



Уральский
федеральный
университет

имени первого Президента
России Б. Н. Ельцина

Высшая школа
экономики
и менеджмента

А. В. ЗЕНКОВ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие



Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента Российской Федерации Б. Н. Ельцина

А. В. Зенков

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки
010300.62, 09.03.03, 38.03.05, 09.04.03, 38.04.05

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2016

УДК 519.6(075.8)

ББК 22.193я73

3-56

Рецензенты:

Урал. гос. экон. ун-т (завкафедрой канд. физ-мат. наук *Мельников Ю. Б.*);
канд. экон. наук проф. *Кочкина Е. М.* (Урал. гос. экон. ун-т)

Научный редактор — д-р пед. наук, проф. *Плещев В. В.*

Зенков, А. В.

3-56 **Численные методы** : учеб. пособие / А. В. Зенков. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. — 124 с.

ISBN 978-5-7996-1781-3

Пособие соответствует лекционному курсу численных методов, читаемому автором для студентов ИТ-специальностей. Каждая глава заканчивается индивидуальными заданиями для практических занятий (после I главы) и лабораторных работ, которые предполагаются к выполнению в пакете MathCad. Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 010300.62 — Фундаментальная информатика и информационные технологии; 09.03.03, 09.04.03 — Прикладная информатика (бакалавр, магистр); 38.03.05, 38.04.05 — Бизнес-информатика (бакалавр, магистр).

Библиогр.: 12 назв. Табл. 4. Рис. 20. Прил. 2.

УДК 519.6(075.8)

ББК 22.193я73

Оформлением обложки автор отдает дань уважения Карлу Фридриху Гауссу (1777–1855), «королю математиков», оставившему фундаментальные труды и в численных методах (метод наименьших квадратов, формула Гаусса, родственная формуле Ньютона-Котеса, метод Гаусса для решения систем линейных уравнений и мн. др.).

На обложке — памятник на могиле Гаусса в Гёттингене (Германия).

Фото предоставлено автором.

ISBN 978-5-7996-1781-3

© Уральский федеральный
университет, 2016

Предисловие

Учебное пособие соответствует 1-семестровому (15 недель) лекционному курсу численных методов для студентов IT-специальностей и содержит материал, который реально освоить за 2 часа лекций и 2 часа лабораторных работ в неделю, отводимых учебным планом на данный предмет. Каждая глава заканчивается индивидуальными заданиями для практических занятий (после I главы) и лабораторных работ, которые предлагается выполнять в пакете численных и символьных расчетов MathCad. Предварительное знание его не предполагается; образец выполнения в MathCad лабораторной работы по интерполированию функций, приведенный в приложениях, позволит быстро овладеть базовыми навыками расчетов в этом интуитивно понятном пакете.

Учебная литература по численным методам необозримо велика. В конце книги приведен только список источников, повлиявших на содержание данной работы.

Автор просит присылать сообщения о найденных недостатках по адресу zenkow@mail.ru.

Введение

Численные методы (вычислительные методы, методы вычислений) — раздел вычислительной математики, изучающий приближенные способы решения типовых математических задач, которые либо не решаются, либо трудно решаются точными аналитическими методами (вычислительная математика в узком смысле). Примерами типовых задач являются численное решение уравнений, численные дифференцирование и интегрирование и др. Кроме численных методов, к вычислительной математике относят круг вопросов, связанных с использованием компьютеров и с программированием.

Деление методов вычислений на аналитические и численные несколько условно.

Пример 1. При аналитическом решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по известной формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ в ответ входит корень $\sqrt{\dots}$. Если он не извлекается точно (подкоренное выражение не является точным квадратом некоторого числа), то для получения численного значения корней потребуется численная процедура приближенного вычисления корня.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{\sin ax}{x}.$$

Оно легко «решается» аналитически

$$y(x) = C \exp \left\{ \int_0^x \frac{\sin at}{t} dt \right\},$$

но интеграл «неберущийся», и вычислять его придется численно.

Итак, даже в тех случаях, когда можно далеко продвинуться в аналитическом решении задачи, не исключено применение на каком-либо этапе численных методов для получения ответа в практически удобном виде.

Часто аналитические методы называют точными, а численные — приближенными. Приведенные примеры показывают, что и аналитические методы могут приводить к приближенному результату. Кроме того, аналитические методы часто бывают приближенными по существу, оставаясь аналитическими, например, когда функция заменяется первыми слагаемыми ее ряда Тейлора.

Глава 1. Погрешности

Классификация погрешностей

Поскольку численные методы предназначены для отыскания приближенного решения задач, не решаемых точными методами, такому решению всегда свойственна некоторая погрешность. Рассмотрим здесь источники погрешности.

1) **Погрешность модели.** Природа слишком сложна и многообразна, чтобы пытаться изучать ее во всей полноте присущих ей в том числе и малозначимых взаимосвязей. Любая (естественная) наука изучает не природу непосредственно, а те модели, которые создаются самой этой наукой для описания природных явлений. **Модель** — это идеализированное описание явления, в котором выявлены основные и игнорируются второстепенные свойства явления. Хорошая модель — это верный шарж, меткая карикатура на изучаемое явление. Естественно, что моделирование, сопровождаемое огрублением и упрощением, вносит погрешность в результат описания явления. Математическая модель создается на языке математики, но оценка погрешности математической модели есть прерогатива не математики, а той науки, в рамках которой изучается явление.

2) **Погрешность исходных данных.** Как правило, математическая модель содержит некоторые параметры, зависящие от исходных данных. Поскольку последние определяются обычно из экспериментов, неизбежно сопровождаемых ошибками измерений, возникает погрешность исходных данных.

Погрешности в решении, обусловленные моделированием и исходными данными, называются **неустраняемыми**. Они не зависят от математики и присутствуют, даже если решение поставленной математической задачи найдено точно.

3) **Погрешность метода.** После того как математическая модель создана, вычисления в рамках модели обычно можно выполнять по-разному. Сложная математическая задача заменяется более простой. Например, вычисление определенного интеграла заменяется вычислением интегральной суммы. При этом неизбежно возникает погрешность метода вычислений, которой в дальнейшем мы будем уделять большое внимание при рассмотрении конкретных численных методов.

4) **Погрешность округления.** Любые расчеты, выполняемые как вручную, так и с помощью вычислительной техники, производятся с конечным числом цифр, поэтому приходится прибегать к округлению промежуточных и окончательного ответа. Так возникает погрешность округления, которая может накапливаться в ходе вычислений (опасный процесс, способный обесценить результат вычислений!). Даже те результаты, которые получены точными аналитическими методами, испытывают влияние погрешности округлений и в действительности могут оказаться приближенными.

Полная погрешность является результатом взаимодействия разных видов погрешностей и не может быть меньше, чем наибольшая из составляющих ее погрешностей.

Абсолютная и относительная погрешности

Для оценки погрешности вводятся понятия абсолютной и относительной погрешности.

Пусть x — точное значение некоторой величины (нам оно неизвестно и никогда не будет известно, поскольку определяется с помощью измерений, страдающих неточностями); a — приближенное значение той же величины ($a \approx x$). Абсолютная погрешность приближенного числа a определяется как $\Delta_a = |x - a|$. Но поскольку x неизвестно, то и абсолютную погрешность мы узнать не можем! Чтобы разрешить парадокс, вводят предельную абсолютную погрешность Δ_a^* — такое значение, которое абсолютная погрешность заведомо не превзойдет при данном способе измерений

$$|x - a| \leq \Delta_a^*. \quad (1)$$

Из выражения (1) следует, что $a - \Delta_a^* \leq x \leq a + \Delta_a^*$, поэтому желательно меньшее значение Δ_a^* — это уменьшит длину интервала, содержащего искомое значение x и, следовательно, понизит неопределенность в наших знаниях об этой величине.

В технике формулу (1) часто записывают в виде $x = a \pm \Delta_a^*$, причем Δ_a^* называется допуском. Никакое изделие не может быть изготовлено с абсолютно точным соблюдением номинальных размеров, допуски показывают возможные (допустимые) отклонения от номинала.

Итак, абсолютная погрешность оценивает точность измерений, но эта оценка не полная, поскольку не учитывает характерный размер изучаемого явления (объекта). Так, например, абсолютная погрешность в 1 см при измерении длины комнаты — вероятно, вполне приемлемая точность, но при измерении роста человека эта же погрешность будет сочтена непозволительно грубой.

Более информативным показателем качества измерений является относительная погрешность δ_a (соответственно предельная относительная погрешность δ_a^*) приближенного числа a как отношение абсолютной погрешности (предельной абсолютной погрешности) к модулю числа a

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, \quad \delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|}.$$

Относительная погрешность является величиной безразмерной, т. е. не зависит от выбора системы единиц измерения, что позволяет сравнивать качество измерений разнородных величин (бессмысленным является вопрос о том, что больше: 1 кг или 1 м, — но сравнение качества измерений массы и длины в терминах относительной погрешности вполне допустимо). Измеряется δ_a (δ_a^*) в долях единицы или в процентах.

Пример. Согласно ныне действующим (2015 г.) определениям международного Комитета по константам для науки и технологии входящая в закон всемирного тяготения гравитационная постоянная

$$\gamma = (6.67259 \pm 0.00085) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2},$$

а заряд электрона

$$e = (1.602\,177\,33 \pm 0.000\,000\,49) \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Сравнить точность определения этих фундаментальных физических постоянных.

Решение. Для гравитационной постоянной предельная относительная погрешность

$$\delta_\gamma^* = \frac{0.00085}{6.67259} = 1.27 \cdot 10^{-4},$$

а для заряда электрона

$$\delta_e^* = \frac{0.00000049}{1.60217733} = 3.1 \cdot 10^{-7}.$$

Таким образом, в последнем случае относительная погрешность оказывается на три порядка меньшей, т. е. заряд электрона определен существенно точнее, чем гравитационная постоянная.

С понятиями абсолютной и относительной погрешности связаны понятия верных и значащих цифр.

Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает единицы последнего (самого правого) разряда его десятичной записи, то цифры числа называют **верными** (или **точными**).

По умолчанию десятичная запись приближенного числа должна содержать только верные цифры, и тогда по записи числа сразу можно узнать предельную абсолютную погрешность, с которой оно известно.

Цифры, не являющиеся верными, называются **сомнительными**.

Пример. Даны приближенные числа $a = 8.6$, $b = 8.60$, $c = 3200$, $d = 3.2 \cdot 10^3$. Указать предельную абсолютную погрешность для каждого числа.

Решение. Для числа a погрешность $\Delta_a^* \leq 0.1$, для числа b $\Delta_b^* \leq 0.01$, для числа c $\Delta_c^* \leq 1$, для числа d $\Delta_d^* \leq 0.1 \cdot 10^3 = 100$.

Итак, числа a и b , c и d , равные с точки зрения «обычной» математики, существенно различны в вычислительной математике: из абсолютной погрешности мы заключаем, что число b известно точнее, чем число a , а число c — точнее, чем d . Кроме того, нуль, стоящий справа в дробной части десятичного числа, важен, и им нельзя пренебрегать, если мы хотим составить верное суждение о точности числа.

Значащими цифрами приближенного числа называются все цифры его десятичной записи, кроме нулей, находящихся левее первой отличной от нуля цифры.

Пример. Числа 0.001 307 и 6.0400 имеют соответственно четыре и пять значащих цифр. Итак, нули, находящиеся слева, значащими не являются, а нуль, записанный в конце десятичной дроби, всегда является значащей цифрой.

Действия с приближенными числами

Теорема 1. Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел.

В частности, для суммы двух чисел a и b любого знака получаем $\Delta_{a \pm b} \leq \Delta_a + \Delta_b$.

Из этой теоремы следует, что абсолютная погрешность алгебраической суммы не меньше абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых, т. е. увеличение точности за счет других слагаемых невозможно. Поэтому бессмысленно сохранять излишние десятичные знаки в более точных слагаемых. Отсюда вытекает следующее.

Правило сложения и вычитания приближенных чисел:

- 1) выделить наименее точное число (или числа), т. е. такое, в десятичной записи которого наименьшее число верных десятичных знаков;
- 2) округлить остальные числа так, чтобы каждое из них содержало на один (запасной) знак больше, чем выделенное число;
- 3) выполнить сложение и вычитание с учетом сохраненных знаков;
- 4) полученный результат округлить до предпоследнего знака.

Напомним правила округления числа, т. е. его замены числом с меньшим количеством значащих цифр:

- 1) если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то сохраняемые десятичные знаки оставляют без изменения;
- 2) если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последний из сохраняемых знаков увеличивают на 1;
- 3) если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а среди следующих за ней цифр есть отличные от нуля, то последний из сохраняемых знаков увеличивают на 1;
- 4) если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а все последующие — нули, то последний из сохраняемых десятичных знаков увеличивают

на 1, когда он нечетен, и сохраняют неизменным, когда он четен (правило четной цифры).

Пример. Округляя число 53.471 до одного знака после запятой, получим 53.5 (правило 2), а при округлении до двух знаков после запятой получим 53.47 (правило 1). Округляя число 7.825 001 до трех знаков после запятой, получим 7.825 (правило 3). Округляя число 8.465 до сотых долей, получим 8.46; сохраняемая цифра не увеличивается на единицу, поскольку она четна. При округлении числа 8.475 до сотых долей получим 8.48 — нечетная цифра увеличилась на единицу (правило 4).

Смысл правила 4 в том, что при многочисленных округлениях избыточные числа будут встречаться примерно с той же частотой, что и недостаточные, и произойдет частичная взаимная компенсация погрешностей округления; результат окажется более точным.

Теперь проиллюстрируем правило сложения и вычитания приближенных чисел.

Пример. Найти сумму приближенных чисел $a = 414.8$, $b = 0.025$, $c = 24.17$, $d = 0.000\ 326$. По умолчанию все цифры в этих числах считать верными.

Решение. Наименее точное слагаемое — a , поскольку в нем только один верный десятичный знак. Округлим остальные слагаемые до двух знаков после запятой: $b \rightarrow 0.02$, $c \rightarrow 24.17$, $d \rightarrow 0.00$. Теперь сложим округленные числа: $414.8 + 0.02 + 24.17 + 0.00 = 438.99$. Округляя результат до одного знака после запятой, получим окончательный ответ: 439.0.

Теорема 2. Относительная погрешность произведения (частного) приближенных чисел не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел.

В частности, для трех чисел $\delta_{ab/c} \leq \delta_a + \delta_b + \delta_c$.

Из теоремы следует, что относительная погрешность произведения и частного не может быть меньше относительной погрешности наименее точного из исходных чисел (т.е. имеющего меньше всего верных значащих цифр). Поскольку относительная погрешность числа определяется количеством его верных значащих цифр, то при умножении и делении бессмысленно оставлять значащих цифр больше, чем их было в исходном числе с наименьшим количеством верных значащих цифр.

Отсюда вытекает следующее правило.

Правило умножения и деления приближенных чисел:

- 1) из всех чисел, которые предстоит умножать и делить, выделить наименее точное — то, в котором меньше всего верных значащих цифр;
- 2) округлить остальные числа так, чтобы каждое из них содержало на одну (запасную) значащую цифру больше, чем выделенное число;
- 3) выполнить умножение и деление округленных чисел с учетом сохраненных значащих цифр;
- 4) оставить в ответе столько значащих цифр, сколько их было в наименее точном числе.

Пример. Найти произведение приближенных чисел $a = 3.5$ и $b = 83.368$, все цифры которых верные.

Решение. В первом числе две верные значащие цифры, а во втором — пять. Второе число округлим до трех значащих цифр: $b \rightarrow 83.4$. После округления перемножим числа: $ab = 3.5 \cdot 83.4 = 291.9 \approx 2.9 \cdot 10^2$. В ответе оставлены две значащие цифры — столько, сколько их было во множителе с наименьшим количеством верных значащих цифр.

Индивидуальные задания

- а) Определить, какое равенство точнее.
- б) Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки. Определить абсолютную погрешность результата.
- в) Найти предельные абсолютную и относительную погрешности приближенного числа, все цифры которого по умолчанию верные.

Варианты

1. а) $14/17 = 0.824$, $\sqrt{53} = 7.28$; б) 23.3748 , $\delta = 0.27\%$; в) 0.645 .
2. а) $7/3 = 2.33$, $\sqrt{58} = 7.62$; б) 13.5726 ± 0.0072 ; в) 4.8556 .
3. а) $27/31 = 0.871$, $\sqrt{42} = 6.48$; б) 0.088748 , $\delta = 0.56\%$; в) 71.385 .
4. а) $23/9 = 2.56$, $\sqrt{87} = 9.33$; б) 4.57633 ± 0.00042 ; в) 6.8346 .
5. а) $6/7 = 0.857$, $\sqrt{41} = 6.40$; б) 46.7843 , $\delta = 0.32\%$; в) 7.38 .
6. а) $12/7 = 1.71$, $\sqrt{47} = 6.86$; б) 0.38725 ± 0.00112 ; в) 0.00646 .
7. а) $21/13 = 1.62$, $\sqrt{63} = 7.94$; б) 45.7832 , $\delta = 0.18\%$; в) 3.6765 .

8. а) $16/7 = 2.29$, $\sqrt{11} = 3.32$; б) 0.75244 ± 0.00013 ; в) 5.374.
9. а) $18/7 = 2.57$, $\sqrt{22} = 4.69$; б) 46.453, $\delta = 0.15\%$; в) 6.125.
10. а) $17/9 = 1.89$, $\sqrt{17} = 4.12$; б) 0.66385 ± 0.00042 ; в) 24.6.
11. а) $51/11 = 4.64$, $\sqrt{35} = 5.92$; б) 0.66385, $\delta = 0.34\%$; в) 0.543.
12. а) $19/12 = 1.58$, $\sqrt{12} = 3.46$; б) 4.88445 ± 0.00052 ; в) 4.633.
13. а) $13/7 = 1.857$, $\sqrt{7} = 2.65$; б) 2.8867, $\delta = 0.43\%$; в) 63.749.
14. а) $49/13 = 3.77$, $\sqrt{14} = 3.74$; б) 5.6483 ± 0.0017 ; в) 0.00858.
15. а) $5/3 = 1.667$, $\sqrt{38} = 6.16$; б) 3.7542, $\delta = 0.32\%$; в) 0.389.
16. а) $17/11 = 1.545$, $\sqrt{18} = 4.243$; б) 0.8647 ± 0.0013 ; в) 0.864.
17. а) $7/22 = 0.318$, $\sqrt{13} = 3.61$; б) 0.3944, $\delta = 0.15\%$; в) 21.7.
18. а) $13/17 = 0.765$, $\sqrt{31} = 5.57$; б) 3.6878 ± 0.0013 ; в) 8.74.
19. а) $50/19 = 2.63$, $\sqrt{27} = 5.20$; б) 0.85638, $\delta = 0.22\%$; в) 231.57.
20. а) $21/29 = 0.724$, $\sqrt{44} = 6.63$; б) 13.6853 ± 0.0023 ; в) 2.16.
21. а) $17/19 = 0.895$, $\sqrt{52} = 7.21$; б) 7.521, $\delta = 0.12\%$; в) 0.5748.
22. а) $6/11 = 0.545$, $\sqrt{83} = 9.11$; б) 3.7832 ± 0.0043 ; в) 2.678.
23. а) $16/19 = 0.842$, $\sqrt{55} = 7.416$; б) 17.356, $\delta = 0.11\%$; в) 0.5718.
24. а) $23/15 = 1.53$, $\sqrt{98} = 9.899$; б) 8.7432 ± 0.0023 ; в) 0.578.
25. а) $2/21 = 0.095$, $\sqrt{22} = 4.69$; б) 24.5641, $\delta = 0.09\%$; в) 4.478.
26. а) $12/11 = 1.091$, $\sqrt{68} = 8.246$; б) 0.5532 ± 0.0014 ; в) 3.4479.
27. а) $6/7 = 0.857$, $\sqrt{48} = 6.928$; б) 14.5841, $\delta = 0.17\%$; в) 0.421.
28. а) $15/7 = 2.14$, $\sqrt{10} = 3.16$; б) 4.5012 ± 0.0013 ; в) 1.4229.
29. а) $4/17 = 0.235$, $\sqrt{105} = 10.25$; б) 1.1341, $\delta = 0.12\%$; в) 2.401.
30. а) $7/15 = 0.467$, $\sqrt{30} = 5.48$; б) 6.7702 ± 0.0015 ; в) 11.1239.

Пример решения одного варианта

а) $9/19 = 0.474$, $\sqrt{103} = 10.149$. Найдем значения этих выражений с бóльшим числом десятичных знаков: $a = 9/19 = 0.47368\dots$, $b = \sqrt{103} = 10.14889\dots$. Вычислим предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком: $\Delta_a = |0.47368 - 0.474| = 3.2 \cdot 10^{-4} \leq 0.0004$, $\Delta_b = |10.14889 - 10.149| = 1.1 \cdot 10^{-4} \leq 0.0002$.

Предельные относительные погрешности составляют

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{0.0004}{0.474} \approx 8 \cdot 10^{-4} = 0.08\%,$$

$$\delta_b = \frac{\Delta_b}{|b|} = \frac{0.0002}{10.149} \approx 2 \cdot 10^{-5} = 0.002\%.$$

Поскольку δ_b много меньше, чем δ_a , равенство $\sqrt{103} = 10.149$ является гораздо более точным.

б) Пусть приближенное число $c = 72.354 \pm 0.021$. Поскольку предельная абсолютная погрешность $\Delta_c = 0.021 < 0.1$, число c придется округлить до десятых и окончательно, только с верными цифрами, его запишем в виде 72.4.

Пусть приближенное число $d = 5.272$ известно с относительной погрешностью $\delta_d = 0.1\%$. Поскольку $\Delta_d = |d| \cdot \delta_d = 5.272 \cdot 0.001 = 0.005272 < 0.01$, число d придется округлить до сотых и окончательно, только с верными цифрами, его запишем в виде 5.27.

в) Пусть приближенное число $f = 14.278$. Поскольку все его цифры верные, предельная абсолютная погрешность $\Delta_f \leq 0.001$. Тогда предельная относительная погрешность

$$\delta_f = \frac{\Delta_f}{|f|} = \frac{0.001}{14.278} \approx 7 \cdot 10^{-5} \approx 10^{-4} = 0.01\%.$$

Глава 2. Приближение функций

Приближением (аппроксимацией) функции $f(x)$ называется отыскание функции $g(x)$, близкой в некотором смысле к $f(x)$. Аппроксимирующая функция $g(x)$ должна быть «проще» исходной. Как понимается близость функций и в чем критерий простоты, об этом речь пойдет ниже.

Аппроксимация может потребоваться в следующих случаях:

1) известны, например из эксперимента, значения функции $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$ (итак, функция $y = f(x)$ задана таблично). Требуется найти значение $f(x)$ при таком значении аргумента x^* , которого нет среди узлов x_1, x_2, \dots, x_n , но сделать это по каким-либо причинам затруднительно¹. В таком случае можно найти аппроксимирующую функцию $g(x)$; если она «близка» к $f(x)$ на множестве узлов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то и в нужной точке x^* , вероятно, $f(x^*) \approx g(x^*)$;

2) функция $f(x)$ задана аналитически, т.е. формулой, но эта формула слишком сложна² для регулярного использования. И в этом случае выгодно аппроксимировать $f(x)$ более простой функцией $g(x)$ и все расчеты выполнять с ней.

¹ Например, экспериментальная установка, на которой выполнены измерения, уже разобрана.

² Известно, например, что интеграл вида $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ от любой дробно-рациональной функции ($P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — полиномы) всегда берущийся, т.е. первообразная выражается в конечном виде через элементарные функции, но формула для первообразной может быть очень громоздкой:

$$\int \frac{dx}{x^3(x^3+a^3)^2} = -\frac{1}{3a^3x^2(x^3+a^3)} - \frac{5}{6a^6x^2} - \frac{5}{18a^8} \ln \frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} - \frac{5}{3a^8\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-a}{a\sqrt{3}}.$$

Это отнюдь не предел сложности!

Какие функции наиболее «просты» и в силу этого удобны в качестве аппроксимирующих? Чаще всего используются полиномы (многочлены)

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n. \quad (2)$$

Действительно, полиномы легко складывать, умножать и делить; их можно элементарно дифференцировать и интегрировать.

Иногда (но не в данном курсе) применяют обобщенные полиномы вида

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x),$$

где функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, предполагаются линейно независимыми. Например, функции $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$ тоже обладают удобными свойствами и используются для разложения произвольных $f(x)$ при весьма общих условиях в тригонометрические ряды Фурье.

Рассмотрим теперь некоторые подходы к понятию близости функций.

1. Интерполяция. Требуется найти полином $P_n(x)$, принимающий те же значения, что и аппроксимируемая функция $f(x)$, в $(n+1)$ узле

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

В таком случае полином $P_n(x)$ называется интерполяционным, а точки x_0, x_1, \dots, x_n — узлами интерполяции.

Если число узлов велико, то отыскание интерполяционного полинома, как мы увидим далее, будет трудоемким. Кроме того, точное равенство $P_n(x_i) = f(x_i)$ может оказаться бессмысленным требованием, если сами значения $f(x_i)$ аппроксимируемой функции в узлах получены из эксперимента и потому заведомо неточно.

2. Наилучшее приближение. Пусть функция $f(x)$ задана таблично в узлах x_0, x_1, \dots, x_n . Подберем полином $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ так, чтобы сумма квадратов разностей значения аппроксимируемой функции и полинома по всем узлам минимизировалась

$$\sum_{i=0}^n (f(x_i) - P_n(x_i))^2 \rightarrow \min.$$

Из данного условия определяются коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n искомого полинома.

На этом пути мы пришли бы к знаменитому методу наименьших квадратов, но рассматривать его здесь мы не будем.

Займемся интерполяцией. Итак, пусть функция $f(x)$ задана таблично в $(n+1)$ узле

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n.$$

Требуется найти интерполяционный полином, такой, что

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

Геометрически это означает, что график полинома проходит через точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ (рис. 1).

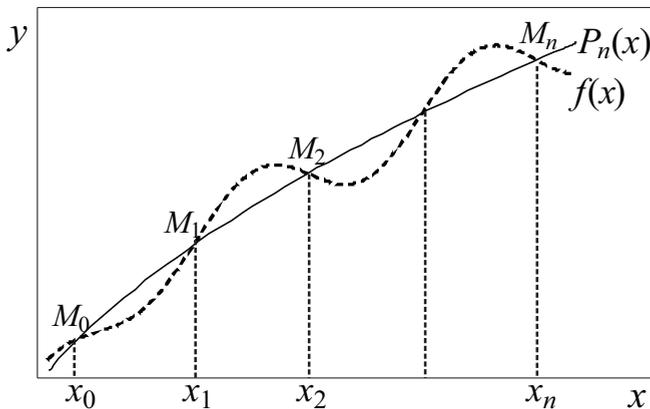


Рис. 1. Графики аппроксимируемой функции и ее интерполяционного полинома

Интерполяционный полином используется для приближенного вычисления значений функции $f(x)$ в точке, отличной от узлов интерполяции, $f(x) \approx P_n(x)$. Если значение x лежит между узлами интерполяции, то приближенное отыскание значения $f(x)$ называется **интерполированием** (в узком смысле); если же значение x лежит левее или правее всех узлов, то говорят об интерполировании в широком смысле (или **экстраполировании**).

Степень интерполяционного полинома, построенного по $(n+1)$ точке, в исключительных случаях может оказаться меньше n . Например, если все точки $M_i(x_i, y_i)$ лежат на одной прямой (наклонной или го-

ризоньальной), то полином будет иметь первую (соответственно нулевую) степень. Понятно, что такие случаи крайне редки.

В общем случае по заданным значениям $f(x)$ в $(n+1)$ узле конструируется полином степени n , притом единственным образом. Покажем это. Подставляя в общий вид полинома (2) условия (3), получим систему из $(n+1)$ линейного уравнения

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = y_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

с $(n+1)$ неизвестными — коэффициентами полинома a_0, a_1, \dots, a_n . Решать эту систему можно, например, по правилу Крамера. Если главный определитель системы (составленный из коэффициентов при неизвестных) отличен от нуля, то система имеет решение и притом единственное. В нашем случае главный определитель имеет специальный вид (так называемый определитель Вандермонда):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Доказывается, что $\Delta \neq 0$, поскольку узлы интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n — различные числа. Итак, решение системы — коэффициенты интерполяционного полинома a_0, a_1, \dots, a_n — существует и единственно. Поэтому по данным значениям $f(x)$ в $(n+1)$ узле можно построить полином $P_n(x)$ степени n , притом единственным образом. Есть несколько способов построения, приводящих к одинаковому результату. Мы рассмотрим простейший способ, предложенный Лагранжем (1736—1813).

Интерполяционный полином Лагранжа

Для системы узлов x_0, x_1, \dots, x_n введем коэффициенты Лагранжа вида

$$L_n^i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Здесь индекс i может принимать значения $0, 1, \dots, n$. В числителе каждый сомножитель представляет собой разность переменного x и значения одного из узлов (за исключением i -го узла, что отмечено верхним индексом в обозначении функции L_n^i). Знаменатель формально отличается от числителя тем, что вместо переменного x подставлено значение пропущенного, i -го, узла интерполяции x_i . После упрощений становится понятно, что коэффициент Лагранжа $L_n^i(x)$ является полиномом n -й степени (что отмечено нижним индексом в обозначении L_n^i).

При подстановке значения j -го узла в качестве аргумента коэффициента Лагранжа получится

$$L_n^i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

В таком случае полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_n^i(x) = f(x_0) L_n^0(x) + f(x_1) L_n^1(x) + \dots + f(x_n) L_n^n(x) \quad (4)$$

удовлетворяет условиям (3)

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

и имеет степень n , т. е. является искомым интерполяционным полиномом.

Пример. Функция $y = f(x)$ задана таблично своими значениями в четырех узлах:

i	0	1	2	3
узлы x_i	-1	0	2	5
$y_i = f(x_i)$	1	-3	2	4

Построить для $y = f(x)$ интерполяционный полином Лагранжа и, пользуясь им, приближенно найти значение y в точке $x = 1$, которой нет среди узлов.

Решение. Применяя формулу (4), получим

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\
&+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\
&= 1 \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(-1-0)(-1-2)(-1-5)} - 3 \frac{(x+1)(x-2)(x-5)}{(0+1)(0-2)(0-5)} + \\
&+ 2 \frac{(x+1)(x-0)(x-5)}{(2+1)(2-0)(2-5)} + 4 \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(5+1)(5-0)(5-2)} = -\frac{19}{45}x^3 + \frac{233}{90}x^2 - \frac{89}{90}x - 3.
\end{aligned}$$

Тогда

$$f(1) \approx L_3(1) = -\frac{19}{45} + \frac{233}{90} - \frac{89}{90} - 3 = -82/45 = -1.82.$$

Итак, ответ получен, но вопрос о его точности пока остается открытым. Заметим, что имела место интерполяция в узком смысле, поскольку точка $x=1$ лежит между узлами интерполяции.

Погрешность интерполяционного полинома Лагранжа

Погрешностью интерполяции называется модуль разности значений аппроксимируемой функции и ее интерполяционного полинома

$$R_n(x) = |f(x) - L_n(x)|. \quad (5)$$

Применимость этой формулы ограничена. Действительно, если значение $f(x)$ известно точно, то необходимость в аппроксимации отпадает и вопрос о погрешности интерполяции беспредметен.

По определению формула (5) дает точное значение погрешности интерполяции. Для практики удобнее оказывается приближенная формула, оценивающая погрешность сверху. Пусть узлы интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n все принадлежат отрезку $[a, b]$. Предположим, что аппроксимируемая функция имеет производную $(n+1)$ -го порядка на этом отрезке. Без доказательства

$$R_n(x) = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|, \quad (6)$$

где ξ — некоторая (вообще говоря неизвестная) точка, лежащая между узлами интерполяции, $\xi \in [a, b]$; в ней вычисляется $(n+1)$ -я производная аппроксимируемой функции. Вычисление промежуточной точки ξ и производной (высокого порядка!) настолько трудны, что делают (точную) формулу (6) фактически неприменимой. Ее можно упростить: если каким-либо способом оценить сверху $(n+1)$ -ю производную

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$$

(M_{n+1} — число), то получим следующую оценку погрешности интерполяции

$$R_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|. \quad (7)$$

Пример. Функция $f(x) = \ln x$ задана таблично своими значениями в узлах $x_0 = 100$, $x_1 = 101$, $x_2 = 102$, $x_3 = 103$, и по табличным данным построен интерполяционный полином Лагранжа $L_3(x)$, который применен для приближенного вычисления $\ln 100,5$. Оценить, с какой точностью получается это значение.

Решение. Требуется оценить погрешность интерполяции $R_3(100,5)$. Согласно формуле (7)

$$R_3(x) \leq \frac{M_4}{4!} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|,$$

где $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x \in [100, 103]} |\ln^{(4)}(x)|$ (минимальный отрезок, содержащий все четыре узла, есть отрезок $[100, 103]$). Четвертая производная логарифма $\ln^{(4)}(x) = -6/x^4$, поэтому $M_4 = \max_{x \in [100, 103]} \left| -\frac{6}{x^4} \right| = \frac{6}{100^4}$.

Оценка погрешности интерполяции

$$\begin{aligned} R_3(100,5) &= |\ln 100,5 - L_3(100,5)| \leq \\ &\leq \frac{6}{100^4 4!} |(100,5-100) \cdot (100,5-101) \cdot (100,5-102) \cdot (100,5-103)| < 10^{-8}. \end{aligned}$$

Итак, вычисление $\ln 100.5$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ даст ответ с восемью верными десятичными знаками, т. е. очень точный ответ.

Задания к лабораторной работе № 1

Интерполирование функций

Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x)$ с узлами интерполирования x_i , $i = 0, 1, 2$. Вычислить значения $f(x)$ и полинома Лагранжа в точке a . Построить графики полинома Лагранжа и аппроксимируемой функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_2]$. Вычислить точно и оценить погрешность интерполяции в этой точке.

Образец выполнения работы в пакете MathCad см. в прил. 1.

Варианты заданий

- | | | | |
|-----|----------------------------|----------------------|--------------|
| 1. | $f(x) = (\ln x)^{13/4}$; | $x_i = 2, 3, 4$; | $a = 2.5$. |
| 2. | $f(x) = (\ln x)^{17/4}$; | $x_i = 9, 11, 13$; | $a = 10.5$. |
| 3. | $f(x) = (\ln x)^{12/5}$; | $x_i = 4, 5, 6$; | $a = 4.5$. |
| 4. | $f(x) = (\ln x)^{4/7}$; | $x_i = 3, 6, 9$; | $a = 8.5$. |
| 5. | $f(x) = (\ln x)^{11/3}$; | $x_i = 5, 6, 7$; | $a = 5.5$. |
| 6. | $f(x) = (\ln x)^{13/3}$; | $x_i = 9, 11, 13$; | $a = 11.5$. |
| 7. | $f(x) = (\ln x)^{11/2}$; | $x_i = 6, 7, 8$; | $a = 6.5$. |
| 8. | $f(x) = (\ln x)^{12/11}$; | $x_i = 10, 12, 14$; | $a = 13.5$. |
| 9. | $f(x) = (\ln x)^{1/2}$; | $x_i = 7, 8, 9$; | $a = 7.5$. |
| 10. | $f(x) = (\ln x)^{13/7}$; | $x_i = 8, 11, 14$; | $a = 12.5$. |
| 11. | $f(x) = (\ln x)^{3/2}$; | $x_i = 8, 9, 10$; | $a = 8.5$. |
| 12. | $f(x) = (\ln x)^{10/9}$; | $x_i = 11, 13, 15$; | $a = 12.5$. |
| 13. | $f(x) = (\ln x)^{11/5}$; | $x_i = 2, 4, 6$; | $a = 4.5$. |
| 14. | $f(x) = (\ln x)^{9/7}$; | $x_i = 9, 12, 15$; | $a = 11.5$. |
| 15. | $f(x) = (\ln x)^{10/7}$; | $x_i = 4, 6, 8$; | $a = 6.5$. |
| 16. | $f(x) = (\ln x)^{9/5}$; | $x_i = 5, 8, 11$; | $a = 9.5$. |
| 17. | $f(x) = (\ln x)^{11/7}$; | $x_i = 6, 8, 10$; | $a = 8.5$. |
| 18. | $f(x) = (\ln x)^{9/2}$; | $x_i = 11, 12, 13$; | $a = 11.5$. |

- | | | | |
|-----|---------------------------|---------------------|-------------|
| 19. | $f(x) = (\ln x)^{12/7};$ | $x_i = 2, 5, 8;$ | $a = 5.5.$ |
| 20. | $f(x) = (\ln x)^{3/5};$ | $x_i = 6, 9, 12;$ | $a = 11.5.$ |
| 21. | $f(x) = (\ln x)^{1/3};$ | $x_i = 5, 8, 11;$ | $a = 8.5.$ |
| 22. | $f(x) = (\ln x)^{10/7};$ | $x_i = 6, 9, 12;$ | $a = 10.5.$ |
| 23. | $f(x) = (\ln x)^{5/3};$ | $x_i = 2, 6, 10;$ | $a = 6.5.$ |
| 24. | $f(x) = (\ln x)^{13/5};$ | $x_i = 7, 10, 13;$ | $a = 12.5.$ |
| 25. | $f(x) = (\ln x)^{9/4};$ | $x_i = 3, 6, 9;$ | $a = 6.5.$ |
| 26. | $f(x) = (\ln x)^{8/9};$ | $x_i = 2, 4, 6;$ | $a = 4.5.$ |
| 27. | $f(x) = (\ln x)^{5/7};$ | $x_i = 8, 12, 16;$ | $a = 9.5.$ |
| 28. | $f(x) = (\ln x)^{7/11};$ | $x_i = 5, 7, 9;$ | $a = 8.5.$ |
| 29. | $f(x) = (\ln x)^{7/13};$ | $x_i = 3, 5, 7;$ | $a = 3.5.$ |
| 30. | $f(x) = (\ln x)^{11/20};$ | $x_i = 11, 14, 17;$ | $a = 15.5.$ |

Глава 3. Численное дифференцирование

Напомним сначала, как выполняется дифференцирование, т. е. нахождение производной, в математическом анализе, и выясним, почему такой подход не всегда возможен.

Пусть имеется функция, заданная аналитически, т. е. формулой $y = f(x)$. Начальное значение аргумента есть x_0 ; при этом функция принимает значение $y_0 = f(x_0)$. Если аргумент испытает приращение Δx так, что новое значение аргумента $x_1 = x_0 + \Delta x$, то ему будет соответствовать новое значение функции $y_1 = f(x_1)$. Приращение функции в точке x_0 есть $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$. Отношение $\Delta f(x_0)/\Delta x$ приращения функции к приращению аргумента показывает среднюю скорость изменения функции на отрезке от x_0 до x_1 . Если теперь устремить приращение аргумента к нулю, то предел отношения (если этот предел существует) по определению равен значению производной функции в точке x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \quad (8)$$

К сожалению, эта формула применима не всегда. Если функция $f(x)$ задана таблично своими значениями в узлах x_0, x_1, \dots , то приращение аргумента $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, как бы мало оно ни было, всегда конечно, и его нельзя устремить к нулю.

x	x_0	x_1	x_2	x_3	...
y	y_0	y_1	y_2	y_3	...

Например, индекс РТС, являющийся основным показателем фондового рынка России, рассчитывается каждые 15 с. Можно вычислить среднюю скорость изменения индекса на каждом временном интервале, но найти точное значение производной индекса РТС по времени невозможно.

Итак, к численному дифференцированию приходится прибегать в тех случаях, когда функция $f(x)$, которую нужно продифференцировать, задана таблично. Кроме того, даже если функция задана аналитически, но очень сложной формулой³, нахождение производной по определению (8) может оказаться проблематичным — вычислить значения $f(x_i)$ затруднительно.

Идея численного дифференцирования несложна: вместо функции $f(x)$ рассматривается некоторая «близкая» к ней функция⁴ $g(x)$, определяемая достаточно простой формулой, и поскольку $f(x) \approx g(x)$, постольку их производные, вероятно, близки

$$f'(x) \approx g'(x);$$

это должно быть верно и для вторых производных

$$f''(x) \approx g''(x),$$

и т. д.

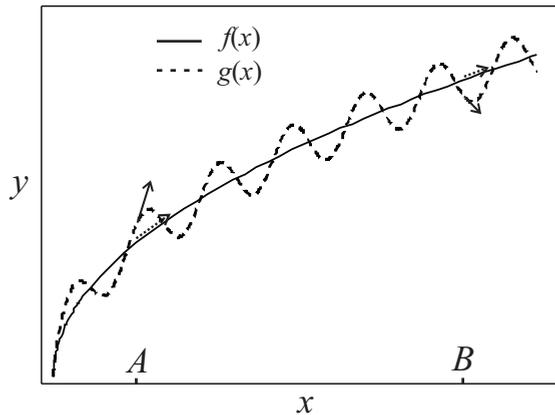
В действительности эта идея очень рискованна: близость функций отнюдь не предопределяет близость их производных. В качестве примера рассмотрим две функции: $f(x)$ и $g(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sin n^2 x$. Поскольку $|f(x) - g(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin n^2 x \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, разность функций при достаточно больших n сколь угодно мала, т. е. функции близки. Однако разность их производных $|f'(x) - g'(x)| = |f'(x) - [f'(x) + n \cos n^2 x]| = |n \cos n^2 x|$ не мала, т. к. $\max_{x \in (-\infty, \infty)} |n \cos n^2 x| = n$, т. е. производные не близки.

Это можно показать проще, опираясь на геометрический смысл производной $f'(x_0)$: она равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис. 2).

Функции $f(x)$ и $g(x)$ близки, т. к. ординаты точек двух графиков при одинаковых абсциссах мало отличаются. Но направления касательных, проведенных к графикам (см., например, точки A и B), резко различны, т. е. производные $f'(x)$ и $g'(x)$ не близки.

³ См. сноску 2.

⁴ Как мы помним, говорят об аппроксимации $f(x)$ с помощью $g(x)$.

Рис. 2. Сопоставление двух «близких» функций⁵

Итак, вообще говоря, «наивная» идея (2)–(3) неверна, но если в качестве аппроксимирующей функции $g(x)$ используется интерполяционный полином Лагранжа, построенный по значениям $f(x)$ во многих узлах с небольшим расстоянием между ними, то приближенно вычислить $f'(x)$, заменяя ее на $g'(x)$, все же возможно, и возникающая при этом погрешность численного дифференцирования может быть оценена.

Пусть функция $f(x)$ задана таблично своими значениями в равноотстоящих узлах $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. По этим значениям построим полином Лагранжа $L_n(x)$, и тогда $f'(x) \approx L'_n(x)$, $f''(x) \approx L''_n(x)$ и т. д. Приведем вычисления для простейшего случая $n = 2$.

Формулы численного дифференцирования для трех равноотстоящих узлов

Имеются три узла x_0, x_1, x_2 , удаленные друг от друга на расстояние h (шаг) (рис. 3). Интерполяционный полином Лагранжа

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

⁵ Функции $f(x)$ и $g(x)$ близки, т. к. ординаты точек двух графиков при одинаковых абсциссах мало отличаются. Но направления касательных, проведенных к графикам (см., например, точки A и B), резко различны, т. е. производные $f'(x)$ и $g'(x)$ не близки.

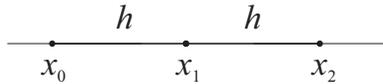


Рис. 3. Три равноотстоящих узла

Введем вспомогательную переменную $q = \frac{x - x_0}{h}$, тогда $x = x_0 + hq$, и получаем

$$L_2(x) = \frac{1}{2}y_0(q-1)(q-2) - y_1q(q-2) + \frac{1}{2}y_2q(q-1).$$

Полином Лагранжа выглядит теперь компактнее, но его нельзя непосредственно продифференцировать по x , поскольку аргументом стала q . По правилу дифференцирования сложной функции $(L_2)'_x = (L_2)'_q q'_x = \frac{1}{h}(L_2)'_q$, получаем следующее приближенное соотношение для производной:

$$f'(x) \approx L_2'(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}y_0(2q-3) - y_1(2q-2) + \frac{1}{2}y_2(2q-1) \right]. \quad (9)$$

Аналогично — для второй производной

$$f''(x) \approx L_2''(x) = \frac{1}{h^2} [y_0 - 2y_1 + y_2]. \quad (10)$$

Подстановка $x = x_0 + hq$ при $q = 0, 1, 2$ дает соответственно $x = x_0, x_1, x_2$. Поэтому из выражений (9) и (10) можно при таких значениях q найти приближенные выражения для производных в каждом из трех узлов (последнее слагаемое в каждой из нижеследующих формул — погрешность численного дифференцирования, которую мы приводим без доказательства):

первая производная

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi), \quad (11)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2) - \frac{h^2}{6}f'''(\xi), \quad (12)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi); \quad (13)$$

вторая производная

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - hf'''(\xi),$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12}f^{IV}(\xi),$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + hf'''(\xi)$$

(поскольку в формулу (10) переменная q не вошла, вторая производная в разных узлах отличается только погрешностью). Во всех формулах ξ есть некоторая (неизвестная) промежуточная точка, лежащая между узлами.

Мы подробно рассмотрели способ получения формул численного дифференцирования для случая трех равноотстоящих узлов. Приведем без вывода аналогичные формулы для случая четырех равноотстоящих узлов x_0, x_1, x_2, x_3 , находящихся на расстоянии h друг от друга.

Формулы численного дифференцирования для четырех равноотстоящих узлов

Первая производная

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4}f^{IV}(\xi), \quad (14)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12}f^{IV}(\xi), \quad (15)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12}f^{IV}(\xi), \quad (16)$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4}f^{IV}(\xi). \quad (17)$$

Вторая производная

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + \frac{11}{12}h^2f^{IV}(\xi), \quad (18)$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{1}{12}h^2f^{IV}(\xi), \quad (19)$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) - \frac{1}{12}h^2 f^{IV}(\xi), \quad (20)$$

$$f''(x_3) = \frac{1}{h^2}(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + \frac{11}{12}h^2 f^{IV}(\xi). \quad (21)$$

Замечания к формулам численного дифференцирования:

1) оценка погрешности уже первой производной требует предварительного знания третьей (формулы (11)–(13) и даже четвертой (!) (формулы (14)–(17) производной и притом в заранее неизвестной точке ξ). Тем самым погрешность численного дифференцирования оценивается настолько сложно, что в лабораторной работе эта оценка не предполагается;

2) выполняется некоторое правило симметрии, позволяющее проверить правильность написания формул, а именно: коэффициенты при y_i для первой производной в узлах, симметричных относительно центрального, повторяются с обратным знаком, если прочесть формулу справа налево — ср. формулы (11) и (13), (14) и (17), (15) и (16). Для второй производной — то же, но без смены знака (ср. формулы (18) и (21), (19) и (20);

3) в узлах, близких к центральному, формулы численного дифференцирования проще и отличаются большей точностью (меньшей погрешностью), чем в крайних узлах;

4) с увеличением количества узлов точность формул численного дифференцирования повышается (это неудивительно, ведь возрастает количество информации, которая имеется у нас о дифференцируемой функции);

5) с ростом порядка производной точность формул уменьшается (погрешность растет). Это связано с тем, что дифференцирование ухудшает свойства функции (дифференцируемая всюду функция может иметь производную функцию, которая не везде будет дифференцируемой; непрерывная функция может перейти в разрывную).

Задания к лабораторной работе № 2а

Численное дифференцирование

Для функции $f(x)$, заданной в виде таблицы в пяти узлах x_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$, найти значения ее 1-й и 2-й производных в первых четырех узлах, используя формулы численного дифференцирования.

Варианты заданий

1. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.25</td><td>4.828 35</td></tr> <tr><td>1.27</td><td>4.844 18</td></tr> <tr><td>1.29</td><td>4.859 89</td></tr> <tr><td>1.31</td><td>4.875 23</td></tr> <tr><td>1.33</td><td>4.863 31</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	1.25	4.828 35	1.27	4.844 18	1.29	4.859 89	1.31	4.875 23	1.33	4.863 31	2. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>13.5</td><td>4.905 83</td></tr> <tr><td>13.7</td><td>4.920 07</td></tr> <tr><td>13.9</td><td>4.934 59</td></tr> <tr><td>14.1</td><td>4.948 82</td></tr> <tr><td>14.3</td><td>4.965 71</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	13.5	4.905 83	13.7	4.920 07	13.9	4.934 59	14.1	4.948 82	14.3	4.965 71	3. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.145</td><td>4.976 74</td></tr> <tr><td>0.147</td><td>4.990 43</td></tr> <tr><td>0.149</td><td>5.003 91</td></tr> <tr><td>0.151</td><td>5.017 30</td></tr> <tr><td>0.153</td><td>5.032 07</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	0.145	4.976 74	0.147	4.990 43	0.149	5.003 91	0.151	5.017 30	0.153	5.032 07
x_i	y_i																																					
1.25	4.828 35																																					
1.27	4.844 18																																					
1.29	4.859 89																																					
1.31	4.875 23																																					
1.33	4.863 31																																					
x_i	y_i																																					
13.5	4.905 83																																					
13.7	4.920 07																																					
13.9	4.934 59																																					
14.1	4.948 82																																					
14.3	4.965 71																																					
x_i	y_i																																					
0.145	4.976 74																																					
0.147	4.990 43																																					
0.149	5.003 91																																					
0.151	5.017 30																																					
0.153	5.032 07																																					

4. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.451</td><td>0.435 87</td></tr> <tr><td>0.452</td><td>0.436 77</td></tr> <tr><td>0.453</td><td>0.437 66</td></tr> <tr><td>0.454</td><td>0.438 56</td></tr> <tr><td>0.455</td><td>0.439 45</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	0.451	0.435 87	0.452	0.436 77	0.453	0.437 66	0.454	0.438 56	0.455	0.439 45	5. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.724</td><td>0.900 00</td></tr> <tr><td>0.725</td><td>0.899 57</td></tr> <tr><td>0.726</td><td>0.899 14</td></tr> <tr><td>0.727</td><td>0.898 70</td></tr> <tr><td>0.728</td><td>0.898 25</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	0.724	0.900 00	0.725	0.899 57	0.726	0.899 14	0.727	0.898 70	0.728	0.898 25	6. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.349</td><td>0.341 96</td></tr> <tr><td>0.350</td><td>0.342 90</td></tr> <tr><td>0.351</td><td>0.343 84</td></tr> <tr><td>0.352</td><td>0.344 78</td></tr> <tr><td>0.353</td><td>0.344 88</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	0.349	0.341 96	0.350	0.342 90	0.351	0.343 84	0.352	0.344 78	0.353	0.344 88
x_i	y_i																																					
0.451	0.435 87																																					
0.452	0.436 77																																					
0.453	0.437 66																																					
0.454	0.438 56																																					
0.455	0.439 45																																					
x_i	y_i																																					
0.724	0.900 00																																					
0.725	0.899 57																																					
0.726	0.899 14																																					
0.727	0.898 70																																					
0.728	0.898 25																																					
x_i	y_i																																					
0.349	0.341 96																																					
0.350	0.342 90																																					
0.351	0.343 84																																					
0.352	0.344 78																																					
0.353	0.344 88																																					

7. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.725</td><td>0.663 14</td></tr> <tr><td>0.727</td><td>0.664 63</td></tr> <tr><td>0.729</td><td>0.666 12</td></tr> <tr><td>0.731</td><td>0.667 61</td></tr> <tr><td>0.733</td><td>0.667 69</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	0.725	0.663 14	0.727	0.664 63	0.729	0.666 12	0.731	0.667 61	0.733	0.667 69	8. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.251</td><td>0.248 37</td></tr> <tr><td>0.254</td><td>0.251 28</td></tr> <tr><td>0.257</td><td>0.254 18</td></tr> <tr><td>0.260</td><td>0.257 08</td></tr> <tr><td>0.263</td><td>0.257 18</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	0.251	0.248 37	0.254	0.251 28	0.257	0.254 18	0.260	0.257 08	0.263	0.257 18	9. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.341</td><td>2.192 80</td></tr> <tr><td>0.343</td><td>2.202 93</td></tr> <tr><td>0.345</td><td>2.213 09</td></tr> <tr><td>0.347</td><td>2.223 31</td></tr> <tr><td>0.349</td><td>2.233 47</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	0.341	2.192 80	0.343	2.202 93	0.345	2.213 09	0.347	2.223 31	0.349	2.233 47
x_i	y_i																																					
0.725	0.663 14																																					
0.727	0.664 63																																					
0.729	0.666 12																																					
0.731	0.667 61																																					
0.733	0.667 69																																					
x_i	y_i																																					
0.251	0.248 37																																					
0.254	0.251 28																																					
0.257	0.254 18																																					
0.260	0.257 08																																					
0.263	0.257 18																																					
x_i	y_i																																					
0.341	2.192 80																																					
0.343	2.202 93																																					
0.345	2.213 09																																					
0.347	2.223 31																																					
0.349	2.233 47																																					

10. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.112</td><td>1.294 19</td></tr> <tr><td>0.113</td><td>1.297 18</td></tr> <tr><td>0.114</td><td>1.300 17</td></tr> <tr><td>0.115</td><td>1.303 17</td></tr> <tr><td>0.116</td><td>1.306 16</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	0.112	1.294 19	0.113	1.297 18	0.114	1.300 17	0.115	1.303 17	0.116	1.306 16	11. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.119</td><td>1.315 22</td></tr> <tr><td>0.121</td><td>1.321 30</td></tr> <tr><td>0.123</td><td>1.327 30</td></tr> <tr><td>0.125</td><td>1.333 53</td></tr> <tr><td>0.127</td><td>1.339 70</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	0.119	1.315 22	0.121	1.321 30	0.123	1.327 30	0.125	1.333 53	0.127	1.339 70	12. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">x_i</th> <th style="text-align: left;">y_i</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.441</td><td>2.760 58</td></tr> <tr><td>0.445</td><td>2.786 12</td></tr> <tr><td>0.449</td><td>2.811 90</td></tr> <tr><td>0.453</td><td>2.837 92</td></tr> <tr><td>0.457</td><td>2.862 26</td></tr> </tbody> </table>	x_i	y_i	0.441	2.760 58	0.445	2.786 12	0.449	2.811 90	0.453	2.837 92	0.457	2.862 26
x_i	y_i																																					
0.112	1.294 19																																					
0.113	1.297 18																																					
0.114	1.300 17																																					
0.115	1.303 17																																					
0.116	1.306 16																																					
x_i	y_i																																					
0.119	1.315 22																																					
0.121	1.321 30																																					
0.123	1.327 30																																					
0.125	1.333 53																																					
0.127	1.339 70																																					
x_i	y_i																																					
0.441	2.760 58																																					
0.445	2.786 12																																					
0.449	2.811 90																																					
0.453	2.837 92																																					
0.457	2.862 26																																					

13.	x_i	y_i	14.	x_i	y_i	15.	x_i	y_i
	0.117	1.309 18		0.750	5.623 41		0.261	1.823 90
	0.122	1.324 34		0.751	5.636 38		0.263	1.832 31
	0.127	1.339 68		0.752	5.649 37		0.265	1.840 77
	0.132	1.355 19		0.753	5.662 39		0.267	1.849 27
	0.137	1.370 68		0.754	5.675 35		0.269	1.857 76
16.	x_i	y_i	17.	x_i	y_i	18.	x_i	y_i
	0.271	1.866 38		0.281	1.909 85		0.291	1.964 34
	0.273	1.874 99		0.283	1.918 67		0.293	1.963 36
	0.275	1.883 65		0.285	1.927 52		0.295	1.972 42
	0.277	1.892 34		0.287	1.936 42		0.297	1.981 55
	0.279	1.901 69		0.289	1.944 21		0.299	1.990 43
19.	x_i	y_i	20.	x_i	y_i	21.	x_i	y_i
	0.501	3.169 57		0.511	3.243 40		0.521	3.318 94
	0.503	3.184 20		0.513	3.334 26		0.523	3.334 26
	0.505	3.198 89		0.515	3.273 41		0.525	3.349 65
	0.507	3.213 66		0.517	3.288 51		0.527	3.365 11
	0.509	3.228 21		0.519	3.295 73		0.529	3.378 58
22.	x_i	y_i	23.	x_i	y_i	24.	x_i	y_i
	0.531	3.396 25		0.541	3.475 36		0.551	3.556 31
	0.533	3.411 93		0.543	3.491 40		0.553	3.573 73
	0.535	3.427 68		0.545	3.507 52		0.555	3.589 22
	0.537	3.443 50		0.547	3.523 71		0.557	3.605 79
	0.539	3.459 19		0.549	3.539 02		0.559	3.605 88
25.	x_i	y_i	26.	x_i	y_i	27.	x_i	y_i
	0.561	3.639 15		0.351	11.806 85		0.432	4.722 34
	0.563	3.655 95		0.353	11.815 67		0.434	4.734 63
	0.565	3.672 82		0.355	11.824 52		0.436	4.746 93
	0.567	3.689 78		0.357	11.834 42		0.438	4.768 23
	0.569	3.706 50		0.359	11.841 21		0.440	4.780 53
28.	x_i	y_i	29.	x_i	y_i	30.	x_i	y_i
	0.125	0.643 24		0.931	2.248 37		0.341	4.492 81
	0.127	0.644 73		0.934	2.251 28		0.343	4.502 94
	0.129	0.646 22		0.937	2.254 18		0.345	4.513 05
	0.131	0.647 71		0.940	2.257 08		0.347	4.523 38
	0.133	0.647 91		0.943	2.257 48		0.349	4.533 49

Глава 4. Численное интегрирование

Если функция $f(x)$ задана аналитически (формулой) и ее первообразная $F(x)$ является элементарной функцией, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Существуют ситуации, когда этой формулой невозможно или затруднительно воспользоваться:

1) подынтегральная функция $f(x)$ задана графически или таблично; тогда первообразная $F(x)$ не существует;

2) подынтегральная функция $f(x)$ задана аналитически, но интеграл $\int f(x)dx$ не берущийся, т.е. не выражается в конечном виде через элементарные функции (известно, что многие важные интегралы, часто встречающиеся в практических приложениях, таковы, в качестве примера приведем $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$);

3) подынтегральная функция $f(x)$ задана аналитически и интеграл $\int f(x)dx$ берущийся, но первообразная $F(x)$ слишком громоздка (см. примечание в начале гл. 3 о численном дифференцировании).

Во всех этих случаях приходится прибегать к приближенному, численному нахождению определенного интеграла. Для этого подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют другой, «близкой» к ней функцией, которая легко интегрируется.

Формула Ньютона – Котеса

В качестве функции, «близкой» к $f(x)$, возьмем интерполяционный полином Лагранжа $L_m(x)$, совпадающий с $f(x)$ в узлах интерполяции x_0, x_1, \dots, x_m , лежащих на отрезке интегрирования $[a, b]$. Полином Лагранжа имеет вид

$$L_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) L_m^i(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $L_m^i(x)$ — коэффициенты Лагранжа (полиномы степени m)

$$L_0^0(x) \equiv 1,$$

$$L_m^i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_m)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_m)}.$$

Если полином Лагранжа «близок» к функции $f(x)$, то и интегралы от них тоже должны быть близки⁶:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_m(x) dx = \sum_{i=0}^m f(x_i) \int_a^b L_m^i(x) dx.$$

Вводя так называемые коэффициенты Котеса (1682–1716)

$$c_m^i = \int_a^b L_m^i(x) dx,$$

получаем формулу Ньютона – Котеса порядка m

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_m(x) dx = \sum_{i=0}^m c_m^i f(x_i).$$

Она позволяет приближенно представить значение определенного интеграла в виде линейной комбинации значений подынтегральной функции в узлах интерполяции.

⁶ В случае численного дифференцирования, как мы знаем, такое рассуждение оказалось рискованным, но здесь оно вполне оправданно. Причина в том, что дифференцирование ухудшает свойства функции (производная дифференцируемой всюду функции может стать недифференцируемой в данной точке, производная непрерывной функции — разрывной функцией), а интегрирование, как обратная к дифференцированию операция, улучшает свойства функции.

Пример. Вычислить коэффициенты Котеса c_1^0 и c_1^1 .

Решение. Пусть значения функции $f(x)$ заданы в двух узлах: $x_0 = a$ и $x_1 = b$. В таком случае функцию можно аппроксимировать полиномом Лагранжа первой степени

$$\begin{aligned} f(x) &\approx L_1(x) = f(x_0)L_1^0(x) + f(x_1)L_1^1(x) = \\ &= f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Интеграл от аппроксимируемой функции

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &\approx \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b (x-b)dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a)dx = \\ &= f(a)\frac{b-a}{2} + f(b)\frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем коэффициенты Котеса — весовые коэффициенты при значениях аппроксимируемой функции $f(a)$ и $f(b)$

$$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}.$$

Отметим очевидный смысл последней формулы: определенный интеграл (геометрически равный площади криволинейной трапеции) в самом грубом приближении подсчитывается как площадь трапеции (рис. 4).

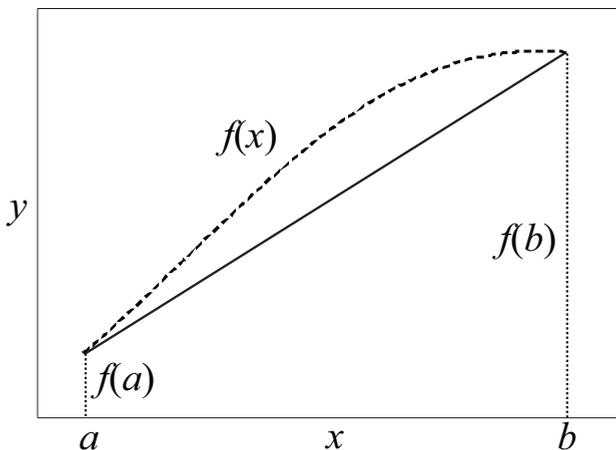


Рис. 4. Геометрическая иллюстрация простейшей формулы Ньютона – Котеса (основания трапеции — отрезки длиной $f(a)$ и $f(b)$, высота трапеции $(b-a)$)

Итак, принципиально вычисление коэффициентов Котеса c_m^i несложно, но при больших m оно становится трудоемким. Впрочем, значения этих коэффициентов и не нужно вычислять, поскольку они табулированы. Пусть узлы интерполяции являются равноотстоящими с шагом h

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_m = a + mh = b.$$

Приведем фрагмент таблицы коэффициентов Котеса c_m^i при $m = 1, 2, \dots, 6$.

Таблица 1

Коэффициенты Котеса c_m^i в случае равноотстоящих узлов

m	Коэффициенты Котеса c_m^i			
1	$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$			
2	$c_2^0 = c_2^2 = \frac{b-a}{6}$,	$c_2^1 = \frac{4(b-a)}{6}$		
3	$c_3^0 = c_3^3 = \frac{b-a}{8}$,	$c_3^1 = c_3^2 = \frac{3(b-a)}{8}$		
4	$c_4^0 = c_4^4 = \frac{7(b-a)}{90}$,	$c_4^1 = c_4^3 = \frac{16(b-a)}{45}$,	$c_4^2 = \frac{2(b-a)}{15}$	
5	$c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}$,	$c_5^1 = c_5^4 = \frac{25(b-a)}{96}$,	$c_5^2 = c_5^3 = \frac{25(b-a)}{144}$	
6	$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}$,	$c_6^1 = c_6^5 = \frac{9(b-a)}{35}$,	$c_6^2 = c_6^4 = \frac{9(b-a)}{280}$,	$c_6^3 = \frac{34(b-a)}{105}$

Покажем, как пользоваться этой таблицей. Пусть функция $f(x)$ задана в трех точках: a , b и в точке $m = \frac{a+b}{2}$ — середине отрезка $[a, b]$. В таком случае, выбирая из строки $m = 2$ коэффициенты Котеса c_2^0, c_2^1, c_2^2 , запишем определенный интеграл в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_2^0 f(a) + c_2^1 f(m) + c_2^2 f(b) = \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{4(b-a)}{6} f(m) + \frac{b-a}{6} f(b).$$

По формуле Ньютона – Котеса, которая является приближенным способом интегрирования, вычисляют определенный интеграл с неко-

торой погрешностью (кроме очевидного случая, когда подынтегральная функция является полиномом степени меньшей, чем порядок формулы Ньютона – Котеса, но тогда эта формула не нужна).

Погрешность R формулы Ньютона – Котеса — это модуль разности между точным значением интеграла и приближенным значением, получающимся при замене подынтегральной функции полиномом Лагранжа,

$$R_m = \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b L_m(x) dx \right|.$$

Преобразуем это выражение и воспользуемся формулами (6), (7) оценки погрешности интерполяции

$$\begin{aligned} R_m &= \left| \int_a^b [f(x) - L_m(x)] dx \right| = \left| \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)| dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Напомним, что $\xi \in [a, b]$ — некоторая (неизвестная) точка отрезка интегрирования, $M_{m+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(m+1)}(x)|$. Поскольку найти ее нелегко, прак-

тическое значение оценки (22) ограничено. Иногда применяют двойной пересчет интеграла с шагами h и $h/2$ и условно считают, что совпадающие десятичные знаки двух результатов являются верными цифрами.

Формула (22) непрактична, но из нее можно получить полезные выводы. Огрубим формулу (22) еще больше, учитывая, что каждый из сомножителей вида $|x - x_i|$ не превосходит $(b-a)$ — длины отрезка интегрирования

$$R_m \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b (b-a)^{m+1} dx = \frac{M_{m+1}(b-a)^{m+2}}{(m+1)!}.$$

Отсюда видно, что уменьшения погрешности формулы Ньютона – Котеса можно достичь двояко: увеличением ее порядка m и (или) сужением отрезка интегрирования (если M_{m+1} изменяется с ростом m незначительно). Но первый путь малопривлекателен: формула Нью-

тона — Котеса при большом m становится громоздкой и неудобна для использования. Удобнее воспользоваться второй возможностью: отрезок интегрирования разбить на узкие участки, на каждом из которых даже формула Ньютона — Котеса небольшого порядка m обеспечит достаточную точность. Таким путем мы придем к известным формулам численного интегрирования — формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Формула прямоугольников

Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных элементарных отрезков с шагом $h = \frac{b-a}{n}$ точками $a_0 = a, a_1 = a + h, a_2 = a + 2h, \dots, a_n = a + nh = b$. На каждом элементарном отрезке $[a_{k-1}, a_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, аппроксимируем функцию $f(x)$ полиномом Лагранжа нулевой степени по значению $f(a_{k-1})$ на левом конце элементарного отрезка: $L_0(x) = f(a_{k-1}) = y_{k-1}$. Геометрически это означает замену криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком $f(x)$, ступенчатой фигурой (рис. 5).

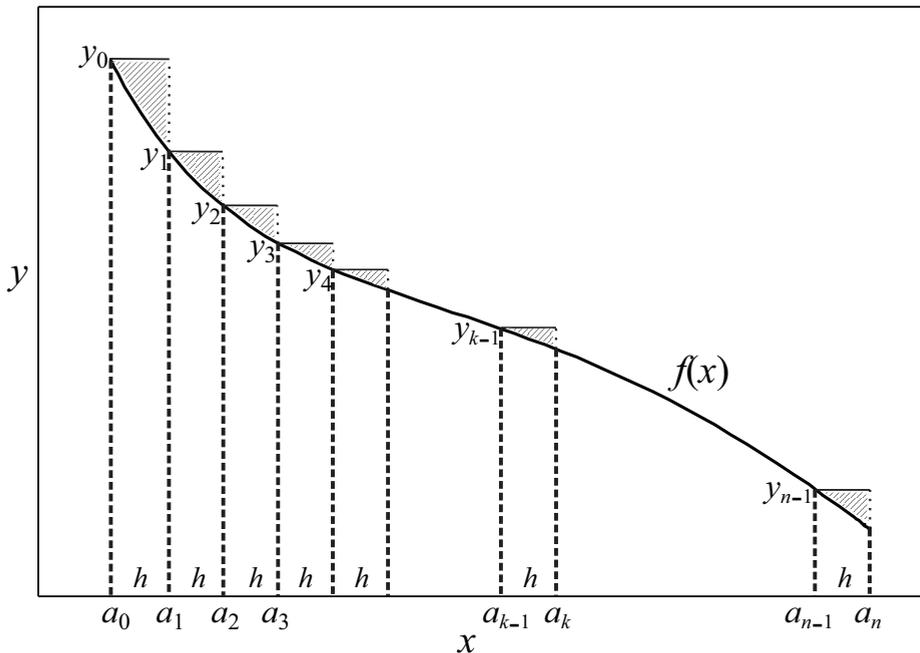


Рис. 5. Приближенное вычисление интеграла по формуле прямоугольников

Эта фигура состоит из прямоугольников с основанием h и высотами $y_i = f(a_i)$, $i = 0, 1, n-1$. В таком случае интеграл $\int_a^b f(x) dx$, численно равный площади криволинейной трапеции, приближенно получается как сумма площадей прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_0 h + y_1 h + \dots + y_{n-1} h = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (23)$$

Получена формула прямоугольников приближенного вычисления интегралов.

Из рис. 5 видно, что погрешность этой формулы должна быть велика (она определяется суммарной площадью заштрихованных фигур). Для оценки погрешности воспользуемся формулой (22). На одном элементарном отрезке $[a_{k-1}, a_k]$

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - \int_{a_{k-1}}^{a_k} L_0(x) dx \right| &\leq \frac{M_1}{1!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |x - a_{k-1}| dx = \\ &= \frac{M_1}{1!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} (x - a_{k-1}) dx = M_1 \frac{(x - a_{k-1})^2}{2} \Big|_{a_{k-1}}^{a_k} = \frac{M_1 h^2}{2}, \end{aligned}$$

где $M_1 = \max_{[a, b]} |f'(x)|$. Область интегрирования $[a, b]$ содержит n элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы прямоугольников

$$R_0 \leq \frac{M_1 h^2}{2} n = \frac{M_1 h}{2} (b - a) = O(h), \quad (24)$$

где мы учли, что $h = \frac{b-a}{n}$. Итак, погрешность линейно зависит от шага h разбиения области интегрирования на элементарные отрезки. Заметим, что при табличном задании $f(x)$ применить формулу (24), скорее всего, не удастся, поскольку значение M_1 взять неоткуда.

Формула трапеций

По-прежнему будем делить отрезок интегрирования $[a, b]$ на n элементарных отрезков точками $a_k = a + kh$, $k = 1, 2, \dots, n$, с шагом $h = \frac{b-a}{n}$.

На каждом элементарном отрезке $[a_{k-1}, a_k]$ аппроксимируем функцию $f(x)$ полиномом Лагранжа $L_1(x)$ первой степени с узлами на концах отрезка в двух точках $x_0 = a_{k-1}$, $x_1 = a_k$. Поскольку графиком полинома первой степени является прямая, геометрическое значение этой аппроксимации заключается в замене каждой дуги кривой $[y_{k-1}, y_k]$ хордой (прямолинейным отрезком), стягивающей концы дуги. Уже здесь, не говоря о нижеследующей более точной формуле Симпсона, расхождение между графиком $f(x)$ и аппроксимирующей линией (здесь это ломаная, состоящая из прямолинейных звеньев) столь мало, что построить наглядную иллюстрацию, подобную рис. 5, затруднительно. Рассмотрим только один элементарный отрезок, преувеличивая расхождение между линиями (рис. 6).

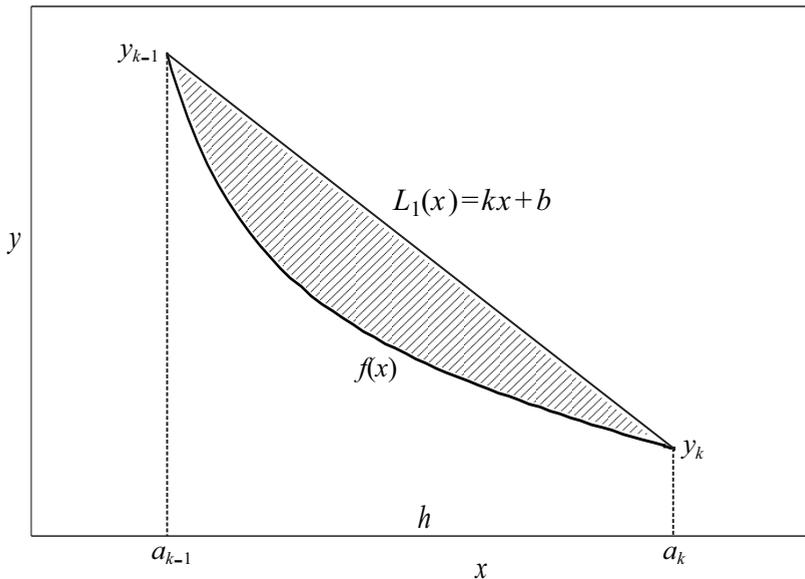


Рис. 6. Приближенное вычисление интеграла по формуле трапеций

На элементарном отрезке $[a_{k-1}, a_k]$ построена трапеция площадью $\frac{y_{k-1} + y_k}{2} h$, и из таких трапеций складывается фигура, приближающая

исходную криволинейную трапецию. В результате интеграл $\int_a^b f(x) dx$, численно равный площади криволинейной трапеции, приближенно получается как сумма площадей трапеций:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \frac{y_2 + y_3}{2} h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h = \\ &= \frac{h}{2} [y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n]. \end{aligned} \quad (25)$$

Получена формула трапеций приближенного вычисления интегралов.

Совокупность сегментов, подобных заштрихованному на рис. 6, определяет погрешность формулы трапеций. Для оценки погрешности воспользуемся формулой (22). На одном элементарном отрезке $[a_{k-1}, a_k]$

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - \int_{a_{k-1}}^{a_k} L_1(x) dx \right| &\leq \frac{M_2}{2!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |(x - a_{k-1})(x - a_k)| dx = \\ &= \frac{M_2}{2!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |x^2 - x(a_{k-1} + a_k) + a_{k-1}a_k| dx = \\ &= -\frac{M_2}{2!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} [x^2 - x(a_{k-1} + a_k) + a_{k-1}a_k] dx = \frac{M_2 h^3}{12}, \end{aligned}$$

где $M_2 = \max_{[a, b]} |f''(x)|$. Область интегрирования $[a, b]$ содержит n элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы трапеций

$$R_1 \leq \frac{M_2 h^3}{12} n = \frac{M_2 h^2}{12} (b - a) = O(h^2). \quad (26)$$

Итак, погрешность квадратично зависит от шага h разбиения области интегрирования на элементарные отрезки, а поскольку при возведении малого числа в квадрат оно уменьшается, то для формулы трапеций погрешность будет меньше, чем для формулы прямоугольников (ср. с формулой (24)). По вышеназванной причине формула (26) зачастую оказывается не практичной.

Формула Симпсона

Продолжим разбивать отрезок интегрирования $[a, b]$ на n элементарных отрезков точками $a_k = a + kh$, $k = 1, 2, \dots, n$, с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, но теперь количество разбиений пусть будет четным: $n = 2s$, где s — целое число. Рассмотрим два смежных элементарных отрезка с тремя узлами a_{2k-2} , a_{2k-1} , a_{2k} (рис. 7).

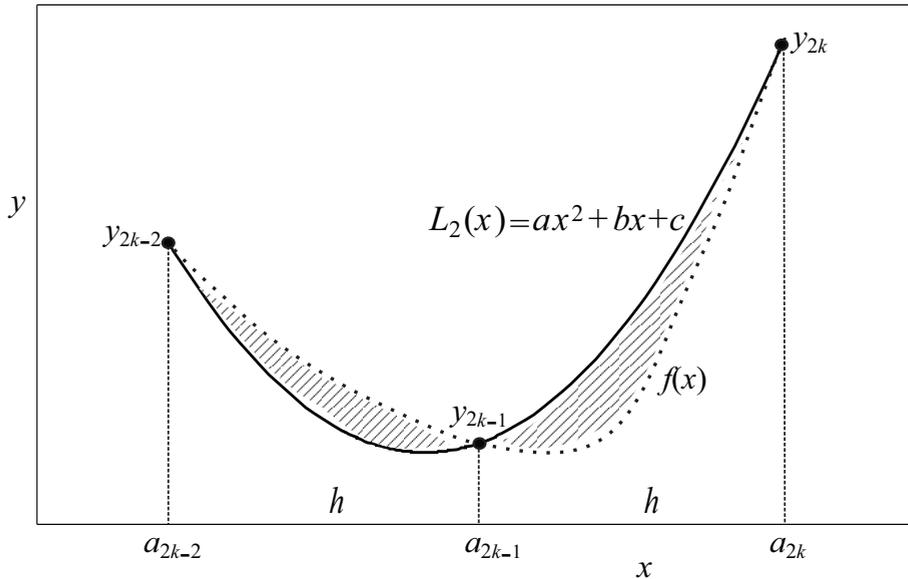


Рис. 7. Приближенное вычисление интеграла по формуле Симпсона

По значениям в трех узлах функция $f(x)$ аппроксимируется полиномом Лагранжа второй степени $L_2(x) = ax^2 + bx + c$, графиком которого является парабола. Дуги парабол очень близки к графику $f(x)$, поэтому расхождение между ними (штрихованные области) на рис. 7 преувеличено. По формуле Ньютона — Котеса для отрезка $[a_{2k-2}, a_{2k}]$, беря коэффициенты Котеса из табл. 1 при $m = 2$, получим

$$\begin{aligned} \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x) dx &\approx \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} L_2(x) dx = c_2^0 f(a_{2k-2}) + c_2^1 f(a_{2k-1}) + c_2^2 f(a_{2k}) = \\ &= \frac{2h}{6} y_{2k-2} + 4 \cdot \frac{2h}{6} y_{2k-1} + \frac{2h}{6} y_{2k} = \frac{h}{3} (y_{2k-2} + y_{2k-1} + y_{2k}). \end{aligned} \quad (27)$$

Применяя формулу (27) к каждому отрезку $[a_{2k-2}, a_{2k}]$, $k = 1, 2, \dots, s$, получим

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a_0}^{a_2} f(x) dx + \int_{a_2}^{a_4} f(x) dx + \dots + \int_{a_{2s-2}}^{a_{2s}} f(x) dx \approx \\ \approx \frac{h}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + (y_4 + 4y_5 + y_6) + \dots + (y_{2s-2} + 4y_{2s-1} + y_{2s})].$$

Итак,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2s}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2s-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2s-1})]. \quad (28)$$

Получена формула Симпсона (1710–1761) приближенного вычисления определенного интеграла.

Оценим погрешность с помощью формулы (22). Для одного двоянного элементарного отрезка $[a_{2k-2}, a_{2k}]$

$$\left| \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x) dx - \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} L_2(x) dx \right| \leq \frac{M_3}{3!} \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} |(x - a_{2k-2})(x - a_{2k-1})(x - a_{2k})| dx = \frac{M_3 h^4}{96},$$

где $M_3 = \max_{[a, b]} |f'''(x)|$. Область интегрирования $[a, b]$ содержит $n/2$ двоянных элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы Симпсона

$$R_2 \leq \frac{M_3 h^4}{96} \frac{n}{2} = \frac{M_3 h^3}{192} (b - a) = O(h^3). \quad (29)$$

Формула Симпсона оказывается точнее формулы трапеций, не говоря уже о формуле прямоугольников. Понятно, что при табличном задании подынтегральной функции воспользоваться формулой (29) для оценки погрешности численного интегрирования практически нереально, поскольку значение M_3 взять неоткуда.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле Ньютона – Ко-

теса при $m = 4$, а также по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 4$; сравнить результаты с точным значением интеграла.

Решение. Будем вести вычисления с пятью десятичными знаками. Для аналитически заданной подынтегральной функции $f(x) = 1/x$ оценить погрешность численного интегрирования по формулам (22), (24), (26), (29) возможно, но излишне, поскольку интеграл точно вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница, с чего мы и начнем:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 = \mathbf{0.69315\dots}$$
 (бесконечная непериодическая

дробь).

Интерполяционный полином Лагранжа степени $m = 4$ в формуле Ньютона – Котеса используется, если на отрезке интегрирования есть пять равноудаленных узлов. В данном случае шаг (расстояние между узлами) $h = \frac{b-a}{4} = \frac{2-1}{4} = 0.25$.

Для подынтегральной функции $f(x) = 1/x$ составим следующую таблицу (табл. 2).

Таблица 2

Значения функции $f(x) = 1/x$ в узлах

k	$x_k = x_0 + kh$	$y_k = 1/x_k$
0	$x_0 = 1$	$y_0 = 1$
1	$x_1 = x_0 + h = 1.25 = 5/4$	$y_1 = 1/\frac{5}{4} = 4/5 = 0.80000$
2	$x_2 = x_1 + h = 1.5 = 3/2$	$y_2 = 1/\frac{3}{2} = 2/3 = 0.66667$
3	$x_3 = x_2 + h = 1.75 = 7/4$	$y_3 = 1/\frac{7}{4} = 4/7 = 0.57143$
4	$x_4 = x_3 + h = 2$	$y_4 = 1/2 = 0.50000$

Приближенное значение интеграла по формуле Ньютона – Котеса при $m = 4$

$$\begin{aligned} I_{\text{Cotes}} &= \sum_{i=0}^4 c_4^i y_i = c_4^0 y_0 + c_4^1 y_1 + c_4^2 y_2 + c_4^3 y_3 + c_4^4 y_4 = \\ &= \frac{7}{90} \cdot 1.00000 + \frac{16}{45} \cdot 0.80000 + \frac{2}{15} \cdot 0.66667 + \frac{16}{45} \cdot 0.57143 + \\ &\quad + \frac{7}{90} \cdot 0.50000 = \mathbf{0.69318}. \end{aligned}$$

Сравнивая результат с точным, видим, что формула Ньютона – Котеса дает четыре верных десятичных знака.

Приближенное значение интеграла по формуле прямоугольников (23)

$$I_{\text{пря}} = h[y_0 + y_1 + y_2 + y_3] = \\ = 0.25 \cdot [1.000\ 00 + 0.800\ 00 + 0.666\ 67 + 0.571\ 43] = \mathbf{0.759\ 53}.$$

Ни одного верного десятичного знака!

Приближенное значение интеграла по формуле трапеций (25)

$$I_{\text{трап}} = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4] = \mathbf{0.697\ 02}.$$

Два верных знака после запятой.

Приближенное значение интеграла по формуле Симпсона (28)

$$I_{\text{Симп}} = \frac{h}{3}[(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2] = \mathbf{0.693\ 25}.$$

Три верных знака после запятой.

Итак, точнее всех, как и можно было ожидать, оказалась формула Ньютона – Котеса. Ее недостатки — громоздкость и необходимость привлечения специальных таблиц (коэффициентов Котеса). Формулы, являющиеся упрощенными следствиями из формулы Ньютона – Котеса, дают не столь точные результаты. При этом формула Симпсона, будучи гораздо проще формулы Ньютона – Котеса, успешно с ней конкурирует по точности. Формула прямоугольников столь груба (при взятом нами шаге h), что вряд ли применима на практике.

Видимо, формулы трапеций и Симпсона являются самыми «практичными», сочетая простоту и удовлетворительную точность.

Заметим еще раз, что при табличном задании подынтегральной функции попытка оценки погрешности численного интегрирования по формулам (22), (24), (26), (29) наталкивается на непреодолимые трудности.

Задания к лабораторной работе № 26 Численное интегрирование

Для функции $f(x)$, заданной таблично в пяти узлах x_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$, приближенно вычислить определенный интеграл на отрезке $[x_0; x_4]$, используя формулы Ньютона – Котеса, прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Варианты заданий см. в лабораторной работе № 2а.

Глава 5. Численное решение уравнений

Корнем уравнения $f(x) = 0$ называется значение $x = \bar{x}$, подстановка которого в уравнение превращает его в верное числовое равенство. Например, если в уравнение $x^2 + 5x + 4 = 0$ подставить $x = -1$, то получим $0 = 0$ (верно). Решить уравнение — значит найти его корни. Далеко не каждое уравнение допускает аналитическое решение:

1) трансцендентные уравнения, как правило, не решаются аналитически, за исключением специальных случаев («школьного» типа), когда уравнение можно удачной подстановкой свести к алгебраическому, например, $e^{2x} - 6e^x + 9 = 0$;

2) даже для алгебраического уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

степени выше четвертой не существует формулы, выражающей корни через коэффициенты уравнения при помощи конечного числа арифметических операций и извлечения корней (в частных случаях, например для уравнения $x^{42} - 5x^{21} + 4 = 0$, такие формулы могут существовать, но в общем случае нет). Невозможность аналитического решения уравнений степени пятой и высших доказана трудами Абеля (1802–1829) и Галуа (1811–1832).

Таким образом, большое значение имеет задача приближенного, численного отыскания корней уравнений, для этого:

а) определяют количество корней уравнения и изолируют (отделяют) каждый из них. **Отрезком изоляции** называется отрезок, на котором лежит только один корень уравнения;

б) вычисляют каждый корень с требуемой точностью.

Для отделения корней уравнения $f(x) = 0$ применяют графический и аналитический методы.

В первом из них строят график функции $y = f(x)$ и приближенно находят точки его пересечения с осью Ox .

Пример. Для отделения корней уравнения $x^2 - 4x + 5 = 0$ строим график функции $f(x) = x^2 - 4x + 5$ (рис. 8). График пересекает ось абсцисс в единственной точке на отрезке $[-3, -2]$, который и будет отрезком изоляции корня.

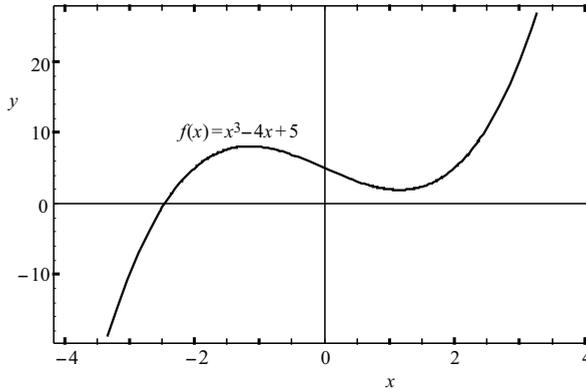


Рис. 8. Графическое отделение корней
(единственный корень уравнения $x^2 - 4x + 5 = 0$ лежит на отрезке $[-3, -2]$)

Аналитический способ отделения корней уравнения $f(x) = 0$ основан на том, что для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$ и принимающей на его концах значения разных знаков, существует по меньшей мере одна точка $\bar{x} \in [a, b]$, такая, что $f(\bar{x}) = 0$. Если на этом отрезке функция $f(x)$ монотонна, то корень \bar{x} единственный, в противном случае корней может быть несколько (рис. 9).

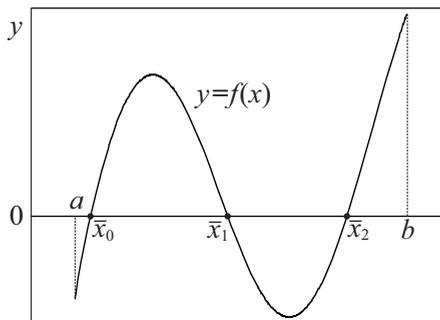


Рис. 9. Отделение корней в случае немонотонности функции⁷

⁷ На концах отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков; поскольку она немонотонна на этом отрезке, то уравнение $f(x) = 0$ имеет несколько корней (точки $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$).

Начнем теперь рассмотрение методов вычисления корней с заданной точностью.

Метод половинного деления (дихотомия⁸)

Метод непосредственно следует из аналитического способа отделения корней. Пусть для уравнения $f(x) = 0$ найден первичный отрезок $[x_0, x_1]$ изоляции корня. Вычислим середину отрезка $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$.

Если случайно окажется, что $f(x_2) = 0$, то x_2 является корнем уравнения $f(x) = 0$. Если же $f(x_2) \neq 0$, то из двух половин $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_1]$ первичного отрезка выберем для дальнейшего деления пополам ту, на концах которой функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков. Выбранный отрезок снова разделим пополам и найдем половину с противоположными знаками $f(x)$ на концах, и т. д.

Критерий достижения требуемой точности (критерий обрыва счета): если корень надо вычислить с точностью ε , то деление пополам следует продолжать до тех пор, пока длина очередного отрезка не станет меньше 2ε ; тогда середина этого отрезка даст значение корня с точностью ε .

Свойства дихотомии следующие:

- а) идейная простота метода;
- б) непритязательность к свойствам функции $f(x)$ — она должна быть лишь непрерывной, а дифференцируемость не предполагается.

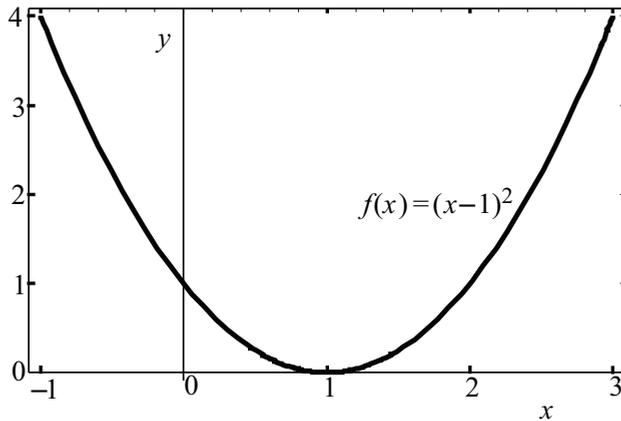
К сожалению, отрицательные свойства перевешивают:

- в) очень медленная сходимость. Пусть, например, первичный отрезок изоляции имеет единичную длину. После первого шага дихотомии длина уменьшится до $1/2$, после второго — до $(1/2)^2$, и т. д. Поскольку $(1/2)^{10} = 1/1024 < 0,001$, после десяти шагов дихотомии обеспечиваются лишь три верных десятичных знака искомого корня⁹;

- г) неприменимость к вычислению корней четной кратности (рис. 10);
- д) неприменимость к решению систем уравнений.

⁸ Дихотомия (греч. Διχοτομία) — разрубание пополам, разделение надвое.

⁹ Гора родила мышь.

Рис. 10. Отделение корней: случай кратного корня¹⁰

Метод итераций (последовательных приближений)

Пусть имеется уравнение $f(x) = 0$. Приведем его к равносильному виду $x = \varphi(x)$, удобному для итераций¹¹ (ниже покажем, как это сделать).

Выберем некоторое начальное приближение x_0 и найдем следующие приближения, выполняя однообразные вычисления (итерации),

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \dots$$

Отсюда понятно удобство для итераций перехода от записи уравнения в виде $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$: значение аргумента в левой части равенства является следующим приближением по отношению к тому, которое подставлялось в функцию $\varphi(x)$. При подстановке значения аргумента в $f(x)$ справа от знака равенства появляется число 0 без возможности итераций.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то итерационный процесс $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$, называется сходящимся. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна. Тогда, переходя к пределу $n \rightarrow \infty$ в рекуррентном соотношении $x_n = \varphi(x_{n-1})$, можно перенести знак предельного перехода через знак функции

¹⁰ Уравнение $(x - 1)^2 = 0$ имеет двукратный корень $x = 1$, но к нему невозможно подступиться методом дихотомии, т. к. по обе стороны от точки $x = 1$ знак функции $f(x) = (x - 1)^2$ одинаков.

¹¹ Итерация (лат. iteratio) — повторение, повторное действие.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right).$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = \bar{x}$ является корнем уравнения $x = \varphi(x)$. Условие и скорость сходимости итерационного процесса определяются в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Пусть корень \bar{x} уравнения $x = \varphi(x)$, а также последовательные приближения к нему $x_0, x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \dots$ принадлежат отрезку изоляции $[a, b]$, на котором

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (30)$$

(число q будем называть коэффициентом сжатия¹²).

Следовательно:

1) отображение $\varphi(x)$ является сжимающим, и итерационный процесс $x_n = \varphi(x_{n-1})$ сходится к корню \bar{x} уравнения $x = \varphi(x)$;

2) критерий достижения требуемой точности ε заключается в том, что как только для абсолютной погрешности Δ n -го приближения к корню выполнится условие

$$\Delta = |\bar{x} - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \quad (31)$$

счет можно оборвать.

Метод итераций сходится при любом выборе начального приближения x_0 , лишь бы оно попадало в отрезок $[a, b]$, где выполняется условие сходимости (30). Благодаря этому метод является самоисправляющимся, т. е. ошибка в вычислениях, не выводящая за пределы области сходимости $[a, b]$, не повлияет на конечный результат, т. к. ошибочное значение можно рассматривать как новое начальное значение x_0 . Методы вычислений, обладающие свойством самоисправления, особенно надежны.

Из формулы (30) следует, что в качестве значения коэффициента сжатия q можно взять

$$q = \max_{[a, b]} |\varphi'(x)|. \quad (32)$$

¹² Название не является общепринятым; часто это число называют коэффициентом Липшица (1832–1903).

Из оценки погрешности (31) следует, что скорость сходимости итерационного процесса к корню \bar{x} особенно велика при коэффициенте сжатия $q \approx 0$. Когда q приближается к единице (со стороны меньших значений), сходимость замедляется. При $q \geq 1$ последовательность приближений $x_0, x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \dots$ расходится, и найти корень уравнения $x = \varphi(x)$ с его помощью невозможно. Итак, наиболее благоприятен для вычислений случай $q \approx 0$, поскольку при нем небольшое количество итераций обеспечивает вычисление корня с высокой точностью.

Рассмотрим, как привести уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$, удобному для итераций, и как обеспечить благоприятное значение q :

1) прибавляя x к обеим частям уравнения $f(x) = 0$, получим $x = f(x) + x$. Обозначая правую часть как новую функцию $f(x) + x = \varphi(x)$, приводим уравнение к нужному виду $x = \varphi(x)$;

2) если окажется, что на отрезке изоляции корня $[a, b]$ для введенной функции значение $\max_{[a, b]} |\varphi'(x)|$ недостаточно мало, применим более общий прием введения параметра λ : сначала уравнение $f(x) = 0$ преобразуем к равносильному (при $\lambda \neq 0$) уравнению $\lambda f(x) = 0$, а затем прибавим x в обеих частях $x = \lambda f(x) + x$ и, вводя новую функцию $\varphi(x) = \lambda f(x) + x$, получим удобное для итераций уравнение $x = \varphi(x)$. Поскольку согласно (30)–(32) высокая скорость сходимости обеспечивается при $q = \max_{[a, b]} |\varphi'(x)| \approx 0$, выберем на отрезке изоляции $[a, b]$ некоторую точку (например, середину отрезка) x_0 и потребуем, чтобы в ней $\varphi'(x_0) = \lambda f'(x_0) + 1 = 0$. Отсюда найдем значение параметра $\lambda = -1/f'(x_0)$, обеспечивающее благоприятное q (его значение можно найти графически, построив график функции $y = |\varphi'(x)|$ на отрезке $[a, b]$ изоляции корня);

3) часто приводит к цели простой прием — по-другому выразить x из уравнения $x = \varphi(x)$, если первый вариант оказался неудачным. Смысл этой рекомендации станет ясен из нижеследующего примера.

Пример. Методом итераций найти корни уравнения

$$5x - 6 \ln x - 7 = 0 \quad (33)$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. При помощи графического метода найдем количество корней и отрезки их изоляции. Если график строится вручную, то его

построение для функции $f(x) = 5x - 6 \ln x - 7$ затруднительно. Проще привести уравнение к виду $\ln x = \frac{5x-7}{6}$ и найти абсциссы точек пересечения графиков функций $f_1(x) = \ln x$ и $f_2(x) = \frac{5x-7}{6}$ (рис. 11). При работе, например, в пакете MathCad разбиение функции на $f_1(x)$ и $f_2(x)$ излишне!

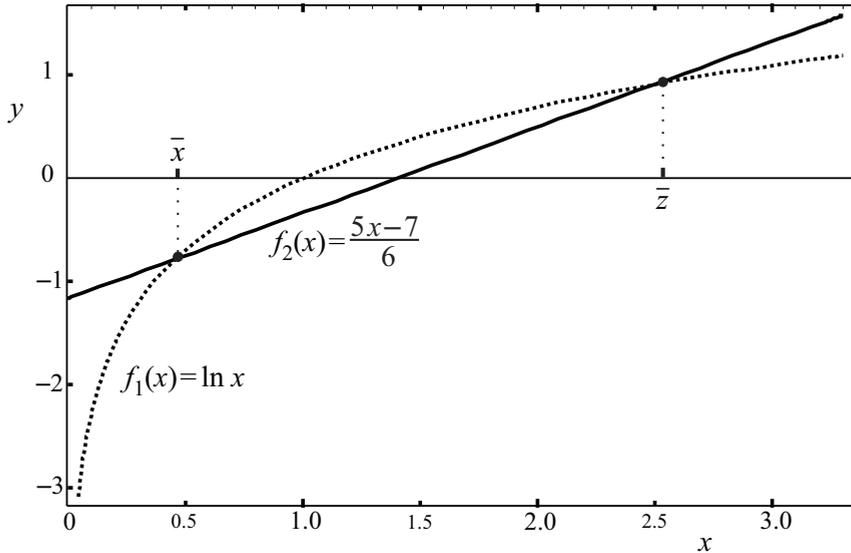


Рис. 11. Графическое отделение корней¹³

Приведем уравнение (33) к виду, удобному для итераций. Можно, например, выразить x из первого слагаемого

$$x = \frac{6 \ln x + 7}{5},$$

тогда в итерационном процессе будет использоваться функция $\varphi(x) = \frac{6 \ln x + 7}{5}$, и нужно проверить, будет ли такой процесс сходящимся. Для этого вычислим производную $\varphi'(x) = \frac{6}{5x}$ и найдем коэф-

¹³ Уравнение $5x - 6 \ln x - 7 = 0$ имеет два корня: $\bar{x} \in [0, 1; 1]$ и $\bar{x} \in [2; 3]$. Первый из отрезков изоляции не должен начинаться в нуле, т. к. в этой точке функция $\ln x$ терпит разрыв.

коэффициент сжатия $q = \max|\varphi'(x)|$ на каждом отрезке изоляции корня. На правом отрезке изоляции $[2; 3]$

$$q_1 = \max_{[2;3]}|\varphi'(x)| = \max_{[2;3]} \frac{6}{5x} = \frac{6}{5x} \Big|_{x=2} = 0.6 < 1.$$

Итерационный процесс будет сходящимся, и его можно использовать для нахождения корня \bar{x} .

На левом отрезке $[0.1; 1]$ изоляции корня

$$\max_{[0.1;1]}|\varphi'(x)| = \max_{[0.1;1]} \frac{6}{5x} = \frac{6}{5x} \Big|_{x=0.1} = 12 > 1,$$

и функция $\varphi(x) = \frac{6 \ln x + 7}{5}$ непригодна для вычисления корня \bar{x} ,

т.к. итерационный процесс будет расходящимся. Поэтому для отрезка $[0.1; 1]$ по-другому выразим x из уравнения (33), а именно: выразим x , который был аргументом логарифма $x = e^{\frac{5x-7}{6}}$, и введем функцию

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{5x-7}{6}\right),$$

которую надо проверить на пригодность к использованию в итерационном процессе. Поскольку

$$\begin{aligned} q_2 = \max_{[0.1;1]}|\psi'(x)| &= \max_{[0.1;1]} \frac{5}{6} \exp\left(\frac{5x-7}{6}\right) = \frac{5}{6} \exp\left(\frac{5x-7}{6}\right) \Big|_{x=1} = \\ &= \frac{5}{6} e^{-1/3} = \frac{5}{6\sqrt[3]{e}} \approx 0.597 \approx 0.6 < 1, \end{aligned}$$

функция $\psi(x)$ обеспечит сходимость итерационного процесса (случайно коэффициент сжатия совпал с q_1).

Резюмируем:

а) для нахождения корня $\bar{x} \in [0.1; 1]$ строим итерационный процесс

$$x_{n+1} = \exp\left(\frac{5x_n - 7}{6}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

начальное приближение $x_0 = 0.5$; коэффициент сжатия $q_2 = 0.6$;

критерий достижения требуемой точности — как только для абсолютной погрешности Δ выполнится условие

$$\Delta = |\bar{x} - x_n| \leq \frac{q_2}{1 - q_2} |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon = 0.001,$$

счет можно оборвать (ответ записать с тремя верными десятичными знаками, гарантируемыми достигнутой точностью);

б) для корня $\bar{z} \in [2; 3]$ строим итерационный процесс

$$z_{n+1} = \frac{6 \ln z_n + 7}{5}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

начальное приближение $z_0 = 2.5$; коэффициент сжатия $q_1 = 0.6$;

критерий достижения требуемой точности — как только выполнится условие

$$\Delta = |\bar{z} - z_n| \leq \frac{q_1}{1 - q_1} |z_n - z_{n-1}| < \varepsilon = 0.001,$$

счет можно оборвать.

В качестве начального приближения к корню традиционно (но не обязательно) берут середину отрезка его изоляции.

Результаты вычислений сведем в таблицы (табл. 3).

Таблица 3

Результаты вычислений

Номер итерации	Приближение к корню	Следующее приближение	Оценка погрешности
n	x_n	$\psi(x_n) = \exp\left(\frac{5x_n - 7}{6}\right)$	$\frac{q_2}{1 - q_2} x_n - x_{n-1} $
0	0.5	0.4724	—
1	0.4724	0.4616	0.016
2	0.4616	0.4575	$6.177 \cdot 10^{-3}$
3	0.4575	0.4559	$2.351 \cdot 10^{-3}$
4	0.4559	0.4553	$8.926 \cdot 10^{-4} < \varepsilon$
n	z_n	$\varphi(z_n) = \frac{6 \ln z_n + 7}{5}$	$\frac{q_1}{1 - q_1} z_n - z_{n-1} $
0	2.5	2.4995	—
1	2.4995	2.4993	$6.767 \cdot 10^{-4} < \varepsilon$

На нулевой итерации оценить погрешность невозможно (поставлен прочерк), поскольку никакого значения, предшествующего нулевому приближению, не существует.

Итак, $\bar{x} \approx x_4 = 0.455$; $\bar{z} \approx z_1 = 2.499$.

Свойства метода итераций:

- а) дифференцируемость функций, участвующих в расчетах;
- б) самоисправляемость вычислительного процесса;
- в) скорость сходимости зависит от величины коэффициента сжатия q . Благоприятных (близких к нулю) значений q всегда можно достичь введением параметра λ для ускорения сходимости;
- г) когда уравнение имеет несколько корней, как правило, для нахождения каждого из них приходится индивидуально строить итерационный процесс, поскольку сходимость одного процесса на разных отрезках изоляции обычно не достигается.

Метод Ньютона

Пусть в уравнении $f(x) = 0$ функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x) \neq 0$; x_n есть некоторое приближение к корню \bar{x} рассматриваемого уравнения. В окрестности точки x_n разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \\ + \frac{f'''(x_n)}{3!}(x - x_n)^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_n)}{k!}(x - x_n)^k + \dots$$

и ограничимся линейным по x слагаемым включительно

$$0 = f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n). \quad (34)$$

Отсюда

$$x \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

и согласно идее Ньютона левую часть этого выражения будем рассматривать как следующее, $(n+1)$ -е, приближение некоторого итерационного процесса

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

Формула (35) представляет метод Ньютона численного решения уравнений. Другое название — метод линеаризации, поскольку функция $f(x)$ приближенно заменена линейной (34).

Выясним геометрический смысл итерационного процесса (35). В точке с абсциссой x_0 проведем касательную к графику функции $y = f(x)$ (рис. 12); уравнение касательной

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

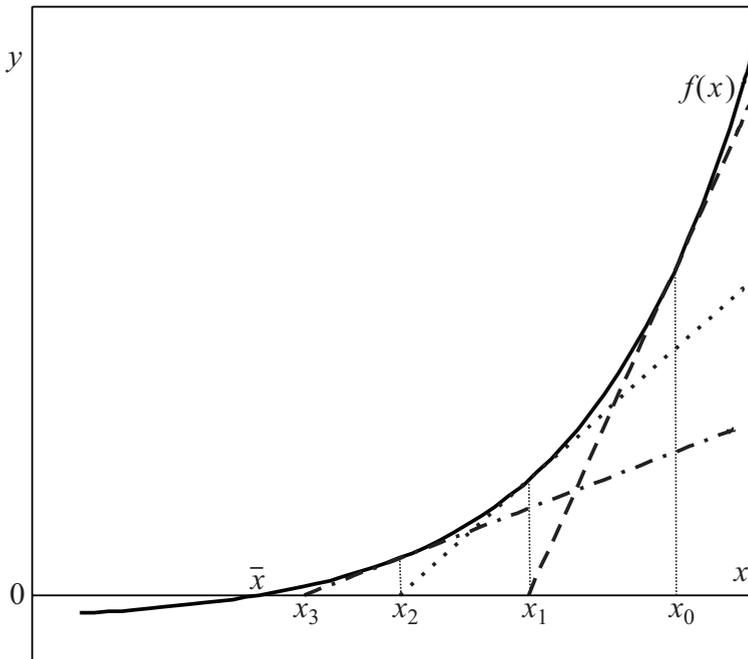


Рис. 12. Геометрическая иллюстрация метода Ньютона

Найдем точку пересечения данной прямой с осью абсцисс (в этой точке $y = 0$)

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Согласно формуле (35) полученное значение — это следующее приближение x_1 . В точке с абсциссой x_1 проведем еще одну касательную к графику $f(x)$; уравнение касательной

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Точка пересечения данной прямой с осью абсцисс

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Это будет второе приближение x_2 , и т. д.

Итак, на каждой итерации график функции $f(x)$ заменяется его касательной. Поэтому метод Ньютона называют еще методом касательных.

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай рассмотренного выше метода итераций. В самом деле, от уравнения $f(x) = 0$ можно перейти к равносильному

$$-\frac{f(x)}{f'(x)} = 0, \text{ или } x - \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 + x.$$

Вводя функцию

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

приходим к виду $x = \varphi(x)$, удобному для итераций. Скорость сходимости итерационного процесса, как известно, определяется значением $|\varphi'(x)|$ на отрезке изоляции корня. В нашем случае

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Если подставить сюда корень $x = \bar{x}$, то, с учетом равенства $f(\bar{x}) = 0$ (в уравнение подставлен его собственный корень!), получаем

$$\varphi'(\bar{x}) = 0.$$

Таким образом, в точках, очень близких к корню \bar{x} уравнения $f(x) = 0$, скорость сходимости итерационного процесса бесконечно велика! В результате можно сделать вывод о том, что при выборе начального приближения x_0 достаточно близко к \bar{x} метод Ньютона (35) должен обеспечивать быструю сходимость последовательности приближений $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ к искомому корню \bar{x} .

К сожалению, этот вывод несколько поспешен. Рассмотрим уравнение $\arctg x = 0$ (рис. 13). Начальное приближение x_0 близко к корню $\bar{x} = 0$, но каждое следующее приближение все дальше от него.

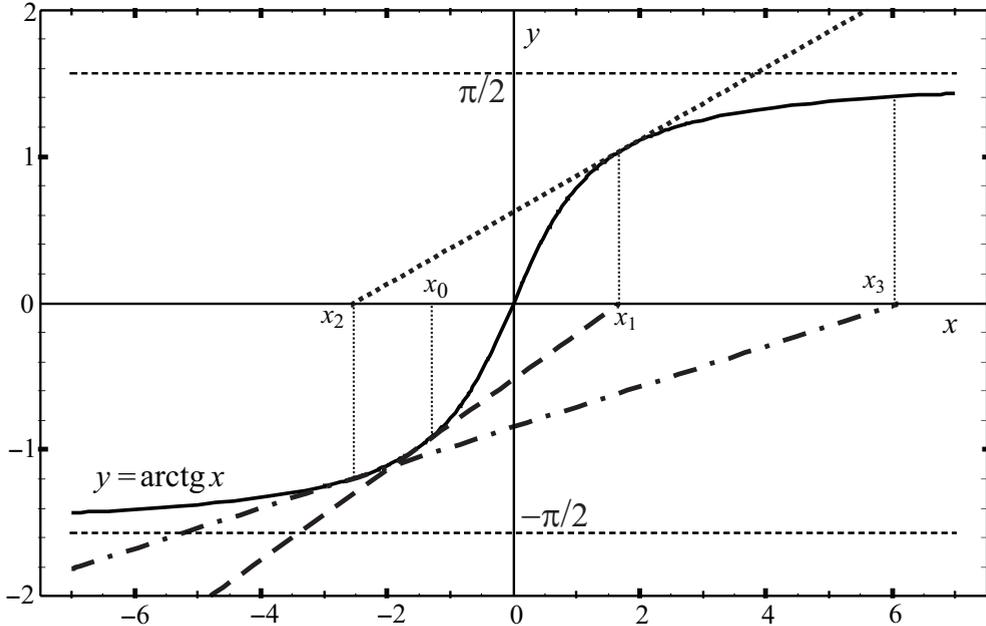


Рис. 13. Пример расходящейся последовательности приближений $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ в методе Ньютона

Оказывается, что при сохранении знака производных $f'(x)$, $f''(x)$ на отрезке $[a, b]$ изоляции корня уравнения $f(x) = 0$ метод Ньютона сходится, если в качестве начального приближения x_0 взять любую точку отрезка $[a, b]$.

Если же $f''(x)$ меняет знак на отрезке изоляции корня, то сходимость итерационного процесса не гарантируется. В рассмотренном примере ситуация именно такова: при переходе через $x = 0$ вторая производная

$$(\arctg x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

меняет знак (направление выпуклости графика арктангенса меняется на противоположное; $x = 0$ — точка перегиба).

Пример. Решить методом Ньютона уравнение

$$5x - 6 \ln x - 7 = 0.$$

Решение. Выше (см. рис. 11) корни этого уравнения уже изолированы $\bar{x} \in [0.1; 1]$ и $\bar{z} \in [2; 3]$. Для функции

$$f(x) = 5x - 6 \ln x - 7$$

первая и вторая производные $f'(x) = 5 - 6/x$, $f''(x) = 6/x^2$ сохраняют знак на обоих отрезках изоляции корней, что является гарантией сходимости итерационных процессов.

Для левого корня $\bar{x} \in [0.1; 1]$ выбираем начальное приближение, например $x_0 = 0.5$ (в силу самоисправляемости метода это может быть любая точка отрезка изоляции); следующие приближения по Ньютону

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{5x_n - 6 \ln x_n - 7}{5 - \frac{6}{x_n}} = \frac{6x_n \ln x_n + x_n}{5x_n - 6}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для правого корня $\bar{z} \in [2; 3]$ при начальном приближении, например $z_0 = 3.5$, итерационный процесс строится точно так же, как для левого,

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = \frac{6z_n \ln z_n + z_n}{5z_n - 6}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Когда нужна точность будет достигнута? В соответствии с известной формулой конечных приращений Лагранжа для дифференцируемой функции $f(x)$

$$f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi) \cdot (\alpha - \beta),$$

где (заранее неизвестная) промежуточная точка $\xi \in [a, b]$. Пусть здесь α равняется x_n , β равняется \bar{x} — искомому значению корня, тогда $f(\beta) = 0$ и

$$f(x_n) = f'(\xi) \cdot (x_n - \bar{x}).$$

Отсюда получаем критерий обрыва счета в методе Ньютона: как только абсолютная погрешность n -го приближения

$$\Delta = |x_n - \bar{x}| = \left| \frac{f(x_n)}{f'(\xi)} \right| \leq \frac{|f(x_n)|}{m},$$

где $m = \min_{[a, b]} |f'(x)|$, станет меньше требуемой точности ε

$$\frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon, \quad (36)$$

точность достигнута, и вычисления можно прекратить, записав ответ $\bar{x} \approx x_n$.

Свойства метода Ньютона таковы:

а) функции, участвующие в расчетах, должны быть дифференцируемыми;

б) вычислительный процесс (35) самоисправляющийся;

в) нахождение всех корней, сколько бы их не было, обслуживается одним и тем же вычислительным процессом (35) — в противоположность методу итераций, в котором, как правило, для каждого корня приходится индивидуально строить итерационный процесс;

г) скорость сходимости итерационного процесса высока;

д) на каждом шаге вычислений требуется вычислять производную $f'(x_n)$, что может иногда представлять проблему при сложно заданной функции.

На частичное устранение этого единственного возможного недостатка метода Ньютона направлено введение двух методов, являющихся его следствиями, — метода секущих и метода хорд.

Метод секущих

Поскольку математически производная вводится как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

то, убирая предельный переход, получим приближенное значение производной

$$f'(x) \approx \frac{f(z) - f(x)}{z - x}. \quad (37)$$

В соответствии с этим в методе секущих производная приближенно вычисляется по формуле

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}. \quad (38)$$

Подставляя в формулу (35) это выражение для производной, приходим к следующему итерационному процессу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (39)$$

для которого надо указать два начальных приближения x_0 и x_1 (в отличие от метода Ньютона, в котором требовалось указать только x_0). С геометрической точки зрения в методе секущих (39) касательная заменяется секущей, проходящей через точки кривой $y = f(x)$ с абсциссами x_n и x_{n-1} (рис. 14).

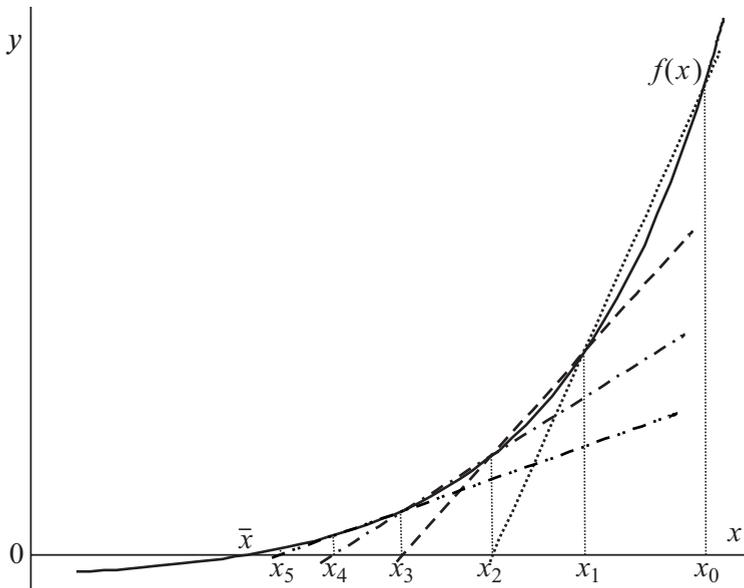


Рис. 14. Геометрическая иллюстрация метода секущих

Свойства метода секущих заключаются в следующем:

а) поскольку метод секущих является модификацией метода Ньютона (метода касательных), он наследует все свойства последнего;

б) скорость сходимости итерационного процесса ниже, чем в методе касательных (вследствие округления, заложенного приближением (38), но остается высокой;

в) производная $f'(x_n)$ изгоняется из вычислительного процесса, но лишь частично, поскольку для контроля точности (36) она по-прежнему нужна!

Метод хорд

Применим в формуле (35) еще более грубое приближение для производной

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

(в самом деле, точки x_n и x_0 дальше друг от друга, чем x_n и x_{n-1} в выражении (38)). Подставляя в формулу (35) это выражение для производной, получим итерационный процесс метода хорд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

для которого, как и в методе секущих, надо указать два начальных приближения x_0 и x_1 . Геометрически в методе хорд касательная заменяется хордой и, проходящей через точки кривой $y = f(x)$ с абсциссами x_n и x_0 , (рис. 15).

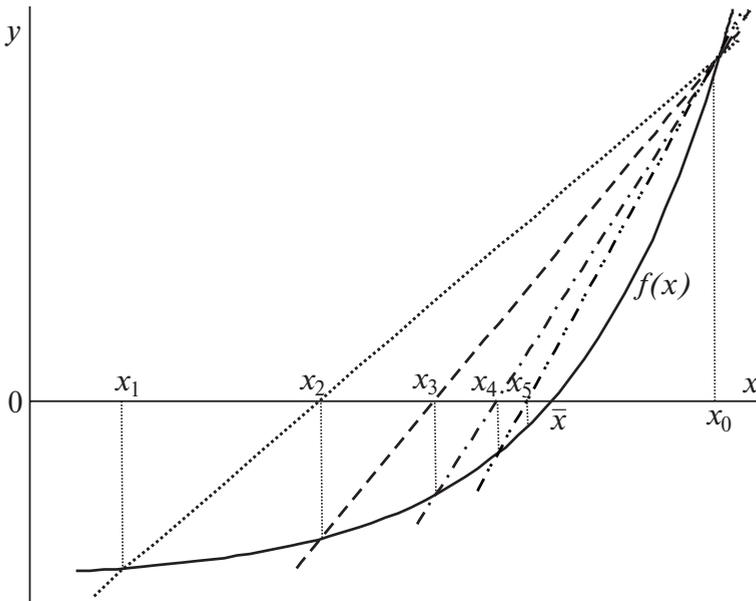


Рис. 15. Геометрическая иллюстрация метода хорд

Метод хорд имеет те же свойства, что и метод секущих, но скорость сходимости при прочих равных условиях становится еще несколько ниже, чем у последнего (оставаясь высокой).

Задания к лабораторной работе № 3

Численное решение уравнений

Для заданного уравнения $f(x) = 0$ найти один из его корней методами дихотомии, итераций, Ньютона, хорд и секущих; достичь точности 10^{-2} методом дихотомии и 10^{-3} остальными методами.

Варианты заданий

- | | | | |
|-----|---------------------------|-----|-----------------------------|
| 1. | $\ln x + x - 2 = 0.$ | 16. | $2 \ln x + x - 2 = 0.$ |
| 2. | $\ln x + x^2 - 8 = 0.$ | 17. | $2 \ln x + x^2 - 3 = 0.$ |
| 3. | $\ln x + 2x^2 - 6 = 0.$ | 18. | $2 \ln x + 2x^2 - 6 = 0.$ |
| 4. | $2 \ln x - x^2 + 5 = 0.$ | 19. | $\sin x - x^2 + 4 = 0.$ |
| 5. | $2 \ln x + 2x - 3 = 0.$ | 20. | $\sin x + x - 2 = 0.$ |
| 6. | $\sin x + x^2 - 1 = 0.$ | 21. | $3 \sin x + x^2 - 1 = 0.$ |
| 7. | $\sin x + 2x^2 - 5 = 0.$ | 22. | $\sin x + 2x^2 - 5 = 0.$ |
| 8. | $\sin x - x + 3 = 0.$ | 23. | $3 \sin x - x + 3 = 0.$ |
| 9. | $3 \sin x - x^2 + 4 = 0.$ | 24. | $\cos x + x - 2 = 0.$ |
| 10. | $3 \sin x + x - 2 = 0.$ | 25. | $\cos x + 3x - 6 = 0.$ |
| 11. | $\cos x + x^3 - 2 = 0.$ | 26. | $2 \ln^2 x + 2x^2 - 3 = 0.$ |
| 12. | $\cos x + 2x - 3 = 0.$ | 27. | $2 \ln x + x - 7 = 0.$ |
| 13. | $\cos x - x^3 + 2 = 0.$ | 28. | $2 \ln x + 0.01x^2 = 0.$ |
| 14. | $\ln x - x^2 + 5 = 0.$ | 29. | $\ln^2 x + 0.25x - 3 = 0.$ |
| 15. | $\ln x + 2x - 3 = 0.$ | 30. | $\ln x + x^2 - 3 = 0.$ |

Глава 6. Численное решение систем уравнений

Линейные системы

Пусть задана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Вводя матрицу коэффициентов при неизвестных (матрицу системы)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбец правых частей (неоднородностей) и столбец неизвестных¹⁴

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

можно записать систему (40) в матричном виде

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

¹⁴Эти столбцы формально можно считать векторами.

Методы решения линейных систем можно разбить на две группы: точные (прямые) и приближенные (итерационные).

К точным методам относятся такие, которые в предположении, что вычисления ведутся точно (без округлений), за конечное, заранее оцениваемое количество шагов вычислений приводят к точным значениям неизвестных x_i . Фактически, из-за почти неизбежных округлений при вычислениях, результаты, получаемые точными методами, будут содержать погрешности. Точными являются, например, известные методы Крамера (1704–1752) и Гаусса (1777–1855).

К приближенным относятся такие методы, которые даже в предположении отсутствия погрешности округлений доставляют решение системы лишь с заданной точностью. Точное решение системы достигается асимптотически как результат бесконечного процесса. Примерами приближенных методов являются метод простой итерации¹⁵ и его модификация — метод Зейделя (1821–1896).

Прежде чем переходить к рассмотрению приближенных методов, напомним некоторые особенности методов Крамера и Гаусса.

Правило Крамера применимо при условиях:

а) количество неизвестных n в системе равно числу уравнений m , тогда матрица системы A квадратная, и ей можно сопоставить определитель $\det A$;

б) матрица A невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$.

При выполнении этих (довольно стеснительных!) условий решение системы (40) можно найти по формулам Крамера

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad (41)$$

где A_i — матрица, получаемая из исходной матрицы A заменой ее i -го столбца столбцом правых частей b_i .

Итак, для решения системы из n уравнений с n неизвестными по правилу Крамера нужно вычислить $(n+1)$ определитель n -го порядка, что очень трудоемко (при самой экономичной организации вычислений потребуется выполнить порядка $\frac{2}{3}n^4$ арифметических операций). Таким образом, правило Крамера удобно

¹⁵Смысл слова *простая* выяснится ниже, при обсуждении метода Зейделя как модификации данного метода.

в теоретических приложениях (доказывание теорем, вывод формул и т. п.) благодаря компактности формулы (41), но крайне неудобно для практического решения систем.

Почти во всех отношениях более предпочтительным является метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных). Он не требует невырожденности матрицы A ; более того, она может даже не быть квадратной. Если же решается система из n уравнений с n неизвестными, то для реализации метода Гаусса потребуется примерно

$$\frac{2n(n+1)(n+2)}{3} + n(n-1),$$

или порядка $\frac{2}{3}n^3$ арифметических операций (сравните с оценкой для правила Крамера!).

Метод простой итерации

Пусть система из n уравнений с n неизвестными

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

записана в векторно-матричной форме

$$Ax = b \quad (43)$$

и приведена к виду

$$x = Cx + f, \quad (44)$$

удобному для итерирования ($C_{n \times n}$ — некоторая матрица; f — вектор-столбец). Удобство состоит в том, что, задав начальное приближение

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

Число

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (48)$$

называется нормой матрицы A . Поскольку умножение матрицы A на вектор x можно рассматривать как преобразование, переводящее вектор x в новый вектор $y = Ax$, то дробь $\|Ax\|/\|x\|$ в формуле (48) является не чем иным, как коэффициентом сжатия q , с которым мы уже рассматривали в предыдущей главе. Каждой из векторных норм (47) соответствует своя норма матрицы:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2}, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|. \quad (49)$$

Для вычисления нормы $\|A\|_1$ надо найти сумму модулей элементов каждого столбца матрицы A , а затем выбрать максимальную из этих сумм. Для вычисления нормы $\|A\|_\infty$ то же надо сделать не со столбцами, а со строками матрицы A . Заметим, что для нормы $\|A\|_2$ дана лишь оценка сверху, поскольку точное значение этой нормы вычисляется трудоемко.

Пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.3 \end{pmatrix}$$

вычислить $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ и оценить $\|A\|_2$.

Решение. В соответствии с формулами (49)

$$\|A\|_1 = \max\{0.1 + 0.2 + 0; 0.4 + 0.3 + 0.1; 0 + 0.1 + 0.3\} = 0.8;$$

$$\|A\|_\infty = \max\{0.1 + 0.4 + 0; 0.2 + 0.3 + 0.1; 0 + 0.1 + 0.3\} = 0.6;$$

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |a_{ij}|^2} = \\ &= \sqrt{(0.1)^2 + (-0.4)^2 + 0^2 + (0.2)^2 + (0.3)^2 + (0.1)^2 + 0^2 + (-0.1)^2 + (-0.3)^2} = \\ &= \sqrt{0.41} \approx 0.64. \end{aligned}$$

Теперь можно сформулировать теорему, устанавливающую условие сходимости метода простой итерации и критерий обрыва итерационного процесса (45).

Теорема о сходимости итерационного процесса. Пусть выполнено условие

$$\|C\| < 1. \quad (50)$$

Тогда:

- 1) решение \bar{x} системы (42) существует и единственно;
- 2) при произвольном векторе начального приближения $x^{(0)}$ метод простой итерации сходится к точному решению системы \bar{x}

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \bar{x},$$

и справедлива следующая оценка абсолютной погрешности k -го приближения, обобщающая формулу (31),

$$\Delta = \|x^{(k)} - \bar{x}\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|, \quad (51)$$

где в качестве коэффициента сжатия $q = \|C\|$ можно использовать любую норму матрицы (49), удовлетворяющую условию (50).

Несколько **замечаний** к теореме.

1. Из сходимости итераций по одной из норм следует и сходимость по другой норме, т. е., например, если $\|x^{(k)} - \bar{x}\|_1 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то и $\|x^{(k)} - \bar{x}\|_2 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и наоборот.

2. Приведем критерий достижения требуемой точности ε (критерий обрыва счета): вычисления можно прервать, как только абсолютная погрешность Δ , оцениваемая по формуле (51), станет меньше ε . Практически (в соответствии с нормой $\|x\|_\infty$ в формуле (47) следует проверить выполнение условия для каждой компоненты вектора k -го приближения

$$\frac{q}{1-q} \|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (52)$$

Решение. Приведем систему к виду, удобному для итераций:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{20.9}(21.70 - 1.2x_2 - 2.1x_3 - 0.9x_4), \\ x_2 &= \frac{1}{21.2}(27.46 - 1.2x_1 - 1.5x_3 - 2.5x_4), \\ x_3 &= \frac{1}{19.8}(28.76 - 2.1x_1 - 1.5x_2 - 1.3x_4), \\ x_4 &= \frac{1}{32.1}(49.72 - 0.9x_1 - 2.5x_2 - 1.3x_3). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Матрица C (см. формулу (44), соответствующая системе (54) удовлетворяет ограничению на норму (50), если последнюю вычислять, например, как $\|C\|_\infty$ (49) — максимум построчной суммы модулей. В самом деле, вычислим эту сумму для каждой строки:

$$\sum_{j=1}^4 |c_{1j}| = |c_{11}| + |c_{12}| + |c_{13}| + |c_{14}| = \frac{1.2 + 2.1 + 0.9}{20.9} \approx 0.20,$$

$$\sum_{j=1}^4 |c_{2j}| \approx 0.24, \quad \sum_{j=1}^4 |c_{3j}| \approx 0.25, \quad \sum_{j=1}^4 |c_{4j}| \approx 0.15.$$

$$\|C\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 4} \sum_{j=1}^4 |c_{ij}| = \max\{0.20; 0.24; 0.25; 0.15\} = 0.25.$$

Итак, коэффициент сжатия $q = \|C\|_\infty = 0.25 < 1$. При таком значении q скорость сходимости итерационного процесса будет высокой, поскольку $q/(1-q) = 1/3$.

В качестве вектора начального приближения возьмем столбец неоднородностей в системе (54):

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 21.70/20.9 \\ 27.46/21.2 \\ 28.76/19.8 \\ 49.72/32.1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.04 \\ 1.30 \\ 1.45 \\ 1.55 \end{pmatrix}.$$

Итерации будем продолжать до тех пор, пока оценка погрешности

$$\frac{q}{1-q} \|\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k-1)}\| = \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k-1)}\|$$

не станет меньше $\varepsilon = 10^{-3}$ для всех компонент вектора.

Первая итерация (ср. с системой (54):

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{20.9} (21.70 - 1.2x_2^{(0)} - 2.1x_3^{(0)} - 0.9x_4^{(0)}) = \\ &= \frac{1}{20.9} \cdot (21.70 - 1.2 \cdot 1.30 - 2.1 \cdot 1.45 - 0.9 \cdot 1.55) = 0.75, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{21.2} (27.46 - 1.2x_1^{(0)} - 1.5x_3^{(0)} - 2.5x_4^{(0)}) = \\ &= \frac{1}{21.2} \cdot (27.46 - 1.2 \cdot 1.04 - 1.5 \cdot 1.45 - 2.5 \cdot 1.55) = 0.95, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{19.8} (28.76 - 2.1x_1^{(0)} - 1.5x_2^{(0)} - 1.3x_4^{(0)}) = \\ &= \frac{1}{19.8} \cdot (28.76 - 2.1 \cdot 1.04 - 1.5 \cdot 1.30 - 1.3 \cdot 1.55) = 1.14, \\ x_4^{(1)} &= \frac{1}{32.1} (49.72 - 0.9x_1^{(0)} - 2.5x_2^{(0)} - 1.3x_3^{(0)}) = \\ &= \frac{1}{32.1} \cdot (49.72 - 0.9 \cdot 1.04 - 2.5 \cdot 1.30 - 1.3 \cdot 1.45) = 1.36, \end{aligned}$$

итак, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.95 \\ 1.14 \\ 1.36 \end{pmatrix}.$

(Вычисления пока можно проводить с небольшим числом знаков после запятой, поскольку трудно ожидать высокой точности от вектора первого приближения.)

Вторая итерация $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8106 \\ 1.0118 \\ 1.2117 \\ 1.4077 \end{pmatrix}.$

Третья итерация $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.7978 \\ 0.9977 \\ 1.1975 \\ 1.3983 \end{pmatrix}.$

$$\text{Четвертая итерация } \mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.8004 \\ 1.0005 \\ 1.2005 \\ 1.4003 \end{pmatrix}.$$

Оценим точность системы (54), достигнутую после четвертой итерации:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_1^{(4)} - \mathbf{x}_1^{(3)}\| &= 0.0009, & \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_2^{(4)} - \mathbf{x}_2^{(3)}\| &= 0.0009, \\ \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_3^{(4)} - \mathbf{x}_3^{(3)}\| &= 0.001, & \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_4^{(4)} - \mathbf{x}_4^{(3)}\| &= 0.0007. \end{aligned}$$

Поскольку максимальная из оценок (третья) не меньше $\varepsilon = 0.001$, продолжаем вычисления.

$$\text{Пятая итерация } \mathbf{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.7999 \\ 0.9999 \\ 1.1999 \\ 1.3999 \end{pmatrix}.$$

Оценим точность после пятой итерации:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_1^{(5)} - \mathbf{x}_1^{(4)}\| &= 1,7 \cdot 10^{-4}, & \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_2^{(5)} - \mathbf{x}_2^{(4)}\| &= 2 \cdot 10^{-4}, \\ \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_3^{(5)} - \mathbf{x}_3^{(4)}\| &= 2 \cdot 10^{-4}, & \frac{1}{3} \|\mathbf{x}_4^{(5)} - \mathbf{x}_4^{(4)}\| &= 1,3 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Абсолютная погрешность

$$\Delta_5 = \|\mathbf{x}^{(5)} - \bar{\mathbf{x}}\|_{\infty} \leq \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)}\|_{\infty} = \frac{1}{3} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i^{(5)} - x_i^{(4)}| = 2 \cdot 10^{-4} < 10^{-3} = \varepsilon.$$

Итак, абсолютная погрешность впервые стала меньше требуемой по условию задачи. Вычисления заканчиваем и записываем ответ, округляя $\mathbf{x}^{(5)}$ до трех верных десятичных знаков, которые гарантированы достигнутой точностью $\varepsilon = 0.001$:

$$\bar{\mathbf{x}} \approx \mathbf{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.800 \\ 1.000 \\ 1.200 \\ 1.400 \end{pmatrix}.$$

Для информации отметим, что точное решение системы (53) есть $x_1 = 0.8$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.2$, $x_4 = 1.4$.

Замечания. 1. При практической реализации метода простой итерации, например в MathCad, рекомендуется ввести четыре функции нескольких переменных, соответствующие правым частям уравнений (54), и на каждой итерации вызывать эти функции по их именам, не переписывая в явном виде саму систему (54).

2. Понятно, что не всегда простейший переход от системы (53) к (54) обеспечивает выполнение условия сходимости (50) по какой-нибудь норме. Могут потребоваться дополнительные элементарные преобразования строк в исходной системе (53). Пример таких преобразований приведен ниже, при рассмотрении метода Зейделя.

Заключительное замечание по методу простой итерации

1. Метод приводит к выполнению однообразных вычислительных операций и легко программируется на ЭВМ.

2. Как и всегда в методе итераций, скорость сходимости зависит от величины коэффициента сжатия q . При $q \in (0, 1)$ сходимость имеется, при этом $q \approx 0$ обеспечивает высокую скорость сходимости (достижение высокой точности результата за небольшое количество итераций), а при q , приближающемся к единице (со стороны меньших значений), скорость сходимости уменьшается. В этом случае, а также при $q \geq 1$ исходную систему уравнений надо заменить эквивалентной ей системой (линейно комбинируя уравнения), для которой q будет благоприятным. Такое ускорение сходимости всегда возможно, но, к сожалению, общих рекомендаций относительно того, как его добиться, не существует. Это — существенный недостаток метода итераций в случае его использования для систем линейных уравнений.

3. Если итерации сходятся достаточно быстро, то для достижения заданной точности результата может потребоваться меньше вычислительных операций, чем, например, $\sim \frac{2}{3}n^3$ (вычислительная сложность метода Гаусса), и тогда метод простой итерации будет реальным конкурентом метода Гаусса в решении систем линейных уравнений. Добавим, что метод Гаусса программируется существенно сложнее и работает по принципу «все или ничего»: либо мы получаем значения всех неизвестных (если метод доведен до конца), либо ничего не получа-

ем. В методе итераций на каждом шаге получаются значения всех неизвестных (пусть и грубые, при малом числе итераций).

4. Метод самоисправляющийся (в отличие от методов Крамера и Гаусса).

Задания к лабораторной работе № 4а Решение систем линейных уравнений методом простой итерации

Варианты заданий

Решить систему линейных уравнений методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Для проверки сравнить полученный ответ с результатом применения функции Find в Mathcad (прил. 2).

1.
$$\begin{cases} x_1 = 0.32x_1 - 0.23x_2 + 0.41x_3 - 0.06x_4 + 0.67, \\ x_2 = 0.18x_1 + 0.12x_2 - 0.33x_3 - 0.88, \\ x_3 = 0.12x_1 + 0.32x_2 - 0.05x_3 + 0.67x_4 - 0.18, \\ x_4 = 0.05x_1 - 0.11x_2 + 0.09x_3 - 0.12x_4 + 1.44. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x_1 = 0.34x_2 + 0.23x_3 - 0.06x_4 + 1.42, \\ x_2 = 0.11x_1 - 0.23x_2 - 0.18x_3 + 0.36x_4 - 0.66, \\ x_3 = 0.23x_1 - 0.12x_2 + 0.15x_3 - 0.35x_4 + 1.08, \\ x_4 = 0.12x_1 + 0.11x_2 - 0.47x_3 + 0.17x_4 + 1.72. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x_1 = 0.06x_1 + 0.17x_2 + 0.34x_3 + 0.16x_4 + 2.43, \\ x_2 = 0.32x_1 + 0.23x_2 - 0.35x_4 - 1.12, \\ x_3 = 0.16x_1 - 0.08x_2 - 0.12x_4 + 0.43, \\ x_4 = 0.09x_1 + 0.21x_2 - 0.13x_3 + 0.83. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 = 0.08x_2 - 0.23x_3 + 0.36x_4 + 1.37, \\ x_2 = 0.16x_1 - 0.22x_2 + 0.18x_3 - 2.38, \\ x_3 = 0.15x_1 + 0.12x_2 + 0.35x_3 - 0.17x_4 + 0.38, \\ x_4 = 0.25x_1 + 0.21x_2 - 0.19x_3 + 0.03x_4 + 0.64. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 = 0.32x_1 - 0.13x_2 - 0.08x_3 + 0.16x_4 + 2.42, \\ x_2 = 0.17x_1 - 0.22x_2 + 0.13x_3 - 0.21x_4 + 1.48, \\ x_3 = 0.05x_1 - 0.08x_2 + 0.34x_4 - 0.16, \\ x_4 = 0.12x_1 + 0.11x_2 - 0.19x_3 + 0.06x_4 + 1.64. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 = 0.12x_1 + 0.23x_2 - 0.33x_3 + 0.07x_4 + 0.17, \\ x_2 = 0.45x_2 - 0.23x_3 + 0.07x_4 - 0.38, \\ x_3 = 0.12x_1 - 0.08x_3 + 0.77x_4 + 0.88, \\ x_4 = 0.08x_1 + 0.09x_2 + 0.39x_3 + 0.22x_4 - 1.74. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 = 0.03x_1 - 0.05x_2 + 0.21x_3 - 0.36x_4 + 0.43, \\ x_2 = 0.28x_1 + 0.52x_2 - 0.83x_3 + 0.07x_4 - 1.8, \\ x_3 = 0.33x_1 + 0.12x_2 - 0.08x_3 - 0.07x_4 - 0.8, \\ x_4 = 0.08x_1 + 0.17x_2 + 0.29x_3 + 0.32x_4 + 1.7. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 = 0.17x_2 - 0.31x_3 + 0.16x_4 - 1.2, \\ x_2 = 0.18x_2 + 0.43x_3 - 0.08x_4 + 0.38, \\ x_3 = 0.22x_1 + 0.18x_2 + 0.25x_3 + 0.07x_4 + 0.48, \\ x_4 = 0.08x_1 + 0.07x_2 + 0.71x_3 + 0.04x_4 - 1.24. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 = 0.02x_1 + 0.03x_2 - 0.62x_3 + 0.06x_4 - 1.6, \\ x_2 = 0.03x_1 + 0.28x_2 + 0.33x_3 - 0.07x_4 + 1.1, \\ x_3 = 0.09x_1 + 0.12x_2 + 0.42x_3 + 0.27x_4 - 1.7, \\ x_4 = 0.19x_1 - 0.21x_2 + 0.08x_3 + 0.37x_4 + 1.4. \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x_1 = 0.52x_1 + 0.03x_2 + 0.11x_4 - 0.22, \\ x_2 = 0.07x_1 - 0.38x_2 - 0.03x_3 + 0.41x_4 + 1.8, \\ x_3 = 0.04x_1 + 0.42x_2 + 0.15x_3 - 0.07x_4 - 1.1, \\ x_4 = 0.15x_1 + 0.17x_2 - 0.13x_3 + 0.19x_4 + 0.34. \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} x_1 = 0.23x_2 - 0.17x_3 + 0.06x_4 + 0.21, \\ x_2 = 0.52x_1 + 0.12x_3 + 0.17x_4 - 1.18, \\ x_3 = 0.16x_1 - 0.18x_2 + 0.21x_3 - 0.88, \\ x_4 = 0.11x_1 + 0.21x_2 + 0.03x_3 + 0.02x_4 + 0.74. \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} x_1 = 0.15x_1 + 0.05x_2 - 0.08x_3 + 0.16x_4 - 0.47, \\ x_2 = 0.32x_1 - 0.42x_2 - 0.13x_3 + 0.11x_4 + 1.24, \\ x_3 = 0.17x_1 + 0.06x_2 - 0.08x_3 + 0.12x_4 + 1.18, \\ x_4 = 0.21x_1 - 0.16x_2 + 0.39x_3 - 0.84. \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} x_1 = 0.17x_1 + 0.26x_2 - 0.11x_3 - 0.16x_4 - 1.41, \\ x_2 = 0.13x_1 - 0.12x_2 + 0.09x_3 - 0.06x_4 + 0.48, \\ x_3 = 0.12x_1 + 0.05x_2 - 0.03x_3 + 0.12x_4 - 2.38, \\ x_4 = 0.13x_1 + 0.18x_2 + 0.24x_3 + 0.45x_4 + 0.72. \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} x_1 = 0.23x_1 + 0.21x_2 + 0.06x_3 - 0.34x_4 + 1.47, \\ x_2 = 0.05x_1 + 0.33x_3 + 0.12x_4 - 0.57, \\ x_3 = 0.35x_1 - 0.27x_2 - 0.05x_4 + 0.68, \\ x_4 = 0.12x_1 - 0.43x_2 + 0.34x_3 - 0.22x_4 - 2.14. \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} x_1 = 0.15x_1 + 0.23x_2 + 0.11x_3 + 0.18x_4 - 1.41, \\ x_2 = 0.12x_1 - 0.14x_2 + 0.08x_3 + 0.09x_4 - 0.83, \\ x_3 = 0.16x_1 + 0.24x_2 - 0.35x_4 + 1.18, \\ x_4 = 0.23x_1 - 0.08x_2 + 0.59x_3 + 0.22x_4 + 0.64. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 = 0.22x_1 - 0.14x_2 + 0.06x_3 - 0.16x_4 + 1.27, \\ x_2 = 0.12x_1 + 0.32x_3 - 0.18x_4 - 0.78, \\ x_3 = 0.08x_1 - 0.12x_2 + 0.23x_3 + 0.32x_4 - 0.58, \\ x_4 = 0.25x_1 + 0.21x_2 + 0.19x_3 + 1.51. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 = 0.12x_1 - 0.23x_2 + 0.25x_3 - 0.16x_4 + 1.07, \\ x_2 = 0.14x_1 + 0.34x_2 - 0.18x_3 + 0.24x_4 - 0.89, \\ x_3 = 0.33x_1 + 0.03x_2 + 0.45x_3 - 0.37x_4 + 1.18, \\ x_4 = 0.12x_1 - 0.05x_2 + 0.12x_4 - 1.14. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 = 0.08x_1 - 0.03x_2 - 0.06x_4 - 1.7, \\ x_2 = 0.54x_1 + 0.24x_3 - 0.08x_4 + 0.81, \\ x_3 = 0.33x_1 - 0.37x_2 + 0.25x_4 - 0.98, \\ x_4 = 0.11x_1 + 0.03x_3 + 0.52x_4 + 0.14. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x_1 = 0.05x_1 - 0.06x_2 - 0.12x_3 + 0.13x_4 - 2.17, \\ x_2 = 0.04x_1 - 0.14x_2 + 0.68x_3 + 0.11x_4 + 1.8, \\ x_3 = 0.34x_1 + 0.08x_2 - 0.05x_3 + 0.47x_4 - 2.18, \\ x_4 = 0.11x_1 + 0.15x_2 - 0.03x_4 - 0.8. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 = 0.07x_1 - 0.08x_2 + 0.11x_3 - 0.18x_4 - 0.51, \\ x_2 = 0.14x_1 - 0.42x_2 + 0.21x_4 + 1.18, \\ x_3 = 0.13x_1 + 0.31x_2 - 0.19x_4 - 1.02, \\ x_4 = 0.08x_1 - 0.33x_2 + 0.28x_4 - 0.28. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 = 0.21x_2 - 0.12x_3 + 0.31x_4 + 2.7, \\ x_2 = 0.34x_1 - 0.11x_3 + 0.21x_4 - 1.5, \\ x_3 = 0.11x_1 + 0.23x_2 - 0.42x_4 + 1.28, \\ x_4 = 0.17x_1 - 0.21x_2 + 0.31x_3 - 0.18. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x_1 = 0.15x_1 - 0.08x_2 + 0.32x_3 - 0.23x_4 - 0.87, \\ x_2 = -0.21x_1 + 0.04x_2 + 0.11x_3 + 0.31x_4 - 0.68, \\ x_3 = 0.51x_1 - 0.06x_2 + 0.07x_3 - 0.17x_4 + 1.78, \\ x_4 = 0.31x_1 - 0.45x_2 - 1.28. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x_1 = 0.12x_1 + 0.26x_2 - 0.19x_3 - 0.17x_4 + 1.23, \\ x_2 = -0.18x_1 - 0.44x_3 + 0.18x_4 - 0.31, \\ x_3 = 0.12x_1 + 0.13x_2 - 0.35x_3 + 0.07x_4 - 0.48, \\ x_4 = 0.31x_1 - 0.05x_2 + 0.05x_3 - 0.27x_4 - 0.16. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x_1 = 0.14x_1 + 0.31x_2 - 0.17x_3 + 0.21x_4 - 1.73, \\ x_2 = -0.218x_1 + 0.32x_3 + 0.19x_4 + 0.61, \\ x_3 = 0.32x_1 - 0.15x_2 + 0.05x_3 - 0.17x_4 - 0.88, \\ x_4 = 0.11x_1 + 0.25x_2 - 0.13x_3 + 0.96. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x_1 = 0.13x_1 + 0.22x_2 - 0.41x_3 - 0.04x_4 + 2.13, \\ x_2 = 0.23x_1 - 0.31x_3 + 0.11x_4 - 0.18, \\ x_3 = 0.06x_1 + 0.13x_2 - 0.21x_4 + 1.48, \\ x_4 = 0.71x_1 - 0.04x_2 - 0.05x_3 + 2.46. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x_1 = 0.17x_1 - 0.24x_2 - 0.12x_3 + 0.14x_4 - 1.33, \\ x_2 = 0.11x_1 + 0.22x_2 - 0.37x_3 + 0.27x_4 + 0.81, \\ x_3 = 0.05x_1 - 0.12x_2 + 0.13x_3 - 0.17x_4 - 1.16, \\ x_4 = 0.12x_1 + 0.04x_2 + 0.05x_3 + 0.57. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 = 0.33x_1 - 0.28x_2 + 0.02x_3 + 1.43, \\ x_2 = 0.31x_1 - 0.21x_2 - 0.35x_3 + 1.41, \\ x_3 = 0.12x_1 + 0.08x_2 - 0.13x_3 - 0.15x_4 - 1.06, \\ x_4 = 0.14x_1 - 0.34x_2 - 0.15x_3 - 1.47. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x_1 = 0.26x_1 - 0.14x_2 + 0.02x_3 + 0.24x_4 + 1.73, \\ x_2 = 0.15x_1 + 0.12x_2 - 0.17x_3 + 0.26x_4 - 0.65, \\ x_3 = 0.35x_1 + 0.22x_2 - 0.03x_3 - 0.27x_4 + 2.26, \\ x_4 = 0.12x_1 + 0.24x_2 - 0.15x_3 + 0.23x_4 - 1.17. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x_1 = 0.16x_1 + 0.13x_2 - 0.32x_3 - 0.16x_4 - 0.64, \\ x_2 = 0.34x_1 - 0.08x_2 + 0.15x_3 - 0.18x_4 + 1.42, \\ x_3 = 0.15x_1 + 0.32x_2 + 0.13x_3 - 0.25x_4 - 2.06, \\ x_4 = 0.11x_1 - 0.26x_2 - 0.08x_3 + 0.24x_4 + 0.83. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x_1 = 0.23x_1 - 0.04x_2 + 0.22x_3 - 0.14x_4 + 1.24, \\ x_2 = 0.34x_1 - 0.23x_2 + 0.07x_3 - 0.88, \\ x_3 = 0.26x_1 + 0.31x_2 - 0.02x_3 + 0.29, \\ x_4 = 0.07x_1 - 0.21x_2 + 0.27x_3 - 0.13x_4 - 1.19. \end{cases}$$

Метод Зейделя

Метод простой итерации для решения системы уравнений базируется на простой идее вычисления вектора $(k + 1)$ -й итерации с использованием компонент вектора предыдущей k -й итерации (46). Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации и несколько усложняет эту процедуру, а именно: при вычислении вектора $(k + 1)$ -й итерации используются не только компоненты вектора k -й итерации, но и уже вычисленные к данному моменту компоненты вектора текущей $(k + 1)$ -й итерации:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\ x_2^{(k+1)} &= c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + \dots + c_{2n}x_n^{(k)} + f_2, \\ x_3^{(k+1)} &= c_{31}x_1^{(k+1)} + c_{32}x_2^{(k+1)} + c_{33}x_3^{(k)} + \dots + c_{3n}x_n^{(k)} + f_3, \\ x_4^{(k+1)} &= c_{41}x_1^{(k+1)} + c_{42}x_2^{(k+1)} + c_{43}x_3^{(k+1)} + \dots + c_{4n}x_n^{(k)} + f_4, \\ &\dots \\ x_n^{(k+1)} &= c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + c_{n3}x_3^{(k+1)} + \dots + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{aligned} \right\}$$

Здесь в первой строке приходится использовать только компоненты прежнего, k -го, вектора, во второй строке уже применяется первая только что вычисленная компонента $x_1^{(k+1)}$ нового вектора, в третьей строке — две компоненты $x_1^{(k+1)}$ и $x_2^{(k+1)}$ нового вектора и т. д., в последней строке только последняя n -я компонента берется от старого вектора, а все предыдущие — новые. Но в сходящемся итерационном процессе каждое следующее приближение становится все точнее, поэтому метод Зейделя обычно дает более быструю сходимость, чем метод простой итерации.

Условия сходимости для метода Зейделя те же, что и для метода простой итерации.

Во времена ЭВМ первых поколений, в которых оперативная память в лучшем случае измерялась килобайтами, как важное достоинство метода Зейделя расценивалось экономное расходование памяти: при вычислении $x_i^{(k+1)}$ нет нужды хранить значения $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, ..., $x_{i-1}^{(k)}$ и соответствующие ячейки памяти можно очистить.

Пример. Преобразовать систему

$$\begin{cases} 4.5x_1 - 1.8x_2 + 3.6x_3 = -1.7, & \text{(I)} \\ 3.1x_1 + 2.3x_2 - 1.2x_3 = 3.6, & \text{(II)} \\ 1.8x_1 + 2.5x_2 + 4.6x_3 = 2.2. & \text{(III)} \end{cases}$$

к виду, удобному для итераций, так, чтобы итерационный процесс Зейделя сходил.

Решение. Элементарными преобразованиями строк приведем систему к виду, удобному для итераций. Поскольку условия сходимости метода Зейделя такие же, как в методе простой итерации, должно выполняться условие $\|C\| < 1$. Норму матрицы C определим, например, как $\|C\|_\infty$ (построчная сумма модулей элементов матрицы C).

$$\begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9, & \text{(I + II)} \\ 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7, & \text{(II + 2 \cdot III - I)} \\ -1.3x_1 + 0.2x_2 + 5.8x_3 = -1.4. & \text{(III - II)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = 2.4x_1 - 0.5x_2 - 2.4x_3 + 1.9, \\ 10x_2 = -2.2x_1 + 0.9x_2 - 4.4x_3 + 9.7, \\ 10x_3 = 1.3x_1 - 0.2x_2 + 4.2x_3 - 1.4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.24x_1 - 0.05x_2 - 0.24x_3 + 0.19, \\ x_2 = -0.22x_1 + 0.09x_2 - 0.44x_3 + 0.97, \\ x_3 = 0.13x_1 - 0.02x_2 + 0.42x_3 - 0.14. \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^4 |c_{1j}| = |c_{11}| + |c_{12}| + |c_{13}| + |c_{14}| = 0.24 + 0.05 + 0.24 = 0.53,$$

$$\sum_{j=1}^4 |c_{2j}| = 0.75, \quad \sum_{j=1}^4 |c_{3j}| = 0.57,$$

$$\|C\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |c_{ij}| = \max\{0.53; 0.75; 0.57\} = 0.75 = q < 1.$$

Итак, обеспечена сходимость (правда, не очень быстрая) итерационного процесса Зейделя.

Задания к лабораторной работе № 46

Решение систем линейных уравнений методом Зейделя

Варианты заданий

Преобразовав систему линейных уравнений к виду, удобному для итераций, решить ее методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Для проверки сравнить полученный ответ с результатом применения функции Find в Mathcad (прил. 2).

$$1. \quad \begin{cases} 3.2x_1 - 11.5x_2 + 3.8x_3 = 2.8, \\ 0.8x_1 + 1.3x_2 - 6.4x_3 = -6.5, \\ 2.4x_1 + 7.2x_2 - 1.2x_3 = 4.5. \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 2.4x_1 + 3.7x_2 - 8.3x_3 = 2.3, \\ 1.8x_1 + 4.3x_2 + 1.2x_3 = -1.2, \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 5.2x_3 = 3.5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5.4x_1 - 2.4x_2 + 3.8x_3 = 5.5, \\ 2.5x_1 + 6.8x_2 - 1.1x_3 = 4.3, \\ 2.7x_1 - 0.6x_2 + 1.5x_3 = -3.5. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2.4x_1 + 2.5x_2 - 2.9x_3 = 4.5, \\ 0.8x_1 + 3.5x_2 - 1.4x_3 = 3.2, \\ 1.5x_1 - 2.3x_2 + 8.6x_3 = -5.5. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 0.9x_1 + 2.7x_2 - 3.8x_3 = 2.4, \\ 2.5x_1 + 5.8x_2 - 0.5x_3 = 3.5, \\ 4.5x_1 - 2.1x_2 + 3.2x_3 = -1.2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 1.5x_1 + 2.3x_2 - 3.7x_3 = 4.5, \\ 2.8x_1 + 3.4x_2 + 5.8x_3 = -3.2, \\ 1.2x_1 + 7.3x_2 - 2.3x_3 = 5.6. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 6.3x_1 + 5.2x_2 - 0.6x_3 = 1.5, \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = 2.7, \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3.7x_1 - 2.3x_2 + 4.5x_3 = 2.4, \\ 2.5x_1 + 4.7x_2 - 7.8x_3 = 3.5, \\ 1.6x_1 + 5.3x_2 + 1.3x_3 = -2.4. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 4.1x_1 + 5.2x_2 - 5.8x_3 = 7.1, \\ 3.8x_1 - 3.1x_2 + 4.1x_3 = 5.3, \\ 7.8x_1 + 5.3x_2 - 6.3x_3 = 5.8. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3.7x_1 + 3.1x_2 + 4.1x_3 = 5.1, \\ 3.9x_1 + 4.5x_2 - 4.8x_3 = 4.9, \\ -2.1x_1 - 3.7x_2 + 1.8x_3 = 2.7. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 7.1x_1 + 6.8x_2 + 6.1x_3 = 7.1, \\ 5.1x_1 + 4.8x_2 + 5.3x_3 = 6.1, \\ 8.2x_1 + 7.8x_2 + 7.1x_3 = 5.8. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3.3x_1 + 3.7x_2 + 4.2x_3 = 5.8, \\ 2.7x_1 + 2.3x_2 - 2.9x_3 = 6.1, \\ 4.1x_1 + 4.8x_2 - 5.1x_3 = 6.9. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2.8x_1 + 3.8x_2 - 3.2x_3 = 4.5, \\ 2.5x_1 - 2.8x_2 + 3.3x_3 = 7.1, \\ 6.5x_1 - 7.3x_2 + 4.8x_3 = 6.3. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 1.7x_1 - 2.2x_2 + 2.9x_3 = 1.9, \\ 2.1x_1 + 1.9x_2 - 2.3x_3 = 2.8, \\ 4.2x_1 + 3.9x_2 - 3.1x_3 = 5.1. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 3.8x_1 + 4.2x_2 - 2.3x_3 = 4.8, \\ -2.1x_1 + 4.1x_2 - 6.1x_3 = 3.3, \\ 1.8x_1 + 1.2x_2 - 2.2x_3 = 5.8. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 7.7x_1 + 5.2x_2 + 4.9x_3 = 1.8, \\ 3.1x_1 + 1.2x_2 + 1.8x_3 = 2.3, \\ 4.5x_1 + 3.2x_2 + 2.8x_3 = 3.4. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 5.4x_1 - 6.2x_2 - 0.5x_3 = 0.6, \\ 3.4x_1 + 2.3x_2 + 0.8x_3 = -0.8, \\ 2.4x_1 - 1.1x_2 + 3.8x_3 = 1.8. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3.8x_1 + 6.7x_2 - 1.2x_3 = 5.2, \\ 6.4x_1 + 1.3x_2 - 2.7x_3 = 3.8, \\ 2.4x_1 - 4.5x_2 + 3.5x_3 = -0.8. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 4.4x_1 - 3.5x_2 + 7.4x_3 = 2.5, \\ 3.1x_1 - 0.6x_2 - 2.3x_3 = -1.5, \\ 0.8x_1 + 7.4x_2 - 0.5x_3 = 6.4. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2.8x_1 + 0.9x_2 - 1.5x_3 = 3.5, \\ 4.4x_1 - 2.8x_2 + 6.7x_3 = 2.6, \\ 5.1x_1 + 3.7x_2 - 1.4x_3 = -0.6. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 5.6x_1 + 2.7x_2 - 1.7x_3 = 1.9, \\ 3.4x_1 - 3.6x_2 - 6.6x_3 = -2.4, \\ 0.8x_1 + 1.3x_2 + 3.7x_3 = 1.2. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 3.6x_1 + 1.8x_2 - 4.7x_3 = 3.8, \\ 2.7x_1 - 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4, \\ 1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = -1.6. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 5.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = -3.5, \\ 4.2x_1 + 1.7x_2 - 2.3x_3 = 2.7, \\ 3.4x_1 + 2.4x_2 + 7.3x_3 = 1.9. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3.2x_1 - 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5, \\ 0.4x_1 + 0.6x_2 + 1.7x_3 = -0.4, \\ 1.6x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 = 4.2. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 7.6x_1 + 5.8x_2 + 4.7x_3 = 10.1, \\ 3.8x_1 + 4.2x_2 + 2.5x_3 = 9.7, \\ 2.9x_1 + 2.2x_2 + 3.8x_3 = 7.4. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 3.3x_1 + 2.1x_2 + 2.9x_3 = 0.8, \\ 4.1x_1 + 3.7x_2 + 4.8x_3 = 5.3, \\ 2.5x_1 + 1.9x_2 + 1.1x_3 = 3.2. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 9.1x_1 + 5.6x_2 + 7.8x_3 = 9.8, \\ 3.8x_1 + 5.1x_2 + 2.8x_3 = 6.3, \\ 4.1x_1 + 5.7x_2 + 1.2x_3 = 5.8. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.3, \\ 1.9x_1 + 3.2x_2 + 2.1x_3 = 2.2, \\ 7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.4. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 1.7x_1 + 2.9x_2 + 1.8x_3 = 0.8, \\ 2.1x_1 + 3.3x_2 + 1.9x_3 = 1.3, \\ 4.2x_1 - 1.7x_2 + 1.3x_3 = 2.8. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1, \\ 3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7, \\ 4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.8x_3 = 0.8. \end{cases}$$

Нелинейные системы

Решение систем нелинейных и (или) трансцендентных уравнений является гораздо более сложной задачей, чем решение линейных систем. Наибольшую трудность представляет этап отделения корней. Для системы с двумя неизвестными можно использовать геометрические построения, но для системы с $n > 2$ неизвестными такой подход становится неприменимым.

Описанные ниже итерационные методы уточнения корней основаны на том, что задача отделения корней уже решена и имеется достаточно малая область изоляции, в которой находится подлежащий уточнению корень.

Для простоты анализа будем рассматривать нелинейную систему из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Предположим, что начальные приближения корней $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ в области изоляции получены.

Преобразуем систему (55) к виду, удобному для итераций,

$$\begin{cases} x = F_1(x, y), \\ y = F_2(x, y). \end{cases} \quad (56)$$

Подставляя в правые части уравнений (56) вместо x , y начальные приближения, получим первые приближения к корням

$$\begin{cases} x^{(1)} = F_1(x^{(0)}, y^{(0)}), \\ y^{(1)} = F_2(x^{(0)}, y^{(0)}). \end{cases}$$

Аналогично первым вычисляются вторые приближения

$$\begin{cases} x^{(2)} = F_1(x^{(1)}, y^{(1)}), \\ y^{(2)} = F_2(x^{(1)}, y^{(1)}) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = F_1(x^{(k)}, y^{(k)}), \\ y^{(k+1)} = F_2(x^{(k)}, y^{(k)}) \end{cases} -$$

метод простой итерации или

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = F_1(x^{(k)}, y^{(k)}), \\ y^{(k+1)} = F_2(x^{(k+1)}, y^{(k)}) \end{cases} -$$

метод Зейделя.

Возникают последовательности приближений

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots \quad (57)$$

и

$$y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}, \dots \quad (58)$$

Сходятся ли эти последовательности? Для ответа на этот вопрос перейдем к векторно-матричной форме записи, подобно тому, как это делалось при решении линейных систем (44). Введем вектор неизвестных

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

и вектор-функцию

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{X}) \\ F_2(\mathbf{X}) \end{pmatrix}.$$

Система (56) примет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}).$$

Введем матрицу Якоби (1804–1851) $\mathbf{F}'(\mathbf{X})$, составленную из частных производных по аргументам,

$$\mathbf{F}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Теорема о сходимости итерационного процесса. Пусть в некоторой окрестности решения $\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ системы (56) функции

$F_1(x)$, $F_2(x)$ дифференцируемы и выполнено условие

$$\|\mathbf{F}'(\mathbf{X})\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial y} \end{pmatrix} \right\| \leq q < 1, \quad (59)$$

где q (коэффициент сжатия) — постоянная. Тогда независимо от выбора начального приближения $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix}$ из данной окрестности:

- 1) итерационные последовательности (57), (58) не выходят из этой окрестности и сходятся соответственно к \bar{x} и \bar{y} — решению системы;
- 2) справедлива оценка абсолютной погрешности k -го приближения

$$\Delta = \|\mathbf{X}^{(k)} - \bar{\mathbf{X}}\| \leq \frac{q}{1-q} \|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^{(k-1)}\|, \quad (60)$$

которая используется в критерии достижения требуемой точности: как только оценка (60) становится меньше ε — требуемой точности, итерации можно прекратить.

Замечания. 1. Условие (59) означает, что в окрестности решения производные $\partial F_i / \partial x_j$ малы для всех i, j . Таким образом, исходную систему (55) надо преобразовать к такому виду (56), чтобы функции $F_i(x)$ слабо менялись при изменении аргументов. Общих рецептов как этого добиться не существует.

2. В зависимости от используемой нормы векторов (47) и матриц (49) можно конкретизировать (60) и сформулировать следующие наиболее часто используемые критерии обрыва счета.

Норма $\|\cdot\|_1$

Пусть в окрестности решения системы (56) выполнены равенства

$$\left| \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial x} \right| \leq q_1 < 1, \quad (61a)$$

$$\left| \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial y} \right| \leq q_2 < 1. \quad (61б)$$

Обозначим $Q = \max\{q_1, q_2\}$.

Как только окажется, что

$$\frac{Q}{1-Q} \left(\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| + \left| y^{(k)} - y^{(k-1)} \right| \right) < \varepsilon,$$

итерации можно прервать, поскольку требуемая точность достигнута.

Норма $\|\cdot\|_\infty$

Пусть в окрестности решения системы (56) выполнены равенства

$$\left| \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial y} \right| \leq \tilde{q}_1 < 1, \quad (62a)$$

$$\left| \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial y} \right| \leq \tilde{q}_2 < 1. \quad (62б)$$

Обозначим $\tilde{Q} = \max\{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2\}$.

Как только окажется, что

$$\frac{\tilde{Q}}{1-\tilde{Q}} \max\{|x^{(k)} - x^{(k-1)}|, |y^{(k)} - y^{(k-1)}|\} < \varepsilon,$$

итерации можно прервать, поскольку требуемая точность достигнута.

Пример. Решить методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ систему

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= x + 3 \lg x - y^2 = 0, \\ f_2(x, y) &= 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Решение. Найдем местоположение решений графическим способом. В обоих уравнениях выразим y

$$y = \pm \sqrt{x + 3 \lg x}, \quad y = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x},$$

построим кривые и найдем точки их пересечения (рис. 16). Таких точек две — $A(1.4; -1.4)$ и $B(3.4; 2.2)$.

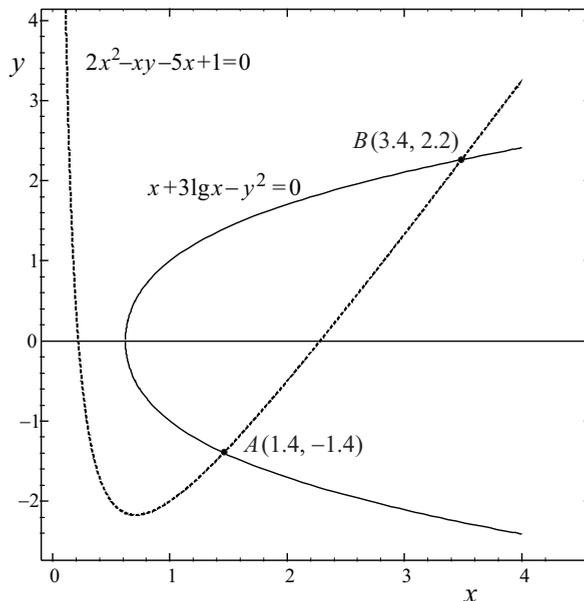


Рис. 16. Отделение корней системы (63) графическим способом (кривые пересекаются в двух точках — A и B)

Рассмотрим вторую из этих точек и уточним значения \bar{x} , \bar{y} методом Зейделя. Систему (63) надо привести к виду (56), удобному для итераций. Это можно сделать по-разному.

Первая попытка:

$$x = y^2 - 3 \lg x, \quad y = 2x + 1/x - 5. \quad (64)$$

Введем функции

$$F_1(x, y) = y^2 - 3 \lg x, \quad F_2(x, y) = 2x + 1/x - 5.$$

Их частные производные —

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{3}{x \ln 10}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2 - \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0.$$

Будем руководствоваться нормой $\|\cdot\|_1$ и проверим выполнение условий (61а), (61б). В окрестности точки $B(3.4; 2.2)$

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_2}{\partial x} \right| > 1, \quad \left| \frac{\partial F_1}{\partial y} \right| > 4.$$

Условия сходимости итерационного процесса не выполнены. По норме $\|\cdot\|_\infty$ (62а), (62б) ситуация не лучше (проверьте самостоятельно). Использовать систему (64) для уточнения корней нельзя.

Вторая попытка. Выразим теперь x из второго уравнения системы (63), а y — из первого

$$x = \sqrt{\frac{x(5+y)-1}{2}}; \quad y = \sqrt{x+3 \lg x}$$

(знаки перед радикалами поставлены с учетом расположения точки B в I координатной четверти (рис. 16)).

Введем функции

$$F_3(x, y) = \sqrt{\frac{x(5+y)-1}{2}}; \quad F_4(x, y) = \sqrt{x+3 \lg x}$$

и найдем их частные производные

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{5+y}{2\sqrt{x(5+y)-1}}; \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{2\sqrt{x(5+y)-1}};$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial x} = \frac{1 + \frac{3}{x \ln 10}}{2\sqrt{x+3 \lg x}}; \quad \frac{\partial F_4}{\partial y} = 0.$$

В качестве области изоляции корня, судя по рис. 16, можно взять прямоугольник $3 < x < 4$, $2 < y < 2.5$. Применяя норму $\|\cdot\|_\infty$, проверим выполнение условий (62а), (62б). Для этого вычислим значения сумм частных производных в вершинах¹⁶ прямоугольника изоляции и найдем максимальные значения этих сумм

$$\left| \frac{\partial F_3}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_3}{\partial y} \right| \leq 0.92 = \tilde{q}_1 < 1, \quad \left| \frac{\partial F_4}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial F_4}{\partial y} \right| \leq 0.34 = \tilde{q}_2 < 1.$$

Итак, $\tilde{Q} = \max\{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2\} = 0.92 < 1$. Условие сходимости итерационного процесса выполнено. Правда, скорость сходимости будет невелика, поскольку коэффициент сжатия близок к единице (ниже рассматривается вопрос о том, как ускорить сходимость итерационного процесса).

По норме $\|\cdot\|_1$ (61а), (61б) ситуация аналогична описанной (проверьте самостоятельно).

Таким образом, можно начинать вычисления по методу Зейделя.

1. В качестве начального приближения выберем приблизительный центр прямоугольника изоляции

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 2.2 \end{pmatrix}.$$

2. Итерационный процесс имеет вид

$$x^{(k+1)} = \sqrt{\frac{x^{(k)}(5 + y^{(k)}) - 1}{2}}; \quad y^{(k+1)} = \sqrt{x^{(k+1)} + 3 \lg x^{(k+1)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3. Критерий обрыва счета таков: как только абсолютная погрешность Δ , оцениваемая по максимуму выражением

¹⁶ Вероятнее всего, что максимальное значение достигается в какой-нибудь (неизвестной) внутренней точке прямоугольника, но поиск ее сложен, а ошибка в определении максимума будет невелика в силу непрерывности рассматриваемых функций в этом (малом) прямоугольнике.

$$\frac{\tilde{Q}}{1-\tilde{Q}} \max\{|x^{(k)} - x^{(k-1)}|, |y^{(k)} - y^{(k-1)}|\} =$$

$$\frac{0.92}{1-0.92} \max\{|x^{(k)} - x^{(k-1)}|, |y^{(k)} - y^{(k-1)}|\},$$

станет меньше требуемой точности $\varepsilon = 10^{-2}$, итерации можно завершить.

Начало расчетов:

$$x^{(1)} = \sqrt{\frac{x^{(0)}(5 + y^{(0)}) - 1}{2}} = \sqrt{\frac{3.4 \cdot (5 + 2.2) - 1}{2}} = 3.426,$$

$$y^{(1)} = \sqrt{3.426 + 3 \lg 3.426} = 2.243,$$

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.426 \\ 2.243 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3.451 \\ 2.250 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.466 \\ 2.255 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{X}^{(4)} = \begin{pmatrix} 3.475 \\ 2.258 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^{(5)} = \begin{pmatrix} 3.480 \\ 2.259 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X}^{(6)} = \begin{pmatrix} 3.483 \\ 2.260 \end{pmatrix}.$$

Оценим точность, достигнутую после шестой итерации,

$$\frac{0.92}{1-0.92} \max\{|x^{(6)} - x^{(5)}|, |y^{(6)} - y^{(5)}|\} = 11.5 \cdot \max\{0.03, 0.01\} =$$

$$= 0.34 > \varepsilon = 0.01.$$

Видим, что требуемая точность не достигнута (и долго еще не будет достигнута). Ускорение сходимости насущно необходимо...

Заключительные **замечания** к методу итераций для нелинейных систем.

1. Условие сходимости итерационного процесса для линейных систем (50) является естественным следствием соответствующего условия для нелинейных систем (59). В самом деле, если функция линейна

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n,$$

то ее частная производная по данному аргументу равна коэффициенту при данном аргументе

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = c_{ik},$$

т. е. матрица Якоби $F'(X)$ превращается в матрицу C (44).

2. Подобно тому как скорость сходимости итерационного процесса для решения одного уравнения можно повысить введением удачно подобранного параметра λ , для системы уравнений введение нескольких параметров позволяет ускорить сходимость итераций. Рассмотрим для простоты систему из двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

От исходных уравнений перейдем к их линейным комбинациям

$$\left. \begin{aligned} \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) &= 0, \\ \gamma f_1(x, y) + \delta f_2(x, y) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — (пока неизвестные) числа; окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} x &= x + \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = F_1(x, y), \\ y &= y + \gamma f_1(x, y) + \delta f_2(x, y) = F_2(x, y). \end{aligned} \right\}$$

Скорость сходимости итерационного процесса определяется коэффициентом сжатия, который в свою очередь связан с частными производными функций $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$. Вычислим частные производные в точке начального приближения $M_0(x^{(0)}, y^{(0)})$ и приравняем их нулю для обеспечения максимальной скорости сходимости в окрестности M_0 :

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|_{M_0} = 1 + \alpha \frac{\partial f_1(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial x} + \beta \frac{\partial f_2(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial x} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_{M_0} = \alpha \frac{\partial f_1(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} + \beta \frac{\partial f_2(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} = 0.$$

Из этих двух уравнений, линейных по α, β , найдем сами параметры α и β . Аналогично из условий

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial x} \right|_{M_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial F_2}{\partial y} \right|_{M_0} = 0$$

найдем параметры γ и δ .

Рассмотрим пример, иллюстрирующий ускорение сходимости.

Пример. Построить быстроходящийся итерационный процесс для отыскания положительного корня системы

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x^3 - y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

методом простой итерации.

Решение. Графическим способом (рис. 17) находим начальное приближение $x^{(0)} = 0.8$, $y^{(0)} = 0.5$.

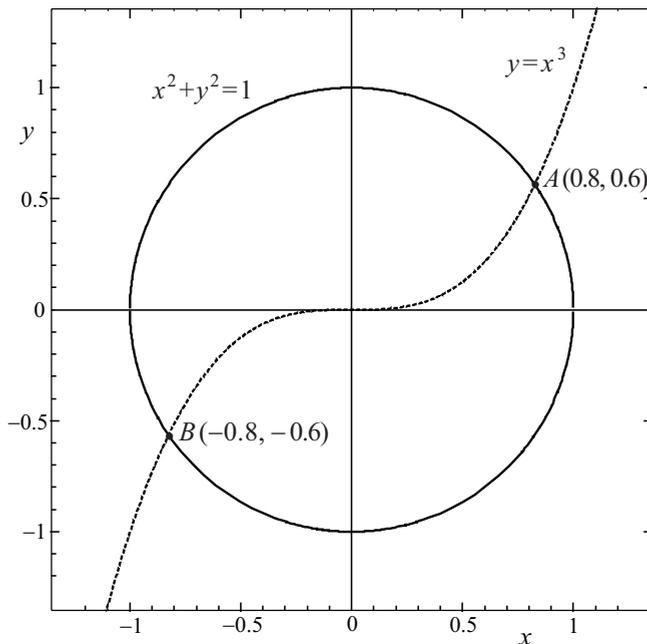


Рис. 17. Пример отделения корней¹⁷

¹⁷ Окружность и кубическая парабола пересекаются в точках $A(0.8, 0.5)$ и $B(-0.8, -0.5)$. Координаты этих точек можно использовать в качестве нулевых приближений при решении системы (65).

Вводим функции с параметрами

$$F_1(x, y) = x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y),$$

$$F_2(x, y) = y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y).$$

Дифференцируем и подставляем точку A :

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|_A = (1 + \alpha \cdot 2x + \beta \cdot 3x^2) \Bigg|_{\substack{x=0.8 \\ y=0.5}} = 1 + 1.6\alpha + 1.92\beta = 0,$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_A = (\alpha \cdot 2y + \beta \cdot (-1)) \Bigg|_{\substack{x=0.8 \\ y=0.5}} = \alpha - \beta = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, находим $\alpha = \beta \approx -0.3$.
Теперь аналогично для $F_2(x, y)$:

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial x} \right|_A = (\gamma \cdot 2x + \delta \cdot 3x^2) \Bigg|_{\substack{x=0.8 \\ y=0.5}} = 1.6\gamma + 1.92\delta = 0,$$

$$\left. \frac{\partial F_2}{\partial y} \right|_A = (1 + \gamma \cdot 2y + \delta \cdot (-1)) \Bigg|_{\substack{x=0.8 \\ y=0.5}} = 1 + \gamma - \delta = 0.$$

Отсюда $\gamma \approx -0.5$, $\delta \approx 0.5$.

Итак,

$$F_1(x, y) = x - 0.3(x^2 + y^2 - 1) - 0.3(x^3 - y),$$

$$F_2(x, y) = y - 0.5(x^2 + y^2 - 1) + 0.5(x^3 - y). \quad (66)$$

Строим итерационный процесс, который будет быстро сходиться:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 0.3 \left((x^{(k)})^2 + (y^{(k)})^2 - 1 \right) - 0.3 \left((x^{(k)})^3 - y^{(k)} \right),$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - 0.5 \left((x^{(k)})^2 + (y^{(k)})^2 - 1 \right) + 0.5 \left((x^{(k)})^3 - y^{(k)} \right).$$

Для контроля точности придется вычислить коэффициент сжатия. Это можно сделать так же, как в предыдущем примере, окружая точку A небольшим прямоугольником изоляции и вычисляя в его вершинах значения частных производных функций $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ (66).

Задания к лабораторной работе № 4в Решение систем нелинейных уравнений

Варианты заданий

Графически отделить корни и решить системы методом простой итерации или методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Для проверки сравнить полученный ответ с результатом применения функции Find в Mathcad (прил. 2).

1. а)
$$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2, \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.4) = x^2, \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0). \end{cases}$$
2. а)
$$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.5, \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1.6x, \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0). \end{cases}$$

$$3. \text{ a) } \begin{cases} \sin x + 2y = 2, \\ x + \cos(y-1) = 0.7. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.1) = x^2, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$4. \text{ a) } \begin{cases} \cos x + y = 1.5, \\ \sin(y-0.5) = 2x-1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) - 1.2x = 0.2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$5. \text{ a) } \begin{cases} \sin(x+0.5) - y = 1, \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.3) = x^2, \\ 0.9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$6. \text{ a) } \begin{cases} \cos(x+0.5) + y = 0.8, \\ \sin y - 2x = 1.6. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) - 1.3x = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$7. \text{ a) } \begin{cases} \sin(x-1) + y = 1.3, \\ x - \sin(y+1) = 0.8. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg} xy = x^2, \\ 0.8x^2 = 1 - 2y^2. \end{cases}$$

8. а)
$$\begin{cases} \cos(x+1) = 2y, \\ x + \sin y = -0.4. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1.5x + 0.1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

9. а)
$$\begin{cases} \cos(x+0.5) - y = 2, \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} xy - x^2 = 0, \\ 0.7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

10. а)
$$\begin{cases} \cos(x+2) - y = 1.5, \\ \cos(y-2) + x = 0.5. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) - 1.2x = 0.1, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

11. а)
$$\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1.2, \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.2) = x^2, \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

12. а)
$$\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0.5, \\ \cos x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) - 1.5x = -0.1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

13. а)
$$\begin{cases} \sin y + 2x = 2, \\ y + \cos(x-1) = 0.7. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.4) = x^2, \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

14. а)
$$\begin{cases} x + \cos y = 1.5, \\ 2y - \sin(x-0.5) = 1. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) - 1.2x = -0.1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

15. а)
$$\begin{cases} \sin(y+0.5) - x = 1, \\ y + \cos(x-2) = 0. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.1) = x^2, \\ 0.9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

16. а)
$$\begin{cases} x + \cos(y+0.5) = 0.8, \\ 2y - \sin x = -1.6. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1.4x, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

17. а)
$$\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1.3, \\ y - \sin(x+1) = 0.8. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.1) = x^2, \\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

18. а)
$$\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0, \\ y + \sin x = -0.4. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1.1x - 0.1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

19. а)
$$\begin{cases} \cos(y+0.5) - x = 2, \\ \sin x - 2y = 1. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x-y) = xy, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

20. а)
$$\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1.5, \\ y + \cos(x-2) = 0.5. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x-y) - xy = -1, \\ x^2 - y^2 = 3/4. \end{cases}$$

21. а)
$$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1, \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.2) = x^2, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

22. а)
$$\begin{cases} y + \cos(x-1) = 0.8, \\ x - \cos y = 2. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1.5x, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$23. \text{ a) } \begin{cases} \sin x + 2y = 1.6, \\ x + \cos(y-1) = 1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg} xy - x^2 = 0, \\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$24. \text{ a) } \begin{cases} y + \cos x = 1.2, \\ 2x - \sin(y-0.5) = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) + 0.2 = 1.2x, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$25. \text{ a) } \begin{cases} \sin(x+0.5) - y = 1.2, \\ x + \cos(y-2) = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.1) - x^2 = 0, \\ 0.7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

$$26. \text{ a) } \begin{cases} \cos(x+1/2) + y = 1, \\ \sin y - 2x = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(x+y) - 1.5x = 0.2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$27. \text{ a) } \begin{cases} \sin(x-1) + y = 1.5, \\ x - \sin(y+1) = 1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg} xy - x^2 = 0, \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

28. а)
$$\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1, \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1.2x, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

29. а)
$$\begin{cases} x + \cos(y-1) = 0.8, \\ y - \cos x - 2 = 0. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.3) - x^2 = 0, \\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

30. а)
$$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 1, \\ \sin y + 2x = 1.6. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sin(x+y) - 1.1x = 0.1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Глава 7. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Напомним некоторые нужные для дальнейшего понятия. **Решением** дифференциального уравнения (ДУ) I порядка $y' = f(x, y)$, разрешенного относительно производной, называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Задача Коши

$$\left. \begin{array}{l} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right\} \quad (67)$$

состоит в нахождении частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$. Геометрический смысл задачи Коши: найти такую интегральную кривую (график решения), которая проходит через заданную начальную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Аналитическое решение задачи Коши (или решение в квадратурах) заключается в получении частного решения путем выполнения конечного числа операций дифференцирования, интегрирования и арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление). К сожалению, круг задач, решаемых в квадратурах, крайне узок, поэтому актуальна задача приближенного, численного интегрирования ДУ.

Решить задачу Коши численно — значит для заданной последовательности значений аргумента (узлов) x_0, x_1, \dots, x_n и числа y_0 (значение искомой функции в начальном узле x_0), не находя самого решения $y = \varphi(x)$, приближенно вычислить значения y_1, y_2, \dots, y_n этого решения в остальных узлах. Численное решение задачи Коши позво-

ляет вместо отыскания точного решения $y = \varphi(x)$ в виде формулы получить таблицу значений

x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$\varphi(x_i)$	$y_0 = \varphi(x_0)$	y_1	y_2	...	y_n

этой функции¹⁸. Рассмотрим некоторые способы численного интегрирования ДУ.

Метод ломаных Эйлера

Метод (ломаных) Эйлера (1707–1783) основан на кусочной замене искомой функции полиномом первой степени, т. е. на линейной интерполяции. Впрочем, точнее было бы говорить о линейной экстраполяции, т. к. речь идет о нахождении значений функции $y = \varphi(x)$ в соседних узлах, а не между узлами.

Выбрав малый шаг h , построим систему равноотстоящих узлов x_0, x_1, x_2, \dots , где $x_k = x_0 + kh$ (рис. 18).

В начальной точке $M_0(x_0, y_0)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $k_0 = y'(x_0)$ ($= f(x_0, y_0)$) в силу дифференциального уравнения (67). Эта прямая является касательной к (неизвестной) интегральной кривой — графику искомого решения $y = \varphi(x)$ задачи Коши. Уравнение касательной

$$y - y_0 = k_0(x - x_0) \text{ или } y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0).$$

В качестве приближенного решения задачи Коши (67) в узле x_1 примем ординату y_1 точки пересечения касательной с вертикальной прямой $x = x_1$:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h.$$

Через точку $M_1(x_1, y_1)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $k_1 = y'(x_1)$ ($= f(x_1, y_1)$) в силу ДУ (67). Ее уравнение

$$y = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1). \quad (68)$$

¹⁸ Потом можно получить и приближенное задание функции формулой, например, аппроксимировав ее полиномом Лагранжа.

Эта прямая уже не является касательной к интегральной кривой $y = \varphi(x)$, т.к. точка $M_1(x_1, y_1)$ фиктивная, она не лежит на интегральной кривой. Пересечение прямой (68) с вертикалью $x = x_2$ — точка M_2 — имеет ординату $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1) = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h$.

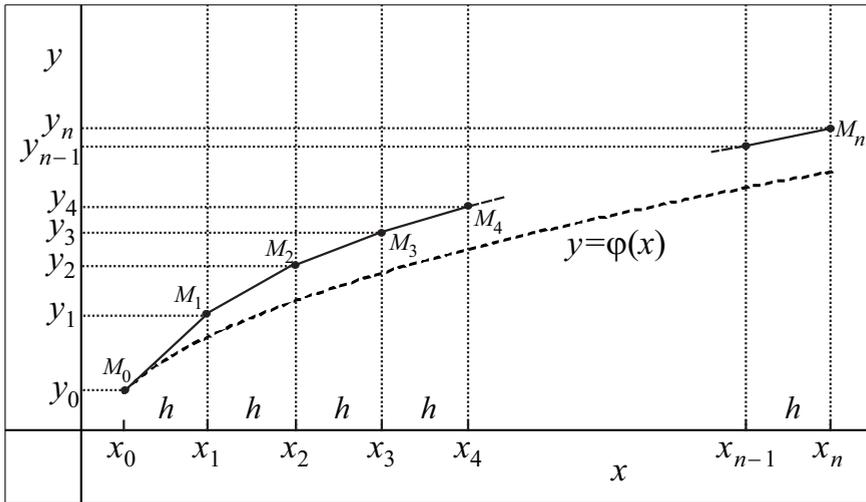


Рис. 18. Графическая иллюстрация метода Эйлера¹⁹

Через точку $M_2(x_2, y_2)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $k_2 = y'(x_2) = f(x_2, y_2)$ до пересечения с вертикалью $x = x_3$. Ордината точки пересечения $y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) \cdot h$. Точка $M_3(x_3, y_3)$ находится дальше по вертикали от интегральной кривой $y = \varphi(x)$, чем M_2 (см. рис. 18). Погрешность метода с каждым следующим шагом увеличивается.

Таким образом получаем ломаную Эйлера, составленную из отрезков прямых,

$$y = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ордината каждой последующей угловой точки ломаной

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k). \quad (69)$$

¹⁹ Ломаная Эйлера (сплошная линия) приближенно представляет гипотетический график решения задачи Коши (штриховая линия). Последний график неизвестен, поскольку задача Коши не решена в квадратурах. Обе линии исходят из начальной точки $M_0(x_0, y_0)$; расхождение между ними постепенно возрастает.

Метод ломаных Эйлера груб и дает удовлетворительную точность лишь при малом шаге h . Действительно, разложим точное решение ДУ $y' = f(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности узла x_k :

$$\begin{aligned} y(x_k + h) &= y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k) \cdot h + O(h^2) = \\ &= y(x_k) + f(x_k, y_k) \cdot h + O(h^2). \end{aligned}$$

Сравнивая эту формулу с формулой (69), получаем, что погрешность последней того же порядка малости, что и h^2 .

Пример. Решить задачу Коши

$$\left. \begin{aligned} y' &= -y, \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

с шагом $h = 0,2$ на отрезке $[0, 1]$ методом Эйлера; сравнить приближенное решение с точным.

Решение. Начнем с решения в квадратурах. Дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{dy}{dx} = -y$$

является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим их

$$\frac{dy}{y} = -dx,$$

проинтегрируем

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx; \quad \ln|y| = -x + C; \quad y = e^{C-x}.$$

Общее решение ДУ найдено. Накладываем на него начальное условие

$$y(0) = e^{C-0} = 1; \quad C = 0.$$

Итак, частное решение ДУ (решение задачи Коши) $y = e^{-x}$.

Теперь применим приближенный метод Эйлера. В обозначениях выражения (67)

$$f(x, y) = -y, \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1.$$

В таком случае в силу формулы (69),

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = y_k + 0.2 \cdot f(x_k, y_k) = y_k - 0.2y_k = 0.8y_k, \\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Составим сопоставительную таблицу значений y_k приближенного решения по Эйлера и значений точного решения $y_k^* = e^{-x_k}$:

k	0	1	2	3	4	5
$x_k = x_0 + hk$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8	0.64	0.512	0.4096	0.32768
y_k^*	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679

Грубое согласие между точными и приближенными результатами есть, но оно постепенно ухудшается.

Выводы по методу Эйлера следующие.

1. Расчетные формулы метода Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \text{ где } \Delta y_k = h \cdot f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2. Метод Эйлера — представитель одношаговых приближенных методов, в которых решение в $(k+1)$ -м узле получается на основе решения только в одном предыдущем k -м узле. Тем самым информация о более ранних уже вычисленных значениях игнорируется. «Расточительный» подход к получаемым результатам оборачивается повышенным объемом вычислений. Одношаговые методы не самые экономичные в этом смысле.

3. Как и в любом одношаговом методе, начиная со второго шага исходное значение y_k в формуле $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$ само является приближенным, т. е. погрешность на каждом последующем шаге систематически возрастает.

4. Оценка погрешности метода затруднительна. Часто пользуются эмпирическим правилом двойного пересчета (половинного шага): дважды проходят заданный отрезок интегрирования ДУ с шагами h и $h/2$. Совпадение соответствующих десятичных знаков в полученных результатах дает основание считать эти знаки верными.

5. Уменьшение h повышает точность вычислений, но резко увеличивает их объем. В целом метод ломаных Эйлера применим только для грубой прикидки.

Метод последовательного дифференцирования

К методу Эйлера можно прийти и без геометрических построений. Разложим искомое решение задачи Коши

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$

в ряд Тейлора в окрестности начальной точки x_0

$$y(x) = \underbrace{y(x_0)}_{=y_0 \text{ (н.у.)}} + \underbrace{y'(x_0)}_{=f(x_0, y_0) \text{ в силу ДУ}} \cdot (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \quad (70)$$

Ограничиваясь в разложении первыми двумя (линейными по x) слагаемыми и полагая $x = x_1$, снова получим формулу (69) метода Эйлера

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Учтем теперь еще одно квадратичное по x слагаемое в формуле (70). Для этого потребуется вычислить $y''(x_0)$. Продифференцируем по x обе части ДУ $y' = f(x, y)$:

$$(y')' = y''(x) = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=f(x, y) \text{ в силу ДУ}} = f'_x + f'_y \cdot f.$$

Полагая в выражении (70) $x = x_1$, получим во втором порядке разложения

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left[f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot f(x, y) \right] \Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot h^2.$$

Первые два слагаемых в правой части соответствуют методу Эйлера, а третье — поправка к нему. Для произвольного узла

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) + \frac{1}{2} \left[f'_x + f'_y \cdot f \right] \Bigg|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} \cdot h^2. \quad (71)$$

Удерживая в ряду Тейлора (70) больше слагаемых, можно было бы получить сколь угодно точные формулы приближенного решения задачи Коши.

В этом состоит метод последовательного дифференцирования, который еще называют методом разложения решения в степенной ряд.

Неудобство разложения решения ДУ в степенной ряд связано с тем, что в расчетные формулы, наряду с $f(x, y)$, входят ее частные производные. В выведенную формулу (71), включающую слагаемые до h^2 включительно, входят f'_x, f'_y ; в формулу с h^3 войдут вторые частные производные, и т. д. Но вычисление частных производных трудно автоматизировать — это задача не для стандартно применяемых языков программирования²⁰. Поэтому частные производные пришлось бы искать вручную и конструировать с их помощью громоздких формул.

Альтернативой методу последовательного дифференцирования является метод Рунге — Кутты, лишенный отмеченного недостатка.

Метод Рунге — Кутты

Идея, предложенная Рунге (1856—1927) и Куттой (1867—1944), заключается в том, чтобы при численном решении задачи Коши (67) не использовать в расчетных формулах частные производные функции $f(x, y)$; использовать только ее саму, зато вычислять на каждом шаге ее значения в нескольких точках²¹.

Проиллюстрируем это на примере одного из возможных методов Рунге — Кутты II порядка. Из определения производной

$$y'(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_k)}{\Delta x} = \lim_{x_{k+1} \rightarrow x_k} \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}. \quad (72)$$

В финальное выражение входят значения функции y в двух точках, а производной уже нет. Подставим это приближенное выражение для производной в решаемое ДУ $y' = f(x, y)$, беря значение правой части в k -м узле

²⁰ Разве что для языков сверхвысокого уровня — Mathematica, Maple, Matlab.

²¹ В сущности эта же идея применялась нами в методах хорд и секущих численного решения уравнений — см. формулу (37).

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k).$$

Отсюда $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$, и мы снова получили метод Эйлера (69)! Но поскольку для аппроксимации производной y' взяты две точки, то и для правой части ДУ $f(x, y)$ уместно привлечь две точки:

$$\frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]. \quad (73)$$

Совмещая выражения (72) и (73)

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})],$$

после преобразования получим

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]. \quad (74)$$

Искомой величиной в уравнении (74) является y_{k+1} , входящей в обе части уравнения. Решать это уравнение можно методом итераций, беря в качестве начального приближения то значение $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$, которое получается в методе Эйлера. Тогда

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left[f(x_k, y_k) + f \left(x_k + h, \underbrace{y_k + h \cdot f(x_k, y_k)}_{\text{Эйлер}} \right) \right] \quad (75)$$

или, для придания этой формуле стандартного вида,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad (76)$$

где

$$r_1 = h \cdot f(x_k, y_k), \quad (77)$$

$$r_2 = h \cdot f(x_k + h, y_k + r_1). \quad (78)$$

Формулы (76)–(78) представляют метод Рунге – Кутты II порядка²². Применяют их в такой последовательности: сначала находят r_1 (77), его подставляют в r_2 (78); в заключение вычисляют y_{k+1} (76).

²² Формально порядок метода можно связать с количеством величин r_i , или, что то же, с количеством точек, в которых вычисляется значение функции $f(x, y)$.

Покажем, что эти формулы с точностью до h^2 включительно согласуются с формулой (71), полученной другим способом. Для этого выражение $f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k))$, входящее в формулу (75), разложим в ряд по степеням h до линейных слагаемых включительно²³:

$$\begin{aligned} f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k)) &\approx \\ &\approx f(x_k, y_k) + f'_x(x_k, y_k) \cdot h + f'_y(x_k, y_k) \cdot h f(x_k, y_k). \end{aligned}$$

Подставим преобразованное выражение в формулу (75), откуда оно было извлечено:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &\approx y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k) + \\ &+ \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f'_x(x_k, y_k) \cdot h + f'_y(x_k, y_k) \cdot h f(x_k, y_k)] = \\ &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} [f'_x(x_k, y_k) + f'_y(x_k, y_k) \cdot f(x_k, y_k)]. \end{aligned}$$

Это точно совпадает с формулой (71), выведенной методом последовательного дифференцирования. Однако формулы (76)–(78) не требуют вычисления частных производных, поэтому они удобнее.

Подробно ознакомившись с методом Рунге–Кутты II порядка, заметим, что чаще используются родственные более точные (но и более громоздкие) методы Рунге – Кутты высших порядков.

Один из самых известных — метод Рунге–Кутты IV порядка, часто без уточнений называемый просто методом Рунге – Кутты,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4), \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= h \cdot f(x_k, y_k), \\ r_2 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{r_1}{2}\right), \end{aligned}$$

²³ Вспомним, что ряд Тейлора для функции двух переменных имеет вид $f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \dots$

$$r_3 = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{r_2}{2}\right),$$

$$r_4 = h \cdot f(x_k + h, y_k + r_3),$$

причем сначала последовательно вычисляются r_1, r_2, r_3, r_4 , а затем — y_{k+1} (79).

Пример. Решить задачу Коши

$$\left. \begin{aligned} y' &= y(1-x), \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

методом Рунге — Кутты на отрезке $[0; 0.5]$ с шагом $h = 0.05$. Сравнить полученное решение с точным и решением по методу Эйлера.

Решение. Начнем с нахождения точного решения. ДУ относится к уравнениям с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = y(1-x); \quad \frac{dy}{y} = (1-x)dx; \quad \int \frac{dy}{y} = \int (1-x)dx; \quad \ln|y| = x - x^2/2 + \ln C.$$

Итак, общее решение ДУ (80):

$$y(x) = Ce^{x-x^2/2}.$$

Применим начальное условие:

$$y(0) = Ce^0 = 1; \quad C = 1.$$

Итак, получено точное решение $y(x) = e^{x-x^2/2}$ задачи Коши.

Подробно покажем первый (из десяти!) этап приближенного решения методом Рунге — Кутты. Правая часть ДУ $f(x, y) = y(1-x)$; $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Вычислим величины r_i :

$$r_1 = h f(x_0, y_0) = 0.05 \cdot y_0 (1 - x_0) = 0.05 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 0.05;$$

$$r_2 = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{r_1}{2}\right) = 0.05 \left(y_0 + \frac{r_1}{2}\right) \left(1 - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right) =$$

$$0.05 \cdot \left(1 + \frac{0.05}{2}\right) \cdot \left(1 - \left(0 + \frac{0.05}{2}\right)\right) = 0.04997;$$

$$\begin{aligned}
 r_3 &= h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{r_2}{2}\right) = 0.05\left(y_0 + \frac{r_2}{2}\right)\left(1 - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right) = \\
 &= 0.05 \cdot \left(1 + \frac{0.04997}{2}\right) \cdot \left(1 - \left(0 + \frac{0.05}{2}\right)\right) = 0.04997; \\
 r_4 &= h f\left(x_0 + h, y_0 + r_3\right) = 0.05\left(y_0 + r_3\right)\left(1 - \left(x_0 + h\right)\right) = \\
 &= 0.05 \cdot (1 + 0.04997) \cdot (1 - (0 + 0.05)) = 0.04987.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4) = \\
 &= 1 + \frac{1}{6} \cdot (0.05 + 2 \cdot 0.04997 + 2 \cdot 0.04997 + 0.04987) = 1.049958.
 \end{aligned}$$

Сравнение решений, получаемых разными методами, представлено в виде табл. 4.

Таблица 4

Решения, полученные разными методами

x	y		
	Эйлер	Рунге – Кутта IV порядка	точное решение $y = e^{x-x^2/2}$
0	1	1	1
0.05	1.05*	1.049958	1.049958
0.1	1.099875**	1.099659	1.099659
0.15	1.149369	1.148837	1.148837
.....			
0.45	1.423065	1.417295	1.417295
0.5	1.462199	1.454991	1.454991

Примечания: *, ** — все вычисления производятся методом Эйлера.

$$* y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + hy_0(1 - x_0) = 1 + 0.05 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 1.05.$$

$$** y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.05 + 0.05y_1(1 - x_1) = 1.05 + 0.05 \cdot 1.05 \cdot (1 - 0.05) = 1.099875.$$

Отметим превосходное согласие результатов в двух последних столбцах.

Итоги по численному решению ДУ.

1. Метод Рунге – Кутты, сравнимый по точности с методом разложения в степенной ряд, лучше поддается автоматизации на ЭВМ, поскольку не требует вычисления частных производных. Метод Эйлера уступает по точности этим методам.

2. Все рассмотренные методы решения ДУ — метод Эйлера, метод разложения в степенной ряд, метод Рунге – Кутты — являются одноша-

говыми. Напомним, что это означает построение y_{k+1} на основе только y_k с игнорированием более ранних предшествующих результатов.

3. Все одношаговые методы имеют проблемы с оценкой погрешности результатов. На практике применяется эмпирическое правило двойного пересчета (половинного шага).

4. Все одношаговые методы сопряжены с избыточными вычислениями, объем которых можно существенно уменьшить при более рациональном использовании уже полученных результатов.

5. Альтернативой одношаговым являются многошаговые методы интегрирования ДУ — семейство методов Адамса²⁴. В этих методах для вычисления y_{k+1} используется несколько значений приближенного решения на предыдущих шагах: $y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots$. Поскольку к моменту вычисления y_{k+1} они уже найдены, можно избежать многочисленных вычислений значений $f(x, y)$. Но, чтобы метод Адамса мог стартовать, первые значения y_0, y_1, \dots все-таки приходится находить одношаговыми методами. В целом методы Адамса в несколько раз менее трудоемки, чем метод Рунге — Кутты.

Задание к лабораторной работе № 5

Численное решение дифференциальных уравнений

Постановка задачи

Решить аналитически, а также численно, методами Эйлера и Рунге — Кутты IV порядка в диапазоне $x \in [0, 2]$ с шагом $h = 0.2$, задачу Коши

$$\left. \begin{aligned} y' &= (-1)^{n+p+q} \cdot a, b \cdot y + c, d \cdot x^2 + l, m; \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Личные параметры решающего $a, b, c, d, l, m, n, p, q$ определяются следующим образом: ab — количество букв в его фамилии; cd — ко-

²⁴ Адамс Джон — англ. астроном (1819–1892), по неравномерностям движения планеты Уран вычисливший орбиту дотоле неизвестной планеты Нептун. Именно для этих вычислений Адамс и изобрел свой метод.

личество букв в его имени; lm — его возраст; nrq — последние три цифры номера академической группы.

Пример выполнения лабораторной работы

Джон Адамс 19-ти лет, студент группы PhM-561819 Кембриджского университета, используя параметры $ab = 05$, $cd = 04$, $lm = 19$, $nrq = 819$, получает задачу

$$\left. \begin{aligned} y' &= 0.5y + 0.4x^2 + 1.9; \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Дано неоднородное ДУ первого порядка

$$y' - 0.5y = 0.4x^2 + 1.9 \quad (82)$$

со следующими свойствами:

- 1) оно является линейным (искомая функция y и ее производная y' присутствуют только в 1-й степени и друг на друга не умножаются);
- 2) это уравнение с постоянными коэффициентами (имеются в виду коэффициенты при y и y' ; в данном случае -0.5 и 1 соответственно);
- 3) неоднородность в ДУ (слагаемые, не содержащие искомой функции и (или) ее производной; в данном случае $0.4x^2 + 1.9$) является полиномом.

Свойства 1–3 очень ценны, поскольку в этом случае ДУ всегда решается в квадратурах.

Напомним, как это делается.

1. Общее решение y неоднородного линейного ДУ (НЛДУ) равно сумме общего решения \bar{y} соответствующего однородного ДУ (ОЛДУ) и частного решения y^* НЛДУ

$$y = \bar{y} + y^* . \quad (83)$$

Следовательно:

1) на первом этапе отбросим неоднородность и решим ОЛДУ

$$y' - 0.5y = 0 .$$

ОЛДУ с постоянными коэффициентами решается с помощью подстановки Эйлера, а именно: решение отыскивается в экспоненциальном виде $y = Ce^{\lambda x}$, где C — произвольная константа; λ — характеристическое число.

Подставим $y = Ce^{\lambda x}$ и производную $y' = \lambda Ce^{\lambda x}$ в ОЛДУ (83):

$$\lambda Ce^{\lambda x} - 0.5Ce^{\lambda x} = 0.$$

После сокращения на C и экспоненту получим характеристическое уравнение

$$\lambda - 0.5 = 0,$$

из которого находим характеристическое число $\lambda = 0.5$.

Общее решение ОЛДУ получено

$$\bar{y} = Ce^{0.5x};$$

2) найдем частное решение y^* НЛДУ. Поскольку неоднородность $0.4x^2 + 1.9$ является полиномом второй степени, будем искать y^* тоже в виде полинома второй степени, но с неопределенными коэффициентами: $y^* = Kx^2 + Lx + M$, где числа K, L, M подлежат определению. Найдем производную $(y^*)' = 2Kx + L$ и подставим y^* и производную в НЛДУ (82):

$$2Kx + L - 0.5(Kx^2 + Lx + M) = 0.4x^2 + 1.9.$$

В обеих частях равенства — полиномы 2-й степени. Коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа должны быть равны:

$$\begin{array}{l} x^2 \mid -0.5K = 0.4, \\ x^1 \mid 2K - 0.5L = 0, \\ x^0 \mid L - 0.5M = 1.9. \end{array}$$

Решая эту систему, например, с помощью процедуры Find в MathCad, получим

$$K = -0.8, \quad L = -3.2, \quad M = -10.2.$$

Частное решение НЛДУ получено

$$y^* = -0.8x^2 - 3.2x - 10.2.$$

В силу выражения (83) общее решение исходного неоднородного ДУ

$$y = Ce^{0.5x} - 0.8x^2 - 3.2x - 10.2 .$$

2. Накладываем на это решение начальное условие (81) $y(0) = 1$:

$$y(0) = Ce^0 - 10.2 = C - 10.2 = 1; \quad C = 11.2 .$$

Точное (аналитическое) решение задачи Коши получено

$$y = 11.2e^{0.5x} - 0.8x^2 - 3.2x - 10.2 .$$

Численное решение задачи Коши (81) методом Эйлера в MathCad представлено на нижеследующем скриншоте (рис. 19, 20).

Лабораторная работа № 5
Численное решение дифференциальных уравнений

Решаем ДУ первого порядка $y' = f(x, y)$

Вводим правую часть: $f(x, y) := 0.5 \cdot y + 0.4 \cdot x^2 + 1.9$

Определяем начальную точку:

$x_0 := 0$ $y_0 := 1$ Шаг $h := 0.2$

Диапазон изменения индекса точек: $i := 0..10$

Вычисления в методе Эйлера:

$x_{i+1} := x_i + h$
 $y_{i+1} := y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

Таблица значений численного решения ДУ:

x =	
	0
	0.2
	0.4
	0.6
	0.8
	1
	1.2
	1.4
	1.6
	1.8
	2
	2.2

y =	
	0
	1
	1.48
	2.011
	2.605
	3.274
	4.033
	4.896
	5.881
	7.006
	8.292
	9.76
	11.436

Рис. 19. Образец выполнения части лабораторной работы № 5 в MathCad

Аналитическое решение:

$$g(x) := 11.2 \cdot e^{0.5 \cdot x} - 0.8 \cdot x^2 - 3.2 \cdot x - 10.2$$

$$k := 0..10$$

Сопоставительный график аналитического (ромбы) и численного (кружки) решений:

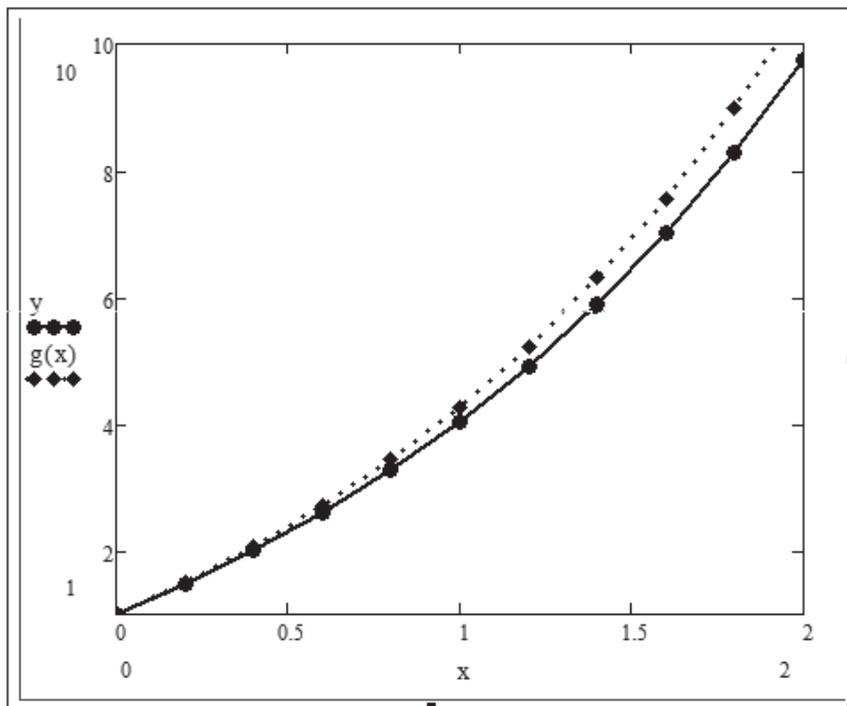


Рис. 20. Продолжение лабораторной работы № 5

Рекомендуемый библиографический список

Лапчик М. П. Численные методы : учеб. пособие для студ. вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер. — М. : Академия, 2005. — 384 с.

Иванов В. М. Численные методы / В. М. Иванов. — Екатеринбург : Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2003. — 114 с.

Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров: учеб. пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. — М. : Высш. шк., 1994. — 544 с.

Тихонов А. Н. Вводные лекции по прикладной математике / А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. — М. : Наука, 1984. — 192 с.

Волков Е. А. Численные методы / Е. А. Волков. — М. : Наука, 1982. — 256 с.

Минькова Р. М. Методы вычислительной математики / Р. М. Минькова, Р. А. Вайсбурд. — Свердловск : Изд-во УПИ им. С. М. Кирова, 1981. — 88 с.

Воробьева Г. Н. Практикум по численным методам / Г. Н. Воробьева, А. Н. Данилова. — М. : Высш. шк., 1979. — 184 с.

Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. — М. : Наука, 1978. — 512 с.

Численные методы / Н. И. Данилина [и др.]. — М. : Высш. шк., 1976. — 368 с.

Копченова Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. — М. : Наука, 1972. — 368 с.

Гутер Р. С. Программирование и вычислительная математика / Р. С. Гутер, П. Т. Резниковский. — М. : Наука, 1971. — Вып. 2: Вычислительная математика. Программная реализация вычислительных методов. — 264 с.

Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — М. : Наука, 1970. — 664 с.

Приложение 1

**Пример выполнения лабораторной работы № 1
в пакете MathCad**

Лабораторная работа 1

Интерполирование функций

Аппроксимируемая функция

$$F(x) := x^5 - 34 \cdot x - 2$$

Узлы интерполяции

$$x_0 := 2 \quad x_1 := 5 \quad x_2 := 8$$

Интерполяционный полином Лагранжа

$$A(x) := F(x_0) \cdot \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)}$$

$$B(x) := F(x_1) \cdot \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)}$$

$$C(x) := F(x_2) \cdot \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)}$$

$$L_2(x) := A(x) + B(x) + C(x)$$

Значение аппроксимируемой функции и полинома Лагранжа в точке $a = 5,5$

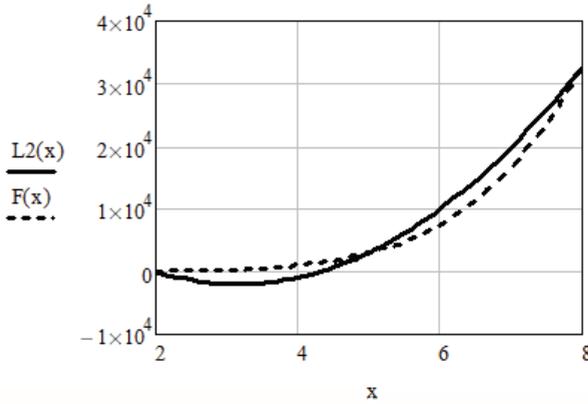
$$F(5.5) = 4.844 \times 10^3 \quad L_2(5.5) = 6.033 \times 10^3$$

Погрешность интерполяции в точке $a = 5,5$

$$|F(5.5) - L_2(5.5)| = 1.189 \times 10^3$$

Графики аппроксимируемой и аппроксимирующей функций

$$x := 2, 2, 1.. 8$$

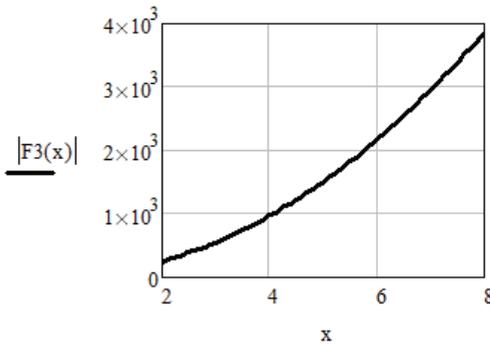


Оценка погрешности интерполяции

$$F_3(x) := \frac{d^3}{dx^3} F(x)$$

График модуля третьей производной

$$x := 2, 2, 1.. 8$$



Максимум достигается при $x = 8$

$$M_3 := |F_3(8)| \quad M_3 = 3.84 \times 10^3$$

Оценка погрешности интерполяции $R_2(x)$ в точке $a = 5,5$

Завершить самостоятельно!

Приложение 2

Пример решения системы уравнений в пакете MathCad

Решение систем уравнений в MathCad

Задаём начальные (затравочные) значения переменных

$$x := 1 \quad y := 1 \quad z := 1 \quad w := 1$$

После оператора Given (Дано) задаём ограничения на переменные (в данном случае ограничения представлены системой из четырех линейных уравнений).
Левая и правая части каждого уравнения соединяются знаком равенства, который берётся из панели Boolean (Булевские).

Given

$$x = 0.23 \cdot x - 0.04 \cdot y + 0.21 \cdot z - 0.18 \cdot w + 1.24$$

$$y = 0.45 \cdot x - 0.23 \cdot y + 0.06 \cdot z - 0.88$$

$$z = 0.26 \cdot x + 0.34 \cdot y - 0.11 \cdot z + 0.62$$

$$w = 0.05 \cdot x - 0.26 \cdot y + 0.34 \cdot z - 0.12 \cdot w - 1.17$$

Вычисляются значения переменных:

$$\begin{pmatrix} xval \\ yval \\ zval \\ wval \end{pmatrix} := \text{Find}(x, y, z, w)$$

Искомые значения переменных:

$$xval = 2.04821441 \quad yval = 0.08583184 \quad zval = 1.06461133 \quad wval = -0.64994438$$

Проверка результата подстановкой в первое уравнение системы:

$$0.23 \cdot xval - 0.04 \cdot yval + 0.21 \cdot zval - 0.18 \cdot wval + 1.24 = 2.04821441$$

Ответ верен!

Оглавление

Предисловие.....	3
Введение.....	4
Глава 1. Погрешности.....	6
Классификация погрешностей	6
Абсолютная и относительная погрешности	7
Действия с приближенными числами	10
Индивидуальные задания.....	12
Глава 2. Приближение функций	15
Погрешность интерполяционного полинома Лагранжа.....	20
Задания к лабораторной работе № 1. Интерполирование функций	22
Глава 3. Численное дифференцирование	24
Задания к лабораторной работе № 2а. Численное дифференцирование	30
Глава 4. Численное интегрирование.....	32
Задания к лабораторной работе № 2б. Численное интегрирование.....	44
Глава 5. Численное решение уравнений.....	45
Задания к лабораторной работе № 3. Численное решение уравнений.....	62
Глава 6. Численное решение систем уравнений.....	63
Линейные системы	63
Задания к лабораторной работе № 4а. Решение систем линейных уравнений методом простой итерации	74
Задания к лабораторной работе № 4б. Решение систем линейных уравнений методом Зейделя.....	81
Нелинейные системы	85
Задания к лабораторной работе № 4в. Решение систем нелинейных уравнений.....	96
Глава 7. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.....	103
Задание к лабораторной работе № 5. Численное решение дифференциальных уравнений	114
Рекомендуемый библиографический список.....	119
Приложения.....	120
Приложение 1	120
Приложение 2	122

Учебное издание

Зенков Андрей Вячеславович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Редактор И. В. Меркурьева
Верстка О. П. Игнатъевой

Подписано в печать 01.06.2016. Формат 70×100/16.
Бумага писчая. Печать цифровая. Гарнитура Newton.
Уч.-изд. л. 6,42. Усл. печ. л. 10,0. Тираж 100 экз.
Заказ 190

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8(343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru



ЗЕНКОВ АНДРЕЙ ВЯЧЕСЛАВОВИЧ

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры моделирования управляемых систем, окончил УрГУ им. А. М. Горького, преподает дисциплины, связанные с математикой и бизнес-информатикой, в УПИ–УГТУ–УрФУ с 1990 года. Отец четверых детей.