A.A’zamov, A.Tilavov

CHIN QIZIQARLI MATEMATIKA

II

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
yuqori sinf o‘quvchilari uchun

Toshkent
“Tafakkur”
2018

KBK 22.1
51
A-94
A’zamov, A. Tilavov, A.
Chin qiziqarli matematika II [Matn] Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining yuqori sinf o‘quvchilari uchun/
A.A’zamov, A.Tilavov. –Toshkent: “Tafakkur”, 2018.– 176 b.

UO‘K 51

Annotatsiya

Matematika – eng jozibali fanlardan biri. Bu, ayniqsa, to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisob-kitob bilan yechilmaydigan, yechim biror o‘ziga xos g‘oya topishni talab qiladigan masalalarda, sonlar va geometrik shakllarning favqulodda xossalarida, mazmuniga nafosat xos bo‘lgan teoremalarda yoki ma’lum va mashhur teoremalarning kutilmagan tarzdagi ixcham isbotlarida ko‘rinadi. Mana shu mavzular chin qiziqarli matematikadan iborat. Taqdim etilayotgan uch kitobdan iborat, ushbu majmua o‘quvchilarga matematikaning ana shu jihatini namoyish etishga mo‘ljallangan.

ISBN 978-9943-24-179-4

So‘zboshi

Maktab matematika fanining maqsadi o‘quvchilarga batartib bilim berish bo‘lgani uchun, darsliklar odatda anchayin bir xil mashqlarni takrorlash uslubida yoziladi, shunga muvofiq matematika darslari ko‘pincha zerikarli yo‘sinda o‘tadi. Holbuki, matematika mavzulari birining ustiga ikkinchisi qalashib, borgan sari chuqurlashib boradi. Bu esa o‘quvchidan avvalgi bir-ikki darsni emas, balki boshlang‘ich sinflardan boshlab o‘rganilgan mavzulardan to o‘tgan darsdagigacha materialni yodda tutishni taqozo etadi. Qiyoslash uchun matematikaga eng yaqin fan bo‘lgan fizikani olaylik. Uning “Molekulyar fizika” bo‘limini yaxshi o‘zlashtirmagan o‘quvchi “Elektr” bo‘limini o‘zlashtira oladi – buning uchun u molekulyar fizika mavzularini yodda tutishi shart emas. Ammo quyi sinfda o‘tilgan oddiy kasrlar bilan bog‘liq amallarni o‘zlashtirmagan yoki unutgan o‘quvchi matematikaning keyingi mavzularidan birortasini ham o‘zlashtira olmaydi.

Endi shunday savol tug‘iladi – qanday qilib hamma darsda o‘tilgan mavzuni yodda saqlash mumkin? Buning maktabda keng qo‘llanadigan usuli – tinmay takrorlab turish. Bu usulga qo‘shimcha yana bir usul yaxshi samara beradi. U ham bo‘lsa, o‘quvchilarni matematikaga qiziqtirishdir. Agar o‘quvchi bu fanga “oshiq-u shaydo” bo‘lib qolsa, kelajakda kuchli matematik bo‘lib yetishuviga yo‘l ochiladi, boshqa soha mutaxassisi bo‘lganda ham, matematik mavzularning tartib-intizomi, qiyin masalani yechish beradigan zavq-u shavq, teoremalarning nafosati hamisha asqotadi. Buning uchun o‘quvchilarni matematikaning jozibasi nimada ekanligi bilan tanishtirish kerak, albatta.

Ko‘pincha qiziqarli matematika deganda yengil-yelpi boshqotirma masalalar tushuniladi. Masalan, “Daraxtning shoxida 10 ta chumchuq qo‘nib turgan edi, ovchi ulardan uchtasini otib tushirdi. Daraxtda nechta chumchuq qoldi?” – bu masala, hech shubhasiz, bolalarda topqirlik, shoshmaslik kabi foydali fazilatlarni tarbiyalashga xizmat qiladi, ammo matematikaga mutlaqo aloqasi yo‘q. Aksincha, “7 ta chumchuq qoldi” degan javob matematikaga yaqin. Maktablardagi uchrashuvlardan birida hamma “bitta ham chumchuq qolmadi” degan javobni ma’qullganda bir o‘quvchi “Yo‘q, 7 ta qolgan bo‘lishi mumkin” deb turib oldi. O‘rtoqlari uning ustidan kulishdi: “Ovchi miltiq o‘tsa, shoxda chumchuq qoladimi?” U esa shunday deb javob berdi: “Daraxt juda ham katta bo‘lgan, uchta chumchuq uning bir tomonida, 7 tasi boshqa tomonida qo‘nib turgan, miltiq esa ovozi chiqmaydigan xilidan bo‘lsa-chi?” Ana shu o‘quvchidan keyinchalik yaxshi matematik yetishib chiqdi.

O‘quvchilar, matematika o‘qituvchilari hamda, umid qilamizki, ota-onalar e’tiboriga havola etilayotgan “Chin qiziqarli matematika” kitoblar turkumi (uni “Qiziqarli chin matematika” yoki “Chin qiziqarli chin matematika” deb o‘qisa ham xato bo‘lmaydi) bu qadimiy va hamisha navqiron fanning ichki nafosatini namoyon qilish maqsadida yozildi. Uning mundarijasini A.A’zamovning 15 yil davomida “Fizika, matematika va informatika” jurnalidagi “Matematika jozibasi” ruknida bosilgan maqolalari tashkil etadi, mazmunan esa “Matematika sayyorasi”, “Букет от математика” kitoblarining davomi deb qabul qilish mumkin. Kitobni asosan A.M.Tilavov nashrga tayyorladi, J.A.Baxramov qo‘lyozma bilan tanishib, o‘z fikr-mulohozalari bilan kitobni sifatli bo‘lishiga muhim hissa qo‘shdi. Mualliflar kitoblar yuzasidan bildiriladigan fikr-mulohazalarni, ayniqsa, uning sahifalarida keltirilgan masalalarning “jozibador” yechimlarini mamnuniyat bilan qabul qiladi.

§ 1. Diofant tenglamalari, Evklid algoritmi va zanjir kasrlar[1]

"Chin qiziqarli matematika" kitobining I qismida ikki sonning eng katta umumiy bo'luvchisini topishga oid Evklid algoritmi Diofant tenglamasini yechib berishini ko'rgan edik. Bu safar Evklid algoritmi va Diofant tenglamasi matematikaning qiziqarli tushunchalaridan biri – zanjir kasrlar bilan bog'liq ekani bilan tanishamiz.

Buning uchun ixtiyoriy ikkita o'zaro tub son olaylik. Masalan, 1395 va 2987. Ular o'zaro tub ekanligidan Evklid algoritmining so'nggi qoldig'i 1 chiqishini bilamiz:

$$2987 = 2\cdot 1395 + 197,$$
$$1395 = 197\cdot 7 + 16,$$
$$197 = 16\cdot 12 + 5,$$
$$16 = 5\cdot 3 + 1.$$

Bu tengliklarni biroz boshqacha qilib yozaylik:

$$\frac{2987}{1395} = 2 + \frac{197}{1395},$$
$$\frac{1395}{197} = 7 + \frac{16}{197},$$
$$\frac{197}{16} = 12 + \frac{5}{16},$$
$$\frac{16}{5} = 3 + \frac{1}{5}.$$

Bu yerda har bir tenglikda o'ngdagi kasr keyingi tenglikning chap tomonidagi kasrning ag'darilganidan iborat. Shuning uchun yuqoridagi tengliklarni boloxonador kasrlar orqali yozish mumkin:

---

[1] FMI, 2006, №2 (R. Hamidov bilan hammualliflikda).

$$\frac{2987}{1395}=2+\frac{1}{\frac{1395}{197}}=2+\frac{1}{7+\frac{16}{197}}.$$

Bu ishni oxirigacha davom ettirsak:

$$\frac{2987}{1395}=2+\frac{1}{7+\frac{1}{12+\frac{1}{3+\frac{1}{5}}}}.$$

Mana shu ko‘rinishdagi ifoda zanjir kasr deb ataladi. Umuman olganda zanjir kasr pog‘onalarining suratlarida 1 turishi shart emas. Lekin matematikada aynan suratlari 1 ga teng zanjir kasrlar asosiy rol o‘ynaydi.

Zanjir kasrning umumiy ko‘rinishi:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}$$

Zarur bo‘lsa, bu kasrni quyidagicha (ya’ni, bir satrda) yozish mumkin:

$$a_0+1/(a_1+1/\{a_2+1/[a_3+\ldots+1/(a_{n-1}+1/a_n)\ldots]\}).$$

Lekin ixchamlik uchun hamma qavslar jamlanib, zanjir kasrni

$$[a_0+1/a_1+1/a_2+1/a_3+\ldots+1/a_{n-1}+1/a_n]$$

ko‘rinishda, hatto

$$[a_0; a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_{n-1},\ a_n] \qquad (1')$$

kabi yozish qabul qilingan. Biz faqat (1) ko‘rinishdan foydalanamiz xolos.

Oddiy kasrni (1) ko‘rinishda yozish amali zanjir kasrga yoyish deb ataladi. Bu amal Evklid algoritmiga teng kuchli ekanini ko‘rdik.

Shunday qilib, har qanday qisqarmas oddiy kasr zanjir kasrga aylantirilishi mumkin. Aksincha, har qanday zanjir kasr qisqarmas oddiy kasrga teng. Bunda a_0 had 0 ga teng bo‘lsa, zanjir kasr to‘g‘ri kasrning yoyilmasi bo‘ladi, agar a_0 musbat bo‘lsa, u noto‘g‘ri kasrga mos keladi.

Zanjir kasrning oxiridan bir necha had tashlab yuborilsa, qisqaroq zanjir hosil bo‘ladi – u berilgan zanjir kasrning munosib kasri deb ataladi. Albatta, berilgan kasrning o‘zini ham munosib kasr deb qarash mumkin. Masalan, ko‘rgan misolimizda munosib kasrlar uning o‘zi hamda:

$$2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{3}}}, \qquad 2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12}}, \qquad 2+\frac{1}{7}, \qquad 2.$$

Ularni oddiy kasrga aylantirib chiqaylik:

$$2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{3}}}=\frac{561}{262}, \qquad 2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12}}=\frac{182}{85}, \qquad 2+\frac{1}{7}=\frac{15}{7}, \qquad 2=2$$

Tabiiy savol tug‘iladi: munosib kasrlarning dastlabki kasrga nima aloqasi bor? Bu savolga javob berish uchun, dastlabki kasrni ham, unga mos munosib kasrlarni ham o‘nli kasrga aylantiraylik:

$$\frac{2987}{1395}=2{,}141218\ldots \text{ (dastlabki kasr)}$$

$$\frac{561}{262}=2{,}141221\ldots \quad \text{(aniqligi } -0.00001)$$

$$\frac{182}{85}=2{,}141176\ldots \quad \text{(aniqligi } +0.0001)$$

$$\frac{15}{7}=2{,}145857\ldots \quad \text{(aniqligi } -0.001)$$

2=2,000000 (aniqligi +0.1)

qiymatlarni taqqoslab, shunday xulosa chiqarish mumkin: berilgan kasrga nisbatan munosib kasrlarning surati va mahraji kichikroq, qiymati esa berilgan kasr qiymatiga juda yaqin. Yuqoridagi jadvalda munosib kasr qiymati berilgan kasrnikidan katta bo‘lsa, aniqlik “–” ishora bilan, kichik bo‘lganda esa “+” ishora bilan ko‘rsatildi. Bu ishoralar almashinib kelayotganini ham eslab qolamiz.

(1) zanjir kasrga mos munosib kasrlar oddiy kasrga aylantirilganda $\frac{p_k}{q_k}$ hosil bo‘lsin. Masalan,

$$\frac{p_0}{q_0}=a_0=\frac{a_0}{1},$$

$$\frac{p_1}{q_1}=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1},$$

$$\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}$$

va hokazo.

Teorema. $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$ bo‘lsin. U holda $k = 2$ dan boshlab

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \tag{4}$$

qonuniyat o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. To‘la induksiya metodini qo‘llaymiz.

Induksiya asosi (3) tengliklarga asosan, $k = 2$ uchun:

$$p_2 = a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2 = a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0 = a_2 p_1 + p_0,$$
$$q_2 = a_1 a_2 + 1 = a_2 q_1 + q_0$$

ya’ni (4) formulalar o‘rinli.

Induksiya qadami: (4) formulalar to‘g‘ri bo‘lsin deb faraz qilib,

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= a_{k+1} p_k + p_{k-1}, \\ q_{k+1} &= a_{k+1} q_k + q_{k-1} \end{aligned} \tag{5}$$

tengliklarni keltirib chiqarishimiz lozim. Shu maqsadda $\frac{p_k}{q_k}$ munosib kasrdan $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ munosib kasr qanday hosil bo‘lishiga e’tibor qarataylik.

Buning uchun $\frac{p_k}{q_k}$ munosib kasrning oxirgi mahraji a_k o‘rniga $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$ ifoda qo‘yilishi lozim. Induksiya faraziga muvofiq

$$\frac{p_k}{q_k}=\frac{a_k p_{k-1}+p_{k-2}}{a_k q_{k-1}+q_{k-2}}. \tag{6}$$

Demak, aytilgan o‘rniga qo‘yishni bajarsak:

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)p_{k-1}+p_{k-2}}{\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)q_{k-1}+q_{k-2}}.$$

Bu tenglikning o‘ng tomonidagi ifodani soddalashtiramiz, bunda qavslarni ochib, (5) tengliklarni inobatga olamiz:

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{p_k+\frac{p_{k-1}}{a_{k+1}}}{q_k+\frac{q_{k-1}}{a_{k+1}}}=\frac{p_k a_{k+1}+p_{k-1}}{q_k a_{k+1}+q_{k-1}}.$$

Bundan, p_k, q_k sonlarining ta’rifiga ko‘ra, talab qilingan (5) tengliklar kelib chiqadi.

(4) formulalar munosib kasrlarni topishda boloxonador zanjir kasrlarni ixchamlab o‘tirmay, balki ularni birin-ketin hisoblashga imkon beradi. Buni maqola boshida olingan misol namunasida ko’ramiz.

$$a_0=2;\quad a_1=7;\quad a_2=12;\quad a_3=3;\quad a_4=5$$

$$p_0=2;\quad p_1=15;\quad p_2=2+12\cdot 15=182;\quad p_3=15+3\cdot 182=561;$$
$$p_4=182+5\cdot 561=2987$$

$$q_0=1;\quad q_1=7;\quad q_2=1+12\cdot 7=85;\quad q_3=7+3\cdot 85=262;$$
$$q_4=85+5\cdot 262=1395$$

Ko‘rinib turibdiki, munosib kasrni zanjir kasr holidan hisoblaganga ko‘ra bu usulda topish ancha qulay. Muhimi, (4) formulalar zanjir kaslarning ahamiyatini ochib beradi hamda ularning xossalarini o‘rganishda nihoyatda muhim. Masalan,

Teorema. $p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}$ ifoda $k=1$ dan boshlab $+1$, -1, $+1$, -1 va hokazo qiymat qabul qiladi.

Isboti. $k=1$ uchun ravshan: $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1)$. $1 - a_0 a_1 = 1$. So‘ng (5) formulalarga asosan,

$$p_{k+1} q_k - q_{k+1} p_k = (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) p_k = -(p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1})$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, agar k ning qiymati 1 ga ortsa yoki kamaysa, $p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}$ ifodaning ishorasi qarama-qarshiga o‘zgarar ekan. Shuni isbotlash talab etilgan edi. Shunday qilib,

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^k.$$

Bu xossadan shunday natija chiqadi:

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{q_{k-1} q_k}$$

Xususan, bu yerda $k = n$ bo‘lsa, $\frac{p_n}{q_n}$ munosib kasr dastlabki $\frac{a}{b}$ kasrdan iborat bo‘ladi. Demak, $\frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1} b}$.

So‘nggi tenglikni mahrajlardan qutqaramiz: $a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^n$

va har ikki tomonini $(-1)^n$ ga ko'paytiramiz. Bunda $(-1)^{2n}=1,\ -(-1)^n=(-1)^{n+1}$ ekanini hisobga olsak, mana bu tenglik hosil bo'ladi:

$$a(-1)^n q_{n-1}-b(-1)^n p_{n-1}=1.$$

Natija. $x=(-1)^n q_{n-1},\ \ y=(-1)^{n+1} p_{n-1}$ sonlari

$$ax+by=1. \tag{7}$$

Diofant tenglamasining hususiy yechimi bo'ladi.

(7) tenglamaning bitta xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, uning boshqa yechimlari qanday topilishini avvalgi suhbatimizda ko'rgan edik. Demak, zanjir kasrlar (7) ko'rinishdagi Diofant tenglamalarini yechib berar ekan.

Zanjir kasrlarning boshqa qiziq va muhim tatbiqlari bilan kelgusi mashg'ulotlarimizda tanishamiz.

§ 2. Zanjir kasrlar, Fibonachchi sonlari va oltin kesim[2]

Avvalgi mavzuda o'quvchilarni zanjir kasrlar bilan tanishtirib, ular Diofant tenglamalarini yechishga qanday qo'llanilishi haqida hikoya qilgan edik. Bu suhbatimizda zanjir kasr zinapoyalarini cheksizlikkacha davom ettiramiz. Shu maqsadda misol tariqasida eng sodda – barcha hadlari 1 ga teng bo'lgan zanjir kasr olamiz (pog'onalar sonining ahamiyati yo'q – qancha uzun bo'lsa, shuncha yaxshi). Uning munosib kasrlari:

---

[2] FMI, 2006, №3.

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{1},\quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{1+\frac{1}{1}},\quad \frac{p_3}{q_3}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}},\ldots$$

$$\frac{p_n}{q_n}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

$$\ldots\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$$

Bu yerda oxirgi munosib kasrni berilgan kasrning o‘zi deb ham qarash mumkin, ayni paytda uni keyingi, pog‘onalari yana ham ko‘proq zanjir kasrlarning munosib kasri deb qarash ham mumkin.

$\frac{p_n}{q_n}$ munosib kasr yoyilmasida roppa-rosa n ta kasr belgisi, demak, shunchadan surat va mahraj qatnashishini ta’kidlaymiz. So‘nggi kasrga diqqat qilsak, mana bu munosabat o‘rinli ekanligini payqash qiyin emas:

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{1+\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}},\text{ yoki, ixchamlangach: }\frac{p_n}{q_n}=\frac{q_{n-1}}{q_{n-1}+p_{n-1}}.$$

Shunday qilib,

$$p_n=q_{n-1},\quad q_n=q_{n-1}+p_{n-1} \qquad (1)$$

Ikkinchi tenglikda n ning qiymatini 1 ga orttiramiz: $q_{n+1} = q_n + p_n$. Bu yerda p_n ning o‘rniga chapdagi tenglikdan qiymatini qo‘ysak:

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1} \tag{2}$$

munosabat hosil qilamiz. Xuddi shu singari

$$p_{n+1} = p_n + p_{n-1} \tag{2'}$$

munosabatni keltirib chiqarish mumkin. Shunday qilib, biz ko‘rayotgan eng sodda zanjir kasr uchun munosib kasrlar suratlari ketma-ketligida ham, mahrajlari ketma-ketligida ham har bir had o‘zidan oldingi ikkita had yig‘indisiga teng bo‘lar ekan.

Bu qoida, albatta, uchinchi haddan boshlab o‘rinli. Dastlabki ikkita hadni esa bevosita topish mumkin: $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}$ tenglikdan $p_1 = q_1 = 1$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$ bo‘lgani uchun $p_2 = 1$, $q_2 = 2$. Demak,

$$\begin{gathered} p_1 = 1, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = p_2 + p_1 = 1+1 = 2, \\ p_4 = p_3 + p_2 = 2+1 = 3, \quad p_5 = p_4 + p_3 = 3+2 = 5, \ \ldots \end{gathered} \tag{3}$$

Yuqorida ta’kidlanganiga ko‘ra mahrajlarni alohida hisoblab o‘tirishga hojat yo‘q.

Endi har ikki ketma-ketlikning dastlabki o‘ntadan hadini yozaylik:

Tartib raqami	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Surat	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	…
Mahraj	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	…

Ko‘rinib turibdiki, surat ham, mahraj ham aslida bitta ketma-ketlikdan iborat deyish mumkin, faqat har bir mahraj keyingi kasrning surati bilan ustma-ust tushadi ((1) tengliklardan chapdagisiga qarang).

(3) ketma-ketlik Fibonachchi sonlari deb ataladi.

Fibonachchi – Italiyaning Piza shahridan bo‘lgan matematik Leonardoning taxallusi (“Bonachchining o‘g‘li” degani). U 1180-1240 yillarda yashagan, Italiyadan Yaqin Sharq mamlakatlariga sayohat qilib, arab tilini va matematikani o‘rgangan. Ko‘pgina kitoblar, jumladan, Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning “Algebra”sini olib qaytgan va 1202 yilda o‘zining “Liber abaci” (“Abak kitobi”) nomli asarini yozgan. Unda matematika bo‘yicha muallifga ma’lum bo‘lgan ma’lumotlar jamlangan.

Leonardo qadimgi Yunon matematiklaridan keyin birinchi bo‘lib ilmiy yangiliklar qo‘lga kiritgan evropalik olim sanaladi. Fibonachchi, jumladan, o‘z kitobida mana bu masalani qaragan:

Dehqon bir juft yangi tug‘ilgan quyon sotib olib, boqa boshladi. Quyonlar ikki oylikdan boshlab ko‘payishga kiradi va shundan so‘ng har oyda bir juft quyon yana bir juftga ko‘payadi. Bir yil o‘tgach, dehqon necha juft quyonga ega bo‘ladi?

Yechish. 1-oyda shartga ko‘ra, quyonlar – 1 juft;

2-oyda ham (hali voyaga yetmagan) – 1 juft;

3-oyda bir juftga ko‘payadi – 2 juft,

4-oyda yana bir juft qo‘shiladi – 3 juft,

5-oyda dastlabki juftlik bilan, 3-oyda tug‘ilgan quyonlar ko‘payib, 5 juft bo‘ladi;

6-oyda dastlabki hamda 3- va 4- oyda tug‘ilgan quyonlar ko‘payadi, demak, 8 juft bo‘ladi va h.k.

n-oyda quyonlar u_n juft bo‘lsin. Demak, xuddi shu belgilashga ko‘ra, ($n-1$)-oyda u_{n-1} juft quyon bo‘lgan va aynan ular ($n+1$)-oyda bir juftdan avlod beradi. Demak,

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}. \qquad (3)$$

Bundan ko‘rinadiki, Fibonachchi dehqonining quyonlari eng sodda zanjir kasr munosib kasrlarining suratlari, ya’ni Fibonachchi sonlari bo‘yicha ko‘payar ekan. Xususan, masala javobi

$$u_{12} = u_{11} + u_{10} = 233 + 144 = 377 \text{ juft.}$$

Fibonachchi sonlari ko‘pdan-ko‘p g‘aroyib xossalarga ega. Ularda matematikaning turli masalalarida kutilmaganda chiqib turish xususiyati ham bor. Shuning uchun bo‘lsa kerak, AQSh va Kanadada 1963 yildan maxsus “The Fibonacci Quarterly” jurnali chop etib kelinadi (har yili 4 ta son). Keyinroq “Fibonachchishunoslar” jamiyati tuzilgan, 1984 yildan Fibonachchi sonlari bilan bog‘liq yangiliklarga bag‘ishlangan ilmiy anjumanlar o‘tkazib kelinadi.

Fibonachchi sonlarining o‘zi bir necha alohida suhbat mavzusi bo‘lishga loyiq, shuning uchun batafsilroq ma’lumotlarni keyinga qoldirib, hozircha esa ularning son-sanoqsiz xossalaridan ayrimlarini keltirish bilan cheklanamiz.

1-xossa. Avvalgi maqolada munosib kasrlarning surat va mahrajlari uchun $p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^k$. formula chiqarilgan edi. Unda $p_k = u_k$ deb olsak, yuqorida ta’kidlanganiga ko‘ra, $q_{k\text{-}1} = u_k$, shuning uchun

$$u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n. \qquad (4)$$

2-xossa. $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$.

Mashq. Xuddi shunga o‘xshash juft indeksli Fibonachchi sonlari yig‘indisi uchun formula chiqaring. Keyin dastlabki n ta Fibonachchi sonlari yig‘indisini toping.

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n$ yig‘indi nimaga teng?

3-xossa. $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$.

4-xossa. $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m-1}$.

5-xossa. Agar n soni m ga bo‘linsa, n-inchi Fibonachchi soni m-inchi Fibonachchi soniga bo‘linadi. Va aksincha, n soni m ga bo‘linmasa, u_n ham u_m ga bo‘linmaydi.

Xususan, har uchinchi Fibonachchi soni – juft (chunki, $u_3 = 2$), har to‘rtinchi Fibonachchi soni 3 ga bo‘linadi (chunki, $u_4 = 3$), har beshinchi Fibonachchi soni 5 ga bo‘linadi va h.k.

6-xossa. $(u_n,\ u_m) = u_{(n,\ m)}$. (Bu yerda (a, b) bilan har doimgiday a va b sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi belgilangan.)

7-xossa. (Lukas formulasi):

$$u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_{2n+1}.$$

8-xossa. Quyidagi formulalar o ‘rinli:

$$u_{2k}^2 = u_{2k-1} \cdot u_{2k+1} - 1,$$
$$u_{2k+1}^2 = u_{2k} \cdot u_{2k+2} + 1.$$

9-xossa. Arifmetik uchburchakni mana bu ko‘rinishda yozaylik.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
1												
	1	1										
		1	2	1								
			1	3	3	1						
				1	4	6	4	1				
					1	5	10	10	5	1		
						1	6	15	21	15	6	
…												
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	…

Shunda n-ustundagi sonlar yig‘indisi u_n bo‘ladi.

10-xossa. Karmishel teoremasi: $u_1=1$, $u_2=1$, $u_6=8$ va $u_{12}=144$ tashqari har bir Fibonachchi soni oldingi Fibonachchi sonlari bo‘linmaydigan tub ko‘paytuvchiga ega. Masalan,

$$u_3=2,\ \ u_4=3,\ \ u_5=5,\ \ u_6=8,\ \ u_7=13,\ \ u_8=21=3\cdot 7,$$
$$u_9=34=2\cdot 17,\ \ u_{10}=55,\ \ u_{11}=89,\ \ u_{12}=144,\ \ldots$$

11-xossa. Bine formulasi:

$$u_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

12-xossa. (Bine formulasining natijasi).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\gamma$$

– bu yerda γ bilan oltin kesim nisbati belgilangan.

Mana shu yerda diqqatni jamlaylik: bu maqola boshida olingan, ya’ni eng sodda zanjir kasr munosib kasrining surati, oldingi munosib kasrning mahraji edi. Demak, hamma hadi 1 ga teng zanjir kasrning munosib kasrlari borgan sari γ ga yaqinlashib borar ekan. Bunday holda matematiklar zanjir kasrni cheksizlikkacha davom ettirib, uzluksiz kasr deb atashadi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}=\gamma.$$

Bu tenglikni biroz boshqacha usulda hosil qilish ham mumkin. Oltin kesim uchun $\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ formulani eslaylik. Chap tomondagi kasr ustida ayniy almashtirishlar qilamiz:

$$\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}=\frac{1}{\frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{1}{1+\gamma}.$$

Demak, chap tomondagi ifodada γ ning oʻrniga yana $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ qiymatni qoʻyishimiz mumkin va h.k.

Shunday qilib, oltin kesim nisbati boʻlgan γ soni barcha sonlar ichida yana bir, bu safar endi betakror xossasi bilan ajralib turar ekan: u eng sodda uzluksiz kasrga yoyiladi.

Qiyoslash uchun, uzluksiz kasrga yana bir misol keltiraylik:

$$\sqrt{3}-1=\frac{3-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}.$$

Demak, chap tomondagi kasrda $\sqrt{3}-1$ oʻrniga shu kasrning oʻzini qoʻyish mumkin:

$$\sqrt{3}-1=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}}}.$$

Bu ish cheksiz marta takrorlansa,

$$\sqrt{3}-1=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}$$

uzluksiz kasr hosil bo‘ladi.

§ 3. Ko‘pburchakning muntazamligi[3]

Bu maqolada ko‘pburchak deganda faqat qavariq ko‘pburchakni tushunamiz. Ta’rifga ko‘ra, muntazam ko‘pburchak – bu quyidagi xossaga ega bo‘lgan ko‘pburchakdir:

$a\alpha$ **-xossa**: ko‘pburchakning barcha tomonlari o‘zaro teng va barcha burchaklari o‘zaro teng.

Bu xossadan, birinchi navbatda, quyidagi natija kelib chiqadi: muntazam n-burchakning har bir burchagi $\frac{(n-2)180^0}{n}$ ga, markaziy burchagi esa $\varphi=\frac{360^0}{n}$ ga teng.

To‘g‘risini aytganda, keltirilgan ta’rifdan bu toifa ko‘pburchaklar nima uchun muntazam deb atalishi u qadar yaqqol ko‘rinmaydi: tomonlari ham, burchaklari ham o‘zaro teng bo‘lsa bo‘libdi-da, faqat shuning o‘zi ko‘pburchakni muntazam deb atash uchun kifoyami? Masalan, fazodagi ko‘pyoqlikning muntazamligi uchun uning barcha qirralari o‘zaro teng va barcha yassi burchaklari o‘zaro teng bo‘lishi yetarli emas-ku?

Bu savolga javob berish uchun yuqoridagi ta’rifga asos qilib olingan $a\alpha$-xossa bilan bir qatorda quyidagi xossalarni ham qaraymiz:

---

[3] FMI, 2007, №2.

$R\alpha$ **-xossa:** ko‘pburchak aylanaga ichki chizilgan va barcha tomonlari o‘zaro teng.

Qiyoslash uchun aytadigan bo‘lsak, ko‘pburchak aylanaga ichki chizilgan va barcha burchaklari tengligidan uning muntazam bo‘lishi kelib chiqmaydi – to‘g‘ri to‘rtburchak bunga misol bo‘ladi.

$r\alpha$ **-xossa:** ko‘pburchak aylanaga tashqi chizilgan va barcha burchaklari o‘zaro teng.

Agar bu tasdiqda “barcha burchaklari” o‘rniga “barcha tomonlari” olinsa, xossa o‘rinli bo‘lmaydi: romb aylanaga tashqi chizilgan va barcha tomoni o‘zaro teng, ammo muntazam emas.

aT **-xossa:** ko‘pburchakning barcha tomonlari teng va o‘rta perpendikulyarlari bir nuqtada kesishadi.

αb **-xossa:** ko‘pburchakning barcha ichki burchaklari teng va bissektrisalari bir nuqtada kesishadi.

Ko‘pburchakning biror nuqtasidan uning tomonlariga (jumladan, zarur holda tomonning davomiga) tushirilgan perpendikulyarni shu nuqtaga nisbatan **apofema** deb ataymiz.

$m\beta$ **-xossa:** ko‘pburchakning biror nuqtasiga nisbatan barcha apofemalar teng va qo‘shni apofemalar orasidagi burchaklar bir xil.

Ko‘pburchakning biror nuqtasini uning uchlari bilan tutashtiruvchi kesmani shu nuqtaga nisbatan **radiant** deb ataymiz.

$\rho\gamma$ **-xossa:** ko‘pburchakning biror nuqtaga nisbatan barcha radiantlari o‘zaro teng va qo‘shni radiantlar orasidagi burchaklar bir xil.

$m\rho$ **-xossa:** biror nuqtaga nisbatan ko‘pburchakning barcha apofemalari o‘zaro teng va barcha radiantlari o‘zaro teng.

Bu tasdiqni bizga yaxshi tanish tushunchalar orqali ifodalash ham o‘ng‘ay:

Rr **-xossa:** ko‘pburchakka tashqi va ichki chizilgan aylanalar mavjud va ularning markazlari ustma-ust tushadi.

Π **-xossa:** ko‘pburchak biror nuqta atrofida $\phi = \dfrac{360^0}{n}$ burchakka burilsa, u o‘zi bilan ustma-ust tushadi, bu yerda n-ko‘pburchak burchaklari soni.

S **-xossa:** ko‘pburchak necha burchakli bo‘lsa, shuncha simmetriya o‘qiga ega.

Bu xossalarni nomlashda eslab qolish qulay bo‘lishi uchun quyidagi belgilashlar qabul qilindi:

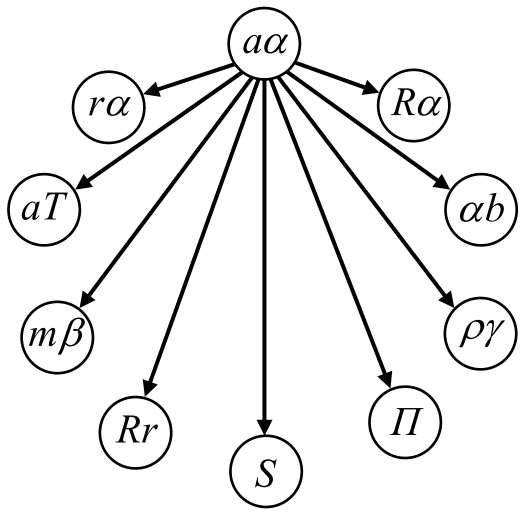
a – ko‘pburchak tomonlarining tengligi;
α – ko‘pburchak ichki burchaklarining tengligi;
r – ko‘pburchakka ichki aylana chizish mumkinligi;
R – ko‘pburchakka tashqi aylana chizish mumkinligi;
T – ko‘pburchak tomonlariga o‘rta perpendikulyarlarning o‘zaro tengligi;
m – apofemalar tengligi;
ρ – radiantlar tengligi;
Rr – ko‘pburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalar markazlarining ustma-ust tushishi.

Endi quyida keltirilgan teorema burchaklari ham, tomonlari ham o‘zaro teng qavariq ko‘pburchak chindan muntazam deb atalishi mumkinligini ko‘rsatadi.

Teorema. Yuqorida sanalgan xossalarning barchasi o‘zaro teng kuchli.

Bu ixchamgina teoremada aslida 45 ta tasdiq jam bo‘lgan, shuning uchun biz uni “katta teorema” deb ataymiz. Chunonchi, o‘rta maktab darsliklarida muntazam ko‘pburchakka ichki va tashqi chizilgan aylana yasash mumkinligi isbotlanadi. Ana shu ikki aylana markazlari ustma-ust tushadi – bu xossa teng yonli uchburchak balandligi uning apofemasi bo‘lishidan kelib chiqadi.

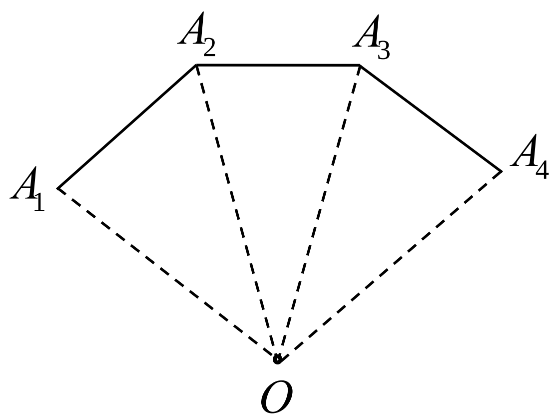
Demak, yuqorida tilga olingan 45 tasdiqdan biri – $a\alpha \Rightarrow Rr$ “teoremacha” o‘rinli ekan.



Shu singari, $a\alpha$ xossa muntazam ko‘pburchak ta’rifi bo‘lgani uchun, u haqidagi har qanday xossa bu xossadan kelib chiqishi kerak, albatta. Jumladan, mana bu diagrammada tasvirlangan 9 ta tasdiq o‘rinli:

Mashq. Qolgan sakkizta tasdiqni isbotlang.

Yana yuqoridagi katta teoremaga qaytaylik. Uning isbotini nihoyasiga yetkazish uchun diagrammadagi “soat mil”larining teskarisiga mos to‘qqizta tasdiq ham o‘rinli bo‘lishini isbotlaymiz. Bunda, mushohadalarni ko‘pburchakning ketma-ket to‘rtta qo‘shni A_1, A_2, A_3, A_4 uchi va $A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4$ tomonlarga nisbatan yuritish kifoya – ular ko‘pburchakning ixtiyoriy uchidan boshlanishi mumkin.

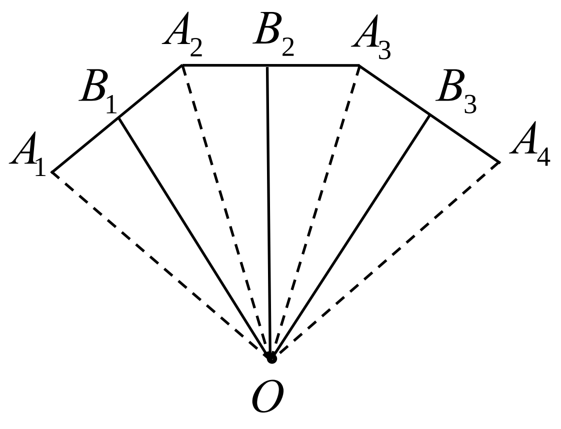


$ra \Rightarrow a\alpha$. Shartga ko‘ra, $A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4$ tomonlar o‘zaro teng vatarlar. Ko‘pburchakka ichki chizilgan aylana markazi O bo‘lsa, OA_1A_2, OA_2A_3 va OA_3A_4 uchburchaklar teng va teng yonli. Bundan $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, ko‘pburchakning barcha burchaklari ham o‘zaro teng ekan.

$R\alpha \Rightarrow ra$. Bu safar O nuqta ko‘pburchakka tashqi chizilgan aylana markazi, B_1, B_2, B_3, mos ravishda, A_1A_2,

A_2A_3, A_3A_4 tomonlarning bu aylanaga urinish nuqtalari bo‘lsin. Demak, $OB_1 = OB_2 = OB_3$ – ichki chizilgan aylana radiuslari sifatida bu kesmalar teng.

Bundan tashqari, bir nuqtadan aylanaga o‘tkazilgan urinmalar kesmalari tengligiga ko‘ra, $B_1A_2 = A_2B_2$. Demak, $\Delta OB_1A_2 = \Delta OB_2A_2$. Natijada, OA_2 kesma ichki A_2 burchakning bissektrisasi ekan. Xuddi shu singari,

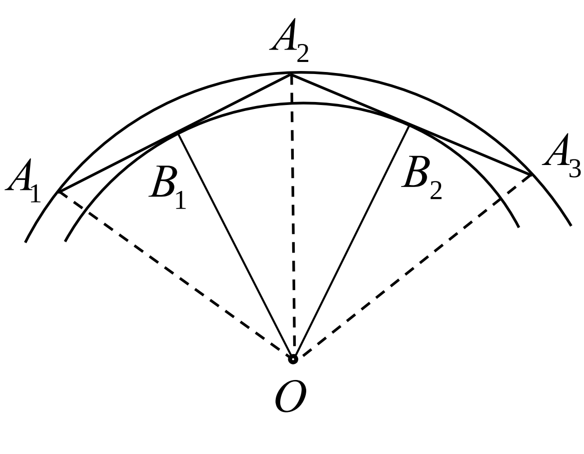


OA_3 kesma ichki A_3 burchakning bissektrisasidir. Bu burchaklar teng bo‘lgani uchun $\Delta OA_2B_2 = \Delta OB_2A_3$. Xususan, $A_2B_2 = B_2A_3$. Bundan esa ko‘pburchakning barcha tomonlari tengligi kelib chiqadi.

$aT \Rightarrow ra$ – bu tasdiqning isboti ravshan.

$\alpha b \Rightarrow ra$ – bu tasdiq ham aslida $R\alpha \Rightarrow ra$ tasdiq bilan bir paytda isbotlandi.

$Rr \Rightarrow a\alpha$ – ko‘pburchakka markazlari ustma-ust tushadigan ichki va tashqi aylana yasash mumkin bo‘lsin. Ichki aylanaga urinish nuqtalarini B_1, B_2, B_3, ..., B_n, umumiy markazni esa O bilan belgilasak, ΔOA_1B_1, ΔOB_1A_2, ΔOA_2B_2, ΔOB_2A_3 uchburchaklar o‘zaro teng, chunki ular to‘g‘ri burchakli hamda bittadan katetlari va gipotenuzalari teng. Bundan darhol $a\alpha$-xossa kelib chiqadi.

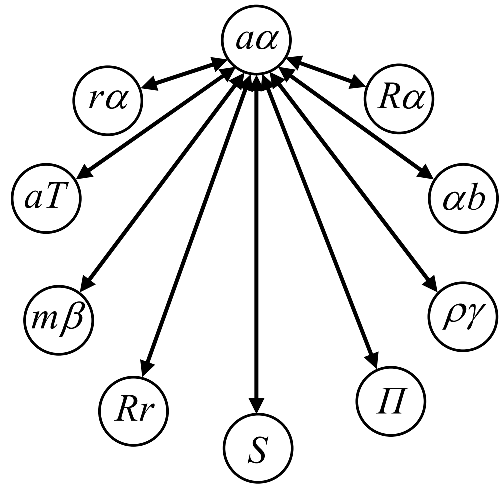


$m\rho \Rightarrow a\alpha$ – Berilgan $m\rho$ xossada apofema va radiantlar O nuqtaga nisbatan olingan bo‘lsin. U holda bir uchi O nuqta, yana bir uchi A harfi bilan belgilangan (radiant uchi), uchinchisi esa V harfi bilan belgilangan (apofema tushgan nuqta) barcha uchburchaklar to‘g‘ri burchakli va o‘zaro teng ekanligi, bundan esa $a\alpha$ xossa kelib chiqadi.

$m\beta \Rightarrow a\alpha$, $\rho\gamma \Rightarrow a\alpha$ – bu tasdiqlar ham xuddi shu singari isbotlanadi.

Bundan tashqari, m xossadan qaralayotgan ko‘pburchak O markazli aylanaga tashqi chizilgani, ρ xossadan esa xuddi shu markazli aylanaga ichki chizilgani kelib chiqadi. Ya’ni, $m\rho \Leftrightarrow Rr$. Shuning uchun $m\rho$ xossa diagrammada aks ettirilmadi.

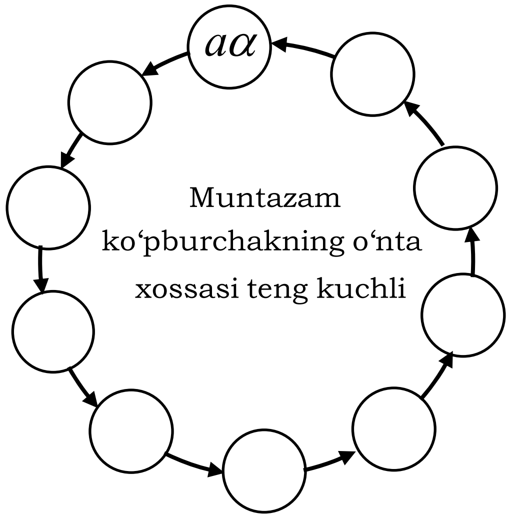
Π – xossadan ko‘pburchakning muntazamligi kelib chiqishi ham ravshan: berilgan n-burchak biror O nuqta atrofida $\varphi = \dfrac{360^\circ}{n}$ burchakka burilganda har bir tomoni qaysidir tomon bilan ustma-ust tushishi kerak. Xuddi shu singari, bu hodisa ko‘pburchakni O nuqta atrofida 2φ, 3φ, ..., $(n-1)\varphi$ burchaklarga burganda ham ro‘y berishi shart. O nuqta ko‘pburchak tomonida yotishi mumkin emas. Ko‘pburchak tomonlari soni n esa 3 dan katta yoki teng. Bundan biror tomonni burganda u bilan ustma-ust tushadigan tomonlarning hammasi bir xilligi kelib chiqadi. Demak, ko‘pburchakning barcha tomonlari o‘zaro teng va qo‘shni tomonlar orasidagi burchaklar, ya’ni ko‘pburchakning ichki burchaklari ham o‘zaro teng. “Katta teorema” isbotini yakunlash



uchun $S \Rightarrow a\alpha$ tasdiqni isbotlash qoldi. U sodda emas hamda simmetriya xossalarini alohida o'rganishni talab etadi. Shuning uchun uni kelgusiga qoldirib turamiz. Shu shart bilan biz yuqoridagi diagrammani yuqoridagicha tasvirlashimiz mumkin.

Bu diagrammada hammasi bo'lib 18 ta bir tomonlama tasdiq ifodalangan. Lekin "katta teorema"ni bunga qaraganda ixchamroq usul bilan ham isbotlash mumkin.

Mashq. "Katta teorema"ni mana bunday diagramma asosida isbotlang:



Bunda avval bo'sh doirachalarga tegishli xossalarni eng qulay tartibda, ya'ni isbot imkoni boricha oson bo'ladigan qilib joylab olish ham mashq tarkibiga kiradi.

§ 4. Eng simmetrik ko'pburchak[4]

Avvalgi maqolamizda qavariq n burchak muntazam bo'lishining 10 ta alomatini keltirib, ulardan to'qqiztasini isbotlagan edik. Bugun endi o'ninchi xossa ustida batafsil to'xtaymiz:

To'g'ri teorema. Muntazam n burchak roppa-rosa n ta simmetriya o'qiga ega.

Isbot. Muntazam ko'pburchakka ichki va tashqi aylana chizish mumkinligini hamda ularning o va O markazlari ustma-ust tushishini bilamiz (§3 ga qarang). Bu O nuqtani muntazam ko'pburchakning markazi deb atash joiz. Muntazam ko'pburchakning simmetriya o'qi uning

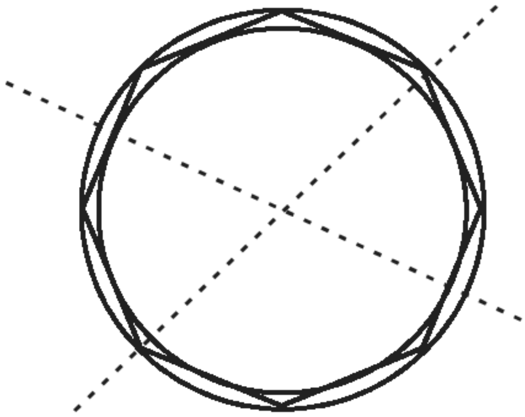
[4] FMI, 2007, №3.

markazidan o‘tishi shart. (Aks holda, masalan, bitta ko‘pburchakka ikkita tashqi chizilgan aylana mavjud bo‘lib qolar edi (1-rasm).)

Xo‘sh, α simmetriya o‘qi ko‘pburchakni qanday nuqtalarda kesib o‘tadi? Bu yerda ikki hol bo‘lishi mumkin.

1-hol. α o‘q ko‘pburchakning uchidan o‘tadi.

2-hol. α o‘q ko‘pburchakning uchidan o‘tmaydi, demak, biror tomonidan o‘tadi. Bu holda α simmetriya o‘qi ana shu tomonning o‘rta perpendikulyari bo‘lishi lozim. Bu ravshan: bu tomonning har ikki uchi α o‘qqa nisbatan simmetrik.



1-rasm.

Yana bir kuzatuv – simmetriya o‘qining har ikki tomonida bir xil miqdorda uchlar yotadi.

Bu xossalarga asoslanib, muntazam ko‘pburchakning simmetriya o‘qlarini sanab chiqa olamiz. Avval n toq son bo‘lgan holni qaraylik. Bu holda simetriya o‘qi ko‘pburchakning bir uchidan hamda unga qarama-qarshi tomonining o‘rtasidan o‘tadi. Bunday to‘g‘ri chiziqlar esa roppa-rosa n ta – ular chindan ham simmetriya o‘qlari bo‘lishini isbotlash qiyin emas.

Endi n juft son bo‘lsin. U holda simmetriya o‘qi ko‘pburchakning uchidan o‘tsa, unga qarama-qarshi uchidan ham o‘tishi shart – bunday to‘g‘ri chiziqlar $\frac{n}{2}$ ta. Xuddi shu singari, simmetriya o‘qi biror tomon o‘rtasidan o‘tsa, qarama-qarshi tomonning ham o‘rtasidan o‘tishi lozim – bunday to‘g‘ri chiziqlar ham $\frac{n}{2}$ ta.

Har ikki toifa to‘g‘ri chiziqlarning har biri chindan muntazam ko‘pburchakning simmetriya o‘qlari bo‘lishini ko‘rsatish bu safar ham qiyinchilik tug‘dirmaydi. Teorema isbotlandi.

Bu maqolaning asosiy maqsadi yuqoridagi teoremaga teskari teoremani isbotlash:

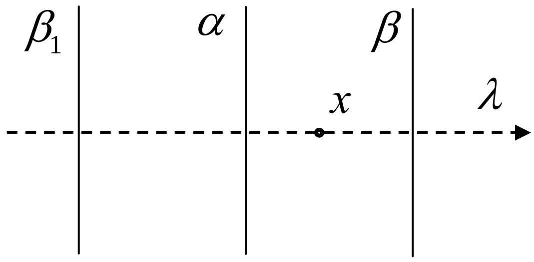
Teorema. Agar n burchak roppa-rosa n ta simmetriya o‘qiga ega bo‘lsa, u muntazam n burchak bo‘ladi.

Isbotlash usuli simmetriyalarning bir necha muhim xossasiga asoslanadi. Dastavval, tekislikning α o‘qqa nisbatan simmetrik almashtirishini (qisqacha, simmetriyasini) S_α bilan belgilashga kelishamiz. Bu almashtirishda x nuqtaning aksini $S_\alpha x$ bilan, X shakl akslanadigan shaklni esa $S_\alpha X$ bilan belgilaymiz. O‘qqa nisbatan simmetriya ta’rifiga ko‘ra, yo x nuqtaning o‘zi o‘qda yotadi va bu holda $S_\alpha x = x$ bo‘ladi, yoki α o‘q uchlari x va $S_\alpha x$ nuqtalardan iborat kesmaning o‘rta perpendikulyari bo‘ladi. Bundan tashqari, X shakl α o‘qqa nisbatan simmetrikligi $S_\alpha X = X$ tenglik bilan ifodalanadi.

1-xossa. Tekislikda berilgan X shakl o‘zaro ikkita parallel α va β simmetriya o‘qiga ega bo‘lsin. β to‘g‘ri chiziqning α ga nisbatan simmetrik aksini β_1 bilan belgilaylik: $\beta_1 = S_\alpha \beta$. U holda β_1 ham X shaklning simmetriya o‘qi bo‘ladi.

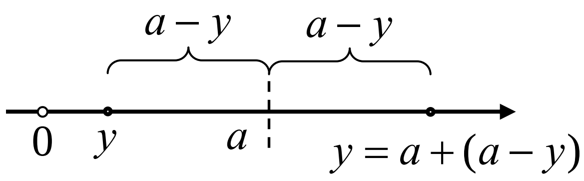
Haqiqatan, X shaklning ixtiyoriy x nuqtasini β_1 o‘qqa nisbatan simmetrik akslantirishda x' nuqta hosil bo‘lsin. Agar x nuqta avval α o‘qqa, so‘ng β o‘qqa va nihoyat yana α o‘qqa nisbatan akslantirilsa, aynan x' nuqta hosil bo‘lar ekan. Bunga ishonch hosil qilish uchun x nuqtadan α ga perpendikulyar λ to‘g‘ri chiziq o‘tkazib, unda koordinatalar sistemasini kiritamiz. Uning boshi sifatida λ bilan α kesishgan nuqtani olamiz (o‘lchov birligining ahamiyati yo‘q).

Natijada tekislikdagi x nuqtaning α, β, β_1 o‘qlarga nisbatan simmetriya masalasi λ to‘g‘ri chiziqda nuqtaga nisbatan simmetriya masalasiga kelib qoladi (2-rasm).



2-rasm.

Son o‘qidagi nuqta bilan uning koordinatasini bir xil belgilash mumkin. Son o‘qidagi ixtiyoriy y nuqtaning 0 nuqtaga nisbatan simmetrigi $-y$ bo‘lishi ravshan, boshqa a nuqtaga nisbatan simmetrigi ham oson topiladi (3-rasm).



3-rasm.

$$y' = 2a - y. \qquad (*)$$

Endi 1-xossani bevosita hisoblash yo‘li bilan isbotlay olamiz: x nuqtani avval 0 ga nisbatan simmetrik akslantirsak, $-x$ hosil bo‘ladi. So‘ng $-x$ ni a ga nisbatan akslantirsak, ya’ni (*) formulada $y=-x$ deb olsak, $2a+x$ hosil bo‘ladi. Nihoyat, bu nuqtani yana 0 ga nisbatan akslantirsak, $-(2a+x)$ hosil bo‘ladi.

Boshqa tomondan, x nuqtani $-a$ ga nisbatan simmetrigi $2(-a)-x$ bo‘ladi (bu safar (*) formulada a o‘rniga $-a$ olish kerak).

Shunday qilib, har ikki yo‘sinda ham bir nuqta hosil qilindi.

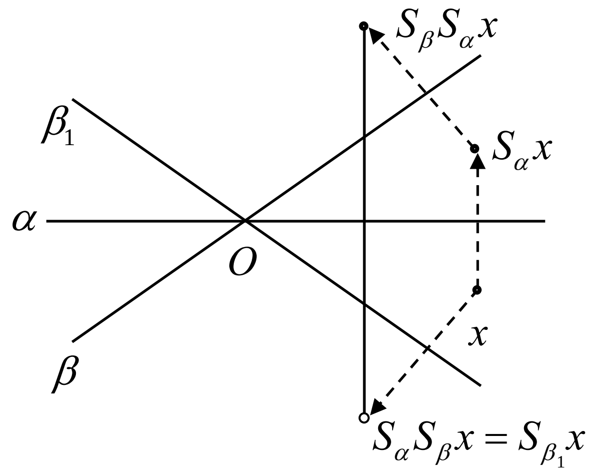
Natija. Agar tekislikda biror shakl ikkita o‘zaro parallel o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lsa, u cheksiz ko‘p simmetriya o‘qiga ega bo‘ladi: dastlabki ikki simmetriya o‘qi orasidagi masofa d bo‘lsa, ularga parallel va bir-biridan d masofada o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar shu shaklning simmetriya o‘qlaridan iborat.

Natijadan natija. Ko‘pburchak simmetriya o‘qlari parallel bo‘lishi mumkin emas.

Shunday qilib, agar ko‘pburchak, aytaylik, α va β o‘qlarga nisbatan simmetrik bo‘lsa, ular albatta kesishadi. Shuning uchun maqolaning davomida simmetriya o‘qlari deganda faqat o‘zaro kesishuvchi o‘qlarni ko‘zda tutamiz.

2-xossa. Tekislikda berilgan X shakl o‘zaro kesishuvchi α va β simmetriya o‘qiga ega bo‘lsin. β to‘g‘ri chiziqning α ga nisbatan simmetrik aksini β_1 bilan belgilaylik. U holda β_1 ham X shaklning simmetriya o‘qi bo‘ladi.

Simmetriya o‘qlarining kesishish nuqtasi O, orasidagi burchak φ bo‘lsin. X shaklning ixtiyoriy x nuqtasini olib, uni α, β va α tartibda simmetrik akslantiramiz: (4-rasm). Natija x nuqtani β_1 o‘qqa nisbatan simmetrik akslantirish bilan ustma-ust tushishini ko‘rish qiyin emas: α o‘q kesmalarning o‘rta perpendikulyarlaridan iborat bo‘lgani uchun, teng yonli trapetsiya hosil qiladi, demak, $[X, S_{\beta_1}x]$ kesma α o‘qqa nisbatan $[S_\alpha x,\ S_\beta S_\alpha x]$ kesmaning simmetrigi bo‘ladi.



4-rasm.

Natija. Tekislikdagi X shakl ikkita α va β kesishuvchi simmetriya o‘qiga ega bo‘lsin. U holda yo bu o‘qlar o‘zaro tik yoki X yana boshqa simmetriya o‘qlariga ega bo‘ladi.

Natijani aniqlashtiramiz. O‘qlar orasidagi burchak φ bo‘lsin. Ravshanki, $0< \varphi \leq 90°$ deb hisoblash mumkin. Agar $\varphi = 90°$, ya’ni α va β o‘zaro tik bo‘lsa, β_1 simmetriya o‘qi β bilan ustma-ust tushadi va yangi simmetriya o‘qi hosil bo‘lmaydi.

Endi $\varphi = \dfrac{180^\circ}{k}$ va $k \geq 3$ bo‘lgan holni qaraylik. U holda β_1 simmetriya o‘qi β bilan $2\varphi = \dfrac{180^\circ}{2k}$ burchak hosil qiladi. α o‘qni β_1 o‘qqa nisbatan simmetrigini β_2 deb belgilasak, u β bilan $3\varphi = \dfrac{180^\circ}{3k}$ burchak hosil qiladi va hokazo. Bu jarayonni davom ettirib, β o‘q bilan $\varphi, 2\varphi, ..., (k-1)\varphi$ burchaklar hosil qilgan $k-1$ ta simmetriya o‘qiga ega bo‘lamiz (ulardan birinchisi albatta α). Navbatdagi k-simmetriya o‘qi β bilan $k\varphi = 180°$ burchak hosil qilgani uchun, u β bilan ustma-ust tushadi. Demak, qaralayotgan holda X shakl ikkita simmetriya o‘qiga egaligidan k ta simmetriya o‘qiga ega bo‘lishi kelib chiqadi.

Mashq. $\dfrac{l}{k}$ – qisqarmas musbat kasr bo‘lsin. Isbotlang: agar X shakl orasidagi burchak $\varphi = \dfrac{180° l}{k}$ ga teng ikkita o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lsa, u k ta simmetriya o‘qiga ega bo‘ladi.

Shunday qilib, agar X shakl orasidagi burchak φ ga teng ikkita o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lib, $\dfrac{\varphi}{180°}$ nisbat ratsional son bo‘lsa, u yana bir nechta simmetriya o‘qiga ega bo‘lar ekan. Xo‘sh, bu kasr irratsional bo‘lsa-chi? Bu holda shakl cheksiz ko‘p simmetriya o‘qiga ega bo‘ladi: yuqoridagi kabi hosil qilingan β, $\beta_0 = \alpha$, β_1, β_2, ... simmetriya o‘qlarining barchasi har xil bo‘ladi. (Aniqlik uchun qoida: agar β_{m-1} va β_{m} aniqlangan bo‘lsa, u holda β_{m+1} simmetrtiya o‘qi β_{m-1} ni β_{m} ga nisbatan akslantirish yo‘li bilan hosil qilinadi.)

Natija. Agar ko‘pburchak kamida ikkita simmetriya o‘qiga ega bo‘lsa, ikkita qo‘shni simmetriya o‘qi orasidagi burchak $\frac{180^\circ}{k}$ ga teng bo‘ladi, bu yerda k – birdan katta biror butun son.

Jumladan, ko‘pburchak n ta simmetriya o‘qiga ega bo‘lsa, uning ikki qo‘shni simmetriya o‘qi orasidagi burchak aynan $\frac{180^\circ}{n}$ ga teng bo‘ladi. Bundan isbot qilinishi lozim teorema kelib chiqadi: n ta simmetriya o‘qiga ega bo‘lgan n burchak bu – muntazam n burchakdan iborat.

Shunday qilib, chindan muntazam n burchak barcha n burchaklar ichida eng “chiroylisi” – eng ko‘p simmetriya o‘qiga ega bo‘lgani ekan.

Maqolamiz oxirida qiziquvchilar uchun o‘qqa nisbatan simmetriyaning yana bir nechta muhim xossasini mustaqil isbotlashni taklif etamiz.

Masala. Agar k soni n ning bo‘luvchisi bo‘lsa, roppa-rosa k ta simmetriya o‘qiga ega bo‘lgan n burchak mavjud.

Masala. Aksincha, agar roppa-rosa k ta simetriya o‘qiga ega n burchak mavjud bo‘lsa, k soni n ning bo‘luvchisi bo‘ladi.

Masala. Qavariq X shakl orasidagi burchak φ ga teng ikkita simmetriya o‘qiga ega bo‘lsin. Agar $\dfrac{\varphi}{180^\circ}$ nisbat irratsional bo‘lsa, X doira bo‘lishi shart.

Masala. Agar ko‘pburchak bir necha simmetriya o‘qiga ega bo‘lsa, ular hammasi bir nuqtada kesishadi.

§ 5. Bu yerda nimadir bor...[5]

Geometriya bilan qiziqadigan har bir o‘quvchi uchburchak bilan bog‘liq “uchliklar” – uchta balandlik, uchta mediana, uchta bissektrisa hamda uchta o‘rta perpendikulyarning ajoyib xossalari bilan tanish. Qarangki, bu uchliklarning har biri o‘z holicha qiziqarli xossalarga ega bo‘lishidan tashqari o‘zaro ham yaqin aloqada ekan.

Mavzuni uchburchakning o‘rta perpendikulyarlaridan boshlaymiz. Uchburchak har uch tomonining o‘rta nuqtasidan shu tomonga tik o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq o‘tkazsak, ular bir nuqtada kesishadi. (Kesishish nuqtasi uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi bo‘ladi, lekin bu hozir biz uchun muhim emas.)

Tomonlarning o‘rta nuqtalarini bir-biri bilan tutashtirib chiqsak, yana bir uchburchak hosil bo‘ladi. Biz uni ichki uchburchak deb, berilgan uchburchakni esa tashqi uchburchak deb atashga kelishamiz.

1-teorema. Tashqi uchburchakning o‘rta perpendikulyarlari ichki uchburchakning balandliklari bo‘ladi.

Bu juda sodda xossa, albatta: uchburchakning o‘rta chiziqlari uning tomonlariga parallel bo‘ladi, demak,

[5] FMI, 2007, №5.

tashqi uchburchakning tomoniga tik to‘g‘ri chiziq ichki uchburakning tomoniga ham tik bo‘ladi.

Mashq. Tashqi uchburchak o‘tmas burchakli bo‘lganda bu xossani chizmada tekshirib ko‘ring.

Endi tashqi uchburchakning balandliklarini o‘tkazib, ularning asoslarini tutashtirishdan hosil bo‘lgan ichki uchburchakni qaraylik.

2-teorema. Tashqi uchburchakning balandliklari ichki uchburchakning bissektrisalari bo‘ladi.

Isbotni tashqi uchburchak o‘tkir burchakli bo‘lgan holda batafsil bayon etamiz

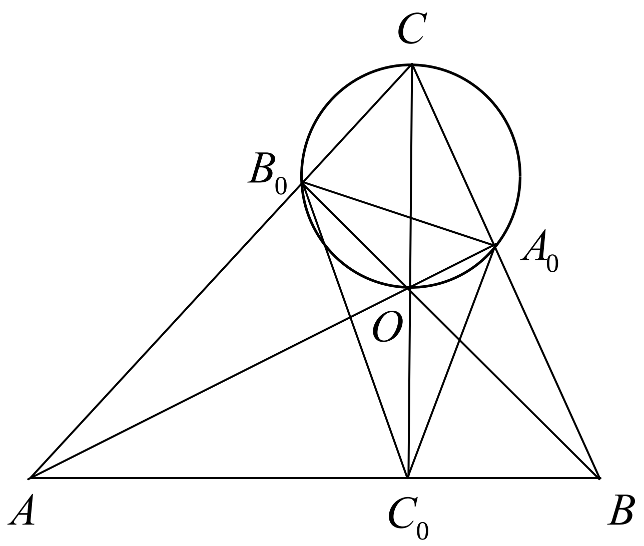
ΔBCC_0 va ΔCOA_0 o‘xshash, chunki $\angle BCC_0$ burchak umumiy, bittadan burchagi to‘g‘ri. Demak, $\angle COA_0 = B$.

$\angle OA_0C$ va $\angle OB_0C$ – to‘g‘ri burchaklar, demak, OA_0CB_0 – diametri OC bo‘lgan aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchak ekan. U holda, $\angle A_0OC$ va $\angle A_0B_0C$ burchaklar bitta A_0C yoyga tiralgani uchun o‘zaro teng.

Xullas,

$$\angle A_0B_0C = \angle B. \tag{1}$$

Mulohazalarni shu tariqa davom ettirib, $\angle B_0A_0C = \angle A$ degan xulosaga kelish mumkin. Bunda ishni ΔACC_0 va ΔCOB_0 uchburchaklar o‘xshashligidan boshlash kerak. Lekin bu yerda boshqa yo‘l tutish – anchayin nafis geometrik mushohada qo‘llagan afzal.



Shaklga murojaat qilsak, ravshanki, u mutlaqo simmetrik emas. Garchi shakl simmetrik bo‘lmasa ham, ammo mushohada simmetrik bo‘la oladi: agar shaklda C harflari o‘z o‘rnida qoldirilib, A va B harflarining o‘rni almashtirilsa, ΔBCC_0 uchburchak ΔACC_0 uchburchakka, ΔCOA_0 esa ΔCOB_0 uchburchakka o‘tadi. Bunda (*) xulosada ham A va B harflar o‘rni almashadi:

$$\angle B_0A_0C = \angle A.$$

Natija: ΔA_0B_0C uchburchak tashqi ΔACB uchburchakka o‘xshash.

Mashq. Har ikki holda mushohada simmetrik ekanligini ularni ikki ustun ko‘rinishida yonma-yon yozib ishonch hosil qiling.

Albatta, yuqoridagi kabi mulohazalar ΔA_0BC_0 va $\Delta A_0B_0C_0$ uchburchaklar uchun ham o‘tkazilishi mumkin. Demak,

Tashqi uchburchakdan ichki uchburchak kesib olinganda qoladigan uchburchaklar berilgan tashqi uchburchakka o‘xshashdir.

Bu xossaning o‘zi – ajoyib. Ammo uni o‘z holiga qoldirib, teoremamizning isbotini davom ettiraylik. $\angle A_0B_0O$ va $\angle OCA_0$ burchaklar bitta yoyga tiralib turibdi. Demak,

$$\angle \mathrm{A_0B_0O} = \angle \mathrm{OCA_0}. \tag{2}$$

Xuddi shu mulohazani AC_0OB_0 to‘rtburchakka nisbatan takrorlash kerak – u ham aylanaga ichki chizilgan. Biroq bu yerda ham “simmetrik mushohada” qo‘llash mumkin: bu safar B harflarini o‘rnida qoldirib, A bilan C harflari o‘rin almashtirilsa, (2) xulosa

$$\angle C_0B_0O = \angle OAC_0 \tag{3}$$

natija beradi. ΔOCA_0 bilan ΔOAC_0 uchburchaklar o‘xshash bo‘lgani uchun,

$$\angle OAC_0 = \angle OCA_0. \qquad (4)$$

Nihoyat, (2), (3) va (4) tengliklardan $\angle A_0B_0O = \angle C_0B_0O$, ya'ni BB_0 balandlik $A_0B_0C_0$ uchburchakning bissektrisasi bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Mashq. Isbotlangan teorema o'tmas burchakli uchburchak uchun qanday ifodalanadi? Uni isbotlang.

Mashq. 2-teoremani AC_0A_0C to'rtburchak aylanaga ichki chizilganidan foydalanib isbotlang. (Bu isbot yuqorida keltirilganga nisbatan ixchamroq.)

Ko'rilayotgan toifadagi yana bir sodda xossa:

3-teorema. Tashqi uchburchak medianalari ichki uchburchak uchun ham medianalardir.

Mashq. Bu xossani asoslang.

Uchburchaklar bilan bog'liq kesmalardan yana bir mashhuri – bissektrisa. Uchburchakning uchta bissektrisasini o'tkazib, ularning asoslarini tutashtiraylik. Natijada yana tashqi va ichki uchburchakka ega bo'lamiz. Xo'sh, tashqi uchburchakning bissektrisalari ichki uchburchakka nisbatan qanday xossaga ega bo'ladi?

Maqola muallifi bu savolga javob berolmaydi. Shu narsa aniqki, tashqi uchburchak bissektrisalari ichki uchburchakning balandligi, yo medianasi, yoki bissektrisasi bo'lishi shart emas (ya'ni, umumiy holda bo'lmaydi). Shu bilan birga, hech bir qo'shimcha xossaga ega emasligiga ham ishonging kelmaydi. Harqalay, bu yerda nimadir bor... (Agar u topilsa, yana bir yangi teorema bo'ladi.)

§ 6. G'aroyib kvadrat ildizlar[6]

Natural sonlarning turli-tuman ajoyib xossalari, sonlar va raqamlar bilan bog'liq qiziqarli munosabatlar juda olis zamonlardan boshlab matematika muxlislarining diqqatini o'ziga tortib kelgan. Bu mavzudagi masalalar bilan qadimgi yunon olimlari ham, sharq matematiklari ham faol shug'ullanishgan. Italiyalik Leonardo Fibonachchi, mashhur fransuz matematigi Pyer Ferma, buyuk matematiklardan Leonard Eyler va Karl Fridrix Gaussning bu boradagi izlanishlari yaxshi ma'lum [Yosh matematikning ensiklopedik lug'ati. T., O'zME nashriyoti, 1991]. Sonlarning xossalariga oshiqu-shaydo bo'lgan hind matemetigi Ramanujon haqida esa kitobimizning §16 da alohida hikoya qilamiz.

Qarangki, bu sohada ming-minglab professional va havaskor matematiklar tadqiqot olib borganiga qaramay, jajji bo'lsa-da, yangi ixtirolar imkoniyati hali ko'p ekan. Bu maqola ana shunday topilmalardan biriga bag'ishlanadi. Maqola – Shahrixonlik (Andijon viloyati) matematika o'qituvchisi taqdim etgan material asosida tayyorlandi. (A.Mamatqulovning boshqa topilmalari ["Математика в школе", 1979, №3, 1986, №6] jurnallarda e'lon qilingan.) Quyidagi tenglikka etibor beraylik:

$$\sqrt{494209} = 494 + 209.$$

Umumiy holda bu xossani shunday bayon etish mumkin: $m = 2n$ – juft son bo'lsin. O'nli sanoq sistemasida yozilgan $2n$ xonali L soni teng ikki qismga – n xonali sonlarga ajratilsa, L ning kvadrat ildizi ana shu ikki qism yig'indisiga teng.

Shu xossaga ega bo'lgan yana bir g'aroyib misol:

[6] FMI, 2008, №3 (A.Mamatqulov bilan hammualliflikda).

$$\sqrt{7901234568098765432 1}=7901234568+0987654321.$$

(Bu tenglik qo‘shimcha xossalari bilan diqqatga sazovor: a) tenglikning o‘ng tomonidagi har bir qo‘shiluvchida 0 dan 9 gacha bo‘lgan barcha raqamlar faqat bir martadan ishtirok etgan; b) birinchi qo‘shiluvchida uchinchisidan boshlab raqamlar o‘sish tartibida, ikkinchi qo‘shiluvchida ikkinchisidan boshlab raqamlar kamayish tartibida yozilgan; c) o‘ngdagi qo‘shiluvchilar yig‘indisi 8888888889 ga teng.)

Yuqoridagi kabi “osongina” yo‘l bilan chiqariladigan kvadrat ildizlar yana mavjudmi? Masalani umumiy tarzda qo‘yamiz: x va y – n xonali natural sonlarni belgilansa,

$$\sqrt{10^n x+y}=x+y \tag{1}$$

tenglama yechimlarini toping.

Shuni qayd etish lozimki, y o‘nli sanoq sistemasida yozilgan sonlardan biroz farq qiladi – uning boshidagi raqamlari 0 bo‘lishi istisno emas. Bunday hollarda oddiy sonlardan farqli, y boshidagi 0 larni yozish kerak. Masalan,

$$\sqrt{999...998000...001}=999...998+\ 000...001 \tag{2}$$

tenglik o‘rinli, bu yerda 9 va 0 raqamlari $n-1$ tadan, $n=1, 2, 3, ...$

Mashq. (2) tenglikni isbotlang.

Shunday qilib, ixtiyoriy n uchun (1) xossa o‘rinli bo‘lgan sonlar doim mavjud ekan. Maqsadimiz – (1) tenglamaning boshqa yechimlarini izlash. Uning har ikki tomonini kvadratga ko‘tarib, so‘ng shaklini almashtiramiz:

$$(10^n-1)x=(x+y-1)(x+y). \tag{3}$$

O‘ng tomondagi ko‘paytuvchilar ikkita ketma-ket sondan iborat. Demak, uning chap tomoni ham shunday ko‘paytuvchilarga ajralishi lozim.

Ishni xususiy hollarni ko‘rishdan boshlaylik.

$n=1$ bo‘lsin. U holda (3) dan $9x=(x+y-1)(x+y)$.

Tenglikning chap tomoni $x=8$ yoki 10 bo‘lgandagina ikkita ketma-ket sonning ko‘paytmasiga tengbo‘ladi. 1-holda $x+y=9$, bundan $x=8$, $y=1$. Ikkinchi holda $x=10$, $y=0$ – ildiz ostidagi son 2 xonali bo‘lmaydi. Shunday qilib, (1) xossaga ega bo‘lgan ikki xonali son yagona: $L=81$: $\sqrt{81}=8+1$.

Endi $n=2$ bo‘lsin. Bu holda (3) tenglama

$$99x=(x+y-1)(x+y) \tag{4}$$

ko‘rinishda yoziladi. Bitta yechimni bilamiz: $x=98$, $y=01$, ya’ni: $\sqrt{9801}=98+01$.

(4) tenglama boshqa yechimlarga ham ega bo‘lishi mumkin. Ularni izlash uchun quyidagicha mulohaza yuritamiz, Agar x tub son bo‘lsa, (4) tenglamaning chap tomoni ikkita ketma-ket son ko‘paytmasiga teng bo‘la olmasligi ravshan. Shuning uchun x murakkab son bo‘lgan holni qaraymiz: $x=pq$ bo‘lsin, U holda $99x=9\cdot 11\cdot pq$. Bu yerda p va q teng huquqli bo‘lgani uchun $99x=(9p)\cdot(11q)$ deb olishimiz mumkin. Shartga ko‘ra $9p$ va $11q$ ikkita ketma-ket sonlarga teng bo‘lishi lozim. q soni ikki va undan ko‘p xonali bo‘la olmasligi ravshan (aks holda x kamida uch xonali bo‘lib qolar edi). Demak, q soni 1 dan 9 gacha raqamlardan biri. Ularni birma-bir tekshirib, quyidagi yechimlarni topamiz: $p=5$, $q=4$ va $p=6$, $q=5$.

1-holda: $x+y=45$, $x=5\cdot 4=20$, $y=25$,

2-holda: $x+y=55$, $x=6\cdot 5=30$, $y=25$.

Demak, $n=2$ bo‘lganda (1) xossaga ega sonlar uchta ekan: $\sqrt{2025}=20+25$, $\sqrt{3025}=30+25$, $\sqrt{9801}=98+01$.

Shu kabi mulohazalar bilan $n=3$ uchun $\sqrt{998001}=998+001$. dan tashqari yana bitta yechim topamiz:

$$\sqrt{494209}=494+209 \tag{5}$$

Mashq. $n=3$ uchun boshqa yechim bor-yo‘qligini tekshiring.

Endi $n=4$ bo‘lgan holni ko‘raylik. Bu holda (2) tenglik

$$999x=(x+y-1)(x+y) \tag{6}$$

ko‘rinishni oladi. $x=9998$, $y=0001$ dan farqli yechimlarni izlaymiz. Buning uchun $9999x$ ko‘paytmani boshqa usulda ikkita ko‘paytuvchiga ajratishimiz kerak. Ishni yengillashtirish uchun $x+y-1$ va $x+y$ ko‘paytuvchlardan faqat bittasi 3 ga bo‘linishi mumkinligiga e’tibor qilamiz. Demak, $9999x$ ko‘paytuvchilarga ajratilganda, faqat bittasi 3 ga karrali bo‘lgan holni qarash kifoya. Bundan tashqari, (6) tenglamaning chap tomonidan ko‘rinadiki, x tub emas. Bu mulohazalardan $x=pq$ shaklida bo‘lishi, izlanayotgan ikki ketma-ket son ko‘paytmasi uchun quyidagi uch imkoniyatdan biri o‘rinli bo‘lishi lozimligi kelib chiqadi:

$$9999x=9p\cdot 1111q=(x+y-1)(x+y), \tag{7}$$
$$9999x=99p\cdot 101q=(x+y-1)(x+y), \tag{8}$$
$$9999x=909p\cdot 11q=(x+y-1)(x+y). \tag{9}$$

Birinchi, ya’ni (7) holda

a) $\begin{cases} 9p=x+y-1 \\ 1111q=x+y \end{cases}$ (kichik ko‘paytuvchi 3 ga bo‘linadi),

yoki

b) $\begin{cases} 9p = x + y \\ 1111q = x + y - 1 \end{cases}$ (katta ko'paytuvchi 3 ga bo'linadi)

sistemadan biri bajarilishi kerak.

a) sistemadan $9p - 1111q = -1$ chiziqli Diofant tenglamasini hosil qilamiz [“Chin qiziqarli matematika” I. §14]. Uni yechaylik: $9p - 9 \cdot 123q = 4q - 1,$, demak, $4q - 1$ soni 9 ga bo'linishi lozim: $4q - 1 = 9t,$ $4q - 8t = t + 1.$ Bundan $t + 1$ soni 4 ga qoldiqsiz bo'linishi ko'rinadi: $t + 1 = 4s$. Endi hisobni “orqa tomonga” davom ettiramiz:

$$4q - 1 = 9t = 9(4s - 1), \quad 4q = 1 + 36s - 9, \quad q = 9s - 2, \text{ so'ng}$$
$$9p = 1111q - 1 = 1111 \cdot (9s - 2) - 1 = 9999s - 2223.$$

Har ikki tomonni 9 ga bo'lsak, $p = 1111s - 247$. (p va q formulalar qaralayotgan Diofant tenglamasining yechimidir.)

Endi $x + y = 1111q$ ekanidan foydalanamiz: $x + y = 1111(9s - 2)$. Ammo $x + y$, masala shartiga ko'ra, 8-xonali sonning kvadrat ildizi ((1) tenglamaga qarang). Demak u 4 xonalidir. Bu esa faqat $s = 1$ bo'lgadagina mumkin:

$$x + y = 1111 \cdot 7 = 7777.$$

Izlanayotgan 8 xonali sonni esa $x + y$ ni kvadratga ko'tarish yo'li bilan topish qulay: $7777^2 = 60481729$.

Shunday qilib, a) sistema bitta yechim beradi:

$$\sqrt{60481729} = 6048 + 1729.$$

Mashq. b) sistema yangi yechim bermasligini ko'rsating.

Yuqoridagi kabi mulohazalarni (8) va (9) hollarga qo'llab,

$$\sqrt{24502500} = 2450 + 2500, \qquad \sqrt{25502500} = 2550 + 2500,$$

$$\sqrt{52881984} = 5288 + 1984$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Quyidagi jadvalda n ning 1 dan 6 gacha qiymatlari uchun (1) xossaga ega sonlar jamlangan. Qulaylik uchun (1) xossa unga teng kuchli

n	$(x+y)^2 = 10^n x + y$
1	$(8+1)^2 = 81$
2	$(20+25)^2 = 2025,\ \ (30+25)^2 = 3025,\ \ (98+01)^2 = 9801$
3	$(494+209)^2 = 494209, \quad (998+001)^2 = 998001$
4	$(2450+2500)^2 = 24502500, \quad (2550+2500)^2 = 25502500,$ $(5288+1984)^2 = 52881984, \quad (6048+1729)^2 = 6048179,$ $(9998+0001)^2 = 99980001)$
5	$(60494+17284)^2 = 6049417284,\ (68320+14336)^2 = 6832014336,$ $(90480+04641)^2 = 9048004641,\ (99998+00001)^2 = 9999800001$
6	318682, 329967, 351352, 356643, 390313, 461539, 466830, 499500, 500500, 533170, 53846), 609687, 643357, 648648, 670033, 681318, 791505, 812890, 818181, 851851, 857143, 961038, 994708, 999999
7	4444444, 4927941, 5555556, 5072059, 9372385, 9999999

$$(x+y)^2 = 10^n x + y \tag{10}$$

shakldda yozildi, $n = 6, 7$ uchun joyni tejash maqsadida faqat $x + y$ ning qiymatlari keltirildi.

Mashq. $n = 6, 7$ uchun jadvalda keltirilgan har bir yechimga mos x va y ni topib, uni (10) shakda yozib chiqing.

$n=5$ holda yana bir yechimda y ning birinchi raqami 0 chiqdi:

$$(90480+04641)^2=9048004641.$$

O‘z-o‘zidan savol tug‘iladi: x ham n ta raqamli guruh bo‘lsa-chi? (Boshqacha aytganda, eng katta xonasi 0 dan farqli bo‘lishi shart bo‘lmasa.) Qulaylik uchun, ixtiyoriy n ta raqamli sonlarni qo‘shtirnoqqa olib, “n xonali son” deb yozishga kelishamiz. Masalan, bu ta’rifga ko‘ra, 1 soni “istalgan xonali son” bo‘la oladi – xuddi shunday “son” (3) tenglikda ishtirok etmoqda. n xonali son tushunchasi mana shu yo‘sinda kengaytirilsa, (1) tenglama yana ikkita juda sodda, ochiq-oydin yechimga ega bo‘ladi:

$$\sqrt{000...0000...001}=000...00+00...001, \qquad (11a)$$

$$\sqrt{100...0000...000}=100...00+00...000 \qquad (11b)$$

(ildiz ostidagi “$2n$ xonali sonlar”, o‘ng tomonda esa “n xonali sonlar”.)

$n=1, 2$ bo‘lganda boshqa yechim qo‘shilmas ekan. Ammo $n=3$ holda yangi yechim mavjud:

$$\sqrt{088209}=088+209.$$

Topilgan yechimlarning bir muhim xossasi bor ekan. Uni payqash maqsadida yig‘indilarni kuzatamiz (Jadvalga qarang):

Mashq. Jadvalni davom ettiring.

Ko‘rinib turibdiki, yechimlar bir-birini 10^n gacha to‘ldiruvchi juftliklar hosil qilmoqda.

Bu qonuniyat umumiy holda ham o‘rinli ekan.

n	$(x+y)^2=10^n x+y$	$x+y$
1	$(8+1)^2=81$	09
	$(0+1)^2=01$	01
2	$(98+01)^2=9801$	99
	$(20+25)^2=2025$	45
	$(00+01)^2=0001$	01
	$(30+25)^2=3025$	55
3	$(998+001)^2=998001$	999
	$(494+209)^2=494209$	703
	$(088+209)^2=088209$	297
	$(000+001)^2=000001$	001

Teorema. Agar “n xonali x va y son” lari (1) xossaga ega boʻlsa, u holda

a) $x+y$ va $z=10^n-(x+y)$ “n xonali sonlar” boʻladi (buni yuqorida asosladik);

b) $z=10^n-(x+y)$ “n xonali son”ning kvadrati ham (1) xossaga ega boʻladi.

Teoremaga misollar.

$x=669420,\quad y=148761,\quad \sqrt{669420148761}=669420+148761,$

$(x+y)^2=818181^2=669420148761.$

$z=10^6-818181=181819,\quad z^2=33058148761,$

$x_1=033058,\quad y_1=148761,\quad x_1+y_2=z$ – yangi yechim,

$x=1975308,\ y=2469136,\ \sqrt{19753062469136}=1975308+2469136,$

$(x+y)^2=4444444^2=19753062469136.$

$z=10^7-4444444=5555556,\quad z^2=30864202469136,$

$x_1 = 3086420$, $y_1 = 2469136$, $x_1 + y_1 = z$ – jadvalda bor yechim.

Mashq. Teoremadan foydalanib, jadvalni to'ldiring.

Teoremaning isboti qiyin emas – uni mashq sifatida qoldiramiz. Qolaversa, isbotga ham, umuman ko'rilayotgan masalaga ham yana qaytish niyatimiz bor. Ungacha esa, o'quvchilar diqqatini asosiy masalaga qaratamiz.

Tadqiqot uchun masalalar. 1. (1) xossaga ega "$2n$ xonali sonlar" soni M_n deb belgilansin. M_n uchun formula toping.

2. Ixtiyoriy n uchun (1) xossaga ega barcha "$2n$ xonali sonlar"ni topish qoidasi mavjudmi?

§ 7. Eyler usuli[7]

Differensial va integral hisob matematika tarixida buyuk burilish (to'g'rirog'i sakrash) yasagan edi. Bu hisob yaratilishi, asosan, Isaak Nyuton va Gotfrid Leybnis nomlari bilan bog'liq. Leonard Eyler differensial va integral hisob yaratuvchilaridan keyingi avlodga mansub bo'lib, u zamondoshlari Dalamber, Lagranj, aka-uka Bernullilar bilan ana shu hisob vositasida matematikaning murakkab masalalarini yechish va yangi sohalarni rivojlantirish bilan shug'ullandi. Xususan, L.Eyler differensial tenglamalar nazariyasi vujudga kelishi va rivojlanishiga katta hissa qo'shdiki, bugun "Eyler tenglamasi" iborasi bir necha xil differensial tenglamaga nisbatan qo'llanadi.

Differensial tenglamalar asosan oliy matematika kurslarida o'tiladi, o'rta maxsus ta'lim muassasalarida

[7] FMI, 2012, №4.

esa boshlang'ich tushuncha berish bilan cheklanadi. Biz bu yerda Eyler ixtiro qilgan differensial tenglamalarni yechishning muhim usulini maktab matematikasiga oid bir misolda ko'ramiz. Bu misol – Fibonachchi sonlaridir. Bu sonlarning dastlabki ikki hadi 1 dan iborat, uchinchisidan boshlab esa har biri o'zidan oldingi ikki had qo'shilishidan hosil bo'ladi: $1+1=2$, $1+2=3$, $2+3=5$, $3+5=8$.

Natijada quyidagi ketma-ketlikka ega bolamiz:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots$$

Fibonachi sonlari qatorini nolinchi haddan boshlash ham mumkin: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ – bunda qoida o'z kuchini saqlaydi: $0+1=1$. Kelgusida qulaylik tug'dirgani uchun mana shu ta'rifni asos qilib olamiz:

$$u_n = \begin{cases} 0, \text{ agar } n=0 \text{ bo'lsa}, \\ 1, \text{ agar } n=1 \text{ bo'lsa}, \\ u_{n-2}+u_{n-1}, \text{ agar } n \geq 2 \text{ bo'lsa}. \end{cases} \qquad (1)$$

(Bu ta'rifda birinchi had $n=0$ indeksga mos keladigan qilib olinadi – bu kelgusida qulaylik tug'diradi.)

Bu ta'rif, ko'pincha, mana bunday tarzda yoziladi:

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \qquad (2)$$

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1. \qquad (3)$$

Fibonachchi sonlari – matematikadagi eng mashhur ketma-ketliklardan biridir. Hatto bu ketma-ketlikka atab Kanadada maxsus ilmiy jurnal nashr etib kelinadi.

Mashhurlikning boisi ikkita. Birinchisi – Fibonachchi sonlari turli sohalarda paydo bo'lib turadi. Mana ulardan biri:

Quyonlar haqida Fibonachchi masalasi. Bir tadbirkor zotdor quyonlarni ko‘paytirishga kirishdi. U ishni bir juft quyonchadan boshladi. Quyonlar ikki oylikdan ko‘payishga kirishar va har oyda bir juft bola tug‘ar ekan. Xo‘sh, quyonlar bir yilda nechtaga ko‘payadi?

Dastlab – 1 juft;

1 oy o‘tgach – bir juft;

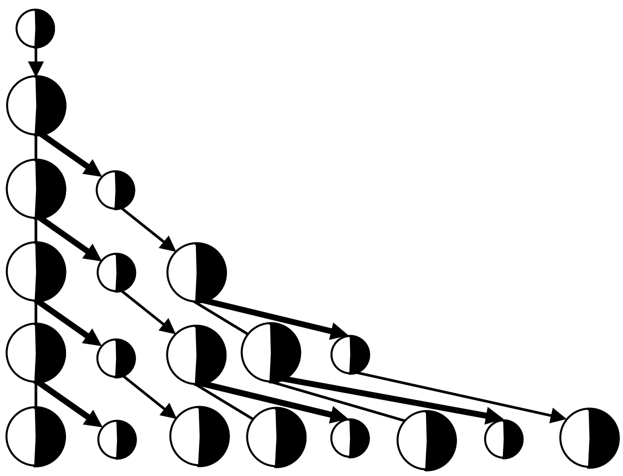
2 oy o‘tgach – 2 juft ;

3 oy o‘tgach – 3 juft (yana bir juft quyon tug‘iladi);

4 oy o‘tgach, ya’ni 5-oyda – 5 juft (dastlabki quyonlardan 1 juft quyon, voyaga yetgan quyonlardan yana bir juft);

5-oy o‘tgach – 8 juft va hokazo.

Bu hisobni diagramma ko‘rinishida tasvirlasa yaqqolroq chiqadi (yarmi oq-yarmi qora doiracha bir juft quyonni bildiradi, voyaga yetganlari katta-roq, yangi tugilganlari kichikroq qilib tasvirlan-gan, ingichka milcha – strelka voyaga yetishni, qalin milcha esa tug‘ishni bildiradi):



O‘quvchi quyonlar soni aynan Fibonachchi sonlari hosil qilayotganini kuzatishi mumkin.

Mashq. Diagrammani yana bir-ikki qadam davom ettiring.

Mashq. n- oyda voyaga yetgan quyonlar soni x_n ga, tug‘ilib ko‘payish yoshiga yetmaganlari y_n bo‘lsin. Quyonlarning ko‘payish usulidan quyidagi qonuniyatni keltirib chiqaring:

$$x_{n+1} = x_n + y_n,$$
$$y_{n+1} = x_n.$$

Mashq. $u_n = x_n + y_n$ ekanligidan foydalanib, bu tengliklardan (2) tenglamani keltirib chiqaring.

Fibonachchi sonlari mashhurligining ikkinchi sababi – ular juda ko‘p biri-biridan ajoyib xossalariga ega ekanligida. Mana ulardan bir nechtasi:

1. $u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2k-1} = u_{2k}$ – ketma-ket toq raqamli Fibonachchi sonlari yig‘indisi yana Fibonachchi soni bo‘ladi.

2. $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1.$

3. $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1.$

4. $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}.$

5. $u_{n+m} = u_{n-1} u_m + u_n u_{m+1}.$

6. $u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_4 + \cdots + u_{2n-1} u_{2n} = u_{2n}^2.$

7. $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3.$

8. Agar n soni m ga qoldiqsiz bo‘linsa va faqat shu holda u_n Fibonachchi soni u_m ga qoldiqsiz bo‘linadi.

9. $(u_m, u_n) = u_{(n,m)}$ (qavslar bilan ikki natural sonning eng katta umumiy bo‘luvchisi belgilangan).

10. $\dfrac{u_1}{2} + \dfrac{u_2}{2^2} + \dfrac{u_3}{2^3} + \dfrac{u_4}{2^4} + \cdots = 2.$

(Cheksiz yig‘indining ma’nosi haqida “Chin qiziqarli matematika” III qism, “Cheksizlikka qo‘l cho‘zib” mavzusida tanishishingiz mumkin.)

Qarangki, Fibonachchi sonlari uchun aniq formula ham bor ekan – u Bine formulasi deyiladi:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{4}$$

Ana xolos, bu yog'i necha puldan tushdi? Fibonachchi sonlari butun sonlar bo'lsa, ko'plab ixcham xossalarga ega bo'lsa-yu, umumiy hadining formulasi odam "tushida ko'rsa, qo'rqadigan" darajada vahimali bo'lsa? O'ng tomondagi ifodaning qiymati butun son chiqishi juda shubhali...

Aslida (4) formulaning hech qanday qo'rqinchli joyi yo'q, u hatto tabiiy mazmunga ega ekan. Buni anglab yetish uchun, (2) ga qaraganda umumiyroq tenglamani olaylik:

$$u_{n+2} + 2pu_{n+1} + qu_n = 0 \tag{5}$$

(hisoblashlar ixchamroq chiqishi uchun u_{m+1} hadning koeffitsiyenti 2 ko'paytuvchi bilan olindi). Xususan, $p = -\frac{1}{2}$, $q = -1$ bo'lsa, Fibonachchi sonlarining rekurrent formulasi, $p = -1$, $q = -1$ uchun esa arifmetik progressiyalar uchun o'rinli

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

xossa hosil bo'ladi. Leonard Eyler shunday masalani o'rgangan:

(5) xossaga ega barcha ketma-ketliklarni toping.

Boshqacha qilib aytganda, Eyler (5) xossaga tenglama deb qaragan va uni yechish usulini topgan. Keling, Eyler usuli bilan tanishaylik. Dastavval u (5) tenglamani qanoatlantiradigan λ^n ketma-ketliklarni (geometrik progressiyalarni) izlagan ($\lambda \neq 0$ deb olish tabiiy). (5) tenglamada $u_n = \lambda^n$ deb olinib, λ^n ga qisqartirilsa,

$$\lambda^2+2p\lambda+q=0$$

kvadrat tenglama hosil bo‘ladi. U (5) tenglamaning **xarakteristik** tenglamasi deyiladi. Birinchi navbatda xarakteristik tenglama ikkita har xil haqiqiy ildizga teng bo‘lgan holni qaraymiz – ildizlar λ_1 va λ_2 bo‘lsin. Shunday qilib, bu holda λ_1^n va λ_2^n ketma-ketliklar (5) tenglamaning yechimlari bo‘ladi. U holda ixtiyoriy c_1 va c_2 sonlar uchun

$$u_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n \tag{6}$$

ketma-ketlik ham (5) ni qanoatlantirishini ko‘rish qiyin emas. Eyler (5) tenglamani qanoatlantiruvchi har qanday ketma-ketlik (6) ko‘rinishda bo‘lishini isbotlagan.

Haqiqatan, z_n ana shunday ketma-ketlik bo‘lsin.

$$\begin{aligned} c_1+c_2&=z_0\\ c_1\lambda_1+c_2\lambda_2&=z_1 \end{aligned} \tag{7}$$

sistemani qaraylik (ketma-ketliklarni $n=0$ dan boshlab qarash shu yerda o‘ng‘aylik tug‘diradi). Shartga ko‘ra $\lambda_1\neq\lambda_2$ bo‘lgani uchun, (7) sistemadan c_1 va c_2 aniq topiladi:

$$c_1=\frac{\lambda_2 z_0-z_1}{\lambda_2-\lambda_1},\quad c_2=\frac{\lambda_1 z_0-z_1}{\lambda_1-\lambda_2},$$

(7) tengliklarga ko‘ra $u_0=z_0,\ u_1=z_1$. Bundan va

$$\begin{aligned} u_{n+2}&=-pu_{n+1}-qu_n,\\ z_{n+2}&=-pz_{n+1}-qz_n \end{aligned}$$

tengliklardan matematik induksiya prinsipiga ko‘ra barcha n lar uchun $u_n=z_n$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Eyler usulini Fibonachchi sonlariga qo‘llab ko‘raylik.

Bu holda xarakteristik tenglama $\lambda^2-\lambda-1=0$ bo‘lib, uning ildizlari, ittifoqo, haqiqiy va har xil:

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Demak, (2) tenglamani qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar

$$u_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Hozircha noma’lum c_1, c_2 koeffitsiyentlarni $u_0=0,\ u_1=1$ shartlar bajariladigan qilib tanlash qoldi, xolos:

$$c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Bu qiymatlar o‘rniga qo‘yilsa, aynan (4) formula hosil bo‘ladi.

Eyler xarakteristik tenglama ildizlari o‘zaro teng $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda)$ hamda kompleks $(\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta)$ bo‘lgan hollarda ham (5) tenglamani yechish usulini bergan.

Mashq. Xarakteristik tenglama ildizlari o‘zaro teng, yani $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ bo‘lgan holda yechim $u_n=(c_1+c_2u)\lambda^n$ ko‘rinishida bo‘lishini isbotlang.

Izoh. Ildizlar kompleks bo‘lgan holda Eyler formulasi kerak bo‘ladi.

§ 8. Uchburchak va kvadrat sonlar[8]

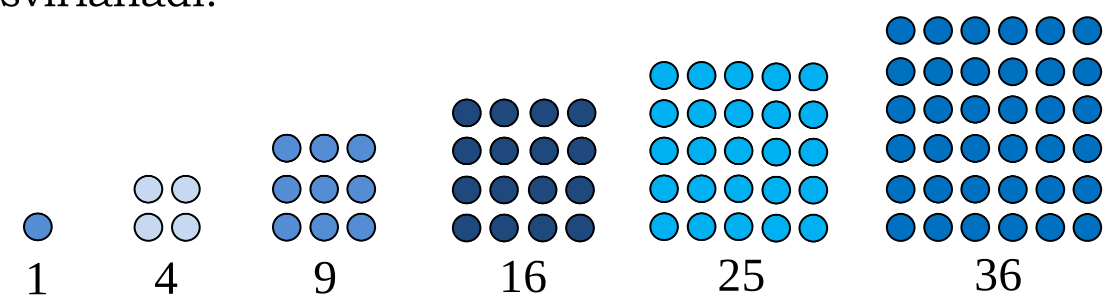
Har biri natural sonning kvadratidan iborat

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ \ldots$$

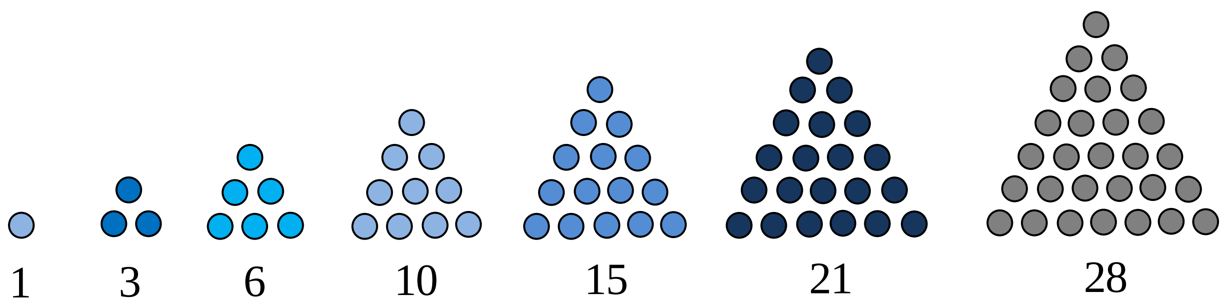
sonlari kvadrat sonlar deb atalishi yaxshi ma’lum. Ular matematikaning turli masalalarida ishtirok etadi. Masalan, $9+16=25$ tengligi Pifagor teoremasi bilan bog‘liq.

Mashq. 121 ga o‘xshash simmetrik (palindrom ham deyiladi) kvadrat sonlar cheksiz ko‘pligini isbotlang.

Kvadrat sonlar shaklda aynan o‘ziga xos kvadrat bilan tasvirlanadi:

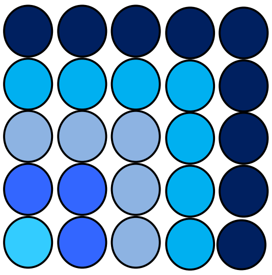


Agar soqqachalarni uchburchak shaklida teradigan bo‘lsak, mana bunday ketma-ketlik hosil bo‘ladi:



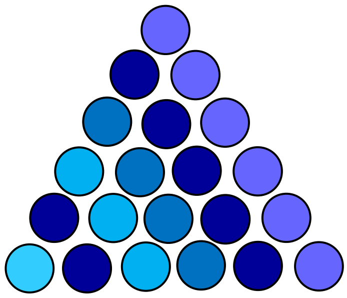
Darvoqe, kvadrat sonlarni quyidagi tasviridan, har bir kvadrat son ketma-ket toq sonlar yig‘indisi bo‘lishi ayon ko‘rinadi (a-rasm).

[8] FMI, 2014, №3.



$1+3+5+7+9=25=5^2$

a-rasm.



$1+2+3+4+5+6=21$

b-rasm.

Xuddi shunga o‘xshash, har bir uchburchak son 1 dan boshlab nechtadir ketma-ket natural sonlar yig‘indisidan iborat (b-rasm).

Bundan n raqamli uchburchak son $\frac{n(n+1)}{2}$ ga teng bo‘lishi kelib chiqadi.

Mashq. 1 dan boshlab ketma-ket kublarning yig‘indisi uchburchak sonning kvadrati bo‘lishini ko‘rsating.

Endi shunday masalani qaraylik: Bir paytning o‘zida ham uchburchak, ham kvadrat bo‘lgan son mavjudmi?

Masalaga mana bunday tus berish ham mumkin: askarlar soni nechta bo‘lganda ularni mashq maydonida kvadrat shaklida ham, teng tomonli uchburchak shaklida ham terish mumkin?

Bu masalaning jo‘n yechimi $n=1$. Bizni, albatta, boshqa yechimlar qiziqtiradi. Ulardan birini topish qiyin emas: 36. Haqiqatan:

$$36=6^2=1+2+3+4+5+6+7+8.$$

Matematiklar bunday sonlarning barchasini topish bilan shug‘ullangan, albatta, bu matematik masala jozibadorligining namunasidir.

Masala algebra tilida bunday ifoda etiladi: $m^2=\frac{n(n+1)}{2}$ tenglamani qanoatlantiruvchi n va m sonlarini toping. Yana ham an’anaviy ko‘rinishda:

$$x^2 + x = 2y^2 \qquad (1)$$

tenglamani butun sonlarda yeching.

Bunday tenglamalar Diofant tenglamalari deyilishi bilan tanishmiz. Ularning muhim xususiyati – garchi sodda ifoda etilsa ham, ko'pincha o'ziga xos injiqlikka ega bo'ladi va maxsus yechish usuli talab etishi mumkin. Avval yechimni keltirib, keyin u qanday topilgani ustida bahs yuritamiz.

Teorema. (1) tenglamaning barcha butun musbat yechimlari

$$\begin{aligned} x_0 &= 1; \quad x_{n+1} = 3x_n + 4y_n + 1, \\ y_0 &= 1; \quad y_{n+1} = 2x_n + 3y_n + 1 \end{aligned} \qquad (2)$$

formulalar bilan topiladi.

Isboti. $x_0 = 1;\ y_0 = 1$ qiymatlar yechim bo'lishini ta'kidlagan edik. Quyidagi ayniyat o'rinli ekan:

$$(3x+4y+1)^2 + (3x+4y+1) - 2(2x+3y+1)^2 = x^2 + x - 2y^2. \qquad (3)$$

Mashq. (3) ayniyatni

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

formuladan foydalanib isbotlang.

(3) tenglikdan shunday muhim xulosa chiqadi: agar x, y sonlar juftligi (1) tenglamani qanoatlantirsa, $3x+4y+1,\ 2x+3y+1$ juftlik ham qanoatlantiradi. Shuning uchun (2) formulalar bilan aniqlangan x_n, y_n juftliklarning hammasi (1) tenglamaning yechimi bo'ladi.

Endi $x_0 = 1,\quad y_0 = 1$ yechimdan foydalanib, (2) formulalarni qo'llasak, $x_1 = 3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 1 = 8$, $y_1 = 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1 = 6$ bo'lib, undan so'ng

$$x_2 = 3\cdot 8 + 4\cdot 6 + 1 = 49, \quad y_1 = 2\cdot 8 + 3\cdot 6 + 1 = 35,$$

$$x_3 = 3\cdot 49 + 4\cdot 35 + 1 = 289, \quad y_1 = 2\cdot 49 + 3\cdot 35 + 1 = 204$$

va h.k. yechimlarni hosil qilamiz. Bunga ko‘ra $35^2 = 1225$ va $204^2 = 41616$ ham kvadrat, ham uchburchak sonlar bo‘lar ekan.

Xo‘p, shu bilan (1) tenglama to‘liq yechildimi? Yo‘q, albatta. Mantiqan, bu tenglamaning (2) formulalar bilan topilgan x_n, y_n lardan boshqa yechimlari ham bo‘lishi istisno emas. Masalani to‘liq yechimi quyidagi xossalardan kelib chiqadi.

1-xossa.

$$\begin{aligned} x_n &= 3x_{n+1} - 4y_{n+1} + 1, \\ y_n &= -2x_{n+1} + 3y_{n+1} - 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Bu tengliklarni hosil qilish uchun (2) formulalarni x_{n+1}, y_{n+1} ga nisbatan sistema deb qarab yechish kifoya.

Mashq. Shu yo‘l bilan (4) tengliklar o‘rinli ekanligini tekshiring.

(4) formulalardan shunday xulosa chiqadi: x_{n+1}, y_{n+1} juftlik (1) tenglamaning yechimi bo‘lsa, x_n, y_n ham yechim bo‘ladi.

(2) formulalardan ko‘rinib turibdiki, agar x_n, y_n musbat bo‘lsa, $x_n < x_{n+1}$, $y_n < y_{n+1}$ bo‘ladi, ya’ni, masalan, (3) formulalar bilan hosil qilinadigan juftliklarda x_n kattalashib boradi.

Va aksincha, agar x_n, y_n musbat bo‘lsa, (4) formulalar bilan orqaga qaytsak, x_n ham, y_n ham kichiklashadi.

Bundan ma’lum qadamlardan so‘ng $x_n \le 1$ bo‘lib qolishi kelib chiqadi.

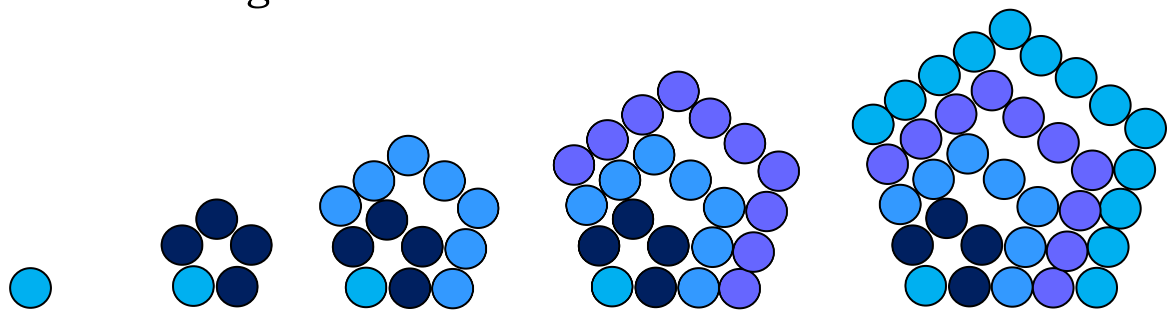
Endi (2) tenglamaning ixtiyoriy musbat x_*, y_* yechimini olaylik. Bu yechimga asoslanib, (4) formulalar bo‘yicha kichikroq yechimlarni hosil qilamiz. Ta’kidlanganiga ko‘ra, ma’lum qadamdan so‘ng $x_n \le 1$.

2-xossa. Agar $\overline{x} > 1$ bo‘lsa, u holda $\overline{y} > 1$.

Bu xossa (1) tenglamadan bevosita ko‘rinib turibdi. (2) sistemaning birinchi tenglamasidan ikkinchisini hadma-had ayirib, x_n, y_n musbat bo‘lganda $x_n > y_n$ bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. U holda (2) dan $y_{n+1} > 5y_n$ bo‘lishi kelib chiqadi. Ya’ni, (2) formulalar bilan yuqoriga qarab “yursak”, har qadamda y ning qiymati 5 martadan ham ko‘proq kattalashadi. Demak, (3) formulalar bilan pastga qarab “tushsak”, har qadamda y ning qiymati kamida 5 marta kichiklashadi. Bundan, biror qadamda y soni 1 bilan 5 orasiga tushib qolishi kelib chiqadi. Lekin bunday sonlardan faqat $y=1$ gina yechimga mos keladi. Shunday qilib, yechimni (3) formulalar $x=1,\ y=1$ yechimgacha olib tushadi. U holda x_*, y_* yechim $x=1, y=1$ dan (2) formulalar orqali hosil bo‘lar ekan.

Shu bilan teorema to‘liq isbotlandi.

Endi tabiiy ravishda beshburchakli sonlar tushunchasiga kelamiz:



1 5 12 22 35

Mashq. n raqamli beshburchakli son nimaga teng bo‘lishini toping.

1-masala. Bir paytda ham uchburchakli, ham beshburchakli son mavjudmi? Bunday sonlarning barchasini topish uchun rekurrent formulalar keltirib chiqaring.

2-masala. Bir paytda ham kvadrat, ham beshburakli son mavjudmi?

3-masala. Bir paytda ham uchburchakli, ham kvadrat, ham beshburchakli son mavjud emasligini isbotlang.

Faol o'quvchilarimizga bu masalalar va ularning oltiburchakli, yettiburchakli va hokazo sonlar hamda uch o'lchovli analoglari uchun umumlashmalariga oid izlanishlar o'tkazishni taklif etamiz.

§ 9. Muntazam $2^{16}(2^{16} + 1)$ burchak yasab bo'ladimi?[9]

Kunlardan bir kun fizika-matematika fakultetida birga o'qib, hozir turli sohalarda mehnat qilayotgan sobiq guruhdoshlar choyxonaga yig'ilishdi. Gap mavzusi bir bog'dan, bir tog'dan, dam Nyu-York birjasidagi ahvol-u dam Afrika changalzorlaridagi tabiat muvozanati buzilayotgani ustida borar, ora-chira hazil-mutoyibadan gurillab kulgi ham ko'tarilar edi. Talabalik yillariyoq o'rtoqlarini yechilmaydigan tenglama yozib "Yecha olasizmi?", chiqmaydigan integralni ko'rsatib "Integrallay olasizmi?" deya mot qilishni yaxshi ko'radigan ulfat o'rtaga savol tashlab qoldi: Sirkul va chizg'ich yordamida muntazam $2^{16}(2^{16}+1)$ burchak yasab bo'ladimi?

Savoldan kimningdir peshonasi tirishdi: "Choyxonada o'tirgan bo'lsak, boshqa mavzu yo'qmi?!" Boshqa biri esa "Yana nima hiyla bilan boshni qotirmoqchisan?" deya tikildi. So'ng ulfatlar o'rtasida bahs boshlandi:

Geometriya muxlisi. Mumkin, albatta. Chunki $2^{16}+1=2^{2^4}+1=65537$ – tub Ferma soni. Demak, Gauss teoremasiga ko'ra sirkul va chizg'ich yordamida tomonlari soni shuncha bo'lgan muntazam ko'pburchak yasab bo'ladi. So'ng tomonlar sonini ikkilab, muntazam $2^{16}(2^{16}+1)$burchak hosil qilish mumkin.

---

[9] FMI, 2009, №3.

Matematika tarixi ishqibozi. Yasalgan ham. Aytishlaricha, Germes ismli aspirant Feliks Kleynga “shug‘ullangani masala bering” deyaverib, tinch qo‘ymabdi. Kleyn “bo‘ladigan matematik masalani o‘zi topishi kerak” deb hisoblar ekan-da. Aspirant o‘ninchi martami murojaat qilganida, Kleyn sirkul va chizg‘ich vositasida muntazam $(2^{16}+1)$ burchak yasang, degan topshiriq beradi. Bechora besh yil urinib, topshiriqni bajaradi. Aytishlaricha, uning qo‘lyozmasi bir chamadonga arang siqqan, hamon Gyottingen universitetining kutubxonasida saqlanar ekan.

Matematik jurnal muharriri. Shundaylikka shunday-ku, ammo qo‘lyozma taqrizdan o‘tmagan. Hamma yasashlar to‘g‘rimi, yo‘qmi – noma’lum.

Matematik mantiq mutaxassisi. Yasash mumkinligi isbotlangan bo‘lsa, ustiga-ustak, isbotning o‘zida yasash usuli bayon qilingan bo‘lsa, demak, mumkin, tamom-vassalom.

Uslubiyotchi matematik. (Xontaxta ustiga bir varaq qog‘oz, qalam, chizg‘ich va sirkul qo‘yib) Menimcha, savol boshqacha qo‘yildi. (Chizish ashyolariga ishora qilib) Mumkinmi, mumkin emasmi?

Iqtisodiy matematikadan ekspert. Shoshmanglar-chi, bir chamalab ko‘raylik. Xo‘sh, bir tomonini yasashga..., boringki, bir soniyadan vaqt ketsin. Agar ish uch smenada tashkil etilsa... O‘h-ho‘, 136 yil. Yo‘q, mumkin emas.

Dasturchi matematik. Nega endi, kompyuter-chi? Dastur tuzamiz-da unga topshiramiz. Nari-berisi bilan bir soatda uddalasa bo‘ladi.

Fizik-nazariyotchi. Qog‘ozda deysizlarda, qalam bilan... (qalamni barmoqlari orasida aylantirib, bir narsalarni ming‘irlashga tushadi). Agar perimetrini 1 metr deb olsak... grafit atomining o‘lchami 1,4 angstrem. Perimetrga qancha atom joylashishi mumkin o‘zi?...

Bittadan, yo‘q, bittadan ham sig‘maydi. Demak, yasash mumkin emas.

Fizik-eksperimentator. (Indamay qo‘liga sirkul oladi. Aylana chizadi. So‘ng tantanavor) Qani, biror kishi o‘rnidan jilmay mana shu shakl muntazam 4295032832-burchak emasligini isbotlab ko‘rsin-chi!

Xo‘sh, muhtaram o‘quvchi, siz qanday fikrdasiz: chizg‘ich va sirkul vositasida muntazam – $2^{16}(2^{16}+1)$ burchak yasab bo‘ladimi?

Izohlar. 1. Mashhur yunon matematigi Evklid (e.o. IV a.) o‘zining yana ham mashhurroq “Negizlar” asarida chizg‘ich bilan sirkul vositasida yechish lozim bo‘lgan geometrik masalalarga katta o‘rin bergan. (Axir, masalan, goniyadan yoki ikkita kertigi bor chizg‘ichdan foydalansa, Evklidning Asakasi ketarmidi? Yo‘q, faqat chizg‘ich va sirkul yordamida. Ustiga ustak, Evklid chizg‘ichi bir tomonli, ya’ni u ma’lum ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq yasash imkonini beradi, xolos. Shu singari, sirkul ham atigi ikki xil vazifa bajarishga yaroqli: markazi berilgan nuqtada, radiusi berilgan kesmaga teng aylana yasash hamda berilgan to‘g‘ri chiziqning tayin nuqtasidan berilgan kesmaga teng kesma yasash.

Mana shu ikki shartni qanoatlantiruvchi masalalar geometrik yasashlar deyiladi. Biz avval chop etilgan maqolalarimizda bunday yasashlar namunalari bilan tanishganmiz. Jumladan, Evklidning “Negizlar”ida kvadrat, muntazam uchburchak, beshburchak, olti burchak va 15-burchak yasash masalalari yechilgani to‘g‘risida hikoya qilganmiz [“Chin qiziqarli matematika”. I. §23, §24].

2. Albatta, muntazam n-burchak yasash mumkin bo‘lsa, uning tomonlarini istalgancha marta ikkilash ham mumkin. Shuningdek, agar $n=pq$ bo‘lsa, muntazam n-burchak yasash mumkinligidan muntazam p-burchak va q-burchaklar yasash mumkinligi ham kelib chiqadi.

Shu sababli, muntazam n-burchak yasash masalasini n tub son bo'lgan hollar uchun qarash kifoya.

Evkliddan so'ng oradan o'n to'rt asr o'tib, chizg'ich va sirkul yordamida muntazam 17-burchak yasash mumkinligini Karl Fridrix Gauss (1777–1855) topgan. Keyinroq u masalani umumiy ko'rinishda hal etgan: Chizg'ich va sirkul vositasida muntazam n-burchakni n quyidagi ko'rinishda bo'lganda va shu hollardagina yasash mumkin:

$$n = 2^m p_1 p_2 \dots p_k,$$

bu yerda $m = 0, 1, 2, \dots;$ $p_1, p_2, \dots, p_k$ – har xil tub Ferma sonlari.

3. $2^{2^s}+1$ ko'rinishdagi butun sonlar fransuz matematigi nomi bilan **Ferma sonlari** deyiladi. Bunday nomlanishning sababi – Pyer Ferma (1601–1665) parijlik matematik M.Mersennga (1588-1648) yozgan maktublaridan birida $2^{2^s}+1$ soni $s = 0, 1, 2, 3, 4$ uchun tub bo'lishini ta'kidlab, bunday sonlar s ning ixtiyoriy butun musbat qiymatida tub chiqadi, degan farazni ilgari surgan. Lekin Leonard Eyler (1707-1783) $s = 5$ bo'lgandagi Ferma soni, ya'ni $2^{2^s}+1$ murakkab son bo'lishini ko'rsatgan.

Mashq. Qo'lda yoki kompyuterga dastur tuzib, bu sonning xos (ya'ni 1 va o'zidan boshqa) bo'luvchisini toping.

Keyinchalik Ferma sonlari s ning navbatdagi yana bir necha qiymatida ham murakkab bo'lishi aniqlangan. Elektron hisoblash mashinalari ixtiro qilingach, ular ham tub Ferma sonlarini izlashga tatbiq qilingan. Axir bunday son topilsa, darhol tomonlari shuncha bo'lgan muntazam ko'pburchak yasash mumkinligi kelib chiqadi-da. Ammo qarangki, hozirgacha birorta ham yangi tub Ferma soni topilgani yo'q. Endi matematiklar Ferma farazining o‘rniga (Eylerning misolidanoq uning noto‘g‘ri ekanligi kelib chiqqan edi), $s=5$ dan boshlab barcha Ferma sonlari murakkab sonlar degan, farazga ko‘proq moyildirlar.

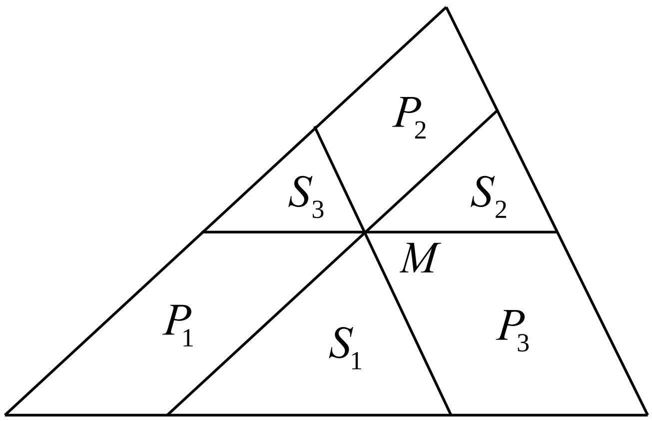
Xullas, o‘tgan asrning 90-yillarigacha o‘zining “so‘nggi teoremasi” bilan matematiklarning boshini qotirgan Ferma endi boshqa masalasi – “Mening tub sonlarim nechta” deya, miyig‘ida kulib turganday.

§ 10. “Uchburchaklar bilan bog‘liq yana bir ajoyib teorema” mavzusida variatsiyalar[10]

Jurnalning birinchi, ilk [FMI, 2001, №1] sonidagi N.N.G‘anixo‘jaev va M.A.Berdiqulov maqolasida quyidagi teorema keltirilgan:

Berilgan uchburchak ichida olingan ixtiyoriy M nuqtadan uning tomonlariga parallel kesmalar o‘tkazilganda hosil bo‘ladigan parallelogrammlar yuzlari P_1, P_2, P_3 uchburchaklar yuzlari S_1, S_2, S_3 bo‘lsa (1-rasm), u holda:

$$\frac{P_1 \cdot P_2 \cdot P_3}{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3} = 8. \qquad (1)$$



1-rasm.

Bu yerda mana shu ajoyib teorema bilan bog‘liq bir necha xulosa va xossalar muhokama qilinadi.

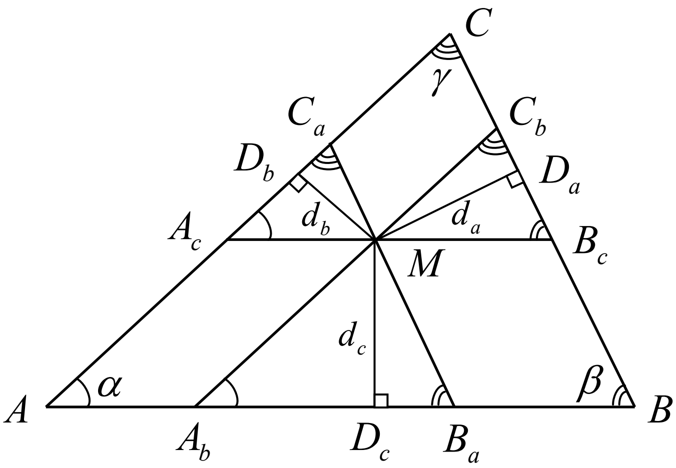
1. Birinchi navbatda (1) xossaning boshqa bir

---

[10] FMI, 2001, №2.

oz ixchamroq isbotini keltiraylik. Buning uchun berilgan ABC uchburchakda 2-rasmda ko'rsatilgan belgilashlarni qo'yib chiqamiz. Xususan, M nuqtadan tomonlarga tushirilgan MD_a, MD_b, MD_c perpendikulyarlar uzunliklari mos tartibda d_a, d_b, d_c deb belgilangan. U holda MA_cD_b uchburchakdan $MA_c = \dfrac{d_b}{\sin\alpha}$. Demak, AA_bMA_c parallelogram yuzi

$$P_a = MA_c \cdot MD_c = \frac{d_b \cdot d_c}{\sin\alpha}.$$



2-rasm.

Xuddi shu singari qolgan ikki parallelogram yuzlarini topamiz:

$$P_a = \frac{d_b \cdot d_c}{\sin\alpha}, \qquad P_b = \frac{d_a \cdot d_c}{\sin\beta}, \qquad P_c = \frac{d_a \cdot d_b}{\sin\gamma} \tag{2}$$

Endi ΔMB_cC_b dan $B_cD_a = d_a \mathrm{ctg}\beta$, $C_bD_a = d_a \mathrm{ctg}\gamma$ larni topamiz. Shuning uchun uning yuzi

$$S_a = \frac{1}{2} MD_a \cdot B_cC_b =$$

$$= \frac{1}{2} d_a^2 (\mathrm{ctg}\beta + \mathrm{ctg}\gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_a^2 \cdot \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} = \frac{d_a^2 \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

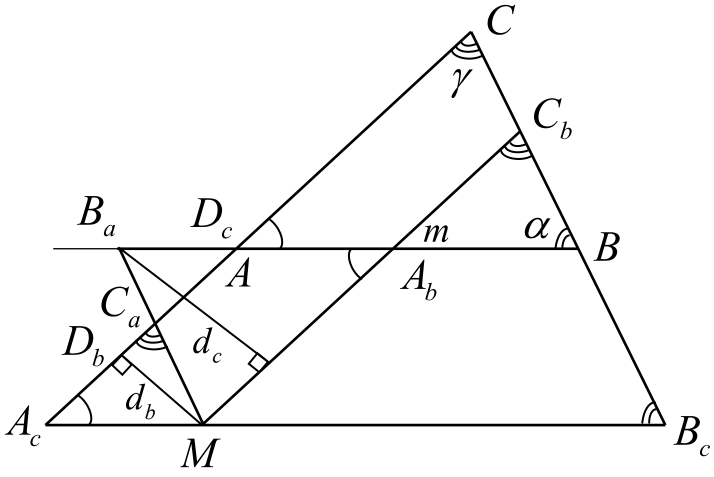
Shu singari qolgan ikki uchburchak yuzini topamiz:

$$S_a = \frac{d_a^2 \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}; \quad S_b = \frac{d_b^2 \cdot \sin\beta}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}; \quad S_c = \frac{d_c^2 \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}. \tag{3}$$

(2) va (3) formulalardan darhol talab etilgan tenglik kelib chiqadi:

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 8 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3. \qquad (4)$$

2. Biz (1) tenglikni atay (4) ko‘rinishda yozdik. Sababi: (4) tenglik M nuqta tekislikning ixtiyoriy joyida tanlanganda ham o‘z kuchini saqlaydi. Faqat, nuqtadan o‘tkaziladigan kesmalar uchburchaklar tomonlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishguncha davom ettirilishi lozim.

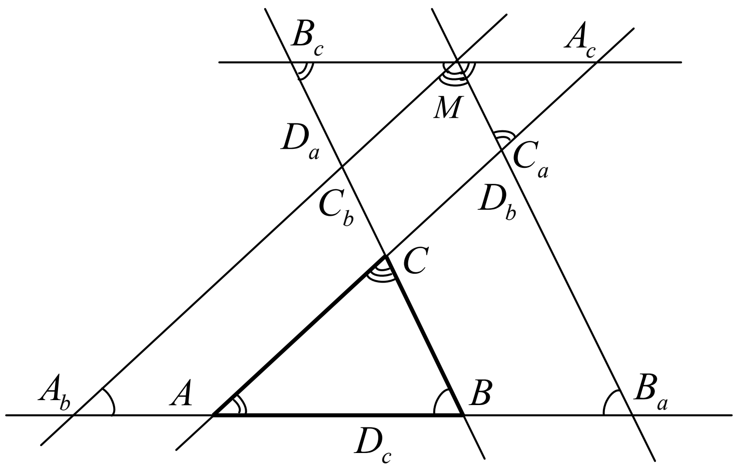


3-rasm.

Isbot. M nuqta uchburchak tomonlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlarda yotsa, (4) tenglikning har ikki tomoni ham 0 ga teng bo‘ladi. Endi M nuqta 3-rasmdagidek joylashgan bo‘lsin. Bu safar ham AA_bMA_c, BB_cMB_a, CC_aMC_b parallelogramlar yuzlari uchun (2) formulalar, MA_cC_a, MB_cC_b, MA_bB_a uchburchaklar yuzlari uchun (3) formulalar o‘rinli bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Shuning uchun (4) o‘rinli.

Masala. M nuqta BAC burchakka nisbatan vertikal burchak ichida yotgan holda ham (4-rasm) (4) tenglik to‘g‘riligicha qolishini isbotlang.

3. Endi (1) tenglikni quyidagi ekstremum masalasiga tatbiq qilamiz.



4-rasm.

Masala. Berilgan uchburchak ichida $\frac{P_a}{S_a}+\frac{P_b}{S_b}+\frac{P_c}{S_c}$ yig'indi eng kichik qiymat qabul qiladigan nuqtani toping.

Yechish. Bir tomondan arifmetik va geometrik o'rta qiymatlar orasidagi (Bu (6) ayniyatdan ham ravshan)

$$\frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}, \quad (x, y, z \ge 0) \tag{5}$$

tengsizlikka (Koshi tengsizligi)

$$\frac{P_a}{S_a}+\frac{P_b}{S_b}+\frac{P_c}{S_c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{P_a}{S_a}\cdot\frac{P_b}{S_b}\cdot\frac{P_c}{S_c}} = 3\sqrt[3]{8} = 6.$$

(5) tengsizlikning eng sodda isboti

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2} \tag{6}$$

ayniyatga asoslanadi (bunda $x=a^3$, $y=b^3$, $z=c^3$ deb olish lozim). Uning to'g'riligini bevosita tekshirib ko'rish mumkin.

Ma'lumki, (5) munosabatda tenglik bo'lishi uchun $x=y=z$ bo'lishi ham zarur, ham kifoya. Buni biz qarayotgan holga qo'llasak, shunday xulosa chiqadi: agar

$$\frac{P_a}{S_a}=\frac{P_b}{S_b}=\frac{P_c}{S_c}=2 \tag{7}$$

proporsiya o'rinli bo'ladigan M nuqta topilsa, xuddi shu nuqtada $\frac{P_a}{S_a}+\frac{P_b}{S_b}+\frac{P_c}{S_c}$ ifoda eng kichik qiymatga erishadi. Shunday qilib, yechimni nihoyasiga yetkazish uchun quyidagi sodda masalani hal etish qoldi:

Masala. (7) tenglik uchburchakning medianalari kesishgan nuqta uchun o'rinli bo'lishini ko'rsating.

Izoh. Qo‘llangan usul, tabiiyki, $\left(\frac{P_a}{S_a}\right)^r+\left(\frac{P_b}{S_b}\right)^r+\left(\frac{P_c}{S_c}\right)^r$ ifodaning eng kichik qiymatini topishda ham yaroqli (r-ixtiyoriy musbat son).

4. Bizga yig‘indisi 180° dan kichik ixtiyoriy musbat α va β burchaklar berilgan bo‘lsin. $\gamma=\pi-\alpha+\beta$ deb olsak, α,β,γ uchburchak burchaklari bo‘ladi. Bu uchburchak ichida olingan M nuqta uchun, bir tomondan, (2) formulalarni hamda

$$S_a=\frac{1}{2}\cdot d_a^2(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d_a^2\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

tenglikni hosil qilgan edik. Bu munosabatlar faqat trigonometrik funksiyalar ta’rifiga asoslanganini payqash qiyin emas. Ikkinchi tomondan, N.N.G‘anixo‘jaev va M.A.Berdiqulov maqolasida (1) tenglik trigonometriya qo‘llamasdan isbotlangan. Jumladan, yo‘l-yo‘lakay $S_a=\frac{P_b\cdot P_c}{2\cdot P_a}$ tenglik hosil qilingan. Bunga yuqoridagi va (2) formulalarni keltirib qo‘ysak, ortiqcha hadlar qisqarib ketib

$$\sin\alpha\,\cos\beta\;+\;\cos\alpha\,\sin\beta=\sin\gamma$$

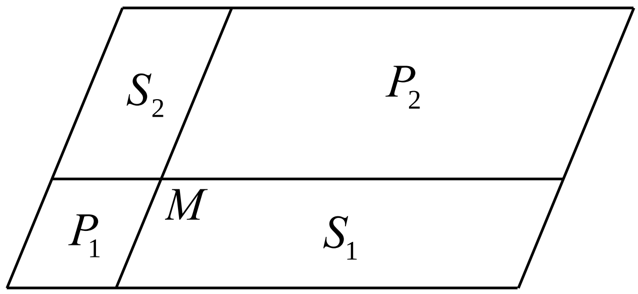
tenglik kelib chiqadi.

$\sin\gamma=\sin(\pi-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$ ekanini hisobga olsak, ikki burchak yig‘indisi sinusi uchun formulaning yana bir isbotiga ega bo‘lamiz.

5. Maqola yakunida (1) xossaga o‘xshash yana bir geometrik faktni keltiramiz.

Masala. Berilgan parallelogrammning ichidagi nuqtadan tomonlariga parallel kesmalar o‘tkazilganda u to‘rtta parallelogrammga bo‘linadi (5-rasm). Bir juft qarama-qarshi parallelogramm yuzlarining ko‘paytmasi ikkinchi juft qarama-qarshi parallelogramm yuzlarining ko'paytmasiga teng chiqishini isbotlang.

Bu xossa (1) tenglikka nisbatan ancha sodda, lekin u parallelepipedlar va ularning ko'p o'lchovli fazolardagi analoglari uchun ham o'rinliligi, mohiyatan geometriyadan ko'proq algebraga taaluqli ekani bilan diqqatga sazovor.



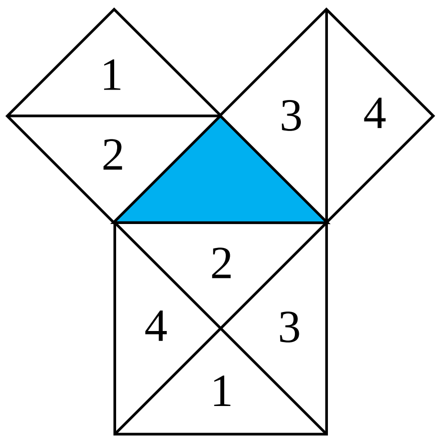
5-rasm.

Ha, matematika chindan poyonsiz va shu xususiyati bilan ham jozibali.

§ 11. Planimetriyaning eng g'aroyib teoremasi[11]

Planimetriya, ya'ni tekislikdagi shakllarning xossalari haqidagi fan – matematikaning eng qadimgi sohasidir. Dastlabki planimetrik xossa – to'g'ri burchakli va teng yonli uchburchak uchun Pifagor teoremasi bundan 4000 yildan ham ko'proq avval ma'lum bo'lgan (1- rasm).

Matematika tarixida isbotlash yo'li bilan o'rnatilgan dastlabki teoremalar, masalan, Fales teoremasi (eradan oldingi 6-asr) planimetriyaga oid. Qadimgi yunon geometrlari shakllarning ko'plab xossalarini topganlar. Xususan, Evklidning "Negizlar" asarida ikki yuzdan ziyod



1-rasm.

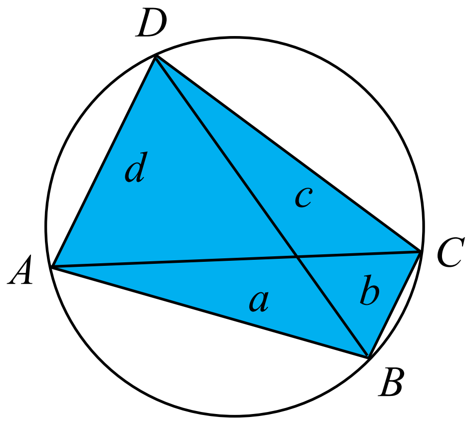
[11] FMI, 2005, №3.

teorema isbotlangan.

Yunon matematiklari ochgan xossalardan eng so‘ngilaridan biri bu – Ptolemey teoremasi: $ABCD$ – aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchak bo‘lsa,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

ya’ni qarama-qarshi tomonlari o‘zaro ko‘paytirilib, ko‘paytmalar qo‘shilsa, yig‘indi diagonallari ko‘paytmasiga teng chiqadi (2-rasm).



2-rasm.

Mashq. Ptolemey teoremasini isbotlang.

Yangi teoremalar izlash Sharq matematiklari tomonidan davom ettirilgan. Masalan, hind matematigi Braxmagupta teoremasi: ichki chizilgan $ABCD$ to‘rtburchak yuzi

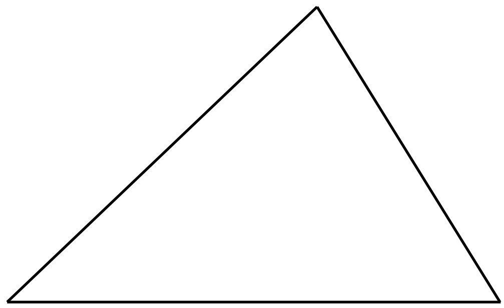
$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

bunda $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Yaqin va o‘rta Sharq matematiklari astronomiya ehtiyoji tufayli ko‘proq trigonometriya bilan shug‘ullanganlar. Xususan, sinuslar teoremasining isboti birinchi marta Beruniyning “qonuni Mas’udiy” asarida bayon qilingan.

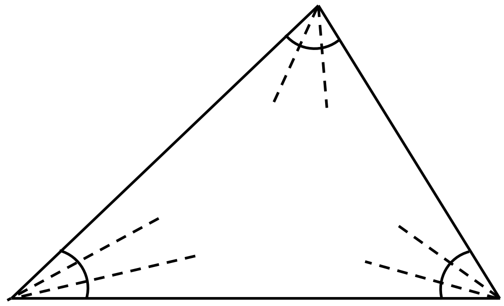
Uyg‘onish davridan boshlab yevropada matematika ham jadal rivojlana boshlagan. Ayniqsa, planimetriyaga oid son-sanoqsiz teoremalar isbotlangan. 19-asrga kelib “planimetriyada ochilishi mumkin bo‘lgan diqqatga sazovor teoremalar topilib bo‘ldi” degan fikr shakllangan va matematiklarning asosiy e’tibori geometriyaning stereometriya, proyektiv geometriya, differensial geometriya, topologiya kabi yangi va yuksakroq boblariga yo‘naltirilgan.

Mana shunday vaziyatda 1909 yili AQShlik matematik Morley (F. Morley) teoremasining isbotlanishi hammani hayratga soldi. Chunki u juda g‘aroyib edi. Bunga amin bo‘lish uchun ko‘z oldimizga mana bunday “multfilm”ni keltiraylik:



1-kadr.

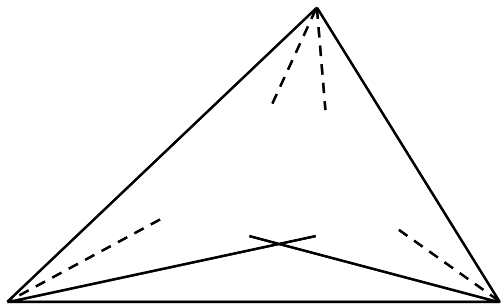
1-kadr: ixtiyoriy uchburchak olamiz.



2-kadr.

2-kadr: uning har bir burchagini teng uchga bo‘luvchi nurlar chiqaramiz (ular *trisektrisalar* deyiladi).

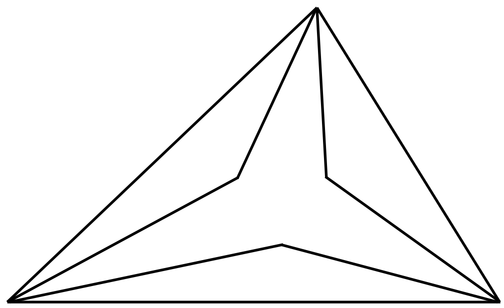
3-kadr: uchburchakning bir tomoniga qarab chiqqan ikki trisektrisani *qo‘shni trisektrisalar* deb ataymiz. Bunda uch juft qo‘shni trisektrisa hosil bo‘ladi. Ulardan bir jufti rasmda ajratib ko‘rsatildi.



3-kadr.

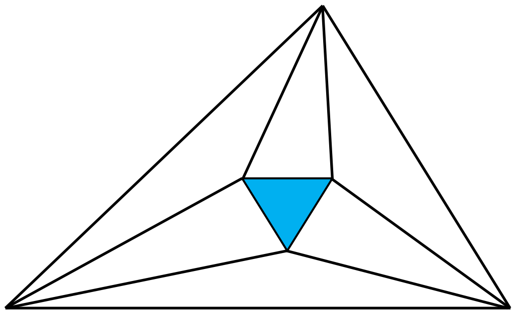
4-kadr: qo‘shni trisektrisalar kesishgan nuqtalarni belgilaymiz.

5-kadr: belgilangan nuqtalarni tutashtirib, uchburchak chizamiz. Morley teoremasi: bu uchburchak muntazam bo‘ladi!



4-kadr.

Bunga ishonish qiyin, albatta. Axir biz boshida ixtiyoriy uchburchak oldik-ku. Nahotki, doim teng tomonli uchburchak chiqaveradi? Xususiy holda teng tomonli chiqqan taqdirda ham, uchburchakning bir uchini tekislik bo'ylab jildirsak, olgan uchburcha-

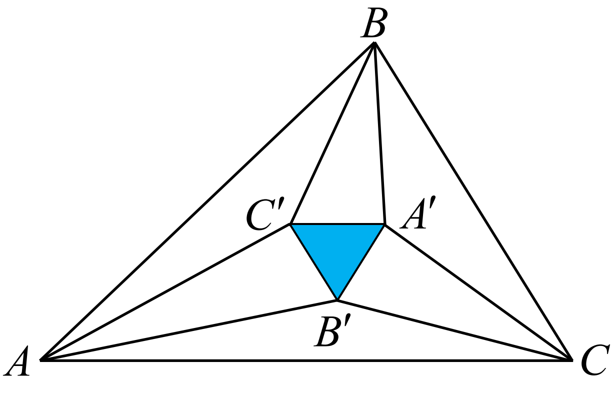


5-kadr.

gimiz turli qiyofada qiyshaya boshlaydi. Nahotki bunda trisektrisalar kesishgan nuqtalardan tashkil topgan uchburchak muntazamligicha qolaveradi? Ishonish juda ham qiyin.

Lekin qandaydir sirli sababga ko'ra bu xossa o'rinli ekan.

Bu xossani F.Morley faraz sifatida 1899 yilda tanish matematiklarga taklif etgan (1929 yilda Yaponiyada chiqadigan matematik jurnalda bostirgan). Garchi u maktab dasturi doirasidagi xossa bo'lsa ham, dastlabki isboti 1909 yildagina topilgan!!! Ya'ni, matematiklar bu masala ustida o'n yil bosh qotirishgan. Chamasi, bunday xossaning to'g'ri bo'lishiga ishonchning sustligi uning isbotini tezda izlab topishga monelik qilgan (to'g'riligi tayin bo'lgan xossani isbotlash ancha yengil kechishi hammaga yaxshi ma'lum).



Morley teoremasining dastlabki isbotlari ancha murakkab bo'lgan. Hozir uning o'ndan ziyod isboti ma'lum. Ularning ko'plari baribir uzun va sodda emas, boshqalari nisbatan qisqa bo'lsa ham, ammo kutilmagan g'oyalarga tayanadi. Quyida Z.A.Skopets va M.Berje kitoblaridagi isbotlarga asoslanadigan eslab qolishga o‘ng‘ay isbotni bayon qilamiz.

Berilgan ABC uchburchak burchaklarining kattaliklarini 3α, 3β va 3γ deb belgilaymiz (3 ga karrali – qulaylik uchun), Demak,

$$\alpha + \beta + \gamma = 60°. \tag{1}$$

ABC, $AB'C$ va ABC' uchburchaklarga sinuslar teoremasini qo‘llaymiz:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\sin 3\beta}{\sin 3\gamma},\quad \frac{AC}{AB'}=\frac{\sin(180^\circ-\alpha-\gamma)}{\sin\gamma}=\frac{\sin\left(\alpha+\gamma\right)}{\sin\gamma}=\frac{\sin(60^\circ-\beta)}{\sin\gamma},$$

$$\frac{AB}{AC'}=\frac{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\frac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{\sin\beta}=\frac{\sin(60^\circ-\gamma)}{\sin\beta}.$$

Bu yerda ikki martadan keltirish formulasi va (1) tenglikdan foydalanildi. Endi birinchi tenglikni hadma-had ikkinchi tenglikka bo‘lamiz va uchinchi tenglikka ko‘paytiramiz. Bunda chap tomonda AB va AC qisqarib ketadi:

$$\frac{AB'}{AC'}=\frac{\sin 3\beta\sin\gamma\sin(60^\circ-\gamma)}{\sin 3\gamma\sin\beta\sin(60^\circ-\beta)}. \tag{2}$$

Bu tenglikning chap tomoni ancha soddalashar ekan:

$$\begin{aligned}
\sin 3\varphi &= \sin(2\varphi+\varphi)=\sin 2\varphi\cos\varphi+\cos 2\varphi\sin\varphi= \\
&= 2\sin\varphi\cos^2\varphi+(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\sin\varphi= \\
&= \sin\varphi(3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=4\sin\varphi\left(\frac{3}{4}\cos^2\varphi-\frac{1}{4}\sin^2\varphi\right)= \qquad (3)\\
&= 4\sin\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin\varphi\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi\right)= \\
&= 4\sin\varphi\sin(60^\circ-\varphi)\sin(60^\circ+\varphi).
\end{aligned}$$

Mashq. Isbotlang:

$$\cos 3\varphi = \cos\varphi(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi) = 4\cos\varphi\cos(60^\circ - \varphi)\cos(60^\circ + \varphi).$$

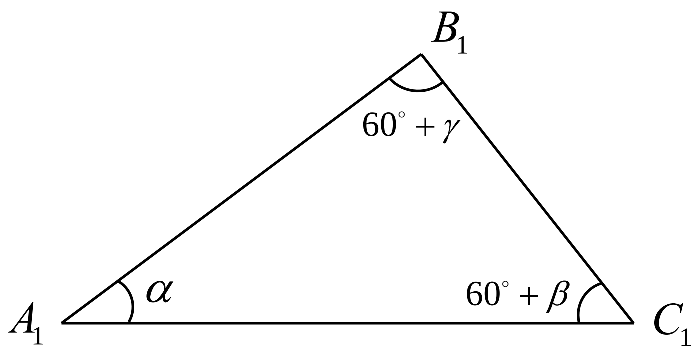
(3) formulani (2) tenglikdagi $\sin 3\alpha$ va $\sin 3\beta$ ga qo‘llasak,

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{\sin(60^\circ + \gamma)}{\sin(60^\circ + \beta)} \tag{4}$$

proporsiya hosil bo‘ladi.

Shu joyda mushohadaning eng nozik qadamiga keldik: burchaklari α, $60^\circ + \beta$ va $60^\circ + \gamma$ bo‘lgan uchburchak mavjud, chunki (1) tenglikka ko‘ra, bu burchaklar yig‘indisi 180° ga teng. Uning uchlari mos tartibda A_1, B_1, C_1 bo‘lsin.

Sinuslar teoremasiga ko‘ra $\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{\sin(60^\circ + \beta)}{\sin(60^\circ + \gamma)}$. Buni (4) tenglik bilan taqqoslasak, $\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{AB'}{AC'}$. Shunday qilib, $AB'C'$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarning bittadan burchagi bir xil (α ga teng) va bu burchakka yopishgan tomonlari proporsional ekan. U holda bu ikki uchburchak o‘xshash, demak, mos burchaklari o‘zaro teng:



$$\angle AB'C' = 60^\circ + \gamma \text{ va } \angle AC'B' = 60^\circ + \gamma.$$

Xuddi shu singari,

$\angle BA'C' = 60^\circ + \gamma$ va $\angle BC'A' = 60^\circ + \alpha$

$\angle CA'B' = 60^\circ + \beta$ va $\angle CB'A' = 60^\circ + \alpha$

Endi biz $A'B'C'$ uchburchakning burchaklarini hisoblay olamiz. Masalan,

$$\angle A'C'B' = 360^\circ - \angle AC'B - \angle BC'A' - \angle AC'B' =$$

$$= 360^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) - (60^\circ + \alpha) - (60^\circ + \beta) = 60^\circ$$

Shu singari $\angle A'C'B' = \angle A'C'B' = 60^\circ$ g‘aroyib tarzda uchburchak $A'B'C'$ muntazam bo‘lib chiqdi.

Mashq. ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi R bo‘lsa, u holda $A'B'C'$ uchburchak tomoni $8R\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma$ ga teng bo‘lishini isbotlang.

Mashq. Morley teoremasining sof geometrik (ya’ni, trigonometriyadan foydalanmaydigan) yoki algebraik isbotini mustaqil toping.

§ 12. Shakl va xossa[12]

Pifagor teoremasining tasdig‘iga ko‘ra, to‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlariga yasalgan kvadratlar yuzlarining yig‘indisi gipotenuzasiga yasalgan kvadrat yuziga teng. Bu tasdiq, odatda, mana bunday chizmada namoyish qilinadi (1-rasm; a, b – katetlar, c – gipotenuza):

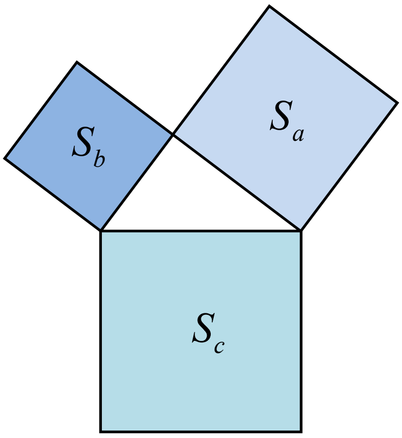
$$S_c = S_a + S_b \qquad (1)$$

Aslida, isbot davomida (1) tenglikka nisbatan aniqroq xossa hosil bo‘ladi:

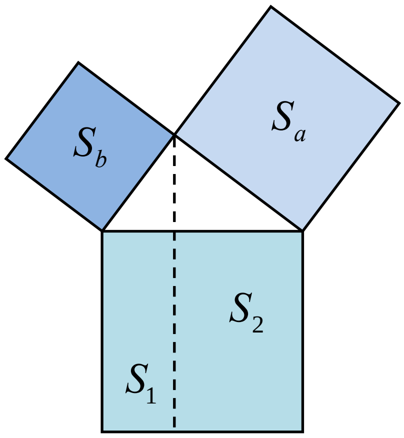
I. Agar to‘g‘ri burchak uchidan gipotenuzaga perpendikulyar tushirilsa, uning davomi gipotenuzaga yasalgan kvadratni ikkiga bo‘lib, bu bo‘laklarning yuzlari katetlarga yasalgan kvadratlar yuzlariga mos tartibda teng bo‘ladi (2-rasm).

---

[12] FMI, 2004, №1.

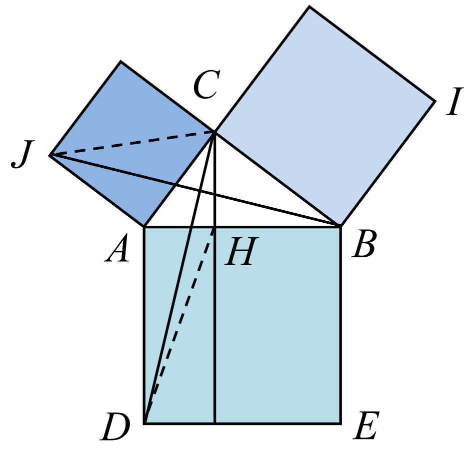


1-rasm.



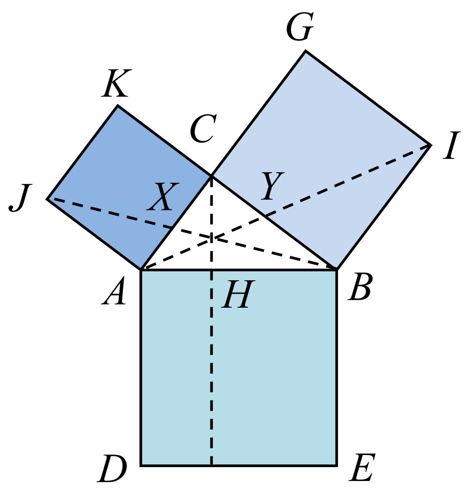
2-rasm.

Isbotning o‘ziga kelsak, masalan, $S_1 = S_b$ tenglikni keltirib chiqarish uchun, BJ va CD kesmalarni o‘tkazish kifoya (3-rasm), chunki ABJ va ACD uchburchaklarning ikki-tadan tomonlari teng: $AJ = AC$, $AB = AD$, ular orasidagi burchaklar ham teng: $\angle JAB = \angle CAD$. Demak, bu ikki uchburchak teng. Lekin birinchi uchburchak JAC uchburchakka tengdosh (asoslari umumiy, balandliklari bir xil), ikkinchi CAD uchburchak esa ADH uchburchakka tengdosh. Bundan $S_1 = S_b$ kelib chiqadi.



3-rasm.

$AJ = AC$, $AB = AD$, $\angle JAB = \angle CAD$ tengliklardan nafaqat ABJ, ACD uchburchaklarning tengligi, balki ACD uchburchak A nuqta atrofida 90° burilsa, roppa-rosa ABJ uchburchak hosil bo‘lishi ham kelib chiqadi!



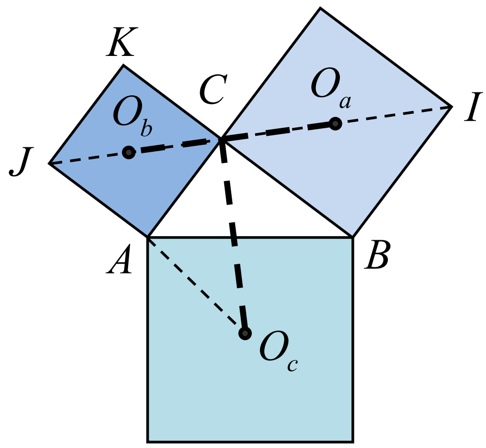
4-rasm.

Demak, $BJ \perp CD$.

II. Xuddi shu singari, AI va CE kesmalar ham o‘zaro teng va perpendikulyar.

III. AI, BJ, CH to‘g‘ri chiziqlar bir nuqtada kesishadi (4-rasm).

Bu xossani isbotlang. (Isbotga ishora: CDE uchburchakni yuqoriga parallel ko‘chiring [Yaglom I.M. Geometricheskie preobrazovaniya. 1 va 2 jildlar. 1955-1956].)



5-rasm.

BJ va AI kesmalar uchburchak tomonlarini mos ravishda X va Y nuqtalarda kesib o‘tsin (4-rasm).

IV. $CX = CY$. Isboti. BCX va BKJ uchburchaklar o‘xshash bo‘lgani uchun $\frac{CX}{KJ} = \frac{BC}{BK}$, bundan $\frac{CX}{b} = \frac{a}{a+b}$. Shu singari ACY va AGI uchburchaklar o‘xshashligidan $\frac{CY}{a} = \frac{b}{a+b}$. Bu ikki tenglikni solishtirib, $CX = CY$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Endi diqqatni tomonlarga yasalgan kvadratlar markazlariga qarataylik.

V. C nuqta JI kesmada yotadi.

Bu ochiq-oydin. (shunday bo‘lsada, o‘ylab ko‘ring!)

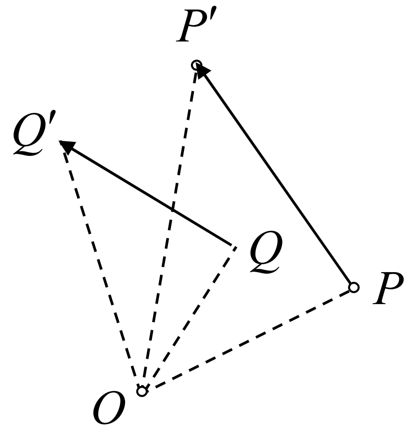
Bundan C, O_a, O_b nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotishi kelib chiqadi (5-rasm).

VI. O_aO_b va CO_c kesmalar teng va perpendikulyar. Bu xossaning eng nafis isboti maxsus geometrik almashtirishga asoslanadi.

Bu almashtirishda tekislikning nuqtalari tayin O nuqtaga nisbatan 45° ga burilib so‘ng OA kesma $\sqrt{2}$ marta cho‘ziladi.

Shunday qilib, P nuqta P' ga akslansa, u holda 1) $\angle POP' = 45^\circ$; 2) $OP' = \sqrt{2}OP$.

Agar P nuqta P' ga akslansa, PP' kesma OP kesmaga teng va tik boʻladi (6-rasm).



6-rasm.

Bunday almashtirish ikki xil: birida nuqta O atrofida musbat (soat mili harakatiga teskari) yoʻnalishida, ikkinchisida esa manfiy (soat mili harakati) yoʻnalishida buriladi. Ularni mos tartibda S_0^+ va S_0^- orqali belgilaymiz

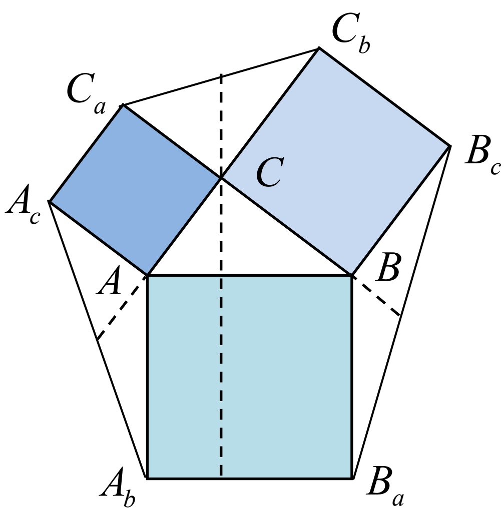
VI xossaning isboti. Shaklga avval S_0^+ almashtirishni qoʻllaymiz. Bunda O_c nuqta B ga, C esa K ga oʻtadi. Demak, O_cC kesma BK ga oʻtar ekan.

Keyin S_0^- almashtirishni qoʻllaymiz. Bunda O_a nuqta B ga, O_b esa K ga oʻtadi. Demak, O_aO_b kesma bu safar ham BK ga oʻtar ekan. Bundan $O_aO_b = BK$ kelib chiqadi. Bir kesmani $+45^\circ$, ikkinchisini -45° ga burganda ular ustma-ust tushar ekan, demak, oʻzaro perpendikulyardir.

Masala. VI xossa ABC uchburchak ixtiyoriy boʻlganda (ya’ni C burchak toʻgʻri boʻlmasa ham) oʻrinli boʻlishini koʻrsating.

VII. AO_a, BO_b va CO_c toʻgʻri chiziqlar bir nuqtadan oʻtishini isbotlang.

Qoʻshni kvadratlarning yondosh uchlarini tutashtirsak, uchta uchburchak hosil boʻladi (7-rasm).



7-rasm.

VIII. AA_bA_c, BB_aB_c va CC_aC_b uchburchaklar ABC uchburchak bilan tengdosh.

Chindan, $\angle BAC = \alpha$ bo‘lsa,

$$\angle A_bAA_c = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \alpha).$$

Shuning uchun ABC va AA_bA_c uchburchaklar tengdoshligi

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - \alpha)$$

tenglikdan kelib chiqadi.

Masala. VIII xossani trigonometriyadan foydalanmay, sof geometrik yo‘l bilan isbotlang.

Izoh. Isbotdan ko‘rinib turibdiki, bu xossa ham ixtiyoriy uchburchak uchun o‘rinli. Uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lgan hol alohida qo‘shimcha xossa bilan xarakterlanadi:

IX. ABC va CC_aC_b uchburchaklar teng va A_cB_c to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik

X. CA va CB tomonlarning davomi (7-rasm) mos tartibda AA_bA_c va BB_aB_c uchburchaklarga mediana bo‘ladi. Xuddi shu singari ...

– Shoshmang, domla, shoshmang. O‘quvchiga ham nimadir qolsin.

– Marhamat, “nimadir”gina emas, istalgancha yangi xossa topishingiz mumkin. Gap izlash va izlanishda. Albatta, bu jarayonni hali rosmona tadqiqot deb bo‘lmaydi. Lekin tadqiqot qobiliyati, matematik iste’dod maktab yoshidan mana shunday “jajji tadqiqot”lar natijasida shakllanadi va charxlanadi.

Masala. X xossani isbotlang. Uning oxiridagi uchnuqta o‘rnida qanday xossa kelishi lozim?

§ 13. Muammo hal bo‘ldimi? Marhamat, yangi muammo![13]

Nihoyat, Fermaning “Buyuk teoremasi”[14] hal etildi.

Matematika, umuman fan tarixida hech bir masala xususida bu qadar ko‘p latifalar, hikoyalar to‘qilmagan, bu qadar ko‘p noto‘g‘ri isbot o‘ylab topilmagan, muammoni yechaman deb bu qadar ko‘p odam aqldan hatto ozmagan. Mana, Ferma teoremasi haqidagi hangomalardan biri:

“Klassik matematikaning so‘nggi yirik vakili” nomiga musharraf bo‘lgan mashhur ingliz matematigi G.H.Hardi Yevropaga boradigan bo‘lsa, kemaga o‘tirishdan oldin ikki-uch hamkasbiga “Men Ferma teoremasini isbotladim” degan telegramma yuborar ekan. Sohilga tushgach, “Afsuski, isbotda xato o‘tib ketibdi” mazmunida yana telegramma jo‘natar ekan. U bu ishni har safar La-Mansh bo‘g‘izini u yoqqa ham, bu yoqqa ham kesib o‘tishdan oldin erinmay takrorlar ekan. Bundan ajablangan hamkasblari oxiri undan so‘rashibdi: “Sizga nima zarur buncha ovoragarchiligu pul sarflashga?”. Shunda olim javob bergan ekan:

– Mabodo kema falokatga uchrab, cho‘kib ketsam, hamkasblarim “Hardi Ferma teoremasining isbotini topgan edi” deb o‘ylashadi-ku.

Haa... Fermaning quvligini qarang: “Juda chiroyli yechimini topdim-u, ammo kitob hoshiyasida joy yetmagani uchun bayonini keltirmadim” emish! Nima,

---

[13] FMI, 2002, №1.

[14] Pyer Ferma (1601-1665) – fransuz matematigi. Kasbi yurist bo‘lgan – Tuluza shahri parlamentining adliya maslahatchisi bo‘lib ishlagan. Shunga qaramasdan matematika rivojiga ulkan hissa qo‘shgan. Uning teoremalaridan biri Fermaning buyuk teoremasi “Fermaning so‘nggi teoremasi” va “Fermaning katta teoremasi” deb ham ataladi. Bu uch nomdan oxirgisi to‘g‘riroq, chunki Fermaning o‘zi isbotlagan kichik teoremasi ham bor – u haqda “Chin qiziqarli matematika” III qismida hikoya qilingan.

kitobning narirog‘ida o‘sha nafis isbot sig‘adigan bo‘sh joy yo‘q ekanmi? Kitobning tituligacha yozuv to‘la ekanmi? Qolaversa, Tuluza shahri parlamentining maslahatchisi uyida qog‘ozga o‘t tushgan ekanmi?

Nima bo‘lganda ham Fermaga tan berish kerak. Zotan, professional matematiklar va ayniqsa, shuhrat orttirish orzusidagi havaskor matematiklarni bu qadar o‘ziga tortadigan masala noyob hodisa bo‘lib, bunday masalani qo‘yish har kimga ham nasib etavermaydi.

Jurnalning [FMI, 2001, №2] sonidagi Sh.A.Ayupov maqolasida Fermaning buyuk teoremasi ingliz matematigi Endryu Uaylz tomonidan qanday isbotlangani hikoya qilingan.

O‘z-o‘zidan savol tug‘iladi: bu mashhur muammo hal bo‘lishi bilan matematiklar hayotida qandaydir bo‘shliq paydo bo‘lmaydimi?

Hayriyatki, yo‘q. Birinchidan, Uaylz topgan isbot o‘ta murakkab bo‘lib, matematikaning eng zamonaviy sohalaridagi natijalarga tayanadi. Ferma zamonida bunday isbotdan asar ham bo‘lishi mumkin emasdi. Xo‘sh, Fermaning o‘zi topgan elementar isbot-chi? Garchi bunday isbot mavjudligining ehtimoli milliondan birdan ham kichikroq bo‘lsa-da, lekin topilishi mumkinligini ham inkor etib bo‘lmaydi. Shu munosabat bilan muammo qo‘yish tabiiy:

Fermaning “buyuk (so‘nggi, katta) teoremasi”ni (u endi faraz emas, chindan rosmana teorema) elementar usulda isbotlab bo‘lmasligini isbotlash mumkinmi?

Matematika tarixida bunday natijalar ma’lum. Masalan, Evklidning parallellar haqidagi beshinchi postulatini isbotlash ham, rad etish ham mumkin emasligi isbotlangan (N.Lobachevskiy, E.Beltrami; mantiqiy mukammal isbot muallifi – F.Kleyn.) Ikkinchidan, AQSHdagi Dallas shahrilik bankir, matematika havaskori Endryu Bil (E.Beal) yaqinda quyidagi muammoni hal etgan kishiga maxsus mukofot berishini e'lon qildi:

x, y, z, n, m, l butun musbat sonlar hamda n, m, l ikkidan katta bo'lsin. Agar $x^n + y^m = z^l$ bo'lsa, u holda x, y, z birdan katta umumiy bo'luvchiga ega bo'ladi.

Boshqacha qilib aytganda, agar n, m, l ikkidan katta butun sonlar bo'lsa, $x^n + y^m = z^l$ tenglamani qanoatlantiradigan o'zaro tub butun musbat x, y, z sonlar mavjud emas.

E.Bil mukofotining dastlabki qiymati 5000 AQSH dollariga teng bo'lib, to masala yechilguncha unga har yili 5000 dollardan qo'shilib, 50 000 dollargacha ortishi belgilab qo'yilgan.

Biz, albatta, kitobxonlarga Fermaning buyuk teoremasidan ham murakkabroq masalani yechishni tavsiya etish niyatimiz yo'q. Matematikaga bo'lgan iqtidorni sarflash uchun bunga qaraganda samaraliroq masalalar ko'p. Qolaversa, yengil shon-shuhrat ishqibozlari yuboradigan yechimlarni tekshirib ko'rishga na muallifning, na jurnal tahririyatining vaqti bor. Mabodo da'vogar chiqquday bo'lsa, "yechimi"ni E.Bil mukofoti komissiyasiga yuborishlari mumkin (uning elektron pochta adresi: *mauldin@unt.edu*).

Bu yerda Bil masalasi eslanganiga sabab, birinchidan, matematikaning tubsiz va poyonsizligi to'g'risida yana bir marta tasavvur hosil qilish. Qolaversa, matematika olamida bo'layotgan yangiliklardan xabardor bo'lib turish ortiqcha emas. (E.Bil muammosi va mukofoti haqida batafsil ma'lumot olish uchun tilga olingan komissiya a'zosi Mauldinning maqolasiga (R.D.Mauldin. A Generalization of Fermat's Last Theorem: The Beal Conjecture and Prize Problem. Notices of the American Mathematical Society, 1997, 44, №11) murojaat etishni maslahat beramiz. Ikkinchidan, E.Bil muammosi bahonasida o'quvchilarga bir necha masala taklif etamiz:

A1. Agar x, y, z o'zaro tub bo'lishi shart bo'lmasa, $x^n + y^m = z^l$ o'rinli hamda n, m, l ikkidan katta bo'ladigan sonlar mavjudligini ko'rsating. (Bu masalani yechishda kompyuterdan foydalanish yaxshi samara beradi).

A2. $1 + y^3 = z^2$ tenglamani yeching.

A3. "Ag'darilgan Ferma teoremasi".

a) Agar $n > 2$, bo'lsa, $n^x + n^y = n^z$ tenglama butun musbat yechimlarga ega bo'lmasligini isbotlangan;

b) $n = 2$ bo'lganda bu tenglamaning barcha yechimlarini toping.

Fermaning buyuk teoremasi va Bil farazidan farqli bu masalalar maktab dasturi doirasida yechiladi.

§ 14. Kutilmagan joyda ... toshyong'oq[15]

Odatda maktab matematikasini elementar matematika deb atashadi. Bu "boshlang'ich, sodda" degani. Ammo aslida ana shu elementar matematikada ham sodda bo'lmagan, hatto hozirgacha hal etilmagan masalalar, shuningdek, yangilik qilish imkoniyati bor sohalar oz emas. Bu safar elementar bo'lishiga qaramay yechimi matematiklardan ancha-muncha zahmat talab etgan bir masala to'g'risida hikoya qilamiz. Uni dastlab kim qo'ygani noma'lum, lekin yechimi 19 asr oxiridagina topilgan.

Hikoyamizni uchburaklarning yaxshi tanish xossalaridan boshlaymiz.

To'g'ri teoremalar turkumi. Teng yonli uchburchakning

1) ikki burchagi teng;

2) ikki balandligi teng;

[15] FMI, 2003, №6.

3) ikki medianasi teng;

4) ikki bissektrisasi teng.

Bu yerda teoremalarning qisqa shakllari keltirildi. To‘laroq aytilsa: teng yonli uchburchakning asosiga yopishgan burchaklari teng, yon tomonlarga tushirilgan medianalari, balandliklari, bissektrisalari mos ravishda o‘zaro teng bo‘ladi.

To‘g‘ri teoremalarning isboti. ABC uchburchakda $AB = AC$ bo‘lsin.

1-xossa isboti:

Asosga AH balandlik tushiramiz.

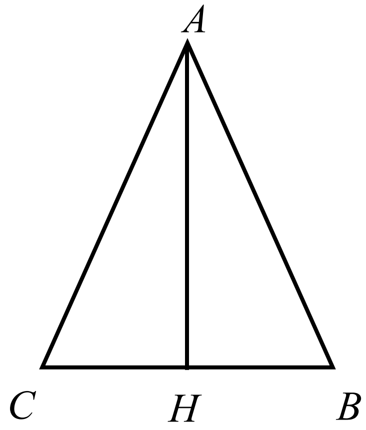
ABH va ACH uchburchaklar to‘g‘ri burchakli.

AH katet umumiy.

AB va AC gipotenuzalar shartga ko‘ra teng.

Demak, $\Delta ABH = \Delta ACH$ (1-rasm).

Bundan $\angle ABH = \angle ACH$ kelib chiqadi!



1-rasm.

2-xossa isboti:

CP va BQ balandliklarni tushiramiz.

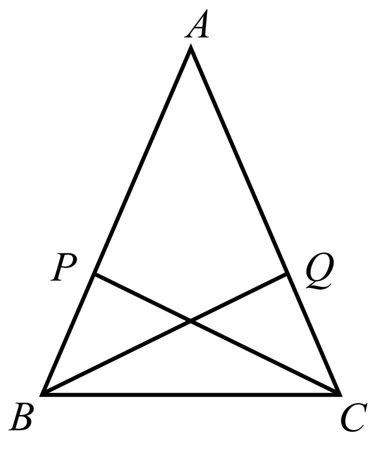
BCP va BCQ uchburchaklar to‘g‘ri burchakli.

BC gipotenuza umumiy.

$\angle BCQ$ va $\angle BCP$ lar teng (yuqorida isbotlandi).

Demak, $\Delta ABH = \Delta ACH$ (2-rasm).

Bundan $CP = BQ$ kelib chiqadi!



2-rasm.

3-xossa isboti:

BQ va CP medianalarni o‘tkazamiz.

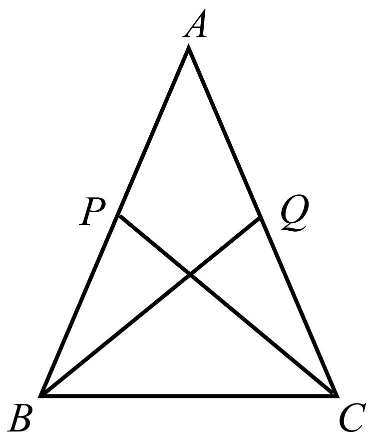
BP va CQ teng tomonlarning yarimlari bo‘lgani uchun teng: $BP = CQ$.

BC tomon umumiy, $\angle BCQ$ va

$\angle BCP$ burchaklar teng (yuqorida isbotlangan).

Demak, $\Delta BCP = \Delta BCQ$ (3-rasm).

Bundan $PC = BQ$ kelib chiqadi!



3-rasm.

4-xossa isboti:

CP va BQ bissektrisalarni tushiramiz.

$\angle PBC = \angle QCB$.

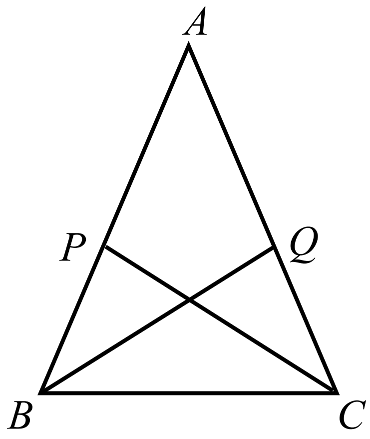
Demak, ularning yarimlari ham teng:

$\angle BCP = \angle CBQ$ (4-rasm).

BC tomon umumiy.

Shuning uchun, $\Delta BCP = \Delta BCQ$.

Bundan $PC = BQ$ kelib chiqadi!



4-rasm.

Teoremalarning ko‘pi “A bo‘lsa, B bo‘ladi” ko‘rinishda yoziladi. Bunda A tasdiq teoremaning sharti, B tasdiq esa teoremaning xulosasi deb yuritiladi.

Endi “A bo‘lsa, B bo‘ladi” degan teorema bilan bir paytda, “B bo‘lsa, A bo‘ladi” degan tasdiqni olamiz. U, odatda, berilgan teoremaga “teskari teorema” deb ataladi. Shunday qilib, “teskari teorema”da to‘g‘ri teoremadagi shart bilan xulosaning o‘rinlari almashgan bo‘ladi.

Masalan, ABC uchburchakda C burchak to‘g‘ri burchak bo‘lsa, $AC^2 + BC^2 = AB^2$ bo‘ladi, – bu Pifagor teoremasi, ABC uchburchakda $AC^2 + BC^2 = AB^2$ bo‘lsa, C burchak to‘g‘ri burchak bo‘ladi, – bu Pifagor teoremasiga teskari teorema.

Arimetikadan misol: raqamlarining yig‘indisi 9 ga bo‘linadigan son to‘qqizga bo‘linadi. Bu teoremada shart bilan xulosa aniq ajratilmagan. Lekin bu qiyin emas: n o‘nli sanoq sistemada yozilgan butun musbat sonni belgilasin. U holda

n ning raqamlari yig'indisi 9 ga qoldiqsiz bo'linsa, n to'qqizga qoldiqsiz bo'linadi, – to'g'ri teorema,

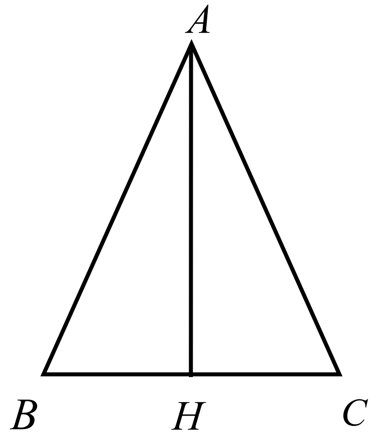
n to'qqizga qoldiqsiz bo'linsa, n ning raqamlari yig'indisi to'qqizga qoldiqsiz bo'linadi, – teskari teorema.

Keltirilgan ikki misolda to'g'ri teorema ham, unga teskari teorema ham o'rinli, ya'ni isboti bor. Lekin, umuman olganda "teskari teorema" to'g'ri bo'lishi mutlaqo shart emas. Masalan, $a = b$ bo'lsa, $a^2 = b^2$ bo'ladi, – bu yaxshi ma'lum xossa, ammo unga "teskari teorema" noto'g'ri, chunki $a^2 = b^2$ bo'lgani bilan $a = b$ bo'lishi shart emas. Xullas, "teskari teorema" teorema bo'lmasligi mumkin! Bu o'rinda "teskari teorema" iborasi shunchaki atama ekanini e'tiborda tutish lozim. Shuning uchun biz uni qo'shtirnoq ichiga olib yozayapmiz. Bordiyu, "teskari teorema" isbotlansa, u rosmona teoremaga aylanadi va qo'shtirnoqlarni olib tashlash mumkin bo'ladi. Bu holda bir-biriga teskari teoremalar juftligi hosil bo'ladi. Ular birlashtirilib

$$A \Leftrightarrow B$$

ko'rinishda ham yoziladi (o'qilishi: A va B o'zaro teng kuchli).

Mana shu mantiqiy-lirik chekinishdan so'ng, teng yonli uchburchakning ko'rilgan xossalariga qaytaylik. To'rtala xossa uchun ham teskari teoremalar o'rinli ekan.



5-rasm.

Teskari teoremalar turkumi. Uchburchakning

1) ikki burchagi teng, yoki
2) ikki balandligi teng, yoki
3) ikki medinasi teng, yoki
4) ikki bissektrisasi teng bo'lsa,

u teng yonli bo‘ladi.

1-teskari teorema isboti:

$\angle ABC = \angle ACB$ bo‘lsin (5-rasm).

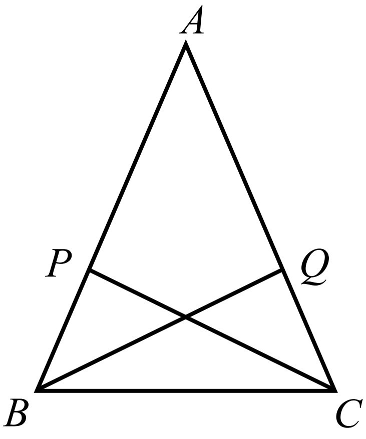
BC tomonga AH balandlik tushiramiz.

$\angle AHB$ va $\angle AHC$ burchaklar to‘g‘ri, demak, teng.

AH katet umumiy.

Shunday qilib, $\Delta ABH = \Delta ACH$.

Bundan $AB = AC$ kelib chiqadi!



6-rasm.

2-teskari teorema isboti:

CP va BQ balandliklarni tushiramiz.

Berilganga ko‘ra $CP = BQ$.

BPC va BQC uchburchaklar to‘g‘ri burchakli (6-rasm).

BC gipotenuza umumiy.

Demak, $\Delta BCQ = \Delta BCP$.

Bundan $BP = CQ$ kelib chiqadi. Hozircha isbot tugagani yo‘q.

ACP va ABQ uchburchaklar to‘g‘ri burchakli.

A burchak umumiy.

Berilganga ko‘ra $CP = BQ$.

Demak, $\Delta APC = \Delta ABQ$.

Bundan $AP = AQ$ kelib chiqadi.

$BP = CQ$ va $AP = AQ$ dan $AB = AC$ kelib chiqadi!

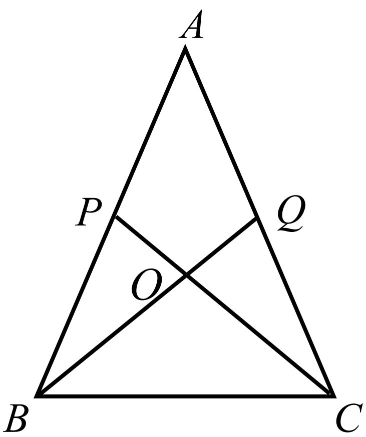
3-teskari teorema isboti:

BQ va CP medianalarni tushiramiz.

Shartga ko‘ra $BQ = CP$.

Ular O kesishish nuqtasida $2:1$ nisbatda bo‘linadi.

Shuning uchun $OB = OC$, $OQ = OP$.



7-rasm.

$\angle POB$ va $\angle QOC$ vertikal burchaklar.

Demak, $\Delta BOP = \Delta COQ$ (7-rasm).

Bundan $BP = CQ$ kelib chiqadi. Yarimlari teng kesmalarning o‘zlari ham teng: $AB = AC$!

Yuqoridagi yettita tasdiq isbotlari juda sodda ekanligi ko‘rinib turibdi – hatto boshlang‘ich sinf o‘quvchisiga tushuntirsa bo‘ladi. Navbat, nihoyat, **4-teskari teoremaga keldi:** uchburchakning ikkita bissektrisasi teng bo‘lsa, u teng yonli bo‘ladi.

Bu haqiqatan ham shunday, lekin bu safar isbotlash oson emas. Qiyin desa ham bo‘ladi. Toshyong‘oq masala. Bunga o‘zingiz ishonch hosil qilish uchun, isbotlashga urinib ko‘ring.

Hozirgacha bu masalaning o‘ndan ortiq yechimi topilgan. Uni dastlab germaniyalik o‘qituvchi Lemus trigonometriya yordamida isbotlagan va Yakob Shteynerdan (1796-1863) (matematikani mustaqil o‘rgangan, faqat sof geometriya bilan shug‘ullangan nemis matematigi) geometrik yechimi haqida so‘ragan.

Mashq. Bu xossani sof geometrik isbotini topa olasizmi?

Shteyner bunday isbotni topgan, shuning uchun adabiyotda uchburchakning bu xossasi Lemus-Shteyner teoremasi deb ham ataladi. Lekin Shteyner isboti uzundan-uzun mushohadalarga tayanadi. Uning ancha qisqa isbotini 1968 yilda Martin Gardner (Martin Gardner (1914-2010) – ko‘plab jozibali kitoblari bilan mashhur AQShlik qiziqarli matematika mutaxassisi) bayon qilgan. Lekin bu isbot qisqa bo‘lsa-da, nozik mushohadaga asoslanadi. U bilan kelgusi suhbatlarimizdan birida tanishamiz.

Mashq. Bu xossani qisqa va sodda usulda isbotlash mumkinmi?

Agar shunday isbot topilsa, u matematikada yangilik bo‘ladi.

§ 15. “G‘oyat nafis mushohada!”[16]

Bu ibora buyuk matematiklardan biri Leonard Eyler (1707-1783) ga tegishli. U mashhur fransuz matematigi Pyer Ferma (1601-1665) ning ishlaridan biri bilan tanishganda, ana shunday xitob qilgan. Keling, bunday baxtga sazovor bo‘lgan mushohada bilan tanishib, matematikadagi “go‘zallik”dan birgalashib bahra olaylik.

Eramizdan oldingi 2000-yillarda misrliklar tomonlari 3, 4 va 5 ga teng bo‘lgan uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lishini bilishgan va bundan to‘g‘ri burchak yasashda foydalanishgan. Darvoqe, tomonlari x, y, z bo‘lgan uchburchakda z tomon qarshisidagi burchak to‘g‘ri bo‘lsa,

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

kelib chiqadi – bu, yaxshi bilasiz, Pifagor teoremasi. Buning aksi ham to‘g‘ri: $x^2 + y^2 = z^2$ bo‘lsa, uzunligi x, y, z bo‘lgan kesmalar to‘g‘ri burchakli uchburchak hosil qiladi va aynan z tomon gipotenuza bo‘ladi – bu Pifagor teoremasiga teskari teorema. Hozir darsliklarda teskari teorema kosinuslar teoremasi orqali isbotlanadi:

$x^2 + y^2 = z^2$ bo‘lsa, $z^2 = x^2 + y^2 \cdot 2xy \cdot \cos\gamma$ formuladan $\cos\gamma = 0$, bundan esa $\gamma = 90^\circ$ kelib chiqadi.

Evklid o‘zining mashhur “Negizlar” asarida teskari Pifagor teoremasining chiroyli isbotini bergan: ABC uchburchakda

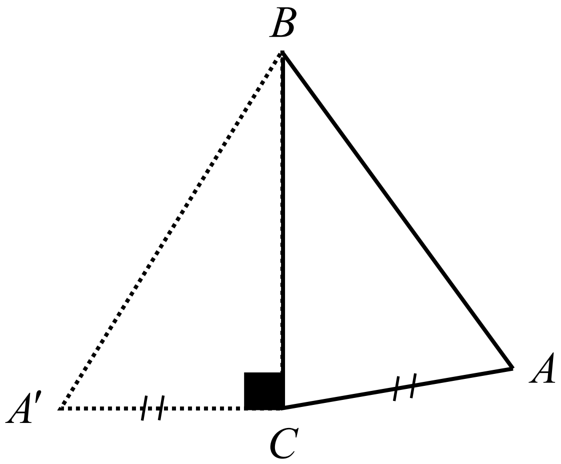
$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \tag{2}$$

bo‘lsin. BC tomonning ikkinchi tarafiga $\angle BCA'$ to‘g‘ri burchak yasaymiz, bunda A' nuqta $A'C = AC$ bo‘ladigan qilib tanlanadi. ABC uchburchak yasalishiga ko‘ra to‘g‘ri

[16] FMI, 2005, №1.

burchakli, demak Pifagorning to‘g‘ri teoremasini qo‘llash mumkin:

$$A'C^2 + BC^2 = A'B^2$$



Lekin, $A'C = AC$, demak,

$$AC^2 + BC^2 = A'B^2 \qquad (3)$$

(2) va (3) tengliklardan $A'B = AB$ kelib chiqadi. Natijada $A'BC$ va ABC uchburchaklarning uchala tomoni ham mos ravishda teng bo‘lib, $\angle A'CB = \angle ACB$ ekanligi ma’lum bo‘ladi.

Albatta, (1) tenglikni qanoatlantiradigan sonlar ko‘p. Ular orasida 3, 4 va 5 butun musbat sonligi bilan ajralib turadi. Mana shu xossaga ega bo‘lgan, ya’ni (1) tenglik o‘rinli bo‘lgan butun musbat x, y, z sonlari odatda Pifagor uchliklari deb ataladi.

Xo‘sh, 3, 4 va 5 dan boshqa yana Pifagor uchliklari bormi? Bor, masalan, (6, 8, 10), chunki $6^2 + 8^2 = 10^2$, yana (5, 12, 13), chunki $5^2 + 12^2 = 13^2$, yana (8, 15, 17), (7, 24, 25) va h.k. Qadimgi bobilliklar Pifagordan ming yil avvalroq bunday uchliklarni topish qoidasini bilganlar. Hozir bu qoida Geron formulalari deb ataladi:

1) agar m, n o‘zaro tub butun musbat sonlar va $m > n$ bo‘lsa,

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2 \qquad (4)$$

sonlar Pifagor uchliklarini beradi;

2) har qanday o‘zaro tub Pifagor uchligini shu usulda topish mumkin.

1-mashq. m, n o‘zaro tub butun musbat sonlar va $m > n$ bo‘lsin. (3) formulalar bilan topilgan Pifagor uchliklari doimo o‘zaro tub bo‘ladimi?

2-mashq. Agar m, n o'zaro tub butun musbat sonlar, $m > n$ hamda m va n ning biri juft, ikkinchisi toq bo'lsa, (4) formulalar o'zaro tub Pifagor uchliklarini berishini isbotlang.

O'zaro tub bo'lmagan Pifagor uchliklarini o'zaro tub uchliklardan biror songa ko'paytirib hosil qilish mumkinligi ravshan.

Algebra nuqtai nazaridan Geron formulalarini quyidagicha talqin qilish mumkin: (4) formulalar

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (5)$$

tenglamani butun musbat sonlar sohasida yechadi.

Geron formulalarining isboti [M.A.Berdiqulovning "Pifagor sonlari va Pifagor sonlariga o'xshash sonlar". FMI, 2003, №4.] maqolasida bayon qilingan.

Eslatib o'tamiz: agar (5) munosabat tenglama deb qaralsa, u uch noma'lumli bitta tenglamadir. Odatda bunday tenglamalarning qanaqa bo'lmasin yechimini topish masalasi qiziq emas. Xususan, (5) tenglama uchun x va y – ixtiyoriy, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ deyilsa, x, y, z yechim bo'laveradi. Shuning uchun odatda, ikki va undan ortiq noma'lumli bitta tenglamaning ratsional yoki butun musbat yechimlarini topish masalasi o'rganiladi. Bunday masalalarni birinchi bo'lib qadimgi yunon matematigi Diofant tekshirgani uchun ular Diofant tenglamalari deb yuritiladi.

Ferma quyidagi Diofant tenglamasi bilan qiziqqan:

$$x^4 + y^4 = z^4 \qquad (6)$$

va bu tenglama, (5) dan farqli ravishda, butun musbat yechimga ega emasligini isbotlagan:

Ferma teoremasi. (6) tenglamani qanoatlantiradigan butun musbat x, y, z sonlari mavjud emas.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz: (6) tenglamani qanoatlantiradigan butun x, y, z musbat sonlari mavjud. U holda

$$x^4 + y^4 = u^2 \tag{7}$$

tenglama ham butun musbat x, y, u yechimga ega boʻladi. Biz mana shu uch sonni oʻzaro tub deb hisoblashimiz mumkin. U holda x va y dan biri toq ikkinchisi juft boʻladi. Haqiqatan, x ham, y ham juft boʻlsa, u ham juft boʻlar va bu sonlarimizning oʻzaro tubligiga zid kelar edi. Agar x ham, y ham toq boʻlsa, ularning kvadratlari ham toq, aytaylik, $x^2 = 2p+1$, $y^2 = 2q+1$ boʻlar, bundan esa

$$x^4 + y^4 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2,$$

ya'ni tenglamaning chap tomoni 4 ga boʻlinsa 2 qoldiq berishi kelib chiqar edi. Holbuki, u juft boʻlgani uchun bu tenglikning oʻng tomoni 4 ga qoldiqsiz boʻlinadi. Demak, x ham, y ham toq boʻlishi mumkin emas.

x va y (7) tenglamada teng huquqli qatnashgani uchun, x ni toq y ni esa juft deb hisoblay olamiz. Endi $(x^2)^2 + (y^2)^2 = u^2$ tenglikka Geron formulalarini qoʻllashimiz mumkin: shunday butun musbat m va n sonlari mavjudki,

$$x^2 = m^2 - n^2, \quad y^2 = 2mn, \quad u = m^2 + n^2. \tag{8}$$

3-mashq. Agar x juft, y toq son boʻlsa, (8) formulalar qanday koʻrinishda boʻlar edi?

m va n ham oʻzaro tub boʻlishi ravshan. x ning toqligidan m va n dan biri toq ikkinchisi juft boʻlishi kelib chiqadi. Bunda m juft, n toq boʻla olmas ekan. Aks holda, aytaylik, $m = 2p$, $n = 2q+1$ boʻlsa,

$$m^2 - n^2 = 4p^2 - (4q^2 + 4q + 1) = 4(p^2 - q^2 - q - 1) + 3,$$

ya’ni $m^2 - n^2$ ni 4 ga bo‘lsak, 3 qoldiq berar edi. Ammo toq sonning kvadrati 4 ga bo‘linsa, 1 qoldiq chiqadi. Demak, m toq n esa juft ekan.

Chiqarilgan xulosalarga tayanib, $y = 2\overline{y}$, $n = 2\overline{n}$ deb olamiz. Shunda (8) formulalardan ikkinchisi $\overline{y}^2 = m\overline{n}$ ko‘rinishga keladi. Bunda m va $\overline{n}$ ham o‘zaro tub butun sonlardir. Agar ikkita o‘zaro tub sonning ko‘paytmasi butun sonning kvadrati bo‘lsa, ularning har biri ham kvadrat bo‘lishi lozim – bu muhim xossa arifmetikaning asosiy teoremasidan kelib chiqadi: har qanday musbat butun son tub ko‘paytuvchilarga ajraladi. Bu xossani isbotlash uchun, m va $\overline{n}$ ni tub ko‘paytuvchilarga ajrataylik:

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}, \quad \overline{n} = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots q_s^{k_s},$$

bu yerda $p_1, p_2, \ldots, p_r$ – har xil tub sonlar, $q_1, q_2, \ldots, q_s$ ham har xil tub sonlar.

Bir tomondan, m va $\overline{n}$ o‘zaro tub bo‘lgani uchun, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ tub sonlaridan birortasi $q_1, q_2, \ldots, q_s$ tub sonlarining hech biri bilan ustma-ust tushmaydi. U holda

$$\overline{y} = m\overline{n} = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r} q_1^{l_1} q_2^{l_2} \ldots q_r^{l_r}$$

$\overline{y}$ sonining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasini tashkil etadi.

Ikkinchidan, $\overline{y}$ kvadrat bo‘lgani uchun $k_1, k_2, \ldots, k_r$, $l_1, l_2, \ldots, l_r$ ko‘rsatkichlarning hammasi juft. Bundan esa m ham, $\overline{n}$ ham kvadrat bo‘lishi kelib chiqadi. Aytaylik, $m = u_1^2$, $\overline{n} = t^2$. Shundan so‘ng $n = 2\overline{n} = 2t^2$ ekanligini hisobga olib, (8) formulalardan birinchisiga olib borib qo‘ysak,

$$x^2 + 4t^4 = u_1^4 \qquad (9)$$

tenglik hosil boʻladi.

Mushohadaning shu yeriga kelganda ancha-muncha odamning xafsalasi pir boʻlib, izlanishni toʻxtatishi hech gap emas – axir shuncha hisob-kitobdan keyin mushohadaning boshidagi (7) tenglamaga oʻxshash tenglamaga kelindi-da. Lekin Ferma qunt bilan yuqoridagi kabi mulohazalarni (9) tenglamaga ham qoʻllashda davom etgan. Va matematik ilhom farishtasi uni mukofotlagan!

(9) tenglamani $x^2+(2t^2)^2=(u_1^2)^2$ koʻrinishda yozib olib, yana Geron formulalarini qoʻllaymiz:

$$x=m_1^2-n_1^2,\quad 2t^2=2m_1n_1,\quad u_1^2=m_1^2+n_1^2. \qquad (10)$$

Bu yerda ham m_1 va n_1 oʻzaro tub boʻlishini koʻrsatish qiyin emas. Shuning uchun, (10) formulalarning ikkinchisidan, yuqorida foydalanilgan xossaga koʻra, $m_1=x_1^2,\ \ n_1=y_1^2$. Bularni (10) formulalarning uchinchisiga qoʻyamiz:

$$x_1^4+y_1^4=u_1^2.$$

Gʻaroyib natija: aynan (7) tenglamaning oʻzi hosil boʻldi.

Shunday qilib, agar x, y, u sonlari (7) tenglamani qanoatlantirsa, x_1, y_1, u_1 sonlari ham xuddi shu tenglamani qanoatlantirar ekan. Bu – muhim natija. Oʻz holicha-ku u hech narsa bermasligi mumkin. Ammo $m=u_1^2,\ u=m^2+n^2$ tengliklar oʻzaro qiyoslansa $u_1<u$ ekani koʻrinadi.

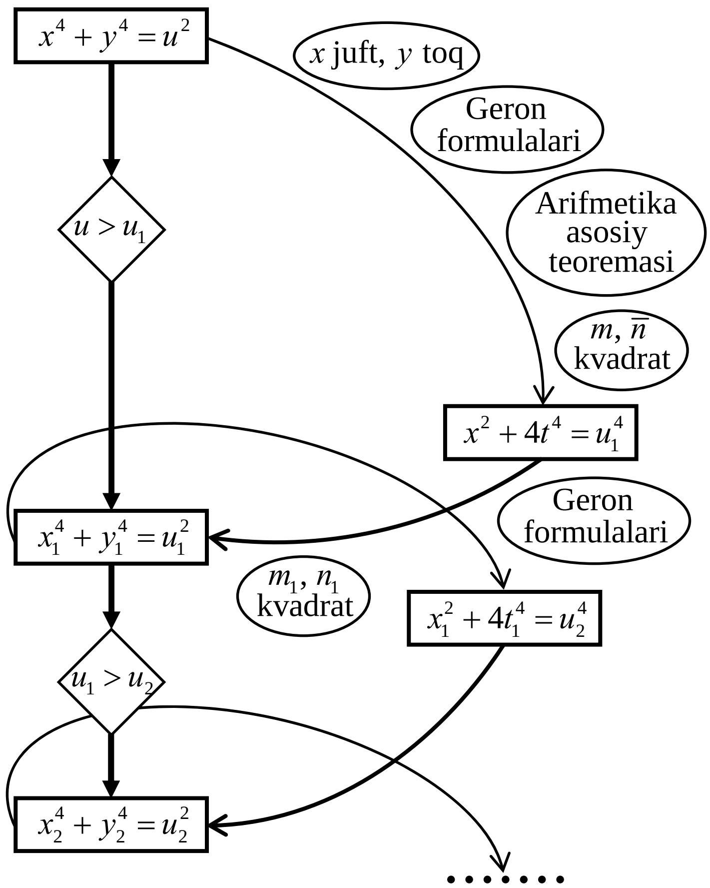
Bundan esa hal qiluvchi xulosa kelib chiqadi: (x, y, u) yechimdan yana bir (x_1, y_1, u_1) yechim hosil qilib boʻlar va bunda $u_1<u$ chiqar ekan, demak, (x_1, y_1, u_1) yechimdan $u_2<u_1$ boʻlgan (x_2, y_2, u_2) yechim hosil qilish ham

mumkin. So‘ng $u_3 < u_2$ bo‘lgan (x_3, y_3, u_3) yechim va hokazo. Lekin bunday bo‘lishi aslo mumkin emas (matematiklar tilida absurd – bema’nilik): har qadamda kichrayib boradigan butun musbat sonlar ketma-ketligi cheksiz davom etolmaydi.

Bu bema’nilik kelib chiqishiga teskarisini faraz qilganimiz sabab bo‘ldi. Demak, (6) tenglamani qanoatlantiradigan butun musbat sonlar mavjud emas ekan.

Bayon qilingan mushohadasida Ferma matematikaga ikkita yangilik olib kirgan:

Birinchi yangilik – “tushish metodi”. Ferma qo‘llagan metodni yaqqolroq tasavvur qilish uchun isbotdagi mushohadalarni mana bunday sxema bilan tasvirlaylik:



Fermaning ikkinchi yangiligi – teskarisini faraz qilib isbotlash usulini chuqurlashtirgan. Ma’lumki, bu usul qadimgi yunon matematiklari tomonidan keng qo‘llangan. Xususan, $\sqrt{2}$ irratsional son bo‘lishini faqat shu yo‘sindagina isbotlash mumkin: $\sqrt{2}$ ratsional son deb faraz qilinadi va ziddiyat keltirib chiqariladi.

Hozir bu usul maktab matematikasida ham ko‘p uchraydi. Mana uning sodda misoli. “Agar n juft son bo‘lsa, uning kvadrati n^2 ham juft bo‘ladi”, degan tasdiqni olaylik. Uni to‘g‘ridan-to‘g‘ri isbotlash juda oson: agar $n = 2k$ bo‘lsa, u holda $n^2 = (2k)^2 = 2(2k)^2$, shu bilan isbot tamom. Endi mana bu tasdiqni ko‘raylik: “Agar n^2 juft son bo‘lsa, n juft bo‘ladi”. Uni to‘g‘ridan-to‘g‘ri isbotlash yo‘li ko‘zga tashlanmaydi. Teskarisini faraz qilish usulini qo‘llaymiz ($A \Rightarrow B$ yozuvi A tasdiqdan B kelib chiqishini bildiradi):

$$n \text{ juft emas} \Rightarrow n \text{ toq} \Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n^2 =$$
$$= 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2 \text{ toq}$$

– ziddiyat hosil bo‘ldi, chunki, berilganga ko‘ra n^2 – juft.

Demak, n – toq degan faraz noto‘g‘ri, ya’ni n juft.

Endi Fermaning yuqorida bayon qilingan mushohadasida teskarisini faraz qilish usuli qanday qo‘llanganiga diqqat qilaylik:

Isbot qilish kerak:

1). $x^4 + y^4 = z^4$ Diofant tenglamasi yechimga ega emas.
Teskarisini faraz qilamiz:

2). $x^4 + y^4 = z^4$ tenglama yechimga ega. $\Downarrow$

3). $x^4 + y^4 = u^2$ tenglama yechimga ega. $\Downarrow$

4). $x^4 + y^4 = u^2$ tenglama o‘zaro tub (x, y, u) yechimga ega. $\Downarrow$

5). x va y dan biri toq, ikkinchisi juft.

Teskarisini faraz qilamiz:

5a). x va y ning juft toqligi bir xil.

5b). 1-hol: x ham, y ham juft. $\Downarrow$

5v). u juft $\Downarrow$

5g). (x, y, u) o‘zaro tub emas – ziddiyat.

5d). 2-hol: x ham, y ham toq. $\Downarrow$

5e). $x^4 + y^4 = u^2$ tenglamaning o‘ng tomoni 4 ga qoldiqsiz bo‘linadi, chap tomoni 4 ga bo‘linmaydi – ziddiyat.

6). Demak, x ni toq, y ni juft deb hisoblash mumkin.

7). Geron formulalariga ko‘ra

8). $x^2 = m^2 - n^2,\ \ y^2 = 2mn,\ \ u = m^2 + n^2$ $\Downarrow$

$$\ldots \Downarrow$$

N). $x^4 + y^4 = u^2$ tenglama o‘zaro tub (x_1, y_1, u_1) yechimga ega va

$u > u_1$. $\Downarrow$

N+1). $x^4 + y^4 = u^2$ tenglama (x, y, u), (x_1, y_1, u_1), $(x_2, y_2, u_2), \ldots$ butun musbat yechimlarga ega va $u > u_1 > u_1 > u_1 \ldots$ – bunday bo‘lishi mumkin emas (absurd).

N+2). Demak, $x^4 + y^4 = z^4$ tenglama butun musbat sonlardan iborat yechimga ega emas ekan!

Shunday qilib, biz 1) tasdiqni isbotlash uchun teskarisini faraz qildik, ya’ni 2) tasdiqni to‘g‘ri deb qabul qilib turdik. So‘ng mantiqiy mushohadalar bilan N+1) tasdiqqa keldik. Bu tasdiq, butun musbat sonlarning xossasiga zid, ya’ni absurddir. Shuning uchun 1) tasdiq, to‘g‘ri. 2) tasdiqdan N+1) tasdiqqa qarab yurar ekanmiz, yo‘l-yo‘lakay, 5) tasdiqni isbotlashda biz yana bir marta teskarisini faraz qilib mushohada yuritdik. 5e) tasdiqda ziddiyatga kelib, 5) tasdiqning to‘g‘riligiga ishonch hosil qildik va mushohadalarni davom ettirdik.

E'tibor qilgan bo'lsangiz, teskarisini faraz qilish usulining ichida yana bir marta teskarisini faraz qilish usulidan foydalandik. Bu nafaqat nafis, ayni paytda nozik mushohadadir. Chunki, ehtiyot bo'linmasa, ikkinchi marta teskarisini faraz qilganda, birinchi "faraz"ni rad etib qo'yish mumkinki, bu mantiqiy xato bo'lar edi.

Hozirgi zamon matematikasida mana shunday: bir vositaning ichida xuddi shunga o'xshash vosita, uning ichida yana shu vosita va h.k. qo'llanadigan mushohadalar ko'p. Masalan, matematik induksiya metodini qo'llash chog'ida yo'l-yo'lakay tasdiqdardan birini dalillash yana matematik induksiya talab qilishi mumkin. Kompyuter uchun programma tuzishda sikl operatorining ichida boshqa sikl operatori, uning ichida yana sikl operatori ishlatiladigan misollar uchraydi va hokazo.

Mantiqiy mushohadalarning mana shu jihatini egallab olish – matematik madaniyatning muhim unsuri hisoblanadi.

§ 16. Ajoyib taqdirli matematik[17]

Matematikada cheksiz amallarning ko'plab turlari bor. Ular bilan 18-19-asrlar davomida ko'plab atoqli matematiklar shug'ullangan va o'z davri uchun ma'lum va mashhur ayniyatlar ixtiro qilishgan. Ammo 20-asrga kelib matematiklar "formulalardan to'yib", ularning diqqat-e'tibori boshqa masalalarga burilib ketdi. Lekin bu "qoidadan" g'oyat g'aroyib bir istisno mavjud. U ham bo'lsa "hind matematikasining dahosi" deb nom olgan Srinivasa Ramanujon hayoti va faoliyatidir.

[17] FMI, 2006, №6.

Bu o‘rinda hind matematikasining tarixi to‘g‘risida qisqacha to‘xtab o‘tish joiz.

Hindlarning nafaqat matematika, balki umuminsoniyat taraqqiyotiga qo‘shgan muhim hissasi – o‘nli (umuman pozitsion) sanoq sistemasini ixtiro qilinganidir (IV-VI asr). Bu – yaxshi ma’lum fakt. Hind matematiklari, shuningdek, birinchi bo‘lib manfiy sonlarni kiritgan (Braxmagupta, VII asr), zanjir kasrlarni chiziqli Diofant tenglamalarini yechishga tatbiq qilgan, $ax^2+b=y^2$ ko‘rinishidagi Diofant tenglamalarini yechish usulini topgan (Bxaskara, XII asr).

Nomi bizgacha yetib kelgan dastlabki hind matematigi – Ariabxata (V-VI asr). U, jumladan, kvadrat va kub ildiz chiqarish usullarini izlagan. Undan keyinroq yashagan Braxmagupta aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchak yuzi uchun

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

formula bilan fan tarixidan joy olgan (a, b, c, d – to‘rtburchak tomonlari, p – yarimperimetr).

Hind matematiklarining yana bir muhim yutug‘i – sinus (ardxa-jiva – kamon yoyining yarmi) va kosinus funksiyalarining muomalaga kiritilishidir. Hindlar bu funksiyalarni sferik geometriya masalalarini yechishga tatbiq qilishgan, dastlabki trigonometrik jadvallar – sidxantalar tuzishgan (Varaxamira, V-VI asr).

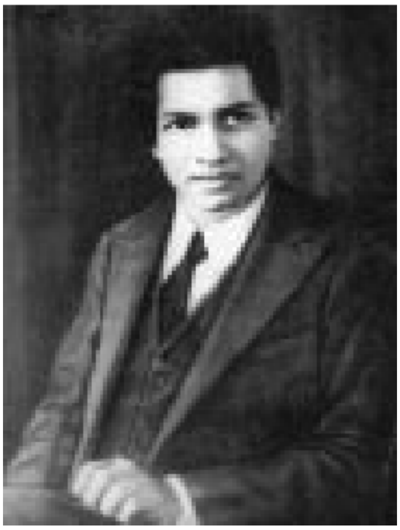
Nilakanta (XVI asr) birinchi bo‘lib teskari trigonometrik funksiyalarni cheksiz qatorga yoygan, shu asosda

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

formulani ixtiro qilgan (u hozir XVIII asrda yashagan atoqli olmon matematigi nomi bilan Leybnis formulasi deb ataladi).

Markaziy Osiyo va Yaqin Sharqda boʻlgani kabi XVI asrdan keyin hind matematikasi ham rivojlanishdan toʻxtab qolgan. Faqat 20 asrning boshida Hindiston tuprogʻidan ajoyib matematik – Ramanujon yetishib chiqadi.

Srinavasa Ramanujon 1887 yilda Hindistonning ancha qoloq hududlaridan biridagi kichkina qishloqda dunyoga kelgan, shu qishloqdagi boshlangʻich maktabda savodini



chiqargan. U yashagan muhitni e’tiborga olsak, hech kim qishloqi boladan buyuk matematik chiqadi, deb oʻylashi aqlga sigʻmaydi. Ustiga-ustak, dinga berilgan ota-onasi Ramanujonni nomiki yevropa madaniyatiga xos narsalarni rad etish ruhida tarbiyalashga intilgan. Lekin noyob iste’dod ato etilgan Ramanujon 10 yoshida maktabni bitirish imtihonlarini a’lo baholarga topshiradi va tuman markazidagi toʻliqsiz oʻrta maktabda (atigi!) oʻqish huquqini qoʻlga kiritadi. Bu maktabda ham unga matematikadan tuzukroq bilim beradigan oʻqituvchi yoʻq edi.

Ilmga chanqoq Ramanujon 4-sinfga koʻchganda (14 yoshida) Madras universitetining ta’tilga kelgan talabasidan “Trigonometriya” darsligini qarzga soʻrab oladi. Darslik ikki jildli boʻlib, ancha batafsil yozilgan, unda hatto kompleks burchakning trigonometrik funksiyalarigacha bayon qilingan edi. Sinfdoshlari va oʻqituvchilarining xotirlashicha, Ramanujon

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha} \qquad (1)$$

va uning natijalari boʻlgan

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2i}$$

ayniyatlarni mustaqil “ixtiro qiladi”. Lekin kimdir unga bu formulalar “Eyler formulalari” deb atalishini aytganda, taajjubga tushadi:

– Demak, “Trigonometriya” darsligiga kirmagan matematik formulalar ham bor ekan-da!

Shundan so‘ng so‘rab-surishtirib, 1903 yili Ramanujon yana bir kitobni qo‘lga kiritadi – u Londonda 1880-yillarda bosilgan ikki jildli “Sof va tatbiqiy matematikaga oid elementar natijalar to‘plami” edi. (Davr taqozosi bilan Kumbakonam shahri kutubxonasida matematikaga oid boshqa qo‘llanma topilmaydi.) Ramanujon qo‘liga tushgan kitob darslik emas, balki ma’lumotnoma bo‘lib, unda na biror formulaning isboti berilgan, na tuzukroq izohlar bayon qilingan edi. Bugun endi tarixchilar aynan shu holat Ramanujon taqdirida – uning o‘ziga xos matematik bo‘lib etishishida o‘ta muhim rol o‘ynagan, deb hisoblaydilar.

Nima bo‘lganda ham, mazkur kitob aynan ma’lumotnoma bo‘lgani uchun undan juda ko‘p formulalar o‘rin olgan, ayniqsa, cheksiz yig‘indilar, ko‘paytmalar, ildizlar, uzluksiz kasrlar va hokazolarga oid formulalarga keng joy berilgan edi.

Biz “Matematika jozibasi” ruknining bir necha maqolasini Diofant tenglamalariga, so‘ng ular bahonasida avval chekli, so‘ng cheksiz zanjir kasrlarga va nihoyat cheksiz amallarga bag‘ishlaganimizning asosiy maqsadi – o‘quvchini Ramanujon ishlari bilan tanishtirishga tayyorlash edi.

“Matematikaga chanqoq” Ramanujon boshqa qo‘llanma yo‘qligi tufayli ma’lumotnomaning ikki jildiga jamlangan formulalarni “suv qilib ichib” yuboradi. Natijada o‘zi ham formulalar “ixtiro” qila boshlaydi! Ha, aynan “ixtiro”, chunki u baribir matematikada har bir formula yoki teorema isbotlanishi lozimligi to‘g‘risida yetarli tushuncha olmagan edi-da. Bu o‘rinda hatto “Ramanujon o‘z formulalarini keltirib chiqargan” ham deb bo‘lmaydi, chunki “keltirib chiqarish” ham baribir isbot.

U bilan birga o‘qigan tengdoshlaridan birining guvohlik berishicha, Ramanujon hayratomuz xotiraga ega bo‘lgan, masalan, $\sqrt{2}$, π, e kabi sonlarning o‘nli kasrga yoyilmalaridagi minglab raqamlarni yod bilgan, ko‘p xonali sonlar ustida nafaqat to‘rt amal, balki darajaga oshirish, ildiz chiqarish, logarifmlash amallarini og‘zaki bajara olgan.

Shu tarzda Ramanujon sonlar va formulalar bilan “do‘stlasha” borgan. Bu xususda latifanamo bir voqeani eslashadi. Londonda yashagan davrida Ramanujon kasalxonaga tushib qoladi. Uni ko‘rgani borgan do‘sti, yirik ingliz matematigi Hardi “shikoyat” qiladi:

– Qara, do‘stim, nomeri shunaqayam zerikarli taksi yo‘liqsa bo‘ladimi – 1729. Kelguncha o‘ylab keldim, ammo biror tuzuk xossasi topilmadi, bor-yo‘g‘i – uchta tub son ko‘paytmasiga yoyiladi, xolos: $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$.

Bu so‘zlarni eshitganda holsiz, arang nafas olayotgan Ramanujonga jon kiradi:

– Yo‘q, Hardi, yo‘q. Bu juda g‘aroyib son – u ikki xil usulda ikkita kubning yig‘indisi ajraladigan sonlardan eng kichkinasi! (Haqiqatan, 1729= $9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$).

Mashq. Kompyuterga dastur tuzib, 1729 shu xossaga ega eng kichik son ekanligini tekshiring. Bu xossaga ega yana qanday sonlar bor?

Ramanujon ixtiro qilgan formulalarini alohida daftarga yozib yurgan. Aytishlaricha, u bir qator formulalarini uyqudaligida topgan ekan. Albatta, ularning ko‘pini yevropalik matematiklar bilgan, ammo ular orasida Ramanujongacha hech kimga ma’lum bo‘lmagan yangilari ham bo‘lgan. Faqat Ramanujon buni aniqlashga qiynalgan, albatta: na kitob topilsa, na durustroq ustoz. Ilmiy jurnallarni aytmasa ham bo‘ladi. (Voqealar 20-asr boshida Hindistonning ancha chekka viloyatida bo‘lganini eslaylik).

Nihoyat, Ramanujon 16 yoshligida o‘rta maktabni tamomlab, Madras universiteti qoshidagi kollejga kirish imtihonlaridan o‘tadi. O‘qish davrida ham formula “ixtiro” qilishga zo‘r berib, darslarni o‘tkazib yubora boshlaydi... Natijada kursda qoldiriladi. Shu paytdan uning boshi musibatlarga g‘arq bo‘ladi: kollejdan chiqariladi, bir yildan so‘ng o‘qishni tiklash haqidagi arizasi rad etiladi, 1906 yilda Madras universitetiga qabul qilinadi-yu, ammo kasalga chalinib uyiga qaytishga majbur bo‘ladi. Kollejni ekstern bitirmoqchi bo‘lganda, sinovlarda yiqiladi. Ustiga-ustak 1909 yilda uylanib, ish axtarishga majbur bo‘ladi. Biror ish ilinjida Hindiston matematiklari jamiyatining asoschisi S.Ayarga daftarlarini ko‘rsatadi.

S.Ayar professional matematik emas, asosan pedagog edi. Voqealar rivoji ko‘rsatishicha, u yaxshi pedagog bo‘lgan – garchi yosh matematik “ixtiro”larini tushunmasa ham, ammo ularda nimadir (!) borligini his yetib, Ramanujonni yirik davlat lavozimida ishlayotgan, matematikadan oliy ma’lumotga ega R.Rao ismli vallomat bilan tanishtiradi. U ham Ramanujon formulalarining ahamiyati, hatto to‘g‘ri yo noto‘g‘riligi haqida xulosa chiqarishga ojizlik qiladi, ammo muallif noyob iste’dod sohibi ekanligini payqaydi.

R.Rao Ramanujonni pochtaga ishga joylab qo‘yadi, muhimi, bo‘lg‘usi matematikning hayotida hal qiluvchi ahamiyat kasb etgan maslahatni beradi – yuqorida tilga olingan ingliz matematigi P.H.Hardiga xat yozishni tavsiya etadi. (O‘sha davrda Hardi ingliz matematiklaridan mashhuri edi. Bu yerda ham tasodif muhim rol o‘ynagan – Hardi shug‘ullanadigan matematika sohasi ko‘proq formulalardan iborat bo‘lgan.

Mabodo, Ramanujon Hardidan boshqa matematikka murojaat etganida, Galuaga o‘xshab, e’tibor topmay o‘tib ketishi hech gap emas edi).

1913 yil 16 yanvarda Ramanujon Hardiga o‘zining birinchi maktubini jo‘natadi. “qimmatli janob! Men atigi yiliga 20 funt sterling maosh oladigan oddiy pochta xodimiman. Maktabni bitirganman, ammo universitet ma’lumotiga ega emasman”, deb boshlangan bu xatda u anchadan beri matematika bilan shug‘ullanayotganini, o‘zining ayrim natijalarini xatga ilova qilayotganini yozadi va imkoni bo‘lsa, bostirishga yordam berishni so‘raydi.

Xatni o‘qiy boshlaganda dastlab Hardining peshonasi tirishgan bo‘lsa kerak – muallif hatto universitetda biror yil o‘qimagan oddiy pochta xodimi bo‘lsa. Ammo olim xatga ilova qilingan 120 ta formulani ko‘rib hayratdan dong qotib qoladi. Hayratga cho‘mmaslikning iloji ham yo‘q edi – buni tasavvur qilish uchun ana shu formulalardan kitobxonlarimizga tushunarli bo‘ladigan atigi bir nechasini keltiraylik:

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi};$$

Agar, $u=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^5}{1+\cfrac{x^7}{1+\ldots}}}$ va $v=\cfrac{\sqrt[5]{x}}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^3}{1+\ldots}}}}$

bo‘lsa, u holda $v^5=u\dfrac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}$ munosabat o‘rinli;

$$\frac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\ldots}}}=\left\{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}e^{\frac{2\pi}{5}}.$$

Ayniqsa, mana bu benihoyat go‘zal va sirli formula:

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{\ldots}}}}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}. \qquad (2)$$

Biz ikkita mashhur son π va e sonlari matematikada naqadar muhim o‘rin egallashini tasavvur qila olamiz. Bunday olib qaraganda ularning o‘zaro aloqasi yo‘qday: biri – sof geometrik tabiatli, ikkinchisi esa geometriyaga bevosita aloqador emas. Garchi ular Eyler formulasida ((1) formula) o‘zaro uchrashsa ham, bu formula atigi ta’rif ekanini aytib o‘tgan edik. Ramanujonning yuqoridagi formulasi esa bu ikki sonni o‘zaro bog‘laydi. Bog‘laganda ham cheksiz yig‘indi va cheksiz kasr orqali!... Chindan ham nihoyatda g‘aroyib va hayratomuz hodisa: agar uni Ramanujon “ixtiro” qilmasa, boshqa biror matematik topa olishi dargumon.

Hardi Ramanujon yuborgan formulalarning to‘g‘riligiga ishonishni ham, ishonmaslikni ham bilmay o‘ylanib qoladi. Bu haqda uning o‘zi shunday degan: “Formulalarga birgina nazar tashlansa, ularni juda yuksak malakali matematik yozganiga shubha qolmaydi. To‘g‘riligiga kelsak, formulalar chin bo‘lishi kerak, aks holda ularni kimdir to‘qib chiqargan bo‘lishiga aql bovar qilmaydi”.

Hardi o‘z davrining eng yirik professional matematiklaridan biri edi. U Ramanujon formulalaridan ba’zilarini boshqa manbalardan topadi, bir qismini o‘zi isbotlashga muvaffaq bo‘ladi, lekin ayrimlari Hardiday mutaxassis uchun ham sirliligacha qolaveradi.

Bunday holatdan taajjubi yanada oshgan Hardi Ramanujon bilan xat yozishishga kirishadi. Butun dunyoda matematik jurnallarning qoidasiga ko‘ra yangi natija albatta isboti bilan bayon qilinishi lozim. Bu qoidaga muvofiq Hardi Ramanujondan formulalarning isbotini ham yozib yuborishni so‘raydi. Ammo Ramanujon formulalarini isbotlagan emas, yuqorida aytganimizday, “ixtiro” qilgan edi. (Keyinchalik bu haqda so‘rashganda, miyig‘ida kulib, ma’budalar qulog‘imga shivirlab turadi, deya javob bergan ekan).

Ramanujon javob xatida asosiy vaqti tirikchilik tashvishiga sarf bo‘layotgani, formulalarni isbotlash ustida bosh qotirish imkoni yo‘qligini yozgan. Ammo u Hardiga jo‘natgan xatiga har safar yangi formulalar ilova qilishni kanda qilmaydi. Hardi uning ovrupacha ta’lim olgan matematiklardan boshqacha fikrlashini tushunib yetib, Madras universiteti rektoriga xat yo‘llaydi. Xatda u yosh hamkasbini shunday baholaydi: “22 yoshli Ramanujonning ishlari menda juda katta taassurot uyg‘otdi. Ular Kembrij universiteti olimlarining ishlaridan qolishmaydi. Agar Madras universiteti Ramanujonga jilla qursa bir necha yil matematika bilan bemalol shug‘ullanish imkonini tug‘dirsa, ma’qul ish bo‘lar edi”.

Shundan so‘ng universitet Ramanujonni ikki yil davomida stipendiya bilan ta’minlaydi. Hardi bu bilan qanoatlanmay, Ramanujonni Kembrijga kelishga da’vat eta boshlaydi. Evropa madaniyatiga begona ruhda tarbiyalangan Ramanujon bu taklifga ko‘nmaydi. Ancha keyin, 1914 yilda Hardi qattiq sa’y-harakat bilan uni

Kembrijga olib kelishga muvaffaq bo‘ladi. Ramanujon bu yerdagi mashhur universitetga qabul qilinadi.

Universitetda o‘qishdan maqsad – muayyan fandan fundamental, ya’ni asosiy bilimlarni egallash. Bu qoida Ramanujon uchun, bir tomondan besamara bo‘lar – ancha kech bo‘lgan edi, ikkinchi tomondan, zararli – u matematikning tug‘ma qobiliyatiga putur yetkazishi, formula “ixtiro” qilish jarayonidan to‘xtatib qo‘yishi mumkin edi. Shuning uchun Hardi o‘zi ustozlik qiladi, to‘g‘rirog‘i, u bilan ilmiy hamkorlikni yo‘lga qo‘yadi. Bir-biridan mutlaqo boshqacha ta’lim olgan bu ikki matematik hamkorligi ajoyib natijalar beradi – matematikaning bir qator murakkab masalalari hal etiladi. Ramanujonning shuhrati yoyiladi. 1918 yilda hindistonlik olimlardan birinchi bo‘lib Angliya qirollik jamiyatiga a’zo etib saylanadi.

Afsuski, taqdir Ramanujonga nisbatan yana bir qaltis “tuhfa” hozirlagan edi – bolaligida orttirib olgan sil kasali alomatlari 1917 yilga kelib kuchaya boshlagan. Eng tajribali vrachlar muolajasi bilan 1919 yil boshiga kelib uning sog‘lig‘i ancha-muncha o‘nglanadi. Vatanini sog‘ingan olim bundan foydalanib qolishga qaror qiladi – yurtiga qaytadi. Lekin yoshlik yillaridagi etishmovchiliklar o‘z asoratini ko‘rsatadi – hind matematikasining dahosi 1920-yil 26-aprelda vafot etadi.

Asosan maktab o‘quvchilariga mo‘ljallangan bu mavzuda Ramanujonning matematikaga qo‘shgan hissasi haqida to‘laroq hikoya qilish imkoni yo‘q. Maqsadimiz – matematika fanining o‘ziga xosligi, matematik iste’dod ko‘pincha tug‘ma bo‘lishi, bunday iste’dod to‘g‘ri yo‘lga solinsa, har qanday sharoitda ham egasini eng yuksakliklarga ko‘tara olishi haqida hikoya qilish.

Maqola nihoyasida Ramanujon topgan formulalardan yana bir necha soddarog‘ini keltiramiz:

9 ta o‘nli raqam aniqligida $\pi = \frac{63}{25} \cdot \frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}$ (kompyuterda tekshirib ko‘ring);

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}} = 3;$$

$$\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8+\ldots}}}} = 1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ;$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt{7}}{2}};$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}.$$

Londonda yashagan davrida, Hardining yordamida Ramanujon formula va teoremalarni qat’iy isbotlashni ham o‘rgangan, albatta. Mana u isbotlagan teoremalardan biri.

Butun musbat n sonini o‘zidan kichik butun musbat qo‘shiluvchilarga $p(n)$ usulda ajratish mumkin bo‘lsin. Masalan, $p(6)=11$, chunki

$$\begin{array}{ll} 6=6 & 6=3+2+1 \\ 6=5+1 & 6=3+1+1+1 \\ 6=4+2 & 6=2+2+2 \\ 6=4+1+1 & 6=2+2+1+1 \\ 6=3+3 & 6=2+1+1+1+1 \end{array}$$

$$6=1+1+1+1+1+1.$$

Teorema. n ni 5 ga bo‘lganda to‘rt qoldiq chiqsa, $p(n)$ soni 5 ga qoldiqsiz bo‘linadi.

Mashq. $n=9$, 14 va 19 bo‘lganda Ramanujon teoremasini tekshirib ko‘ring.

Ramanujonning oʻziga xos dahosi ayniqsa $p(n)$ uchun aniq formula topishda juda yorqin namoyon boʻlgan. Bu haqda bilishni istagan oʻquvchilarga quyida keltirilgan adabiyotlarga murojaat etishni tavsiya qilamiz.

1. Ramanujan S. Collected papers. Cambridge, 1927.
2. Левин В.И. Рамануджан. Москва, “Знание”, 1968.
3. Эндрюс Г. Теория разбиений. Москва, “Наука”, 1982.

§ 17. Shaklan sodda, mazmunan chuqur teorema[18]

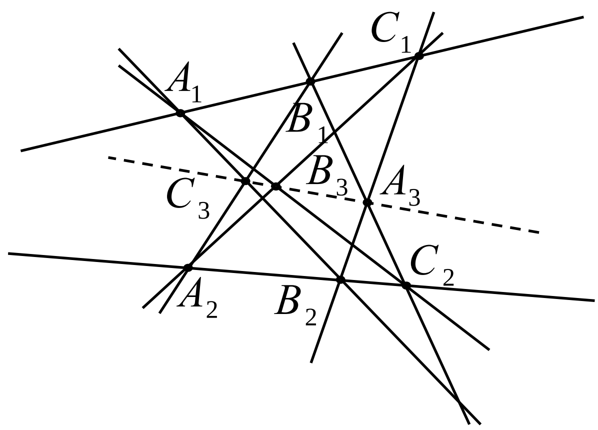
Bu suhbatimizni Papp teoremasiga bagʻishlaymiz. Iskandariyalik Papp – qadimgi yunonistonlik mashhur olimlardan eng soʻnggisi hisoblanadi. U miloddan keyingi IV asrning birinchi yarmida yashagan. V asrdan boshlab yunon sivilizatsiyasi inqirozga yuz tutib, taniqli fan tarixchisi Adam Mets iborasi bilan Yevropada “zulmat asri” boshlanadi. Ana shu davr to XV asrgacha – Uygʻonish davrigacha davom etgan. Bu oraliqda VIII asrdan – xalifa Xorun ar-Rashid saroyidagi olimlar toʻgaragidan to XV asr – Ulugʻbek akademiyasigacha boʻlgan davrda ilm-fan Islom dunyosida, jumladan, Markaziy Osiyo hududida Uygʻonish davrini boshdan kechirgan (orada uzilishlar bilan).

Pappning bizgacha yetib kelgan asari “Matematik toʻplam” deb nomlanadi. U asosan geometriya masalalariga bagʻishlangan. Asardan uning muallifi avval yashab oʻtgan yunon matematiklarining ishlaridan yaxshi xabardor boʻlgani koʻrinadi. Papp oʻzi ham bir qator yangiliklar ochgan, albatta. Ulardan biri mana bu gʻaroyib teoremadir:

[18] FMI, 2008, №2 (O.Shukurov bilan hammualliflikda).

Papp teoremasi. Tekislikdagi ixtiyoriy bir to‘g‘ri chiziqda A_1, B_1, C_1, ikkinchi to‘g‘ri chiziqda A_2, B_2, C_2 nuqtalar olingan bo‘lsin va bunda A_1B_2 bilan A_2B_1 to‘g‘ri chiziqlar C_3 nuqtada, A_1C_2 bilan A_2C_1 to‘g‘ri chiziqlar B_3 nuqtada, B_1C_2 bilan B_2C_1 to‘g‘ri chiziqlar A_3 nuqtada kesishsin. U holda A_3, B_3, C_3 nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotadi (1-rasm).

Xo‘sh, Papp teoremasining nimasi g‘aroyib? Ma’lumki, geometriya turli shakllarning xossalarini o‘rganuvchi fandir. Bunday xossalar mutlaq ko‘pchilik holda, maktab geometriya fanida esa deyarli yuz foiz masofa, burchak, kesma uzunligi, kesmalar nisbati, yuza kabi tushunchalar



1-rasm.

bilan bog‘liqdir. Geometriyada nima ko‘p – tushuncha ko‘p. Ularning bir turi “nima?” degan savolga javob beruvchi predmet (ob’ekt)lar: kesma, kesma uzunligi, nur, burchak, uchburchak, asos, aylana, radius, mediana, parararallelogramm markazi, simmetriya o‘qi, vektor va h.k., yana bir toifasi “o‘rinlimi?” degan savolga javob beruvchi munosabatlardir: teng, katta, parallel, perpendikulyar, aylananing ichida yotadi, o‘xshash, simmetrik va hokazo. Ana shu son-sanoqsiz geometrik tushunchalarning bari atigi bir nechta boshlang‘ich tushunchalar orqali ta’riflanadi. Planimetriyada boshlang‘ich tushunchalarning ichida ham eng boshlang‘ichlari **nuqta, to‘g‘ri chiziq, insidentlik** tushunchalaridir. Agar A – nuqta, α – to‘g‘ri chiziq bo‘lsa, ularning o‘zaro insidentligi $A \in \alpha$ yoki $\alpha \ni A$ ko‘rinishda yoziladi va “A nuqta α to‘g‘ri chiziqda yotadi”, “α to‘g‘ri chiziq A nuqta orqali o‘tadi” deb o‘qiladi. (Boshqa sinonimlar ham ishlatilishi mumkin. Masalan, “A nuqta α to‘g‘ri chiziqqa tegishli”, “α to‘g‘ri chiziq A nuqtani o‘z ichiga oladi”.)

Bunday olib qaraganda, faqat shu uch tushunchaning o‘zi ishtirok etadigan va teorema deb atasa bo‘ladigan biron-bir xossa bo‘lishi mumkin emasday tuyuladi. Chindan bunday xossalar elementar geometriya doirasida yo‘q hisobida. Papp teoremasining g‘aroyibligi – bu boradagi istisnolardan biridir.

Teorema ta’rifida “α va β to‘g‘ri chiziqlar D nuqtada kesishsin” degan tushuncha qo‘llanyapti. Lekin u mazmunan “$D \in \alpha$ va $D \in \beta$” tasdig‘ini bildiradi, ya’ni nuqta, to‘g‘ri chiziq va insidentlik orqali yoziladi.

Xullas, Papp teoremasida atigi uchta eng sodda tushuncha qatnashayotgani uchun uni geometriyaning eng sodda teoremasi deyish mumkin. Ikkinchi tomondan, ana shu uch tushuncha geometriyaning eng boshlang‘ich tushunchalari ekanligi bois Papp teoremasini planimetriyaning eng chuqur teoremasi deyish to‘g‘ri bo‘ladi. Shunga yarasha Papp teoremasining isboti oson emas. O‘ylaymizki, bu g‘aroyib teorema nima uchun o‘rinli ekani bilan tanishish “Matematika jozibasi” rukni muxlislarini qiziqtiradi. Quyida G.S.M.Kokseter va S.L.Greytser kitobida keltirilgan nisbatan soddaroq isbot juz’iy o‘zgartirishlar bilan bayon qilingan. U Menelay teoremasiga asoslanadi. Shuning uchun bu muhim teoremani o‘zimizga qulay shaklda yozib olamiz.

Tekislikdagi α va β to‘g‘ri chiziqlar C nuqtada, α va γ to‘g‘ri chiziqlar B nuqtada, β va γ to‘g‘ri chiziqlar esa A nuqtada kesishsin. A', B' va C' nuqtalar mos tartibda α, β va γ to‘g‘ri chiziq ustida yotsin. Menelay teoremasi bu uch nuqta qachon bir to‘g‘ri chiziq ustida yotadi, degan savolga javob beradi:

Menelayning to‘g‘ri teoremasi. A', B' va C' nuqtalar bir to‘g‘ri chiziq ustida yotsa,

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=-1 \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Menelayning teskari teoremasi. (1) shart bajarilsa, A', B' va C' nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotadi.

Menelay teoremasiga muhim izohlar.

I. (1) tenglikda yo‘naltirilgan kesmalar nisbatlari qaralmoqda: agar surat va mahrajdagi kesmalar bir xil yo‘nalishda bo‘lsa, nisbat musbat, aks holda manfiy deb olinadi. Tenglikning chap tomonida –1 turishi bu uch nisbatning yo bittasi (1-hol), yoki har uchalasi (2-hol) qarama-qarshi yo‘nalgan kesmalar nisbati bo‘lishi lozimligini bildiradi. Birinchi holda $A'B'C'$ to‘g‘ri chiziq ABC uchburchakning ikki tomonini ichki nuqtalarda, uchinchi tomonini esa uning davomida, ya’ni uchburchak tashqarisida kesib o‘tadi, Ikkinchi holda $A'B'C'$ to‘g‘ri chiziq ABC uchburchakning uchala tomonini ham tashqarida kesib o‘tadi (2-rasm).

FMI jurnalining 2004 yil, №3 sonida birinchi hol uchun Menelay teoremasining isboti keltirilgan. Uni ikkinchi holda isbotlashni o‘quvchiga qoldiramiz.

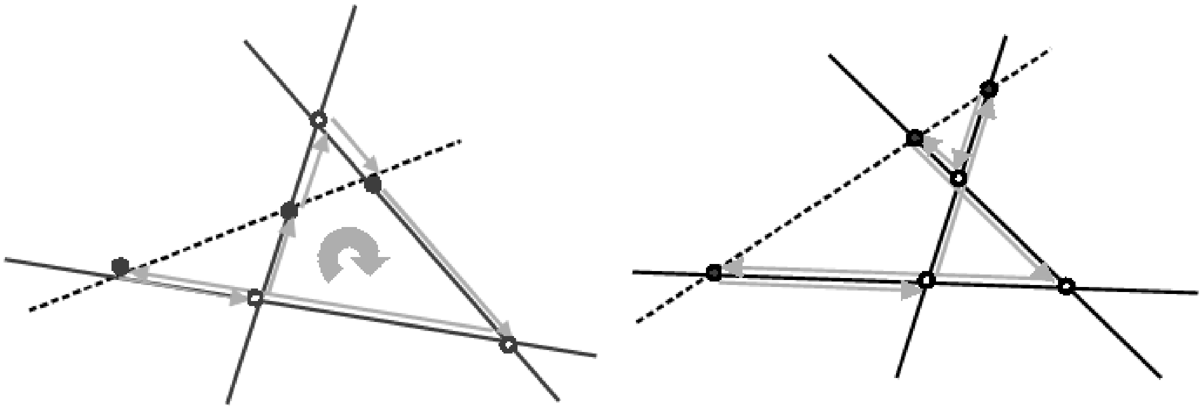
II. Teoremaning yuqorida keltirilgan variantida A, B, C nuqtalar soat mili yo‘nalishida, ya’ni

$$A\to B'\to C\to A'\to B\to C'\to A$$

tartibda aylanib chiqilyapti. Bu uch nuqta qarama-qarshi yo‘nalishda, ya’ni rasmdagi belgilashlarda

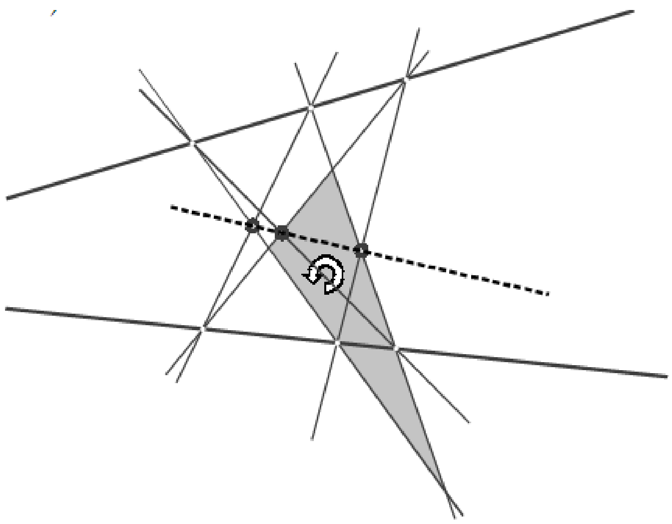
$$A\to C'\to B\to A'\to C\to B'\to A$$

tartibda aylanib chiqilishi ham mumkin. Bunda (1) tenglikdagi nisbatlar “ag‘darilib”, ya’ni surati bilan mahraji o‘rni almashib qolishini kuzatish mumkin.



2-rasm.

III. Menelay teoremasi α, β va γ to‘g‘ri chiziqlar uchburchak hosil qilmagan hollarda, ya’ni yo uchalasi bir nuqtadan o‘tganda, yoki ikkitasi o‘zaro parallel bo‘lib qolgan hollarda ham o‘rinli. Birinchi holda (1) ifodadagi nisbatlarning har biri –1 ga teng bo‘ladi. Ikkinchi holda esa parallel to‘g‘ri chiziqlar “cheksiz nuqtada kesishadi” deb hisoblash kerak. Shunda suratdagi kesmalardan biri va mahrajlardagi kesmalardan birining uzunligi cheksizlikka teng bo‘lib, ular “qisqartirib” yuborilsa, (1) munosabat o‘xshash uchburchaklar xossasiga aylanadi. Biz bunday istisno hollarni keyingi mushohadalarda qarab o‘tirmaymiz.



3-rasm.

Endi Papp teoremasiga qaytaylik. Bir to‘g‘ri chiziqda uch nuqta ikkinchi to‘g‘ri chiziqdagi uch nuqta bilan ikkitadan, jami oltita to‘g‘ri chiziq bilan tutashtirilgan. Oltita to‘g‘ri chiziq o‘zaro 15 ta nuqtada kesishadi. Ulardan to‘qqiztasi teorema shartida qatnashmoqda. Qolgan oltitasi esa ikkita uchburchak hosil qiladi. Baribir bo‘lgani uchun A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan $A_+B_+C_+$ uchburchakni qaraymiz. Qolgan uch to‘g‘ri chiziq – A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1 hamda dastlabki $A_1B_1C_1$ va $A_2B_2C_2$ to‘g‘ri chiziqlar bu uchburchakni (aniqrog‘i: uchburchakni hosil qilgan to‘g‘ri chiziqlarni) kesib o‘tadi (3-rasm).

Mana shu beshta kesuvchiga nisbatan Menelay teoremasini birma-bir qo‘llab chiqamiz. Bunda A_2B_1, B_2C_1, B_2A_1 kesuvchilar uchun (1) nisbatdagi kesmalarni “soat miliga qarama-qarshi yo‘nalishda”, $A_1B_1C_1$ va $A_2B_2C_2$ kesuvchilar uchun soat mili yo‘nalishida olamiz:

$$\frac{A_+A_1}{A_1B_+}\cdot\frac{B_+C_2}{C_2C_+}\cdot\frac{C_+B_3}{B_3A_+}=-1,\qquad \frac{B_+B_1}{B_1C_+}\cdot\frac{C_+A_2}{A_2A_+}\cdot\frac{A_+C_3}{C_3B_+}=-1,$$

$$\frac{C_+C_1}{C_1A_+}\cdot\frac{A_+B_2}{B_2B_+}\cdot\frac{B_+A_3}{A_3C_+}=-1,$$

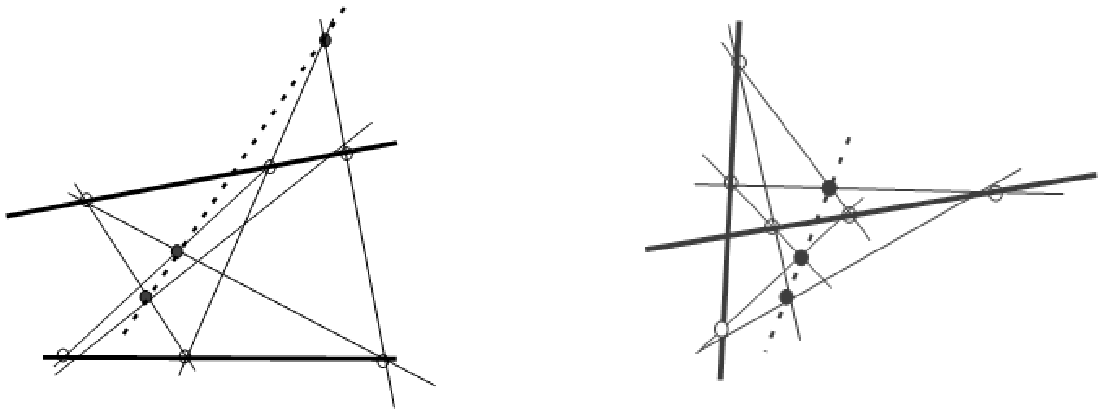
$$\frac{A_+C_1}{C_1C_+}\cdot\frac{C_+B_1}{B_1B_+}\cdot\frac{B_+A_1}{A_1A_+}=-1,\qquad \frac{A_+A_2}{A_2C_+}\cdot\frac{C_+C_2}{C_2B_+}\cdot\frac{B_+B_2}{B_2A_+}=-1$$

Bu tengliklarni ko‘paytirsak, 12 ta kesma qisqarib ketib, + va 3 indeksli kesmalargina qoladi. Masalan, birinchi tenglikning birinchi nisbati bilan to‘rtinchi tenglikdagi uchinchi nisbatning ko‘paytmasi 1 ga teng chiqishi ko‘rinib turibdi.

Shunday qilib, biz

$$\frac{C_+B_3}{B_3A_+}\cdot\frac{A_+C_3}{C_3B_+}\cdot\frac{B_+A_3}{A_3C_+}=\frac{A_3B_+}{B_+C_3}\cdot\frac{C_3A_+}{A_+B_3}\cdot\frac{B_3C_+}{C_+A_3}=-1$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Demak, Menelayning teskari teoremasiga ko‘ra, A_3, B_3, C_3 nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotadi. Shuni isbotlash talab qilingan edi.



4-rasm.

Yana bir marta ta'kidlaymiz: Papp teoremasida dastlabki ikki to'g'ri chiziq va ularning ustida uchtadan nuqta xilma-xil tarzda tanlanishi mumkin, ammo A_3, B_3, C_3 nuqtalar doim bir to'g'ri chiziqda yotadigan chiqaveradi. 4-rasmda bu yana ikki holat uchun tasvirlangan.

Mashq. Ikkinchi chizmada tegishli harflarni qo'yib chiqing.

Mashq. Dastlabki ikki to'g'ri chiziq va ular ustida uchtadan nuqta olinadigan boshqa hollarda ham Papp teoremasini namoyish etuvchi chizma chizing.

Papp teoremasidagi holat mana bunday geometrik boshqotirg'ich bilan bog'liq: to'qqizta nuqtani to'qizta to'g'ri chiziq ustida shunday joylangki, a) har bir nuqtadan roppa-rosa uchtadan to'g'ri chiziq o'tsin; b) har bir to'g'ri chiziqda roppa-rosa uchtadan nuqta yotsin.

Papp teoremasining chizmasi bu boshqotirg'ichning yechimini berishi ravshan. Shunday xossaga ega bo'lgan yana boshqa nuqta va to'g'ri chiziqlar tizimi bormi? Aniqroq aytganda, gap quyidagi xossalarga ega bo'lgan n ta nuqta va m ta to'g'ri chiziqdan tashkil topgan sistemalar ustida so'z bormoqda:

a) bu nuqtalarning har biridan roppa-rosa p tadan to'g'ri chiziq o'tadi;

b) bu to‘g‘ri chiziqlarning har biri ustida roppa-rosa q tadan nuqta yotadi.

Agar shunday sistema mavjud bo‘lsa, u **konfiguratsiya** deb ataladi va (n_p, m_q) deb belgilanadi. (Konfiguratsiyada qatnashadigan to‘g‘ri chiziqlar boshqa nuqtalarda kesishishi mumkin, ammo ular hisobga olinmaydi.)

Bunday konfiguratsiyalardan eng soddasi – $(3_2, 3_2)$ bo‘lib, uchburchakning uchta uchi va uch tomonidan iborat. p yoki q ikkiga teng bo‘lgan hollar qiziq emas. Menelay teoremasining chizmasi $(4_2, 6_3)$ konfiguratsiya hosil qiladi. Papp teoremasining konfiguratsiyasi $(3_3, 3_3)$ ekanligi bilan diqqatga sazovor.

Boshqa konfigurasiyalar ustida mustaqil bosh qotirishni o‘quvchiga mashq sifatida qoldiramiz.

§ 18. Eyler g‘ishtlari[19]

FMI jurnalining sahifalarida bir necha bor Pifagor sonlari haqida hikoya qilingan edi. Pifagor sonlari bu $a^2+b^2=c^2$ tenglik o‘rinli bo‘lgan (a, b, c) butun musbat sonlar uchliklaridir. Bunday sonlarning Pifagor nomi bilan bog‘lanishiga sabab – to‘g‘ri burchakli uchburchakning tomonlari uchun, Pifagor teoremasiga ko‘ra, bu tenglik o‘rinlidir.

Bugungi suhbat maqsadidan kelib chiqib, Pifagor sonlariga biroz boshqacha ta’rif beramiz: agar to‘g‘ri to‘tburchakning tomonlari $a, b,$ hamda diagonali c butun son bo‘lsa, (a, b, c) uchlik Pifagor sonlari deyiladi. Mana shu xossaga ega to‘g‘ri to‘rtburchakning o‘zini Pifagor taxtasi deb atashga kelishamiz. Masalan, tomonlari 3 va

[19] FMI, 2012, №1.

4 ga teng to‘g‘ri to‘rtburchak Pifagor taxtasini tashkil etadi: $3^2+4^2=5^2$. Pifagor taxtalarini topishning umumiy qoidasi yaxshi ma’lum (Geron formulalari): agar

$$a=n^2-m^2,\quad b=2nm,\quad c=n^2+m^2 \tag{1}$$

formulalarda n va m o‘rniga $n>m$ shartni qanoatlantiruvchi butun musbat sonlar qo‘yib chiqilsa, barcha Pifagor uchliklari hosil qilinadi. Masalan, $n=2$, $m=1$ bo‘lsa, $(3, 4, 5)$ Pifagor uchligi, $n=3$, $m=2$ bo‘lganda esa $(5, 12, 13)$ uchlik chiqadi va h.k. $n=3$, $m=1$ bo‘lganda $(8, 6, 10)$ uchlikni hosil qilamiz, lekin uni yangi deb bo‘lmaydi – $(3, 4, 5)$ uchlikdan a bilan b ning o‘rnini almashtirib, uchala sonni 2 ga ko‘paytirishdan hosil bo‘ladi. Pifagor uchliklari takrorlanmasligi uchun n va m o‘zaro tub hamda biri toq, ikkinchisi juft bo‘lishi zarur va yetarli.

Mashq. Oxirgi tasdiqni isbotlang.

Endi Pifagor taxtasining uch o‘lchovli fazodagi o‘xshashini o‘rganishga o‘taylik. Buning uchun tomonlari butun musbat sonlar bilan ifodalanadigan to‘g‘ri parallelepipedlarni qaraymiz. Agar uning diagonali ham butun son bo‘lsa, uni Pifagor g‘ishti deb atab turaylik. Shunday qilib, butun musbat x, y, z, u sonlari

$$x^2+y^2+z^2=u^2. \tag{2}$$

Tenglamani qanoatlantirsa, ular Pifagor g‘ishtining tomonlari va diagonali bo‘lar ekan. Pifagor taxtalaridan farqli ravishda barcha Pifagor g‘ishtlarini beradigan formulalar ma’lum emas. Lekin quyidagi xossalar ma’lum:

1) agar butun musbat n soni $4^p(8q-1)$ ko‘rinishga ega bo‘lsa, uni uchta kvadratning yig‘indisi shaklida yozib bo‘lmaydi;

2) $4^p(8q-1)$ ko‘rinishdan farqli barcha natural sonlarni uchta kvadrat yig‘indisi shaklida yozish mumkin.

(Bu ikki xossada kvadrat deganda manfiy bo‘lmagan butun sonning kvadrati tushuniladi.)

Bu xossalardan birinchisi oson isbotlanadi. Uni o‘quvchiga mashq sifatida qoldiramiz. Ikkinchi xossa esa Gauss teoremasi bo‘lib, uning sodda isboti hozirgacha topilmagan. Gauss teoremasiga asoslanib, (2) tenglama u ning ixtiyoriy qiymatida yechimga ega bo‘lishi kelib chiqadi, chunki, butun sonning kvadrati sira ham $4^p(8q-1)$ ko‘rinishga ega bo‘lmaydi. (Bu xossani ham isbotlang.) Shu bilan Pifagor g‘ishtlariga doir masala ham yechilganday. Ammo Gauss teoremasida x, y, z musbat bo‘lishi shart emas. Masalan, $25=0^2+0^2+5^2$, bizni esa, sonlar parallelepiped qirralarining uzunligi musbat bo‘lgani uchun, (2) tenglamaning butun musbat yechimlari qiziqtiradi. Bunday yechimlar bor, albatta:

$$1^2+2^2+2^2=3^2,\ 2^2+3^2+6^2=7^2,\ 1^2+4^2+8^2=9^2,$$
$$2^2+6^2+9^2=11^2,\ 3^2+4^2+12^2=13^2 \text{ va h.k.}$$

Mashq. Geron formulasidan foydalanib, Pifagor g‘ishtlarining cheksiz ko‘pligini isbotlang.

Xo‘sh, Pifagor g‘ishtlari uchun Geron formulalari kabi umumiy formula topib bo‘ladimi? Bu savolning javobi muallifga ma’lum emas.

Agar tomonlari butun musbat sonlardan iborat to‘g‘ri parallelepipedda yon yoqlarining diagonallari ham butun musbat sonlardan iborat bo‘lsa, bunday parallelepiped Eyler g‘ishti deb yuritiladi. Qirralar uzunliklari x, y, z bo‘lsa,

$$x^2+y^2=u^2,\quad x^2+z^2=v^2,\quad y^2+z^2=w^2 \tag{3}$$

tenglamalar sistemasining har bir butun musbat yechimi Eyler g‘ishtini beradi. Misol:

$$44^2+117^2=125^2,\ 44^2+240^2=244^2,\ 117^2+240^2=267^2.$$

Bu parallelepiped Halke ismli germaniyalik havaskor matematik tomonidan 1719 yilda topilgan va bu ixtiro masala bilan Eyler shug‘ullanishiga turtki bo‘lgan. U Eyler g‘ishtlaridan eng kichigidir. Quyidagi jadvalda yana bir necha Eyler g‘ishti keltirilgan:

x	y	z	u	v	w
85	132	720	157	725	732
160	231	792	281	808	825
240	252	275	348	365	373
132	351	720	375	732	801

Eyler g‘ishtlari uchun ham hozirgacha umumiy formula ma’lum emas. Ularning Leonard Eyler ismi bilan bog‘lanishiga sabab – olim bunday g‘ishtlarning cheksiz ko‘p ekanligini isbotlagan.

Mashq. Kompyuter uchun Eyler g‘ishtlarini hisoblaydigan dastur tuzing.

Shunday qilib, Pifagor g‘ishtlari bilan ham, Eyler g‘ishtlari bilan ham hal etilmagan muammo bog‘liq: bunday parallelepipedlarning cheksiz ko‘p ekanligi isbotlangan, ammo umumiy qoidasi topilgan emas. Lekin, muhtaram o‘quvchi, bular yana bir muammo oldida hech narsa emas.

Agar tomonlari butun sonlardan iborat to‘g‘ri parallelepiped bir vaqtning o‘zida ham Pifagor g‘ishti, ham Eyler g‘ishti bo‘lsa, ya’ni uning diagonali ham, yon yoqlarining diagonallari ham butun son chiqsa, u mukammal parallelepiped deb ataladi.

Mukammal parallelepiped bormi?

Afsuski, hozirgacha birortasi topilganicha yo‘q. Hatto eng kuchli kompyuterlar yordamida. Balki u mavjud emasdir? Buni ham shu vaqtgacha hech kim isbotlay olgani ham yo‘q. (2005 yilda Tbilisilik matematik talaba

L. Margishvili bu tasdiqni isbotladim, deya maqola e’lon qilgan edi, ammo isbotda kamchilikka yo‘l qo‘yilgan ekan.)

Ko‘rinib turibdiki, masalaning ta’rifi juda sodda:

$$x^2 + y^2 = u^2, \quad x^2 + z^2 = v^2, \quad y^2 + z^2 = w^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi butun musbat t, u, v, w, x, y, z sonlar mavjudmi? Shunday ekan, balki uning sodda yechimi ham bordir? Bunday yondashuvdan ehtiyot bo‘lish lozim.

Matematikada bayoni juda sodda, ammo necha yuz, hatto ming yildan buyon yechib bo‘lmayotgan masalalar talay. Ulardan biri – mashhur Fermaning katta teoremasi ediki, uni zamonaviy matematikaning eng chuqur usullari bilangina hal etish imkoni bo‘ldi. Xo‘sh, unda nima maqsadda bu muammolar haqida hikoya qilmoqdasiz – o‘quvchida tug‘ilishi mumkin bunday savol.

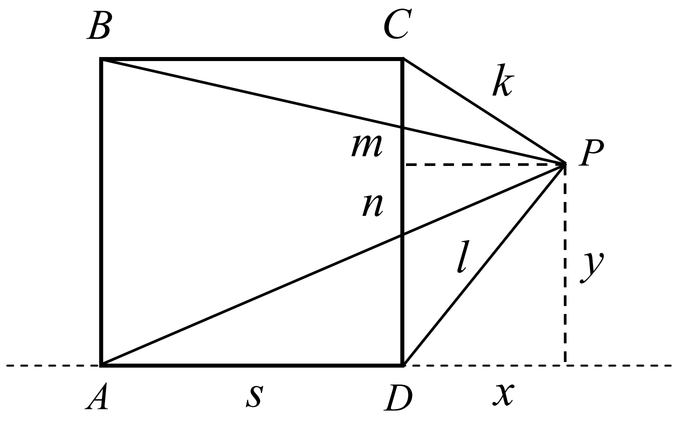
Birinchidan, biz Eylerning boy merosi haqida hikoya qilayotgan ekanmiz, “Eyler g‘ishtlari” mavzusi ustida to‘xtalib o‘tish tabiiydir. Ikkinchidan, “Eyler g‘ishtlari” mavzusi algebrada “ildiz chiqarish”, geometriyada “parallelepiped” mavzularini o‘rganishda qiziqarli vosita bo‘la oladi. Uchinchidan, muammoni to‘liq hal etish qiyin bo‘lsa, uni qisman yechish ham salmoqli ish bo‘ladi. Masalan, Eyler tomonidan (3) sistemaning yechimlarini beradigan ikkita ketma-ketlik topilgan. Ulardan farqli ketma-ketlik topgan matematikning nomi bu fan tarixidan joy olishiga shubha yo‘q.

§ 19. Shteynhauz masalasi[20]

Polshalik matematik Hugo Shteynhauz matematikaning bir necha sohasiga hissa qo‘shgan olimdir. Jumladan, Banax-Shteynhauz teoremasi zamonaviy matematikaning funksional analiz deb ataladigan sohasida muhim o‘rin tutadi. H.Shteynhauz ilmiy tadqiqotlardan tashqari matematikani ommalashtirishga ham ko‘p kuch sarflagan. Uning “Matematik kaleydoskop”, “Yuzta masala” kitoblari bir qator tillarga tarjima qilingan. Bu boradagi uning so‘nggi kitobi “Matematika haqida o‘ylar” nomi bilan nashr etildi. Unda ancha chuqur muammo va mavzular qatorida maktab o‘quvchilari uchun ham tushunarli masalalar qaralgan (“Yana yuzta masala” bobida). Ulardan birining ostiga “Men bu ancha-muncha murakkab masalaning yechimini bilmayman”, degan izoh berilgan ekan. Bu suhbatimizni ana shu masalaga bag‘ishlaymiz, chunki u chindan ham jozibali.

H.Shteyhauz masalasi. Tekislikda shunday $ABCD$ kvadrat va P nuqta qurish mumkinmiki, kvadratning tomoni ham, uning uchlaridan A, B, C va D nuqtalargacha masofalar ham butun songa teng bo‘lsin?

Bu masala sirtdan qaraganda geometrik mazmunli, aslida esa u sof arifmetik masala bo‘lib, sonlar nazariyasining Diofant tenglamalari deb ataladigan bo‘limiga taalluqli. Buni ko‘rish uchun kvadrat tomonini s



1-rasm.

[20] FMI, 2014, №1.

bilan, P nuqtadan CD to‘g‘ri chiziqqacha masofani x, AD to‘g‘ri chiziqqa-cha masofani esa y bilan belgilaylik (1-rasm; n butun musbat son, x va y esa hozircha ixtiyoriy sonlar).

To‘rt marta Pifagor teoremasini qo‘llasak:

$$(s+x)^2+y^2=n^2, \tag{1}$$

$$(s+x)^2+(s-y)^2=m^2, \tag{2}$$

$$x^2+y^2=l^2, \tag{3}$$

$$x^2+(s-y)^2=k^2 \tag{4}$$

ko‘rinishdagi sistemani hosil qilamiz (bunda n, m, l, k – butun musbat sonlar).

Endi masala algebra tilida shunday ta’riflanadi: (1)–(4) tenglamalarni qanoatlantiradigan butun musbat hamda haqiqiy x, y sonlar mavjudmi?

Ma’lumki, bir necha noma’lumli sistemaning haqiqiy yechimlarini topish sof algebraik masala hisoblanadi, butun (asosan butun musbat) yechimlarini topish talab qilinsa, masala Diofant tenglamalari nazariyasiga mansub bo‘ladi. Shteynhauz masalasaning birinchi xususiyati – bu masalaning aralash tabiatli ekanligidir. Xo‘sh, unda u matematikaning qaysi sohasiga taalluqli?

U mohiyatan Diofant sistemasi bo‘lar ekan. Haqiqatan, 1-tenglamadan 3-tenglamani hadma-had ayirsak,

$$s^2+2sx=n^2-l^2$$

tenglik hosil bo‘lib, undan x ratsional son bo‘lishi lozimligi kelib chiqadi. Xuddi shu singari, 1-tenglamadan 4-tenglamani hadma-had ayirsak,

$$s^2+2sy=n^2-m^2$$

tenglik hosil boʻlib, unga koʻra x ham ratsional son boʻlishi lozim. Endi x bilan y ni oddiy qisqarmas kasr koʻrinishida yozaylik. Ularning umumiy mahraji z boʻlsin.

Agar (1)–(4) tengliklarning har birini hadma-had z^2 ga koʻpaytirsak, barcha oʻzgaruvchilar butun musbatga aylanadi. Shuning uchun bu tenglamadagi 7 ta nomaʼlumni avval boshdan butun musbat deb hisoblash mumkin.

Demak, Shteynhauz masalasi mohiyatan Diofant tenglamalar sistemasi ekan: (1)–(4) tengliklarni qanoatlantiruvchi butun k, l, m, n, s, x, y musbat sonlar mavjudmi?

Bunda qaralayotgan sistemaning barcha yechimini topish shart emas – birorta yechim topilishi kifoya. Biz oʻquvchilarimizga oʻz kuchlarini sinab koʻrishlarini taklif etamiz.

Bunda kompyuterga dastur tuzib tajriba oʻtkazib koʻrish ham foydali boʻladi.

§ 20. Geron uchburchaklari haqida masala[21]

Tomonlarining uzunligi butun sonlarga teng to‘g‘ri burchakli uchburchaklar Pifagor uchburchaklari deb atalishi ma'lum.

Bunday uchburchaklar haqida jurnalimizning o‘tgan sonlarida bir nechta material berilgan. Pifagor uchburchaklarining tomonlari uchun umumiy formula (Geron formulalari) ham yaxshi tanish:

$x = 2mn,\ y = m^2 - n^2$ – katetlar, $z = m^2 - n^2$ – gipotenuza, bunda m va n ixtiyoriy butun sonlar.

Ko‘rinib turibdiki, katetlardan biri doim juft son bo‘ladi. Shuning uchun Pifagor uchburchagining yuzi $S = \frac{1}{2}x \cdot y$ ham butun songa teng chiqadi.

Xo‘sh, uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lmasa-da, tomonlari ham, yuzi ham butun son bilan ifodalanadigan yana boshqa uchburchaklar bormi? Ular Geron uchburchaklari deb atash qabul qilingan. Quyidagi jadvalda Geron uchburchagi namunalari keltirilgan:

x	*y*	*z*	*s*
7	15	20	24
9	10	17	36
13	14	15	84
39	41	50	78

Uchburchak yuzi uchun Geron formulasiga ko‘ra, tomonlari x, y, z, yuzi s bo‘lgan uchburchak uchun

$$(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) = 16s^2 \qquad (1)$$

[21] FMI, 2014, №2.

tenglik o‘rinli. Shuning uchun Geron uchburchaklari haqidagi masala algebraik tilda bunday ifodalanadi:

(1) tenglamani qanoatlantiruvchi barcha butun musbat x, y, z va s sonlarni toping.

Ya’ni, hamma Pifagor uchburchaklari uchun Geron formulalari kabi (1) tenglamaning barcha yechimini beradigan formula (yoki qoida) mavjudmi?

Bu masala umumiy holda yechilmagan, ya’ni yechimini kutayotgan ochiq muammolardan biri. Biz quyida uning bir xususiy holinigina qaramoqchimiz.

Yuqoridagi jadvalda keltirilgan Geron uchburchaklaridan birining tomonlari ketma-ket natural sonlardir. Uni umumlashtiraylik:

Ketma-ket tomonli Geron uchburchaklari haqida masala: qachon tomonlari $2n-1$, $2n$ va $2n+1$ bo‘lgan uchburchakning yuzi butun son bo‘ladi?

(1) formulani bu holga qo‘llasak, $3n^2(n^2-1)=s^2$ tenglama hosil bo‘ladi. Bunga ko‘ra, s ning 3 ga va n^2 ga qoldiqsiz bo‘linishi shart. Shuni hisobga olib, $x=n$, $s=3ny$ desak,

$$x^2-3y^2=1 \tag{2}$$

ko‘rinishdagi tenglama hosil bo‘ladi – u Pell tenglamasi deb ataladigan Diofant tenglamalari oilasiga mansub.

Pell tenglamalarini yechishning bir necha usuli ma’lum. Quyida “pastdan yuqoriga va yuqoridan pastga induksiya” deb ataladigan usulni bayon qilamiz. (2) tenglamaning eng sodda yechimi $x_0=1$, $y_0=0$ Har ikki noma’lum musbat bo‘lgan yana bir yechimi: $x_0=2$, $y_0=1$.

Usulning mohiyati – mana shu yechimga asoslanib yangi yechimlarni izlashdan iborat. (2) tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lishi quyidagi xossadan kelib chiqadi: agar x_n va y_n (2) tenglamani qanoatlintirsa, u holda

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \text{ va } y_{n+1} = x_n + 2y_n \qquad (3)$$

sonlar juftligi ham qanoatlantiradi. (Bu formulalar avval $x_{n+1} = ax_n + by_n$, $y_{n+1} = cx_n + dy_n$ ko‘rinishda olinib, so‘ng koeffitsiyentlar (2) tenglama bajariladigan qilib tanlash yo‘li bilan hosil qilingan.)

Mashq. Agar x_n va y_n (2) tenglamani qanoatlantirsa, u holda x_{n+1}, y_{n+1} ham (2) ning yechimi bo‘lishini ko‘rsating.

Shunday qilib, quyidagi Geron uchburchaklarini qo‘lga kiritamiz:

x	***y***	**Uchburchak tomonlari**			***s***
		2*n*–1	**2*n***	**2*n*+1**	
2	1	3	4	5	6
7	4	13	14	15	
26	15	51	52	53	
…	…	…	…	…	…

Endi shunday savol tug‘ilishi tabiiy: bu usulda tomonlari $2n-1$, $2n$ va $2n+1$ bo‘lgan barcha Geron uchburchagi hosil bo‘ladimi yoki boshqa yechimlar ham bo‘lishi mumkinmi?

(3) formulalar bu savolga ham javob berar ekan. Chindan ham, (3) tengliklarni x_n bilan y_n ga nisbatan tenglamalar sistemasi deb qarab, yechsak,

$$x_n = 2x_{n+1} - 3y_{n+1} \text{ va } y_n = 2x_{n+1} - 3y_{n+1} \qquad (4)$$

formulalarni hosil qilamiz. (3) ga ko‘ra, $n = 1$ dan boshlab $x_n > 0$, $y_n > 0$ ekanligi ko‘rinib turibdi. Bundan esa $x_{n+1} > 2x_n$, ya’ni $x_n < \frac{1}{2}x_{n+1}$ kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, x^*, y^* sonlari (2) tenglamaning ixtiyoriy butun musbat yechimi bo‘lsin. $x^* = 1$ yoki $x^* = 2$ bo‘lgan holdagi yechimlar ma’lum. Faraz qilaylik, $x^* > 2$.

Isbotlanganiga ko‘ra, $x_* = 2x_* - 3y_*$, $y_* = 2x_* - 3y_*$ ham butun yechim bo‘ladi. Bunda x_* qiymat x^* ga qaraganda ikki martadan ham ko‘proq kichik bo‘ladi. Shunday yo‘l bilan (4) formulalardan foydalanib x^*, y^* yechimdan kichikroq yechimlarni chiqara borsak, oxiri x ning qiymati 7 dan kichiklashadi, demak, yo 1 ga, yoki 0 ga teng bo‘ladi. Bundan esa, (3) formulalar (2) tenglamaning barcha yechimini berishi kelib chiqadi.

Masala. Tomonlari $2n$, $2n+1$ va $2n+2$ bo‘lgan Geron uchburchagi bormi?

Masala. Geron uchburchaklari haqidagi masalaning ikkita parametrga bog‘liq yechimlar oilasini qurish mumkinmi (Pifagor uchburchaklari uchun formulalar kabi)?

§ 21. Dinamik sistemalar: “bosh og‘rig‘i” nomli misol[22]

Bunday nomga “musharraf” bo‘lgan dinamik sistema juda sodda tavsiflanadi – uni hatto boshlang‘ich sinf o‘quvchisiga tushuntirish mumkin:

Butun musbat son olasan. Agar u juft bo‘lsa, 2 ga bo‘lasan, toq bo‘lsa, 3 ga ko‘paytirib, 1 ni qo‘shasan. Hosil bo‘lgan son ustida yana shu ishni takrorlaysan, takrorlayverasan, tarkorlayverasan. Savol: dastlab qanday son olgan bo‘lmaylik, biror qadamda, albatta, 1 chiqadimi?

Masalan, boshlang‘ich son 10 bo‘lsin.

U juft, yarmi – 5,

Bu son toq, 3 ga ko‘paytirib, 1 ni qo‘shsak 16.

Natija – juft, yarmi – 8.

Natija yana juft, yarmi – 4, so‘ng 2 va nihoyat, 1.

[22] FMI, 2015, №3.

(nega endi jarayonni 1 chiqsa to‘xtatish kerak? Davom ettirilsa: 1→1·3+1→4→2→1. – ko‘rinib turibdiki, 1→4→2→1 sonlari takrorlanaveradi.)

Yana bir necha boshlang‘ich sonlarda sinab ko‘raylik. Boshlang‘ich son sifatida 2, 4, 8 olinsa, 1 chiqishi ravshan. So‘ng

3→10→5→16→8→…→1
7→22→11→34→17→52→26→13→40→20→10→…→1
9→28→14→7→…→1.

Kattaroq son olib ko‘rsak-chi? Masalan,

23→70→35→106→52→26→13→40→…→1
47→142→71→214→107→322→161→484→242→121
→464→232→116→58→29→88→44→22→11→…→1

(chunki yuqorida 11 dan 8 qadamda 10, yana 6 qadamda 1 chiqishini ko‘rgan edik).

Chindan yana 1 chiqyapti. Qani, yana ham kattaroq son olib ko‘raylik-chi:

2015→6046→3023→9070→4535→13606→6803→
20410→1020
5→30616→15308→7654→3827→11482→5741→
17224

– bu safar sonlar kattalashib bormoqdaki, 1 gacha tushmaydiganga o‘xshaydi. Qani, davom ettirib ko‘raylik:

17244→8612→4306→2153→6460→3230→1615→
4846→2423→7270→3635→10906→5453→16360→
8180→4090→2045→6136→3068→1534→767→2302
→1151→3454→1727→5182→2591→7774→3887→
11662→5831→17494→8747→26242→13121→39364

– to‘xtatsa ham bo‘lar, sira 1 chiqadiganga o‘xshamaydi. Orada 767 gacha tushdi-yu, yana kattalashib ketmoqda.

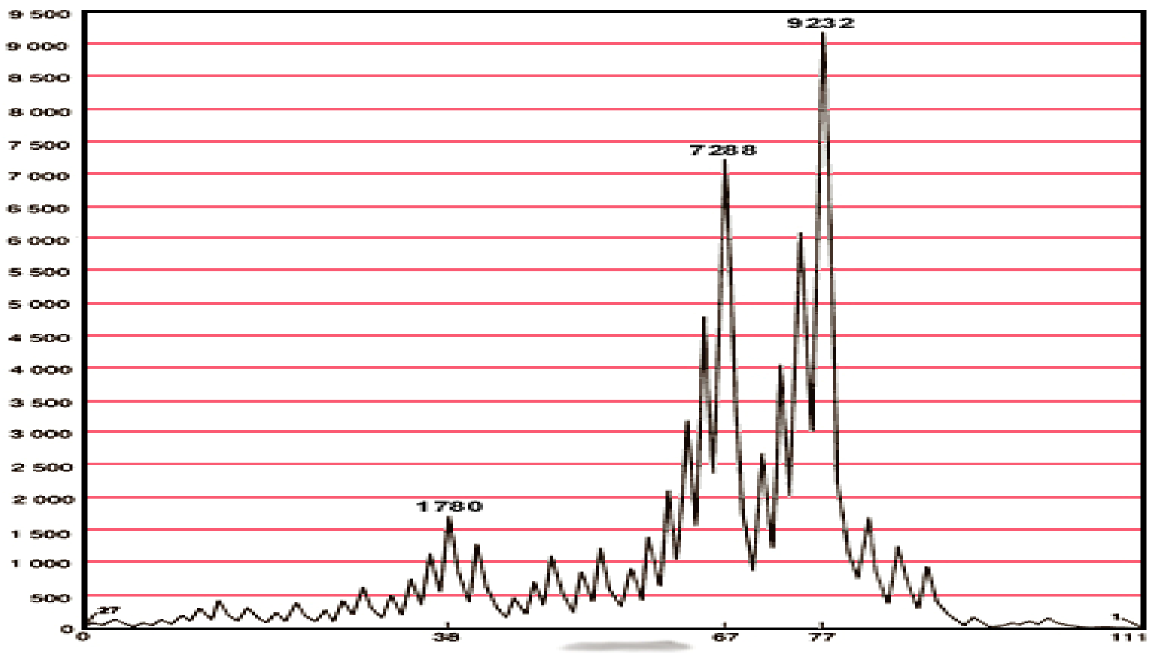
– Sabr-sabr.

– Bordi-yu, 1 chiqmaydigan bo‘lsa, axir to‘xtovsiz cheksiz davom ettirib bo‘lmaydi-ku! – Qani, ko‘raylik:

39364→19882→9841→29524→14762→7381→22144 →11072→5536→2768→1384→692→346→173→520→ 260→130→65→196→98→49→148→74→37→112→56 →28→14→7→...→1 – chiqdi!!

Quyidagi 1-shaklda boshlang‘ich son 27 bo‘lganda hosil bo‘ladigan ketma-ketlik grafigi tasvirlangan.

Masalani dinamik sistemalar tilida bayon qilaylik. Sistema fazosi sifatida natural sonlar to‘plami N ni olish lozim (unga 0 ham tegishli bo‘laversin). $f: N \to N$ akslantirishni quyidagicha aniqlaymiz: n juft bo‘lsa, $f(n) = \frac{n}{2}$, n toq bo‘lsa, $f(n) = 3n + 1$.



1-shakl

(abssissalar o‘qi qadam raqamini ko‘rsatadi).

Agar n_0 boshlang‘ich nuqta bo‘lsa,

$$n_0,\ n_1 = f(n_0),\ n_2 = f(n_1),\ n_3 = f(n_2),\ n_4 = f(n_3),\ \ldots$$

orbita hosil bo'ladi. 0 nuqta bu sistemaning qo'zg'almas nuqtasi ekanligi ravshan.

Masalani birinchi bo'lib o'rgangan nemis matematigi L.Kollats shunday farazni aytgan (1937 y.): Boshlang'ich nuqta musbat bo'lsa, orbita, albatta, 1 nuqtaga tushib, 1, 2, 4 sikl takrorlana boshlaydi.

Hozirgacha bu farazning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligi noma'lum.

Mashq. Kompyuterga dastur tuzib, bu farazni 1000 gacha (imkon topsangiz, 1000000 gacha) boshlang'ich qiymatlar uchun tekshirib ko'ring.

Matematika g'aroyib fanda – shu qadar jo'n masala o'ta qiyin muammo bo'lib chiqsa. Kitobxonlarimiz P.Fermaning mashhur "teoremasi" haqida eshitgan, albatta. U masala haqida ko'plab latifalar, hatto, hikoya ham to'qilgan. Kollats farazi haqida ham hikoya mavjud.

Masala bilan birinchi marta tanishgan bir matematik bir oygacha bosh qotirib, bir qadam bo'lsa ham uni yechishga yaqinlashmabdi. Yana ham qattiqroq o'ylagan ekan, boshi og'rib, ko'zlari tinadigan bo'lib qolibdi. Hakimlarga uchragan ekan, ular ham hech nima qilisha olmabdi (sababini bilishmaganda, balki matematikning o'zi ham kasalining sababi Kollats masalasi ekanligini anglab yetmagandir). Xabar olgani kelgan hamkasbi uni boshini bog'lab olgan, stolining ustida esa bir uyum qog'oz bilan ko'ribdi. "Bular nima?" deb so'ragan ekan, matematik hamkasbiga Kollats masalasi haqida so'zlab beribdi. Hamkasbiga masala oson ko'rinib, darhol hisob-kitobga tushib ketibdi. Qarangki, matematikning bosh og'rig'i shu zahoti to'xtabdi – illat hamkasbiga o'tganmish. Shundan buyon kim bu kasallik bilan "og'rib qolsa", to uni boshqa matematikka (yoki matematika fanini o'qigan boshqa kishiga) "yuqtirmaguncha sog'aymas" emish.

§ 22. Dinamik sistem: olimpiada masalasi[23]

Nufuzli matematika olimpiadalaridan birida shunday masala berilgan: o‘nli sanoq sistemasida yozilgan butun musbat son olinadi. Uning raqamlari kvadratga oshiriladi-da, yig‘indisi navbatdagi son deb qabul qilinadi. So‘ng uning ustida yana shunday amal – raqamlari kvadratlarining yig‘indisi topiladi va hokazo. Masalan,

$$1987 \to 1^2+9^2+8^2+7^2=195 \to 1^2+9^2+5^2=107 \to \ldots$$

Dastlab olingan son qanday bo‘lishidan qat’iy nazar, hosil qilingan ketma-ketlikda yo 1 ga yo‘liqiladi, yoki 89 uchraydi – shuni isbotlang.

Agar biror natija 1 ga teng chiqsa, keyingi hamma son 1 bo‘lishi ravshan. Masaladan dinamik sistemaning hidi kelib turibdi: 1 soni uning qo‘zg‘lmas nuqtasi bo‘lmoqda. Bu sistema shunday aniqlangan: fazosi N – butun musbat sonlar to‘plami, sistemani aniqlovchi akslantirish f – o‘nli sanoq sistemasida raqamlar kvadratlarining yig‘idisi, ya’ni $n=(a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_0)_{10}$ bo‘lsa,

$$f(n)=a_{m-1}^2+a_{m-2}^2+\ldots+a_1^2+a_0^2.$$

Masalaning yechimiga kelsak…

Keling, hozircha buning ustida bosh qotirmay, sistemaning xossalarini o‘rganaylik.

1-Lemma. Agar n soni m xonali va $m\geq 4$ bo‘lsa, u holda $f(n)$ ko‘pi bilan $m-1$ xonali bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatdan, $m\geq 0$ va $a_{m-1}\neq 0$ deb,

$$\begin{gathered}10^{m-1}a_{m-1}+10^{m-2}a_{m-2}+\ldots+10^2a_2+10a_1+a_0-\\-10(a_{m-1}^2+a_{m-2}^2+\ldots+a_2^2+a_1^2+a_0^2)\end{gathered} \qquad (1)$$

ayirmani qaraylik. Uni quyidagi tarzda qayta yozamiz:

[23] FMI, 2015, №4 (A.M.Tilavov bilan hammualliflikda).

$$10(10^{m-2}-a_{m-1})a_{m-1}+10(10^{m-3}-a_{m-2})a_{m-2}+\ldots$$
$$+10(10-a_2)a_2+10(1-a_1)a_1+a_0-10a_0^2.$$

Endi qo‘shiluvchilarni baholaymiz: $a_{m-1}\neq 0$ va $a_0,\, a_1,\, a_2,\ldots,a_m$ – o‘nli raqamlar ekanligini hisobga olsak, 1-qo‘shiluvchi $10(100-a_{m-1})a_{m-1}\geq 10(100-9)9=8190$, ikkinchisidan to $10(10-a_2)a_2$ gacha qo‘shiluvchilar manfiy emas. Oxirgi ikki qo‘shiluvchi esa manfiy bo‘lishi mumkin, lekin mos tartibda $10(1-a_1)a_1\geq -720$, $a_0-10a_0^2\geq -801$.

Demak, (1) ayirma $8190-1521$ dan kichik emas. Bu esa $m\geq 4$ bo‘lganda, $f(n)$ ning qiymati n dan kamida 10 marta kichik bo‘ladi, demakdir.

Natija. Dastlabki son necha bolishidan qat’i nazar biror qadamdan so‘ng uch xonali son hosil bo‘ladi.

2-Lemma. Agar n uch xonali bo‘lsa, $f(n)\leq 243$.

Haqiqatdan, $f(n)\leq 9^2+9^2+9^2=243$.

Natija. Agar $n>243$ bo‘lsa, bir necha qadamdan so‘ng 243 dan katta bo‘lmagan son chiqadi.

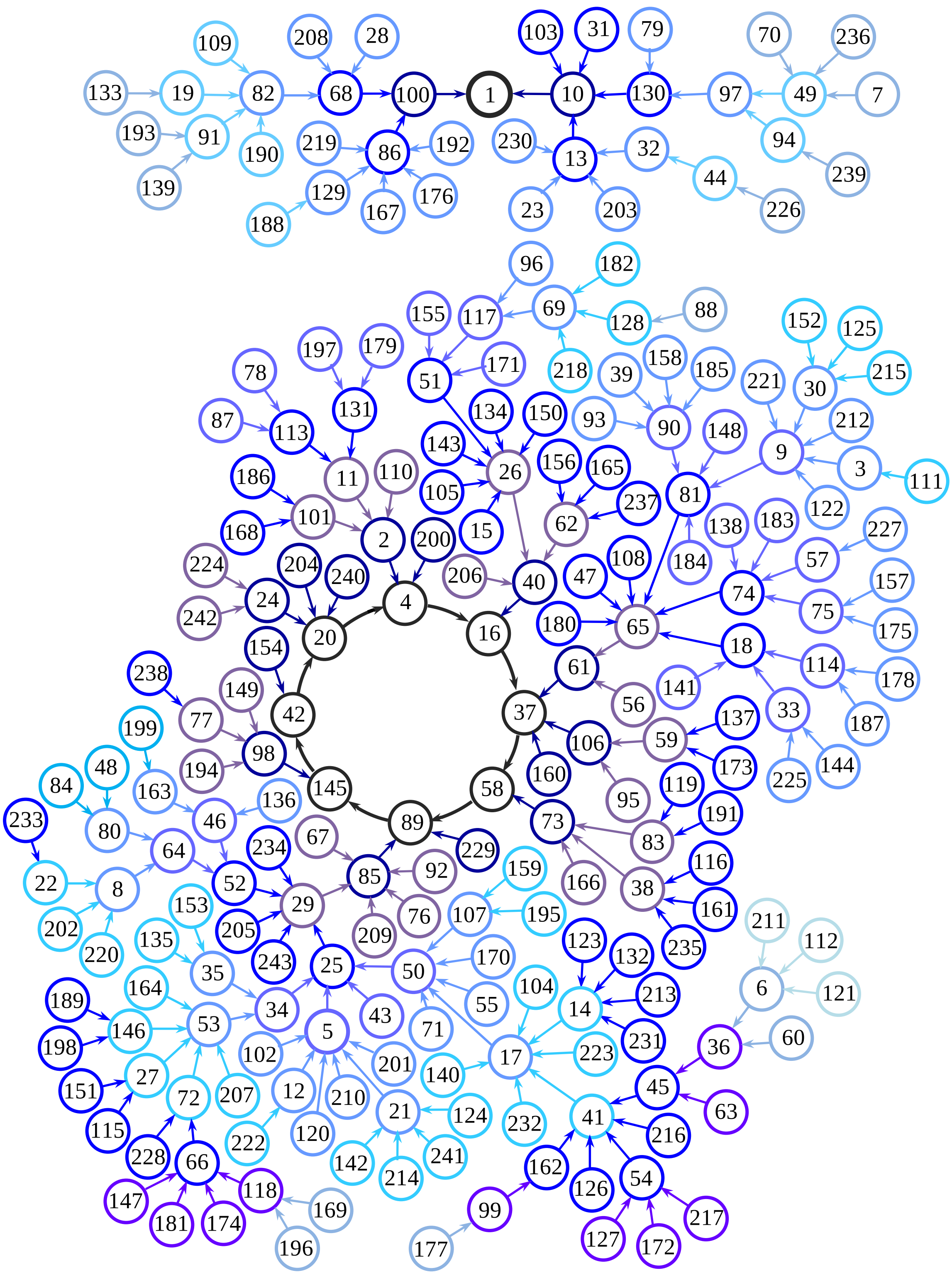
Mashq. n soni m xonali bo‘lsa, necha qadamdan so‘ng uch xonali son chiqishini ayta olasizmi?

Yuqoridagi xossalar dinamik sistemalar tilida shunday ifodalanadi: $A=\{1,2,3,4,\ldots,243\}$ to‘plami qaralayotgan dinamik sistemaning attraktori bo‘ladi – qanday n olinmasin $n_0,\, n_1=f(n_0),\, n_2=f(n_1),\ldots$ orbita A to‘plamga kelib tushadi va undan qaytib chiqmaydi.

Quyida tasvirlangan shaklda qaralayotgan dinamik sistemaning A to‘plamdagi orbitalari ko‘rsatilgan (shaklni yasashda “Kvant” jurnalida berilgan tasvirdan foydalanildi). Undan shunday xulosa chiqadi: f dinamik sistema faqat bitta qo‘zg‘almas nuqtaga ega – bu 1 soni va faqat bitta siklga ega:

$$4\to 16\to 37\to 58\to 89\to 145\to 42\to 20\to 4.$$

Bu xulosadan olimpiada masalasi yechimi ravshan.



§ 23. Dinamik sistema: yangi masalalar[24]

Avvalgi maqolamizda quyidagicha ta’riflanadigan dinamik sistemani qaragan edik:

x_0 – o‘nli sanoq sistemasida yozilgan butun musbat son bo‘lsa, x_1 – uning raqamlari kvadratlari yig‘indisi, x_2 esa x_1 ning raqamlari kvadratlari yig‘indisi va hokazo.

Hosil bo‘ladigan $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ketma-ketlik dinamik sistema bo‘lib, uning atigi bitta qo‘zg‘almas nuqtasi bor: $x_0 = 1$ bo‘lsa, $x_1 = x_2 = \ldots = 1$ hamda bitta sikli bor (qisqalik uchun x_n dan x_{n+1} hosil bo‘lishini $\to$ belgisi bilan ko‘rsatamiz):

$$4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4.$$

Ya’ni, $x_0 = 4$ bo‘lsa, $x_8 = 4$ – bunday holda sikl davri 8 ga teng deyiladi.

Istalgan dinamik sistemaning istalgan traektoriyasi uchun quyidagi uch holdan biri va faqat bittasi o‘rinli bo‘ladi.

I. Traektoriya biror qadamda qo‘zg‘almas nuqtaga tushadi.

Qarayotgan misolimizda masalan, $x_0 = 2019$ bo‘lsa,

$$x_1 = 2^2 + 0^2 + 1^2 + 9^2 = 86,\ x_2 = 8^2 + 6^2 = 100,$$
$$x_3 = 1,\ x_4 = x_5 = \ldots = 1.$$

II. Traektoriya siklga tushadi. Masalan, $x_0 = 2015$ bo‘lsa,

$$x_1 = 2^2 + 0^2 + 1^2 + 5^2 = 30 \to x_2 = 9 \to x_3 = 81 \to x_4 =$$
$$= 65 \to x_5 = 61 \to x_6 = 37.$$

[24] FMI, 2015, №5 (A.M.Tilavov bilan hammualliflikda).

III. Traektoriyaning hamma hadi o‘zaro farqli.

Qaralayotgan dinamik sistema misolining muhim xossasi: 3-toifali traektoriyalar mavjud emas. Bu xossa avvalgi maqolada isbotlangan edi.

Mashq. Traektoriyasi a) qo‘zg‘almas nuqtaga tushadigan, b) siklga tushadigan boshlang‘ich nuqtalar cheksiz ko‘p ekanligini ko‘rsating.

Tadqiqot uchun mavzular:

1. Boshlang‘ich x_0 soniga qarab, traektoriyani hisoblamasdan u 1 ga keladimi yoki siklga tushadimi – aniqlash mumkinmi?

2. Traektoriyasi siklga tutashadigan boshlang‘ich nuqtalar soni traektoriyasi 1 ga kelib tushadiganlariga nisbatan ko‘p bo‘lishini isbotlang.

Albatta, har ikki toifa boshlang‘ich nuqtalar ham cheksiz miqdorda bo‘lgani uchun, masala sharti aniqlashtirishni talab etadi. Bu, masalan, shunday amalga oshirilishi mumkin: m butun sonni olamizda, 1 dan m gacha bo‘lgan boshlang‘ich nuqtalarni qaraymiz. Ularning ichida birinchi toifalilari sonini a_m^I, ikkinchi toifalilari sonini a_m^{II} deb belgilaylik.

U holda II masala quyidagicha tushunilishi mumkin: $m \geq 3$ bo‘lsa, $a_m^I < a_m^{II}$.

Xususan $a_{10}^I = 3$ (tegishli boshlang‘ich nuqtalar 1, 7 va 10) $a_{10}^{II} = 7$, $a_{100}^I = 17$, $a_{100}^{II} = 83$.

3. $\dfrac{a_m^I}{a_m^{II}}$ kasrning $m \to \infty$ bo‘lganda limiti mavjudmi? Agar mavjud bo‘lsa, u nimaga teng?

4. Dastlabki 100 ta boshlang‘ich nuqta qaralsa, faqat bitta holda I toifaga tegishli ketma-ket ikkita son uchraydi:

$$31 \to 3^2 + 1^2 = 10 \to 1, \quad 32 \to 3^2 + 2^2 = 13 \to 1^2 + 3^2 = 10 \to 1.$$

a) bunday juftliklar soni cheklimi yo cheksiz ko‘pmi?

b) qo‘zg‘almas nuqtaga kelib tushadigan ketma-ket uchta boshlang‘ich nuqta bormi? To‘rtta-chi?

5. 50 dan 67 gacha boshlang‘ich nuqtalarning hammasi, ya’ni ketma-ket 18 ta nuqta siklga kelib tushadi. Istalgan k uchun II toifaga mansub ketma-ket k ta boshlang‘ich nuqta topiladimi?

6. 35 soni bir qadamdan so‘ng 34 ga o‘tadi.

Bunday juftliklar ya’ni bir qadamda $n+1$ ga o’tadigan n sonlari yana bormi?, Soni cheklimi yo cheksizmi?

7. Traektoriyani orqaga davom ettirib ko‘raylik.

Ixtiyoriy n uchun bir qadamda n ga o‘tadigan boshlang‘ich nuqtalar soni cheksiz ko‘p. Masalan, n ta 1 va istalgancha 0 bilan yoziladigan sonlar.

Bir qadamda n ga o‘tadigan sonlarning eng kichigini l_n deb belgilaylik. $l_n < n$ bo‘lgan n sonlari ko‘pmi, $l_n > n$ bo‘lganlarimi?

8. n bo‘yicha l_n ni hisoblaydigan ixcham algoritm qurish mumkinmi?

9. $l_n - n$ ayirma istalgancha katta bo‘lishi mumkinmi?

10. Sikl 8 ta elementdan iborat edi. 1 dan m gacha sonlar ichida traektoriyasi mos ravishda bu elementlarga kelib tushadigan boshlang‘ich nuqtalar miqdorini

$$A_m^4,\ A_m^{16},\ A_m^{37},\ A_m^{58},\ A_m^{89},\ A_m^{145},\ A_m^{42},\ A_m^{20}$$

deb belgilaylik. Bu ketma-ketliklar ichida $m \to \infty$ bo‘lganda eng tez o‘sadigani qaysi biri?

Xullas, muhtaram o‘quvchi, endi shunday xulosaga ajablanmasangiz kerak: matematika “ummoni” shu qadar tubsiz – u o‘z “qa’riga tortib” ketishi mumkinki, bu xususiyat sababi matematika jozibalidir.

§ 24. Dinamik sistema: attraktorlar[25]

Bundan oldingi ikki mavzuda o‘nli sanoq sistemasi bilan bog‘liq maxsus dinamik sistema haqida suhbatlashgan edik. Bu dinamik sistema har bir songa raqamlari kvadratlarining yig‘indisini mos qo‘yar edi. U bittadan qo‘zg‘almas nuqta va sikl (davriy traektoriya)ga ega chiqadi. Endi shunday savol tug‘ilishi tabiiy: agar xuddi shu kabi dinamik sistema sanoq sistemasining asosi boshqa bo‘lganda qanday xossalarga ega bo‘ladi? Asos p bo‘lsa, tegishli dinamik sistemani Q_p deb belgilaymiz.

Eng sodda sanoq sistema – bu ikkilik sistema. Unda istalgan natural son 1 va 0 raqamlari bilan yoziladi. Demak, biz qarayotgan dinamik sistema yana ham sodda amal qiladi: har bir ikkilik songa uning raqamlari yig‘indisini mos qo‘yadi. Masalan,

$$(11101001)_2 \to 5_{10} = 101_2 \to 2_{10} = 10_2 \to 1.$$

Ikkilik sanoq sistemasida yozilgan ixtiyoriy natural son raqamlarining yig‘indisi shu sondan kamida ikki marta kichik bo‘lishini isbotlash qiyin emas. Bu – har bir qadamdan so‘ng raqamlar soni kamida bittaga kamayadi deganidir. Shuning uchun boshlang‘ich nuqta sifatida n soni olinsa, ko‘pi bilan $\log_2 n$ dan katta bo‘lmagan qadamda traektoriya 1 ga kelib tushadi, 1 esa – qo‘zg‘almas nuqta. Shunday qilib, 1 soni ikkilik sanoq sistemasi bilan bog‘liq dinamik sistemaning yagona qo‘zg‘almas nuqtasi bo‘lar ekan. Shu bilan birga u ixtiyoriy traektoriyani o‘ziga tortadi. Bunday xossa dinamik sistemalar tilida “1 – global attraktor” deb ifodalanadi.

---

[25] FMI, 2015, №6 (A.M.Tilavov bilan hammualliflikda).

O‘nli sanoq sistema uchun qo‘zg‘almas nuqta 1 ning o‘zi ham, sikl ham global attraktor bo‘lmaydi, oddiy attraktorlardir. Ammo ularning birlashmasi global attraktor tashkil etadi.

$$7_{10} \to 49_{10} \to 97_{10} \to 130_{10} \to 10_{10} \to 1 \leftarrow 100_{10} \leftarrow 68_{10} \leftarrow 82_{10} \leftarrow 19_{10}$$

Dinamik sistemaning attraktorlarini aniqlash – dinamik sistemalar nazariyasining muhim masalalaridan biridir.

Mashq. 1. Sanoq sistemasining asosi uchga teng bo‘lganda, sonni uning raqamlari kvadratlarining yig‘indisiga o‘tkazadigan dinamik sistema attraktorlarini aniqlang. 2. Bu masalani asos 4, 5, 6, 7 bo‘lganda tadqiq qiling.

Ilova qilinayotgan chizmada sakkizli sanoq sistemasi uchun tegishli dinamik sistemaning global attraktori tasvirlangan – u uchta qo‘zg‘almas nuqta va xuddi shuncha sikldan tashkil topgan.

Mashq. Boshlang‘ich nuqta qanday tanlanmasin, traektoriya yo qo‘zg‘almas nuqtalardan biriga yoki sikllardan biriga kelib tushishini isbotlang.

Mashq. Xuddi shunday xossa asos ixtiyoriy bo‘lganda ham o‘rinli bo‘lishini isbotlang.

Bu natija munosabati bilan shunday savollar tug‘iladi (barcha holda sonni uning raqamlari kvadratlariga o‘tkazadigan dinamik sistema nazarda tutiladi):

p ning qanday qiymatlarida Q_p sistemaning global attraktori faqat bitta qo‘zg‘almas nuqtadan iborat bo‘ladi?

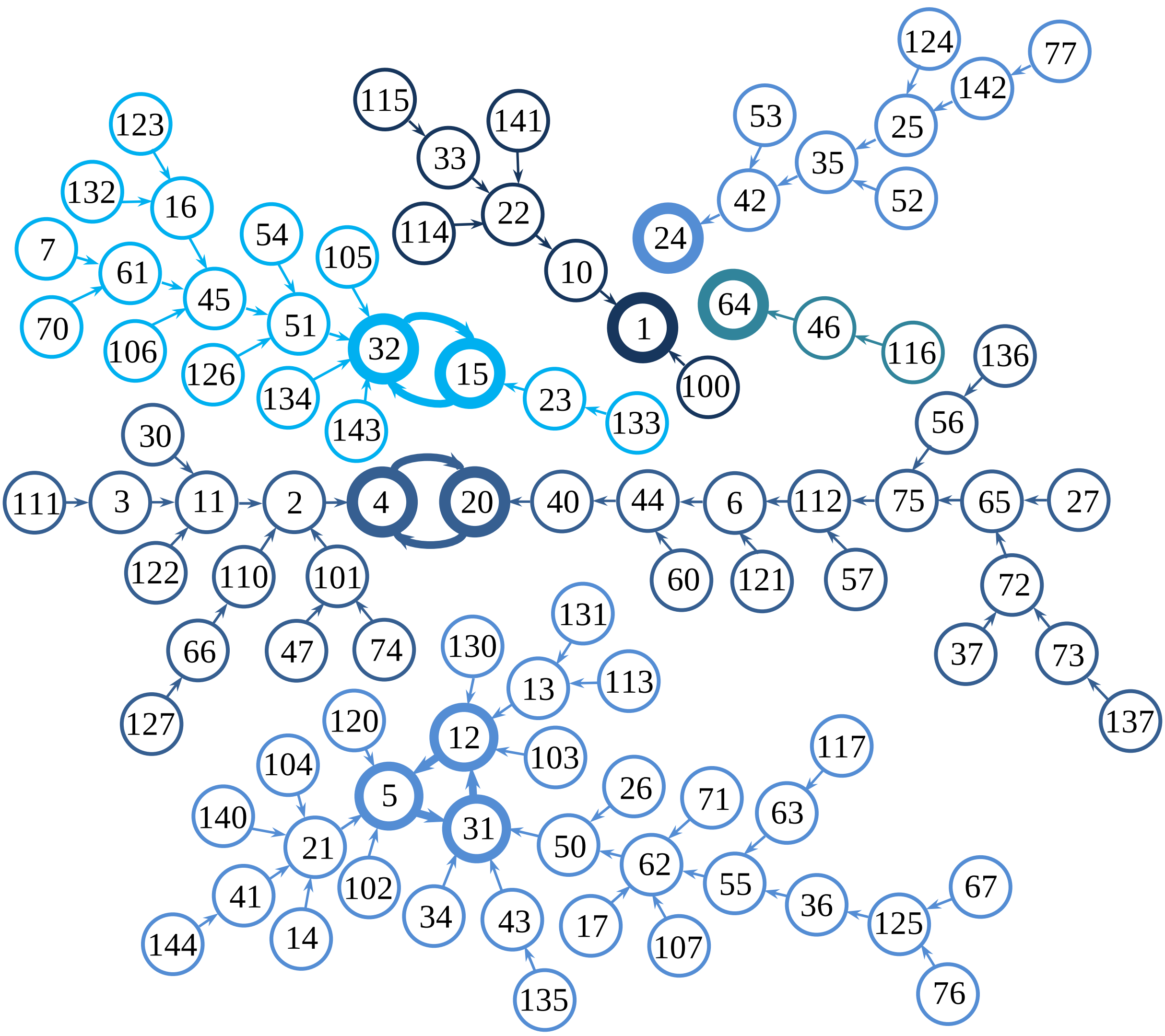
Global attraktori faqat qo‘zg‘almas nuqtalardan iborat attraktorlar cheklimi yoki cheksiz ko‘pmi?

Global attrraktor tashkil etuvchi qo‘zg‘almas nuqta va sikllar soni istalgancha ko‘p bo‘lishi mumkinmi? Masalan, qo‘zg‘almas nuqta va sikllar soni 10 dan ko‘p bo‘lgan Q_p dinamik sistema mavjudmi?

Mashq. Asos 9, 11–16 boʻlganda global attraktorlarni aniqlang.

Bu mashqlarni bajargan oʻquvchi endi oʻzi ham yuqoridagi kabi savolarni qoʻya oladi. Aytaylik, Q_p sistema siklining davri naqadar katta boʻlishi mumkinmi?

Xullas, matematika dunyosi keng – hatto elementar matematika sohasida ham ijod uchun imkoniyat koʻp.



§ 25. Dinamik sistemalar: eski tanishlar[26]

“Bugungi kunda matematikaning eng dolzarb o‘rganish obyekti qaysi?” degan savolga, “Dinamik sistemalar” deb javob berilsa, haqiqatdan yiroq bo‘lmaydi. Dinamik sistemalarning bir qancha masalalari maktab o‘quvchilari uchun ham bemalol tushunarli, matematik olimpiadalar ishtirokchilari uchun esa foydalidir. Shundan kelib chiqib, bu mavzuga bir necha maqola bag‘ishlashga qaror qildik. Bugungi kunda dinamik sistemalar bilan juda ko‘p matematiklar shug‘ullanayotgani, ulardan o‘nga yaqini matematiklar uchun eng sharafli xalqaro mukofot – Filds medali bilan taqdirlangani bu sohaning jozibadorligidan shahodat beradi.

Dinamik sistemalar ikki yirik toifaga bo‘linadi – uzluksiz vaqtli va diskret vaqtli. Hikoyamizni ta’rifi soddaroq diskret dinamik sistemalardan boshlaymiz. X – ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. Uning har bir elementiga boshqa bir tayin elementini mos qo‘yuvchi qonun (akslantirish) ***dinamik sistema*** hosil qiladi. Bu qonunni f bilan belgilaylik. Bu holat matematikada $f: X \to X$ tarzida yoziladi va “f akslantirish X ni o‘ziga o‘tkazadi” deb o‘qiladi. Bunda x elementga mos keladigan elementni $f(x)$ kabi belgilash qabul qilingan. Agar chalkashlik keltirib chiqarmasa, qavslar tashlab, ya’ni x elementga mos element fx shaklida yozilaveradi.

Bu yerda shuni ta’kidlash lozimki, akslantirishlar – matematikaning hamma sohalarida uchraydigan asosiy tushunchalardan. Dinamik sistemalarning bosh xususiyati bu – akslantirishni qayta va qayta qo‘llaganda nima sodir bo‘lishini o‘rganish: x elementga $f(x)$ mos kelgach, u yana X to‘plamning elementi bo‘lgani uchun,

---

[26] FMI, 2014, №6.

“ fx ga nima mos keladi?” degan savol qo‘yish mumkin. Ravshanki agar, fx ga, qavslar bilan yozilsa, $f(f(x))$, qavslarsiz yozilganda esa ffx mos keladi. Bunda yonma-yon kelgan akslantirishlarni, algebradagi kabi qisqalik uchun daraja ko‘rinishida yozish qabul qilingan: f^2x. Bu yana X ning elementi bo‘lgani uchun unga f akslantirishni qo‘llab $f(f(f(x)))=f^3x$ ni, so‘ng f^4x ni va hokazo tuzish mumkin. Natijada

$$x,\ fx,\ f^2x,\ f^3x,\ f^4x,\ f^5x,\ ...$$

ketma-ketlik hosil bo‘ladi. U x elementning ***orbita***si yoki (aniqrog‘i ***yarimtrayektoriya***si) deb ataladi va odatda $O(x)$ yoki O_x kabi belgilanadi. Shunday qilib orbita bu – X to‘plamning biror elementiga akslantirishni ketma-ket qo‘llash natijasidir. Agar $x_n = f^n x$ desak, u holda $\{x_n\}$ orbita hosil bo‘ladigan ketma-ketlik.

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 = x, \tag{1}$$

shartlarni qanoatlantiradi. Bu shartlarning birinchisi ***dinamik sistema tenglamasi*** deyiladi, ikkinchisi esa ***boshlang‘ich shart*** deb ataladi. Diskret tenglamani qanoatlantiruvchi barcha $\{x_n\}$ ketma-ketliklar majmuasi uning umumiy yechimi deb ataladi. Boshlang‘ich shart ana shu majmuadan tayin yechimni ajratib beradi. Dinamik sistemaning tayin boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish ***Koshi masalasi*** ham deyiladi.

Endi yuqorida bayon qilinganlarni o‘zimizga yaxshi tanish misollarda talqin etaylik.

Arifmetik progressiya – dinamik sistemalarning eng sodda namunasidir. Bunda X to‘plam sifatida barcha haqiqiy sonlar to‘plami R ni, yo ratsional sonlar to‘plami

Q ni, yoki butun sonlar to'plami Z ni, hatto ayrim shartlarda natural sonlar to'plami N ni olish mumkin. Bunda f akslantirish

$$f(x) = x + d$$

formula bilan beriladi. Bunda, albatta, x_0 kabi d progressiya ayirmasi ham qaralayotgan X to'plamga tegishli bo'lishi lozim. Bu dinamik sistema tenglamasini yozsak, odatdagi

$$x_{n+1} = x_n + d \tag{2}$$

ko'rinishni oladi. (2) tenglamaning barcha yechimi $x_n = x + nd$ formula bilan beriladi (bunda x – ixtiyoriy son). U maktab matematikasida o'rganiladigan arifmetik progressiyaning n-hadi uchun $x_n = x + (n-1)d$ formuladan biroz farq qilmoqda: keyingi formulada progressiya x_1 haddan boshlanadi, biz esa dinamik sistemani x_0 haddan boshlayapmiz.

(2) dinamik sistema xossalariga kelsak, $d = 0$ bo'lgan hol qiziq emas, $d \neq 0$ bo'lganda esa shunday tasdiq o'rinlidir:

n ortishi bilan x_n cheksizlikka intiladi.

Ikkinchi misol sifatida geometrik progressiyani qarash tabiiy. U mana bunday dinamik sistema degani:

$$f(x) = qx$$

(bu yerda x – boshlang'ich had, q – mahraj). Tenglamasi:

$$x_{n+1} = qx_n \tag{3}$$

Bu safar mahraj $q = 0$ va $q = 1$ bo'lgan hollar o'ta jo'n, $q = -1$ bo'lgan hol ham qiziq emas. Shuning uchun mahrajni 0 hamda ±1 dan farqli deb hisoblaymiz. Birinchi kuzatuv shunday:

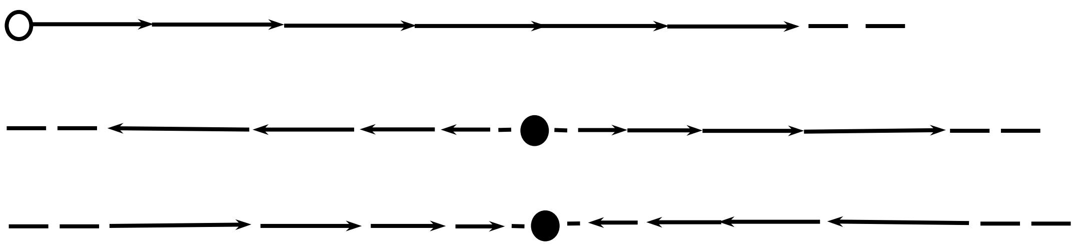
Boshlang‘ich had $x_0 = 0$ ***bo‘lsa, barcha had 0 ga teng.***

Ya’ni, 0 nuqtaga f akslantirishni qo‘llasak, u joyidan qo‘zg‘almaydi. Bunday xossaga ega nuqta dinamik sistemaning ***qo‘zg‘almas nuqtasi*** deyiladi. Shunday qilib, 0 soni (3) uchun qo‘zg‘almas nuqtadir.

Endi 0 dan farqli x_0 boshlang‘ich nuqtani qaraylik. Agar $|q| > 1$ bo‘lsa, nomer o‘sishi bilan x_n ning absolyut qiymati ham kattalashib, cheksizlikka intiladi – bu xossa dinamik sistemalar lug‘atida “qo‘zg‘almas nuqta 0 ***turg‘un emas***” deb ifodalanadi. Atama shunday izohlanadi: boshlang‘ich nuqta 0 bo‘lsa, u joyidan qo‘zg‘almaydi, bordi-yu, 0 “biroz turtib yuborilsa”, ya’ni x_0 qiymat qanchalik kichik bo‘lmasin 0 dan farq qilsa, x_n ning qiymati 0 dan uzoqlashib boradi.

Nihoyat, $|q| < 1$ bo‘lsa, geometrik progressiya cheksiz kamayuvchi deyilishi ma’lum. Sababi ravshan: n ortishi bilan x_n ning absolyut qiymati kichiklashib, 0 ga intiladi. Bunday holda 0 ***turg‘un qo‘zg‘almas nuqta*** deyiladi.

Ko‘rilgan uch holni – arifmetik progressiya hamda turg‘un va turg‘un bo‘lmagan geometrik progressiyalar dinamikasini grafikda shunday tasvirlash mumkin:



Endi uncha tanish bo‘lmagan progressiyani qarashga o‘taylik. Ma’lumki, $y = kx + b$ funksiya chiziqli deb ataladi

– uning grafigi to‘g‘ri chiziqdan iborat. Bu formula ayni paytda $f(x)=kx+b$ akslantirishni, demak, dinamik sistemani ham aniqlaydi. Uning tenglamasi

$$x_{n+1} = kx_n + b. \qquad (4)$$

Bunda $b=0$ bo‘lsa, geometrik progressiya, $k=1$ bo‘lganda esa arifmetik progressiya hosil bo‘ladi. Shunday qilib, (4) dinamik sistema bir yo‘la ham arifmetik, ham geometrik progressiyani umumlashtirar ekan. Biroq bu umumlashtirish u qadar uzoqqa bormaydi. Haqiqatan, $k \neq 1$ bo‘lsa,

$$\bar{x}_n = \frac{b}{1-k} \qquad (5)$$

o‘zgarmas ketma-ketlik (4) tenglamani qanoatlantiradi. Boshqacha qilib aytganda, (5) “ketma-ketlik (4) tenglamaning xususiy yechimi bo‘ladi, dinamik sistemalar tilida esa $\frac{b}{1-k}$ nuqta qo‘zg‘almas nuqtadir.

Mashq. So‘nggi tasdiqni tekshirib, ishonch hosil qiling.

Endi (4) tenglamada noma’lumni almashtiramiz: x o‘rniga $x = y + \frac{b}{1-k}$ formula vositasida yangi y o‘zgaruvchiga o‘tamiz. Buning uchun (4) tenglamada $x_n = y_n + \frac{b}{1-k}$ deb olish, xuddi shunday x_{n+1} ni y_{n+1} orqali ifodalash lozim. Buning natijasida (4) tenglama $y_{n+1} = ky_n$ ko‘rinishga kiradi. Shunday qilib, (4) tenglamaning yechimi k mahrajli geometrik progressiyaga $\frac{b}{1-k}$ o‘zgarmasni qo‘shishdan hosil bo‘lar ekan:

$$x_n = ck^n + \frac{b}{1-k}. \qquad (6)$$

Xususan, boshlang‘ich hadi x_0 berilgan bo‘lsa, (6) tenglikda $n=0$ deb olinganda $x_0 = c + \dfrac{b}{1-k}$, $c = x_0 - \dfrac{b}{1-k}$.

Xullas, $k \neq 1$ bo‘lganda (4) umumlashgan progressiya hadi uchun

$$x_n = \left(x_0 - \frac{b}{1-k} \right) k^n + \frac{b}{1-k} \qquad (7)$$

formula hosil bo‘ladi.

Mashq. (7) formulani quyidagi misollarga tatbiq qiling:

a) $x_{n+1} = 2x_n + 1,\ \ x_0 = 1;$ b) $x_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{2} x_n,\ \ x_0 = 0;$

c) $x_{n+2} = 3x_n - 2,\quad x_0 = 0,\quad x_1 = 1.$

§ 26. Dinamik sistemalar: Fibonachchi sonlari[27]

Avvalgi maqolamizda dinamik sistema tushunchasi haqida ma’lumot berib, arifmetik va geometrik progressiya uning misollari bo‘lishini qayd etgan edik. Endi yana bir mashhur misol – Fibonachchi sonlari ham dinamik sistema sifatida qaralishi mumkinligi ustida to‘xtalamiz. Bunday yondashuv Fibonachchi sonlarining istalgan hadi uchun Bine formulasini tabiiy yo‘l bilan keltirib chiqarishiga imkon berishini ham ko‘ramiz.

Fibonachchi sonlarining dastlabki ikkitasi 1 ga teng, uchinchisidan boshlab esa

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \qquad (1)$$

[27] FMI, 2015, №1.

tenglik bilan aniqlanadi: $x_1 = 1,$ $x_2 = 1,$ $x_3 = x_1 + x_2 = 2,$ $x_4 = 1 + 2 = 3,$ $x_5 = 2 + 3 = 5,$ $x_6 = 8,$ va hokazo.

(1) tenglik bilan ifodalangan xossaga Fibonachchi sonlaridan tashqari yana boshqa ketma-ketliklar ham ega boʻla oladi. Masalan, $x_1 = 2,$ $x_2 = 1$ deb olinsa,

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ \ldots$$

ketma-ketlik hosil boʻlib, u ***Lyuka sonlari*** deb ataladi. Umuman olganda, dastlabki ikki had ixtiyoriy tanlanishi (xususan, kasr yoki irratsional son boʻlishi ham) mumkin. Dinamik sistemalar nuqtai nazaridan eng dastlabki hadni x_0 deb olish oʻngʻay. Shunda Fibonachchi sonlari (1) tenglama va

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = 1 \tag{2}$$

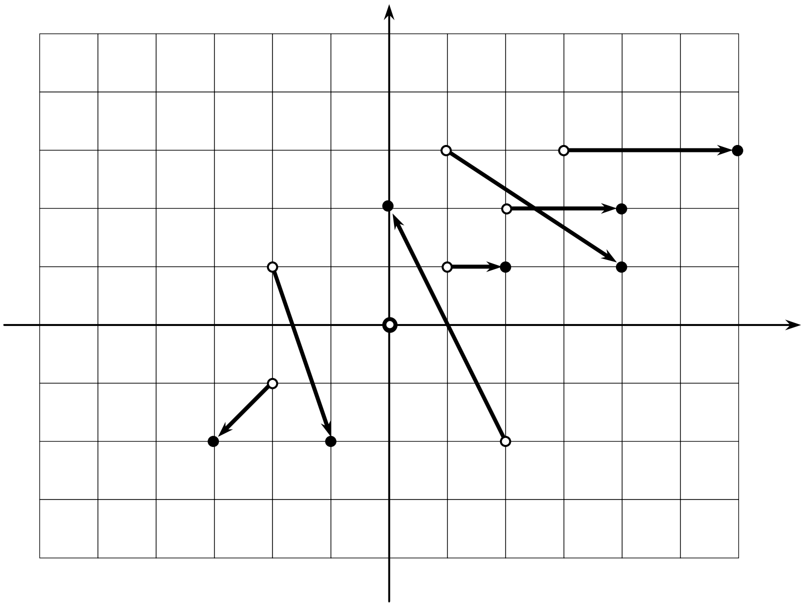
shartlar bilan aniqlanadi. (2) kabi shartlar boshlangʻich qiymatlar deb atalishini avvalgi maqolada ta’kidlagan edik.

(1) tenglik uchun boshlangʻich shart ikkita qiymatdan iborat boʻlishi bizni haqiqiy sonlar toʻplamidan tekislikka (ikki oʻlchovli vektorlar fazosiga) koʻtarilishiga undaydi.

Chindan ham, agar $y_{n-1} = x_n$ desak, (1) tenglama

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases} \tag{3}$$

sistemaga teng kuchli boʻladi. Muhim holat: (3) sistema, (1) tenglamadan farqli, dinamik sistema koʻrinishiga ega: holatlar fazosi X tekislikning (x, y) nuqtalaridan tashkil topgan, f akslantirish esa (x, y) ni $(y, x + y)$ nuqtaga akslantiradi (2-rasmda bir necha nuqtaning akslanishi koʻrsatilgan). (3) dinamik sistema faqat bitta qoʻzgʻalmas nuqtaga ega – y koordinata boshi boʻlib, rasmda alohida tasvirlandi.



Bir qaraganda nuqtalar qanday akslanishi borasida biron-bir tartib-qoida ko‘zga tashlanmaydi. Hozircha tavakkal qilib bo‘lsa ham, f akslantirish ta’sirida proporsional o‘zgaradigan – biror λ songa ko‘payadigan vektorlarni izlab ko‘raylik. Ya’ni qanday (x, y) nuqtalar uchun

$$f(x, y) = \lambda(x, y)$$

bo‘lar ekan? $f(x, y) = (y, x + y)$ bo‘lgani uchun, $(y, x + y) = \lambda(x, y)$ vektor tenglamaga ega bo‘lamiz. U

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} \qquad (4)$$

sistemaga tengkuchli. Birinchi tenglamadan y ni ikkinchi tenglamaga qo‘ysak, $(\lambda^2 - \lambda - 1)x = 0$ munosabat hosil bo‘ladi. Bunda agar $x = 0$ bo‘lsa, (4) sistemaga ko‘ra $y = 0$ – qo‘zg‘almas (0, 0) nuqtani olamiz. Boshqa nuqtalar (ya’ni 0 dan farqli x lar) uchun esa $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ bo‘lishi lozim. Demak, proporsionallik koeffitsiyenti λ ikkitagina qiymat qabul qilishi mumkin ekan:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Agar (4) sistemada λ o‘rniga avval λ_1 so‘ng λ_2 ni qo‘ysak, ikkita sistema hosil bo‘ladi. E’tiborlisi, har ikki holda ham sistemaning tenglamalari o‘zaro teng kuchli chiqadi. Masalan,

$$x + y = \lambda_1 y \iff (\lambda_1 - 1)y = x \iff y = \frac{1}{\lambda_1 - 1}x.$$

Ammo $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ bo‘lgani uchun, $\dfrac{1}{\lambda_1 - 1}$ ifoda λ_1 ga teng. Demak, $y = \lambda_1 x$ – bu esa birinchi tenglamadir. Shunday qilib, $\lambda = \lambda_1$ yoki $\lambda = \lambda_2$ bo‘lganda (4) sistemaning bitta tenglamasini tashlab yuborsa bo‘lar ekan. Masalan, $\lambda = \lambda_1$ uchun $y = \lambda_1 x$ tenglamani qoldirish soddaroq. Bunda x ixtiyoriy bo‘lishi mumkin. Agar $x = 1$ deb olsak, $y = \lambda_1$ bo‘ladi. Shunday qilib, $h_1 = (1, \lambda_1)$ vektorga f akslantirishni qo‘llasak, natija $\lambda_1 h_1$ bo‘ladi, bu vektorga f qo‘llansa, $\lambda_1^2 h_1$ va hokazo. Natijada h_1 boshlang‘ich nuqtaga mos orbita

$$(1, \lambda_1), \quad \lambda_1(1, \lambda_1), \quad \lambda_1^2(1, \lambda_1), \quad \lambda_1^3(1, \lambda_1), \quad \lambda_1^4(1, \lambda_1), \ldots$$

ketma-ketlikdan iborat bo‘ladi (ta’bir joiz bo‘lsa, “birinchi hadi $(1, \lambda_1)$, mahraji λ_1 dan iborat vektor-geometrik progressiya”).

Xuddi shu singari, f akslantirish $h_2 = (1, \lambda_2)$ vektorga qo‘llansa, natija $\lambda_2(1, \lambda_2)$, mos orbita esa

$$(1, \lambda_2), \quad \lambda_2(1, \lambda_2), \quad \lambda_2^2(1, \lambda_2), \quad \lambda_2^3(1, \lambda_2), \quad \lambda_2^4(1, \lambda_2), \ldots$$

bo‘ladi.

Xo‘sh, boshlang‘ich had ixtiyoriy bo‘lsa-chi? Bu had $(x_0,\, y_0)$ bo‘lsin. Uni h_1 va h_2 vektorlar bo‘yicha yoyamiz, ya’ni

$$(x_0,\, y_0) = c_1(1,\, \lambda_1) + c_2(1,\, \lambda_2) \tag{5}$$

ko‘rinishga keltiramiz. Vektorlar ustidagi amallarni bajarsak, (5) tenglik $(c_1 + c_2,\, c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2) = (x_0,\, y_0)$ shaklga kiradi. Vektorlarning tengligi ta’rifiga ko‘ra

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = y_0 \end{cases}$$

sistema hosil qilamiz. Uni yechib, izlanayotgan $c_1,\ c_2$ ni topamiz:

$$c_1 = \frac{y_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad c_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

$\lambda_1 - \lambda_2 = 1$ ekanini hisobga olsak,

$$c_1 = y_0 - \lambda_2 x_0, \quad c_2 = \lambda_1 x_0 - y_0. \tag{6}$$

Endi f akslantirishning quyidagi xossasiga murojaat etish qoldi: ixtiyoriy a, b vektorlar, α va β sonlar uchun

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b).$$

Bunday xossaga ega akslantirish ham, unga mos dinamik sistema ham ***chiziqli*** deyiladi. Xususan, geometrik progressiya chiziqli dinamik sistemadir. Biz hozir qarayotgan $f(x,\, y) = (y,\, x + y)$ akslantirish chiziqli akslantirish natijasidir.

Mashq. Isbotlang.

Shuning uchun

$$f(x_0,\, y_0) = f(c_1 h_1 + c_2 h_2) = c_1 f(h_1) + c_2 f(h_2) = c_1\lambda_1 h_1 + c_2\lambda_2 h_2.$$

So‘ng

$$ff(x_0,\,y_0)=f(c_1\lambda_1h_1+c_2\lambda_2h_2)=$$
$$=c_1\lambda_1f(h_1)+c_2\lambda_2f(h_2)=c_1\lambda_1^2h_1+c_2\lambda_2^2h_2,$$
$$f^3(x_0,\,y_0)=f(c_1\lambda_1^2h_1+c_2\lambda_2^2h_2)=c_1\lambda_1^3h_1+c_2\lambda_2^3h_2, \qquad (7)$$
....
$$f^n(x_0,\,y_0)=f(c_1\lambda_1^{n-1}h_1+c_2\lambda_2^{n-1}h_2)=c_1\lambda_1^nh_1+c_2\lambda_2^nh_2,\ ....$$

Shunday qilib, agar boshlang‘ich vektor ixtiyoriy bo‘lsa, orbita ikkita geometrik progressiya yig‘indisidan iborat bo‘lar ekan. Xususan, Fibonachchi sonlari uchun $x_0=0,\ y_0=1$ deb olish kerak. Bu holda (6) ga ko‘ra $c_1=1$, $c_2=-1$. Bu qiymatlarni hamda λ_1 va λ_2 ning ifodalarini (7) formulaga qo‘ysak,

$$f^n(x_0,\,y_0)=\lambda_1^nh_1-\lambda_2^nh_2$$

formula hosil bo‘ladi. Ammo $f^n(x_0,\,y_0)=(x_n,\,y_n)$, $h_1=(1,\,\lambda_1),\ h_2=(1,\,\lambda_2)$ edi. Demak,

$$x_n=\lambda_1^n-\lambda_2^n=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \qquad (8)$$

Fibonachchi sonlari uchun bu ifoda ***Bine formulasi*** deb ataladi.

Mashqlar.

1. Dastlabki 5 ta Fibonachchi sonini (8) formulaga ko‘ra hisoblang.
2. Agar Fibonachchi sonlari ikkita 1 dan boshlanganda Bine formulasi qanday ko‘rinishda bo‘lishini toping.
3. Lyuka sonlari uchun (8) ga o‘xshash formula keltirib chiqaring.

§ 27. Dinamik sistemalar kvadrat ildiz chiqaradi[28]

Musbat a son berilgan bo‘lsin. Masalan, $a=2$. Bu holda $\sqrt{a}$ qanday hisoblanadi?.

Avvalambor, $\sqrt{2}$ o‘zi qanaqa son ekanligini aniqlab olishimiz lozim. Gap shundaki, $\sqrt{2}$ irratsional son, ya’ni uni oddiy kasr – ikkita butun sonning nisbati ko‘rinishida yozib bo‘lmaydi. Hozir biz uchun bu tasdiqni boshqacharoq ifoda etish muhim: $\sqrt{2}$ o‘nli kasr shaklida yozilsa, u davriy bo‘lmagan cheksiz kasr bo‘ladi:

$$\sqrt{2}=1,4142135623...$$

(Har qanday davriy o‘nli kasr ratsional songa teng bo‘lishi ma’lum). Nazariy jihatdan olganda, $\sqrt{2}$ ni istalgan aniqlikda yozishimiz, ya’ni uning o‘nli kasrga yoyilmasini istalgancha uzaytirishimiz mumkin. Bu tasdiqni asoslab, ayni paytda $\sqrt{2}$ ni hisoblashning birinchi usulini eslab olamiz.

Faraz qilaylik, $1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ kasr $\sqrt{2}$ning $n+1$ xona aniqlikdagi qiymati, ya’ni

$$1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n<\sqrt{2}<1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n+10^{-n}$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsin (o‘nli kasrning butun qismi bo‘lgan 1 ham hisobga olindi). Endi

$$1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\le x\le 1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n+10^{-n}$$

oraliqni 10 ta teng bo‘lakka bo‘lamiz:

1-bo‘lak: $A_0=1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ dan $A_1=1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n+10^{-(n+1)}$ gacha,

[28] FMI, 2015, №2.

2-bo‘lak: $A_1 = 1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + 10^{-(n+1)}$ dan

$A_2 = 1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + 2\cdot 10^{-(n+1)}$ gacha va hokazo.

10-bo‘lak: $A_9 = 1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + 9\cdot 10^{-(n+1)}$ dan

$A_{10} = 1,\alpha_1\alpha_2 + 10\cdot 10^{-(n+1)} = 1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + 10^{-n}$ gacha.

U holda $\sqrt{2}$ bu bo‘laklardan birning ichida yotishi kerak (chegarasida ham, bo‘linish nuqtalari ustida ham yota olmaydi – ratsional son bo‘lib qoladi). Agar

$$1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + \alpha_{n+1}\cdot 10^{-n-1} < \sqrt{2} < 1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + (\alpha_{n+1}+1)\cdot 10^{-n-1}$$

desak, (bu yerda α_{n+1} – 0, 1, 2, ..., 9 raqamlardan biri), $1,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha_{n+1}$ kasr $\sqrt{2}$ ning $10^{-(n+1)}$ aniqlikdagi o‘nli kasr orqali ifodasi bo‘ladi. Demak, $\sqrt{2}$ ni o‘nli kasr ko‘rinishida istalgan aniqlikda yozish mumkin ekan. Ammo bu – faqat nazariyada. Amalda esa bunday usulda $\sqrt{2}$ ni hisoblash sermashaqqat. Kitobimiz o‘quvchilari “qo‘lda kvadrat ildiz chiqarish” qoidasi (algoritmi) bilan ham tanish, albatta.

Bugun – “aqlli” kompyuterlar asrida, hech kim kvadrat ildizni qo‘lda hisoblamasa kerak.

– Xo‘sh, kompyuter (kalkulyator – bu kompyuterni juda sodda turi) kvadrat ildizni qanday hisoblaydi?

Albatta, kompyuter kvadrat ildizni o‘nli kasr ko‘rinishida yuqorida eslab o‘tganimiz – oraliqni 10 ga bo‘lish usuli bilan bajara oladi. Ammo bu usul ancha vaqt talab etadi. Kompyuterni ildizni “qo‘lda hisoblash” usuliga ham o‘rgatsa bo‘ladi, ammo bu ham oson ish emas. Qarangki, kompyuter ildizlarni dinamik sistema vositasida topar ekan.

“Kvadrat ildiz chiqaradigan” dinamik sistema ko‘ramiz. Uning fazosi sifatida musbat haqiqiy x sonlar to‘plamini, f akslantirish deb esa $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ funksiyani olamiz. Ko‘rinib turibdiki, $x > 0$ uchun $f(x) > 0$, ya’ni f funksiya

$(0, +\infty)$ nurni o'ziga akslantiradi va shuning uchun dinamik sistema aniqlaydi. Uning qo'zg'almas nuqtasini hisoblaylik, ya'ni $f(x) = x$ tenglamani qaraylik:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x.$$

Bu tenglik faqat bitta musbat ildizga ega: $x = \sqrt{2}$.

Endi x ning ixtiyoriy x^* qiymatini olib ($x^* > 0$), mana shu nuqtadan boshlanadigan orbitani qaraymiz: $x_0 = x^*$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Teorema. n ortishi bilan x_n ketma-ketlik $\sqrt{2}$ ga intiladi.

Isbotni $x^* = 1$ uchun amalga oshiramiz.

Lemma. $x_{n-1} \in [1, 2]$ bo'lsa, $x_n \in [1, 2]$.

Haqiqatan, $1 \le x_{n-1} \le 2$ dan

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right) \le \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{1}\right),$$

ya'ni $1 \le x_n \le 2$ kelib chiqadi.

Demak, $x^* \in [1, 2]$ shartdan ixtiyoriy $n = 1, 2, 3, \ldots$ uchun $x_n \in [1, 2]$ kelib chiqar ekan.

Endi $\left|x_n - \sqrt{2}\right|$ ayirmani baholaylik.

$$\left|\frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right) - \sqrt{2}\right| = \frac{\left|x_{n-1}^2 - 2\sqrt{2}x_{n-1} + 2\right|}{2x_{n-1}} = \frac{\left(x_{n-1} - \sqrt{2}\right)^2}{2x_{n-1}}$$

va $x_n \geq 1$ bo‘lgani uchun, $\left|x_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x_{n-1} - \sqrt{2}\right|^2$ tengsizlik o‘rinlidir.

Bundan $\left|x_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x_{n-1} - \sqrt{2}\right|^2 \leq \frac{1}{4}\left|x_{n-2} - \sqrt{2}\right|^4 \leq$

$$\leq \frac{1}{2^3}\left|x_{n-3} - \sqrt{2}\right|^{2^3} \leq \ldots \leq \frac{1}{2^n}\left|x_0 - \sqrt{2}\right|^{2^n}.$$

natijani hosil qilamiz.

Olingan bahodan shunday xulosa chiqadi:

1) n ortganda x_n haqiqatan $\sqrt{2}$ ga intilar ekan;

2) n ortishi bilan x_n ning qiymati $\sqrt{2}$ ga nihoyat tez yaqinlashadi. Masalan, $n = 5$ bo‘lsa,

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{(\sqrt{2}-1)^{2^5}}{2^5} \leq \frac{0,6^{32}}{2^5} \leq 2,5 \cdot 10^{-9}$$

– atigi 5 qadamda $\sqrt{2}$ ning qiymati ana shunday aniqlikda hisoblanmoqda.

3) $\sqrt{2}$ ni bu usul yordamida kompyuterda hisoblash uchun dastur tuzish nihoyatda qulay.

Mashq. Kompyuterda $\sqrt{2}$ ning qiymatini dasturlash tilidagi kvadrat ildiz chiqarish funksiyasi vositasida ($SQRT(2)$ kabi) hisoblang, so‘ng $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ formulani 10 marta takrorlaydigan dastur tuzib toping va natijalarni qiyoslang.

§ 28. Hazil, ... tagi zil![29]

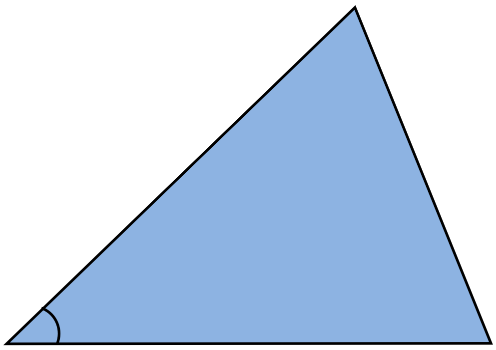
Avvalgi bahs. Uchburchakning nechta burchagi bor?

– *Uchta*-da, albatta. Axir, oʻz nomi oʻzi bilan – uchburchak-ku.

– Toʻgʻri, ichki burchaklari uchta. Agar tashqi burchaklari bilan sanalsa, *toʻqqizta* boʻladi.

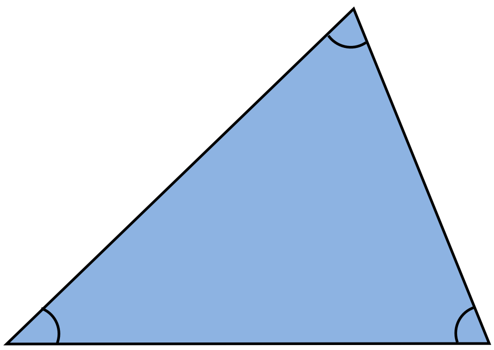
– Bu yerga tashqi burchaklarni tiqishtirishning nima keragi bor?

– Iye, nega keragi boʻlmas ekan? Savolda uchburchakning nechta ichki burchagi bor deb soʻralmayapti, nechta burchagi bor, deb soʻralyapti.



– "Uchburchakning burchagi" deganda ichki burchagi tushuniladi-da.

– Tushuniladimi, tushunilmaydimi, ammo uchburchakning ichki burchagi "uchburchakning burchagi" tushunchasiga qanday aloqador boʻlsa, "uchburchakning tashqi burchagi" ham xuddi shunday aloqador.



– Men qoʻshilmayman. Biror tushunchaga aniqlovchi tirkalsa, doim ham uning xususiy holi hosil boʻlavermaydi. Aks holda "Uchburchakning nechta ikki yoqli burchagi bor? deb izlashga toʻgʻri kelar edi.

– Qolaversa, uchburchak chizilganda, uning ichki burchaklari tasvirlanadi, xolos.

[29] FMI, 2003, №4.

– Labbay? Chizma deysizmi? Uchburchakning chizmasiga qaraydigan bo‘lsak, unda umuman burchak yo‘q – burchaklar soni *nolta!*

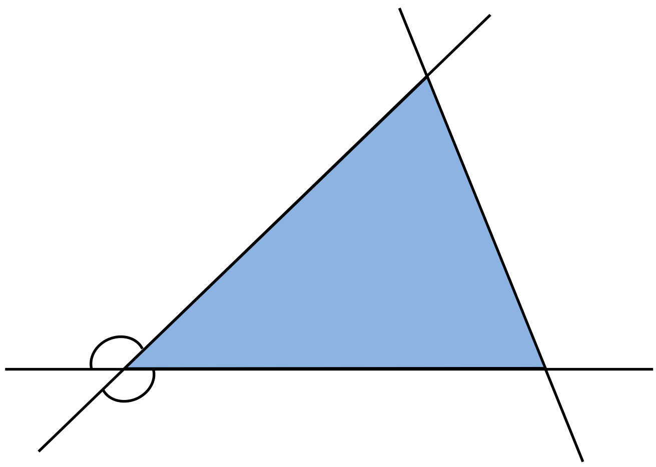
– Qanaqasiga?

– Marhamat. Burchak deb nimaga aytiladi? Tekislikning umumiy uchga ega ikki nurdan iborat qismiga, shundaymi? Ha barakalla. Endi chizmangizga qarang: unda bitta ham nur yo‘q!

– Ha, endi, uchburchakning burchagi haqida gap ketganda, uning tomonlarini hayolan nurga to‘ldirib olamiz-da.

– To‘ldiring, to‘ldiring. Keyin sanang: bir, ikki, uch, to‘rt,..., *o‘n ikkita* burchak.

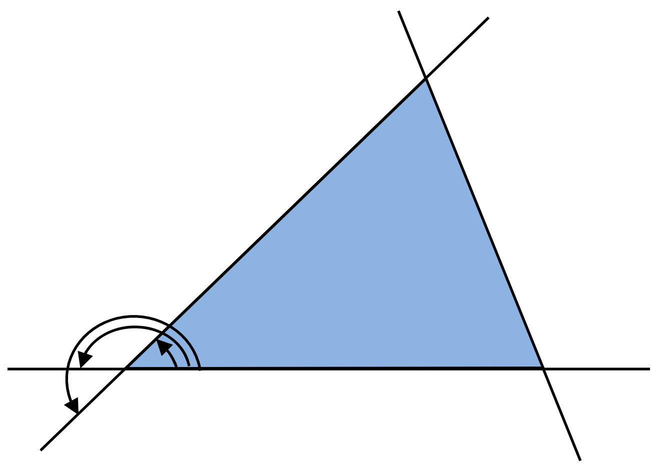
– Yaxshilab sanamadingiz. Mana bu burchaklarni ham qo‘shsak, o‘ttiz oltita bo‘ladi.



– Bu ham hali hammasi emas: har bir nurning o‘zi kattaligi 0° ga teng va kattaligi 360° ga teng burchaklar hosil qiladi. Ularni ham hisobga olsak, 60 ta, qaytaraman, *oltmishta* burchak sanash mumkin.

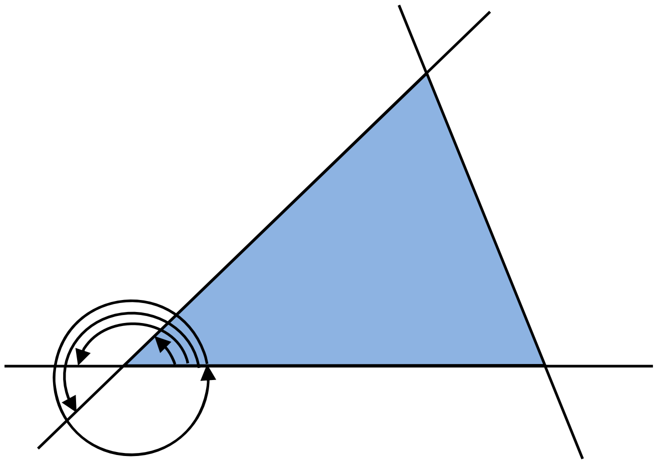
– Balki, bu ham ozlik qilar?

– Albatta. Uchburchakning burchaklari *cheksiz ko‘p*.



– Bo‘lishi mumkin emas.

– Xo‘-o‘p. Uchburchakning tomonidan ixtiyoriy bir nuqta, masalan, o‘rtasini olaylik. Uchburchakning uchi mana shu nuqtada bo‘lgan burchagi bor, albatta. To‘g‘ri, u – yoyiq burchak. Lekin yoyiq burchakning yoyiqmas burchakdan hech bir kam-kemtik joyi yo‘q, burchakmisan – burchak.



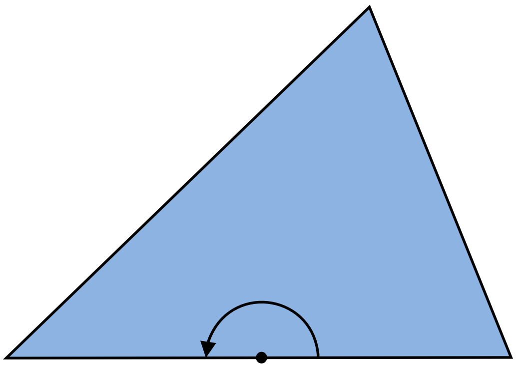
– *Ho‘-o‘h-ho‘, hmm ...*

– Cheksizlikni bezovta qilmanglar. Uchburchakning burchaklari *bittadan uchtagacha* bo‘lishi mumkin.

– Endi shunisi yetmay turuvdi.

– Qanaqasiga?

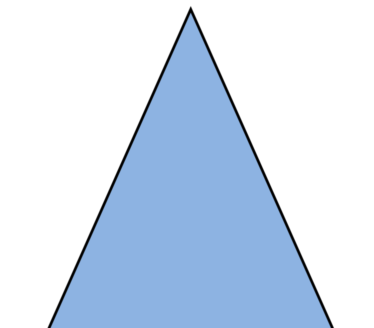
– Misol uchun, teng yonli uchburchakni olaylik. Uning asosidagi burchaklar teng, shunday emasmi?



– Ha, bu – teorema.

– Barakalla. Teng degani, bir xil, ya’ni farqi yo‘q, degani, to‘g‘rimi? {2, 2, 3} to‘plamda elementlar soni uchta emas, ikkita bo‘lgani singari.

– Shoshmang, shoshmang. Nima, teng yonli uchburchakning *ikkita* burchagi bor demoqchimisiz?



– Teng tomonli uchburchakning burchaklari soni esa – *bitta!*

– O‘h, rosa boshni qotirdilaring.

Keyingi bahs: “nechta?” emas, “qanaqa?”

Burchak – geometriyaning eng muhim, ayni paytda eng murakkab tushunchalaridan biri. Haqiqatan, “400° bilan 40° li burchaklar tengmi, teng emasmi?” degan savolga javob berish oson emas: bir tomondan teng – har ikki kattalik ham bitta burchakni o‘lchaydi, ikkinchi tomondan, soat mili 40° ga burilganda o‘tgan vaqt bilan 400°ga burilganda o‘tgan vaqt ancha farq qilishi ham ma’lum.

Yoki bo‘lmasa, fazoda bitta tekislikda yotmaydigan (ayqash) to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak, ikki aylana yoylari orasidagi burchak tushunchalariga ta’rif berish ancha-muncha bilim talab etadi. Parabola, giperbola kabi egri chiziqlarning ular kesishish nuqtasida hosil qilgan burchaklari esa XVIII asrdan o‘rganila boshlagan, xolos. Juda kam qo‘llansa ham sfera (shar sirti) bilan uni kesuvchi aylana orasidagi burchak tushunchasi ham foydali.

Xullas, “Uchburchakning nechta burchagi bor?” degan hazilning tagi ancha zil. Biz o‘quvchilarimizdan unga javob berishdan avval “burchak – nima?” degan savol ustida o‘ylab ko‘rishni tavsiya qilamiz. Nihoyat, maktab dasturi doirasida “burchaklar” tushunchalariga (diqqat qiling: burchak emas, burchaklar!) qat’iy ta’rif qanday bo‘lishini yozib yuborishlarini so‘raymiz. Eng yaxshi (ya’ni, to‘liq va to‘g‘ri) javob yo‘llagan o‘quvchiga mualliflar kitob tuhfa etadi.

O‘ylab ko‘rish uchun savollar.

Ikkiburchak nima? Parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak-chi?

Burchaklarining yig‘indisi 270° bo‘lgan uchburchakni qo‘l bilan ushlab ko‘rganmisiz?

§ 29. Arximedning “hazili”[30]

Mashhur yunon matematigi Arximedning “Stomaxion” deb atalgan asari 18-asrda topilgan. Asar tarkibiga olimning boshqa mashhur matematik Eratosfenga maktublari kirgan (Arximed Sitsiliya orolidagi Sirakuza shahrida yashagan, Eratosfen esa Iskandariya shahridagi akademiya rahbari boʻlgan). Bu xatda Arximed Iskandariya matematiklariga mana bu masalani yechishni taklif etadi (masala matni aslida she’r bilan yozilgan):

“Quyoshli oʻtloqda oq, qora, targʻil, ola buqalar va xuddi shu rangdagi sigirlar oʻtlab yuribdi.

(1) Agar ola buqalarni qora buqalarning ikkidan biriyu yana uchdan biri bilan qoʻshib hisoblasa, oq buqalar soni bilan teng chiqadi. Agar ola buqalarni targʻil buqalarning toʻrtdan biriyu yana beshdan biri bilan qoʻshib hisoblasa, qora buqalarga baravar boʻladi. Agarda ola buqalar oq buqalarning oltidan biriyu yana yettidan biri bilan qoʻshib hisoblansa, targʻil buqalar soni topiladi.

(2) Endi sigirlar nechtaligiga kelaylik. Hamma qora mollarning uchdan biriyu toʻrtdan biri qoʻshilsa, roppa-rosa oq sigirlar soni chiqadi. Shu singari, jami targʻil mollarning toʻrtdan biriyu yana beshdan biri qora buqalar soniga teng, jami ola mollarning beshdan biriga oltidan biri qoʻshilsa, targʻil buqalar soniga baravar boʻladi. Nihoyat, jami oq mollarning oltidan biri bilan yettidan biri qoʻshilsa, ola buqalar sonini beradi.

(3) Oq va qora buqalarni kvadrat hosil qiladigan qoziqlarga bittadan boglab chiqsa boʻladi, targʻil va ola buqalarni esa uchburchak shaklidagi zinapoya hosil qiladigan qoziqlarga bittadan bogʻlab chiqish mumkin.

[30] FMI, 2008, №5.

Arximed iskandariyalik matematiklardan quyoshli o‘tloqda nechta buqa o‘tlayotganini so‘raydi”.

Bu masala bayon qilingan qadimiy qo‘lyozma germaniyalik dramaturg Lessing tomonidan 1773 yili nashr etilgan, masalaning o‘zi esa matematika tarixiga “Arximedning buqalari” degan nom bilan kirgan. Masalani Eratosfen yoki boshqa bir iskandariyalik matematik yecha olgani ma’lum emas. Arximedning o‘zi uni yechishni bilgani to‘g‘risida ham hujjatlar saqlanmagan.

Tabiiyki, har qanday masala ham biror nom bilan tarixga kiravermaydi, hatto aytish mumkinki, bunday masalalar u qadar ko‘p emas, yuztaning nari-berisida bo‘lsa kerak. Holbuki, matematika olamida nima ko‘p – masala.

Xo‘sh, Arximed masalasining alohida e’tiborga loyiq nima xususiyati bor? Gap shundaki…

Avval masalani yechishga urinib ko‘raylik. Uning shartini uch qismga bo‘lish mumkin.

1-qism – buqalar haqida. Oq, qora, targ‘il va ola buqalar sonini mos tartibda x, y, z, u deb belgilasak, shartga ko‘ra

$$\begin{cases} u+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)y=x \\ u+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)z=y \\ u+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)x=z \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} 6u+5y=6x \\ 20u+9z=20y \\ 42u+13x=42z \end{cases} \qquad (1)$$

sistema hosil bo‘ladi. Agar har bir tenglamani hadma-had u ga bo‘lib chiqsak, uch noma’lumli uchta tenglamadan iborat sistemaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} 6\,\overline{x} - 5\,\overline{y} = 6 \\ 20\,\overline{y} - 9\,\overline{z} = 20 \\ 42\,\overline{z} - 13\,\overline{x} = 42 \end{cases} \qquad (2)$$

bu yerda $\overline{x} = \frac{x}{u},\ \overline{y} = \frac{y}{u},\ \overline{z} = \frac{z}{u}$.

Bunday sistemalar maktabda o'rganiladi. Masalan, (2) sistemani noma'lumni yo'qotish usuli bilan yechish mumkin. Biz bir yo'la yechimni keltiramiz:

$$\overline{x} = \frac{2226}{891},\ \overline{y} = \frac{1602}{891},\ \overline{z} = \frac{1580}{891} \qquad (3)$$

(biz atayin kasrlarni qisqartirmadik).

Mashq. (2) sistemani yechib, (3) formulalarni hosil qiling.

Ko'rinib turibdiki, $x = 2226,\ \ y = 1602,\ \ z = 1580,\ \ u = 891$ qiymatlar (1) sistemani qanoatlantiradi. Lekin faqat shu qiymatlar bilan cheklansak, sigirlar soni kasr chiqar ekan. Shuning uchun (1) sistemaning barcha butun musbat yechimlarini topamiz. U uch noma'lumli to'rtta tenglamadan iborat bo'lgani uchun, aslida Diofant tenglamasiga keladi. Bu yerda umumiy yechimni yozish osonroq – $x,\ y,\ z,\ u$ qanday bo'lishidan qat'i nazar, $\frac{x}{u},\ \frac{y}{u},\ \frac{z}{u}$ nisbatlar (3) tengliklarni qanoatlantirishi lozim. Demak,

$$x = \overline{x}\,u = \frac{2226}{891}u, \quad y = \overline{y}\,u = \frac{1602}{891}u, \quad z = \overline{z}\,u = \frac{1580}{891}u.$$

$x,\ y,\ z$ sonlari butun bo'lgani uchun u albatta 891 ga bo'linishi lozim, ya'ni $u = 891k$. Bundan $x = 2226k,$ $y = 1602k,\ z = 1580k$, bu yerda k – ixtiyoriy butun musbat son.

Endi sigirlar nechta boʻlishini topaylik (bu – masalaning 2-qismi). Ularning sonini mos ravishda X, Y, Z, U deb belgilasak, Arximedning shartiga koʻra,

$$X=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(y+Y), \qquad Y=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(z+Z),$$

$$Z=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(u+U), \qquad U=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(x+X).$$

Bu sistema endi toʻrt nomaʼlumli 4 ta tenglama, chunki x, y, z, u topilgan, X, Y, Z, U – nomaʼlum. Shaklini oʻzgartirib yozamiz:

$$\begin{aligned} 12X-7Y &= 7y, \\ 20Y-9Z &= 9z, \\ 30Z-11U &= 11u, \\ 42U-13X &= 13x. \end{aligned}$$

Bu sistemaning oʻng tomoniga x, y, z, u ning topilgan qiymatlarini qoʻyamiz:

$$\begin{aligned} 12X-7Y &= 11214k, \\ 20Y-9Z &= 14220k, \\ 30Z-11U &= 9801k, \\ 42U-13X &= 28938k. \end{aligned} \tag{4}$$

Agar (4) sistema erinmay yechib chiqilsa, X, Y, Z, U ham k ni kasrga koʻpaytirish natijasiga tengligi ayon boʻladi. Ular butun boʻlishi uchun $k=4657s$ deb olish lozim boʻlar ekan (s – butun musbat son). Shunda (4) sistema yechimi

$$X = 7206360s, \qquad Y = 4893246s,$$
$$Z = 3515820s, \qquad U = 5439213s.$$

Mashq. Tekshirib ko‘ring.

Buqalar sonini ham s orqali ifodalash kerak:

$$x = 2226n = 2226 \cdot 4657s, \quad y = 1602n = 1602 \cdot 4657s,$$
$$z = 1580 \cdot 4657s, \quad u = 891 \cdot 4657s. \tag{5}$$

Ko‘rib turibsizki, Arximedning masalasi boshida jo‘n bo‘lib tuyulgani bilan, yechish davomida borgan sari bahaybat sonlar chiqib bormoqda. Bunda shuni ham e’tiborga olish lozimki, u zamonlarda hali o‘nli sanoq sistemasi ma’lum emas edi, shu bois sonlar ustida to‘rt arifmetik amal bajarish oson bo‘lmagan.

Arximed esa bu bilan cheklanmagan – masalaning mag‘zi oxirgi ikki shartga yashiringan (masalaning uchinchi qismi). Bu shartlarga ko‘ra $x+y$ biror sonning kvadrati, $z+u$ esa uchburchakli son, ya’ni $1+2+\ldots+w=\frac{w(w+1)}{2}$ ko‘rinishda bo‘lishi lozim (rasmda 36 uchburchakli son ekanligi tasvirlangan).

Lemma. a soni uchburchakli son bo‘lishi uchun $8a+1$ kvadrat son bo‘lishi zarur va yetarli.

Isboti. Agar a uchburchakli son, ya’ni $\frac{w(w+1)}{2}$ ko‘rinishda bo‘lsa,

$$8a+1=8\frac{w(w+1)}{2}+1=4w(w+1)+1=(2w+1)^2.$$

Aksincha, $8a+1$ kvadrat son, aytaylik $8a+1=b^2$ bo‘lsin. Bu holda b ning toq son bo‘lishi shartligi ko‘rinib turibdi.

Demak, $8a+1=(2c+1)^2=4c^2+4c+1$, bu yerdan $a=\frac{c(c+1)}{2}$ kelib chiqadi.

Mashq. Lemmani geometrik usulda isbotlang.

Shunday qilib, Arximed masalasining so‘nggi ikki shartini

$$x+y=p^2,\ \ 8(z+u)+1=q^2.$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Bu tengliklarga (5) qiymatlarni qo‘yamiz:

$$4657\cdot 3828k=p^2,\ \ \ 8\cdot 4657\cdot 2471k+1=q^2.$$

Hisoblashlarni birmuncha ixchamlash uchun, $4657\cdot 3828$ sonini tub ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$4657\cdot 3828\ =\ 2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4657\,.$$

Bundan shunday xulosa kelib chiqadi:

$$4657\cdot 3828k=2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4657\,k$$

ifoda aniq kvadrat bo‘lishi uchun, k soni $3\cdot 11\cdot 29\cdot 4657t^2$ ko‘rinishda bo‘lishi shart. Demak, q bilan t sonlari

$$q^2=(8\cdot 4657\cdot 2471)\cdot(3\cdot 11\cdot 29\cdot 4657)t^2+1$$

tenglamani qanoatlantirishi lozim.

Bu endi, ikkinchi darajali Diofant tenglamasidir. Uning umumlashmasi bo‘lgan

$$x^2=Ny^2+1$$

tenglama **Pell tenglamasi** deb yuritiladi.

Shunday qilib, “Arximed buqalari to‘g‘risidagi masala”

$$N=8\cdot 4657\cdot 2471\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4657=410286423278424$$

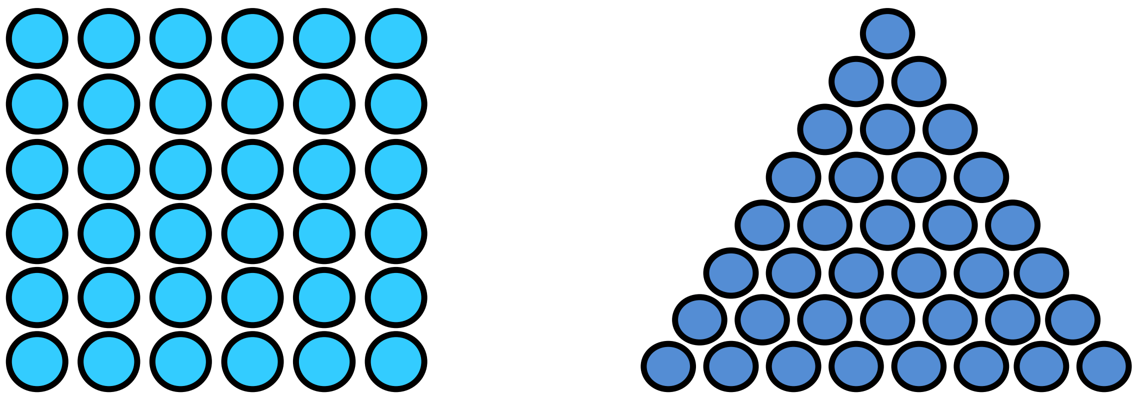
bo‘lgan Pell tenglamasini yechishga kelar ekan.

$N=1$ bo‘lganda Pell tenglamasi, ya’ni $x^2=y^2+1$ faqat $x=\pm 1,\ y=0$ butun yechimga ega bo‘lishini ko‘rish qiyin emas (demak, musbat yechimi yo‘q). Bundan agar N kvadrat son bo‘lsa, Pell tenglamasi butun musbat yechimga ega emasligi kelib chiqadi (agar $N=m^2$ bo‘lsa, y o‘rniga my ni yangi noma’lum deb olish mumkin). Shu sababli Pell tenglamasi N kvadrat son bo‘lmagan hollargina ko‘riladi.

Bir paytda ham kvadrat, ham uchburchakli bo‘lgan sonlarni topish masalasi $N=2$ bo‘lgan holga, ya’ni $x^2=2y^2+1$ Pell tenglamasiga keladi.

Mashq. Bu tasdiqni isbotlang.

Bu tenglama yechilsa, kvadrat tomoni $\frac{x-1}{2}$, uchburchak tomoni $\frac{y}{2}$ ga teng chiqadi. Eng kichik musbat yechim: $x=3, y=2$ – bunga mos ham kvadrat, ham uchburchakli son 1 bo‘lib, qiziq emas. Navbatdagi yechim $x=17,\ y=12,$ bunga 36 mos keladi (1-rasm).



1-rasm.

Ham kvadrat, ham uchburchak sonlar bilan, demak, mohiyatan $N=2$ bo‘lgan Pell tenglamasini yechish bilan Pifagorning shogirdlari shug‘ullangan. Umumiy Pell tenglamasini yechish masalasini esa mashhur fransuz matematigi Pyer Ferma qo‘ygan (shuning uchun aslida $x^2=Ny^2+1$ tenglama Ferma tenglamasi deb atalishi to‘g‘riroq bo‘ladi, chunki Pell bu masala bilan shug‘ullanmagan.) Ferma bu tenglamani o‘z zamondoshlariga $N=109, 149, 433$ bo‘lganda yechishni taklif etgan. Shuning uchun Ferma Pell tenglamasini yechish usulini bilgan deb taxmin qilinadi. Lekin Ferma “Arximed buqalari to‘g‘risidagi masala”dan xabardor bo‘lmagan, chunki Lessing bu haqdagi maqolasini 1773 yilda bostirgan. Pell tenglamasi doim yechimga ega bo‘lishini va bu yechimni zanjir kasrlar orqali topish mumkinligini Jozef Lui Lagranj aniq isbotlagan (1768 yil) Lagranj teoremasidan, shuningdek, Pell tenglamasi cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lishi kelib chiqadi. Faqat musbat yechimlar qaralayotgani uchun ular orasida eng kichigi mavjud bo‘lib, boshqa yechimlar u orqali ifodalanadi.

Albatta, “yechim mavjud”, “yechish usuli ma’lum” degan tasdiqlar hali “mana yechim” deganini bildirmaydi. Gap shundaki, “Arximed buqalari to‘g‘risidagi masala”da N ning qiymati shu qadar kattaki, uning yechimini Lagranj usuli bilan topish juda katta hisoblashlarni talab etadi. Masalan, nemis matematigi Meyer 1867 yilda bu ishga kirishgan, lekin oxiriga yetkazmagan. 1880 yilda boshqa nemis matematigi A.Emtor hisoblashlarni oxiriga yetkazgan, ammo arifmetik xatoga yo‘l qo‘ygan. Arximed masalasining to‘g‘ri yechimi kompyuter ixtiro qilingach, 1964 yilda topilgan. Qarangki, jami buqalar nechtaligi 206545 xonali son bilan ifodalanar ekan! (Bu astronomik son 77602714... raqamlari bilan boshlanib, ...55081800 raqamlari bilan tugaydi.)

Sonlar nazariyasining keyingi taraqqiyoti yutuqlaridan foydalanib, Arximed masalasining yechimini “aniq” yozish mumkin:

Jami buqalar soni $29334443h$ ga teng, bu yerda h

$$h = \frac{\left(r^{4658} - r^{-4658}\right)^2}{36823804},$$

$$r = 300426607914281713365\sqrt{609} + 84129507677858393258\sqrt{7766}$$

formulalar orqali topiladi. (“Hisoblanadi” deyishga til bormaydi.)

Ana sizga Arximedning hazili. U o‘z xatining oxirida “kimda-kim buqalar sonini topsa, donolikda hammadan o‘tgan bo‘ladi va bundan iftixor qilishga haqli” deb qo‘shib qo‘yganiga nima deysiz?

Mustaqil shug‘ullanish uchun qiziqarli masalalar

1. (M.Gardner masalasi). O‘nli sanoq sistemasida ko‘p xonali son berilgan bo‘lsin. Uning eng o‘ngdagi raqamini o‘chiramiz, so‘ng shu raqamni ikkilantirib, qolgan sondan ayiramiz. Ayirma ustida yana shunday amalni bajaramiz. Bu amalni bir yo ikki xonali son chiqquncha takrorlaymiz. Agar hosil bo‘lgan son 7 ga bo‘linsa, berilgan son ham bo‘linadi va, aksincha, hosil bo‘lgan son 7 ga bo‘linmasa berilgan son ham bo‘linmaydi. Misollar: 13579 va 97531.

13579 – 9 ni o‘chiramiz, $9\times2=18$ ni ayiramiz

18

1339 – yana shu ishni takrorlaymiz

18

115 – 5 ni o‘chirib, qolganidan 10 ni ayiramiz

10

1 – bu son 7 ga bo‘linmaydi, demak, 13579 ham bo‘linmaydi (tekshirib ko‘ring).

97531

2

9751

2

973

6

91

2

7– 7 ga bo‘linadi, demak, 97531 ham bo‘linadi (tekshiring).

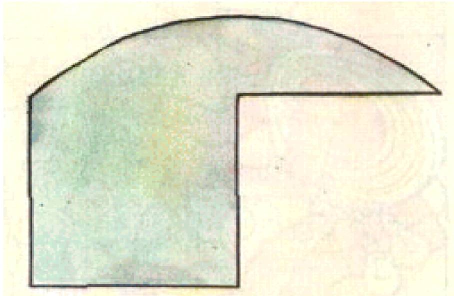
Bu alomatning to‘g‘riligini isbotlang.

2. (“Kvant” jurnalidan). Parallellogrammni uning markazi orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab 2 ta qismga ajratingki, natijada hosil bo‘lgan bo‘laklardan romb hosil qilish mumkin bo‘lsin.

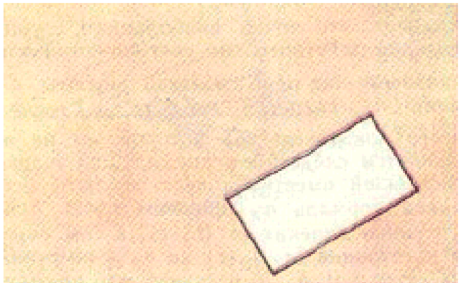
3. Ixtiyoriy uchburchak olamiz. Uning tomonlariga tashqaridan teng tomonli uchburchaklar yasaymiz.

Ularning markazlari o‘z navbatida teng tomonli uchburchak hosil qilishini isbotlang. So‘ng ichki tomondan shunday uchburchaklar yasaymiz. Ularning markazlari ham teng tomonli uchburchak hosil qilishini isbotlang. Nihoyat, bu ikki uchburchak yuzalari ayirmasi berilgan uchburchak yuziga teng bo‘lishini ko‘rsating.

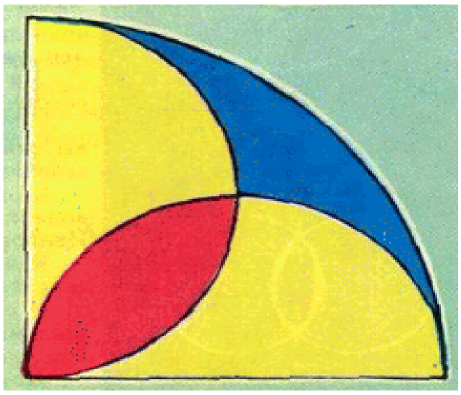
4. (“Kvant” jurnalidan). Rasmda ko‘rsatilgan shaklni 2 ta kongurent (ustma-ust qo‘yganda mos tushadigan) qismlarga ajrating.



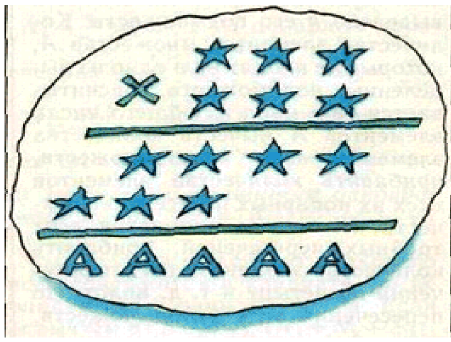
5. (“Kvant” jurnalidan). To‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi tunukadan to‘g‘ri to‘rtburchak kesib olinganidan so‘ng, rasmda ko‘rsatilgandek shakl hosil bo‘ldi. Shu shakl yuzini teng ikkiga bo‘luvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazing.



6. (“Kvant” jurnalidan). Doiraning to‘rtdan bir qismiga shu doira radiusini diametr qilib rasmda ko‘rsatilgandek yarim aylanalar chizilgan. Qaysi bir qismning yuzi katta: qizil bilan bo‘yalgan qismning yuzimi yoki ko‘k bilan bo‘yalgannikimi?



7. (“Kvant” jurnalidan). O‘ngdagi sonli rebusda hech narsa ma’lum bo‘lmasa ham ammo u yagona yechimga ega. Shu yechimni toping.

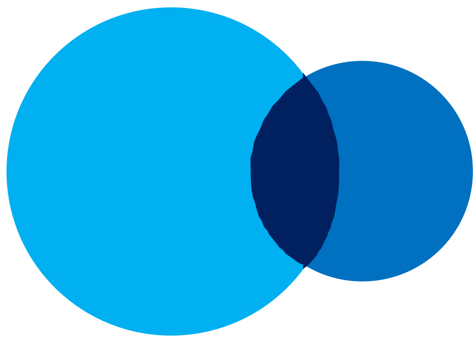


8. (“Kvant” jurnalidan). Matn quyidagi jadval asosida kodlanadi: har bir raqam o‘rniga jadvaldagi raqam ostida turgan 3 ta harflardan biri qo‘yiladi. “∗” belgi o‘rniga esa so‘z orolig‘i yoki “ю”, ”я” harflardan biri qo‘yiladi. Quyidagi kodni oching va undagi savolga javob bering:

533934∗150413∗6∗

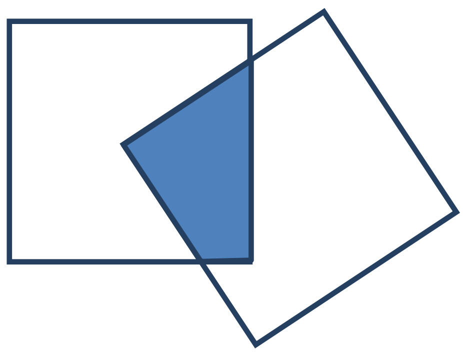
8156215044414∗∗305041080?

9. (U.Trigg masalasi). Radiuslari 15 va 20 ga teng ikki aylana kesishadi. Har ikki aylanadan kesishma chiqarib tashlansa, ikkita “oy” hosil bo‘ladi. Ularning yuzlari qanchaga farq qiladi?



10. (“Kvant” jurnalidan). 5 va 6 raqamlarining orasiga shunday belgi qo‘yingki natijada hosil bo‘lgan son 5 dan kattaroq va 6 dan kichikroq bo‘lsin.

11. Tomonlari 1 ga teng ikkita kvadratdan birining uchi ikkinchisining markazi bilan ustma-ust tushadi. Ularning kesishmasining yuzini toping.

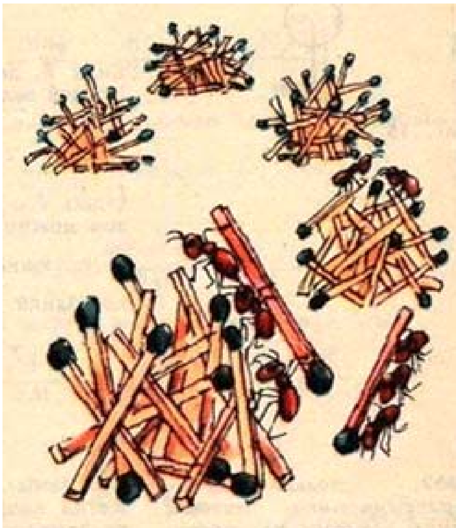


12. (“Kvant” jurnalidan). Soatning sekund strelkasi 1 sekundni bosib o‘tganda minut strelkasi 6 minutni bo‘sib o‘tdi. Agar soat buzuq bo‘lmasa, buni qanday tushunish mumkin?

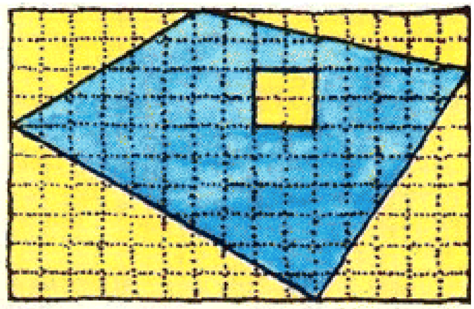
13. (Yunon-lotin kvadrati haqida Eyler masalasi). Amir Temur arlot, buruldoy, jaloir va qavchin favjlaridan bittadan qilichboz, nayzaboz, tirandoz va shashparchi tanlab 4×4 qilib safga tortishni buyurdi. Amirlar Sohibqironning maqtovini olish uchun askarlarga eniga ham, bo'yiga ham har bir qatorda har favjdan bittadan va har qurol turidan tutganlardan bittadan bo'ladigan qilib joylamoqchi. Bu vazifani ular qanday amalga oshirishi kerak? (Rasmda 3×3 kvadrat uchun masala yechimi berilgan: harflar – favjlarni, ularning rangi – qurol turini bildiradi.)

A	B	C
B	C	A
C	A	B

14. ("Kvant" jurnalidan). 80 ta gugurt cho'pidan 5 ta uyumcha hosil qilindi. Birinchi gugurtlar uyumidan 5 dan bir qismini olib 2-uyumchaga qo'shishdi. So'ng, 2-uyumchadan ham 5 dan bir qismini olib 3-uyumchaga o'tkazishdi. Shu jarayonni davom ettirib, oxirida 5-uyumchadan ham 5 dan 1 qismini 1-uyumchaga o'tkazishdi. Shunda barcha uyumchalarda gugurt cho'plari soni bir xil bo'ldi. Boshida har bir uyumchalarda qanchadan gugurt cho'plari bo'lgan?

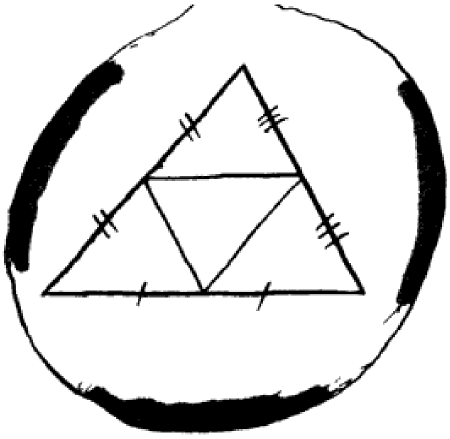


15. ("Kvant" jurnalidan). Rasmdagi to'g'ri to'rtburchak ichidagi

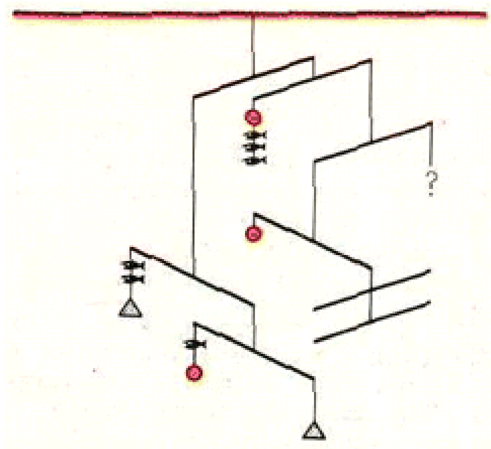


ko‘k rang bilan bo‘yalgan qismning yuzi to‘g‘ri to‘rtburchak yuzining yarmiga teng ekanligini isbotlang.

16. (“Kvant” jurnalidan). Shunday yil mavjudmi, bunda 13-sana biror marta ham dushanba kuniga to‘g‘ri kelmaydi? Eng ko‘p sonda nechta dushanbaga to‘g‘ri kelishi mumkin?



17. (“Kvant” jurnalidan). Har qanday uchburchakni rasmda ko‘rsatilgandek o‘ziga o‘xshash 4 ta teng uchburchakchalarga ajratish mumkin. Savol: Shunday uchburchakni toping-ki, uni o‘ziga o‘xshash 3 ta teng uchburchakchalarga ajratish mumkin bo‘lsin.

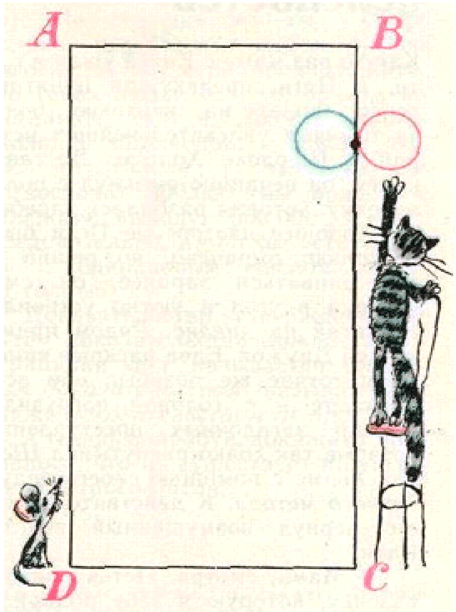


18. (“Kvant” jurnalidan). (Z.Leman masalasi) Ingliz matematiki Bernard rasmdagi konuslardan, sharchalardan, baliqlardan va tayoqchalardan tashkil topgan konstruksiyani “Ekvilibristika” va “Kandelyabr” so‘zlarini birlashtirib “Ekvilyabr” deb atagan. “Ekvilyabr” muvozanatda turishi uchun “bo‘sh tayoqcha” (rasmda ? belgisi) o‘rniga qanday massa qo‘yilishi kerak? Agar har bir tayoqchaning massasi 10 gramm bo‘lsa, har bir shaklning massasini toping.

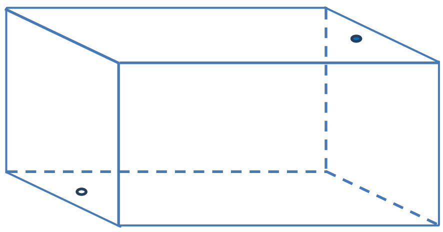
19. “12 ta farzin haqida Eyler masalasi”. Shaxmat taxtasiga 8 ta farzinni shunday joylash kerakki, ularning hech biri boshqa birini urishi mumkin bo‘lmasin.

Masala 12 ta yechimga ega. Ulardan biri rasmda tasvirlangan. Qolgan yechimlarni topishga harakat qilib ko‘ring. Jumladan, faqat bitta yechimdan boshqalarida kamida uchta farzin bir to‘g‘ri chiziqda yotadigan kataklarga joylashadi, faqat bitta yechimda bunday bo‘lmaydi.

20. (“Kvant” jurnalidan). *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchakning ($|AB| = 1\ m$ va $|BC| = 2\ m$) *BC* tomonidagi nuqtasiga uzunliklari 0.5 *m* bo‘lgan 2 ta aylana ikkita tomondan urinadi (rasmga qarang). Aylanalar to‘g‘ri to‘rtburchak tomonlari bo‘ylab aylana boshladi. Har bir aylana boshlanggan joyiga qaytib kelguniga qadar necha marta aylanadi?



21. (G.Dyudeni masalasi). Sportzalning o‘lchami $12 \times 12 \times 30$ *m*. Kvadrat shaklidagi devorning pastki tomonining o‘rtasidan 1 *m* ichkarida non ushog‘i turibdi, Qarama-qarshi devorda yuqori tomonining o‘rtasidan 1 m masofada shiftda chumoli turgan edi, ushoqni ko‘rib qoldi. U sportzalning yoqlari bo‘ylab qaysi yo‘l bilan yurganda eng qisqa bo‘ladi?



22. ("Kvant" jurnalidan). Kvadratni 3 ta qismga shunday ajratingki, hosil boʻlgan boʻlaklardan oʻtmas burchakli uchburchak hosil qilish mumkin boʻlsin.

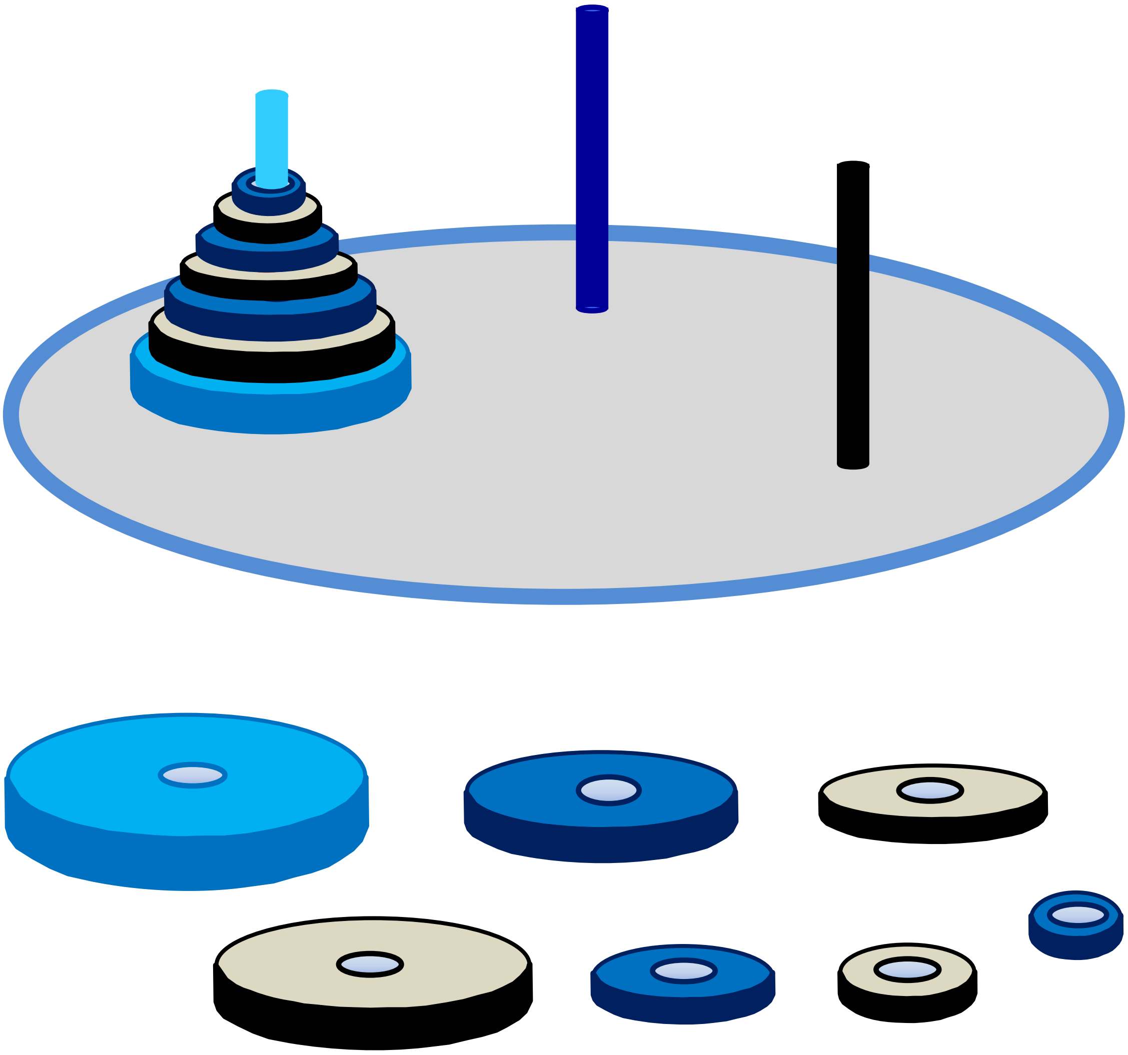
23. ("Kvant" jurnalidan). 10 ta gugurt choʻpidan hech qanday qiyinchiliklarsiz 2 ta bechburchak hosil qilish mumkin. Shuncha sondagi gugurt choʻpidan 2 ta beshburchak va 5 ta uchburchak hosil qilish mumkinmi?

24. ("Kvant" jurnalidan). $63! - 61!$ ayirma 71 ga boʻlinishini isbotlang. Bu yerda $n!$ yozuv 1 dan n gacha boʻgan butun sonlar koʻpaytmasini anglatadi.

25. Shaxmat taxtasining $a1$ katagida toʻra turibdi. Ikki oʻyinchi navbat bilan uni oʻngga yoki yuqoriga suradi. Toʻrani istalgancha katakka surish mumkin. Kim uni $h8$ katakka qoʻysa, yutadi. Bu oʻyinda kim yutadi?

26. Xanoy minorasi. Bu oʻyinning nomi, garchi Vetnam davlatining poytaxti bilan atalsa-da, aslida fransiyalik boshqotirmalar ustasi E.Lyuka tomonidan 1883 yilda oʻylab topilgan. U uchta qoziqli patnischa va nechtadir radiusi har xil xalqachadan iborat. Oʻyinning dastlabki holatida xalqachalar qoziqlardan biriga kiydirilgan. Oʻyinda katta xalqani kichik xalqa ustiga kiydirish taqiqlanadi. Maqsad – xalqalarni boshqa qoziqqa koʻchirish. Xalqa bitta boʻlsa – bu ish bir yurishda hal boʻladi. Xalqalar ikkita boʻlsa, uch yurish lozim: kichik xalqa ochkoʻk qoziqdan qora qoziqqa, keyin katta xalqa toʻqkoʻk qoziqqa, nihoyat kichik xalqa uning ustiga. Umumiy holda n ta xalqa boʻlsa, xalqalarni boshqa qoziqqa $2^n - 1$ qadamda koʻchirish mumkin va bu eng yaxshi natija boʻladi. Bunga qaramasdan, amalda hatto xalqalar soni 6 ta boʻlganda-yoq boshqotirma ancha boshni qotiradi.

Mashq. Ostiga chizilgan tasdiqni matematik induksiya usuli bilan isbotlang.



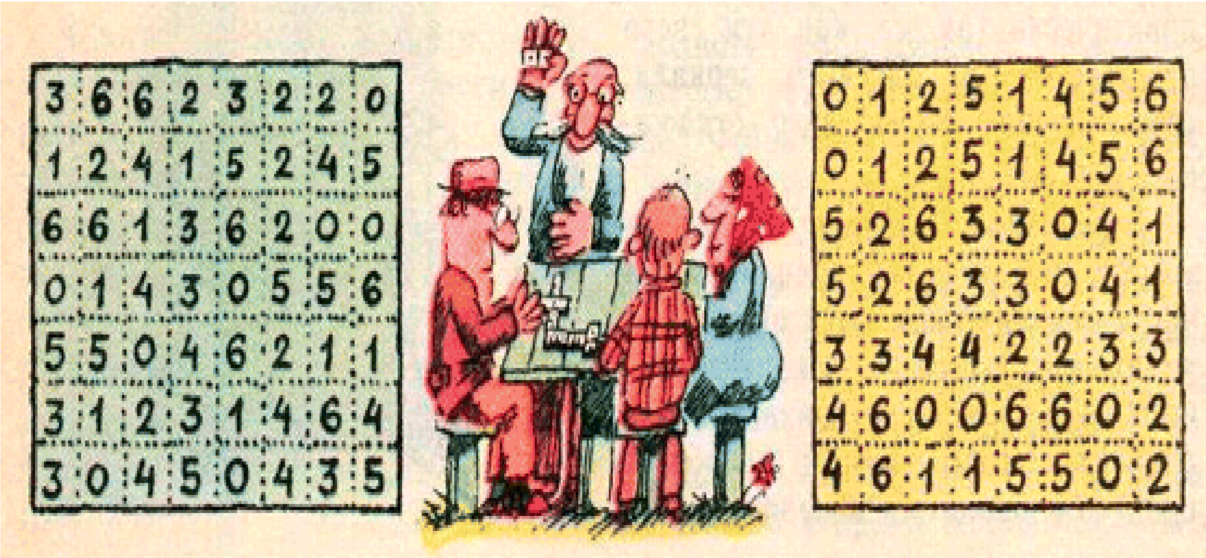
27. ("Kvant" jurnalidan). 2 ga koʻpaytirganda biror sonning kvadrati, 3 ga koʻpaytirganda biror sonning kubi hosil boʻladigan eng kichik natural sonni toping.

28. ("Kvant" jurnalidan). Sportchi nishonga oʻq otishda 10 va 8 ga bir xil sonda va bir necha marta 5 ga tekkizdi. Agar barchasi boʻlib 99 bal olgan boʻlsa, sportchi necha marta oʻq uzgan?

29. ("Kvant" jurnalidan). Uchburchakning balandligi asosidan 2 barobar kichik, shu asosidagi burchaklaridan

biri 75° ga teng. Uchburchak teng yonli bo‘lishini isbotlang.

30. (“Kvant” jurnalidan). Rasmda to‘g‘ri to‘rtburchakdagi sonlar yig‘indisi qator bo‘yicha ham, ustun bo‘yicha ham bir xil. Bu to‘g‘ri to‘rtburchaklarning har biridan domino komplektini hosil qilishga urinib ko‘ring.



Mundarija

A.A’zamov, A.Tilavov

CHIN QIZIQARLI MATEMATIKA

II

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
yuqori sinf o‘quvchilari uchun

Muharrir A.Muxtorov
Musahhih O.Muxtorov
Sahifalovchi D.Akramova

Nashriyot litsenziyasi A1№ 231.16.11.12.
Terishga berildi: 22.08.2018-y.
Bosishga ruxsat etildi: 12.09.2018-y. Ofset qog‘ozi.
Qog‘oz bichimi 84x108 $^{1}/_{32}$
“SchoolBookAC” garniturasi. Ofset usulida bosiladi.
Shartli b.t.:10.75 Adadi:1000 nusxa.

"ADAD PLYUS" MCHJ matbaa
korxonasida chop etildi.
Toshkent sh. Chilonzor tumani,
Bunyodkor ko'chasi, 28-uy.