МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

УНИВЕРСИТЕТ ОБРАЗОВАНИЯ РЕНЕССАНС

ДАВЛЕТОВ Д.Э.

ОПИСАНИЕ И КАТЕГОРНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКТОРА ПОЛУАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

МОНОГРАФИЯ

Ташкент
"NIF MSH"
2024

УДК:517.12
ББК:22.1
Д15

Давлетов Д.Э.

Описание и категорные свойства функтора полуаддитивных функционалов. Монография. - Ташкент: «NIF MSH», 2024. – 87 стр.

В настоящей монографии рассмотрен универсальный нормальный функтор – функтор слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, положительно-однородных и полуаддитивных функционалов, и исследованы топологические и категорные свойства этого функтора в категории компактов и их непрерывных отображений.

Рецензенты:

Юнусов Г.Г.

к.т.н., доцент кафедры "Математика и информационные технологии" Университета образования Ренессанс

Болтаев Х.Х.

д.ф.ф.-м.н., доцент кафедры «Общая математика» ТГПУ

РЕКОМЕНДОВАНО К ПЕЧАТИ ПО РЕШЕНИЮ НАУЧНОГО СОВЕТА УНИВЕРСИТЕТА ОБРАЗОВАНИЯ РЕНЕССАНС ОТ 8 ФЕВРАЛЯ 2024 ГОДА № 6.

ISBN978-9910-793-49-3

ВВЕДЕНИЕ

Применение алгебраических методов к исследованию топологических пространств и их непрерывных отображений привело появлению нового направления топологии – теорию ковариантных функторов. Но в то же время стоит отметить, что ковариантные функториальные конструкции возникли в общей топологии практически с самого начала ее зарождения. Например, метрика Хаусдорфа на множестве непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства, топология Вьеториса для множества непустых замкнутых подмножеств топологического пространства, топологическое произведение топологических пространств. Следующие тридцать лет были изучены свойства гиперпространств метризуемых континуумов (польская школа топологии).

После работ С.Дитора и Л.Эйфлера [28] и Р.Хейдона [30] началось систематическое изучение функтора P *вероятностных мер. В 1969 году голландский математик де Грот ввёл понятия суперкомпактности и суперрасширения [31], после чего началось интенсивное исследование функтора* λ *суперрасширения.*

Начало исследований ковариантных нормальных функторов в категориях компактов и их непрерывных отображений и в различных других категорий восходит к фундаментальной работе [23] Е.В.Щепина, где он выделил ряд элементарных свойств ковариантных функторов в категории компактов и ввел понятие нормального функтора. Информацию о дальнейшем прогрессе исследований ковариантных функторов можно найти в обзорах [16]-[19], а также в [7]-[9], [12], [22], [32], [35].

1998 году Т.Радул в работе [33] начал исследовать функтор O *слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов в категории компактов и их непрерывных отображений. В этой же работе Т.Радулом доказано, что функтор* $O:Comp \to Comp$ *не является нормальным и,* *следовательно, исследование этого функтора намного сложнее, чем нормальных функторов. Появление этого функтора связано с тем, что в последнее время развивается теория нелинейных функционалов. Кроме того, функторы* P *– вероятностных мер,* $\exp$ *– экспоненты и* λ *– суперрасширения являются подфункторами функтора* O. *В работе [36] А.А.Заитов продолжил функтор* O *до функтора* $O\circ\beta : Tych \to Comp$, *и исследовал категорные свойства функтора* $O\circ\beta$. *А в работе [10] Р.Бешимов продолжил функтор* O *до функтора* $O_\beta : Tych \to Tych$ *в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Далее, в работе [5] Ш.А.Аюповым и А.А.Заитовым исследованы слабо аддитивные функционалы на произвольных частично упорядоченных линейных пространствах. О дальнейших развитиях в этом направлении можно ознакомиться в работах [6], [25]-[27] и [36].*

Следующие проблемы, поставленные в 1981 году на Пражском топологическом симпозиуме В.В.Федорчуком, определили практически новое направление исследований в теории ковариантных функторов (см. [19]):

1) Как ведут себя те или иные геометрические и топологические свойства топологических пространств при воздействии на них различными функторами?

2) Как ведут себя те или иные свойства отображений при воздействии на них различными функторами?

В 90-ые годы прошлого столетия появилась задача построения «универсального» функтора в том смысле, чтобы ранее известные (нормальные) функторы были его подфункторами. Вышеупомянутый функтор O, *построенный Т.Радулом, обладает свойством универсальности. Но он не является нормальным. В связи с этим Ш.А.Аюповым была поставлена задача нахождения нормального универсального функтора.*

Настоящая монография посвящена исследованию вопросов такого рода. А именно, рассмотрен универсальный нормальный *функтор – функтор слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, положительно-однородных и полуаддитивных функционалов, и исследованы топологические и категорные свойства этого функтора в категории компактов и их непрерывных отображений.*

ГЛАВА 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой главе приведем необходимые для изложения монографии известные понятия и факты. В первом параграфе даны определения понятий таких как обратный спектр, категория, функтор, монада и другие. Второй параграф посвящен основному объекту исследования – функционалам, определенным на пространстве функций.

1.1. Ковариантные функторы в категории компактов

1.1.1. Пусть X – произвольное множество и $\leq$ – отношение на X. Говорят [1], что $\leq$ направляет множество X или, что X направлено отношением $\leq$, если отношение $\leq$ обладает следующими свойствами:

а) если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$;

б) для всякого $x \in X$ имеем $x \leq x$;

с) для любых $x, y \in X$ существует такой элемент $z \in X$, что $x \leq z$ и $y \leq z$.

1.1.2. Пусть $\sum$ – направленное множество, и пусть каждому $\alpha \in \sum$ поставлено в соответствие топологическое пространство X_α. Пусть, далее, для любых $\alpha, \beta \in \sum$, таких, что $\beta \leq \alpha$, определено непрерывное отображение $\pi_\beta^\alpha : X_\alpha \to X_\beta$. Пусть, кроме того, $\pi_\gamma^\beta \circ \pi_\beta^\alpha = \pi_\gamma^\alpha$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \sum$, таких что $\gamma \leq \beta \leq \alpha$, и $\pi_\alpha^\alpha = \mathrm{id}_{X_\alpha}$ для каждого $\alpha \in \sum$. В этом случае говорят, что семейство $S = \left\{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \sum\right\}$ есть обратный спектр пространств X_α, отображения π_β^α называются связующими отображениями обратного спектра S (см., например [1], [2], [3], [4], [20] или [24]).

Пусть $S=\{X_\alpha,\pi_\beta^\alpha,\Sigma\}$ – обратный спектр. Элемент $\{x_\alpha\}$ произведения $\prod_{\alpha\in\Sigma} X_\alpha$ называется нитью обратного спектра S, если $\pi_\beta^\alpha(x_\alpha)=x_\beta$ для любых $\alpha,\beta,\in\Sigma$, удовлетворяющих неравенству $\beta\le\alpha$. Подпространство пространства $X\subseteq\prod_{\alpha\in\Sigma} X_\alpha$, состоящее из всех нитей спектра S называется пределом обратного спектра $S=\{X_\alpha,\pi_\beta^\alpha,\Sigma\}$ и обозначается через $X=\lim\limits_{\leftarrow} S$ или $X=\lim\limits_{\leftarrow}\{X_\alpha,\pi_\beta^\alpha,\Sigma\}$. Отображения $\pi_\alpha:\lim\limits_{\leftarrow} S\to X_\alpha$, т.е. проектирования $p_\alpha:\Pi\to X_\alpha$, рассматриваемые лишь на пределе X спектра S, называются сквозными проекциями, а отображения $\pi_\beta^\alpha: X_\alpha\to X_\beta$ при $\beta\le\alpha$, называются проекциями. Так как непрерывны проектирования $p_\alpha:\Pi\to X_\alpha$, то непрерывны и сквозные проекции $\pi_\alpha: X\to X_\alpha$. Отметим, что предел X обратного спектра $\{X_\alpha,\pi_\beta^\alpha,\Sigma\}$ из непустых компактов X_α непуст ([20], стр. 70, теорема Куроша).

Пусть дан обратный спектр $S=\{Y_\alpha,\pi_\beta^\alpha,\Sigma\}$, и пусть для каждого $\alpha\in\Sigma$ определено отображение $f_\alpha: X\to Y_\alpha$, причем

$$f_\alpha=\pi_\alpha^\beta\circ f_\beta$$

если $\beta>\alpha$. Тогда для любой точки $x\in X$ набор $\{f_\alpha(x)\}\in\Pi=\prod_{\alpha\in\Sigma} Y_\alpha$ является нитью спектра S, т.е. определено отображение $f: X\to Y$ множества X в предел Y спектра S. Это отображение называется пределом отображений f_α, $\alpha\in\Sigma$ и обозначается $f=\lim\limits_{\leftarrow} f_\alpha$.

1.1.3. Пусть $C=\{Q,M\}$ – семейство элементов двух сортов. Элементы из Q называются объектами, а элементы из M – морфизмами [20]. Для каждого морфизма f определена единственная упорядоченная пара (X,Y) объектов, и f называется морфизмом из X в Y. В этой ситуации X иногда обозначают как $\operatorname{dom} f$ а Y – как $\operatorname{rng} f$.

1.1.4. Семейство $C=\{Q,M\}$ называется [20] категорией, если выполнены следующие условия:

К1) для каждой пары морфизмов f и g с $\operatorname{rng} f=\operatorname{dom} g$ определен единственный морфизм h с $\operatorname{dom} h=\operatorname{dom} f$ и $\operatorname{rng} h=\operatorname{rng} g$, называемый композицией морфизмов f и g, и обозначаемый $g\circ f$;

К2) для каждого объекта $X\in Q$ существует единственный морфизм из X в X, обозначаемый id_X, такой, что

$$\mathrm{id}_Y\circ f=f=f\circ\mathrm{id}_X$$

для всякого морфизма $f:X\to Y$;

К3) $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$ для всякой тройки морфизмов с $\operatorname{rng} f=\operatorname{dom} g$ и $\operatorname{rng} g=\operatorname{dom} h$.

1.1.5. Пусть $C=\{Q,M\}$ и $C'=\{Q',M'\}$ – две категории. Отображение $F:C\to C'$, переводящее объекты в объекты, а морфизмы в морфизмы, называется ковариантным функтором из категории C в категории C', если:

F1) для всякого морфизма $f:X\to Y$ из категории C морфизм $F(f)$ действует из $F(X)$ в $F(Y)$;

F2) $F(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{F(X)}$ для всякого $X\in Q$;

F3) $F(f\circ g)=F(f)\circ F(g)$ для любых морфизмов f и g из M, если определена композиция $f\circ g$.

В дальнейшем под функтором подразумевается ковариантный функтор.

1.1.6. Пусть $F_i\colon C\to C'$, $i=1,2$, – два функтора из категории $C=\{Q,M\}$ в категорию $C'=\{Q',M'\}$. Семейство морфизмов

$$\Phi=\left\{ f_X : F_1(X)\to F_2(X) \,\middle|\, X\in Q \right\}\subset M'$$

называется естественным преобразованием функтора F_1 в функтор F_2, если для всякого морфизма $f\colon X\to Y$ категории C коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{f_X} & F_2(X) \\ {\scriptstyle F_1(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_2(f)} \\ F_1(Y) & \xrightarrow{f_Y} & F_2(Y). \end{array}$$

Через $Comp$ обозначается категорию, объектами которого являются компактные пространства, а морфизмами – их непрерывные отображения.

1.1.7. Пусть F_1, F_2 – функторы, действующие из категории $Comp$ в себя (в этом случае скажем, что функтор действует в категории $Comp$). Функтор F_1 называется подфунктором функтора F_2, если существует такое естественное преобразование $\Phi=\{f_X\}\colon F_1\to F_2$, что всякое отображение f_X – вложение.

Следующие определения даны Е.В.Щепиным (см. [23]).

Пусть $F\colon Comp\to Comp$ – ковариантный функтор.

1.1.8. F называется непрерывным, если для любого обратного спектра $S=\{X_\alpha,\pi_\alpha^\beta,A\}$ определен обратный спектр $F(S)=\{F(X_\alpha),F(\pi_\alpha^\beta),A\}$, и предел $\pi\colon F(\lim S)\to \lim F(S)$

отображений $F(\pi_\alpha): F(\lim S) \to F(X_\alpha)$, где $\pi_\alpha : \lim S \to X_\alpha$ – сквозные проекции, является гомеоморфизмом.

1.1.9. F называется сохраняющим вес, если $w(F(X)) = w(X)$ для любого бесконечного компакта X.

1.1.10. F называется мономорфным, если для любого вложения i компакта X в компакт Y отображение $F(i): F(X) \to F(Y)$ также является вложением. Из условие мономорфности функтора F вытекает, что $F(A)$ можно считать подпространством пространства $F(X)$, как только $A \subset X$. Отождествление $F(A)$ в пространство $F(X)$ осуществляется вложением $F(i): F(X) \to F(Y)$, где $i: X \to Y$ – тождественное вложение.

1.1.11. Функтор F называется эпиморфным, если он сохраняет сюръективность отображений компактов.

1.1.12. Функтор F называется сохраняющим пересечения, если для любого семейства $\{B_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств произвольного компакта имеет место

$$F\left(\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} F(B_\alpha).$$

1.1.13. Функтор F называется сохраняющим прообразы, если для любого непрерывного отображения $f: X \to Y$ компакта X в компакт Y и для всякого замкнутого подмножества $B \subset Y$ имеет место

$$F\left(f^{-1}(B)\right) = (F(f))^{-1}(F(B)).$$

1.1.14. Функтор $F: Comp \to Comp$ называется нормальным, если он непрерывен, сохраняет вес, пересечения и прообразы, мономорфен и эпиморфен, переводит пустое множество в пустое, а одноточечное в одноточечное.

1.1.15. Носителем точки $x \in F(X)$ называется такое замкнутое подмножество $\mathrm{supp}_F(x) \subseteq X$, что соотношения $A \supseteq \mathrm{supp}_F(x)$ и $x \in F(A)$ эквивалентны для любого замкнутого множества $A \subseteq X$.

Следующая конструкция предложена В. Н. Басмановым в работе [9].

1.1.16. Для функтора F через F_n обозначается функтор, ставящий в соответствие пространству X множество всех тех элементов $a \in F(X)$, носители которых состоят не более чем из n точек. Через k обозначается дискретное пространство, состоящее из k точек. Рассматривается отображение $\pi_{F,X,k} : C(k,X) \times F(k) \to F(X)$, определенное равенством

$$\pi_{F,X,k}(\xi,a) = F(\xi)a$$

при $\xi \in C(k,X), a \in F(k)$. Это отображение $\pi_{F,X,k}$ непрерывно, если функтор F непрерывен. Отображение $\pi_{F,X,k}$ иногда называют отображением Басманова.

1.1.17. Подфунктор F_k функтора F определяется следующим образом: для пространства X пространство $F_k(X)$ есть образ пространства $X^k \times F(k)$ при отображении $\pi_{F,X,k}$ и для отображения $f : X \to Y$ отображение $F_k(f)$ есть сужение $F(f)$ на $F_k(X)$. Функтор F называется функтором конечной степени n, если $F_n(X) = F(X)$ для произвольного пространства X, но $F_{n-1}(X) \neq F(X)$.

1.1.18. Монадой (или тройкой) на категории C называется [29] тройка $\mathbf{T} = \langle F, \psi, \eta \rangle$, где $F : C \to C$ – функтор, $\eta : \mathrm{Id} \to F$ (единица) и $\psi : F^2 \to F$ (умножение) – естественные преобразования. При этом для каждого объекта X выполнены равенства:

$$\psi_X \circ F(\eta_X) = \mathrm{Id}_{F(X)} \qquad \text{(правая едиица)},$$

$$\psi_X \circ \eta_{F(X)} = \mathrm{Id}_{F(X)} \qquad \text{(левая единица)},$$

$$\psi_X \circ F(\psi_X) = \psi_X \circ \psi_{F(X)} \qquad \text{(ассоциативность умножения)}.$$

Функтор F называется монадичным, если он может быть включен в некоторую монаду.

Множество $A \subset X$ называется всюду плотным в X, если $[A] = X$. Плотность пространства X определяется как наименьшее кардинальное число вида $|A|$, где A – всюду плотное подмножество пространства X. Это кардинальное число обозначается $d(X)$. При этом, если $d(X) = \tau$, $\tau \geq \aleph_0$, то пространство X называется τ-плотным. Если $d(X) \leq \aleph_0$, то говорят, что пространство X сепарабельно.

Семейство $B(x)$ окрестностей точки x называется базой топологического пространства X в точке x, если для любой окрестности V точки x существует такой элемент $U \in B(x)$, что $x \in U \subset V$.

Характер [16] точки x в топологическом пространстве X есть наименьшее кардинальное число вида $|B(x)|$, где $B(x)$ – база X в точке x; это кардинальное число обозначается $\chi(x, X)$.

Характер [16] топологического пространства X есть точная верхняя грань всех кардинальных чисел $\chi(x, X)$ для $x \in X$; это кардинальное число обозначается $\chi(X)$. Если $\chi(X) \leq \aleph_0$, то говорят, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Семейство γ назовем π-сетью [1] в точке $x \in X$, если для всякой окрестности U точки x существует непустое множество $B \in \gamma$ такое, что $B \subset U$. π-сеть в точке x, состоящая из открытых в X множеств, называется π-базой в точке x.

π-характер [16] точки x в топологическом пространстве X есть наименьшее кардинальное число вида $|B(x)|$, где $B(x)$ – π-база X в точке x; это кардинальное число обозначается $\chi(x, X)$.

π-характер топологического пространства X определяется следующим образом:

$$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(x, X) : x \in X\}.$$

Через $c(X)$ обозначается наименьшее из всех кардинальных чисел $\tau \geq \aleph_0$, удовлетворяющих следующему условию: мощность каждой системы попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X не превосходит τ.

Инвариант $c(X)$ называется числом Суслина пространства X. Если $c(X) \leq \aleph_0$, то говорят, что пространство X удовлетворяет условию Суслина.

Слабой плотностью [5] топологического пространства X называется наименьшее кардинальное число $\tau \geq \aleph_0$, такое, что в X существует π-база, распадающаяся на τ центрированных систем открытых множеств, т. е. существует π-база $\mathcal{B} = \bigcup\{B_\alpha : \alpha \in A\}$, где B_α – центрированная система открытых множеств для каждого $\alpha \in A$ и $|A| = \tau$.

Слабая плотность топологического пространства X обозначается через $wd(X)$. Если $wd(X) = \aleph_0$, то топологическое пространство X называется слабо сепарабельным.

Топологическое пространство X называется локально сепарабельным [16] в точке $x \in X$, если x имеет сепарабельную окрестность в X.

Топологическое пространство X называется локально сепарабельным, если оно локально сепарабельно в каждой точке $x \in X$.

Топологическое пространство X называется локально τ-плотным в точке $x \in X$, если τ наименьшее кардинальное число такое, что x имеет окрестность плотности τ в X.

Локальная плотность в точке x обозначается через $ld(x)$.

Локальная плотность пространства X определяется следующим образом:

$$ld(X) = \sup\{\ ld(x)\ : x \in X\ \}.$$

В работе Г. Джаббарова [8] понятие локальной слабой сепарабельности было определено следующим образом:

Топологическое пространство X называется локально слабо сепарабельным в точке $x \in X$, если x имеет слабую сепарабельную окрестность в X.

Топологическое пространство X называется локально слабо сепарабельным, если оно локально слабо сепарабельно в каждой точке $x \in X$.

Понятие локальной слабой сепарабельности может быть обобщено для любого кардинала $\tau > \aleph_0$ следующим образом:

Топологическое пространство X называется локально слабо τ-плотным в точке $x \in X$, если τ наименьшее кардинальное число такое, что x имеет окрестность слабой плотности τ в X.

Локальная слабая плотность в точке x обозначается через $lwd(x)$.

Локальная слабая плотность пространства X есть точная верхняя грань всех кардинальных чисел $lwd(x)$ для $x \in X$; это кардинальное число обозначается $lwd(x)$.

Топологическое пространство Y называется расширением [16] топологического пространства X, если X можно топологически вложить в Y как всюду плотное в Y подпространство, т.е. если существует гомеоморфизм $f: X \to Y$ пространства X на всюду плотное в Y подпространство $f(X)$.

Пусть $\{X_s : s \in S\}$ – семейство топологических пространств. Рассмотрим (декартово) произведение $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ множеств $\{X_s : s \in S\}$ и семейство отображений $\{p_s : s \in S\}$, где p_s соотносит точке $x = \{x_s\} \in \prod\{X_s : s \in S\}$ ее s-ю координату $x_s \in X_s$. Множество $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ с топологией, порожденной отображениями $\{p_s : s \in S\}$, т.е множествами вида

$$\bigcap_{s \in S_0} p_s^{-1}(U_s),$$

где $S_0 \subset S$ – конечное множество, U_s открыто в X_s, $s \in S$, называется (декартовым) произведением пространств $\{X_s : s \in S\}$, а сама топология называется тихоновской топологией на $\prod\{X_s : s \in S\}$; отображения $p_s : \prod\{X_s : s \in S\} \to X_s$ называются проекциями. Для любого семейства $\{X_s : s \in S\}$ топологических пространств символом $\prod\{X_s : s \in S\}$ будем далее обозначать топологическое пространство, снабженное тихоновской топологией. Произведение конечного семейства пространств $\{X_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$ обозначается также через $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$. Если $X_s = X$ для любого $s \in S$, то произведение $\prod\{X_s : s \in S\}$ обозначают также через X^τ, где $\tau = |S|$. Легко проверить, что пространство X^τ не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от множества S, а зависит только от его мощности τ. Произведение X^τ называется τ-й степенью пространства X; произведение $X \times X$ называют также квадратом пространства X.

Кардинал $\tau > \aleph_0$ называется калибром [14] пространства X, если для какого бы ни было семейства $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ непустых открытых в X множеств такого, что $|A| = \tau$, найдется $B \subset A$, для которого $|B| = \tau$, и $\cap\{U_\alpha : \alpha \in B\} \neq \varnothing$.

Положим $k(X) = \{\tau : \tau$ – есть калибр для $X\}$.

Кардинал $\tau > \aleph_0$ называется прекалибром [14] пространства X, если для какого бы ни было семейства $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ непустых открытых в X множеств таких, что $|A| = \tau$, найдется $B \subset A$, для которого $|B| = \tau$, и семейство $\{U_\alpha : \alpha \in B\}$ – центрированное.

Положим $pk(X) = \{\tau : \tau$ – есть прекалибр для $X\}$.

Кардинал $\min\{\tau : \tau^+$ – калибр $X\}$ называется числом Шанина пространства X и обозначается $sh(X)$.

Далее, $psh(X) = \min\{\tau : \tau^+$ – прекалибр $X\}$. Всегда

$$c(X) \le psh(X) \le sh(X) \le d(X).$$

Напомним, что бесконечное T_1-пространство X называется кружевным, если каждому открытому множеству $U \subseteq X$ можно поставить в соответствие последовательность $\{U_n : n \in N\}$ открытых подмножеств X так, чтобы выполнялись условия:

а) $[U_n] \subset U$, б) $\cup\{U_n : n \in N\} = U$, в) $U_n \subseteq V_n$, если $U \subseteq V$.

Описанное в определении строение на пространстве X называется кружевом. Ясно, что каждое метрическое пространство является кружевным.

В дальнейшем нам требуются следующие известные результаты

Утверждение 1.1.1 [21]. Кружевность есть наследственное свойство, т.е. каждое подпространство кружевного пространства кружевно.

Утверждение 1.1.2 [5]. Для любого топологического T_1-пространства X имеем

$$c(X) \le wd(X) \le d(X).$$

Теорема 1.1.1 [26]. Пусть τ - любой бесконечный кардинал. Тогда для всякого кружевного пространства X следующие условия эквивалентны:

1) Пространство X имеет всюду плотное подмножество мощности не больше чем τ;

2) Каждое открытое покрытие пространства X имеет подпокрытие мощности не больше чем τ;

3) Всякое дизъюнктные открытые подмножества пространства X имеет мощность не больше чем τ;

4) Пространство X имеет сеть мощности не больше чем τ.

Теорема 1.1.2 [5]. Пусть X – компактное хаусдорфово пространство и Y всюду плотное подмножество в X. Тогда

$$d(X) = wd(Y).$$

Утверждение 1.1.3 [5]. Если Y всюду плотно в X, то $wd(X) = wd(Y)$.

Утверждение 1.1.4 [5]. Если $wd(X) \le \tau$ и G - произвольное открытое подмножество пространства X, то $wd(G) \le \tau$.

Теорема 1.1.3 [5]. Если $wd(X) \le \tau$ и $f: X \to Y$ - непрерывное отображение из X на Y, то $wd(Y) \le \tau$.

Теорема 1.1.4 [16]. Если $d(X) \le \tau$ и $f: X \to Y$ - непрерывное отображение из X на Y, то $d(Y) \le \tau$.

Теорема 1.1.5 [5]. Если $wd(X_s) \le \tau$ для каждого $s \in S$ и $|S| \le 2^\tau$, то $wd(\prod_{s\in S} X_s) \le \tau$.

Пусть L – некоторое вещественное линейное пространство и x, y – две его точки. Отрезком в L, соединяющим точки x и y, называется совокупность всех элементов вида

$$\alpha x+\beta y, \quad \text{где } \alpha, \beta \geq 0 \qquad \text{и} \qquad \alpha+\beta=1.$$

Множество $M \subset L$ называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит и соединяющий их отрезок.

Утверждение 1.1.5 [11]. Сцепленная система ξ пространства X является MCC тогда и только тогда, когда она обладает следующим свойством полноты: если замкнутое множество $A \subset X$ пересекается с каждым элементом из ξ, то $A \in \xi$.

Это вытекает из того, что если замкнутое множество A пересекается с каждым элементом сцепленной системы ξ, то система $\xi \cup \{A\}$ также сцеплена.

Обозначим λX множество всех MCC пространства X. Для замкнутого множества $A \subset X$ положим

$$A^{+}=\{\xi \in \lambda X : A \in \xi\}.$$

Для открытого множества $U \subset X$ положим

$$O(U)=\{\xi \in \lambda X : \exists F \in \xi,\ F \subset U\}$$

Семейство множеств вида $O(U)$ покрывает множество λX ($O(X)=\lambda X$), поэтому образует открытую предбазу топологии на λX. Множество λX, снабженное этой топологией, называется суперрасширением пространства X. Известно, что операция λ является ковариантным функтором [11].

Замкнутую предбазу пространства λX образуют множества вида A^{+}.

Семейство всех множеств вида

$$O(U_1,U_2,\ldots,U_n)=\{\xi \in \lambda X : \textit{для}\ \forall\ i=1,\ldots,n\ \ \exists F_i \in \xi \ \textit{такое, что}\ F_i \subset U_i\},$$

где $U_1,U_2,\ldots,U_n$ - последовательность открытых подмножеств пространства X, образуют базу топологии на λX.

Следующие понятия были рассмотрены в работе [9].

Определение 1.1.1. Пусть X – топологическое пространство, λX - его суперрасширение. MCC $\xi \in \lambda X$ назовем тонкой, если она содержит хотя бы один конечный элемент F, и обозначим через $TMCC$.

Определение 1.1.2. Тонким суперядром (или тонким суперрасширением) топологического пространства X назовем пространство:

$$\lambda^* X = \{ \xi \in \lambda X : \xi \ - TMCC \}.$$

Теорема 1.1.6. Пусть X – бесконечное T_1-пространство, тогда

1) $\pi w(\lambda X) = \pi w(X)$;

2) $d(\lambda^* X) = d(X)$.

Определение 1.1.3. Пусть X – топологическое пространство, φ кардинальнозначная функция и τ – кардинальное число. Максимальную сцепленную систему $\xi \in \lambda X$ назовем φ_τ-максимальной (коротко φ_τ-MCC), если она содержит хотя бы один элемент F такой, что $\varphi(F) \le \tau$.

Определение 1.1.4. φ_τ-суперядром (или τ-суперрасширением пространства X относительно функции φ) назовем следующее пространство:

$$\lambda_\tau^\varphi = \{\xi \in \lambda X : \xi \ \text{является}\ \varphi_\tau - MCC\}.$$

1.2. Функционалы на пространстве функций

1.2.1. Пусть X – компакт. Через $C(X)$ обозначим пространство всех непрерывных функций $f: X \to \mathbb{R}$ с обычными (поточечными) операциями и sup-нормой, т.е. с нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Для каждого $c \in \mathbb{R}$ через c_X обозначим постоянную функцию, определяемую по формуле

$c_X(x)=c$, $x\in X$. Пусть $\varphi,\psi\in C(X)$. Неравенство $\varphi\le\psi$ означает, что $\varphi(x)\le\psi(x)$ для всех $x\in X$.

1.2.2[21]. Функционал $\nu:C(X)\to\mathbb{R}$ называется:

1) слабо аддитивным, если для всех $c\in\mathbb{R}$ и $\varphi\in C(X)$ выполняется равенство $\nu(\varphi+c_X)=\nu(\varphi)+c\cdot\nu(1_X)$;

2) сохраняющим порядок, если для функций $\varphi,\psi\in C(X)$ из $\varphi\le\psi$ вытекает $\nu(\varphi)\le\nu(\psi)$;

3) нормированным, если $\nu(1_X)=1$;

4) положительно-однородным, если $\nu(\lambda\varphi)=\lambda\nu(\varphi)$ для всех $\varphi\in C(X)$, $\lambda\in\mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$;

5) полуаддитивным, если $\nu(f+g)\le\nu(f)+\nu(g)$ для всех $f,g\in C(X)$.

1.2.3. Для компакта X через $O(X)$ обозначается [33] множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Элементы множества $O(X)$, для краткости, называют слабо аддитивными функционалами. Через $OH(X)$ обозначается [11] множество всех положительно-однородных функционалов из $O(X)$, а через $OS(X)$ обозначим множество всех полуаддитивных функционалов из $OH(X)$. Эти множества снабжаются топологией поточечной сходимости. Базу окрестностей функционала $\mu\in O(X)$ (соответственно, $\mu\in OH(X)$, $\mu\in OS(X)$) образуют множества вида

$$\langle\mu;\varphi_1,\dots,\varphi_k;\varepsilon\rangle=\{\nu\in O(X):|\mu(\varphi_i)-\nu(\varphi_i)|<\varepsilon,\ i=1,\dots,k\}$$

(соответственно,

$$\langle\mu;\varphi_1,\dots,\varphi_k;\varepsilon\rangle=\{\nu\in OH(X):|\mu(\varphi_i)-\nu(\varphi_i)|<\varepsilon,\ i=1,\dots,k\},$$

$$\langle \mu;\varphi_1,\dots,\varphi_k;\varepsilon\rangle=\left\{\nu\in OS(X):\left|\mu(\varphi_i)-\nu(\varphi_i)\right|<\varepsilon,\ i=1,\dots,k\right\}\quad\Big),$$

где $\varphi_i\in C(X)$, $i=1,\dots,k$, $k\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$.

1.2.4[21]. Функционал $\nu:C(X)\to\mathbb{R}$ называется полумультипликатив-ным, если $\nu(\varphi\psi)\le\nu(\varphi)\nu(\psi)$ для всех $\varphi,\psi\in C_+(X)$, где $C_+(X)=\left\{\varphi\in C(X):\varphi\ge 0\right\}$.

1.2.5. Очевидно, что для каждого компакта X пространство $P(X)$ вероятностных мер (т.е. пространство всех линейных, неотрицательных, нормированных функционалов) является подпространством пространства $OS(X)$.

1.2.6. Пусть X и Y – компактные пространства, а $f:X\to Y$ – непрерывное отображение. Отображение $O(f):O(X)\to O(Y)$, определенное по формуле

$$O(f)(\nu)(\varphi)=\nu(\varphi\circ f),$$

где $\nu\in O(X)$ и $\varphi\in C(Y)$, является непрерывным [33]. Следовательно, отображение $OH(f):OH(X)\to OH(Y)$ также непрерывно как сужение $OH(f)=O(f)\big|_{OH(X)}$.

1.2.7. Функторы O и OH удовлетворяют всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов непрерывных отображений компактов [33], [11].

1.2.8. В диссертации под размерностью понимается алгебраическая размерность линейных пространств [13]-[15].

1.2.9. Пусть L – некоторое вещественное линейное пространство и x, y – две его точки. Отрезком в L, соединяющим точки x и y, называется совокупность всех элементов вида

$$\alpha x+\beta y, \quad \text{где } \alpha, \beta \geq 0 \quad \text{и} \quad \alpha+\beta=1.$$

Множество $M \subset L$ называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит и соединяющий их отрезок.

1.2.10. Для топологического пространства X через $w(X)$ обозначают [1] вес, т.е. наименьшую из мощностей баз пространства X.

1.2.11. Для компакта X через $\exp X$ обозначается [20] пространство всех непустых замкнутых подмножеств компакта X. Множество $\exp X$ снабжается топологией Вьеториса. База этой топологии состоит из множеств вида

$$\langle U_1,\ldots U_k\rangle=\left\{F \in \exp X: F \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i, F \bigcap U_i \neq \varnothing, i=1,\ldots,k\right\},$$

где U_i – открытые в X множества, $i=1,\ldots,k$, $k \in \mathbb{N}$. Известно [20], что операция $\exp$ является ковариантным функтором.

1.2.12. Напомним, что система ξ замкнутых подмножеств пространства X называется сцепленной [20], если любые два элемента из ξ пересекаются. Через λX обозначается множество всех максимальных сцепленных систем пространства X. Для открытого множества $U \subset X$ полагается

$$W(U)=\{\xi \in \lambda X \text{ существует такое } F \in \xi, \text{ что } F \subset U\}.$$

Семейство $\{W(U):U$ открыто в $X\}$ образует открытую предбазу топологии на λX. Множество λX, снабженное этой топологией, называется [31] суперрасширением пространства X. Известно [20], что операция λ является ковариантным функтором.

Теорема 1.2.3 [15]. Для произвольного непрерывного отображения $f:X\to Y$, где X и Y – тихоновские пространства, следующие условия равносильны:

1) Отображение f – совершенно;

2) Какова бы ни была компактификация γY продолжение $F_\gamma:\beta X\to\gamma Y$ отображения f удовлетворяет условию $F_\gamma(\beta X\setminus X)\subset\gamma Y\setminus Y$;

3) Продолжение $F:\beta X\to\beta Y$ отображения f удовлетворяет условию $F(\beta X\setminus X)\subset\beta Y\setminus Y$;

4) Существует компактификация γY, такая, что для продолжения $F_\gamma:\beta X\to\gamma Y$ отображения f выполняется условие $F_\gamma(\beta X\setminus X)\subset\gamma Y\setminus Y$.

Теорема 1.2.4 [20]. Функтор $P_\tau:Tych\to Tych$ сохраняет класс совершенных отображений.

Пусть $F:Comp\to Comp$ – произвольный слабо нормальный функтор и $X\in Ob(Tych)$. Положим $F_\beta(X)=\{x\in F(\beta X):supp(x)\subseteq X\}$. Если же $f:X\to Y$ – морфизм категории $Tych$, то положим $F_\beta(f)=F(\beta f)|F_\beta(X)$, где $\beta f:\beta X\to\beta Y$ – Стоун-Чеховское продолжение отображения f. Используя нормальность функтора F можно показать, что определение $F_\beta(f)$ корректно, то есть $F(\beta f)F_\beta(X)\subseteq F_\beta(Y)$. Нетрудно видеть также, что F_β является ковариантным функтором категории $Tych$ в себя [12].

Для тихоновского пространства X положим

$F_n(X)=\{\mu\in F_\beta(X):|\operatorname{supp}(\mu)|\le n\}$, где n-натуральное число, $F_\omega(X)=\{\mu\in F_\beta(X):|\operatorname{supp}(\mu)|<\infty\}$. Ясно, что $F_\omega(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n(X)$.

Для конечного дискретного пространства $X=\{1,2,\ldots,n\}$ положим $F(X)=F(n)$.

Заметим, что когда $F\in\{\exp,P,OS\}$ конструкция F_n порождает подфунктор соответствующего функтора F.

Напомним определение отображения В.Н.Басманова $\pi_{F,X}:X^n\times F(n)\to F_n(X)$, где $F:Comp\to Comp$ - нормальный функтор, действующий в категорию компактов. Мы отождествляем X^n с множеством $C(n,X)$ отображений из $\{1,2,\ldots,n\}$ в X и полагаем $\pi_{F,X}(\xi,a)=F(\xi)(a)$, где $\xi\in X^n$, $a\in F(n)$. Заметим, что отображение $\pi_{F,X}$ непрерывно [3].

Для функтора P вероятностных мер имеем

$$P(n)=\sigma^{n-1},$$

где σ^{n-1}-$(n-1)$-мерный симплекс. Отображение В.Н.Басманова $\pi_{P,X}:X\times\sigma^{n-1}\to P_n(X)$ определяется формулой

$$\pi_{P,X}(x_1,\ldots,x_n,m_1,\ldots,m_n)=\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{x_i},$$

где $(m_1,\ldots m_n)\in\sigma^{n-1}$, $\sum_{i=1}^{n}m_i=1$ и $m_i\ge 0$ для каждого $i\in N$, а δ_{x_i} – меры Дирака в точках x_i.

Комментарии к первой главе

Данная главе перечисляются известные понятия и факты, относящиеся к общей топологии, теории ковариантных функторов, функциональному анализу. Приведены определения обратного спектра, категории, нормального функтора в смысле Щепина, различные типы функционалов, определенных на пространстве функций и некоторые свойства этих объектов.

ГЛАВА 2. ОПИСАНИЕ ПОЛУАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА ПОЛУАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА $C(X)$

В этой главе исследуется слабо аддитивные, сохраняющие порядок, нормированные, положительно-однородные и полуаддитивные функционалы $\nu : C(X) \to \mathbb{R}$, определенные на пространстве $C(X)$ всех непрерывных вещественных функций компакта X, изучается алгебраическая размерность пространства полуаддитивных функционалов.

2.1. Общий вид полуаддитивных функционалов

В этом параграфе мы получим общий вид слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, положительно-однородных и полуаддитивных функционалов на $C(X)$.

Предложение 2.1.1 Для любого компакта X пространство $OS(X)$ является выпуклым компактом.

Доказательство. Так как $OS(X) \subset OH(X)$ и $OH(X)$ – выпуклое компактное множество [11], то достаточно показать, что $OS(X)$ является выпуклым замкнутым подмножеством в $OH(X)$. Пусть $\nu_1, \nu_2 \in OS(X)$ и $t \in [0,1]$. Имеем

$$(t\nu_1 + (1-t)\nu_2)(\varphi + \psi) = t\nu_1(\varphi + \psi) + (1-t)\nu_2(\varphi + \psi) \le$$
$$\le t\nu_1(\varphi) + t\nu_1(\psi) + (1-t)\nu_1(\varphi) + (1-t)\nu_2(\psi) = (t\nu_1 + (1-t)\nu_2)(\varphi) +$$
$$+ (t\nu_1 + (1-t)\nu_2)(\psi),$$

т.е. функционал $t\nu_1 + (1-t)\nu_2$ является полуаддитивным.

Откуда следует, что

$$tv_1+(1-t)v_2\in OS(X).$$

Пусть теперь $(\nu_\alpha)_{\alpha\in I}\subset OS(X)$ – произвольная сходящаяся сеть и $\nu_0\in OH(X)$ –предел этой сети. Покажем что $\nu_0\in OS(X)$. Поскольку $\nu_\alpha(\varphi+\psi)\le\nu_\alpha(\varphi)+\nu_\alpha(\psi)$ для всех $\varphi,\psi\in C(X),\alpha\in I$, то

$$\lim\nu_\alpha(\varphi+\psi)\le\lim(\nu_\alpha(\varphi)+\nu_\alpha(\psi))=\lim\nu_\alpha(\varphi)+\lim\nu_\alpha(\psi)=\nu_0(\varphi)+\nu_0(\psi).$$

С другой стороны, $\lim\nu_\alpha(\varphi+\psi)=\nu_0(\varphi+\psi)$

Это показывает что $\nu_0(\varphi+\psi)\le\nu_0(\varphi)+\nu_0(\psi)$. Значит, $\nu_0\in OS(X)$. Предложение 2.1.1 доказано.

Пусть A – непустое подмножество пространства $P(X)$ положительных, нормированных линейных функционалов на $C(X)$ и $f\in C(X)$. Тогда $|\mu(f)|\le\|f\|$ для любого $\mu\in A$, и поэтому множество $\{\mu(f):\mu\in A\}$ ограничено сверху. Следовательно, для любого $f\in C(X)$ существует число

$$\nu_A(f)=\sup\{\mu(f):\mu\in A\}. \tag{2.1}$$

Предложение 2.1.2. Пусть A – непустое подмножество пространства $P(X)$. Тогда

а) функционал $\nu_A:C(X)\to\mathbb{R}$ принадлежит $OS(X)$;

б) $\nu_A=\nu_{co(A)}$, где $co(A)$ – выпуклая оболочка A;

в) $\nu_A=\nu_{cl(A)}$, где $cl(A)$ – замыкание A;

г) $\nu_A=\nu_{cl(co(A))}$.

Доказательство. а) 1) Пусть $f\in C(X)$ и $c\in\mathbb{R}$. Имеем

$$\nu_A(f+c_X)=\sup\{\mu(f+c_X):\mu\in A\}=\sup\{\mu(f)+c:\mu\in A)=$$

$$=\sup\{\mu(f):\mu\in A\}+c=\nu_A(f)+c.$$

2) Возьмем $f, g \in C(X)$ такие, что $f \le g$. Тогда

$$\nu_A(f) = \sup\{\mu(f) : \mu \in A\} \le \sup\{\mu(g) : \mu \in A\} = \nu_A(g).$$

3) $\nu_A(1_X) = \sup\{\mu(1_X) : \mu \in A\} = \sup\{1 : \mu \in A\} = 1.$

4) Пусть $f \in C(X)$ и $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$\nu_A(tf) = \sup\{\mu(tf) : \mu \in A\} = \sup\{t\mu(f) : \mu \in A\} = t\sup\{\mu(f) : \mu \in A\} = t\nu_A(f)$$

5) Пусть $f, g \in C(X)$. Тогда

$$\nu_A(f+g) = \sup\{\mu(f+g) : \mu \in A\} = \sup\{\mu(f) + \mu(g) : \mu \in A\} \le$$
$$\le \sup\{\mu(f) : \mu \in A\} + \sup\{\mu(g) : \mu \in A\} = \nu_A(f) + \nu_A(g).$$

Таким образом, $\nu_A \in OS(X)$.

б) Поскольку $A \subset co(A)$, то $\nu_A(f) \le \nu_{co(A)}(f)$ для любого $f \in C(X)$. Покажем, что $\nu_A(f) \ge \nu_{co(A)}(f)$ для любого $f \in C(X)$.

Пусть $f \in C(X)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\mu_\varepsilon \in co(A)$ такое что $\mu_\varepsilon(f) \ge \mu_{co(A)}(f) - \varepsilon$. Так как $\mu_\varepsilon \in co(A)$ то μ_ε имеет вид $\sum_{i=1}^{n} t_k \mu_k$, где $\mu_k \in A$, $t_k \ge 0$, $k = \overline{1,n}$, $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$. Поскольку $\mu_k(f) \le \mu_A(f)$, то

$$\mu_{co(A)}(f) - \varepsilon \le \mu_\varepsilon(f) = \sum_{k=1}^{n} t_k \mu_k(f) \le \sum_{k=1}^{n} t_k \nu_A(f) = \nu_A(f) \ ,$$

т.е. $\nu_{co(A)}(f) - \varepsilon \le \nu_A(f)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим, что $\nu_{co(A)}(f) \le \nu_A(f)$, т.е. $\nu_A(f) = \nu_{co(A)}(f)$.

в) Так как $A \subset cl(A)$, то $\nu_A(f) \le \nu_{cl(A)}(f)$ для любого $f \in C(X)$. Покажем, что $\nu_A(f) \ge \nu_{cl(A)}(f)$ для любой $f \in C(X)$.

Возьмём $f \in C(X)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\mu_\varepsilon \in cl(A)$ такое, что $\mu_\varepsilon(f) \ge \nu_{cl(A)}(f) - \varepsilon$. Так как $\mu_\varepsilon \in cl(A)$, то существует $\mu_0 \in A$ такое, что $|\mu_\varepsilon(f) - \mu_0(f)| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\nu_{cl(A)}(f) - \varepsilon \le \mu_\varepsilon(f) < \mu_0(f) + \varepsilon \le \nu_A(f) + \varepsilon,$$

т.е. $\nu_{cl(A)}(f) - 2\varepsilon < \nu_A(f)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем, что $\nu_{cl(A)}(f) \le \nu_A(f)$, т.е. $\nu_A(f) = \nu_{cl(A)}(f)$.

г) непосредственно следует из б) и в). Предложение 2.1.2 доказано.

Следующий результат показывает, что формула (2.1) дает общий вид функционалов из $OS(X)$.

Теорема 2.1.3. Для всякого $\nu \in OS(X)$ существует непустой выпуклый компакт A в $P(X)$ такой, что $\nu = \nu_A$, где ν_A функционал вида (2.1), при этом для каждого $f \in C(X)$ существует $\mu \in A$ такое, что $\nu(f) = \mu(f)$.

Доказательство. Пусть ν – произвольный элемент из $OS(X)$. Положим $A = \{\mu \in P(X) : \mu \le \nu\}$, где $\mu \le \nu$ означает, что $\mu(f) \le \nu(f)$ при всех $f \in C(X)$. Множество A, очевидно является выпуклым замкнутым подмножеством $P(X)$. Следовательно, A – выпуклый компакт в $P(X)$. Покажем, что A – искомое множество.

Ясно, что $\nu_A \le \nu$. Следовательно, для доказательства равенства $\nu_A = \nu$ достаточно показать, что для всякого $h \in C(X)$ найдётся $\mu \in A$ такое, что $\mu(h) = \nu(h)$.

Пусть h – фиксированный элемент из $C(X)$. Обозначим $C = \{th + c_X : t, c \in \mathbb{R}\}$ ясно что C – подпространство в $C(X)$, образующими которого являются функция h и все константы. Покажем, что формула

$$\mu(th+c_X)=t\nu(h)+c,\ \ t,c\in\mathbb{R} \tag{2.2}$$

определяет на C положительный линейный функционал такой, что

i) $\mu\,(h)=\nu(h)$;

ii) $\mu(g)\le\nu(g),\ \ g\in C$;

iii) $\mu\,(1_X)=1$.

Сначала проверим корректность определения μ.

Случай 1. $h\equiv c'=const.$ Пусть $g\in C$ и $g=t_1c'+c_1=t_2c'+c_2$, где t_i,c_i произвольные числа. Имеем

$$t_1\nu(h)+c_1=t_1\nu(c'_X)+c_1=t_1c'+c_1=t_2c'+c_2=t_2\nu(c'_X)+c_2=t_2\nu(h)+c_2.$$

Следовательно, значение μ на g не зависит от способа разложения g.

Случай 2. $h\ne const.$ В этом случае произвольная $g\in C$ единственным образом разлагается на сумму вида $g=th+c_X$. Действительно, если $t_1h+c_1\equiv t_2h+c_2$ $(t_i\in\mathbb{R},\ c_i\in\mathbb{R},\ i=1,2)$, то $(t_2-t_1)h\equiv c_2-c_1$. Так как $h\ne const$ то $t_1=t_2,\ c_1=c_2$.

Установим , что μ линеен на C. Пусть $g_i=t_i\,h+c_i,\ t_i,\ c_i\in\mathbb{R},\ i=1,2.$ Имеем

$$\mu\,(g_1+g_2)=(t_1+t_2)\nu(h)+(c_1+c_2)=(t_1\nu(h)+c_1)+(t_2\nu(h)+c_2)=\mu(g_1)+\mu(g_2)$$

т.е. μ аддитивен на C. Для $g=th+c$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ имеем

$$\mu(\alpha g)=\mu(\alpha th+\alpha c)=\alpha t\nu(h)+\alpha c=\alpha(t\nu(h)+c)=\alpha\mu(g).$$

т.е. μ однороден на C. Таким образом, μ линеен на C. Этим установлена корректность определения μ.

Переходим проверке условий i)–iii). Ясно, что μ удовлетворяет условиям i), iii). Покажем, что условие ii) также верно. Пусть $g=th+c$ элемент из C.

1) Случай, когда $t=0$, тривиален.

2) Случай $t>0$. В этом случае

$$\mu(g)=t\nu(h)+c=t(\nu(h)+\frac{c}{t})=t\nu(h+\frac{c}{t})=\nu(th+c)=\nu(g).$$

Случай $t<0$.

$$\begin{aligned}\mu(g)&=t\nu(h)+c=t\nu(h+\frac{c}{t})=-|t|\nu(h+\frac{c}{t})=-\nu(|t|h+|t|\frac{c}{t})=\\&=-\nu(-th-c)=-\nu(-g)=-(\nu(-g)+\nu(g))+\nu(g)\leq\\&\leq-\nu(-g+g)+\nu(g)=-\nu(0_X)+\nu(g)=\nu(g).\end{aligned}$$

Итак, мы показали, что на C существует линейный функционал μ, удовлетворяющий соотношениям i), ii), iii). По теореме Хана-Банаха линейный функционал μ имеет продолжение на $C(X)$ (которое также обозначим через μ) такое, что

$$\begin{aligned}&\mu(h)=\nu(h);\\&\mu(g)\leq\nu(g),\ \ g\in C(X);\\&\mu(1_X)=1.\end{aligned}$$

Неравенство $\mu(g)\leq\nu(g)$ обеспечивает, что $|\mu(f)|\leq 1$ для любого $f\in C(X)$, $|f|\leq 1_X$. Отсюда, и из $\mu(1_X)=1$ получим, что

$\mu \in P(X)$. Вновь из неравенства $\mu(g) \le \nu(g)$, $(g \in C(X))$ получим, что $\mu \in A$. Теорема 2.1.3 доказана.

Следующий результат показывает, что соответствие $A \leftrightarrow \nu_A$, где A –непустой выпуклый компакт в $P(X)$ задает взаимно однозначное отображение между множеством $OS(X)$ и выпуклыми компактными подмножествами $P(X)$.

Теорема 2.1.4. Если A и B – непустые выпуклые компакты в $P(X)$, то $\nu_A = \nu_B$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

Доказательство. Пусть сначала $A \ne B$. Можно считать, что найдется $\mu_O \in B \setminus A$. Так как A – непустой выпуклый компакт и $\mu_O \notin A$, то существует открытая окрестность W линейного функционала μ_O такая, что $W \cap A = \varnothing$. При этом можно считать, что $W = \left\{ \mu \in P(X) : \left| \mu(\varphi_i) - \mu_O(\varphi_i) \right| < \varepsilon,\ i = \overline{1,n} \right\}$, где $\varphi_i \in C(X),\ i = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0.$

Теперь определим отображение $\Phi : P(X) \to \mathbb{R}^n$ по правилу

$$\Phi(\mu) = (\mu(\varphi_1), \dots, \mu(\varphi_n)) \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in P(X).$$

Ясно, что Φ – непрерывное аффинное отображение. Следовательно, $\Phi(A)$ – непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Из $W \cap A = \varnothing$ вытекает, что $\Phi(\mu_O) \notin \Phi(A)$. Следовательно, по теореме Хана-Банаха найдется [13] линейный функционал $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, разделяющий точку $\Phi(\mu_O)$ и выпуклый компакт $\Phi(A)$, т. е.

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(\varphi_i) : \mu \in A \right\} < \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_O(\varphi_i). \tag{2.3}$$

Положим $f=\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$. Из (2.3) получим, что $\sup\{\mu(f):\mu\in A\}<\mu_O(f)$. Это означает, что $\nu_A(f)<\mu_O(f)$. Но $\mu_O\in B$. Следовательно $\mu_O(f)\le\nu_B(f)$. Отсюда $\nu_A(f)<\nu_B(f)$. Это показывает, что $\nu_A\ne\nu_B$.

Пусть теперь $\nu_A\ne\nu_B$. Можно считать, что существует $f\in C(X)$ такое, что $\nu_A(f)<\nu_B(f)$. Пусть $\varepsilon=\nu_B(f)-\nu_A(f)$. Возьмем $\mu_O\in B$ такой, что $\mu_O(f)>\nu_B(f)-\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\mu_O(f)>\nu_B(f)-\frac{\nu_B(f)-\nu_A(f)}{2}=\frac{\nu_B(f)+\nu_A(f)}{2}>\nu_A(f)$$

т.е. $\mu_O(f)>\nu_A(f)$. Следовательно $\mu_O(f)>\lambda(f)$, для всех $\lambda\in A$. Это означает, что $\mu_O\notin A$, и поэтому $A\ne B$. Теорема 2.1.4 доказана.

Далее, рассматривая элемент $\nu_A\in OS(X)$, всегда будем считать, что A – непустой выпуклый компакт в $P(X)$.

Следствие 2.1.5. Функционал $\nu_A\in OS(X)$ принадлежит $P(X)$ тогда и только тогда, когда A – одноточечное множество.

Предложение 2.1.6. Пусть A и B – выпуклые компакты в $P(X)$, $0<t<1$ и $tA+(1-t)B=\{t\lambda+(1-t)\mu:\lambda\in A,\ \mu\in B\}$. Тогда

$$t\nu_A+(1-t)\nu_B=\nu_{tA+(1-t)B}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi\in C(X)$. Возьмем $\lambda\in A$ и $\mu\in B$. Имеем $(t\lambda+(1-t)\mu)(\varphi)=t\lambda(\varphi)+(1-t)\mu(\varphi)\le t\nu_A(\varphi)+(1-t)\nu_B(\varphi)$. Следовательно,

$$\nu_{tA+(1-t)B}(\varphi)\le(t\nu_A+(1-t)\nu_B)(\varphi). \qquad (2.4)$$

С другой стороны, в силу теоремы 2.1.3 существуют $\lambda_O \in A, \mu_O \in B$ такие, что

$$\lambda_O(\varphi) = \nu_A(\varphi),\ \mu_O(\varphi) = \nu_B(\varphi).$$

Значит, $\nu_{tA+(1-t)B}(\varphi) \geq t\lambda_O(\varphi) + (1-t)\mu_O(\varphi) = (t\nu_A + (1-t)\nu_B)(\varphi)$ т.е.

$$\nu_{tA+(1-t)B}(\varphi) \geq (t\nu_A + (1-t)\nu_B)(\varphi). \qquad (2.5)$$

Из неравенств (2.4), (2.5) получим, что $t\nu_A + (1-t)\nu_B = \nu_{tA+(1-t)B}$. Предложение 2.1.6 доказано.

Предложение 2.1.7. Множество $P(X)$ является гранью в $OS(X)$, т. е. из $t\nu_1 + (1-t)\nu_2 \in P(X)$, $\nu_1, \nu_2 \in OS(X), 0 < t < 1$ следует $\nu_1, \nu_2 \in P(X)$.

Доказательство. Пусть $\nu_A, \nu_B \in OS(X)$, $t \in (0,1)$ такие что $t\nu_A + (1-t)\nu_B \in P(X)$. Последнее возможно только лишь, когда множество $tA + (1-t)B$ состоит из одной точки.

Пусть $\lambda \in A,\ \mu_i \in B,\ i = 1,2.$ Поскольку $tA + (1-t)B$– одноточечное множество, то $t\lambda + (1-t)\mu_1 = t\lambda + (1-t)\mu_2$. Отсюда $\mu_1 = \mu_2$, т.е. B состоит из одной точки. Аналогично, A также состоит из одной точки. Но, тогда функционалы $\nu_A = \lambda, \nu_B = \mu$ принадлежат $P(X)$. Это означает, что $P(X)$– грань в $OS(X)$. Предложение 2.1.7 доказано.

Выпуклое множество $P(X)$ не является гранью в $OH(X)$ при $|X| \geq 2$. Действительно, возьмем различные $x_1, x_2 \in X$. Пусть δ_{x_i} $(i = 1,2)$ – функционалы Дирака на $C(\mathbf{2})$. Функционалы $\delta_{x_1} \vee \delta_{x_2}$ и $\delta_{x_1} \wedge \delta_{x_2}$ определим по правилам

$$(\delta_{x_1} \vee \delta_{x_2})(f) = \max\{f(x_1), f(x_2)\},\ f \in C(\mathbf{2})$$

и

$$(\delta_{x_1} \wedge \delta_{x_2})(f) = \min\{f(x_1), f(x_2)\},\ f \in C(\mathbf{2}).$$

Поскольку

$$\frac{\delta_{x_1} \wedge \delta_{x_2} + \delta_{x_1} \vee \delta_{x_2}}{2} = \frac{\delta_{x_1} + \delta_{x_2}}{2},$$

то $\frac{\delta_{x_1} \wedge \delta_{x_2} + \delta_{x_1} \vee \delta_{x_2}}{2}$ принадлежит $P(X)$. Но $\delta_{x_1} \vee \delta_{x_2}$ и $\delta_{x_1} \wedge \delta_{x_2}$ не принадлежат $P(X)$.

2.2. Размерность пространства полуаддитивных функционалов

В этом параграфе мы изучим алгебраическую размерность пространства полуаддитивных функционалов.

Через **n=**{0,1,…,n-1} обозначим n – точечное множество с дискретной топологией.

Предложение 2.2.1. Пространство $OS(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно треугольнику с вершинами δ_0, δ_1 и $\delta_0 \vee \delta_1$.

Доказательство. Пусть $\delta_i \ (i = 0,1)$ – функционалы Дирака на $C(\mathbf{2})$. Функционалы $\delta_0 \vee \delta_1$ и $\delta_0 \wedge \delta_1$ определим по правилам

$$(\delta_0 \vee \delta_1)(f) = \max\{f(0), f(1)\},\ f \in C(\mathbf{2})$$

и

$$(\delta_0 \wedge \delta_1)(f) = \min\{f(0), f(1)\},\ f \in C(\mathbf{2}).$$

Известно [11], что $OH(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно квадрату с вершинами в точках δ_0, δ_1, $\delta_0 \vee \delta_1$, $\delta_0 \wedge \delta_1$. При этом всякий элемент из $OH(\mathbf{2})$ имеет один из следующих видов:

$$\nu = t_0\delta_0 + t_1\delta_1 + t_2(\delta_0 \vee \delta_1), \tag{2.6}$$

или

$$\nu' = t_0\delta_0 + t_1\delta_1 + t_2(\delta_0 \wedge \delta_1), \tag{2.7}$$

где $t_i \ge 0$, $i = 0, 1, 2,$ $\sum_{i=0}^{2} t_i = 1.$

Ясно, что функционал ν вида (2.6) принадлежит $OS(\mathbf{2})$. Покажем, что при $t_2 \ne 0$ функционал ν' вида (2.7) не принадлежит $OS(\mathbf{2})$.

Действительно, пусть $\nu' = t_0\delta_0 + t_1\delta_1 + t_2(\delta_0 \wedge \delta_1)$, $t_2 \ne 0$. Возьмем $f, g \in C(\mathbf{2})$ такие, что $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ и $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Тогда
$\nu'(f + g) = t_0 + t_1 + t_2$ и $\nu'(f) = t_0$, $\nu\ (g) = t_1$. Отсюда $\nu'(f + g) > \nu'(f) + \nu'(g)$.

Таким образом, всякий элемент из $OS(\mathbf{2})$ имеет вид (2.6). Следовательно, пространство $OS(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно треугольнику с вершинами δ_0, δ_1 и $\delta_0 \vee \delta_1$. Предложение 2.2.1 доказано.

Предложение 2.2.1 показывает, что $OS(X) \ne OH(X)$ при $|X| > 1$.

Теорема 2.2.2. При $n \ge 3$ в пространстве $OS(\mathbf{n})$ существует несчетная система линейно независимых элементов.

Доказательство. Для $s > 1$ положим

$$A_s = \left\{ m_0\delta_0 + m_1\delta_1 + m_2\delta_2 \in P(3) : \left| m_0 - \frac{1}{3} \right|^{\frac{s}{s-1}} + \left| m_1 - \frac{1}{3} \right|^{\frac{s}{s-1}} \le \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{s}{s-1}} \right\},$$

где $m_0 + m_1 + m_2 = 1$ и $m_i \ge 0$, $i = 0, 1, 2$.

Определим отображение $\nu_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ по правилу

$$\nu_s(x, y, z) = \max\{m_0 x + m_1 y + m_2 z : m_0\delta_0 + m_1\delta_1 + m_2\delta_2 \in A_s\}$$

Покажем, что

$$\nu_s(x, y, z) = \frac{1}{3}\left(x + y + z + \left(|x - z|^s + |y - z|^s \right)^{\frac{1}{s}} \right).$$

Используя неравенство Гельдера

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \le (a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q)^{\frac{1}{q}}$$

для чисел $a_1 = m_0 - \frac{1}{3}$, $a_2 = m_1 - \frac{1}{3}$, $b_1 = x - z$, $b_2 = y - z$, $p = \frac{s}{s-1}$, $q = s$,

где

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $s > 1$, получим

$$m_0 x + m_1 y + m_2 z = m_0 x + m_1 y + (1 - m_0 - m_1) z = m_0 (x - z) + m_1 (y - z) + z =$$
$$= \frac{1}{3}(x + y + z) + (m_0 - \frac{1}{3})(x - z) + (m_1 - \frac{1}{3})(y - z) \le$$
$$\le \frac{1}{3}(x + y + z) + \left(\left| m_0 - \frac{1}{3} \right|^{\frac{s}{s-1}} + \left| m_1 - \frac{1}{3} \right|^{\frac{s}{s-1}} \right)^{\frac{s-1}{s}} \left(|x - z|^s + |y - z|^s \right)^{\frac{1}{s}} \le$$
$$\le \frac{1}{3}(x + y + z) + \left(|x - z|^s + |y - z|^s \right)^{\frac{1}{s}},$$

т. е.

$$m_0x+m_1y+m_2z\le\frac{1}{3}\left(x+y+z+\left(|x-z|^s+|y-z|^s\right)^{\frac{1}{s}}\right).$$

Поскольку в неравенстве Гельдера достигается равенство , то

$$\nu_s(x,y,z)=\frac{1}{3}\left(x+y+z+\left(|x-z|^s+|y-z|^s\right)^{\frac{1}{s}}\right)$$

Теперь покажем, что система $\{\nu_s\}_{s>1}\subset OS(\mathbf{3})$ линейна независима.

Пусть

$$\sum_{i=1}^{m}c_i\nu_{s_i}=0,$$

где $c_i\in\mathbb{R}$, $1<s_1<s_2<\ldots<s_m$, $i=\overline{1,m}$, $m\in\mathbb{N}$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m}c_i\frac{1}{3}\left(x+y+z+\left(|x-z|^{s_i}+|y-z|^{s_i}\right)^{\frac{1}{s_i}}\right)=0$$

для всех $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Положим $x=1,\ y=t>0,\ z=0.$ Тогда

$$\sum_{i=1}^{m}c_i\frac{1}{3}\left(1+t+(1+t^{s_i})^{\frac{1}{s_i}}\right)=0.$$

При $t=0$ получим $\sum_{i=1}^{m}c_i=0$. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{m} c_i (1+t^{s_i})^{\frac{1}{s_i}} = 0$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{m} c_i ((1+t^{s_i})^{\frac{1}{s_i}} - 1) = 0 .$$

Поделив последнее равенство на $t^{s_1} > 1$, и устремляя t к нулю, получим

$$\lim \left(c_1 \frac{(1+t^{s_1})^{\frac{1}{s_1}} - 1}{t^{s_1}} + c_2 \frac{(1+t^{s_2})^{\frac{1}{s_2}} - 1}{t^{s_2}} t^{s_2 - s_1} + \ldots + c_m \frac{(1+t^{s_m})^{\frac{1}{s_m}} - 1}{t^{s_m}} t^{s_m - s_1} \right) = 0 \qquad (2.8)$$

Поскольку

$$\lim \frac{(1+t^{s})^{\frac{1}{s}} - 1}{t^{s}} = \frac{1}{s},$$

то из соотношения (2.8) получим $\frac{c_1}{s_1} = 0$, т. е. $c_1 = 0$.

Точно таким же образом получим, что $c_i = 0$ при всех $i = \overline{2,m}$. Это означает, что система $\{v_s\}_{s>1}$ линейна независима. Теорема 2.2.2 доказана.

Следствие 2.2.3. При $n \geq 3$ в пространствах $OS(\mathbf{n})$ и $O(\mathbf{n})$ существует несчетная система линейно независимых элементов.

Заметим в [11] было показано, что пространство $OH(\mathbf{n})$ содержит счетную линейно независимую систему элементов при $n \geq 3$.

2.3. Описание пространства полуаддитивных функционалов

В этом параграфе покажем, что пространство $OS(X)$ всех полуаддитивных функционалов гомеоморфно пространству $cc(P(X))$ всех выпуклых компактных подмножеств пространства всех вероятностных мер на компакте X.

Пусть K – подмножество некоторого локально выпуклого пространства E. Через $cc(K)$ обозначим множество, состоящее из всех выпуклых подмножеств K и на $cc(K)$ рассмотрим топологию, индуцированную из $\exp(K)$.

Теорема 2.3.1. Пусть X – компакт. Тогда пространства $OS(X)$ и $cc(P(X))$ гомеоморфны, при этом гомеоморфизм $\tau : cc(P(X)) \to OS(X)$ задается по правилу

$$\tau(A) = \nu_A,\ A \in cc(P(X)).$$

Доказательство. Биективность отображения τ следует из теоремы 2.1.4. Поскольку $cc(P(X))$ и $OS(X)$ компакты, то достаточно показать, что τ является непрерывным.

Пусть $A \in cc(P(X))$ и $\nu_A = \tau(A)$. Возьмем $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C(X)$ и пусть $\langle \nu_A, \varphi, \varepsilon \rangle$-окрестность функционала ν_A в $OS(X)$.

Для каждого $\lambda \in A$ рассмотрим открытое в $P(X)$ множество

$$V(\lambda, \varphi, \frac{\varepsilon}{2}) = \left\{ \lambda' \in P(X) : \left| \lambda^{'}(\varphi) - \lambda(\varphi) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Ясно, что $A \subset \bigcup_{\lambda \in A} V(\lambda, \varphi, \frac{\varepsilon}{2})$. Поскольку A – компакт, то существуют функционалы $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in A$ такие, что

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(\lambda_i, \varphi, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Пусть $W = \langle\ V(\lambda_1, \varphi, \frac{\varepsilon}{2}), \dots, V(\lambda_n, \varphi, \frac{\varepsilon}{2})\ \rangle$ – базисная окрестность множества A в $cc(P(X))$, т.е. пусть

$$W = \left\{ A' \in cc(P(X)) : A' \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(\lambda_i, \varphi, \frac{\varepsilon}{2}),\ A' \cap V(\lambda_i, \varphi, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \varnothing \right\}.$$

Покажем, что $\tau(W) \subset \langle \nu_A, \varphi, \varepsilon \rangle$. Возмём $B \in W$. В силу теоремы 2.1.4 существует функционал $\lambda_B \in B$, такой, что $\nu_B(\varphi) = \lambda_B(\varphi)$. Поскольку $\lambda_B \in B$ и $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V\left(\lambda_i, \varphi, \frac{\varepsilon}{2} \right)$, то существует $i_0 \in \overline{1,n}$, такое, что $\lambda_B \in V\left(\lambda_{i_0}, \varphi, \frac{\varepsilon}{2} \right)$, т.е. $\left| \lambda_B(\varphi) - \lambda_{i_0}(\varphi) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Поскольку $\lambda_{i_0} \in A$, то $\lambda_{i_0}(\varphi) \le \nu_A(\varphi)$, и поэтому

$$\lambda_B(\varphi) < \lambda_{i_0}(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} \le \nu_A(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. $\lambda_B(\varphi) \le \nu_A(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Отсюда $\nu_B(\varphi) \le \nu_A(\varphi) + \varepsilon$ (2.9)

Теперь возьмем функционал $\nu_A \in A$ такой, что $\nu_A(\varphi) = \mu_A(\varphi)$. Возьмем индекс $j \in \overline{1,n}$ такой, что $\left| \mu_A(\varphi) - \lambda_j(\varphi) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Из принадлежности $B \in W$, вытекает существование функционалов $\mu_j \in V(\lambda_j, \varphi, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B$, $j \in \overline{1,n}$. Поэтому $\left| \mu_j(\varphi) - \lambda_j(\varphi) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда

$$\left|\mu_A(\varphi)-\mu_j(\varphi)\right|\le\left|\mu_A(\varphi)-\lambda_j(\varphi)\right|+\left|\mu_j(\varphi)-\lambda_j(\varphi)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,,$$

т.е. $\left|\mu_A(\varphi)-\mu_j(\varphi)\right|<\varepsilon$ или $\mu_A(\varphi)<\mu_j(\varphi)+\varepsilon$. Следовательно,

$$\nu_A(\varphi)=\mu_A(\varphi)<\mu_j(\varphi)+\varepsilon\le\nu_B(\varphi)+\varepsilon\,,$$

т.е.

$$\nu_A(\varphi)\le\nu_B(\varphi)+\varepsilon\,. \qquad (2.10)$$

Из соотношений (2.9) и (2.10) получим, что

$$\left|\nu_A(\varphi)-\nu_B(\varphi)\right|<\varepsilon\,.$$

Это означает, что $\nu_B\in\langle\nu_A,\varphi,\varepsilon\rangle$, что и требовалось показать.

Таким образом, отображение τ является гомеоморфизмом между пространствами $cc(P(X))$ и $OS(X)$. Теорема 2.3.1 доказана.

Коментарии по второй главе

В данной главе дано описание полуаддитивных функционалов, определенных на пространстве непрерывных функций компакта, установлено взаимно-однозначное соответствие между пространством полуаддитивных функционалов и пространством выпуклых замкнутых подмножеств пространства вероятностных мер. Показано, что если исходное пространство состоит из двух точек, то образованное пространство полуаддитивных функционалов гомеоморфно треугольнику; в этом случае размерность пространства полуаддитивных функционалов равна 2. Далее установлено, что если исходное пространство содержит более двух точек, то в рассматриваемом пространстве существует несчетная система линейно независимых полуаддитивных функционалов.

ГЛАВА 3. ФУНКТОР ПОЛУАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В настоящей главе приведены категорные свойства функтора полуаддитивных функционалов и покажем, что $OS : Comp \to Comp$ является нормальным функтором, исследуем функтор полуаддитивных функционалов с конечными носителями, а также, связь между функтором полуаддитивных функционалов и функторами вероятностных мер, гиперпространства, суперрасширения, слабо-аддитивных функционалов и положительно-однородных функционалов. А также рассмотрена плотность пространства полуаддитивных функционалов с конечными носителями.

3.1. Категорные свойства функтора полуаддитивных функционалов

Пусть X и Y – компакты, а $f : X \to Y$ – непрерывное отображение между ними. Отображение $OS(f) : OS(X) \to OS(Y)$ определим по формуле

$$OS(f)(\nu)(\varphi) = \nu(\varphi \circ f),$$

где $\nu \in OS(X)$ и $\varphi \in C(Y)$.

Предложение 3.1.1. Операция OS задает ковариантный функтор, действующий в категории $Comp$, являющаяся подфунктором функтора $OH : Comp \to Comp$.

Доказательство. Ясно, что $OS : Comp \to Comp$ является ковариантным функтором и для любого компакта X имеет место $OS(X) \subset OH(X)$.

Покажем, что $OH(f)(OS(X)) \subset OS(Y)$, где $f: X \to Y$ – непрерывное отображение. Пусть $\mu \in OS(X)$ и $\nu \in OH(f)(\mu)$. Для $\varphi, \psi \in C(Y)$ имеем

$$\nu(\varphi+\psi) = OH(f)(\mu)(\varphi+\psi) = \mu((\varphi+\psi)\circ f) \le \mu(\varphi\circ f) + \mu(\psi\circ f) =$$
$$= OH(f)(\mu)(\varphi) + OH(f)(\mu)(\psi) = \nu(\varphi) + \nu(\psi)\ .$$

Это означает, что $\nu \in OS(Y)$. Тождественное вложение $OS(X)$ в $OH(X)$ является естественным преобразованием, переводящий функтор OS в функтор OH. Следовательно, OS является подфунктором функтора OH. Предложение 3.1.1 доказано.

Предложение 3.1.2. Пусть X – бесконечный компакт. Тогда

$$w(X) = w(OS(X)).$$

Доказательство. Пусть X – бесконечный компакт. Рассмотрим функционал $\delta_x : C(X) \to \mathbb{R}$, определенный по формуле $\delta_x = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$. Ясно, что отображение $\delta: X \to OS(X)$, определенное по формуле $\delta(x) = \delta_x$, $x \in X$, есть вложение компакта X в $OS(X)$. Поэтому $w(X) \le w(OS(X))$. Из $OS(X) \subset OH(X)$ получим, что $w(OS(X)) \le w(OH(X))$; в то же время из [11] имеем $w(X) = w(OH(X))$. Таким образом, $w(X) \le w(OS(X)) \le w(OH(X)) = \ = w(X)$, т.е. $w(X) = w(OS(X))$. Предложение 3.1.2 доказано.

Напомним, что через P обозначается функтор вероятностных мер. Если $f: X \to Y$ непрерывное отображение, то отображение $P(f): P(X) \to P(Y)$ определяется по правилу

$$P(f)(\mu)(\varphi)=\mu(\varphi\circ f),$$

где $\mu\in P(X)$ и $\varphi\in C(Y)$.

Следующий результат устанавливает связь между отображениями $OS(f)$ и $P(f)$, которая в дальнейшем будет играть ключевую роль при изучении категорных свойств функтора OS.

Предложение 3.1.3. Пусть $f:X\to Y$ – непрерывное отображение, $\nu_A\in OS(X)$. Тогда имеет место формула

$$OS(f)(\nu_A)=\nu_{P(f)(A)}. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Для $\varphi\in C(Y)$ имеем

$$OS(f)(\nu_A)(\varphi)=\nu_A(\varphi\circ f)=\sup\{\lambda(\varphi\circ f):\lambda\in A\}=\sup\{\mu(\varphi):P(f)(A)\}=\nu_{P(f)(A)}(\varphi)$$

Это показывает, что $OS(f)(\nu_A)=\nu_{P(f)(A)}$. Предложение 3.1.3 доказано.

Далее, используя соотношение (3.1) покажем, что функтор OS является мономорфным, эпиморфным, сохраняет прообразы и пересечения.

Предложение 3.1.4. Функтор $OS:Comp\to Comp$ является мономорфным функтором.

Доказательство. Пусть $j:X\to Y$ – вложение компакта X в компакт Y. Покажем, что $OS(j):OS(X)\to OS(Y)$ также является вложением. Пусть $\nu_A,\nu_B\in OS(X)$ такие, что $\nu_A\neq\nu_B$. В силу теоремы 2.1.4 имеем $A\neq B$.

Поскольку P мономорфен, то $P(j)$ также – вложение и поэтому $P(j)(A)\neq P(j)(B)$. Отсюда и в силу (3.1) получим

$$OS(j)(\nu_A)=\nu_{P(j)(A)}\neq\nu_{P(j)(B)}=OS(j)(\nu_B).$$

Это означает, что $OS(j)$ – вложение, т.е. функтор OS мономорфен. Предложение 3.1.4 доказано.

В работе [33] (соответственно, в [11]) для доказательства эпиморфности функтора O (соответственно, функтора OH) потребовалось сначала доказать вариант теоремы Хана-Банаха для слабо аддитивных функционалов (соответственно, для положительно-однородных функционалов). Формула (3.1) позволяет доказать эпиморфность функтора OS используя эпиморфность функтора P, т.е. в этом случае нет необходимости в аналоге теоремы Хана-Банаха для полуаддитивных функционалов того или иного класса.

Предложение 3.1.5. Функтор $OS:Comp\to Comp$ эпиморфен.

Доказательство. Пусть $f:X\to Y$ – эпиморфизм между компактами и $\nu_B\in OS(Y)$. Поскольку функтор P эпиморфен, то $P(f)$ – аффинный эпиморфизм. Поэтому $A=P(f)^{-1}(B)$ – непустой выпуклый компакт в $P(X)$. Используя (3.1) получим, что $OS(f)(\nu_A)=\nu_{P(f)(A)}=\nu_B$, т.е. $OS(f)$ – эпиморфизм. Предложение 3.1.5 доказано.

Как показывает следующий результат, функтор OS сохраняет прообразы, в то время как функторы O и OH этим свойством не обладают (см. [33], [11]).

Предложение 3.1.6. Функтор $OS:Comp\to Comp$ сохраняет прообразы.

Доказательство. Пусть $f:X\to Y$ – непрерывное отображение и Z – замкнутое подмножество в Y. Покажем, что $OS(f)^{-1}(OS(Z))=OS(f^{-1}(Z))$. Возьмем $\nu_A\in OS(f^{-1}(Z))$, где A – выпуклый компакт в $P(f^{-1}(Z))$. Поскольку P нормален, то

$$P(f)(A) \subset P(f)(P(f^{-1}(Z))) = P(Z).$$

Поэтому $OS(f)(\nu_A) = \nu_{P(f)(A)} \in OS(Z)$. Это означает, что $\nu_A \in OS(f)^{-1}(OS(Z))$.

Теперь возьмем $\nu_B \in OS(f)^{-1}(OS(Z))$. Пусть $\nu_A \in OS(Z)$ – функционал, такой, что $\nu_A = OS(f)(\nu_B)$. Вновь из (3.1) получим, что $\nu_A = OS(f)(\nu_B) = \nu_{P(f)(B)}$. Отсюда $P(f)(B) = A \subset P(Z)$. Так как P сохраняет прообразы, то

$$B \subset P(f)^{-1}(A) \subset P(f)^{-1}(P(Z)) = P(f^{-1}(Z)).$$

Это означает, что $\nu_B \in OS(f^{-1}(Z))$. Предложение 3.1.6 доказано.

Предложение 3.1.7. Функтор $OS : Comp \to Comp$ непрерывен.

Доказательство. Пусть $X = \lim K$, где $K = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, I\}$ – обратный спектр компактов X_α. Обозначим $Y = \lim OS(K)$, где

$$OS(K) = \{OS(X_\alpha), OS(\pi_\alpha^\beta), I\}.$$

Пусть $\pi : OS(X) \to Y$ – предел отображений $OS(\pi_\alpha) : OS(X) \to OS(X_\alpha)$, где $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ – сквозные проекции. Поскольку π – непрерывное отображение, то достаточно показать, что π является биекцией.

Сначала рассмотрим два различных функционала $\nu_1, \nu_2 \in OS(X)$. В этом случае существует функция $\varphi \in C(X)$ такая, что $|\nu_1(\varphi) - \nu_2(\varphi)| = \varepsilon > 0$. Поскольку множество функций $\psi_\alpha \circ \pi_\alpha$, где $\psi_\alpha \in C(X_\alpha)$, плотно в $C(X)$ [20], то существуют $\alpha \in A$ и функция $\varphi_\alpha \in C(X_\alpha)$ такие, что $|\varphi - \psi_\alpha \circ \pi_\alpha| < \frac{\varepsilon}{3}$. Поскольку всякий слабо аддитивный функционал является не расширяющим отображением [34], то $|\nu_i(\varphi)-\nu_i(\varphi_\alpha\circ\pi_\alpha)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Далее

$$\varepsilon=|\nu_1(\varphi)-\nu_2(\varphi)|\le|\nu_1(\varphi)-\nu_1(\psi_\alpha\circ\pi_\alpha)|+|\nu_1(\psi_\alpha\circ\pi_\alpha)-\nu_2(\psi_\alpha\circ\pi_\alpha)|+$$
$$+|\nu_2(\psi_\alpha\circ\pi_\alpha)-\nu_2(\varphi)|\le\frac{2\varepsilon}{3}+|\nu_1(\psi_\alpha\circ\pi_\alpha)-\nu_2(\psi_\alpha\circ\pi_\alpha)|.$$

Таким образом, $\nu_1(\psi_\alpha\circ\pi_\alpha)\ne\nu_2(\psi_\alpha\circ\pi_\alpha)$. Отсюда

$$OS(\pi_\alpha)(\nu_1)(\psi_\alpha)\ne OS(\pi_\alpha)(\nu_2)(\psi_\alpha),$$

и поэтому, $OS(\pi_\alpha)(\nu_1)\ne OS(\pi_\alpha)(\nu_2)$. Поскольку π является пределом отображений $OS(\pi_\alpha)$, то $\pi(\nu_1)\ne\pi(\nu_2)$. Так как функтор OS эпиморфен, то π является сюръекцией. Предложение 3.1.7 доказано.

Предложение 3.1.8. Функтор OS сохраняет пересечения замкнутых подмножеств компакта.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для пересечения двух замкнутых подмножеств компакта X, так как OS является непрерывным функтором. Ясно, что $OS(X_1\cap X_2)\subset OS(X_1)\cap OS(X_2)$. Покажем обратное включение. Пусть $\nu_A\in OS(X_1)\cap OS(X_2)$. Тогда A выпуклое компактное подмножество $P(X_1)\cap P(X_2)$. Поскольку P сохраняет пересечения, то $A\subset P(X_1\cap X_2)$. Отсюда $\nu_A\in OS(X_1\cap X_2)$. Предложение 3.1.8 доказано.

Предложение 3.1.9. Функтор $OS:Comp\to Comp$ сохраняет

а) точку;

б) пустое множество.

Доказательство. а) Пусть X – одноточечное множество, $x \in X$ – его единственный элемент. Тогда очевидно, что $\delta_x \in OS(X)$. С другой стороны,

$$OS(X) \subset OH(X) = OH(\{x\}) = \{\delta_x\}.$$

Значит, $OS(\{x\}) = \{\delta_x\}$.

б) Пусть $X = \varnothing$. Тогда $O(X) = \varnothing$ [36]. Из $OS(X) \subset O(X) = \varnothing$ получим, что $OS(X) = \varnothing$. Предложение 3.1.9 доказано.

Из предложений 3.1.2-3.1.9 получим следующий результат:

Теорема 3.1.10. Функтор $OS: Comp \to Comp$ является нормальным.

3.2. Функтор полуаддитивных функционалов конечной степени

В этом параграфе мы изучим функтор полуаддитивных функционалов с конечными носителями.

Пусть Z – замкнутое подмножество компакта X. Скажем, что функционал $\mu \in OS(X)$ сосредоточен на Z, если $\mu \in OS(Z)$. Наименьшее по включению замкнутое множество $Z \subset X$, для которого $\mu \in OS(Z)$, называется носителем функционала $\mu \in OS(X)$ и обозначается через $\operatorname{supp}\mu$. Имеем

$$\operatorname{supp}\mu = \bigcap\{Z : Z \subset X, \mu \in OS(Z)\}.$$

Для компакта X, через $OS_n(X)$ обозначим множество всех функционалов $\mu \in OS(X)$, для которых $|\operatorname{supp}\mu| \le n$, где n – натуральное число. $OS_n(X)$ рассмотрим как подпространство пространства $OS(X)$.

Предложение 3.2.1. Пространство $OS_n(X)$ является компактом для любого компакта X.

Доказательство. Пусть X – компакт и $C(n,X)$ – пространство всех отображений $\xi : n \to X$. Тогда пространство X^n гомеоморфно пространству $C(n,X)$, при этом гомеоморфизм между этими пространствами осуществляется соответствием, который каждому элементу $(x_1,\ldots,x_n) \in X^n$ ставит в соответствие отображение τ из $C(n,X)$, задаваемое формулой $\tau(i) = x_i$, $i \in n$.

В следующем определении пространство X^n отождествляем с пространством $C(n,X)$.

Для функтора полуаддитивных функционалов отображение Басманова $\pi_{OSX_n} : X^n \times OS(n) \to OS_n(X)$ определим по правилу

$$\pi_{OSX_n}(\xi,\mu) = OS_n(\xi)(\mu),$$

где $\xi : n \to X$, $\mu \in OS(n)$.

Отображение π_{OSX_n} непрерывно [9]. Поскольку пространство $X^n \times OS(n)$ – компакт, то $OS_n(X)$ также является компактом, как непрерывный образ компакта $X^n \times OS(n)$. Предложение 3.2.1 доказано.

Пусть X и Y – компакты, а $f : X \to Y$ – непрерывное отображение между ними. Покажем, что $OS(f)(OS_n(X)) \subset OS_n(Y)$.

Пусть $\nu \in OS_n(X)$. Возьмем $\varphi_1, \varphi_2 \in C(Y)$ такие, что

$$\varphi_1\big|_{f(\operatorname{supp}\nu)} = \varphi_2\big|_{f(\operatorname{supp}\nu)}.$$

Тогда $\varphi_1 \circ f\big|_{\mathrm{supp}\,\nu} = \varphi_2 \circ f\big|_{\mathrm{supp}\,\nu}$. Отсюда $\nu(\varphi_1 \circ f) = \nu(\varphi_2 \circ f)$. Поскольку $OS(f)(\nu)(\varphi_i) = \nu(\varphi_i \circ f)$, $i = 1,2$, то $OS(f)(\nu)(\varphi_1) = OS(f)(\nu)(\varphi_2)$. Это означает, что $\mathrm{supp}(OS(f)(\nu)) = f(\mathrm{supp}\,\nu)$. Поэтому $OS(f)(\nu) = OS_n(Y)$. Таким образом, $OS(f)(OS_n(X)) \subset OS_n(Y)$. Следовательно, формула

$$OS_n(f)(\nu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f),$$

где $\mu \in OS_n(X)$, $\varphi \in C(Y)$, определяет отображение $OS_n(f): OS_n(X) \to OS_n(Y)$.

Из определения непосредственно следует, что $OS_n(g \circ f) = OS_n(g) \circ OS_n(f)$, где $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ – непрерывные отображения компактов. Кроме того, если $id_X : X \to X$ – тождественное отображение компакта X, то $OS_n(id_X) = id_{OS_n(X)}$. Таким образом, OS_n – ковариантный функтор, действующий в категории $Comp$.

Теорема 3.2.2. Функтор $OS_n : Comp \to Comp$ является нормальным при всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Если $f: X \to Y$ – вложение компакта в X компакт Y, то отображение $OS_n(f)$ также – вложение пространства $OS_n(X)$ в $OS_n(Y)$; если же $f: X \to Y$ – эпиморфизм, то отображение $OS_n(f)$ также – эпиморфизм. Значит, функтор OS_n мономорфен и эпиморфен.

Так как мономорфный функтор конечной степени непрерывен [9], то функтор OS_n является непрерывным. Кроме того, функтор OS_n сохраняет пустое множество, точку и пересечение замкнутых подмножеств компакта.

Покажем, что OS_n сохраняет вес, т.е. $w(X) = w(OS_n(X))$ для произвольного бесконечного компакта X. Поскольку X топологически вложено в $OS_n(X)$ и $OS_n(X) \subset OS(X)$, то $w(X) \le w(OS_n(X)) \le w(OS(X))$. Так как OS сохраняет вес, то

$w(X)=w(OS(X))$. Следовательно, $w(X)=w(OS_n(X))$ для произвольного бесконечного компакта X

Таким образом, функтор $OS_n : Comp \to Comp$ является нормальным при всех $n \in N$. Теорема 3.2.2 доказана.

В следующем результате дается описание элементов пространства $OS_2(X)$.

Предложение 3.2.3. Всякий элемент из $OS_2(X)$ имеет вид

$$\nu = t_0\delta_{x_0} + t_1\delta_{x_1} + t_2(\delta_{x_0} \vee \delta_{x_1}), \text{ где } x_0, x_1 \in X \quad t_i \ge 0, \ i=\overline{0,2}, \ \sum_{i=0}^{2} t_i = 1.$$

Доказательство. Пусть $\nu \in OS_2(X)$ и $\operatorname{supp}\nu = \{x_0, x_1\}$. По определению носителя имеем $\nu \in OS(\{x_0, x_1\})$. В силу предложения 2.2.1 всякий элемент из $OS(\{x_0, x_1\})$ имеет вид

$$\nu = t_0\delta_{x_0} + t_1\delta_{x_1} + t_2(\delta_{x_0} \vee \delta_{x_1}),$$

где $x_0, x_1 \in X$, $t_i \ge 0, \ i=\overline{0,2}, \ \sum_{i=0}^{2} t_i = 1$. Предложение 3.2.3 доказано.

3.3. О взаимосвязи функциональных функторов

В этом параграфе устанавливается связь между функтором полуаддитивных функционалов и функторами вероятностных мер, гиперпространства, суперрасширения, слабо-аддитивных функционалов и положительно-однородных функционалов. Кроме того, показано, что функтор полуаддитивных функционалов является монадичным.

Теорема 3.3.1. Имеет место следующая диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r] & OS \arrow[r] & OH \arrow[r] & O \\
 & \exp \arrow[u] \arrow[r] & \lambda \arrow[u] &
\end{tikzcd}
,$$

где $F \to G$ означает, что функтор F является подфунктором функтора G.

Доказательство. Соотношение

$$\lambda \to OH \to O$$

было установлено в [11]. Для любого $\xi \in \lambda(X)$ определим функционал

$$\mu_\xi(\varphi) = \min_{F\in\xi} \max_{x\in F} \varphi(x),\ \varphi \in C(X).$$

Известно [21], что μ_ξ является слабо аддитивным, сохраняющим порядок, нормированным, положительно-однородным функционалом, при этом соответствие $\xi \to \mu_\xi$ определяет топологическое вложение $\lambda(X)$ в $OH(X)$. Как показано в теореме 3.1.10 функтор является OS нормальным, но функтор λ не нормален [12]. Следовательно, функтор λ нельзя реализовать как подфунктор OS (т.е. не существует естественного преобразования, состоящего из вложений).

Покажем, что имеет место

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r] & OS \\
 & \exp \arrow[u]
\end{tikzcd}
.$$

Очевидно, что

$$OS(f)(P(X)) \subset P(Y)$$

для произвольного непрерывного отображения $f: X \to Y$ компактов X, Y. Учитывая включение $P(X) \subset OS(X)$, определим топологическое вложение $e_X: P(X) \to OS(X)$ равенством $e_X(\mu) = \mu$, $\mu \in P(X)$. Семейство, состоящее из всех вложений вида e_X, $X \in Comp$, является естественным преобразованием функтора P в функтор OS, т.е. функтор P является подфунктором функтора OS.

Проверим включение

$$OS(f)(\exp X) \subset \exp Y$$

для произвольного непрерывного отображения $f: X \to Y$ компактов X, Y. Для каждого $F \in \exp X$ определим функционал $\mu_F : C(X) \to \mathbb{R}$ следующим образом

$$\mu_F(\varphi) = \max_{x \in F} \varphi(x), \quad \varphi \in C(X).$$

Ясно, что μ_F является слабо аддитивным, сохраняющим порядок, нормированным, положительно-однородным и полуаддитивным функционалом, при этом соответствие $F \to \mu_F$ является взаимно однозначным [21]. Поэтому множество F отождествим функционалом μ_F.

Пусть теперь $F \in \exp X$. Тогда $\mu_F \in OS(X)$. Покажем, что $OS(f)(\mu_F) \in \exp Y$. Для этого достаточно показать, что $OS(f)(\mu_F)$ полумультипликативен [21]. Возьмём $\varphi, \psi \in C(Y)$. Имеем

$$OS(f)(\mu_F)(\varphi\psi) = \mu_F((\varphi\psi) \circ f) = \mu_F((\varphi \circ f)(\psi \circ f)) \le$$
$$\le \mu_F(\varphi \circ f)\mu_F(\psi \circ f) = OS(f)(\mu_F)(\varphi)OS(f)(\mu_F)(\psi).$$

Откуда $OS(f)(\mu_F)\in\exp Y$. Таким образом, $OS(f)(\exp X)\subset\exp Y$. Остается заметить, что соответствие $F\to\mu_F$ определяет топологическое вложение $\exp X$ в $OS(X)$. Семейство, состоящее из таких вложений, есть естественное преобразование функтора $\exp$ в функтор OS.

Наконец, установим $\exp\to\lambda$. Пусть X – произвольный компакт. Для каждого $F\in\exp X$ положим $\xi_F=\{B\in\exp X: B\supset F\}$. Ясно, что $\xi_F\in\lambda(X)$. Кроме того, очевидно, что соответствие $F\mapsto\xi_F$ взаимно однозначно. Более того, так как топология в $\exp X$, индуцированная из $\lambda(X)$, и топология Вьеториса в $\exp X$ совпадают, то соответствие $F\mapsto\xi_F$ является топологическим вложением. Семейство, состоящее из всех таких вложений является естественным преобразованием функтора $\exp$ в функтор λ.

Пусть $f: X\to Y$ – непрерывное отображение компактов X и Y. Ясно, что $\{f(B)\in\exp Y: B\supset F\}$ является сцепленной системой в Y. Существует единственная максимальная сцепленная система, содержащая эту систему [20]. Эту максимальную сцепленную систему обозначим через $\xi_{f(F)}$. Легко видеть, что

$$\lambda(f)(\xi_F)=\xi_{f(F)}.$$

Следовательно, $\lambda(f)(\exp X)\subset\exp Y$. Теорема 3.3.1 доказана.

В теории ковариантных нормальных функторов одним из важных понятий является понятие монадичности функтора F (см. 1.1.18), введенное С. Эйленбергом и Дж. Муром.

Теорема 3.3.2. Функтор OS монадичен.

Доказательство. Единица $\eta : Id \to OS$ определим отображением $\delta_X : X \to OS(X)$ для каждого компакта, задаваемой формулой

$$\delta_X(x) = \delta_x, x \in X$$

Умножение $\psi : OS^2 \to OS$ для каждого компакта X определим по формуле

$$\psi_X(\alpha)(g) = \alpha(g),$$

где $\alpha \in OS(OS(X))$, $g \in C(X,[0,1])$, и отображение $g : OS(X) \to [0,1]$ задается по правилу $g(\mu) = \mu(g)$, $\mu \in OS(X)$.
Пусть $\mu \in OS(X)$, $\varphi \in C(X)$. Тогда

$$\psi_X(\eta_{OS(X)}(\nu))(\varphi) = \eta_{OS(X)}(\nu)(\varphi) = \delta_\nu(\varphi) = \varphi(\nu) = \nu(\varphi),$$

т.е. $\psi_X \circ \eta_{OS(X)} = Id_{OS(X)}$. С другой стороны,

$$\psi_X(OS(\delta_X)(\nu)(\varphi) = OS(\delta_X)(\nu))(\varphi) = \nu(\varphi \circ \delta_X) = \nu(\varphi|_X) = \nu(\varphi),$$

т.е. $\psi_X \circ OS(\eta_X) = Id_{OS(X)}$.
Пусть теперь $\lambda \in OS^3(X) = OS(OS(OS(X)))$, $\varphi \in C(X)$. Тогда $\psi_X(\psi_{OS(X)}(\lambda))(\varphi) = \psi_{OS(X)}(\lambda)(\varphi)$, где $\varphi : OS^2(X) \to [0,1]$ задается формулой $\varphi(\alpha) = \alpha(\varphi)$, $\alpha \in OS^2(X)$. С другой стороны, $\psi_X(OS(\psi_X))(\lambda)(\varphi) = OS(\psi_X)(\lambda)(\varphi) = \lambda(\varphi \circ \psi_X) = \lambda(\varphi)$.
Таким образом, $\psi_X \circ \psi_{OS(X)} = \psi_X \circ OS(\psi_X)$ для любого компакта X.
Теорема 3.3.2 доказана.

3.4 Плотность пространства вероятностных мер с конечными носителями

Результаты параграфов 3.4, 3.5, 3.6 принадлежать Н.Мамадалиеву**.**

В этом параграфе показано, что функтор вероятностных мер с конечными носителями сохраняет плотность компактов.

Теорема 3.4.1. Для любого бесконечного компакта X

$$d(X)=d(P_n(X)).$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство $d(P_n(X))\le d(X)$. Пусть X – бесконечный компакт и $d(X)=\tau\ge\aleph_0$. Ясно, что $d(X^n)=\tau$ для любого $n\in N$. В силу теоремы В.Басманова [3], имеем, что пространство $P_n(X)$ представляется как непрерывный образ пространства $X^n\times\sigma^{n-1}$, где $\sigma^{n-1}-(n-1)$-мерный симплекс. Отображение $\pi:X^n\times\sigma^{n-1}\to P_n(X)$ определяется формулой

$$\pi(x_1,...,x_n,m_1,...,m_n)=\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{x_i},$$

где $(m_1,...,m_n)\in\sigma^{n-1}$, $\sum_{i=1}^{n}m_i=1$ и $m_i\ge 0$ для каждого $i\in N$, δ_{x_i} – меры Дирака в точках x_i Так как $d\left(X^n\times\sigma^{n-1}\right)\le\tau$ и плотность пространства сохраняется при непрерывном отображении, то получим $d\left(P_n\left(X\right)\right)\le\tau$.

Теперь докажем неравенство $d(X)\le d(P_n(X))$. Пусть $d(P_n(X))=\tau\ge\aleph_0$. Тогда существует всюду плотное в $P_n(X)$ множество $\Omega=\{\mu_\alpha:a\in A\}$ такое, что $|A|=\tau$. Подмножество M пространства X определим следующим образом: $M=\bigcup_{\alpha\in A}\{\text{ supp}(\mu_\alpha):|\text{supp}(\mu_\alpha)|\le n,\ \mu_\alpha\in\Omega\}$. Ясно, что $|M|=\tau$. Покажем, что множество M всюду плотно в X. Предположим обратное, т.е. существует такая точка x_0 и её такая окрестность Ox_0, что $M \cap Ox_0 = \varnothing$. Из регулярности X существует такая окрестность O_1x_0 точки x_0, что $[O_1x_0] \subset Ox_0$. Так как X нормально, то существует такая функция $\varphi \in C(X)$, что $\varphi([O_1x_0]) = 0$ и $\varphi(X \setminus Ox_0) = 1$.

Рассмотрим окрестность $O(\delta_{x_0}; \varphi; 0{,}5)$ точки δ_{x_0} в $P_n(X)$. Для всякой меры $\nu \in \Omega$ имеем $\operatorname{supp}(\nu) \cap Ox_0 = \varnothing$. Пусть $\operatorname{supp}(\nu) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\},\ k \le n$. Тогда $\varphi(x_i) = 1,\ i = 1, 2, \ldots, k$, следовательно,

$$\left|\nu(\varphi) - \delta_{x_0}(\varphi)\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} m_i \delta_{x_i}(\varphi) - \delta_{x_0}(\varphi)\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} m_i \varphi(x_i) - \varphi(x_0)\right| = \sum_{i=1}^{k} m_i = 1 > 0{,}5.$$

Это противоречит всюду плотности множества Ω в $P_n(X)$. Значит, множество M всюду плотно в X, т.е. $d(X) \le \tau$. Теорема 3.4.1 доказана.

Теорема 3.4.2. Для любого бесконечного компакта X

$$d(X) = d(P_\omega(X)).$$

Доказательство. Пусть X – бесконечный компакт и $d(X) = \tau \ge \aleph_0$. Ясно, что $d(X^n) = \tau$ для любого $n \in N$. Известно, что $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\operatorname{supp}(\mu)| \le n\}$ и $P_\omega(X) = \cup\{P_n(X) : n = 1, 2, \ldots\}$. Тогда в силу теоремы 3.4.1 $d\left(P_n\left(X\right)\right) \le \tau$ для любого $n \in N$. Отсюда имеем, что $d\left(\cup\{P_n(X) : n = 1, 2, \ldots\}\right) = d\left(P_\omega(X)\right) \le \tau$.

Пусть теперь $d(P_\omega(X)) = \tau \ge \aleph_0$. Тогда существует всюду плотное в $P_\omega(X)$ множество $\Omega = \{\mu_\alpha : a \in A\}$ такое, что $|A| = \tau$. Подмножество M пространства X определим следующим образом: $M = \bigcup\limits_{\alpha \in A}\{\ \operatorname{supp}(\mu_\alpha) : |\operatorname{supp}(\mu_\alpha)| < \infty,\ \mu_\alpha \in \Omega\}$. Ясно, что $|M| = \tau$. Покажем, что множество M всюду плотно в X. Предположим противное, т.е. существует такая точка x_0 и её такая окрестность Ox_0, что $M \cap Ox_0 = \varnothing$. Из регулярности X существует такая окрестность O_1x_0 точки x_0, что $[O_1x_0] \subset Ox_0$.

Так как X нормально, то существует такая функция $\varphi \in C(X)$, что $\varphi([O_1x_0]) = 0$ и $\varphi(X \setminus Ox_0) = 1$.

Рассмотрим окрестность $O(\delta_{x_0}; \phi; \frac{1}{4})$ точки δ_{x_0} в $P_\omega(X)$. Так как Ω всюду плотно в $P_\omega(X)$, то существует элемент $\nu \in \Omega \cap O(\delta_{x_0}; \phi; \frac{1}{4})$. Пусть $\mathrm{supp}(\nu) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Тогда

$$\left|\nu(\phi) - \delta_{x_0}(\phi)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} m_i \delta_{x_i}(\phi) - \delta_{x_0}(\phi)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} m_i \phi(x_i) - \phi(x_0)\right| = 1 > \frac{1}{4}.$$

Это противоречит всюду плотности множества Ω в $P_\omega(X)$. Значит, множество M всюду плотно в X, т.е. $d(X) \le \tau$. Теорема 2.3.2 доказана.

Из теорем 3.4.1 и 3.4.2 получим следующее.

Теорема 3.4.3. Для любого бесконечного компакта X и любого $n \in N$

$$d(X) = d(P_n(X)) = d(P_\omega(X)).$$

3.5. Некоторые кардинальные и топологические свойства пространства полуаддитивных функционалов с конечными носителями

В этом параграфе рассмотрены полуаддитивные функционалы с конечными носителями. Доказано, что отображение В.Н.Басманова $\pi_{OS,X} : X^n \times OS(n) \to OS_n(X)$, где X – тихоновское пространство и n – натуральное число, является сюръективным отображением из $X^n \times OS(n)$ на $OS_n(X)$. Как следствие показано, что функтор OS_n не повышает число Шанина и число предшанина бесконечных тихоновских пространств.

Для тихоновского пространства X и нормального функтора $F : Comp \to Comp$ положим

$F_n(X)=\{\mu\in F_\beta(X):|\mathrm{supp}(\mu)|\le n\}$, где n – натуральное число, $F_\omega(X)=\{\mu\in F_\beta(X):|\mathrm{supp}(\mu)|<\infty\}$. Ясно, что $F_\omega(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n(X)$.

Для тихоновского пространства X рассмотрим сужение отображения $\pi_{F,\beta X,n}:(\beta X)^n\times F(n)\to F_n(\beta X)$ на $X^n\times F(n)$ и обозначим его через $\pi_{F,X,n}$, т.е. $\pi_{F,X,n}=\pi_{F,\beta X,n}|X^n\times F(n)$. Ясно, что $\pi_{F,X,n}(X^n\times F(n))\subset F_n(X)$. Таким образом, получаем отображение $\pi_{F,X,n}:X^n\times F(n)\to F_n(X)$.

Лемма 3.5.1. Для отображения $\pi_{OS,X,n}:X^n\times OS(n)\to OS_n(X)$ верна следующая формула:

$$\pi_{OS,X,n}(\xi,\nu_A)=\nu_{\pi_{P,X,n}(\xi,A)},$$

где $\xi=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in X^n$, $A\subset P(n)$.

Доказательство. В силу формулы (1.2.1) получим, что

$$\pi_{OS,X,n}(\xi,\nu_A)=OS(\xi)(\nu_A)=\nu_{P(\xi)(A)}=\nu_{\pi_{P,X,n}(\xi,A)}.$$

Лемма 3.5.1 доказана.

Лемма 3.5.2. Отображение $\pi_{OS,X,n}:X^n\times OS(n)\to OS_n(X)$ - сюръективно.

Доказательство. Берем произвольный функционал $\nu_B\in OS_n(X)$. Тогда $\mathrm{supp}\,\nu_B=\{x_1,x_2,\dots x_k\}\subset X$, $1\le k\le n$. Положим $\xi=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, где $x_{k+1}=x_k$, $x_{k+2}=x_k$, …, $x_n=x_k$ при $k<n$. По определению носителя функционала имеем $\nu_B\in OS(\{x_1,x_2,\dots,x_n\})$. Отсюда получим, что $B\subset P(\{x_1,x_2,\dots,x_n\})$. Заметим, что $\pi_{P,X}(\xi,\mu)=\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{x_i}$ для $\mu=(m_1,m_2,\dots m_n)\in P(n)$ и $\xi=(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Теперь построим множество A следующим образом:

$$A=\{(m_1,m_2,\dots m_n)\in P(n):\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{x_i}\in B\}.$$

Тогда

$$\pi_{P,X,n}(\xi,A)=P(\xi)(A)=\{P(\xi)(\mu):\mu=(m_1,m_2,\dots,m_n)\in A\}=\times$$

$$\times = \{\sum_{i=1}^{n} m_i \delta_{x_i} : (m_1, m_2, \dots, m_n) \in A\} = B.$$

Отсюда имеем

$$\pi_{OS,X,n}(\xi, \nu_A) = \nu_{\pi_{P,X,n}(\xi,A)} = \nu_B.$$

Лемма 3.5.2 доказана.

Лемма 3.5.2 означает, что пространство $OS_n(X)$ является непрерывным образом произведения $X^n \times OS(n)$.

Теорема 3.5.1. Пусть X – произвольное бесконечное тихоновское пространство. Тогда следующие неравенства верны:

1) $sh(OS_n(X)) \le sh(X)$;

2) $psh(OS_n(X)) \le psh(X)$;

Доказательство. 1) Докажем включение $k(X) \subset k(OS_n(X))$, которое влечет за собой неравенство $sh(OS_n(X)) \le sh(X)$. Пусть $\tau \in k(X)$. Ясно что калибр пространства X является калибром и для пространства X^n, где n – произвольное натуральное число. Кроме того, любой несчетный кардинал является калибром для пространства $OS(n)$, так как пространство $OS(n)$ сепарабельно. Так как произведение сохраняет калибр пространств, τ является калибром произведения $X^n \times OS(n)$. Более того, поскольку непрерывное отображение сохраняет калибр топологических пространств, имеем, что τ является калибром пространства $OS_n(X)$. Неравенство 1) доказано.

Подобным образом доказывается неравенство 2). Теорема 2.4.1 доказана.

Утверждение 3.5.**1**. Для любого бесконечного тихоновского пространства X имеет место неравенство

$$ld(OS_n(X)) \ge ld(X).$$

Доказательство. Пусть $ld(OS_n(X)) = \tau$, где τ – некоторый бесконечный кардинал. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$. Ясно, что $\delta_{x_0} \in OS_n(X)$. Пусть $O(\delta_{x_0}; \varphi_1, \dots, \varphi_k; \varepsilon)$ – окрестность функционала δ_{x_0} плотности τ, где $\varphi_1,...,\varphi_k \in C_b(X)$, $\varepsilon > 0$ и $\Omega = \{\nu_\alpha : \alpha \in A\}$ всюду плотное подмножество $O(\delta_{x_0};\varphi_1,...,\varphi_k;\varepsilon)$ мощности τ, т.е. $|A| = \tau$. Положим $M = \bigcup_{\alpha \in A} \mathrm{supp}(\nu_\alpha)$, где $\mathrm{supp}(\nu_\alpha)$ – носитель функционала ν_α. Ясно, что $|M| = \tau$. В силу непрерывности функций $\varphi_1,...,\varphi_k$, для каждого $i = 1,2,...,k$ существует окрестность U_i точки x такая, что $|\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon$ для любой точки $x \in U_i$. Положим $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$ и покажем, что M всюду плотно в U.

Предположим, что $U \setminus \overline{M} \neq \varnothing$. Берем произвольную точку $y \in U \setminus \overline{M}$. Так как X - тихоновское пространство, то существует такая функция $\varphi : X \to I$, что $\varphi(y) = 1$ и $\varphi(x) = 0$ для каждой точки $x \in \overline{M}$. Рассмотрим окрестность $O(\delta_y;\varphi;\frac{1}{2})$ функционала δ_y. Имеем, что $\delta_y \in O(\delta_{x_0};\varphi_1,...,\varphi_k;\varepsilon)$. Действительно, поскольку $y \in U$, для каждого $i = 1,2,...,k$ имеет место

$$|\delta_y(\varphi_i) - \delta_{x_0}(\varphi_i)| = |\varphi_i(y) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon .$$

Отсюда получим, что $\Delta = O(\delta_{x_0};\varphi_1,...,\varphi_k;\varepsilon) \cap O(\delta_y;\varphi;\frac{1}{2}) \neq \varnothing$. Так как Ω всюду плотно в $O(\delta_{x_0};\varphi_1,...,\varphi_k;\varepsilon)$, то существует функционал $\nu_\alpha \in \Omega \cap \Delta$.

С другой стороны, так как $\mathrm{supp}(\nu_\alpha) \subset M$, то

$$|\nu_\alpha(\varphi) - \delta_y(\varphi)| = |0 - \varphi(y)| = 1 > \frac{1}{2}$$

Отсюда следует, что $\nu_\alpha \notin O(\delta_y;\varphi;\frac{1}{2})$. Полученное противоречие показывает, что M всюду плотно в U. В силу произвольности точки x_0 получим $ld(X) \le \tau$. Утверждение 3.5.1 доказано.

Подобным способом можно доказать следующее

Утверждение 3.5.2. Для любого бесконечного тихоновского пространства X имеет место неравенство

$$ld(OS_\omega(X)) \geq ld(X).$$

Утверждение 3.5.3. Пусть X – бесконечное тихоновское пространство. Тогда

1) $d(X) \leq d(O_n(X))$;

2) $d(X) \leq d(OS_n(X))$.

Доказательство. Докажем только 1). Для функтора OS_n доказательство ведется аналогично. Пусть $d(O_n(X)) = \tau$ и $\Omega = \{\nu_\alpha : \alpha \in A\}$ всюду плотное множество в $O_n(X)$ такое, что $|A| = \tau$. Через M обозначим объединение носителей всех элементов множества Ω, т.е. $M = \cup\{\mathrm{supp}(\nu_\alpha) : \nu_\alpha \in \Omega\}$. Так как все множества $\mathrm{supp}(\nu_\alpha)$ конечны, то $|M| = \tau$. Теперь покажем, что M всюду плотно в X. Предположим, что $\overline{M} \neq X$. Тогда для каждой точки $x \in X \setminus \overline{M}$ и замкнутого множества $\overline{M}$ существует такая непрерывная функция $\varphi : X \to [0,1]$, что $\varphi(x) = 1$ и $\varphi(y) = 0$ для $y \in \overline{M}$.

Рассмотрим открытое множество $O(\delta_x; \varphi; \frac{1}{2})$ пространства $O_n(X)$. Так как Ω всюду плотно в $O_n(X)$, то существует такой элемент $\nu_\alpha \in \Omega$, что $\nu_\alpha \in O(\delta_x; \varphi; \frac{1}{2})$. Пусть $\mathrm{supp}(\nu_\alpha) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Поскольку $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \overline{M}$, имеем $\varphi(x_i) = 0$ для $i = 1,2,\ldots,n$. Следовательно, $\nu_\alpha(\varphi) = 0$. Отсюда $|\nu_\alpha(\varphi) - \delta_x(\varphi)| = |0 - \varphi(x)| = 1 > \frac{1}{2}$. Это противоречие доказывает, что M всюду плотно в X. Значит $d(X) \leq \tau$. Утверждение 3.5.3 доказано.

Аналогичным образом можно доказывать следующее

Утверждение 3.5.4. Пусть X – бесконечное тихоновское пространство. Тогда

1) $d(X) \leq d(O_\omega(X))$;

2) $d(X) \leq d(OS_\omega(X))$.

Так как плотность сохраняется непрерывными отображениями, то лемма 3.5.2 влечет

Следствие 3.5.1. Для любого бесконечного тихоновского пространства X выполняются следующие неравенства:

1) $d(OS_n(X)) \leq d(X)$;

2) $d(OS_\omega(X)) \leq d(X)$.

Из утверждений 3.5.3, 3.5.4 и следствия 3.5.1 получим

Следствие 3.5.2. Для любого бесконечного тихоновского пространства X выполняются следующие неравенства

$$d(X) = d(OS_n(X)) = d(OS_\omega(X)).$$

3.6. Функтор OS_τ полуаддитивных τ-гладких функционалов и категорные, топологические свойства функтора OS_τ

В этом параграфе введен функтор OS_τ полуаддитивных τ-гладких функционалов, действующий в категории тихоновских пространств $Tych$, который может быть рассмотрен как продолжение функтора OS полуаддитивных функционалов с категории $Comp$ компактов. Доказано, что полуаддитивный τ-гладкий функционал $\nu_A \in OS(\beta X)$ однозначно определяется выпуклым компактом $A \subset P_\tau(X)$ пространства τ-гладких вероятностных мер.

Пусть X – бесконечное тихоновское пространство и $C_b(X)$- пространство всех непрерывных ограниченных функций $f: X \to \mathbb{R}$ с обычными (поточечными) операциями и sup-нормой, т.е. с нормой $\|f\| = \sup\left\{\left|f(x)\right| : x \in X\right\}$.

Определение 3.6.1 [17]. Функционал $\mu \in O(\beta X)$ называется τ-гладким, если $\mu(\varphi_\alpha) \to 0$ для любой монотонно убывающей направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$, поточечно сходящейся к нулю.

Для тихоновского пространства X через $OS_\tau(X)$ обозначим множество всех полуаддитивных τ-гладких функционалов из $O(\beta X)$. В $OS_\tau(X)$ рассматривается индуцированная из $OS(\beta X)$ топология. Ясно, что $P_\tau(X) \subset OS_\tau(X) \subset O_\tau(X)$ для любого тихоновского пространства X.

Имеют место включения

$$OS_\beta(X) \subset OS_\tau(X) \subset OS(\beta X) \qquad (3.6.1)$$

для любого тихоновского пространства X и равенства

$$OS_\beta(X) = OS_\tau(X) = OS(\beta X)$$

для любого компактного пространства X.

Покажем, что конструкция $OS_\tau(X)$ порождает ковариантный функтор, действующий в категории $Tych$.

Так как имеют место включения (3.6.1), для проверки функториальности конструкции OS_τ достаточно показать, что для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ тихоновских пространств X и Y имеет место включение

$$OS(\beta f)(OS_\tau(X)) \subset OS_\tau(Y).$$

Из работы [37] получим $OS(\beta f)(OS(\beta X)) \subset OS(\beta Y)$, где $\beta f : \beta X \to \beta Y$ – Стоун-Чеховское продолжение отображения f.

Теперь берем произвольный элемент $\mu \in OS_\tau(X)$. Тогда $\mu(\varphi_\alpha) \to 0$ для любой монотонно убывающей направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(X)$, поточечно сходящейся к нулю. Пусть $\{\psi_\alpha\} \subset C_b(Y)$ – монотонно убывающая направленность, состоящая из функций, поточечно сходящихся к нулю. Тогда направленность $\{\psi_\alpha \circ f\} \subset C_b(X)$ монотонно убывает и состоит из функций, поточечно сходящихся к нулю. Отсюда, имеем $OS(\beta f)(\mu)(\psi_\alpha) \to 0$. Значит, $OS(\beta f)(\mu) \in OS_\tau(Y)$.

Положим $OS_\tau(f) = OS(\beta f)|OS_\tau(X)$.

Таким образом, доказано, что OS_τ является ковариантным функтором в категории *Tych* тихоновских пространств, продолжающим функтор $OS: Comp \to Comp$.

Пусть χ_F – характеристическая функция множества $F \subset X$. Для замкнутого подмножества $F \subset X$ положим

$$\mu(\chi_F) = \inf\{\mu(\varphi) : \varphi \in C(\beta X) \text{ и } \varphi \geq \chi_F\}.$$

Из [19] сразу вытекает следующий критерий τ-гладкости полуаддитивных функционалов: функционал $\mu \in OS(\beta X)$ является τ-гладким тогда и только тогда, когда $\mu(\chi_K) = 0$ для любого компакта $K \subset \beta X \setminus X$.

В силу теоремы 3.3 [37], всякий функционал $\nu \in OS_\tau(X)$ может быть записан в виде $\nu = \nu_A$, где A некоторый (единственный) выпуклый компакт в $P(\beta X)$. Оказывается верно и следующее

Утверждение 3.6.1. Полуаддитивный функционал $\nu_A \in OS(\beta X)$ является τ-гладким тогда и только тогда, когда $A \subset P_\tau(X)$.

Доказательство. Пусть $\nu_A \in OS_\tau(X)$ – произвольный τ-гладкий функционал. Предположим, что $A \not\subset P_\tau(X)$ и $\mu \in A \setminus P_\tau(X)$. Тогда существует монотонно убывающая направленность $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(X)$, поточечно сходящаяся к нулю такая, что $\{\mu(\varphi_\alpha)\}$ не стремится к нулю. С другой стороны, имеем

$$\mu(\varphi_\alpha) \leq \sup\{\lambda(\varphi_\alpha) : \lambda \in A\} = \nu_A(\varphi_\alpha).$$

Так как $\nu_A(\varphi_\alpha) \to 0$, то $\mu(\varphi_\alpha) \to 0$. Полученное противоречие доказывает, что $A \setminus P_\tau(X) = \varnothing$. Значит, $A \subset P_\tau(X)$.

Теперь берем произвольный непустой выпуклый компакт $A \subset P_\tau(X)$. Предположим, что $\nu_A \notin OS_\tau(X)$. Тогда существует компакт $K \subset \beta X \setminus X$ такой, что

$$\nu_A(\chi_K)=\inf\{\mu(\varphi):\varphi\geq\chi_K\}=\inf_{\varphi\geq\chi_K}\sup_{\mu\in A}\mu(\varphi)=\varepsilon>0.$$

Положим $I=\{\varphi\in C(X):\varphi\geq\chi_K\}$. Тогда $(I,\succ)$ является направленным вверх множеством относительно порядка $\succ$, где $\varphi\succ\phi$ означает $\varphi\leq\phi$.

Так как $\inf_{\varphi\geq\chi_K}\sup_{\mu\in A}\mu(\varphi)=\varepsilon$, то $\sup_{\mu\in A}\mu(\varphi)\geq\varepsilon$ для всех $\varphi\in I$. Тогда для каждого $\varphi\in I$ существует элемент $\mu_\varphi\in A$ такой, что

$$\mu_\varphi(\varphi)\geq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как A компактно, то существует сходящая поднаправленность $\{\mu_\varphi:\varphi\in J\}$ направленности $\{\mu_\varphi:\varphi\in I\}$. Тогда $\lim\mu_\phi=\mu\in A$. Пусть $\varphi\in I$. Существует такой элемент $\varphi_1\in J$, что

$$\mu_\phi\in O(\mu,\varphi,\varepsilon/4)$$

для любого $\phi\in J$ такое, что $\phi\succ\varphi_1$. Пусть $\phi\succ\varphi$ и $\phi\succ\varphi_1$. Тогда

$$\mu(\varphi)\geq\mu_\phi(\varphi)-\varepsilon/4\geq\mu_\phi(\phi)-\varepsilon/4\geq\varepsilon/4.$$

Поэтому,

$$\mu(\chi_K)=\inf_{\varphi\in I}\mu(\varphi)\geq\varepsilon/4>0,$$

которое противоречит $\mu\in A\subset P_\tau(X)$. Полученное противоречие доказывает, что $\nu_A\in OS_\tau(X)$. Утверждение 3.6.1 доказано.

Теперь рассмотрим категорные свойства функтора полуаддитивных τ-гладких функционалов.

В этом параграфе все рассматриваемые пространства – тихоновские.

Утверждение 3.6.2. Пусть $f:X\to Y$ – непрерывное отображение тихоновских пространств и $\nu_A\in OS_\tau(X)$. Тогда имеет место формула

$$OS_\tau(f)(\nu_A)=\nu_{P_\tau(f)(A)}.$$

Доказательство. Для $\varphi\in C(\beta Y)$ имеем

$OS_\tau(f)(\nu_A)(\varphi)=\nu_A(\varphi\circ\beta f)=\sup\{\lambda(\varphi\circ\beta f):\lambda\in A\}=\sup\{\mu(\varphi):\mu\in P(\beta f)(A)\}$.

Так как $A\subset P_\tau(X)$, то имеем $P(\beta f)(A)=P_\tau(f)(A)$. Отсюда получим

$OS_\tau(f)(\nu_A)(\varphi)=\sup\{\mu(\varphi):\mu\in P_\tau(f)(A)\}$. Значит, $OS_\tau(f)(\nu_A)(\varphi)=\nu_{P_\tau(f)(A)}$. Утверждение 3.6.2 доказано.

Теорема 3.6.1. Функтор $OS_\tau:Tych\to Tych$ является мономорфным функтором.

Доказательство. Пусть $j:X\to Y$ – вложение тихоновского пространства X в тихоновское пространство Y. Покажем, что $OS_\tau(j):OS_\tau(X)\to OS_\tau(Y)$ также является вложением. Пусть $\nu_A,\nu_B\in OS_\tau(X)$ такие, что $\nu_A\neq\nu_B$. Тогда по теореме 1.2.1 имеем $A\neq B$. Поскольку функтор P_τ сохраняет вложение, то имеем $P_\tau(j)(A)\neq P_\tau(j)(B)$. Отсюда $OS_\tau(j)(\nu_A)=\nu_{P_\tau(j)(A)}\neq\nu_{P_\tau(j)(B)}=OS_\tau(j)(\nu_B)$, что и требовалось доказать. Теорема 3.6.1 доказана.

Теорема 3.6.2. Функтор $OS_\tau:Tych\to Tych$ сохраняет прообразы.

Доказательство. Пусть $f:X\to Y$ – непрерывное отображение и Z – замкнутое подмножество в Y. Покажем, что $OS_\tau(f)^{-1}(OS_\tau(Z))=OS_\tau(f^{-1}(Z))$. Возьмем $\nu_A\in OS_\tau(f^{-1}(Z))$, где A – выпуклый компакт в $P_\tau(f^{-1}(Z))$. Так как P_τ сохраняет прообразы [20, Теорема 3.7], то имеем

$$A\subset P_\tau(f^{-1}(Z))=P_\tau(f)^{-1}(P_\tau(Z)).$$

Отсюда

$$P_\tau(f)(A)\subset P_\tau(f)(P_\tau(f)^{-1}(P_\tau(Z)))=P_\tau(Z).$$

Следовательно,

$$\nu_{P_\tau(f)(A)}=OS_\tau(f)(\nu_A)\in OS_\tau(Z),$$

$$\nu_A\in OS_\tau(f)^{-1}(OS_\tau(Z)).$$

Теперь рассмотрим $\nu_B\in OS_\tau(f)^{-1}(OS_\tau(Z))$. Пусть $\nu_A\in OS_\tau(Z)$ – функционал, такой, что $\nu_A=OS_\tau(f)(\nu_B)$. В силу утверждения 3.2.1 получим, что $\nu_A=OS_\tau(f)(\nu_B)=\nu_{P_\tau(f)(B)}$. Тогда в силу теоремы

1.2.1 имеем, что $P_\tau(f)(B)=A\subset P_\tau(Z)$. Так как P_τ сохраняет прообразы, то

$$B\subset P_\tau(f)^{-1}(A)\subset P_\tau(f)^{-1}(P_\tau(Z))=P_\tau(f^{-1}(Z)).$$

Это означает, что $\nu_B\in OS_\tau(f^{-1}(Z))$. Теорема доказана.

Теорема 3.6.3. Функтор $OS_\tau : Tych\to Tych$ сохраняет пересечения замкнутых подмножеств тихоновских пространств, т.е. для любого семейства $\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ замкнутых подмножеств пространства X имеем, что

$$OS_\tau(\bigcap_{\alpha\in A}X_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in A}OS_\tau(X_\alpha).$$

Доказательство. Ясно, что $OS_\tau(\bigcap\limits_{\alpha\in A}X_\alpha)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in A}OS_\tau(X_\alpha)$ Покажем обратное включение. Пусть $\nu_A\in\bigcap\limits_{\alpha\in A}OS_\tau(X_\alpha)$. Тогда A выпуклое компактное подмножество $\bigcap\limits_{\alpha\in A}P_\tau(X_\alpha)$ Поскольку P_τ сохраняет пересечения, то $A\subset P_\tau(\bigcap\limits_{\alpha\in A}X_\alpha)$ Отсюда $\nu_A\in OS_\tau(\bigcap\limits_{\alpha\in A}X_\alpha)$. Теорема доказана.

Теорема 3.6.4. Функтор $OS_\tau : Tych\to Tych$ сохраняет класс совершенных отображений.

Доказательство. Пусть $f:X\to Y$ – совершенное отображение из X на Y. Рассмотрим отображение $OS(\beta f):OS(\beta X)\to OS(\beta Y)$. Нам нужно доказать включение $OS(\beta f)(OS(\beta X)\setminus OS_\tau(X))\to OS(\beta f)\setminus OS_\tau(Y)$. Пусть $\nu_A\in OS(\beta X)\setminus OS_\tau(X)$. Тогда в силу утверждения 3.1.1 имеем, что $A\cap(P(\beta X)\setminus P_\tau(X))\neq\varnothing$.

Положим $A'=A\cap(P(\beta X)\setminus P_\tau(X))$. В силу теорем 1.2.3 и 1.2.4 получим, что

$$P(\beta f)(A')\subset P(\beta f)(P(\beta X)\setminus P_\tau(X))\subset P(\beta Y)\setminus P_\tau(Y).$$

Так как $P(\beta f)(A')\subset P(\beta f)(A)$, то $P(\beta f)(A)\cap(P(\beta Y)\setminus P_\tau(Y))\neq\varnothing$. Тогда из утверждения 3.1.1 получим, что $\nu_{P(\beta f)(A)}\notin OS_\tau(Y)$. Отсюда $OS(\beta f)(\nu_A)=\nu_{P(\beta f)(A)}\in OS(\beta Y)\setminus OS_\tau(Y)$. Включение доказано.

Так как $OS(\beta f):OS(\beta X)\to OS(\beta Y)$ – непрерывное отображение компактов, то из теоремы 1.2.3 следует, что отображение $OS_\tau(f)=OS(\beta f)\,|\,OS_\tau(X)\to OS_\tau(Y)$ совершенно. Теорема доказана.

Из теорем 3.6.1 и 3.6.4 получим:

Следствие 3.6.1. Функтор $OS_\tau : Tych\to Tych$ сохраняет класс замкнутых вложений.

Утверждение 3.6.3. Пусть X – бесконечное тихоновское пространство. Пространство $OS_\tau(X)$ замкнуто в пространстве $O_\tau(X)$.

Доказательство. Берем произвольный функционал $\nu\in O_\tau(X)\setminus OS_\tau(X)$. Докажем, что ν имеет окрестность, непересекающуюся с $OS_\tau(X)$. Рассмотрим два случая:

1) Существуют неотрицательное число λ и функция $\varphi\in C_b(X)$ такие, что $\nu(\lambda\varphi)\neq\lambda\nu(\varphi)$. Тогда $|\nu(\lambda\varphi)-\lambda\nu(\varphi)|=a$ для некоторого положительного числа a. Не нарушая общности, можно предполагать

$$\nu(\lambda\varphi)-\lambda\nu(\varphi)=a \qquad (3.6.1)$$

Докажем, что окрестность $O(\nu;\varphi;\lambda\varphi;\frac{a}{\lambda+1})$ функционала ν не пересекается с $OS_\tau(X)$. Предположим, что существует элемент $\mu\in O(\nu;\varphi;\lambda\varphi;\frac{a}{\lambda+1})\cap OS_\tau(X)$. Тогда имеем следующие:

$$\mu(\lambda\varphi)=\lambda\mu(\varphi) \qquad (3.6.2)$$

$$-\frac{a}{\lambda+1}<\mu(\varphi)-\nu(\varphi)<\frac{a}{\lambda+1} \qquad (3.6.3)$$

и

$$-\frac{a}{\lambda+1}<\mu(\lambda\varphi)-\nu(\lambda\varphi)<\frac{a}{\lambda+1}.$$

Отсюда, в силу (3.2.1) имеем, что

$$-\frac{a}{\lambda+1}<\mu(\lambda\varphi)-\lambda\nu(\varphi)-a<\frac{a}{\lambda+1},$$

$$-\frac{\lambda a}{\lambda+1} < \mu(\lambda\varphi) - \lambda\nu(\varphi) < \frac{(\lambda+2)a}{\lambda+1}.$$

Учитывая (3.6.2), получаем

$$\frac{a}{\lambda+1} < \mu(\varphi) - \nu(\varphi) < \frac{a(\lambda+2)}{\lambda(\lambda+1)},$$

которое невозможно в силу (3.6.3). Значит

$O(\nu;\varphi;\lambda\varphi;\frac{a}{\lambda+1}) \cap OS_\tau(X) = \varnothing$.

2) Существуют такие функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C_b(X)$, что $\nu(\varphi_1+\varphi_2) > \nu(\varphi_1)+\nu(\varphi_2)$. Пусть

$$\nu(\varphi_1+\varphi_2) - \nu(\varphi_1) - \nu(\varphi_2) = c > 0 \qquad (3.6.4)$$

Тогда окрестность $O(\nu;\varphi_1;\varphi_2;\varphi_1+\varphi_2;\frac{c}{3})$ функционала ν не пересекается с $OS_\tau(X)$. Пусть это не так, т.е. существует элемент

$$\mu \in O(\nu;\varphi_1;\varphi_2;\varphi_1+\varphi_2;\frac{c}{3}) \cap OS_\tau(X).$$

Тогда имеем:

$$-\frac{c}{3} < \nu(\varphi_1) - \mu(\varphi_1) < \frac{c}{3}, \qquad (3.6.5)$$

$$-\frac{c}{3} < \nu(\varphi_2) - \mu(\varphi_2) < \frac{c}{3}, \qquad (3.6.6)$$

$$-\frac{c}{3} < \nu(\varphi_1+\varphi_2) - \mu(\varphi_1+\varphi_2) < \frac{c}{3}. \qquad (3.6.7)$$

Почленно слагая (3.2.5) и (3.2.6) получаем

$$-\frac{2c}{3} < \nu(\varphi_1) + \nu(\varphi_2) - \mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2) < \frac{2c}{3}. \qquad (3.6.8)$$

Из (3.6.4), (3.6.7) и полуаддитивности μ получим

$$\nu(\varphi_1) + \nu(\varphi_2) + c - \mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2) < \frac{c}{3}$$

или

$$\nu(\varphi_1) + \nu(\varphi_2) - \mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2) < -\frac{2c}{3}.$$

Это противоречит (3.6.8). Значит $\mu \in O(\nu;\varphi_1;\varphi_2;\varphi_1+\varphi_2;\frac{c}{3}) \cap OS_\tau(X) = \varnothing$. Утверждение доказано.

Из [45, Утверждение 1.4] получаем

Следствие 3.6.2. Пусть X – произвольное тихоновское пространство. Тогда $P_\tau(X)$ замкнуто лежит в $OS_\tau(X)$.

Для любого тихоновского пространства X рассмотрим отображение $\delta_X : X \to OS_\tau(X)$, определенное по правилам $\delta(x) = \delta_x$ для $x \in X$, где δ_x – мера Дирака, сосредоточенная в точке x.

Из следствия 3.6.2 следует

Теорема 3.6.5. Семейство $\delta = \{\delta_X\}$ определяет естественное преобразование функтора $Id : Tych \to Tych$ в функтор $OS_\tau : Tych \to Tych$, кроме того, каждое $\delta_X : X \to OS_\tau(X)$ – замкнутое вложение.

Теорема 3.6.6. Функтор $OS_\tau : Tych \to Tych$ сохраняет вес тихоновских пространств, т.е. $w(X) = w(OS_\tau(X))$ для любого бесконечного тихоновского пространства X.

Доказательство. Ясно, что пространство X естественно вкладывается в $OS_\tau(X)$ с помощью вложения $\delta_X : X \to OS_\tau(X)$, определенного по правилам $\delta_X(x) = \delta_x$ для $x \in X$, где δ_x – мера Дирака, сосредоточенная в точке x. С другой стороны, $w(X) = w(O_\tau(X))$ [17] для любого тихоновского пространства X. Так как вес топологических пространств наследственное свойство, то имеем $w(X) = w(OS_\tau(X))$. Теорема 3.6.6 доказана.

Теорема 3.6.7. Пусть $\{X_\alpha, p_\alpha^{\alpha'}, J\}$ – обратная система тихоновских пространств. Тогда отображение $R : OS_\tau(\varprojlim X_\alpha) \to \varprojlim OS_\tau(X_\alpha)$ является вложением. Если предельные проекции $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ всюду плотны (т.е. $p_\alpha(\varprojlim X_\alpha)$ всюду плотны в X_α), то образ $R(OS_\tau(\varprojlim X_\alpha))$ всюду плотен в $\varprojlim OS_\tau(X_\alpha)$.

Доказательство. Пусть $\{X_\alpha, p_\alpha^{\alpha'}, J\}$ – спектр тихоновских пространств. Рассмотрим Стоун-Чеховское продолжение $\{\beta X_\alpha, \beta p_\alpha^{\alpha'}, J\}$ спектра $\{X_\alpha, p_\alpha^{\alpha'}, J\}$. Отметим, что $\varprojlim X_\alpha$ вкладывается в $\varprojlim \beta X_\alpha$. При этом если предельные проекции $p_\alpha : \varprojlim X_\alpha \to X_\alpha$ всюду плотны, то образ пространства $\varprojlim X_\alpha$ всюду плотен в $\varprojlim \beta X_\alpha$. В силу непрерывности функтора $OS : Comp \to Comp$, соответствующее отображение

$$\overline{R} : OS(\varprojlim \beta X_\alpha) \to \varprojlim OS(\beta X_\alpha)$$

является гомеоморфизмом. Поскольку функтор OS_τ сохраняет вложение, то отображение $R : OS_\tau(\varprojlim X_\alpha) \to \varprojlim OS_\tau(X_\alpha)$ вкладывается в гомеоморфизм $\overline{R}$ и, следовательно, является вложением. Более того, так как функтор OS_τ сохраняет отображение, с всюду плотным образом, то предельные проекции p_α всюду плотны. Тогда пространство $OS_\tau(\varprojlim X_\alpha)$ при вложении R всюду плотно в $\varprojlim OS_\tau(X_\alpha)$. Теорема 3.6.7 доказана.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.6.8. Функтор $OS_\tau : Tych \to Tych$ является нормальным.

Для тихоновских пространств X и Y положим отображение $j_{XY} : OS_\tau(X) \times Y \to OS_\tau(X \times Y)$, определяемое формулой

$$j_{XY}(\mu, y) = OS_\tau(i_y)(\mu),\ \mu \in OS_\tau(X),\ y \in Y,$$

где $i_y : X \to X \times Y$ – вложение пространства X в произведение $X \times Y$ как слой:

$$i_y(x) = (x, y),\ x \in X.$$

Утверждение 3.6.4. Отображение $j_{XY} : OS_\tau(X) \times Y \to OS_\tau(X \times Y)$ является замкнутым вложением.

Доказательство. Пусть X и Y – тихоновские пространства и βX, βY их Стоун-Чеховские компактификации. Согласно

[37, теорема 4.10] и [20, VII.5.11] отображение $j_{\beta X\beta Y}: OS(\beta X)\times\beta Y\to OS(\beta X\times\beta Y)$ является вложением компактов. Требуемое утверждение следует из равенства

$$j_{\beta X\beta Y}(OS_\tau(X)\times Y)=j_{\beta X\beta Y}(OS(\beta X)\times\beta Y)\cap OS_\tau(X\times Y).$$

Следствие 3.2.3. Функтор OS_τ сохраняет гомотопии, т.е. для любой гомотопии $H_t: X\to Y$ гомотопия $OS_\tau(H_t): OS_\tau(X)\to OS_\tau(Y)$ непрерывна как отображение $OS_\tau(H_{(\cdot)}): OS_\tau(X)\times[0,1]\to OS_\tau(Y)$.

Доказательство. Пусть $H: X\times[0,1]\to Y$ – гомотопия. Тогда отображение $OS_\tau(H_{(\cdot)}): OS_\tau(X)\times[0,1]\to OS_\tau(Y)$ является композицией двух отображений $j_{XY}: OS_\tau(X)\times Y\to OS_\tau(X\times Y)$ и $OS_\tau(H): OS_\tau(X\times[0,1])\to OS_\tau(Y)$:

$$OS_\tau(H_{(\cdot)})=OS_\tau(H)\circ i_{X,[0,1]}$$

Так как отображения $j_{XY}: OS_\tau(X)\times Y\to OS_\tau(X\times Y)$ и $OS_\tau(H): OS_\tau(X\times[0,1])\to OS_\tau(Y)$ непрерывны, то мы имеем, что и отображение $OS_\tau(H_{(\cdot)}): OS_\tau(X)\times[0,1]\to OS_\tau(Y)$ непрерывно. Следствие 3.2.3 доказано.

Пусть δ – преобразование Дирака, отображение $\psi: OS^2\to OS$ для каждого компакта X определяется по формуле

$$\psi_X(u)(g)=u(\tilde g),$$

где $u\in OS(OS(X))$, $g\in C(X,[0,1])$, и отображение $\tilde g: OS(X)\to[0,1]$ задается по правилу $\tilde g(\mu)=\mu(g)$, $\mu\in OS(X)$. В работе [44] показано, что определенная таким образом тройка $\mathrm{OS}=(OS,\delta,\psi)$ образует монаду в категории $Comp$.

Теорема 3.6.9. Функтор $OS_\tau: Tych\to Tych$ является монадичным в категории $Tych$.

Доказательство. Рассмотрим определенные выше преобразования $\delta=\{\delta_{\beta X}: X\in Tych\}$ и $\psi=\{\psi_{\beta X}: X\in Tych\}$.

Включение $\delta_{\beta X}(X) \subset OS_\tau(X)$, $X \in Tych$ следует из теоремы 3.6.5 Покажем, что $\psi_{\beta X}(OS_\tau^2(X)) \subset OS_\tau(X)$ для любого тихоновского пространства X.

Пусть $u \in OS_\tau^2(X)$ и $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$ – монотонно убывающая сеть непрерывных функций, поточечно стремящихся к нулю в X. Докажем, что направленность $\{\psi_{\beta X}(u)(\varphi_\alpha)\}$ стремится к нулю. Действительно, $\psi_{\beta X}(u)(\varphi_\alpha) = u(\tilde{\varphi}_\alpha)$, где $\tilde{\varphi}_\alpha(\mu) = \mu(\varphi_\alpha)$. Направленность $\{\mu(\varphi_\alpha)\}$ убывает и стремится к нулю для $\mu \in OS_\tau(X)$. Отсюда следует, что $\{\tilde{\varphi}_\alpha\}$ – монотонно убывающая направленность непрерывных функций на $OS(\beta X)$, поточечно стремящихся к нулю на $OS_\tau(X)$. Так как $u \in OS_\tau(OS_\tau(X))$, то направленность $\{u(\tilde{\varphi}_\alpha)\}$ стремится к нулю. Значит, $\psi_{\beta X}(u) \in OS_\tau(X)$.

Полагая

$$\delta_X = \delta_{\beta X} \mid X : X \to OS_\tau(X)$$

и

$$\psi_X = \psi_{\beta X} \mid OS_\tau^2(X) : OS_\tau^2(X) \to OS_\tau(X),$$

составим тройку $(\mathrm{O}S, \delta, \psi)$, где $\delta = \{\delta_X : X \in Tych\}$, $\psi = \{\psi_X : X \in Tych\}$. Выполнение условий (1)–(3) определения монады следует из [44]. Теорема 3.6.9 доказана.

Коментарии по третьей главе

В этой главе показаны некоторые категорные свойства функтора полуаддитивных функционалов. Показано, что функтор полуаддитивных функционалов, действующий в категории компактов, является нормальным. Далее, показано, что функтор полуаддитивных функционалов является универсальным в классе нормальных функторов. Исследован функтор полуаддитивных функционалов с конечными носителями. Установлена взаимосвязь между функтором полуаддитивных функционалов и функторами вероятностных мер, гиперпространства, суперрасширения, слабо-аддитивных функционалов и положительно-однородных функционалов. Кроме того, доказано, что функтор полуаддитивных функционалов образует монаду. Показаны кардинальные свойства кружевных пространств и пространства сцепленных систем. Доказано, что для кружевных пространств число Линделёфа, плотность, слабая плотность, число Суслина, сетевой вес, сетевой π-вес равны.

Исследована локальная слабая плотность топологических пространств. А также изучены классы отображений, сохраняющих локальную слабую плотность и плотность бесконечных топологических пространств в сторону образа и прообраза. Доказано, что неприводимое и совершенное отображение сохраняет локальную слабую плотность бесконечных топологических пространств. Доказано сохранение плотности функтором вероятностных мер с конечными носителями. Рассмотрены полуаддитивные функционалы с конечными носителями. Доказано, что отображение В.Н.Басманова $\pi_{OS,X}: X^n \times OS(n) \to OS_n(X)$, где X – тихоновское пространство и n натуральное число, является сюръективным отображением из $X^n \times OS(n)$ на $OS_n(X)$. Как следствие показано, что функтор OS_n не повышает число Шанина и число предшанина бесконечных тихоновских пространств. Изучен функтор OS_τ полуаддитивных τ-гладких функционалов, действующий в категории тихоновских пространств $Tych$, который продолжает функтор OS полуаддитивных функционалов с категории компактов $Comp$. Доказано, что полуаддитивный τ-гладкий функционал $\nu_A \in OS(\beta X)$ однозначно определяется выпуклым компактом $A \subset P_\tau(X)$ пространства τ-гладких вероятностных мер.

Рассмотрены категорные свойства функтора полуаддитивных τ-гладких функционалов. Доказано, что функтор OS_τ мономорфен, эпиморфен, непрерывен, сохраняет вес, прообразы непрерывных отображений и непустые пересечения замкнутых множеств в категорию $Tych$, т.е. функтор $OS_\tau : Tych \to Tych$ есть нормальный функтор. Далее, доказано, что функтор OS_τ полуаддитивных τ-гладких функционалов монадичен.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука. 1977. – 368 с.
2. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. – М.: Наука. 1973. – 576 с.
3. Александров П.С., Урысон П.С. Мемуар о компактных топологи-ческих пространствах. – М.: Наука. 1971. – 144 с.
4. Архангельский А.В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука. 1974. – 424 с.
5. Аюпов Ш.А., Заитов А.А. Слабо аддитивные функционалы на линейных пространствах. //ДАН РУз. –2006. – № 4-5. – С. 7-12.
6. Аюпов Ш.А., Заитов А.А. Принцип равномерной ограниченности для слабо аддитивных операторов. // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2006. – №4. – С. 3-10.
7. Банах Т.О., Радул Т.Н. Геометрия отображений пространств вероятностных мер. //Математичніі студіі. – 1999. –Том 11.№ 1. – С. 17-30.
8. Басманов В.Н. Ковариантные функторы, ретракты, и размерность. //ДАН СССР. 1983. – № 5 (271). – С. 1033-1036.
9. Басманов В.Н. Ковариантные функторы конечных степеней на категории бикомпактных пространств. //Фунд. и прик. математика. –1995. –№3 (2). – С. 637-654.
10. Бешимов Р.Б. Некоторые кардинальные инварианты и ковариантные функторы в категориях топологических пространств. Докторская диссертация. –Ташкент, НУУз. 2007.
11. Джаббаров Г.Ф. Категорные свойства функтора слабо аддитивных положително-однородных функционалов. // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2006. – №1. – С. 20-28.

12. Иванов А.В. О функторах конечной степени и κ–метризуемых бикомпактах. //Сибирский математический журнал. –2001. –Т.42. №1. – С. 60-68.

13. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир. 1967. – 624 с.

14. Колмогоров А.А., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука. 1976. – 586 с.

15. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир. 1985. – 596 с.

16. Федорчук. В.В. Вероятностные меры в топологии. //УМН. 1991. –№46:1. – С. 41-80.

17. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия. //УМН. 1981. – №36:3. – С. 177-195.

18. Федорчук В.В. Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы. //УМН. 1986. – №41:6. – С. 121-159.

19. Федорчук В.В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов. //УМН. 1984. – №39:5. – С. 169-208.

20. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. – М.: МГУ, 1988. – 288 с.

21. Шапиро Л.Б. Об операторах продолжения функций и нормальных функторах. //Вест. МГУ. Сер. мат.-мех. –1992. – №1. – С. 35-42.

22. Щепин Е.В. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров. //УМН. 1976. – №31:5. – С. 191-226.

23. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов. //УМН. 1981. – №36:3. – С. 3-62.

24. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир. 1986. – 752 с.

25. Albeverio S., Ayupov Sh.A., Zaitov A.A. On the metrizability of the of order preserving functionals. // SFB 611. – University Bonn, 2007. – No. 363.

26. Albeverio S., Ayupov Sh.A., Zaitov A.A. On certain properties of the spaces of order-preserving functionals. //Topology and its Applications. – V. 155. Issue 16. 2008. – P. 1792-1799.

27. Ayupov Sh.A., Zaitov A.A. On the weight and density of the spaces of order-preserving functionals.//arXivmath: 0710. 5020v1. 2007.

28. Ditor S.Z. and Eifler L. Some open mapping theorems for measures // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – №164. – P. 287-293.

29. Eilenberg S., Moore T. Adjoint functors and triples. //Illinois journal of mathematics. –1965. –V. 9. No. 3. – P. 381-398.

30. Haydon R. On a problem of Pelchinski: Milutin spaces, Dugundji spaces and AE(dim 0). //Studia Math. – 1974. –No. 1 (52). – P. 23-31.

31. J. de Groot. Supercompactness and superexstensions. //Proc. 1 Intern. Symp. On Extentions Theory of Topological Structures. VEB. – Berlin, 1969. – P. 89-90.

32. Fedorchuk V.V., Todorčević S. Cellularity of covariant functors. //Topology and its application. 1997. –V. 76. No. 1. – P. 125-150.

33. Radul T.N. On the functor of order-preserving functionals. //Comment. Math. Univ. Carol. 1998. –V. 39. No. 3. – P. 609-615.

34. Radul T.N. Topology of the spaces of order-preserving functionals. //Bulletin of the Polish Academy of sciences. Mathematics. 1999. –Vol. 47. No. 1. –P. 53-60.

35. Radul T.N. A functional representation of the hyperspace monad. //SMUS. – 1996.

36. Zaitov A.A. On categorical properties of order-preserving functionals. //Methods of Functional Analysis and Topology. – Kyiv, 2003. –V. 9. No. 4. –P. 357-364.

37. Davletov D. E., Djabbarov G. F. Functor of semiadditive functionals. //Methods of Functional Analysis and Topology. – Kyiv, 2008. – V. 14. No 4. – P.314-322.

38. Давлетов Д. Э. Описание пространства полуаддитивных функционалов. //Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2009. – № 2. – С. 49-54.

39. Давлетов Д. Э. Некоторые свойства функтора полуаддитивных функционалов. //Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2009. – № 4. – С. 50-60.

40. Давлетов Д.Э. Пространство полуаддитивных функционалов. //Материалы Республиканской конференции «Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа». 25-27 июня 2006. –Нукус, 2006. – С. 14-15.

41. Джаббаров Г.Ф., Давлетов Д.Э. О функторе полуаддитивных функционалов. //Тезисы международной конференции «Александровские чтения – 2006». 30 мая – 2 июня 2006. – Москва, 2006. – С. 15-16.

42. Давлетов Д.Э. Функтор полуаддитивных функционалов конечной степени. //Материалы Республиканской конференции «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий». 8 мая 2008 . –Ташкент, 2008. – С. 65-66.

43. Давлетов Д.Э. О размерности пространства полуаддитивных функционалов. //Материалы международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложения». 30 марта – 2 апреля 2009. –Москва, 2009. – С. 23-24.

44. Давлетов Д.Э. Описание и категорные свойства функтора полуаддитивных функционалов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ташкент – 2009. 54 стр.

45. Banakh T. The topology of spaces of probability measures, I: Functors P_τ and P_R // Matematychni Studii. V.5, No.1-2. 1995.

46. Beshimov R.B., Mamadaliev N.K. On the functor of semiadditive τ-smooth functionals// Topology and its applications 221 (2017) p.167-177.

47. Beshimov R.B., Mamadaliev N.K. Some cardinal properties of stratifiable spaces and the space of linked systems with compact elements // Mathematica Aeterna international Journal for Pure and Applied Mathematics, Vol.4, no.1, 2014, p. 45-54.

48. Beshimov R. B., Mamadaliev N.K., Mukhamadiev F. G. π-Irreducible Mappings and K-Network of Infinite Compacts // British Journal of Mathematics and Computer Science 10(5): 1-7, 2015.

49. Beshimov R. B., Mukhamadiev F. G., Mamadaliev N. K. The local density and the local weak density of hyperspaces // International journal of geometry. Vol. 4 (2015), No. 1, 42 – 49.

50. Beshimov R.B., Mamadaliev N.K., Mukhamadiev F.G. Some properties of topological spaces related to the local density and the local weak density // Mathematics and Statistics, 3(4) 2015, p. 101-105.

51. Beshimov R.B., MamadalievN.K . On non-increasing of the density and the weak density under weakly normal functors of finite support // Mathematics and Statistics, 3(5) 2015, p. 129-133.

52. Mukhamadiev F. G. Mamadaliev N.K. Cardinal properties of Hattori spaces on the real lines and their superextensions //

Mathematica Aeterna. International Journal for Pure and Applied Mathematics, Vol.4, no.5, 2014, p. 465-475.

53. Мамадалиев Н.К. Монадичность функтора OS_τ полуаддитивных τ-гладких функционалов// Вестник НУУз, 2016, 2/2, стр. 32-36.

54. Мамадалиев Н.К. О некоторых кардинальных и топологических свойствах пространства полуаддитивных функционалов с конечными носителями// Узб. Мат. Жур. No 2 / 2017. Стр. 88-97.

СОДЕРЖАНИЕ

ДАВЛЕТОВ Д.Э.

ОПИСАНИЕ И КАТЕГОРНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКТОРА ПОЛУАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

МОНОГРАФИЯ

Ташкент - “NIF MSH” - 2024

Muharrir: Xolsaidov F.B.

Bosishga 15.03.2024.da ruxsat etildi.
Bichimi 60x90. “Cambria” garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 5. Nashr bosma tabog‘i 4,75.
Adadi 100 nusxa.

“METODIST NASHRIYOTI” MCHJ matbaa bo‘limida chop etildi.
Manzil: Toshkent shahri, Shota Rustaveli 2-vagon tor ko‘chasi, 1-uy.

+99893 552-11-21