осей Ox и Oy (рис. 259). Обозначим через Π проективную плоскость, которая соответствует плоскости π. Тогда проективные координаты x, y, z «точки» m будут и однородными координатами точки M (на плоскости Π), соответствующей прямой m.

В самом деле, пусть «точке» m соответствует собственная точка M плоскости Π, т. е. прямая m пересекает плоскость π в точке M. Тогда точка M в системе координат E_3XY имеет координаты X, Y. Но так как единичный вектор оси E_3X равен единичному вектору оси Ox, а единичный вектор оси E_3Y равен единичному вектору оси Oy, то $X=x$, $Y=y$. Значит, первые две координаты тройки чисел x, y, 1, являющиеся проективными координатами «точки» m, — это декартовы координаты точки M, т. е. проективные координаты x, y, z «точки» m являются однородными координатами соответствующей ей собственной точки M плоскости Π.

Если «точке» m соответствует несобственная точка плоскости Π, т. е. если прямая m параллельна плоскости π, то $z=0$, а x и y — координаты вектора, коллинеарного прямой m и лежащего в плоскости π. Таким образом, и в этом случае проективные координаты «точки» m есть однородные координаты соответствующей несобственной точки плоскости Π.

§ 193. Уравнение прямой на проективной плоскости *, проходящей через две точки; пучок прямых

Через две различные точки $(a_1:a_2:a_3)$ и $(b_1:b_2:b_3)$ проходит и притом только одна прямая, уравнение которой можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

В самом деле, написанное уравнение является однородным уравнением первой степени относительно x_1, x_2, x_3 (данные точки предполагаются различными, следовательно, их координаты не пропорциональны и, значит, среди коэффициентов при x_1, x_2, x_3 в написанном уравнении по крайней мере один не равен нулю). Координаты этой прямой:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Если $A(a_1:a_2:a_3)$ и $B(b_1:b_2:b_3)$ — две различные точки проективной плоскости, то при любых α и β, не равных нулю одновременно, точка M с координатами

$$x_1 = \alpha a_1 + \beta b_1, \quad x_2 = \alpha a_2 + \beta b_2, \quad x_3 = \alpha a_3 + \beta b_3$$

лежит на прямой AB и, обратно, координаты любой точки прямой AB могут быть представлены в таком виде.

В самом деле, прямая AB выражается однородным уравнением первой степени относительно x_1, x_2, x_3; a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 — два линейно независимых решения этого уравнения; значит, все решения будут линейными комбинациями этих двух.

Аналогично устанавливаются и следующие два предложения: две различные прямые

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \quad v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$$

пересекаются в точке

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right);$$

прямая

$$\alpha(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) + \beta(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3) = 0,$$

где α и β не равны нулю одновременно, входит в пучок прямых, определяемых двумя данными, и, обратно, уравнение любой прямой этого пучка можно записать в таком виде.

* В этом параграфе имеется в виду любая из двух моделей проективной плоскости. В случае первой модели $x_1:x_2:x_3$ — однородные координаты точки, в случае второй — проективные координаты.

§ 194. Группа проективных преобразований проективной плоскости. Группа аффинных преобразований как подгруппа группы проективных преобразований

Проективным отображением проективной плоскости Π *на проективную плоскость* Π' *называется взаимно однозначное отображение плоскости* Π *на плоскость* Π', *при котором три любые точки плоскости* Π, *принадлежащие одной прямой, переходят в три точки плоскости* Π', *также принадлежащие одной прямой.*

Проективное отображение проективной плоскости Π *на себя называется проективным преобразованием проективной плоскости.*

Таким образом, определение проективного отображения плоскости Π на плоскость Π' и определение проективного преобразования плоскости Π точно такие же, как и определения аффинного отображения и аффинного преобразования (§ 176). Следует, однако, иметь в виду, что эти определения относятся к разным объектам: определение аффинного отображения и аффинного преобразования дается для евклидовой плоскости, а определение проективного отображения и проективного преобразования — для проективной плоскости. Этим и объясняется глубокое различие свойств аффинных и проективных отображений и преобразований.

Рассмотрим множество всех проективных преобразований проективной плоскости Π. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — два любых проективных преобразования плоскости Π. Произведение $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ является взаимно однозначным преобразованием и переводит три любые точки плоскости Π, принадлежащие одной прямой, в три точки плоскости Π, также принадлежащие одной прямой.

Следовательно, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ — проективное преобразование. Преобразование $\mathfrak{A}^{-1}$, обратное преобразованию $\mathfrak{A}$, — взаимно однозначно. Преобразование $\mathfrak{A}^{-1}$ три любые точки A', B', C' плоскости Π', принадлежащие одной прямой, переводит в точки A, B, C, также принадлежащие одной прямой. В самом деле, предполагая, что точки A', B', C' принадлежат одной прямой и допуская, что их прообразы A, B, C при преобразовании $\mathfrak{A}^{-1}$ не лежат на одной прямой, докажем (так же, как в теореме 1 § 176), что при преобразовании $\mathfrak{A}$ все точки плоскости Π отображаются в точки прямой $A'B'C'$, а значит, $\mathfrak{A}$ — невзаимно однозначное преобразование.

Итак, $\mathfrak{A}^{-1}$ — проективное преобразование. Таким образом, множество всех проективных преобразований проективной плоскости образует группу, называемую группой проективных преобразований проективной плоскости.

При проективном отображении $\mathfrak{A}$ проективной плоскости Π на проективную плоскость Π' (и при проективном преобразовании плоскости Π) множество всех точек прямой l отображается и притом взаимно однозначно на множество всех точек некоторой прямой

l' (это следует из того, что $\mathfrak{A}^{-1}$—также проективное отображение плоскости Π' на плоскость Π).

Прямая l' называется образом прямой l, а прямая l прообразом прямой l' при преобразовании $\mathfrak{A}$.

Множество всех проективных преобразований плоскости, каждое из которых отображает на себя какую-нибудь фиксированную прямую, образует подгруппу группы проективных преобразований. В самом деле, произведение $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ проективных преобразований, каждое из которых отображает прямую l на себя, будет также отображать прямую l на себя. Преобразование $\mathfrak{A}^{-1}$ будет отображать прямую l на себя, если преобразование $\mathfrak{A}$ отображает l на себя.

В частности, если проективная плоскость задана в виде первой модели, то множество Γ_1 всех проективных преобразований плоскости, отображающих на себя несобственную прямую, будет подгруппой группы Γ проективных преобразований плоскости.

Каждое из проективных преобразований подгруппы Γ_1 переводит собственные точки плоскости Π в собственные точки плоскости Π. В самом деле, если бы какая-нибудь собственная точка плоскости Π каким-нибудь проективным преобразованием из Γ_1 переводилась в несобственную, то три точки M и любые две несобственные точки переводились бы в три несобственные точки, а значит, при преобразовании, обратном рассматриваемому (также проективном), три несобственные точки переходили бы в две несобственные и в одну собственную. Это невозможно, ибо три несобственные точки принадлежат одной прямой, а две несобственные и одна собственная не принадлежат одной прямой.

Из сказанного следует, что любое преобразование из Γ_1 порождает в плоскости π, пополнением которой получается плоскость Π, аффинное преобразование. Группе Γ_1 всех проективных преобразований плоскости Π соответствует в указанном смысле группа всех аффинных преобразований плоскости π.

§ 195. Проективное преобразование плоскости в координатах. Основная теорема

Теорема 1. *Преобразование $\mathfrak{L}$ проективной плоскости* Π, *при котором точке $M(x_1:x_2:x_3)$ ставится в соответствие точка $M'(x'_1:x'_2:x'_3)$ той же плоскости, и такая, что ее координаты выражаются через координаты точки M линейными однородными соотношениями*

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \qquad (1)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

является проективным.

Доказательство. В силу условия $\Delta \neq 0$ преобразование $\mathfrak{L}$ взаимно однозначно.

Рассмотрим три произвольные точки

$$A(x_1:x_2:x_3),\quad B(y_1:y_2:y_3),$$
$$C((\alpha x_1+\beta y_1):(\alpha x_2+\beta y_2):(\alpha x_3+\beta y_3)),$$

принадлежащие одной прямой. Пусть

$$A'(x_1':x_2':x_3'),\quad B'(y_1':y_2':y_3')$$

образы точек A и B при преобразовании $\mathfrak{L}$. Тогда в силу соотношений (1) образом точки C будет точка

$$C'((\alpha x_1'+\beta y_1'):(\alpha x_2'+\beta y_2'):(\alpha x_3'+\beta y_3')),$$

принадлежащая прямой $A'B'$.

Теорема 2 (обратная). *Всякое проективное преобразование проективной плоскости* Π *в координатах выражается линейными однородными соотношениями с определителем* Δ, *не равным нулю.*

Доказательство. Реализуем проективную плоскость первой моделью.

1°. Рассмотрим сначала случай, когда проективное преобразование $\mathfrak{A}$ несобственную прямую переводит в несобственную прямую.

Так как образом любой собственной точки является в этом случае собственная точка, то на множестве собственных точек проективное преобразование $\mathfrak{A}$ совпадает с некоторым аффинным преобразованием A. Аффинное преобразование A в однородных координатах выражается соотношениями вида

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= x_3, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Соотношениями (2) задается и некоторое проективное преобразование $\overline{A}$, которое несобственную точку $(x_1:x_2:0)$ переводит в несобственную же точку $((a_{11}x_1+a_{12}x_2):(a_{21}x_1+a_{22}x_2):0)$. Проективные преобразования $\mathfrak{A}$ и $\overline{A}$, как мы только отметили, совпадают на множестве всех собственных точек плоскости Π; докажем, что они производят одно и то же преобразование и над несобственными точками. В самом деле, пусть C — несобственная точка прямой AB (A и B — собственные точки). Тогда и при преобразовании $\mathfrak{A}$, и при преобразовании $\overline{A}$ точки A и B перейдут в собственные точки A' и B', а точка C перейдет в несобственную точку C' прямой $A'B'$.

Итак, $\mathfrak{A}=\overline{A}$.

2°. Предположим теперь, что несобственная прямая l плоскости Π при проективном преобразовании $\mathfrak{A}$ переходит в собственную прямую l', уравнение которой в однородных координатах имеет вид

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.$$

Доказательство сведем к первому случаю. Для этого рассмотрим проективное преобразование $\mathfrak{L}$, определяемое соотношениями

$$x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,$$
$$x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,$$
$$x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3,$$

где числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23} выбраны произвольно, но так, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0.$$

При преобразовании $\mathfrak{L}$ прямая l' перейдет в прямую $x_3'=0$, т. е. в несобственную прямую плоскости Π. Произведение $\mathfrak{L}\mathfrak{A}$, являющееся проективным преобразованием, переводит несобственную прямую в себя, а потому, по доказанному (случай 1°), в однородных координатах выражается соотношениями вида

$$x_1'=b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3,$$
$$x_2'=b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3,$$
$$x_3'=x_3.$$

Обозначим это преобразование через $\overline{A}$. Из соотношения

$$\mathfrak{L}\mathfrak{A}=\overline{A}$$

находим

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{L}^{-1}\overline{A}.$$

Но в координатах $\overline{A}$ и $\mathfrak{L}^{-1}$ выражаются линейными однородными соотношениями с определителем, отличным от нуля, следовательно, и проективное преобразование $\mathfrak{A}$, являющееся произведением $\mathfrak{L}^{-1}$ на $\overline{A}$, в координатах также выражается линейными однородными соотношениями с определителем, отличным от нуля.

Из теорем 1 и 2 следует, что проективное преобразование проективной плоскости П можно определить в однородных координатах как линейное однородное преобразование с определителем, отличным от нуля.

Заметим, что если при проективном преобразовании $\mathfrak{A}$ проективной плоскости П образом собственной точки $M(x, y)$ является собственная точка $M'(x', y')$, то координаты x', y' образа M' точки M через координаты x и y прообраза выражаются дробно-линейными соотношениями

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \tag{3}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Обратно, отображение собственных точек проективной плоскости П в собственные, заданные соотношениями (3) при условии, что $\Delta \neq 0$ совпадает на множестве собственных точек с проективным преобразованием

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}$$

Отметим еще, что прообразом прямой

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = 0$$

при проективном преобразовании $\mathfrak{A}$ является прямая

$$\begin{gathered} u_1'(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + u_2'(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + u_3'(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0, \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} (a_{11}u_1' + a_{21}u_2' + a_{31}u_3')\,x_1 + (a_{12}u_1' + a_{22}u_2' + a_{32}u_3')\,x_2 + \\ + (a_{13}u_1' + a_{23}u_2' + a_{33}u_3')\,x_3 = 0. \end{gathered}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}u_1' + a_{21}u_2' + a_{31}u_3', \\ u_2 &= a_{12}u_1' + a_{22}u_2' + a_{32}u_3', \\ u_3 &= a_{13}u_1' + a_{23}u_2' + a_{33}u_3', \end{aligned}$$

т. е. матрица проективного преобразования, выражающего координаты u_1, u_2, u_3 прообраза прямой через координаты ее образа, является матрицей A', транспонированной по отношению к матрице A проективного преобразования $\mathfrak{A}$.

Докажем следующую основную теорему о проективных преобразованиях плоскости.

Теорема 3. *Если на проективной плоскости заданы две четверки точек A, B, C, D и A', B', C', D' так, что никакие три точки из первой четверки не лежат на одной прямой и никакие три точки из второй четверки не лежат на одной прямой, то существует и притом только одно проективное преобразование, которое точки A, B, C, D переводит соответственно в точки A', B', C', D'.*

Доказательство существования. Докажем сначала, что существует проективное преобразование $\mathfrak{A}$, которое точки $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$, $(1:1:1)$ переводит соответственно в точки

$$A(a_1:a_2:a_3),\quad B(b_1:b_2:b_3),\quad C(c_1:c_2:c_3),\quad D(d_1:d_2:d_3).$$

Искомое преобразование будем искать в виде

$$\begin{aligned} x_1' &= a_1px_1+b_1qx_2+c_1rx_3, \\ x_2' &= a_2px_1+b_2qx_2+c_2rx_3, \\ x_3' &= a_3px_1+b_3qx_2+c_3rx_3, \end{aligned}$$

где $p\neq 0$, $q\neq 0$, $r\neq 0$ (эти числа определим ниже). Ясно, что это проективное преобразование точки $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ и $(0:0:1)$ переводит соответственно в точки

$$A(a_1:a_2:a_3),\quad B(b_1:b_2:b_3),\quad C(c_1:c_2:c_3).$$

Для того чтобы точка $(1:1:1)$ перешла в точку $(d_1:d_2:d_3)$, достаточно p, q, r выбрать так, чтобы

$$\begin{aligned} a_1p+b_1q+c_1r &= d_1, \\ a_2p+b_2q+c_2r &= d_2, \\ a_3p+b_2q+c_3r &= d_3. \end{aligned}$$

Эта система имеет решение относительно p, q, r, так как ее определитель не равен нулю. Ни одно из чисел p, q, r, составляющих это решение, не равно 0, так как точки B, C, D не лежат на одной прямой, точки C, A, D не лежат на одной прямой и точки A, B, D не лежат на одной прямой.

Аналогично доказывается, что существует проективное преобразование $\mathfrak{B}$, которое точки $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ и $(1:1:1)$ переводит соответственно в точки A', B', C', D'. Но тогда преобразование $\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}$ точки A, B, C, D переводит соответственно в точки A', B', C', D'.

Доказательство единственности. Предположим, что существует еще проективное преобразование $\mathfrak{P}$, которое точки A, B, C, D переводит соответственно в точки A', B', C', D'. Тогда преобразование $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{P}\mathfrak{A}$ каждую из точек

$$(1:0:0),\ (0:1:0),\ (0:0:1),\ (1:1:1)$$

оставляет на месте. Докажем, что на месте останется и любая точка плоскости, т. е. что $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{P}\mathfrak{A}$ есть единичное преобразование.

Пусть

$$x_1' = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3,$$
$$x_2' = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3,$$
$$x_3' = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3$$

проективное преобразование $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{P}\mathfrak{A}$. Так как оно точки

$$(1:0:0),\ (0:1:0),\ (0:0:1),\ (1:1:1)$$

оставляет неподвижными, то

$$1:0:0 = b_{11}:b_{21}:b_{31},$$
$$0:1:0 = b_{12}:b_{22}:b_{32},$$
$$0:0:1 = b_{13}:b_{23}:b_{33},$$
$$1:1:1 = (b_{11}+b_{12}+b_{13}) : (b_{21}+b_{22}+b_{23}) : (b_{31}+b_{32}+b_{33}),$$

откуда

$$b_{12} = b_{21} = b_{23} = b_{32} = b_{31} = b_{13} = 0,$$
$$b_{11} = b_{22} = b_{33},$$

и, значит,

$$x_1':x_2':x_3' = x_1:x_2:x_3.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{P}\mathfrak{A} = E,$$

где E — единичное преобразование. Отсюда

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1},$$

т. е. проективное преобразование $\mathfrak{P}$ совпадает с тем, которое было построено выше.

Следствие 1. Если проективное преобразование четыре точки проективной плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой, оставляет неподвижными, то оно является тождественным или единичным.

Следствие 2. Существует и притом только одно проективное отображение проективной плоскости Π на проективную плоскость Π', при котором четырем точкам A, B, C, D плоскости Π, по три не принадлежащим одной прямой, соответствуют четыре точки A', B', C', D', также по три не принадлежащие одной прямой.

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — два проективных отображения проективной плоскости Π на проективную плоскость Π', при котором четыре точки A, B, C, D плоскости Π, из которых никакие три не принадлежат одной прямой, отображаются соответственно в точки A', B', C', D' плоскости Π', из которых также никакие три не лежат на одной прямой. Произведение $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$ есть преобразование плоскости Π, при котором точки A, B, C, D неподвижны. Следовательно, $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$ — тождественное преобразование

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}=E,$$

откуда

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}.$$

§ 196. Примеры проективных преобразований проективной плоскости

Пример 1. Важным примером проективного отображения проективной плоскости Π на проективную плоскость Π' является перспектива.

Рассмотрим в евклидовом пространстве две пересекающиеся плоскости π и π', которым соответствуют проективные плоскости Π и Π'. Возьмем собственную точку S, не лежащую ни на одной из плоскостей π и π' (рис. 260). Пусть M — произвольная точка плоскости Π и пусть SM пересекает плоскость Π' в точке M'. Если прямая SM параллельна плоскости π', то точка M' — это несобственная точка плоскости Π', присоединяемая к прямым плоскости π', параллельным прямой SM; аналогично, если прямая, проходящая через S, параллельна плоскости π, то прообразом точки M', в которой она пересекает плоскость π', будет несобственная точка плоскости Π, присоединяемая к прямым плоскости π, параллельным указанной прямой; наконец, если прямая, проходящая через S, параллельна прямой p, по которой пересекаются плоскости π и π', то несобственной точке прямой p мы ставим в соответствие самое эту точку. Такое соответствие плоскостей Π и Π' называется перспективным. Оно взаимно однозначно и трем любым точкам проективной плоскости Π, принадлежащим одной прямой, соответствуют три точки проективной плоскости Π', также принадлежащие одной прямой, следовательно, перспектива — проективное отображение.

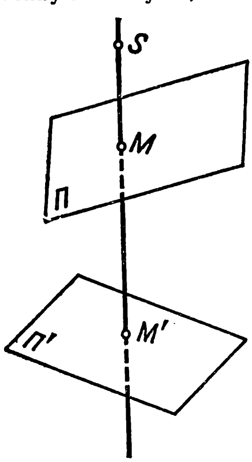


Рис. 260

Эти соображения находят простое приложение к трансформированию аэрофотоснимков.

Предположим, что с летящего самолета производится фотографирование местности. Если в момент экспозиции фотоаппарата его ось вертикальна, то изображение плоского куска местности на фотопленке подобно фотографируемому куску местности и фотография является хорошей картой местности. Однако вследствие неизбежной качки самолета ось фотоаппарата меняет свое направление и на фотопленке получаются различные перспективные изображения частей местности (рис. 261). Фотографирование обычно производится столь часто, что каждый следующий фотоснимок захватывает часть местности, заснятой на предыдущем снимке. Полученные фотоснимки нуждаются в исправлении от искажений, внесенных креном самолета. Фотоснимки исправляют фототрансформатором (рис. 262). На негативе прокладывают какие-нибудь четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, взаимное расположение которых на карте предварительно известно (например, дерево, колодец, дом, фабричная труба), и поворачивают негатив так, чтобы лучи, падающие от точечного источника света, находящегося над негативом, проходя сквозь наколы, заняли те места, которые им соответствуют на карте и которые нанесены на специальном листе бумаги, лежащем под негативом. После того как совмещение известных четырех ориентиров (из которых никакие три не лежат на одной прямой) достигнуто, мы можем утверждать, что оптически осуществлена перспектива, которая дает проективное отображение фотоснимка в истинную карту местности. Лист бумаги заменяют фотобумагой и изготовляют позитив в найденном положении негатива (освещая его

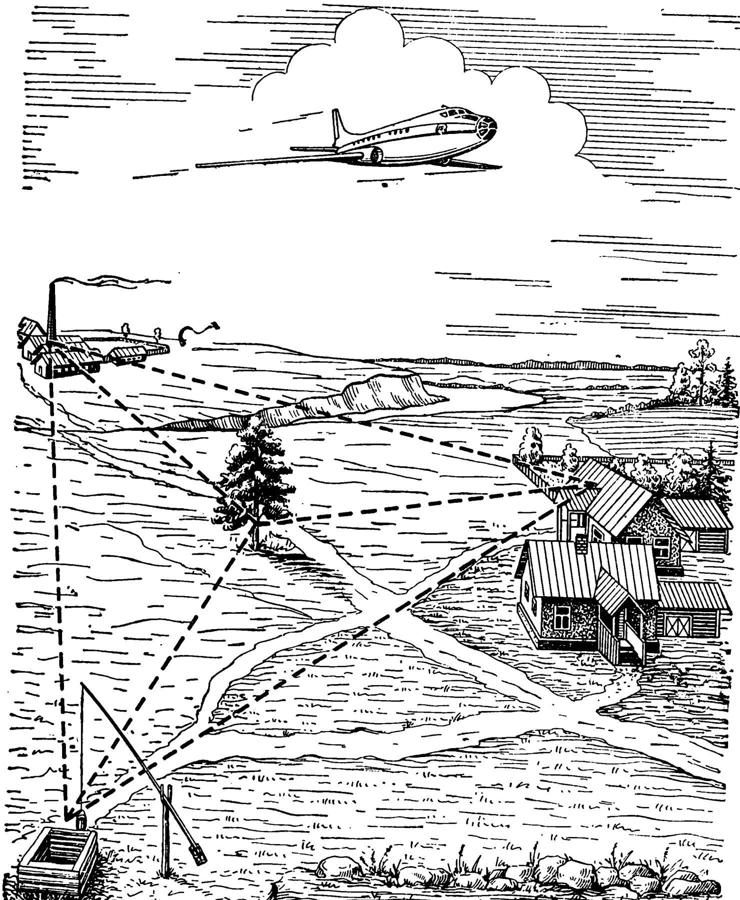


Рис. 261

сверху тем же точечным источником света). Полученные затем фотоснимки склеивают друг с другом по границам общих частей.

Пример 2. Покажем, как начертить образ какой-нибудь фигуры, лежащей на проективной плоскости * при проективном преобразовании.

Пусть A', B', C', D' — образы вершин квадрата $ABCD$ (рис. 263) при проективном преобразовании $\mathfrak{A}$. На рис. 264 показано, как тогда построить образ

* Имеется в виду первая модель.

O' центра O квадрата $ABCD$ и образы P', N', Q', M' середин P, N, Q, M его сторон. Зная образ $P'A'N'O'$ квадрата $PANO$ и образы аналогичных ему квадратов, можно повторить построение, найти образы точек O_1, O_2, O_3, O_4 и образы середин сторон квадратов $PANO$, $ONBQ$, $QCMO$ и $MOPD$ и т. д. Таким образом, будет построен проективный образ квадратной сети, покрывающей квадрат $ABCD$, и если на нем нарисована какая-нибудь фигура (рис. 265), то приближенно по клеткам можно нарисовать ее образ при рассматриваемом проективном преобразовании.

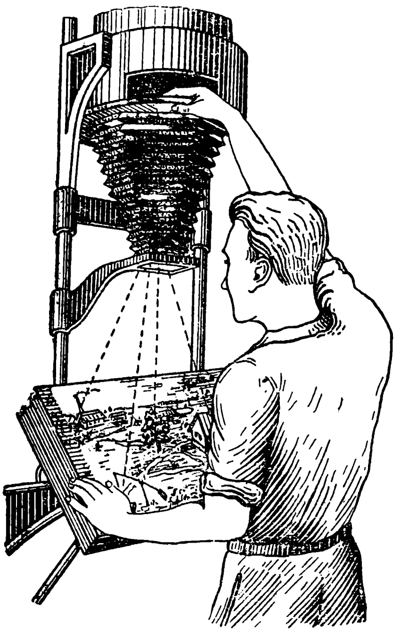


Рис. 262

Построение таких проективных сеток было с успехом использовано проф. М. В. Пентковским в номографии при проективных преобразованиях.

На рис. 266 таким построением дан проективный образ шестигранного паркета.

Пример 3. Рассмотрим проективное преобразование проективной плоскости, оставляющее на месте все точки некоторой прямой l и еще одну точку S, не лежащую на прямой l. Такое проективное преобразование называется г и п е р б о л и ч е с к о й г о м о л о г и е й. Прямая l называется осью гомологии, а точка S — центром гомологии. Будем считать, что проективная плоскость реализована первой моделью и что S — собственная точка, а l — собственная прямая. Примем прямую l за ось Ox, а точку S — за единичную точку оси Oy общей декартовой системы координат. Пусть в этой системе координат гиперболическая гомология выражается соотношениями

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \qquad (1)$$

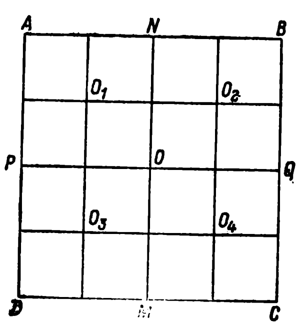


Рис. 263

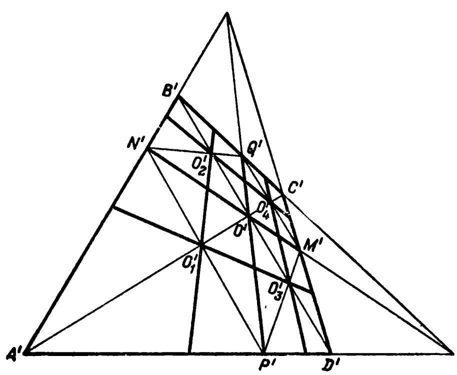


Рис. 264

Так как три точки (1:0:0), (0:0:1), (1:0:1), лежащие на прямой l, неподвижны при рассматриваемой гомологии, то

$$1:0:0=a_{11}:a_{21}:a_{31},$$
$$0:0:1=a_{13}:a_{23}:a_{33},$$
$$1:0:1=(a_{11}+a_{13}):(a_{21}+a_{23}):(a_{31}+a_{33}),$$

откуда

$$a_{21}=a_{31}=a_{13}=a_{23}=0,\ a_{33}=a_{11},$$

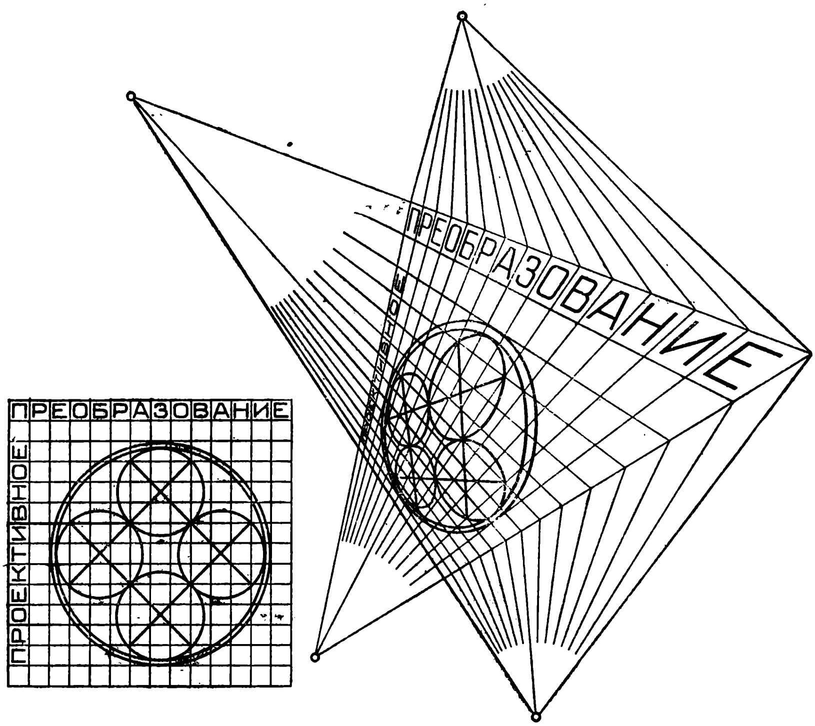


Рис. 265

и соотношения (1) принимают вид

$$x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2,$$
$$x_2'=a_{22}x_2, \qquad (1')$$
$$x_3'=a_{32}x_2+a_{11}x_3.$$

Проективное преобразование (1′) оставляет на месте **все** точки прямой l. В самом деле, если $M(x_1:0:x_3)$ — произвольная точка прямой l, то ее образ M', как следует из формул (1), имеет координаты $x_1:0:x_3$, т. е. совпадает с M.

Потребуем еще, чтобы точка $S(0:1:1)$ оставалась неподвижной. Тогда

$$0:1:1=a_{12}:a_{22}:(a_{32}+a_{11}),$$

откуда

$$a_{12}=0,\ a_{32}=a_{22}-a_{11},$$

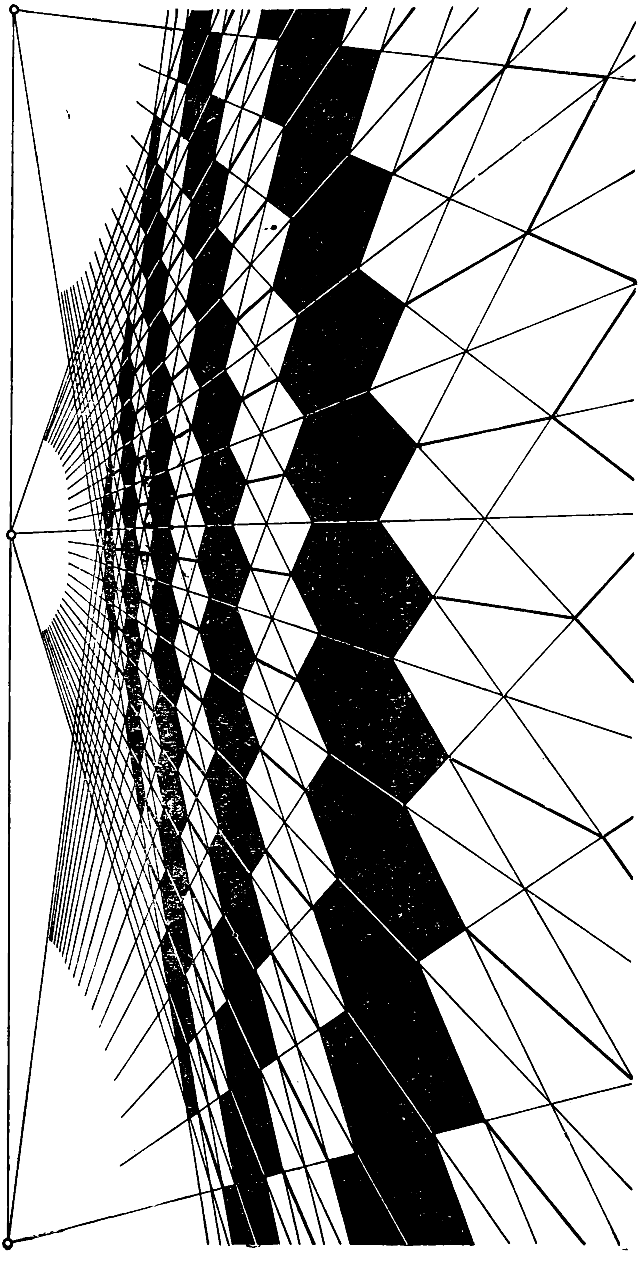


Рис. 266

и потому

$$x_1' = a_{11}x_1, \ x_2' = a_{22}x_2, \ x_3' = (a_{22} - a_{11})\,x_2 + a_{11}x_3.$$

Полагая здесь $a_{11} = 1$, $a_{22} = \lambda$, будем иметь

$$x_1' = x_1, \ x_2' = \lambda x_2, \ x_3' = (\lambda - 1)\,x_2 + x_3. \tag{2}$$

Этими формулами и определяется рассматриваемая гиперболическая гомология Соответствие между собственными точками проективной плоскости при гиперболической гомологии определится соотношениями

$$x' = \frac{x_1}{(\lambda-1)\,x_2 + x_3} = \frac{x}{(\lambda-1)\,y + 1},$$

$$y' = \frac{\lambda x_2}{(\lambda-1)\,x_2 + x_3} = \frac{\lambda y}{(\lambda-1)\,y + 1}.$$

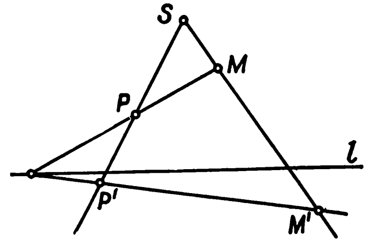


Рис. 267

Гиперболическую гомологию можно задать ее осью l, центром S и парой соответственных точек M и M' (лежащих, конечно, на прямой, проходящей через центр S гомологии). Тогда можно и геометрически построить образ P' любой точки P (рис. 267).

На рис. 268 выполнено построение образа рисунка и надписи к нему в гиперболической гомологии, заданной осью l, центром и двумя соответственными точками A и A'.

Отметим, что произведение $\Gamma_\mu \Gamma_\lambda$ гипер олических гомологий

$$x_1' = x_1, \ x_2' = \lambda x_2, \ x_3' = (\lambda - 1)\,x_2 + x_3 \tag{Γ_λ}$$

и

$$x_1' = x_1, \ x_2' = \mu x_2, \ x_3' = (\mu - 1)\,x_2 + x_3 \tag{Γ_μ}$$

выражается формулами

$$\begin{gathered} x_1'' = x_1, \\ x_2'' = \lambda\mu x_2, \\ x_3'' = (\lambda - 1)\,\mu x_2 + (\mu - 1)\,x_2 + x_3 = (\lambda\mu - 1)\,x_2 + x_3, \end{gathered} \tag{$\Gamma_{\lambda\mu}$}$$

т. е. снова является гиперболической гомологией $\Gamma_{\lambda\mu}$ с той же осью и центром.

Отсюда следует, что множество всех гиперболических гомологий с данной осью и центром образует подгруппу группы всех проективных преобразований плоскости.

Если $\lambda = -1$, то гиперболическая гомология

$$x_1' = x_1, \ x_2' = x_2, \ x_3' = x_3 - 2x_2$$

называется и н в о л ю ц и о н н о й. Квадрат инволюционной гиперболической гомологии есть тождественное преобразование. Очевидно (см. соотношения ($\Gamma_{\lambda\mu}$)), только тождественное преобразование и инволюционная гиперболическая гомология обладают среди всех гомологий тем свойством, что $\Gamma^2 = E$, где E — тождественное проективное преобразование.

Если центр S гиперболической гомологии является несобственной точкой и если M и N — две произвольные собственные точки, а M' и N' — их образы, то (рис. 269 и 270)

$$\frac{PM'}{PM} = \frac{QN'}{QN} = \mathrm{const}$$

и, значит, над собственными точками производится преобразование р о д с т в а с осью l.

Если ось гомологии — несобственная прямая, то над собственными точками производится преобразование гомотетии (рис. 271). На второй модели гипер-

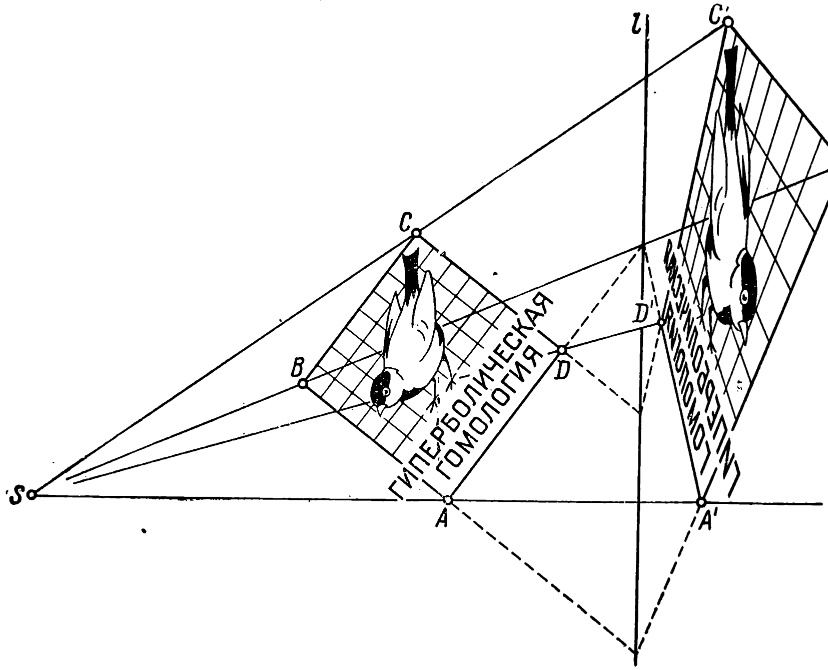


Рис. 268

болическая гомология порождается аффинным сжатием трехмерного пространства к плоскости («ось гомологии») по направлению некоторой прямой («центр гомологии») (рис. 272).

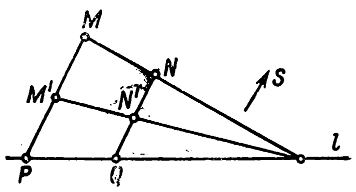


Рис. 269

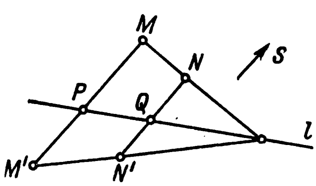


Рис. 270

Пример 4. Параболической гомологией называется проективное преобразование проективной плоскости, при котором имеется такая прямая (называемая осью гомологии), что все ее точки остаются неподвижными при этом преобразовании, а на этой прямой есть точка S (центр гомологии), обладающая следующим свойством: если M — любая точка проективной плоскости, а M' — ее образ, то точки S, M и M' принадлежат одной прямой. Реализуем проективную плоскость в виде первой модели. Примем ось гомологии за ось Ox аффинной системы координат, а центр гомологии S — за начало координат и введем однородные координаты, соответствующие этой аффинной системе. Как было доказано в предыдущем примере, проективное преобразование, оставляющее на месте все точки прямой Ox, записывается так:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad x_2' = a_{22}x_2, \quad x_3' = a_{32}x_2 + a_{11}x_3.$$

Образ несобственной точки $(0:1:0)$ оси Oy будет $(a_{12}:a_{22}:a_{32})$, и так как точки $(0:0:1)$, $(0:1:0)$ и $(a_{12}:a_{22}:a_{32})$ должны лежать на одной прямой, то

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} = 0,$$

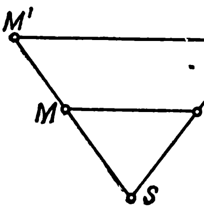


Рис. 271

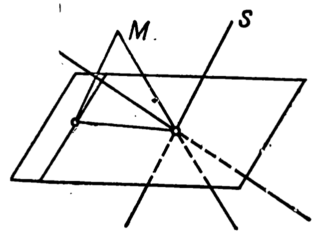


Рис. 272

т. е. $a_{12} = 0$, и, значит,

$$x_1' = a_{11}x_1, \quad x_2' = a_{22}x_2, \quad x_3' = a_{32}x_2 + a_{11}x_3.$$

Образом точки $(1:1:1)$ является точка $(a_{11}:a_{22}:(a_{32}+a_{11}))$, которая лежит на одной прямой с точками $(0:0:1)$, $(1:1:1)$.

Поэтому

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_{11} & a_{22} & a_{32}+a_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $a_{22} = a_{11}$, и, значит,

$$x_1' = a_{11}x_1, \quad x_2' = a_{11}x_2, \quad x_3' = a_{32}x_2 + a_{11}x_3.$$

Полагая $a_{11} = 1$, $a_{32} = \lambda$, будем иметь

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = \lambda x_2 + x_3.$$

Теперь нетрудно проверить, что *любая* точка $(x_1:x_2:x_3)$ и ее образ лежат на одной прямой с точкой $(0:0:1)$, так как

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & \lambda x_2 + x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Соответствие собственных точек рассматриваемой параболической гомологии таково:

$$x' = \frac{x}{\lambda y + 1}, \quad y' = \frac{y}{\lambda y + 1}.$$

Произведение двух параболических гомологий $\Pi_\lambda \Pi_\mu$ есть параболическая гомология $\Pi_{\lambda+\mu}$. Множество всех параболических гомологий с данной осью и центром образует группу.

Параболическая гомология вполне определяется заданием оси l, центра S и пары соответственных точек M и M' (коллинеарных с S) По этим данным можно построить образ P' любой точки P (рис. 273). На рисунке 274 построен образ рисунка и надписи к нему при параболической гомологии.

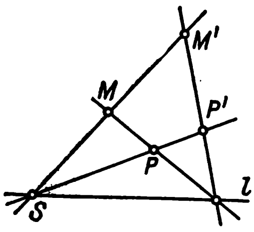


Рис. 273

Во второй модели параболическая гомология порождается аффинным сдвигом пространства относительно некоторой плоскости связки («ось гомологии») по направлению прямой связки, лежащей в этой плоскости («центр гомологии») (рис. 275).

Если проективная плоскость реализована в виде первой модели и ось гомологии — собственная прямая, а центр — несобственная точка (лежащая на этой прямой), то параболическая гомология осуществляет над собственными точками аффинное преобразование, являющееся сдвигом относительно оси гомологии (рис. 276.)

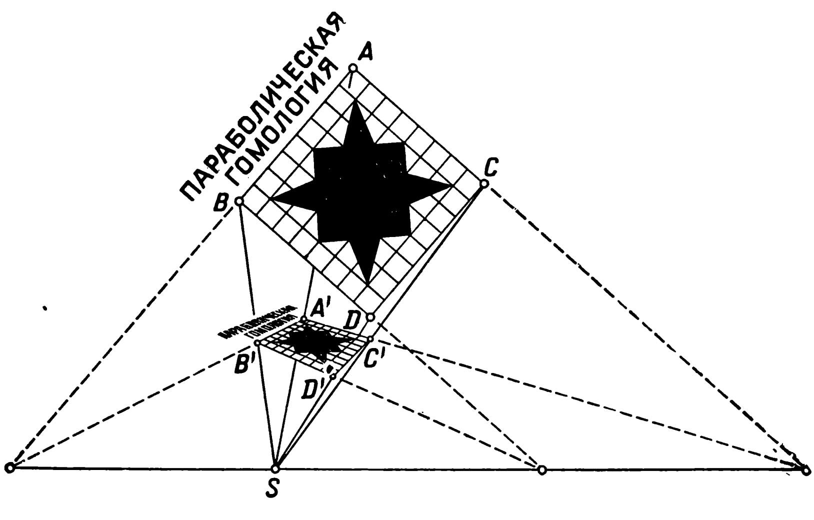


Рис. 274

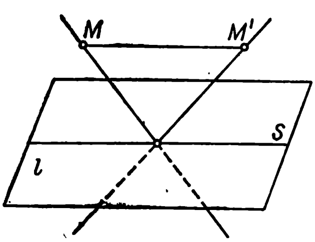


Рис. 275

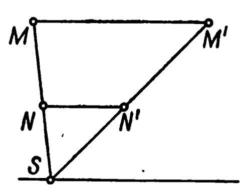


Рис. 276

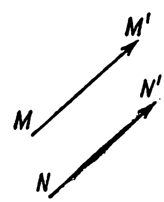


Рис. 277

Если несобственными являются и центр, и ось параболической гомологии, то над собственными точками она осуществляет преобразование переноса (рис. 277).

§ 197. Понятие о проективном пространстве

Подобно тому как множество точек обыкновенной плоскости присоединением несобственных элементов превращается в проективную плоскость (точнее в ее первую модель), можно построить модель трехмерного проективного пространства исходя из трехмерного обыкновенного евклидова пространства.

Проективная прямая проективного пространства получается, как и в случае плоскости, из обыкновенной прямой присоединением к множеству ее точек нового элемента, который по-прежнему будем называть несобственной или бесконечно удаленной точкой проективной прямой.

Условимся в следующем: если две прямые параллельны, то соответствующие им проективные прямые имеют одну и ту же несобственную точку. Если же две различные прямые не параллельны, то соответствующие им проективные прямые имеют различные несобственные точки.

Проективной плоскостью проективного пространства, соответствующей данной обыкновенной плоскости евклидова пространства, назовем множество точек, получаемое присоединением к множеству точек обыкновенной плоскости всех тех несобственных точек, которые присоединяются к прямым, лежащим на этой плоскости. Несобственной или бесконечно удаленной прямой проективной плоскости называется множество всех несобственных точек, присоединенных к множеству точек той обыкновенной плоскости, которой соответствует рассматриваемая проективная плоскость.

Наконец, множество всех несобственных точек назовем несобственной или бесконечно удаленной плоскостью.

Точки, проективные прямые и проективные плоскости, которые не являются несобственными, будем называть соответственно собственными точками, собственными прямыми и собственными плоскостями.

Множество, состоящее из всех обыкновенных и несобственных точек, называется проективным пространством.

Условимся в следующей терминологии:

1) будем говорить, что точка (собственная или несобственная) лежит на проективной прямой или что проективная прямая проходит через рассматриваемую точку, если эта точка принадлежит множеству точек, составляющему эту проективную прямую;

2) будем говорить, что проективная прямая (собственная или несобственная) лежит на проективной плоскости (собственной или несобственной) или что проективная плоскость проходит через проек-

тивную прямую, если множество точек проективной прямой входит в множество точек рассматриваемой проективной плоскости;

3) будем говорить, что точка (собственная или несобственная) лежит на проективной плоскости (собственной или несобственной), если эта точка является элементом того множества, которое составляет рассматриваемую плоскость;

4) вместо того чтобы говорить, что точка лежит на прямой (или прямая проходит через точку), точка лежит на плоскости (или плоскость проходит через точку), прямая лежит на плоскости (или плоскость проходит через прямую), говорят: точка и прямая инцидентны, точка и плоскость инцидентны, прямая и плоскость инцидентны.

Мы построили модель проективного пространства. Отметим некоторые свойства проективного пространства, исходя из этой модели *.

I. Всяким двум различным точкам инцидентна прямая и притом только одна.

II. Всякие две различные плоскости инцидентны прямой и притом только одной.

III. Если точки A и B инцидентны плоскости Π, то прямая AB ** инцидентна этой плоскости.

IV. Если плоскости a и b инцидентны точке M, то прямая ab *** инцидентна этой точке.

V. Три точки, не инцидентные одной прямой, инцидентны и притом только одной плоскости.

VI. Три плоскости, не инцидентные одной прямой, инцидентны и притом только одной точке.

Читателю рекомендуется провести подробные доказательства этих свойств.

Мы потому особо выделили свойства I—VI проективного пространства, что при аксиоматическом построении проективной геометрии именно эти свойства включаются в аксиомы, определяющие понятие проективного пространства.

В качестве дополнительных предложений рекомендуем доказать следующие свойства проективного пространства.

VII. Всякие две различные прямые, инцидентные одной плоскости, инцидентны и притом только одной точке.

VIII. Всякие две различные прямые, инцидентные одной точке, инцидентны и притом только одной плоскости.

IX. Точка и неинцидентная ей прямая инцидентны и притом только одной плоскости.

---

* Приводимые ниже свойства I—VI играют основную роль при аксиоматическом построении проективного пространства.

** AB — прямая, инцидентная точкам A и B.

*** ab — прямая, инцидентная плоскостям a и b.

X. Плоскость и неинцидентная ей прямая инцидентны и притом только одной точке.

В проективном пространстве, как и на проективной плоскости, нет параллельных прямых: две любые прямые, лежащие в одной плоскости, всегда пересекаются (VII). В проективном пространстве нет и параллельных плоскостей: всякие две плоскости проективного пространства пересекаются по прямой линии (II). Наконец, любая прямая, не лежащая в проективной плоскости всегда пересекает последнюю (X). Всем этим проективное пространство существенно отличается от евклидова.

§ 198. Принцип двойственности

Перепишем предложения I — X в виде следующей таблицы:

I. Всяким двум различным точкам инцидентна прямая и притом только одна	II. Всякие две различные плоскости инцидентны прямой и притом только одной
III. Если точки A и B инцидентны плоскости П, то прямая AB инцидентна этой плоскости	IV. Если плоскости a и b инцидентны точке M, то прямая ab инцидентна этой точке
V. Три точки, не инцидентные одной прямой, инцидентны и притом только одной плоскости	VI. Три плоскости, не инцидентные одной прямой, инцидентны и притом только одной точке
VII. Всякие две различные прямые, инцидентные одной плоскости, инцидентны и притом только одной точке	VIII. Всякие две различные прямые, инцидентные одной точке, инцидентны и притом только одной плоскости
IX. Точка и неинцидентная ей прямая инцидентны и притом только одной плоскости	X. Плоскость и неинцидентная ей прямая инцидентны и притом только одной точке

Сопоставляя предложения I—II, III—IV, V—VI, VII—VIII, IX—X, видим, что каждое из них получается из другого заменой в нем слова «точка», словом «плоскость» и, наоборот, слово «плоскость» словом «точка», слово «прямая» остается без изменения.

Два предложения о точках, прямых и плоскостях, сформулированные только в терминах инцидентности, называются двойственными, если одно из них получается из другого заменой слова «точка» словом «плоскость», слова «плоскость» словом «точка» с сохранением слова «прямая».

Таким образом, предложения I, III, V, VII, IX соответственно двойственны предложениям II, IV, VI, VIII, X.

Оказывается, что если верна некоторая теорема A о точках, прямых и плоскостях проективного пространства, сформулированная только в терминах инцидентности между ними, то будет верна и двойственная теорема B.

Это предложение составляет содержание так называемого принципа двойственности. Более полно этот принцип может быть сформулирован и доказан лишь при аксиоматическом построении проективного пространства.

Для проективной плоскости имеет место так называемый малый принцип двойственности: если верна некоторая теорема A о точках и прямых проективной плоскости, сформулированная только в терминах инцидентности между ними, то будет верна теорема B, двойственная теореме A, т. е. теорема, которая получается из A заменой слова «точка» на слово «прямая», а слова «прямая» на слово «точка». Например, утверждению: двум любым различным точкам инцидентна прямая и притом только одна двойственно утверждение: двум любым различным прямым инцидентна точка и притом только одна.

Доказательство малого принципа двойственности так же, как и сформулированного выше большого принципа двойственности, получается лишь при аксиоматическом построении проективного пространства.

§ 199. Однородные координаты точки и проективной плоскости в проективном пространстве

Введем в пространстве общую декартову систему координат. Если точка M собственная, то в выбранной системе координат она имеет координаты X, Y, Z. Рассмотрим четыре числа X, Y, Z, 1 и возьмем класс $x_1:x_2:x_3:x_4$ всех четверок чисел, пропорциональных четверке чисел

$$X,\ Y,\ Z,\ 1,$$

т. е.

$$x_1=kX,\ x_2=kY,\ x_3=kZ,\ x_4=k,$$

где k принимает все действительные значения, кроме нуля. Так как $x_4\neq0$, то

$$X=\frac{x_1}{x_4},\ Y=\frac{x_2}{x_4},\ Z=\frac{x_3}{x_4}.$$

Любые четыре числа построенного класса $x_1:x_2:x_3:x_4$ называются однородными координатами точки M.

Если M — несобственная точка пространства, то через нее проходит связка параллельных между собой прямых. Возьмем какой-нибудь вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный этим прямым; пусть X Y, Z — координаты этого вектора. Рассмотрим четверку чисел X, Y, Z, 0 и возьмем класс $x_1:x_2:x_3:0$ всех четверок чисел, пропорциональных четверке чисел X, Y, Z, 0:

$$x_1:x_2:x_3:x_4=X:Y:Z:0,$$

т. е.

$$x_1=kX,\ x_2=kY,\ x_3=kZ,\ x_4=0,$$

где k принимает все действительные значения, кроме 0. Любые четыре числа построенного класса $x_1:x_2:x_3:x_4$ называются однородными координатами несобственной точки M. В проективном пространстве всякая проективная плоскость определяется в однородных координатах линейным однородным уравнением

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$$

и, обратно, любое линейное уравнение такого вида определяет в проективном пространстве плоскость.

Проективными координатами проективной плоскости в проективном пространстве называется любая четверка чисел из класса $u_1:u_2:u_3:u_4$ четверок чисел, пропорциональных коэффициентам уравнения этой плоскости. Самую проективную плоскость будем обозначать так:

$$[u_1:u_2:u_3:u_4].$$

Две плоскости совпадают тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

§ 200. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Пучок и связка плоскостей

Точка $M(x_1:x_2:x_3:x_4)$ лежит на прямой, проходящей через точки $A(a_1:a_2:a_3:a_4)$ и $B(b_1:b_2:b_3:b_4)$ тогда и только тогда, когда

$$x_1=\alpha a_1+\beta b_1,\quad x_2=\alpha a_2+\beta b_2,\quad x_3=\alpha a_3+\beta b_3,\quad x_4=\alpha a_4+\beta b_4,$$

где α и β принимают любые значения, не равные нулю одновременно.

Эти уравнения называются параметрическими уравнениями прямой. Уравнение всякой плоскости пучка, определяемого двумя различными плоскостями π_1 и π_2,

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0\qquad v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3+v_4x_4=0,$$

может быть записано в виде

$$\alpha(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4)+\beta(v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3+v_4x_4)=0$$

и, обратно, если α и β не равны нулю одновременно, то это уравнение является уравнением плоскости, входящей в пучок, заданный двумя плоскостями π_1 и π_2.

Три точки

$$A\,(a_1:a_2:a_3:a_4),\quad B\,(b_1:b_2:b_3:b_4),\quad C\,(c_1:c_2:c_3:c_4)$$

не принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

равен трем, ибо тогда строки этой матрицы будут линейно независимы и, значит, координаты ни одной из точек A, B, C не могут быть представлены линейной комбинацией координат двух других точек.

При этом уравнение плоскости π, проходящей через эти точки, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Три плоскости, заданные уравнениями

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,$$
$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 = 0,$$
$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4x_4 = 0,$$

имеют одну и только одну общую точку тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

равен трем. При этом точка M

$$M\left(-\begin{vmatrix} u_4 & u_2 & u_3 \\ v_4 & v_2 & v_3 \\ w_4 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} u_1 & u_4 & u_3 \\ v_1 & v_4 & v_3 \\ w_1 & w_4 & w_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right)$$

является точкой их пересечения.

Если точки $A\,(a_1:a_2:a_3:a_4)$, $B\,(b_1:b_2:b_3:b_4)$, $C\,(c_1:c_2:c_3:c_4)$ не лежат на одной прямой, то точка

$$M\,((\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1):(\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2):(\alpha a_3 + \beta b_3 + \lambda c_3):(\alpha a_4 +$$
$$+ \beta b_4 + \gamma c_4))$$

при любых α, β, γ, не равных нулю одновременно, лежит в плоскости ABC и обратно, координаты любой точки плоскости ABC

могут быть представлены линейными комбинациями координат точек A, B, C.

Если плоскости

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,$$
$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 = 0,$$
$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4x_4 = 0$$

имеют и притом только одну общую точку, то плоскость

$$\begin{gathered}\alpha(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4) + \\ + \beta(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4) + \\ + \gamma(w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4x_4) = 0\end{gathered}$$

проходит через эту точку и, обратно, уравнение плоскости, проходящей через эту точку, может быть выражено в таком виде.

Правильность всех этих утверждений следует из теории линейных однородных систем уравнений

§ 201. Группа проективных преобразований проективного пространства. Основная теорема

Проективное преобразование $\mathfrak{A}$ проективного пространства геометрически определяется аналогично проективному преобразованию плоскости. В координатах такое преобразование является преобразованием, при котором точке $M(x_1:x_2:x_3:x_4)$ ставится в соответствие точка $M'(x'_1:x'_2:x'_3:x'_4)$ с координатами

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ x'_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Матрица

$$A = (a_{ik})$$

называется матрицей проективного преобразования $\mathfrak{A}$.

Множество всех проективных преобразований пространства образует группу. Группа аффинных преобразований пространства изоморфна подгруппу группе всех проективных преобразованный пространства, которые отображают несобственную плоскость на себя.

При проективном преобразовании пространства всякая плоскость отображается на плоскость, причем координаты прообраза выражаются через координаты образа при помощи линейных однородных соотношений с матрицей A', полученной транспонированием матрицы A проективного преобразования $\mathfrak{A}$.

Если в проективном пространстве заданы две группы по пять точек в каждой A, B, C, D, E и A', B', C', D', E', *такие, что никакие четыре точки первой группы не лежат в одной плоскости и никакие четыре точки второй группы не лежат на одной плоскости, то существует и притом только одно проективное преобразование, которое точки* A, B, C, D, E *переводит соответственно в точки* A', B', C', D', E'.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы для проективной плоскости.

§ 202. Ангармоническое отношение. Гармонизм

Рассмотрим первую модель проективной плоскости. Возьмем на этой плоскости собственную прямую, а на ней упорядоченную четверку попарно различных собственных точек A, B, C, D. *Сложным, или ангармоническим, отношением* $(ABCD)$ *точек* A, B, C, D, *взятых в этом порядке, называют число, определяемое равенством*

$$(ABCD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}:\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Если точки A и C совпадают или точки D и B совпадают, то считаем $(ABCD)=0$. Если точка D совпадает с точкой A или точка C совпадает с точкой B, то $(ABCD)$ не определяется.

Если одна из точек, например точка D, несобственная, то по определению $(ABCD)$ принимается равным пределу сложного отношения $(ABCD_1)$, где D_1 — собственная точка, причем предел берется в предположении, что точка D_1 неограниченно удаляется по прямой ABC.

Так как

$$\lim\frac{\overrightarrow{AD_1}}{\overrightarrow{D_1B}}$$

при этом условии равен -1, то в случае, если D — несобственная точка,

$$(ABCD)=-\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Аналогично, если A — несобственная точка, то

$$(ABCD)=\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB}};$$

если B — несобственная точка, то

$$(ABCD)=\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{DA}}$$

и, наконец, если C — несобственная точка, то

$$(ABCD)=\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}}.$$

Определение сложного отношения четырех несобственных точек дано ниже.

Будем говорить, что ряд точек A, B, C, D, E, ..., лежащих на одной прямой l, перспективен ряду прямых a, b, c, d, e, ... пучка с центром O, не лежащем на прямой l, если прямые a, b, c, d, e, ... проходят соответственно через точки A, B, C, D, E, ...

Сложным, или ангармоническим, отношением $(abcd)$ четырех попарно различных прямых a, b, c, d одного пучка с центром O назовем сложное отношение $(ABCD)$ четырех точек A, B, C, D, лежащих на собственной прямой l, не проходящей через точку O, и перспективных прямым a, b, c, d (в случае, если совпадают прямые a и c или d и b, считаем $(abcd)=0$; если прямая d совпадает с a или прямая c с b, то $(abcd)$ не определяется).

Это определение нуждается в обосновании, а именно: нужно доказать, что если a, b, c, d — четыре попарно различные прямые, принадлежащие одному пучку с центром O, и если l и l' — две собственные прямые, не проходящие через O, то, обозначая через A, B, C, D точки пересечения прямой l соответственно с прямыми a, b, c, d, а через A', B', C', D' точки пересечения прямой l' с прямыми a, b, c, d, будем иметь

$$(ABCD)=(A'B'C'D') \tag{1}$$

Для доказательства этого соотношения установим сначала следующие положения.

1. Если три собственные точки A, B, C попарно различны и принадлежат одной прямой l, а O — произвольная точка, не лежащая на прямой l, то*

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\overrightarrow{OAC}}{\overrightarrow{OCB}}. \tag{2}$$

* Отношение площадей двух ориентированных треугольников есть число, абсолютная величина которого равна отношению их площадей и которое положительно, если эти треугольники имеют одинаковую ориентацию, и отрицательно, если ориентация их различна.

В самом деле, треугольники OAC и OCB имеют общую вершину O, а остальные их вершины лежат на одной прямой. Значит, отношение их площадей равно отношению оснований. Далее, если направленные отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ имеют одинаковое направление, то треугольники $\overrightarrow{OAC}$ и $\overrightarrow{OCB}$ имеют одинаковую ориентацию, а если отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ имеют противоположное направление, то треугольники $\overrightarrow{OAC}$ и $\overrightarrow{OCB}$ имеют противоположную ориентацию. Значит, и знаки отношений

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \text{ и } \frac{\overrightarrow{OAC}}{\overrightarrow{OCB}}$$

одинаковы. Таким образом равенство (2) доказано.

2. Докажем, что

$$\frac{\overrightarrow{OAC}}{\overrightarrow{OCB}} = \frac{\overrightarrow{OAC'}}{\overrightarrow{OC'B}}, \tag{3}$$

где C' — любая точка, лежащая на прямой OC (но отличная от точки O). В самом деле, на основании уже доказанного

$$\frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{OC'}} = \frac{\overrightarrow{ACO}}{\overrightarrow{AOC'}} = \frac{\overrightarrow{BCO}}{\overrightarrow{BOC'}},$$

откуда и следует равенство (3).

Теперь докажем равенство (1).

1°. Предположим, что O — собственная точка; точки A, B, C, D, A', B', C', D' также собственные.

Тогда

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{OAC}}{\overrightarrow{OCB}} : \frac{\overrightarrow{OAD}}{\overrightarrow{ODB}} = \frac{\overrightarrow{OAC} \cdot \overrightarrow{ODB}}{\overrightarrow{OCB} \cdot \overrightarrow{OAD}}. \tag{4}$$

Правая часть равенства (4) не изменится, если точку A заменить на точку A' прямой OA. В самом деле, на основании равенства (3) имеем

$$\frac{\overrightarrow{OAC}}{\overrightarrow{OAD}} = -\frac{\overrightarrow{OCA}}{\overrightarrow{OAD}} = -\frac{\overrightarrow{OCA'}}{\overrightarrow{OA'D}} = \frac{\overrightarrow{OA'C}}{\overrightarrow{OA'D}}.$$

Аналогично доказывается, что правая часть равенства (4) не меняется, если точку B заменить точкой B' прямой OB, точку C — точкой C' прямой OC, а точку D — точкой D' прямой OD. Значит,

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{OA'C'} \cdot \overrightarrow{OD'B'}}{\overrightarrow{OC'B'} \cdot \overrightarrow{OA'D'}} = (A'B'C'D').$$

2°. Точки A, B, C, D собственные, но среди точек A', B', C', D' есть одна несобственная.

Пусть, например, D' — несобственная точка. В таком случае по определению

$$(A'B'C'D') = -\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}.$$

С другой стороны,

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{OAC} \cdot \overrightarrow{ODB}}{\overrightarrow{OCB} \cdot \overrightarrow{OAD}} = \frac{\overrightarrow{OA'C'} \cdot \overrightarrow{ODB'}}{\overrightarrow{OC'B'} \cdot \overrightarrow{OA'D}}.$$

Но

$$\frac{\overrightarrow{ODB'}}{\overrightarrow{OA'D}} = -\frac{\overrightarrow{B'OD}}{\overrightarrow{A'OD}} = -1 \quad \text{(в силу того что } A'B' \parallel OD).$$

Итак,

$$(ABCD) = -\frac{\overrightarrow{OA'C'}}{\overrightarrow{OC'B'}} = -\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}} = (A'B'C'D').$$

3°. Предположим, что точка O несобственная, т. е. прямые a, b, c, d параллельны (и попарно различны) или три из них параллельны (и попарно различны), а четвертая прямая несобственная.

В этом случае равенство (1) следует из того соображения, что если три параллельные и попарно различные собственные прямые, например a, b, c, пересечены двумя собственными прямыми l и l' соответственно в точках A, B, C и A', B', C', то

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}.$$

Теперь равенство (1) очевидно. В случае, если одна из прямых a, b, c, d несобственная, следует еще заметить, что собственная прямая, пересекающая прямые a, b, c, d, пересечет три из них в собственных точках, а одну — в несобственной; кроме того, в этом случае сложное отношение $(ABCD)$ сводится к простому отношению трех собственных точек.

Выше не было дано определения сложного отношения четырех несобственных точек A, B, C, D. Будем считать в этом случае

$$(ABCD) = (abcd),$$

где a, b, c, d — четыре собственные прямые собственного пучка, перспективные точкам A, B, C, D.

Теорема 1. *Ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек проективной плоскости, заданных своими однородными координа-*

тами

$$A\,(x_1:x_2:x_3),$$
$$B\,(y_1:y_2:y_3),$$
$$C\,((\alpha x_1+\beta y_1):(\alpha x_2+\beta y_2):(\alpha x_3+\beta y_3)),$$
$$D\,((\lambda x_1+\mu y_1):(\lambda x_2+\mu y_2):(\lambda x_3+\mu y_3)),$$

равно

$$(ABCD)=\frac{\beta}{\alpha}:\frac{\mu}{\lambda}=\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}. \tag{5}$$

Доказательство. Предположим, что все четыре точки собственные и попарно различные Параллельные проекции точек A, B, C, D или на ось Ox, или на ось Oy будут тогда попарно различны. Пусть, например, попарно различны проекции A', B', C', D' точек A, B, C, D на ось Ox параллельно оси Oy. Тогда

$$(ABCD)=(A'B'C'D')=\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}:\frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{D'B'}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}}:\frac{\overline{A'D'}}{\overline{D'B'}}=$$

$$=\frac{x_C-x_A}{x_B-x_C}:\frac{x_D-x_A}{x_B-x_D}=$$

$$=\frac{\dfrac{\alpha x_1+\beta y_1}{\alpha x_3+\beta y_3}-\dfrac{x_1}{x_3}}{\dfrac{y_1}{y_3}-\dfrac{\alpha x_1+\beta y_1}{\alpha x_3+\beta y_3}}:\frac{\dfrac{\lambda x_1+\mu y_1}{\lambda x_3+\mu y_3}-\dfrac{x_1}{x_3}}{\dfrac{y_1}{y_3}-\dfrac{\lambda x_1+\mu y_1}{\lambda x_3+\mu y_3}}=\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}.$$

Если точка D несобственная, т. е. $\lambda x_3+\mu y_3=0$, то

$$(ABCD)=-\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}=\frac{x_C-x_A}{x_C-x_B}=$$

$$=\frac{\dfrac{\alpha x_1+\beta y_1}{\alpha x_3+\beta y_3}-\dfrac{x_1}{x_3}}{\dfrac{\alpha x_1+\beta y_1}{\alpha x_3+\beta y_3}-\dfrac{y_1}{y_3}}=-\frac{\beta y_3}{\alpha x_3}.$$

Но из соотношения $\lambda x_3+\mu y_3=0$ следует, что $\frac{y_3}{x_3}=-\frac{\lambda}{\mu}$, так что опять

$$(ABCD)=\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}.$$

Аналогично доказывается справедливость этой формулы, если какая-либо из остальных точек A, B, C несобственная.

Если все четыре точки

$$A\,(x_1:x_2:0),$$
$$B\,(y_1:y_2:0),$$
$$C\,((\alpha x_1+\beta y_1):(\alpha x_2+\beta y_2):0),$$
$$D\,((\lambda x_1+\mu y_1):(\lambda x_2+\mu y_2):0)$$

несобственные, то из определения сложного отношения $(ABCD)$ четырех несобственных точек A, B, C, D следует, что

$$(ABCD)=\frac{\overrightarrow{OA_1C_1}}{\overrightarrow{OC_1B_1}}:\frac{\overrightarrow{OA_1D_1}}{\overrightarrow{OD_1B_1}},$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 — собственные точки прямых, проходящих соответственно через точки A, B, C, D и через одну и ту же собственную точку O. В качестве точек A_1, B_1, C_1, D_1 можно взять точки

$$\begin{gathered}A_1(x_1,\ x_2),\\ B_1(y_1,\ y_2),\\ C_1(\alpha x_1+\beta y_1,\ \alpha x_2+\beta y_2),\\ D_1(\lambda x_1+\mu y_1,\ \lambda x_2+\mu y_2),\end{gathered}$$

так что

$$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ \alpha x_1+\beta y_1 & \alpha x_2+\beta y_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha x_1+\beta y_1 & \alpha x_2+\beta y_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ \lambda x_1+\mu y_1 & \lambda x_2+\mu y_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda x_1+\mu y_1 & \lambda x_2+\mu y_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{\beta\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}}{\alpha\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}}:\frac{\mu\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}}{\lambda\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}}=\frac{\lambda\beta}{\mu\alpha}.$$

Если точки A и C совпадают, то $(ABCD)=0$, но и $\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}=0$ (так как если точки A и C совпадают, то $\beta=0$). Если точки B и D совпадают, то $\lambda=0$ и, значит,

$$(ABCD)=\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}=0.$$

Теорема 2. *Сложное отношение четырех точек и сложное отношение четырех прямых не меняются при проективном преобразовании.*

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать первую часть теоремы. Рассмотрим две произвольные различные точки:

$$A\,(x_1:x_2:x_3),\quad B\,(y_1:y_2:y_3).$$

Возьмем на прямой AB две точки:

$$\begin{gathered}C\,((\alpha x_1+\beta y_1):(\alpha x_2+\beta y_2):(\alpha x_3+\beta y_3)),\\ D\,((\lambda x_1+\mu y_1):(\lambda x_2+\mu y_2):(\lambda x_3+\mu y_2)),\end{gathered}$$

такие, что точки C и B различны, точки D и A также различны.

Тогда

$$(ABCD)=\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}.$$

Произведем проективное преобразование $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть

$$A'(x_1':x_2':x_3'), \quad B'(y_1':y_2':y_3')$$

образы точек A и B при этом преобразовании. Тогда образами точек C и D в силу соотношений (6) будут точки:

$$C'((\alpha x_1'+\beta y_1'):(\alpha x_2'+\beta y_2'):(\alpha x_3'+\beta y_3')),$$
$$D'((\lambda x_1'+\mu y_1'):(\lambda x_2'+\mu y_2'):(\lambda x_3'+\mu y_3')).$$

Отсюда

$$(A'B'C'D')=\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}=(ABCD).$$

Следствие. При проективном отображении проективной плоскости Π на проективную плоскость Π' сложное отношение четырех прямых и сложное отношение четырех точек не меняются.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — проективное отображение проективной плоскости Π на проективную плоскость Π'. Рассмотрим проективное отображение Ω плоскости Π' на плоскость Π, которое на множестве собственных точек плоскости Π' совпадает с ортогональным отображением плоскости π' на плоскость π. Тогда $\Omega\mathfrak{A}$ есть проективное преобразование плоскости Π:

$$\Omega\mathfrak{A}=\mathfrak{P}.$$

Отсюда

$$\mathfrak{A}=\Omega^{-1}\mathfrak{P}.$$

Так как и при преобразовании $\mathfrak{P}$ плоскости Π, и при отображении Ω^{-1} плоскости Π на плоскость Π' сложное отношение не меняется, то оно не меняется и при отображении $\mathfrak{A}$, равном произведению отображения Ω^{-1} на преобразование $\mathfrak{P}$.

Если ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек, лежащих на одной прямой, равно -1, то говорят, что пара точек A и B гармонически разделяет пару точек C и D, или что пара точек C и D разделяет гармонически пару точек A и B. Иначе точки A и B гармонически сопряжены относительно точек C и D, или точки C и D гармонически сопряжены относительно точек A и B.

Если $(abcd) = -1$, то говорят, что четыре прямые a, b, c, d (взятые в этом порядке) образуют гармоническую четверку или что прямые a и b гармонически разделяют прямые c и d, или, наконец, что прямые c и d гармонически сопряжены относительно пары прямых a и b (и наоборот).

Из доказанной теоремы следует, что если заданы три точки

$$A\,(x_1 : x_2 : x_3)$$
$$B\,(y_1 : y_2 : y_3),$$
$$C\,(\alpha x_1 + \beta y_1) : (\alpha x_2 + \beta y_2) : (\alpha x_3 + \beta y_3)).$$

принадлежащие одной прямой, то точкой, гармонически сопряженной с C относительно точек A и B, является точка

$$D\,((\alpha x_1 - \beta y_1) : (\alpha x_2 - \beta y_2) : (\alpha x_3 - \beta y_3)).$$

Примерами гармонических четверок точек могут служить:

1) концы A и B отрезка, его середина C и несобственная точка D прямой AB;

2) вершины A и B треугольника AOB и основания C и D биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине O;

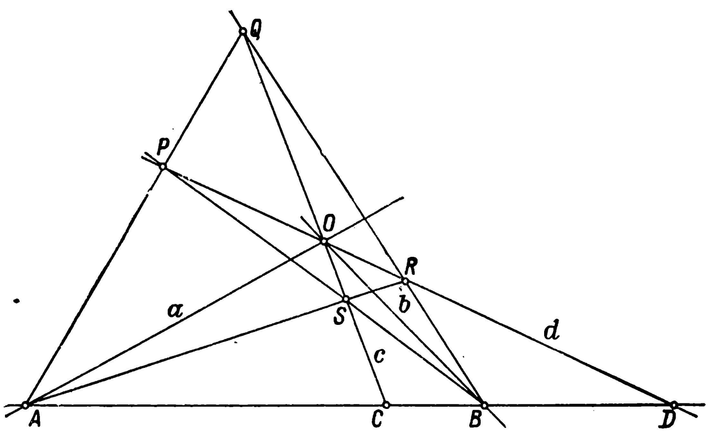


Рис. 278

3) центры A и B двух неконцентрических окружностей и центры C и D положительной и отрицательной гомотетий переводящих одну из этих окружностей в другую;

4) рассмотрим четыре точки P, Q, R, S, из которых никакие три не лежат на одной прямой (рис. 278). Обозначим через A точку пересечения прямых PQ и RS а через B — точку пересечения прямых PS и QR. Через C и D обозначим точки пересечения

прямых QS и PR с прямой AB. Тогда

$$(ABCD) = -1.$$

В самом деле, произведем проективное преобразование, при котором точки A и B перейдут в несобственные точки. Тогда четырехугольник $PQRS$ перейдет в параллелограмм, а точка O пересечения прямых PR и QS — в точку O' пересечения диагоналей этого параллелограмма (рис. 279).

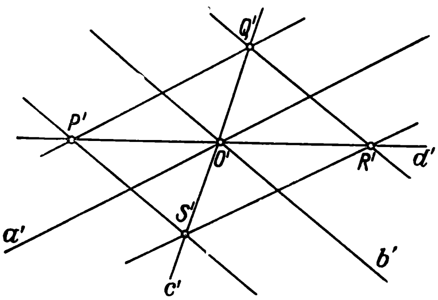


Рис. 279

Прямые OA, OB, OC и OD перейдут в прямые a', b', c', d', из которых первые две проходят через точку O' и параллельны сторонам параллелограмма, а прямые c' и d' являются его диагоналями. Так как $(a'b'c'd') = -1$ (докажите!), то четверка прямых a', b', c', d' гармоническая. Значит, и четверка прямых OA OB, OC, OD также гармоническая, а потому $(ABCD) = -1$.

Замечание. Данное выше определение сложного отношения упорядоченной четверки точек, принадлежащих одной прямой, и упорядоченной четверки прямых, принадлежащих одному пучку, без изменений переносятся на проективное пространство. Отметим лишь одно обстоятельство: если $A\,(x_1:x_2:x_3:x_4)$ и $B\,(y_1:y_2:y_3:y_4)$ — две различные точки проективного пространства, заданные однородными координатами, то точки

$$C\,((\alpha x_1+\beta y_1):(\alpha x_2+\beta y_2):(\alpha x_3+\beta y_3):(\alpha x_4+\beta y_4))$$

и

$$D\,((\lambda x_1+\mu y_1):(\lambda x_2+\mu y_2):(\lambda x_3+\mu y_3):(\lambda x_4+\mu y_4))$$

лежат на прямой AB и (в случае $\alpha\neq 0$, $\mu\neq 0$)

$$(ABCD) = \frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}.$$

В самом деле, пусть прямая AB не параллельна оси Oz; тогда проекции $A'\,(x_1:x_2:0:x_4)$ и $B'\,(y_1:y_2:0:y_4)$ точек A и B на плоскость xOy параллельно оси Oz различны; точки

$$C'\,((\alpha x_1+\beta y_1):(\alpha x_2+\beta y_2):0:(\alpha x_4+\beta y_4))$$

и

$$D'\,((\lambda x_1+\mu y_1):(\lambda x_2+\mu y_2):0:(\lambda x_4+\mu y_4)),$$

являющиеся проекциями точек C и D на плоскость xOy параллельно оси Oz, лежат на прямой AB, и на основании теоремы 1

$$(A'B'C'D')=\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}.$$

Но $(A'B'C'D')=(ABCD)$, значит, и

$$(ABCD)=\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}.$$

Если прямая AB параллельна оси Oz, то, проектируя точки A, B, C, D на ось Oz плоскостями, параллельными плоскости xOy, получим в проекции точки

$$A'(0:0:x_3:x_4),\ B'(0:0:y_3:y_4),\ C'((0:0:(\alpha x_3+\beta y_3):(\alpha x_4+\beta y_4)),$$
$$D'((0:0:(\lambda x_3+\mu y_3):(\lambda x_4+\mu y_4)),$$

и проводя ту же выкладку, что и в теореме 1, получим $(A'B'C'D')=\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}$; и здесь ясно, что $(ABCD)=(A'B'C'D')$, так что опять

$$(ABCD)=\frac{\lambda\beta}{\alpha\mu}.$$

Из доказанного следует, что если точки $A(x_1:x_2:x_3:x_4)$ и $B(y_1:y_2:y_3:y_4)$ различны, то точка

$$C((\alpha x_1+\beta y_1):(\alpha x_2+\beta y_2):(\alpha x_3+\beta y_3):(\alpha x_4+\beta y_4)),$$

где $\alpha\neq0$ и $\beta\neq0$, лежит на прямой AB. При этом точка

$$D((\alpha x_1-\beta y_1):(\alpha x_2-\beta y_2):(\alpha x_3-\beta y_3):(\alpha x_4-\beta y_4))$$

гармонически сопряжена с точкой C относительно точек A и B, т. е. $(ABCD)=-1$.

Замечание к § 191—202. Аналогично тому, как это было сделано в главе X, можно ввести понятие комплексной проективной плоскости (и комплексного проективного пространства). Точкой комплексной проективной плоскости назовем класс $M(x_1:x_2:x_3)$ всех пропорциональных упорядоченных троек комплексных чисел, из которых по крайней мере одно отлично от нуля. Точно так же определяется прямая m комплексной проективной плоскости, которую в отличие от точки обозначим $m[u_1:u_2:u_3]$. Будем говорить, что точка M лежит на прямой m, или что прямая m проходит через точку M, если выполнено соотношение

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0.$$

Это уравнение при фиксированных u_1, u_2, u_3 называется уравнением прямой $[u_1:u_2:u_3]$, а при фиксированных x_1, x_2, x_3 — уравнением точки $(x_1:x_2:x_3)$.

Аналогичное обобщение дается и для понятия комплексного проективного пространства: точка $(x_1:x_2:x_3:x_4)$, плоскость $[u_1:u_2:u_3:u_4]$, условие их инцидентности $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$ и т. д.

Аналитические определения проективного преобразования плоскости и пространства (линейные, взаимно однозначные) переносятся и на случай комплексной проективной плоскости и комплексного проективного пространства. Результаты § 193—195, 200, 201 имеют место и для комплексной проективной плоскости, и для комплексного проективного пространства. Однако некоторые теоремы становятся теперь определениями (например, теорема 1 § 195).

Понятие линии и поверхности второго порядка, касательной к ней, понятие ангармонического отношения четырех точек, принадлежащих одной прямой, понятие полюса и поляры относительно линии и поверхности второго порядка переносятся и на комплексную проективную плоскость, и комплексное проективное пространство, причем здесь следует сохранить лишь аналитические определения и выводы; основные уравнения при этом сохранятся (уравнение касательной, поляры и т. д.). Однако характер проективной классификации уже изменится, так как, например, на комплексной проективной плоскости линия $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ при проективном преобразовании $x_1=x_1'$, $x_2=x_2'$, $x_3=ix_3'$ переходит в линию $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0$ и т. д. Аналогичное обстоятельство имеет место и в комплексном проективном пространстве. Мы не будем касаться тех вопросов (например, вопросов проективной и проективно аффинной классификации линий и поверхностей второго порядка), решение которых на комплексной проективной плоскости и в комплексном проективном пространстве принципиально отлично от их решения в действительном проективном пространстве.

§ 203. Линии второго порядка на проективной плоскости. Классификация линий второго порядка по характеру пересечения с несобственной прямой

Линией второго порядка на проективной плоскости называется геометрическое место точек проективной плоскости, однородные координаты которых удовлетворяют однородному уравнению второй степени

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0. \qquad (1)$$

Так как при переходе к другой системе старые координаты точки выражаются через новые координаты той же точки линейными однородными соотношениями с определителем из коэффициентов, отличным от нуля, то уравнение (1) преобразуется снова в однородное уравнение второй степени.

Координаты собственных точек линии (1) удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \qquad (2)$$

которое получается из уравнения (1) делением всех его членов на x_3^2.

Множество всех собственных точек линии второго порядка на проективной плоскости в случае, если хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равен нулю, есть множество всех точек одной из линий второго порядка, изученных в главе XI (эллипс, гипербола, парабола, две пересекающиеся прямые и т. д.). Если $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$, но хотя бы одно из чисел a_{13} или a_{23} не равно нулю, то множество собственных точек линии (1) состоит из точек прямой

$$2a_{13}x+2a_{23}y+a=0.$$

Наконец, если в уравнении (1) все коэффициенты, кроме a_{33}, равны нулю, то на линии (1) нет ни одной собственной точки; линия (1) в этом случае состоит из пары прямых, совпадающих с несобственной прямой

Что касается несобственных точек, принадлежащих линии второго порядка, заданной уравнением (1), то для них $x_3=0$, а координаты x_1 и x_2 этих точек определяются из уравнения

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0,$$

которое мы получим из уравнения (1), положив в нем $x_3=0$. Но этому же уравнению удовлетворяют координаты векторов, имеющих асимптотическое направление относительно линии (2) (мы сейчас предполагаем, что хотя бы одно из чисел a_{11} a_{12}, a_{22} не равно нулю). Следовательно несобственные точки линии второго порядка являются в то же время и несобственными точками тех прямых, которые имеют асимптотическое направление по отношению к данной линии (2) В частности, если совокупность собственных точек линии (1) второго порядка есть гипербола, то несобственные точки этой линии являются несобственными точками ее асимптот, а сами асимптоты касаются линии в этих несобственных точках

Тип линии (1) определяется по типу линии (2) Таким образом, линию (1) мы будем называть линией эллиптического, гиперболического или параболического типа, если множество всех ее собственных точек является соответственно линией эллиптического, гиперболического или параболического типа, т. е. если уравнение (2) эллиптического, гиперболического или параболического типа.

Линии эллиптического типа, т. е. эллипс, мнимый эллипс две мнимые пересекающиеся прямые, не имеют несобственных точек; линии гиперболического типа, т. е. гипербола, две пересекающиеся прямые, пересекаются с несобственной прямой в двух различных точках.

Линии параболического типа, т. е. парабола, пара параллельных прямых (действительных и мнимых), сдвоенная прямая, имеют только одну несобственную точку и в случае параболы линия касается в этой точке несобственной прямой (§ 207).

Таким образом, на проективной плоскости, полученной из евклидовой плоскости пополнением несобственными элементами, линия второго порядка является одной из следующих линий.

1) Эллипс; у этой линии нет действительных несобственных точек.

2) Гипербола, дополненная двумя несобственными точками ее асимптот.

3) Парабола, дополненная несобственной точкой ее диаметров (имеющих асимптотическое направление).

4) Две пересекающиеся в собственной точке прямые дополненные их несобственными точками.

5) Мнимый эллипс.

6) Две мнимые прямые, пересекающиеся в собственной точке.

7) Две параллельные прямые, дополненные их несобственной точкой.

8) Две мнимые параллельные прямые, дополненные общей действительной несобственной точкой.

9) Две совпадающие прямые, дополненные их несобственной точкой.

10) Две прямые, из которых одна собственная, а другая несобственная.

11) Дважды взятая несобственная прямая.

§ 204. Проективная классификация линий второго порядка. Распадающиеся и нераспадающиеся линии

Разобьем множество всех линий второго порядка, лежащих на проективной плоскости, на следующие пять классов.

I. Линии второго порядка, которые не распадаются на две прямые и содержат бесконечное множество действительных точек.

II. Линии второго порядка, не имеющие ни одной действительной точки.

III. Линии второго порядка, распадающиеся на две различные действительные прямые.

IV. Линии второго порядка, содержащие только одну действительную точку (две мнимые пересекающиеся прямые).

V. Линии второго порядка, вырождающиеся в сдвоенные прямые.

Определение. *Две линии второго порядка принадлежат к одному и тому же проективному классу, если существует проективное преобразование, переводящее одну из этих линий в другую. Если же не существует проективного преобразования, которое одну из линий переводит в другую, то эти линии второго порядка принадлежат к различным проективным классам.*

Докажем, что указанное разделение линий второго порядка на пять классов и дает проективную классификацию этих линий.

Теорема. *На проективной плоскости все линии второго порядка разделяются на пять проективных классов.*

Следующие уравнения

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0, \qquad \text{(I)}$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0, \qquad \text{(II)}$$

$$x_1^2-x_2^2=0, \qquad \text{(III)}$$

$$x_1^2+x_2^2=0, \qquad \text{(IV)}$$

$$x_1^2=0 \qquad \text{(V)}$$

являются простейшими уравнениями линий второго порядка, принадлежащими соответственно к этим пяти проективным классам.

Доказательство. Как известно из высшей алгебры, квадратичную форму

$$\varphi=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1$$

невырожденным линейным преобразованием

$$\begin{aligned} x_1&=c_{11}x_1'+c_{12}x_2'+c_{13}x_3', \\ x_2&=c_{21}x_1'+c_{22}x_2'+c_{23}x_3', \\ x_3&=c_{31}x_1'+c_{32}x_2'+c_{33}x_3' \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

можно привести к каноническому виду

$$\varepsilon_1 x_1'^2+\varepsilon_2 x_2'^2+\varepsilon_3 x_3'^2,$$

где ε_i равны $+1$, -1 или 0.

Геометрически это и означает, что существует проективное преобразование, которое любую линию второго порядка, заданную уравнением

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0,$$

переводит в одну из следующих пяти линий:

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0, \qquad \text{(I)}$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0, \qquad \text{(II)}$$

$$x_1^2-x_2^2=0, \qquad \text{(III)}$$

$$x_1^2+x_2^2=0, \qquad \text{(IV)}$$

$$x_1^2=0. \qquad \text{(V)}$$

Линия (I) является нераспадающейся действительной линией второго порядка, имеющей бесконечное множество действительных точек (*овальная линия*).

Линия (II) не содержит ни одной действительной точки.

Линия (III) распадается на две прямые:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0.$$

Линия (IV) распадается на две мнимые прямые:

$$x_1 + ix_2 = 0, \quad x_1 - ix_2 = 0.$$

На этой линии имеется только одна действительная точка $(0:0:1)$

Линия (V) является двойной прямой.

Таким образом, линии (I)—(V) являются представителями указанных пяти классов.

Указанные в начале параграфа признаки линий второго порядка по которым мы провели их классификацию, таковы, что они различны и инвариантны по отношению к проективным преобразованиям. Значит, никаким проективным преобразованием линию, принадлежащую одному из этих классов, нельзя преобразовать в линию другого класса.

С другой стороны, так как всякую линию второго порядка можно проективно преобразовать в одну из линий (I)—(V), то две любые линии, входящие в один класс, могут быть преобразованы одна в другую некоторым проективным преобразованием В самом деле, возьмем, например, две овальные линии C_1 и C_2. Существует проективное преобразование $\mathfrak{A}$, которое линию C_1 преобразует в линию (I), и существует проективное преобразование $\mathfrak{B}$, которое линию C_2 преобразует в линию (I). Проективное преобразование $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$ линию C_1 преобразует в линию C_2.

Аналогично доказывается, что две любые линии, принадлежащие к одному и тому же из остальных классов, также проективно эквивалентны.

Овальные линии, действительные и мнимые, называются невырождающимися или нераспадающимися. Все остальные линии распадаются на две прямые (действительные различные или мнимые, или совпадающие) и называются вырождающимися или распадающимися.

Для того чтобы линия второго порядка, заданная общим уравнением

$$\varphi = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0,$$

распадалась, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратичной формы, входящий в левую часть уравнения этой линии, был равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

В самом деле, в этом и только в этом случае ранг матрицы (a_{ik}) квадратичной формы φ равен 2 или 1, а значит, эта форма разлагается в произведение двух линейных форм.

Впрочем, условие $\Delta = 0$ сразу проверяется на простейших уравнениях (III), (IV), (V) распадающихся линий. При проективном преобразовании определитель Δ получает множитель, равный квадрату определителя преобразования, и, значит, условия $\Delta = 0$ и $\Delta \neq 0$ (для линий (I) и (II) класса) инвариантны относительно проективного преобразования.

§ 205. Проективно-аффинная классификация линий второго порядка

Пусть проективная плоскость реализована в виде первой модели.

1. Овальными линиями будут тогда все эллипсы, все гиперболы, каждая из которых дополнена несобственными точками ее асимптот, и все параболы, каждая из которых дополнена несобственной точкой ее диаметров.

2. Второй проективный класс образуют все мнимые эллипсы.

3. Третий проективный класс образуют пары пересекающихся прямых, пополненных их несобственными точками, а также пары параллельных прямых (каждая такая пара дополняется одной несобственной точкой, через которую они проходят).

4. Четвертый проективный класс образуют пары мнимых пересекающихся прямых, а также пары мнимых параллельных прямых, дополненных их общей (действительной) несобственной точкой.

5. Пятый проективный класс образуют сдвоенные прямые, дополненные их несобственной точкой.

Проективно-аффинной классификацией линий второго порядка называется разбиение их на классы эквивалентности по отношению к проективным преобразованиям проективной плоскости, реализованной в виде первой модели, при которых несобственная прямая переходит в себя.

Имеется одиннадцать проективно-аффинных классов линий второго порядка. А именно это те классы, которые перечислены в § 203.

§ 206. Необходимое и достаточное условие того, что два однородных уравнения второй степени определяют одну и ту же линию второго порядка

Теорема 1. *Для того чтобы два уравнения*

$$\varphi = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0 \tag{1}$$

и

$$\psi = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{31}x_3x_1 = 0 \tag{2}$$

определяли одну и ту же линию второго порядка на комплексной проективной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие коэффициенты этих уравнений были пропорциональны.

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем необходимость.

Предположим сначала, что линии (1) и (2) распадаются на пару прямых. В этом случае левые части уравнений $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ разлагаются в произведение двух линейных форм относительно x_1, x_2, x_3

$$\varphi = u_1v_1, \quad \psi = u_2v_2.$$

Так как уравнения $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ и $u_2 = 0$, $v_2 = 0$ являются уравнениями одной и той же пары прямых, то коэффициенты уравнения $u_1 = 0$ пропорциональны коэффициентам уравнения $u_2 = 0$ (или $v_2 = 0$), а коэффициенты уравнения $v_1 = 0$ пропорциональны коэффициентам уравнения $v_2 = 0$ (соответственно $u_2 = 0$). Значит, и коэффициенты a_{ik} произведения $u_1v_1 = \varphi$ пропорциональны соответствующим коэффициентам b_{ik} произведения $u_2v_2 = \psi$.

Пусть линии (1) и (2) нераспадающиеся. Рассмотрим пересечение их с прямой $x_3 = 0$; для первой линии координаты точек пересечения определяются из системы

$$\varphi_1 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \quad x_3 = 0;$$

для второй — из системы

$$\psi_1 = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 0, \; x_3 = 0.$$

Уравнения $\varphi_1 = 0$ и $\psi_1 = 0$ являются уравнениями одной и той же пары прямых, так как в противном случае точки пересечения прямой $x_3 = 0$ с линией, заданной уравнением (1) или (2), были бы различны. Значит, коэффициенты форм φ_1 и ψ_1 пропорциональны $a_{11} = kb_{11}$, $a_{12} = kb_{12}$, $a_{22} = kb_{22}$.

Рассматривая пересечение линии, заданной уравнением (1) или (2), с прямой $x_2 = 0$, докажем что пропорциональны коэффициенты форм

$$\varphi_2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{33}x_3^2,$$
$$\psi_2 = b_{11}x_1^2 + 2b_{13}x_1x_3 + b_{33}x_3^2;$$

но так как $a_{11}=kb_{11}$, то $a_{13}=kb_{13}$ и $a_{33}=kb_{33}$. Рассматривая пересечение линии, заданной уравнением (1) или (2), с прямой $x_1=0$, докажем, что $a_{23}=kb_{23}$.

Теорема 2. *Для того чтобы два уравнения*

$$\varphi=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0, \qquad (3)$$

$$\psi=b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2+2b_{12}x_1x_2+2b_{23}x_2x_3+2b_{31}x_3x_1=0 \qquad (4)$$

определяли на действительной проективной плоскости одну и ту же действительную линию второго порядка, имеющую бесконечное множество действительных точек, необходимо, чтобы соответствующие коэффициенты этих уравнений были пропорциональны.

Доказательство. Если линии распадающиеся, то доказательство такое же, как и в теореме 1 (необходимость).

Предположим, что уравнения (3) и (4) определяют линию второго порядка: эллипс, или гиперболу, дополненную несобственными точками ее асимптот, или параболу, дополненную несобственной точкой ее диаметров.

Во всех этих случаях можно перейти к такой системе координат $O'x_1'x_2'x_3'$, что уравнения (3) и (4) преобразуются в уравнения вида

$$\varphi_1=a(x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2)=0, \quad \psi_1=b(x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2)=0$$
$$(a\neq 0, \ b\neq 0)$$

в случае эллипса; в уравнения вида

$$\varphi_2=a(x_1'^2-x_2'^2-x_3'^2)=0, \quad \psi_2=b(x_1'^2-x_2'^2-x_3'^2)=0$$
$$(a\neq 0, \ b\neq 0)$$

в случае гиперболы и в уравнения вида

$$\varphi_3=a(x_1'^2-x_2'x_3')=0, \quad \psi_3=b(x_1'^2-x_2'x_3')=0 \quad (a\neq 0, \ b\neq 0)$$

в случае параболы. Для всех случаев коэффициенты уравнений $\varphi_i=0$ и $\psi_i=0$ пропорциональны.

Производя переход от системы $O'x_1'x_2'x_3'$ к системе $Ox_1x_2x_3$, т. е. заменяя в уравнениях $\varphi_i=0$ и $\psi_i=0$ координаты x_1', x_2', x_3' их выражениями через x_1, x_2, x_3 (эти выражения — линейные функции от x_1, x_2, x_3 с определителем, отличным от нуля), получим уравнения (3) и (4), коэффициенты которых пропорциональны.

Замечание. Для мнимых линий теорема неверна.

Пример 1. Линии

$$x_1^2+x_2^2=0 \quad \text{и} \quad x_1^2+2x_2^2=0$$

имеют единственную действительную точку (0:0:1) (начало координат), но соответствующие коэффициенты их уравнений не пропорциональны.

Пример 2. Линии

$$x_1^2+x_3^2=0 \quad \text{и} \quad x_1^2+2x_3^2=0$$

имеют единственную действительную несобственную точку $(0:1:0)$, но соответствующие коэффициенты их уравнений непропорциональны

§ 207. Касательная к линии второго порядка

Пусть линия второго порядка задана на проективной плоскости уравнением

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0.$$

Особой точкой $M_0(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$ этой линии будем называть точку, координаты которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0&=0,\\ a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0&=0,\\ a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0&=0. \end{aligned}$$

Овальная и мнимая нераспадающаяся линии не имеют особых точек. Две прямые (действительные или мнимые) имеют в качестве особой точки только точку их пересечения. Наконец, если линия второго порядка является парой совпавших прямых, то все ее точки особые.

Определение. *Касательной к линии второго порядка в заданной на ней неособой точке называется прямая, проходящая через эту точку, пересекающая линию в двойной точке или целиком входящая в состав рассматриваемой линии.*

Теорема. *Уравнение касательной к линии второго порядка, заданной уравнением*

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0, \tag{1}$$

в данной на ней неособой точке $M_0(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$ имеет вид

$$\begin{aligned} (a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0)\,x_1+(a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0)\,x_2+\\ +(a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0)\,x_3=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Проведем через точку M_0 произвольную прямую. Возьмем на этой прямой произвольную точку $M(x_1:x_2:x_3)$, отличную от точки M_0. Тогда координаты любой точки P прямой M_0M можно представить в виде

$$\alpha x_1^0+\beta x_1, \quad \alpha x_2^0+\beta x_2, \quad \alpha x_3^0+\beta x_3.$$

Прямая M_0M будет касательной тогда и только тогда, когда она или пересекает данную линию в двойной точке M_0, или входит в состав этой линии.

Чтобы найти координаты точек пересечения прямой M_0M с данной линией, подставим координаты точки P в уравнение данной линии. Будем иметь

$$a_{11}(\alpha x_1^0+\beta x_1)^2+2a_{12}(\alpha x_2^0+\beta x_2)(\alpha x_1^0+\beta x_1)+a_{22}(\alpha x_2^0+\beta x_2)^2+$$
$$+2a_{13}(\alpha x_1^0+\beta x_1)(\alpha x_3^0+\beta x_3)+$$
$$+2a_{23}(\alpha x_2^0+\beta x_2)(\alpha x_3^0+\beta x_3)+a_{33}(\alpha x_3^0+\beta x_3)^2=0,$$

или, обозначая левую часть уравнения данной линии через $\varphi(x_1, x_2, x_3)$:

$$\varphi(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\alpha^2+2P\alpha\beta+\varphi(x_1, x_2, x_3)\beta^2=0,$$

где

$$P=(a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0)x_1+(a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0)x_2+$$
$$+(a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0)x_3.$$

Так как точка $(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$ лежит на данной линии, то $\varphi(x_1^0, x_2^0, x_3^0)=0$ и, значит,

$$2P\alpha\beta+\varphi(x_1, x_2, x_3)\beta^2=0.$$

Отсюда

$$\text{или } \beta=0, \text{ или } 2P\alpha+\varphi(x_1, x_2, x_3)\beta=0.$$

При $\beta=0$ из выражений для координат точки P:

$$(\alpha x_1^0+\beta x_1):(\alpha x_2^0+\beta x_2):(\alpha x_3^0+\beta x_3)$$

получаем координаты точки M_0:

$$(\alpha x_1^0):(\alpha x_2^0):(\alpha x_3^0)=x_1^0:x_2^0:x_3^0.$$

Для того чтобы и вторая точка пересечения совпадала с M_0, или чтобы прямая M_0M целиком входила в состав данной линии, необходимо и достаточно, чтобы

$$P=0,$$

так как тогда и только тогда из уравнения

$$2P\alpha+\varphi(x_1, x_2, x_3)\beta=0$$

мы получим, что $\beta=0$, или что (при $\varphi(x_1, x_2, x_3)=0$) это последнее соотношение выполняется тождественно.

Условие $P=0$ подробно записывается так:

$$(a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0)x_1+$$
$$+(a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0)x_2+$$
$$+(a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0)x_3=0.$$

Таким образом, прямая M_0M имеет с данной линией второго порядка одну общую двойную точку тогда и только тогда, когда координаты $x_1:x_2:x_3$ точки M удовлетворяют этому уравнению первой степени. Это уравнение и есть уравнение касательной к данной линии в данной на ней точке M_0.

Пример. Пусть

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy=0 \qquad (3)$$

уравнение в однородных координатах действительной овальной линии второго порядка.

При каком необходимом и достаточном условии прямая

$$ux+vy+wz=0 \qquad (4)$$

касается данной линии.

Решение. Необходимость. Предположим, что прямая (4) касается линии (3) в точке (x_0, y_0, z_0). Тогда

$$ux_0+vy_0+wz_0=0, \qquad (5)$$

причем координаты u, v, w этой касательной определяются соотношениями (см. уравнение (2) этого параграфа)

$$\begin{aligned} u&=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0,\\ v&=a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0,\\ w&=a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Разрешая эти соотношения относительно x_0, y_0, z_0, получим

$$\begin{aligned} x_0&=A_{11}u+A_{12}v+A_{13}w,\\ y_0&=A_{21}u+A_{22}v+A_{23}w,\\ z_0&=A_{31}u+A_{32}v+A_{33}w, \end{aligned} \qquad (7)$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в матрице (a_{ik}). Из соотношений (5) и (7) следует равенство

$$A_{11}u^2+A_{22}v^2+A_{33}w^2+2A_{23}vw+2A_{31}wu+2A_{12}uv=0. \qquad (8)$$

Достаточность. Предположим, что равенство (8) выполнено. Докажем, что тогда прямая (4) касается данной линии (3). Рассмотрим точку (x_0, y_0, z_0), координаты которой определяются равенствами (7).

Из соотношений (7) и (8) следует, что

$$ux_0+vy_0+wz_0=0; \qquad (9)$$

но из соотношений (7) следуют соотношения (6). Из соотношений (9) и (6) следует, что

$$\begin{aligned} &(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0)\,x_0+\\ &+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0)\,y_0+\\ &+(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0)\,z_0=0, \end{aligned}$$

или

$$a_{11}x_0^2+a_{22}y_0^2+a_{33}z_0^2+2a_{23}y_0z_0+2a_{31}z_0x_0+2a_{12}x_0y_0=0,$$

т. е. точка (x_0, y_0, z_0), координаты которой определяются соотношениями (7), лежит на данной линии (3). В силу равенств (6) уравнение (4) можно переписать так:

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0)\,x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0)\,y+(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0)z=0,$$

но это есть уравнение касательной к линии (3) в точке (x_0, y_0, z_0). Уравнение (8), связывающее координаты u, v, w всех прямых, касающихся данной действительной овальной линии второго порядка, называется тангенциальным уравнением этой линии. Его можно записать и так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 208. Полюс и поляра линии второго порядка

Рассмотрим уравнение линии второго порядка на проективной плоскости

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0. \qquad (1)$$

Возьмем точку $M(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0)$, не лежащую на линии (1), и проведем через нее секущие к данной линии. Обозначим через P и Q точки пересечения одной из этих секущих с данной линией, а через N — точку, гармонически сопряженную точке M относительно точек P и Q, т. е. такую точку, что точки P, Q, M, N образуют гармоническую четверку:

$$(PQMN) = -1.$$

Теорема 1. *Точки N, гармонически сопряженные с точкой M относительно точек P и Q пересечения с линией второго порядка секущих, проходящих через точку M, лежат на одной прямой.*

Доказательство. Обозначим координаты точки N через x_1', x_2', x_3'. Тогда координаты любой точки прямой MN:

$$x_1 = \alpha x_1^0 + \beta x_1', \quad x_2 = \alpha x_2^0 + \beta x_2', \quad x_3 = \alpha x_3^0 + \beta x_3'.$$

Подставляя координаты этих точек в уравнение линии, получим уравнение, из которого найдем отношение $\alpha:\beta$, соответствующее точкам P и Q:

$$\begin{aligned} a_{11}(\alpha x_1^0 + \beta x_1')^2 + a_{22}(\alpha x_2^0 + \beta x_2')^2 + a_{33}(\alpha x_3^0 + \beta x_3')^2 + \\ + 2a_{12}(\alpha x_1^0 + \beta x_1')(\alpha x_2^0 + \beta x_2') + \\ + 2a_{23}(\alpha x_2^0 + \beta x_2')(\alpha x_3^0 + \beta x_3') + \\ + 2a_{31}(\alpha x_3^0 + \beta x_3')(\alpha x_1^0 + \beta x_1') = 0, \end{aligned}$$

или, обозначая через $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ левую часть данного уравнения:

$$\varphi(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\alpha^2 + 2P\alpha\beta + \varphi(x_1', x_2', x_3')\beta^2 = 0, \qquad (2)$$

где

$$\begin{aligned} P = (a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0)x_1' + \\ + (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0)x_2' + \\ + (a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0)x_3'. \end{aligned}$$

Обозначим через $\alpha_1:\beta_1$ и $\alpha_2:\beta_2$ решения последнего уравнения. Тогда координаты точек P и Q будут соответственно

$$(\alpha_1 x_1^0 + \beta_1 x_1') : (\alpha_1 x_2^0 + \beta_1 x_2') : (\alpha_1 x_3^0 + \beta_1 x_3')$$

и

$$(\alpha_2 x_1^0 + \beta_2 x_1') : (\alpha_2 x_2^0 + \beta_2 x_2') : (\alpha_2 x_3^0 + \beta_2 x_3'),$$

и так как ангармоническое отношение $(MNPQ) = -1$, то на основании § 202 (теорема 1) имеем

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2} = -1, \quad \text{или} \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 0.$$

Отсюда и из уравнения (2) следует, что

$$P = 0,$$

или подробно:

$$(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0)\,x_1' +$$
$$+ (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0)\,x_2' +$$
$$+ (a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0)\,x_3' = 0.$$

Мы видим, что координаты точек N удовлетворяют следующему уравнению первой степени относительно x_1, x_2, x_3:

$$(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0)\,x_1 +$$
$$+ (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0)\,x_2 +$$
$$+ (a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0)\,x_3 = 0. \qquad (3)$$

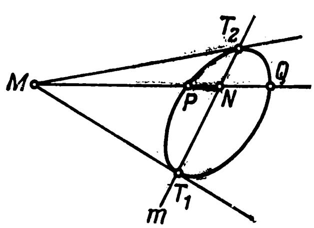


Рис. 280

В этом уравнении коэффициенты при x_1, x_2, x_3 одновременно в нуль не обращаются, так как в противном случае мы имели бы

$$(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0)\,x_1^0 +$$
$$+ (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0)\,x_2^0 +$$
$$+ (a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0)\,x_3^0 = 0,$$

или

$$a_{11}x_1^{0^2} + a_{22}x_2^{0^2} + a_{33}x_3^{0^2} + 2a_{12}x_1^0x_2^0 + 2a_{23}x_2^0x_3^0 + 2a_{31}x_3^0x_1^0 = 0,$$

т. е. точка M лежала бы на данной линии.

Значит, все точки N лежат на прямой, определяемой уравнением (3) (рис. 280).

Определение. *Прямая m, на которой лежат точки, гармонически сопряженные точкой M относительно точек пересечения линии второго порядка секущими, проходящими через точку M, называется полярой точки M относительно рассматриваемой линии вто-*

рого порядка. Точка M называется полюсом прямой m относительно этой линии.

Сопоставляя уравнение поляры с уравнением касательной к линии второго порядка, видим, что уравнение касательной к линии второго порядка в неособой ее точке $(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0)$ и уравнение поляры точки $(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0)$, не лежащей на этой линии, имеют один и тот же вид. Поэтому данное определение поляры точки относительно линии второго порядка обычно дополняют следующим: если $M(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0)$ — неособая точка линии второго порядка, то ее полярой относительно этой линии называется касательная к этой линии в точке M.

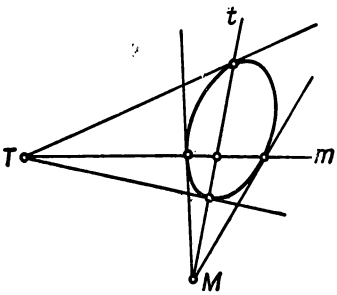


Рис. 281

Теорема 2. *Если точка M лежит на поляре t точки T, то точка T лежит на поляре m точки M* (рис. 281).

Доказательство. Пусть координаты точек M и T таковы:

$$M(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0) \quad \text{и} \quad T(x_1' : x_2' : x_3').$$

Уравнение поляры m точки M имеет вид

$$(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0)\,x_1 + \\ + (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0)\,x_2 + \\ + (a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0)\,x_3 = 0.$$

Уравнение поляры t точки T имеет вид

$$(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3')\,x_1 + \\ + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3')\,x_2 + \\ + (a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3')\,x_3 = 0.$$

Условие того, что точка M лежит на поляре t точки T, имеет вид

$$(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3')\,x_1^0 + \\ + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3')\,x_2^0 + \\ + (a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3')\,x_3^0 = 0.$$

Это равенство можно переписать так:

$$(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0)\,x_1' + \\ + (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0)\,x_2' + \\ + (a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0)\,x_3' = 0,$$

а это значит, что точка T лежит на поляре m точки M.

Доказанная теорема может быть сформулирована и так: если поляра t точки T проходит через точку M, то и поляра m точки M проходит через точку T.

Теорема 3. *Если уравнение*

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0$$

является уравнением действительной овальной линии второго порядка и если из точки $M(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$, не лежащей на этой линии, можно провести к ней две действительные касательные, то полярой точки M является прямая T_1T_2, проходящая через точки прикосновения T_1 и T_2 этих касательных с данной линией (см. рис. 280).

Доказательство. Так как точки T_1 и T_2 лежат на прямой T_1T_2, то полюс прямой T_1T_2 должен лежать на полярах точек T_1 и T_2. Но поляры точек T_1 и T_2 — это касательные к овальной линии в точках T_1 и T_2; эти касательные пересекаются в точке M. Значит, точка M — полюс прямой T_1T_2.

§ 209. Сопряженные диаметры, центр и асимптоты в проективной теории линий второго порядка

Если полюсом является несобственная точка проективной плоскости, не лежащая на линии второго порядка, то прямые, к которым присоединяется эта несобственная точка, параллельны между собой и имеют неасимптотическое направление. Точки, гармонически сопряженные с рассматриваемой несобственной точкой относительно точек пересечения этих прямых с данной линией, будут серединами хорд линии, высекаемых на прямых данной линией. Их геометрическим местом будет диаметр линии. Таким образом, диаметр линии C, сопряженный параллельным хордам этой линии, есть поляра несобственной точки, присоединяемой к этим хордам, или иначе: полюсом диаметра линии C является несобственная точка хорд, сопряженных этому диаметру. Каждый из сопряженных диаметров линии второго порядка делит пополам хорды, параллельные другому диаметру. Это свойство вытекает из теоремы 2 § 208. В самом деле, если диаметр d сопряжен хордам, параллельным прямой l, т. е. является полярой несобственной точки прямой l, то поляра несобственной точки диаметра d должна проходить через несобственную точку прямой l, т. е. диаметр, сопряженный хордам, параллельным d, должен быть параллелен прямой l.

Центр линии второго порядка является полюсом несобственной прямой.

В заключение параграфа отметим, что асимптоты гиперболы являются касательными к гиперболе в ее несобственных точках.

Запишем уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

в однородных координатах

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-x_3^2=0.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением асимптоты

$$\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{b}=0,$$

получим одну точку $(a:b:0)$ — несобственную, в которой асимптота касается гиперболы. Другая асимптота

$$\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}=0$$

касается той же гиперболы в точке $(a:-b:0)$.

Наконец, парабола

$$x_2^2=2px_1x_3$$

касается несобственной прямой $x_3=0$ в точке $(1:0:0)$ — несобственной точке ее диаметров.

§ 210. Определение линии второго порядка по пяти точкам

Теорема. *Если на проективной плоскости заданы пять точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, то существует и притом только одна овальная линия второго порядка, которая проходит через эти пять точек.*

Доказательство. Пусть на плоскости заданы пять точек:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5.$$

Предположим сначала, что точки A_1, A_2, A_3 и A_4 совпадают соответственно с точками $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ и $(1:1:1)$ и пусть $x_1^0:x_2^0:x_3^0$ — координаты точки A_5.

Пусть

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0$$

— искомое уравнение. Из условия прохождения линии через точки

$$A_1(1:0:0),\quad A_2(0:1:0),\quad A_3(0:0:1)$$

находим

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0,$$

так что искомое уравнение имеет вид

$$a_{12}x_1x_2+a_{23}x_2x_3+a_{31}x_3x_1=0.$$

Из условия прохождения этой линии через точки $(1:1:1)$ и $(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$ имеем

$$a_{12}+a_{23}+a_{31}=0, \qquad x_1^0x_2^0a_{12}+x_2^0x_3^0a_{23}+x_3^0x_1^0a_{31}=0;$$

отсюда

$$a_{12}:a_{23}:a_{31}=\left[x_3^0(x_1^0-x_2^0)\right]:\left[x_1^0(x_2^0-x_3^0)\right]:\left[x_2^0(x_3^0-x_1^0)\right].$$

Искомое уравнение:

$$x_3^0(x_1^0-x_2^0)x_1x_2+x_1^0(x_2^0-x_3^0)x_2x_3+x_2^0(x_3^0-x_1^0)x_3x_1=0.$$

Последнее уравнение определяет овальную линию второго порядка, так как на линиях других проективных классов нет пяти точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой.

Пусть теперь A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — произвольные точки проективной плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Произведем проективное преобразование $\mathfrak{A}$, которое точки $O_1(1:0:0)$, $O_2(0:1:0)$, $O_3(0:0:1)$ и $E(1:1:1)$ переведет соответственно в точки A_1, A_2, A_3 и A_4. Пусть $P(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$ — прообраз точки A_5 при этом преобразовании. По доказанному существует и притом только одна овальная линия C второго порядка, проходящая через точки O_1, O_2, O_3, E и P. Производя проективное преобразование $\mathfrak{A}$, получим овальную линию S образ линии S при этом преобразовании $\mathfrak{A}$, которая будет проходить через пять данных точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Другой линии второго порядка, проходящей через эти пять точек, не существует, так как если бы такая линия существовала, то существовали бы две различные овальные линии второго порядка, проходящие через точки

$$O_1,\ O_2,\ O_3,\ E \text{ и } P.$$

Замечание. Имеет место более общая теорема: если никакие четыре точки из пяти данных точек не принадлежат одной прямой, то через эти пять точек проходит только одна линия второго порядка*.

§ 211. Пучок линий второго порядка

Рассмотрим две линии второго порядка, заданные уравнениями

$$\varphi=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0 \qquad (1)$$

и

$$\psi=b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2+2b_{12}x_1x_2+2b_{23}x_2x_3+2b_{31}x_3x_1=0, \qquad (2)$$

и линию второго порядка, заданную уравнением

$$\varphi+\lambda\psi=0. \qquad (3)$$

* См. Н. Н. Мусхелишвили. Курс аналитической геометрии. М.-Л., ОГИЗ, 1947, гл. VIII, § 212, стр. 404.

Уравнение (3) определяет множество линий второго порядка, проходящих через точки пересечения линий $\varphi=0$ и $\psi=0$, так как если удовлетворяются одновременно уравнения $\varphi=0$ и $\psi=0$, то будет удовлетворяться и уравнение (3). В общем случае две линии второго порядка пересекаются в четырех точках и, таким образом, уравнение (3) выражает линию второго порядка, проходящую через эти четыре точки.

Уравнение (3) называется уравнением пучка линий второго порядка, заданного линиями $\varphi=0$ и $\psi=0$.

Докажем, что любая овальная линия C второго порядка, проходящая через точки, общие линиям (1) и (2), может быть выражена уравнением вида (3), если только никакие три из точек пересечения линий (1) и (2) не лежат на одной прямой. В самом деле, возьмем на линии C точку, не лежащую ни на линии (1), ни на линии (2), ни на одной из прямых, проходящих через какие-нибудь две из точек пересечения линий (1) и (2).

Подставляя координаты этой точки в уравнение (3), получим

$$\varphi_0+\lambda\psi_0=0,$$

где φ_0 и ψ_0 — результаты подстановки координат взятой точки в левые части уравнений (1) и (2).

Из последнего уравнения находим

$$\lambda=-\frac{\varphi_0}{\psi_0},$$

и уравнение (3) принимает вид

$$\psi_0\varphi-\varphi_0\psi=0.$$

Это и есть уравнение линии C, так как овальная линия C вполне определяется заданием на ней пяти точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой.

В частности, таким путем можно составить уравнение овальной линии второго порядка, проходящей через пять точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. В самом деле, рассмотрим такие пять точек $A_i(a_1^i:a_2^i:a_3^i)$, $i=1, 2, 3, 4, 5$; уравнения прямых A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 запишем так:

$$f_{12}=0,\quad f_{23}=0,\quad f_{34}=0,\quad f_{41}=0.$$

Рассмотрим линии второго порядка

$$\varphi=f_{12}f_{34}=0,\qquad \psi=f_{23}f_{41}=0,$$

каждая из которых распадается на две прямые (первая на прямые A_1A_2 и A_3A_4, вторая на прямые A_2A_3 и A_1A_4). Эти линии пересекаются в точках A_1, A_2, A_3, A_4.

Рассмотрим пучок линий второго порядка

$$f_{12}f_{34}+\lambda f_{23}f_{41}=0.$$

Подставляя сюда координаты пятой точки A_5, найдем λ, и подставляя это значение λ в последнее уравнение, получим уравнение линии второго порядка, проходящей через пять заданных точек A_i.

§ 212. Поверхность второго порядка в проективном пространстве. Классификация поверхностей второго порядка по характеру пересечения с несобственной плоскостью

Поверхностью второго порядка в проективном пространстве называется геометрическое место всех точек проективного пространства, однородные координаты которых удовлетворяют однородному уравнению второй степени:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\\ +2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0. \qquad (1)\end{aligned}$$

Так как при переходе от одной системы координат к другой старые координаты через новые выражаются линейными однородными соотношениями с определителем из коэффициентов, отличным от нуля, то это уравнение (1) преобразуется снова в однородное уравнение второй степени.

Координаты x, y, z всех собственных точек поверхности (1) второго порядка удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+\\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \qquad (2)\end{aligned}$$

т. е. множество всех собственных точек поверхности второго порядка в случае, если по крайней мере один из коэффициентов

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{12},\ a_{23},\ a_{31}$$

не равен нулю, есть множество всех точек какой-то поверхности второго порядка, принадлежащей к одному из 17 аффинных классов (эллипсоид, гиперболоид, параболоид, конус и т. д., см. § 189).

Если $a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{12}=a_{23}=a_{31}=0$, но хотя бы один из коэффициентов a_{14}, a_{24}, a_{34} не равен нулю, то множество всех собственных точек поверхности (1) образует плоскость

$$2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

Если, наконец, в уравнении (1) все коэффициенты, кроме a_{44}, равны нулю, то поверхность (1) вырождается в пару плоскостей, совпавших с несобственной плоскостью; в этом случае на ней нет ни одной собственной точки.

Что касается несобственных точек, принадлежащих поверхности (1), то их однородные координаты удовлетворяют уравнениям

$$x_4 = 0,$$
$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0. \tag{3}$$

В случае, если хотя бы один из коэффициентов уравнения (3) не равен нулю, это уравнение определяет координаты x_1, x_2, x_3 векторов, имеющих асимптотическое направление относительно поверхности второго порядка, заданной уравнением (1), или, что то же, конус асимптотических направлений с вершиной в начале координат

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0 \tag{4}$$

для поверхности (2).

Уравнение (3) на несобственной плоскости $x_4 = 0$ определяет в этом случае линию L второго порядка. Эта линия может быть одной из следующих:

1° мнимая овальная линия второго порядка;

2° действительная нераспадающаяся (овальная) линия второго порядка;

3° две действительные различные прямые;

4° две мнимые прямые, пересекающиеся в действительной точке;

5° две совпадающие (действительные прямые).

В первом случае уравнение (4) определяет мнимый конус, а значит, уравнение (2) может определять или эллипсоид, или мнимый эллипсоид, или мнимый конус.

Во втором случае уравнение (4) определяет действительный конус. Тогда уравнение (2) может определять или однополостный гиперболоид, или двуполостный гиперболоид, или конус второго порядка. Таким образом, точками этой несобственной линии L поверхность (2) второго порядка евклидова пространства дополняется до поверхности второго порядка (1) в проективном пространстве.

В третьем случае уравнение (4) определяет две действительные пересекающиеся плоскости, пересекающие несобственную плоскость по двум различным прямым l_1 и l_2. Уравнение (2) в этом случае определяет или гиперболический параболоид, или гиперболический цилиндр, или пару действительных плоскостей. Значит, в случае 3° уравнение (1) является уравнением одной из этих поверхностей, дополненных всеми точками прямых l_1 и l_2.

В четвертом случае уравнение (4) определяет две мнимые плоскости, пересекающиеся по действительной прямой l, значит, поверхность (2) будет или эллиптическим параболоидом, или эллиптическим цилиндром, или мнимым эллиптическим цилиндром, или парой мнимых пересекающихся плоскостей; уравнение (1) является уравнением одной и этих поверхностей, дополненной одной несобственной точкой прямой l.

Наконец, в пятом случае уравнение (4) является уравнением двух совпадающих плоскостей (действительных), пересекающих несобственную плоскость по двум совпадающим (несобственным) прямым l. Уравнение (2) в этом случае является уравнением или параболического цилиндра, или парой действительных параллельных плоскостей, или парой мнимых параллельных плоскостей, или парой совпадающих плоскостей; уравнение (1) является уравнением одной из этих поверхностей, дополненных всеми точками действительной несобственной прямой l.

§ 213. Проективная классификация поверхностей второго порядка

Определение. *Две поверхности второго порядка в проективном пространстве принадлежат одному и тому же проективному классу, если существует такое проективное преобразование, которое одну из поверхностей переводит в другую. Если же никаким проективным преобразованием одну из поверхностей второго порядка нельзя преобразовать в другую, то эти поверхности второго порядка принадлежат различным проективным классам.*

Теорема 1. *Всякую поверхность второго порядка в проективном пространстве можно проективным преобразованием перевести в одну из следующих восьми поверхностей:*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0 \tag{I}$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0 \tag{II}$$

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0 \tag{III}$$

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0 \tag{IV}$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \tag{V}$$

$$x_1^2-x_2^2=0 \tag{VI}$$

$$x_1^2+x_2^2=0 \tag{VII}$$

$$x_1^2=0 \tag{VIII}$$

Доказательство. Как известно из высшей алгебры, квадратичную форму

$$\varphi=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+$$
$$+2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4 \tag{1}$$

невырожденным линейным однородным преобразованием можно привести к виду

$$\varphi=\varepsilon_1x_1^2+\varepsilon_2x_2^2+\varepsilon_3x_3^2+\varepsilon_4x_4^2, \tag{2}$$

где ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 принимают значения $+1$, -1 или 0; при этом доказывается, что число коэффициентов среди ε_i, равных $+1$, число коэффициентов ε_i, равных -1, и число коэффициентов ε_i, равных нулю, всегда одно и то же независимо от того линейного невырожденного преобразования, которое форму (1) приводит к каноническому виду (2) (закон инерции квадратичных форм)*. Отсюда следует, что не существует линейного невырожденного однородного преобразования, преобразующего одну из поверхностей (I)—(VIII) в другую.

Итак, всякую поверхность второго порядка можно проективным преобразованием преобразовать в одну из поверхностей (I)—(VIII), данных в условии теоремы, но не существует проективного преобразования, которое любую из поверхностей (I)—(VIII) переводит в другую.

Следствие. Из доказанной теоремы следует, что все поверхности второго порядка в проективном пространстве делятся на восемь проективных классов. Поверхность, заданная уравнением (I), входит в первый проективный класс I, и все поверхности этого класса получаются всеми проективными преобразованиями поверхности (I). Поверхность, заданная уравнением (II), входит во второй проективный класс II, и все поверхности второго порядка этого класса получаются всеми проективными преобразованиями поверхности (II) и т. д. до поверхности, заданной уравнением (VIII).

Сформулируем теперь геометрические свойства поверхностей второго порядка, составляющих эти восемь классов, которые, во-первых, инвариантны по отношению к проективным преобразованиям и, во-вторых, характеризуют поверхности этого класса в том смысле, что указанными свойствами обладают поверхности только рассматриваемого класса.

I. Поверхность, заданная в однородных координатах уравнением (I) относительно декартовой прямоугольной системы координат, является сферой (единичная сфера). Сфера содержит бесконечное множество точек и не имеет прямолинейных образующих (действительных). Так как эти свойства инвариантны относительно проективных преобразований, то теми же свойствами обладают все поверхности второго порядка I проективного класса. Они называются овальными поверхностями второго порядка.

II. Поверхность, заданная уравнением (II), не имеет ни одной (действительной) точки. Значит, этим свойством обладают все поверхности второго порядка, входящие во II проективный класс. Они называются поэтому мнимыми.

III. Поверхность, заданная в однородных координатах уравнением (III), является однополостным гиперболоидом (дополненным

* См. Г. Е. Шилов. Введение в теорию линейных пространств. М., Гостехиздат, 1956, гл. VI, § 43, стр. 125.

несобственными точками всех образующих его асимптотического конуса).

Через каждую точку этой поверхности (в том числе и через каждую несобственную ее точку) проходят две прямолинейные образующие разных серий, пересекающиеся в этой точке. Тем же свойством обладают поверхности, полученные из поверхности (III) всеми проективными преобразованиями, т. е. все поверхности второго порядка III проективного класса.

Поверхности III класса называются линейчатыми невырожденными поверхностями второго порядка (или тороидальными, или кольцевидными).

IV. Поверхность, заданная уравнением (IV) в однородных координатах, является действительной конической поверхностью второго порядка. Вершиной конуса является точка (0:0:0:1), а его направляющей, например, действительная овальная линия второго порядка, заданная на несобственной плоскости уравнениями

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0, \quad x_4=0.$$

Тем же свойством обладают, очевидно, все поверхности второго порядка, входящие в IV проективный класс.

V Поверхность, заданная уравнением (V) в однородных координатах, выражается однородным уравнением, следовательно, является конической поверхностью. Однако на этой конической поверхности есть только одна действительная точка (0:0:0:1). Поэтому все поверхности V класса также конические и все они имеют только одну действительную точку (вершину конуса). Поверхности V класса называются поэтому мнимыми коническими поверхностями второго порядка.

VI. Поверхность, заданная уравнением (VI), распадается на две различные действительные плоскости. Отсюда следует, что каждая поверхность второго порядка VI проективного класса является парой различных плоскостей.

VII. Поверхность, заданная уравнением (VII), распадается на две различные мнимые плоскости. Множество всех действительных точек поверхности (VII) состоит из множества всех точек оси Oz, дополненного одной несобственной точкой этой оси. Эти свойства инвариантны по отношению к проективным преобразованиям, поэтому любая поверхность VII проективного класса является парой мнимых плоскостей, имеющих общую действительную прямую (проективную).

VIII. Класс VIII состоит из сдвоенных плоскостей.

Мнимые, овальные и тороидальные поверхности второго порядка называются невырождающимися. Для того чтобы поверхность, заданная уравнением (I), была невырождающейся, необходимо и достаточно, чтобы ранг квадратичной формы φ был равен 4.

Действительная и мнимая конические поверхности называются вырождающимися.

Для того чтобы поверхность была конусом действительным или мнимым, необходимо и достаточно, чтобы ранг квадратичной формы φ был равен 3.

Поверхность второго порядка, являющаяся парой плоскостей, называется распадающейся.

Для распадения поверхности второго порядка на пару плоскостей (действительных или мнимых, различных или совпадающих) необходимо и достаточно, чтобы ранг квадратичной формы φ был меньше или равен 2.

§ 214. Проективно-аффинная классификация поверхностей второго порядка в проективном пространстве

Определение. *Проективно-аффинной классификацией поверхностей второго порядка называется разбиение их на классы эквивалентности по отношению к проективным преобразованиям проективного пространства, при которых несобственная плоскость переходит в себя.*

Теорема 1. *Все поверхности второго порядка в проективном пространстве делятся на девятнадцать проективно-аффинных классов:*

1°. *Эллипсоиды*	
2°. *Двуполостные гиперболоиды*	(каждый из которых дополняется несобственной точкой любой образующей его асимптотического конуса)
3°. *Эллиптические параболоиды*	(каждый из них дополняется одной несобственной точкой его особого направления)
4°. *Мнимые эллипсоиды*	
5°. *Однополостные гиперболоиды*	(каждая из этих поверхностей дополняется несобственными точками всех ее прямолинейных образующих).
6°. *Гиперболические параболоиды*	(каждая из этих поверхностей дополняется несобственными точками всех ее прямолинейных образующих)
7°. *Действительные конусы второго порядка*	(каждая из этих поверхностей дополняется несобственными точками всех его образующих)
8°. *Действительные эллиптические цилиндры*	(каждый из них дополняется одной несобственной точкой его образующих)

9°. *Гиперболические цилиндры* (каждая из этих поверхностей дополняется одной несобственной точкой ее образующих)

10°. *Параболические цилиндры* (каждая из этих поверхностей дополняется одной несобственной точкой ее образующих)

11°. *Мнимые конусы*

12°. *Мнимые эллиптические цилиндры* (на каждой такой поверхности имеется только одна действительная и притом несобственная точка)

13°. *Пары действительных пересекающихся плоскостей* (каждая такая пара дополняется прямыми, по которым эти плоскости пересекаются с несобственной плоскостью)

14°. *Пары действительных параллельных плоскостей* (каждая гакая пара дополняется прямой, по которой они пересекают несобственную плоскость)

15°. *Пары действительных плоскостей, из которых одна собственная, а другая несобственная*

16°. *Пары мнимых пересекающихся плоскостей* (каждая такая пара плоскости дополняется одной действительной несобственной точкой той действительной прямой, по которой пересекаются плоскости)

17°. *Пары мнимых параллельных плоскостей* (на каждой такой поверхности имеется только одна действительная прямая, притом несобственная)

18°. *Пары сдвоенных собственных плоскостей* (каждая такая поверхность дополняется прямой, по которой сдвоенная плоскость пересекает несобственную плоскость)

19°. *Пары сдвоенных несобственных плоскостей*

Доказательство. Если проективное преобразование $\mathfrak{A}$ переводит несобственную плоскость в себя, то на множестве собственных точек проективного пространства оно равно некоторому аффинному преобразованию A. При этом если это аффинное преобразование A прямую l переводит в прямую l', то проективное преобразование $\mathfrak{A}$ несобственную точку прямой l переводит в несобственную точку прямой l'. Если аффинное преобразование A плоскость π переводит в плоскость π', то проективное преобразование $\mathfrak{A}$ несобственную прямую плоскости π переводит в несобственную прямую плоскости π'.

Но так как на множестве собственных точек проективного пространства указанное разбиение на классы 1°—19° является аффинной классификацией, то на множестве всех точек проективного пространства указанная классификация — проективно-аффинная.

Теорема 2. I *проективный класс составляют эллипсоиды, двуполостные гиперболоиды и эллиптические параболоиды.*

II *проективный класс составляют мнимые эллипсоиды.*

III *проективный класс составляют однополостные гиперболоиды и гиперболические параболоиды.*

IV *проективный класс составляют действительные конусы второго порядка и действительные цилиндры второго порядка (эллиптический, гиперболический и параболический.)*

V *проективный класс составляют мнимые конусы и мнимые эллиптические цилиндры.*

VI *проективный класс составляют пары действительных пересекающихся плоскостей, пары действительных параллельных плоскостей и пары действительных плоскостей, из которых одна собственная, а другая несобственная.*

VII *проективный класс образуют пары мнимых пересекающихся и пары мнимых параллельных плоскостей.*

VIII *проективный класс образуют сдвоенные собственные плоскости и сдвоенные несобственные плоскости.*

При этом указанные выше поверхности дополняются несобственными точками так, как указано в предыдущей теореме.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить проективно-инвариантные характеристики каждого из восьми классов поверхностей второго порядка в проективном пространстве.

I. В самом деле, эллипсоиды, двуполостные гиперболоиды и эллиптические параболоиды, имеют бесконечное множество действительных точек и не имеют прямолинейных образующих.

II. На мнимых эллипсоидах нет ни одной действительной точки.

III. Однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид обладают тем свойством, что через каждую точку их поверхности (в том числе и через несобственную!) проходят две различные прямолинейные образующие.

IV. Действительный конус второго порядка, эллиптический, гиперболический и параболический цилиндр являются действительными коническими поверхностями; для трех последних поверхностей вершина — несобственная точка и т. д.

Замечание. Покажем, какие проективные преобразования переводят друг в друга поверхности, входящие в один проективный класс, но в различные проективно-аффинные классы.

I. Однородные уравнения эллипсоида, двуполостного гиперболоида и эллиптического параболоида*

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}-x_4^2=0, \qquad (1)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}+x_4^2=0, \qquad (2)$$

$$\frac{x_1^2}{p}+\frac{x_2^2}{q}-2x_3x_4=0 \quad (p>0,\ q>0) \qquad (3)$$

переводятся в уравнение сферы

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_4'^2=0$$

соответственно следующими проективными преобразованиями:

$$x_1=ax_1',\ x_2=bx_2',\ x_3=cx_3',\ x_4=x_4'; \qquad (\mathfrak{A}_1)$$

$$x_1=ax_1',\ x_2=bx_2',\ x_3=cx_4',\ x_4=x_3'; \qquad (\mathfrak{A}_2)$$

$$x_1=\sqrt{p}\,x_1',\ x_2=\sqrt{q}\,x_2',\ x_3=\frac{x_4'-x_3'}{\sqrt{2}},\ x_4=\frac{x_4'+x_3'}{\sqrt{2}}. \qquad (\mathfrak{A}_3)$$

Отсюда следует, что проективное преобразование $\mathfrak{A}_2^{-1}\mathfrak{A}_1$ переводит эллипсоид (1) в двуполостный гиперболоид (2); преобразование $\mathfrak{A}_1^{-1}\mathfrak{A}_2$ двуполостный гиперболоид (2) переводит в эллипсоид (1). Преобразование $\mathfrak{A}_3^{-1}\mathfrak{A}_1$ переводит эллипсоид (1) в эллиптический параболоид (3), а преобразование $\mathfrak{A}_1^{-1}\mathfrak{A}_3$ эллиптический параболоид (3) переводит в эллипсоид (1). Преобразование $\mathfrak{A}_3^{-1}\mathfrak{A}_2$ переводит двуполостный гиперболоид (2) в эллиптический параболоид (3), а преобразование $\mathfrak{A}_2^{-1}\mathfrak{A}_3$ эллиптический параболоид (3) переводит в двуполостный гиперболоид (2).

II. Все мнимые поверхности второго порядка образуют один проективный и один проективно-аффинный классы.

Однородное уравнение мнимой поверхности

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}+x_4^2=0$$

переводится в уравнение

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+x_4'^2=0$$

---

* Все поверхности, о которых говорится здесь и ниже, предполагаются дополненными несобственными точками так, как это указано выше.

следующим проективным преобразованием:

$$x_1 = ax'_1, \quad x_2 = bx'_2, \quad x_3 = cx'_3, \quad x_4 = x'_4.$$

III. Уравнения однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} - x_4^2 = 0, \tag{4}$$

$$\frac{x_1^2}{p} - \frac{x_2^2}{q} - 2x_3x_4 = 0 \quad (p > 0, \ q > 0) \tag{5}$$

преобразуются в уравнение

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2 = 0$$

соответственно следующими проективными преобразованиями:

$$x_1 = ax'_1, \quad x_2 = bx'_2, \quad x_3 = cx'_3, \quad x_4 = x'_4; \tag{$\mathfrak{A}_4$}$$

$$x_1 = \sqrt{p}\,x'_1, \quad x_2 = \sqrt{q}\,x'_3, \quad x_3 = \frac{x'_4 + x'_1}{\sqrt{2}}, \quad x_4 = \frac{x'_4 - x'_1}{\sqrt{2}}. \tag{$\mathfrak{A}_5$}$$

Значит, преобразование $\mathfrak{A}_5^{-1}\mathfrak{A}_4$ переводит однополостный гиперболоид (4) в гиперболический параболоид (5), а преобразование $\mathfrak{A}_4^{-1}\mathfrak{A}_5$ вторую из этих поверхностей преобразует в первую.

IV. Уравнения конуса и цилиндров второго порядка

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - x_4^2 = 0, \tag{7}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_4^2 = 0, \tag{8}$$

$$x_1^2 - 2px_2x_4 = 0, \quad p > 0 \tag{9}$$

преобразуются в уравнение

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$$

соответственно следующими проективными преобразованиями:

$$x_1 = ax'_1, \quad x_2 = bx'_2, \quad x_3 = cx'_3, \quad x_4 = x'_4; \tag{$\mathfrak{A}_6$}$$

$$x_1 = ax'_1, \quad x_2 = bx'_2, \quad x_3 = x'_4, \quad x_4 = x'_3; \tag{$\mathfrak{A}_7$}$$

$$x_1 = ax'_3, \quad x_2 = bx'_1, \quad x_3 = x'_4, \quad x_4 = x'_3; \tag{$\mathfrak{A}_8$}$$

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = \frac{x'_3 + x'_2}{\sqrt{2p}}, \quad x_4 = \frac{x'_3 - x'_2}{\sqrt{2p}}, \quad x_3 = x'_4. \tag{$\mathfrak{A}_9$}$$

Значит, преобразование $\mathfrak{A}_7^{-1}\mathfrak{A}_6$ преобразует конус (6) в эллиптический цилиндр (7), а преобразование $\mathfrak{A}_6^{-1}\mathfrak{A}_7$, наоборот, эллиптический цилиндр преобразует в конус (6). Преобразование $\mathfrak{A}_8^{-1}\mathfrak{A}_6$ преобразует конус (6) в гиперболический цилиндр (8), а преобразование $\mathfrak{A}_6^{-1}\mathfrak{A}_8$ преобразует гиперболический цилиндр (8) в конус (6) и т. д. (всего 12 различных проективных преобразований, преобразующих одну из поверхностей (6)—(9) в другую).

V. Уравнения мнимого конуса и мнимого эллиптического цилиндра

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=0, \tag{10}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+x_4^2=0 \tag{11}$$

преобразуются в уравнение

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=0$$

соответственно следующими проективными преобразованиями:

$$x_1=ax_1',\quad x_2=bx_2',\quad x_3=cx_3',\quad x_4=x_4'; \tag{$\mathfrak{A}_{10}$}$$

$$x_1=ax_1',\quad x_2=bx_2',\quad x_3=x_4',\quad x_4=x_3'. \tag{$\mathfrak{A}_{11}$}$$

Значит, преобразование $\mathfrak{A}_{11}^{-1}\mathfrak{A}_{10}$ преобразует мнимый конус (10) в мнимый эллиптический цилиндр (11), а преобразование $\mathfrak{A}_{10}^{-1}\mathfrak{A}_{11}$ — мнимый эллиптический цилиндр (II) в мнимый конус (10).

Рассмотрение остальных случаев VI, VII, VIII предоставляется читателю.

§ 215. Необходимое и достаточное условие того, что два однородных уравнения второй степени определяют одну и ту же поверхность второго порядка

Теорема 1. *Для того чтобы два уравнения*

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+ \\ +2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0 \tag{1}$$

и

$$b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2+b_{44}x_4^2+2b_{12}x_1x_2+2b_{13}x_1x_3+ \\ +2b_{14}x_1x_4+2b_{23}x_2x_3+2b_{24}x_2x_4+2b_{34}x_3x_4=0 \tag{2}$$

выражали одну и ту же поверхность в комплексном проективном пространстве, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие коэффициенты этих уравнений были пропорциональны.

Доказательство необходимости (достаточность очевидна). Пусть уравнения (1) и (2) выражают одну и ту же поверхность. Если эта поверхность распадается на две плоскости, то теорема следует из того, что если два уравнения в однородных координатах являются уравнениями одной и той же плоскости, то соответствующие коэффициенты уравнений этих плоскостей пропорциональны.

Предположим, что поверхность, заданная уравнением (1) или (2), нераспадающаяся.

Рассмотрим сечение поверхности плоскостью $x_4=0$; уравнения линии сечения:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0,\quad x_4=0, \tag{3}$$

или

$$b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2+2b_{12}x_1x_2+2b_{23}x_2x_3+2b_{31}x_3x_1=0,\quad x_4=0. \tag{4}$$

Так как поверхности (1) и (2) совпадают, то уравнения (3) и (4) выражают одну и ту же линию на плоскости $x_4=0$ и, значит, на основании теоремы 1 § 206 коэффициенты уравнений (3) и (4) пропорциональны.

Рассматривая еще сечения данных поверхностей плоскостями $x_3=0$, $x_2=0$, $x_1=0$, докажем, что все коэффициенты уравнений (1) и (2) пропорциональны.

Теорема 2. *Для того чтобы уравнения* (1) *и* (2), *заданные в однородных координатах точек действительного проективного пространства, являлись уравнениями одной и той же действительной поверхности второго порядка, имеющей бесконечное множество действительных точек, не принадлежащих одной прямой, необходимо, чтобы соответствующие коэффициенты этих уравнений были пропорциональны.*

Доказательство. Теорема, очевидно, верна, если (1) и (2) — уравнения одной и той же поверхности второго порядка, распадающейся на две плоскости. Предположим, что уравнения (1) и (2) являются уравнениями действительной нераспадающейся поверхности второго порядка, имеющей бесконечное множество действительных точек, не принадлежащих одной прямой. Это значит, что поверхность может быть одной из следующих: эллипсоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид, действительный конус второго порядка и один из цилиндров: эллиптический, гиперболический или параболический.

Во всех случаях можно перейти к такой специальной системе координат, что уравнения (1) и (2) в однородных координатах имеют одинаковый вид с точностью до числового множителя левой части (отличного, конечно, от нуля).

Так, например, если уравнения (1) и (2) являются уравнениями однополостного гиперболоида (дополненного несобственными точками его образующих), то существует система координат $O'x'y'z'$, такая, что в однородных координатах x_1', x_2', x_3', x_4', введенных в этой системе, уравнения (1) и (2) однополостного гиперболоида имеют вид

$$a\left(x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2-x_4'^2\right)=0 \text{ и } b\left(x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2-x_4'^2\right)=0. \qquad (5)$$

Соответствующие коэффициенты этих уравнений пропорциональны, значит, пропорциональны и соответствующие коэффициенты уравнений (1) и (2), так как эти уравнения получаются из уравнений (5) при одном и том же преобразовании координат x_1', x_2', x_3', x_4', при котором форма $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2-x_4'^2$ перейдет в одну и ту же квадратичную форму.

Остальные случаи принципиально ничем не отличаются от произвольно выбранного (однополостный гиперболоид). Надо воспользоваться результатом § 163.

§ 216. Касательная плоскость к поверхности второго порядка

Точка $M_0(x_1^0:x_2^0:x_3^0:x_4^0)$ называется неособой точкой поверхности второго порядка, заданной общим уравнением

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{14}x_1x_4+ \\ +2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0,$$

если хотя бы одно из чисел

$$a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0+a_{14}x_4^0,\quad a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0+a_{24}x_4^0, \\ a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0+a_{34}x_4^0,\quad a_{41}x_1^0+a_{42}x_2^0+a_{43}x_3^0+a_{44}x_4^0$$

отлично от нуля.

Невырождающиеся поверхности не имеют особых точек. Особой точкой конуса является его вершина. Особыми точками распадающейся поверхности являются все точки линии пересечения тех плоскостей, на которые распадается поверхность.

Касательной прямой к поверхности второго порядка в данной на ней неособой точке называется прямая, проходящая через эту точку и пересекающая поверхность в двойной точке, либо целиком принадлежащая этой поверхности. Все прямые, проходящие через неособую точку поверхности и касающиеся ее, лежат в одной плоскости. Эта плоскость называется касательной к данной поверхности в данной на ней точке Если поверхность задана уравнением

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+ \\ +2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0,$$

а неособая точка, лежащая на ней, имеет координаты $x_1^0:x_2^0:x_3^0:x_4^0$, то уравнение касательной плоскости к поверхности в данной точке *имеет вид*

$$\begin{aligned}&(a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0+a_{14}x_4^0)\,x_1+\\+&(a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0+a_{24}x_4^0)\,x_2+\\+&(a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0+a_{34}x_4^0)\,x_3+\\+&(a_{41}x_1^0+a_{42}x_2^0+a_{43}x_3^0+a_{44}x_4^0)\,x_4=0.\end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы § 207.

§ 217. Пересечение поверхности второго порядка касательной плоскостью

Пусть O — неособая точка действительной поверхности второго порядка. Ограничимся рассмотрением действительных овальных поверхностей (I проективный класс), невырождающихся линейчатых поверхностей (III проективный класс) и действительных конусов второго порядка (IV проективный класс). Поверхности I и III проективных классов не имеют особых точек, поверхности IV проективного класса имеют только одну особую точку (вершина конуса).

Предположим сначала, что точка O — собственная. Примем ее за начало общей декартовой системы координат, а за плоскость xOy примем плоскость, касательную к поверхности в точке O. Пусть в выбранной системе координат уравнение поверхности в однородных координатах примет вид

$$\begin{aligned}&a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\\&+2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0.\end{aligned}\qquad(1)$$

Так как уравнение плоскости, касательной к поверхности в точке $(0:0:0:1)$, таково:

$$a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4=0$$

и оно должно быть эквивалентно уравнению

$$x_3=0 \text{ (уравнение плоскости } xOy),$$

то

$$a_{14}=a_{24}=a_{44}=0,\quad a_{34}\neq 0,$$

и уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned}\varphi=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{13}x_1x_3+\\+2a_{34}x_3x_4=0.\end{aligned}\qquad(1')$$

Уравнения линии, по которой ее пересекает касательная к этой поверхности плоскость $x_3 = 0$ в начале координат, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В плоскости xOy первое из уравнений (2) является уравнением пары прямых. Это две мнимые пересекающиеся (в точке O касания) прямые, если

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0;$$

точка O в этом случае называется эллиптической точкой поверхности. Если $\delta<0$, то линией пересечения являются две различные действительные прямые; точка O в этом случае называется гиперболической. Если, наконец $\delta = 0$, то линия пересечения поверхности с касательной плоскостью является сдвоенной прямой, точка O поверхности в этом случае называется параболической. Докажем, что действительные овальные поверхности состоят из эллиптических точек, действительные линейчатые невырождающиеся поверхности состоят из гиперболических точек, а действительные конусы второго порядка — из параболических точек.

Вычислим определитель K_4 квадратичной формы φ:

$$K_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{34} & 0 \end{vmatrix} = -a_{34}^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Отметим, что знак K_4 не меняется при преобразовании системы координат, так как при таком преобразовании K_4 умножается на квадрат определителя из коэффициентов преобразования, т. е. на положительное число.

Для действительных овальных поверхностей второго порядка $K_4<0$ (в этом можно убедиться, вычислив K_4 из уравнения $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$). Для линейчатых невырождающихся поверхностей второго порядка $(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0)$ $K_4>0$, а для действительных конусов второго порядка $(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0)$ $K_4 = 0$. Отсюда и из равенства (3) заключаем, что если $K_4<0$, то $\delta>0$; если $K_4>0$, то $\delta<0$, и если $K_4 = 0$, то $\delta = 0$. Значит, касательная плоскость к действительной овальной поверхности второго порядка пересекает ее по двум мнимым прямым, пересекающимся в точке касания. Касательная плоскость к невырожденной линейчатой поверхности второго порядка пересекает ее по двум пересекающимся прямым (прямолинейным образующим разных серий). Наконец, касательная плоскость к действительному конусу (вершина исключается!) пересекает его по сдвоенной действительной прямой (по образующей конуса, проходящей через точку касания).

Если O — несобственная точка, то существует проективное преобразование $\mathfrak{A}$, которое переводит ее в собственную точку O'. При проективном преобразовании $\mathfrak{A}$ рассматриваемая поверхность Π перейдет в поверхность Π' того же проективного класса. Касательная плоскость в точке O' к поверхности Π' пересекает ее соответственно по двум мнимым, действительным различным или совпадающим прямым в зависимости от того, принадлежит ли поверхность Π соответственно к I, III или IV проективным классам. При преобразовании $\mathfrak{A}^{-1}$ поверхность Π' перейдет в поверхность Π, а плоскость π', касательная к поверхности Π' в точке O', перейдет в плоскость π, касательную к поверхности Π в точке O (понятие касательной плоскости проективно инвариантно), поэтому характер пересечения поверхности Π с касательной плоскостью в несобственной точке O таков же, как в случае, когда точка O собственная.

Например, несобственная плоскость касается эллиптического параболоида в его единственной несобственной точке; касательная плоскость в несобственной точке однополостного гиперболоида пересекает его по двум различным (параллельным!) прямолинейным образующим, проходящим через эту несобственную точку, и т. д.

§ 218. Полюс и полярная плоскость поверхности второго порядка

Теорема 1. *Рассмотрим уравнение*

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{14}x_1x_4+$$
$$+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0 \tag{1}$$

поверхности второго порядка. Пусть $M(x_1^0:x_2^0:x_3^0:x_4^0)$ — произвольная точка, не лежащая на этой поверхности. Тогда все точки N, четвертые гармонические к точке M относительно пары точек P и Q пересечения произвольной прямой, проходящей через точку M, с данной поверхностью второго порядка, лежат в одной плоскости, называемой полярной плоскостью точки M относительно данной поверхности. Уравнение полярной плоскости точки $M(x_1^0:x_2^0:x_3^0:x_4^0)$ относительно поверхности (1) *имеет вид*

$$\begin{aligned}&(a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+a_{13}x_3^0+a_{14}x_4^0)\,x_1+\\&+(a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+a_{23}x_3^0+a_{24}x_4^0)\,x_2+\\&+(a_{31}x_1^0+a_{32}x_2^0+a_{33}x_3^0+a_{34}x_4^0)\,x_3+\\&+(a_{41}x_1^0+a_{42}x_2^0+a_{43}x_3^0+a_{44}x_4^0)\,x_4=0.\end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству соответствующей теоремы 1 для линии второго порядка (§ 208).

Если точка M является неособой точкой поверхности второго порядка, то полярной плоскостью ее относительно данной поверхности назовем плоскость, касательную к поверхности в этой точке. Отметим, что уравнение полярной плоскости для неособой точки поверхности, имеет тот же вид (2).

Из уравнения полярной плоскости следует

Теорема 2. *Если из двух точек M и N первая лежит на поляре второй, то и вторая лежит на поляре первой. Иначе, если из двух плоскостей m и n первая проходит через полюс второй, то и вторая проходит через полюс первой.*

§ 219. Примеры и задачи к главе XV

1. Задачи с решениями

Пример 1. Относительно декартовой прямоугольной системы координат задано уравнение параболы:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0 \qquad (I_2=0,\ K_3\neq 0). \tag{1}$$

Найти координаты ее фокуса и уравнение директрисы.

Решение. Уравнение параболы относительно декартовой прямоугольной системы координат в том случае, когда за начало координат принимается фокус параболы, можно записать в виде

$$x'^2+y'^2=(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha-p)^2, \tag{2}$$

где $x'\cos\alpha+y'\sin\alpha-p=0$ — уравнение директрисы (нормальное), а p — параметр параболы.

Преобразуя уравнение (2), имеем

$$x'^2\sin^2\alpha-2x'y'\sin\alpha\cos\alpha+y'^2\cos^2\alpha+2px'\cos\alpha+2py'\sin\alpha-p^2=0.$$

Это уравнение в тангенциальных координатах будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & p\cos\alpha & u \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & p\sin\alpha & v \\ p\cos\alpha & p\sin\alpha & -p^2 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$u^2+v^2+2\frac{\cos\alpha}{p}uw+2\frac{\sin\alpha}{p}vw=0. \tag{3}$$

Перенесем данную систему координат так, чтобы новым началом координат стал фокус данной параболы. Тогда

$$x=x'+x_0, \quad y=y'+y_0,$$

и данное уравнение (1) примет вид

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+2F_{x_0}x'+2F_{y_0}y'+2F_0=0, \tag{4}$$

где

$$F_{x_0}=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1,$$
$$F_{y_0}=a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2,$$
$$2F_0=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_1x_0+2a_2y_0+a.$$

Уравнение (4) в тангенциальных координатах:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & F_{x_0} & u \\ a_{21} & a_{22} & F_{y_0} & v \\ F_{x_0} & F_{y_0} & 2F_0 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отнимая из элементов третьего столбца соответствующие элементы первого столбца, умноженные на x_0, и элементы второго столбца, умноженные на y_0, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & u \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & v \\ F_{x_0} & F_{y_0} & a_1x_0+a_2y_0+a & w \\ u & v & w-x_0u-y_0v & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отнимая из элементов третьей строки соответствующие элементы первой строки, умноженные на x_0, и элементы второй строки, умноженные на y_0, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & u \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & v \\ a_1 & a_2 & a & w-x_0u-y_0v \\ u & v & w-x_0u-y_0v & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$A_{11}u^2+A_{22}v^2+2A_{12}uv+$$
$$+2A_1u(w-x_0u-y_0v)+2A_2v(w-x_0u-y_0v)=0. \qquad (5)$$

Так как уравнение (5) должно быть эквивалентно уравнению (3), а в уравнении (3) коэффициент при uv равен нулю и коэффициенты при u^2 и v^2 равны между собой, то

$$A_{12}-y_0A_1-x_0A_2=0, \qquad A_{11}-2x_0A_1=A_{22}-2y_0A_2.$$

Отсюда и находим координаты x_0, y_0 фокуса:

$$x_0=\frac{A_2A_{12}-\frac{1}{2}A_1(A_{22}-A_{11})}{A_1^2+A_2^2}, \qquad y_0=\frac{A_1A_{12}+\frac{1}{2}A_2(A_{22}-A_{11})}{A_1^2+A_2^2}.$$

Переписывая уравнение (3) в виде

$$pu^2+pv^2+2\cos\alpha\, uw+2\sin\alpha\, vw=0,$$

находим

$$\frac{A_{11}-2A_1x_0}{p}=\frac{A_{22}-2A_2y_0}{p}=\frac{A_1}{\cos\alpha}=\frac{A_2}{\sin\alpha},$$

откуда

$$\frac{-\frac{A_{11}+A_{22}}{2}+A_1x_0+A_2y_0}{-p}=\frac{A_1}{\cos\alpha}=\frac{A_2}{\sin\alpha},$$

и уравнение директрисы в системе $x'O'y'$ имеет вид

$$A_1x'+A_2y'-\frac{A_{11}+A_{22}}{2}+A_1x_0+A_2y_0=0,$$

или

$$A_1(x'+x_0)+A_2(y'+y_0)-\frac{A_{11}+A_{22}}{2}=0,$$

а уравнение директрисы в начальной системе

$$A_1x+A_2y-\frac{A_{11}+A_{22}}{2}=0.$$

Пример 2. Найти огибающую общих касательных к двум ортогональным окружностям, проходящим через две фиксированные точки $(0,\ a)$ и $(0, -a)$.

Решение. Центры окружностей $(at,\ 0)$ и $\left(-\frac{a}{t},\ 0\right)$; квадраты их радиусов $a^2(1+t^2)$ и $\frac{a^2}{t^2}(1+t^2)$. Координаты u, v, w общей касательной удовлетворяют тангенциальным уравнениям этих окружностей:

$$(aut+w)^2=a^2(1+t^2)(u^2+v^2),$$
$$(au-wt)^2=a^2(1+t^2)(u^2+v^2).$$

Отсюда

$$(a^2u^2+w^2)(1+t^2)=2a^2(u^2+v^2)(1+t^2),$$

или

$$a^2u^2+2a^2v^2-w^2=0$$

— уравнение огибающей в тангенциальных координатах. Уравнение же в точечных координатах

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2a^2}=1$$

— эллипс.

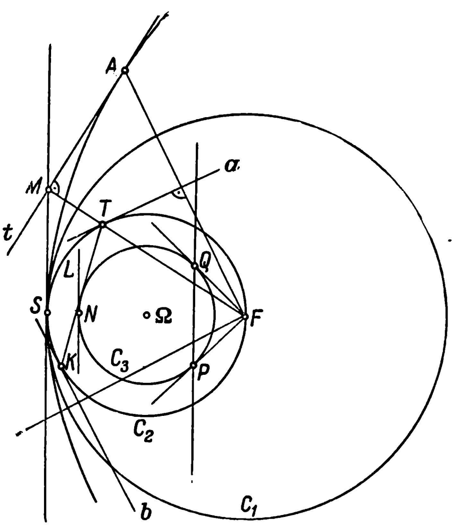


Рис. 282

Пример 3. Найти геометрическое место полюсов M хорд параболы, которые видны из фокуса под прямым углом.

Геометрическое решение. Рассмотрим поляритет* П относительно окружности C_1 с центром в фокусе F параболы и радиусом FS, где S — вершина параболы (рис. 282). При этом поляритете каждая касательная t к параболе перейдет в точку T луча, выходящего из фокуса F и пересекающего касательную t в точке M, такой, что $FT\times\times FM=FS^2$. Но так как проекции M фокуса на касательные к параболе описывают касательную к параболе в ее вершине, то множеством точек T будет линия, получаемая из касательной к параболе в ее вершине при инверсии с центром F и степенью инверсии, равной FS^2. Но при такой инверсии прямая SM перейдет в окружность C_2 с диаметром FS. Далее, точка A прикосновения касательной t к данной параболе перейдет в прямую a, перпендикулярную FA и касающуюся окружности C_2. Если B — другая точка параболы, такая, что $\angle AFB=\frac{\pi}{2}$, то точка B и касательная к параболе в точке B перейдут соответственно в касательную b к окружности C_2 (причем касательные b и a взаимно перпендикулярны) и в точку K прикосновения прямой b с окружностью C_2. Значит, полюс

* Т. е. отображение, при котором точке ставится в соответствие ее поляра и наоборот.

хорды AB перейдет в прямую TK, геометрическое же место полюсов хорд AB перейдет в множество прямых TK. Но отрезок TK есть сторона квадрата, вписанного в окружность C_2. Значит, геометрическое место полюсов хорд AB параболы, видимых из фокуса F под прямым углом, перейдет в множество касательных к окружности C_3, центром которой является середина отрезка FS, а радиус равен $\frac{p}{4\sqrt{2}}$, где p — параметр параболы. Геометрическим местом полюсов хорд AB $\left(\text{таких, что } \angle AFB=\frac{\pi}{2}\right)$ будет образ множества касательных к окружности C_3 при рассматриваемом поляритете. Полярой фокуса F относительно окружности C_3 является прямая PQ, проходящая через точки прикосновения касательных, проведенных из точки F к окружности C_3. Так как при поляритете П точка F переходит в бесконечно удаленную прямую, то ее поляра PQ переходит в центр искомой кривой. Но так как расстояние от точки F до прямой PQ равно $\frac{p}{8}$, то прямая PQ перейдет в центр O искомой линии, лежащий на луче FS на расстоянии $2p$ от точки F $\left(\text{ибо тогда } \frac{p}{8}\cdot 2p=\frac{p^2}{4}=FS^2\right)$. Далее, прямые FP и FQ перейдут в бесконечно удаленные точки соответственно прямых FQ и FP, значит, искомая линия имеет две различные бесконечно удаленные точки и они лежат на двух взаимно перпендикулярных прямых. Значит, искомая линия — равносторонняя гипербола, асимптоты которой проходят через указанный выше центр O и наклонены к прямой FS под углом 45°. Наконец, вершины гиперболы — образы в поляритете П прямых, касательных к C_3 и перпендикулярных к SF. Одна из таких касательных отстоит от F на расстоянии $FN=\frac{p}{4}+\frac{p}{4\sqrt{2}}$. Значит, она перейдет в вершину A гиперболы, отстоящую от точки F на расстоянии $p(2-\sqrt{2})$; полуоси гиперболы равны $p\sqrt{2}$.

Аналитическое решение. Принимая за начало координат фокус F параболы, можно записать ее уравнение в виде $y^2-2px-p^2=0$. Поляра точки $P(X, Y)$ имеет уравнение $px-Yy+pX+p^2=0$. Отсюда $p=-\frac{px-Yy}{X+p}$, значит, следующее уравнение будет следствием двух предыдущих (уравнения параболы и поляры точки относительно параболы):

$$y^2+2x\frac{px-Yy}{X+p}-\frac{(px-Yy)^2}{(X+p)^2}=0,$$

или

$$(2pX+p^2)x^2-2xy\,XY+[(X+p)^2-Y^2]\,y^2=0.$$

Но это уравнение однородное относительно x и y и, значит, оно определяет пару прямых, проходящих через начало координат и точки пересечения поляры с параболой. Условие ортогональности этих прямых:

$$(X+p)^2-Y^2+2pX+p^2=0,$$

или

$$(X+2p)^2-Y^2=2p^2,$$

и мы приходим к тому же результату.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Определить общий вид проективных преобразований, при которых гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

переходит в себя, а касательные в вершинах гиперболы переходят в ее асимптоты.

Отв.

$$x'=\pm\frac{b}{y}(x\operatorname{ch}\varphi+a\operatorname{sh}\varphi),\quad y'=\pm\frac{b^2}{ay}(x\operatorname{sh}\varphi+a\operatorname{ch}\varphi).$$

2. Доказать, что если уравнение

$$\varphi\equiv a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0$$

определяет действительную овальную линию второго порядка, то условие

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)>0$$

является необходимым и достаточным условием того, что точка $(x_1:x_2:x_3)$ внутренняя.

3. Определить поляру точки, лежащей на асимптоте гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

относительно этой гиперболы.

Отв. Если точка $M_0(x_0,\ y_0)$ лежит на асимптоте $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, но не совпадает с центром гиперболы, то уравнение поляры имеет вид

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=t, \qquad (2)$$

где t — некоторое число. Обратно, если t — любое действительное число, не равное нулю, то на гиперболе (1) найдется точка M_0, для которой прямая (2) будет полярой. Аналогичны выводы и для второй асимптоты.

4. Доказать, что необходимым и достаточным условием полярной сопряженности двух прямых, проходящих через фокус линии второго порядка, является их перпендикулярность. Является ли это свойство фокуса линии второго порядка его характеристическим свойством?

5. Пусть C — действительная овальная линия второго порядка, а F — ее фокус. Рассмотрим окружность S с центром в точке F. Поставим в соответствие каждой касательной к линии C ее полюс M относительно окружности S. Доказать, что геометрическое место точек M есть окружность.

6. Уравнение

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0 \qquad (1)$$

определяет действительную овальную линию второго порядка. Дана прямая

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0. \qquad (2)$$

1) При каком необходимом и достаточном условии прямая (2) пересекает линию (1) в двух различных (и действительных) точках?

2) При каком необходимом и достаточном условии прямая (2) не пересекает линию (1)?

Отв.

$$1)\ \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}>0;\quad 2)\ \Delta<0.$$

7. Доказать, что если из внешней точки действительной овальной линии провести касательные к ней, то прямая, соединяющая эту точку с серединой хорды прикосновения, будет диаметром линии, сопряженным направлению хорды.

8. Найти огибающую семейства прямых, образующих вместе с двумя данными прямыми треугольник постоянной площади.

Отв. $xy=\frac{S}{2\sin\omega}$, где S — площадь треугольника, а ω — угол между данными прямыми (за оси координат принимаются данные прямые).

9. Дан треугольник AOB; из каждой точки его стороны AB опущены перпендикуляры на стороны OA и OB. Найти огибающую прямых, соединяющих основания этих перпендикуляров.

Отв. Парабола.

10. Составить тангенциальное уравнение поверхности второго порядка:

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}x_ix_k=1.$$

Отв.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\sum_{i,k=1}^{3} A_{ik}u_iu_k=0,$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в матрице (a_{ik}).

11. Найти геометрическое место точек пространства, из которых данная точка и данная прямая проектируются на плоскость данной линии второго порядка в ее полюс и поляру.

Отв. Линия второго порядка, лежащая в плоскости, проходящей через данную точку и поляру точки пересечения данной прямой с плоскостью данной кривой относительно этой кривой.

ДОПОЛНЕНИЕ I

ОРИЕНТАЦИЯ

1. Ориентация плоскости

Определение 1. *Ориентированным треугольником* $\overrightarrow{ABC}$ *называется упорядоченная тройка точек, не принадлежащих одной прямой.*

При обозначении ориентированного треугольника порядок его вершин определяется порядком их записи

Определение 2. *Цепью, соединяющей ориентированные треугольники* $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$, *называется конечная упорядоченная последовательность ориентированных треугольников, первым элементом которой является ориентированный треугольник* $\overrightarrow{ABC}$, *последним — ориентированный треугольник* $\overrightarrow{A'B'C'}$, *такая, что каждые два соседних ориентированных треугольника этой последовательности отличаются только одной вершиной, занимающей в обоих треугольниках одно и то же место*

Теорема 1. *Любые два ориентированных треугольника* $\overrightarrow{ABC}$ *и* $\overrightarrow{A'B'C'}$ *можно соединить цепью.*

Доказательство. Такая цепь будет, например,

$$\overrightarrow{ABC},\ \overrightarrow{ABQ},\ \overrightarrow{APQ},\ \overrightarrow{A'PQ},\ \overrightarrow{A'B'Q},\ \overrightarrow{A'B'C'},$$

где Q — любая точка, не лежащая ни на прямой AB, ни на прямой $A'B'$, а P — какая-нибудь точка, не лежащая ни на прямой AQ, ни на прямой $A'Q'$ (рис. 283).

Определение 3. *Два ориентированных треугольника* $\overrightarrow{ABC}$ *и* $\overrightarrow{ABD}$ *имеют одинаковый обход, если точки* C *и* D *лежат по одну сторону от прямой* AB (рис. 284). *Если же точки* C *и* D *лежат по разные стороны от прямой* AB, *то ориентированные треугольники* $\overrightarrow{ABC}$ *и* $\overrightarrow{ABD}$ *имеют противоположный обход* (рис. 285). Аналогично определяется одинаковый и противоположный обход ориентированных треугольников, отличающихся только вторыми или только первыми вершинами.

Определение 4. *Если в цепи, соединяющей ориентированные треугольники* $\overrightarrow{ABC}$ *и* $\overrightarrow{A'B'C'}$, *число пар соседних треугольников, имеющих противоположный обход, четное, то говорят, что ориентированные треугольники* $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$ *имеют одинаковую ориентацию; если же это число нечетное,* *то ориентированные треугольники* $\overrightarrow{ABC}$ *и* $\overrightarrow{A'B'C'}$ *имеют противоположную ориентацию.*

На рис. 286 изображены два ориентированных треугольника $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$. В цепи

$$\overrightarrow{ABC},\ \overrightarrow{DBC},\ \overrightarrow{DEC},\ \overrightarrow{DEC'},\ \overrightarrow{A'EC'},\ \overrightarrow{A'B'C'}$$

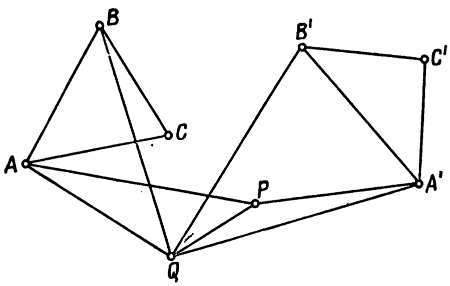


Рис. 283

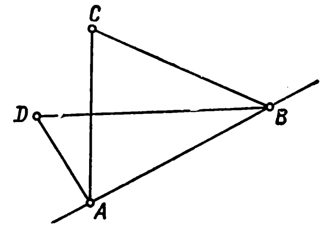


Рис 284

обход меняется два раза, значит, ориентированные треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$ имеют одинаковую ориентацию.

Для того чтобы оправдать определение 4, надо еще доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Во всех цепях, соединяющих ориентированные треугольники* $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$, *число пар соседних треугольников, имеющих противоположный обход, или всегда четное, или всегда нечетное.*

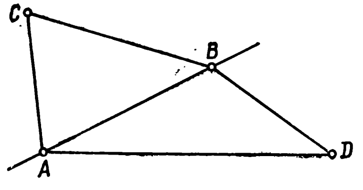


Рис 285

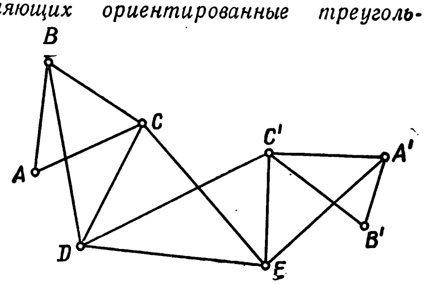


Рис 286

Иными словами, надо показать, что свойство двух ориентированных треугольников иметь одинаковую или противоположную ориентацию не зависит от выбора цепи, соединяющей эти ориентированные треугольники.

Теорема 2 является следствием следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть относительно общей декартовой системы координат заданы вершины*

$$A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2),\ C(x_3,\ y_3);$$

$$A'(x_1',\ y_1'),\ B'(x_2',\ y_2'),\ C'(x_3',\ y_3')$$

ориентированных треугольников $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$. *Для того чтобы ориентированные треугольники* $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$ *имели одинаковую ориентацию, необходимо и достаточно, чтобы определители*

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta'=\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}$$

имели один и тот же знак.

Доказательство. Рассмотрим каких-нибудь два соседних треугольника цепи, соединяющей ориентированный треугольник $\overrightarrow{ABC}$ с ориентированным треугольником $\overrightarrow{A'B'C'}$.

Пусть, например, это треугольники $\overrightarrow{MNP}$ и $\overrightarrow{MNQ}$ с вершинами

$$M(x_M,\ y_M),\ N(x_N,\ y_N),\ P(x_P,\ y_P),\ Q(x_Q,\ y_Q).$$

Уравнение прямой MN имеет вид

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Рассмотрим результаты δ_P и δ_Q подстановок координат точек P и Q в левую часть этого уравнения:

$$\delta_P=\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \delta_Q=\begin{vmatrix} x_Q & y_Q & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{vmatrix}.$$

На основании § 62 числа δ_P и δ_Q одного знака, если точки P и Q лежат по одну сторону от прямой MN, и разного знака, если точки P и Q лежат по разные стороны от прямой MN. Иначе говоря, числа δ_P и δ_Q будут одного знака тогда и только тогда, когда ориентированные треугольники $\overrightarrow{MNP}$ и $\overrightarrow{MNQ}$ имеют одинаковый обход.

Отсюда следует, что число перемен знака в конечной последовательности определителей, соответствующих треугольникам цепи, соединяющей ориентированные треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$, равно числу пар соседних треугольников этой цепи, имеющих противоположный обход. Но если определители Δ и Δ' имеют одинаковый знак, то в последовательности определителей, соответствующих ориентированным треугольникам цепи, знак меняется четное число раз независимо от выбора цепи, а значит, независимо от выбора цепи, соединяющей ориентированные треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$, число пар соседних треугольников, имеющих противоположный обход, или всегда четное, или всегда нечетное.

Из доказанной теоремы следует, что два ориентированных треугольника, имеющих одинаковый обход, имеют одинаковую ориентацию, а два ориентированных треугольника, имеющих противоположный обход, имеют противоположную ориентацию.

Следствие 1. При круговой перестановке вершин ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$ его ориентация не меняется, а при нарушении кругового порядка вершин ориентация меняется на противоположную, т. е. треугольники

$$\overrightarrow{ABC},\ \overrightarrow{BCA},\ \overrightarrow{CAB} \qquad (1)$$

имеют одинаковую ориентацию; треугольники

$$\overrightarrow{BAC},\ \overrightarrow{ACB},\ \overrightarrow{CBA} \qquad (2)$$

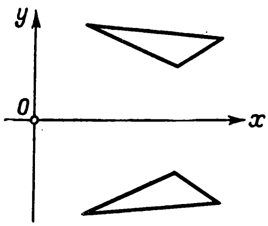


Рис. 287

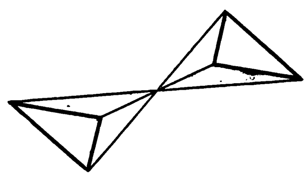


Рис. 288

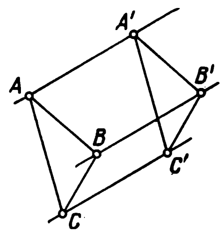


Рис. 289

также имеют одинаковую ориентацию, а любой треугольник (1) с любым треугольником (2) имеют противоположную ориентацию.

Это следует из того, что определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

не меняет знака при круговой перестановке его строк и меняет знак на обратный при нарушении кругового порядка строк.

Следствие 2. При преобразовании симметрии относительно прямой (рис. 287) ориентация ориентированного треугольника меняется на противоположную (для доказательства ввести декартову прямоугольную систему координат, принимая ось симметрии за ось Ox).

Следствие 3. При симметрии относительно точки O (рис. 288) ориентация ориентированного треугольника не меняется (для доказательства ввести общую декартову систему координат, приняв точку O за начало координат).

Следствие 4. Ориентация ориентированного треугольника не меняется при переносе, т. е. если $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$ (рис. 289), то ориентированные треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$ имеют одинаковую ориентацию.

Определение 5. *Плоскость, на которой фиксирован ориентированный треугольник $\overrightarrow{E_1E_2O}$, называется ориентированной плоскостью. Если ориентированные треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{E_1E_2O}$ имеют одинаковую ориентацию, то будем говорить, что треугольник $\overrightarrow{ABC}$ имеет положительную ориентацию, а если ориентированные треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{E_1E_2O}$ имеют противоположную ориентацию, то треугольник $\overrightarrow{ABC}$ имеет отрицательную ориентацию.*

Если на плоскости введена общая декартова система координат, то ее ориентируют треугольником $\overrightarrow{E_1E_2O}$ (базисный треугольник), где O — начало координат, а E_1 и E_2 — соответственно единичные точки осей Ox и Oy.

Все декартовы системы координат на плоскости делятся на два класса: две системы принадлежат одному классу, если их базисные треугольники имеют одинаковую ориентацию (рис. 290), и разным классам, если базисные треугольники имеют противоположную ориентацию (рис. 291).

Теорема 4. *Если относительно общей декартовой системы координат заданы вершины треугольника*

$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3),$$

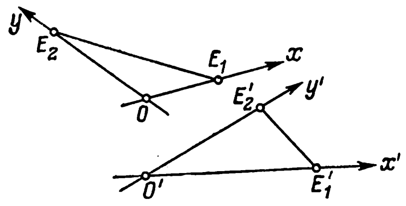


Рис. 290

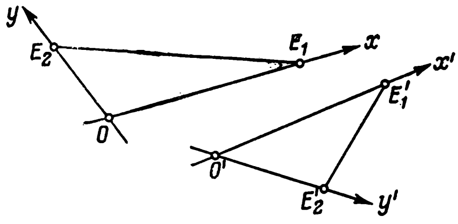


Рис. 291

то ориентированный треугольник $\overrightarrow{ABC}$ имеет положительную ориентацию, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} > 0,$$

и отрицательную, если $\Delta < 0$ ($X_1\, Y_1$ — координаты вектора $\overrightarrow{CA}$; X_2, Y_2 — координаты вектора $\overrightarrow{CB}$).

Доказательство Так как

$$\overrightarrow{OE}_1 = \{1, 0\},\ \overrightarrow{OE}_2 = \{0, 1\},$$

то

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

и, значит, если $\Delta > 0$, то ориентированные треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{E_1E_2O}$ имеют одинаковую ориентацию, а если $\Delta < 0$, то — противоположную.

2. Ориентация пространства

Определение 1. *Ориентированным тетраэдром $\overrightarrow{ABCD}$ называется упорядоченная четверка точек, не принадлежащих одной плоскости.*

Определение 2. *Цепью, соединяющей ориентированные тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{A'B'C'D'}$, называется конечная упорядоченная последовательность ориентированных тетраэдров, первым элементом которой является ориентированный тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$, последним $\overrightarrow{A'B'C'D'}$, такая, что каждые два соседних ориентированных тетраэдра отличаются только одной вершиной, занимающей в обоих ориентированных тетраэдрах одно и то же место.*

Теорема 1. *Любые два ориентированных тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{A'B'C'D'}$ можно соединить цепью.*

Доказательство. Такой цепью будет, например, цепь

$$\overrightarrow{ABCD},\ \overrightarrow{ABCR},\ \overrightarrow{ABQR},\ \overrightarrow{APQR},$$

$$\overrightarrow{A'PQR},\ \overrightarrow{A'B'QR},\ \overrightarrow{A'B'C'R},\ \overrightarrow{A'B'C'D'},$$

где точки P, Q, R выбираются последовательно так: R — точка, не лежащая в плоскостях ABC и $A'B'C'$; Q — точка, не лежащая в плоскостях $A'B'R$ и ABR, а P — точка, не лежащая в плоскостях AQR и $A'QR$.

Определение 3. *Два ориентированных тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{ABCE}$ имеют одинаковый обход, если точки D и E лежат по одну сторону от плоскости ABC, и противоположный обход, если точки D и E лежат по разные стороны от плоскости ABC.*

Аналогично дается определение одинакового или противоположного обхода для двух ориентированных тетраэдров, отличающихся только одними первыми, или только одними вторыми, или только одними третьими вершинами.

Определение 4. *Если в цепи, соединяющей ориентированные тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{A'B'C'D'}$, число пар соседних ориентированных тетраэдров, имеющих противоположный обход, четное, то ориентированные тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{A'B'C'D'}$ имеют одинаковую ориентацию; если же это число нечетное, то ориентированные тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{A'B'C'D'}$ имеют противоположную ориентацию.*

Теорема 2. *Во всех цепях, соединяющих ориентированные тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{A'B'C'D'}$, число пар соседних ориентированных тетраэдров, имеющих противоположный обход, или всегда четное, или всегда нечетное.*

Эта теорема является следствием следующей.

Теорема 3. *Пусть относительно общей декартовой системы координат заданы вершины*

$$A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2),\ C(x_3, y_3, z_3),\ D(x_4, y_4, z_4);$$

$$A'(x_1', y_1', z_1'),\ B'(x_2', y_2', z_2'),\ C'(x_3', y_3', z_3'),\ D'(x_4', y_4', z_4')$$

двух ориентированных тетраэдров $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{A'B'C'D'}$. Для того чтобы эти ориентированные тетраэдры имели одинаковую ориентацию, необходимо и достаточно, чтобы определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & z_3' & 1 \\ x_4' & y_4' & z_4' & 1 \end{vmatrix}$$

имели один и тот же знак.

Эта теорема доказывается на основании § 85 о расположении точек по одну и по разные стороны от плоскости аналогично тому, как доказывается теорема предыдущего пункта на основании теоремы § 62.

Из этой теоремы следует, что, переставляя буквы A, B, C, D всеми двадцатью четырьмя способами, получим 24 ориентированных тетраэдра, из которых 12 имеют одинаковую ориентацию, а 12 — им противоположную.

Следует также заметить, что два ориентированных тетраэдра, имеющих одинаковый обход, имеют и одинаковую ориентацию, если же они имеют противоположный обход, они имеют и противоположную ориентацию.

Из доказанной теоремы вытекают следствия.

Следствие 1. При преобразовании симметрии относительно плоскости ориентация ориентированного тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$ меняется на противоположную (для доказательства достаточно принять плоскость симметрии за плоскость xOy прямоугольной системы координат xOy и воспользоваться теоремой 3).

Следствие 2. При преобразовании симметрии относительно прямой ориентация ориентированного тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$ не меняется (для доказательства ввести декартову прямоугольную систему координат, приняв за ось Oz данную прямую).

Следствие 3. При преобразовании симметрии относительно точки ориентация ориентированного тетраэдра меняется.

Следствие 4. Ориентация ориентированного тетраэдра не меняется при переносе, т. е. если

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'},$$

то ориентированные тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{A'B'C'D'}$ имеют одинаковую ориентацию.

Определение 5. *Если в пространстве фиксирован ориентированный тетраэдр $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$ (базисный тетраэдр), то пространство ориентировано. Если ориентированные тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$ имеют одинаковую ориентацию, то ориентированный тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ имеет положительную ориентацию, а если ориентированные тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$ имеют противоположную ориентацию, то тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ имеет отрицательную ориентацию.*

Если в пространстве введена общая декартова система координат, то его обычно ориентируют ориентированным тетраэдром $\overrightarrow{E_1E_2E_3O}$, где O — начало координат, а E_1, E_2, E_3 — единичные точки осей Ox, Oy, Oz.

Таким образом, все декартовы системы координат в пространстве можно разбить на два класса: две системы принадлежат к одному классу, если их базисные тетраэдры имеют одинаковую ориентацию, и к разным классам, если базисные тетраэдры имеют противоположную ориентацию.

Теорема 4. *Ориентированный тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ с вершинами*

$$A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2),\ C(x_3, y_3, z_3),\ D(x_4, y_4, z_4),$$

заданными относительно общей декартовой системы координат, имеет положительную ориентацию, если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} > 0,$$

и отрицательную, если $\Delta < 0$ (X_1, Y_1, Z_1 — координаты вектора $\overrightarrow{DA}$; X_2, Y_2, Z_2 — координаты вектора $\overrightarrow{DB}$; X_3, Y_3, Z_3 — координаты вектора $\overrightarrow{DC}$).

Доказательство. Так как

$$\overrightarrow{OE_1} = \{1, 0, 0\},\ \overrightarrow{OE_2} = \{0, 1, 0\},\ \overrightarrow{OE_3} = \{0, 0, 1\}$$

и

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

то утверждение теоремы следует из определения 5 и теоремы 3.

Определение 6. *Рассмотрим две упорядоченные тройки некомпланарных векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$.

Отложим векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *от произвольной точки* D:

$$\overrightarrow{DA} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{DB} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{DC} = \boldsymbol{c},$$

а векторы $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$ *от произвольной точки* D':

$$\overrightarrow{D'A'} = \boldsymbol{a}', \quad \overrightarrow{D'B'} = \boldsymbol{b}', \quad \overrightarrow{D'C'} = \boldsymbol{c}'.$$

Упорядоченные тройки некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *и* $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$ *имеют одинаковую ориентацию, если ориентированные тетраэдры* $\overrightarrow{ABCD}$ *и* $\overrightarrow{A'B'C'D'}$ *имеют одинаковую ориентацию.*

Если же эти ориентированные тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ *и* $\overrightarrow{A'B'C'D'}$ *имеют противоположную ориентацию, то упорядоченные тройки векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *и* $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$ *имеют противоположную ориентацию.*

Заметим, что выбор точки D (и D') произвольный. В самом деле, если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ отложены от точки P

$$\overrightarrow{PA_2} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{PB_2} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{PC_3} = \boldsymbol{c},$$

то тетраэдры $\overrightarrow{ABCD}$ и $\overrightarrow{A_2B_2C_2D_2}$ получаются один из другого переносом и потому имеют одинаковую ориентацию.

Если в пространстве введен базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то мы будем говорить, что упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имеет положительную ориентацию, если эта упорядоченная тройка имеет ориентацию, одинаковую с базисом. Если же упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и базис имеют противоположную ориентацию, то будем говорить, что она имеет отрицательную ориентацию.

Ясно, что упорядоченная тройка некомпланарных векторов

$$\boldsymbol{a} = \{X_1\ Y_1\ Z_1\}, \quad \boldsymbol{b} = \{X_2\ Y_2\ Z_2\}, \quad \boldsymbol{c} = \{X_3\ Y_3\ Z_3\},$$

заданных своими координатами относительно общей декартовой системы координат, имеет положительную ориентацию тогда и только тогда, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Если $\Delta < 0$, то упорядоченная тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторов имеет отрицательную ориентацию.

Замечание. Данные определения ориентации плоскости и пространства опираются лишь на аксиомы соединения и порядка. Значит, данные определения одинаковой или противоположной ориентации двух ориентированных треугольников или двух ориентированных тетраэдров можно перенести, например, на плоскость и пространство Лобачевского (или в абсолютную геометрию).

ДОПОЛНЕНИЕ II

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ МНОГОЧЛЕНА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ОТ ДВУХ И ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЩЕЙ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

1. Контравариантные и ковариантные координаты точки и вектора на плоскости

Пусть на плоскости введена общая декартова система координат xOy с масштабными векторами e_1, e_2. Введем следующие обозначения для скалярных квадратов масштабных векторов и для самого скалярного произведения e_1e_2:

$$e_1^2 = g_{11}, \quad e_1e_2 = g_{12}, \quad e_2^2 = g_{22}.$$

Совокупность этих чисел g_{ik} будем называть метрическим тензором в базисе e_1, e_2.

Наряду с системой xOy рассмотрим систему x_1Oy_1 с тем же началом координат и такую, что ось Ox_1 перпендикулярна оси Oy и образует с осью Ox острый угол, а ось Oy_1 перпендикулярна оси Ox и образует с осью Oy острый угол; масштабные векторы e^1 и e^2 осей Ox_1 и Oy_1 выберем такими, чтобы скалярные произведения e_1e^1 и e_2e^2 были равны 1. Итак,

$$e_1e^1 = 1, \quad e_1e^2 = 0, \quad e_2e^1 = 0, \quad e_2e^2 = 1,$$

или короче

$$e_ie^k = \delta_i^k,$$

где $\delta_i^k = 1$, если $i = k$, и $\delta_i^k = 0$, если $i \neq k$.

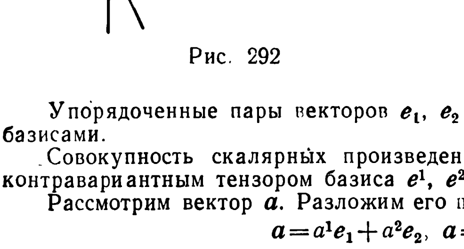


Рис. 292

Систему x_1Oy_1 будем называть **взаимной** к системе xOy (рис. 292). Очевидно, что системой, взаимной для x_1Oy_1, будет исходная система xOy.

Упорядоченные пары векторов e_1, e_2 и e^1, e^2 называются **взаимными** базисами.

Совокупность скалярных произведений $g^{ik} = e^ie^k$ называется метрическим контравариантным тензором базиса e^1, e^2.

Рассмотрим вектор a. Разложим его по векторам e_1, e_2 и по векторам e^1, e^2:

$$a = a^1e_1 + a^2e_2, \quad a = a_1e^1 + a_2e^2.$$

Коэффициенты a^1, a^2 называются контравариантными координатами вектора a, а a_1, a_2 — ковариантными координатами вектора a в базисе e_1, e_2.

Рассмотрим два вектора a и b, разложим их по векторам e_1, e_2, а также по векторам e^1 и e^2:

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2, \qquad a = a_1 e^1 + a_2 e^2,$$
$$b = b^1 e_1 + a^2 e_2; \qquad b = b_1 e^1 + b_2 e^2.$$

Составим скалярное произведение ab в четырех видах:

$$ab = a^1 b^1 g_{11} + (a^2 b^1 + a^1 b^2) g_{12} + a^2 b^2 g_{22},$$
$$ab = a_1 b_1 g^{11} + (a_2 b_1 + a_1 b_2) g^{12} + a_2 b_2 g^{22},$$
$$ab = a_1 b^1 + a_2 b^2,$$
$$ab = a^1 b_1 + a^2 b_2.$$

Мы видим, что удобнее всего выполнять скалярное умножение двух векторов, если один вектор задан ковариантными, а другой контравариантными координатами.

Установим связь контравариантных координат a^1, a^2 с ковариантными координатами a_1, a_2 одного и того же вектора a.

Из соотношения

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 = a_1 e^1 + a_2 e^2$$

находим

$$a_1 = a^1 e_1 e_1 + a^2 e_2 e_1, \quad a_2 = a^1 e_2 e_1 + a^2 e_2 e_2,$$

или

$$a_1 = a^1 g_{11} + a^2 g_{12}, \quad a_2 = a^1 g_{12} + a^2 g_{22},$$

или

$$a_i = g_{i\alpha} a^\alpha,$$

если условиться, что по индексу α, который один раз является нижним, а другой раз — верхним, производится суммирование от 1 до 2.

Аналогично находим

$$a^i = g^{i\alpha} a_\alpha.$$

Отметим еще формулы

$$a^i = ae^i \text{ и } a_i = ae_i,$$

выражающие контравариантные и ковариантные координаты вектора a через скалярные произведения этого вектора на базисные векторы e_i и e^i. Наряду с понятием контравариантных и ковариантных координат вектора вводится понятие контравариантных и ковариантных координат точки M, как координат ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$. Точку M вместе с ее контравариантными координатами обозначим $M(x, y)$, а точку M вместе с ее ковариантными координатами $M[x, y]$. Таким образом, контравариантные координаты точки M — это ее общие декартовы координаты, а ковариантные координаты точки M — это скалярные произведения ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ на базисные векторы e_1 и e_2.

Таким образом, если в уравнении прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

заданной относительно общей декартовой системы координат, x и y рассматривать как контравариантные координаты точек, а A и B как ковариантные координаты вектора, то вектор $n = [A, B]$ является вектором, нормальным к данной прямой. Вектор n через векторы e^1, e^2 базиса, взаимного к базису e_1, e_2, выражается соотношением

$$n = Ae^1 + Be^2.$$

Разложим векторы e^1 и e^2 по векторам e_1 и e_2:

$$e^1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2, \quad e^2 = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2. \tag{1}$$

Умножая скалярно обе части первого из этих соотношений на e^1 и e^2, получим

$$g^{11}=\alpha_1, \quad g^{12}=\beta_1$$

и аналогично из второго соотношения

$$g^{21}=\alpha_2, \quad g^{22}=\beta_2.$$

Формулы (1) принимают вид

$$e^i=g^{i\alpha}e_\alpha. \tag{2}$$

Подобным же образом выводится соотношение

$$e_i=g_{i\alpha}e^\alpha. \tag{3}$$

Умножая скалярно обе части соотношения (2) на e_k, получим

$$e^ie_k=g^{i\alpha}e_\alpha e_k, \text{ или } g^{i\alpha}g_{\alpha k}=\delta^i_k. \tag{4}$$

Из соотношения (4) следует, что матрицы (g_{ik}) и (g^{ik}) обратны друг другу, так что

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12}=-\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22}=\frac{g_{11}}{g},$$

где

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=g_{11}g_{22}-g_{12}^2.$$

Отметим также, что соотношение (4) — то же самое, что и следующее равенство между матрицами (g_{ik}) и (g^{ik}):

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Контравариантные и ковариантные координаты вектора и точки в пространстве

Все сказанное выше без существенных изменений переносится на случай трехмерного евклидова пространства: базис e_1, e_2, e_3 вместе с фиксированной точкой O пространства определяет общую декартову систему координат. Координаты вектора и точки в этой системе будем называть **контравариантными**.

Взаимной тройкой e^1, e^2, e^3 к базису e_1, e_2, e_3 называется базис, определяемый условием

$$e_ie^k=\delta_i^k=\begin{cases} 0, & \text{если } i\neq k, \\ 1, & \text{если } i=k,\end{cases}$$

т. е вектор e^1 перпендикулярен векторам e_2 и e_3 и образует с вектором e_1 острый угол; модуль вектора e^1 определяется условием $e^1e_1=1$ и т. д.

Векторы e^1, e^2, e^3 через векторы e_1, e_2, e_3 выражаются соотношениями

$$e^1=\frac{[e_2e_3]}{e_1e_2e_3}, \quad e^2=\frac{[e_3e_1]}{e_1e_2e_3}, \quad e_3=\frac{[e_1e_2]}{e_1e_2e_3}.$$

Контравариантные координаты вектора a выражаются в виде

$$a^i=ae^i,$$

а ковариантные

$$a_i=ae_i.$$

Метрические тензоры (ковариантные и контравариантные) в базисе e_1, e_2, e_3 определяются соотношениями

$$g_{ik}=e_ie_k,\qquad e^ie^k=g^{ik}.$$

Векторы e_i и e^i связаны соотношениями

$$e^i=g^{i\alpha}e_\alpha,\qquad e_i=g_{i\alpha}e^\alpha.$$

Ковариантные координаты a_i вектора a с его контравариантными координатами a^i связаны аналогичными соотношениями

$$a^i=g^{i\alpha}a_\alpha,\qquad a_i=g_{i\alpha}a^\alpha.$$

Матрицы (g_{ik}) и (g^{ik}) симметричны и обратны друг другу.

Скалярное произведение ab двух векторов может быть выражено в одном из следующих видов:

$$ab=a_\alpha b^\alpha=a^\alpha b_\alpha=a_\alpha b_\beta g^{\alpha\beta}=a^\alpha b^\beta g_{\alpha\beta}$$

(по α и β суммирование от 1 до 3).

Контравариантными координатами точки M в общей декартовой системе координат $(O,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$ называются контравариантные координаты ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$. Следовательно, это общие декартовы координаты точки M.

Ковариантными координатами точки M в общей декартовой системе координат $(O,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$ называются ковариантные координаты ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, т. е. координаты этого вектора в базисе e^1, e^2, e^3.

Так, например, если в уравнении плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

заданной относительно общей декартовой системы координат, рассматривать x, y, z как контравариантные координаты точек, то A, B, C — ковариантные координаты вектора, нормального к этой плоскости.

3. Теория инвариантов уравнения линии второго порядка

Пусть относительно общей декартовой системы координат линия второго порядка задана уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0. \tag{1}$$

Поставим задачу найти каноническое уравнение и расположение этой линии. Преобразуя данную систему координат в прямоугольную, снова получим уравнение второй степени относительно x и y, а потому уравнение (1) определяет одну из линий уже известных нам восьми аффинных классов. Однако при переходе от общей декартовой системы координат к прямоугольной, функции, которые рассматривались в § 142, уже не будут инвариантными, так как переход от общей декартовой системы к прямоугольной не является ортогональным преобразованием. Таким образом, теория инвариантов, а вместе с тем и вопрос о расположении линии, нуждается в обобщении, к которому мы и переходим.

Определение. *Метрическим инвариантом называется такая рациональная функция I от коэффициентов уравнения* (1) *и от компонент g_{ik} метрического тензора данной общей декартовой системы координат, которая имеет одно и то же значение в двух любых таких системах:*

$$I(a_{ik},\ a_i,\ a,\ g_{ik})=I(a'_{ik},\ a'_i,\ a',\ g'_{ik}).$$

Теорема 1. *Следующие функции являются метрическими инвариантами:*

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}},$$

$$K_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}},$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} \\ a_{21} & g_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} \\ g_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}.$$

Доказательство. Рассмотрим наряду с данной системой координат xOy другую систему координат $x'O'y'$. Формулы преобразования координат имеют вид

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \qquad y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2, \tag{2}$$

где c_{11}, c_{21}, и c_{12}, c_{22} — координаты новых масштабных векторов e_1' и e_2' в начальной системе xOy.

После преобразования (2) уравнение (1) перейдет в следующее:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a' = 0, \tag{1'}$$

причем, как было указано в § 142:

$$\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^2, \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_1' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_2' \\ a_1' & a_2' & a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^2. \tag{4}$$

Докажем еще соотношение

$$\begin{vmatrix} g_{11}' & g_{12}' \\ g_{21}' & g_{22}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^2. \tag{5}$$

В самом деле, так как $e_1' = c_{11}e_1 + c_{21}e_2$, $\quad e_2' = c_{12}e_1 + c_{22}e_2$, то

$$e_1'e_1 = c_{11}g_{11} + c_{21}g_{12}, \qquad e_1'e_2 = c_{11}g_{12} + c_{21}g_{22}, \qquad e_2'e_1 = c_{12}g_{11} + c_{22}g_{12},$$

$e_2'e_2 = c_{21}g_{12} + c_{22}g_{22}$, значит,

$$\begin{vmatrix} e_1'e_1 & e_1'e_2 \\ e_2'e_1 & e_2'e_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}g_{11} + c_{21}g_{12} & c_{11}g_{12} + c_{21}g_{22} \\ c_{12}g_{11} + c_{22}g_{12} & c_{12}g_{12} + c_{22}g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

и далее, умножая обе части этого равенства на определитель $\mathrm{Det}\,(c_{ik})$, получим

$$\begin{vmatrix} e_1'\,(c_{11}e_1 + c_{21}e_2) & e_2'\,(c_{11}e_1 + c_{21}e_2) \\ e_1'\,(c_{12}e_1 + c_{22}e_2) & e_2'\,(c_{12}e_1 + c_{22}e_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^2,$$

или

$$\begin{vmatrix} e_1' e_1' & e_1' e_2' \\ e_2' e_1' & e_2' e_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^2,$$

или

$$\begin{vmatrix} g_{11}' & g_{12}' \\ g_{21}' & g_{22}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^2.$$

Теперь из равенств (3) — (5) находим

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11}' & g_{12}' \\ g_{21}' & g_{22}' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_1' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_2' \\ a_1' & a_2' & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11}' & g_{12}' \\ g_{21}' & g_{22}' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}.$$

Таким образом доказано, что I_2 и K_3 — метрические инварианты.

Остается доказать инвариантность I_1. Рассмотрим функцию

$$\varphi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - \lambda(g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2),$$

где λ — произвольный параметр. При переходе от системы xOy к системе $x'Oy'$ *с тем же началом координат* эта функция перейдет в функцию

$$\varphi' = a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 - \lambda(g_{11}'x'^2 + 2g_{12}'x'y' + g_{22}'y'^2),$$

так как

$$g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2 = (xe_1 + ye_2)^2,$$
$$g_{11}'x'^2 + 2g_{12}'x'y' + g_{22}'y'^2 = (x'e_1' + y'e_2')^2,$$
$$(xe_1 + ye_2)^2 = (x'e_1' + y'e_2')^2 = \overrightarrow{OM}^2.$$

Применяя уже доказанную инвариантность I_2 к вспомогательной функции φ, получим

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11}' - \lambda g_{11}' & a_{12}' - \lambda g_{12}' \\ a_{21}' - \lambda g_{21}' & a_{22}' - \lambda g_{22}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11}' & g_{12}' \\ g_{21}' & g_{22}' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda g_{11} & a_{12} - \lambda g_{12} \\ a_{21} - \lambda g_{21} & a_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}.$$

Приравнивая коэффициенты при λ в первой степени, получим

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11}' & g_{12}' \\ a_{21}' & g_{22}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11}' & a_{12}' \\ g_{21}' & a_{22}' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11}' & g_{12}' \\ g_{21}' & g_{22}' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} \\ a_{21} & g_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} \\ g_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}.$$

Этим доказана инвариантность I_1 относительно преобразования общей декартовой системы координат в общую декартову систему с тем же началом. Но так как в выражение для I_1 входят лишь коэффициенты при x^2, xy и y^2, которые не меняются при переносе, то I_1 является инвариантом переноса.

Замечание. Функции I_2, K_3 и I_1 можно записать в более компактном виде:

$$I_2=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix},\quad K_3=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2 \\ a^1 & a^2 & a \end{vmatrix},\qquad I_1=a_1^1+a_2^2,$$

где

$$a^i=g^{i\alpha}a_\alpha,\qquad a_k^i=g^{i\alpha}a_{\alpha k}.$$

В самом деле,

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}g^{11}+a_{12}g^{21} & a_{11}g^{12}+a_{12}g^{22} \\ a_{21}g^{11}+a_{22}g^{21} & a_{21}g^{12}+a_{22}g^{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{1\alpha}g^{\alpha1} & a_{1\alpha}g^{\alpha2} \\ a_{2\alpha}g^{\alpha1} & a_{2\alpha}g^{\alpha2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix},$$

$$K_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & 0 \\ g^{21} & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{1\alpha}g^{\alpha1} & a_{1\alpha}g^{\alpha2} & a_1 \\ a_{2\alpha}g^{\alpha1} & a_{2\alpha}g^{\alpha2} & a_2 \\ a_\alpha g^{\alpha1} & a_\alpha g^{\alpha2} & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2 \\ a^1 & a^2 & a \end{vmatrix},$$

$$I_1=\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} \\ a_{21} & g_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} \\ g_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}g^{11}+a_{21}g^{21} & a_{11}g^{12}+a_{21}g^{22} \\ g_{12}g^{11}+g_{22}g^{21} & g_{12}g^{12}+g_{22}g^{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_{11}g^{11}+g_{21}g^{21} & g_{11}g^{12}+g_{21}g^{22} \\ a_{12}g^{11}+a_{22}g^{21} & a_{12}g^{12}+a_{22}g^{22} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{1\alpha}g^{1\alpha} & a_{1\alpha}g^{2\alpha} \\ g_{2\alpha}g^{1\alpha} & g_{2\alpha}g^{2\alpha} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_{1\alpha}g^{1\alpha} & g_{1\alpha}g^{2\alpha} \\ a_{2\alpha}g^{1\alpha} & a_{2\alpha}g^{2\alpha} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}=a_1^1+a_2^2.$$

Теорема 2. *Функция*

$$K_2=\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & a_1 \\ g_{21} & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_1 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & g_{21} & a_1 \\ a_{21} & g_{22} & a_2 \\ a_1 & 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}$$

является инвариантом такого преобразования общей декартовой системы координат, при котором сохраняется начало координат. Если же линия (1) *распадается на две параллельные или совпадающие прямые, то K_2 — инвариант общего преобразования декартовой системы координат xOy в любую другую $x'O'y'$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi-\lambda r^2,$$

где φ — левая часть уравнения (1), а $r=xe_1+ye_2$.

Имеем $\varphi-\lambda r^2=$

$$=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a-\lambda(g_{11}x^2+2g_{12}xy+g_{22}y^2).$$

При переходе к системе $x'Oy'$ с тем же началом получим

$$\varphi'-\lambda r^2=$$

$$=a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a'-\lambda(g'_{11}x'^2+2g'_{12}x'y'+g'_{22}y'^2).$$

Применяя к функции $\varphi-\lambda r^2$ уже доказанную инвариантность K_3, будем иметь

$$\frac{\begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda g'_{11} & a'_{12}-\lambda g'_{12} & a'_1 \\ a'_{21}-\lambda g'_{21} & a'_{22}-\lambda g'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda g_{11} & a_{12}-\lambda g_{12} & a_1 \\ a_{21}-\lambda g_{21} & a_{22}-\lambda g_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}},$$

и приравнивая коэффициенты при λ в первой степени, получим

$$\frac{\begin{vmatrix} g'_{11} & a'_{12} & a'_1 \\ g'_{21} & a'_{22} & a'_2 \\ 0 & a'_2 & a' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{11} & g'_{12} & a'_1 \\ a'_{21} & g'_{22} & a'_2 \\ a'_1 & 0 & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & a_1 \\ g_{21} & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_2 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & a_1 \\ a_{21} & g_{22} & a_2 \\ a_1 & 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}}.$$

При переходе от системы xOy к прямоугольной $x'Oy'$ с тем же началом K_2 не меняется; в прямоугольной системе координат K_2 принимает вид

$$K_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}$$

и, как было доказано в § 142 в случае распадения линии на две параллельные прямые, K_2 не меняется при переносе. Значит, K_2 имеет одно и то же значение во всех общих декартовых системах координат.

Замечание. Функцию K_2 можно записать в более компактном виде:

$$K_2=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1 \\ a^1 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2^2 & a_2 \\ a^2 & a \end{vmatrix}.$$

Теперь так же, как это сделано в § 143, доказываем, что линия (1) принадлежит к I, II или III группе, если соответственно

$$I_2\neq 0,$$
$$I_2=0,\quad K_3\neq 0,$$
$$I_2=0,\quad K_3=0,\quad I_1\neq 0,$$

и что простейшие уравнения соответственно имеют вид

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\frac{K_3}{I_2}=0, \tag{I}$$

$$I_1X^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\,Y=0, \tag{II}$$

$$I_1X^2+\frac{K_2}{I_1}=0, \tag{III}$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda g_{11} & a_{12}-\lambda g_{12} \\ a_{21}-\lambda g_{21} & a_{22}-\lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Определение расположения линии второго порядка

Если уравнение

$$\varphi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$$

является уравнением центральной линии второго порядка, заданной относительно общей декартовой системы координат, то координаты центра находятся из системы

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_1 &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим линейное преобразование, которое точке $M(x, y)$ ставит в соответствие точку $M'[a_{11}x + a_{12}y,\ a_{21}x + a_{22}y]$ (координаты точки M даны в системе xOy, а координаты точки M' — во взаимной системе x_1Oy_1). Это преобразование f самосопряженное, так как для любых двух векторов $\boldsymbol{a} = \{l, m\}$ и $\boldsymbol{b} = \{l', m'\}$ выполняется соотношение

$$\boldsymbol{a}f\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}f\boldsymbol{a}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}f\boldsymbol{b} &= \{l, m\}[a_{11}l' + a_{12}m',\ a_{21}l' + a_{22}m'] = \\ &= a_{11}ll' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{22}mm' = \\ &= \{l', m'\}[a_{11}l + a_{12}m,\ a_{21}l + a_{22}m] = \boldsymbol{b}f\boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

Значит, имеются два взаимно перпендикулярных собственных вектора $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ (будем считать их единичными):

$$f\boldsymbol{i} = \lambda_1\boldsymbol{i}, \quad f\boldsymbol{j} = \lambda_2\boldsymbol{j},$$

где λ_1 и λ_2 — собственные значения, соответствующие этим собственным векторам. Соотношение $f\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}$ — собственный вектор f) подробно запишется так:

$$(a_{11}l + a_{12}m)\,\boldsymbol{e}^1 + (a_{21}l + a_{22}m)\,\boldsymbol{e}^2 = \lambda\,(l\boldsymbol{e}_1 + m\boldsymbol{e}_2).$$

Умножая скалярно обе части этого равенства один раз на $\boldsymbol{e}_1$, другой раз на $\boldsymbol{e}_2$, получим

$$\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m &= \lambda\,(g_{11}l + g_{12}m), \\ a_{21}l + a_{22}m &= \lambda\,(g_{21}l + g_{22}m), \end{aligned} \tag{1}$$

или

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda g_{11})\,l + (a_{12} - \lambda g_{12})\,m &= 0, \\ (a_{21} - \lambda g_{21})\,l + (a_{22} - \lambda g_{22})\,m &= 0, \end{aligned}$$

и так как l и m не равны нулю одновременно, то собственные значения λ_1 и λ_2 должны удовлетворять уравнению

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda g_{11} & a_{12}-\lambda g_{12} \\ a_{21}-\lambda g_{21} & a_{22}-\lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

или

$$\begin{vmatrix} a_1^1-\lambda & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{2'}$$

или

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0. \tag{2''}$$

Обратно, если λ — корень этого уравнения, то система (1) имеет ненулевое решение l, m. Но из уравнений (1) следует

$$(a_{11}l+a_{12}m)\,e^1+(a_{21}l+a_{22}m)\,e^2=\lambda\,(g_{1\alpha}e^\alpha l+g_{2\alpha}e^\alpha m)=\lambda\,(le_1+me_2),$$

т. е. le_1+me_2 — собственный вектор преобразования f, а λ — соответствующее ему собственное значение.

Так как линейное преобразование f — симметричное, то оно имеет два взаимно перпендикулярных собственных вектора, причем соответствующие им собственные значения, т. е. корни уравнения (2), или (2'), или (2'') действительны.

Перейдем от данной системы координат xOy к прямоугольной $x'Oy'$, направив оси Ox' и Oy' по собственным единичным и взаимно перпендикулярным векторам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ преобразования f. Тогда, полагая $\boldsymbol{r}=xe_1+ye_2$, имеем

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2&=x\,(a_{11}x+a_{12}y)+y\,(a_{21}x+a_{22}y)=\boldsymbol{r}f\boldsymbol{r}=\\ &=(x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j})\,f\,(x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j})=(x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j})\,(x'f\boldsymbol{i}+y'f\boldsymbol{j})=\\ &=(x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j})\,(x'\lambda_1\boldsymbol{i}+y'\lambda_2\boldsymbol{j})=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2. \end{aligned}$$

Таким образом, если направить оси Ox' и Oy' по взаимно перпендикулярным собственным векторам линейного самосопряженного преобразования f, то уравнение линии второго порядка примет вид

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2a_1'x+2a_2'y+a=0. \tag{3}$$

Далее, при помощи переноса осей это уравнение приводят к одному из простейших уравнений (I), (II), (III).

Если линия центральная ($\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$), то координаты векторов, дающих направления ее новых осей $O'X$ и $O'Y$, в каноническом уравнении (I) находятся из системы

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda g_{11})\,l+(a_{12}-\lambda g_{12})\,m&=0,\\ (a_{21}-\lambda g_{21})\,l+(a_{22}-\lambda g_{22})\,m&=0; \end{aligned} \tag{4}$$

координаты направляющего вектора оси $O'X$ найдем, полагая здесь $\lambda=\lambda_1$, а координаты направляющего вектора оси $O'Y$ найдем, полагая $\lambda=\lambda_2$.

Если линия является параболой, то координаты направляющего вектора оси находят из системы

$$a_{11}l+a_{12}m=0, \quad a_{21}l+a_{22}m=0. \tag{5}$$

Вершину параболы можно найти так. Уравнение касательной к параболе, заданной общим уравнением, имеет вид

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)\,(x-x_0)+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)\,(y-y_0)=0$$

Значит, $a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1$ и $a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2$ — ковариантные координаты нормального к ней вектора. Значит, точка (x_0, y_0) будет вершиной параболы тогда и только тогда, когда

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)\,e^1+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)\,e^2=t\,(le_1+me_2),$$

где l, m — контравариантные координаты направляющего вектора оси (т. е. $l=a_{12}$, $m=-a_{11}$, или $l=a_{22}$, $m=-a_{12}$).

Умножая скалярно обе части последнего соотношения один раз на e_1, другой раз на e_2, получим

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1&=t\,(g_{11}l+g_{12}m),\\
a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2&=t\,(g_{21}l+g_{22}m).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Умножая обе части первого соотношения на l, обе части второго на m и складывая, в силу соотношений (5) будем иметь

$$a_1l+a_2m=t\,(g_{11}l^2+2g_{12}lm+a_{22}m^2),$$

откуда

$$t=\frac{a_1l+a_2m}{g_{11}l^2+2g_{12}lm+a_{22}m^2}.$$

Но точка (x_0, y_0) лежит на параболе, значит,

$$a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_1x_0+2a_2y_0+a=0,$$

или

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)\,x_0+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)\,y_0+a_1x_0+a_2y_0+a=0,$$

или

$$t\,[(g_{11}l+g_{12}m)\,x_0+(g_{21}l+g_{22}m)\,y_0]+a_1x_0+a_2y_0+a=0, \tag{7}$$

и для отыскания координат вершины остается решить линейную систему (6), (7) (t уже определено).

Вектор, коллинеарный оси и направленный в сторону вогнутости параболы, определяется так же, как и в § 150, если $I_1\,(a_1l+a_2m)<0$ (здесь $l=a_{12}$, $m=-a_{11}$, или $l=a_{22}$, $m=-a_{12}$), то вектор $\{l,\ m\}$ направлен в сторону вогнутости параболы, а если

$$I_1\,(a_1l+a_2m)>0,$$

то в сторону выпуклости.

Случаи мнимых линий и случаи распадения линии на две прямые не представляют интереса.

5. Поверхности второго порядка

Предполагая, что поверхность второго порядка задана относительно общей декартовой системы координат (с метрическим тензором g_{ik}) уравнением

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0,$$

рассуждениями, вполне аналогичными предыдущим, устанавливаем, что следующие функции являются инвариантами преобразования общей декартовой системы координат в другую:

$$I_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}},\qquad K_4=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3 & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}},$$

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & a_{13}\\ g_{21} & a_{22} & a_{23}\\ g_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & a_{13}\\ a_{21} & g_{22} & a_{23}\\ a_{31} & g_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & g_{13}\\ a_{21} & a_{22} & g_{23}\\ a_{31} & a_{32} & g_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}},$$

$$I_1=\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_{13}\\ g_{21} & g_{22} & a_{23}\\ g_{31} & g_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & g_{13}\\ g_{21} & a_{22} & g_{23}\\ g_{31} & a_{32} & g_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & g_{13}\\ a_{21} & g_{22} & g_{23}\\ a_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}}$$

и что функция

$$K_3=\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ g_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ g_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3\\ 0 & a_2 & a_3 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{21} & g_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{31} & g_{32} & a_{33} & a_3\\ a_1 & 0 & a_3 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & g_{13} & a_1\\ a_{21} & a_{22} & g_{23} & a_2\\ a_{31} & a_{32} & g_{33} & a_3\\ a_1 & a_2 & 0 & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}}$$

является инвариантом преобразования общей декартовой системы в общую декартову для поверхностей III, IV и V групп, а функция

$$K_2=\frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_{13} & a_1\\ g_{21} & g_{22} & a_{23} & a_2\\ g_{31} & g_{32} & a_{33} & a_3\\ 0 & 0 & a_3 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & g_{13} & a_1\\ a_{21} & g_{22} & g_{23} & a_2\\ a_{31} & g_{32} & g_{33} & a_3\\ a_1 & 0 & 0 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & g_{13} & a_1\\ g_{21} & a_{22} & g_{23} & a_2\\ g_{31} & a_{32} & g_{33} & a_3\\ 0 & a_2 & 0 & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}}$$

является инвариантом указанного общего преобразования для поверхностей, распадающихся на пару параллельных плоскостей, или совпадающих плоскостей.

Все эти инварианты и семиинварианты могут быть записаны в более компактном виде:

$$I_3=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3\\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3\\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3\end{vmatrix},$$

$$I_2=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2\\ a_2^1 & a_2^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3\\ a_3^1 & a_3^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3\\ a_3^2 & a_3^3\end{vmatrix},$$

$$I_1=a_1^1+a_2^2+a_3^3,$$

$$K_4=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1\\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2\\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3\\ a^1 & a^2 & a^3 & a\end{vmatrix},$$

$$K_3=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2 \\ a^1 & a^2 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 & a_1 \\ a_3^1 & a_3^3 & a_3 \\ a^1 & a^3 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & a_2 \\ a_3^2 & a_3^3 & a_3 \\ a^2 & a^3 & a \end{vmatrix},$$

$$K_2=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1 \\ a^1 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2^2 & a_2 \\ a^2 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_3^3 & a_3 \\ a^3 & a \end{vmatrix},$$

где

$$a_i^k=a_{i\alpha}g^{\alpha k}, \quad a^i=g^{i\alpha}a_\alpha.$$

Простейшие уравнения поверхностей I—V групп записывают так же, как и в случае прямоугольной системы:

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2+\frac{K_4}{I_3}=0, \tag{I}$$

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}\,Z=0, \tag{II}$$

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\frac{K_3}{I_2}=0, \tag{III}$$

$$\lambda_1X^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}\,Y=0, \tag{IV}$$

$$\lambda_1X^2+\frac{K_2}{I_1}=0, \tag{V}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda g_{11} & a_{12}-\lambda g_{12} & a_{13}-\lambda g_{13} \\ a_{21}-\lambda g_{21} & a_{22}-\lambda g_{22} & a_{23}-\lambda g_{23} \\ a_{31}-\lambda g_{31} & a_{32}-\lambda g_{32} & a_{33}-\lambda g_{33} \end{vmatrix}=0.$$

В случае центральных поверхностей (группа I) координаты центра находят из системы

$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1&=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2&=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3&=0 \end{aligned} \tag{8}$$

(для поверхностей III группы этими уравнениями задается прямая центров, а для поверхности V группы — плоскость центров). Координаты направляющих векторов осей канонической системы координат для центральных поверхностей ($I_3\neq 0$) находят из системы

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda g_{11})\,l+(a_{12}-\lambda g_{12})\,m+(a_{13}-\lambda g_{13})\,n&=0,\\ (a_{21}-\lambda g_{21})\,l+(a_{22}-\lambda g_{22})\,m+(a_{23}-\lambda g_{23})\,n&=0,\\ (a_{31}-\lambda g_{31})\,l+(a_{32}-\lambda g_{32})\,m+(a_{33}-\lambda g_{33})\,n&=0, \end{aligned} \tag{9}$$

куда вместо λ надо подставить поочередно корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda g_{11} & a_{12}-\lambda g_{12} & a_{13}-\lambda g_{13} \\ a_{21}-\lambda g_{21} & a_{22}-\lambda g_{22} & a_{23}-\lambda g_{23} \\ a_{31}-\lambda g_{31} & a_{32}-\lambda g_{32} & a_{33}-\lambda g_{33} \end{vmatrix}=0, \tag{10}$$

или

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0. \tag{10'}$$

В случае параболоидов координаты векторов, имеющих главное направление [оси $O'X$ и $O'Y$ в каноническом уравнении (II)], находят из системы (9), куда надо подставлять вместо λ отличные от нуля корни характеристического уравнения.

Из системы

$$\begin{aligned} a_{11}l+a_{12}m+a_{13}n&=0,\\ a_{21}l+a_{22}m+a_{23}n&=0,\\ a_{31}l+a_{32}m+a_{33}n&=0 \end{aligned} \tag{11}$$

находят координаты l, m, n вектора, имеющего особое направление. Если при этом

$$\lambda_1(la_1+ma_2+na_3)<0,$$

то вектор $\{l, m, n\}$ направлен в сторону вогнутости сечения поверхности (II) плоскостью $Y=0$, если же

$$\lambda_1(la_1+ma_2+na_3)>0,$$

то в сторону выпуклости

Наконец, координаты x_0, y_0, z_0 вершины параболоида находят из системы

$$\begin{aligned} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1&=t\,(g_{11}l+g_{12}m+g_{13}n),\\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2&=t\,(g_{21}l+g_{22}m+g_{23}n),\\ a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_3&=t\,(g_{31}l+g_{32}m+g_{33}n), \end{aligned} \tag{12}$$

$$a_{11}x_0^2+a_{22}y_0^2+a_{33}z_0^2+2a_{12}x_0y_0+2a_{23}y_0z_0+2a_{31}z_0x_0+\\+2a_1x_0+2a_2y_0+2a_3z_0+a=0,$$

где l, m, n находят из системы (11). Из системы (12) находим

$$t=\frac{a_1l+a_2m+a_3n}{g_{11}l^2+g_{22}m^2+g_{33}n^2+2g_{12}lm+2g_{23}mn+2g_{31}nl},$$

$$t\,[x_0(g_{11}l+g_{12}m+g_{13}n)+y_0(g_{21}l+g_{22}m+g_{23}n)+\\+z_0(g_{31}l+g_{32}m+g_{33}n)]+a_1x_0+a_2y_0+a_3z_0+a=0$$

и вопрос сводится к решению линейной системы относительно x_0, y_0, z_0.

Исследование расположения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров и рассмотрение остальных аффинных классов представляется читателю.

ДОПОЛНЕНИЕ III

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. КРУГОВЫЕ СЕЧЕНИЯ. ОМБИЛИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

1. Приведение к каноническому виду плоского сечения поверхности второго порядка

Теорема 1. *Если относительно прямоугольной системы координат заданы:*
1) *поверхность второго порядка своим общим уравнением*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0; \quad (1)$$

2) *плоскость своим нормальным уравнением:*

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A^2+B^2+C^2=1 \quad (2)$$

и если плоскость (2) *пересекает поверхность* (1) *по линии второго порядка*, то простейшее уравнение линии второго порядка, по которой плоскость* (2) *пересекает поверхность* (1), *пишется в одном из следующих видов:*

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\frac{K_3}{I_2}=0 \text{ в случае } I_2\neq 0,$$

$$I_1X^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}Y=0 \text{ в случае } I_2=0,\ K_3\neq 0,$$

$$I_1X^2+\frac{K_2}{I_1}=0 \text{ в случае } I_2=0,\ K_3=0,\ I_1\neq 0,$$

где

$$I_2=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$$I_1=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A \\ a_{21} & a_{22} & B \\ A & B & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A \\ a_{31} & a_{33} & C \\ A & C & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & B \\ a_{32} & a_{33} & C \\ B & C & 0 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

* Случаи, когда плоскость (2) пересекает поверхность (1) по одной прямой или когда плоскость (2) входит в состав поверхности (2), мы, таким образом, исключаем.

$$K_3=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 & C \\ a_1 & a_2 & a_3 & a & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$K_2=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & B \\ a_1 & a_2 & a & D \\ A & B & D & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 & A \\ a_{31} & a_{33} & a_3 & C \\ a_1 & a_3 & a & D \\ A & C & D & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 & B \\ a_{32} & a_{33} & a_3 & C \\ a_2 & a_3 & a & D \\ B & C & D & 0 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

а λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0.$$

Доказательство. Преобразуем данную прямоугольную систему координат в прямоугольную так, чтобы плоскость $Ax+By+Cz=0$ стала плоскостью $x'Oy'$. Тогда одна из формул преобразования координат будет иметь следующий вид:

$$z'=Ax+By+Cz.$$

Уравнение (1) в новой системе координат примет вид

$$a_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{23}y'z'+2a'_{31}z'x'+$$
$$+2a'_1x'+2a'_2y'+2a'_3z'+a=0. \tag{7}$$

Линия пересечения поверхности (1) плоскостью (2) в новой системе координат выражается уравнениями

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2(a'_1-a'_{13}D)x'+2(a'_2-Da'_{23})y'+$$
$$+a'_{33}D^2-2a'_3D+a=0,$$
$$z'+D=0.$$

По условию теоремы это сечение является линией второго порядка, т. е. среди чисел a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} хотя бы одно отлично от нуля. Поэтому простейшее уравнение последней линии в плоскости $z'=-D$ пишется в виде

$$\lambda'_1X^2+\lambda'_2Y^2+\frac{K'_3}{I'_2}=0, \quad \text{если } I'_2=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}\neq 0;$$

$$\lambda'_1X^2\pm 2\sqrt{-\frac{K'_3}{I'_1}}\,Y=0,$$

$$\text{если } I'_2=0, \quad K'_3=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1-a'_{13}D \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2-a'_{23}D \\ a'_1-a'_{13}D & a'_2-a'_{23}D & a'_{33}D^2-2a'_3D+a \end{vmatrix}\neq 0$$

и в виде

$$I_1'X^2+\frac{K_2'}{I_1'}=0,\quad \text{если } I_2'=0,\ K_3'=0,\ I_1'=a_{11}'+a_{22}'\neq 0,$$

причем

$$K_2'=\begin{vmatrix} a_{11}' & a_1'-a_{13}'D \\ a_1'-a_{13}'D & a_{33}'D^2-2a_3'D+a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22}' & a_2'-a_{23}'D \\ a_2'-a_{23}'D & a_{33}'D^2-2a_3'D+a \end{vmatrix},$$

а λ_1' и λ_2' — корни характеристического уравнения

$$\lambda'^2-I_1'\lambda'+I_2'=0.$$

Рассмотрим уравнение

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2(Ax+By+Cz)=0.$$

После указанного преобразования координатной системы это уравнение примет следующий вид:

$$a_{11}'x'^2+a_{22}'y'^2+a_{33}'z'^2+2a_{12}'x'y'+2a_{23}'y'z'+2a_{31}'z'x'+2z'=0.$$

Сравнивая инвариант K_4 и семиинвариант K_3 для двух последних уравнений поверхности, получим

$$I_2=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' & 0 \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' & 0 \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{vmatrix}=I_2',$$

$$I_1=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A \\ a_{21} & a_{22} & B \\ A & B & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A \\ a_{31} & a_{33} & C \\ A & C & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & B \\ a_{32} & a_{33} & C \\ B & C & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & 0 \\ a_{21}' & a_{22}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{13}' & 0 \\ a_{31}' & a_{33}' & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{22}' & a_{23}' & 0 \\ a_{32}' & a_{33}' & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=a_{11}'+a_{22}'=I_1'.$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+$$
$$+2a_1xt+2a_2yt+2a_3zt+at^2+2(Ax+By+Cz+Dt)=0$$

поверхности второго порядка в четырехмерном пространстве.

Произведем то же преобразование поворота осей Ox, Oy, Oz (сохраняя ось Ot, т. е. полагая $t=t'$); тогда получим новое уравнение в виде

$$a_{11}'x'^2+a_{22}'y'^2+a_{33}'z'^2+2a_{12}'x'y'+2a_{23}'y'z'+2a_{31}'z'x'+$$
$$+2a_1'x't'+2a_2'y't'+2a_3'z't'+at'^2+2z'+2Dt'=0.$$

Сравнивая определители пятого порядка, составленные из всех коэффициентов двух последних уравнений, получим *

$$K_3 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 & C \\ a_1 & a_2 & a_3 & a & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_2 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_3 & 1 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a & D \\ 0 & 0 & 1 & D & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_2 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_3 & 1 \\ a'_1 - a'_{13}D & a'_2 - a'_{23}D & a'_3 - a'_{33}D & a - Da'_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_2 \\ a'_1 - a'_{13}D & a'_2 - a'_{23}D & a'_3 - a'_{33}D & a - Da'_3 \\ 0 & 0 & 1 & D \end{vmatrix}.$$

Умножая элементы третьего столбца на D и вычитая из последнего столбца, получим детерминант, равный K'_3. Если сечение представляет собой две параллельные прямые, то, сравнивая семиинвариант $\tilde{K}_4$ для двух последних уравнений поверхности в четырехмерном пространстве (не выписаны слагаемые,

---

* Если над переменными многочлена второй степени $\sum a_{ik}x_ix_k + 2\sum a_ix_i + a$ производится линейное преобразование $x_i = \sum b_{ij}\overset{*}{x}_j + b_i$, то получается функция вида $\sum a^*_{ik}\overset{*}{x}_i\overset{*}{x}_k + 2\sum a^*_i x^*_i + a^*$, причем коэффициенты преобразованного многочлена с коэффициентами начального многочлена связаны соотношениями

$$(a^*_{ik}) = (b'_{ik})(a_{ik})(b_{ik}),$$

$$\begin{pmatrix} a^*_{ik} & a^*_i \\ a^*_k & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_{ik} & 0 \\ b_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{ik} & a_i \\ a_k & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{ik} & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } b'_{ik} = b_{ki}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{Det}\,(a^*_{ik}) = \mathrm{Det}\,(a_{ik})\,[\mathrm{Det}\,(b_{ik})]^2,$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a^*_{ik} & a^*_i \\ a^*_k & a^* \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{ik} & a_i \\ a_k & a \end{pmatrix}[\mathrm{Det}\,(b_{ik})]^2.$$

Эти положения следуют из аналогичной теоремы для квадратичной формы (см. подстрочное примечание на стр. 347).

равные нулю), получим

$$K_2=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & B \\ a_1 & a_2 & a & D \\ A & B & D & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 & A \\ a_{31} & a_{33} & a_3 & C \\ a_1 & a_3 & a & D \\ A & C & D & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 & B \\ a_{32} & a_{33} & a_3 & C \\ a_2 & a_3 & a & D \\ B & C & D & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_1 & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_2 & 0 \\ a'_1 & a'_2 & a & D \\ 0 & 0 & D & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} & a'_1 & 0 \\ a'_{31} & a'_{33} & a'_3 & 1 \\ a'_1 & a'_3 & a & D \\ 0 & 1 & D & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} & a'_2 & 0 \\ a'_{32} & a'_{33} & a'_3 & 1 \\ a'_2 & a'_3 & a & D \\ 0 & 0 & D & 0 \end{vmatrix}.$$

Первый детерминант правой части равен нулю в силу того, что

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}=0$$

(мы предполагаем, что линия пересечения есть пара параллельных прямых). Два остальных детерминанта преобразуются к виду:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_1-Da'_{13} \\ a'_1-Da'_{13} & a'_{33}D^2-2a'_3D+a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{22} & a'_2-a'_{23}D \\ a'_2-Da'_{23} & a'_{33}D^2-2a'_3D+a \end{vmatrix},$$

а это выражение равно K'_2.

2. Расположение в пространстве плоского сечения поверхности второго порядка

Покажем, как определить расположение в пространстве плоского сечения поверхности второго порядка в случае, если сечение является нераспадающейся линией второго порядка.

Случай I. Линия сечения является действительной центральной нераспадающейся линией второго порядка (эллипс или гипербола). Пусть (x_0, y_0, z_0) — центр линии сечения.

При выводе уравнения диаметральной плоскости поверхности второго порядка было показано, что необходимым и достаточным условием того, чтобы точка (x_0, y_0, z_0) была серединой хорды, имеющей направление вектора $\{l, m, n\}$, является равенство

$$\begin{gathered}(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1)\,l+\\ +(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2)\,m+\\ +(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_3)\,n=0.\end{gathered} \tag{1}$$

Но так как (x_0, y_0, z_0) — центр сечения, то для направляющих векторов $\{l, m, n\}$ хорд поверхностей, лежащих в плоскости, проходящих через эту точку, соотношение (1) выполняется.

Кроме того, из условия компланарности вектора $\{l, m, n\}$ и плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

имеем

$$Al+Bm+Cn=0. \tag{2}$$

Это равенство удовлетворяется при тех же значениях l, m, n, при которых выполняется равенство (1), поэтому соответствующие коэффициенты при

l, m, n в уравнениях (1) и (2) пропорциональны

$$\begin{aligned} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1&=\lambda A,\\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2&=\lambda B,\\ a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_3&=\lambda C. \end{aligned}\tag{3}$$

Так как центр (x_0, y_0, z_0,) сечения лежит в секущей плоскости,

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.\tag{4}$$

Итак, координаты x_0, y_0, z_0 центра сечения, если линия сечения центральная, находятся из системы (3), (4)

Для определения расположения сечения в случае, если оно эллипс или гипербола, остается определить координаты векторов, имеющих главное направление.

Пусть

$$\{l_1,m_1,n_1\} \text{ и } \{l_2,m_2,n_2\}$$

единичные векторы, коллинеарные соответственно осям $O'X$ и $O'Y$ симметрии линии сечения, причем в системе $XO'Y$ линия сечения выражается уравнением

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\frac{K_3}{I_2}=0,$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0.$$

Введем в пространстве систему координат $O'XYZ$, принимая оси симметрии линии сечения за оси координат $O'X$ и $O'Y$, а за ось $O'Z$ нормаль к плоскости линии. Единичные векторы осей $O'X$, $O'Y$, $O'Z$ обозначим так:

$$E_1=\{l_1,m_1,n_1\},\quad E_2=\{l_2,m_2,n_2\},\quad E_3=\{A,B,C\}.$$

Формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{aligned} x&=l_1X+l_2Y+AZ+x_0,\\ y&=m_1X+m_2Y+BZ+y_0,\\ z&=n_1X+n_2Y+CZ+z_0, \end{aligned}$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты центра O' линии сечения.

В указанной системе координат группа старших членов уравнения *поверхности* имеет вид

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+2\beta_1XZ+2\beta_2YZ+\gamma Z^2,$$

причем матрица этой квадратичной формы выражается через матрицу квадратичной формы

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx$$

соотношением

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \beta_1\\ 0 & \lambda_2 & \beta_2\\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ A & B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & A\\ m_1 & m_2 & B\\ n_1 & n_2 & C\end{pmatrix}.$$

Так как матрица

$$\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & A\\ m_1 & m_2 & B\\ n_1 & n_2 & C\end{pmatrix}$$

ортогональная, то обратная к ней совпадает с транспонированной. Поэтому, умножая обе части последнего матричного равенства слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & A \\ m_1 & m_2 & B \\ n_1 & n_2 & C \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & A \\ m_1 & m_2 & B \\ n_1 & n_2 & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & A \\ m_1 & m_2 & B \\ n_1 & n_2 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \lambda_2 & \beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы и сравнивая соответствующие элементы произведений, получим систему

$$\begin{gathered} (a_{11}-\lambda_1)l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1-A\beta_1=0, \\ a_{21}l_1+(a_{22}-\lambda_1)m_1+a_{23}n_1-B\beta_1=0, \\ a_{31}l+a_{32}m+(a_{33}-\lambda_1)n_1-C\beta_1=0, \end{gathered}$$

а кроме того,

$$Al_1+Bm_1+Cn_1=0,$$

отсюда найдем координаты вектора E_1, имеющего направление оси симметрии $O'X$.

Аналогично из уравнений

$$\begin{gathered} (a_{11}-\lambda_2)\, l_2+a_{12}m_2+a_{13}n_2-A\beta_2=0, \\ a_{21}l_2+(a_{22}-\lambda_2)\, m_2+a_{23}n_2-B\beta_2=0, \\ a_{31}l_2+a_{32}m_2+(a_{33}-\lambda_2)\, n_2-C\beta_2=0, \\ Al_2+Bm_2+Cn_2=0 \end{gathered}$$

найдем координаты вектора E_2, имеющего направление оси симметрии $O'Y$. Впрочем, можно найти E_2, заметив, что $E_2=[E_3E_1]$; координаты E_1 найдены, а E_3 равно $\{A,\ B,\ C\}$.

Случай II. Линия сечения — парабола Принимая за новое начало координат вершину O' параболы, за ось $O'X$ — касательную к вершине, за ось $O'Y$ — ось симметрии, а за ось $O'Z$ — нормаль к плоскости сечения, приведем группу старших членов уравнения поверхности к виду

$$\lambda_1X^2+2\beta_1XZ+2\beta_2YZ+\gamma Z^2$$

и предыдущими рассуждениями установим, что координаты вектора $E_1=\{l_1,\ m_1,\ n_1\}$, коллинеарного касательной к параболе в ее вершине, определяются из системы

$$\begin{gathered} (a_{11}-\lambda_1)\, l_1+a_{12}m_1+a_{13}n_1-A\beta_1=0, \\ a_{21}l_1+(a_{22}-\lambda_1)\, m_1+a_{23}n_1-B\beta_1=0, \\ a_{31}l_1+a_{32}m_1+(a_{33}-\lambda_1)\, n_1-C\beta_1=0, \\ Al_1+Bm_1+Cn_1=0, \end{gathered}$$

где $\lambda_1 \neq 0$, а следовательно, уравнение плоскости, сопряженной направлению касательной к параболе в ее вершине,

$$\begin{gathered} l_1\,(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1)+ \\ +m_1\,(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2)+ \\ +n_1\,(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3)=0 \end{gathered}$$

вместе с уравнением плоскости сечения

$$Ax+By+Cz+D=0$$

определяют ось параболы.

Вершину параболы найдем, разрешая систему трех уравнений:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$l_1(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1)+m_1(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2)+$$
$$+n_1(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_3)=0,$$
$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+$$
$$+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0.$$

Координаты вектора $E_2=\{l_2, m_2, n_2\}$, коллинеарного оси параболы, проще всего определить из соотношения $E_2=[E_3E_1]$ или из приведенной выше системы уравнений при $\lambda=0$.

Если преобразовать данную прямоугольную систему координат $Oxyz$ в прямоугольную систему $Ox'y'z'$ с тем же началом, направив оси Ox', Oy', Oz' соответственно по векторам E_1, E_2, E_3, то уравнение (1) примет вид

$$a'_{11}x'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{13}x'z'+2a'_{23}y'z'+$$
$$+2a'_1x'+2a'_2y'+2a'_3z'+a=0,$$

так как при $z'=0$ это уравнение получается из канонического уравнения сечения (парабола) в результате преобразования переноса.

Уравнения линии сечения:

$$a'_{11}x'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a=0, \quad z'=0.$$

Здесь $a'_{11}=\lambda_1\neq 0$, а так как обе системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ имеют одно и то же начало, то $a'_2=pE_2$, где $p=\{a_1, a_2, a_3\}$. Отсюда следует, что если pE_2 и λ_1 имеют разные знаки, то вектор E_2 направлен в сторону вогнутости параболы, а если одинаковые, то в сторону выпуклости.

3. Круговые сечения поверхностей второго порядка

1. Эллипсоид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Пусть

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

нормальное уравнение плоскости (т. е. $A^2+B^2+C^2=1$). Исходя из формул (3)—(5) п. 1 настоящего дополнения находим

$$I_2=\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{B^2}{c^2a^2}+\frac{C^2}{a^2b^2},$$
$$I_1=A^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+B^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+C^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right),$$
$$K_3=\frac{1}{a^2b^2c^2}(D^2-A^2a^2-B^2b^2-C^2c^2).$$

Для того чтобы сечение эллипсоида (1) плоскостью (2) было окружностью, необходимо и достаточно, чтобы

$$I_1^2-4I_2=0, \quad I_1K_3<0.$$

Первое условие принимает вид

$$\left[A^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+B^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+C^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]^2-$$
$$-4\left(\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{B^2}{c^2a^2}+\frac{C^2}{a^2b^2}\right)=0,$$

или, так как $A^2+B^2+C^2=1$, то

$$\left[A^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+B^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+C^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]^2-$$
$$-4\left(\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{B^2}{c^2a^2}+\frac{C^2}{a^2b^2}\right)(A^2+B^2+C^2)=0,$$

или

$$\left[A^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)+C^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]^2+$$
$$+B^2\left[B^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2+2A^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+2C^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]=0,$$

и полагая, что $a>b>c$, находим

$$B=0,\quad A^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)+C^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0,$$
$$\frac{A}{C}=\pm\frac{c}{a}\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}.$$

Условие $I_1K_3<0$ принимает вид

$$\frac{D^2}{a^2b^2c^2}<\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{C^2}{a^2b^2}.$$

Так как $A^2+C^2=1$, то

$$A^2=\frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)},\qquad C^2=\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)},$$

и, значит,

$$\frac{D^2}{a^2b^2c^2}<\frac{a^2-b^2}{b^4(a^2-c^2)}+\frac{b^2-c^2}{b^4(a^2-c^2)},$$

или

$$D^2<\frac{a^2c^2}{b^2},$$

или

$$|D|<\frac{ac}{b}.$$

Итак, плоскости, пересекающие эллипсоид (1) по окружности, выражаются уравнениями

$$c\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}x\pm a\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}z+\lambda ac=0,$$

где $|\lambda|<1$. Вместе с тем этими уравнениями выражаются плоскости *всех* круговых сечений эллипсоида (1).

II. Эллиптический параболоид:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0,\quad p>0,\quad q>0.$$

Находим

$$I_2=\frac{C^2}{pq},$$
$$I_1=\frac{1}{p}(B^2+C^2)+\frac{1}{q}(A^2+C^2),$$

$$K_3 = \frac{1}{pq}(2DC - B^2q - A^2p).$$

Условия

$$I_1^2 - 4I_2 = 0, \quad I_1K_3 < 0$$

здесь принимают вид

$$\left(\frac{B^2+C^2}{p} + \frac{A^2+C^2}{q}\right)^2 - \frac{4C^2}{pq} = 0, \qquad (\alpha)$$

$$2DC - B^2q - A^2p < 0; \qquad (\beta)$$

заменяя C^2 на $1 - A^2 - B^2$, преобразуем соотношение (α) к виду

$$[(A^2-1)q + (1-B^2)p]^2 + 4pqA^2B^2 = 0,$$

откуда

$$AB = 0, \quad (A^2-1)q + (1-B^2)p = 0.$$

Если $B = 0$, то в предложении $p > q$ приходим к противоречию: $A^2 = \frac{q-p}{p} < 0$, значит, остается (в случае $p > q$) положить $A = 0$; тогда $B^2 = \frac{p-q}{p}$, следовательно,

$$B = \pm\sqrt{\frac{p-q}{p}}.$$

Так как $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, $A = 0$, то

$$C = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}.$$

Изменением знака левой части уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

можно всегда добиться того, что $C \geqslant 0$.

Взяв

$$C = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

из условия $I_1K_3 < 0$, т. е. условия

$$2DC - B^2q < 0,$$

находим

$$D < \frac{p-q}{2}\sqrt{\frac{q}{p}}.$$

Значит, плоскости круговых сечений (притом **всех** круговых сечений) выражаются уравнениями

$$\pm\sqrt{\frac{p-q}{q}}\,y + z + \frac{p-q}{2}\,\lambda = 0,$$

где λ — любое число, меньшее 1.

III. Однополостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Находим

$$I_2=\frac{1}{a^2b^2c^2}(C^2c^2-A^2a^2-B^2b^2),$$

$$I_1=A^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+B^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+C^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right),$$

$$K_3=-\frac{1}{a^2b^2c^2}(D^2+C^2c^2-A^2a^2-B^2b^2).$$

Условие $I_1^2-4I_2=0$ принимает вид

$$\left[A^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+B^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+C^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]^2-$$
$$-\frac{4}{a^2b^2c^2}(C^2c^2-A^2a^2-B^2b^2)(A^2+B^2+C^2)=0,$$
$$(A^2+B^2+C^2=1),$$

или

$$\left[B^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+C^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]^2+$$
$$+A^2\left[A^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2+2B^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\right.$$
$$\left.+2C^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right]=0,$$

откуда $(a>b)$

$$A=0,\quad B^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+C^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0,$$

следовательно,

$$B=\frac{c}{a}\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad C=\pm\frac{b}{a}\,\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Условие $I_1K_3<0$ дает

$$D^2+\frac{b^2c^2(a^2+c^2)-b^2c^2(a^2-b^2)}{a^2(b^2+c^2)}>0,$$

что выполняется при любом значении D.

Итак, плоскости

$$\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}y\pm\frac{b}{a}\,\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}z+D=0$$

или

$$c\sqrt{a^2-b^2}y\pm b\sqrt{a^2+c^2}z+\lambda=0,$$

где λ — любое действительное число, пересекают однополостный гиперболоид по окружностям.

Вместе с тем указанными уравнениями выражаются плоскости *всех* круговых сечений рассматриваемой поверхности.

IV. Двуполостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0.$$

В этом случае выкладки несущественно отличаются от тех, которые проведены при рассмотрении круговых сечений однополостного гиперболоида.

Однако условие $I_1K_3<0$ здесь примет вид

$$\frac{b^2c^2}{a^2}-D^2<0, \text{ т. е. } |D|>\frac{bc}{a}.$$

Плоскости всех круговых сечений двуполостного гиперболоида

$$\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}y\pm\frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}z+\lambda bc=0,$$

где λ — любое действительное число, по абсолютной величине большее 1.

4. Омбилические точки

Если плоскость параллельна плоскости кругового сечения эллипсоида, эллиптического параболоида или двуполостного гиперболоида и имеет с поверхностью только одну общую точку, то эта точка называется омбилической. Таким образом, омбилическую точку одной из указанных выше поверхностей можно определить как круговое сечение по окружности нулевого радиуса. Так как условие, определяющее такое сечение, имеет вид

$$I_2>0,\ I_1^2-4I_2=0,\ K_3=0$$

и так как координаты центра симметрии сечения определяются из системы уравнений (3), (4) п. 2 настоящего дополнения, то

1) для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

координаты омбилических точек находятся из двух систем уравнений:

$$\frac{x}{a^2}=\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}t,$$

$$\frac{y}{b^2}=0,$$

$$\frac{z}{c^2}=\pm\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}t,$$

$$\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}x\pm\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}z\pm ac=0,$$

где перед *радикалами* надо брать одновременно либо оба верхних, либо оба нижних знака. Разрешая эти системы, находим четыре омбилические точки трехосного эллипсоида:

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\ 0,\ \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\right);$$

2) для эллиптического параболоида $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, $p>q>0$, указанная выше система примет вид

$$\frac{x}{p}=0,$$

$$\frac{y}{q}=\pm\sqrt{\frac{p-q}{q}}t,$$

$$-1=t,$$

$$\pm\sqrt{\frac{p-q}{q}}\,y+z+\frac{p-q}{2}=0.$$

Отсюда находим две омбилические точки:

$$\left(0,\ \pm\sqrt{q(p-q)},\ \frac{p-q}{2}\right);$$

3) для двуполостного гиперболоида указанная система принимает вид

$$\frac{x}{a^2}=0,$$

$$\frac{y}{b^2}=\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}\,t,$$

$$-\frac{z}{c^2}=\pm\frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}\,t,$$

$$\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\,y-\frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\,z\pm bc=0,$$

где, как и в случае эллипсоида, перед *радикалами* берутся либо одновременно верхние, либо одновременно нижние знаки.

Решая эти системы, найдем четыре омбилические точки двуполостного гиперболоида:

$$\left(0,\ \pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}},\ \pm c\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\right).$$

ДОПОЛНЕНИЕ IV

ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ. ТЕОРЕМЫ ДЕЗАРГА, ПАСКАЛЯ И БРИАНШОНА. АВТОПОЛЯРНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК. АВТОПОЛЯРНЫЙ ТЕТРАЭДР

1. Проективные координаты на проективной плоскости

Реализуем проективную плоскость в виде связки S прямых и плоскостей трехмерного евклидова пространства (вторая модель). Напомним, что прямые связки являются «точками» проективной плоскости, а плоскости связки — «прямыми» (рис. 293).

Выделим в связке S четыре прямые o_1, o_2, o_3, e, из которых никакие три не принадлежат одной плоскости. Возьмем на прямой e произвольную точку, отличную от S, и проведем через нее три плоскости, одна

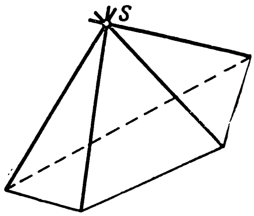


Рис. 293

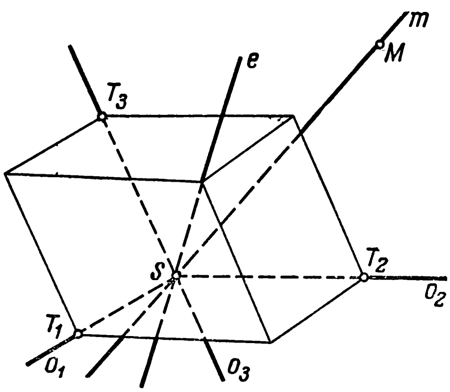


Рис 294

из которых параллельна прямым o_1 и o_2, другая параллельна прямым o_2 и o_3, а третья параллельна o_3 и o_1 (рис. 294).

Пусть проведенные плоскости пересекают прямые o_1, o_2, o_3 соответственно в точках T_1, T_2, T_3.

Пусть m — произвольная прямая связки Возьмем на ней произвольную точку M, отличную от S. Тогда координаты x_1, x_2, x_3 точки M в общей декартовой системе координат с началом S и масштабными отрезками ST_1, ST_2, ST_3 называются проективными координатами «точки» m. Ясно, что если «точка» m имеет координаты x_1, x_2, x_3, то ее координатами будут также три числа kx_1, kx_2, kx_3, где k — любое действительное число, не равное нулю. Кроме того, отметим, что если на прямой выбрать другую точку (для построения вспомогательной общей декартовой системы координат), то масштабные векторы новой общей декартовой системы координат будут пропорциональны векторам $\overrightarrow{ST_1}$, $\overrightarrow{ST_2}$, $\overrightarrow{ST_3}$ и, значит, проективные координаты «точки» m образуют тот же класс пропорциональных троек чисел $x_1:x_2:x_3$.

«Точки» o_1, o_2, o_3 называются фундаментальными, «точка» e — единичной; они имеют следующие проективные координаты: $o_1(1:0:0)$, $o_2(0:1:0)$, $o_3(0:0:1)$, $e(1:1:1)$.

Таким образом, проективная система координат на проективной плоскости (в случае реализации ее в виде второй модели) определена, если на ней выбрать произвольно четыре «точки» o_1, o_2, o_3, e, по три не принадлежащие одной «прямой», и приписать им соответственно следующие координаты:

$$1:0:0,\ 0:1:0,\ 0:0:1,\ 1:1:1.$$

Уравнение произвольной плоскости связки (в указанной выше общей декартовой системе координат) имеет вид

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

и, обратно, всякое однородное уравнение первой степени относительно x_1, x_2, x_3 является уравнением плоскости связки.

Таким образом, всякая «прямая» проективной плоскости выражается однородным уравнением первой степени и обратно.

Класс $u_1:u_2:u_3$ пропорциональных троек чисел из коэффициентов в уравнении «прямой» называют проективными координатами этой «прямой».

«Точку» m вместе с ее проективными координатами будем обозначать так: $m(x_1:x_2:x_3)$, а «прямую» λ так: $\lambda[u_1:u_2:u_3]$.

Покажем теперь, как вводятся проективные координаты точки в случае, если проективная плоскость рассматривается как евклидова, пополненная несобственными точками.

Возьмем в пространстве произвольную плоскость π и дополним ее до проективной плоскости Π. Выберем в евклидовом пространстве произвольную точку S, не лежащую на плоскости π, и рассмотрим связку прямых и плоскостей с центром S (рис. 295). Поставим в соответствие каждой прямой m связки точку M, в которой прямая m пересекает проективную плоскость Π; если прямая m параллельна евклидовой плоскости π, то точкой ее пересечения с плоскостью Π будем считать ту несобственную точку плоскости Π, которая присоединена к прямым плоскости π, параллельным прямой m.

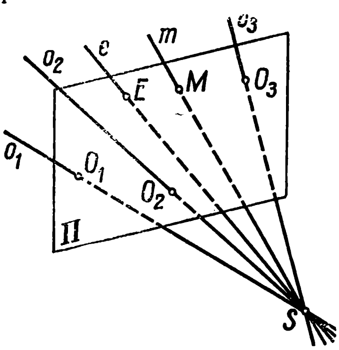


Рис. 295

Построенное соответствие между множеством «точек» проективной плоскости, реализованной в виде связки с центром S (2-я модель), и множеством точек проективной плоскости, реализованной пополненной несобственными точками евклидовой плоскости (1-я модель), называется перспективным. Перспективное соответствие взаимно однозначно, и при этом любым трем точкам, принадлежащим одной прямой (в первой модели), оно ставит в соответствие три точки, также принадлежащие одной прямой (во второй модели).

Введем проективную систему координат во второй модели проективной плоскости. Тогда каждая «точка» будет иметь проективные координаты. Пусть M — произвольная точка плоскости Π, а m — «точка», ей соответствующая в указанной перспективе. Будем считать, что точка M имеет те же координаты $x_1:x_2:x_3$, какие имеет «точка» m, и называть их проективными координатами точки M.

Пусть прямые o_1, o_2, o_3, e пересекают плоскость П в точках O_1, O_2, O_3, E. Точки O_1, O_2, O_3 называются фундаментальными, или базисными, точками проективной системы координат на плоскости П, а точка E — единичной точкой.

Если на плоскости П выбрать произвольно четыре точки O_1, O_2, O_3, E, из которых никакие три не принадлежат одной прямой, то любая точка M плоскости П получит вполне определенные проективные координаты. В самом деле, выберем две произвольные точки S и S', не лежащие на плоскости π. Прямые SO_1, SO_2, SO_3, SE можно перевести в прямые $S'O_1$, $S'O_2$, $S'O_3$, $S'E$ таким аффинным преобразованием пространства, при котором все точки плоскости π неподвижны, а точка S переходит в S' (косое сжатие к плоскости π).

При этом преобразовании прямая SM перейдет в прямую $S'M$. Отсюда следует, что точка M плоскости П имеет одни и те же проективные координаты, если реализовать проективную плоскость любой из связок S и S'. Мы видим, что проективные координаты точки M на плоскости П не зависят от выбора центра S вспомогательной связки (при помощи которой на плоскости П вводятся проективные координаты точки), если только на плоскости П фиксированы фундаментальные точки O_1, O_2, O_3 и единичная точка E, которым приписаны соответственно координаты

$$(1:0:0),\ (0:1:0),\ (0:0:1),\ (1:1:1).$$

Предположим теперь, что на плоскости π введена общая декартова система координат XOY, а кроме того, на плоскости П введена проективная система координат. Будем обозначать проективные координаты точки M через $x_1:x_2:x_3$, а однородные через $x:y:z$ (так что для собственных точек плоскости П отношения $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ являются общими декартовыми координатами в системе XOY). Установим формулы, связывающие проективные координаты с однородными.

Пусть на проективной плоскости П заданы базисные точки O_1, O_2, O_3 и единичная точка E своими однородными координатами (никакие три точки из точек O_1, O_2, O_3, и E не принадлежат одной прямой):

$$O_1\,(a_{11}:a_{21}:a_{31}),\quad O_2\,(a_{12}:a_{22}:a_{32}),\quad O_3\,(a_{13}:a_{23}:a_{33}),\quad E\,(e_1:e_2:e_3).$$

Пусть $x:y:z$ — однородные координаты точки M плоскости П, а $x_1:x_2:x_3$ — проективные координаты той же точки M. Однородные координаты точки M можно рассматривать как проективные, если ввести их на плоскости П при помощи общей декартовой системы координат оси Sx' и Sy', которой параллельны плоскости π (пополнением которой несобственными точками получается проективная плоскость П), а единичная прямая SE' проходит через единичную точку E' той системы координат XOY, при помощи которой на плоскости П вводятся однородные координаты (рис. 296).

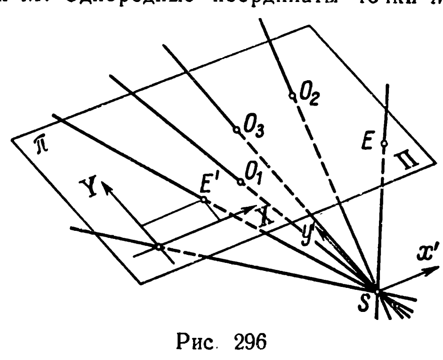


Рис. 296

Таким образом, x, y, z (см. § 98) являются линейными однородными функциями от x_1, x_2, x_3, причем определитель из коэффициентов при x_1, x_2, x_3 в этих формулах отличен от нуля. Докажем, что эти формулы можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= a_{11}\rho_1 x_1 + a_{12}\rho_2 x_2 + a_{13}\rho_3 x_3,\\ y &= a_{21}\rho_1 x_1 + a_{22}\rho_2 x_2 + a_{23}\rho_3 x_3,\\ z &= a_{31}\rho_1 x_1 + a_{32}\rho_2 x_2 + a_{33}\rho_3 x_3, \end{aligned} \qquad (1)$$

где a_{ik} имеют указанный выше геометрический смысл (однородные координаты точек O_1, O_2, O_3), а ρ_1, ρ_2, ρ_3 — отличные от нуля числа, которые мы сейчас определим. В самом деле, из формул (1) следует, что однородные координаты точки O_1, имеющей проективные координаты $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=0$, будут

$$(a_{11}\rho_1):(a_{21}\rho_1):(a_{31}\rho_1)=a_{11}:a_{21}:a_{31},$$

однородные координаты точки O_2, проективные координаты которой $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$, будут

$$(a_{12}\rho_2):(a_{22}\rho_2):(a_{32}\rho_2)=a_{12}:a_{22}:a_{32},$$

наконец, однородные координаты точки O_3

$$(a_{13}\rho_3):(a_{23}\rho_3):(a_{33}\rho_2)=a_{13}:a_{23}:a_{33}$$

в соответствии с поставленной задачей. Что касается чисел ρ_1, ρ_2, ρ_3, то их надо выбрать так, чтобы однородные координаты единичной точки E, проективные координаты которой $1:1:1$, были равны $e_1:e_2:e_3$, т. е.

$$\begin{aligned}a_{11}\rho_1+a_{12}\rho_2+a_{13}\rho_3&=e_1,\\ a_{21}\rho_1+a_{22}\rho_2+a_{23}\rho_3&=e_2,\\ a_{31}\rho_1+a_{32}\rho_2+a_{33}\rho_3&=e_3.\end{aligned}$$

Эта система имеет и притом только одно решение ρ_1, ρ_2, ρ_3, так как $\operatorname{Det}(a_{ik})\neq 0$ (точки O_1, O_2, O_3 не принадлежат одной прямой). Это решение ρ_1, ρ_2, ρ_3 состоит из трех чисел, не равных нулю, так как точка E не лежит на одной прямой с любыми двумя из трех точек O_1, O_2, O_3.

Но так как общая декартова система координат определяется (с точностью до выбора на единичной прямой единичной точки) выбором трех прямых o_1, o_2, o_3 связки, не принадлежащих одной прямой и единичной прямой e (той же связки), не компланарной ни с какими двумя из трех прямых o_1, o_2, o_3, то формулами (1) определяется преобразование одной из систем координат SO_1, SO_2, SO_3, SE и Sx', Sy', Sz', SE' в другую.

Из соотношений (1) находим выражения для проективных координат точки через однородные:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}x & a_{12} & a_{13}\\ y & a_{22} & a_{23}\\ z & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e_1 & a_{12} & a_{13}\\ e_2 & a_{22} & a_{23}\\ e_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & x & a_{13}\\ a_{21} & y & a_{23}\\ a_{31} & z & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & e_1 & a_{13}\\ a_{21} & e_2 & a_{23}\\ a_{31} & e_3 & a_{33}\end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & x\\ a_{21} & a_{22} & y\\ a_{31} & a_{32} & z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & e_1\\ a_{21} & a_{22} & e_2\\ a_{31} & a_{32} & e_3\end{vmatrix}}. \qquad (2)$$

Так как x, y, z через x_1, x_2, x_3 выражаются линейными однородными соотношениями с определителем, отличным от нуля, то прямая на проективной плоскости в проективных координатах выражается однородным уравнением

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0,$$

а линия второго порядка на проективной плоскости выражается уравнением второй степени относительно проективных координат:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0.$$

Теорема 1 § 202 имеет место и в том случае, когда точки заданы проективными координатами.

Определение неособой точки линии второго порядка без изменения дается и для того случая, когда линия задана в проективных координатах. Не меняется уравнение касательной к линии второго порядка, уравнение поляры точки относительно данной линии второго порядка, заданной уравнением в проективных координатах, и т. д.

Покажем, как строится точка M по ее проективным координатам в первой модели проективной плоскости П. Предполагая, что на плоскости П введена проективная система координат (O_1, O_2, O_3, E), заметим, что прямые MO_1, MO_2, MO_3 пересекаются с прямыми O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 соответственно в точках $M_1\ (0:x_2:x_3)$, $M_2\ (x_1:0:x_3)$, $M_3\ (x_1:x_2:0)$.

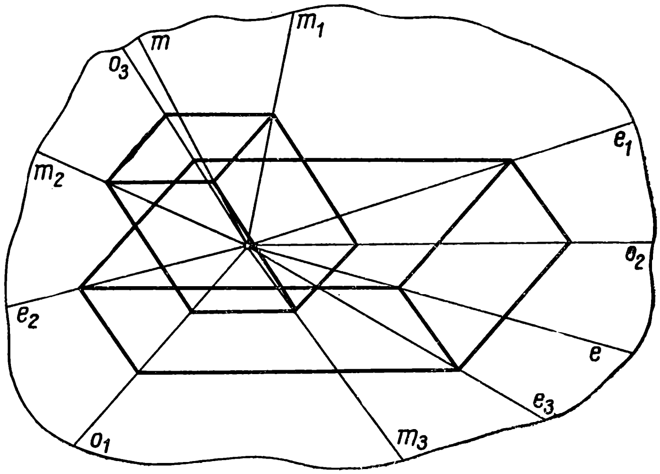


Рис. 297

Пусть $E_1\ (0:1:1)$, $E_2\ (1:0:1)$, $E_3\ (1:1:0)$ — точки пересечения прямых EO_1, EO_2, EO_3 соответственно с прямыми O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2.

На рис. 297 и 298 изображены прямые o_1, o_2, o_3, e, e_1, e_2, e_3, m, m_1, m_2, m_3, соответствующие точкам O_1, O_2, O_3, E, E_1, E_2, E_3, M, M_1, M_2, M_3 в перспективном соответствии со связкой. Прямую m_1 легко построить, зная прямые o_2, o_3, в плоскости которых лежит эта прямая, и зная «единичный луч» этой плоскости. Для этого надо в системе координат с началом S, осями o_2, o_3 и единичной точкой, лежащей на прямой e_1 (отличной от S), построить точку $\mu_1\ (x_2,\ x_3)$. Прямая $S\mu_1$ и будет прямой m_1. Так как (по доказанному выше) это построение не зависит от выбора центра связки, то в первой модели точку M_1 можно построить, выбирая общую декартову систему координат с началом O', не лежащим на прямой $E_1O_2O_3$, осями $O'O_2$ и $O'O_3$ и единичной точкой E_1 (рис. 299). На рис. 300 построены точки $M_1\ (0:1:2)$, $M_2\ (-1:0:2)$, $M_3\ (-1:1:0)$ и точка $M\ (-1:1:2)$.

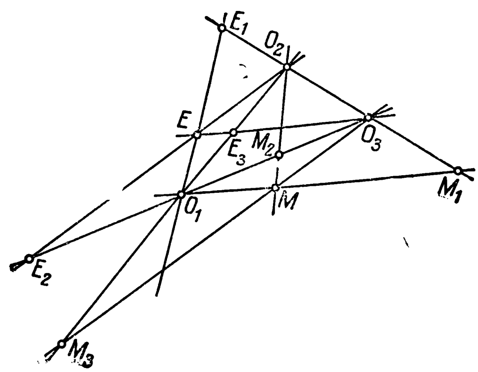


Рис. 298

Замечание. Предположим, что проективная плоскость Π реализована в виде первой модели и что все точки O_1, O_2, O_3, E собственные. Заметим, что, приравнивая нулю числители формул (2), выражающих проективные координаты x_1, x_2, x_3 точки M через ее однородные координаты, мы получим уравнения прямых O_2O_3, O_3O_1 и O_1O_2 в однородных координатах x, y, z. Знаменатели же упомянутых формул (2) являются результатами подстановок однородных координат единичной точки E в левые части уравнений сторон O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 базисного треугольника $O_1O_2O_3$. Значит, $|x_1|$, $|x_2|$, $|x_3|$ пропорциональны расстояниям d_1, d_2, d_3 от точки M до сторон базисного треугольника, причем коэффициентами пропорциональности служат расстояния k_1, k_2, k_3 от единичной точки E до сторон базисного треугольника:

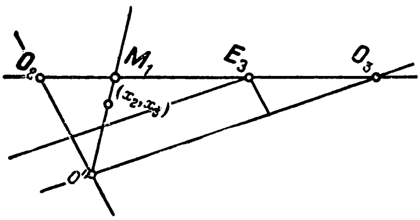


Рис. 299

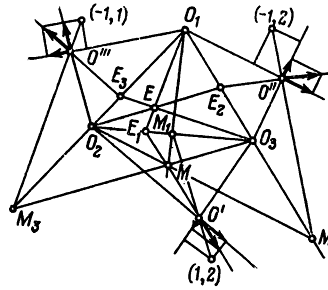


Рис. 300

$$|x_1| = k_1d_1, \quad |x_2| = k_2d_2, \quad |x_3| = k_3d_3,$$

а что касается знака x_1, то в формулах (2) будет $x_1 > 0$, если точки E_1 и M лежат по одну сторону от прямой O_2O_3, и $x_1 < 0$, если — по разные. Аналогично определяются знаки x_2 и x_3 в формулах (2). Выбором единичной точки можно добиться различных интерпретаций. Так, если E — центр окружности, вписанной в $\triangle O_1O_2O_3$, то $|x_1|$, $|x_2|$, $|x_3|$ пропорциональны расстояниям от точки M до сторон базисного треугольника, а знаки x_1, x_2, x_3 выбираются, как указано выше.

Если точка E совпадает с точкой пересечения медиан базисного треугольника, то

$$x_1 : x_2 : x_3 = \overrightarrow{MBC} : \overrightarrow{MCA} : \overrightarrow{MAB};$$

такая система координат называется барицентрической. Специальные проективные системы координат широко применялись в геометрии треугольника (а в пространстве — в геометрии тетраэдра). Координаты точек на плоскости называли при этом трилинейными (в пространстве — тетраэдрическими).

2. Автополярный треугольник

Пусть на проективной плоскости задана нераспадающаяся линия C второго порядка.

Возьмем произвольную точку O_1, не лежащую на линии C, и построим поляру точки O_1 относительно линии C. Эта поляра не пройдет через точку O_1. Возьмем на этой поляре точку O_2, не лежащую на линии C, и построим ее поляру. Пусть O_3 — точка пересечения поляр точек O_1 и O_2; тогда точка O_3 будет полюсом прямой O_1O_2. Примем точки O_1, O_2, O_3 за базисные точки проективной системы координат. Треугольник $O_1O_2O_3$ обладает тем свойством, что каждая его вершина является полюсом противоположной стороны (рис. 301). Такой треугольник называется автополярным относительно линии второго порядка C.

Примем автополярный треугольник $O_1O_2O_3$ линии C за базисный треугольник проективной системы координат и пусть

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0 \tag{1}$$

уравнение линии C в этой системе координат. Уравнение поляры точки $O_1\,(1:0:0)$ имеет вид

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$$

и эквивалентно уравнению прямой O_2O_3, т. е. уравнению $x_1=0$. Отсюда следует, что $a_{12}=a_{13}=0$. Аналогично доказывается, что $a_{23}=0$. Итак, уравнение линии C имеет вид

$$\varphi=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0, \tag{2}$$

где $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$, $a_{33}\neq 0$. Обратно, для линии, заданной уравнением (2), при условии $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$, $a_{33}\neq 0$, каждая точка $O_1\,(1:0:0)$, $O_2\,(0:1:0)$, $O_3\,(0:0:1)$ является полюсом прямой, проходящей через две другие точки.

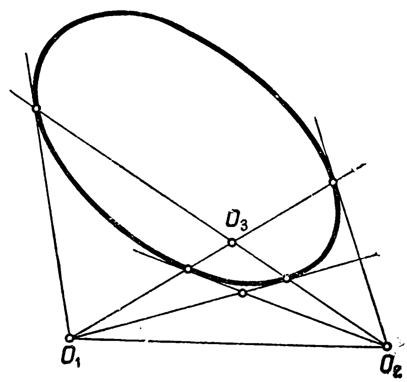


Рис. 301

Таким образом, для того чтобы уравнение нераспадающейся линии второго порядка в проективных координатах не содержало членов с произведениями координат, необходимо и достаточно, чтобы базисный треугольник $O_1O_2O_3$ проективной системы координат был автополярным.

Преобразуем проективную систему координат $(O_1O_2O_3E)$, сохраняя базисные точки O_1, O_2, O_3 и принимая в качестве новой единичной точки любую из четырех точек: $E'\left(\pm\sqrt{|a_{11}|}:\pm\sqrt{|a_{22}|}:\pm\sqrt{|a_{33}|}\right)$ (набор знаков любой). Тогда формулы преобразования системы координат будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_1'&=\pm\sqrt{|a_{11}|}\,x_1,\\ x_2'&=\pm\sqrt{|a_{22}|}\,x_2,\\ x_3'&=\pm\sqrt{|a_{33}|}\,x_3 \end{aligned} \tag{3}$$

и, значит, уравнение (2) примет вид

$$\varepsilon_1x_1'^2+\varepsilon_2x_2'^2+\varepsilon_3x_3'^2=0, \tag{2'}$$

где ε_i равны $+1$ или -1. Если ε_i все одного знака, то уравнение (2′) может быть переписано в виде

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0, \tag{4}$$

это мнимая нераспадающаяся линия второго порядка.

Если же линия (2) — действительная овальная линия второго порядка, то, считая $a_{11}>0$, $a_{22}>0$, $a_{33}<0$, заключаем, что уравнение (2) при преобразовании (3) системы координат принимает вид

$$x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0. \tag{5}$$

В этом случае $\varphi(1, 0, 0) = a_{11} > 0$, $\varphi(0, 1, 0) = a_{22} > 0$, $\varphi(0, 0, 1) = a_{33} < 0$, а так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} < 0,$$

то для точек O_1 и O_2 имеем $\varphi\Delta < 0$, а для точки O_3 $\varphi\Delta > 0$. Значит, для действительной овальной линии второго порядка вершина O_3 автополярного треугольника является внутренней точкой линии (5), а вершины O_1 и O_2 — внеш-

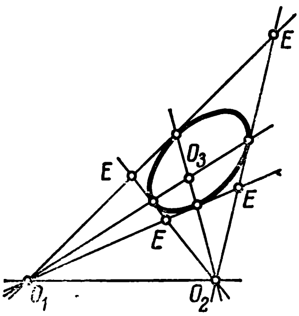


Рис 302

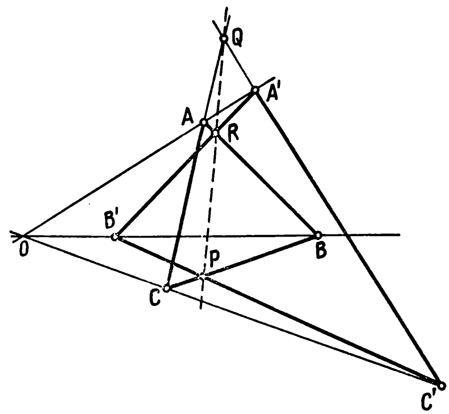


Рис. 303

ними точками. Проведем из точек O_1 и O_2 касательные к линии (5). Они пересекутся в четырех точках E. Геометрический смысл выбора новой единичной точки E (формулы (3)) заключается в том, что за новую единичную точку E берется любая из точек E (рис 302).

3. Теоремы Дезарга, Паскаля и Брианшона

Теорема 1 (Дезарга). *Если прямые AA', BB', CC', соединяющие соответственные вершины двух треугольников ABC и $A'B'C'$, проходят через одну точку O, то точки P, Q и R пересечения соответствующих сторон BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$ лежат на одной прямой и обратно* (рис. 303).

Доказательство. Введем на плоскости проективную систему координат принимая точки A, B, C за базисные, а O — за единичную:

$$O\,(1:1:1),\quad A\,(1:0:0),\quad B\,(0:1:0),\quad C\,(0:0:1)$$

Тогда точки A', B', C' имеют координаты

$$A'\,((1+\lambda):1:1),\quad B'\,(1:(1+\mu):1),\quad C'\,(1:1:(1+\nu)).$$

Прямые AB, BC и CA имеют координаты

$$AB\,[0:0:1],\quad BC\,[1:0:0],\quad CA\,[0:1:0],$$

а прямые $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$:

$$A'B'\,[\mu:\lambda:(-\lambda-\mu-\lambda\mu)],$$
$$B'C'\,[(-\nu-\mu-\nu\mu):\nu:\mu],$$
$$C'A'\,[\nu:(-\lambda-\nu-\lambda\nu):\lambda].$$

Точки P, Q, R пересечения BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$ будут:

$$P(0:-\mu:\nu),\quad Q(\lambda:0:-\nu),\quad R(\lambda:-\mu:0).$$

Так как

$$\begin{vmatrix} 0 & -\mu & \nu \\ \lambda & 0 & -\nu \\ \lambda & -\mu & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

то точки P, Q, R лежат на одной прямой. Обратная теорема следует из доказанной по малому принципу двойственности (она может быть доказана также аналогично проведенному доказательству прямой теоремы).

Теорема 2. (Паскаля). *Точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в действительную нераспадающуюся линию второго порядка, лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 — шесть произвольных точек, лежащих на действительной нераспадающейся линии второго порядка. Примем точки A_1, A_2, A_3 за вершины базисного треугольника:

$$A_1(1:0:0),\quad A_2(0:1:0),\quad A_3(0:0:1),$$

а точку A_4 за единичную:

$$A_4(1:1:1)$$

Пусть в этой системе проективных координат точки A_5 и A_6 имеют координаты

$$A_5(a:b:c),\quad A_6(a':b':c').$$

Тогда уравнение линии второго порядка, проходящей через точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (см. § 210), имеет вид

$$c(a-b)x_1x_2+a(b-c)x_2x_3+b(c-a)x_3x_1=0.$$

Так как эта линия проходит через точку $A_6(a':b':c')$, то

$$c(a-b)a'b'+a(b-c)b'c'+b(c-a)c'a'=0.$$

Теперь найдем координаты сторон шестиугольника.

Сторона A_1A_2: $[0:0:1]$.

Сторона A_2A_3: $[1:0:0]$.

Сторона A_3A_4: $\left[\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right]$,

или

$$[1:-1:0]$$

Сторона A_4A_5: $\left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & a \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}\right]$,

или

$$[(c-b):(a-c):(b-a)]$$

Сторона A_5A_6:

$$[(bc'-cb'):(ca'-ac'):(ab'-a'b)]$$

и, наконец, сторона A_6A_1:

$$[0:c':-b'].$$

Зная координаты прямых A_1A_2 и A_4A_5, находим точку P их пересечения:

$$P(-(a-c):(c-b):0).$$

Зная координаты прямых A_2A_3 и A_5A_6, находим точку Q их пересечения:

$$Q\,(0:-(ab'-a'b):(a'c-ac')).$$

Наконец, зная координаты прямых A_3A_4 и A_6A_1, находим координаты точки R их пересечения:

$$R\,(b':b':c').$$

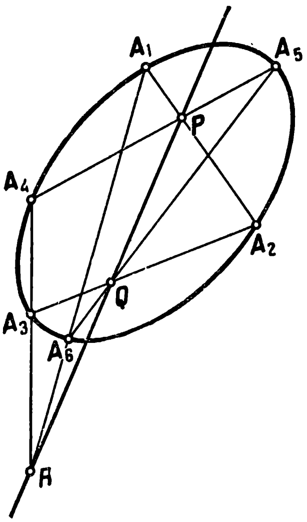


Рис. 304

Далее,

$$\begin{vmatrix} -(a-c) & c-b & 0 \\ 0 & -(ab'-a'b) & a'c-ac' \\ b' & b' & c' \end{vmatrix}=0$$

в силу соотношения (1), значит, точки P, Q, R лежат на одной прямой (рис. 304).

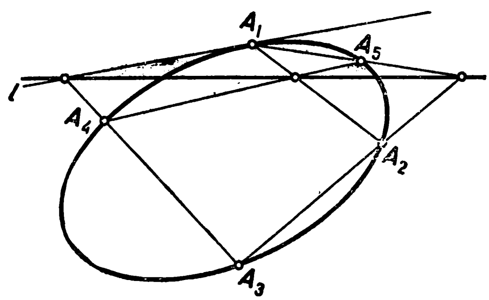


Рис. 305

Аналогично доказываются следующие теоремы (часто называемые частными случаями теоремы Паскаля).

Теорема 3. *Пусть* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — *пять произвольных точек, лежащих на действительной нераспадающейся линии второго порядка,* l — *касательная к этой линии в точке* A_1. *Тогда точки пересечения прямых*

l *и* A_3A_4,

A_1A_2 *и* A_4A_5,

A_2A_3 *и* A_1A_5

лежат на одной прямой (рис. 305).

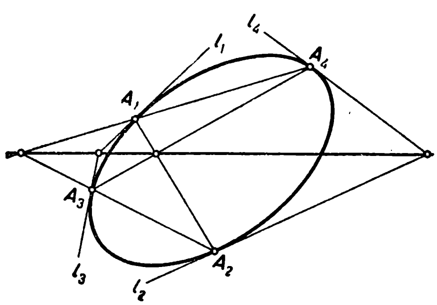


Рис. 306

Теорема 4. *Пусть* A_1, A_2, A_3, A_4 — *четыре произвольные точки, лежащие на действительной нераспадающейся линии второго порядка,* l_1, l_2, l_3, l_4 — *касательные к этой линии, проведенные соответственно в точках* A_1, A_2, A_3, A_4. *Тогда четыре точки пересечения прямых*

A_1A_2 *и* A_3A_4,

A_2A_3 *и* A_4A_1,

l_2 *и* l_4,

l_1 *и* l_3

лежат на одной прямой (рис. 306).

Теорема 5. *Пусть A_1, A_2, A_3 — три произвольные точки действительной нераспадающейся линии второго порядка, а l_1, l_2, l_3 — касательные к этой линии, проведенные к ней в этих точках. Тогда точки пересечения прямых*

$$A_1A_2 \text{ и } l_3,$$
$$A_2A_3 \text{ и } l_1,$$
$$A_3A_1 \text{ и } l_2$$

лежат на одной прямой (рис. 307).

Теорема 6 (Брианшона). *Прямые, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, описанного около действительной невырождающейся линии второго порядка, проходят через одну точку* (рис. 308).

Доказательство. Пусть точки касания сторон описанного шестиугольника будут M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. Обозначим стороны вписанного шестиугольника

$$M_1M_2,\ M_2M_3,\ M_3M_4,\ M_4M_5,\ M_5M_6,\ M_6M_1$$

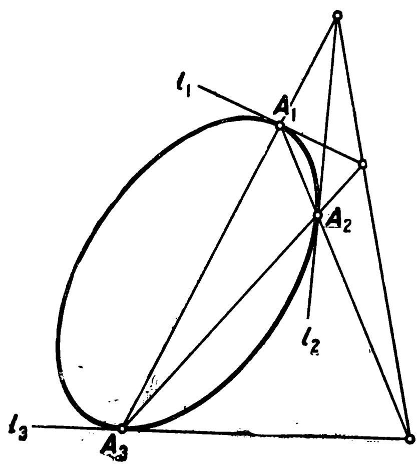


Рис. 307

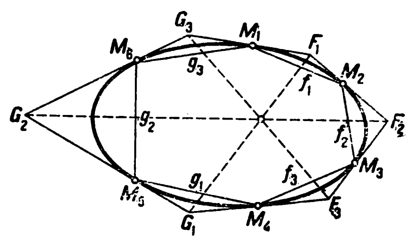


Рис. 308

соответственно через f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3. Вершины F_1, F_2, F_3, G_1, G_2, G_3 шестиугольника, описанного около линии второго порядка, будут полюсами сторон f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3. На основании свойств поляр и полюсов прямая F_1G_1 будет полюсом точки (f_1, g_1), прямая F_2G_2 — полюсом точки (f_2, g_2) и прямая F_3G_3 — полюсом точки (f_3, g_3). Так как точки (f_1, g_1), (f_2, g_2) и (f_3, g_3) лежат на одной прямой, то прямые F_1G_1, F_2G_2, F_3G_3 проходят через одну точку (полюс этой прямой).

Теорему Брианшона можно доказать и аналитически, исходя, например, из следующего уравнения овальной линии:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Частные случаи теоремы Брианшона:

1. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ — пятиугольник, описанный около действительной нераспадающейся линии второго порядка, и A_6 — точка прикосновения прямой A_1A_5 к этой линии; тогда прямые A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 проходят через одну точку (рис. 309).

2. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — четырехугольник, описанный около действительной нераспадающейся линии второго порядка, а A_5, A_6, A_7, A_8 — точки прикосновения сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1. Тогда четыре прямые A_1A_3, A_2A_4, A_5A_7, A_6A_8 проходят через одну точку (рис. 310).

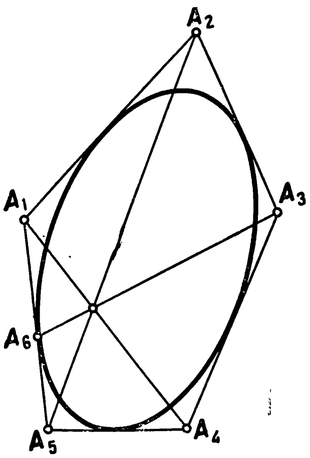


Рис. 309

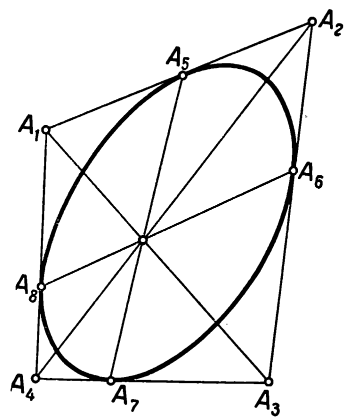


Рис. 310

3. Пусть $A_1A_2A_3$—треугольник, описанный около действительной нераспадающейся линии второго порядка, а A_4, A_5, A_6—точки прикосновения сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1.

Тогда прямые A_1A_5, A_2A_6, A_3A_4 проходят через одну точку (рис. 311).

Эти три положения могут быть доказаны непосредственно (аналогично приведенному выше доказательству теоремы Паскаля) или выведены из частных случаев теоремы Паскаля с использованием свойств поляр и полюсов (так, как была выше доказана теорема Брианшона).

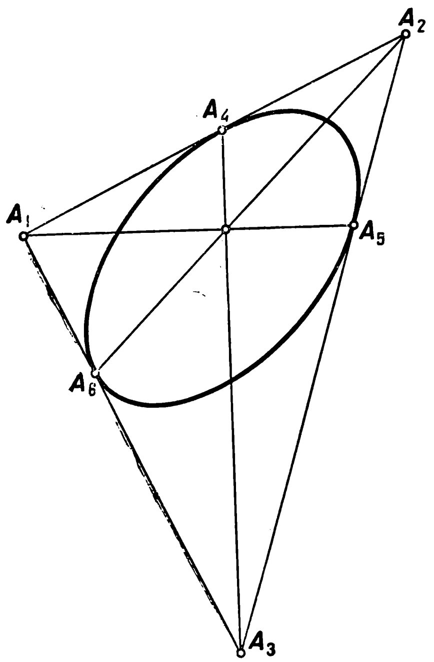


Рис. 311

4. Проективные координаты в проективном пространстве

Введение проективных координат точки (и прямой) на проективной плоскости мы дали, исходя из второй модели проективной плоскости. И здесь, конечно, можно было бы следовать тому же пути, вводя в рассмотрение четырехмерное евклидово пространство. Однако ввиду отсутствия геометрической наглядности такого построения мы выберем другой путь, по аналогии с формулами (1), которые были получены в п.1 этого дополнения и которые устанавливали связь однородных координат точки с ее проективными координатами.

Именно назовем проективной системой координат $(O_1O_2O_3O_4E)$ в проективном пространстве совокупность пяти точек O_1, O_2, O_3, O_4, E, из которых никакие четыре не принадлежат одной плоскости. Точки O_1, O_2, O_3, O_4 будем называть базисными, а точку E — единичной. Тетраэдр $O_1O_2O_3O_4$ будем называть базисным. Введем в проективном пространстве общую декартову систему координат $Oxyz$ и пусть в этой системе координат базисные точки и единичная точка проективной системы координат имеют координаты: $O_1(a_{11}:a_{21}:a_{31}:a_{41})$, $O_2(a_{12}:a_{22}:a_{32}:a_{42})$, $O_3(a_{13}:a_{23}:a_{33}:a_{43})$, $O_4(a_{14}:a_{24}:a_{34}:a_{44})$ и $E(e_1:e_2:e_3:e_4)$.

Пусть M — произвольная точка проективного пространства, а $y_1:y_2:y_3:y_4$ — ее однородные координаты (в системе $Oxyz$). Назовем проективными координатами точки M четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 (а также любую четверку чисел kx_1, kx_2, kx_3, kx_4, где k — любое число, не равное 0), определяемые из соотношений

$$\left.\begin{aligned} y_1&=a_{11}\rho_1x_1+a_{12}\rho_2x_2+a_{13}\rho_3x_3+a_{14}\rho_4x_4,\\ y_2&=a_{21}\rho_1x_1+a_{22}\rho_2x_2+a_{23}\rho_3x_3+a_{24}\rho_4x_4,\\ y_3&=a_{31}\rho_1x_1+a_{32}\rho_2x_2+a_{33}\rho_3x_3+a_{34}\rho_4x_4,\\ y_4&=a_{41}\rho_1x_1+a_{42}\rho_2x_2+a_{43}\rho_3x_3+a_{44}\rho_4x_4,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\rho_1+a_{12}\rho_2+a_{13}\rho_3+a_{14}\rho_4&=e_1,\\ a_{21}\rho_1+a_{22}\rho_2+a_{23}\rho_3+a_{24}\rho_4&=e_2,\\ a_{31}\rho_1+a_{32}\rho_2+a_{33}\rho_3+a_{34}\rho_4&=e_3,\\ a_{41}\rho_1+a_{42}\rho_2+a_{43}\rho_3+a_{44}\rho_4&=e_4.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В силу того, что точки O_1, O_2, O_3, O_4 не принадлежат одной плоскости, $\mathrm{Det}(a_{ik})\neq 0$, значит, эта система имеет и притом только одно решение ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4. Все числа ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, образующие это решение, отличны от нуля в силу того, что точка E не лежит в одной плоскости ни с одной из трех точек из числа четырех базисных.

Из соотношений (1) и (2) следует, что проективные координаты x_1, x_2, x_3, x_4 через однородные выражаются соотношениями

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ y_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ y_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ y_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ e_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ e_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ e_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & y_2 & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & y_3 & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & y_4 & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & e_1 & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & e_2 & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & e_3 & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & e_4 & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & y_2 & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & y_3 & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & y_4 & a_{44}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & e_1 & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & e_2 & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & e_3 & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & e_4 & a_{44}\end{vmatrix}}, \qquad x_4=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & y_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & y_3\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & y_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & e_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & e_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & e_3\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & e_4\end{vmatrix}}.$$

Из этих же формул следует, что проективные координаты базисных точек O_1, O_2, O_3, O_4 и единичной точки E проективной системы координат соответственно таковы:

$$O_1\,(1:0:0:0),$$
$$O_2\,(0:1:0:0),$$
$$O_3\,(0:0:1:0),$$
$$O_4\,(0:0:0:1),$$
$$E\,(1:1:1:1).$$

Если все точки O_1, O_2, O_3, O_4, E — собственные, то проективные координаты x_1 x_2, x_3, x_4 точки M пропорциональны произведениям

$$k_1d_1,\ k_2d_2,\ k_3d_3,\ k_4d_4$$

расстояний k_1, k_2, k_3, k_4 от единичной точки E до граней

$$O_2O_3O_4,\ O_1O_3O_4,\ O_1O_2O_4,\ O_1O_2O_3$$

базисного тетраэдра, на расстояния d_1, d_2, d_3, d_4 от точки M соответственно до тех же граней.

Этим расстояниям приписывается знак: k_1 и d_1 — одного знака, если точки O_1 и M лежат по одну сторону от грани $O_2O_3O_4$, и разного знака, если точки O_1 и M лежат по разные стороны от плоскости $O_2O_3O_4$ (аналогично приписываются знаки k_2 и d_2; k_3 и d_3, k_4 и d_4). Выбором точки E получаются различные проективные системы координат относительно базисного тетраэдра.

Однородная система координат теперь сама может быть рассматриваема как проективная. Базисными точками однородной системы координат являются несобственные точки осей координат и начало координат; точкой E будет единичная точка E общей декартовой системы координат. Покажем, какой геометрический смысл имеют проективные координаты точки M. Рассмотрим две плоскости, проходящие через прямую O_3O_4 и каждую из точек

$$M_1\,(x_1:x_2:x_3:x_4) \text{ и } E\,(1:1:1:1).$$

Эти плоскости пересекают прямую O_1O_2 в точках

$$E_{12}\,(1:1:0:0) \text{ и } M_{12}\,(x_1:x_2:0:0).$$

Рассмотрим четыре точки

$$O_1\,(1:0:0:0),\ O_2\,(0:1:0:0),\ E_{12} \text{ и } M_{12}.$$

Координаты точек E_{12} и M_{12} через координаты точек O_1 и O_2 выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} 1&=\alpha\cdot 1+\beta\cdot 0,\\ 1&=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 1, \qquad \alpha=1,\quad \beta=1,\\ 0&=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0,\\ 0&=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0,\end{aligned}$$

и, далее (для координат точки M_{12}):

$$\begin{aligned} x_1&=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0,\\ x_2&=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 1,\\ 0&=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0,\\ 0&=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0,\end{aligned}$$

где $\lambda=x_1$ и $\mu=x_2$. Значит, сложное отношение

$$(O_1O_2E_{12}M_{12})=\frac{x_1}{x_2} \text{ и т. д.},$$

т. е. отношение проективных координат точки имеет чисто геометрический смысл.

Отсюда следует важный вывод: проективные координаты точки, лежащей в проективном пространстве, вполне определяются заданием проективной системы координат $(O_1O_2O_3O_4E)$ (и не зависят от выбора той вспомогательной общей декартовой системы координат, при помощи которой проективные координаты определялись как линейные однородные функции однородных).

Вместе с тем из полученного соотношения $(O_1O_2E_{12}M_{12})=\frac{x_1}{x_2}$ вытекает геометрический способ построения точки в проективном пространстве по ее проективным координатам: строим точку E_{12}, в которой плоскость O_3O_4E пересе-

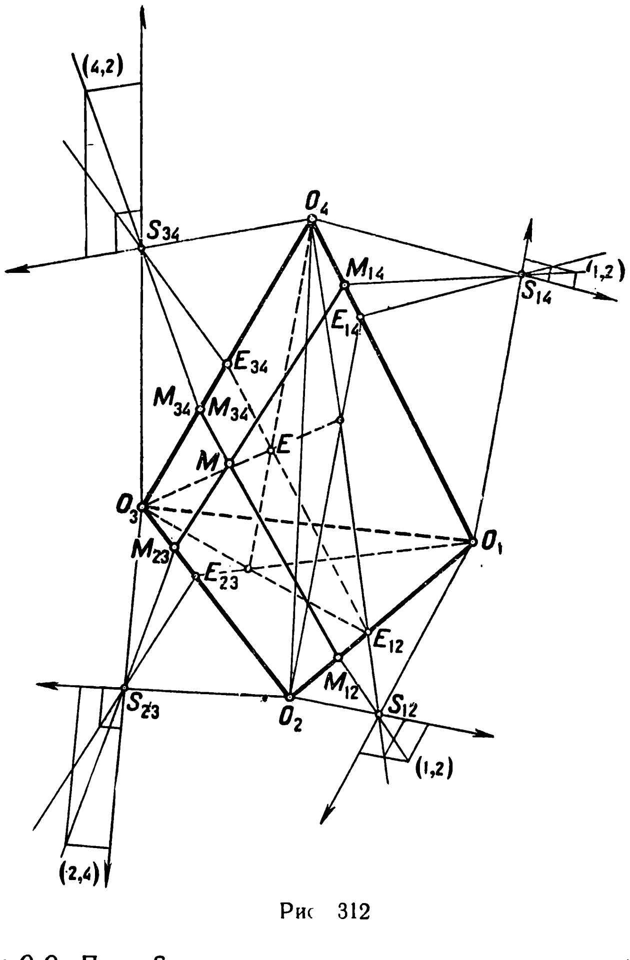


Рис. 312

кает прямую O_1O_2. Пусть S_{12} — произвольная точка, не лежащая на прямой O_1O_2. Проводим прямые O_1S_{12}, O_2S_{12} и $E_{12}S_{12}$. На прямой $E_{12}S_{12}$ берем произвольную точку, отличную от точки S_{12}, и принимаем ее за единичную точку общей декартовой системы координат с началом координат в точке S_{12} и осями координат $S_{12}O_1$ и $S_{12}O_2$. В этой системе координат строим точку (x_1, x_2). Тогда прямая, проходящая через эту точку и точку S_{12}, пересечет прямую O_1O_2 в точке M_{12}. Аналогично строим точки M_{34}, M_{24}, M_{41}. Точка M $(x_1:x_2:x_3:x_4)$ является точкой пересечения прямых $M_{12}M_{34}$ и $M_{23}M_{41}$.

На рис. 312 построена точка $M\,(1:2:4:2)$. Отметим также, что $x_1:x_2:x_3$ — проективные координаты проекции M_4 точки M на плоскость $O_1O_2O_3$ из точки O_4, если за базисные точки принять соответственно O_1, O_2, O_3, а за единичную точку принять проекцию единичной точки $E\,(1:1:1:1)$ из точки O_4 на плоскость $O_1O_2O_3$.

Аналогичный геометрический смысл имеют отношения $x_1:x_2:x_4$ и т. д.

5. Автополярный тетраэдр

Рассмотрим невырождающуюся поверхность второго порядка. Возьмем произвольную точку O_1, не лежащую на рассматриваемой поверхности и построим для нее полярную плоскость ω_1 относительно данной поверхности. В плоскости ω_1 возьмем произвольную точку O_2, не лежащую на данной поверхности; ее полярная плоскость ω_2 пройдет через точку O_1. На прямой, по которой пересекаются плоскости ω_1 и ω_2, возьмем произвольную точку O_3, не лежащую на данной поверхности; ее полярная плоскость ω_3 пройдет и через точку O_1, и через точку O_2. Пусть, наконец, O_4 — точка пересечения плоскостей ω_1, ω_2, ω_3. Тогда O_4 — полюс плоскости $O_1O_2O_3$.

Тетраэдр $O_1O_2O_3O_4$ обладает тем свойством, что каждая его грань является полярной плоскостью противоположной вершины.

Такой тетраэдр называется автополярным относительно данной поверхности второго порядка.

Для того чтобы уравнение невырождающейся поверхности второго порядка имело вид

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2=0, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы базисный тетраэдр $O_1O_2O_3O_4$ проективной системы координат был автополярным. Это доказывается аналогично соответствующей теореме для линий второго порядка (п. 2 настоящего дополнения).

Сохраняя в качестве базисного тетраэдра автополярный тетраэдр относительно поверхности второго порядка и принимая за новую единичную точку любую из точек:

$$E'(\pm\sqrt{|a_{11}|}:\pm\sqrt{|a_{22}|}:\pm\sqrt{|a_{33}|}:\pm\sqrt{|a_{44}|}), \tag{2}$$

приведем уравнение (1) к виду

$$\varphi=\varepsilon_1x_1^2+\varepsilon_2x_2^2+\varepsilon_3x_3^2+\varepsilon_4x_4^2=0, \quad \text{где } |\varepsilon_i|=1. \tag{3}$$

Если все ε_i одного знака, получаем мнимую поверхность. Если три из коэффициентов ε_i одного знака, а четвертый имеет противоположный знак, то получаем действительную овальную поверхность второго порядка:

$$\varphi=x_1^2+x_2^2+x_2^3-x_4^2=0 \tag{4}$$

Если два из ε_i равны $+1$, а два -1, то получаем тороидальную поверхность:

$$\varphi=x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0. \tag{5}$$

Выбор единичной точки для овальных и тороидальных поверхностей второго порядка имеет следующий геометрический смысл.

Если базисный тетраэдр $O_1O_2O_3O_4$ действительной невырождающейся поверхности является автополярным, то уравнение поверхности имеет вид

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2=0 \tag{6}$$

Будем считать, что в случае овальной поверхности

$$a_{11}>0,\ a_{22}>0,\ a_{33}>0,\ a_{44}<0$$

(тогда и только тогда точки O_1, O_2, O_3 являются внешними точками поверхности, а O_4 — внутренней), а в случае тороидальной поверхности

$$a_{11} > 0,\ a_{22} > 0,\ a_{33} < 0,\ a_{44} < 0.$$

В случае овальной действительной поверхности ребра O_1O_4, O_2O_4, O_3O_4 пересекают поверхность (6), каждое в двух действительных точках. Пусть E_{14}, E_{24}, E_{34} — точки пересечения прямых O_1O_4, O_2O_4 и O_3O_4 с овальной поверхностью (из указанных двух точек пересечения берем по одной на каждой прямой O_1O_4, O_2O_4, O_3O_4). Плоскости $O_2O_3E_{14}$, $O_3O_1E_{24}$, $O_1O_2E_{34}$ имеют и притом только одну общую точку E'. Примем ее за единичную точку проективной системы координат $(O_1O_2O_3O_4E')$. Пусть в этой системе координат уравнение (6) имеет вид

$$b_{11}x_1'^2 + b_{22}x_2'^2 + b_{33}x_3'^2 + b_{44}x_4'^2 = 0. \tag{7}$$

Точки E_{14}, E_{24}, E_{34} в системе $(O_1O_2O_3O_4E')$ имеют координаты

$$E_{14}\,(1:0:0:1),\ E_{24}\,(0:1:0:1),\ E_{34}\,(0:0:1:1),$$

и так как они лежат на поверхности (7), то

$$b_{11}+b_{44},\ b_{22}+b_{44},\ b_{33}+b_{44}=0.$$

и уравнение (7) приводится к виду

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = 0. \tag{8}$$

Обратно, для овальной поверхности (8), заданной уравнением вида (8), базисный тетраэдр $O_1O_2O_3O_4$ — автополярный, а точка E — точка пересечения плоскостей $O_2O_3E_{14}$, $O_3O_1E_{24}$, $O_1O_2E_{34}$, где E_{14}, E_{24}, E_{34} — соответственно точки пересечения с поверхностью прямых O_1O_4, O_2O_4, O_3O_4.

Если поверхность (6) — тороидальная (и $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} < 0$, $a_{44} < 0$), то ребра O_1O_4, O_2O_4 и, например, O_1O_3 пересекают поверхность (6) каждая в двух действительных и различных точках. Выбирая соответственно по одной из них E_{14}, E_{24} и E_{31}, примем за единичную точку E' точку пересечения плоскостей

$$O_2O_3E_{14},\quad O_3O_1E_{24},\quad O_2O_4E_{13}\ .$$

Тогда в системе $(O_1O_2O_3O_4E')$ точки E_{14}, E_{24}, E_{31} имеют координаты

$$E_{14}\,(1:0:0:1),\ E_{24}\,(0:1:0:1),\ E_{31}\,(1:0:1:0),$$

а уравнение поверхности (6) примет вид (7). Но так как точки E_{14}, E_{24}, E_{31} лежат на поверхности (7), то

$$b_{11}+b_{44}=0,\ b_{22}+b_{44}=0,\ b_{11}+b_{33}=0$$

и уравнение (8) приводится к виду

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2 = 0.$$

Заметим, что единичная точка лежит на поверхности. Обратно, уравнение (8) является уравнением тороидальной поверхности в проективной системе координат $(O_1O_2O_3O_4E')$, для которой базисный тетраэдр $O_1O_2O_3O_4$ является автополярным, а единичная точка E лежит на поверхности и является точкой пересечения плоскостей $O_2O_3E_{14}$, O_3O_1, E_{24}, $O_2O_4E_{13}$, где E_{14}, E_{24}, E_{13} — точки пересечения прямых O_1O_4, O_2O_4 и O_1O_3 с поверхностью.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава V

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Глава VI

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Глава XI

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ ОБЩИМ УРАВНЕНИЕМ

Глава XII

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ ОБЩИМ УРАВНЕНИЕМ

Глава XIII

ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Глава XIV

ЛИНЕЙНЫЕ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Глава XV

ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Петр Сергеевич Моденов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

БЗ 79—1969—8

Редактор *А. С. Пархоменко*
Редактор изд-ва *Т. Г. Батенина*
Художественный редактор
К. И. Журинская
Переплет художника *Л. Я. Рубен*
Технич. редактор *К. С. Чистякова*
Корректоры *С. С. Мазурская*,
Г. И. Кудинова, *Е. П. Утанина*

Сдано в набор — 14/VII — 1966 г. Подписано к печати — 18/VII — 1967 г. Л — 95463. Формат $60 \times 90/_{16}$. Физ. печ. л. 44,0. Уч.-изд. л. 51,33. Изд. № 71. Зак. 400. Тираж 50 000 экз. Бум. тип. № 2. Цена 1 р. 64 к.

Издательство
Московского университета
Москва, Ленинские горы
Административный корпус
Отпечатано с матриц
ордена Трудового Красного Знамени
Первой Образцовой типографии
имени А. А. Жданова Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28
в типографии изд-ва МГУ
Москва, Ленинские горы

Издание рассчитано на научных работников и аспирантов, а также студентов старших курсов, специализирующихся в указанных направлениях.

Заказы следует направлять по адресу: Москва, В-234.
Издательство МГУ. Отдел распространения.

1р. 64к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА