A.A’zamov, A.Tilavov

CHIN QIZIQARLI MATEMATIKA

III

Akademik litseylar va X, XI sinf o‘quvchilari uchun

Toshkent
“Tafakkur”
2018

KBK 22.1
51
A-94
A’zamov, A. Tilavov, A.

Chin qiziqarli matematika III [Matn] Akademik litseylar va X, XI sinf o‘quvchilari uchun/ A.A’zamov, A.Tilavov. – Toshkent: “Tafakkur”, 2018. – 208 b.

UO‘K 51

Annotatsiya

Matematika – eng jozibali fanlardan biri. Bu, ayniqsa, to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisob-kitob bilan yechilmaydigan, yechim biror o‘ziga xos g‘oya topishni talab qiladigan masalalarda, sonlar va geometrik shakllarning favqulodda xossalarida, mazmuniga nafosat xos bo‘lgan teoremalarda yoki ma’lum va mashhur teoremalarning kutilmagan tarzdagi ixcham isbotlarida ko‘rinadi. Mana shu mavzular chin qiziqarli matematikadan iborat. Taqdim etilayotgan uch kitobdan iborat, ushbu majmua o‘quvchilarga matematikaning ana shu jihatini namoyish etishga mo‘ljallangan.

ISBN 978-9943-24-179-4

So‘zboshi

Maktab matematika fanining maqsadi o‘quvchilarga batartib bilim berish bo‘lgani uchun, darsliklar odatda anchayin bir xil mashqlarni takrorlash uslubida yoziladi, shunga muvofiq matematika darslari ko‘pincha zerikarli yo‘sinda o‘tadi. Holbuki, matematika mavzulari birining ustiga ikkinchisi qalashib, borgan sari chuqurlashib boradi. Bu esa o‘quvchidan avvalgi bir-ikki darsni emas, balki boshlang‘ich sinflardan boshlab o‘rganilgan mavzulardan to o‘tgan darsdagigacha materialni yodda tutishni taqozo etadi. Qiyoslash uchun matematikaga eng yaqin fan bo‘lgan fizikani olaylik. Uning “Molekulyar fizika” bo‘limini yaxshi o‘zlashtirmagan o‘quvchi “Elektr” bo‘limini o‘zlashtira oladi – buning uchun u molekulyar fizika mavzularini yodda tutishi shart emas. Ammo boshlang‘ich sinfda o‘tilgan oddiy kasrlar bilan bog‘liq amallarni o‘zlashtirmagan yoki unutgan o‘quvchi matematikaning keyingi mavzularidan birortasini ham o‘zlashtira olmaydi.

Endi shunday savol tug‘iladi – qanday qilib hamma darsda o‘tilgan mavzuni yodda saqlash mumkin? Buning maktabda keng qo‘llanadigan usuli – tinmay takrorlab turish. Bu usulga qo‘shimcha yana bir usul yaxshi samara beradi. U ham bo‘lsa, o‘quvchilarni matematikaga qiziqtirishdir. Agar o‘quvchi bu fanga “oshiq-u shaydo” bo‘lib qolsa, kelajakda kuchli matematik bo‘lib yetishuviga yo‘l ochiladi, boshqa soha mutaxassisi bo‘lganda ham, matematik mavzularning tartib-intizomi, qiyin masalani yechish beradigan zavq-u shavq, teoremalarning nafosati hamisha asqotadi. Buning uchun o‘quvchilarni matematikaning jozibasi nimada ekanligi bilan tanishtirish kerak, albatta.

Ko‘pincha qiziqarli matematika deganda yengil-yelpi boshqotirma masalalar tushuniladi. Masalan, “Daraxtning shoxida 10 ta chumchuq qo‘nib turgan edi, ovchi ulardan uchtasini otib tushirdi. Daraxtda nechta chumchuq qoldi?” – bu masala, hech shubhasiz, bolalarda topqirlik, shoshmaslik kabi foydali fazilatlarni tarbiyalashga xizmat qiladi, ammo matematikaga mutlaqo aloqasi yo‘q. Aksincha, “7 ta chumchuq qoldi” degan javob matematikaga yaqin. Maktablardagi uchrashuvlardan birida hamma “bitta ham chumchuq qolmadi” degan javobni ma’qullganda bir o‘quvchi “Yo‘q, 7 ta qolgan bo‘lishi mumkin” deb turib oldi. O‘rtoqlari uning ustidan kulishdi: “Ovchi miltiq o‘tsa, shoxda chumchuq qoladimi?” U esa shunday deb javob berdi: “Daraxt juda ham katta bo‘lgan, uchta chumchuq uning bir tomonida, 7 tasi boshqa tomonida qo‘nib turgan, miltiq esa ovozi chiqmaydigan xilidan bo‘lsa-chi?” Ana shu o‘quvchidan keyinchalik yaxshi matematik yetishib chiqdi.

O‘quvchilar, matematika o‘qituvchilari hamda, umid qilamizki, ota-onalar e’tiboriga havola etilayotgan “Chin qiziqarli matematika” kitoblar turkumi (uni “Qiziqarli chin matematika” yoki “Chin qiziqarli chin matematika” deb o‘qisa ham xato bo‘lmaydi) bu qadimiy va hamisha navqiron fanning ichki nafosatini namoyon qilish maqsadida yozildi. Uning mundarijasini A.A’zamovning 15 yil davomida “Fizika, matematika va informatika” jurnalidagi “Matematika jozibasi” ruknida bosilgan maqolalari tashkil etadi, mazmunan esa “Matematika sayyorasi”, “Букет от математика” kitoblarining davomi deb qabul qilish mumkin. Kitobni asosan A.M.Tilavov nashrga tayyorladi, J.A.Baxramov qo‘lyozma bilan tanishib, o‘z fikr-mulohozalari bilan kitobni sifatli bo‘lishiga muhim hissa qo‘shdi. Mualliflar kitoblar yuzasidan bildiriladigan fikr-mulohazalarni, ayniqsa, uning sahifalarida keltirilgan masalalarning “jozibador” yechimlarini mamnuniyat bilan qabul qiladi.

§ 1. Farg‘oniy Ptolemey teoremasini qanday isbotlagan[1]

Buyuk vatandoshimiz Ahmad Farg‘oniy asli astronom, geograf va muhandis (injener) bo‘lgan. U matematikadan boshqa sohalar bilan shug‘ullanganiga qaramay, bu fan rivojiga ham salmoqli hissa qo‘shgan va shu nuqtai nazardan bemalol kuchli matematik bo‘lgan deya olamiz. Buning dalili – Ahmad Farg‘oniy Ptolemey teoremasini isbotlaganidir. Gap shundaki, Ahmad Farg‘oniy bu teoremaning hayratomuz nafis isbotini topgan.

Sharning sirtidan iborat shakl matematikada *sfera* deyiladi[2]. Shar bilan sferaning farqi va o‘zaro munosabati doira bilan aylananikiga o‘xshash. Yer sharining sirti ham, osmon ham shaklan sfera ekanligi tufayli uning xossalarini o‘rganish geometriyadan tashqari astronomiya va geografiya uchun ham muhim bo‘lgan. Hatto alohida sferik geometriya, sferik trigonometriya kabi fanlar rivojlantirilgan.

Sferik geometriyaning muhim teoremalaridan biri bu – Ptolemeyning stereografik proyeksiya haqidagi teoremasidir. Uni bayon etish uchun sfera ustida istalgan bir nuqtani olib, uni “janubiy” qutb deb ataymiz va S bilan belgilaymiz. Xususan, u yer sirtidagi janubiy qutb yoki boshqa nuqta, hatto, shimoliy qutb bo‘lishi ham mumkin. Shundan so‘ng sferaning shu qutbdan o‘tuvchi diametrining ikkinchi uchini, ya’ni janubiy qutbga qarama-qarshi nuqtasini “shimoliy” qutb deb atash va N harfi bilan belgilash tabiiy. Bu “shimoliy” qutb orqali sferaga o‘tkazilgan urinma tekislik *astrolyabiya tekisligi* deyiladi. Endi tasavvur qilaylik, “janubiy” qutbga nur manbai (chiroqcha) o‘rnatilgan. U holda sfera ustida har

[1] FMI, 2002, №3.

[2] Bu so‘z atmosfera, biosfera kabi atamalar tarkibida ko‘p qo‘llanadi.

bir shakl astrolyabiya tekisligiga soya tashlaydi – proyeksiyalanadi.

Sfera ustidagi nuqtaning astrolyabiya tekisligidagi soyasi shu nuqtaning *stereografik proyeksiyasi* deb ataladi.

Stereografik proyeksiyaning birinchi muhim tatbiqi – u xarita chizishda qo‘l keladi. Masalan, yer sirtining doiraviy segment shakldagi qismining xaritasini chizish lozim bo‘lsin. U holda bu segmentning markazidan o‘tgan urinma tekislik astrolyabiya tekisligi sifatida qabul qilinadi va sektorning markaziga qarama-qarshi nuqtadan proyeksiyalanadi. Agar doiraviy segment radiusi uncha katta bo‘lmasa (aytaylik, 100 km gacha bo‘lsa), juda aniq xarita hosil bo‘ladi. Dunyo xaritalariga Arktika va Antarktidaning mana shu yo‘sinda tasviri alohida ilova qilinadi.

Stereografik proyeksiyaning ikkinchi muhim tatbiqi – astrolyabiya deb ataladigan maxsus astronomik kuzatuv asbobi yasash bilan bog‘liq. Uni yasash prinsipi bitta bo‘lsa ham, u “shimoliy” va “janubiy” turlarda bo‘ladi. Masalan, osmon sferasining shimoliy yarim sharini kuzatish uchun mo‘ljallangani “shimoliy astrolyabiya” deyiladi. U osmon sferasining Jadiy tropigidan shimoliy qismini janubiy qutbdan stereografik proyeksiyasini tasvirlovchi asbobdir. Bunda astrolyabiya tekisligi sifatida “shimoliy” qutbdan o‘tuvchi urinma tekislik olinadi.

Ravshanki, osmon sferasining parallellari astrolyabiya tekisligida markazi shimoliy qutbda yotadigan konsentrik aylanalarga proyeksiyalanadi. Savol tug‘iladi: osmon sferasidagi boshqa aylanalar, masalan, ekliptika (quyoshning ko‘rinma harakati sodir bo‘ladigan aylana)ning proyeksiyasi qanaqa chiziq bo‘ladi? Ptolemey teoremasi ana shu savolga javob beradi.

Sfera ustida ixtiyoriy aylana berilgan boʻlsin. Agar bu aylana astrolyabiya tekisligiga parallel, boʻlsa, uning proyeksiyasi ham aylana boʻlishini taʼkidladik.

Agar sfera ustidagi aylana “shimoliy” qutbdan oʻtsa, uning proyeksiyasi astrolyabiya tekisligida “shimoliy” qutbdan oʻtadigan toʻgʻri chiziqni tashkil etadi. Lekin sferaning ustida nima koʻp – aylana koʻp. Shuning uchun astrolyabiya tekisligiga parallel ham boʻlmagan, “shimoliy” qutbdan ham oʻtmaydigan aylanani qaraylik. Umuman olganda aylana biror nuqtadan tekislikka proyeksiyalansa, konus kesimi, yaʼni yo ellips, yo parabola, yoki giperbola hosil boʻladi. Albatta, aylana ellipsning xususiy holi. Ptolemey teoremasi *“aylananing stereografik proyeksiyasi aynan aylana boʻladi”*, deya daʼvo qiladi. Bu, albatta, gʻaroyib natijadir. Uni tajriba yoʻli bilan topish mushkul, tajriba bilan isbotlash esa umuman mumkin emas, chunki hech qanday tajriba ellips aylana boʻlish yo boʻlmasligini farqlab berishga qodir emas. Yaʼni, Ptolemey teoremasi Evklid geometriyasidagi kabi qatʼiy mantiqiy mushohada bilan isbotlanishi lozim.

Klavdiy Ptolemey – qadimgi yunon olimi, taxminan 100–178 yillarda yashagan. Uning nomi koʻpincha geosentrik taʼlimot bilan bogʻlab eslanadi. Bu taʼlimotga koʻra Yer – olamning markazi boʻlib, sayyoralarning har biri (Yerdan uzoqlashish tartibida: Oy, Atorud, Zuhra, Quyosh, Mirrix, Mushtariy va Zuhal) markazi Yerda joylashgan shaffof sferaga mahkamlangan va u bilan Yer atrofida aylanadi; boshqa yulduzlarning barchasi (qoʻzgʻalmas, sobit yulduzlar) esa yana bir sferaga mahkamlangan; sobit yulduzlar sferasi har kuni Yer atrofida bir marta aylanib chiqadi.

Ptolemey taʼlimoti “Astronomiyaning 13 kitobli buyuk matematik inshooti”, qisqacha “Almagest” degan shoh asarida bayon qilingan (yunonchadan bu soʻz buyuk deb tarjima qilinadi, u arabcha "Almajistiy" deb talaffuz etilgan). "Almagest"ning "Matematika sintaksisi" deb atalgan birinchi kitobi geometriyaga bag'ishlangan bo'lib, unda Ptolemeyning planimetriyaga oid ikki teoremasi isbotlangan, so'ng ulardan

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

formula keltirib chiqarilgan. "Almagest"ning keyingi kitoblarida fan tarixidagi dastlabki trigonometrik jadvallardan biri ($30'$ minut qadam bilan hisoblangan vatarlar jadvali) hamda stereografik proyeksiya haqida uch teorema ham keltirilgan. "Almagest"ning to'liq nusxasi saqlanmagan. Bizgacha yetib kelgan nusxasida stereografik proyeksiya haqidagi teoremalarning bayon qismi bor-u ammo isboti yo'q. Fan tarixi mutaxassislari bu teoremalar isboti Ptolemey davridan ko'p o'tmay yo'qolgan deb hisoblaydilar. Teoremaning isboti Farg'oniyning "Astrolyabiya yasash haqida" asarida berilgan.

Ahmad Farg'oniy – buyuk o'zbek astronomi va injeneri, Muhammad Muso al-Xorazmiyning zamondoshi, Bag'dod akademiyasi ("Bayt ul-hikma")da u bilan birga faoliyat olib borgan (IX asr). Bizgacha uning hayoti va ijodi haqida juda oz ma'lumot yetib kelgan. Lekin al-Farg'oniy Marvdan boshqa olimlar qatorida Bag'dodga kelgani, Shammosiya va Dayr-Muqron shaharlarida o'tkazilgan astronomik kuzatuvlarda faol qatnashgani, Mosul yaqinidagi Sinjor sahrosida yer meridiani bir darajasining uzunligini o'lchashda ishtirok etgani va Nildagi Ravzo orolida miqyos (nilometr)ni barpo qilgani ma'lum. Uning ijodiga kelsak, sakkizta asari bizning davrimizgacha yetib kelgan bo'lib, hammasi ham astronomiya va geografiyaga oiddir. Ulardan, ayniqsa "Ilmi nujum asoslari haqida kitob" va "Asturlob yasash haqida kitob" mashhur bo'lib, Yevropada astronomiya rivojlanishida hal qiluvchi rol o‘ynagan. Bu ikki asar 1999 yilda olim tavalludining 1200 yilligi mamlakatimizda keng nishonlanishi munosabati bilan rus tilida [Ахмед Фергани. Астрономические трактаты. Т.: Фан, 1999], birinchisi esa o‘zbek tilida ham [Аҳмад Фарғоний. Астрономия илмий асослари. Шарқ, 1998] nashr etildi.

Bu ma’lumotlardan ko‘rinib turibdiki, Farg‘oniy birinchi navbatda atoqli astronom sifatida shuhrat qozongan. Shuning uchun zamondoshlari unga Shihobiddin ismi sharifini unvonini berishgan (“Astrolyabiya yasash haqida kitob”ning Prussiya kutubxonasida saqlanayotgan qo‘lyozmalaridan birida muallifning to‘liq ismi-sharifi Shihobiddin Ahmad ibn Muhammad ibn Kasir al-Farg‘oniy deb yozilgani qayd etiladi, “shihob” arab tilida meteor, uchar yulduz ma’nosini anglatadi.

U, shuningdek, o‘z davrida asosiy astronomik kuzatuv asbobi bo‘lgan astrolyabiya (arabcha asturlob) yasashning mohir ustasi hamda asbobsoz ixtirochi va injiner bo‘lgan. Uning matematikaga oid alohida asar yozgani haqida ma’lumot esa bizgacha yetib kelmagan. Bundan, u zamondoshi al-Xorazmiy singari professional matematik bo‘lmagan, degan xulosa chiqadi. Lekin shunga qaramay, u o‘z davrining eng kuchli matematiklaridan biri bo‘lgan, deya olamiz. Bunga ishonch hosil qilish uchun Farg‘oniyning hozircha bizga ma’lum bo‘lgan va yuqorida tilga olingan birgina matematikaga oid ishi bilan tanishaylik. U fan tarixchilari tomonidan yaxshi o‘rganilgan va bir necha marta bayon qilingan. Biz uning asosiy qismini, hozirgi geometrik tushuncha va belgilashlar orqali oydinroq bayon qilib, Farg‘oniy xizmatini yaqqolroq ko‘rsatishga harakat qilamiz.

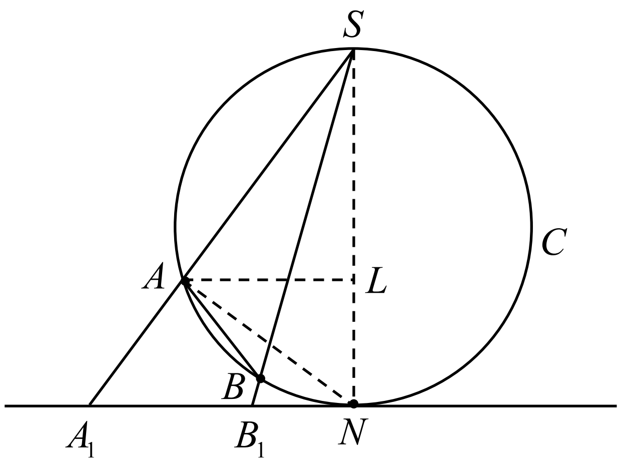
Ptolemey teoremasining isboti. Farg‘oniy dastavval quyidagi lemmani ko‘radi.

Farg‘oniy lemmasi. Aylananing S nuqtasidan o‘tkazilgan bir juft to‘g‘ri chiziq aylanani A, B nuqtalarda, S ga qarama-qarshi N nuqtadan o‘tkazilgan urinmani esa A_1 va B_1 nuqtalarda kesib o‘tsin. U holda SAB va SB_1A_1 uchburchaklar o‘xshash bo‘ladi.

A nuqtani N bilan tutashtirib, SN ga AL perpendikulyar tushiramiz. $\angle SAN$ diametrga tiralgani uchun to‘g‘ri burchakdir. Demak, ΔSAL va ΔANL uchburchaklar o‘zaro o‘xshash va ikkalasi ham ΔANS uchburchakka o‘xshash (1-shakl). Bundan $\angle ANS = \angle SA_1N$ kelib chiqadi. Ammo $\angle ANS$ bilan $\angle ABS$ bitta yoyga tiralgan. Shuning uchun $\angle SA_1N = \angle ABS$. Demak, ΔSAB va ΔSA_1B_1 uchburchaklarning ikkitadan burchaklari mos ravishda teng bo‘lib, ular o‘zaro o‘xshashdir.

Farg‘oniy mushohadalari, bu lemmadan tashqari, Evklidning mana bu tasdig‘iga asoslanadi:

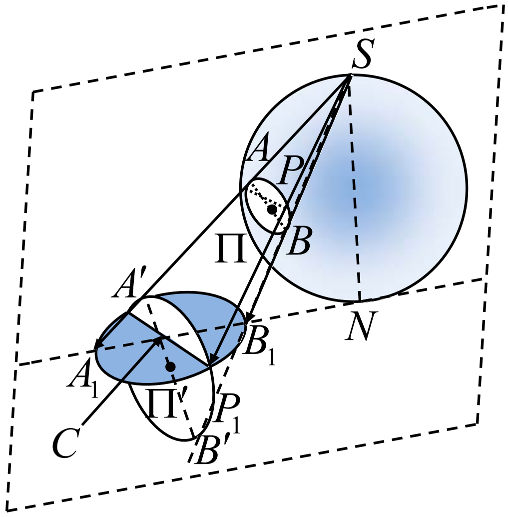
1°. AB diametrning C nuqtasidan chiqarilgan perpendikulyar aylanani P nuqtada kesib o‘tsin. U holda $AC \cdot CB = CP^2$ bo‘ladi. Farg‘oniy bu xossaga teskari teoremani ham qo‘llagan:



1-shakl.

2°. C nuqta berilgan aylananing AB diametrida yotsin va PC kesma aylana diametriga tik bo‘lsin. U holda $AC \cdot CB = CP^2$ tenglikdan P nuqtaning aylanada yotishi kelib chiqadi.

1° xossa maktab geometriya kursidan yaxshi ma'lum, xususan, u Pifagor teoremasini isbotlashda ham qo'llanadi, 2° xossaning o'rinli ekanini ko'rsatish esa sodda mashqdan iborat. Endi Ptolemey teoremasiga qaytamiz. Sfera ustida yotuvchi Π aylana berilgan bo'lsin. Yuqorida ta'kidlanganidek, u S qutbdan o'tmaydi va SN kesmaga perpendikulyar tekislikda yotmaydi deb hisoblash mumkin. Π ning markazi Q nuqtada yotsin. Sferani SNQ tekislik bilan kesamiz. U Π aylanani A va B nuqtalarda kesadi va AB bu aylananing diametri bo'ladi. SNQ tekislik astrolyabiya tekisligini A_1N to'g'ri chiziq bo'ylab kesadi. A va B nuqtalarning stereografik proyeksiyalari A_1 va B_1 shu to'g'ri chiziqda yotadi.



2-shakl.

Endi Π aylananing ixtiyoriy P nuqtasini olamiz. Uning stereografik proyeksiyasi P_1 bo'lsin. Bu nuqtadan SNQ tekislikka PC perpendikulyar tushiramiz. So'ng C nuqtadan AB ga parallel $A'B'$ kesma o'tkazamiz. Bu kesmani diametr sifatida olib, $A'B'P_1$ tekislikda yotuvchi aylana o'tkazsak, u P_1 nuqtadan o'tadi. Demak, 1° xossaga ko'ra

$$A'C \cdot CB' = CP_1^2. \qquad (1)$$

Endi Farg'oniy lemmasiga murojaat etish lozim. Unga ko'ra ΔSA_1B_1 uchburchak ΔSAB ga o'xshash. ΔSAB esa $\Delta SA'B'$ uchburchakka o'xshash. O'xshash uchburchaklarning mos burchaklari teng bo'lishi lozim:

$\angle A'A_1C = \angle B_1B'C$, $\angle B'B_1C = \angle A_1A'C$. Demak, $\Delta A'A_1C$ va $\Delta B'B_1C$ uchburchaklar o‘xshash ekan. Shuning uchun ularning mos tomonlari proporsional:

$$A_1C : B'C = A'C : B_1C$$

Bu yerdan $A_1C \cdot B_1C = A'C \cdot B'C$ tenglikka ega bo‘lamiz. (1) dan foydalansak,

$$A_1C \cdot B_1C = CP_1^2$$

tenglik hosil bo‘ladi. Demak, 2° xossaga ko‘ra, P_1 nuqta diametri A_1B_1 bo‘lgan aylanada yotar ekan. Bu xossa sfera ustida berilgan aylananing ixtiyoriy P nuqtasi uchun o‘rinliligidan aylananing stereografik proyeksiyasi yana aylana bo‘lishi isbotlandi.

Xulosa. Ko‘rinib turibdiki, Ptolemey teoremasining isboti ancha murakkab, u bilan tanishmagan ancha-muncha matematik mustaqil isbotlashi oson emas. Hatto XXI asrda ham!

Savol tug‘iladi: astrolyabiya haqida kitob yozayotgan astronom uchun Ptolemey teoremasining bu qadar murakkab isbotini izlash shartmidi? Astronomlar uchun Ptolemeyning o‘sha davrdagi (va undan keyin ham to Kopernik va Galiley davrigacha) obro‘sining o‘zi kifoya qilmasmidi? Lekin Farg‘oniy bu bilan cheklanmasdan, avval teoremani isbotlab, so‘ng shu asosda astrolyabiya nazariyasini bayon qilishga o‘tganki, bu – ibrat bo‘larli yondashuv.

Ko‘rinib turibdiki, Farg‘oniy isboti g‘oyat nafis geometrik mushohadalardan iborat. Bu Evklid, Ptolemey va boshqa yunon geometrlarining asarlarini Farg‘oniy chuqur o‘rgangani, geometriya bilan muntazam shug‘ullanganidan dalolat beradi.

Lekin Farg‘oniyning hozirgacha alohida geometriyaga bag‘ishlangan asari haqida ma’lumot topilmagan. Mana shu o‘rinda bir savol tug‘iladi: geometriyani shu qadar chuqur bilgan, unga o‘zi mustaqil hissa qo‘shishga qodir olim bunday asar yozmasligi mumkinmidi? Bizningcha, yo‘q! Ahmad Farg‘oniy geometriyaga oid risola ham yozgan bo‘lishi kerak, deya faraz qilish o‘rinli. U umrining oxirini Shom va Misrda o‘tkazganini e’tiborga olsak, mana shu shaharlar qo‘lyozma jamg‘armalaridan bunday asar topilishi ehtimoldan holi emas.

Yana shunisi diqqatga sazovorki, Farg‘oniy o‘zining stereografik proyeksiya haqidagi teoremaning isboti jarayonida konusning bir kesimi aylana bo‘lsa, unga parallel kesimlar ham aylana bo‘lishidan foydalanib, bu “Muhammad ibn Musoning sfera haqidagi kitobida asoslangan” deb ketadi. Fan tarixchisi N.D.Sergeeva so‘z al-Xorazmiy haqida borayotgan bo‘lishi kerakligini asoslaydi. Ya’ni, al-Xorazmiy geometriya bilan ham shug‘ullangan! Ammo al-Xorazmiyning mazkur nomli asar yozgani haqida ma’lumot uning hozirgacha topilmagan asarlar ro‘yxatida ham qayd etilmay keladi [А.Аҳмедов. Аҳмад ал-Фарғоний. Тошкент, ЎзМЭ Давлат илмий нашриёти, 1998].

A.Ahmedov o‘z ilmiy ma’ruzalarining birida ma’lumot berishicha, Bag‘dod, Shom, Qohira kabi shaharlar kutubxonalari kataloglarida nisbasi Farg‘oniy bo‘lgan o‘nlab mualliflarning asarlarini uchratish mumkin. O‘sha davrlarda ko‘pincha bir necha risolani bitta muqova bilan kitob qilish odat bo‘lgan. Qaysi bir kitob tarkibida Farg‘oniyning geometriyaga oid risolasi ham bo‘lishi mumkin. Shuni ham nazardan qochirmaslik lozimki, stereografik proyeksiya haqidagi teoremani isbotlay olgan muallifning geometriyaga oid risolasi ham shunga yarasha, ya’ni o‘ta murakkab masalalarga bag‘ishlangan bo‘lishi, bu fan yanada rivojlantirilgan bo‘lishi kerak.

Xuddi shu ehtimol uchun ham Farg‘oniyning asarlarini izlashni davom ettirish darkor.

Suhbatimizni bir necha izoh bilan yakunlaymiz.

I. Farg‘oniy stereografik proyeksiyaning yana bir xossasini: sfera ustidagi aylana markazi Q ning proyeksiyasi aylana proyeksiyasining markazi bo‘lmasligini ta’kidlab proyeksiyaning markazini topish qoidasini isbotlagan: proyeksiyaning markazi A_1B_1 diametr o‘rtasidan iborat, Q ning proyeksiyasi esa B_1 nuqtaga yaqinroq bo‘ladi. Bu xossani isbotlashni mashq sifatida qoldiramiz.

II. Farg‘oniyning geometriyaga qo‘shgan hissasini Yaqin va O‘rta Sharq fani tarixining yirik mutaxassisi B.A.Rozenfeld va uning shogirdi N.D.Sergeeva qo‘lyozma asosida rus tilida birinchi marta bayon qilgan [Розенфельд Б.А., Сергеева Н.Д. Стереографическая проекция. М.: Наука, 1973], [Сергеева Н.Д., Карпова Л.М. Стереографик проекция ҳақида асосий теореманинг ал-Фарғоний исботи. Вопросы истории естествознания и техники, 1972, №40, 50-53 с.]. Ammo ularning “Stereografik proyeksiya” kitobida Ptolemey teoremasiga teskari teorema, ya’ni stereografik proyeksiyasi aylanadan iborat chiziqning o‘zi aylana bo‘ladi, degan tasdiqning isboti keltirilgan. Albatta, to‘g‘ri teorema ham, teskari teorema ham aynan bir g‘oya asosida, yaqin mushohadalar vositasida asoslanadi. Lekin ular ayni bir tasdiq ham emas.

III. Hozir universitetlarning “Kompleks analiz” (kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi) kursida Ptolemey teoremasi XIX asrning mahsuli bo‘lmish kompleks sonlar yordamida nisbatan ixchamroq isbotlanadi va shu sohaning o‘zida qator masalalarga tatbiq qilinadi. Shuningdek, uni analitik geometriya vositalari bilan isbotlash ham mumkin, lekin bunday isbot uzundan-uzun hisoblashlarni talab etadi. Farg'oniy isboti esa o'zining nafosati, demakki, jozibasi bilan hamon geometriyada o'z o'rniga ega ekanligini ta'kidlash lozim.

§ 2. Kompleks sonlarga nima zarurat bo'lgan?[3]

Nafaqat matematika, balki insoniyat tarixidagi eng qadimiy tushuncha bu – son tushunchasi deyilsa xato bo'lmaydi. Harqalay, odamzot harf yozishdan avval sanashni va sonlarni belgilashni o'rganganani aniq.

Son tushunchasining rivojiga qisqa nazar tashlasak quyidagi holatni ko'ramiz:

$$
\begin{gathered}
\{\text{natural sonlar}\}\\
\cap\\
\{\text{musbat ratsional sonlar}\}\\
\cap\\
\{\text{musbat va manfiy ratsional sonlar}\}\\
\cap\\
\{\text{irratsionalliklar}\}\\
\cap\\
\{\text{algebraik sonlar}\}\\
\cap\\
\{\text{haqiqiy sonlar}\}\\
\cap\\
\{\text{kompleks sonlar}\}\\
\cap\\
\text{sonlar maydoni.}
\end{gathered}
$$

[3] FMI, 2009, №4.

Son tushunchasining bu tariqa kengayib borishiga sabab nima?

Natural sonlar – sanash vositasi, ularning kelib chiqishi tabiiy bo‘lgani uchun ham “natural” sifatiga ega (naturalis – lotincha “tabiiy” degani).

Musbat ratsional sonlar oddiy kasrlar tarzida tabiiy ravishda kelib chiqqan: yarim, chorak, uch bo‘lakdan biri va hokazo. Shunday qilib, ratsional sonlar butun sonni teng bo‘laklarga bo‘lish ehtiyoji tufayli paydo bo‘lgan.

Manfiy ratsional sonlar V-VII asrlarda Xitoy va Hindistonda buxgalteriya hisob-kitoblaridan kelib chiqib kiritilgan. Aytaylik, bir odamning hamyonida 100 rupiy puli bor, avval boshqa odamdan 200 rupiy qarz olgan edi, qarzni qaytarish xususida boshini qashib turganda 150 rupiy daromad tushib qoldi. Xo‘sh, uning mablag‘i qancha? Bu masalani $(100+150)-200=50$ deb yechish mumkin, ammo mana bunday yechish uning mazmuniga ko‘proq muvofiq keladi:

$$100-200=-100;$$
$$-100+150=50.$$

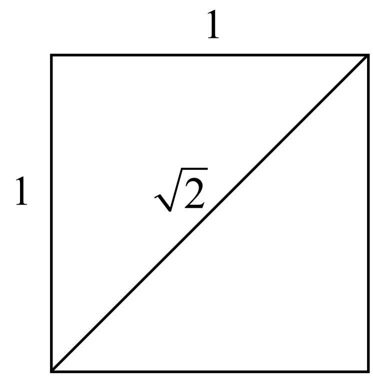
Bunda 100 dan 200 ni ayirishga to‘g‘ri kelmoqda. Faqat musbat sonlar bilan cheklanilsa, ayirish mumkin emas. Demak, manfiy sonlar kichik sondan katta sonni ayirish, xususan, qarzni ifodalash ehtiyojidan kelib chiqqan. (“Musbat”, “manfiy” atamalarini birinchi bo‘lib samarqandlik matematiklar qo‘llagan, keyinchalik Ali Qushchining Istambul madrasalaridagi ma’ruzalari tufayli Yevropa mamlakatlariga tarqalgan.

Ratsional sonlar haqida gap ketganda 0 (nol) haqida alohida to‘xtalish kerak. Chunki u dastlab son sifatida emas, o‘nli sanoq sistemasining raqami sifatida kiritilgan. Bu haqda al-Xorazmiy shunday deb yozadi: 2o7 sonida 7 raqami yettita birlikni, 2 raqami ikkita yuzlikni bildiradi, sifr (arabcha nol degani – u kichkina doiracha bilan ifodalangan) esa oʻnliklar yoʻq ekanini koʻrsatadi.

Keyinroq 0 boshqa sonlar qatoridan teng huquqli oʻrin egallagan.

Ratsional sonlarning natural sonlardan muhim bir farqiga e’tibor qaratamiz. Natural sonlar uchta vazifa bajaradi: 1) sanash vositasi: bitta, ikkita, uchta kabi; 2) tartib vositasi: birinchi, ikkinchi, uchinchi kabi; 3) oʻlchash vositasi: bir metr, ikki litr, uch minut kabi. Ratsional sonlar esa faqat oʻlchash vositasidir.

Qadimgi yunon olimlari uzoq vaqt har qanday oʻlchash uchun ratsional sonlar kifoya, deb oʻylaganlar. Pifagorning shogirdlaridan biri tomoni 1 ga teng kvadratning diagonalini ratsional son bilan oʻlchab boʻlmasligini aniqlaganda, aytishlaricha, Pifagor bundan dargʻazab boʻlib, uni choʻktirishga buyurgan ekan. Haqiqatan ham ratsional sondan boshqa sonlar boʻlmasa, tuppa-tuzuk kesmani oʻlchab boʻlmasligi ajablanarlida?! Bu qiyinchilikdan yunon matematiklari gʻalati yoʻl bilan chiqishgan: sonlar oʻrniga kesmalarnin nisbati bilan ish koʻraverganlar. Xususan, $\sqrt{2}$ oʻrniga kvadrat diagonalining tomoniga nisbatini qaraganlar (1-rasm).



1-rasm.

Arab tilida ijod qilgan Sharq olimlari yunonliklar yoʻlidan borsalar-da, kvadrat ildizli sonlar ustida amallarni bemalol bajarganlar. Al – Xorazmiyning “Aljabr va al-muqobala haqida qisqa kitob”idayoq bunday amallar qoidalariga alohida oʻrin berilgan. Abu Bakr Muhammad al-Karajiyning (X-XI asrlarda yashagan) “Arifmetika gʻaroyibotlari” kitobidan

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}{2}} \qquad (1)$$

kabi qoidalar oʻrin olgan.

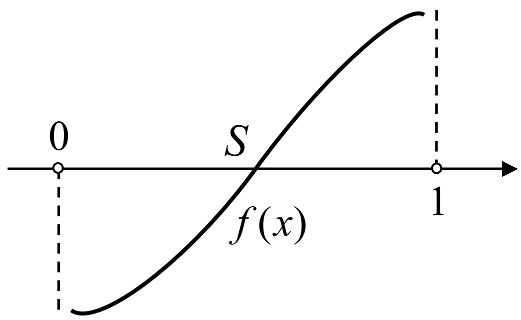
Mashq. (1) tenglikni isbotlang.

Sharq matematiklari, shuningdek, yuqori darajali ildizlar bilan ham ishlaganlar.

Matematika rivojidagi gʻaroyib hodisa shundaki, murakkab ildizli ifodalar bilan ishlash ancha taraqqiy qilgan paytgacha ham ratsional son tushunchasi avvalgicha, ya'ni oddiy kasrlar rasmida qolavergan. Oltmishli sanoq sistemada yozilgan kasrlar ham bu sohada yangilik qoʻshmagan. XVI asrga kelib oʻnli kasrlar muomalaga kira boshlagach, oddiy kasrlar yo chekli, yoki davriy cheksiz oʻnli kasr boʻlishi, $\sqrt{2}$ kabi sonlarni esa bunday tarzda yozib boʻlmasligi aniqlangan. Shuning uchun birinchi toifa sonlar ratsional (lotincha “rationalis” – aqlga sigʻadigan), ikkinchi toifa sonlar esa irratsional (aqlga sigʻmaydigan) deb atalgan.

Bora-bora irratsional sonlar ham “aqlga sigʻishi” ma'lum boʻlib, ratsional sonlar bilan birga “haqiqiy sonlar” degan unvonga sazovor boʻlgan. Lekin, “haqiqiy son oʻzi nima?” degan savolga aniq javob 1870-yillarga kelib topilgan. Bunga ehtiyoj – son oʻqining uzluksizligini ta'minlash edi. Masalan, $0 \le x \le 1$ kesmada aniqlangan uzluksiz $f(x)$ funksiya uchun $f(0) < 0$ va $f(1) > 0$ boʻlsa, u holda $f(x) = 0$ tenglama 0 bilan 1 orasida ildizga ega boʻlishi kerak. Ya'ni $f(x)$ funksiyaning grafigi absissa oʻqini 0 bilan 1 orasidagi biror S nuqtada kesib oʻtishi zarur (Bolsano-Koshi teoremasi, 2-rasm). Lekin toʻgʻriligi shubhasiz boʻlgan bu xossani “haqiqiy son nima?” degan savolga aniq javob berilmaguncha qat'iy isbotlab boʻlmaydi.

Endi hikoyamizning bosh qahramoniga kelaylik. Manfiy va irratsional sonlarning taqdiri yana bir toifa sonlar oldida hech narsa emas. Ma'lumki, har qanday haqiqiy sonning kvadrati 0 dan katta, juda bo'lmasa 0 ga teng. Shuning uchun, $x^2 = -4$ tenglikni qanoatlantiradigan



2-rasm.

haqiqiy son yo'q. Boshqacha qilib aytganda, manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarib bo'lmaydi.

Lekin… matematiklar teppa-tekis joyda manfiy sondan ildiz chiqarishga duch kelishsa bo'ladimi!

Manfiy sonlarning kvadrat ildizi bilan ishlashga majbur bo'lgandan keyin ana shu ildizlar bilan ishlashga to'g'ri kelgan. Ammo bu oson yumush bo'lmagan, manfiy sonlarning ildizi bilan o'ta ehtiyotkorona, xuddi chayonni tutganday ish ko'rilgan. Hatto manfiy sonning kvadrat ildizini "mavhum son" deb atashgan.

Xo'sh, matematiklarni manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarishga, mavhum sonlar bilan ish ko'rishga nima majbur qilgan? Buni anglash uchun tenglamalarga murojaat etamiz.

Maktabda birinchi darajali $ax + b = 0$, ikkinchi darajali (ya'ni kvadrat) $x^2 + px + q = 0$ tenglamalarni yechish usullari o'tiladi. Xususan, kvadrat tenglamaning diskriminanti $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ noldan katta yoki teng bo'lsa, u ildizga ega, diskriminanti manfiy bo'lsa, kvadrat tenglama ildizga ega emas (tabiiy, gap haqiqiy son bo'lgan ildizlar ustida boryapti).

Uchinchi darajali $x^3+ax^2+bx+c=0$ tenglama kub tenglama deyiladi. Uni yechish formulasini italyan matematiklari S. del Ferro (1456-1526) va Nikolo Tartalya (1500-1557) topishga muvaffaq bo‘lishgan. Lekin u birinchi marta boshqa bir italyan olimi Jirolamo Kardano (1501-1556, “kardan uzatmasi” atamasi ham shu olim nomidan olingan) kitobida e’lon qilingani uchun Kardano formulasi degan nom bilan tarixga kirgan.

Bu formulani keltirib chiqaraylik. Dastlab $x=y-\dfrac{a}{3}$ degan almashtirish qilinsa, kub tenglamada y^2 li had yo‘qolib, ko‘rinishi soddaroq

$$y^3+py+q=0 \tag{2}$$

tenglama hosil bo‘ladi.

Mashq. p va q nimaga teng chiqishini hisoblang.

(2) tenglamada $y=u+v$ almashtirish qilamiz:

$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)+q=0.$$

Yoki

$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0. \tag{3}$$

Biz bitta y noma’lum o‘rniga ikkita u va v noma’lumlar kiritdik. Bu bizga $3uv+p=0$ deb qo‘shimcha shart qo‘yish huquqini beradi. Shunda (3) tenglama soddalashadi: $u^3+v^3+q=0$. Natijada,

$$\begin{cases} uv=-\dfrac{p}{3} \\ u^3+v^3=-q \end{cases} \tag{4}$$

sistema hosil bo‘ladi. Bunday sistemalarni yechish maktabda o‘tiladi. Masalan, birinchi tenglamadan v ni topib ikkinchisiga qo‘ysak, u^3 ga nisbatan kvadrat tenglamaga kelamiz:

$$\left(u^3\right)^2 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0. \qquad (5)$$

Bu tenglamaning diskriminanti: $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$. U musbat yoki 0 ga teng bo‘lsa, (5) tenglamani yechib, avval $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D}$ so‘ng $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D}$ chiqishini topish qiyin emas.

Mashq. Bunga ishonch hosil qiling.

Shunday qilib, $D \geq 0$ bo‘lsa, (2) kub tenglamaning ildizi uchun

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

formula hosil bo‘ladi. Kardano formulasi mana shundan iborat.

Hosil bo‘lgan formula ancha beso‘naqay bo‘lsa ham, lekin kub tenglamani yechish davomida hech bir murakkablik uchragani yo‘q. Shunday ekan, nega kub tenglamani yechish maktabda o‘tilmaydi?

Shoshilmaylik-da, misollarga murojaat etaylik.

1-misol. $y^3 + 9y - 26 = 0.$

Bunda $p = 9,\ q = -26$, diskriminant $D = 13^2 + 3^3 = 14^2$ – musbat. Kardano formulasini qo‘llaymiz:

$$y = \sqrt[3]{13+14} + \sqrt[3]{13-14} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{-1} = 3 + (-1) = 2.$$

Bu ildiz haqiqatan tenglamani qanoatlantiradi:

$$2^3 + 9 \cdot 2 - 26 = 0.$$

Agar (2) tenglama g ildizga ega bo‘lsa, $y^3 + py + q$ ko‘phad $y - \text{g}$ ga qoldiqsiz bo‘linadi, ya’ni u ko‘paytuvchilarga ajraladi (Bezu teoremasi). Xususan, qaralayotgan misolda

$$y^3 + 9y - 26 = y^3 - 2^3 + 9y - 18 =$$
$$= (y-2)(y^2 + 2y + 4) + 9(y-2) = (y-2)(y^2 + 2y + 13) = 0.$$

Bundan tenglamamiz 2 dan boshqa ildizga emasligi ko‘rinadi, chunki $y^2 + 2y + 13 = 0$ tenglamaning diskriminanti manfiy.

Shunday qilib, hamma narsa joyida – Kardano formulasi kub tenglamani batamom yechib berdi.

2-misol. $y^3 - 15y - 4 = 0$. Bu safar diskriminant $D = (-2)^2 + (-5)^3 = -121$ – manfiy. Demak, tenglama ildizga ega bo‘lmasligi lozim. Ammo... $y = 4$ qiymat tenglamani qanoatlantiradi: $4^3 - 15 \cdot 4 + 4 = 64 - 60 - 4 = 0$. Ana xolos!

Bunday vaziyatga duch kelgan XVI asr matematiklari shoshib qolishgan, albatta. Axir kub tenglamani yechish usulida hech bir xatolik bo‘lmasa-yu, topilgan formula yaroqsiz chiqsa!..

Tenglamani ko‘paytuvchilarga ajratib ko‘raylik:

$$y^3 - 15y - 4 = (y-4)(y^2 + 4y - 1) = 0.$$

Bu safar $y_1 = 4$ ildizdan tashqari $y^2 + 4y - 1 = 0$ tenglamadan yana ikkita haqiqiy ildiz borligini aniqlaymiz: $y_2 = -2 + \sqrt{5}$, $y_3 = -2 - \sqrt{5}$. Bunisi yana ham qiziq – tenglama uchta haqiqiy ildizga ega ekan, ammo ularni topish uchun formulani qo'llash… manfiy sondan ildiz chiqarishga taqaladi?!

Bu tilsimning tagiga yetish oxir-oqibat kompleks son tushunchasiga olib kelgan. Bugun endi matematikani kompleks sonlarsiz tasavvur etish mumkin emas. Xususan, kub tenglamalarni yechishda ular qanday ish berishi xususida kelgusida gaplashamiz. (Xalqaro matematika olimpiadalarida kompleks sonlarga oid masalalar berilishi mumkin.)

§ 3. Kub tenglama va kompleks sonlar[4]

Matematikaga qiziqadigan, ayniqsa, xalqaro matematika olimpiadalarida ishtirok etishday yaxshi niyati bor o'quvchi va talabalar kub tenglamalar mavzuni bilishi kerak, albatta. Bu yerda bayon qilinadigan mushohadalar kelgusida – sirkul va chizg'ich yordamida yasashlar haqidagi hikoyam uchun asqotadi.

Shunday qilib, so'z

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

tenglama haqida boradi. $y = x - \dfrac{a}{3}$ almashtirish qilaylik. x noma'lumga nisbatan

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$

tenglama hosil bo'ladi. (1) tenglamaning ildizi uchun quyidagi Kardano formulasi ma'lum:

[4] FMI, 2004, №4.

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}, \tag{2}$$

bu yerda $D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$.

Garchand (2) formula Kardano nomi bilan atalsa-da, aslida uni boshqa Italyan matematigi Stsipion del Ferro (1456-1526) topgan deb hisoblaniladi. Nega “topgan deb hisoblaniladi”? Sababi – o‘sha yillarda Uyg‘onish davri gurkiragan payt bo‘lib, italyan olimlari arabcha qo‘lyozmalarni zo‘r berib o‘rganishar, hatto shahar maydonlari, qirollar saroylarida “Masala yechishda kim zo‘r?” degan matematik bellashuvlar o‘tkazilar edi. Shuning uchun masala yechishning yangi usullari topilsa, mualliflar ularni sir saqlagan. Kub tenglamaning yechish usulini bilgani uchun Ferro va undan keyin shogirdi Fiorga bellashuvlarda ancha paytgacha hech kim bas kelolmagan. 1535 yil 12-fevralda o‘tkazilgan bellashuvda yana bir italyan matematigi Nikkolo Tartalya Fiorni yengadi – Tartalya (2) formulani mustaqil topgan edi. Kardano esa bu formulani Tartalyadan hech kimga aytmaslik sharti bilan so‘rab oladi.

Bu o‘rinda Jirolamo Kardano (1501-1576) asli kasbi vrach, ayni paytda o‘z davrining barcha fanlaridan xabardor olim bo‘lganini aytib o‘tish lozim. Xususan, hozir avtomobillarda qo‘llanadigan “kardan uzatmasi”, ham uning ixtirosidir. Kardano kitob yozishga ishqiboz bo‘lgan. Matematika rivojida muhim rol o‘ynagan “Buyuk san’at yoki algebra qoidalari haqida” kitobida u Tartalyaga bergan va’dasini buzib, uning formulasini o‘z nomidan e’lon qilib yuboradi. Tartalya buning uchun Kardanoni sudga beradi-yu, ammo da’vosining isboti bo‘lmagani uchun hech ish chiqarolmaydi.

Formulasi topilganiga qaramay, italyan matematiklari kub tenglamalarni yechishda g'alati hodisaga ro'baro' bo'ladilar. Kub tenglama bitta yoki uchta haqiqiy ildizga ega bo'lishi mumkin (agar haqiqiy ildiz ikkita bo'lsa, ulardan biri ikki karrali bo'ladi). Qarangki, haqiqiy ildiz bittagina bo'lsa, kub tenglamaning diskriminanti D musbat bo'lib, bu ildizni topishga (2) formula yarar ekan. Haqiqiy ildizlari uchta bo'lgan holda esa diskriminanti D manfiy bo'lib, (2) formulani qo'llash manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarishga taqalar ekan!

Mashq. $y = x^3 + px + q$ funksiyani hosila yordamida tekshirish yo'li bilan quyidagilarni isbotlang: a) $p \geq 0$ bo'lsa, funksiya monoton o'suvchi; b) $p < 0$ bo'lsin. U holda $D > 0$ shart $y = x^3 + px + q$ funksiyaning maksimum nuqtadagi qiymati 0 dan katta, minimum nuqtadagi qiymati esa 0 dan kichik bo'lishiga teng kuchli; c) $D \leq 0$ bo'lsa (1) tenglama bitta haqiqiy ildizga ega, $D > 0$ bo'lganda esa uchta haqiqiy ildizga ega.

XVI asrda manfiy sonlar endigina o'zlashtirila boshlagan (bunda Kardanoning xizmatlari talay), manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarish haqida esa gap ham bo'lishi mumkin emas edi. Axir, har qanday (albatta, haqiqiy) sonning kvadrati musbat bo'lgach, manfiy sonning kvadrat ildizi ma'noga ega emasligi ravshan-da.

Shunga qaramay "Kardano formulasi 3 ta haqiqiy ildizga ega bo'lgan kubik tenglamaning ildizlarini aniq topib bera olmas ekan", degan xulosa u qadar to'g'ri emas. Chunki XVI asr italyan matematiklari bu qiyinchilikni oldida taslim bo'lmaganlar, uni yengib o'tish chorasini izlaganlar. Bu davrga kelib Muhammad Muso al-Xorazmiy asos solgan algebra ancha takomillashgan, xususan, algebraik ifodalar ustida amallar qoidalari yaxshi ma'lum edi. Masalan, muallifi Abu Said Sijiziy (951-1024) deb taxmin qilinadigan arabcha qo'lyozmada

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

formula keltirilgan, Abu Komil Misriy (850-930) $x^2+\sqrt{3x^2}=\sqrt{300}$ tenglamani yechib, quyidagi ildizni topgan $x=\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{300}}-\sqrt{\frac{3}{4}}$, Ibn Bag'dodiy (X-XI asrlar) $\sqrt{6\pm\sqrt{20}}=\sqrt{5}\pm1$ kabi hisoblashlarni yaxshi bilgan. To'g'ri bu formulalarda kub ildiz qatnashmaydi, lekin, harqalay, Sharq matematiklari Kardano formulasidagi kabi boloxonador ildizlar, jumladan, kub ildizlar bilan ishlaganlar. Ammo, qattiq izlanishlarga qaramay, Sharq matematiklari, algebraik belgilashlardan foydalanmaganlari uchun bo'lsa kerak, kub tenglamani yechish qoidasini topa olmaganlar. Arabcha qo'lyozmalarni chuqur o'rgangan Leonarda Fibonachchi (1180-1240), Nikol Orem (1323-1382) va ayniqsa, Luka Pacholi (1445-1514) dastlabki algebraik belgilashlarni joriy qilib, yuqori darajali ifoda va ildizlar ustida amallar bajarish qoidalarini yanada takomillashtirganlar. Bu esa Ferro va Tartalya tomonidan "Kardano formulasi" ixtiro qilinishiga asos yaratgan.

Kardanoning shogirdi Rafael Bombelli (1526-1573) diskriminant manfiy bo'lganda ham Kardano formulasi vositasida kub tenglama ildizlarini topish masalasi ustida bosh qotirgan. U manfiy sonning kvadrat ildizi ham son, faqat mavhum son, lekin shunga qaramay bunday sonlar ustida algebraik amallarni bajaraverish mumkin, deb hisoblagan. Bunda haqiqiy son chiqib qolguday bo'lsa, maqsadga erishiladi. Xususan, Bombelli "Algebra" kitobida

$$(1)\cdot(\sqrt{-1})=\sqrt{-1};\quad (-1)\cdot(\sqrt{-1})=-\sqrt{-1};\quad (-1)\cdot(-\sqrt{-1})=\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})\cdot(\sqrt{-1})=-1$$

kabi qoidalarni,

$$\sqrt[3]{3+\sqrt{-10}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{-10}}=\sqrt[3]{19}$$

kabi hisoblashlarni bayon qilgan.

Bu o‘rinda “mavhum birlik” deb ataladigan $\sqrt{-1}$ kattalikni i bilan belgilashni 1777 yilda Leonard Eyler taklif qilganini eslatib o‘tamiz (lotincha imajinare – “mavhum”, “hayoliy” so‘zining birinchi harfi). Shundan so‘ng $a+b\sqrt{-1}$ kompleks soni ixcham $a+bi$ ko‘rininshda yoziladigan bo‘ldi. Ungacha esa, kompleks sonlar yuqoridagi 4 ta tenglikdagi kabi yozilgan va -1 dan “chiqarilgan ildiz” doim shubha tug‘dirib, mavhum sonlar bilan ishlaganda matematiklar botqoqlikda ketayotgan odam birdan cho‘kib ketishidan qo‘rqqanday ehtiyot bo‘lishgan.

Bu bejiz emas, albatta. Masalan, $\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$ to‘g‘ri tenglikning har ikki tomonidan ildiz chiqarilsa, $\frac{\sqrt{-1}}{1}=\frac{1}{\sqrt{-1}}$ hosil bo‘ladi, umumiy maxrajga keltirilsa, $-1=1$ degan bema’ni xulosa chiqadi. (Bunday mushohadalar matematikada paradoks deb ataladi. Paradokslar ostida bir qarashda ko‘rinmaydigan yanglish mushohada yotadi. Xususan, keltirilgan paradoksning siri shunday ochiladi: har bir kvadrat ildiz ikkitadan qiymatga ega, qaysi qiymatlar tanlanishiga qarab to‘rtta munosabatga ega bo‘linadi. Har ikki tomonda mos ishoralar tanlansa, to‘g‘ri tengliklar chiqadi.)

Bombelli, shuningdek, diskriminant manfiy bo‘lganda Kardano formulasidagi birinchi ildiz $a+bi$ ko‘rinishida chiqsa, ikkinchi ildiz $a-bi$ ko‘rinishida (hozirgi tilimizda qo‘shma kompleks son) chiqishi, shuning uchun ularni qo‘shganda “mavhum” bi va $-bi$ sonlar yeyishib ketib, haqiqiy $2a$ son hosil bo‘lishini payqagan. Garchi u umumiy holda haqiqiy ildiz qanday topilishini ko‘rsata olmagan bo‘lsa-da, ayrim kub tenglamalarni yechishni uddalagan! Masalan, $x^3=15x+4$ tenglama ildizi uchun Kardano formulasiga ko‘ra

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

tenglik hosil qilib, so‘ng

$$\sqrt[3]{2\pm\sqrt{-121}}=2\pm\sqrt{-1} \tag{3}$$

bo‘lishini topgan.

Mashq. Har ikki tomonini kubga ko‘tarib, (3) tenglikni isbotlang.

Natijada Kardano formulasiga muvofiq bu ikki ildiz qo‘shilganda haqiqiy $x=4$ ildiz hosil bo‘ladi. Bombelli bunday hodisa umumiy holda ham sodir bo‘lishi kerak, degan g‘oyaga kelgan, lekin uni qat’iy asoslay olmagan.

Shuningdek, diskriminant manfiy bo‘lgan holda Kardano formulasi doim ishlayvermasligi, bordi-yu bitta haqiqiy ildiz topilgan taqdirda ham nima uchun bu formula qolgan ikkita haqiqiy ildizlarni topishga yaramayotganini tushuntirib berolmagan.

Kompleks sonlar nazariyasining yaratilishi, xususan, kub tenglamaning tilsimini ochish bir necha asr davomida rivojlantirilgan yangi g‘oyalarni talab etadi. Jumladan, ingliz matematigi Abraham de Muavr (1667-1754) kompleks sonlar trigonometriya bilan allaqanday sirli ravishda bog‘liq ekani payqaydi: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ deb olinsa, kompleks son

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{4}$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu tenglikning o‘ng tomoni kompleks sonning trigonometrik shakli deyiladi. Bunda

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}$$

(r– kompleks sonning moduli, φ esa argumenti deyiladi, agar $r = 0$ bo‘lsa, kompleks son 0 ga teng bo‘lib, argumenti aniq bo‘lmaydi). Trigonometrik shakldagi kompleks sonning argumenti φ o‘rniga $-\varphi$ qo‘yilsa, qo‘shma kompleks son hosil bo‘lishi (4) tenglikdan ko‘rinib turibdi. Trigonometrik shakldagi ikkita kompleks sonni ko‘paytirish mana bunday bajariladi:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Mashq. (4) tenglikni isbotlang.

Mashq. (4) ga asoslanib, trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni bo‘lish formulasini keltirib chiqaring.

(4) tenglikdan Muavrning yana bir formulasi kelib chiqadi:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{5}$$

Bu tenglik nihoyatda muhim natijaga ega: 0 dan farqli har qanday kompleks son n ta har xil n-darajali ildizga ega bo‘ladi.

Mashq. 1 ning to‘rtta to‘rtinchi darajali ildizini ko‘rsata olasizmi?

Xususan, 1 soni 1 dan tashqari yana ikkita kub ildizga ega:

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i. \qquad (6)$$

Mashq. Bu sonlar bevosita kubga ko‘tarilsa 1 chiqishini tekshiring.

Shu singari, -1 ham to‘rtta to‘rtinchi darajali ildizga ega. Ularni topish uchun dastavval $-1=\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ$ tenglikni yozib olamiz, ya’ni -1 ni trigonometrik shaklga keltiramiz. Shunda Muavr formulasiga ko‘ra:

$$(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)^4 = \cos 4\cdot 45^\circ + i\sin 4\cdot 45^\circ = -1.$$

Demak, $\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ kompleks son -1 ning 4-darajali ildizi bo‘lar ekan. Shu singari

$$\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

sonlari ham -1 ning 4-darajali ildizlari bo‘ladi.

Mashq. Buni tekshirib ko‘ring.

Mashq. Mana shu usulda, ya’ni Muavr formulasi vositasida (6) sonlar 1 ning kub ildizlari bo‘lishini ko‘rsating.

Mashq. 1 ning 8-darajali ildizlarini sanang.

Umumiy holda 1 ning n-darajali n ta ildizi Muavrning quyidagi formulasi bilan topiladi:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{360^\circ}{n}k + i\sin\frac{360^\circ}{n}k, \qquad (7)$$

bu yerda $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\ n-1$.

Mashq. $k = n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots$ qiymatlar qabul qilsa, ε_k nimaga teng bo‘ladi? (Javob: ε_r ga, bunda r ning qiymati k ni n ga bo‘lgandagi qoldiqqa teng.)

Mashq. (5) va (7) formulalardan foydalanib, $\left(\varepsilon_k\right)^n = 1$ bo‘lishini isbotlang.

Mashq. $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$ bo‘lishini ko‘rsating.

Biz 1 ning ildizlariga bejiz batafsilroq to‘xtalmadik. Bir tomondan, istalgan haqiqiy sondan kompleks ildiz chiqarish 1 dan ildiz chiqarishga keladi. Ikkinchi tomondan, 1 ning n-darajali kompleks ildizlari muntazam n-burchak yasash masalasi bilan chambarchas bog‘liq – bu “cheksiz shaxmat taxtasi” ustida oltin partiyaning davomi bo‘lib, u K.F.Gauss nomi bilan bog‘liq.

§ 4. Cheksizlikka qo‘l cho‘zib...[5]

Arifmetikaning algebradan asosiy farqi nima? Bu savolga javob xilma-xil, albatta. Javoblardan birini shunday bayon qilish mumkin: arifmetika – chekli matematikaga mansub, algebra esa – cheksiz matematika sohasi. Misol uchun, $2\times3=3\times2$, $(2+3)\times4=2\times4+3\times4$, hatto

$$2\,222\,222\,222\times3\,333\,333\,333=$$
$$=3\,333\,333\,333\times2\,222\,222\,222$$

kabi sonlar va xossalarda cheksizlik yo‘q, ammo ularning algebradagi umumlashmalari $nm=mn$, $(n+m)k=nk+mk$ bo‘lgan kabi xossalar cheksizlikka daxldor, chunki bunday xossalarning har biri istalgan sonlar uchun, ya’ni cheksiz ko‘p sonlar uchun o‘rinli (n, m, k harflarining o‘zi ham: har biri cheksiz ko‘p qiymat qabul qila oladi).

Matematikada cheksizlikning yana bir, yana ham oliyroq turi bilan ish ko‘riladi. Ular – cheksiz amallardir. Qizig‘i, bu toifa cheksizlik bilan maktab o‘quvchilari quyi sinflardayoq to‘qnashadilar.

Birinchi uchrashuv – cheksiz o‘nli kasrlar. Agar bunday kasr davriy bo‘lsa, u “chekli matematika” obyekti bo‘lgan oddiy kasrga yig‘iladi. Masalan,

$$9{,}99999999...=9{,}(9)=10;$$
$$0{,}25363636...=0{,}25(36)=\frac{279}{1100}.$$

Agar cheksiz o‘nli kasr davriy bo‘lmasa, u o‘zida cheksizlik bilan aloqadorlik xususiyatini doim saqlaydi.

[5] FMI, 2006, №4.

Masalan, $\sqrt{2}$, π, $\log_{10}5$, $\sin 1^{\circ}$ sonlarining o‘nli kasr yoyilmalari davriy emas.

Davriy cheksiz o‘nli kasr aslida cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning xususiy holi. Ma’lumki, $|q|<1$ bo‘lsa,

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\dots \tag{1}$$

geometrik progressiya kamayuvchi bo‘ladi – hadlari absolyut qiymati bo‘ yicha borgan sari kamayib, kichiklashib boradi. Bunday progressiyaning barcha hadlari “yig‘indi”si

$$a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+\dots=\frac{a}{1-q} \tag{2}$$

formula bilan hisoblanishini bilasiz. Xususan,

$$0{,}25363636\dots=\frac{25}{100}+\frac{36}{100^2}+\frac{36}{100^3}+\frac{36}{100^4}+\dots$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{36}{100^2}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{9}{2500}\cdot\frac{36}{1-0.01}=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{1100}=\frac{279}{1100}$$

(qavs ichidagi ifodaga (2) formula qo‘llandi).

Yuqorida “yig‘indi” so‘zini qo‘shtirnoq bilan yozdik. Bunga sabab – aslida $\frac{a}{1-q}$ ifoda (1) geometrik progressiyaning hadlar yig‘indisi emas – hozirgacha biror inson cheksiz ko‘p sonni qo‘shib chiqolmagan. (Hatto qo‘shiluvchilar soni cheksiz bo‘lgan $0+0+0+\dots$ yig‘indini ham!)

(2) formulaning ma’nosi aslida bunday: chap tomondagi hadlardan dastlabki n tasini qo‘shib chiqsak,

yig‘indi n ortgan sayin $\frac{a}{1-q}$ soniga yaqinlashib boradi matematika tilida, intiladi. Agar x_n ketma-ketlik hadlari n ortgan sayin a soniga yaqinlashib borsa, bu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{yoki} \quad x_n \to a$$

yozuvi bilan ifodalanadi va limitga o‘tish amali deyiladi. Shunday qilib, limitga o‘tish amali “cheksizlikka eltadigan o‘ziga xos vosita – narvon”.

Limitning juda sodda misoli:

$$\lim_{n\to\infty} 0,\underbrace{999\ldots99}_{\text{n marta 9}} = 0,99999\ldots = 0,(9) = 1.$$

Bu yerda ketma-ketlik hadlari limitga, ya’ni 1 ga yaqinlashib borishi yaqqol:

$$1-0,9=0,1;\ \ 1-0,99=0,01;\ \ 1-0,999=0,001;$$
$$1-0,9999=0,0001,\ldots .$$

Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya “hadlar yig‘indisi” ham aslida ana shunday limit:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1})}_{n\ ta\ qo‘shiluvchi} = \frac{a}{1-q}.$$

Masalan,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}, \qquad (3)$$

Mashq. (3) formulani isbotlang.

Demak,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

Avvalgi maqolamizda o'rgangan uzluksiz kasrlar ham aynan limitga o'tish orqali aniq ta'riflanadi ["Chin qiziqarli matematika" II. § 2].

Xususan, oltin kesimning uzluksiz kasrga yoyilmasi uchun

$$\gamma = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

bu yerda u_n – n-Fibonachchi soni, $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$ esa munosib kasr.

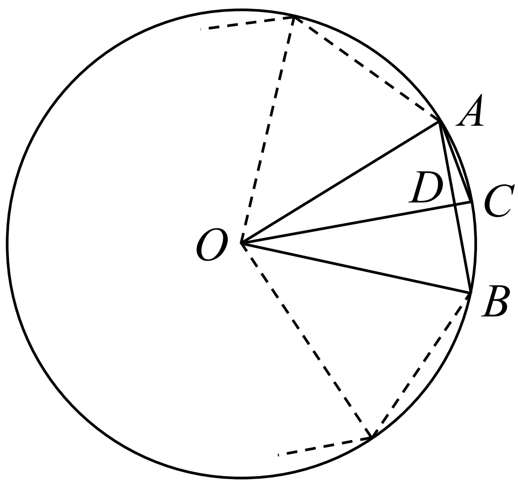
Yuqoridagilarga o'xshash holat geometriyada ham doim uchraydi. Ma'lumki, aylana, ta'rifga ko'ra, tekislikning markaz deb ataladigan tayin bir nuqtasidan bir xil masofada yotadigan nuqtalari to'plamidan iborat. Aylananing ko'p xossalarini o'rganish uchun shu ta'rif kifoya. Ammo aylana uzunligini hisoblashga kelganda, qiyinchilikka duch kelinadi. Axir, aylananing uzunligini kesmaning uzunligiga o'xshatib hisoblab, hatto ta'riflab ham bo'lmaydi-da. "Nima bo'libdi? – deyishi mumkin kimdir. – Ip bilan o'lchash mumkin-ku (masalan, silindr g'o'laning aylanasini)". Amalda shunday qilsa bo'ladi. Faqat bunda, birinchidan, aylananing uzunligi taqriban topiladi. Ikkinchidan, muhimi, bu usul bilan faqat chekli sondagi (yuzta, millionta) aylana uzunligini hisoblash mumkin, ammo ixtiyoriy aylana uchun yaroqli formula chiqarib bo'lmaydi. Ixtiyoriy aylana degani bu – cheksiz ko'p aylana degani.

Ana shu sabablarga ko'ra geometriyada aylana uzunligini topish uchun unga ichki chizilgan qavariq ko'pburchaklar jalb qilinadi.

Qadimgi Yunonistondayoq aylana uzunligi P ning diametr D ga nisbati $P:D$ o‘zgarmas bo‘lishini bilishgan. Agar ana shu nisbat π bilan belgilansa (yunoncha periferiya – “atrof” so‘zining birinchi harfi, belgilash 1706 yilda kiritilgan), aylana uzunligi uchun $P=\pi D$ formula hosil bo‘ladi, undan o‘z navbatda doiraning yuzi uchun $S=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=\pi R^2$ formula kelib chiqadi (R – radius).

Nafaqat geometriya, balki butun matematika uchun muhim bo‘lgan π sonining qiymati nimaga tengligini bilishga matematiklar juda qadim zamonlardan intilishgan. Uning o‘nli kasrga yoyilmasidagi o‘nlab va yuzlab keyinchalik, elektron hisoblash mashinalari ixtiro qilingach, millionlab raqamlarini topishgan. Bu – π ning taqribiy qiymatini hisoblash degani. Aslida maqsad – ana shu raqamlarda biror qonuniyat topib, π ning aniq qiymatini yozishga (ya’ni, limitga o‘tishga – cheksizlikka qo‘l uzatishga) urinish bo‘lgan. Bu haqda M.Mirzaahmedov va A.J.Narmanov maqolasida [FMI, 2003, №3.] hikoya qilingan. Batafsilroq ma’lumot olishni xohlovchilarga Ф.Кимпан kitobini [История числа π. 1971] tavsiya etamiz.

Hozir biz uchun muhimi – π soni uchun topilgan dastlabki aniq formula – Viyet formulasi bilan tanishish. Qarangki, π soni baribir cheksizlik bilan bog‘liq ekan – formulada cheksiz amallar ishtirok etadi.



1-rasm.

Agar radiusi R ga teng aylanaga ichki muntazam m-burchak chizilsa, uning yuzi S_m uchun

$$S_m = m \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{m}$$

formula o'rinli bo'ladi (1-rasm).

Bu formulada $m = 2^n$ va $m = 2^{n+1}$ deb olib, $\frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2\cos \frac{\alpha}{2}$ formulani qo'llasak, $S_{2^n} : S_{2^{n+1}} = \cos \frac{180^\circ}{2^n}$ tenglikka kelamiz. Endi bu tenglikni $n = 4, 8, 16, 32, \ldots$ qiymatlar uchun yozib chiqamiz:

$$S_4 : S_8 = \cos 45^\circ$$

$$S_8 : S_{16} = \cos \frac{45^\circ}{2}$$

$$S_{16} : S_{32} = \cos \frac{45^\circ}{4} \text{ va h.k.}$$

Bu tengliklar hadma-had ko'paytirilsa,

$$S_4 : S_{2^n} = \cos 45^\circ \cdot \cos \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{45^\circ}{4} \cdot \cos \frac{45^\circ}{8} \ldots \cos \frac{45^\circ}{2^{n-2}}$$

hosil bo'ladi.

Bundan Viyet shunday xulosa chiqaradi: n cheksizlikka intilganda muntazam $2n$-burchak doiraga yaqinlashgani uchun;

$$S_4 : S_{doira} = \cos 45^\circ \cdot \cos \frac{45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{45^\circ}{4} \cdot \cos \frac{45^\circ}{8} \ldots .$$

Ammo $S_4 = 2R^2$ (R radiusli aylanaga ichki chizilgan kvadrat yuzi), $\mathrm{S}_{\mathrm{doira}} = \pi \mathrm{R}^2$. Demak,

$$\frac{2}{\pi} = \cos 45^\circ \cdot \cos\frac{45^\circ}{2} \cdot \cos\frac{45^\circ}{4} \cdot \cos\frac{45^\circ}{8} \dots .$$

Mashq. $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ va $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\alpha}$ ekanligidan foydalanib Viyet formulasini

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\dots}}}$$

ko‘rinishda yozish mumkinligiga ishonch hosil qiling.

Shunday qilib, π soni cheksiz ko‘paytirish amali orqali ifodalanar ekan. Albatta “aylana – bu cheksiz ko‘p tomonli muntazam ko‘pburchak” degan tushuncha aniq emas, ma’nosiz. Ammo Viyet mushohadasini qat’iy bayon qilish mumkin: cheksiz ko‘paytmaning dastlabki n ta hadi ko‘paytirilib, so‘ng limitga o‘tiladi.

Viyetdan biroz keyin ingliz matematigi Vallis π soni uchun cheksiz ko‘paytma orqali yana ham g‘aroyibroq formula topgan:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8^2}{7 \cdot 9} \cdots$$

Yuqorida keltirilgan cheksiz ko‘paytmalar nima uchun limitga intilishini isbotlash oliy matematika tushunchalarini talab etadi. Lekin quyidagi sodda, ammo ravshan misol orqali bu xususda muayyan tasavvur hosil qilish mumkin:

$$\frac{2^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{4 \cdot 5} \cdot \frac{5^2}{5 \cdot 6} \cdot \dots = 2$$

Bu yerda dastlabki n ta had ko‘paytmasi sodda hisoblanadi:

$$\frac{2^2}{2\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{3\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{4\cdot 5}\cdot\frac{5^2}{5\cdot 6}\cdots\frac{(n-1)^2}{(n-1)n}\cdot\frac{n^2}{n\cdot(n+1)}=$$

$$=\frac{2n}{n+1}=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\to 2.$$

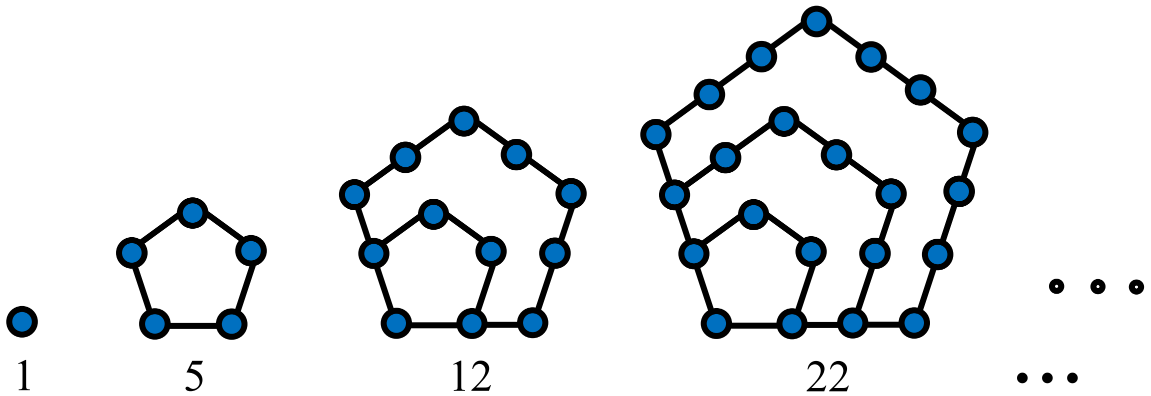
Cheksiz amallar o‘rtasida kutilmagan munosabatlar uchrab turadi. Ulardan ikkita mashhurini keltiramiz.

1) Eylerning pentagonal sonlar teoremasi:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{2^{\mathbf{1}}}-\frac{1}{2^{1+1}}+\frac{1}{2^{\mathbf{5}}}+\frac{1}{2^{5+2}}-\frac{1}{2^{\mathbf{12}}}-\frac{1}{2^{12+3}}+\frac{1}{2^{\mathbf{22}}}+\frac{1}{2^{22+4}}+\ldots.$$

Bu formulada o‘ng tomondagi ifodada ishoralar ikkitadan navbatlashib keladi, qalin shrift bilan ajratilgan darajalar –beshburchakli sonlardan iborat.

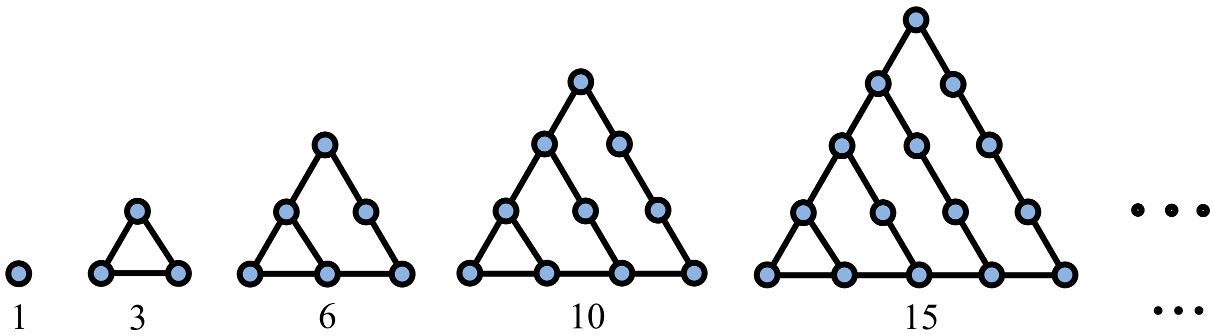


umumiy formulasi: $\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

2) Gaussning uchburchak sonlar teoremasi:

$$1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{15}}+\ldots=\frac{1-\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2^3}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^6}}{1-\frac{1}{2^5}}\cdot\ldots$$

Bu formulada esa chap tomondagi yig‘indida 2 ning darajalari uchburchakli sonlardan iborat:



(Umumiy formulasi: $\frac{n(n+1)}{2}$.)

Bu formulalarning g‘aroyibligi, birinchidan, cheksiz yig‘indi bilan cheksiz ko‘paytma orasidagi ravshan bog‘lanish bo‘lsa, ikkinchidan, geometrik shakllar bilan bog‘liq sonlarning o‘rtaga chiqishi. Formulalarning mualliflari – buyuk matematiklar Leonard Eyler (1707-1783) bilan Karl Fridrix Gauss (1777-1855) ekanligi bejiz emas.

Matematikada cheksiz yig‘indi, cheksiz ko‘paytma, cheksiz kasr (ya’ni, mohiyatan cheksiz bo‘linma) qatorida “cheksiz ildiz chiqarish amali” ham uchraydi. Uning eng sodda ko‘rinishi yana “oltin kesim” γ bilan bog‘liq:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}=\frac{1}{\gamma}. \qquad (4)$$

Bu ifodaning ma’nosi shunday: ildiz chiqarish amali n-qadamda qirqiladi:

$$g_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\sqrt{1}}}}}_{n \ marta \ ildiz} \qquad (5)$$

Masalan,

$$g_1 = 1; \quad g_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}} = \sqrt{2} = 1,4142\ldots;$$

$$g_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = 1,5537\ldots$$

va h.k.

Mana shu yo‘sinda hosil qilinadigan ketma-ketlik limitga ega bo‘lsa, u “cheksiz ildiz chiqarish natijasi” deb qabul qilinadi. Xususan, (4) misol uchun g_n limitga ega. Uni g deb belgilab turaylik:

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g.$$

(5) formuladan $\gamma_n = \sqrt{1+\gamma_{n-1}}$ bo‘lishi ko‘rinib turibdi. Bu tenglikda n ni cheksizlikka intiltirsak, $g = \sqrt{1+g}$ tenglama hosil bo‘ladi. Uni yechsak (ikkita ildizdan musbatini olish kerak) $g = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Bu esa $\gamma = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ga teskari sondir.

Mashq. Kompyuterda dastur tuzib, g_n ketma-ketlik hadlarini n ning 2 dan 10 gacha bo‘lgan qiymatlari uchun hisoblang va $\dfrac{1}{\gamma}$ ga yaqinlashib borishiga ishonch hosil qiling.

Mashq. n ortishi bilan g_n ketma-ketlik hadlari o‘sib borishini, ammo doim 2 dan kichikligicha qolishini isbotlang. (Bu ikki xossadan g_n ketma-ketlik limitga egaligi kelib chiqadi.)

Mashq. a) quyidagi ifodaning qiymatini toping:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}};$$

b) tenglamani yeching:

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+}}}}=a,\ a>0.$$

Mashq. Hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{2}}}}_{n\ ta\ ildiz}$.

Mashq. $E_1=a,\ E_2=a^a,\ E_3=a^{a^a},\ E_4=a^{a^{a^a}}, \ldots$ bo‘lsin. a ning qanday qiymatlarida $\lim\limits_{n\to\infty}E_n$ mavjud bo‘lishini aniqlang.

Matematikada cheksizlikka “olib boruvchi” yana bir tushuncha – e soni. U ham π ga o‘xshab mashhur va muhim, hatto dastlabki logarifm tushunchasi kiritilganda (J.Neper, 1614 yil) 10 yoki 2 emas, balki aynan e soni asos qilib olingan (hozir e asosli logarifm ln deb belgilanadi). Uning ta’rifi:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Bu sonni his etish uchun “murakkab protsentlar” deb ataladigan masalani ko‘raylik.

Bank mijozga qo‘ygan puli uchun muayyan davr o‘tgach shu pulni ikki baravar qilib qaytarsin. U holda mijozning bankka qo‘ygan 1000 so‘m puli o‘sha davr o‘tgach 2000 so‘m bo‘ladi. Bank mijozlarni qiziqtirish maqsadida bir marta 100 foiz emas, balki davrni 10 ga bo‘lib, har qism oxirida 10 foizdan ustama qo‘shish zimmasini oldi, deylik. Bir qarashda farqi yo‘qday tuyuladi. Ammo...

Bir oy o'tgach, 1000 so'mga uning 10 foizi qo'shilib, 1100 so'm bo'ladi, ikkinchi oyda mana shu pulning 10 foizi qo'shilib 1100+110=1210 so'm bo'ladi va h.k.

Umumiy formula chiqarish maqsadida, davrning k-qismi o'tgach mijoz puli N_k so'm bo'lsin, deylik. U holda $(k+1)$-qism oxirida pul $N_k + \frac{1}{10}N_k = N_k\left(1+\frac{1}{10}\right)$ so'mga yetadi. Belgilashga ko'ra

$$N_{k+1} = N_k\left(1+\frac{1}{10}\right).$$

Demak, N_k geometrik progressiya hosil qiladi:

$$N_k = N_0\left(1+\frac{1}{10}\right)^k$$

Shunday qilib, ustama o'nga bo'linib, o'n marta qo'shilsa, mijozning puli belgilangan davr o'tgach, $N_{10} = 1000\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$ so'mga yetadi, ya'ni

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2,593743...$$

marta ko'payadi. Yaxlitlaganda 2594 so'mni tashkil etadi.

Faraz qilaylik, bundan ilhomlangan mijozlar bankdan 100 foizni yuzga bo'lib o'sha davr mobaynida 100 marta ustama qo'shishni talab etishsin. Bu holda l000 so'm $\left(1+\frac{1}{100}\right)100 = 2,704811...$ marta ortishiga ishonch hosil qilish mumkin. Umuman, belgilangan davr n ga bo'linib, har qadamda $\frac{100}{n}$ foizdan n ustama qo'shilsa, davr oxirida pul $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ marta ko‘payadi. Bu ifodaning limitini e bilan belgilagan edik. Demak, so‘z borayotgan vaqt oralig‘ini har qancha maydalagan bilan dastlabki mablag‘ e martadan ortiq ko‘paymaydi.

e soni ham π singari irratsional bo‘lib, aniq qiymatini chekli yoki davriy o‘nli kasr shaklida yozib bo‘lmaydi:

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

Bu taqribiy qiymat to‘g‘risida latifa bor: professor talabadan e ning qiymati taqriban nimaga teng, deb so‘ragan ekan, u raqamlarni yoza ketibdi: 2,718281828. “Bas, bas, bu qadar uzun taqribiy qiymatni yodda tutib yurishga hojat yo‘q”, – debdi professor. Talaba javob beribdi: – buning sira qiyinchiligi yo‘q: ikki butun o‘ndan ettiyu ikki marta Lev Tolstoy. (1828 – L.N.Tolstoyning tug‘ilgan yili.)

Shuni ta’kidlaymizki, e sonining yoyilmasidagi kasr cheksizligi va davriy emasligidan tashqari, π soniniki singari, unda biron-bir qonun ham kuzatilmaydi. Ammo cheksiz amallar orqali chiroyli formulalar bilan yoziladi. Masalan,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots;$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$

(mahrajlar: 1, *2,* 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, ...).

e soni matematikada muhim rol o‘ynashini aytgan edik. Xususan, trigonometrik funksiyalar ko‘rsatkichli funksiya bilan mavhum birlik i va shu son orqali bog‘lanadi:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha} \qquad (6)$$

Bu tenglikda $\alpha = \pi$ deb olinsa, mashhur Eyler formulasi hosil bo‘ladi: $e^{i\pi} = -1$.

Uning mashhurligi – bitta formulada matematikada alohida o‘rin tutadigan 1, i, π va e sonlari birlashgani. Ammo ta’kidlash lozimki, Eyler formulasi asli (6) tenglikning xususiy holi, (6) tenglik esa bor-yo‘g‘i ta’rif (kelishuv), xolos. Biz π va e sonlarini o’zaro bog‘laydigan boshqa ajoyib formula va uning yana ham g‘aroyibroq muallifi bilan quyiroqda tanishamiz.

§ 5. Geron formulasi va uchburchak izoperimetriyasi[6]

Uchburchak izoperimetriyasi – bu perimetri bir xil barcha uchburchaklar ichida yuzi eng katta bo‘lganini topish masalasidir. Uni bir necha usulda hal etish mumkin. Mana eng qisqa yechish usuli: a, b, c – ixtiyoriy uchburchak tomonlari, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ esa uning yarimperimetri bo‘lsin. Uchburchakning uch tomoni a, b, c berilganda yuzi Geron formulasi bilan topilishi yaxshi ma’lum:

[6] FMI, 2009, №5.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (1)$$

Uni $S^2=p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)$ ko‘rinishda yozib olib, nuqta bilan ajratilgan uch ko‘paytuvchiga arifmetik va geometrik o‘rtalar haqidagi mashhur tengsizlikni qo‘llaymiz. Uchta musbat son uchun mazkur tengsizlik aslida

$$\sqrt[3]{uvw}\le\frac{u+v+w}{3}$$

ko‘rinishga ega, lekin bizga uning

$$uvw\le\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3. \qquad (2)$$

shakli qo‘l keladi:

$$S^2=p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)\le p\cdot\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3\le$$

$$\le p\left(\frac{3p-(a+b+c)}{3}\right)^3=\frac{p^4}{27}, \qquad (3)$$

chunki $a+b+c=2p$. Demak, $S\le\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$, ya’ni, perimetri $2p$ ga teng ixtiyoriy uchburchak yuzi $\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$ dan katta bo‘la olmaydi. Ammo perimetri $2p$ ga teng tomonli uchburchak yuzi aynan $\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$ ga teng.

Mashq. So‘nggi tasdiq to‘g‘riligini tekshirib ko‘ring.

Uchburchak izoperimetriyasi masalasi hal bo‘ldi: perimetri berilgan uchburchaklar ichida teng tomonli uchburchak eng katta yuzaga ega bo‘lar ekan.

Bayon qilingan yechimni qisqa deb bo'ladimi? Birinchidan, (2) tengsizlikning isboti ham hisobga olinishi kerak. Ikkinchidan, Geron formulasining isbotini ham eslash ortiqchalik qilmaydi.

(2) tengsizlikni isbotlash uchun, unda $u = x^3$, $v = y^3$, $w = z^3$ deb olib, so'ng har ikki tomondan kub ildiz chiqarib, bunday ko'rinishda yozib olamiz:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0. \tag{4}$$

Buning o'rinli ekanligi esa mana bu ayniyatdan kelib chiqadi:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \\ = (x + y + z)\frac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{2}. \tag{5}$$

Mashq. (5) ayniyatni isbotlang.

Darvoqe, (5) ayniyatdan nafaqat (4) tengsizlikning o'zi kelib chiqadi, balki uning muhim qo'shimchasi ham ravshan ko'rinadi:

$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ bo'lishi uchun $x = y = z$ bo'lishi zarur va yetarli.

Xususan, (3) ning o'ng va chap tomoni o'zaro teng, yoki baribir $S = \frac{\sqrt{3}}{9}p^2$ degan shart $p - a = p - b = p - c$ tengliklarga tengkuchlidir, bu esa o'z navbatida yuzi eng katta uchburchak teng tomonli demakdir. Aks holda, ya'ni x, y, z sonlar o'zaro teng bo'lmasa, (5) ayniyatga ko'ra $x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz$ bo'lishi ko'rinib turibdi.

Bu xossani (3) ga qo'llaymiz. Natijada (5) ayniyat uchburchak izoperimetriyasini oshig'i bilan hal qilib beradi:

birinchidan, perimetri p ga teng ixtiyoriy uchburchak yuzi uchun $S \le \frac{\sqrt{3}}{9} p^2$;

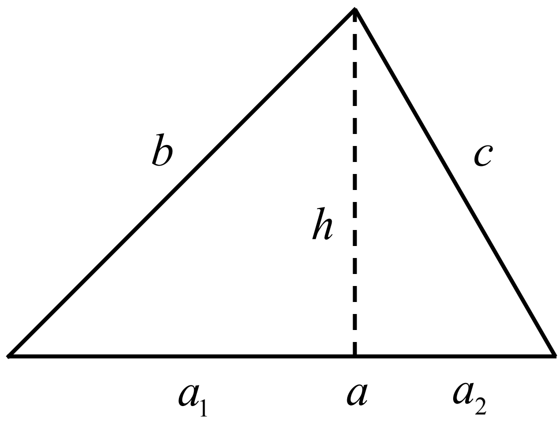
ikkinchidan, teng tomonli uchburchak uchun $S = \frac{\sqrt{3}}{9} p^2$;

uchinchidan, uchburchak teng tomonli bo‘lmasa, $S < \frac{\sqrt{3}}{9} p^2$.

Endi Geron formulasining isbotiga kelaylik. U darsliklarda odatda 1-rasmga Pifagor teoremasini qo‘llashdan hosil bo‘ladigan

$$h^2 + a_1^2 = b^2, \quad h^2 + a_2^2 = c^2,$$
$$a_1 + a_2 = a$$

sistemani h, a_1, a_2 – noma’lumlar, a, b, c – berilgan sonlar deb qarab yechishga asoslanadi.



1-rasm.

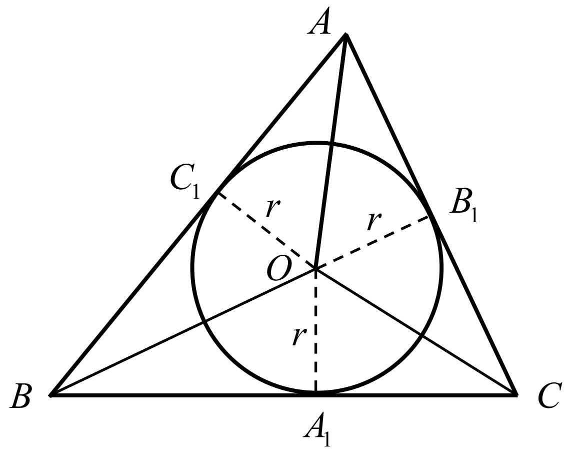
Mashq. Sistemadan h ni toping, so‘ng, $S = \frac{1}{2}ah$ formulaga qo‘yib, Geron formulasini keltirib chiqaring.

Bu yumush ancha-muncha algebraik mahorat talab etadi. Shuning uchun biz bu yerda Geron formulasining boshqa bir isbotini bayon qilamiz. U algebraga kamroq tayanadi hamda

$$p - a, \;\; p - b, \;\; p - c$$

ko‘paytuvchilarning geometrik ma’nosini ham namoyon etadi.

Berilgan ABC aylanaga ichki chizilgan aylana markazi O, radiusi r, tomonlarga urinish nuqtalari A_1, B_1, C_1 bo‘lsin (2-rasm).



2-rasm.

$BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ deb belgilaymiz. Tomonlar yig‘indisi (*uch tomon uzunliklarining yig‘indisi* deyish to‘g‘riroq bo‘lardi, ammo biz qisqaroq iborani qo‘llaymiz), ya’ni $P = a + b + c$ kattalik uchburchak *perimetri*, uning yarmi bo‘lgan $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ soni esa *yarimperimetr* deb atalishi ma’lum. (*Izoperimetriya* so‘zi “bir xil perimetrga ega bo‘lish” ma’nosini bildiradi.)

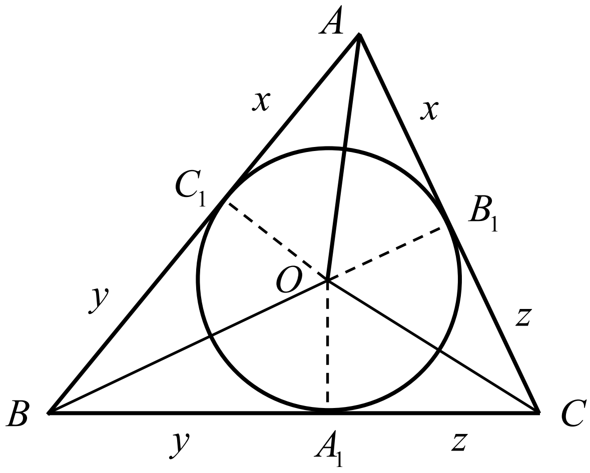
Dastavval uchburchak yuzi uchun yana bir foydali formulani eslaylik. Ichki chizilgan aylananing radiuslari OC_1, OB_1, OA_1 mos tartibda AB, CA, BC tomonlarga perpendikulyar bo‘lgani uchun:

$$S = S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = rp. \qquad (6)$$

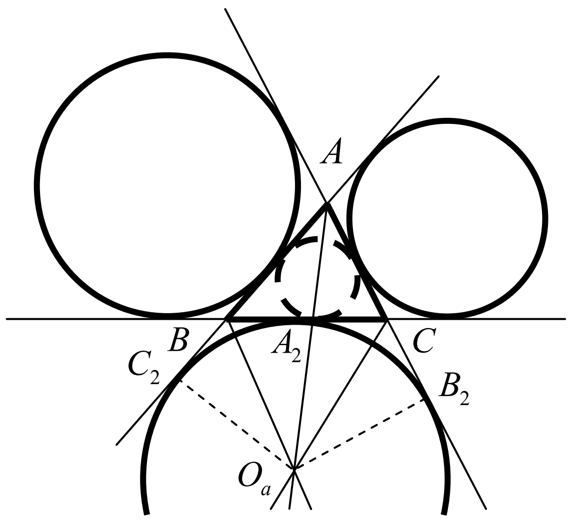
Aylanaga tashqi nuqtadan o‘tkazilgan urinma kesmalari teng, degan xossa bor. Undan foydalanib $x = AB_1 = AC_1$, $y = BC_1 = BA_1$, $z = CA_1 = CB_1$ belgilash kiritamiz.

3-rasmga ko‘ra $y + z = a$, $z + x = b$, $x + y = c$. Bu uch tenglikni hadma-had qo‘shsak, $x + y + z = p$ kelib chiqadi. Demak, $x = p - a, y = p - b, z = p - c$ – bu tengliklar Geron formulasida ildiz ostidagi ko‘paytuvchilarning geometrik talqinini ifodalaydi. Bu uch kattalik yana bir geometrik ma’noga ham ega ekan.

U uchburchakka *ichki-tashqi chizilgan*, ya'ni uchburchakning bir tomoni hamda qolgan ikki tomonining davomiga urinadigan aylanalar bilan bog'liq. 4-rasmda ichki-tashqi chizilgan aylanalar tasvirlangan. Unda AB va AC tomonlarga yopishgani to'liq chizildi, BC tomonga bilan AB va AC tomonlarning davomiga uringani esa joyni tejash maqsadida qisman chizildi. Bu aylananing markazini ham, o'zini ham O_a bilan belgilaymiz (Shaklni yana ham ixchamlashtirish zarur bo'lganda har uch aylana ham qisman chizilishi mumkin).



3-rasm.



4-rasm.

O_a aylananing BC, CA, AB to'g'ri chiziqlarga urinish nuqtalarini A_2, B_2, C_2 deb belgilaylik (Ular ichki chizilgan aylananing urinish nuqtalari A_1, B_1, C_1 bilan ustma-ust tushishi shart emas).

A, B va C nuqtalardan aylanaga o'tkazilgan urinma kesmalari ham teng, albatta:

$$x_a = AC_2 = AB_2,\ y_a = BC_2 = BA_2,\ z_a = CA_2 = CB_2.$$

Bu safar bu uch kattalik uchun

$$x_a - y_a = c,\ \ x_a - z_a = b,\ \ y_a + z_a = a$$

munosabatlar o‘rinli. Har uchalasini hadma-had qo‘shsak,

$$x_a = \frac{a+b+c}{2} = p,$$

o‘rniga qo‘yilsa, $y_a = p - c$, $z_a = p - b$ hosil bo‘ladi. Geron formulasidagi bitta ko‘paytuvchi yetishmayapti:

$p - a = x_a - a = x_a - y_a - z_a$ – bu $p = x + y + z$ tenglikning o‘rniga o‘tadi.

Uchburchakning yuzi uchun (6) ga o‘xshash formula ham kuchga ega. O_a aylana radiusi r_a bo‘lsa, $r_a = O_aA_2 = O_aB_2 = O_aC_2$ tengliklar hamda $O_aA_2 \perp BC$, $O_aB_2 \perp AC$, $O_aC_2 \perp AB$ munosabatlar o‘rinli. Shuning uchun, bir tomondan,

$$S_{ABO_a} = \frac{1}{2}cr_a, \quad S_{ACO_a} = \frac{1}{2}br_a, \quad S_{BCO_a} = \frac{1}{2}ar_a.$$

Ikkinchi tomonlan, BC_2O_a bilan BA_2O_a hamda CB_2O_a bilan CA_2O_a o‘zaro tengligi ravshan. Demak, ularning yuzlari ham teng.

Shunga asosan,

$$S = S_{ABO_aC} - S_{A_2BO_a} - S_{ACO_a} = S_{ABO_a} + S_{ACO_a} - S_{BC_2O_a} - S_{CB_2O_a} =$$

$$= \frac{1}{2}br_a + \frac{1}{2}cr_a - \frac{1}{2}(p-c)r_a - \frac{1}{2}(p-b)r_a = \frac{1}{2}(b+c-p)r_a = \frac{1}{2}(p-a)r_a.$$

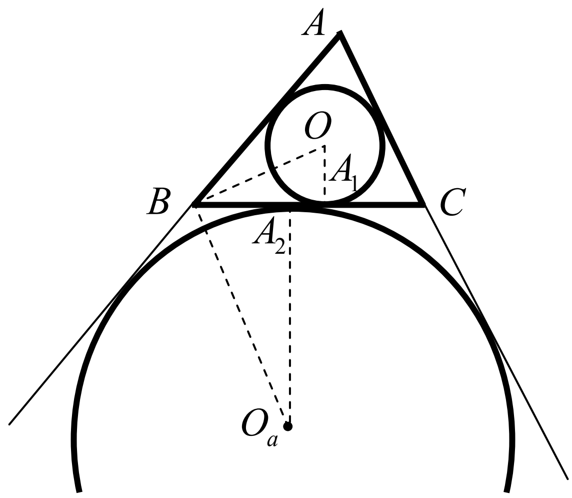
Albatta, $S = \frac{1}{2}(p-b)r_b$, $S = \frac{1}{2}(p-c)r_c$ formulalar ham o‘rinli.

Mashq. (6) hamda oxirgi formulalar yordamida

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

tenglikni isbotlang.

Chiqarilgan xossalardan Geron formulasining hidi anqib turibdi. So‘nggi qadamni qo‘yish uchun ichki chizilgan aylana bilan O_a aylana hosil qiladigan A_1BO va A_2BO_a o‘xshash uchburchaklarni ko‘makka chaqirish kerak (5-rasm).



5-rasm.

Mashq. Bu uchburchaklar chindan o‘xshash bo‘lishini isbotlang.

O‘xshash uchburchaklar xossasiga ko‘ra, $\dfrac{OA_1}{A_1B} = \dfrac{A_2B}{A_2O_a}$, ya’ni $\dfrac{r}{p-b} = \dfrac{p-c}{r_a}$. Bunga $r = \dfrac{S}{p}$, $r_a = \dfrac{S}{p-a}$ qiymatlarni qo‘yib, kasrlardan qutilsak, isbotlash talab etilgan

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

formula hosil bo‘ladi!

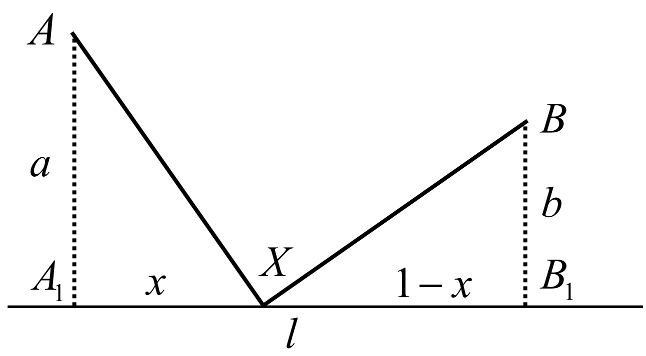
Geron formulasining bu isboti ham qisqa emas, lekin... yo‘l-yo‘lakay ichki-tashqi chizilgan aylana kabi muhim tushuncha, bir talay ajabtovur xossalar bilan tanishdik. Muhimi, yana bir bor geometriyaning jozibadorligiga guvoh bo‘ldik.

§ 6. Geron masalasi va uchburchak izoperimetriyasi[7]

Biz oldingi mavzuda uchburchak izoperimetriyasi deb ataladigan masala yechimi bilan tanishgan edik. U yerda bayon qilingan yechim uchburchakning yuzi uchun Geron formulasiga asoslanib, u qadar sodda emas edi. Bu yerda xuddi shu masalaning yana bir yechimini bayon qilamiz. Bu yechim ham g‘aroyib tarzda yana qadimgi yunon matematigi Geron Iskandariyalik (V asr) nomi bilan bog‘liqdir. U o‘zining “Ko‘zgular to‘g‘risida” degan asarida mana bunday masalani qaragan: l to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda A va B nuqtalar berilgan. A dan chiqib, avval l to‘g‘ri chiziqqa, so‘ng B nuqtaga boradigan eng qisqa yo‘lni toping.

Boshqacha qilib aytganda, l ustida shunday X nuqta qurish kerakki, $AX+XB$ masofa eng qisqa bo‘lsin.

Asar nomidan ham ko‘rinib turibdiki, masala optika bilan bog‘liq: Geron A dan chiqqan yorug‘lik nuri l ko‘zgudan qaytib B nuqtaga eng qisqa yo‘l bilan boradi, deb hisoblagan. Geron masalasini hisoblash yo‘li bilan yechish mumkin. A nuqta to‘g‘ri chiziqdan a masofada, B nuqta esa b masofada bo‘lsin. Ulardan tushirilgan perpendikulyarlar asoslari A_1 va B_1 bo‘lsin. A_1B_1 masofani 1 ga teng deb hisoblash mumkin



1-rasm.

[7] FMI, 2009, №6.

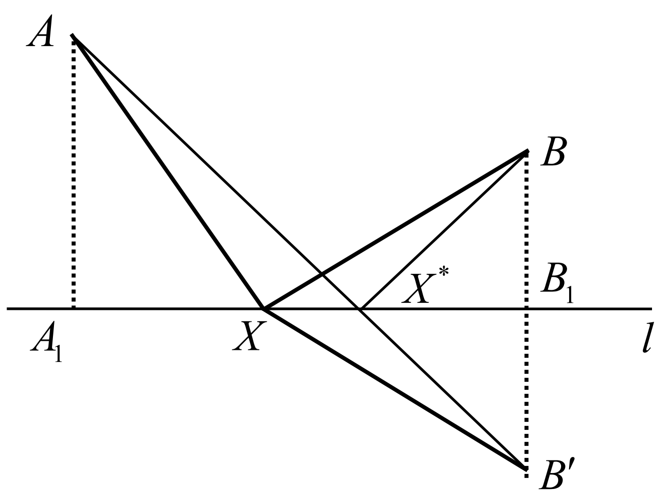
(masalan, o‘lchov birligi sifatida olib). $A_1X = x$ noma’lumni kiritsak, $B_1X = 1 - x$ bo‘ladi (1-rasm).

Pifagor teoremasini qo‘llab,

$$AX + BX = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (1 - x)^2}$$

funksiya hosil qilamiz. Geron masalasida mana shu funksiyaning eng kichik qiymatini topish talab etiladi. Uni hosila yordamida yechish mumkin. Lekin bunda anchayin hisob-kitob taqozo etiladi. Holbuki, Geron masalasini juda qisqa va nafis mushohada bilan yechish usuli bor. Buning uchun B nuqtaning l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik aksini yasaymiz (axir l ko‘zgu deyilyapti, qolaversa).

O‘qqa nisbatan simmetriyaning xossasiga ko‘ra $BX = B'X$. Demak, $AX + BX = AX + B'X$ – bu esa AXB' siniq chiziq uzunligidir. Natijada Geron masalasi mana bunday masalaga almashdi: l to‘g‘ri chiziqning ikki tomonida A va B' nuqtalar berilgan. Ularni tutashtiruvchi siniq chiziqlar ichidan eng qisqasini toping. Bu masalaning yechimi esa juda jo‘n: AB' kesmadan iborat. Uning l bilan kesishish nuqtasini X^* deb belgilasak (2-rasm),



2-rasm.

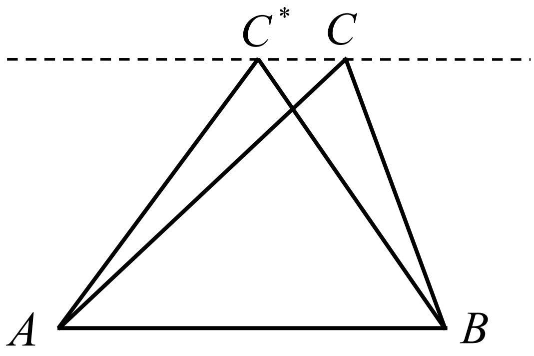
$$\angle AX^*A_1 = \angle B'X^*B_1 = \angle BX^*B_1.$$

Shunday qilib, A dan B gacha eng qisqa yo'l "tushish burchagi qaytish burchagiga teng" degan xossaga ega siniq chiziqdan iborat bo'lar ekan.

Xususan, AB to'g'ri chiziq l ga parallel bo'lsa, X^* nuqta A_1B_1 kesmaning o'rtasida yotadi, ya'ni AX^*B uchburchak teng yonli bo'ladi.

Geron masalasining yechimidan izoperimetriya bilan aloqador mana bunday xossa kelib chiqar ekan: ikki tomoni teng bo'lmagan istalgan uchburchak berilgan bo'lsin. U holda yuzi shu uchburchak yuziga teng, ammo perimetri qisqaroq teng yonli uchburchak topiladi.

Chindan, ABC uchburchakda $AC > BC$ bo'lsin. C dan AB ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazib, uni "ko'zgu" sifatida olamiz (3-rasm). C^* nuqta bu to'g'ri chiziq ustida yotib, ABC^* uchburchak teng yonli bo'lsin. U holda, bir tomondan, ABC va ABC^* uchburchaklarning yuzlari teng, ikkinchi tomondan, Geron masalasining yechimiga ko'ra, ABC^* ning perimetri ABC nikidan kichik.



3-rasm.

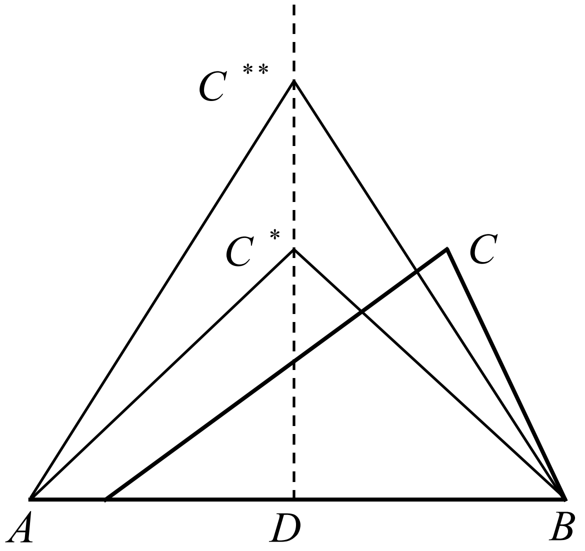
Natija. Perimetri tayin qiymatga teng istalgan uchburchak berilgan bo'lsin. U holda xuddi shunday perimetrga ega, ammo yuzi kichik bo'lmagan teng yonli uchburchak topiladi.

Chindan, ABC uchburchakning AC va BC tomonlari teng bo'lmasin. U holda yuzini o'zgartirmay, ammo perimetri ABC nikidan kichik ABC^* teng yonli uchburchak yasash bilan tanishdik. Endi bu uchburchakning C^* uchini C^*D balandlik bo'yicha yuqoriga ko'taramiz. Ravshanki (4-rasm),

$$AC^{**} + BC^{**} = AC + BC$$

bo‘lgan C^{**} nuqta topiladi. Bunda ABC^{**} uchburchakning perimetri ABCniki bilan bir xil, yuzi esa katta.

Mashq. C^{**} nuqtani qurish usulini bayon qiling.



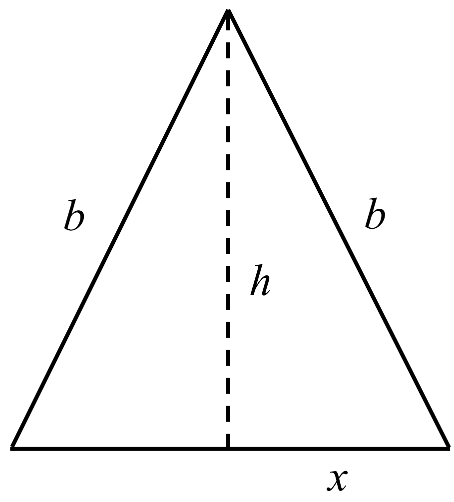
4-rasm.

Shuning uchun perimetri berilgan teng yonli uchburchaklar ichida yuzi eng kattasini topsak, burchak izoperimetriyasi masalasi hal bo‘ladi.

Bu masala bilan shug‘ullanishdan avval mana bu holatga e’tibor qarataylik: biz uchburchakning tomonlari orasida o‘zaro tenglari bo‘lmasa, bunday uchburchak yuzi eng katta bo‘la olmasligini ko‘rdik. Shuning o‘zidan yuzi eng katta uchburchak bu teng tomonli uchburchak ekanligi kelib chiqmaydimi?

Mantiqan kelib chiqmas ekan. Mana bunday xulosa kelib chiqadi, albatta: perimetri berilgan uchburchaklar ichida yuzi eng kattasi mavjud bo‘lsa, uning tomonlari o‘zaro teng bo‘lishi shart. Lekin yuqoridagi mulohazalardan mantiqan yuzi katta uchburchak mavjudligi kelib chiqmaydi. Chunki uzunligi har xil AC va BC tomonlarni o‘zgartirib, yuzi kattaroq teng yonli ABC_1 uchburchak hosil qilish mumkin, ammo hosil bo‘lgan ABC_1 uchburchakning AB va BC_1 tomonlari teng bo‘lishi shart emas. ABC_1 uchburchakka yuqoridagi kabi amalni qo‘llasak, go‘yo uchala tomoni teng uchburchak hosil bo‘ladiganday. Ammo bunda tomonlar uzunligi o‘zgarib, avvalgi ikkita teng tomon o‘rniga yangi ikkita teng tomon hosil bo‘ladi, ammo avvalgi tomonlarning tengligi buziladi. Shuning uchun, uchburchakning perimetrini o‘zgartirmay, yuzini kattalashtirish amali hech qachon tugamaydi.

Xullas, teng yonli uchburchaklar uchun izoperimetriya masalasini alohida hal qilish yo‘lini topish kerak. Bu masalani algebrani qo‘llab yechamiz. Yarim perimetri p ga teng tengyonli uchburchaklarni qaraymiz. Agar yon tomonini b desak, asosining yarmi $x = p - b$ bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Demak, balandligi, Pifagor teoremasiga ko‘ra



5-rasm.

$$h = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{(p-x)^2 - x^2} = \sqrt{p^2 - 2px},$$

yuzi esa

$$S = xh = x\sqrt{p^2 - 2px}.$$

Bu formulaga asosan, masalamizni algebra tilida shunday ifoda etish mumkin (5-rasm):

Musbat x ning qaysi qiymatida

$$S^2 = x^2(p^2 - 2px) = p(px^2 - 2x^3)$$

funksiya eng katta qiymatga ega bo‘ladi?

Javob: $x = \dfrac{p}{3}$ bo‘lganda.

Haqiqatan, bir tomondan x ning bu qiymatida $S^2 = \dfrac{p^4}{27}$. Ikkinchi tomondan, x ning boshqa musbat qiymatlarida

$$S^2 = p(px^2 - 2x^3) < \frac{p^4}{27}.$$

Biroz soddalashtirsak, $54x^3 - 27px^2 + p^3 > 0$.

Bu tengsizlik esa

$$54x^3 - 27px^2 + p^3 = (6x + p)(3x - p)^2 \qquad (*)$$

ayniyatdan kelib chiqadi, chunki x ham, p ham musbat.

Mashq. (*) ning chap tomondagi ko‘phadni ko‘paytuvchilarga ajratish yoki ko‘phadni ko‘phadga bo‘lish usuli bilan isbotlang.

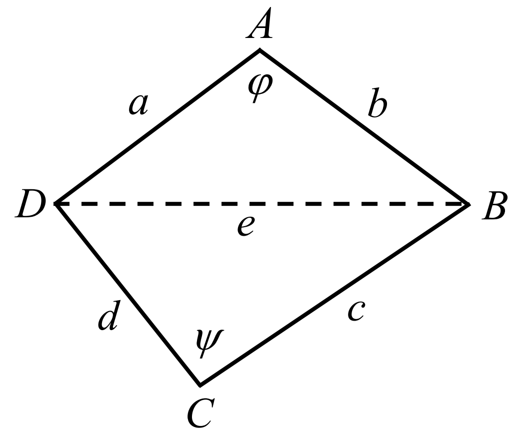
Darvoqe, (*) ayniyatdan uning chap tomonidagi ko‘phad $x = \frac{p}{3}$ bo‘lganda eng kichik qiymatiga erishishi ko‘rinib turibdi. x ning bu qiymatida uchburchakning har uch tomoni $a = 2x = \frac{2p}{3}$ ga teng, ya’ni uchburchak teng tomonli bo‘ladi. Shu bilan uchburchak izoperimetriyasining yana bir yechimini hosil qildik. Afsuski, bu yechimda ham geometriyadan ko‘ra ko‘proq algebraga tayanildi.

Tadqiqot uchun mavzu: perimetri berilgan songa teng barcha teng yonli uchburchaklar ichida yuzi eng kattasi teng tomonli uchburchak ekanini sof geometrik yo‘l bilan isbotlang.

§ 7. Braxmagupta formulasi va to‘rtburchak izoperimetriyasi[8]

Avvalgi suhbatlarimizda uchburchak izoperimetriyasi bilan shug‘ullanib, perimetri berilgan uchburchaklar ichida yuzi eng katta bo‘lgani teng tomonli uchburchak ekanligini ikki xil usulda isbotlagan edik. Endi xuddi shu kabi masalani to‘rtburchak uchun o‘rganaylik. Bir qarashda, uchburchak izoperimetriyasining sodda yechimi hali topilmaganidan kelib chiqilsa, to‘rtburchak izoperimetriyasi yana ham murakkabroq bo‘lishi kerak. Ammo holat unday emas. Faqat to‘rtburchak yuzi uchun Geron formulasiga o‘xshash formulani keltirib chiqarish kifoya ekan.

Shunday qilib, bizga tomonlari soat mili yo‘nalishida a, b, c, d deb belgilangan to‘rtburchak berilgan bo‘lsin. Agar uchburchakning uch tomoni berilgan bo‘lsa, bunday uchburchakning yuzi tayin bo‘ladi. Undan farqli tomonlari mos ravishda teng, ammo o‘zlari teng bo‘lmagan to‘rtburchaklar ko‘p. Misol tari-



1-rasm.

qasida tomonlari bir xil romblarni qarash kifoya.Shundan kelib chiqib, qaralayotgan to‘rtburchagimizning qarama-qarshi ikki burchagi ham berilgan deb olamiz: AB va AD orasidagi burchak φ, CB va CD orasidagisi esa ψ (1-rasm). Bundan tashqari to‘rtburchak tomonlari va diagonalini rasmdagidek belgilaymiz va ABD, CBD uchburchaklarga kosinuslar teoremasini qo‘llaymiz

[8] FMI, 2010, №1.

$$e^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi = b^2 + c^2 - 2bc\cos\psi.$$

Bundan

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos\varphi - 2bc\cos\psi. \qquad (1)$$

Ikkinchi tomondan, to‘rtburchagimiz yuzi uchun

$$S = \frac{1}{2}ad\sin\varphi + \frac{1}{2}bc\sin\psi \qquad (2)$$

formulaga egamiz. (1) va (2) tengliklar orqali to‘rtburchak yuzi uchun soddaroq formula hosil qilishga harakat qilamiz. Shu maqsadda (1) va (2) tengliklarni kvadratga oshiramiz:

$$\begin{aligned}&(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = \\ &= 4a^2d^2\cos^2\varphi + 4b^2c^2\cos^2\psi - 8abcd\cos\varphi\cos\psi,\end{aligned} \qquad (3)$$

$$4S^2 = a^2d^2\sin^2\varphi + b^2c^2\sin^2\psi + 2abcd\sin\varphi\sin\psi. \qquad (4)$$

Agar (4) tenglikning har ikki tomonini 4 ga ko‘paytirib, (3) tenglik bilan hadma-had qo‘shsak, so‘ng $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ va

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi + \psi)$$

ayniyatlardan foydalansak,

$$16S^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(a^2d^2 + 4b^2c^2) - 8abcd\cos(\varphi + \psi)$$

tenglikni hosil qilammz. Uning o‘ng tomonini mana bunday qilib aynan almashtiramiz:

$$\begin{aligned}&4(a^2d^2 + 4b^2c^2) - 8abcd\cos(\varphi + \psi) = 4(a^2d^2 + 4b^2c^2 + 2abcd) - \\ &- 8abcd(1 + \cos(\varphi + \psi)) = 4(ad + bc)^2 - 16abcd\cos^2\frac{\varphi + \psi}{2}.\end{aligned}$$

Demak,

$$16S^2 = 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}.$$

O‘ng tomondagi ifodani kvadratlar ayirmasi formulasiga asoslanib, ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 =$$
$$= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\times$$
$$\times(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) =$$
$$= [(a+d)^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - (a-d)^2] =$$
$$=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d).$$

Buyog‘i Geron formulasini keltirib chiqarishga o‘xshash: $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ to‘rtburchak yarimperimetri bo‘lsa, so‘nggi ifodadagi ko‘paytuvchilar mos ravishda $2(p-c),\ 2(p-b),\ 2(p-d),\ 2(p-a)$ ga tengdir. Shunday qilib, to‘rtburchakning yuzi uchun quyidagi formula kelib chiqadi:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}} \qquad (4)$$

1-natija. Aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchak yuzi uchun formula:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \qquad (5)$$

Haqiqatan, to‘rtburchak aylanaga ichki chizilgan bo‘lishi uchun uning bir juft qarama-qarshi burchaklari yig‘indisi 180° ga teng bo‘lishi zarur va yetarli, degan xossa ma’lum. Demak, ichki chizilgan to‘rtburchakda

$$\cos\frac{\varphi+\psi}{2}=\cos 90^\circ=0.$$

Shuning uchun (4) dan (5) formula kelib chiqadi.

(5) formulani birinchi marta qadimgi hind matematigi Braxmagupta (598–626 yy.) topgan. (4) formula esa uni ixtiyoriy to‘rtburchaklar uchun umumlashtirish yo‘li bilan hosil qilingan. Adabiyotlarda (5) formula Braxmagupta formulasi deyiladi. Biz (4) formulani ham shu nom bilan atayveramiz.

2-natija. Tomonlari berilgan to‘rtburchaklar ichida aylanaga ichki chizilgani eng katta yuzga ega bo‘ladi.

Haqiqatan, bir tomondan

$$\begin{gathered}(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2}\le\\ \le(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\end{gathered}\tag{6}$$

ekanligi ravshan. Ikkinchi tomondan, $\cos\frac{\varphi+\psi}{2}=0$, yoki baribir, $\varphi+\psi=180^\circ$, ya’ni to‘rtburchak ichki chizilgan bo‘lsagina (6) tengsizlikning har ikki tomoni teng chiqadi.

3-natija. Aylanaga tashqi chizilgan to‘rtburchak yuzi uchun:

$$S=\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sqrt{abcd}.\tag{7}$$

Haqiqatan, to‘rtburchak aylanaga tashqi chizilgan bo‘lishi uchun $a+c=b+d$ tenglik o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi ma’lum. Shuning uchun to‘rtburchak tashqi chizilgan bo‘lsa, u holda $p=\frac{a+b+c+d}{2}=a+c$, demak, $p-a=c$, $p-c=a$.

Xuddi shu singari $p-b=d$, $p-d=b$. Natijada

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)=abcd.$$

Buni umumlashgan Braxmagupta formulasidagi ildiz ostidagi ifodaga qo‘yib ixchamlashtirsak, (7) formulani hosil qilamiz.

4-natija. Agar to‘rtburchakka ham ichki aylana, ham tashqi aylana chizish mumkin bo‘lsa, uning yuzi tomonlari orqali mana bunday formula bilan ifodalanadi:

$$S=\sqrt{abcd}. \tag{8}$$

5-natija. Perimetri berilgan songa teng va aylanaga ichki chizish mumkin bo‘lgan to‘rtburchaklar ichida kvadrat eng katta yuzga ega bo‘ladi.

Bu natijani keltirib chiqarish uchun arifmetik va geometrik o‘rta qiymatlar orasidagi tengsizlikni eslab olaylik:

$$\sqrt[4]{xyzu}\le\frac{x+y+z+u}{4}. \tag{9}$$

(9) ning isboti ikki musbat son uchun o‘rta qiymatlar to‘g‘risida ekanligi yaxshi ma’lum $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ tengsizlikni ikki marta qo‘llashga asoslanadi:

$$\sqrt[4]{xyzu}=\sqrt{\sqrt{xy}\sqrt{zu}}\le\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{zu}}{2}\le\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+u}{2}}{2}=$$
$$=\frac{x+y+z+u}{4}.$$

Albatta, (9) tengsizlikni $\sqrt{xyzu}\le\frac{(x+y+z+u)^2}{4}$ shaklda yozib olish mumkin. Bu tengsizlikni Braxmagupta formulasiga qo‘llaymiz:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\leq$$

$$\leq\frac{(p-a+p-b+p-c+p-d)^2}{16}=\left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

chunki $p-a+p-b+p-c+p-d=4p-(a+b+c+d)=2p$.

Natijaning chindan oʻrinli ekanini koʻrish uchun yarimperimetri p ga teng kvadrat yuzi aynan $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ chiqishini eslash kifoya.

Nihoyat 2 va 5-natijalardan toʻrtburchaklar uchun izoperimetriya masalasining yechimi kelib chiqadi:

Teorema. Perimetri berilgan istalgan toʻrtburchak yuzi xuddi shunday perimetrli kvadrat yuzidan kichik yoki teng.

Haqiqatan, perimetri P ga teng istalgan toʻrtburchakni qaraylik (uni qavariq hisoblash mumkin). Uning yuzi S, tomonlari a, b, c, d boʻlsin. Tomonlari xuddi shunday kesmalardan iborat, ammo aylanaga ichki chizish mumkin boʻlgan toʻrtburchak yasaymiz.

Mashq. Bunday toʻrtburak yasash mumkinligini isbotlang.

Koʻrsatma: agar qaralayotgan toʻrtburchakning a va b tomonlari orasidagi burchak φ, c va d tomonlari orasidagi burchak ψ boʻlsa, ikki tomoni a va b ga teng, ular orasidagi burchak esa $\frac{\pi+\varphi-\psi}{2}$ boʻlgan uchburchak yasang. Soʻng uni qolgan ikki tomoni c va d qarama-qarshi burchagi esa $\frac{\pi-\varphi+\psi}{2}$ boʻlgan toʻrtburchakka toʻldiring.

Yasalgan to‘rtburchak yuzi S' bo‘lsa, 2-natijaga ko‘ra $S \le S'$, 5-natijaga ko‘ra esa S' perimetri P ga teng kvadrat yuzidan kichik yoki teng.

§ 8. Ko‘pburchak izoperimetriyasi: Shturm usuli[9]

Izoperimetrik masalalarni o‘rganar ekanmiz nemis matematigi A.Shturm birinchi bo‘lib qo‘llagan bir usul bilan tanishaylik. Usulning mohiyati arifmetik o‘rta bilan geometrik o‘rtani bog‘lovchi mashhur Koshi tengsizligi isbotida yaqqol namoyon bo‘ladi: agar $a_1, a_2, ..., a_n$ nomanfiy sonlar bo‘lsa,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad (1)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi; bunda $a_1 = a_2 = ... = a_n$ bo‘lganda va faqat shu holda o‘ng va chap tomondagi sonlar teng chiqadi (boshqacha aytganda, (1) munosabatda tenglik erishiladi).

Koshi tengsizligini boshqacharoq ifodalash ham mumkin. Buning uchun (1) tengsizlikning o‘ng tomonidagi ifodani σ bilan belgilaymiz. Ya’ni

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\sigma. \qquad (2)$$

Endi Koshi tengsizligini quyidagicha bayon qilish mumkin: yig‘indisi berilgan qiymatga (hozir bizda $n\sigma$ ga) teng bo‘lgan n ta musbat sonning (ya’ni $a_1, a_2, ..., a_n$ larning) ko‘paytmasi bu sonlar o‘zaro teng bo‘lganda eng katta qiymatga erishadi.

[9] FMI, 2010, №2.

Hozir aynan shu tasdiqni Shturm usuli bilan isbotlaymiz. Agar haqiqatan, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ larning hammasi o'zaro teng bo'lsa, (2) shartga ko'ra, ularning har biri σ ga teng bo'lishi kerak. Bu holda (1) munosabatning chap tomoni uning o'ng tomoniga teng chiqishi ko'rinib turibdi.

Endi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlar orasida σ ga teng bo'lmaganlari uchrasin (xususan, birortasi ham σ ga teng bo'lmasligi mumkin). Ularning yig'indisi roppa-rosa $n\sigma$ bo'lgani uchun, ular orasida σ dan katta bo'lgani ham, kichik bo'lgani ham topiladi. Faraz qilaylik, $a_1 > \sigma > a_2$ bo'lsin. Berilgan sonlardan a_1 o'rniga σ ni, a_2 ning o'rniga esa $a_1 + a_2 - \sigma$ olamiz. Shunda $\sigma, a_1 + a_2 - \sigma, a_3, \ldots, a_n$ sonlar yig'indisi avvalgidek $n\sigma$ ga tengligicha qoladi, ko'paytmasi esa kattalashadi, chunki: $\sigma(a_1 + a_2 - \sigma) > a_1 a_2$. Haqiqatan,

$$\sigma(a_1 + a_2 - \sigma) - a_1 a_2 = (a_1 - \sigma)(\sigma - a_2).$$

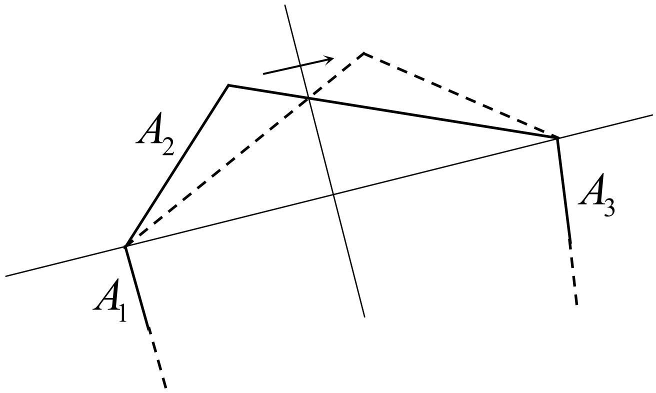
So'nggi ko'paytma esa, farazimizga ko'ra 0 dan katta.

Shunday qilib, yig'indini saqlagan holda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlar orasida σ ga teng bo'lganlarini bittaga orttirish mumkin. Shu usul bilan birin-ketin σ ga tenglari sonini oshirib borsak, ko'paytma kattalashaveradi. Bu amalni to berilgan sonlardan $n-1$ tasi σ ga teng bo'lguncha davom ettirish mumkin. Lekin yig'indisi $n\sigma$ ga teng sonlardan $n-1$ tasi σ bo'lsa, u holda oxirgisi ham σ bo'lishi ravshan. Shu bilan Koshi tengsizligi isbotlandi.

Endi Shturm usulini izoperimetriya masalasiga qo'llaylik. Perimetri na ga teng qavariq ko'pburchaklarnigina qarash kifoya. Shuning uchun n-burchak deganda faqat shunday ko'pburchaklarni tushunishga kelishib olamiz.

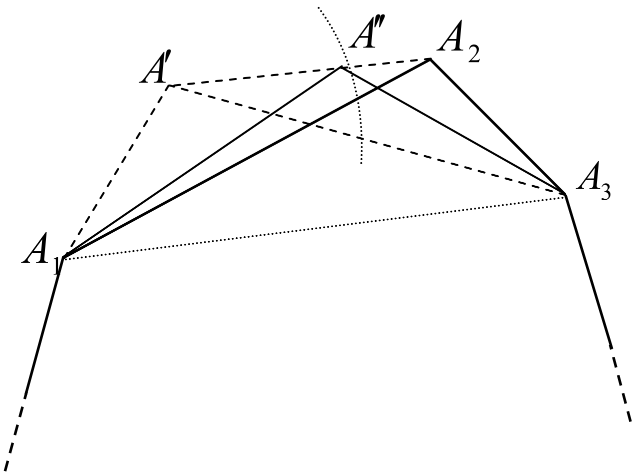
Shturm teoremasi. Ixtiyoriy $A_1A_2A_3...A_n$ ko‘pburchak uchun hamma tomoni o‘zaro teng, perimetri bir xil, ammo yuzi kattaroq n burchak topiladi.

Isboti. Berilgan $A_1A_2A_3...A_n$ ko‘pburchakning tomonlari orasida o‘zaro teng bo‘lmaganlari uchrasin. Qavariq ko‘pburchakning ixtiyoriy ikki qo‘shni tomonining o‘rnini almashtirish mumkin. 1-rasmda bu qanday amalga oshirilishi ko‘rsatilgan (ikki qo‘shni tomondan tuzilgan $A_1A_2A_3$ siniq chiziq A_1A_3 diagonal o‘rta perpendikulyariga nisbatan simmetrik almashtiriladi.) Bunda ko‘pburchakning yuzi ham, perimetri ham o‘zgarmaydi. Muhimi, boshqa tomonlari o‘z o‘rnida qoladi.



1-rasm.

Mana shu usul bilan o‘zaro teng bo‘lmagan ikki tomonni qo‘shni holga keltirish mumkin. Faraz qilaylik, ular A_1A_2 va A_2A_3 bo‘lsin. Aniqlik uchun $A_1A_2 > a,\ A_2A_3 < a$ deb olamiz. Yana $A_1A_2A_3$ siniq chiziqni yuqoridagi kabi simmetrik akslantiraylik (bu safar boshqa maqsadda). Bunda A_2 nuqta A' holatga akslansin (2-rasm).Demak, $A_1A' = A_2A_3 < a,\ A_1A_2 > a.$ Shuning uchun agar A_1 nuqtani markaz qilib, a radiusli aylana chizsak, u $A'A_2$ kesmani biror A'' nuqtada kesib o‘tadi. Biz

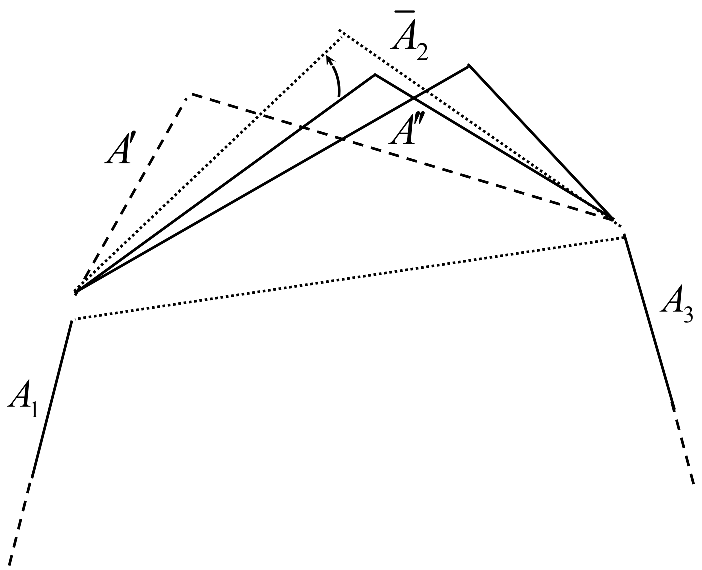


2-rasm.

kitobimizning avvalgi mavzusi (§6) da uchburchak izoperimetriyasi to‘g‘risidagi masalaning Yakob Shteyner topgan sof geometrik isbotini bayon qilgan edik. Unda ikkita lemma keltirilgan edi. Bu yerda ana shu lemmalardan ikkinchisini qo‘llaymiz. Unga muvofiq, $A_1A''A_3$ uchburchakning perimetri $A_1A_2A_3$ nikidan kichik bo‘ladi. Bundan $A_1A''+A''A_3<A_1A_2+A_2A_3$ kelib chiqadi. Lekin $A'A_2$ to‘g‘ri chiziq A_1A_3 ga parallel bo‘lgani uchun, $A_1A''A_3$ va $A_1A_2A_3$ uchburchaklar yuzlari teng.

Shunday qilib, $A_1A''A_3...A_n$ ko‘pburchakning A_1A'' tomoni a ga teng, yuzi $A_1A_2A_3...A_n$ ko‘pburchakniki bilan bir xil, perimetri esa kichikroq. Muhimi, bunda A_3A_4, A_4A_5, ..., $A_{n-1}A_n$ va A_nA_1 tomonlar o‘zgarishsiz qoladi (3-rasm).

Biz biroz aks natija hosil qildik: n-burchagimizning yuzi o‘zgarmay, perimetri kichiklashdi. Bundan kerakli natija olish, ya’ni perimetrni saqlab, yuzni kattalashtirish qiyin emas. Buning uchun A_1A'' tomonni A_1 nuqta atrofida buramiz. Bunda uning uzunligi a ga tengligicha qoladi, ko‘pburchagimizning yuzi ham, perimetri ham kattalashadi. A_1A'' tomonni shunday $A_1\bar{A}_2$ holatgacha burish mumkinki, natijada $A_1\bar{A}_2+\bar{A}_2A_3=A_1A_2+A_2A_3$ bo‘ladi. Xullas, $A_1\bar{A}_2A_3...A_n$ ko‘pburchakning bir tomoni a ga teng, perimetri



3-rasm.

$A_1A_2A_3...A_n$ niki bilan bir xil, yuzi esa $A_1A_2A_3...A_n$ ning yuzidan kattaroq bo‘ladi.

Agar $A_1\overline{A}_2A_3...A_n$ ko‘pburchakning hamma tomoni teng bo‘lmasa, ular orasida yana uzunligi a dan kattasi ham, uzunligi a dan kichigi ham topiladi. Bu ikki tomonni qo‘shni holatga keltirib olib, yana yuqoridagicha mushohada yuritamiz. Natijada n-burchakning yuzi o‘zgarmaydi, perimetri kichrayadi hamda uzunligi a ga teng tomonlari soni yana kamida bittaga ortadi.

Shu yo‘l bilan uzunligi a ga teng tomonlar sonini orttirib boramiz. Oxirgi qadamda hosil bo‘ladigan ko‘pburchakning yuzi dastlabki $A_1A_2A_3...A_n$ ko‘pburchak yuzidan katta, perimetri avvalgidek na ga teng hamda $n-1$ ta tomoni a ga teng bo‘ladi. Bundan uning hamma tomoni a ga tengligi kelib chiqadi. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

1-natija. Perimetri berilgan barcha uchburchaklar ichida teng tomonli uchburchak eng katta yuzga ega bo‘ladi.

2-natija. Perimetri berilgan barcha to‘rtburchaklar ichida kvadrat eng katta yuzga ega bo‘ladi.

Haqiqatan, Shturm teoremasini qo‘llab avval romb hosil qilamiz, tomoni berilgan barcha romblar ichida kvadrat eng katta yuzga ega bo‘lishi esa ochiq-oydin.

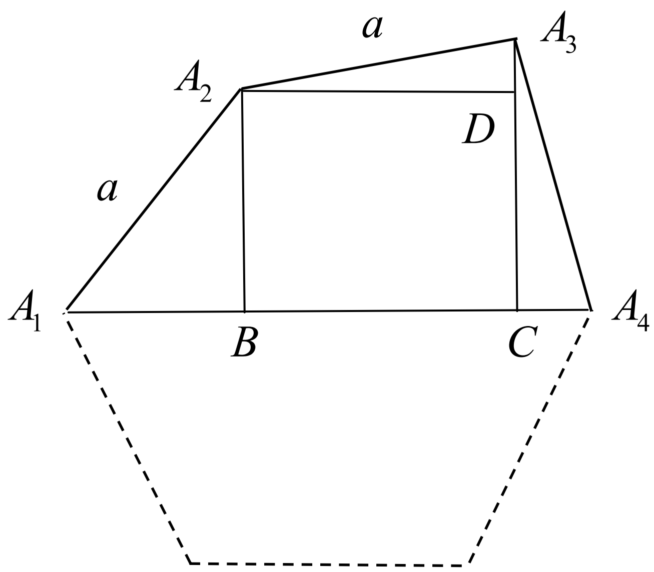
§ 9. Oltiburchak izoperimetriyasi[10]

Avvalgi suhbatimizda Shturm teoremasi bilan tanishgan edik: perimetri p ga teng istalgan n-burchak berilgan bo'lsa, xuddi shunday perimetrga ega, yuzi esa kattaroq va hamma tomoni teng qavariq n-burchak qurish mumkin.

Bu xossaga ko'ra izoperimetrik masalani hal qilishda faqat teng tomonli qavariq n-burchaklarni qarash kifoya. Bu safargi suhbatimizda Shturm teoremasining ana shu natijasiga asoslanib, oltiburchaklar uchun izoperimetriya masalasini yechamiz:

Teorema. Perimetri bir xil oltiburchaklar ichida muntazam oltiburchak eng katta yuzaga ega bo'ladi.

Perimetrni $6a$ ga teng deb olamiz va barcha tomoni a ga teng qavariq $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ oltiburchakni qaraymiz. Dastavval ikkita qarama-qarshi uchni tutashtiruvchi diagonal o'tkazamiz. Ravshanki, u oltiburchakning perimetrini teng ikkiga bo'ladi. Bunda oltiburchak ikkita qavariq to'rtburchakka bo'linadi. Ana shu bo'laklardan biri bilan shug'ullanamiz (1-rasm).



1-rasm.

A_2 va A_3 nuqtalardan A_1A_4 diagonalga tik A_2B va A_3C kesmalar tushiramiz hamda A_2 nuqtadan A_3C ga

[10] FMI, 2010, №3. (O.Qo'chqorov bilan hammualliflikda).

tik A_2D kesma o‘tkazamiz. $\angle A_2A_1B=\alpha$, $\angle A_3A_4C=\beta$ bo‘lsin. U holda

$$A_1B=a\cos\alpha,\ \ A_4C=a\cos\beta,\ \ A_2B=a\sin\alpha,$$
$$A_3C=a\sin\beta,$$

$$A_2D=\sqrt{a^2-A_3D^2}=\sqrt{a^2-(a\sin\beta-a\sin\alpha)^2}=$$
$$=a\sqrt{1-(\sin\beta-\sin\alpha)^2}.$$

Demak, $A_1A_2A_3A_4$ to‘rtburchak (ikkita uchburchak va bir trapetsiya) yuzi

$$S=S_{A_1A_2B}+S_{A_3A_4C}+S_{A_2A_3CB}=\frac{a^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{a^2}{2}\sin\beta\cos\beta+$$
$$+\frac{a\sin\alpha+a\sin\beta}{2}a\sqrt{1-(\sin\beta-\sin\alpha)^2}.$$

Shunday qilib, oltiburchaklar uchun izoperimetriya masalasi

$$S=\sin2\alpha+\sin2\beta+2(\sin\alpha+\sin\beta)\sqrt{1-(\sin\beta-\sin\alpha)^2}. \qquad (1)$$

ifodaning eng katta qiymatini topishga keladi. Bu masalaning yechimini yordamchi tasdiq tarzida bayon qilamiz.

Lemma. (1) ifodaning eng katta qiymati $3\sqrt{3}$ ga teng va u $\alpha=\beta=60^\circ$ bo‘lganda erishiladi.

Avvalambor (1) ifodada ildizning qiymati 1 dan katta bo‘lolmasligidan foydalanamiz. Shunga ko‘ra agar

$$S\le\sin2\alpha+\sin2\beta+2(\sin\alpha+\sin\beta) \qquad (2)$$

tengsizlik isbotlansa, undan (1) kelib chiqadi. (2) ning o‘ng tomonida $y=\sin2x+2\sin x$ funksiyaning $x=\alpha$ va

$x=\beta$ qiymatlari yig‘indisi turibdi. Shuning uchun quyidagi yordamchi masalani yechish kifoya:

$y=\sin 2x+2\sin x$ funksiyaning eng katta qiymatini toping.

Bu masalaning uch xil yechimini keltiramiz. Ularning har biri o‘z afzalligi va kamchiligiga ega.

1-yechim (hosila yordamida). Funksiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$$y'=2\cos 2x+2\cos x=2(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\cos x=$$
$$=4\cos^2 x+2\cos x-2.$$

Demak, ekstremum nuqtalari $2\cos^2 x+\cos x-1=0$ tenglamani qanoatlantiradi. Uni yechib, ikkita ildiz topamiz:

$$\cos x=\frac{1}{2} \text{ va } \cos x=-1.$$

Bundan x ning 0 bilan 2π oralig‘ida yotadigan qiymatlari

$$x=\frac{\pi}{3}, \quad x=\pi, \quad x=\frac{5\pi}{3}.$$

Ulardan birinchisi, ya’ni $x=60^\circ$ $y=\sin 2x+2\sin x$ funksiyaning eng katta qiymatini beradi. Demak, (2) tengsizlikning o‘ng tomonidagi ifoda $\alpha=\beta=60^\circ$ bo‘lganda eng katta qiymatga erishadi. U holda (1) ifoda ham α va β ning xuddi shu qiymatlarida eng katta bo‘ladi.

Lemma isbotlandi. Undan oltiburchaklar uchun izoperimetriya masalasining yechimi kelib chiqadi: perimetri berilgan barcha oltiburchaklar ichida muntazam oltiburchak eng katta yuzaga egadir.

2-yechim (sun’iy usul). Oltiburchaklar uchun izoperimetrik masala yechimi muntazam oltiburchak bo‘lishini taxmin qilsa bo‘ladi, albatta. Agar bu to‘g‘ri deb faraz qilinsa, u holda (1) ifodaning eng katta qiymati $\alpha=\beta=60^\circ$ bo‘lganda erishilishi kerak. Lekin bu shunchaki taxmin, xolos. Uni aniq tasdiqqa, ya’ni teoremaga aylantirish uchun

$$\sin 2x+2\sin x\le \sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

tengsizlikni isbotlash kifoya. $\sin 2x=2\sin x\cos x$ formuladan foydalanib va har ikki tomonini $\sqrt{3}$ ga ko‘paytirib, tengsizlikni

$$2\sin x\cdot\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}\sin x\le\frac{9}{2}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Endi chapdagi ko‘paytmaga $2ab\le a^2+b^2$ tengsizlikni qo‘llaymiz. To‘g‘riroq aytganda (3)

$$\sin^2 x+3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\le\frac{9}{2}$$

tengsizlikdan kelib chiqadi. Bu yerda kosinusni sinus bilan almashtirsak,

$$3-2\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\le\frac{3}{2}$$

ko‘rinishga keladi. Buning chap tomoniga “to‘liq kvadratni ajratish” deyiladigan usulni qo‘llaymiz:

$$3-2\left(\sin^2 x-2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x+\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\le\frac{9}{2}.$$

Bu tengsizlikning to‘g‘riligi ravshan – chap tomondagi ifoda $\frac{9}{2}-2\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ dan iborat bo‘lib, u $\frac{9}{2}$ dan katta bo‘lolmaydi.

Bu isbotning afzalligi – hosila tushunchasiga asoslanmaganida, ya’ni elementar, ammo nima uchun $2ab \le a^2+b^2$ tengsizlik $\sin x\cdot\cos x$ ga emas, $\sin x\cdot\sqrt{3}\cos x$ ga qo‘llangani sirkdagi ko‘zbog‘lovchining fokusiga o‘xshaydi.

3-isbot (ko‘paytuvchilarga ajratish usuli). Isbotlanishi lozim

$$\sin 2x+2\sin x\le\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (4)$$

tengsizlikni $4\sin x\cos x\le 3\sqrt{3}-4\sin x$ ko‘rinishga keltirib, har ikki tomonini kvadratga oshiramiz. $0<x<\frac{\pi}{2}$ deb hisoblash mumkin. Shuning uchun kvadratga oshirganda tengkuchli tengsizlik hosil bo‘ladi:

$$16\sin^2 x\cdot\cos^2 x\le 27-24\sqrt{3}\sin x+16\sin^2 x.$$

Bu yerda ham kosinusni sinus bilan almashtirib, hamma hadni bir tomonga yig‘amiz:

$$16\sin^4 x-24\sqrt{3}\sin x+27\ge 0.$$

Bunday ko‘rinishdagi tengsizliklar bilan ishlashning asosiy usullaridan biri – ko‘paytuvchilarga ajratishdir. Avval $2\sin x=\sqrt{3}y$ deb olinsa, o‘ng‘ayroq ko‘phad hosil bo‘lishini payqash mumkin:

$$(\sqrt{3}y)^4-24\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}y+27\ge 0, \text{ ya’ni } y^4-4y+3\ge 0.$$

Endi ko‘paytuvchilarga ajratish qiyin emas:

$$y^4 - 4y + 3 = (y-1)^2(y^2 + 2y + 3). \qquad (5)$$

Mashq. Tekshirib ko‘ring.

Nihoyat, $y^4 + 2y + 3 = (y+1)^2 + 2 > 0$ bo‘lgani uchun (5) tengsizlik, demak, (3) ham o‘rinlidir. Bundan esa lemmaning isboti kelib chiqadi.

Bundan tashqari, (5) ayniyatdan $y = 1$ ya’ni $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bo‘lgan holda va faqat shu holda tengsizlikning har ikki tomoni teng bo‘ladi, degan xulosa ham kelib chiqadi. Bu esa izoperimetrik masalaning yechimiga aniqlik kiritadi: perimetri mahkamlangan oltiburchaklar ichida muntazam oltiburchakning yuzi eng katta bo‘ladi, boshqa oltiburchaklarning yuzi esa muntazamnikidan albatta kichikdir.

Maqolamiz so‘ngida o‘quvchilarga sakkizburchaklar uchun izoperimetriya masalasining bayon qilingani kabi, ya’ni elementar usulda yechib bo‘ladimi, degan savol ustida o‘ylab ko‘rishni tavsiya etamiz. Masalaning elementar yechimi mualliflarga ma’lum emas.

§ 10. To‘rt o‘lchovli kubni ko‘rganmisiz?[11]

Biz uch o‘lchovli dunyoda yashaymiz. Shuning uchun uch o‘lchovli kubni yaxshi tasavvur qilamiz. To‘rt o‘lchovli kubni esa tasavvur qilolmaymiz. Ammo... aslida uch o‘lchovli kubni ham ko‘rish mumkin emas. Chunki kub bu geometrik shakl. Masalan, uning uchlari nuqtalardir. Nuqta o‘lchovga ega emas, o‘lchovga ega bo‘lmagan narsani esa ko‘rib ham, tutib ham bo‘lmaydi. Shuning

[11] FMI, 2003, №1.

uchun, aslida biz kubning shaklini tasavvur qilamiz. Lekin muhimi, tushuncha sifatida xotiramizda saqlaymiz, xossalarini o‘rganamiz.

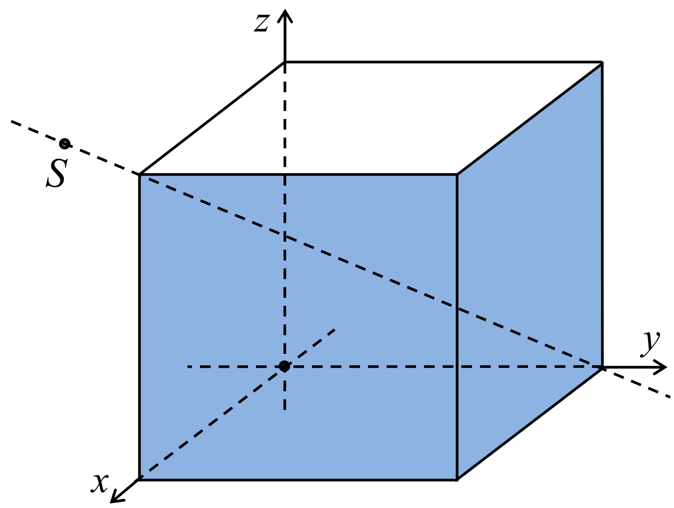
Shunday qilib, haqiqiy hayotda sof geometrik kub yo‘q, ammo shakli kubga juda yaqin narsalar ko‘p, albatta: osh tuzi kristali, bolalar o‘yinchog‘i, nard o‘yinining hukkalari, Rubik kubchasi va hokazo. Geometrik kubning har bir xossasi ayni paytda ana shu real kublarning real xossalarini aks ettiradi.

Matematikada geometrik kubning yana bir shakli bilan ham ish ko‘riladi. Uni kubning arifmetik ifodasi deb atash mumkin. Biz bundan buyon bu maqolada ana shu kub bilan ish ko‘ramiz. Bunday kubga ta’rif berish uchun, fazoda $Oxyz$ koordinatalar sistemasini kiritamiz. Bu sistemada

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1 \tag{1}$$

shartlarni qanoatlantiradigan (x, y, z) nuqtalarni to‘plasak, kub hosil bo‘ladi (1-rasm). Bu kubning tomoni 1 ga teng, lekin o‘lchov birligi ixtiyoriy bo‘lgani uchun buning ahamiyati yo‘q).

Shunday qilib, (1) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi (x, y, z) uchliklar to‘plami **kub** deb ataladi. Ya’ni, kubning har bir nuqtasi – uchta haqiqiy son bilan aniqlanadi. Shuning uchun ham bunday kub – uch o‘lchovlidir. U, tabiiyki, uch o‘lchovli fazoda – biz



1-rasm.

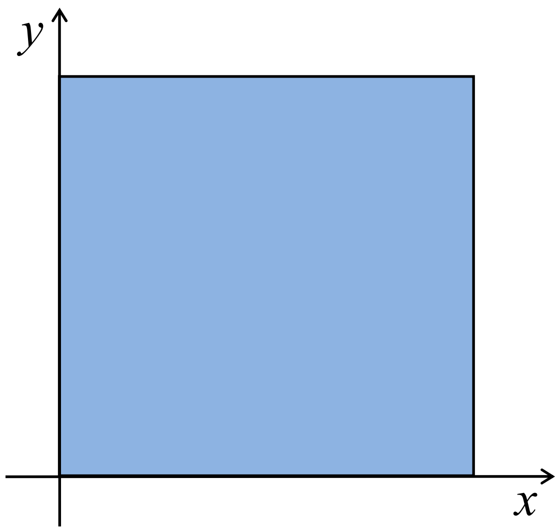
istiqomat qiladigan makonni aks ettiruvchi fazoda joylashgan.

Bir pog'ona yuqoriga chiqish – to'rt o'lchovli kub bilan shug'ullanishdan avval pastga tushamiz. Haqiqiy sonlarning uchligi o'rniga juftlari qaralsa, tekislikdagi Oxy koordinatalar sistemasida kub vazifasini

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami bajaradi. Bu esa kvadratdir (2-rasm). Demak, **kvadrat – ikki o'lchovli kub** deb qaralishi mumkin.

Xuddi shu singari, son o'qida $0 \le x \le 1$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami **kesma** hosil qiladi. Uni **bir o'lchovli kub** deb atash mumkin. Nihoyat, nuqtaning o'zini **nol o'lchovli kub** deyish qabul qilingan.



2-rasm.

Gap shundaki, bir o'lchovli kub (kesma)ning chegarasi ikkita nuqtadan iborat:

$0 \le x \le 1$ kesma chegarasi 0 va 1.

Ikki o'lchovli kub (ya'ni kvadrat)ning chegarasi to'rtta kesma, ya'ni to'rtta "bir o'lchovli kub"dan iborat.

Uch o'lchovli (ya'ni oddiy) kubning chegarasi 6 ta kvadrat – "ikki o'lchovli kub" dan iborat.

Bu kvadratlar kubning yoqlaridir. Endi arifmetik kubda yoqlar, qirralar va uchlar qanday ifodalanishini ko'raylik. Buning uchun kubning (x, y, z) nuqtasini olamiz. Agar $z = 0$ bo'lsa, bu nuqta Oxy koordinata tekisligida yotadi. Bunda x ham, y ham 0 va 1 orasida o‘zgargani uchun, kubning $z=0$ bo‘lgan nuqtalari kvadrat hosil qiladi. U kubning bitta yog‘ini tashkil etadi. Xuddi shu singari $z=1$ bo‘lganda unga qarama-qarshi yoq hosil bo‘ladi. So‘ng y koordinata 0 yoki 1 ga tenglansa, yana bir juft yoq, $x=0$ va $x=1$ deb olinsa, uchinchi juft yoqlar – jami 6 ta yoq hosil bo‘ladi. Shuning uchun kub yunoncha geksaedr ham deb ataladi (geksa – olti, edr – yoq so‘zlaridan).

Kubning qirrasi ikkita yog‘ining kesishuvidan hosil bo‘ladi. Demak, kubning tayin bir qirrasini qarasak, (x, y, z) nuqtaning ikkita koordinatasi 0 yoqi 1 ga teng bo‘lib, qolgan uchinchi koordinatasi 0 va 1 orasida o‘zgaradi.

Uchta x, y, z koordinatadan ikkitasi uch usulda tanlanishi mumkin: x va y, x va z, y va z. Tanlangan juft koordinatalarning har biri yo 0, yoki 1 ga tenglanishi mumkin. Buning 4 usuli bor: (0, 0), (1, 0), (0, 1) va (1, 1). Shuning uchun kub $3\times 4=12$ ta qirraga ega.

Nihoyat, kubning uchlarini qaraydigan bo‘lsak, har bir uchning uchala koordinatasi ham yo 0 ga, yoki 1 ga teng bo‘lishi lozim. Uchta o‘zgaruvchi $2^3=8$ usulda 0 va 1 qiymatlarni qabul qila oladi:

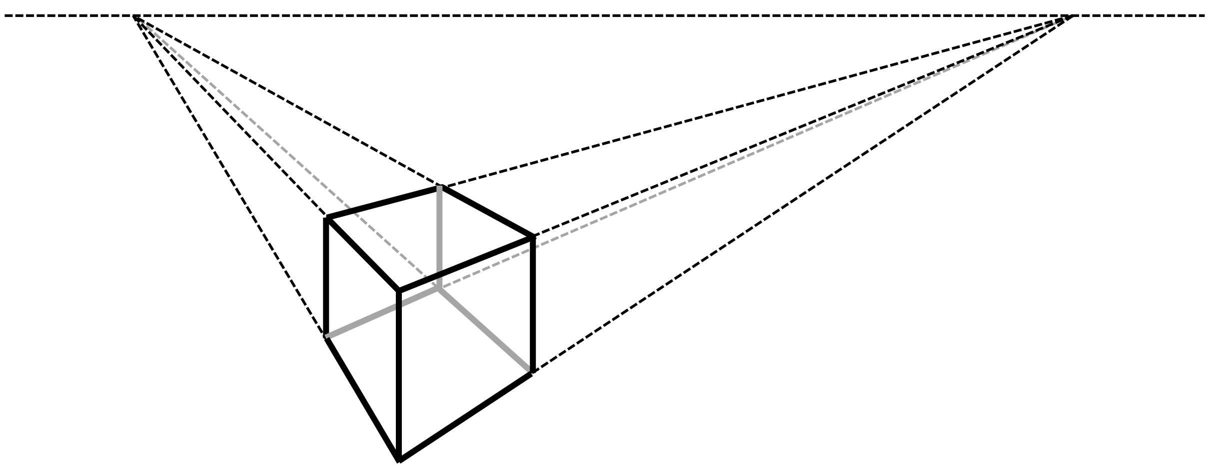
$$(0,0,0);\ (0,0,1);\ (0,1,0);\ (0,1,1);\ (1,0,0);\ (1,0,1);$$
$$(1,1,0);\ (1,1,1).$$

Bu esa kub 8 ta uchga ega ekanligiga mosdir.

Mashq. Kub markazining koordinatalari nimaga teng? Yoqlarining markazlarini toping. Qirralarining o‘rtalari qanday koordinatalarga ega bo‘ladi?

Endi yana 1-rasmga boqaylik. Unda nima tasvirlangan? Kub! Lekin kub uch o‘lchovli rasm, kitob saxifasi esa ikki o‘lchovli-ku?

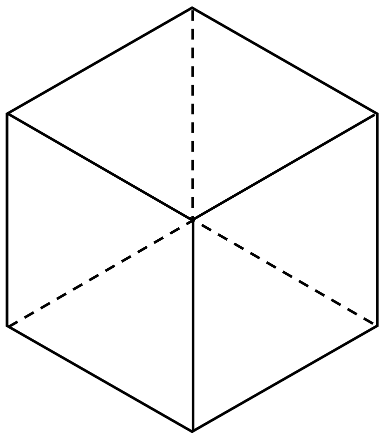
Ikki o‘lchovli tekislikka uch o‘lchovli kub sig‘maydi. Agar uch o‘lchovli kubni tasvirlamoqchi bo‘lsak, u surat emas, skulptura bo‘lishi kerak (masalan, plastilindan yasalgan). Qog‘ozda, tabiiyki, uch o‘lchovli kubning o‘zi emas, balki surati – proyeksiyasi tasvirlanadi. 1-rasmda kubning **aksonometrik proyeksiyasi** tasvirlangan. 3-rasmda esa kubning **perspektiv proyeksiyasi** tasvirlangan. Aksonometrik proyeksiya geometriya uchun qulay, perspektiv proyeksiyani esa kubning portretini chizishda qo‘llagan ma’qul.



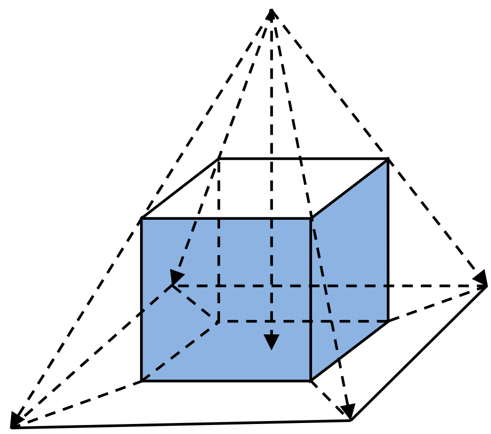
3-rasm.

Kubning aksonometrik proyeksiyasini hosil qilish uchun kubdan tashqarida nuqta olinadi. So‘ng bu nuqta va kubning markazi orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkazilib, unga perpendikulyar tekislik yasaladi. Keyin kub ana shu tekislikka tik nurlar bilan proyeksiyalanadi – go‘yo quyosh nurlari tushganda soyasi yasaladi (proyeksiya – lotincha “soya” degani).

Kubning tashqarisidagi nuqta qayerda olinishiga qarab, turli proyeksiyalar hosil bo‘ladi. Xususan, 1-rasmda S bilan belgilangan nuqta olinsa, proyeksiyada muntazam oltiburchak hosil bo‘ladi 4-rasm). Bunday proyeksiya simmetrik bo‘lgani uchun chiroyli, albatta, ammo unda kubning ikki qarama-qarshi uchi bir nuqtaga – olti burchak markaziga proyeksiyalanadi.

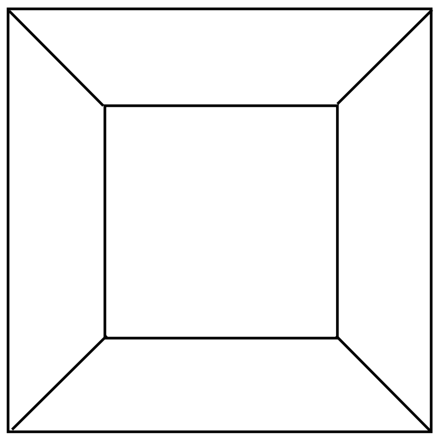


4-rasm.



5-rasm.

5-rasmda kubning yana bir proyeksiyalash usuli tasvirlangan. U markaziy proyeksiya deb ataladi, bunda *S* nuqta proyeksiyalash markazi, kubning asosi esa proyeksiya tekisligi deb ataladi. Bunda kubning proyeksiyasi 6-rasmdagi ko‘rinishda bo‘ladi: ichki kvadrat kubning – ostki yog‘i, tashqi kvadrat – ustki yog‘i, to‘rtta trapetsiya – kubning yon yoqlariga to‘g‘ri keladi.



6-rasm.

Mashq. Proyeksiyalash markazi kub diagonalining davomida olinib, proyeksiyalash tekisligi shu diagonalga perpendikulyar bo‘lsa, kubning markaziy proyeksiyasi qanday bo‘ladi?

Mana shu mulohazalardan so‘ng, biz to‘rt o‘lchovli kub bilan ishlashga tayyormiz. Albatta, biz bundan kubning, aytaylik, yog‘ochdan yoki simdan maketini yasay olmaymiz. Lekin proyeksiyasini ko‘z oldimizga keltirishga hech narsa halaqit qilmaydi. Gap shundaki, to‘rt o‘lchovli kub uch o'lchovli fazoga, ya'ni o'zimiz yashaydigan fazoga proyeksiyalanadi. Uch o'lchovli rasmning rasmini esa tekislikda tasvirlay olamiz.

Endi mana shu loyihani amalga oshiraylik. Birinchi navbatda to'rt o'lchovli kub tarifini beramiz: Haqiqiy sonlarning (x, y, z, u) ko'rinishidagi to'rtliklari to'plami to'rt o'lchovli fazo tashqil etadi. (Har bir bunday to'rtlikni biz **nuqta** deb atayveramiz.) Mana shu fazodagi

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1, \quad 0 \le u \le 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi (x, y, z, u) nuqtalar to'plami **to'rt o'lchovli kub** deb ataladi.

Bu kubning: **uchlari** – "nol o'lchovli kub", ya'ni nuqtalar; **qirralari** – "bir o'lchovli kub", ya'ni kesmalar; **yoqlari** – "ikki o'lchovli kub", ya'ni kvadratlardir.

Faqat endi bu safar kub uch o'lchovli "yoqlar"ga ham ega bo'ladi. Ularni topish uchun ishni quyidan yuqoriga qarab olib boramiz.

Agar to'rttala x, y, z, u koordinataning har bir yo 0 ga, yoki 1 ga teng bo'lsa, kubning uchlari hosil bo'ladi. Demak, to'rt o'lchovli kub $2^4 = 16$ ta uchga ega bo'lar ekan:

$$\begin{array}{cccc}
(0,0,0,0) & (0,1,0,0) & (1,0,0,0) & (1,1,0,0) \\
(0,0,0,1) & (0,1,0,1) & (1,0,0,1) & (1,1,0,1) \\
(0,0,1,0) & (0,1,1,0) & (1,0,1,0) & (1,1,1,0) \\
(0,0,1,1) & (0,1,1,1) & (1,0,1,1) & (1,1,1,1)
\end{array}$$

Endi to'rt koordinatadan ixtiyoriy bittasini olamiz. U 0 va 1 oralig'ida o'zgaraversin. Qolgan uch koordinataning har biri esa yo 0, yoki 1 ga teng bo'lsin (bu – $2^3 = 8$ xil usulda bo'lishi mumkinligini bilamiz). Natijada kesma – kubning qirrasi hosil bo'ladi. Masalan,

$$0 \le x \le 1,\ y = 0,\ z = 1,\ u = 0. \tag{3}$$

Demak, to‘rt o‘lchovli kub $4 \times 8 = 32$ ta qirraga ega bo‘lar ekan.

Mashq. To‘rt o‘lchovli kubning $(0,0,0,0)$ uchidan chiqadigan barcha qirralarini toping (ya’ni bu qirralarni beradigan (3) ga o‘xshash shartlarni yozib chiqing).

Davom etamiz: ikkita koordinata tanlab, ularning har birini 0 va 1 oraligida o‘zgaradigan qilib qoldiramiz. Bu 6 xil usulda mumkin:

$$(x,y);\ \ (x,z);\ \ (x,u);\ \ (\mathrm{y},z);\ \ (y,u);\ \ (z,u).$$

Har bir holda qolgan ikkita koordinataga 0 va 1 qiymatlarni berib chiqamiz. Buni 4 usulda amalga oshirish mumkin edi. Demak, to‘rt o‘lchovli kub $6 \times 4 = 24$ ta ikki o‘lchovli yoqqa ega ekan.

Masalan, ulardan biri

$$0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1,\quad z = 0,\quad u = 1 \tag{4}$$

shartlar bilan aniqlanadi. Shunday qilib to‘rt o‘lchovli kubning yoqlari – kvadratlardan iborat.

Mashq. To‘rt o‘lchovli kubning $(0,0,0,0)$ va $(0,0,0,1)$ uchlarini tutashtiruvchi qirrasiga yopishgan barcha yoqlarni toping (ya’ni bu yoqlarni beradigan (4) ga o‘xshash shartlarni yozib chiqing).

Endi uchta koordinatani 0 va 1 orasida o‘zgaradigan qilib qoldiraylik. Masalan, $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$. To‘rtinchi u koordinata 0 ga teng bo‘lsa, to‘rt o‘lchovli kubning chegarasida yotadigan shakl hosil bo‘ladi:

$$0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1,\quad 0 \le z \le 1,\quad u = 0.$$

U aynan o‘zimizning uch o‘lchovli kubdan iboratligini tushunish qiyin emas. U to‘rt o‘lchovli kubning

giperyog‘i deb ataladi. Agar $u=1$ bo‘lsa, yana bitta giperyoq hosil bo‘ladi:

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1, \quad u = 1$$

– u avvalgi giperyoqqa qarama-qarshi joylashgan giperyoqdir. Shu singari yana uch juft giperyoq hosil qilamiz:

$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ z = 0,\ 0 \le u \le 1$ va

$$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ z = 1,\ 0 \le u \le 1;$$

$0 \le x \le 1,\ y = 0,\ 0 \le z \le 1,\ 0 \le u \le 1$ va

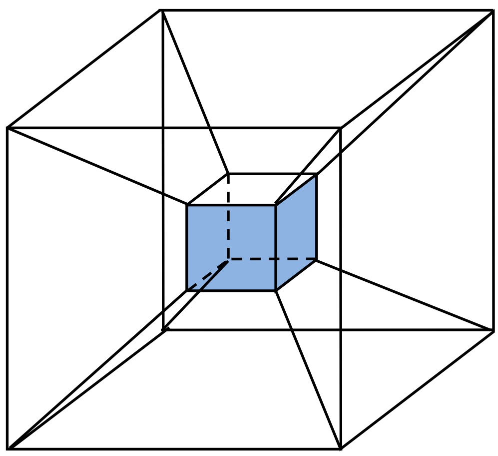
$$0 \le x \le 1,\ y = 1,\ 0 \le z \le 1,\ 0 \le u \le 1;$$

$x = 0,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1,\ 0 \le u \le 1$ va

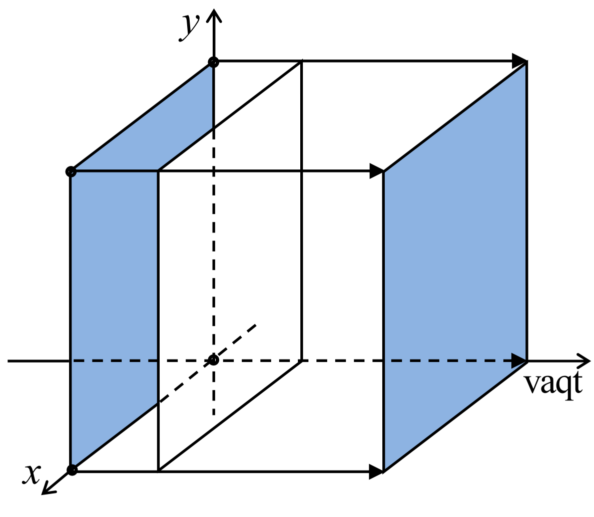
$$x = 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1,\ 0 \le u \le 1.$$

Shunday qilib, to‘rt o‘lchovli kubning 8 ta giperyog‘i bor. Har bir giperyoq uch o‘lchovli kubdan iborat.

Endi to‘rt o‘lchovli kubni tasvirlashga kirishamiz. Buning eng sodda usuli – markaziy proyeksiyadir. Bu amalning tafsilotlarini qoldirib, natijani tasvirlaymiz (7-rasm).



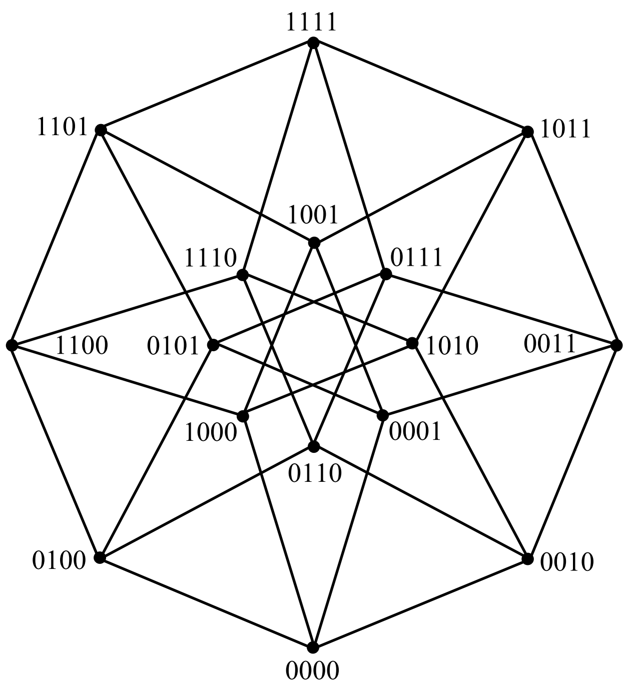
7-rasm.



8-rasm.

To‘rt o‘lchovli kubning bu tasvirini boshqacha talqin qilish ham mumkin. Fizikada ham to‘rt o‘lchovli fazo qaraladi – unda har bir nuqtaning uchta koordinatasi joyni, to‘rtinchi koordinata esa vaqt onini bildiradi. Masalan, tekislikda kvadratning ma’lum vaqt oralig‘ida “yashagan umri”ni tasvirlasak, bu xodisa aynan uch o‘lchovli fazoda kub bilan tasvirlanadi (8-rasm).

Ravshanki, uch o‘lchovli kubning bir soatlik “umri”ni bu usulda tasvirlay olmaymiz. Vaqt o‘qi uchun to‘rtinchi yo‘nalish yetishmaydi. Buning o‘rniga kub tinch turmasdan, balki o‘tgan vaqt oralig‘ida o‘ssin (to‘lishsin) deb hisoblaymiz. Bu hodisa kvadrat uchun 6-rasmdagi shakl bilan tasvirlansa, bizning kub uchun aynan 7-rasmga muvofiq keladi: ichki kub kattalashib, tashqi kubgacha yetganda, jarayon to‘xtagan holatni tasvirlaydi. To‘rt o‘lchovli kubning uch o‘lchovli kubga nisbatan bitta afzal tomoni ham bor ekan – u tekislikka juda g‘aroyib usulda tasvirlanadi. Bunday tasvirda uning uchlari, qirralari, yoqlari va ayniqsa, giperyoqlarining o‘zaro joylashuvi juda yaqqol ko‘rinadi (9-rasm).



9-rasm.

Bu rasmda roppa-rosa 16 ta uch, 32 ta qirra, 24 ta yoq va 8 ta giperyoq – kub chizilgan. Istalgan qirraning ikki uchidagi nuqtalar faqat bitta raqamga farq qiladi; kvadrat hosil qilgan nuqtalarning ikkitadan koordinatasi bir xil. Nihoyat, bitta koordinatasi ustma-ust tushadigan nuqtalar giperyoq tashkil qiladi. Masalan,

$$(\underline{0}\ 0\ 0\ 0),\ (\underline{0}\ 1\ 0\ 0),\ (\underline{0}\ 0\ 1\ 0),\ (\underline{0}\ 0\ 0\ 1),\ (\underline{0}\ 1\ 1\ 0),$$
$$(\underline{0}\ 1\ 0\ 1),\quad (\underline{0}\ 0\ 1\ 1),\quad (\underline{0}\ 1\ 1\ 1)$$

nuqtalar bir giperyoqni,

$$(0\ \underline{0}\ 0\ 0),\ (1\ \underline{0}\ 0\ 0),\ (0\ \underline{0}\ 1\ 0),\ (0\ \underline{0}\ 0\ 1),\ (1\ \underline{0}\ 0\ 0),$$
$$(1\ \underline{0}\ 1\ 0),\quad (1\ \underline{0}\ 0\ 1),\quad (1\ \underline{0}\ 1\ 1)$$

yana bir giperyoqni,

$$(0\ 0\ \underline{0}\ 0),\ (1\ 0\ \underline{0}\ 0),\ (0\ 1\ \underline{0}\ 0),\ (0\ 0\ \underline{0}\ 1),\ (1\ 1\ \underline{0}\ 0),$$
$$(1\ 0\ \underline{0}\ 1),\quad (0\ 1\ \underline{0}\ 1),\quad (1\ 1\ \underline{0}\ 1)$$

uchinchi giperyoq

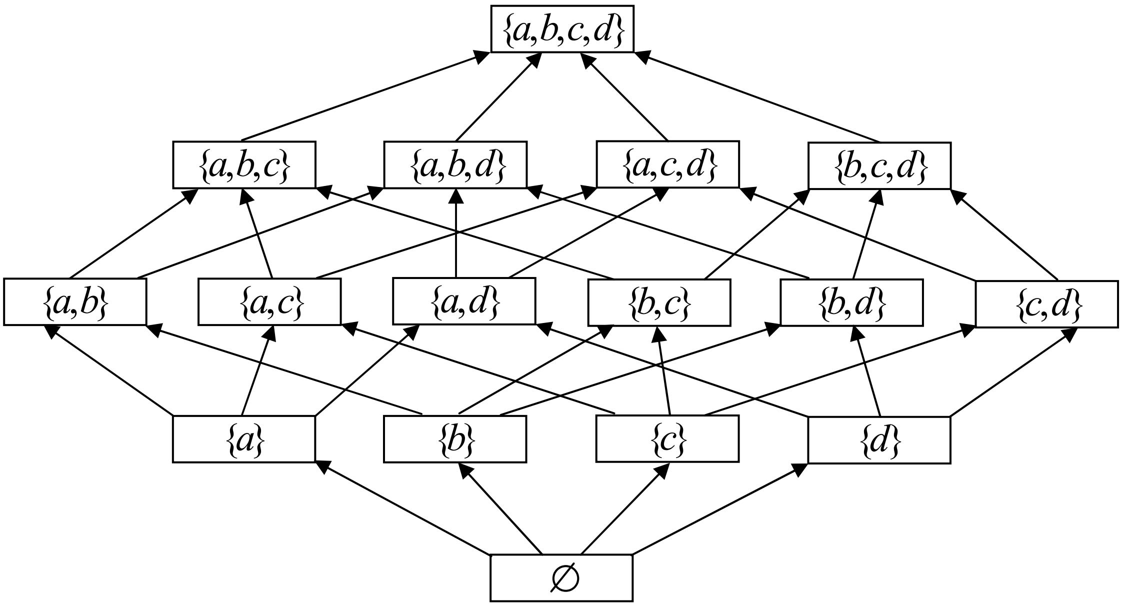
$$(0\ 0\ 0\ \underline{0}),\ (1\ 0\ 0\ \underline{0}),\ (0\ 1\ 0\ \underline{0}),\ (0\ 0\ 1\ \underline{0}),\ (1\ 1\ 0\ \underline{0}),$$
$$(1\ 0\ 1\ \underline{0}),\quad (0\ 1\ 1\ \underline{0}),\quad (1\ 1\ 1\ \underline{0})$$

to‘rtinchi giperyoqni tashkil etadi.

Bu 4 giperyoq faqat bitta umumiy uchga ega – u ham bo‘lsa $(0\ 0\ 0\ 0)$. Shunday qilib 4-o‘lchovli kubning har bir uchidan 4 ta uch o‘lchovli yoq chiqar ekan.

Maqolamiz nihoyasida bu rasmning yana bir matematik tushuncha – Bul algebrasi bilan aloqasiga to‘xtalaylik. To‘rt elementli $\{a, b, c, d\}$ to‘plamni qaraylik. 10-rasmda bu to‘plamning qism to‘plamlari hamda ular orasidagi qismlik munosabati tasvirlangan (o‘qyoylar $\subset$ belgisini bildiradi).

Mashq. $\{a, b, c, d\}$ to‘plamning qism to‘plamlarini 10-rasmdagi tugun nuqtalarga joylab, 9 va 10 rasmlar aslida bir shakldan iborat ekanligiga ishonch hosil qiling.



10-rasm.

§ 11. Arximed qabrtoshidagi chizma[12]

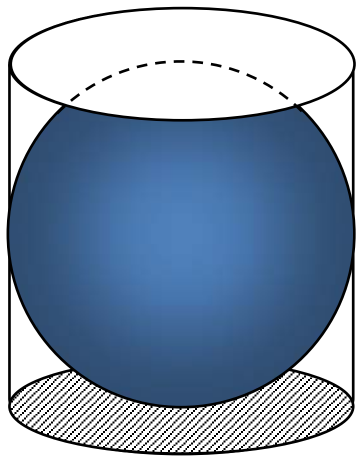
Qadimgi yunon matematiklari geometriya sohasida juda yuksak natijalarga erishganlar. Masalan, hozir Platon jismlari deb ataluvchi qavariq muntazam koʻpyoqliklarni kashf qilganlar, kvadratning diagonali bilan tomoni umumiy oʻlchovga ega emasligi, ya'ni $\sqrt{2}$ ning irratsionalligini isbotlaganlar (Pifagor), tomonlari soni 3, 4, 5 va 15 ga teng muntazam koʻpburchaklarni yasaganlar (Evklid), konus kesimlari (Apolloniy) va boshqa egri chiziqlarni (Dinostrat kvadratrisasi, Nikomed konxoidasi, Arximed spirali va h.k.) oʻrganganlar. Bu natijalar qatoriga prizma, silindr, piramida va konus hajmlarini hisoblash formulalarini ham qoʻyish kerak. Xususan, piramidaning hajmi shu piramida bilan bir xil asos va balandlikka ega prizma hajmining uchdan biriga, konusning hajmi ham u bilan bir xil asos va balandlikka

---

[12] FMI, 2003, №2.

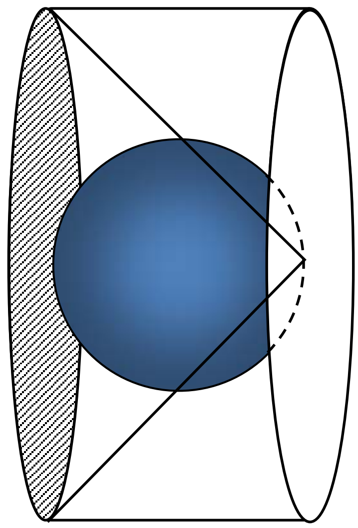
ega silindr hajmining uchdan biriga teng boʻlishini keltirib chiqarish ancha yuksak zakovat talab etuvchi masalalardir.

Biroq yunon geometrlari uzoq vaqt shar hajmini hisoblashga kelganda qoqilishgan – radiusi berilgan shar hajmini hisoblash qoidasini (hozirgi tilda – formulasini) topishga urinishlar muvaffaqiyatsiz chiqqan. Eramizdan oldingi III asrga kelib, bu masala ham hal etiladi – insoniyat tarixidagi eng buyuk olimlardan biri sanalmish Arximedga taslim boʻladi. U **“shar hajmi unga tashqi chizilgan silindr hajmining uchdan ikkisiga teng”** boʻlishini topadi. Arximed bu natijadan shu qadar iftixor tuyadiki, vafotidan soʻng qabrtoshiga mana shu qoidani ifodalovchi chizmani (1-rasm) oʻyib tasvirlashni vasiyat qiladi:



1-rasm.

Olimning bundan boshqa, unga qaraganda ham ahamiyati kattaroq natijalari boʻlgan. Lekin u aynan shar hajmining formulasiga bu qadar e’tibor berganining yana bir muhim sababi bor: u shar hajmi uchun formulani bagʻoyat gʻaroyib usulda – mexanikani qoʻllash vositasida keltirib chiqargan.



2-rasm.

Oradan 2300 yildan koʻproq vaqt oʻtganiga qaramay, Arximed mushohadasi hamon oʻzining originalligi va goʻzalligi bilan matematiklarni hayratga solib keladi. Keling, ana shu mushohada bilan tanishaylik.

Arximed sharni oladi-da, unga

silindr va konus tirkaydi: silindr asosining radiusi bilan balandligi shar diametriga teng, konus esa bu silindrga ichki chizilgan (2-rasm).

Qulayroq bo‘lishi uchun bu rasmning daftar varag‘iga parallel simmetriya tekisligi bilan qirqamizda, keyingi mulohazalarni mana shu qirqim bo‘yicha olib boramiz (3-rasm).

Arximed butun shaklni AB diametrning ixtiyoriy bir P nuqtasidan shu diametrga tik o‘tadigan tekislik bilan kesadi. Bunda uchta doira hosila bo‘ladi: radiusi LP bo‘lgan silindr kesimi, radiusi MP bo‘lgan shar kesimi hamda radiusi NP bo‘lgan konus kesimi.

Bu rasmdan Arximed BMP uchburchakni qaray-dida, Pifagor teoremasini qo‘llab,

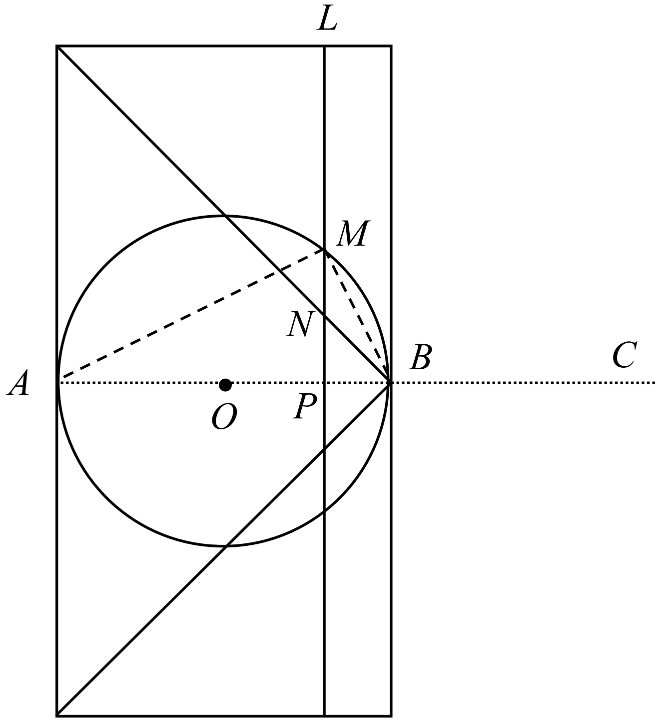
$$BM^2 = BP^2 + MP^2 \qquad (1)$$

munosabatni hosil qiladi.

Lekin $BM^2 = AB \cdot PB$. (Haqiqatan, AMP va BMP uchburchaklar o‘xshash bo‘lgani uchun $AB : BM = BM : PB$). Shuning uchun (1) tenglikni

$$AB \cdot PB = BP^2 + MP^2$$

ko‘rinishda yozib olish mumkin. Bu tenglikning har ikki tomonini Arximed πAB ga hadma-had ko‘paytiradi:



3-rasm.

$$\pi AB^2 \cdot PB = \pi BP^2 \cdot AB + \pi MP^2 \cdot AB. \qquad (2)$$

Olim bu ishni tasodifan qilmaydi, albatta. Birinchidan, yasashga muvofiq $AB = LP$ bo‘lgani uchun πAB^2 silindr asosining yuziga teng.

Ikkinchidan, NBP burchak 45° ga teng bo‘lgani uchun, $BP = NP$, ammo NP konus qirqimidan iborat doiraning radiusidan iborat. Demak, πBP^2 konus qirqimining yuziga teng.

Nihoyat, πMP^2 shar qirqimidan iborat doiraning yuziga teng.

Shundan so‘ng Arximed mexanika tushunchalariga murojaat etadi. Agar shar, silindr va konus bir xil bir jinsli moddadan yasalgan deb qaralsa, har bir qirqimning og‘irligi uning yuziga proportsional bo‘ladi. O‘lchov birligini tanlash hisobiga qirqim og‘irligi Q uning yuziga teng deb olish mumkin:

$$Q_{sil} = \pi AB^2, \quad Q_{kon} = \pi BP^2, \quad Q_{shar} = \pi MP^2.$$

Butun rasm AC o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lgani uchun, uchchala qirqimning ham og‘irlik markazi P nuqtada yotadi.

Arximed AB diametrni davom ettirib $AB = AC$ bo‘lgan C nuqtani oladi va shar bilan konus qirqimlarini shu nuqtaga ko‘chiradi. Natijada tayanch nuqtasi B ga joylashgan richag hosil bo‘ladi: uning BP yelkasiga og‘irligi πBP^2 ga teng moddiy nuqta, BC yelkasiga esa og‘irligi $\pi BP^2 + \pi MP^2$ga teng moddiy nuqta joylashgan. Richag qoidasiga ko‘ra (2) tenglik richag muvozanatda bo‘lishini bildiradi.

Shundan so‘ng Arximed P nuqtani A dan boshlab B gacha o‘zgartirish yo‘li bilan shunday xulosaga keladi: C nuqtaga shar va konus osilsa, u silindr bilan muvozanatda bo‘ladi. Silindrning og‘irlik markazi O nuqta bo‘lsin, silindr, konus va shar hajmi esa mos holda

V_{sil}, V_{kon}, V_{shar} deb belgilansin. Arximed yana richag qoidasini qo'llaydi, faqat bu safar qirqimlardan iborat yassi rasmlarga emas, butun jismlarni oladi:

$$OB \cdot V_{sil} = BC \cdot (V_{kon} + V_{shar}).$$

Agar $BC = 2 \cdot OB$, $V_{kon} = \dfrac{V_{sil}}{3}$ ekanini hisobga olsak,

$$V_{shar} = \frac{1}{2}V_{sil} - \frac{1}{3}V_{kon} = \frac{1}{6}V_{sil}.$$

Lekin 2-rasmdagi silindr asosining radiusi R sharga tashqi chizilgan (ya'ni 1-rasmdagi) silindr asosi radiusidan ikki marta katta. Shuning uchun ($V_{\text{t.ch.sil}}$ – sharga tashqi chizilgan silindr hajmi)

$$V_{shar} = 4 \cdot \frac{1}{6}V_{t.ch.s.} = \frac{2}{3}V_{t.ch.s.}$$

– bu Arximed qoidasidan iborat. Agar shar radiusi R ga teng bo'lsa,

$$V_{t.ch.s.} = \pi R^2 \cdot H = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

ekanligidan

$$V_{shar} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

formula kelib chiqadi.

Arximedning bu mushohadasi uning "Mexanika teoremalari haqida Eratosfenga maktub" degan asarida bayon qilingan. Bu asarda Arximed o'zi topgan usul aylanma ellipsoid hajmini hisoblashda ham yaroqli bo'lishini ko'rsatgan. (Aylanma ellipsoid – sharni biror diametri bo'ylab qisishdan hosil bo'ladigan handalaksimon shakl. Yer kurrasi ham aslida shar emas, mana shunday ellipsoid ekani ma'lum).

Keyinchalik Arximed o'zining "Shar va silindr haqida" kitobida shar hajmi uchun formulani sof matematik usulda – qamrash usuli bilan isbotlagan. Yuqorida bayon qilingan usul, garchand mantiqiy jihatdan mukammal bo'lmasa-da, ammo chindan hayratomuz ekanligiga shubha yo'q.

§ 12. O'n olti yoshli matematik teoremasi[13]

Matematika tarixidagi eng mashhur teoremalardan biri Paskal teoremasidir[14]. Buning birinchi sababi – uni 16 yoshlik matematik ixtiro qilgan. Ikkinchisi – bu teorema matematikaning yangi sohasi – proyektiv geometriya shakllanishida muhim o'rin tutgan.

Tarixiy xotiralarda yozilishicha, 10 yashar Paskal otasining kutubxonasidan Evklidning "Negizlar" asarini topib olib, unga berilib ketadi. Ma'lumki, bu kitobda geometriya aksiomatik uslubda bayon qilingan: bir necha tasdiq isbotsiz aksioma deb qabul qilinib, boshqa tasdiqlar – teoremalar ana shu aksiomalardan mantiqiy mushohadalar bilan keltirib chiqarilgan.

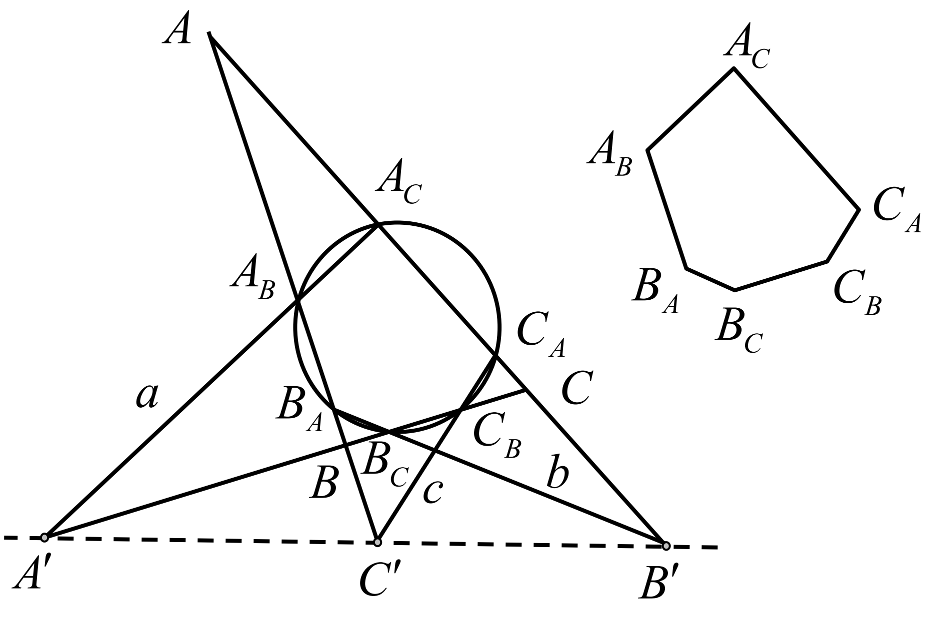
Geometriyada yangi xossalarni mana shunday – aksiomalar asosida isbotlash mumkinligi yosh Paskalni shu qadar o'ziga maftun etadiki, u "Negizlar"dagi dastlabki bir necha teoremaning isboti bilan tanishgach, keyingilarini mustaqil isbotlashga kirishadi. Keyinroq bu bilan cheklanmay, o'zi ham yangi teoremalar izlay boshlaydi. Mana shunday izlanishlar natijasida mashhur teoremasini topadi:

[13] FMI, 2004, №3.
[14] Blez Paskal (1623-1662) – atoqli faransuz matematigi, fizigi va faylasufi.

Paskal teoremasi. Aylanaga ichki chizilgan oltiburchakning uch juft qarama-qarshi tomonlari kesishsa, kesishuv nuqtalari bir to‘g‘ri chiziqda yotadi.

1-rasmda aylanaga ichki chizilgan oltiburchak tasvirlangan. Uning bir juft qarama-qarshi tomoni A' nuqtada, bir jufti B' nuqtada, yana bir jufti C' nuqtada kesishadi. (Butun shakl bu uch nuqta sahifadan tashqariga chiqib ketmaydigan qilib tanlangan.)

Maqsadimiz – teoremaning isbotini soddalashtirish bo‘lgani uchun, rasmdagi nuqtalar odatdagidan boshqacharoq belgilanganiga e’tibor qilish kerak. Bunda tilga olingan qarama-qarshi tomonlar juftliklari (A_BA_C va B_CC_B, B_CB_A va C_AA_C, C_AC_B va A_BB_A) bilan bir paytda qo‘shni ham emas, qarama-qarshi ham bo‘lmagan tomonlar juftliklari qaraladi. Bunday juftliklar oltita bo‘lishini payqash qiyin emas (rasmda: A_BB_A va B_CC_B, A_BA_C va B_AB_C, B_CC_B va A_CC_A, C_BC_A va A_BA_C, C_AA_C va A_BB_A, A_BA_C va B_AB_C). Bu juftliklardan uchtasi, aytaylik,



1-rasm.

tomonlar ketma-ket raqamlanganda birinchi, uchinchi va beshinchisi, yo boʻlmasa ikkinchi, toʻrtinchi va oltinchisi kesishuvidan hosil boʻlgan uchburchakni ABC deb belgilaymiz. Oltiburchak aylanaga ichki chizilganidan yo birinchi holda, yoki ikkinchi holda A, B, C nuqtalar chindan uchburchak hosil qilishi kelib chiqadi (ya'ni tomonlari parallel boʻlib qolmaydi).

Mashq. Soʻnggi tasdiqni isbotlang.

Shundan soʻng oltiburchakning uchlari tabiiy ravishda oʻz belgilariga ega boʻladi. Masalan, oltiburchakning AB da yotadigan va A nuqtaga yaqin uchi A_B, B nuqtaga yaqin uchi esa B_A deb belgilangan. Bunda A', C', B' nuqtalarning belgilanishi ham ravshan: $A' \in BC$ va h.k.

Hozirgacha Paskal teoremasining oʻndan ziyod isboti topilgan. Ularning orasida eng qisqasi Yulius Plyukkerning (nemis matematigi, 1801-1868) isbotidir, ammo u algebraik geometriyaga oid Bezu teoremasi kabi murakkab xossalarga asoslanadi. Konus kesimlariga tayanadigan isbot [Д.Гильберт, Д. Кон-фоссен. Наглядная геометрия.] ham ixcham, ammo, tabiiyki, elementar emas. Г.Коксетер, Г. Гретцерning (Новые встречи с геометрией.), Д.Шклярскийning (Избранные задачи и теоремы планиметрии.), В.Прасоловning (Задачи по планиметрии. Часть 1.), hamda Шарыгинning (Задачи по геометрии) kitoblarida Paskal teoremasining elementar isbotlari keltirilgan, ammo ular anchayin sun'iy, mushohadalar va belgilashlar ham tabiiy emas.

Bu yerda Г.Коксетер, Г.Гретцерning kitobidagi Menelay teoremasiga asoslangan isbotini eslab qolish uchun oʻngʻay bayonini beramiz.

Menelay – I asrda yashagan yunon matematigi. Uning "Sferika" nomli asari islom Sharqining yirik matematiklaridan biri Sobit ibn Qurraning (836-901) arabcha tarjimasida saqlanib qolgan. Bu kitobda sfera (ya'ni shar sirti)dagi shakllarning astronomiyada qo'llanadigan xossalari o'rganilgan. Xususan, to'rtta katta aylana kesishishidan hosil bo'lgan rasmga oid xossa isbotlangan (Menelayning sferik teoremasi). Bu xossa tekislikda o'zaro kesishuvchi to'rtta to'g'ri chiziq haqidagi xossaga o'xshash. Shuning uchun u Menelayning planimetrik teoremasi deb yuritiladi (aynan shu teorema quyida bayon qilinadi). Lekin tarixchilar planimetrik teoremani Menelaydan oldin kimdir isbotlagan bo'lishi kerak, deb taxmin qiladilar, chunki uni Menelay o'z kitobida avvaldan ma'lumday eslab o'tgan.

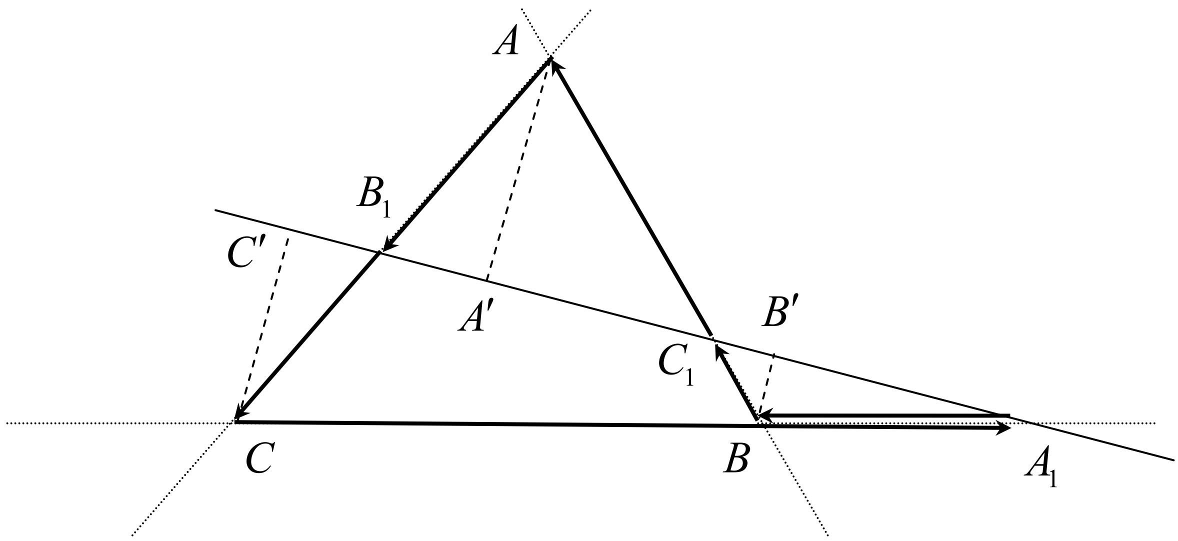
A, B, C nuqtalar uchburchak hosil qilsin. Biz bu maqolada "ABC uchburchak" deganda uchta kesmadan iborat emas, balki AB, BC va CA to'g'ri chiziqlardan iborat shaklni tushunamiz. Shunda to'rtinchi to'g'ri chiziq uning uchala tomonini ham kesib o'tishi mumkin. Masalan, 2-rasmdagi holatda $A_1C_1B_1$ to'g'ri chiziq AC va AB tomonlarni ichki nuqtalarda, BC tomonni tashqi nuqta orqali kesib o'tyapti.

Menelay teoremasi: ABC uchburchakni to'rtinchi bir to'g'ri chiziq kesib o'tsa, u holda

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=-1. \tag{1}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda A_1 nuqta BC to'g'ri chiziqda, B_1 nuqta CA to'g'ri chiziqda, C_1 nuqta AB to'g'ri chiziqda yotishi kerak.

Eslatma: AB va CD yo'nalishli kesmalar bo'lsin. Agar ular bir xil yo'nalgan bo'lsa, $AB:CD$ nisbat musbat, qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, manfiy ishora bilan olinadi. Xususan, 2-rasmda AB_1 va B_1C kesmalar nisbati musbat, CA_1 va A_1B kesmalar nisbati esa manfiydir.



2-rasm.

Isbot. Uchburchakning A, B va C uchlaridan $A_1B_1C_1$ to‘g‘ri chiziqqa AA', BB' va CC' perpendikulyarlar tushiramiz. U holda:

AB_1C' va B_1CC' uchburchaklar o‘xshashligidan

$$\frac{AB_1}{B_1C} = -\frac{AA'}{CC'}.$$

AC_1A' va BC_1B' uchburchaklar o‘xshashligidan

$$\frac{BC_1}{C_1A} = -\frac{BB'}{AA'}.$$

CA_1C' va BA_1C' uchburchaklar o‘xshashligidan

$$-\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CC'}{BB'}.$$

Bu uch tenglikni hadma-had ko‘paytirsak, (1) tenglik hosil bo‘ladi.

Mashq. Menelay teoremasi $A_1B_1C_1$ to‘g‘ri chiziq ABC uchburchakning har uch tomonini tashqaridan kesib o‘tganda ham to‘g‘riligicha qolishiga ishonch hosil qiling.

Menelay teoremasiga teskari teorema. ABC uchburchak hosil qiluvchi AB, BC va CA to‘g‘ri chiziqlardan mos ravishda olingan C_1, A_1 va B_1 nuqtalar uchun (1) tenglik, ya’ni

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=-1 \qquad (2)$$

o‘rinli bo‘lsa, bu uch nuqta bir to‘g‘ri chiziqda yotadi.

Isbot. B_1C_1 to‘g‘ri chiziq BC ga parallel bo‘la olmaydi, aks holda, AB_1C_1 uchburchak ABC ga o‘xshash bo‘lib, $AB_1 : AC_1 = B_1C : C_1B$ ekanligidan $CA_1 = -A_1B$ hosil bo‘lar edi. Bu esa B va C nuqtalar ustma-ust tushgandagina mumkin.

BC va B_1C_1 to‘g‘ri chiziqlar A' nuqtada kesishsin. U holda B_1, C_1 va A' nuqtalarga Menelayning to‘g‘ri teoremasini qo‘llash mumkin:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=-1 \qquad (3)$$

(2) va (3) tengliklarni qiyoslasak, $CA_1 : A_1B = CA' : A'B$ bo‘lishi ko‘rinadi. Demak, A_1 nuqta ham, A' nuqta ham BC kesmani bir xil nisbatda bo‘lar ekan. Bundan $A_1 = A'$, ya’ni, A_1 nuqta B_1C_1 to‘g‘ri chiziqda yotishi kelib chiqadi.

Paskal teoremasining isboti. 1-rasmga murojaat qilaylik. Unda ABC uchburchakni kesib o‘tuvchi uchta to‘g‘ri chiziq a, b, c harflari bilan belgilangan (qaysi to‘g‘ri chiziq qanday belgilangani ravshan). Mana shu uch holatga Menelay teoremasini qo‘llaymiz:

a va ABC ga nisbatan: $\frac{AA_B}{A_BB}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CA_C}{A_CA}=-1,$

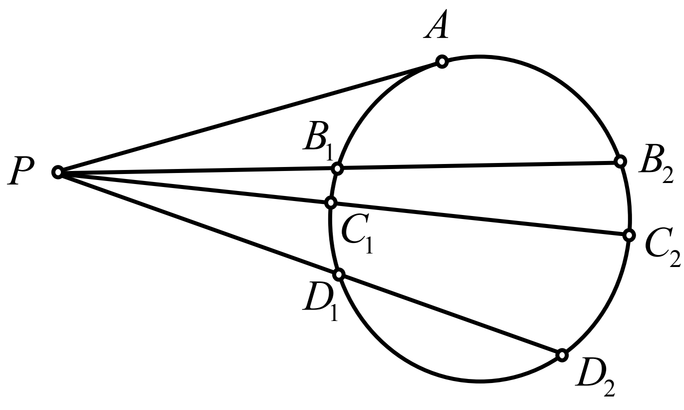
b va ABC ga nisbatan: $\frac{AB_A}{B_AB}\cdot\frac{BB_C}{B_CC}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-1,$

c va ABC ga nisbatan: $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BB_C}{B_CC}\cdot\frac{CC_A}{C_AA}=-1.$

Bu uch tenglikni hadlab ko‘paytirsak:

$$\frac{AA_B}{A_BB}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CA_C}{A_CA}\cdot\frac{AB_A}{B_AB}\cdot\frac{BB_C}{B_CC}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BB_C}{B_CC}\cdot\frac{CC_A}{C_AA}=-1.$$

Endi aylanaga o‘tkazilgan kesuvchining xossasiga murojaat etamiz. Bu xossaga ko‘ra, aylanadan tashqarida yotgan P nuqtadan ixtiyoriy kesuvchi o‘tkazilsa (3-rasm), P nuqtadan kesuvchi va aylana kesishgan nuqtalargacha masofalar ko‘paytmasi o‘zgarmas bo‘ladi (bu o‘zgarmas P dan o‘tkazilgan urinma kesmasining kvadratiga teng):



3-rasm.

$$PB_1\cdot PB_2=PC_1\cdot PC_2=PD_1\cdot PD_2=\ldots=PA^2.$$

Bu xossaga muvofiq

$$AA_B\cdot AB_A=AA_C\cdot AC_A,\quad BB_A\cdot BA_B=BB_C\cdot BC_B,$$
$$CC_A\cdot CA_C=CC_B\cdot CB_C.$$

Mana shu uch tenglikni yodda tutgan holda (4) munosabatga diqqat qilsak, chap tomondagi kasrning surat va mahrajlarida koʻp hadlar qisqarib ketishiga amin boʻlamiz. Natijada talab qilinayotgan (2) tenglik hosil boʻladi. Shunday ekan, Menelayning teskari teoremasini qoʻllashimiz mumkin: A', B', C' nuqtalar bir toʻgʻri chiziqda yotadi.

Paskal teoremasi isbotlandi.

Tabiiy savol tugʻiladi: Paskalning oʻzi teoremasini qanday isbotlagan? Gap shundaki, uning isbotini buyuk nemis matematigi G.Leybnis koʻrib maqtagani haqida guvohlik bor. Ammo afsuski Paskalning isboti saqlanib qolmagan.

Paskal Menelay teoremasini bilganmi, yoʻqmi – bu ham maʼlum emas. Shuning uchun 16 yashar Blez Paskal oʻz teoremasini qay yoʻsinda isbotlagani nomaʼlumligicha qolmoqda. Xususan, Paskal teoremasini Menelay teoremasidan foydalanmay, faqat Evklidning “Negizlar” asaridagi xossalar asosida isbotlash usuli topilsa, yaxshi ish boʻlar edi.

§ 13. Cheksiz shaxmat taxtasi ustida o‘yin: Gauss debyuti[15]

O‘z davrida “Matematika qiroli” deya sharaflangan Karl Fridrix Gauss (1777-1855) o‘zining dastlabki ilmiy tadqiqotini 19 yoshligida bajargan – sirkul va chizg‘ich vositasida muntazam 17-burchak yasash mumkinligini isbotlagan. Bu natija matematika tarixiga “Gauss debyuti” nomi bilan kirgan (debyut – fransuzcha “boshlash”, shaxmatda partiyaning boshlang‘ich bosqichi, adabiyotda esa “birinchi qadam” ma’nosida qo‘llanadi).

“Chin qiziqarli matematika” kitobining I qismida (§24) muntazam ko‘pburchak yasash masalasi haqida hikoya boshlagan edik (bu yerda ham yasash deganda faqat ideal sirkul va chizg‘ich bilan yasashlar ko‘zda tutiladi). Qadimgi yunon matematiklari kvadrat, muntazam uchburchak, beshburchak va o‘n besh burchaklik hamda ularning tomonlari soni istalgancha marta ikkilanishidan hosil bo‘lgan ko‘pburchaklarni yasash masalasini hal etganlar, ammo muntazam yettiburchak, to‘qqizburchak va hokazolarni yasay olmaganlar. Bu masalada ikki ming yildan ko‘proq vaqt ichida hech bir siljish bo‘lmagan. Nihoyat, 1796 yilga kelib, Gyottingen universiteti talabasi Gauss masalani muntazam 17 burchak uchun yechishga muvaffaq bo‘lgan. Bo‘lganda ham hayratomuz mushohada bilan – geometriya masalasini sonlar nazariyasi va algebra vositasida yechgan.

Gaussning bu kashfiyoti haqida hikoya qilar ekanmiz, u qanday sharoitda ro‘y bergani bilan tanishish foydali. Birinchidan, Gauss bu masala ustida o‘ylay boshlagan paytga kelib, yangi matematik qurol – kompleks sonlar

[15] FMI, 2004, №5.

ixtiro qilingan edi. Ittifoqo, 1799 yilda daniyalik matematik K.Vesselning kitobi nashr etiladi. Bu kitobda mavhumligi bilan matematiklarni cho‘chitib kelgan kompleks sonlarga geometrik talqin berilgan – kompleks sonlarni tekislik nuqtalari deb qarash to‘g‘ri bo‘lishi asoslangan edi. Bu talqinga ko‘ra, Muavr formulasi bilan hisoblangan 1 ning n-darajali ildizlari tekislikda tasvirlansa, roppa-rosa muntazam n-burchak uchlari bo‘ladi. (1-rasmda bu $n=17$ uchun tasvirlangan.)

Bahonada 1 ning ildizlarini eslaylik:

$$\varepsilon_k=\cos\frac{360^\circ}{n}k+i\sin\frac{360^\circ}{n}k,\qquad k=0,1,2,\ldots,n-2,n-1.$$

Vessel talqiniga ko‘ra bu ildizlarga abssissasi $\cos\frac{360^\circ}{n}k$, ordinatasi $\sin\frac{360^\circ}{n}k$ bo‘lgan n ta nuqta mos keladi.

Mashq. Bu nuqtalar haqiqatan markazi koordinata boshida, bir uchi $(1;\ 0)$ nuqtada bo‘lgan muntazam n-burchak tashkil etishiga ishonch hosil qiling.

Xo‘sh, koordinatalar tekisligi bilan ishlayverilsa bo‘lmaydimi, kompleks sonlar nima beradi?

Kompleks sonlarda gap ko‘p – son sifatida ular ustida turli amallar bajarish mumkin, algebraik tenglamalar ham ma’noga ega bo‘ladi. Hatto bunday tenglamalarni aynan kompleks sonlarga nisbatan qarash afzalroq. Masalan, faqat haqiqiy ildizlar qaralsa, $z^n-1=0$ tenglama bitta yoki ikkita yechimga ega bo‘ladi, xolos, kompleks ildizlar qaralganda esa roppa-rosa n ta yechimga ega bo‘ladi – ular aynan 1 ning n-darajali ildizlaridir.

$z^n-1=0$ tenglamaning $z=1$ ildizdan boshqa ildizlari

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\ \dots\ +z^2+z+1\ =0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradi (nima uchun – o‘ylab ko‘ring). Demak, sirkul va chizg‘ich vositasida muntazam n-burchak yasash uchun (1) tenglamaning ε_1 ildiziga mos nuqtani yasash kifoya bo‘lar ekan. Bu ildizni bundan buyon soddalik uchun ε bilan belgilaymiz.

Agar koeffitsientlari butun sonlardan iborat tenglamaning ildizlari ratsional sonlar orqali to‘rt arifmetik amal hamda kvadrat ildiz chiqarish orqali ifodalansa, uni chizg‘ich va sirkul vositasida yasash mumkin – bu fakt ham Gaussga yaxshi ma’lum edi.

Mashq. Uzunligi $1, a, b$ ga teng kesmalar yasalgan. Uzunligi $a+b, a-b,\ ab,\ \dfrac{a}{b}$ hamda $\sqrt{a}$ ga teng kesmalarni yasang.

Mashq. Uzunligi 1, a va b kesmalar yasalgan bo‘lsin. $x^2-ax-b=0$ tenglamaning musbat ildizini yasang.

Shunday qilib, geometriyaga oid muntazam n-burchak yasash masalasi algebraga oid masalaga – (1) tenglamaning ildizlarini o‘rganishga keladi. Gauss (1) tenglamani kvadrat tenglamalarga keltirib yechish ustida o‘ylagan.

Ikkinchi tomondan, bolaligidan hisob-kitobga usta bo‘lgan Gauss, Pyer Ferma singari sonlar ustida turli tajribalar o‘tkazib, qonuniyatlar izlashni yoqtirgan. Uning shunday tajribalaridan biri – biror natural son, aytaylik, a ning darajalarini tayin p tub songa bo‘lganda chiqadigan qoldiqlar edi. Bunda ba’zi a va p uchun qoldiqlar soni $p-1$ ta bo‘ladi, ya’ni mumkin bo‘lgan qoldiqlarning barchasi uchraydi. Masalan, 2 ning darajalari 5 ga va 11 ga bo‘linsa, yoki 3 ning darajalari 7 ga bo‘linsa, shu hodisa ro‘y beradi. Boshqa hollarda ayrim qoldiqlar uchramaydi va har xil qoldiqlar soni $p-1$ tadan kam bo‘ladi. Masalan, 2 ning darajalari 7 ga bo‘linsa, qoldiqlar 1, 2, 4, 1, 2, 4 tarzida takrorlanadi, ya’ni bor-yo‘g‘i uch turli qoldiq chiqadi, xolos. 3 ning darajalari 11 ga bo‘linsa ham shu hol ro‘y beradi: 5 xil qoldiq takrorlanadi.

Gauss shunday qonuniyatni payqaydi: har qanday a uchun birinchi hol o‘rinli bo‘ladigan p tub soni mavjud. U bu qonuniyatni kattaroq p uchun, jumladan, 3 ning darajalarini 17 ga bo‘lib sinab ko‘radi:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^n	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
r	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8

n	11	12	13	14	15	16	17	...
3^n	177147	531441	1594323	4782969	...			
r	7	4	12	2	6	1	3	...

Mana shunday jadvalga termulib, fikr surgan Gaussning boshiga ajoyib g‘oya keladi – bu jadval birning 17-darajali ildizlari bilan bog‘liq bo‘lishi kerak!.

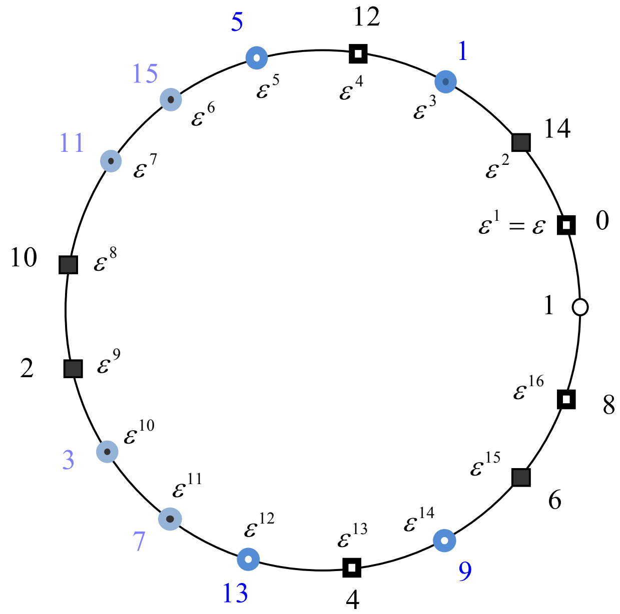
Bu g‘oya qanday tug‘ilgan, degan savolga nisbatan shunday taxmin qilish mumkin: 1 ning 17-darajali ildizlari ichida $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$ ajralib turadi. Uning darajalari, $\varepsilon^{17} = 1$ bo‘lgani uchun, davriy takrorlanadi:

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \ldots, \varepsilon^{16},\ \ \varepsilon^{17} = 1,\ \ \varepsilon^{18} = \varepsilon,\ \ \varepsilon^{19} = \varepsilon^2, \ldots$$

Muavr formulasiga ko‘ra $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \ldots, \varepsilon^{16}$ sonlari aynan 1 ning barcha 17-darajali ildizlaridan iborat.

Yuqoridagi jadvalning uchinchi satridagi qoldiqlar ham shu kabi, faqat 16 davr bilan takrorlanadi.

Biz Gauss aslida qanday fikrlaganini bilmaymiz, albatta, ammo uning daftarlarida yuqoridagi jadvalni o‘zida aks ettirgan rasm uchraydi (1-rasm). Bunda har bir ildiz tashqarisiga uning darajasiga mos qoldiq yozib chiqilgan. Masalan, ε^2 yoniga 14 yozilgan, chunki jadvalga ko‘ra 3^{14} ni 17 ga bo‘lsak, qoldiq 2 ga teng bo‘ladi – bu esa ε^2 ning daraja ko‘rsatkichi. (1 ga esa, tabiiy, hech narsa mos qo‘yilmagan). Og‘zaki hisobga usta bo‘lgan Gauss juft qoldiqlarga mos hadlar (kvadratchalar) hamda toq qoldiqlarga mos hadlar (doirachalar) yig‘indilarini qaraydi:



1-rasm.

$$S_{20} = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16},$$

$$S_{21} = \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{14}.$$

ε soni (1) tenglamaning ildizi bo‘lgani uchun,

$$S_{20} + S_{21} = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} = -1. \qquad (2)$$

Agar ikki sonning yig‘indisi – a, ko‘paytmasi b bo‘lsa, Viet teoremasiga ko‘ra, bu ikki son koeffitsientlari a, b bo‘lgan kvadrat tenglama ildizlari bo‘ladi – bu esa maqsad tomon muhim qadam. Shundan kelib chiqib, Gauss S_{20} ni S_{21} bilan ko‘paytirib ko‘rgan, tabiiy. U bu ishni yozmasdan dilda bajargan bo‘lsa kerak. Keling, muhtaram o‘quvchi, biz yozib ko‘raylik. Buning uchun S_{20} yig‘indidagi har bir hadni S_{21} yig‘indining har bir hadiga ko‘paytirib, ko‘paytmalarni jamlash kerak – hammasi bo‘lib 64 ta had hosil bo‘ladi. Bunda ko‘paytiriladigan hadlar ε ning darajalaridan iborat bo‘lgani uchun, tegishli ko‘rsatkichlarni qo‘shib chiqish kifoya. Bundan tashqari, ko‘paytiruv natijasida ko‘rsatkich 16 dan oshib ketsa, 17 ni chegirib tashlash kerak, chunki $\varepsilon^{17}=1$. Bu ishni o‘ziga xos qo‘shish jadvali tarzida bajarish o‘ng‘ay:

S_{21} \ S_{20}	1	2	4	8	9	13	15	16
3	4	5	7	11	12	16	1	2
5	6	7	9	13	14	1	3	4
6	7	8	10	14	15	2	4	5
7	8	9	11	15	16	3	5	6
10	11	12	14	1	2	6	8	9
11	12	13	15	2	3	7	9	10
12	13	14	16	3	4	8	10	11
14	15	16	1	5	6	10	12	13

Misol uchun, S_{20} dagi ε^9 had S_{21} ning ε^{12} hadiga ko‘paytirilsa, $\varepsilon^9\cdot\varepsilon^{12}=\varepsilon^{21}$ hosil bo‘ladi, uning ko‘rsatkichidan 17 chegirilsa, 4 qoladi – bu son jadvaldagi 9 turgan ustun bilan 12 turgan satr kesishgan katakka joylangan.

Hosil bo‘lgan jadval har qanday matematikka zavq bag‘ishlovchi xususiyatga ega: 1 dan 16 gacha har bir butun son roppa-rosa 4 martadan qatnashadi! Bu esa, (2) tenglikka muvofiq,

$$S_{20}\cdot S_{21}=4(\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots+\varepsilon^{14}+\varepsilon^{15}+\varepsilon^{16})=-4$$

demakdir! Ha, izlanish – omadning onasi.

Shunday qilib, S_{20} va S_{21}

$$x^2 + x - 4 = 0$$

kvadrat tenlamaning ildizlari bo‘lar ekan!

Bunday natija tasodifan yoki besabab bo‘lmaydi – u izlanuvchi to‘g‘ri yo‘ldan borayotganining alomatidir.

Keyin Gauss S_{20} va S_{21} yig‘indining hadlarini ikki guruhga ajratadi. S_{20} uchun

$$S_{40} = \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{16} \text{ va } S_{42} = \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{15}.$$

Bunda S_{40} ga kirgan hadlar 2-rasmda 4 ga bo‘linadigan qoldiqlarga mos ildizlardan (ichi oq), S_{42} ga kirgan hadlar esa 4 ga bo‘lganda 2 qoldiq beradiganlariga mos ildizlardan (to‘la bo‘yalgan) tuzilgan.

Demak, ularning yig‘indisi S_{20}. Ko‘paytmasi-chi? Buni yana jadval ko‘rinishida bajarish o‘ng‘ay. Lekin bu safar tushunarliroq bo‘lishi uchun to‘g‘ridan-to‘g‘ri ko‘paytiramiz (ko‘rsatkich 16 dan katta chiqsa, 17 ni chegirib tashlaymiz):

$$S_{40} \cdot S_{42} = \left(\varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{16}\right) \cdot \left(\varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{15}\right) =$$
$$= \varepsilon^3 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^6 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{13} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 +$$
$$+ \varepsilon^{11} + \varepsilon + \varepsilon^7 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{14} = -1.$$

Demak, S_{40} va S_{42} yig‘indilar $x^2 - S_{20}x - 1 = 0$ kvadrat tenglama ildizlari bo‘lar ekan.

Xuddi shu singari S_{21} yig‘indi $S_{41}=\varepsilon^3+\varepsilon^5+\varepsilon^{12}+\varepsilon^{14}$ va $S_{43}=\varepsilon^6+\varepsilon^7+\varepsilon^{10}+\varepsilon^{11}$ qo‘shiluvchilarga ajratilsa, ularning ko‘paytmasi yana -1 ga teng chiqadi.

Mashq. a) Bu xossani tekshirib ko‘ring; b) S_{41} va S_{43} yig‘indilar hadlari qanday qonun asosida tanlanganini 1-rasm asosida tushuntirib bering.

Shunday qilib, S_{41} va S_{43} yig‘indilar $x^2-S_{21}x-1=0$ kvadrat tenglama ildizlari bo‘lar ekan.

Navbatdagi qadamda $S_{40}=\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{16}$ ni ikkiga ajratish kerakligi tushunarli. Bunda 1-rasmdagi 8 ga bo‘linadigan qoldiqlarga mos qo‘shiluvchilar $S_{80}=\varepsilon+\varepsilon^{16}$ ifodaga, 8 ga bo‘lganda 4 qoldiq beradiganiga mos qo‘shiluvchilar $S_{84}=\varepsilon^4+\varepsilon^{13}$ ifodaga jamlanishi lozim. Bu safar, bir tomondan, $S_{80}+S_{84}=S_{40}$, ikkinchi tomondan, ularning ko‘paytmasi

$$S_{80}\cdot S_{84}=(\varepsilon+\varepsilon^{16})\cdot(\varepsilon^4+\varepsilon^{13})=$$
$$=\varepsilon^5+\varepsilon^{14}+\varepsilon^{20}+\varepsilon^{29}=\varepsilon^5+\varepsilon^{14}+\varepsilon^3+\varepsilon^{12}=S_{41}.$$

Demak, S_{80} bilan S_{84} sonlari $x^2-S_{40}x-S_{41}=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari bo‘lar ekan. Agar S_{41}, S_{42} va S_{43} yig‘indilar bilan ham shunday amallar bajarilsa, yana uchta kvadrat tenglama hosil bo‘ladi. Lekin bunga hojat yo‘q. Chunki $\varepsilon^{17}=1$ tenglikdan $\varepsilon^{16}=\dfrac{1}{\varepsilon}$ kelib chiqadi. Buni $S_{80}=\varepsilon+\varepsilon^{16}$ tenglikka qo‘ysak, ε ga nisbatan $\varepsilon+\dfrac{1}{\varepsilon}=S_{80}$ tenglama hosil bo‘ladiki, u ham kvadrat tenglamadir.

Xulosa: 1 ning 17-darajali ildizi bo‘lgan ε soni S_{80} orqali, u o‘z navbatida S_{40} va S_{41} orqali, ular esa $x^2 - S_{20}x - 1 = 0$ va $x^2 - S_{21}x - 1 = 0$ tenglamalar orqali S_{20} bilan ifodalanadi va bunda S_{80}, S_{40}, S_{41} va S_{20} larni topish uchun ratsional sonlar ustida to‘rt arifmetik amalu kvadrat ildiz chiqarish qo‘llanadi, xolos. Demak, sirkul va chizg‘ich vositasida muntazam 17 burchak yasash mumkin!!

ε va ε^{16} o‘zaro qo‘shma kompleks sonlar ekanini payqash qiyin emas. Demak, $S_{80} = \varepsilon + \varepsilon^{16}$ aslida haqiqiy son: $S_{80} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$.

Gauss hosil bo‘lgan kvadrat tenglamalarni yechib, ularning qaysi ildiziga S_{ik} yig‘indilardan qaysilari mos kelishini aniqlaydi va

$$S_{80} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}$$

formulani chiqaradi.

Mashq. a) $S_{20}, S_{21}, S_{40}, S_{41}, S_{42}, S_{43}$ sonlar haqiqiy ekanligini isbotlang (ko‘rsatma: o‘zaro qo‘shma kompleks sonlar abssissa o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘ladi);

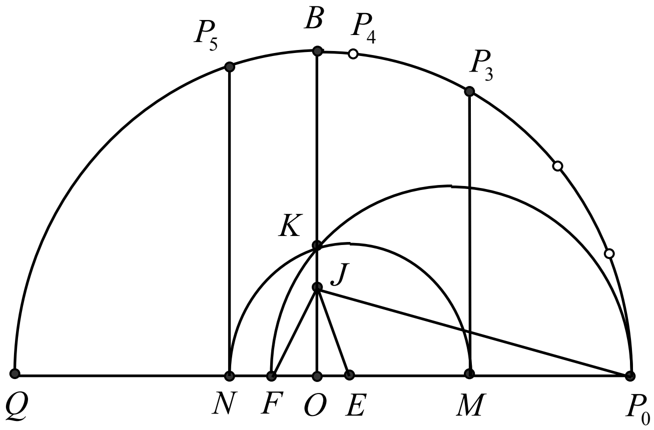
b) $S_{20} > S_{21}$ ekanligini isbotlang (ko‘rsatma: 1-rasmdan foydalaning);

v) $S_{20} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$, $S_{21} = -\frac{\sqrt{17} + 1}{2}$ formulalarni keltirib chiqaring;

g) $S_{40}, S_{41}, S_{42}, S_{43}$ larni toping;

d) S_{80} uchun yuqorida keltirilgan Gauss formulasini isbotlang.

Bu formulaga asoslanib, kattaligi $\dfrac{2\pi}{17}$ bo'lgan burchakni, demak, muntazam 17-burchakni amalda yasash mumkin. Hozir buning ixchamroq usullari topilgan. Masalan, 2-rasmda nuqtalar quyidagi tartibda yasalgan (har bir yangi nuqta qalin qilib



2-rasm.

ko'rsatilgan): OB radius P_0Q diametrga tik; $OJ = \dfrac{OB}{4}$; $\angle OJE = \dfrac{\angle OJP_0}{4}$; $\angle FJE = 45^\circ$; EP_0 diametrli aylana OB radiusni K nuqtada kesadi; markazi E, radiusi EK bo'lgan aylana OP_0 radiusni M nuqtada, OQ radiusni N nuqtada kesadi; bu nuqtalardan P_0Q ga o'tkazilgan perpendikulyarlar katta aylanani P_3 va P_5 nuqtalarda kesadi.

Shunda $\cup P_3P_5$ yoy aylananing $\dfrac{2}{17}$ bo'lagiga teng bo'ladi.

Mashq. Buni isbotlang. (Ko'rsatma: $x^2 + 2x\mathrm{ctg}2\alpha - 1 = 0$ tenglama ildizlari $\mathrm{tg}\alpha$ va $\mathrm{ctg}\alpha$ bo'lishidan foydalaning.)

Albatta, amalda sirkul va chizg'ich vositasida muntazam 17-burchak yasashga to'g'ri kelmaydi. Bordiyu shunday bo'lgan taqdirda ham transportir vositasida bu ishni bajarish osonroq. Lekin bu taqribiy yasash bo‘ladi. Biz ko‘rayotgan masala esa – nazariy masaladir.

Muntazam ko‘pburchak yasash masalasining qiymati – uning murakkabligida, Gauss debyutining ahamiyati esa o‘ta qiyin masalani yechish yo‘lida inson tafakkuri “matematika changalzorlari”ni yengib o‘ta olishi mumkinligini namoyish qilganidadir. Muntazam 9, 11, 13-burchakliklarni yasab bo‘lmagan bir sharoitda muntazam 17-burchakni yasash mumkin degan g‘oyaga kelish, bu g‘oyani amalga oshirish uchun mutlaqo yangi mushohadalarni qo‘llash, ularning kishini entiktiradigan darajada hayratomuz va go‘zalligi g‘oyat ibratli.

Gaussning bu ishida, bir tomondan, matematika fanining asl mohiyati mujassam bo‘lsa, ikkinchi tomondan, “Matematika nimasi bilan insonni o‘ziga maftun etadi?” degan savolga aniq javob bor.

§ 14. Tetraedr ustida quvish masalasi[16]

Oltita bir xil uzunlikdagi simdan yasalgan tetraedrni ko‘z oldimizga keltiraylik. Tetraedrning qirralaridan iborat shakl (biz uni qisqacha tetraedr deb atayveramiz) bo‘ylab P_1 va P_2 nuqtalar Q nuqtani tutishga harakat qiladi. Agar har uch nuqtaning eng katta tezligi bir xil, aytaylik, w ga teng bo‘lsa, bunday o‘yinda kim yutadi?

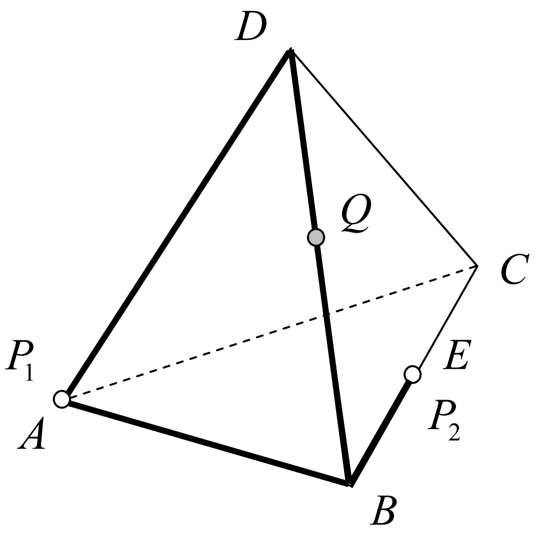
Avvalo, quyidagi ochiq-oydin faktlarni aytib o‘taylik. 1)agar quvuvchi nuqta bitta bo‘lsa, u Q ni tuta olmaydi; 2) agar quvuvchi nuqtalar uchta bo‘lsa, ular Q ni tuta oladi va buning uchun ularning tezligi qochuvchining tezligiga teng bo‘lishi ham shart emas, musbat bo‘lsa kifoya.

[16] FMI, 2010, №4.

Xo‘sh, quvuvchi nuqtalar ikkita bo‘lsa-chi? Bu holda javob yengil emas va shunisi bilan masala jozibaga ega.

Teorema. Tezliklar teng bo‘lganda tetraedr ustida ikkita quvuvchi bitta qochuvchini doim tuta oladi.

Bu tasdiqni isbotlash uchun quvuvchilar qanday harakatlanishi lozimligini ko‘rsatish kerak. Shunday qilib, $ABCD$ – qaralayotgan tetraedr bo‘lsin. Quvish jarayonining boshida P_1 quvuvchi A uchda, P_2 esa BC qirraning o‘rtasida (E nuqtada) turibdi deb hisoblash mumkin. Bunda Q nuqta o‘z harakatini tetraedrning istalgan joyidan boshlashga haqli Agar qochuvchining holati e’tibordan chiqarib turilsa, vaziyat A, D, E nuqtalardan o‘tadigan tekislikka nisbatan simmetrik bo‘ladi. Shu bois o‘yin boshida qochuvchi tetraedrning bu tekislikdan B nuqta tomondagi yarmida joylashgan deb hisoblasak bo‘ladi (1-rasmda qalin chiziq bilan ajratilgan). Bunda uch holdan biri o‘rinli bo‘ladi.



1-rasm.

1-hol: Q nuqta AD qirrada. Bu holda P_2 quvuchi o‘rnida kutib turadi, P_1 esa AD qirra bo‘ylab harakat qilib, Q nuqtani D uchga borishga, so‘ngra DB yoki DC qirralardan biri bo‘ylab pastga harakatlanishga majbur qiladi. Nuqta Q dan bu qirralar bo‘ylab harakat qila boshlashi bilan P_2 quvuvchi o‘z harakatini boshlaydi. Bunda u Q nuqtaning BC qirradagi soyasiday harakat qilishi lozim. P_1 quvuvchi D nuqtaga yetib, Q ortidan qisib kelayotgani uchun Q nuqta yo B uchga, yoki C uchgacha tushishga majbur. Xuddi shu paytda u o‘z soyasi, bo ‘lgan P_2 bilan ustma-ust tushib qoladi, ya’ni tutiladi.

2-hol: Q nuqta ABE chiziq ustida. Bu holda P_1 quvuchi o‘z joyida – A nuqtada payt poylab turadi, P_2 esa B uch tomon harakatlanadi. Agar P_2 to B uchga kelguncha qochuvchi BD qirraga o‘tib olmagan bo‘lsa, u yo BE ustida tutiladi, yoki AB qirrada bo‘ladi, ya’ni quvuchilar orasiga tushib qoladi. Q nuqta P_2 quvuvchi B uchga kelmasidan BD qirraga o‘tib olgan bo‘lsa, u holda yo‘l-yo‘lakay, biror t paytda QP_2 kesma DE apofemaga parallel holatga kiradi, albatta. Xuddi shu t paytdan boshlab, P_2 nuqta o‘z harakatini yana Q ning soyasiday davom ettiradi, P_1 quvuvchi esa D uch tomon harakatlanadi. Oqibatda xuddi 1-holdagi kabi Q nuqta tutiladi.

3-hol: Q nuqta BD qirrada. Bu holda ham P_2 nuqta B uch tomon harakatlanadi va Q qanday tarzda harakat qilmasin, biror paytda QP_2 kesma DE ga parallel holatga tushadi. Shundan so‘ng jarayon 2-holdagi kabi yakunlanadi.

Isbot mukammal bo‘lishi uchun, “P_2 nuqta Q ning soyasiday harakatlanishi kerak” degan tavsiyani ko‘rib chiqaylik. Q nuqta, aytaylik, BD qirra bo‘ylab T vaqtda S masofani bosib o‘tsin. Bu bosib o‘tgan yo‘lning BC qirraga soyasi, ya’ni BC ga tik yo‘nalishdagi proyeksiyasi $\frac{S}{2}$ ga teng bo‘ladi (muntazam uchburchak xossasi). Demak, nafaqat qaralayotgan P_2 quvuvchi, hatto tezligi

w ning tezligi yarmiga teng bo‘lgan nuqta ham Q ning soyasiday harakat qila olar ekan.

Biz hozirgacha P_1 nuqtaning tezligi aynan w ga tengligidan foydalanmadik. Agar mulohazalarga diqqat qilinsa, P_1 nuqtaning tezligi musbat bo‘lishi kifoya ekanligini payqash mumkin. Demak, biz aslida qo‘yilganga qaraganda kuchliroq natijani qo‘lga kiritibmiz: P_1 quvuvchining tezligi u_1, P_2 niki esa u_2 bo‘lsin. Agar $u_1 > 0$ va $u_2 \geq \frac{w}{2}$ bo‘lsa, P_1 va P_2 nuqtalar Q ni tuta oladi.

Agar har ikki quvuvchining ham tezligi $\frac{w}{2}$ dan kichik bo‘lsa-chi? Bu savol ustida o‘ylab ko‘rishni o‘quvchiga havola etamiz.

So‘nggi so‘z. Qochish-quvish kabi masalalar matematikaning *differensial o‘yinlar nazariyasi* deb ataladigan bo‘limida o‘rganiladi. Yuqorida ko‘rilgan masala bu sohadan sodda bir misoldir.

§ 15. Kub ustida quvish masalasi[17]

Avvalgi maqolamizda tetraedr ustida quvlash masalasini ko‘rgan edik. Endi shunday masalani kub uchun o‘rganaylik. Avvalambor, kub deganda faqat uning qirralaridan iborat, ya’ni simdan yasalganday shakl nazarda tutilishini qayd etib qo‘yamiz. Quvish va qochish jarayonida qatnashuvchi nuqtalar mana shu shakl, ya’ni kubning qirralari bo‘ylab harakat qilishi lozim. Bunda quvuvchilarning eng katta tezligi u qochuvchiniki esa v ga teng (u, v – tayin musbat sonlar). Ravshanki, agar $u > v$ bo‘lsa, qochuvchini tutishni (ya’ni, quvuvchi nuqta bilan qochuvchi nuqta ustma-ust tushadigan holat yuzaga kelishini) bitta quvuvchi ham uddalaydi – buning uchun quvuvchi qochuvching izidan u tezlik bilan harakatlanishi kifoya. Shuning uchun $u \le v$ deb olamiz va bunday masalani qaraymiz: kub ustida qochuvchini tuta olish uchun nechta quvuvchi lozim. Javob, albatta, u bilan v ga bog‘liq chiqadi.

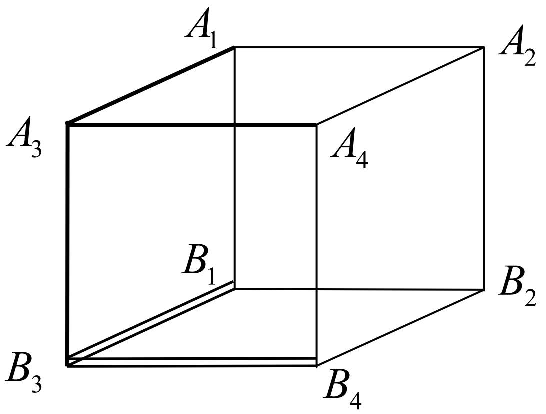
Teorema. a) faqat $u > 0$ sharti bajarilsa, to‘rtta quvuvchi kifoya; b) $u = v$ bo‘lsa, ikkita quvuvchi tuta oladi; c) $u < v$ bo‘lsa, ikkita quvuvchi tuta olmaydi.

a) tasdiq isboti. Quvuvchilar P_1, P_2, P_3, P_4 bo‘lib, ular harakatini A_3 nuqtadan boshlasin: P_1 quvuvchi A_1 nuqtaga, P_2 quvuvchi A_4 nuqtaga, P_3, P_4 quvuvchilar esa B_3 nuqtaga qarab yo‘nalsin. Agar yo‘l-yo‘lakay qochuvchi bilan to‘qnashmasalar, ular bir paytda kubning tegishli uchlariga yetib boradi (1-rasmda ularning bunda bosib o‘tadigan yo‘li qalinroq chiziq bilan tasvirlandi).

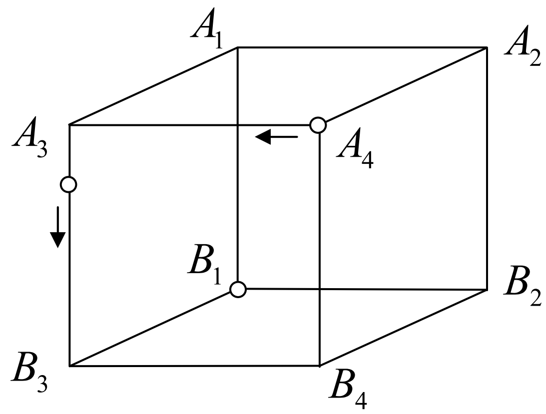
Shundan so‘ng P_3, P_4 quvuvchilar mos ravishda B_1 va B_4 uch tomon yo‘nalishlari kerak (chizmada ularning

[17] FMI, 2010, №5. (A.Xolboyev bilan hammualliflikda).

yo‘li qo‘sh chiziq bilan ajratildi), qolgan ikki quvuvchi esa o‘rnida kutib turishi lozim. Agar P_3 bilan P_4 quvuvchi B_1 va B_4 uchlarga yetib kelganda, qochuvchi A_1B_1 yoki A_4B_4 qirralardan birida



1-rasm.



2-rasm.

turgan bo‘lsa, u osongina qo‘lga tushadi. Aks holda P_3, P_4 quvuchilar uni B_2 uch tomon qisib borib, A_2B_2 qirraga o‘tishga majbur qiladi. Shundan so‘ng qochuvchi A_2 uchda tutashadigan qirralar ustida tutiladi – bunda P_1 va P_2 quvuvchi o‘rnida, ya’ni A_1 va A_4 nuqtalarda turishi ham, yoki A_2 uch tomon yo‘nalishi ham mumkin.

b) tasdiq isboti. Dastlab quvuvchilar kubning ikki qarama-qarshi uchlaridan joy egallashi lozim (2-rasm).

Aytaylik, P_1 quvuvchi B_1 uchda, P_2 esa A_4 uchga kelsin. Quvish jarayonini xuddi shu holatdan boshlash mumkin. Qochuvchi turgan nuqtadan bu uchlargacha bo‘lgan masofalarni taqqoslaymiz. Bunda masofalar kubning qirralari bo‘ylab o‘lchanishi lozim. (Masalan, agar kub qirralari uzunligi 1 ga teng bo‘lsa, B_1 bilan A_4 nuqtalar orasidagi masofa 3 ga teng chiqadi). Qochuvchi B_1 uchga nisbatan A_4 uchga yaqinroq turgan bo‘lsin (har ikki masofa teng bo‘lgan holni ham shunga qo‘shamiz.)

Aniqlik uchun qochuvchi $B_3A_3A_4$ siniq chiziq ustida turibdi, deb hisoblaylik (boshqa barcha holatlar shunga o‘xshash bo‘ladi). Quvuvchilarga quyidagi harakat usuli tavsiya etiladi.

1-bosqich. P_1 quvuvchi o‘z o‘rnida kutadi, P_2 esa qochuvchi tomon yo‘naladi. Bunda agar qochuvchi P_2 dan uzoqlashadigan yo‘nalishda eng katta tezlik bilan qochsa, P_2 bilan qochuvchi orasidagi masofa o‘zgarmaydi, aks holda bu masofa kichiklashadi. Buni nazarda tutib, P_2 quvuvchi A_3 uchga yetib kelgandagi holatni o‘rganaylik. Qochuvchi A_3A_4 qirraga o‘tguday bo‘lsa, yo‘l-yo‘lakay tutilgan bo‘ladi. Agar u harakati davomida A_3A_1 qirraga ham kirib tursa, P_1 quvuvchi unga A_3B_1 diagonalga nisbatan simmetrik harakat qilib turadi, ya’ni qochuvchi A_3A_1 qirra bo‘ylab qancha surilsa, P_1 quvuvchi B_1A_1 qirra bo‘ylab shunchaga suriladi (qochuvchi ortga qaytsa, P_1 ham ortga qaytadi). Ko‘rinib turibdiki, agar P_2 quvuvchi A_3 uchga yetib kelganda, qochuvchi A_1A_3 qirrada bo‘lsa, P_2 uni A_1 uch tomon surilishga majbur qiladi, qochuvchi A_1 uchga borganda esa P_2 ham shu nuqtaga yetib kelib, uni qo‘lga tushiradi.

Shunday qilib, P_2 quvuvchi A_4 uchga yetib kelganda, qochuvchi A_3 dan pastroqda turgan holatni qarash qoladi. Bu holatdan quvishning 2-bosqichiga o‘tiladi. Bunda P_2 bilan qochuvchi orasidagi masofa 1,5 dan katta emasligini hamda P_1 quvuvchi B_1 uchda bo‘lishini (jilgan bo‘lsa ham, qaytib kelganini) nazarda tutamiz.

2-bosqich. P_2 quvuvchi qochuvchi tomon, ya’ni B_3 uchga qarab harakatini davom ettiradi. P_2 quvuvchi B_3 uchga yetib kelguncha, qochuvchining B_3B_1 qirraga o‘tishidan ma’no yo‘q (ikki quvuvchining orasiga tushib qoladi). Shuning uchun qochuvchi B_4 uch tomon harakatlanishga majbur. P_2 quvuvchi ham uning ketidan B_4 uch tomon yaqinlasha borar ekan, qochuvchi yo B_4B_2 qirraga yoki B_4A_4 qirraga o‘tishiga to‘g‘ri keladi. Birinchi holda P_1 quvuvchi yana B_1B_2 qirra bo‘ylab qochuvchiga simmetrik harakat qiladi. Natijada u qochuvchi bilan bir paytda B_2 uchga yetib kelib, uni tutadi. Ikkinchi holda, ya’ni qochuvchi B_4A_4 qirra bo‘ylab qochsa, quvishning 3-bosqichiga o‘tiladi.

3-bosqich. Qochuvchining B_4A_4 qirra bo‘ylab harakatiga P_1 quvuchi B_1A_1 qirra bo‘ylab parallel harakati bilan javob beradi. Natijada qochuvchi A_4 uchga yetganda P_1 quvuvchi A_1 uchga keladi. Bunda P_2 quvuchi A_4 nuqtadan pastroqda, qochuvchidan nari borsa 1,5 birlik masofada bo‘lgani uchun, qochuvchi pastga qarab harakatlansa, uni P_2 tutib oladi. Shuning uchun qochuvchi yo A_4A_2 yoki A_4A_3 qirra bo‘ylab qochishga majbur bo‘ladi. Bunda P_1 quvuvchi A_2A_3 diagonalga nisbatan simmetrik harakat qilsa, qochuvchi yo A_2 nuqtada, yoki A_3 nuqtada qo‘lga tushadi. Shu bilan b) tasdiq isboti yakunlandi.

c) tasdiqning isbotiga kirishishdan avval, unga aniqlik kiritib olish lozim. Agar harakat boshida quvuvchilar biror qirraning uchlarida tursa va qochuvchi shu qirrada joylashgan bo‘lsa yoki biroz o‘tib, shunday holat yuzaga kelishi mumkin bo‘lsa, qochuvchi osongina tutiladi, albatta. a) va b) tasdiqlarni isbotlashda “qochuvchi tutiladi” deganda, u harakatini qayerdan boshlasa ham tutilishi mumkinligini tushunganmiz. Shuning uchun “ikkita quvuvchi qochuvchini tuta olmaydi” deganda, harakat qaysidir boshlang‘ich holatdan boshlanganda quvuvchilar qochuvchini tuta olmasligini tushunishimiz lozim. Bunda ana shunday boshlang‘ich holat hamda qochuvchi uchun qo‘lga tushmaydigan harakat usulini ko‘rsatish talab etiladi.

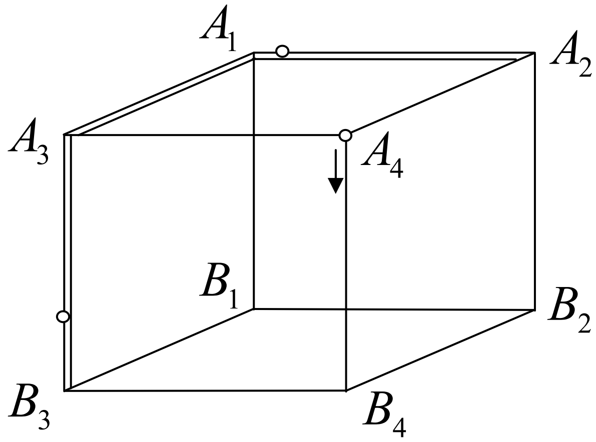
Ana shu talabga javob beradigan boshlang‘ich holat sifatida qochuvchi kubning istalgan bir uchida, quvuvchilar esa undan musbat masofada joylashgan holatni olamiz. Aytaylik, qochuvchi A_4 uchda turgan bo‘lsin. Bu uchdan uchta qirra chiqadi: A_4A_3, A_4A_2, A_4B_4. Quvuvchilar atigi ikkita bo‘lgani uchun bu qirralardan kamida bittasi quvuvchilardan holi bo‘ladi.

1-hol: A_4 ga tutash qirralardan faqat bittasi quvuvchilardan holi. Aytaylik, bu A_4B_4 qirra bo‘lsin. Demak, qolgan A_4A_2 va A_4A_3 qirralarning har birida bittadan quvuvchi joylashgan. Bunday vaziyatda qochuvchi A_4B_4 qirrani bosib o‘tib, B_4 uchga yo‘nalishi lozim – bunda quvuvchilar qanday harakat qilmasin, qochuvchi B_4 uchga ulardan oldinroq yetib boradi.

2-hol: A_4 ga tutash qirralardan ikkitasi quvuvchilardan holi. Aniqlik uchun bu qirralar A_4A_2 va A_4A_3 bo‘lsin.

Agar qochuvchi yo A_2 uchga, yoki A_3 uchga quvuvchilardan oldin yetib bora olsa, u shu uch tomonga harakatlanishi kerak. Aks holda quvuvchilar 3-rasmda qo‘shchiziq bilan belgilangan qirralar ustida turgan bo‘lishi shart. Demak, qochuvchi B_4 uchga quvuvchilarning har ikkisidan ham oldinroq yetib bora oladi.

Shunday qilib, quvuvchilar qanday harakat qilishmasin, qochuvchi dastlab joylashgan uchdan qo‘shni uchlardan biriga qo‘lga tushmasdan o‘ta oladi. Bu paytdagi holat dastlabki holatni takrorlagani uchun, qochuvchi boshqa bir uchga, so‘ng yana bir uchga qo‘lga tushmay borish imkoniga ega. Bu jarayon cheksiz davom etishi mumkinligidan c) tasdiq isboti kelib chiqadi



3-rasm.

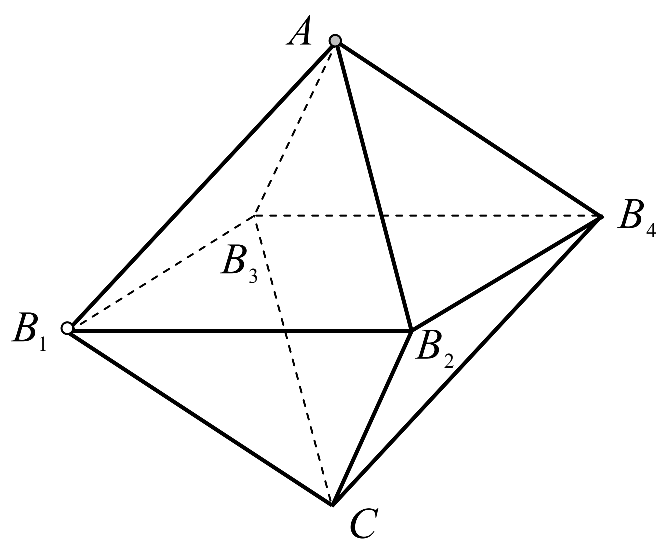
Maqolamiz yakunida o‘quvchilarga masalaning ochiq qolgan qismi ustida o‘ylab ko‘rishni taklif etamiz:

Mustaqil yechish uchun masala. $u < v$ holda quvuvchilar uchta bo‘lsa, o‘yinni kim yutadi? Aniqrog‘i, harakat boshida har uch quvuvchi bir uchda, qochuvchi esa boshqa bir uchda turgan bo‘lsa, quvish masalasi yechimga egami?

§ 16. Oktaedr ustida quvish masalasi[18]

Bu suhbatimizda, avvalgi mavzuni davom ettirib, oktaedr (muntazam sakkizyoqlik) ustida quvish-qochish masalasini qaraymiz.

Shunday qilib, bizga muntazam sakkizyoqlikning qirralaridan iborat $AB_1B_2B_3B_4C$ shakl berilgan (1-rasm). Olinishiga ko'ra, barcha qirralarning uzunligi bir xil, aytaylik, a ga teng. Bu shakl ustida bitta qochuvchi (Q deb belgilaymiz) va bir necha quvuvchi harakat qiladi. Quvuvchilar soni bitta bo'lsa, masala juda jo'n bo'lib qoladi. Shuning uchun quvuvchilar kamida ikkita deb hisoblaymiz. Dastavval, roppa-rosa ikkita quvuvchi qatnashadigan o'yinni ko'ramiz. Ularni P_1 va P_2 deb belgilab olamiz. Nuqtalarning tezligi istalgancha katta bo'la olmaydi, albatta. Qochuvchining eng katta tezligi v, quvuvchilarniki u bo'lsin. Bunda u, v – musbat sonlar. Agar $u > v$ bo'lsa, u holda bitta quvuvchining o'ziyoq osongina qochuvchini tuta olishi ravshan.



1-rasm.

1-teorema. $u = v$ bo'lsa, quvuvchilar qochuvchini tuta oladi.

Isboti. Dastlab, birinchi quvuvchi A uchga, ikkinchisi C uchga borib tursin. O'yin xuddi shu holatdan

[18] FMI, 2010, №6. (A.Xolboyev bilan hammualliflikda).

boshlanadi, deb hisoblash mumkin, albatta. Qochuvchi esa o‘z harakatini 12 ta qirradan istalgan biriga tegishli nuqtadan, xususan, B_1, B_2, B_3, B_4 uchlarning biridan boshlashi mumkin (bu uning ixtiyorida). Butun shakl $B_1B_2B_3B_4$ tekislikka nisbatan simmetrik bo‘lgani hamda boshlang‘ich holatda $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_1$ qirralar o‘zaro teng kuchli hamda qolgan 8 ta qirra ham o‘zaro teng kuchli bo‘lgani uchun, uchta holni qarash kifoya:

1-hol – Q nuqta harakatini B_1 uchdan boshlaydi;

2-hol – B_1C qirraning ichki nuqtasidan boshlaydi.

3-hol – B_1B_2 qirraning ichki nuqtalaridan (ya’ni, uchlari mustasno) boshlaydi;

1-holda P_2 quvuvchi C uchga qarab yo‘naladi, P_1 esa Q ning harakatiga qarab ish tutadi: agar Q nuqta B_1C qirraga o‘tsa, P_1 quvuvchi C uchda turaveradi, bordi-yu qochuvchi B_1B_2 yoki B_1B_4 qirraga o‘tib harakatlansa, P_1 unga nisbatan simmetrik harakat qiladi. Masalan, Q qochuvchi B_1B_2 qirra bo‘ylab qanchaga surilsa, P_1 quvuchi AB_2 qirra bo‘ylab shunchaga suriladi.

P_2 quvuvchi B_1 uchga yetib kelib, so‘ng qochuvchini AB_1, B_1B_2, B_1B_4 qirralardan biriga surib chiqaradi va shu qirra bo‘ylab quvishda davom etadi. Natijada qochuvchi A, B_1, B_4 uchlardan biriga qarab qochishga majbur bo‘ladi. Quvuvchi va qochuvchilarning eng katta tezliklari teng bo‘lgani, va P_1 simmetrik harakat qilgani uchun, qochuvchi albatta tutiladi.

2-holda P_1 quvuvchi qochuvchini B_1 nuqtaga borishga majbur qiladi. Bu holda u tutilishini ko‘rdik.

3-holda P_2 quvuvchi biroz uzoqroq quvishiga to‘g‘ri keladi. U bu safar ham B_1 uch tomon harakat qilaveradi.

Ravshanki, qochuvchi uchun B_1 uchga borish ma'qul emas – bunda ko'rilgan vaziyatga kelib qoladi. P_2 uning ortidan quvib kelayotgani uchun, qochuvchi qachondir B_2 uchga borishiga to'g'ri keladi. Shundan so'ng unga B_2A yoki B_2B_4 qirralarga o'tib harakat qilish ma'qul emas – yo P_1 quvuvchi tomonidan tutiladi yoki vaqtni bekor o'tkazgani qoladi.

Shuni hisobga olib, qochuvchi B_2C qirra bo'ylab qochadigan holni qarash kifoya. Bunda P_2 quvuvchi qochuvchini qisib borishni shu qirra bo'ylab davom ettirishi va Q ni C uchga borishga majbur qilishi kerak. Qochuvchi bu uchga borgach, u yerda ham uzoq turolmaydi, P_2 ning qo'liga tushmasligi uchun, uchdan chiqqan qiralardan biri bo'ylab yuqoriga ko'tarilishga majbur. Xuddi shu holatdan boshlab P_1 quvuvchi $B_1B_2B_3B_4$ tekislikka nisbatan simmetrik harakat qilib, qochuvchini B_1, B_3, B_4 nuqtalarning birida tutadi. Teorema isbotlandi.

2-teorema. $u < v$ bo'lsa, quvuvchilar qochuvchini tuta olmaydi.

Izoh. Bunda, albatta, 1-teoremaga aks tasdiq aytilmoqda. Bu degani, xususan, qochish-quvish jarayoni biror boshlang'ich holatdan boshlanganda, quvuvchilar qochuvchini tuta olmasligi tasdiqlanmoqda. Chunki, u bilan v qanday musbat sonlar bo'lmasin, boshlang'ich holatda quvuvchilar bir qirraning ikki uchini egallab, qochuvchi ularning orasida tursa, tutilishi ravshan.

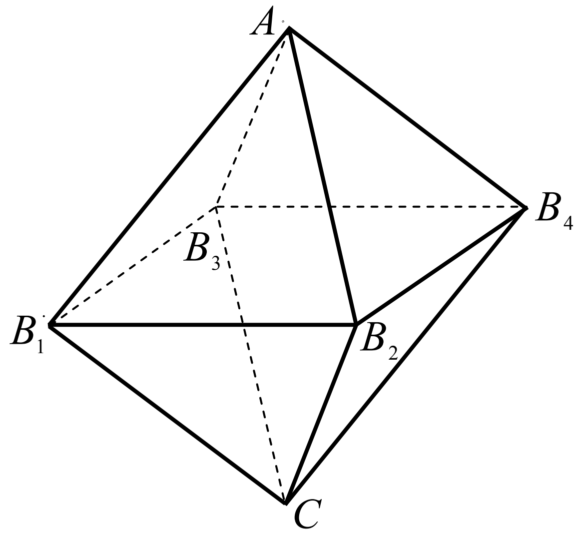
Isboti. Boshlang'ich sifatida qochuvchi A nuqtada, quvuvchilar esa undan qanchadir masofadada turgan holatni olamiz. Bunda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1-hol – A uchdan chiqqan qirralarning birortasida ham quvuvchi yo‘q. Bu holda qochuvchi A uchda, to birorta quvuvchi yaqin kelguncha kutib turaveradi.

2-hol – A uchdan chiqqan ikkita qirrada bittadan quvuvchi turgan bo‘lsa, qochuvchi A dan chiqqan qolgan ikkita qirraning narigi uchiga tezlik bilan yo‘naladi va tezligi kattaroq bo‘lgani uchun u yerga quvuvchilardan oldin yetib boradi.

3-hol – quvuvchilardan biri uchdan chiqqan qirrada, ikkinchisi esa bunday qirralardan tashqarida (2-rasm).

Misol uchun, P_1 quvuvchi AB_1 qirrada turgan bo‘lsin. U holda P_2 quvuvchi qayerda bo‘lmasin, undan B_2, B_3, B_4 uchlardan kamida bittasidan a masofadan uzoqroqda bo‘ladi. Masalan, 2-rasmda tasvirlanganidek, P_2 quvuvchi B_2C qirrada bo‘lsa, undan B_3, B_4 uchlargacha masofa a dan katta bo‘ladi, B_2B_3 qirrada turgan bo‘lsa, B_4 uchgacha masofa a dan katta bo‘ladi.



2-rasm.

Demak, qochuvchi doim boshlang‘ich uchdan biror qo‘shni uchga qochuvchilardan oldin yetib bora oladi. Shundan so‘ng u o‘yinni xuddi boshidan boshlaganday harakat qilib, boshqa bir uchga o‘tadi va hokazo. Bunda har bir o‘tishga roppa-rosa $\frac{a}{v}$ vaqt birligi sarf bo‘lgani uchun, qochuvchi hech qachon qo‘lga tushmaydi.

Mashq. Nuqtalar ixtiyoriy boshlang‘ich holatlarni egallab turgan bo‘lsin. (Bunda ikki quvuvchi bir nuqtada turishiga yo‘l qo‘yiladi, ammo qochuvchi quvuvchilardan boshqa nuqtada turgan holni qarash kerak, aks holda o‘yin boshlanmasdan qochuvchi tutilgan bo‘ladi.) Agar qochuvchi uchlardan birortasiga quvuvchilardan oldin yetib bora olsa, u, 2-teoremaga muvofiq, o‘yinni yutadi. Faraz qilaylik, u hech bir uchga quvuvchilarning biridanmi, har ikkalasidanmi oldin yetib bora olmasin. Bu holda o‘yin quvuvchilar foydasiga hal bo‘lishini isbotlang.

Maqolamiz yakunida matematikani sevadigan o‘quvchilarga mustaqil tadqiqot olib borish uchun bir necha mavzu taklif etamiz.

1-masala. Quvuvchilar ikkita va $u = v$ bo‘lganda, quvuvchilar qochuvchini tutib olishini ko‘rdik. Bunda tutib olishga ko‘pi bilan qancha vaqt zarurligini hisoblang. Kichikroq vaqt davomida tutishga imkon beradigan quvish usuli bormi?

2-masala. Quvuvchilar ikkita va $u < v$ bo‘lganda, qochuvchi cheksiz vaqt davomida qochib yura olishini ko‘rsatdik. Qochuvchi quvuvchilardan qanday masofada qochib yurishi mumkin?

3-masala. Quvuvchilar uchta, ularning eng katta tezliklari qochuvchinikidan kichik, ya’ni $u < v$ bo‘lsa, o‘yin kimning foydasiga hal bo‘ladi?

§ 17. Dodekaedr qirralari bo‘ylab quvish masalasi[19]

Bu safar quvish-qochish masalasini dodekaedr qirralaridan iborat shakl ustida qaraymiz. Ma’lumki, dodekaedr (yunonchadan tarjimada – o‘n ikki yoqli) beshta Platon jismi – muntazam ko‘pyoqliklardan biri. Uning 20 ta uchi va 30 ta qirrasi bor (1-rasm). U muntazam bo‘lgani uchun barcha qirrasi bir xil a uzunlikka ega. Bu shakl ustida bir xil, aytaylik, v dan katta bo‘lmagan tezlik bilan harakatlanayotgan nuqtalarni qaraymiz (tezlik metr-sekundlarda o‘lchanishi mumkin, lekin buning ahamiyati yo‘q). Nuqtalardan biri, uni Q bilan belgilaymiz) qochuvchi bo‘lsin, qolganlari esa quvuvchilardir. Ulardan bittasi bo‘lsa ham qochuvchini qo‘lga tushirsa, ya’ni nuqtalar ustma-ust tushib qolsa, o‘yin quvuvchilar foydasiga hal bo‘ladi, aks holda qochuvchi yutadi. Tabiiy, natija nuqtalar qanday holatdan boshlab harakatlanishiga bog‘liq. Biz quvish masalasini yechganda, o‘yin ixtiyoriy boshlang‘ich holatlardan boshlanganda ham qochuvchi tutilishini ko‘rsatishimiz, qochish masalasini esa nuqtalarning biror boshlang‘ich holatiga uchun yechish kifoya. (Birinchi masalada nuqtalarning ixtiyoriy boshlang‘ich holati, ikkinchi masalada esa biror holati ustida so‘z borayotganiga e’tibor bering.)

Masalada dodekaedrning shakli muhim rol o‘ynaydi, albatta. Shuning uchun uni qulayroq tarzda chizib olamiz (2-rasm, barcha qirralar bir xil uzunlikka ega ekanini nazarda tutish lozim).

Ravshanki, bitta quvuvchi qochuvchini tuta olishi uchun kifoya emas.

---

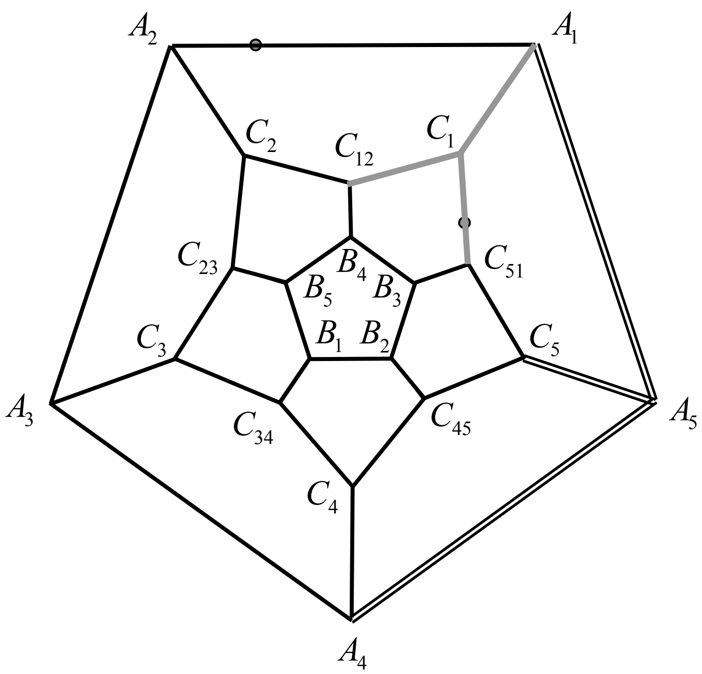
[19] FMI, 2011, №1. (A.Xolboyev bilan hammualliflikda).

1-Teorema. Dodekaedr ustidagi o‘yinda ikkita quvuvchi ham qochuvchini tuta olmaydi.

Isbot. Jarayonning boshida Q nuqtani ixtiyoriy bir uchga joylaymiz (1-rasmda A_1 nuqta olingan). P_1, P_2 quvuvchilar shu uchdan boshqa istalgan joyda turishlari mumkin.

Qochuvchining harakat usulini bayon qilish maqsadida bir tushuncha kiritamiz. D – dodekaedrning uchi, DE – shu uchdan chiqqan qirralardan biri bo‘lsin. U holda E nuqtadan yana ikkita qirra chiqadi, aytaylik, EF, EG. Shunda DF, EF, EG qirralardan iborat shaklni D uchli ayri deb ataymiz. (1-rasmda A_1 uchli ikkita ayri ajratib ko‘rsatilgan.) Chizmadan yaqqol ko‘rinib turibdiki, bir uchdan chiqqan ayrilar shu uchdan boshqa umumiy nuqtaga ega emas.

A_1 uchdan uchta ayri chiqib, quvuvchilar atigi ikkita bo‘lgani sababli, kamida bitta ayri quvuvchilardan xoli bo‘ladi. Shakldagi holat uchun bu qo‘shchiziq bilan ajratilgan $A_1A_5A_4C_5$ ayridir. Bunday vaziyatda qochuvchiga A_1 uchdan A_5 uchga qarab v tezlik bilan harakatlanish tavsiya etiladi.



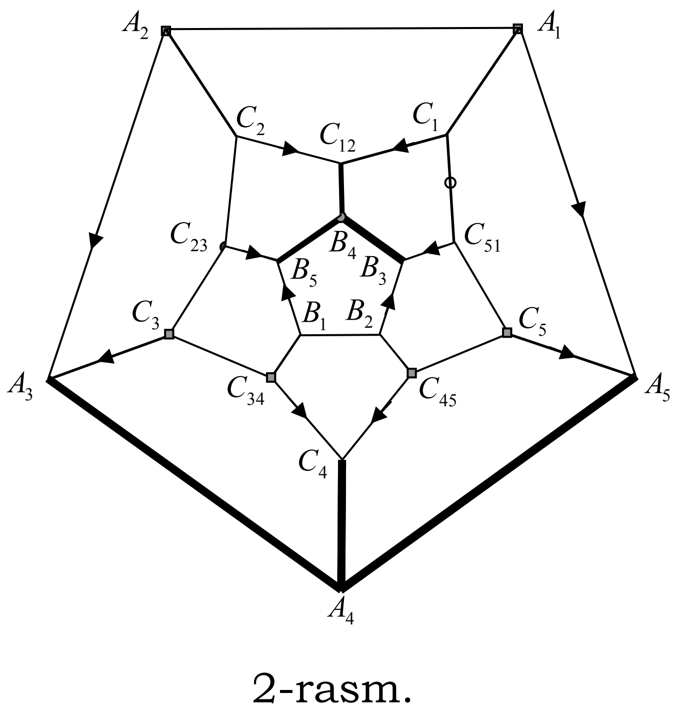
1-rasm.

Quvuvchilarning boshlang‘ich holatidan A_5 uchgacha masofa $2a$ dan kattadir. Demak, qochuvchi A_5 uchga yetib kelganda, quvuvchilar undan musbat masofa narida bo‘ladi. Shundan so‘ng qochuvchi yana uchdan chiqqan va quvuvchilardan xoli ayrining asosi bo‘ylab harakatlanishi mumkin. Bu jarayonni cheksiz marta takrorlash mumkin bo‘lgani uchun, quvuvchilar qochuvchini tuta olmaydilar.

2-teorema. Dodekaedr ustida uchta quvuvchi qochuvchini tuta oladi.

Isbot. Dastavval ikkita quvuvchi dodekaedrning bir juft o‘zaro qarama-qarshi uchini egallashi lozim – 2-rasmda bunday uchlar sifatida A_4 bilan B_4 olindi. Uchinchi quvuvchi o‘z harakatini istalgan bir uchdan boshlab, harakat boshida qochuvchi turgan nuqtaga boradi. Shundan so‘ng esa qochuvchining izidan yurib, uni quvishga tushadi. Natijada qochuvchi dodekaedrning qirralari bo‘ylab chekinishga majbur bo‘ladi. Bunda biz qochuvchining bir qirra bo‘ylab bir uyoqqa, so‘ng orqaga qarab harakatlanmaydi deb hisoblashimiz mumkin, chunki bunda qochuvchi vaqt yo‘qotadi, xolos.

Shunday qilib, qochuvchi dodekaedrning boshqa uchlaridan o‘tishga majbur bo‘ladi (B_4 dan emas, albatta). Ana shunday uchlardan istalgan birini olib qaraymiz. Qochuvchi bu uchga qaysidir bir qirradan kelgan. Kelishuvga ko‘ra u qolgan ikki qirradan biri bo‘ylab qochishda davom etishi



2-rasm.

kerak. Shunday xossa o‘rinli bo‘lar ekan: ana shu ikkita qirradan bittasi darhol qochuvchining tutilishiga olib keladi. (Bunday qirrani xavfli deb ataymiz).

A_4, B_4 ga qo‘shni uchlar uchun bu – ochiq-oydin (bu uchlar uchun xavfli qirralar rasmda qalinroq chiziq bilan ajratilgan.) Qolgan uchlardan har biri A_4 uchdan, yoki B_4 uchdan $2a$ masofada yotadi (rasmda A_4 uchdan $2a$ masofada yotuvchi uchlar kvadratchalar bilan ajratildi; ular oltita – A_4 uchli ayrilarning oxirlari; qolgan uchlar yo B_4 ga qo‘shni, yoki undan $2a$ masofada yotadi). Kvadratchalar bilan ajratilgan uchlardan istalgan birini, masalan, C_3 uchni olaylik (garchi rasmda farq qilsa ham, aslida hammasi tenghuquqli – bu 1-rasmda yaqqolroq ko‘rinadi). Agar qochuvchi bu uchdan C_3A_3 qirra bo‘ylab qochsa, u holda A_4 dagi quvuvchi unga simmetrik harakat qilib, ya’ni A_4A_3 qirra bo‘ylab harakat qilib, A_3 nuqtaga qochuvchi bilan bir paytda boradi. Demak, qochuvchi C_3 uchga kelganda C_3A_3 qirra xavfli bo‘ladi (2-rasmda bunday qirralarga o‘qyoylar qo‘yib chiqildi). Shuning uchun qochuvchi C_3 uchga $C_{23}C_3$ qirradan kelgan bo‘lsa, C_3C_{34} qirra bo‘ylab qochishi, yoki aksincha, $C_{34}C_3$ qirradan kelib, C_{23} uch tomon qochishi lozim.

Shunday qilib, qochuvchi o‘n ikki bo‘g‘inli $A_1A_2C_2C_{23}C_3C_{34}B_1B_2C_{45}C_5C_{51}C_1A_1$ yopiq chiziq bo‘ylab qochishga majbur. Bunda u yo soat mili yo‘nalishida, yoki soat miliga qarshi yo‘nalishda harakatlanishini qarash kifoya, aks holda, ya’ni bir u yo‘nalishda, bir bu yo‘nalishda harakat qilsa, uni izma-iz quvib kelayotgan uchinchi quvuvchining yaqinlashishiga imkon bergan bo‘ladi, xolos.

Har ikki hol o‘zaro tengkuchli bo‘lgani uchun, qochuvchi soat mili yo‘nalishida harakatlanadi, deb hisoblaymiz va qochuvchi B_2 nuqtaga kelgan holni qaraymiz. Shu ondan boshlab A_4 nuqtadagi quvuvchi C_4 nuqtaga qarab suriladi. Qochuvchi B_1 ga borganda bu quvuvchi C_4 holatga etib boradi. Natijada qochuvchi B_1 dan qaysi qirra bo‘ylab qochmasin, yo qo‘lga tushadi, yoki uchinchi quvuvchi tomon yaqinlashadi, demak, baribir oxiri tutiladi.

§ 18. Ikosaedr ustida quvish masalasi[20]

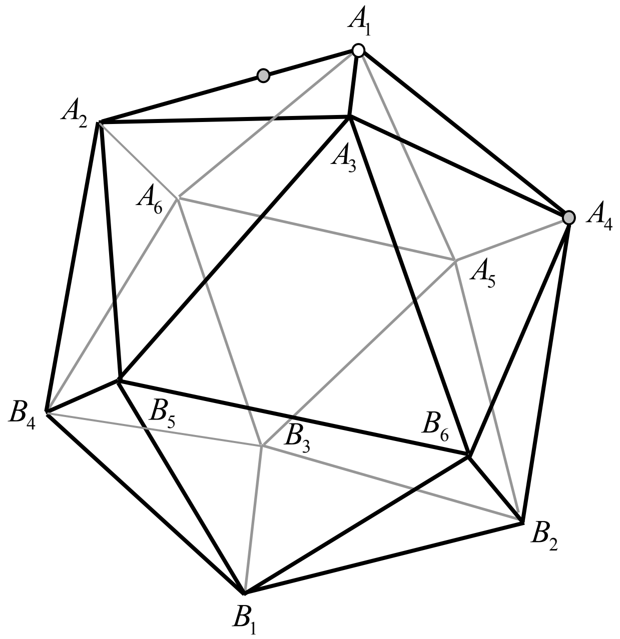
Avvalgi mavzularda tetraedr (muntazam to‘rtyoqlik), kub (geksaedr – muntazam oltiyoqlik), oktaedr (muntazam sakkizyoqlik) hamda dodekaedr (muntazam o‘n ikki yoqlik) qirralari bo‘lylab quvish-qochish masalasi haqida suhbatlashgan edik. Bu safar shunday masalani muntazam ko‘pyoqliklardan so‘ngisi – ikosaedr uchun o‘rganaylik. Uning 12 ta uchi va 30 ta qirrasi bor. Qirralarining uzunligini a ga teng deb olamiz. Ikkita qarama-qarshi uchi A_1 bilan B_1 bo‘lsin. A_1 uchdan chiqqan qirralarni A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 deb, B_1 uchdan chiqqan qirralarni esa B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 deb belgilaymiz; bunda mos indeksli uchlar qarama-qarshi joylashsin (1-rasm).

Shunday qilib, bir nechta quvuvchi nuqta bitta qochuvchi nuqtani tutib olishga intiladi. Biz barcha nuqtaning tezligi bir xil – v musbat songa teng bo‘lgan holni qaraymiz.

[20] FMI, 2011, №3. (A.Xolboyev bilan hammualliflikda).

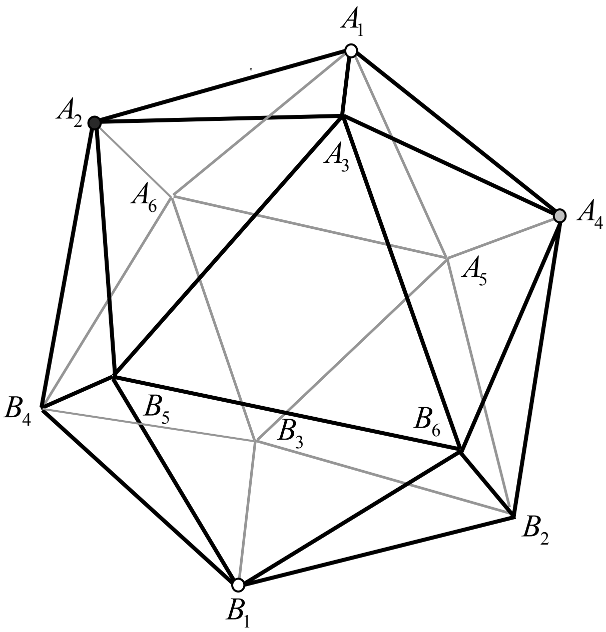
1-teorema. Ikosaedr ustida ikkita quvuvchi qochuvchini tuta olmaydi.

Isbot. Qochuvchi nuqta Q quvuvchi nuqtalar esa P_1, P_2 boʻlsin.



1-rasm.

Dastlabki holatda Q oʻz harakatini ikosaedrning A_1 uchidan boshlaydi, deb hisoblaymiz. Agar shu holatda har ikki quvuvchi ham A_1 dan $\frac{a}{2}$ masofadan olisroqda joylashgan boʻlsa, to ulardan kamida bittasi A_1 nuqtaga $\frac{a}{2}$ masofaga yaqinlashguncha qochuvchi oʻz joyida kutib turadi. Faraz qilaylik, P_1 quvuvchi A_1 uchga $\frac{a}{2}$ masofaga yaqinlashdi (xususan, dastlabki holatda undan ham yaqinroq turgan boʻlishi mumkin). Aniqlik uchun P_1 quvuvchi A_1A_2 qirrada boʻlsin – bu qirra boʻylab harakatlanish qochuvchi uchun xavfli, albatta. Qolgan toʻrtta qirraning uchlarini qaralik: A_3, A_4, A_5, A_6. Endi ikosaedrning shunday xossasini payqash mumkin: ikkinchi quvuvchi qayerda joylashgan boʻlmasin, undan mana shu A_3, A_4, A_5, A_6 uchlardan kamida bittasigacha $2a$ masofadan uzoqroqda boʻladi. 1-rasmda qochuvchi uchun eng noqulay holatlardan biri tasvirlangan – P_2 quvuvchi A_4 uchda joylashgan; bunda A_1A_4, A_1A_3, A_1A_5 qirralar ham qochuvchi uchun xavfli bo‘ladi, lekin A_4 uchdan A_6 uchgacha masofa $2a$ ga teng. Demak, qochuvchi A_1A_6 qirra bo‘ylab harakatlansa, A_6 uchga har ikki quvuvchidan oldin yetib keladi. Shundan so‘ng u yana shu usulda harakatini davom ettira oladi: quvuvchilardan kamida bittasi $\dfrac{a}{2}$ masofaga yaqin kelguncha kutib turib, keyin xavfsiz qirra bo‘ylab qo‘shni uchga o‘tadi va hakazo. Bu jarayon cheksiz marta takrorlanishi mumkin bo‘lgani uchun teorema isboti kelib chiqadi.



2-rasm.

2-teorema. Ikosaedr qirralari ustidagi o‘yinda uchta quvuvchi qochuvchini tuta oladi.

Isbot. Quvuvchilardan ikkitasi ikosaedrning qarama-qarshi uchlaridan joy egallasin (2-rasmda A_1 va B_1 uchlar), uchinchi quvuvchi esa qochuvchi tomon harakatlanib, uning izidan quva boshlasin. Ravshanki, qochuvchi biror qirraning o‘zida uzoq vaqt tura olmaydi – uchinchi quvuvchi unga yetib oladi. Shuning uchun qochuvchi ikosaedrning A_1 va B_1 dan boshqa biror uchiga borishga majbur bo‘ladi. Ikosaedrning qolgan 10 ta uchi A_1 va B_1 ga nisbatan teng huquqli. Shundan foydalanib, qochuvchi qochish jarayonida A_2 uchga kelgan holni qarash kifoya. Lekin bu holatda ham u ko‘p turolmaydi – A_2 dan chiqqan qirralardan biri bo‘ylab chekinishga majbur. Lekin qaysi qirra bo‘ylab qochmasin, qutula olmaydi: A_2A_1 qirra bo‘ylab harakatlanishning qochuvchi uchun ma’nosi yo‘q. Qochuvchi A_2A_3 yoki A_2A_6 qirra bo‘ylab qochsa, A_1 uchdagi quvuvchi unga simmetrik harakat qilib, A_3 yoki mos ravishda A_6 uchda tutib oladi, A_2B_4 yoki A_2B_5 qirra bo‘ylab qochsa, ikkinchi quvuvchi simmetrik harakat qilib tutib oladi. Teorema isbotlandi.

§ 19. Eng boy matematik I[21]

Albatta, gap moddiy boylik ustida emas, balki butunlay boshqa xazina ustida bormoqda. Matematikning boyligi – bu uning matematikaga qo‘shgan xissasidir. Bu xissaning matematika rivojidagi tutgan o‘rniga, ahamiyatiga qarab, matematikning nomi turli yo‘sinda abadiylashadi. Xususan, uning ismi tushunchalar bilan bog‘lanadi, teorema, usul, nazariya kabi matematikaning tarkibiy qismlari bilan sharaflanadi. Mana ayrim misollar:

Fales teoremasi, Platon jismlari, Geron formulasi, Gippokrat oychalari, Arximed lemmasi, algoritm (al-Xorazmiyga nisbatan), Dekart koordinatalari, Kavaleri prinsipi, Fibonachchi sonlari, Kardano formulasi, Paskal uchburchagi, Sakkeri to‘rtburchagi, Leybnits qoidasi, Pash aksiomasi, Lobachevskiy geometriyasi, Mor-Maskeroni yasashlari, Bernulli tenglamasi, Koshi tengsizligi, Parseval ayniyati, Chirngauz almashtirishi, Abel gruppasi, Galua maydoni, Vandermond determinanti, Lagranj rezolventasi, Li algebrasi, Gilbert fazosi, Fredgolm alternativasi, Gauss usuli, Fano tekisligi, Serpinskiy “gilami”, Peano chizig‘i, Shvars

[21] FMI, 2011, №5.

“etigi”, Smeyl “taqasi”, Arnold “tillari”, Chebishev ko‘phadlari, Riman farazi, Jordan o‘lchovi, Lebeg integrali, Goldbax muammosi, Gamilton yo‘li, Antuan taqinchog‘i, Aleksanderning “shoxli” sferasi, va hokazo va boshqalar.

Mana shu jihatdan shvetsariyalik olim Leonard Eylerni eng boy matematik deb atasak ko‘p ham yanglishmaymiz. Uning nomi bilan shu qadar ko‘p matematik tushuncha, tasdiq va usullar atalganki, hatto Internetda shunga bag‘ishlangan maxsus sayt ochilgan. Unda 49 ta Eyler nomi bilan bog‘liq atamalar sanab o‘tilgan. Bu hammasi emas – sayt to‘ldirilishda davom etmoqda. Mazkur ro‘yxatdan, masalan, Eyler to‘g‘ri chizig‘i o‘rin olganu, ammo Eyler nuqtalari, Eyler aylanasi va yana bir qator atamalar tushib qolgan.

Albatta, ana shu atamalarning mutlaq ko‘pchiligi oliy matematika (ya’ni universitetlarda o‘rganiladigan kurslar)ga taaluqli. Mashhur Eyler formulasi $e^{\pi i}=-1$ shular jumlasidandir. Qizig‘i, bu formulada ishtirok etayotgan e soni (taqribiy qiymati $2{,}718281828...$ bo‘lgan irratsional son) Eyler soni deb atalib, olim familiyasining birinchi harfidan olingan mavhum birlik $i=\sqrt{-1}$ tushunchasini esa Eylerdan oldin italiyalik matematiklar kiritgan, ammo uning belgisini Eyler taklif etgan (lotincha imaginary – mavhum, hayoliy so‘zidan). Shu bilan birga Eylerning boy merosida elementar (ya’ni maktablarda o‘qitiladigan) matematikaga taalluqlilari ham ancha.

Biz hozir bu yerda shular jumlasidan Eyler teoremasi deb ataladigan uchburchak xossasi bilan tanishamiz.

Shunday qilib, bizga ixtiyoriy ABC uchburchak berilgan bo‘lsin. Avvalambor, uchburchakning uch ajoyib nuqtasini eslaylik:

1)uchburchakning uch medianasi bir nuqtada kesishadi. Bu nuqta ayni paytda uchburchak rasmidagi yassi plastinkaning **og‘irlik markazi** ham bo‘ladi. Uni M bilan belgilaymiz;

2)uchburchakning tomonlarining o‘rtalaridan chiqarilgan perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar bir nuqta kesishadi. U ayni paytda uchburchakka **tashqi chizilgan aylana markazi** ham bo‘ladi. Bu nuqtani O bilan belgilaymiz;

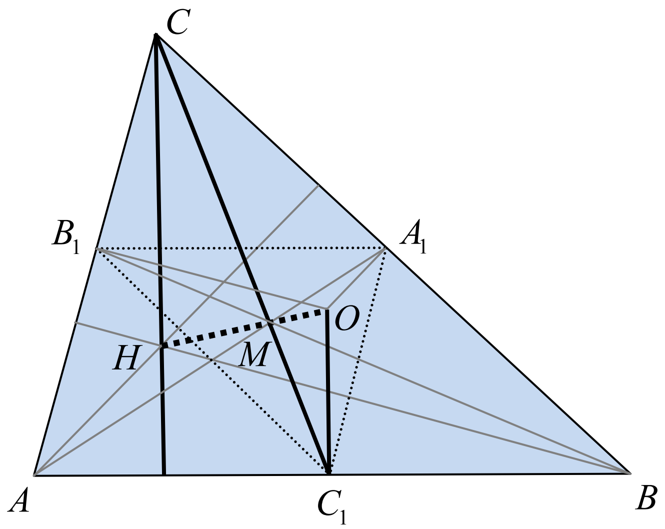
3)uchburchakning uch balandligi (to‘g‘rirog‘i, balandliklar yotadigan to‘g‘ri chiziqlar) bir nuqtada kesishadi. Bu nuqta uchburchakning **ortomarkazi** deyiladi. Uni H bilan belgilaymiz.

Eyler teoremasi. O, M va H nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotadi hamda M nuqta OH kesmani $1:2$ nisbatda bo‘ladi.

Bu teoremani Leonard Eyler 1765 yilda isbotlagan. Buning sharafiga O, M va H nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq **Eyler to‘g‘ri chizig‘i** deb atalgan.

Teoremani isbotlash uchun puxta qilib rasm chizib olish lozim. Gap shundaki, teoremada umuman olganda berilgan uchburchakning uchtadan tomoni, balandligi, medianasi va o‘rta perpendikulyarlari – jami kamida 12 ta to‘g‘ri chiziq ishtirok etmoqda. Yana bizga uning o‘rta chiziqlari ham kerak bo‘ladi. Ana shu chiziqlarning hammasi chizilganda hosil bo‘ladigan rasmni o‘ng‘ay deb bo‘lmaydi. Geometriyada teoremalarni isbotlashda esa, rasmning ahamiyati yaxshi ma’lum – rasm to‘g‘ri tanlansa, isbot ancha ayonlashadi.

Shundan kelib chiqib, uchburchakning AB tomoniga aloqador balandlik, mediana va o‘rta chiziqni yo‘g‘onroq, boshqalarini esa ingichkaroq qilib chizamiz. Isbotda, uchburchakning o‘rta chiziqlari tegishli tomonlarga parallel va yarmiga teng degan xossa muhim o‘rin tutadi. Rasmda o‘rta chiziqlar $A_1B_1C_1$ uchburchak hosil qilgan. Uni o‘rta uchburchak deb ataymiz. Demak, o‘rta uchburchak berilgan uchburchakka o‘xshash va undan tomonlarini 2 marta kichraytirishdan hosil bo‘ladi. Bundan shunday xulosa chiqadi:



$A_1B_1C_1$ ning ixtiyoriy elementi ABC uchburchak mos elementining yarmiga teng, xususan, $A_1B_1C_1$ balandliklari ABC ning balandliklaridan ikki marta kichik. Lekin $A_1B_1C_1$ uchburchakning balandliklari roppa-rosa ABC ning o‘rta perpendikulyarlarlaridan iborat. Ammo o‘rta uchburchak balandligining OC_1 kesmasi berilgan uchburchak balandligining CH kesmasiga mos keladi. Demak,

$$OC_1 = \frac{1}{2}CH. \tag{1}$$

Ikkinchi tomondan,

$$CM = \frac{1}{2}MC_1 \tag{2}$$

(medianalar kesishgan M nuqta CC_1 medianani $2:1$ nisbatda bo‘ladi. Nihoyat, $CH \parallel OC_1$ (har ikkisi ham AB tomonga tik) bo‘lgani uchun

$$\angle HCM = \angle MC_1O \tag{3}$$

(1), (2) va (3) munosabatlardan CHM va C_1OM uchburchaklarning o‘xshashligi, o‘xshash bo‘lganda ham biri ikkinchisidan roppa-rosa ikki marta kattaligi kelib chiqadi! Demak, birinchidan,

$$\angle HCM = \angle OMC_1.$$

Bundan H, M va O nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotishi kelib chiqadi. Ikkinchidan, $OM = \frac{1}{2}MH$. Eyler teoremasi isbot bo‘ldi.

Bu teorema uchburchakning uch ajoyib nuqtasini o‘zaro bog‘lagani tufayli, ajoyibning ajoyibi deb baholanishi mumkin. Ha, Leonard Eyler matematikaning go‘zalligini yaxshi his etgan va bu borada boy meros qoldirgan.

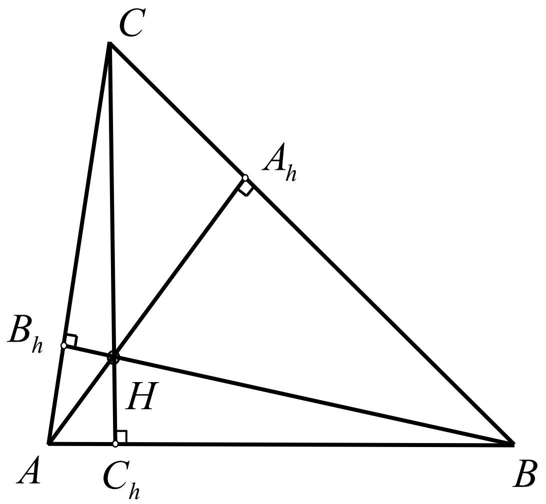
Mashq. Agar berilgan uchburchak to‘g‘ri burchakli yoki o‘tmas burchakli bo‘lganda uning isbotida qanday o‘zgarishlar bo‘lishini tekshiring.

Tadqiqot uchun masala. Uchburchakning yana bir ajoyib nuqtasi – uning bissektrisalari kesishgan nuqtadir. U ayni paytda uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi ham bo‘ladi. Eyler teoremasida bu ajoyib nuqta ishtirok etmayapti. Xo‘sh, u bilan bog‘liq Eyler teoremasiga o‘xshash xossa bormi?

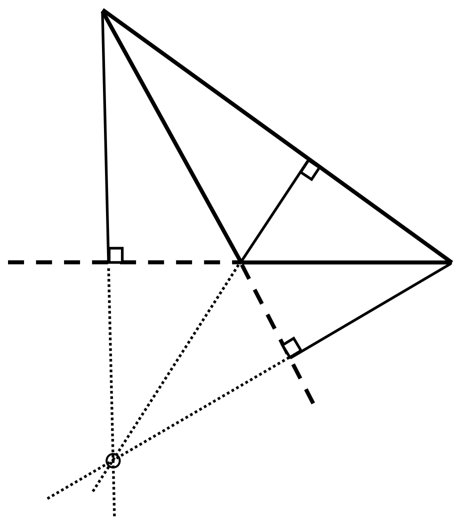
§ 20. Eng boy matematik II[22]

Avvalgi sondagi maqolada matematika tarixida eng boy meros qoldirgan shvetsariyalik ajoyib matematik Leonard Eyler to‘g‘risida hikoya boshlab, uning geometriyaga oid teoremalaridan biri bilan tanishgan edik. U teorema tufayli ***Eyler to‘g‘ri chizig‘i*** degan tushuncha paydo bo‘lgani ham ta’kidlangan edi. Endi Eyler aylanasi bilan tanishamiz.

Bizga istalgan bir ABC uchburchak berilgan bo‘lsin. Uning mos tomonlarga tushirilgan balandliklarini AA_h, BB_h, CC_h bilan belgilaymiz. Bunda A_h, B_h, C_h nuqtalar tegishli balandlikning asosi deb atalishini eslab qo‘yamiz. Ma’lumki,



1-rasm.



2-rasm.

AA_h, BB_h, CC_h to‘g‘ri chiziqlar bir nuqtada kesisishi va bu nuqta uchburchakning ortomarkazi deyilishi ma’lum (1-rasm).

(E’tibor bering: bu xossada balandliklar emas, aynan balandliklar yotuvchi to‘g‘ri chiziqlarning kesishishi qayd

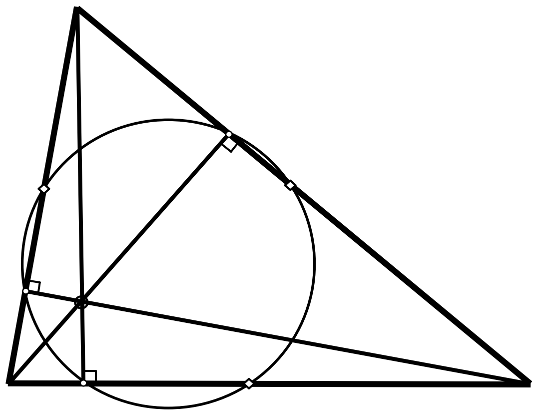
---

[22] FMI, 2011, №6.

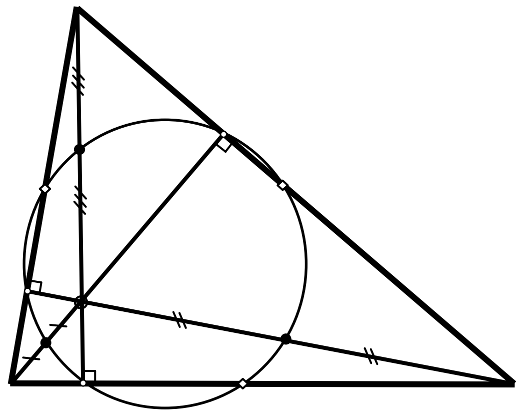
etilmoqda. Axir uchburchak o‘tmas burchakli bo‘lsa, balandliklar kesishmaydi, balki ularning davomlari kesishadi (2-rasm). Ortomarkazni odatda H deb belgilaydilar.

Eyler teoremasi. Istalgan uchburchak balandliklarning asoslari hamda tomonlarning o‘rtalari bir aylanada yotadi (3-rasm).

Bu teoremada zikr etilayotgan aylana *Eyler aylanasi* deb ataladi.



3-rasm.



4-rasm.

Ortomarkaz bilan uchburchak uchlarining qoq o‘rtasida yotadigan nuqtalarni *Eyler nuqtalari* deb ataymiz (4-rasmda qora doirachalar bilan ajratilgan).

Eyler teoremasiga 1-qo‘shimcha. Eyler nuqtalari ham Eyler aylanasida yotadi.

Eyler teoremasiga 2-qo‘shimcha. Eyler aylanasining radiusi uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusining yarmiga teng.

Eyler teoremasiga 3-qo‘shimcha. Eyler aylanasining markazi uchburchak ortomarkazi bilan tashqi chizilgan aylana markazining o‘rtasida yotadi.

Shunday qilib, uchburchakning Eyler aylanasi:

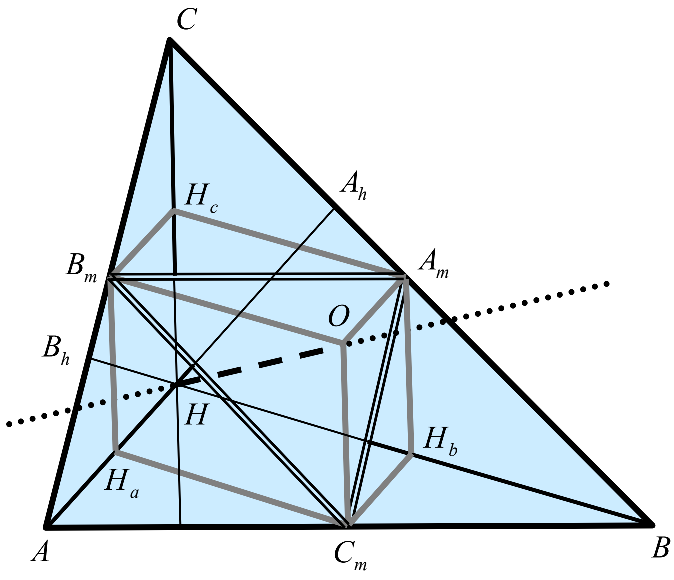
– bu uchburchak tomonlarining o‘rtalari,

– balandliklarining asoslari,

– Eyler nuqtalari,
jami 9 ta ajoyib nuqtadan o‘tar ekan. Shu sababli, Eyler aylanasi ko‘pincha *to‘qqiz nuqta aylanasi* ham deb yuritiladi.

Bu o‘rinda qisqacha tarixiy ma’lumot berish ortiqcha emas. Kokseter va Greytser [G.S.M.Kokseter, S.L.Greytser. Novie vstrechi s geometriey, 1978.], kitobida Eyler faqat oltita nuqta bir aylanada yotishini isbotlagan, teoremaning to‘qqiz nuqtaga oid variantini fransuz matematiki J.Ponsole 1821 yilda isbotlagan, degan ma’lumot keltiradi. Ammo matematika tarixi bo‘yicha mutaxassis A.Ya.Yakovlev ma’lumotiga ko‘ra L.Eyler o‘zining 1765 yilda chop etilgan maqolasida aynan to‘qqiz nuqta haqidagi teoremani bergan. Uchburchakning oltita ajoyib nuqtasi bir aylanada yotishi isbotlanar ekan, bu aylana Eyler nuqtalaridan ham o‘tishini payqash qiyin emas. Ayniqsa, Eylerday matematik uchun. Shuning uchun to‘qqiz nuqta aylanasini Eyler nomi bilan atalishi to‘g‘ridir.

Endi isbotlarga o‘taylik. Teoremani ham, uning qo‘shimchalarini ham bir yo‘la isbotlash mumkin.



5-rasm.

Shu maqsadda ABC uchburchakning o‘rta chiziqlari uni o‘zaro teng AB_mC_m, BC_mA_m, CA_mB_m va (ag‘darilgan) $A_mB_mC_m$ uchburchaklarga bo‘lishini, ularning har biri ABC dan ikki marta kichik, tomonlari esa ABC ning tomonlariga parallel bo'lishini eslaymiz (5-rasm).

A, B, C – uchburchak uchlari;

A_m, B_m, C_m – tomonlarining o'rtalari;

A_h, B_h, C_h – balandliklar asoslari;

O – tashqi chizilgan aylana markazi;

H – ortomarkaz;

H_a, H_b, H_c – mos tartibda AB_mC_m, BC_mA_m, CA_mB_m uchburchaklar ortomarkazlari;

e'tibor bering: O nuqta ayni paytda $A_mB_mC_m$ uchburchakning ortomarkazi bo'lmoqda;

o'rta chiziqlar – qo'shchiziqlar bilan tasvirlangan;

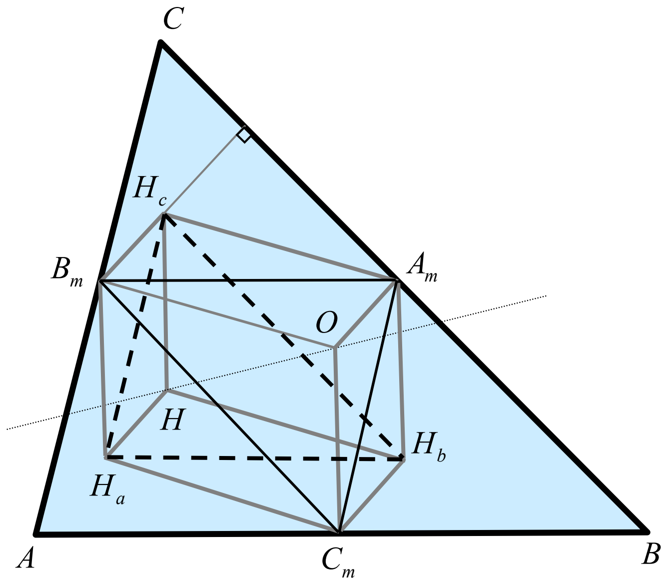
Eyler to'g'ri chizig'i – uzilishli chiziq.

ABC uchburchak balandliklari ikki xil yo'g'onlikda chizildi – bu balandliklarning $A_mB_mC_m$ dan tashqaridagi qismi AB_mC_m, BC_mA_m, CA_mB_m uchburchaklar uchun ham balandlik bo'ladi. Ularning qolgan balandliklarini ham (ochroq rangda) chizib chiqamiz. Bunda shakl serchiziqlikdan chakalakzor bo'lib ketmasligi uchun, ularning ABC uchburchak uchlaridan ortomarkazgacha bo'lgan qismini tasvirlash bilan cheklanamiz.

Endi bu shaklni diqqat bilan kuzataylik. Unda bir qator parallelogramlar ko'zga tashlanadi. Masalan, B_mH_a, OC_m kesmalar o'zaro parallel (chunki har ikkisi ham AB ga tik) va teng (chunki teng uchburchaklarning bir xil kesmalari). Demak, $OB_mH_aC_m$ chindan parallelogram ekan. Shu singari, $OC_mH_bA_m$, $OA_mH_cB_m$, $HH_aB_mH_c$, $HH_bC_mH_a$, $HH_cA_mH_b$ ham parallelogramlardir. Bu olti parallelogram bir juftdan o'zaro teng ekanligi ko'rinib turibdi. Bundan esa shunday xulosa chiqadi:

$$\Delta H_aH_bH_c = \Delta A_mB_mC_m.$$

Bu tenglikdan muhim xulosa chiqadi: H_a, H_b, H_c – berilgan uchburchakning Eyler nuqtalari, ya'ni mos tartibda AH, BH, CH kesmalarning o'rta nuqtalaridir.



6-rasm.

Shu o'rinda biz isbotning eng muhim nuqtasiga yetib keldik. Bunga o'tish maqsadida rasmga ayrim o'zgartirishlar kiritamiz: bundan buyon nozarur chiziqlarni olib tashlab, HAB, HBC, HCA uchburchaklarning o'rta chiziqlarini qo'shamiz (2-rasmda shtrixli chiziq bilan ajratilgan). Ular ABC uchburchakning tomonlariga, demak, ularning o'rta chiziqlariga parallel. Masalan, $H_cH_b \parallel B_mC_m \parallel BC$. Demak, $H_cH_b \perp B_mH_c$ (6-rasm).

Bundan kelib chiqadiki, $B_mC_mH_bH_c$ to'g'ri to'rtburchak ekan. Shu singari $A_mB_mH_aH_b$, $A_mC_mH_aH_c$ ham to'g'ri to'rtburchaklardir.

Uchta to'g'ri to'rtburchak umuman olganda oltita diagonalga ega bo'ladi. Bu yerda esa bu to'rtburchaklardan istalgan ikkitasi umumiy diagonalga ega bo'lishini ko'rish qiyin emas (3-rasm):

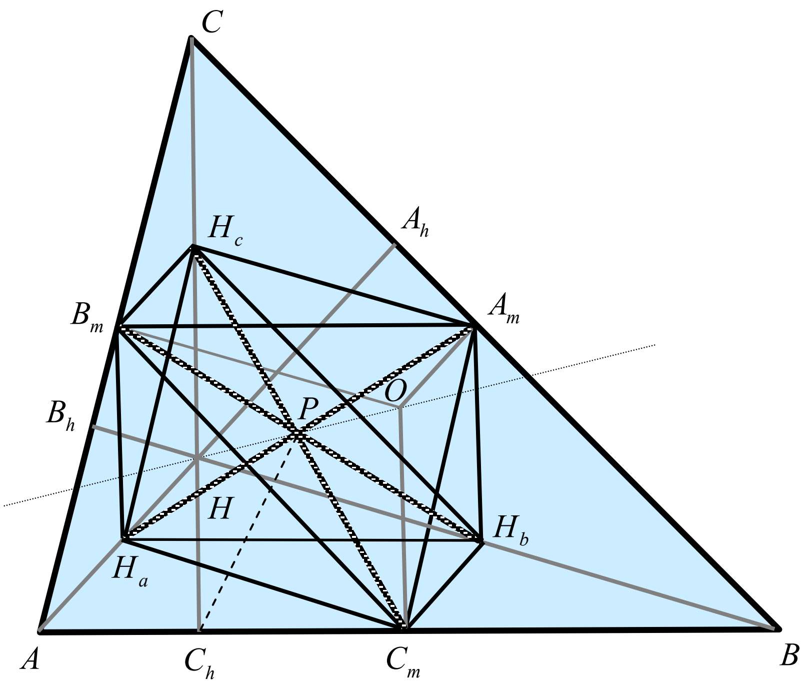
A_mH_a diagonal – $A_mC_mH_aH_c$ va $A_mB_mH_aH_b$ uchun umumiy;

B_mH_b diagonal – $A_mB_mH_aH_b$ va $B_mC_mH_bH_c$ uchun umumiy;

C_mH_c diagonal – $A_mC_mH_aH_c$ va $B_mC_mH_aH_b$ uchun umumiy.

Ularning kesishish nuqtasini P deb belgilasak, to‘g‘ri to‘rtburchak diagonallarining xossasiga ko‘ra (7-rasm),

$$PH_a = PA_m = PH_b = PB_m = PH_c = PC_m. \quad (1)$$



7-rasm.

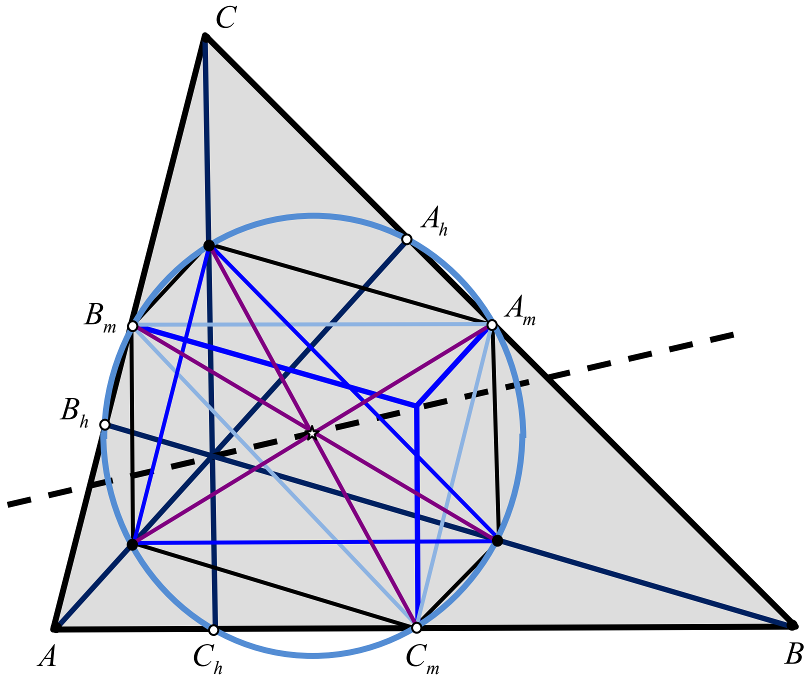
Bundan tashqari, P nuqta Eyler to‘g‘ri chizig‘idagi OH kesmaning o‘rtasida yotishi ko‘rinib turibdi. Demak, Fales teoremasiga ko‘ra, u C_hC_m kesmaning o‘rta perpendikulyarida ham yotadi va shu sababli

$$PC_h = PC_m. \quad (2)$$

Shu singari,

$$PB_h = PB_m, \quad PA_h = PA_m. \quad (3)$$

(1)–(3) tengliklardan A_m, B_m, C_m, A_h, B_h, C_h hamda H_a, H_b, H_c nuqtalar P markazli aylanada yotishi kelib chiqadi. $A_mB_mC_m$ uchburchak ABC uchburchakdan ikki



8-rasm.

marta kichik bo'lgani uchun Eyler aylanasi ham ABC ga tashqi chizilgan aylanadan ikki marta kichikdir (8-rasm).

§ 21. Eyler soni[23]

Matematikada ikki ajoyib son bor. Ulardan biri juda qadimiy, kelib chiqishi esa shu qadar tabiiy bo‘lgan π soni – diametri 1 ga teng aylananing uzunligi. Ikkinchisi esa XVII-asrdan boshlab yuz yil davomida kiritilgan bo‘lib, π dan farqli ravishda geometrik ma’noga ega emas. Bu – e sonidir. Bugungi suhbatimiz maqsadi – bu son bilan tanishishdan iborat. Bu son boshqa ko‘p jihatdan π ga o‘xshaydi (1-jadval).

Latifa. Talabaga imtihonda e soni haqida savol tushibdi. Professor: “Qani, bu sonning taqribiy qiymati nimaga teng ekan?” deb so‘ragan ekan, talaba yoza ketibdi:

$$2{,}718281828459045$$

Professor: “E, 3-4 ta raqam kifoya. Shuncha raqamni yodlab, miyani charchatishga nima hojat?!” desa, talaba javob qilgan ekan: “Buning sira qiyin joyi yo‘q – ikki butun o‘ndan ettiyu ikki marta Lev Tolstoy, qirq beshu to‘qsonu qirq besh!” (1828 – L.N.Tolstoyning tug‘ilgan yili).

Mashq. π sonining katta aniqlikdagi taqribiy qiymatini yodda tutishga yordam beradigan shu kabi qoida toping.

Endi e sonining ta’rifi bilan tanishaylik. Shu maqsadda mana bu ketma-ketlikni qaraymiz:

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2, \left(1\frac{1}{3}\right)^3, \left(1\frac{1}{4}\right)^4, \left(1\frac{1}{5}\right)^5, \ldots$$

[23] FMI, 2012, №2.

Bu ketma-ketlik $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifodada $n = 2, 3, 4, 5$ qiymatlar qo'yishdan hosil bo'lgan. Ularni o'nli kasrga aylantirib ko'raylik:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
2	2.25	6	2.5216637...
3	2.370370370...	7	2.546499697...
4	2.44140625	8	2.5657845...
5	2.48832	9	2.58117479...

Hozircha biron bir qonuniyat ko'rinmaydi. Jadvalni davom ettiraylik:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	2.5937424601	60	2.695970139330...
20	2.6529977051...	70	2.699116370976...
30	2.67431877587...	80	2.70148494075...
40	2.6850638383...	90	2.7033324610...
50	2.6915880290...	100	2.7048132942...

Endi bir qonuniyat ko'zga tashlanadi: n kattalashgani sayin $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ning qiymati ham o'sib boradi. Lekin qay darajada kattalashib boradi?

Birinchi navbatda $n = 2$ dan boshlab

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 \tag{1}$$

bo‘lishini qayd etamiz. (1) tengsizlik Nyuton binomi deb ataladigan

1-jadval

π soni	e soni
Qadimda Misrda 3 ga, Bobilda esa 3.1 ga teng deb olingan, Arximed $\frac{22}{7} \approx 3{,}142$ qiymat bilan ishlagan.	Shotlandiyalik matematik asosi e ga teng bo‘lgan logarifmlarni kiritgan, faqat uni 2,7 ga teng deb olgan.
π irratsional sondir, ya’ni uni ikki butun sonning nisbatidan iborat kasr ko‘rinishida yozish mumkin emas. Demak, π sonini o‘nli kasr rasmida yozmoqchi bo‘lsak, u davriy bo‘lmagan cheksiz kasr bo‘lar ekan.	e soni ham irratsional sondir. Bu xossa nisbatan oson isbotlanadi. Demak, e sonini o‘nli kasr ko‘rinishida yozmoqchi bo‘lsak, u davriy bo‘lmagan cheksiz kasr bo‘lar ekan.
π soni transtsendent sondir, ya’ni u nafaqat butun koeffitsiyentli $ax+b=0$ tenglamaning ildizi emas, balki hech bir butun koeffitsiyentli $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ tenglama ildizi bo‘la olmaydi.	e soni transtsendent sondir, ya’ni hech bir butun koeffitsiyentli algebraik tenglama ildizi bo‘la olmaydi.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots \qquad (2)$$

formuladan osongina kelib chiqadi (bu formulada a darajasi n dan 0 gacha kamayib, b ning darajasi esa, aksincha, 0 dan n gacha ortib boradi, $a^{n-k}b^k$

qatnashgan hadning koeffitsiyentida suratda ham, maxrajda ham k tadan ko‘paytuvchi bo‘lib, qonuniyat yaqqol. Xususan, $n \geq 3$ bo‘lsa, navbatdagi had

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3,$$

oxirgi had esa doim b^n ga teng bo‘ladi. Shuningdek, (2) formulada hammasi bo‘lib $n+1$ ta qo‘shiluvchi bo‘lishini payqash qiyin emas.

(2) formula algebradagi qisqa ko‘paytirish formulalari bo‘lmish

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ayniyatlarining umumlashtirilganidir. Masalan,

$$(a+b)^5 = a^5 + \frac{5}{1}a^4b + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}a^3b^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^2b^3 +$$
$$+\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}ab^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}a^0b^5 = a^5 + 5a^4b +$$
$$+10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Mashq. $(a+b)^4, (a+b)^6$ ifodalarga (2) formulani qo‘llang.

Mashq. $(a-b)^n$ ifoda uchun formulada (2) nisbatan qanday o‘zgarishlar ro‘y beradi? $(a-b)^3, (a-b)^5, (a-b)^7$ uchun formulalar keltirib chiqaring.

Mashq. (2) formuladagi $a^{n-k}b^k$ ko‘paytma oldidagi koeffitsiyent binomial koeffitsiyent deb ataladi va odatda C_n^k deb belgilanadi. Uni toping.

Mashq. (2) formulada $a = 1$, $b = 1$ deb olib, binomial koeffitsiyentlar yig'indisini toping.

Mavzuda davom etamiz. Agar a va b sonlar musbat bo'lsa, (2) formuladan $n = 2$ dan boshlab

$$(a+b)^n > a^n + na^{n-1}b$$

bo'lishi kelib chiqadi. Xususan, $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$ deyilsa, (1) tengsizlik hosil bo'ladi.

Biroq (2) formula ancha murakkab bo'lgani uchun, (2) tengsizlikning to'g'ridan-to'g'ri isbotini keltiramiz. Shu maqsadda matematik induksiya usuli bilan

$$(1+b)^n > 1 + nb \tag{3}$$

tengsizlikni isbotlaymiz $(n \geq 2,\ b > 0)$. $n = 2$ bo'lganda (2) ning to'g'riligi ravshan:

$$(1+b)^2 = 1 + 2b + b^2 > 1 + 2b.$$

Agar (3) biror n uchun o'rinli bo'lsa, u holda navbatdagi daraja uchun ham o'rinli:

$$(1+b)^{n+1} = (1+b)(1+b)^n > (1+b)(1+nb) =$$
$$= 1 + nb + b + nb^2 > 1 + (n+1)b.$$

Demak, (3) chindan n ning 2 dan boshlab barcha qiymati uchun to'g'ri ekan. Bu tengsizlikda $b = \frac{1}{n}$ deyilsa, (1) xossa hosil bo'lishini ko'rgan edik. O'rganilayotgan ketma-ketlikning muhimroq ikki xossasi quyidagi tengsizliklar bilan ifodalanadi:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \tag{4}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4. \tag{5}$$

(4) xossasi n ortgani sayin $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifodaning qiymati kattalashib borishini (matematika tilida monoton o‘suvchi ekanligini) bildirsa, (5) xossa $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ning qiymati doim 4 dan kichikligicha qolishini ko‘rsatadi.

Bu ikki xossa (1) tengsizlikka nisbatan murakkabroq bo‘lib, odatda ular oliy matematikaning matematik tahlil fanida nozikroq vositalar yordamida isbotlanadi. Bu maqolani yozish davomida Internetda (4) va (5) tengsizliklarning juda oson isboti uchrab qoldi. U qisqa ko‘paytirish formulalarining yana bir umumlashmasiga asoslanadi:

$0 < a < b$ bo‘lsa,

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)(b^n + ab^{n-1} + a^2b^{n-2} + \cdots + a^n). \tag{6}$$

(6) ayniyat bevosita, ya’ni o‘ng tomondagi qavslarni ochib isbotlanishi mumkin.

Mashq. (6) ayniyatni matematik induksiya metodi bilan ham isbotlab ko‘ring.

(6) ning o‘ng tomonidagi har bir $a^k b^{n-k}$ had b^n dan kichik. Bunday hadlar soni esa $n+1$ ta. Demak,

$$b^{n+1} - a^{n+1} < (b-a)(n+1)b^n,$$

hosil bo‘lgan tengsizlikning rasmini o‘zgartirib, shunday ko‘rinishda yozib olamiz:

$$b^n[(n+1)a-nb]<a^{n+1}. \tag{7}$$

Bu biz uchun asosiy tengsizlik bo‘ladi. Agar unda $a=1+\dfrac{1}{n+1}$, $b=1+\dfrac{1}{n}$ desak, kvadrat qavslar ichidagi ifoda 1 ga teng bo‘lib, natijada (4) tengsizlik chiqadi.

Agar $a=1$, $b=1+\dfrac{1}{2m}$ deb olinguday bo‘lsa, kvadrat qavs ichidagi ifoda $\dfrac{1}{2}$ ga teng bo‘lib,

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m\cdot\frac{1}{2}<1$$

natija hosil qilamiz. Uning har ikki tomonini kvadratga oshirsak,

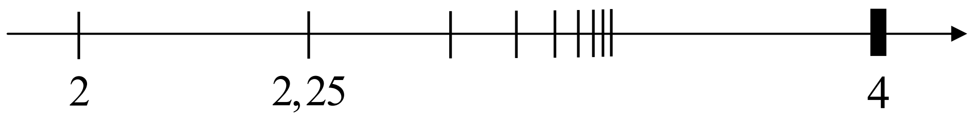
$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{2m}\cdot\frac{1}{4}<1$$

kelib chiqadi. Bu esa (5) tengsizlik n ning juft qiymatlari uchun o‘rinli deganidir. Lekin (4) xossaga ko‘ra

$$\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}.$$

Demak, (5) xossa n ning toq qiymatlari uchun ham o‘rinli.

Shunday qilib, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlik n ortib borgani sayin, kattalashib boradiyu, ammo doim 4 dan kichikligicha qoladi. Bu holatni son o‘qida tasvirlaylik ($n = 1, 2, 3, \ldots, 10$ ga mos nuqtalar tasvirlandi):



Bunday holatda $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlik aniq bir haqiqiy songa intilishi lozim – bu son $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning limiti deyiladi. Monoton o‘suvchi, lekin biror sondan kichikligicha qoladigan ketma-ketlik doim limitga ega bo‘lishi matematik tahlil fanida ko‘rsatiladi (Boltsano-Veyershtrass teoremasi). Ayrim hollarda ketma-ketlikning limiti tanish son bo‘ladi. Masalan,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \text{ – limiti } 1,$$

$$0.1,\ 0.11,\ 0.111,\ 0.1111,\ \ldots \text{– limiti } \frac{1}{9},$$

$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ tengliklar bilan aniqlangan ketma-ketlik limiti $\sqrt{2}$ ga teng.

Agar diametri 1 ga teng aylanaga ichki chizilgan muntazam n burchakning perimetrini p_n bilan belgilasak, bu ketma-ketlik ham monoton o‘sadi va doim shu aylanaga tashqi chizilgan kvadrat perimetri, ya’ni 4 dan kichikligicha qoladi. Shuning uchun p_n ketma-ketlik limitga ega – u diametri 1 bo‘lgan aylananing uzunligi sifatida qabul qilinadi. Faqat bu safar u ratsional son ko'rinishida ham, kvadrat ildizlar orqali ham ifodalab bo'lmaydi. Shuning uchun matematiklar p_n ning limitini π deb belgilashga kelishishgan. Xuddi shu singari, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning limiti e deb belgilanadi va Eyler soni deb ataladi. U matematikada π dan kam bo'lmagan ahamiyatga egaki, bu bilan kelgusi suhbatlarimizda tanishamiz.

§ 22. Eylerning mashhur formulasi[24]

Bugungi hikoyamizda so'z $e^{\pi i}=-1$ (1) yoki uning natijasi bo'lmish $e^{2\pi}=1$ formula ustida boradi. Bu formulalar Eyler formulasi nomi bilan mashhur. Mashhurligining birinclii sababi ochiq-oydin – bu qadar ixcham, ayni paytda kimningdir nomi bilan atalishga sazovor formulani yana topish mushkul. Ikkinchi sabab – bir formulada matematikaning eng muhim sonlari: aylana uzunligining diametrga nisbatidan iborat π soni, o'quvchilarimizga avvalgi mavzuda hikoya qilingan e soni, mavhum birlik i bir joyga yig'ilgan! Yig'ilganda ham ular birgalashib hosil qilgan ifoda -1 ga (ikkinchi formulada roppa-rosa 1 ga) teng chiqmoqda. Haqiqatan ham g'aroyib emasmi?

Aslida bu yerda u qadar hayratomuz mo'jiza yo'q – (1) formula atigi ta'rifning xulosasi ekan (shuning uchun uni isbotlab ham bo'lmaydi)! Mana o'sha ta'rif:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \qquad (2)$$

[24] FMI, 2012, №3.

((2) formulada φ burchakning radian o'lchovidagi kattaligi, shuning uchun qiymatlari haqiqiy sondan iborat).

Chindan, (2) tenglikda $\varphi = \pi = 180^{\circ}$ deb olinsa, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ bo'lgani uchun (1) formula hosil bo'ladi.

Xo'sh, u holda nima uchun (1) munosabat Eyler formulasi deyiladi? (2) tenglik ta'rif ekan, u nimaning ta'rifi? Nega bunday ta'rifga ehtiyoj bo'lgan? Nima sababdan tenglamaning chap tomoni, ya'ni e ning mavhum darajasi aynan o'ng tomondagi ifodaga teng qilib olingan?

Bu savollarga javob izlashdan avval (2) formula istalgan musbat haqiqiy sonni istalgan kompleks darajaga ko'tarishga asos bo'lishini ta'kidlaymiz:

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta),$$

$$a^{\alpha+i\beta} = e^{(\alpha+i\beta)\ln a} = e^{\alpha\ln a}[\cos(\beta\ln a) + i\sin(\beta\ln a)] =$$
$$= a^{\alpha}(\cos\ln a^{\beta} + i\sin\ln a^{\beta}).$$

Ikkinchi tenglikda haqiqiy sonlar uchun o'rinli bo'lgan $a^{\log_a^b} = b$ formulani ko'rsatkich kompleks son bo'lganda qo'lladik. Bu formula ham aslida logarifm ta'rifining bir shakli, shuning uchun uni kompleks darajalarga qo'llash tabiiy bo'lib, muammo tug'dirmaydi.

Endi (2) formulaga qaytaylik. Haqiqiy sonning mavhum darajasiga bunday ta'rif berilishiga bir asos

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{3}$$

formulalardir. Ular trigonometriyada naqadar muhim o‘rin tutishi yaxshi ma’lum, shu bilan birga isboti u qadar sodda emas. (2) formula esa har ikki formulani bir yo‘la oddiy hisoblashlar vositasida isbotlab beradi:

$$\begin{gathered}e^{(\alpha+\beta)i}=e^{\alpha i}e^{i\beta}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\\(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{gathered}\tag{4}$$

(bu yerda kompleks sonlarni ko‘paytirish qoidasi, ya’ni $i^2=-1$ tenglikdan foydalandik).

Ikkinchi tomondan, (2) ga ko‘ra

$$e^{(\alpha+\beta)i}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta).\tag{5}$$

(4) va (5) tengliklardan (2) ayniyatlar kelib chiqadi. Aslida (3) formulalar tushunarli va ixcham

$$e^{(\alpha+\beta)i}=e^{\alpha i}e^{i\beta}\tag{6}$$

tenglikning boshqa ko‘rinishidan iborat, xolos.

(2) ta’rif uchun boshqa bir asos quyidagi formulalarga asoslanadi:

$$\begin{gathered}e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots,\\\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,\\\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\end{gathered}\tag{7}$$

Bu formulalar oliy matematika fanida hosila yordamida isbotlanadi. Bu o‘rinda ularning mazmunini izohlash bilan cheklanamiz. Masalan, (7) formulada n son kattalashgani sayin

$$C_n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

yig‘indining qiymati $\cos x$ ning qiymatiga yaqinlashib borishini bildiradi.

Endi yana yuqoridagi mulohazani qo‘llaymiz: haqiqiy sonlar uchun o‘rinli formulani kompleks sonlarga yoyamiz, aniqroq qilib aytganda, x o‘rniga $i\varphi$ qiymat qo‘yamiz (kompleks sonlarning ko‘plab xossalari tarixan shu yo‘l bilan ochilgan):

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \cdots. \quad (8)$$

Ammo $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$, umuman, n ko‘rsatkich 4 ga bo‘linsa, $i^n = 1$, to‘rtga bo‘lganda 1 qoldiq bersa, $i^n = i$, 2 qoldiq bersa, $i^n = -1$, qoldig‘i 3 ga teng chiqsa, $i^n = -i$. Bu qiymatlarni (8) formulaga qo‘yib, o‘xshash hadlarni ixchamlab chiqsak,

$$e^{i\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots\right).$$

Yana (7) formulalarga murojaat qilsak, so‘nggi tenglik aynan (2) formulani berishini ko‘ramiz

Albatta, bu mulohazalar bilan biz (2) tenglikni isbotladik, deya olmaymiz, chunki (2) bu ta’rifdir, ta’rif esa isbotlanmaydi. Lekin mulohazalarimiz nima uchun (2) formula ko‘rinishida ta’rif kiritish maqsadga muvofiqligini yetarlicha dalillaydi. Mustahkam asosga ega ta’rif esa matematikada yaxshi teoremalardan kam bo‘lmagan ahamiyatga ega.

§ 23. Eyler funksiyasi[25]

Matematikada bir nechta "Eyler tenglamasi" borligi singari Eyler nomi bilan bog'liq bir nechta funksiya qo'llanadi. Shuni ta'kidlash lozimki, hech bir tushuncha o'zidan o'zi uni kiritgan olimning nomi bilan atalaverilmaydi – bunday sharafga boshqa matematiklarning e'tirofi natijasida sazovor bo'linadi.

Eyler nomi bilan atalgan funksiyalardan biri $\varphi(n)$ funksiyasidir. Bu funksiya haqida jurnalimizning (G'anixojayev R., Pirnapasov A. O'zaro tub sonlar, Eyler funksiyasi va taqqoslamalar. FMI, 2012, №2) sonida yetarlicha material berilgan. Mazkur maqolaning bayon uslubi ancha murakkabligini hisobga olib, bu funksiya haqida ommaboproq hikoya berish lozim topildi.

Eyler funksiyasi haqidagi hikoyamizni yaxshi ma'lum masaladan boshlaylik (hamma o'rinda o'zgaruvchilar – butun musbat sonlar):

1°. $n^2 - n$ **doim juft bo'ladi.** Chindan $n^2 - n = (n-1)n$ – ketma-ket ikki butun sonning ko'paytmasi, ulardan bittasi esa doim juftdir.

2°. $n^3 - n$ **doim 3 ga bo'linadi.** Bu safar ham isbot sodda: $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ – ketma-ket uchta sondan bittasi albatta uchga karrali. (Yuqoridagi har ikki mulohazadan $n^3 - n$ doim 6 ga bo'linishi kelib chiqadi, lekin hozir biz uchun bu unchalik muhim emas.)

O'z-o'zidan faraz tug'iladi: $n^4 - n$ ifodaning qiymati doim 4 ga bo'linsa kerak. Biroq bu to'gri emas, misol uchun $2^4 - 2 = 14$ soni – 4 ga bo'linmaydi. Bundan tushkunlikka tushmay, navbatdagi ko'rsatkichga o'taylik:

---

[25] FMI, 2012, №5.

3°. $n^5 - n$ **doim 5 ga bo‘linarmikan?** Sinab ko‘raylik:

$2^5 - 2 = 30$ – ha, 5 ga bo‘linadi,

$3^5 - 3 = 240$ – bo‘linadi,

$4^5 - 4 = 1020$,

$5^5 - 5$ – darajani hisoblamasdan “ha, 5 ga bo‘linadi” deyish mumkin, chunki 5^5 ning oxirgi raqami (birliklari) 5 chiqishi ma’lum.

$6^5 - 6 = 6(6^2 - 1)(6^2 + 1)$ – 5 ga bo‘linadi.

Bu safar faraz to‘g‘riga o‘xshaydi: $n^5 - n$ doim 5 ga bo‘linsa kerak. Isbotlashga unnab ko‘ramiz:

$n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ ayniyatga ko‘ra, agar n sonini 5 ga bo‘lganda qoldiq 0, 1, 4 ga teng chiqsa, mos ravishda n, $n-1$, $n+1$ ko‘paytuvchi 5 ga bo‘linadi, bordi-yu qoldiq 2 yoki 3 ga teng chiqsa, n^2+1 ko‘paytuvchi 5 ga bo‘linadi. Masalan, qoldiq 3 bo‘lsa, $n = 5k + 3$ bo‘lib,

$$n^2 + 1 = (5k+3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 9 + 1.$$

$n^6 - n$ ifoda $n = 2$ uchun 6 ga bo‘linmaydi.

4°. $n^7 - n$ **doim** 7 **ga bo‘linadi**.

Endi shunday farazga kelamiz: agar k ko‘rsatkich toq bo‘lsa, $n^k - n$ doim k ga bo‘linadi. Afsuski, bu tasdiq ham o‘rinli emas ekan: $n^9 - n$ ifoda $n = 2$ da 9 ga bo‘linmaydi!

Balki k ko‘rsatkich tub son bo‘lganda, $n^k - n$ ifoda k ga bo‘linar? $k = 7$ uchun tekshirib ko‘ramiz:

$$\begin{aligned} n^7 - n &= n(n^6 - 1) = n(n^2 - 1)(n^4 + n^2 + 1) = \\ &= n(n-1)(n+1)(n^4 + n^2 + 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Istalgan natural sonni $n=7m+r$ ko‘rinishda yozish mumkin, bunda m – bo‘linma, r esa qoldiq, demak, $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ qiymatlardan birini qabul qilishi mumkin. Agar qoldiq 0, 1 yoki 6 bo‘lsa, (1) ifodaning 7 ga qoldiqsiz bo‘linishi ravshan. Qoldiq 2 ga teng bo‘lsa, n^2 ni 7 ga bo‘lsak, qoldiq 4 chiqadi. Shu singari, n^4 ni 7 ga bo‘lsak, qoldiq 2 chiqishini payqash qiyin emas. Natijada n^4+n^2+1 ifoda 7 ga qoldiqsiz bo‘linar ekan. Bu kabi mushohadalarni qoldiq 3, 4 va 5 bo‘lganda ham takrorlash mumkin.

Mashq. $r=3, 4, 5$ bo‘lganda n^4+n^2+1 ifoda 7 ga qoldiqsiz bo‘linishini isbotlang.

Ko‘rilgan xususiy hollarga tayanib, yuqoridagi faraz to‘g‘ri bo‘lsa kerak, degan xulosa chiqarish tabiiy. P.Ferma ham taxminan shunday fikrlagan bo‘lsa kerak. U hamkasblaridan biriga yozgan maktubida “agar p tub son bo‘lsa, n^p-n doim p ga bo‘linishini isbotlaganini” aytgan. Fermaning bu tasdig‘i, odatda, unga teng kuchli boshqa shaklda ifoda etiladi:

Agar natural n soni tub p songa bo‘linmasa, $n^{p-1}-1$ albatta p ga bo‘linadi.

Bu tasdiq matematika tarixiga “*Fermaning kichik teoremasi*” nomi bilan kirgan.

Bu tasdiqni umumiy holda $k=7$ uchun o‘tkazilgan mulohaza bilan isbotlash qiyin. Misol uchun, $k=101$ bo‘lsa, $n^{50}+n^{48}+\ldots+n^2+1$ ifodaning 101 ga qoldiqsiz bo‘linishini tekshirib chiqishga to‘g‘ri keladiki, buni hatto kompyuter vositasida ham amalga oshirish murakkab. Ferma o‘zining “kichik teoremasi”ni qanday isbotlagani noma’lum (u biror teorema topsa, odatda hamkasblaridan biriga uni isbotlashni taklif qilib maktub yo‘llagan, kamdan-kam holda o‘zi to‘liq isbot bayonini bergan). Bu teoremani birinchi bo‘lib L.Eyler isbotlagan (ikki usulda!). Bu isbot sonlar nazariyasidan tashqari keyinchalik algebra rivojida ham muhim o‘rin tutgan ([Эдвардс Г. Последная теорема Ферма. 1980.] kitobda Fermaning “kichik teoremasi” gruppalar nazariyasi uchun ahamiyatli yo‘l bilan isbotlangan, Vikipedianing tegishli maqolasida u Binom formulasidan keltirib chiqarilgan).

Teoremaning isboti bilan batafsilroq tanishaylik. Bunda n soni p ga bo‘linmaydigan holni qarash kifoya. Demak, n soni p ga bo‘linsa, qoldiq $1, 2, \ldots, p-1$ dan biriga teng chiqadi. Endi $1 \cdot n, 2n, 3n, \ldots, (p-1)n$ sonlarini qaraylik. Ravshanki, ularning hech biri p ga bo‘linmaydi. Bo‘lish natijasidagi qoldiqlar mos ravishda $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ bo‘lsin (ular 1 bilan $p-1$ orasidagi butun sonlardir).

Bu qoldiqlar har xil bo‘lishi lozim, aks holda, masalan, r_s bilan r_t teng bo‘lsa, $sn - tn = (s-t)n$ ayirmani p ga bo‘lganda, qoldiq 0 chiqar, bundan esa yo $s-t$, yoki n soni p ga bo‘linishi lozim bo‘lar edi, ammo har ikki hol ham bo‘lishi mumkin emas.

Demak, $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ qoldiqlar $1, 2, \ldots, p-1$ sonlarinng o‘rni almashganidan iborat. Bundan esa mana bunday muhim xulosa chiqadi:

$$r_1 r_2 \cdots r_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \qquad (2)$$

Endi bizga shunday xossa kerak bo‘ladi:

m_1 ni p ga bo‘lganda q_1 qoldiq, m_2 ni p ga bo‘lganda q_2 qoldiq chiqsin, u holda p ga bo‘lganda $m_1 m_2$ bilan $q_1 q_2$ bir xil qoldiq beradi.

Izoh. Agar q_1q_2 ko‘paytma p dan kichik bo‘lsa, uning o‘zi m_1m_2 ni p ga bo‘lish qoldig‘i bo‘ladi, ya’ni bu holda “*ko‘paytmaning qoldig‘i qoldiqlar ko‘paytmasiga teng*” degan chiroyli xossa o‘rinli bo‘ladi, ammo umumiy holda $q_1q_2 \geq q$ bo‘lib qolishi mumkin.

Xossaning isboti juda sodda: qoldiqli bo‘lish qoidasiga ko‘ra,

$m_1 = l_1p + q_1,\ m_2 = l_2p + q_2.$ Bundan

$m_1m_2 = (l_1l_2p + l_1q_2 + l_2q_1)p + q_1q_2.$

Isbotlangan xossani matematik induksiya metodi bilan umumlashtirish mumkin: p ga bo‘lganda,

m_1 soni q_1 qoldiq,

m_2 soni q_2 qoldiq,

....

m_k soni q_{k-1} qoldiq bersa, u holda $m_1m_2\cdots m_k$ bilan $q_1q_2\cdots q_k$ ning p ga bo‘lgandagi qoldiqlari teng bo‘ladi.

Buni biz qarayotgan holga tatbiq qilsak, shunday xulosa chiqadi: p ga bo‘lganda $(1\cdot n)\cdot(2n)\cdots[(p-1)n]$ ko‘paytma bilan $r_1r_2\cdots r_{p-1}$ ko‘paytma bir xil qoldiq beradi. U holda $(1\cdot n)\cdot(2n)\cdots[(p-1)n] - r_1r_2\cdots r_{p-1}$ ayirma p ga qoldiqsiz bo‘linishi lozim. Bu ayirmani (2) tenglikka ko‘ra, $(n^{p-1}-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(p-1)$ ko‘rinishida yozish mumkin. Ammo $1\cdot 2\cdots(p-1)$ ko‘paytma p ga bo‘linmaydi, demak, $n^{p-1}-1$ ifoda p ga bo‘linadi.

Shu bilan Fermaning “kichik teoremasi” isbotlandi.

Eyler bu isbotni topish bilan cheklanmasdan, uni umumlashtirgan. Buning uchun u $n^k - n$ ifoda p tub son bo‘lmaganda ham p ga bo‘linishi mumkinligini payqagan. Masalan, n va 4 o‘zaro tub bo‘lsa, $n^3 - n$ ifoda

4 ga bo‘linadi. Haqiqatan, n va 4 o‘zaro tub degani bu n toq son degani, n toq bo‘lsa, $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ – ikkita ko‘paytuvchi juft bo‘ladi. Bugina emas, hatto $n-1$ va $n+1$ dan kamida bittasi 4 ga bo‘linadi, shuning uchun n va 8 o‘zaro tub bo‘lsa, $n^3 - n$ doim sakkizga bo‘linadi. Mana shunday tajribalar asosida Eyler quyidagi teoremani isbotlagan:

Eyler teoremasi. $1, 2, \ldots, p-1$ qoldiqlardan p bilan o‘zaro tub bo‘lganlari $\varphi(p)$ ta bo‘lsin. U holda agar n va p o‘zaro tub bo‘lsa, $n^{\varphi(p)} - 1$ ifoda n ga bo‘linadi.

Bu teorema shartida kiritilgan $\varphi(p)$ kattalik Eyler funksiyasi deyiladi. Agar p tub son bo‘lsa, $1, 2, \ldots, p-1$ qoldiqlarning barchasi p bilan o‘zaro tub, demak, $\varphi(p) = p-1$ – bu holda Eyler teoremasi Fermaning “kichik teoremasi”ni beradi. Eyler teoremasining isboti [G‘anixojayev R., Pirnapasov A. O‘zaro tub sonlar, Eyler funksiyasi va taqqoslamalar. FMI, 2012, №2] maqolada bayon qilingan. Quyidagi jadvalda Eyler funksiyasining qiymatlari va tegishli xossa keltirilgan:

p	p bilan o‘zaro tub qoldiqlar	$\varphi(p)$	Xossa (n va p o‘zaro tub):
4	1, 3	2	$n^2 - 1$ 4 ga bo‘linadi
6	1, 5	2	$n^2 - 1$ 6 ga bo‘linadi
8	1, 3, 5, 7	3	$n^3 - 1$ 8 ga bo‘linadi
9	1, 2, 4, 5, 7, 8	6	$n^6 - 1$ 9 ga bo‘linadi
10	1, 3, 7, 9	4	$n^4 - 1$ 9 ga bo‘linadi
12	1, 5, 7, 11	4	$n^4 - 1$ 12 ga bo‘linadi
14	1, 3, 5, 9, 11, 13	6	$n^6 - 1$ 14 ga bo‘linadi
15	1, 2, 4, 7, 8, 11, 13,14	8	$n^8 - 1$ 15 ga bo‘linadi

Keyinchalik Eyler funksiyasi matematikaning turli sohalari va tatbiqlarida ahamiyat kasb etdi. Bu haqda INTERNETdan ko'pdan-ko'p qiziqarli ma'lumot olish mumkin.

§ 24. Eyler topgan Gauss teoremasi[26]

Matematika tarixida tushuncha va tasdiqlarning biror matematik nomi bilan atalib qolishi chalkashtirish oqibati bo'lgan hollar oz emas. Masalan, binom formulasi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \qquad (1)$$

Nyuton nomi bilan ataladi, holbuki, bu formula Nyutondan ko'p asrlar avval Sharq matematiklariga ma'lum edi va buni Nyutonning o'zi ham yaxshi bilgan. (Tabiiyki, (1) formulani Nyuton "mening formulam" degan emas, atamaning tarqalishiga esa matematika tarixidan yaxshi xabardor bo'lmagan boshqa olimlar sababchidir.) Nyutonning xizmati – (1) formulani n ko'rsatkich kasr va manfiy bo'lgan hollar uchun umumlashtirgan: ixtiyoriy haqiqiy m ko'rsatkich uchun

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots \qquad (2)$$

formula o'rinli. Agar m butun musbat son bo'lsa, (2) yig'indida dastlabki $m+1$ ta had noldan farqli (eng oxirgi noldan farqli had x^m) bo'lib, qolganlari 0 ga teng chiqadi. Bunda $x = \frac{b}{a}$ deb olinib, umumiy maxrajga keltirilsa, (2)

---

[26] FMI, 2012, №6.

formula (1) ko'rinishga keladi. Boshqa hollarda (2) da cheksiz ko'p had bo'lib, u $-1 < x < 1$ qiymatlar uchun ma'noga ega bo'ladi. Xususan, $m = -1$ uchun

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad (3)$$

birinchi hadi 1, maxraji $-x$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlar yig'indisi uchun formuladir.

Mashq (3) formula haqiqatan (2) formulaning xususiy holi ekanligiga ishonch hosil qiling.

Chalkash atamaga oid boshqa misol – "Pell tenglamasi" deb ataladigan

$$x^2 - ay^2 = 1 \qquad (4)$$

tenglamadir. Uni birinchi bo'lib P.Ferma o'rgangan, to'liq yechimini esa L.Eyler topgan. (Bu safar chalkash atama muallifi aynan Eylerning o'zi ekanligi qiziq – u (4) tenglamaga bag'ishlangan maqolasini "Pell masalasini yechish uchun yangi algoritmni qo'llash to'g'risida" deb nomlagan, Eylerning obro'si balandligidan boshqa matematiklar ham bu nomni so'zsiz qabul qilishgan. Pell esa bor-yo'g'i masalaga matematiklarning e'tiborini qaratishni lozim topgan, xolos. Ferma esa undan ham avvalroq yashagan).

Eylerning o'zi ham bunday chalkashlikdan benasib qolmagan – uning eng muhim natijalaridan biri hozir "Gauss teoremasi" deb ataladi. Ko'pincha bu teoremani tub sonlarning eng chuqur xossalaridan biri, deb e'tirof etishadi. U hatto teorema emas, balki matematikaga xos bo'lmagan nom bilan "kvadratik o'zarolik qonuni" deya sharaflanadi.

Bu maqolamizda shu haqida hikoya qilamiz. Bu maqsadda tayin bir tub son, masalan, $p = 7$ ni olamiz.

Istalgan butun sonni p ga bo‘lsak, $0, 1, 2, ..., p-1$ qoldiqlardan biri chiqadi. Bunday qoldiqlar to‘plamini Z_p deb belgilash qabul qilingan:

$$Z_p = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$$

Bunda p soni asos deb ataladi. Mana shu Z_p to‘plam ustida o‘ziga xos arifmetika quramiz: ikki qoldiqning yig‘indisi va ko‘paytmasi tushunchalari kiritiladi. Dastavval qoldiqlar ustida ularga oddiy sonlar sifatida qarab ko‘paytirish va bo‘lish amallari bajariladi. Agar natija asosdan kichik chiqsa, shu natija yig‘indi va ko‘paytma deb olinadi. Bordi-yu natija asosga teng yoki undan katta chiqsa, p ga bo‘lib, qoldig‘ini qoldiramiz. Masalan, Z_7 to‘plam arifmetikasida $2+4=6$, ammo $2 \cdot 4 = 1$ (chunki $2 \cdot 4 = 8$ – buni 7 ga bo‘lsak, qoldiq 1 ga teng). Shu singari, $4+5=2$, $4 \cdot 5 = 6$ va h.k.

Z_7 uchun ko‘paytirish va qo‘shish jadvallari quyidagicha bo‘ladi:

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

×	1	2	3	4	5	6
1	**1**	2	3	4	5	6
2	2	**4**	6	1	3	5
3	3	6	**2**	5	1	4
4	4	1	5	**2**	6	3
5	5	3	1	6	**4**	2
6	6	5	4	3	2	**1**

Ko‘paytirish jadvalida 0 ga mos ustun va satr yozilmagan – har ikkisi ham 0 lardan iborat bo‘lishi ravshan.

Endi jadvallar ustida biroz kuzatuv o‘tkazaylik. Qo‘shish jadvalining har bir satrida (ustunida ham) 0 dan 6 gacha har bir qoldiq roppa-rosa bir martadan qatnashadi. Bu Z_7 to‘plamda ayirish amali ham o‘rinli ekanligini bildiradi. Masalan, $3-6=4$, chunki jadvalga ko‘ra $6+4=3$. Umuman, Z_p to‘plamda ayiruv amali quyidagi qoida bilan amalga oshiriladi: $a, b \in Z_p$ bo‘lsin. Agar $a \geq b$ bo‘lsa, $a-b$ ayirma o‘ziga teng, agar $a<b$ bo‘lsa, $a-b$ sifatida $p+a-b$ olinadi (p ni qo‘shgan bilan qoldiq o‘zgarmasligidan foydalaniladi).

Shu singari, ko‘paytiruv jadvalidan Z_p to‘plamda bo‘lish amali ham borligi kuzatiladi (tabiiy, 0 ga bo‘lish istisno, xuddi shuning uchun 0 ga mos satr bilan ustun yozilmagan edi). Masalan, $4:6=3$, chunki jadvalga ko‘ra $6 \cdot 3=4$; shuningdek, $6:4=5$, chunki $4 \cdot 5=6$ va h.k.

Mashq. Z_p to‘plamda bo‘lish qoidasini ishlab chiqing (ya’ni, Z_p ga tegishli noldan farqli a va b qoldiqlar bo‘yicha $a \cdot x=b$ shartni qanoatlantiruvchi qoldiqni topish qoidasini ko‘rsating).

Shunday qilib, Z_p to‘plamda to‘rt arifmetik amal mavjud ekan. Z_p to‘plamning arifmetikasi ko‘plab ajabtovur xossalarga ega, lekin hozir bizni kvadrat ildiz chiqarish amali qiziqtiradi. $p=2$ bo‘lsa, Z_p to‘plam arifmetikasi juda jo‘n bo‘lib, ildiz masalasi ham deyarli ma’nosizdir. Shu bois $p \geq 3$, ya’ni p toq tub son deb hisoblaymiz. Shuningdek, ildiz chiqarishda 0 ni e’tibordan soqit qilamiz.

Shunday qilib, Z_p to‘plamda $1, 2, \ldots., p-1$ sonlari kvadrat ildizga egami, degan masalani o‘rganish lozim. Ko‘paytirish jadvalida kvadratlar diagonalda yotishi tabiiy: 1, 2, 4. Demak, Z_7 to‘plamda 1, 2 va 4 kvadrat ildizga ega. Chindan, $1^2 = 6^2 = 1,\ 3^2 = 4^2 = 2,\ 2^2 = 5^2 = 4$.

Aksincha, 3, 5 va 6 esa kvadrat ildizga ega emas.

Mashq. Z_p to‘plam arifmetikasida quyidagi xossalar o‘rinli bo‘lishini isbotlang: 1) agar a ning kvadrati b ga teng bo‘lsa, $p-a$ ning kvadrati ham ga b teng; 2) kvadrat ildiz ikkitadan ortiq emas.

Endi navbat kvadrat ildiz uchun belgi kiritishga keldi, biroq Z_p to‘plam arifmetikasida $\sqrt{\ }$ belgisi qabul qilinmagan (chalkashlik tug‘dirishi aniq), uning o‘rniga $\left(\dfrac{a}{p}\right)$ ko‘rinishga ega Lejandr timsolidan foydalaniladi: agar Z_p to‘plamda a qoldiq kvadrat ildizga ega bo‘lsa, $\left(\dfrac{a}{p}\right)=1$, aks holda $\left(\dfrac{a}{p}\right)=-1$ deb olinadi.

Lejandr timsoli (fransuz matematigi A.Lejandr tomonidan kiritilgan) mana bunday xossalarga ega:

1) $\left(\dfrac{1}{p}\right)=1$, (1 doim kvadrat ildizga ega);

2) $\left(\dfrac{ab}{p}\right)=\left(\dfrac{a}{p}\right)\left(\dfrac{b}{p}\right)$, (kvadratlarning ko‘paytmasi yana kvadratdan iborat);

3) $\left(\dfrac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$;

4) $\left(\dfrac{-1}{p}\right)=\left(\dfrac{p-1}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

3-formulani o‘zimizning arifmetika tiliga ko‘chiraylik: (p toq son bo‘lganda p^2-1 doim 8 ga bo‘linadi; bunda agar p soni $8k \pm 1$ ko'rinishda bo'lsa, o'ng tomondagi ifoda +1 ga teng, demak, 2 soni Z_p da kvadrat bo'ladi, agar p soni $8k \pm 3$ ko'rinishda bo'lsa, o'ng tomon -1 ga teng, demak, 2 kvadrat emas. Masalan, $p = 17$ bo'lsa, $6^2 = 36$ – buni 17 ga bo'lsak, qoldiq 2, ya'ni, Z_{17} arifmetikada $2 = 6^2$. Aksincha, $p = 19$ bo'lsa, 1, 2, ..., 9 sonlaridan hech birining kvadrati 19 ga bo'lganda 2 qoldiq bermaydi.

Mashq. 4-xossani 2 qachon kvadrat bo'lish-bo'lmaslik tiliga "tarjima" qiling.

Ta'rifga ko'ra, $\left(\frac{a}{p}\right)$ ifoda a soni p asosga ko'ra qoldiq bo'lganda, ya'ni $a = 1, 2, 3, \ldots, p-1$ bo'lganda ma'noga ega. Aslida Z_p arifmetika nuqtai nazaridan $\ldots, a-2p$, $a-p$, a, $a+p$, $a+2p, \ldots$ sonlari bir-biridan farq qilmaydi: hammasi ham p ga bo'lganda a qoldiq beradi. Shundan kelib chiqib, $\left(\frac{a}{p}\right)$ timsol ixtiyoriy butun a lar uchun kengaytiriladi: agar p ga bo'lganda a bilan b bir xil qoldiq bersa, $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ deb olinadi.

Endi p va q – toq tub sonlar bo'lsin. Bu holda $\left(\frac{q}{p}\right)$ timsol ham, $\left(\frac{p}{q}\right)$ timsol ham ma'noga ega. Eyler topgan, ammo Gauss teoremasi deb ataladigan mashhur kvadratik o'zarolik qonuni mana bu ayniyatdan iborat:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{2}\cdot\frac{q^2-1}{2}} \qquad (5)$$

Bu, hech shubhasiz, g‘oyat ixcham, simmetrik va o‘ziga xos nafosatga ega teoremadir. Uning ma’nosi quyidagi ancha uzun jumlalarda ochiladi (p va q toq sonlar bo‘lgani uchun, 4 ga bo‘lganda 1 yoki 3 qoldiq berishini nazarda tutamiz):

1) p ham, q ham 4 ga bo‘linganda bir xil qoldiq bersin. U holda q soni p asosli arifmetikada kvadrat bo‘lsa, p soni q asosli arifmetikada kvadrat bo‘ladi (va aksincha, albatta). Sababi: bu holda (5) ayniyatning o‘ng tomonidagi ifoda $+1$ ga teng bo‘ladi, demak, chap tomondagi har ikki Lejandr timsoli bir xil bo‘lishi lozim;

2) p bilan q ni 4 ga bo‘lganda har xil qoldiq chiqsin. U holda q soni p asosli arifmetikada kvadrat bo‘lsa, p soni q asosli arifmetikada kvadrat bo‘lmaydi (va aksincha). Sababi: bu holda (5) ayniyatning o‘ng tomoni -1 ga teng, demak, chap tomondagi Lejandr timsollari qarama-qarshi qiymatga ega.

Endi “kvadratik o‘zarolik qonuni”ni yana ham tushunarliroq tilda ifoda etaylik. Shu maqsadda arifmetikada kvadrat bo‘lish xossasini aniqmas tenglamalar (Diofant tenglamalari) tiliga ko‘chiramiz:

a soni p asosga ko‘ra kvadrat $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ x^2-a ayirma p ga qoldiqsiz bo‘linadi $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $x^2-py-a=0$ Diofant tenglamasi yechimga ega.

Demak,

1) p va q ni 4 ga bo‘lganda bir xil qoldiq bersa, $x^2-py-q=0$ va $x^2-qy-p=0$ tenglamalarning butun yechimga ega bo‘lish-bo‘lmasligi o‘zaro muvofiq bo‘ladi;

2) p va $q$ni 4 ga boʻlganda har xil qoldiq bersa, $x^2 - py - q = 0$ va $x^2 - qy - p = 0$ tenglamalarning butun yechimga ega boʻlish-boʻlmasligi bir-biriga zid boʻladi.

"Kvadratik oʻzarolik qonuni"ning dastlabki isbotini K.F.Gauss 1795-yili (18 yoshligida) topgan va u 1801-yili nashr qilingan. Bu tasdiq oʻzining jozibasi bilan Gaussni shu qadar maftun etganki, uni "oltin teorema" deb atagan va keyinchalik yana 5 xil isbotini e'lon qilgan. Shuning uchun uning Gauss nomi bilan atalishida tarixiy adolat bor. Shu bilan birga "kvadratik oʻzarolik qonuni" L.Eylerning 1783-yilda nashr etilgan asarlari toʻplamiga kirgan-u ammo olimlarning nazaridan chetda qolgan. (Buning sababi – bayonning uzunligida boʻlsa kerak, chunki oradan yarim asr oʻtibgina Lejandr oʻz timsolini kiritib, uning bayonini hozirgi qisqa shaklga keltirgan.) Eyler bu teoremaning isbotini bilganmi yo yoʻqmi – bu noma'lum

§ 25. Evklid teoremasining Eyler isboti[27]

Evklid teoremasi: tub sonlar cheksiz ko‘p.

Teorema ifodasida “cheksiz ko‘p” degan ibora qo‘llanmoqda. Lekin cheksizlik – nozik tushuncha, uncha-munchaga hazillashib bo‘lmaydi. Shuning uchun teoramaning “oyog‘i yerga tegadigan” boshqa teng kuchli variantiga o‘tamiz:

p – qanday tub son bo‘lmasin, undan katta q tub son topiladi.

Isboti. 2 dan boshlab p gacha tub sonlarni raqamlab chiqamiz:

$$p_1 = 2,\ \ p_2 = 3,\ \ p_3 = 5,\ \ p_4 = 7,\ \ p_5 = 11, \ldots, \ p_{n-1},\ \ p_n = p$$

va

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdots p_{n-1} \cdot p_n + 1 \qquad \textbf{(1)}$$

sonini qaraymiz. q uning istalgan tub ko‘paytuvchisi bo‘lsin (xususan, agar N ning o‘zi tub bo‘lsa, $q = N$**).** Bu ko‘paytuvchi (1) ifodadagi tub sonlarning hech biri bilan bir xil bo‘la olmaydi (aks holda N ni q ga bo‘lganda 1 qoldiq qolar edi). Demak, $q > p$. Teorema isbotlandi.

Evklid isboti, shubhasiz, juda ixcham va latif. Muhimi, maktab o‘quvchisiga ham tushunarli. (Teorema va uning biz tanishgan isbotini Evkliddan oldin yashagan matematiklar ham bilgan bo‘lishi istisno emas, ammo uning aynan Evklidning “Negizlar” kitobidagi bayoni davrimizgacha yetib kelgan).

Oradan 2000 yilcha o‘tib, Leonard Eyler Evklid teoremasining butunlay yangi, hech kim kutmagan isbotini topdi. Bu isbot qisqa bo‘lmasa ham, ammo ajoyib.

---

[27] FMI, 2013, №1.

Bu isbotni teskarisini faraz qilish usuli bilan o‘tkazish qulayroq. Shunday qilib, faraz qilaylik, tub sonlar cheksiz ko‘p bo‘lmasin, ya’ni ularning soni n chekli bo‘lib, raqamlab chiqish mumkin bo‘lsin:

$$p_1 = 2,\ \ p_2 = 3,\ \ p_3 = 5,\ \ p_4 = 7,\ \ p_5 = 11, \ldots, \ p_{n-1},\ \ p_n = p.$$

Bu yerda p orqali eng katta tub sonni belgilayapti. (Bu farazga muvofiq, eng katta tub son mavjud. Keyingi barcha mushohadalarda p bilan bir qatorda n ham tayin bir son ekanligini nazarda tutish lozim).

Yozadigan ifodalarimiz ixchamroq bo‘lishi uchun $\frac{1}{p} = x_i$ belgilash kiritamiz, bunda $i = 1, 2, \ldots, n$. Shuningdek, $0 < x_i < 1$ bo‘lishi ravshan. Shuning uchun x_i larni cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyalar maxraji deb olish mumkin:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x_1} &= 1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \ldots + x_1^s + \ldots, \\ \frac{1}{1-x_2} &= 1 + x_2 + x_2^2 + x_2^3 + \ldots + x_2^s + \ldots, \\ &\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{1}{1-x_n} &= 1 + x_n + x_n^2 + x_n^3 + \ldots + x_n^s + \ldots\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Endi ixtiyoriy butun musbat k sonini olamizda, 2 dan k gacha sonlarni tub ko‘paytuvchilar ko‘paytmasiga yoyib chiqamiz:

$$2 = 2,\ 3 = 3,\ 4 = 2^2,\ 5 = 5,\ \ 6 = 2 \cdot 3,\ \ 7 = 7,\ 8 = 2^3,$$
$$9 = 3^2,\ \ 10 = 2 \cdot 5,\ \ 11 = 11,\ \ 12 = 2^3 \cdot 3,\ \ldots$$

Bu qator k ning yoyilmasi bilan tugaydi.

Ana shu yoyilmalarning barchasidagi $p_1 = 2$ ning eng katta darajasini r_1, $p_2 = 3$ ning eng katta darajasini r_2 va hokazo $p_n = p$ ning eng katta darajasini r_n deb belgilaymiz.

Shunday qilib, agar m soni k dan katta bo‘lmasa, uning $m = 2^{s_1}3^{s_2}\dots p_n^{s_n}$ yoyilmasidagi darajalar uchun $s_1 \le r_1$, $s_2 \le r_2, \dots,$ $s_n \le r_n$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Endi (2) formulalarning o‘ng tomonidagi yig‘indilarning “dum”larini tashlab yuborib,

$$\frac{1}{1-x_1} > 1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \dots + x_1^{r_1},$$

$$\frac{1}{1-x_2} > 1 + x_2 + x_2^2 + x_2^3 + \dots + x_2^{r_2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{1}{1-x_n} > 1 + x_n + x_n^2 + x_n^3 + \dots + x_n^{r_n}$$

tengsizliklarni hosil qilamiz. O‘ng tomondagi ifodalarni ko‘paytirish natijasida hosil bo‘ladigan ifodani ko‘z oldimizga keltiraylik: unda $(r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_n+1)$ ta qo‘shiluvchi bo‘ladi. Ularning har biri

$$x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n} = \frac{1}{p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_n^{s_n}}$$

ko‘rinishga ega. Biz uchun muhimi – ana shu qo‘shiluvchilar orasida maxraji 1 dan k gacha bo‘lgan barcha natural son qatnashadi. Masalan, $n = 4$ bo‘lsa, ya’ni $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ tub sonlar qaralsa, $k = 10$ bo‘ladi:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{7}+[\cdots]$$

– kvadrat qavs ichiga $\frac{1}{11}$ dan boshlab, maxraji o‘ndan katta chiqadigan kasrlar turadi (maxraji eng kattasi $\frac{1}{2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}$). Demak,

$$\frac{1}{1-x_1}\cdot\frac{1}{1-x_2}\cdots\frac{1}{1-x_n}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k} \qquad (3)$$

(Eyler isboti dovondan oshdi!) Bu tengsizlikning o‘ng tomonidagi ifoda geometrik progressiya dastlabki hadlarining yig‘indisiga o‘xshaydi, ammo (2) kabi cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyadan farqli, k cheksiz orttirilsa, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}$ yig‘indi asta-sekinlik bilan bo‘lsa-da, cheksiz orta borib, istalgan sondan, jumladan, (3) tengsizlikning o‘ng tomonidagi sondan ham ortib ketadi. Haqiqatan, $k=2^m,\ m\in N$, bo‘lsin. U holda

$$\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{1}{2},\cdots$$

–bu baholashlardan koʻrinadiki, (3) tengsizlikning oʻng tomonidagi ifoda istalgancha marta $\frac{1}{2}$ ga karrali sondan katta boʻla oladi. Bu esa ziddiyatga olib kelayotgani uchun, tub sonlar chekli degan faraz notoʻgʻri degan xulosa chiqadi. Shu bilan Evklid teoremasining Eyler isboti oxiriga yetdi.

Aslida Eyler bu bilan cheklanmagan, xuddi shunday mulohazalar bilan

$$\frac{1}{1-p_1^{-2}}\cdot\frac{1}{1-p_2^{-2}}\cdots\frac{1}{1-p_n^{-2}}\cdots=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

munosabatini hosil qilgan. U Eyler ayniyati deyiladi. Bu haqda kelgusi suhbatimizda hikoya qilamiz.

§ 26. O‘n yetti burchakni qurish mumkinligining izohi[28]

Buyuk nemis matematigi va fizigi K.F.Gauss (1777-1855) sirkul va chizg‘ich yordamida muntazam 17 burchak yasah mumkinligini isbotlagan. Biz bu masala va Gauss teoremasi haqida (§13) da hikoya qilgan edik. Qarangki Gaussning arxivida teoremaning eng dastlabki elementar isboti saqlangan ekan (Историко-математические исследования, вып. IV). Biz uni sizlarga havola etishni lozim topdik. Toki, bo‘lg‘usi matematiklarimizga o‘rnak bo‘lsin, ularni fanning yuksak marralarini zabt etishga ilhomlantirsin.

Qisqalik uchun $\dfrac{360^\circ}{17}$ burchak A bilan belgilanadi. U muntazam 17 burchakning markaziy burchagidir.

1. Quyidagi tenglikka egamiz:

$$1+\cos A+\cos 2A+\cos 3A+\ldots+\cos 16A=0.$$

Bu tenglik muntazam 17 burchak tomonlari bo‘ylab yo‘nalgan vektorlarning yig‘indisi 0 vektorga tengligining natijasidir. Bir hisobda bu teorema (ya’ni Gauss teoremasi) umumiy va ma’lum fikrlardan kelib chiqadi. Shu bilan bir qatorda, uni juda oddiy qurish usuli bilan isbotlash mumkin. Oson isbotlash yo‘li quyidagicha:

$$1+\cos A+\cos 2A+\cos 3A+\ldots+\cos 16A$$

ifodani S bilan belgilaymiz va $\cos A$ ga ko‘paytirib, har bir haddagi $\cos kA\cdot\cos A$ ifodani

[28] FMI, 2013, №2.

$$\frac{1}{2}\cos(k-1)A+\frac{1}{2}\cos(k+1)A$$

yig‘indiga ajratamiz.

Agar $\cos 17A$ o‘rniga 1 ni qo‘ysak, u holda $S\cos A=S$ hosil bo‘ladi. O‘z navbatida $S(1-\cos A)=0$. Kelishuviga binoan $1-\cos A=0$ bolishi mumkin emas. Demak, $S=0$. Bundan tashqari, $\cos 17A=1$, $\cos 16A=\cos A$, $\cos 15A=\cos 2A$ va hokazo, umuman $\cos(17-k)A=\cos kA$.

2. $\cos\varphi\cos\varphi'=\frac{1}{2}\cos(\varphi-\varphi')+\frac{1}{2}\cos(\varphi+\varphi')$.

Shuningdek, $\cos 18A=\cos A$, $\cos 19A=\cos 2A$ va hokazo, umuman $\cos(17+k)A=\cos kA$.

Umuman, agar l biror butun sonni ifodalasa, u holda $\cos(17l\pm k)A=\cos kA$.

3. $\cos A+\cos 2A+\cos 3A+\ldots+\cos 8A=-\frac{1}{2}$.

Bu tenglik birinchi va ikkinchi xossalardan kelib chiqadi.

Yuqoridagi sakkizta kosinusni ikki qismga ajratamiz:

$$\cos A+\cos 2A+\cos 4A+\cos 8A=p,$$
$$\cos 3A+\cos 5A+\cos 6A+\cos 7A=p'.$$

Sunday qilib, $p+p'=-\frac{1}{2}$.

Endi p ni p' ga ko‘paytiramiz va mos hadlarni ikkinchi xossaga binoan o‘zgartiramiz. Bu quyidagi hisoblashga olib keladi:

$$p\cos 3A=\cos A\cdot\cos 3A+\cos 2A\cdot\cos 3A+\cos 4A\cdot\cos 3A+$$

$$+\cos 8A\cdot\cos 3A=\overbrace{\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{2}\cdot\cos 4A}+\overbrace{\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}\cdot\cos 5A}+$$

$$+\overbrace{\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}\cdot\cos 7A}+\overbrace{\frac{1}{2}\cos 5A+\frac{1}{2}\cdot\cos 6A}.$$

Shunday qilib,

$$p\cos 3A=\cos A+\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{2}\cos 4A+\cos 5A+$$
$$+\frac{1}{2}\cos 6A+\frac{1}{2}\cos 7A.$$

Xuddi shunday quyidagilar topiladi:

$$p\cos 5A=\frac{1}{2}\cos A+\cos 3A+\cos 4A+\frac{1}{2}\cos 6A+$$
$$+\frac{1}{2}\cos 7A+\frac{1}{2}\cos 8A,$$

$$p\cos 6A=\cos 2A+\frac{1}{2}\cos 3A+\frac{1}{2}\cos 4A+\frac{1}{2}\cos 5A+$$
$$+\cos 7A+\frac{1}{2}\cos 8A,$$

$$p\cos 7A=\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{2}\cos 3A+\frac{1}{2}\cos 5A+$$
$$+\cos 6A+\cos 8A.$$

Natijada,

$$pp'=2\cos A+2\cos 2A+2\cos 3A+2\cos 4A+2\cos 5A+$$
$$+2\cos 6A+2\cos 7A+2\cos 8A=-1.$$

Bu yerdan esa, p va p' sonlar $x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$ tenglamaning ildizlari ekanligi va ularning qiymati $\left(-\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{17}\right)$ga tengligi kelib chiqadi. Uzunligi bunday qiymatga teng kesmalarni sirkul va chizg‘ich vositasida yasash mumkin. Murakkab joyi shundaki, p ning qiymati sifatida qaysi birini olish lozimligi noaniq.

Shuni takidlab o‘tamizki, bu noaniqlikni sinuslar jadvali bo‘yicha tezkor hisoblash yordamida hal qilish mumkin:

$$p = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}, \quad p' = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}.$$

Ravshanki p olinishi lozim (Mening kitobimda barcha izlanishlar shunday o‘tkazilganki, bu murakkablik yo bartaraf qilinadi, yoki yechim boshqa usulda hosil qilinadi).

Endi yana p ning tarkibidagi o‘sha 4 ta kosinusni ikki qismga ajratamiz,

$$\cos A + \cos 4A = q, \quad \cos 2A + \cos 8A = r.$$

Xuddi shunday qolgan to‘rttasini ham ajratamiz,

$$\cos 3A + \cos 5A = q', \quad \cos 6A + \cos 7A = r'.$$

Bu yerda $q + r = p,\ q' + r' = p'$.

Endi q ni r ga ko‘paytiramiz va ko‘paytma yuqoridagiga o‘xshash hisob-kitoblar yordamida quyidagiga o‘zgaradi:

$$\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{2}\cos 3A+\frac{1}{2}\cos 4A+\frac{1}{2}\cos 5A+$$
$$+\frac{1}{2}\cos 6A+\frac{1}{2}\cos 7A+\frac{1}{2}\cos 8A.$$

Xuddi shunday natija $q'r'$ ni hisoblashda ham hosil qilinadi. shunday qilib, $qr=q'r'=-\frac{1}{4}$. Demak q va r sonlar $x^2-px-\frac{1}{4}=0$ tenglamaning ildizlari, q' va r' sonlar esa $x^2-p'x-\frac{1}{4}=0$ tenglamaning ildizlari bo‘ladi. Bu yerda p va p' sonlarni ma’lum deb qarasak, ularning qiymatlarini geometrik qurish yordamida hosil qilish mumkin. Bu tenglamalarni yechishda hosil bo‘ladigan radikallarning ishoralari bilan bog‘liq noaniqliklardan qutulish yuqoridagiga o‘xshash mulohazalarga asoslanadi.

Demak, $\cos A+\cos 4A=q$ qiymat aniqlandi, ammo $\cos A\cdot\cos 4A$ ko‘paytma $\frac{1}{2}\cos 3A+\frac{1}{2}\cos 5A=\frac{1}{2}q'$ ifodaga teng. O‘z navbatida, $\cos A$ va $\cos 4A$ ikkalasi $x^2-qx+\frac{1}{2}q'=0$ tenglamaning ildizlari bo‘ladi va ularning qiymatlari geometrik qurish yordamida hosil qilinishi mumkin. Bundan ko‘rinib turibdiki, $\cos A$ kattaroq, $\cos 4A$ esa kosinusning kichikroq qiymati bo‘ladi. Suning uchun

$$\cos A=\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{2}q'},\qquad \cos 4A=\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{2}q'}.$$

Xullas, $\cos A$ topildi, shu bilan 17 burchak tomoni ham aniqlanadi.

Agar keltirib chiqarilgan kvadrat tenglamalar birin-ketin yechib chiqilsa, quyidagi ifoda hosil qilinadi:

$$\cos A = \frac{1}{16}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} + \right.$$

$$\left. +2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} - 2\sqrt{2(17 + \sqrt{17})}}\right).$$

(Bu qiymatni juda katta aniqlikda hisoblash mumkin). Mana uning taqribiy qiymati:

0,9324722294043558045731158918 21.

§ 27. Burchakni teng uchga bo‘lib bo‘ladimi, bo‘lmaydimi?[29]

Geometrik yasashlarga bag‘ishlangan kitoblarda bu savolga “Yo‘q!” degan javob uchraydi. Buni hatto teorema deyishadi. Shunga qaramay dunyoning turli burchaklarida kimlardir “burchakni teng uchga bo‘lish”ga unnashdan to‘xtamaydi. Unnabgina qolmay, ora-chira “Topdim!” deya yengil shon-shuhrat da’vosini qiladiganlar chiqib turadi. Axir, qadimgi yunon olimlaridan boshlab jahonning eng kuchli matematiklari “yecholmayotgan” muammoni hal qilish katta shuhrat keltirishi naqd-ku! Afsuski, bunday “tadqiqotchilar” bizning yurtimizda ham yo‘q emas.

Gap “burchak triseksiyasi” deb ataladigan mana bu masala ustida bormoqda: sirkul va chizg‘ich yordamida tekislikda berilgan ixtiyoriy burchakni teng uchga bo‘ling.

Eslatamiz, berilgan burchakni teng uchga bo‘lish, deganda shu burchakni teng uchga bo‘luvchi bir juft nurni yasash tushuniladi. Bu ikki nur trisektrisalar deb ataladi, ularni yasash masalasi esa burchak triseksiyasi nomi bilan mashhur. Ravshanki, masalani yechish uchun har ikki nurni yasash shart emas – bittasi yasalsa, ikkinchisini yasash muammo tug‘dirmaydi.

Burchak triseksiyasi shu qadar jozibali ekan, u haqida bahs yuritmasdan iloj yo‘q. Maqsad – mavzuga oydinlik kiritib, burchak triseksiyasi ishqibozlarini vaqtni (ayrim hollarda umrining ancha qismini) behuda sarflamaslikka undash.

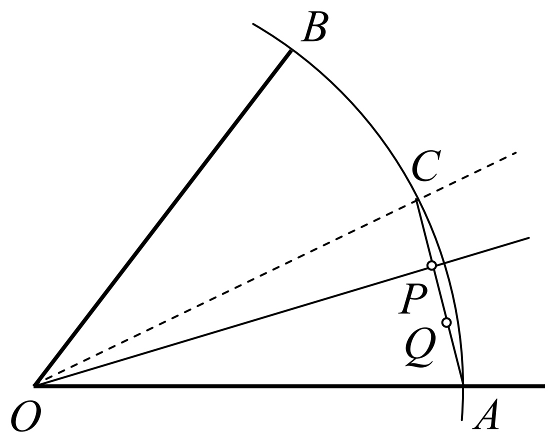
Dastavval “masalani yechdim” deb o‘ylaydiganlar mulohazalarini tahlil qilaylik.

[29] FMI, 2016, №1. (M.A.Bekimov bilan hammualliflikda).

1-mulohaza: “Nega bo‘lib bo‘lmas ekan? Agar berilgan burchak kattaligi α bo‘lsa, uni teng uchga bo‘lsa, $\frac{\alpha}{3}$ ga teng burchak bo‘ladi-da!”

Burchak triseksiyasi masalasida burchakning kattaligini emas, o‘zini yasash ko‘zda tutiladi. Qiyoslash uchun, burchakni teng ikkiga bo‘lish, ya’ni bissektrisasini yasash masalasini qarash kifoya – uning yechimi maktab geometriya darsligida bayon qilinadi.

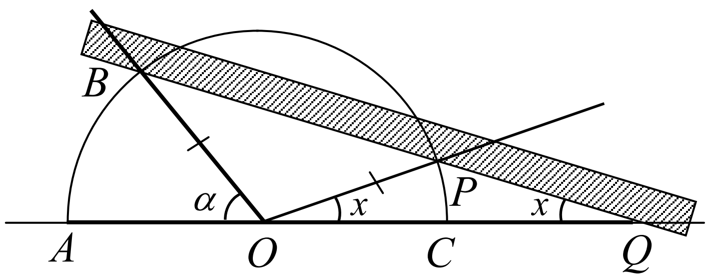
2-mulohaza (H.Shteynhauz). O‘tkir burchak berilgan bo‘lsin (berilgan burchak o‘tmas bo‘lsa, avval uning yarmini teng uchga bo‘lish, so‘ng bir bo‘lakni ikki marta kattalashtirish kifoya). Uning OC bissektrisasini o‘tkazamiz (1-rasm). Aylana chizib olamizda, AOC burchakka tiralgan yoy vatarini o‘tkazamiz. So‘ng bu vatarni teng uchga bo‘lamiz. Bo‘linish nuqtalari P va Q bo‘lsin. U holda AOP burchak berilgan burchakning “uchdan biriga teng” bo‘ladi – buni transportirda o‘lchab ishonch hosil qilish mumkin.



1-rasm.

Biz “uchdan biriga teng” degan jumlani qo‘shtirnoq ichiga oldik. Chunki, haqiqatda AOP burchak taqriban AOB ning uchdan biriga teng. Aniqlik darajasi shu qadarki, transportirda payqalmaydi. Masalan, $AOB = 60^\circ$ bo‘lsa, AOP burchakning 20° dan farqi $0{,}1^\circ$ atrofida bo‘ladi. Burchak triseksiyasi masalasida esa yechimni matematik aniqlikda topish, ya’ni kattaligi α ga teng burchakni bo‘lish natijasida hosil bo‘lgan burchak kattaligi roppa-rosa $\frac{\alpha}{3}$ ga teng chiqishini isbotlash ham talab etiladi.

3-mulohaza (Arximed). Berilgan AOB burchakning AO tomonini AC to‘g‘ri chiziqqa to‘ldiramiz va O markazli ixtiyoriy bir aylana chizamiz. Uning OA, OB va OC nurlar bilan kesishgan nuqtalari uchun A, B, C belgilarni saqlaymiz. Chizg‘ich olib, unda orasidagi masofa aylananing radiusiga teng P va Q nuqtalarni belgilaymiz.



2-rasm.

So‘ng chizg‘ichni shunday joylashtiramizki, u B nuqtadan o‘tsin, P nuqtasi aylanada, Q nuqtasi esa OC nurda yotsin. Shunda $\angle COP$ burchak berilgan burchakning uchdan biriga teng bo‘ladi (2-rasm).

Haqiqatan, yasashga ko‘ra, $AO = OB = OP = PQ$ – hammasi aylana radiusiga teng. $\angle AOP = \alpha$ – berilgan burchak bo‘lsin. APQ teng yonli uchburchakdan $\angle POQ = \angle PQO = x$ – izlanayotgan burchak, OBP tengyonli uchburchakdan $\angle OBP = \angle OPB$ – bu burchak OPQ uchburchakning P uchidagi tashqi burchagi sifatida $2x$ ga teng. Demak, $\angle AOB + \angle POQ = \angle OBP + \angle OPB$ – har ikki yig‘indi ham $\angle POB$ burchakni yoyiq burchakka to‘ldiradi. Shunday qilib $\alpha + x = 4x$, bundan $x = \frac{\alpha}{3}$ kelib chiqadi!

– Arximedning yechimi burchak triseksiyasi masalasini hal qilar ekan-da? Axir unda faqat sirkul va chizg‘ichdan foydalanildi, xolos!

– Yo‘q! Burchak triseksiyasi masalasida “matematik” chizma asboblari nazarda tutilib, ular bilan faqat quyidagi amallarni bajarishga ruxsat etiladi:

1 (*Chizg‘ich aksiomasi*). Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq qurish.

2 (*Sirkul aksiomasi*). Markazi berilgan nuqtada yotuvchi, radiusi berilgan kesmaga teng aylana qurish.

3 (*Qalam aksiomasi*). Tekislikda, berilgan to‘g‘ri chiziq yo aylana ustida, yoki o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq va aylanalar bo‘laklarida (ya’ni nur, kesma va yoylarda) nuqta tanlash, shuningdek, tekislikning ana shunday to‘g‘ri chiziq va aylanalar ajratgan sohalaridan nuqta tanlash.

4 (*Kesishma aksiomasi*). Berilgan va yasalgan to‘g‘ri chiziqlar va aylanalar kesishish nuqtalarini belgilash.

Bunda yasaladigan to‘g‘ri chiziqlar va aylanalar qog‘ozda real chizg‘ich va sirkul bilan chiziladigan shakllar emas, balki sof matematik tushunchalarni bildiradi. Xususan, to‘g‘ri chiziqlar cheksiz hisoblanadi. Bundan tashqari 3 aksiomada tanlanadigan nuqtalar shu aksomalarda zikr etilgan xossadan boshqa maxsus xossalarga ega bo‘lmasligi lozim (ya’ni ixtiyoriy tanlanadi).

“Arximed yechimi”da chizg‘ichdan taqiqlangan yo‘sinda foydalanildi – chizg‘ichni ham B nuqtadan o‘tadigan, ham chizg‘ichda tanlangan ikkita nuqtadan biri aylana ustida, ikkinchisi esa OA' nurda yotadigan qilib joylashtirishga ruxsat yo‘q (yuqoridagi aksiomalarga qarang). Arximed bajargan yasash klassik burchak triseksiyasi masalasining yechimi emas, u boshqa masalaning yechimi deb tan olinishi mumkin, xolos.

(Aslida yasashga doir masalalarda chizg‘ich ustiga belgilar qo‘yib olish ham taqiqlanadi).

Burchak triseksiyasini hal qilish ishqibozlari o‘rtasida “Nega endi yechib bo‘lmas ekan? Chizaversa, chizaversa, bir kunmas-bir kun yechilib qolishi mumkin-ku” deguvchilar ko‘p. Ular “burchak triseksiyasi masalasini yechish mumkin emas” degan tasdiqni “hozirgacha hech kim yechimni topa olmagan” qabilida tushunishadi. Holbuki, bu ikki tasdiq o‘zaro katta farq qiladi. “Matematika jozibasi” ruknida berilayotgan maqolalarda “hozirgacha yechimi topilmagan” masalalar namunalari keltirilgan. (Masalan, “Chin qiziqarli matematika” II qismidagi “Eyler g‘ishtlari” va “Shteynhauz masalasi” mavzulariga qarang.) “Burchak triseksiyasi masalasi yechimga ega emas” degani “Chizg‘ich va sirkul vositasida yuqoridagi aksiomalarga amal qilib berilgan burchakni teng uchga bo‘luvchi nurlarni yasash mumkin emas” degan teorema bo‘lib, u XIX-asrda bekamu-ko‘st isbotlangan.

Endi shunday taajjubni qaraylik: “Nahotki, nimanidir mumkin emasligini isbotlab bo‘lsa?” Real hayotga oid masalalarga nisbatan taajjub o‘rinlidir, ammo matematikada bunday tasdiqlar juda ko‘p:

$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ tenglamani qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish va ildiz chiqarish amallari bilan yechib bo‘lmaydi (Abel teoremasi).

$x^5 + x - 1 = 0$ tenglama musbat ildizga ega, ammo uni ratsional sonlar ustida to‘rt arifmetik amal va ildiz chiqarish amalini qo‘llab topish mumkin emas (Galua nazariyasidan teorema).

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ integralni elementar funksiyalar orqali ifodalash mumkin emas.

Sirkul va chizg‘ich vositasida 1° li burchak yasab bo‘lmaydi. (Bundan chizg‘ich va sirkul bilan muntazam 9-burchak yasash mumkin emasligi ham kelib chiqadi).

Mana nisbatan soddaroq misol:

Uchlari katak daftar chiziqlari kesishadigan nuqtalarda yotuvchi teng tomonli uchburchak topish mumkin emas. (Tabiiyki, ideal katak daftar nazarda tutiladi. FMI jurnalida bu teorema isboti bayon qilingan maqola berilgan).

$\sqrt{2}$ sonini oddiy kasr (ya’ni ikki musbat butun sonning nisbati) ko‘rinishida yozish mumkin emas.

O‘z davrida ko‘pchilikning boshini qotirgan masala bilan bog‘liq teorema:

“O‘n besh” o‘yinida chapdagi rasmda tasvirlangan holatni o‘ngdagi holatga keltirish mumkin emas:

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Nihoyat, bu toifaga mansub juda sodda “teorema”: 100 ta otni 7 ta qoziqqa bog‘lash kerak. (Har bir ot faqat bitta qoziqqa bog‘lanishi ko‘zda tutiladi). Bu ishni har bir qoziqqa toq sondagi ot bog‘lanadigan qilib bajarish mumkinmi? – Yo‘q, mumkin emas. Isbot: toq sondagi toq sonlar yig‘indisi toq son bo‘ladi.

Burchak triseksiyasini yechish mumkin emasligi ham ana shunday teoremalardan biridir. Uning isbotini kelgusi maqolamizda bayon qilamiz. (Matematikadan boshqa sohaga mansub shu toifadagi tasdiqlar: Abadiy dvigatel yasash mumkin emas. Sovutgichning eshigini ochib qo‘yib, shu sovutgich joylashgan xonadagi haroratni pasaytirish mumkin emas. Botqoqqa botayotgan odam o‘zini o‘zi sochidan tortib chiqarishi mumkin emas.)

Hozir esa bu masala bilan bog‘liq latifanamo, aslida bo‘lib o‘tgan bir voqeani keltiramiz. Taniqli fan targ‘ibotchisi M.Gardner yozishicha, Pittsburg universitetining rektori, asli kasbi ruhoniylik bo‘lgan I.E.Kallahan ismli zot 1931 yili “istalgan burchakni teng uchga bo‘lish masalasini hal etgani” to‘g‘risida gazetada xabar e’lon qiladi, so‘ng yechim bayon qilingan kitobcha nashr ettiradi. “Butun dunyo matematiklari ikki ming yil davomida yecha olmagan muammoning hal qilinishi” ommaviy axborot vositalarida katta shov-shuvga sabab bo‘ladi. Shov-shuv avjiga chiqqan mahalda aqlliroq bir jurnalist “matematiklarning fikrini ham so‘rab ko‘raylik-chi” deb qoladi. O‘ndan ziyod reportyor yaqin universitetga borib, professional matematiklardan “hazrati Kallahanning olamshumul ishi”ga baho berishni so‘rashadi. Matematiklarning javobi ularni qattiq taajjubga soladi: matematiklar, bir-birlaridan bexabar, o‘ylab ham o‘tirmay bir ovozdan “Noto‘g‘ri!” deyishgan ekan-da. Bundan jurnalistlarning ensasi qotibdi: “Bu matematiklar qanaqa xalq ekanki, Kallahanning kitobini qo‘liga ham olmay, noto‘g‘ri deyishadi?”

Fanning boshqa qaysi sohasi bo‘lmasin, ish bilan tanishmasdan uning haqida to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri degan xulosa chiqarish olimga xos emas. Matematikada esa mumkin, chunki, masalan, “burchak triseksiyasi masalasini hal qildim” deya da’vo qilish, “100 otni to‘qqizta qoziqqa har bir qoziqda toq sonda bo‘ladigan qilib bog‘lash usulini topdim” deyish bilan barobar – “qani, qanday qilib?” deya tanishib o‘tirishga hojat yo‘q.

§ 28. Teorema: istalgan burchakni chizg‘ich va sirkul bilan teng uchga bo‘lish masalasini yechish mumkin emas[30]

Bu teoremada faqat Qadimgi Yunonistonda ma’lum bo‘lgan tushunchalargina qatnashadi, ammo uni o‘sha davr geometriklari payqashi ham, isbotlashi ham mumkin emas edi. Chunki teorema sirtdan geometriyaga taalluqli bo‘lsa ham, aslida algebra tasdig‘iki, algebrasiz uni isbotlash imkonsiz: isbot kub tenglamani yechish formulasi, analitik geometriya (ya’ni, algebra tilidagi geometriya) va sonlar maydoni tushunchasiga asoslanadi.

1837 yil	Burchak triseksiyasi masalasi
19-asr	Maydon tushunchasi
17-asr	Analitik geometriya
16-asr	Kub tenglama yechilishi
9-asr	Algebra yaratilishi
E. o. 4-asr	Evklid geometriyasi.

Burchak triseksiyasi masalasi o‘z tarixiy taraqqiyoti yo‘lida mana shu masofani bosib o‘tgan ekan, bugun endi sarlavhadagi teoremaning isboti bilan tanishmasdan turib burchak triseksiyasi masalasi bilan shug‘ullanish – yallig‘langan ko‘richak (appenditsit)ni surtma bilan davolashday gap.

Mazkur teorema birinchi marta fransuz matematigi P.L.Vansel tomonidan 1837-yilda isbotlangan. Geometriyaga oid kitoblarda teoremaning murakkabligiga ko`ra turli darajadagi bir necha isboti keltiriladi. Galua nazariyasiga oid kitoblarda u shu nazariyaning tasdiqlaridan osongina keltirib chiqariladi, ammo bunday

---
[30] FMI, 2016, №2.

isbotni elementar deb bo'lmaydi. "Энциклопедия элементарной математики" kitobining 4-jildida kompleks sonlardan foydalanilgan isbot keltirilgan. R.Kurant va G.Robbins kitobida elementar isbot bayon qilingan, ammo u 16 sahifani egallaydi. B.Argunov va M.Balkning geometrik yasashlarga bag'ishlangan maxsus kitobida teorema isboti bilan bog'liq material ikki bobda bayon qilingan, R.Otajonovning geometrik yasashlarga oid kitoblarida esa mavzu deyarli chetlab o'tilgan. Bu yerda teorema isbotining imkon qadar soddalashtirilgan varianti beriladi.

1-bosqich (*geometrik yasashlar – algebra tilida*). Birinchi navbatda tekislikka Dekart koordinatalari tizimini kiritib olamiz. Bunda har bir nuqta ikkita haqiqiy son bilan ifodalanadi, masalan, $A_1(x_1, y_1)$. Sirkul va chizg'ich bilan yechilishi lozim masalaning berilishini ham, yasashning bajarilishini ham, natijani ham nuqtalar tilida ifodalash mumkin. Xususan, to'g'ri chiziqni berish (yoki yasash) uchun uning ikkita nuqtasini berish (mos ravishda yasash) kifoya. Agar bu nuqtalar $A_1(x_1, y_1)$ va $A_2(x_2, y_2)$ bo'lsa, mos to'g'ri chiziq

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{1}$$

tenglama bilan ifodalanadi.

Odatda aylana markazi va radiusi bilan beriladi. Agar markazi $D(x_0, y_0)$ nuqtada, radiusi esa R ga teng bo'lsa, uning tenglamasi $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ bo'lar edi. Lekin aylananing markazi $D(x_0, y_0)$ va ustidagi biror $A_1(x_1, y_1)$ nuqta bilan ham berish mumkin. Bunda u

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

tenglama bilan ifodalanadi.

Berilgan nuqtalar bo‘yicha yasashlar bajarilganda, yangi nuqtalar to‘g‘ri chiziq bilan to‘g‘ri chiziqning kesishuvidan:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} \\ \dfrac{x-x_3}{x_4-x_3}=\dfrac{y-y_3}{y_4-y_3} \end{cases} \qquad (2)$$

yo aylana bilan to‘g‘ri chiziq:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 & 3(a) \\ \dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y-y_2}{y_3-y_2} & 3(b) \end{cases}$$

yoki aylananing aylana bilan kesishuvidan hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 & 4(a) \\ (x-x_2)^2+(y-y_2)^2=(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2 & 4(b) \end{cases}$$

Agar berilgan ikki nuqta ustma-ust tushmasa, (2) sistema yagona yechimga ega – u kesishish nuqtasining koordinatalari bo‘ladi. (3) sistemada x va y noma’lumlardan birini (3b) tenglamadan topib, (3a) tenglamaga qo‘yilsa, kvadrat tenglama hosil bo‘ladi. (4) sistemada (4a) tenglamadan (4b) tenglama hadma-had ayrilsa, x^2 bilan y^2 qisqarib ketib, $ax+by+c=0$ ko‘rinishidagi tenglama chiqadi. Demak, yana x yoki y ni o‘rniga qo‘yish bilan (4) sistema yechimini kvadrat tenglamaga keltirish mumkin. Bu ikki holda hosil qilingan kvadrat tenglama a) yechimga ega bo‘lmasligi mumkin – bu chiziqlar kesishmasligini bildiradi; b) faqat bitta yechimga ega bo‘lishi mumkin – bu holda chiziqlar o‘zaro urinadi; c) ikkita ildizga ega bo‘lishi mumkin – bunda chiziqlar ikkita nuqtada kesishadi. Shunday qilib,

1-xulosa. Berilganlar hamda oraliq qadamlarda yasalgan nuqtalarning koordinatalari (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots,$ (x_k, y_k), so‘nggi qadamda yasalgan nuqtaning koordinatalari (x_*, y_*) bo‘lsin. U holda x_*, y_* sonlari x_0, y_0, $x_1, y_1, \ldots,$ x_k, y_k ustida to‘rt arifmetik va kvadrat ildiz chiqarish amallari bilangina hosil qilinadi.

Quyidagi xulosa alohida e’tiborga molik: agar faqat chizg‘ich qo‘llansa, ya’ni to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilsa, yangi nuqtalarning koordinatalari avvalgilaridan to‘rt arifmetik amal bilangina hosil qilinadi. Agar bir martagina aylana chizilgan bo‘lsa, har safar yangi to‘g‘ri chiziq yoki aylana o‘tkazilganda, kesishish nuqtalarining koordinatalari murakkablashib boradi – to‘rt arifmetik amaldan tashqari kvadrat ildiz ham chiqarib turiladi.

Bunda arifmetik amallar bilan kvadrat ildiz amali orasida muhim farq borligini ta’kidlaymiz. Ishni ratsional sonlardan boshlaylik. Ratsional sonlar ustida arifmetik amallar bajarilsa, yana ratsional sonlar hosil bo‘ladi, kvadrat ildiz chiqarganda esa natija ko‘pincha ratsional son bo‘lmaydi – $\sqrt{r}$ ko‘rinishdagi irratsional son chiqadi. Agar yasashlar boshida hamma nuqtaning koordinatalari ratsional va kvadrat ildiz faqat bir marta chiqarilsa, u arifmetik amallar bilan birga $a + b\sqrt{r}$ ko‘rinishdagi sonlarni beradiki, bunda a, b – ratsional sonlar bo‘lib, ularni *koeffitsientlar* deb ataymiz. Haqiqatan,

$$(a_1 + b_1\sqrt{r}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{r}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 + b_2\sqrt{r})$$

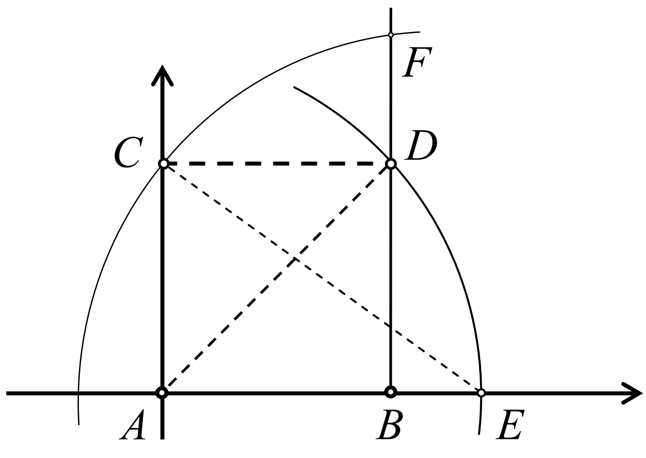
$$(a_1 + b_1\sqrt{r})(a_2 + b_2\sqrt{r}) = (a_1a_2 + rb_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{r}$$

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{r}}{a_2+b_2\sqrt{r}}=\frac{a_1a_2-rb_1b_2}{a_2^2-rb_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-rb_2^2}\sqrt{r}$$

– to‘rtala amal natijasida yana koefitsientlari ratsional bo‘lgan $a+b\sqrt{r}$ ko‘rinishidagi sonlar chiqyapti. Bunda r – tegishli kvadrat tenglamaning diskriminantidir. (Bo‘lish amali, tabiiy, mahraj $a_2+b_2\sqrt{r}$ noldan farqli bo‘lganda bajariladi; bunda $a_2^2-rb_2^2$ ham holdan farqli bo‘ladi – isbotini mashq sifatida qoldiramiz).

Ratsional sonlar to‘plami Q bilan belgilanishi ma’lum. Koeffitsientlari ratsional sonlardan iborat barcha $a+b\sqrt{r}$ ko‘rinishidagi sonlar to‘plamini $Q(\sqrt{r})$ kabi belgilashga kelishilgan. Bunday to‘plamlar **maydon** deb ataladi. Yasash davom ettirilib, chizg‘ich bilanistalgancha to‘g‘ri chiziq o‘tkazilsa, hosil bo‘ladigan nuqtalarning koordinatalari $Q(\sqrt{r})$ maydondan tashqari chiqmaydi, bordiyu, aylana chizilsa, chiqib ketishi mumkin.

Masalan, uchlari $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ va $D(1, 1)$ nuqtalarda bo‘lgan kvadratni olsak, ularning koordinatalari Q ga tegishli (1-rasm; chiziqlar va nuqtalar yasash tartibiga qarab ingichkalashib boradi, zarur bo‘lmagan chiziqlar uzlukli). $D(1, 1)$ nuqta orqali $A(0, 0)$ markazli aylana o‘tkazsak, u AB to‘g‘ri chiziqni $E(\sqrt{2}, 0)$ nuqtada kesadi – bu nuqtaning



1-rasm.

koordinatalari $Q(\sqrt{2})$ maydonda yotadi. Endi $B(1, 0)$ nuqtadan $\sqrt{2}$ radiusli aylana o‘tkazsak, u BD to‘g‘ri chiziqni $F(1, \sqrt{2\sqrt{2}})$ nuqtada kesadiki, $\sqrt{2\sqrt{2}}$ sonini koeffitsientlari ratsional bo‘lgan $a+b\sqrt{2}$ son ko‘rinishida yozish mumkin emas. Xuddi shu singari $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ham $Q(\sqrt{2})$ ga tegishli bo‘lmaydi.

Mashq. So‘nggi ikki tasdiqni isbotlang.

2-xulosa. Sirkul va chizg‘ich bilan yasashlar davomida nuqtalarning koordinatalari uchun ifodalarda ildizlar soni ortib boradi.

Bunda biror qadamda hosil qilingan nuqtalarning koordinatalari R maydonga tegishli bo‘lsa, bitta chiziq o‘tkazilishi natijasida yangi nuqtalarning koordinatalari $a+b\sqrt{r}$ shaklida bo‘lib, uning a, b koeffitsientlari ham, r soni R maydonga tegishlidir. Xususan, yangi nuqtalarning koordinatalari R dan tashqariga chiqmasligi mumkin – bu $\sqrt{r}$ soni R ga tegishli bo‘lganda ro‘y beradi.

Masalan, Markaziy Osiyolik matematiklar mana bunday tenglikni topganlar:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\sqrt{a-b}.$$

Mashq. Bu tenglikni isbotlang.

Agar $\sqrt{r}$ soni R maydonda yotmasa, u holda $a+b\sqrt{r}$ ko‘rinishdagi sonlar yangi maydon hosil qiladi. U yuqoridagi kabi, $R(\sqrt{r})$ deb belgilanadi. Bundan buyon $R(\sqrt{r})$ ko‘rinishdagi maydon ustida gap ketganda, r soni R maydonga tegishli, ammo $\sqrt{r}$ unda yotmaydi (ya’ni, R

maydonda r dan kvadrat ildiz chiqmaydi) deb hisoblanadi.

Shunday qilib, quyidagi tasdiq o‘rinli.

Teorema 1. Sirkul va chizg‘ich bilan yasashlar orqali istalgancha (ammo chekli, albatta) nuqta hosil qilingan bo‘lsin. Ularning koordinatalari dastlab berilgan nuqtalarning koordinatalari yotgan R maydonga tegishli sonlardan to‘rt arifmetik va kvadrat ildiz amallari orqali ifodalanadi.

Bunda biz borgan sari kengayib boradigan maydonlar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz:

$$R_1 \subset R_1(\sqrt{q_1}) = R_2 \subset R_2(\sqrt{q_2}) = R_3 \subset R_3(\sqrt{q_3}) = R_4 \subset \ldots \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad -1+\sqrt{2} \quad \sqrt{-1+\sqrt{2}}+\sqrt{2} \quad 3\sqrt{-1+\sqrt{2}}+(2+\sqrt{2})\sqrt{5} \ldots \quad \frac{1}{2}$$

(ostki satrda R_1 – ratsional sonlar maydoni, $q_1 = 2$, $q_2 = -1+\sqrt{2}$, $q_3 = \sqrt{5}$ hollar uchun har bir maydon elementidan namuna berildi).

Bu tasdiqning aksi ham o‘rinli:

Teorema 2. Koordinatalari R_1 maydonga tegishli har bir nuqtani sirkul va chizg‘ich vositasida yasash mumkin bo‘lsin. U holda koordinatalari (5) maydonlardan istalgan biriga tegishli bo‘lgan istalgan nuqtani ham sirkul va chizg‘ich vositasida yasash mumkin.

Isbot uzunligi a, b kesmalar bo‘yicha $a \pm b$, ab, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{ab}$ uzunlikdagi kesmalarni yasash mumkinligiga asoslanadi.

Mashq. Absissa o‘qida yotadigan, koordinatasi (5) da namuna qilib berilgan sonlardan iborat nuqtalarni yasang.

Asosiy teoremamizni isbotlashda 2-teorema zarur emas, shuning uchun burchak triseksiyasi masalasi bilan shug'ullanishda davom etamiz.

2-bosqich (triseksiya masalasining algebraik ifodasi). Qani ko'raylik-chi, burchak triseksiyasi qanday maydonga olib kelar ekan. Mushohadalarni tayin burchak – 60° li burchak uchun yuritamiz. U birlik aylananing $O(0, 0)$, $A\left(1/2, 0\right)$, $B\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$ nuqtalari bilan berilishi mumkin. Bunda boshlang'ich maydon $Q(\sqrt{3})$ bo'ladi. $\angle AOS = 20^\circ$ bo'lsin. Demak, triseksiya masalasi S nuqtani yasashga tengkuchlidir. Uning koordinatalarini topaylik.

Trigonometriyaning $\cos 3\alpha = 4\cos^2 \alpha - \cos\alpha$ formulasiga ko'ra

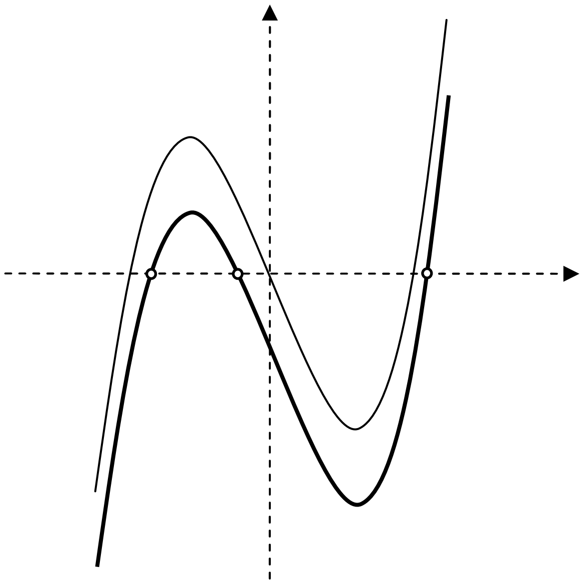
$$4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Shunday qilib, S nuqtaning abssissasi

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \tag{6}$$

kub tenglamaning musbat ildizi bo'lar ekan.

3-bosqich (60° li burchakni chizg'ich va sirkul vositasida teng uchga bo'lish mumkin emasligining isboti). (6) tenglama uchta haqiqiy ildizga ega. Bunga quyidagicha ishonch hosil qilish o'ng'ay $y = 4x^3 - 3x$ toq funksiya bo'lgani uchun uning grafigi koordinata boshiga nisbatan markaziy simmetrik hamda abssissa o'qini $x = 0,\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ nuqtalarda kesadi. Agar grafikni $\frac{1}{2}$ birlik pastga sursak, ildizlar o'rnidan biroz suriladi. Bu mulohazadan (6) tenglama ikkita manfiy va bitta musbat ildizga ega ekanligi ko‘rinadi (grafikka qarang).



Bunday holda Kardano formulasida kub ildiz ostida kompleks sonlar yotadiki (q. §3 Kub tenglama va kompleks sonlar.), biz uchun bu qulay emas. Shuning uchun boshqa yo‘ldan boramiz – (6) tenglamaning birorta ildizi ham (5) maydonlardan hech birida yotmasligini ko‘rsatamiz.

Teskarisini faraz qilaylik: ildizlardan kamida bittasi (5) maydonlardan biriga tegishli bo‘lsin. Masalan, $x_1 \in R_n(\sqrt{q_n})$. Agar n bunday faraz o‘rinli raqamlardan eng kichigi bo‘lsa, u holda

$$x_1,\, x_2,\, x \notin R_{n-1}(\sqrt{q_{n-1}}).$$

$R_n(\sqrt{q_n})$maydonning ta’rifiga ko‘ra, $x_1 = a + b\sqrt{q_{n-1}}$.

Lemma. $x_2 = a - b\sqrt{q_{n-1}}$ ham (6) tenglamaning ildizi bo‘ladi.

Isbot. $x_1 = a + b\sqrt{q_{n-1}}$ ni (6) ga qo‘ysak,

$$4(a^3 + 3a^2b\sqrt{q_{n-1}} + 3ab^2q_{n-1} + b^3q_{n-1}\sqrt{q_{n-1}}) +$$
$$+ 3(a + b\sqrt{q_{n-1}}) = 0.5,$$

ya’ni

$$(4a^3 + 12ab^2q_{n-1} + 3a - 0.5) +$$
$$+ (12a^2b + 4b^3q_{n-1} - 3b)\sqrt{q_{n-1}} = 0. \qquad (7)$$

Ammo $\sqrt{q_{n-1}}$ ni $R_{n-1}(\sqrt{q_{n-1}})$ maydon elementlaridan to‘rt arifmetik amal bilan hosil qilish mumkin emas, demak, (7) tenglik

$$4a^3 + 12ab^2q_{n-1} + 3a - 0.5 = 0,$$
$$12a^2b + 4b^3q_{n-1} - 3b = 0$$

bo‘lsagina o‘rinlidir.

Endi agar $a - b\sqrt{q_{n-1}}$ sonini (6) tenglamaga qo‘ysak,

$$(4a^3 + 12ab^2q_{n-1} + 3a - 0.5) -$$
$$- (12a^2b + 4b^3q_{n-1} - 3b)\sqrt{q_{n-1}} = 0.$$

ko‘rinishga keladi. Har ikki qavs ichidagi ifodalar 0 ga teng bo‘lgani uchun $a - b\sqrt{q_{n-1}}$ ham tenglamani qanoatlantirar ekan. $x_2 = a - b\sqrt{q_{n-1}}$ bo‘lsin. Endi Viyet teoremasiga murojaat etamiz. Kub tenglama uchun u quyidagini tasdiqlaydi:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_0 = 0$$

tenglamaning ildizlari

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0},$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{a_2}{a_0}, \qquad (8)$$
$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_3}{a_0}.$$

ayniyatlarni qanoatlantiradi.

Mashq. Isbotlang.

(8) tenglikni (6) tenglama ildizlariga qo‘llasak,

$$(a + b\sqrt{q_{n-1}}) + (a - b\sqrt{q_{n-1}}) + x_3 = -\frac{-0.5}{4} = 0.125$$

– bundan $x_3 \in R_n(\sqrt{q_{n-1}})$ kelib chiqadi. Bu xulosa qilingan farazga ziddir – (6) tenglamaning uchala ildizi ham $R_n(\sqrt{q_{n-1}})$ ga tegishli bo‘lib qoladi. Shu bilan quyidagi isbotlandi:

Asosiy teorema. Kesmani sirkul va chizg‘ich yordamida yasash mumkin emas.

Natija. 1° li burchakni sirkul va chizg‘ich bilan yasab bo‘lmaydi.

Albatta, 60° li burchakniku sirkul va chizg‘ich bilan teng uchga bo‘lish mumkin emas ekan, burchak triseksiyasi masalasini umumiy holda – istalgan burchakni teng uchga bo‘lish masalasini yechish haqida gap bo‘lishi mumkin emas.

Bu tasdiq, tabiiy, ayrim burchaklarni teng uchga bo‘lish mumkinligi inkor qilmaydi. Masalan, to‘g‘ri burchakning uchdan biri 30° li burchak bo‘lib uni osongina yasash mumkin. Shu singari, 72° li burchakni ham teng uchga bo‘lish qiyin emas – uning uchdan biri 24° ga teng va $24^\circ = 60^\circ - 36^\circ$, bunda 60° – muntazam oltiburchakning markaziy burchagi, 36° esa muntazam 10-burchakning markaziy burchagidir.

Ravshanki, agar biror burchakni teng uchga bo‘lib bo‘lsa uning yarmini ham teng uchga bo‘lish mumkin. Shuning uchun, sirkul va chizg‘ich vositasida teng uchga bo‘lish mumkin bo‘lgan burchaklar cheksiz ko‘p. Ammo shunga qaramasdan, sirkul va chizg‘ich yordamida teng uchga bo‘lish mumkin bo‘lmagan burchaklar undan ham ko‘proqdir. Haqiqatan, agar α° li burchakni teng uchga bo‘lib bo‘lsa, u holda $\alpha^\circ+3^\circ$, $\alpha^\circ+6^\circ$, $\alpha^\circ+12^\circ$ va hokazo, umuman, $\alpha^\circ+2^m 3^\circ$ (bunda $m\in N$) burchaklarni teng uchga bo‘lib bo‘lmaydi. (Aks holda 1° li burchakni yasash mumkin bo‘lib qolar edi.)

Yakuniy xulosa. Bu maqolada sirkul va chizg‘ich yordamida burchak triseksiyasi masalasini yechib bo‘lmaydi, degan teorema isbotlandi. Shu munosabat bilan mualliflar burchak triseksiyasi masalasining yechimi taklif qilingan maqolalarni ko‘rib chiqmaydi, deya ogohlantiradi.

Shu bilan birga mazmuni bu yerda isbotlangan asosiy teoremaga zid bo‘lmagan maqolalar e’tiborga loyiq bo‘lishi mumkin. Masalan, agar 1° li burchak berilgan bo‘lsa, qanday burchaklarni sirkul va chizg‘ich yordamida teng uchga bo‘lish mumkin? Sirkul va go‘niya (burchaklari 30°, 60° va 90° bo‘lgan uchburchak) vositasida qanday burchaklarni teng uchga bo‘lish mumkin? Kabi savolar, eng kam miqdorda to‘g‘ri chiziq va aylana o‘tkazib, istalgan burchakni $0{,}0001^\circ$ aniqlikda teng uchga bo‘lish usulini toping kabi masalalar bilan shug‘ullanish joiz.

Mustaqil shug'ullanish uchun qiziqarli masalalar

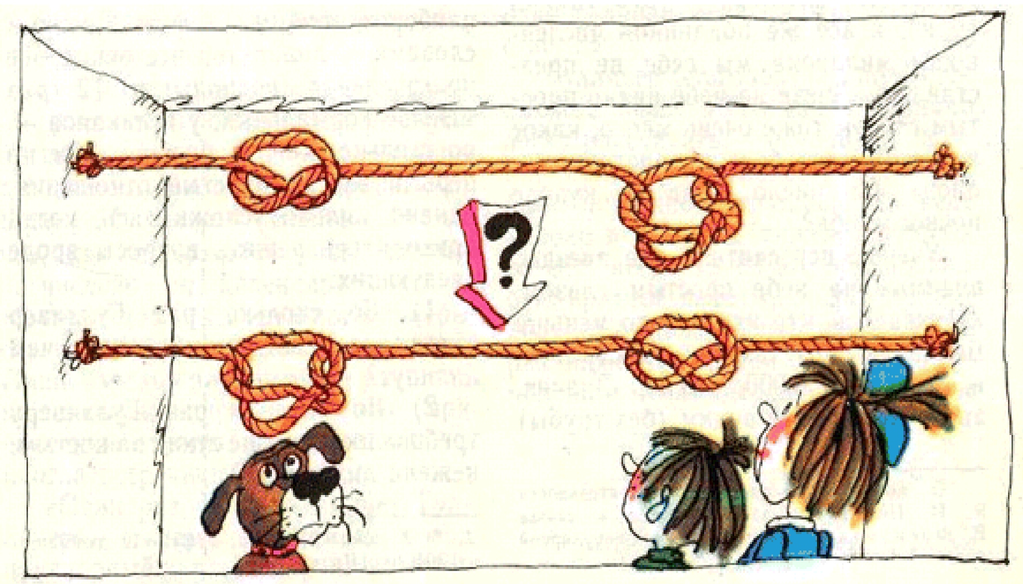
1. Tekislikda l_1, l_2, l_3 to'g'ri chiziqlar berilgan. Tekislik nuqtalarini avval l_1 ga nisbatan so'ng l_2 ga nisbatan, keyin l_3 ga nisbatan undan keyin yana l_1 ga so'ng l_2 ga va nihoyat l_3 ga nisbatan simetrik akslantiramiz. Natija parallel ko'chirishdan iborat bo'lishini ko'rsating.

2. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ – arifmetik progressiya, $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ –geometrik progressiya.

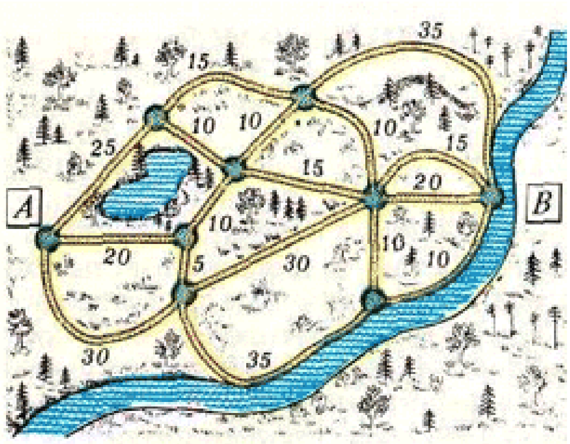
a). $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$ yig'indi uchun formula chiqaring.

b). arifmetik progressiya hadlari 0 dan farqli bo'lsin $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + ... + \frac{b_n}{a_n}$ yig'indi uchun formula chiqaring.

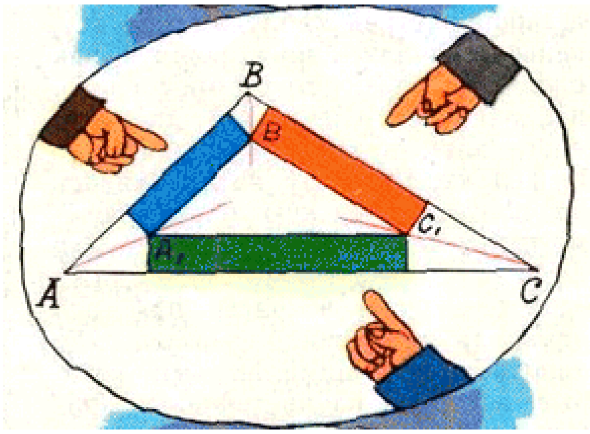
3. ("Kvant" jurnalidan). Xonaning 2 ta qarama-qarshi devorlariga bog'langan cho'ziluvchan arqonda 2 ta tugun bor. Arqonni kesmasdan va yechmasdan turib tugunlar joyini almashtirish mumkinmi? Javobingizni asoslang.



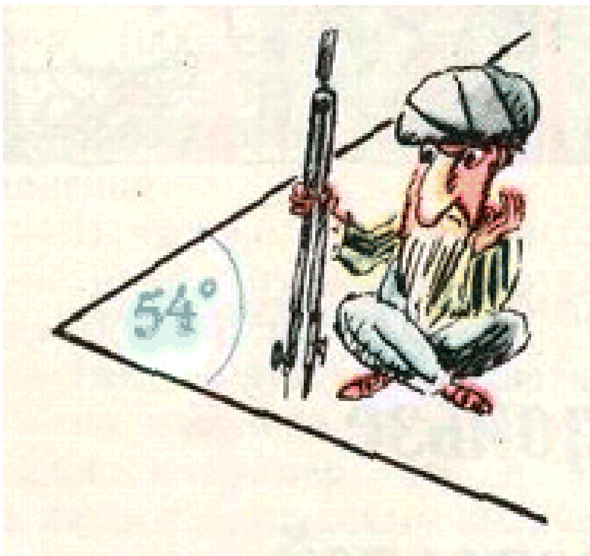
4. (“Kvant” jurnalidan). Bir guruh sayyohlar bir qishloqdan ikkinchi qishloqqa eng qisqa vaqt ichida o‘tishmoqchi (Rasmda har bir yo‘l bo‘yida u uchun ketadigan vaqt yozilgan). Sayyohlar 60 minutda yetib borishi uchun qanday yo‘nalish bo‘ylab harakat qilishi kerak?



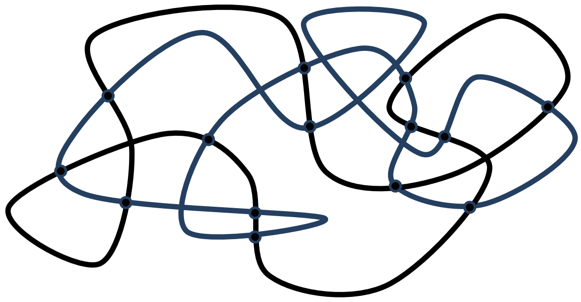
5. (“Kvant” jurnalidan). ABC uchburchakning tomonlariga ichki tomondan to‘g‘ri to‘rtburchaklar shunday yasalganki, bunda to‘g‘ri to‘rtburchakning uchlari juft-jufti bilan uchlari bir-biriga urinadi va $A_1B_1C_1$ uchburchakni hosil qiladi. ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarning mos uchlari orqali o‘tuvchi chiziqlar bir nuqtada kesishishini isbotlang.



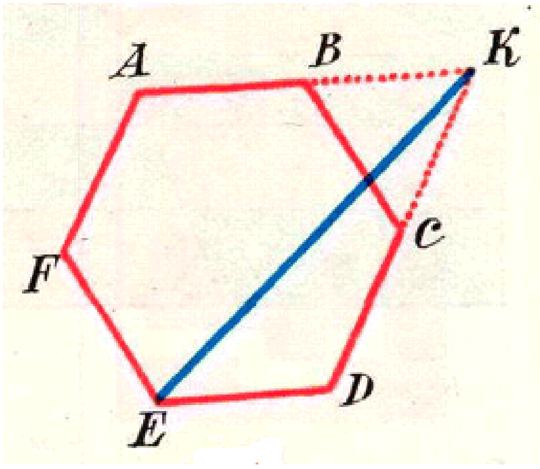
6. (“Kvant” jurnalidan). 54°li burchak berilgan. Faqat sirkuldan foydalanib bu burchakni teng 3 bo‘lakka bo‘ling.



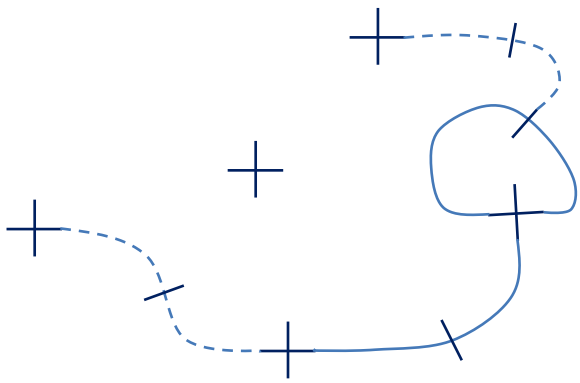
7. (M.Gardner masalasi). Tekislikda ikkita yopiq chiziq chizing. Chiziqlar ixtiyoriy, faqat hech bir nuqtadan ikkitadan ortiq yoy o‘tmaydi. Chiziqlarning biri qora, ikkinchisi ko‘k rangli bo‘lsin. Qora chiziq bilan ko‘k chiziq kesishgan nuqtalar soni doim juft bo‘lishini isbotlang.



8. (“Kvant” jurnalidan). $ABCDEF$ muntazam olti-burchakning AB va CD tomonlari ($|AB| = |CD| = 1$) K nuqtada kesishgunga qadar davom ettirilgan (rasmga qarang). $|EK| = \sqrt{7}$ bo‘lishini isbotlang.



9. Tekislikda 5 ta + belgisi qo‘yilgan. Ularning uchlarini kontakt deb ataymiz. Shunday qilib, har bir + to‘rtta kontaktga ega. Ikki o‘yinchi navbat bilan shunday yurish qiladi: ikkita kontakt chiziq bilan o‘zaro tutashtiriladi-da, o‘rtarog‘iga ko‘ndlalang kesmacha chizib yangi ikkita kontakt yasab qo‘yadi. Bu safar ham chiziqlar o‘zaro kesishmasligi kerak. Kim yurish qilolmay qolsa yutqazadi. Isbotlang: A) o‘yin chekli



qadamda tugaydi; B) avvalgi o'yindan farqli, kim yutishini oldindan aytish mumkin.

10. (Lyuis Kerrol masalasi). Isbotlang: Agar uchta natural son kvadratlari yig'indisi 3 ga ko'paytirilsa, yig'indi to'rtta natural son kvadratlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

11. 1 dan $2n$ gacha natural sonlardan $n+1$ tasi tanlab olingan. Tanlangan sonlardan biri ikkinchisiga bo'linadigani topilishini isbotlang.

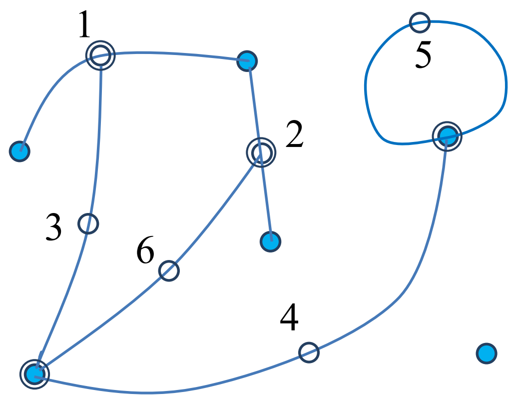
12. ("Kvant" jurnalidan). Muntazam uchburchakni 4 ta muntazam uchburchakchalarga bo'lish qiyin emas. Buning uchun uning tomonlari o'rtalarini kesmalar bilan tutashtirish yetarli. Muntazam uchburchakni 8, 10 yoki 11 ta muntazam uchburchakchalarga ajratish mumkinmi? Umuman olganda qancha sondagi muntazam uchburchakchalarga ajratish mumkin?

13. ("Kvant" jurnalidan). 5 ta qog'oz bo'lagi bor edi. Ulardan bir nechtasini olib, har birini yana 5 ta bo'lakchalarga bo'lindi. Hosil bo'lgan bo'lakchalardan bir nechtasini olib yana 5 ta qismga bo'lindi va shu jarayon davom etdi. Shu ishni davom ettirib qaysidir qadamda 1980 ta qog'oz bo'laklariga ega bo'lish mumkinmi?

14. ("Kvant" jurnalidan). Ixtiyoriy qavariq 7 burchakda 2 ta diogonali mavjudki, bu diogonallar orasidagi burchak 13° dan kichik. Shuni isbotlang.

15. ("Kvant" jurnalidan). Aylana bo'ylab yig'indisi 37 ga teng bo'lgan 3 tadan ko'p natural sonlar yozilgan. Agar ixtiyoriy ketma-ket kelgan 3 ta sonlarning yig'indisi o'zaro teng bo'lsa, yozilgan sonlarni toping.

16. Geometrik o‘yin. Tekislikda bir-bridan ma’lum msofada 6 ta nuqta belgilanadi. So‘ng ikki o‘yinchi navbat bilan shunday yurishlar qiladi: har bir yurishda o‘yin boshida yoki davomida belgilangan ikki nuqta egri chiziq bilan tutashtirilib, hosil bo‘lgan yoyning o‘rtarog‘idan yana bir yangi nuqta belgilaydi. Bunda *a*) chiziqlar o‘zvaro ksishmasligi lozim – o‘tkazilgan ikkita chiziqning umumiy nuqtasi faqat belgilangan nuqtalargina bo‘lishi mumkin; b) har bir belgilangan nuqtadan faqat chtadan ortiq yoy chiqmasligi zarur (rasmda $n = 6$ uchun dastlabki 4 yurish namunasi ko‘rsatilgan – dastlabki nuqtalar ko‘k rangda, keyin qo‘yilganlari – oq, birinchi o‘yinchi qo‘ygan nuqtalar toq raqamli, ikkinchi o‘yinchiniki – juft raqamli; ikki qavat chizilgan nuqtalardan boshqa chiziq o‘tkazib bo‘lmaydi).



A) $n = 4, 5, 6$ bo‘lganda o‘yinda kim yutishini aniqlashga urinib ko‘ring (umumiy holda javob topilmagan). B) Isbotlang: o‘yin har dom chekli qadamda tugaydi.

17. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3x_4 = 2 \\ x_2 + x_1x_3x_4 = 2 \\ x_3 + x_1x_2x_4 = 2 \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 2 \end{cases}$$

18. 6×9 to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi 54 bo‘lakli shokolad bor. Bo‘laklar chuqurchalar bilan ajratilgan. Boshlovchi o‘yinchi shokoladni istalgan chuqurcha bo‘ylab ikki bo‘lakka bo‘ladi. So‘ng ikkinchi o‘yinchi bo‘laklardan birini ikkiga bo‘ladi. O‘yin shu

tartibda davaom etadi – har safar yurish navbati kelgan o‘yinchi hosil bo‘lgan bo‘lak shokoladdan birini olib, chuqurchali chiziq bo‘ylab ikki qismga ajratishi kerak. Kimning yurishidan keyin ikkiga bo‘lish mumkin bo‘lmay qolsa, yani har bir bo‘lak bitta katakchali bo‘lsa, u yutgan hisoblanadi. Bu o‘yinda kim yutadi? Agar shokolad o‘lchami 7×9 bo‘lsa-chi? Bu o‘yinning g‘alatiligini payqadingizmi?

19. “9 ta daraxt haqida masala”. 9 ta daraxt kvadrat shaklda o‘tqazilsa, 8 qatorda uchtadan joylashadi (3 ta eniga, 3 ta bo‘yiga va 2 ta diagonal bo‘ylab). Shu 9 daraxtni ko‘proq qatorda uchtadan joylashadigan qilib o‘tqazish usulini ko‘rsating.

20. Agar domino toshlari o‘rniga o‘yinchilar 2×2 o‘lchamli plastinkalar qo‘ysa, birinchi o‘yinchi doim yuta olishini ko‘rsating.

21. Eshmat kursdoshi Toshmatni o‘n yil o‘tib uchratib qoldi. Ular uzoq gurunglashdi, jumladan shunday savol javob bo‘ldi:

E.: Nechta farzand ko‘rding? T.: Uch o‘g‘il. E.: Yoshlari nechada? T.: Yoshlarini ko‘paytirsa, 36 bo‘ladi. O‘zing topib ko‘r-chi. E.: Yo‘q, bu ma’lumot yetarli emas. T.: Darvoqe, yoshlarini qo‘shsa, sening uyingning raqami chiqadi. E.: Baribir ma’lumot kamlik qiladi. Kattasining ismi Mengli (ya’ni, burnida xoli bor).

E.: Bo‘ldi, bo‘ldi. Etarli.

Toshmatning o‘g‘illari necha yoshda?

22. 8×8 o‘lchamli shaxmat taxtasi ustida domino toshlari bilan shunday o‘yin o‘ynamoqchi: Har yurishda o‘yinchi taxta ustiga bitta domino toshini qo‘yadi. Har bir

domino toshi roppa-rosa ikkkita qo‘shni katakni qoplaydi. Ikkinchi o‘yinchi doim yuta olishini isbotlang.

23. (“Kvant” jurnalidan). Birinchi va oxirgi raqami bir xil bo‘lgan 3 xonali sonni olamiz, masalan 343. Agar birinchi va ikkinchi raqamlar yig‘indisi 7 ga bo‘linsa, u holda bu son 7 ga bo‘linishini isbotlang.

24. (“Kvant” jurnalidan). Shaxmat doskasining qora kataklariga 7 ta filni (eslatib o‘tamiz fil diagonal bo‘ylab harakat qiladi) bir-birini urmaydigan qilib qo‘yish mumkinmi? 8 ta filnichi?

25. (“Kvant” jurnalidan). To‘rt xonali $A=\overline{abcd}$ son ikki xonali B sonning kvadrati. $A'=\overline{dcba}$ son esa B ga karrali qandaydir 2 xonali sonning kvadrati. A va B sonlarni toping.

Mundarija

A.A’zamov, A.Tilavov

CHIN QIZIQARLI MATEMATIKA

III

Akademik litseylar va X, XI sinf o‘quvchilari uchun

Muharrir A.Muxtorov
Musahhih O.Muxtorov
Sahifalovchi D.Akramova

Nashriyot litsenziyasi A1№ 231.16.11.12.
Terishga berildi: 22.08.2018-y.
Bosishga ruxsat etildi: 12.09.2018-y. Ofset qog‘ozi.
Qog‘oz bichimi 84x108 $^{1}/_{32}$
“SchoolBookAC” garniturasi. Ofset usulida bosiladi.
Shartli b.t.:10.75 Adadi:1000 nusxa.

“ADAD PLYUS” MCHJ matbaa
korxonasida chop etildi.
Toshkent sh. Chilonzor tumani,
Bunyodkor ko‘chasi, 28-uy.