A.A’zamov, A.Tilavov

CHIN QIZIQARLI MATEMATIKA

I

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining quyi
va o‘rta sinf o‘quvchilari uchun

Toshkent
“Tafakkur”
2018

KBK 22.1
51
A-94
A’zamov, A. Tilavov, A.

Chin qiziqarli matematika I [Matn] Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining quyi va o‘rta sinf o‘quvchilari uchun/

A.A’zamov, A.Tilavov. – Toshkent: “Tafakkur”, 2018. – 192 b.

UO‘K 51

Annotatsiya

Matematika – eng jozibali fanlardan biri. Bu, ayniqsa, to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisob-kitob bilan yechilmaydigan, yechim biror o‘ziga xos g‘oya topishni talab qiladigan masalalarda, sonlar va geometrik shakllarning favqulodda xossalarida, mazmuniga nafosat xos bo‘lgan teoremalarda yoki ma’lum va mashhur teoremalarning kutilmagan tarzdagi ixcham isbotlarida ko‘rinadi. Mana shu mavzular chin qiziqarli matematikadan iborat. Taqdim etilayotgan uch kitobdan iborat, ushbu majmua o‘quvchilarga matematikaning ana shu jihatini namoyish etishga mo‘ljallangan.

Majmuaning I qismiga nisbatan sodda, matematikadan u qadar chuqur bilim talab etmaydigan mavzulardagi materiallar jamlangan bo‘lib, ular bilan hatto quyi sinf o‘quvchilari ham shug‘ullanishlari mumkin.

ISBN 978-9943-24-179-4

So‘zboshi

Maktab matematika fanining maqsadi o‘quvchilarga batartib bilim berish bo‘lgani uchun, darsliklar odatda anchayin bir xil mashqlarni takrorlash uslubida yoziladi, shunga muvofiq matematika darslari ko‘pincha zerikarli yo‘sinda o‘tadi. Holbuki, matematika mavzulari birining ustiga ikkinchisi qalashib, borgan sari chuqurlashib boradi. Bu esa o‘quvchidan avvalgi bir-ikki darsni emas, balki boshlang‘ich sinflardan boshlab o‘rganilgan mavzulardan to o‘tgan darsdagigacha materialni yodda tutishni taqozo etadi. Qiyoslash uchun matematikaga eng yaqin fan bo‘lgan fizikani olaylik. Uning “Molekulyar fizika” bo‘limini yaxshi o‘zlashtirmagan o‘quvchi “Elektr” bo‘limini o‘zlashtira oladi – buning uchun u molekulyar fizika mavzularini yodda tutishi shart emas. Ammo boshlang‘ich sinfda o‘tilgan oddiy kasrlar bilan bog‘liq amallarni o‘zlashtirmagan yoki unutgan o‘quvchi matematikaning keyingi mavzularidan birortasini ham o‘zlashtira olmaydi.

Endi shunday savol tug‘iladi – qanday qilib hamma darsda o‘tilgan mavzuni yodda saqlash mumkin? Buning maktabda keng qo‘llanadigan usuli – tinmay takrorlab turish. Bu usulga qo‘shimcha yana bir usul yaxshi samara beradi. U ham bo‘lsa, o‘quvchilarni matematikaga qiziqtirishdir. Agar o‘quvchi bu fanga “oshiq-u shaydo” bo‘lib qolsa, kelajakda kuchli matematik bo‘lib yetishuviga yo‘l ochiladi, boshqa soha mutaxassisi bo‘lganda ham, matematik mavzularning tartib-intizomi, qiyin masalani yechish beradigan zavq-u shavq, teoremalarning nafosati hamisha asqotadi. Buning uchun o‘quvchilarni matematikaning jozibasi nimada ekanligi bilan tanishtirish kerak, albatta.

Ko‘pincha qiziqarli matematika deganda yengil-yelpi boshqotirma masalalar tushuniladi. Masalan, “Daraxtning shoxida 10 ta chumchuq qo‘nib turgan edi, ovchi ulardan uchtasini otib tushirdi. Daraxtda nechta chumchuq qoldi?” – bu masala, hech shubhasiz, bolalarda topqirlik, shoshmaslik kabi foydali fazilatlarni tarbiyalashga xizmat qiladi, ammo matematikaga mutlaqo aloqasi yo‘q. Aksincha, “7 ta chumchuq qoldi” degan javob matematikaga yaqin. Maktablardagi uchrashuvlardan birida hamma “bitta ham chumchuq qolmadi” degan javobni ma’qullaganda bir o‘quvchi “Yo‘q, 7 ta qolgan bo‘lishi mumkin” deb turib oldi. O‘rtoqlari uning ustidan kulishdi: “Ovchi miltiq o‘tsa, shoxda chumchuq qoladimi?” U esa shunday deb javob berdi: “Daraxt juda ham katta bo‘lgan, uchta chumchuq uning bir tomonida, 7 tasi boshqa tomonida qo‘nib turgan, miltiq esa ovozi chiqmaydigan xilidan bo‘lsa-chi?” Ana shu o‘quvchidan keyinchalik yaxshi matematik yetishib chiqdi.

O‘quvchilar, matematika o‘qituvchilari hamda, umid qilamizki, ota-onalar e’tiboriga havola etilayotgan “Chin qiziqarli matematika” kitoblar turkumi (uni “Qiziqarli chin matematika” yoki “Chin qiziqarli chin matematika” deb o‘qisa ham xato bo‘lmaydi) bu qadimiy va hamisha navqiron fanning ichki nafosatini namoyon qilish maqsadida yozildi. Uning mundarijasini A.A’zamovning 15 yil davomida “Fizika, matematika va informatika” jurnalidagi “Matematika jozibasi” ruknida bosilgan maqolalari tashkil etadi, mazmunan esa “Matematika sayyorasi”, “Букет от математика” kitoblarining davomi deb qabul qilish mumkin. Kitobni asosan A.M.Tilavov nashrga tayyorladi, J.A.Baxramov qo‘lyozma bilan tanishib, o‘z fikr-mulohozalari bilan kitobni sifatli bo‘lishiga muhim hissa qo‘shdi. Mualliflar kitoblar yuzasidan bildiriladigan fikr-mulohazalarni, ayniqsa, uning sahifalarida keltirilgan masalalarning “jozibador” yechimlarini mamnuniyat bilan qabul qiladi.

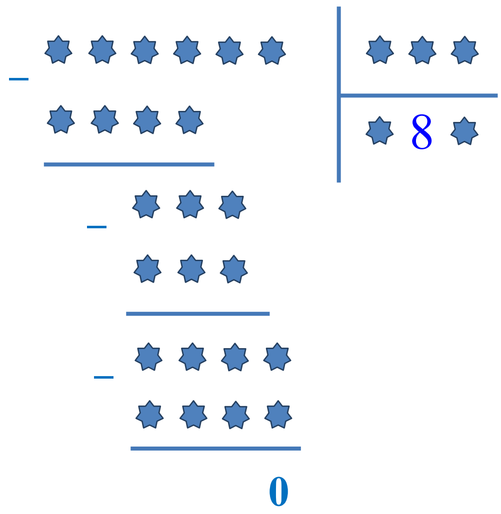
§ 1. Arifmetik rebuslar[1]

O‘qituvchilar va ota-onalar uchun. *Mantiqiy mushohadalar – matematikaning qalbi, ruhidir. Turli bosqich ta’lim muassasalarining o‘quv rejalarida matematika fani alohida o‘rin egallashining boisi ham shu. Chunki, arifmetika va geometriyaga oid eng sodda va boshlang‘ich ma’lumotlarni aytmaganda, butun sonni tub ko‘paytuvchilarga ajratish, kvadrat tenglamalarni yechish, uchburchakning yuzini topish kabi bilimlar bitiruvchilarning 99 foizi uchun kelajakda amalda kerak bo‘lmaydi. Hatto oddiy kasrlarni qo‘shish, kvadratning yuzini topish kabi, bir qarashda katta amaliy ahamiyatga ega masalalar ham juda oz sonli mutaxassislarga yo‘liqadi, xolos.*

Shu sababli bo‘lsa kerak, ko‘pincha, maktab o‘quvchilaridan, ayniqsa turli mutaxassislikka o‘qiyotgan oliy va o‘rta maxsus o‘quv yurtlari talabalaridan “Bizga matematika nimaga kerak? Nima uchun biz bu qiyin fanga shuncha vaqt sarflashga majburmiz?” qabilidagi savollarni eshitasiz. Ularga savol bilan javob berish maqsadga muvofiq:

Xo‘sh, sizga mantiqiy mushohada qobiliyati kerakmi?

Gap shundaki, maktabda o‘qitiladigan fanlar ichida asosan (birgina desa ham bo‘ladi) matematika o‘quvchilarda qat’iy mantiqiy mushohada qobiliyatini tarbiyalaydi. Bu qonun, xususan, quyidagi misolda yaqqol ko‘rinadi.



[1]FMI, 2003, №3 (B.Haydarov bilan hammualliflikda).

O‘ng tomonda 6 xonali sonni 3 xonali songa bo‘lish jarayoni tasvirlangan. Faqat raqamlarning deyarli barchasi yulduzchalar bilan almashtirib chiqilgan. Bo‘lish jarayonini tiklang.

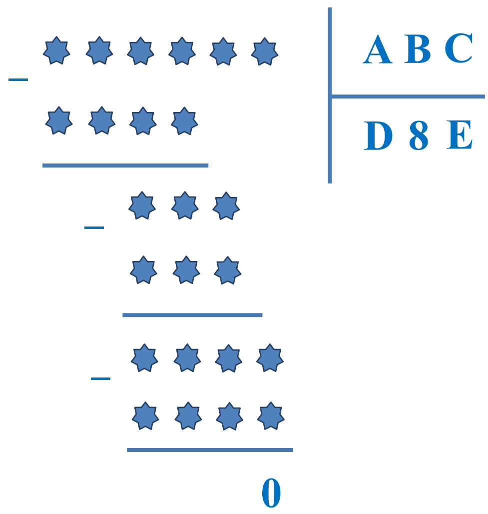
Quyida masalani dars paytida yechimni jamoa bo‘lib izlash usuli bayon qilinadi.

Muallim (M): Xo‘sh nimadan boshlaymiz? Kim qanday usul taklif qiladi?

O‘quvchilardan biri (O‘$_1$): Tenglama tuzish kerakdir?

Boshqa o‘quvchi (O‘$_2$): Noma’lum juda ko‘p-ku.

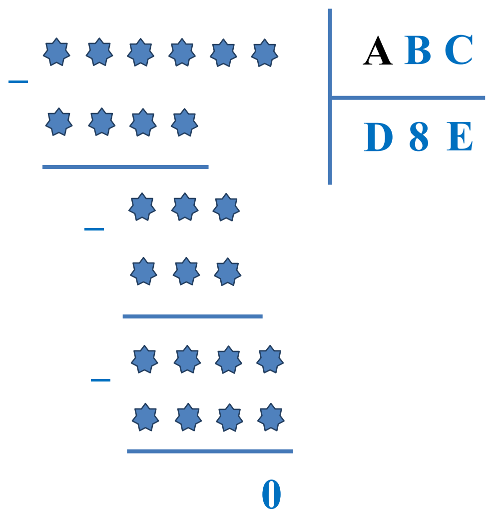
M: Nechta? Hamma raqam noma’lummi?



O‘$_1$: Bo‘linuvchi bilan bo‘luvchini topsak bo‘ldi. To‘qqizta.

O‘$_2$: Bo‘luvchi bilan bo‘linmani topsak, ko‘paytirib, bo‘linuvchini ham topa olamiz. Bunda noma’lum beshta bo‘ladi.

M: Kelinglar, shu 5 noma’lumni belgilab qo‘yaylik:



O‘$_1$: Noma’lum beshta, ammo bitta ham tenglama tuzib bo‘lmaydi-ku!

M: To‘g‘ri. Lekin avval noma’lumlar bilan yaxshilab tanishib olaylik. Ular haqida nima bilamiz? Ixtiyoriy son bo‘la oladimi?

O‘$_1$: Yo‘q, bular raqamlar.

M: Juda yaxshi. *A* ning *B* va *C* dan farqi bormi?

O‘$_1$: Bor, albatta, bo‘luvchi uch xonali bo‘lgani uchun *A* nolga teng emas.

O‘$_2$: *D* ham.

M: Yaxshi. Fikrlashda davom etaylik. Yana qaysi raqam nimaga teng bo‘la oladi-yu nimaga teng bo‘la olmaydi? (*Sukunat.*) Bizga nimalar ma’lum o‘zi? Nimadan hozircha foydalanganimiz yo‘q?

O‘$_1$: 8 raqamidan.

M: Xo‘sh?

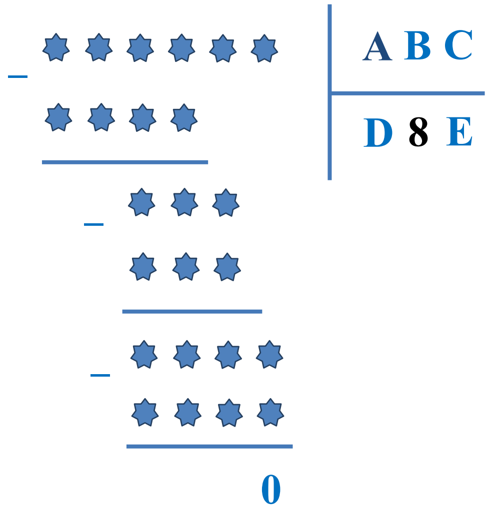
O‘$_1$: *ABC* ni 8 ga ko‘paytirsak... (*biroz o‘ylanib*) uch xonali son chiqqan.

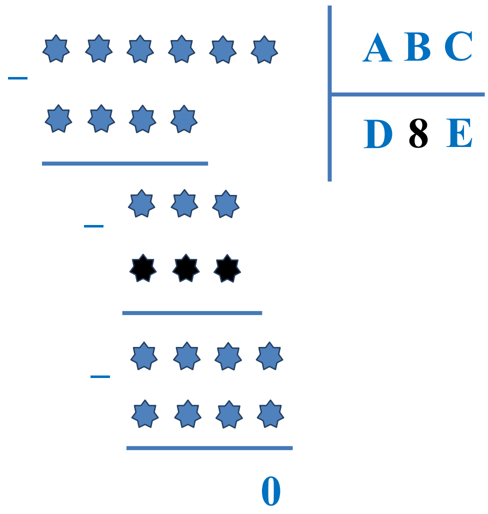
M: Barakalla. Bundan biror xulosa chiqadimi?

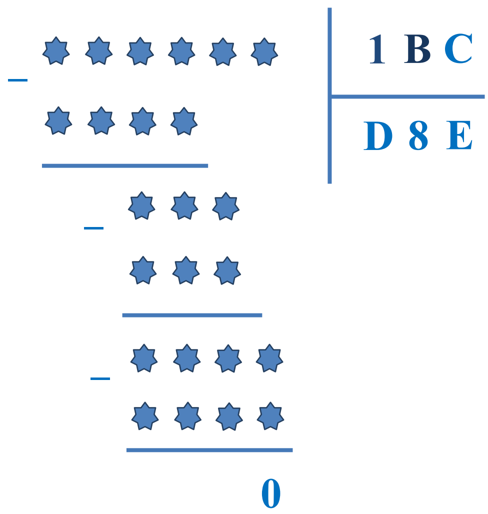
O‘$_1$: *A* faqat 1 bo‘lishi mumkin.

M: To‘ppa-to‘g‘ri. Mana, noma’lumlardan bittasi topildi. Hech qanday tenglama kerak bo‘lmadi.

Qani, shu yo‘sinda davom etaylik-chi. Kimda qanday fikr bor? (*Sukunat.*) *B* raqami







haqida nima deya olamiz?

O‘$_1$: B raqami 2 dan katta bo‘lsa, ABC ni 8 ga ko‘paytirganda to‘rt xonali son chiqar edi.

M: Bu fikrni yana ham aniqroq aytsa bo‘ladini?

O‘$_1$: $B=3$ bo‘lsa, $13C$ ni 8 ga ko‘paytirsa, ko‘paytma 1000 dan katta bo‘ladi.

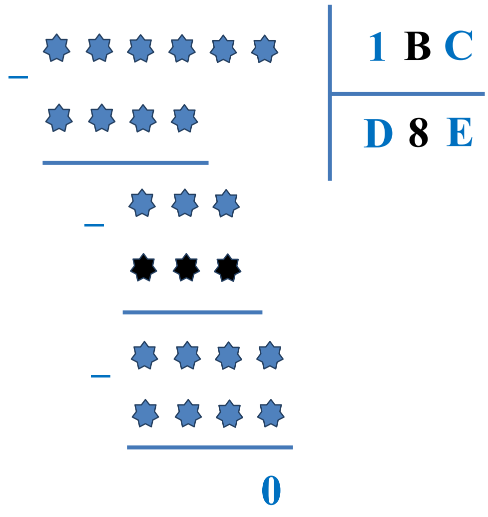
O‘$_2$: B raqami 2 dan katta bo‘la olmas ekan.

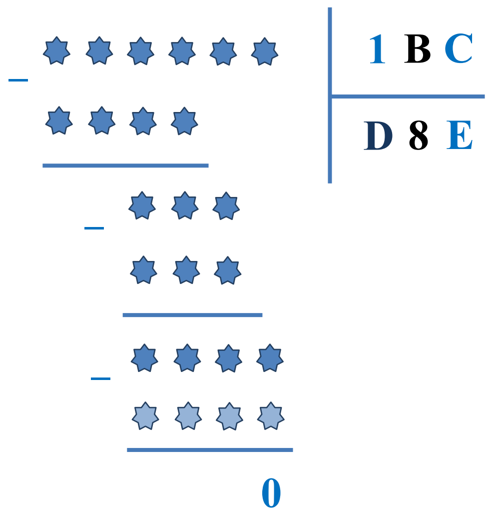
M: Yaxshi. Demak, B raqami 0, 1 yo 2 bo‘lishi mumkin. $B=0$ bo‘lishi mumkinmi? (*Har xil mulohazalar.*) Bu holda ko‘paytuvchimiz $10C$ ko‘rinishida bo‘ladi. Endi qanday mulohaza yuritamiz? (*Sukunat.*) Boshqa raqamlarni ham qarash payti kelmadimikin?

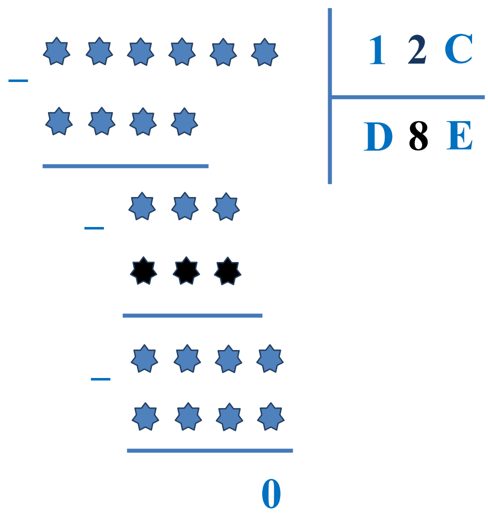
O‘$_1$: $10C$ ni D ga ko‘paytirsak, 4 xonali son chiqishi kerak. Chiqmaydiganga o‘xshaydi.

M: Nari borsa, necha chiqishi mumkin?

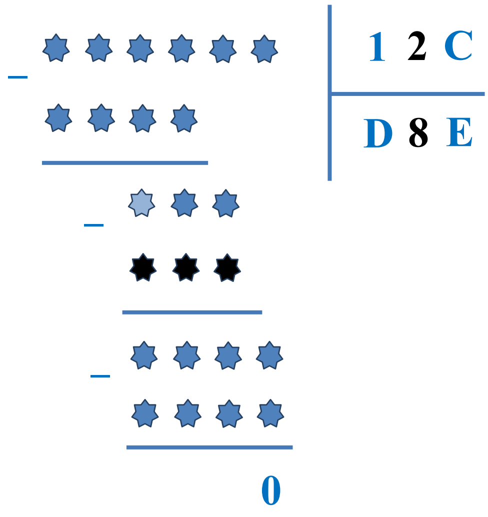
O‘$_1$: Nari borsa, $109 \cdot 9 = 981$ chiqishi mumkin.







M: Balli. Demak?

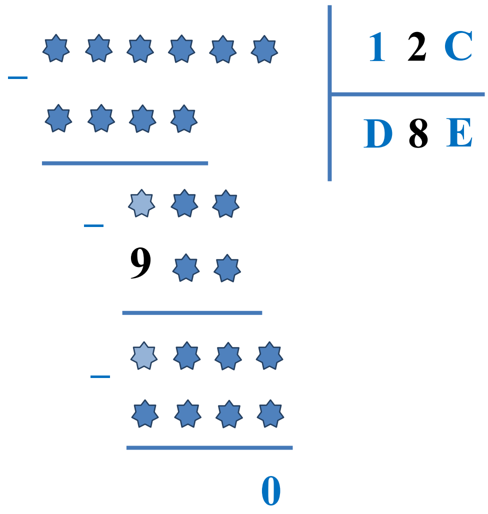


O‘$_1$: B nolga teng bo‘lolmas ekan.

M: Endi $B=2$ holni tekshiraylik. (*Sukunat.*) 4-satr haqida nima deya olasiz?

O‘$_1$: $12C$ ni 8 ga ko‘paytirish natijasi.

M: Juda yaxshi. Xo‘sh? (*Sukunat.*)



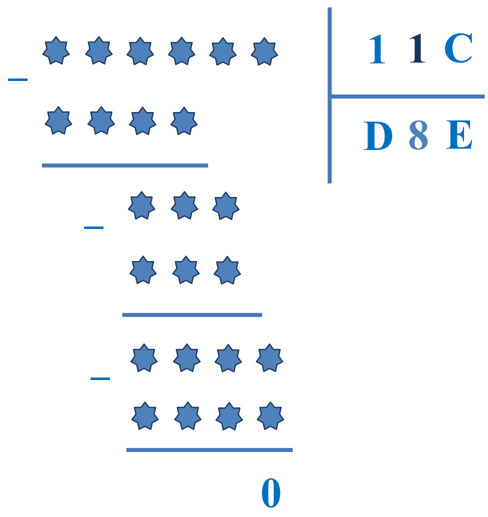
O‘$_1$: (*Xursand.*) Birinchi raqami – 9.

M: Juda soz. Bundan biror xulosa chiqadimi?

O‘$_1$: Chiqadi: 3-satrning birinchi raqami ham 9 bo‘lishi shart.

O‘$_2$: Unda 5-satr boshida 0 turib qolmaydimi?

M: Bizga xuddi shu kerak: 5-satr boshida 0 turishi mumkin emas.



O‘$_1$: Demak, $B=2$ deyish noto‘g‘ri ekan.

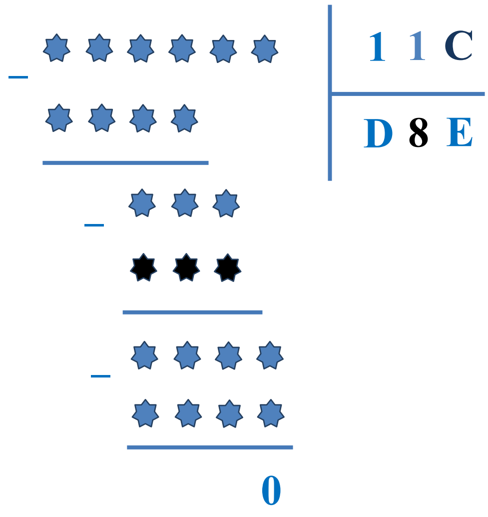
M: Shunday qilib?...

O‘$_1$: $B=1$.

O‘$_2$: Endi C ni topish qoldi.

M: Qani?

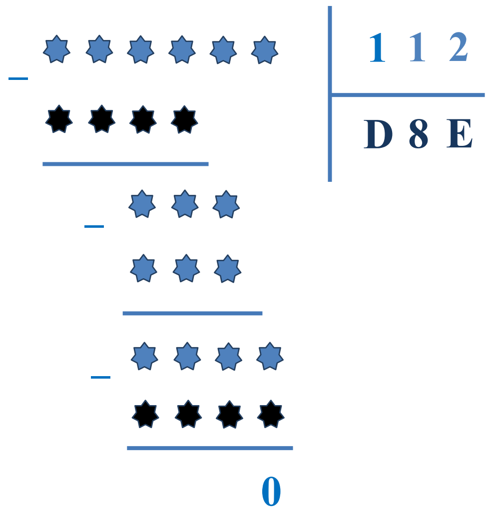
O‘$_1$: C raqami 0 yoki 1 bo‘lmasligi ko‘rinib turibdi.



M: Aks holda 2 va 6 satrlarda to‘rt xonali son chiqmas edi.

O‘$_1$: C raqami 2 dan katta bo‘la olmaydi!

O‘$_2$: Chindan hatto $C=3$ bo‘lganda ham 113 ni 8 ga ko‘paytirsak, 904 chiqadi, ammo 4 satrdagi birinchi raqami 9 bo‘lmasligini ko‘rdik.



O‘$_1$: Demak, faqat $C=2$ bo‘lar ekan.

O‘$_3$: Unda D va E raqamlari faqat 9 bo‘lishi shart – bo‘lmasa 4 xonali son chiqmaydi.

M: Demak, bo‘luvchi 112, bo‘linma 989 ekan, bo‘linuvchini topib tekshirib ko‘raylik: $112 \cdot 989 = 110768$.

Shunday qilib, masala yagona yechimga ega ekan:

$$\begin{array}{r|l}
-110768 & 112 \\
\underline{1008} & 989 \\
-996 & \\
\underline{896} & \\
-1008 & \\
\underline{1008} & \\
0 &
\end{array}$$

Yana o‘qituvchilar va ota-onalar uchun. *Endi bu misolni yechish jarayonini kuzatish asosida xulosa qilaylik:*

Misolni yechish matematikadan maxsus bilimlar talab qilgani yo‘q – bor-yo‘g‘i bir butun sonni ikkinchi butun songa bo‘lish qoidasi qo‘llandi, xolos. Bu mavzu maktablarning 3-4 sinfidayoq o‘tiladi! Ayni paytda u sodda ham emas. Yechilgan masalaning murakkabligi – chuqur va ancha takomil mantiqiy mushohada talab qilishidadir.

Xo‘sh, mana shunday mushohada yurita olish faqat matematik, boringki, ilmiy xodimlargagina zarur xolosmi? Bunday qaraganda, masalani yechish jarayoni Sherlok Holms, Megre yoki Erkyul Puaro kabi izquvarlarning jinoyatni ochish jarayonidagi mushohadalarini eslatmaydimi? Yo bo‘lmasam, binoni loyihalash va qurishda, ishlab chiqarishni rejalashtirish va amalga oshirishda mana shu singari mushohadalar qilinmaydimi? Qilinadi, albatta, faqat bu ko‘pincha avtomatik tarzda, inson ongining ostki qatlamlarida kechadi. Chunki izquvar ham, injiner ham, iqtisodchi ham, menejer ham o‘z paytida matematikadan ko‘plab mashqlarni yechish davomida mantiqiy mushohadasini charxlagan va bu qobiliyat faoliyat paytida o‘zi avtomatik tarzda ishlayveradi. Bu yerda ahvol kitob o‘qishni eslatadi: birinchi sinfda hijjalab, harfma-harf o‘qishni mashq qilish davomida avval bo‘g‘inma-bo‘g‘in, keyinroq so‘zma-so‘z o‘qish malakasi hosil bo‘ladi. Juda ko‘p vaqt o‘qish bilan mashg‘ul bo‘lganlarda hatto kitobni abzasma-abzas o‘qish malakasi paydo bo‘lishi ham yaxshi ma’lum.

Xullas...

Yuqoridagi kabi misol – keng bilimga asoslanmaydigan, ammo yechuvchidan ancha-muncha mantiqiy mushohada talab etadigan masala arifmetik rebuslar toifasiga tegishli.

§ 2. Eng qadimgi kompyuter[2]

Abu Ja’far Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning dahosi tufayli o‘nli sanoq sistemasi butun dunyoga tarqalgani “besh qo‘lday” ma’lum. Bugun endi dunyodagi har bir savodli odam 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 va 0 – jami o‘ntagina raqam bilan istalgancha katta sonlarni ham, istalgancha mayda sonlarni ham yozishni biladi, boshlang‘ich ma’lumoti bor odam esa bu raqamlar bilan sonlar ustidagi to‘rt arifmetik amalni bajarishni ham uddalay olishi lozim. Bugun oddiy ko‘nikmaga aylanib ketgan bu sistema 11-asrgacha Yevropada ma’lum emas edi. Yevropaliklar u bilan al-Xorazmiyning “Hind hisobi haqida”[3] kitobi tufayli tanishishgan. Bu kitob arab tilida yozilgani uchun “arab raqamlari” degan atama paydo bo‘lgan.

Aytaylik, 55555 sonida eng o‘ng tomondagi 5 raqami beshta birlikni bildiradi, undan chap tomondagi 5 raqami esa beshta o‘ntalikni bildiradi, keyingisi – beshta yuztalikni, yana ham chaproqdagisi – beshta mingtalikni, nihoyat, eng chapdagisi – beshta o‘n mingtalikni. Xullas, 55555 ko‘rinishidagi ixcham yozuv aslida

$$5\cdot(\text{o‘n ming})+5\cdot(\text{ming})+5\cdot(\text{yuz})+5\cdot(\text{o‘n})+5\cdot(\text{bir})$$

demakdir, bunda

yuz= o‘n·o‘n,

ming= o‘n·o‘n·o‘n,

o‘n ming = o‘n·o‘n·o‘n·o‘n

55 55**5**
5

55 5**5**5
5·10

55 **5**55
5·100

5**5** 555
5·1000

55 555
5·10000

---

[2]FMI, 2005, №2.

[3]Bu nom shartli. Al-Xorazmiy kitobining qo‘lyozmalari ham, aslida qanday atalgani to‘g‘risida ma’lumot ham saqlanmagan. “Hind hisobi haqida” degan shartli nom al-Xorazmiy kitobining lotincha tarjimasidagi iboradan olingan. Qarang: Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy. Matematik risolalar. Toshkent, 1983.

ekanligiga ko‘ra bu sanoq sistemasida haqiqatan o‘n soni muhim rol o‘ynashini ko‘ramiz.

Hindlar ixtiro qilgan sanoq sistemasi o‘n soniga asoslangani sababli hozir ***o‘nli sanoq sistemasi*** deb ataladi.

Yana bir misol: $3872 = 3\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 2.$

Agar odamning qo‘l barmoqlari soni, aytaylik, 6 ta (har qo‘lda 3 tadan) bo‘lganda edi, odamzod oltilik sanoq sistemasi bilan ish ko‘rishiga to‘g‘ri kelar edi. Bunday sistemaning raqamlari 0, 1, 2, 3, 4, 5 bo‘lib, 10 esa 6 ni bildirar, 100 yozuvi o‘nli sanoq sistemasidagi 36 ga teng bo‘lar edi.

Umuman, raqamlari (birliklardan boshlab xonalarning o‘sishi tartibida) a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n bo‘lgan sonning qiymati

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = 10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \dots + 10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0$$

ga teng bo‘ladi.

Agar sanoq sistemasining asosi p bo‘lsa, u holda raqamlar $0, 1, \dots, p-1$ sonlaridan tashkil topadi. Bu sistemada yozilgan sonning qiymati

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = p^n \cdot a_n + p^{n-1} \cdot a_{n-1} + \dots + p^2 \cdot a_2 + p \cdot a_1 + a_0$$

ga teng bo‘ladi.

Xususan, oltilik sanoq sistemasida 123456 yozuvi ma’noga ega emas, chunki bu sistemada 6 raqami yo‘q, (6 soni 10 ko‘rinishda yoziladi). 123450 soni esa ma’noga ega:

$$(123450)_6 = 1\cdot 6^5 + 2\cdot 6^4 + 3\cdot 6^3 + 4\cdot 6^2 + 5\cdot 6^1 + 0\cdot 6^0 = (11190)_{10}.$$

Ikkilik sanoq sistemasida faqat ikkita raqam bo‘ladi: 0 va 1. Asos 1 bo‘lishi ham mumkin, bunda atigi bitta raqamga o‘rin qoladi, lekin bu raqam 0 emas (umumiy qoidadan farqli) 1 bo‘lishi kerak. Shunda ketma-ket natural sonlar

|, ||, |||, ||||, |||||, ...

ko‘rinishda yoziladi – bu eng tabiiy, shuning uchun eng qadimiy “sanoq sistemasi”dir. Asosi birdan katta sanoq sistemalari esa inson aqlining mahsuli.

Nima sababdan aynan o‘n soni bugun amaldagi sanoq sistemasiga asos qilib olingan? Bu savolga javob ham yaxshi ma’lum: odamning barmoqlari o‘nta bo‘lgani uchun.

Bu tasdiqqa ikkita aniqlik kiritish lozim: 1) o‘nta – bu qo‘llardagi barmoqlar soni. Agar oyoqlar barmoqlari ham sanalsa, yigirmata bo‘ladi. Haqiqatan, ayrim xalqlar shunday – yigirmata barmoq bilan hisoblaganlar. Agar bu odat tarqalib ketganida, hozir yigirmali sanoq sistemasi bilan ish ko‘rayotgan bo‘lishimiz mumkin edi.

Harqalay, birdan o‘ngacha sanash uchun o‘nta barmoq qulayligi ravshan: qaysi son kerak bo‘lsa, shuncha barmoq ko‘rsatiladi.

Tabiiy, barmoqlarning bu vazifasi – asosi 1 ga teng sanoq sistemasining aynan o‘zi. Chunki bunda har bir barmoq, qayerda joylashganidan qat’iy nazar 1 ni bildiradi. O‘nli sanoq sistemasida esa uchta chiziqchadan iborat ||| belgi uch sonini emas, bir yuz o‘n birni bildirar edi.

Tabiiy, asosi 1 bo‘lgan sanoq sistemasi tejamli emas – o‘nta barmoq bilan 10 gacha sanash mumkin, xolos. Holbuki, o‘nta barmoq bilan ancha katta songacha sanasa bo‘ladi.

1-rasm.

1-usul – tasbih o‘girish. Barmoqlar emas, barmoq bo‘g‘inlari sanalsa, sanoqni 28 gacha yetkazish mumkin, chunki bir qo‘l barmoqlarida 14 ta bo‘g‘in bor. Bo‘g‘inlar sanab bo‘lingach, kaftlar ham qo‘shilsa, sanoq o‘ttizga yetadi – ya’ni bunda qo‘llar o‘ttiz donali tasbih vazifasini bemalol o‘taydi (1-rasm).

Bu usulni biroz o‘zgartirib, sanoqni 52 gacha yetkazish mumkin. Buning uchun bo‘g‘inlar qatorida bo‘g‘in orasi chiziqlarni ham qo‘shish kerak.

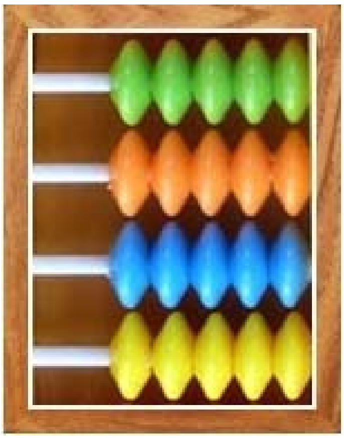
Darvoqe, bu usulda ham baribir sanoq sistema tabiati avvalgicha – asosi 1 ga tengligicha qoladi.

“Ikki simli cho‘t”. Bir qo‘ldagi barmoqlar soni beshta bo‘lgani uchun beshli sanoq sistemasini ko‘ramiz (2-rasm). Bu usulda, har bir qo‘l barmoqlari go‘yo hisobchilar cho‘tining soqqalari vazifasini o‘taydi. Aytaylik, o‘ng qo‘l barmoqlari – birliklarni, chap qo‘lning har bir barmog‘i esa beshliklarni bildirsin. Sanashni o‘ng qo‘l barmoqlarini bukishdan boshlaymiz. Beshala barmoq bukilishi bilan, uni qaytadan ochamiz-u o‘rniga darhol chap qo‘ldan bitta barmoqni bukamiz. Natijada, beshli sanoq sistemasida 10 yozuvi hosil bo‘ladi:

$$1\cdot(\text{besh})+0\cdot(\text{bir})=5.$$

Sanoqni shu usulda davom ettirish mumkin. Masalan, chap qo‘lning barcha barmoqlari bukilsa, $5\cdot 5=25$ ni bildiradi. Buning ustiga o‘ng qo‘l barmoqlari ham bukilsa, sanoq 30 ga yetadi.

Shunday qilib, o‘ng qo‘ldan m ta, chap qo‘ldan n ta barmoq bukilishi $5\cdot n+m$ sonini ifodalaydi. Agar, tasavvur qilaylik, biror sayyorada to‘rt qo‘lli odamlar yashasa, ular bu usulda $55^3+55^2+55^1+5=780$ gacha sanashlari mumkin bo‘lardi.



2-rasm.

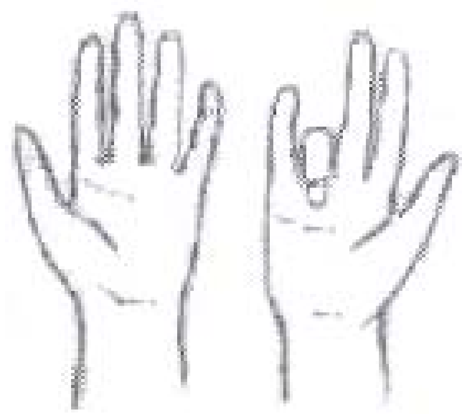
Oltilik sanoq sistemasi. Hozir ko‘rgan usulda ozgina ortiqchalik bor: 5 soni ikki usulda ifodalanyapti – ham o‘ng qo‘lning 5 ta barmog‘ini bukib, ham chap qo‘lning bitta barmog‘ini bukib. Shu singari, 10, 15, 20, 25 sonlari ham ikki usulda ifodalanadi. Bu ortiqchalikdan qutulish uchun beshlik sanoq sistemasi oʻrniga oltilik sanoq sistemasiga oʻtamiz.

Bunda oʻng qoʻlning beshta barmogʻi bukilishi 5 ni ifodalaydi. 6 ni ifodalash uchun oʻng qoʻl barmoqlari yoziladi (0 ga aylantiriladi) va chap qoʻldan bitta barmoq bukiladi. Shunday qilib, bu usulda 10 yozuvi 6 ga teng. Shu singari, 4 ta chap qoʻl barmogʻi va 3 ta oʻng qoʻl barmogʻi bukilsa, oltilik sanoq sistemasida 43, ya'ni $4\cdot6+3=27$ boʻladi. Bu usulda eng katta son $55_6 = 35_{10}$ ga teng chiqishini koʻrish qiyin emas.

Mashq. Oyoq barmoqlari ham hisobga olinsa, oltilik sanoq sistemasida nechagacha sanash mumkin?

Barmoqlar nafaqat sanashda, balki ayrim hisoblashlarni bajarishda ham qoʻl keladi.

9 ga koʻpaytirish. Barmoqlar vositasida toʻqqizni bir xonali songa koʻpaytirish juda oson. Buning uchun ikki qoʻl yozilib, yonma-yon qoʻyiladi. Toʻqqizni nechaga koʻpaytirish lozim boʻlsa, chapdan oʻng tomonga qarab sanaganda shu raqamli barmoq bukiladi. Shunda bukil gan barmoqdan chapdagilari koʻpayt-maning oʻnliklarini, oʻngdagilari esa birliklarini koʻrsatadi (3-rasm). Masalan,



3-rasm.

$$9\cdot7=(\text{bukilgan barmoqdan chapda } 6, \text{ oʻngda } 3)=63.$$

Nima uchun shunday?

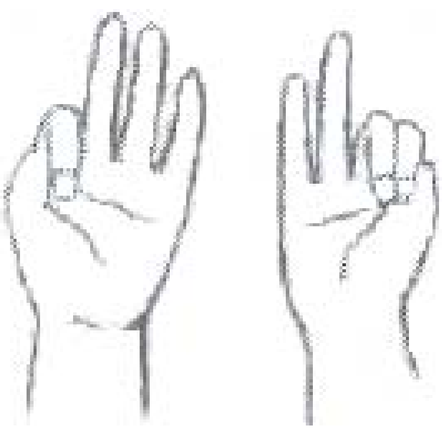
Bunga 9 ni 1 dan 9 gacha sonlarga koʻpaytirib ishonch hosil qilish juda oson. Lekin algebra yoʻli bilan isbotlash foydaliroq.

Agar n raqamli barmoq bukilgan bo‘lsa, uning chap tomonida $n-1$ ta barmoq ochiq qoladi, o‘ng tomonida esa $10-n$ ta barmoq ochiq turadi. Qoidaga ko‘ra:

$$10\cdot(n-1)+(10-n)=10n-10+10-n=9n.$$

Karra jadvalini to‘ldirish. Boshlang‘ich ta’limda o‘quvchilarga karra jadvalini yodlatish naqadar muhimligi yaxshi ma’lum. Aytish mumkinki, karra jadvali – arifmetikaning poydevoridir. O‘quvchilar kichik sonlarni bir-biriga ko‘paytirishga uncha qiynalmaydilar. 5 dan katta raqamlarni bir-biriga ko‘paytirish esa biroz murakkablik qiladi. Bu masalada barmoqlar yordamga kelishi mumkin ekan.

6 bilan 9 orasidagi ikkita raqamni ko‘paytirish kerak bo‘lsin. Tushunarliroq bo‘lishi uchun 7 va 8 ni olaylik.



4-rasm.

Har ikki qo‘lni ochamiz. Chap qo‘lda birinchi songa necha yetmasa, shuncha barmoqni bukamiz (4-rasm). (Misolda $7-5=2$ ta barmoq bukilgan). O‘ng qo‘lda ikkinchi songa yetmagancha barmoqlarni bukamiz (misolda $8-5=3$ ta barmoq). Shunda bukilgan barmoqlarni qo‘shsak, ko‘paytmaning o‘nliklar raqami $(2+3=5)$, ochiq barmoqlar ko‘paytmasi $(2\cdot3=6)$ esa birliklarni beradi: $5\cdot10+6=56$.

Mashq. Bu qoidani $6\cdot8$, $6\cdot9$, $7\cdot9$, $8\cdot8$, $8\cdot9$ va $9\cdot9$ uchun sinab ko‘ring. $6\cdot6$ va $6\cdot7$ ga qo‘llasa nima bo‘ladi?

Mashq. Qoidani algebraik yo‘l bilan isbotlang.

11 bilan 14 orasidagi sonlarni ko‘paytirish. Ko‘paytmaning chapdagi raqami (yuzliklari) 1 ga teng. Chap qo‘lda birinchi sonning, o‘ng qo‘lda ikkinchi sonning o‘ndan ortig‘iga teng barmoqlarni bukamiz. So‘ng bukilgan barmoqlarni qo‘shamiz – yig‘indi ko‘paytmaning o‘nliklar raqami bo‘ladi, ko‘paytiramiz – birliklar raqami chiqadi.

Misol. $12\cdot 14 = 1(2+4)(2\cdot 4) = 168$.

Mashq. Qoidani isbotlang.

Barmoqlarning yuqoridagi xizmati kompyuterdan ancha yiroq – sanoq cho‘plari, nari borsa, hisobchilar cho‘tiga o‘xshash, xolos. Lekin barmoqlarni jajji kompyuter deyishga barcha asos bor: ular bilan nafaqat sonlarni ifodalash, hatto to‘rt arifmetik amal bajarish ham mumkin. Buning uchun “kompyuter tili”ga – ikkilik sanoq sistemasiga murojaat qilish lozim.

Ma’lumki, kompyuter monitorida inglizcha, ruscha, o‘zbekcha, arabcha, xitoycha, hindcha yozuvlar, millionlab rangli suratlar, murakkab jadval va grafiklar, kuy va qo‘shiqlar, multfilmlar tasvirlanishi mumkin. Lekin bularning hammasi 0 va 1 raqamlari bilan ifodalansagina kompyuterga tushunarli bo‘ladi. Mana shu ikki raqam bilan ifodalanadigan axborot raqamli (digital) axborot deyiladi.

Odamning har bir barmog‘i ikkita holatda bo‘lishi mumkin: yopiq va ochiq. Demak, barmoqlar – tabiatan raqamli axborotni qayta ishlashga mo‘ljallanganday. Aniqlik uchun ochiq barmoq 1 raqamini, yumilgan barmoq esa 0 raqamini bildiradi deb kelishaylik.

Agar o‘nta barmoq yonma-yon qo‘yilsa, 10 razryadli registr hosil bo‘ladi va u 0 dan $2^{10}-1=1023$ gacha (!) sonlarni ifodalashga imkon beradi. Masalan, rasmdagi barmoqlar vaziyati 1011010001, ya’ni

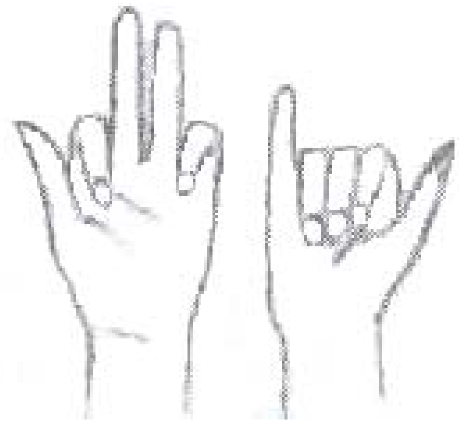
$$1\cdot 2^9+0\cdot 2^8+1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=721$$

bo‘ladi.

Agar har bir qo‘lni alohida registr deb qarasak, ular ikkita 5 xonali ikkilik sonlarni, ya’ni 0 dan 31 gacha sonlar juftligini ifodalashi mumkin.

Bu ikki sonni qo‘shish va ayirish, so‘ng natijani shu “registr”lardan biriga yozishga imkon beradi. Sonlarni ko‘paytirish ham mumkin, lekin ikkita besh xonali son ko‘paytmasi 9 xonagacha talab qilish mumkin. Bu holda yana bitta o‘n xonali registr, aytaylik, do‘stingizning barmoqlaridan foydalanishga to‘g‘ri keladi.

Yana ikkita besh xonali “registr”larga qaytaylik. Bir qo‘l barmoqlari 00000 dan 11111 gacha 32 ta sonni ifodalashi mumkin ekan, demak, 32 ta istalgan timsolni ham ifodalay oladi. Jumladan, yangi o‘zbek alifbosiga asos qilib olingan 25 ta lotin harfi va apostrofni! Bunda yana beshta son ortib qoladi. Ulardan birini, aytaylik, 00000 (beshala barmoq yumilgan) so‘z oralig‘i sifatida ajratilsa, qolgan to‘rttasi tinish belgilari uchun ishlatilishi mumkin.Bunday tizim kar-soqovlar uchun ishlab chiqilgan Brayl alifbosiga nisbatan ayrim afzalliklarga ega, masalan, ikki qo‘lda bir yo‘la ikkita harf ifodalanadi.



5-rasm.

Xuddi shu singari “barmoqlar kompyuteri” nota belgilarini ham ifodalay oladi. Agar har bir barmoq uchiga signal beruvchi moslama joylansa, barmoqlar vositasida kompyuter bilan ham “so‘zlashaverish”, aytaylik, unga axborot kiritish, farmoyishlar berish mumkin bo‘ladi. Bu ish naqadar samarali bo‘lishini anglab yetish uchun usta pianinochilar barmoqlari harakatini ko‘z oldiga keltirish kifoya.

Biz izlanuvchan o‘quvchilarga barmoqlar vositasida yana qanday ishlarni amalga oshirish mumkinligi ustida o‘ylab ko‘rishni tavsiya etamiz.

§ 3. Hisobda gap ko‘p[4]

“Fizika, matematika va informatika” jurnalining мas’ul kotibi peshonasini tirishtirib, e’tiroz bildirib qoldi: Jurnalning “Matematika jozibasi” ruknidagi maqolalar qiyinlashib boryapti. Bu yo‘sinda ketaversa, ularni o‘qishga magistrlarning ham tishi o‘tmay qolmasa edi…

Ko‘pchilik “qiziqarli matematika” deganda “Simyog‘ochda 10 ta chiroq yonib turgan edi, to‘rttasi kuydi. Nechta chiroq qoldi?”, “Simyog‘ochda 10 ta chumchuq qo‘nib turgan edi, ovchi to‘rttasini otib tushirdi, Nechta qoldi?” qabilidagi boshqotirmalarni tushunadi, Ular foydadan xoli emas, lekin qiziqarli matematikaga aloqasi yo‘q – ko‘proq tilga, hozirjavoblik qobiliyatini tarbiyalashga oid. Karra jadvalini she’rga solib, deklamatsiya qilish esa na qiziqarli matematikaga, na oddiy matematikaga aloqasi bor – agar she’rda biron-bir badiiylik bo‘lsa, u – adabiyot, aks holda adabiyot ham emas. Xullas, qiziqarli matematika ham aslida matematika. Qolaversa, matematika o‘z holicha qiziqarli fan. Uning ana shu xususiyatini payqagan o‘quvchidan keyinchalik yetuk matematik chiqadi. “Matematika jozibasi” ruknida berilayotgan maqolalar ana shu maqsadga – matematikaning asl nafosati haqida tasavvur berishga qaratilgan.

Albatta, mas’ul kotib e’tirozida jon bor. Maktab dasturi doirasida, lekin darslarda o‘tilmaydigan, ayni paytda qiziqarli mavzular ham ko‘p – ular bilan quyi sinf o‘quvchilari to‘garak mashg‘ulotlarida bemalol shug‘ullanishlari mumkin. Shunday mavzulardlan biri – **og‘zaki hisoblash qoidalari**. Bu safar shu haqda hikoya qilamiz.

Mavzuni yoritishga kirishar ekanmiz, dastavval mazkur qoidalar, asosan, o‘nli sanoq sistemasida

---

[4]FMI, 2004, №6.

yozilgan butun sonlar ustidagi arifmetik amallarga taalluqli ekanini eslab qo‘yamiz.

A) Sonlarni 5 ga ko‘paytirish. N sonini 5 ga ko‘paytirish uchun, uni ikkiga bo‘lib, so‘ng 10 ga ko‘paytirish qulay. Bunda N juft son bo‘lsa, yarmining oxiriga 0 yozilsa bo‘ldi, toq bo‘lganda esa, kasr vergulini tashlash kifoya):

34×5 = (34 ning yarmi = 17 va 0) = **170**;

143×5 = (143 ning yarmi = 71,5, vergul tashlansa) = **715**;

1234×5 = (1234 ning yarmi = 617 va 0) = **6170**;

6789×5 =(6789 ning yarmi 3394,5; vergul tashlansa) = **33945**.

B) Aksincha, **sonni 5 ga bo‘lish** uchun uni 2 ga ko‘paytirib, so‘ng 10 ga bo‘lish osonroq:

6378:5 = (6378 ni ikkilash: 12756 va oxirgi raqamni vergul bilan ajratish) = **1275,6**.

Mashq. Sonlarni og‘zaki 25 ga bo‘lish va ko‘paytirish qoidalarini o‘zingiz yozing.

C) Ikki xonali sonlarni o‘zaro ko‘paytirish. O‘ng tomonda bu amal qog‘ozda qanday bajarilishi tasvirlangan. Bunday hisob-kitobni og‘zaki bajarish oson emas. ***Qisqa ko‘paytirish qoidasi*** deb atalgan mana bu usulda esa mumkin:

1-qadam: 8 ni 7 ga ko‘paytirib, 6 ni yozamiz (5 dilda).

2-qadam: 5 ni 7 ga, 8 ni 3 ga ko‘paytmasini va yana dildagini qo‘shamiz: $35+24+5=64$ va 4 ni yozamiz (6 dilda).

3-qadam: 5 ni 3 ga ko‘paytiramiz va dildagini qo‘shib yozamiz: $15+6=21$.

$$\begin{array}{r} \times\ 58 \\ 37 \\ \hline 406 \\ +\ 174 \\ \hline 2146 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5\,8 \\ 3\,7 \\ \hline 6 \end{array}$$

D) 5 raqami bilan tugaydigan ikki xonali sonni kvadratga oshirish. Buning uchun o‘nliklar raqamini keyingi son bilan ko‘paytirib yozish, so‘ng o‘ng tomoniga 25 yozib qo‘yish kifoya:

$$
\begin{array}{c}
5\ 8\\
3\ 7\\
\hline
4\ 6
\end{array}
$$

$$\mathbf{65^2} = (6\times\mathbf{7} = 42;\ \text{yoniga } 25) = \mathbf{4225},\ \mathbf{35^2} = \mathbf{1225}.$$

$$
\begin{array}{r}
5\ 8\\
3\ 7\\
\hline
2\ 1\ 4\ 6
\end{array}
$$

Bu qoida aslida ko‘pxonali sonlarga ham yaraydi, chunki

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 2\times 10a\times 5 + 25 =$$
$$=100a(a+1) + 25,$$

– demak, yuzliklar $a(a+1)$ ta, o‘nliklar va birliklar 25 bo‘lar ekan.

Misol: 195² = (19·20 = 380 ta yuzlik va 25) = **38025**.

Mashq. 25 raqami bilan tugaydigan uch xonali sonlarni kvadratga oshirish qoidasini yozing.

E) 100 dan biroz katta sonlarni o‘zaro ko‘paytirish. Bu safar ishni qoidani keltirib chiqarishdan boshlaylik. Ko‘paytirilishi lozim sonlar N va M bo‘lsin. U holda $a = N - 100$, $b = M - 100$ sonlarni ularning “***ortig‘i***” deb ataymiz. Shunda: $N = 100 + a$, $M = 100 + b$ bo‘lgani uchun

$$N\cdot M = (100 + a)\cdot(100 + b) = 100^2 + 100a + 100b + ab =$$
$$= 100(100 + a + b) + ab = 100(N + b) + ab.$$

Demak, mana bunday qoida o‘rinli bo‘lar ekan: 100 dan biroz katta ikkita sonning ko‘paytirsak, birinchi songa ikkinchisining ortig‘i qo‘shilsa yuzliklar, ortiqlar ko‘paytilsa, o‘nliklar va birliklar hosil bo‘ladi.

103 ×**109** = (103 + 9 = 112 va 3×9 = 27) = **11227**.

112 × **107** = (112 + 7 = 119 va 12×·7 = 84) = **11984**.

Albatta, bu qoida ortiqlar ko‘paytmasi 100 dan oshib ketsa yaroqli emas. Bunday holda qoidani biroz o‘zgartirib qo‘llashga – avval ortiqlar ko‘patmasini hisoblab, 100 taliklar sonini dilda saqlab turish kerak:

112 × **109** = (12·9 =108; 08 ni yozamiz, 1 dilda, 112+ 9 = 121, dildagibilan 122) = **12208**.

F) 100 dan biroz kam sonlarni ko‘paytirish qoidasi: Yuzdan biroz kam ikkita sonni ko‘paytirish kerak bo‘lsin. Biridan ikkinchisining kamini ayirib yuzliklar, kamlarini ko‘paytirib o‘nliklar va birliklar hosil qilamiz:

92 × **94** = (92 ning kami 8, 94 ning kami 6) = (92 – 6 = 86 – yuzliklar, 8×6 = 48) = **8648**.

Mashq. Qoidani isbotlang.

Mashq. 1000dan biroz katta (yoki biroz kam) ikkita sonni o‘zaro ko‘paytirishning qulay qoidasini yozing.

G) 50 ga yaqin sonlarni kvadratga oshirish. 50 ga yaqin sonning kvadrati og‘zaki shunday topiladi: bu sonning 50 dan farqiga 25 qo‘shib yuzliklar, farqning kvadratidan esa o‘nlik va birliklar hosil qilinadi:

57^{2}=(farq +7, demak, yuzliklar 25 + 7 = 32, yoniga 7 ning kvadrati) = **3249**.

47^{2} = (farq –3, 25–3 = 22; –3 ning kvadrati 9) = **2209**.

67^{2} = (farq +13, kvadrati 169, 69 ni yozamiz, 1 dilda) = **..69** = (25 + farq = 38, dildagi bilan 39) = **3969**.

Mashq. Qoidani isbotlang.

Mashq. 500 ga yaqin sonlarni kvadratga oshirish qoidasini yozing.

H) Og‘zaki kub ildiz chiqarish. Ikki xonali sonning kubi to‘rt xonali, besh xonali yoki olti xonali bo‘lishi mumkin. Bizga biror besh-olti xonali sonni ko‘rsatib, kub ildiz chiqarib bering, deyishsa, bu murakkab masala bo‘lar edi. Chunki, sonlarning ko‘pidan aniq kub ildiz chiqmaydi, soddaroq kub ildiz chiqarish qoidasi ham yo‘q. Shuning uchun masalani quyidagicha o‘zgartiramiz: ikki xonali sonning kubi berilgan, kub ildizni topish kerak. Buni endi og‘zaki bajarsa bo‘lar ekan. Buning uchun bir xonali sonlarning kublarini yod bilish kerak:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Kublarning oxirgi raqamlariga e’tibor beraylik: ular har xil. 0, 1, 4, 5, 6 va 9 ning kublari yana xuddi shu raqamning o‘zi bilan tugaydi, 2, 3, 7 va 8 kubining oxirgi raqami esa 10 ga to‘ldiruvchi bo‘ladi! Aynan mana shu qonuniyat yordam beradi.

Misol. Berilgan: 195112. Bu qaysi ikki xonali sonning kubi?

1-qadam: oxirgi raqam 2, demak, yuqorida qayd etilgan qonuniyatga ko‘ra, ildizning birliklar raqami **8** bo‘lishi kerak.

2-qadam: minglar sinfini ajratamiz: 195. U 125 bilan 216 orasida, ya’ni, $50^3 < 195112 < 60^3$, demak, ildiz 5 raqami bilan boshlanishi kerak. Javob: $\sqrt[3]{195112} = 58.$

Mashq. Tekshirib ko‘ring.

Misol. $\sqrt[3]{804357} = ??$. Birinchi raqam, 804 soni 729 dan katta bo‘lgani uchun, 9 bo‘lishi kerak. Kub 7 bilan tugayotgani uchun kubga oshirilgan sonning birlik raqami 3 bo‘lishi kerak:

$$\sqrt[3]{804357} = 93.$$

Yana bir misol: $\sqrt[3]{6859} = 19$ – bu yerda ildizning kichik raqami ham, katta raqami ham necha bo‘lishi shunday ko‘rinib turibdi.

I) Ikki xonali sonlar kvadratidan ildiz chiqarish. Bir pog'ona pastga tushaylik: ikki xonali sonning kvadratidan og'zaki ildiz chiqarish kerak bo'lsin. Yana jadval tuzamiz:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	**0**	**1**	**4**	**9**	1**6**	2**5**	3**6**	4**9**	6**4**	8**1**

Yuqoridagi kabi bu jadvalga asoslanib, ildizning katta raqamini osongina topamiz. Faqat bu safar kvadrat ildizni topish talab qilingan sonning yuzliklarini, boshqacha aytganda oxiridan ikkita raqamini ajratish lozim.

Misol. 5476 qaysi sonning kvadrati? Yuzliklarni ajratamiz: $\underline{54}$ 76. $49<54<64$ bo'lgani uchun katta raqam 7, ya'ni

$$\sqrt{5476}=7?.$$

Quyi raqamga kelsak, jadval buni aniq topishga imkon bermaydi, chunki, 0 va 5 dan boshqa raqamlar ikki martadan uchraydi. Ko'rayotgan misolda 4 ga ham, 6 ga ham 6 raqami mos keladi, shuning uchun ildiz 74 mi yo 76 – aniq emas. Lekin buni ajratishning imkoni bor ekan. Bunda 5 bilan tugagan sonni og'zaki kvadratga oshirish qoidasi yordamga keladi. 75 ning kvadrati 5625, buni 5476 bilan taqqoslaymiz: 5476<6225. Demak, $\sqrt{5476}=74$.

Yana bir misol. Birinchidan, $\sqrt{1521}=\mathbf{3}?$, (chunki 9<15<16). Ikkinchidan $\sqrt{1521}=3\mathbf{9}$, chunki, 1521 ildizining oxirigi raqami yo 1, yoki 9 bo'lishi kerak, lekin $35^2=1225<1521$. (Bu safar buni osonroq payqash mumkin: 1521 soni 30^2 ga qaraganda 40^2 ga yaqinligi ko'rinib turibdi.

Uch xonali sonning kubidan iborat sonlarning kub ildizini og'zaki topish qoidasi ham bor (bu haqda

A.Azamovning “Математика в школе”ning 1988 yil 3-sonidagi maqolasiga qarang).

J) Alohida hollar. Yuqorida bayon qilingan qoidalar maxsus turkum masalalarga doir edi. Ulardan hech birini bevosita qo‘llab bo‘lmasa-da, baribir og‘zaki hisoblanadigan misollar ko‘p uchraydi.

Misol. 247×747. Bir qarashda og‘zaki hisoblash mushkul ko‘rinadi. Lekin algebrani nazarda tutib, diqqat qilinsa, “yilt” etib g‘oyaning nuri ko‘zga ilinadi:

$$\mathbf{247\times747} = 247\times(1000-253) = 247\,000 - 247\times253 =$$
$$= 247\,000 - (250-3)\times(250+3) = 247\,000 - (250^2 - 3^2) =$$
$$= 247\,000 - 62\,500 + 9 = \mathbf{184\,509}.$$

Bu hisoblashlar ham pista chaqishday emas, lekin, har qalay, biroz mashq qilgach, bemalol og‘zaki bajarsa bo‘ladi.

Kitoblarda ko‘p uchraydigan misollardan biri I.Makovskiyning “Og‘zaki hisob” kartinasida tasvirlangan:

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}. \qquad (1)$$

Suratdagi kvadratlarni hisoblab, bir chetdan qo‘shib borish tabiiy: 10^2=100, 11^2=121, qo‘shsak, 221, keyin 12^2=144, qo‘shsak, 365, – iye, bu mahraj-ku! Shunday ekan, keyingi ikki kvadratni alohida qo‘shish ham tabiiy: 13^2=169, 14^2=196, qo‘shsak yana 365. Shunday qilib, garchi ko‘rinishi “bahaybat” bo‘lsa-da, (1) ifodaning qiymati 2 ga teng ekan – bunday javobni og‘zaki topish chindan kishiga zavq bag‘ishlaydi.

Hikoyamizni matematika tarixiga oid muhim bir ma’lumot bilan yakunlaymiz. Buyuk o‘zbek olimi Muhammad Ulug‘bek Tarag‘ayning “Ziji jadidi Ko‘ragoniy” deb nomlangan shoh asarida ko‘plab kalendarlarga oid, astronomik va geografik jadvallari qatorida trigonometrik funksiyalar jadvallari ham berilgan. Astronomik jadvallar singari Ulug‘bekning trigonometrik jadvallari o‘ta katta aniqlikga ega – bu haqda tasavvur hosil qilish uchun bir misol:

$$\sin 17^{\circ}43' = \frac{13}{60} + \frac{12}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{4}{60^4} + \frac{21}{60^5}.$$

Bu yerda sinusning qiymati 60-lik sanoq sistemada yozilgan. Agar u o‘nlik sanoq sistemasiga o‘tkazilsa, qiymatning aniqligi 10 ta raqamdan iborat, ya’ni aniqlik darajasi 10^{-9} bo‘ladi!

Kompyuter tugul mikrokalkulyator ham bo‘lmagan zamonda o‘n minglab bunday hisoblashlar qanday bajarilgan? Gap shundaki, Ulug‘bekning o‘zi ham, u bilan birga ishlagan boshqa olimlar ham hisob-kitobga juda usta bo‘lganlar. Arifmetik amallarni oltmishlik sanoq sistemasida bajarish hisoblashlarda katta aniqlikka erishishni osonlashtirgan. Chunki bu sanoq sistemasida karra jadvali 1 dan 60 gacha sonlarning ko‘paytmalaridan iborat bo‘lib, astronomlar 3600 ta ko‘paytmani yod bilganlar. Bu hazilakam ish emas, lekin mashq natijasida erishsa bo‘ladigan malaka. Shundan so‘ng, masalan, 34 ni 57 ga ko‘paytirish ular uchun bizga 6 ni 8 ga ko‘paytirishday gap bo‘lgan. Og‘zaki hisoblash malakasi buyuk iqtidor, noyob mehnatsevarlik va ilmu fanga muhabbat bilan qo‘shilib, Ulug‘bekka “Ziji jadidi Ko‘ragoniy”dek o‘lmas asar yaratishga yordam bergan.

§ 4. Qaydasan, arifmetika?![5]

Hozir o‘quvchilar (balki, o‘qituvchilarning ham talayi) maktab dasturida "Arifmetika" degan fan bo‘lganini bilmaydi. O‘tgan asrning 70-yillarida hozirgi MDH hududi miqyosida o‘tkazilgan ta’lim islohoti oqibatida maktab dasturidan "Arifmetika" nomli o‘quv fani chiqarilib, o‘rniga "Matematika" fani kiritilgan. Buning muayyan sababi bor, albatta. U ham bo‘lsa, arifmetikada asosan to‘rt amal – qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish amallari o‘rgatilgan, mazkur islohotda esa quyi sinflar o‘quvchisiga to‘rt amaldan tashqari geometriyadan ham boshlang‘ich tushunchalar berish ma’qul topilgan. Xullas,

Arifmetika + (boshlang‘ich) geometriya = (boshlang‘ich) matematika

deb hisoblangan.

Bu-ku u qadar bahs talab muammo emas – gap o‘quv fanini nima deb atashda emas, balki nimani va qanday o‘qitishda. Xuddi mana shu o‘rinda bahsli holat yo‘q emas. Arifmetika fani doirasida harfiy belgilarni qo‘llash, jumladan, noma’lumni "x" deb belgilash mumkin bo‘lmagan – bu algebraning mulki deb qaralgan. (Hozir birinchi sinfdayoq noma’lumni "x" deb masala-misollar yechiladi). Shu sababli mashqlar faqat tayin sonlar ustida to‘rt amal bajarishga doir bo‘lgan. Bunda sinfma-sinf yuqorilagan sayin bir tomondan o‘rganiladigan sonlar toifasi kengaytirib borilgan:

1 dan 10 gacha sonlar $\subset$ ikki xonali sonlar $\subset$ ko‘p xonali sonlar $\subset$ oddiy kasrlar $\subset$ o‘nli kasrlar $\subset$ protsentlar $\subset$ ismli sonlar …,

[5]FMI, 2011, №4.

ikkinchi tomondan, mashqlar murakkablashish tomon o‘sgan. Misol tariqasida o‘sha davrlarda oliy o‘quv yurtlariga kirish uchun matematikadan yozma imtihon variantlarida odatda mana bu kabi arifmetik misol berilar edi:

Hisoblang (M.I.Skanavi tahriri ostidagi to‘plamdan):

$$\left(\frac{(3,2-1,7):0,003}{\left(\frac{29}{37}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0,2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1,5\right):1,5}{\left(2,44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+1,364:0,124.$$

Bir qarashda “qo‘rqinchli” bu misol aslida arifmetikadan oddiy bir mashqdir – u oddiy va o‘nli kasrlar ustida bajariladigan jami 15 ta qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish amalidan tashkil topgan. To‘rt arifmetik amalni puxta egallagan o‘quvchi ham shuncha hisob-kitobni bajarishda tasodifan “toyib ketishi” – xatoga yo‘l qo‘yishining ehtimoli katta. Qayd etish lozimki, xuddi shu xususiyati bilan bunday misollar foydali edi. Gap shundaki, o‘quvchi bu kabi topshiriqni bajarar ekan, unda hisob-kitoblarda puxtalik, hushyorlik, tartib-intizom kabi uning kelgusidagi (ayniqsa, buxgalteriya, moliya, injenerlik) kasbi uchun muhim xususiyatlar tarbiyalanadi

Kalkulyator va kompyuterlar davrida arifmetik amallarni puxta bilishga ehtiyoj qolmadi. (Bugun oliy o‘quv yurtlariga kiruvchilarning 99 foizi yuqoridagi misolni yecha olmasa kerak! Gap shundaki, test sinovlarida bunaqa “ko‘p yurishli” misollar berib bo‘lmaydi – abiturientning ko‘p vaqtini olib qo‘yadi.)

Arifmetika fani “matematika” deb o‘zgartirilganda, afsuski, yana bir foydali jihat – arifmetik mushohada deb ataladigan fikrlash yo‘sini ham “chiqindi”ga chiqib ketdi.

Maqola sarlavhasida “Qaydasan, Arifmetika?” deganda to‘rt amal nazarda tutilayotgani yo‘q. Algebra vositasi bilan osongina yechilsa ham, ammo algebrani jalb qilmay, sof arifmetik yo‘l bilan yechish talab etiladigan masalalar bor. (Qolaversa, arifmetika o‘qitilgan zamonda algebra usullari noma’lum bo‘lib, uni qo‘llay olmas edi). Keling, gap nima ustida borayotganini misollarda ko‘raylik.

Masala. Hovlida kuchuklar va tovuqlar yuribdi. Ularning boshlari soni jami 5 ta, oyoqlari soni 16 ta. Hovlida nechta kuchuk va nechta tovuq bor?

Bu misolni arifmetik usulni ham, algebrani ham qo‘llamay yechsa bo‘ladi: atigi bitta kuchuk bo‘lganda, tovuqlar to‘rtta bo‘lar, oyoqlar soni $4+2\cdot4=12$ ta chiqardi. Shu singari, kuchuklar ikkita bo‘lsa, oyoqlar jami $4\cdot2+2\cdot3=14$, kuchuklar uchta bo‘lganda esa $4\cdot3+2\cdot2=16$ – masala yechildi. (Bunda qo‘llangan usul birma-bir sanab chiqish deb yuritiladi.)

Masalani biroz murakkablashtiraylik. Hayvonot bog‘ida qushlar va yovvoyi hayvonlar parvarish qilinadi. Ularning boshlari jami 1222 ta, oyoqlari esa 3666 ta. Hayvonot bog‘ida nechta qush va nechta hayvon saqlanar ekan?

Bu safar yuqoridagi kabi chamalab yechimni topish oson emas. Avval algebrani qo‘llab ko‘raylik: qushlar x ta, hayvonlar y ta bo‘lsin. U holda shartga ko‘ra:

$x+y=1222$ – jami boshlar soni,

$2x+4y=3888$ – jami oyoqlar soni

– ikki noma’lumli ikkita tenglamadan iborat sistema hosil bo‘ldi. Uni yechish qiyin emas, albatta: birinchi tenglamaning har ikki tomonini 2 ga ko‘paytiramiz:

$$2x+2y=2444.$$

Buni ikkinchi tenglamadan hadma-had ayirsak, $2y = 3888 - 2444 = 1444$. Demak,

$$y = 722, \text{ u holda } x = 1222 - 722 = 500.$$

Qani, arifmetik usul nima berar ekan:agar 1222 taning hammasi qush bo‘lganda edi, oyoqlar soni 2444 ta bo‘lar, ya’ni berilganga $3888 - 2444 = 1444$ ta yetmas edi. Bitta hayvon bitta qushga nisbatan 2 ta ko‘p oyoqqa ega, demak, hayvonlar $1444:2=722$ ta ekan.

Ko‘rinib turibdiki, algebraik usuldan qisqa. Muhimi, qandaydir jozibasi bor.

Endi biroz murakkabroq masala olaylik (Skanavi). Bir ota-onaning uchta qizi bor. Qizlarning orasidagi farqlar 2 yosh. Onasi ularning jami yoshidan 10 yoshga katta. Ona bilan o‘rtancha qizning yoshlari qo‘shilsa, otaning yoshiga teng chiqadi. Agar barcha oila a’zolarining yoshini qo‘shganda yig‘indi, 90 ga teng bo‘lsa, ularning har birining yoshini toping.

Bu masalaga algebra to‘g‘ridan-to‘g‘ri qo‘llansa, besh noma’lumli beshta tenglama hosil bo‘ladi (qaysi noma’lum bilan kimning yoshi belgilangani ravshan):

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = x_2 + 2 \\ x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + 10 \\ x_5 = x_4 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 90 \end{cases}$$

Albatta, kamroq noma’lum bilan ham uddalasa bo‘ladi. Masalan, kenja qiz, ona va otaning yoshini uchta noma’lum qilib olish mumkin.

Faqat bitta noma’lum bilan ham yechish: x – kenja qizning yoshi bo‘lsa, u holda opalarining yoshi $x+2$ va $x+4$, demak, onaning yoshi

$$x+(x+2)+(x+4)+10=3x+16\,.$$

Bundan otaning yoshini topamiz:

$$(3x+16)+(x+2)=4x+18\,.$$

Masalaning oxirgi shartiga ko‘ra

$$x+(x+2)+(x+4)+(3x+16)+(4x+18)=90.$$

Garchi bu tenglama endi sof algebra usuli bilan yechilsa-da, unga yetib kelguncha, anchagina arifmetikaga xos mushohada yuritildi.

Bu yerda maqsad – masalani sof arifmetik yo‘l bilan (ya’ni, noma’lum kiritmay) yechish. Buning uchun avval mana bunday (xomaki) mushohada yuritamiz: kenja qizning yoshi 0 (u endi tug‘ilgan chaqaloq) bo‘lsin. U holda opalarining yoshi 2 va 4, onaning yoshi 16, otaning yoshi 18 chiqishi lozim edi. Jami esa 40 ga teng bo‘lib, 90 ga 50 yil yetmay qoladi. Endi kenja qizning yoshini 1 yilga orttiraylik. U holda opalarining yoshi ham shunchaga kattalashadi, onaning yoshi esa 3 yilga ortadi. Bundan otaning yoshiga 4 qo‘shilishi kelib chiqadi. Natijada oila a’zolarining jami yoshi 10 yilga ortadi. Biz esa 50 yilga orttirishimiz kerak. Demak, kenja qizning yoshi 5 ga teng ekan!

Bunday olib qarasa, arifmetik usul algebraga qaraganda soddaroq tuyuladi. Aslida unday emas. Buni izohlash uchun yuqoridagi masalalarning arifmetik yechilishini tahlil qilaylik. Birinchi masala yechimi 1222 ta jonivorning hammasi qush bo‘lsin, degan mulohazadan boshlandi. Nega shunday qilindi? Ikkinchi masalada esa sun’iy ravishda kenja qizning yoshi 0 ga teng bo‘lsin, deb olindi. Nega?

Bunday “nega”larga aniq javob berib bo‘lmaydi – har ikki holda ham arifmetik yechim muayyan g‘oyaga asoslandi. G‘oya esa kishining miyasida qanday tug‘ilishi hozirgacha aniqlangan emas. Hazil aralash “bunday g‘oyalarni maxsus farishta (matematik ilhom parisi) odamning qulog‘iga shivirlaydi” (hatto ba’zan uxlayotganida) deyishadi. Albatta, “matematika farishtasi” hammaga emas, bu fanni sevadigan, ayniqsa, masala-misol yechishga tirishadigan o‘quvchilargagina ilhom bag‘ishlaydi. Masalani arifmetik yo‘l bilan yechish – ana shu “hamkorlik”ka juda mos yumushdir.

O‘quvchilarga bu borada omad tilab, bir necha sof arifmetik yo‘l bilan yechish talab etiladigan masala havola etamiz.

1-mashq (Isaak Nyuton masalasi). Oyisi bolalariga 4 tadan qand bergan edi, uchta qand ortib qoldi. Beshtadan beray desa, ikkita qand yetmas ekan. Bolalar sonini toping.

2-mashq (qadimgi arab masalasi). Ikkita tuyadan 12 o‘ram jun qirqib olindi. Bunda birinchi tuyadan ikkinchisiga nisbatan uch marta ko‘p jun olingan. Tuyalardan necha o‘ramdan jun olingan?

3-mashq (Ya.I.Perelmanning “Qiziqarli matematika” kitobidan). Bozorga borgan dehqon 140 so‘mga to‘n, do‘ppi va etik sotib oldi. To‘n do‘ppidan 90 so‘mga qimmat, do‘ppi bilan to‘n birga etikdan 120 so‘mga qimmatroq bo‘lsa, dehqon sotib olgan narsalariga qanchadan to‘lagan?

4-mashq (“Yuz g‘oz haqida masala”). Ko‘lda suzib yurgan yolg‘iz bir g‘oz shimoldan janubga uchib borayotgan galani ko‘rib, ularga “Salom, yuz g‘oz!” deya qichqirdi. To‘daning sardori uning salomiga alik olgach, dedi: “Biz yuz g‘oz emasmiz. Agar galamizga yana shuncha g‘oz qo‘shilsa, keyin yarmimizcha va yarmimizning yarmicha g‘oz qo‘shilsa, nihoyat, sen ham qo‘shilsang, biz yuzta bo‘lamiz”. Galada nechta g‘oz uchib borayotgan edi?

5-mashq (Internet sayti: www.math-on-line.com). Novvoy xamir qordi. Undan 20 ta patir yoki 25 ta obinon yopish mumkin. Bitta patirga bitta obinonga qaraganda 10 g koʻp xamir ketadi. Novvoy qorgan xamirning ogʻirligi qancha?

6-mashq (Qadimgi xitoy masalasi). Yovvoyi oʻrdak janubiy dengizdan shimoliy dengizgacha 7 kunda uchib boradi, yovvoyi gʻoz shimoliy dengizdan janubiy dengizgacha 9 kunda uchib keladi. Ular har ikkisi bir paytda oʻz maqsadi tomon uchishga tushdi. Ular necha kundan soʻng uchrashadi?

7-mashq (A.P.Chexovning "Repetitor" hikoyasidan). Tikuvchi 540 soʻmga 138 metr qora va koʻk gazlama sotib oldi. Agar koʻk gazlamaning bir metri 5 soʻm, qorasiniki 3 soʻm tursa, tikuvchi har qaysi gazlamadan qanchadan sotib olgan?

8-mashq (Lev Tolstoy masalasi). Oʻroqchilar brigadasi ikki maydondagi pichanni oʻrishlari kerak edi. Ular kunning birinchi yarmida katta maydonda ishlashdi. Kunning ikkinchi yarmida esa brigada teng ikkiga boʻlinib, yarmi katta maydonni oʻrib tamomladi. Brigadaning ikkinchi yarmi kichik maydonda ishladi, ammo uni tugata olmadi. Qolgan pichanni ertasiga bir oʻroqchi kun boʻyi oʻrib bitirdi. Brigadada nechta oʻroqchi boʻlgan?

§ 5. Oʻta qiziqarli kvadratlar[6]

Matematikaning jozibali mavzularidan biri bu – qiziqarli kvadratlardir. Bunday kvadrat namunasi shaklda berilgan.

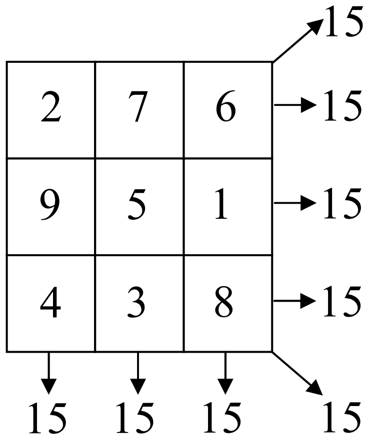
1 dan 9 gacha butun sonlardan tuzilgan bu kvadratning diqqatga molik jihati – sonlarni istalgan satr,

[6]FMI, 2011, №2.

istalgan ustun va ikkita diagonal bo‘yicha qo‘shib chiqsak, bir xil natija chiqadi:

$$2+7+6=15,\quad 9+5+1=15,$$
$$2+9+4=15,\quad 2+5+8=15$$

va hokazo.



Umuman, n-tartibli qiziqarli kvadrat bu – $n \times n$ o‘lchamli kvadrat bo‘lib, uning kataklariga 1 dan n^2 gacha butun sonlar shunday joylanishi kerakki, natijada har bir satrdagi n ta son qo‘shilsa ham, har bir ustundagi n ta son qo‘shilsa ham, ikkita diagonallarning har biridagi sonlar qo‘shilsa ham, bir xil yig‘indi chiqsin. Bu yig‘indi nimaga teng bo‘lishini aniqlash qiyin emas. Uni S_n deb belgilasak, kvadratdagi hamma sonlar yig‘indisi, bir tomondan nS_n ga teng, ikkinchi tomondan esa (arifmetik progressiya hadlari yig‘indisi uchun formula (yoki Karl Fridrix Gauss bolaligida topgan qoida)ga asosan

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2} \text{ga teng teng. Demak, } S_n=\frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Xususan, $S_3=\dfrac{3\cdot(3^2+1)}{2}=15,\ S_4=34,\ S_5=65,\ S_6=111,\ldots$.

Qiziqarli kvadratlar qadimda odamlarga allaqanday sirli tuyulib, hatto sehrli kvadratlar ham deb atalgan. Aslida qiziqarli kvadratlar – ko‘plab matematik tushunchalardan biri, xolos. Uning jozibasi esa “qanday tartibli qiziqarli kvadratlar qurish mumkin?” degan savolda mujassam. Hozirgi paytda 3 dan boshlab istalgan n uchun n-tartibli qiziqarli kvadratlar qurish mumkinligi isbotlangan. Biz bu haqda kelgusida hikoya qilish niyatidamiz. Hozir esa o‘quvchilar e’tiborini bir masalaga qaratmoqchimiz. Muallif tasodifan bir (matematikaga aloqasi yo‘q) kitobda qiziqarli kvadratlar bilan bog'liq quyidagi faktlarga duch kelib qoldi.

Qarangki, bu yerda tasvirlangan kvadratlar qiziqarli bo'lishdan tashqari qo'shimcha xossalarga ega ekan. Masalan, 4×4 kvadratni olsak, uning satrlari, ustunlari va diagonallarida joylashgan to'rttadan son yig'indisi bir xil, ya'ni 34 ga teng – bu qiziqarli degan sifatning sharti. Lekin bundan tashqari, unda

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

a) to'rtta burchakda joylashgan 2×2 kvadratchalardagi sonlar yig'indisi va markazidagi shunday kvadratchadagi sonlar yig'indisi ham 34 chiqadi. Masalan,

$$4+14+9+7=34, \quad 15+1+6+12=34 \text{ va hokazo.}$$

b) kvadratning markaziga nisbatan bir xil joylashgan sonlar to'rtliklari ham yig'indida 34 ni beradi: $4+1+16+13=34$, $14+12+3+5=34$, $15+8+2+9=34$, $7+6+11+10=34$.

c) markazga nisbatan qarama-qarshi joylashgan sonlar yig'indilari ham o'zaro teng chiqar ekan:

$$4+13=14+3=15+2=1+16=9+8=7+10=6+11=12+5=17.$$

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	9	12	15

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Mashq. Yuqoridagi 3-tartibli qiziqarli kvadratning qo'shimcha xossalarini aniqlang.

Mashq. Berilgan 5 va 6-tartibli kvadratlar qiziqarli ekanligiga ishonch hosil qiling, so'ng ularning qo'shimcha xossalarini aniqlang.

Afsuski, 5-tartibli kvadrat uchun b) va c) xossalar o'rinli bo'lgani holda, 6-tartibli kvadrat uchun ular o'rinli emas. Shunisi ajablanarliki, eslatilgan kitobda tartibi 7, 8 va 9 ga teng qiziqarli kvadratlar ham keltirilgan va ular b) va c) qo'shimcha xossalarga ega! Bu yerda 7-tartibli kvadratni keltirish bilan cheklanamiz:

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	19	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	9	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Yuqorida bayon qilinganlardan shunday masalalar tug'iladi:

1-masala (yengil). b) va c) xossalarga ega 6-tartibli qiziqarli kvadrat quring.

2-masala (murakkabroq). 3 dan boshlab ixtiyoriy n uchun b) va c) xossalarga ega n-tartibli kvadrat mavjudligini isbotlang.

§ 6. Yashiringan yozuv[7]

Siz gazeta-jurnallarning koʻngilochar sahifalarida quyidagicha boshqotirmalar bilan toʻqnashgansiz, albatta:

“Mana bu yozuv”ga yashirilgan hikmatni oʻqing:

2	3	5	7	11		13	17	1	5	4	6	,	
2	4	11	12	11	3		14	15	16		18	5	10

3	8	7	5	6	11	10		2	3	5	7	11	
16		20	5	7	11	3	11	4		20	5	7	11

Odatda bu topshiriqqa qoʻshimcha “kalit” soʻzlari ilova qilinadi – xuddi shu usulda shifrlangan bir necha soʻz ta’riflanadi. Masalan

16	15	17	11	16	18	2	4	5

– muhofaza qilinadigan tabiat maydoni.

Bu soʻz topilsa, undagi raqamlarga mos harflar aniqlanadi va h.k.

Toʻgʻrisini aytganda, bunday qoʻshimcha yordamchi soʻzlar matematiklar uchun koʻpincha ortiqcha – matematikning mantigʻi ana shu “kalit soʻzlar” oʻrnini bemalol bosadi. Buni bir “hayotiy” misolda ko’raylik. Muallif disketdan fayl ochganda kompyuter ekranga mana bunday yozuv chiqardi:

Ýíäè ìàíà áó òåîðåìà áóð÷àêëàðè æàì, òîìîí-ëàðè æàì ¢çàðî òåíã ęàâàðèę ê¢ïáóð÷àê ÷èíäàí ìóíòàçàì äåá àòàëèøè ìóìêèíëèãèíè îęëàéäè.

Bu kabi hodisa bilan kitobxonlar oʻzlari ham yoʻliqqan boʻlishlari mumkin. Buning sababi – matn kiritilgan klaviatura drayveri bilan uni “oʻqigan” boshqa kompyuter klaviatura drayverining turlicha ekanligidir.

[7]FMI, 2007, №1.

Bu yerda, yuqoridagi misoldan farqli, yordamchi “kalit so‘zlar” yo‘q. Bu kabi masalalar bilan matematikaning katta amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan sohasi – kodlashtirish nazariyasi shug‘ullanadi. Bu nazariyaning shunday teoremasi bor.

Kodlashtirishda har bir harf bir timsol bilan almashtirilgan bo‘lsin. (Bu – kodlashtirishning eng sodda usuli albatta. Masalan, kodlashtirish uchun birinchi misolda sonlar, keyingi misolda – butunlay boshqa timsollar qo‘llangan, boshqa holda harflarning o‘rni almashtirilgan bo‘lishi mumkin va h.k.) *U holda matn qaysi tilda ekanligi ma’lum va yetarlicha uzun bo‘lsa, uning kalitini topish mumkin.*

Bu teoremani tadbiq etish uchun birinchi misolning uzunligi yetmasligi mumkindir, lekin uni ikkinchi misolga qo‘llash mumkin. Buning uchun avvalo, matn o‘zbekcha ekanligini nazarda tutish lozim. So‘ng ishni o‘zbek tilidagi yozuvlarga xos mana bu xususiyatga murojaat etishdan boshlash kerak: “и” va “а” harflari eng ko‘p uchraydi. Qaralayotgan matnda **à** belgisi o‘n olti marta, **è** belgisi esa o‘n marta kelyapti. Demak, ulardan biri “а”, ikkinchisi “и” bo‘lishi kerak. Yana ham aniqlashtirish uchun, matnning mana bu bo‘lagiga diqqat qilamiz:

áóð÷àêëàðè æàì, òîììíëàðè æàì

Ostiga chizilgan **ëàðè** birikma takrorlanashiga ko‘ra qo‘shimcha bo‘lishi kerak. U “-нинг”, “-лиги” yoki “-ники”emasligi ravshan. “-даги” yoki “-лари” bo‘lish ehtimoli ko‘proq. Bundan tashqari, **æàì** so‘zining vergul bilan takrorlanishi bu yerda uyushiq bo‘laklar qatnashayotganini ko‘rsatadi. Bu mulohazalar **æàì** birikmasi “ҳам” so‘zi bo‘lishi kerak, degan xulosaga kelishga asos beradi. (Bu hozircha faqat faraz, albatta, u hali tasdiqlanadimi yoki yo‘qmi – noma’lum.) U holda **è** belgisi “и” ekan. Xullas,

æ	**à**	**ì**	**è**																					
ҳ	а	м	и																					

deb turaylik. Bu ma’lumotlarni matnga qo‘yib chiqamiz:

Ýíäи ма**íà** **áó** **òåîðå**ма **áóð÷àêëàð**и ҳам, **òî**-м**îíë**а**ð**и ҳам **¢ç**а**ðî** **òåíã** **ę**а**â**а**ð**и**ę** **ê¢ïáóð÷àê** **÷**и**í**-**ä**а**í** м**óíò**а**çà**м **äåá** а**ò**а**ë**и**ø**и м**ó**м**ê**и**í**ë**и**ã**и**í**и **îęë**а**é**ä**и.

O‘zbek tilida gap odatda kesim bilan tugashi, kesim esa ko‘pincha fe’l bilan ifodalanishi ma’lum. Shuning uchun “**ä**” belgiga “д” harfi mos kelsa kerak. U holda birinchi so‘z “-ди” harflari bilan tugaydi. Lekin odatda so‘z boshida fe’l kelmaydi (matn she’r emasligi ko‘rinib turibdi). Ikkinchi so‘z uchun atigi ikkita imkoniyat bor: “маза”, “мана”. Bularni oldingi mulohaza bilan qiyoslasak, **í** belgisi “н” bo‘lishi lozim, degan xulosa chiqaramiz. Qolaversa, bu belgi unli emas – u ikkinchi so‘zda ikkita unli o‘rtasida kelmoqda. Bundan tashqari, u matnda 8 marta uchraydi – bu alomat ham “н” ga xos, “з” esa nisbatan kam qo‘llanadi.

Matn boshidagi so‘zning birinchi harfi unli ekanligi ravshan. U boshqa uchramaydiki, bundan u “ё”, “э”, “ю”, “я” unlilaridan biri, degan xulosa chiqadi. Demak, **Ý** belgisini “Э” deya olamiz. U holda uchinchi so‘z yo “бу”, yoki “шу” bo‘lishi kerak. Har qalay, **ó** belgisi “у” ligi ancha aniq:

æ	**à**	**ì**	**è**	**ä**	**í**	**Ý**	**ó**																	
ҳ	а	м	и	д	н	Э	у																	

Энди мана **á**у **òåîðå**ма **á**у**ð÷**акла**ð**и ҳам, **òî**м**î**н-ла**ð**и ҳам **¢ç**а**ðî** **òå**н**ã** **ę**а**â**а**ð**и**ę** к**¢ïá**у**ð÷à**к **÷**индан мун**ò**а**ç**ам д**åá** а**ò**а**ë**и**ø**и мумкин**ë**и**ã**ини **îę**ла**é**ди.

Shunda **мумкинёиãини** so‘zining o‘zagi “мумкин”, qo‘shimchasi esa “-лиги” ekanligi ravshanlashdi.

æ	**à**	**ì**	**è**	**ä**	**í**	**Ý**	**ó**	**ê**	**ë**	**ã**														
ҳ	а	м	и	д	н	Э	у	к	л	г														

Энди мана áу òåîðåма áуð÷аклаðи ҳам, òîмîн-лаðи ҳам ¢çаðî òåнã ęаâаðиę к¢ïáуð÷àк ÷индан мунòаçам дåá аòаëиøи мумкинëиãини îęлаéди.

Endi “ҳам” bog‘lovchisi oldidagi uyushiq bo‘laklar qo‘shimchasi “-лари” ekanligi ko‘rinib turibdi. Bundan tashqari, ko‘p uchraydigan unlilardan “e”, “o” va “ў” harflariga mos timsollar hali topilmadi. Bu unlilar uchun nomzod belgilar: **î** (**òîмîнлаðи** so‘zi asosida), **¢(к¢ïáуðï÷ак) билан å (дåá).** Агар **òîмîнлаðи** so‘ziga qarasak, unda **î** belgisi ikki marta keladi. Ammo o‘zbek tilida “e” va “ў” unlilari bir so‘zda ikki marta kelishi juda kam uchraydi. Shunga asoslanib, **î** belgisi “o” bo‘lsa kerak deb hisoblaymiz:

æ	**à**	**ì**	**è**	**ä**	**í**	**Ý**	**ó**	**ê**	**ë**	**ã**	**ð**	**î**										
ҳ	а	м	и	д	н	Э	у	к	л	г	р	о										

Энди мана áу òåорåма áур÷аклари ҳам, òомон-лари хам ¢çаðо òåнã êаâариê к¢ïáур÷ак ÷индан мунòаçам дåá аòалиøи мумкинлигини оêлаéди.

Agar biz matn matematikaga oid ekanligini bilsak, uni endi bemalol o‘qiy olamiz. Hozircha biz buni bilmaymiz, deb mulohazalarni davom ettiraylik. O‘zbek tilida “мумкинлиги” so‘zidan oldin fe’lning birgalik mayli kelishi odatiy hol. Shuningdek, **ò**омон so‘zining birinchi harfi “c” ekanligi unchalik matnga yopishmaydi (“сомон” so‘zi “-лари” qo‘shimchasi bilan deyarli ishlatilmaydi). Demak, **ø** belgisi –“ш”, **ò** esa –“т”. Bunga ko‘ra,

Æ	**à**	**ì**	**è**	**ä**	**í**	**Ý**	**ó**	**ê**	**Ë**	**ã**	**ð**	**î**	**ø**	**ò**								
Ҳ	а	м	и	д	н	Э	у	к	Л	г	р	о	ш	т								

Энди мана **á**у т**å**ор**å**ма **á**ур÷аклари ҳам, томонлари ҳам **¢ç**а**ð**о т**å**н**ã** **ê**а**â**ари**ę** к**¢ï****á**ур÷ак ÷индан мунта**ç**ам д**åá** аталиши мумкинлигини о**ę**ла**é**ди.

Мунтаçам so‘zi aslida “мунтазам” ekanligi, bu hamda “томонлари” so‘zi hisobga olinsa, **á**ур÷ак so‘zi aslida бурчак ekanligi ayonlashadi:

æ	**à**	**ì**	**è**	**ä**	**í**	**Ý**	**ó**	**ê**	**ë**	**ã**	**ð**	**î**	**Ø**	**ò**	ç	**á**	÷					
ҳ	а	м	и	д	н	Э	у	к	л	г	р	о	щ	т	з	б	Ч					

Энди мана бу т**å**ор**å**ма бурчаклари ҳам, томонлари ҳам **¢**за**ð**о т**å**н**ã** **ê**а**â**ари**ę** к**¢ï**бурчак чиндан мунтазам д**å**б аталиши мумкинлигини о**ę**ла**é**ди.

Endi **å** belgisi bilan “е” harfi belgilanganiga shubha yo‘q (д**å**б so‘ziga asosan). U holda so‘zning oxirgi harfi “г” bo‘lishi kerak:

Энди мана бу теорема бурчаклари ҳам, томонлари ҳам **¢**заро тенг **ê**а**â**ари**ę** к**¢ï**бурчак чиндан мунтазам деб аталиши мумкинлигини о**ę**ла**é**ди.

Nihoyat matn mavzusi oydinlashdi – uning geometriyaga oidligi, yana ham aniqroq aytganda ko‘pburchaklar to‘g‘risida ekanligi yaqqol ko‘rinib turibdi. Shunday ekan, **¢** belgisi “ў”, **ï** esa “п” harfidan iborat. Xo‘sh, **ęаâаpиę** so‘zi nima bo‘lishi mumkin? U ko‘pburchakning sifati ekanligi ravshan. Bundan tashqari ayni bir harf bilan ham boshlanib, ham tugayapti. Shuning uchun bu harfni “?” deya olamiz. O‘rtadagi harf “б” emas, demak, “в”. O‘rniga qo‘ysak, о**ę**ла**é**ди so‘zda atigi bir noma’lum belgi qoladi. Uning “й” ekanligini payqash qiyin emas. Nihoyat, kompyuterning kodlash sistemasi ochildi:

æ	**à**	**ì**	**è**	**ä**	**í**	**Ý**	**ó**	**ê**	**ë**	**ã**	**ð**	**î**	**Ø**	**ò**	ç	**á**	÷	**¢**	**ï**	**ê**	**â**	**é**
ҳ	а	м	и	д	н	Э	у	к	л	г	р	о	щ	т	з	б	ч	ў	п	қ	в	й

Matn esa:

Энди мана бу теорема бурчаклари ҳам, томонлари ҳам ўзаро тенг қавариқ кўпбурчак чиндан мунтазам деб аталиши мумкинлигини оқлайди.

Bu jumlada qaysi teorema haqida so‘z ketayotganiga kelsak, u bilan kelgusida tanishamiz. O‘quvchilarga esa mana shu kabi matnlarni kodlab, uni ochish bo‘yicha bir-birlari bilan musobaqa qilishlarini tavsiya etamiz – matematika uchun muhim bo‘lgan bu mashq mantiqiy va kombinatorik mushohada qobiliyatini rivojlantiradi, ham o‘zbek tilidagi yozuvlarga xos xususiyatlarga oid bilimlarni mustahkamlaydi. Muayyan mashqdan so‘ng, so‘zlar u qadar ko‘p bo‘lmasa ham, kodlangan jumlalarni o‘qiy olish qobiliyati shakllanadi. Buni mavzumiz boshida keltirilgan, ammo ochib berilmagan misolni yechib aniqlash mumkin.

§ 7. Mumkin – mumkin emas[8]

Matematikada “mumkinmi?” degan savol bilan bog‘liq masalalar muhim o‘rin tutadi. Bu toifaga mansub ancha mashhur masalalardan bir turkum:

8 ta farzinni shaxmat taxtasi ustida bir-birini urolmaydigan qilib joylashtirish mumkinmi?

Shaxmat taxtasini har bir katakda roppa-rosa bir martadan bo‘ladigan qilib ot bilan aylanib chiqish mumkinmi?

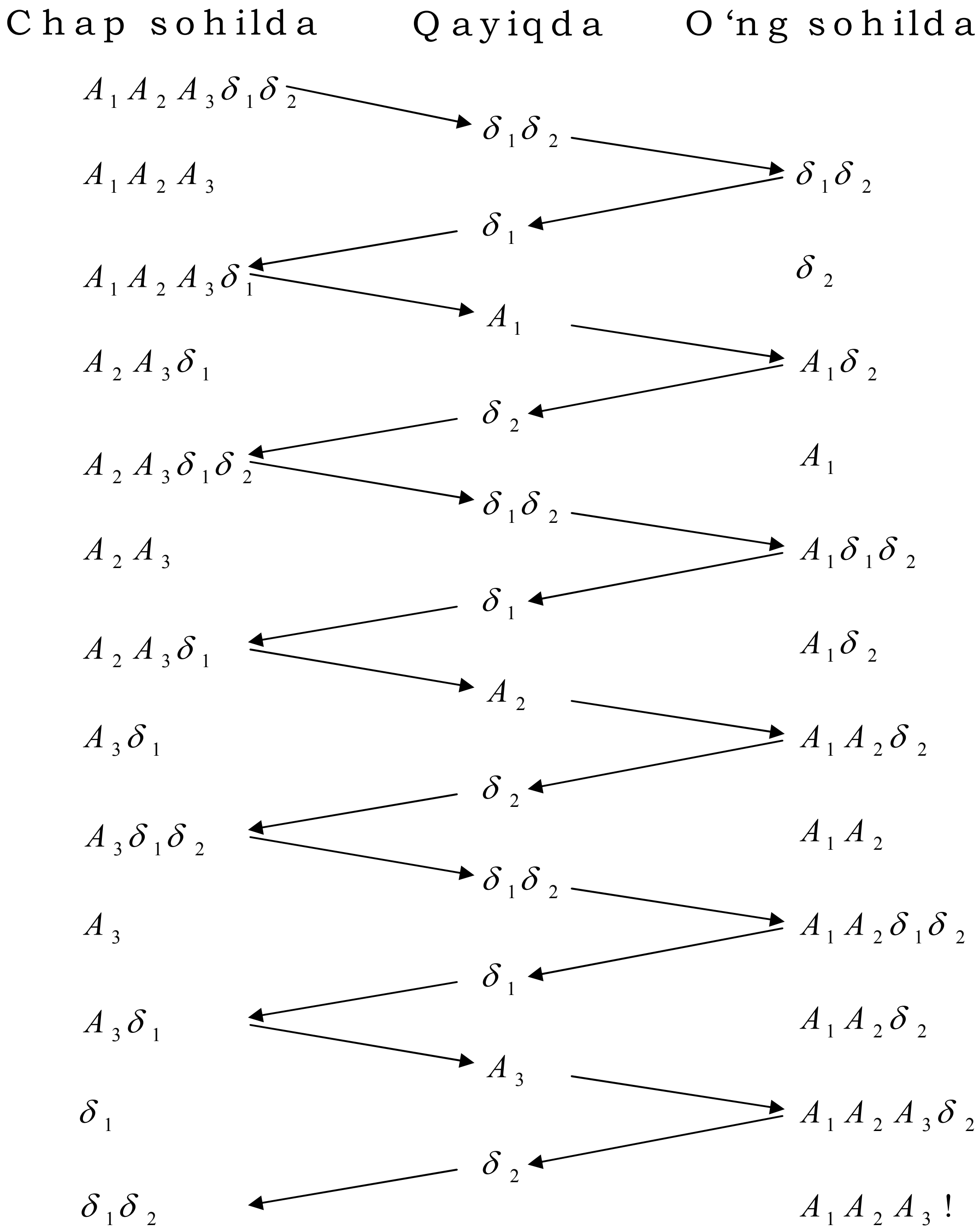
Shaxmat taxtasining $a1$ va $h2$ (ya’ni bosh diagonalning ikki uchidagi) kataklari qirqib tashlangan. Qolgan 62 katakni 31 ta domino toshi bilan (har biri roppa-rosa ikki katakni qoplaydigan) to‘ldirib chiqish mumkinmi?

Bunday masalalarning bosh xususiyati – javob qanaqa bo‘lishi oldindan ma’lum emasligidir. “Balki mumkindir” degan faraz bilan yechim izlay boshladik, deylik. Bir

[8]FMI, 2013, №5.

necha urinishdan so‘ng u topila qolsa-ku nur ustiga nur. Ammo topilmasa-chi? Balki javob ijobiydir-u, ammo biz topa olmayotgandirmiz? Yoki umuman topilmas?

Aslida aynan mana shu jarayon – javobi oldindan ma’lum bo‘lmagan masalani yechish haqiqiy ilmiy tadqiqot mulohazasini eslatadi (modellashtiradi). Shuni nazarda tutib quyidagi masalalarni qaraylik.



Masala (A): 3 askar daryoning chap sohilidan o‘ng sohiliga o‘tishi kerak. Daryoning shu joyida ikki bola kichkinagina qayiqda suzib yurgan edi. Ular askarlarga yordam berishadigan bo‘ldi. Afsuski, qayiq atigi bitta askarni ko‘tara olar, yoniga bir bolakay o‘tirsa ham ko‘tara olmas ekan. Bolalar askarlarni u sohilga o‘tkazib qo‘yishi mumkinmi?

Javob: Ha. Yechimni sxema ko‘rinishida tasvirlash qulay (askarlar A_1, A_2, A_3, bolalar b_1, b_2 deb belgilangan).

Keyingi sahifaga qarang: Masala yechimidan ko‘rinib turibdiki, askarlar soni 4 ta, 5 ta va h.k. – istalgancha bo‘lganda ham bolalar ularni daryodan o‘tkazib qo‘yishi mumkin: qayiq to‘rt marta sohildan sohilga suzib o‘tganda chap sohildagi askarlar soni bittaga kamayib boradi.

Endi shunga o‘xshash quyidagi masalani ko‘raylik:

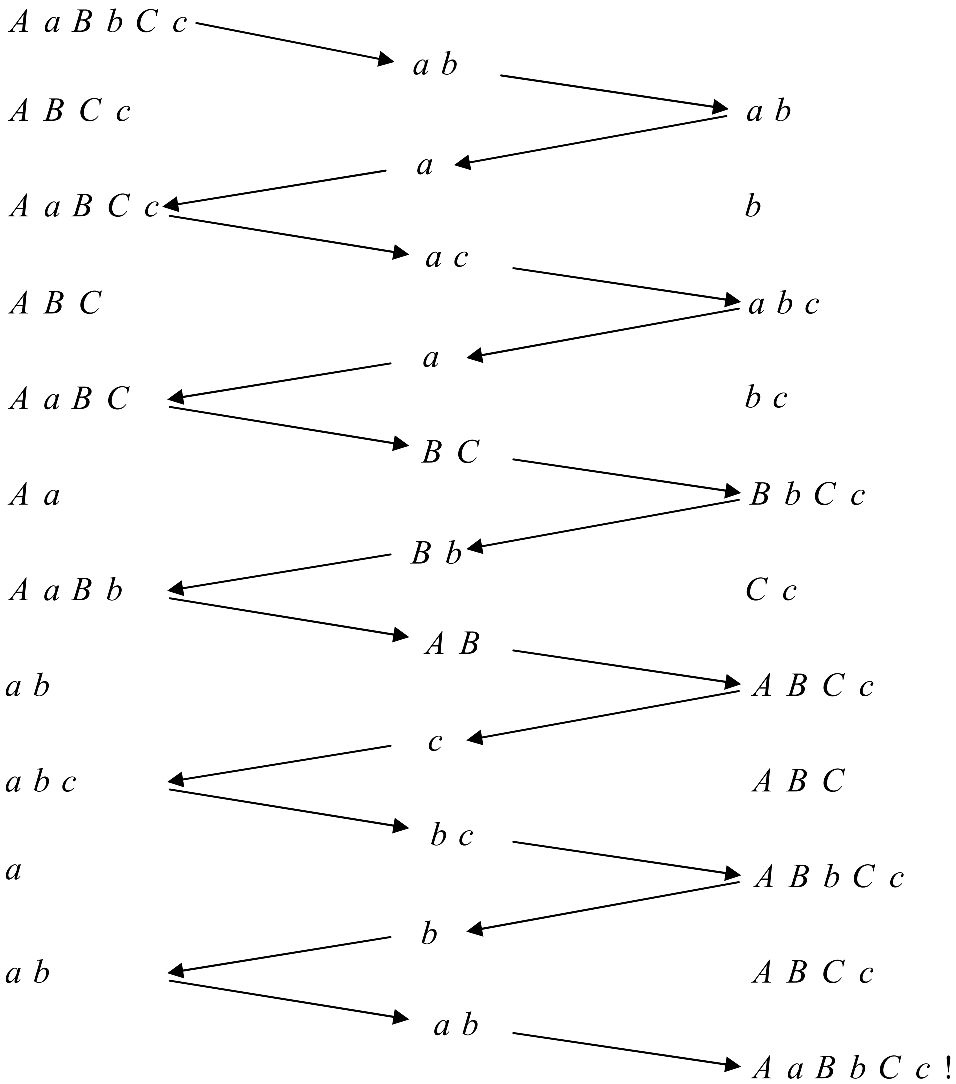
Masala (B). Uch juft er-xotin daryoning chap sohilidan o‘ng sohiliga o‘tishlari lozim. Ularning ixtiyorida faqat ikki kishini ko‘tara oladigan qayiq bor. Buning-ku qiyin joyi yo‘q edi-ya, ammo xotinlardan biri “men yonimda erim bo‘lmasa, boshqa erkaklar bilan qola olmayman” deb turib oldi. Qolgan ikki ayol ham unga qo‘shildi: “Men ham, men ham”. Bundan erkaklarning boshi qotdi: ayollar qo‘ygan shartga amal qilib, daryodan o‘tish mumkinmi?

Javob: Ha. Yechimni yana sxema bilan tasvirlaymiz (erkaklar A, B, C, ularning xotinlari mos ravishda a, b, c deb belgilangan).

Yana, masalani umumlashtirib ko‘rish tabiiy. Eng kichik qadamdan boshlaylik: (B) masalani to‘rt juft er-xotin uchun yechish mumkinmi?

Bu safar urinish natija bermaydi. Urinishlar qayta va qayta takrorlansa ham masala yechilmagach, xohlaymizmi, yo‘qmi – faraz tug‘iladi: balki mumkin emasdir? Agar shunday bo‘lsa, buni qanday asoslash mumkin? Axir 100 marta urinishda ham yechilmasa, bu “masalani umuman yechib bo‘lmaydi” degan tasdiqqa asos bo‘la olmaydi-ku!

Chap sohilda Qayiqda O‘ng sohilda

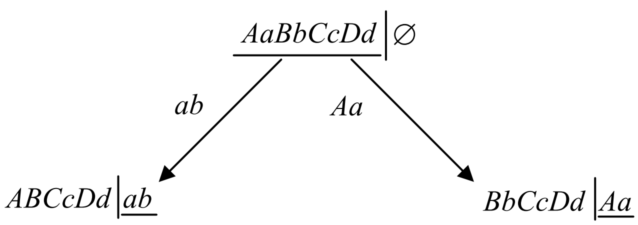


Bunday hollarda ham yuqoridagi kabi sxema qo‘l keladi. Faqat endi har qadamda mumkin bo‘lgan yurishlardan birini emas, barchasini tasvirlab borish lozim.

Aytaylik, 1-qadamda chap sohildan o‘ng sohilga o‘tishda qanday variantlar bo‘lishi mumkin?

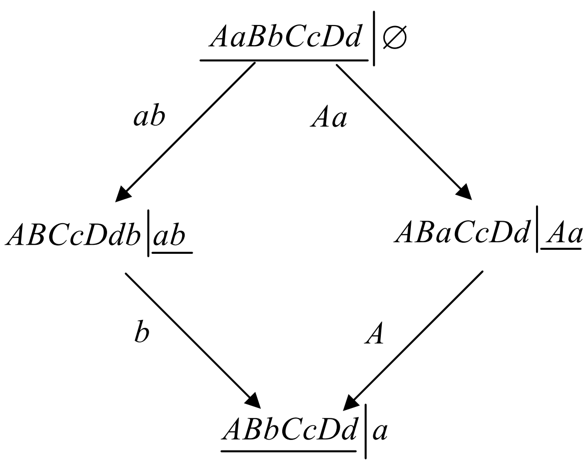
1) bir erkak
2) bir ayol
3) ikki erkak
4) ikki ayol
5) er-xotin
6) er-xotin bo‘lmagan bir ayol va bir erkak.

1, 3 va 6 variantlar yaroqsiz, 2 variant esa befoyda. Demak, to‘rtinchi va beshinchi variant qoladi (bu yerda o‘qyoy qayiq qaysi



tomonga suzishini bildirmaydi, faqat kimlar suzib o‘tishini ko‘rsatadi, xolos; qayiqning yo‘nalishini u qaysi qadamda qaysi tomonda ekanligiga qarab aniqlash mumkin – qayiq turgan tomon ostiga chizilgan):

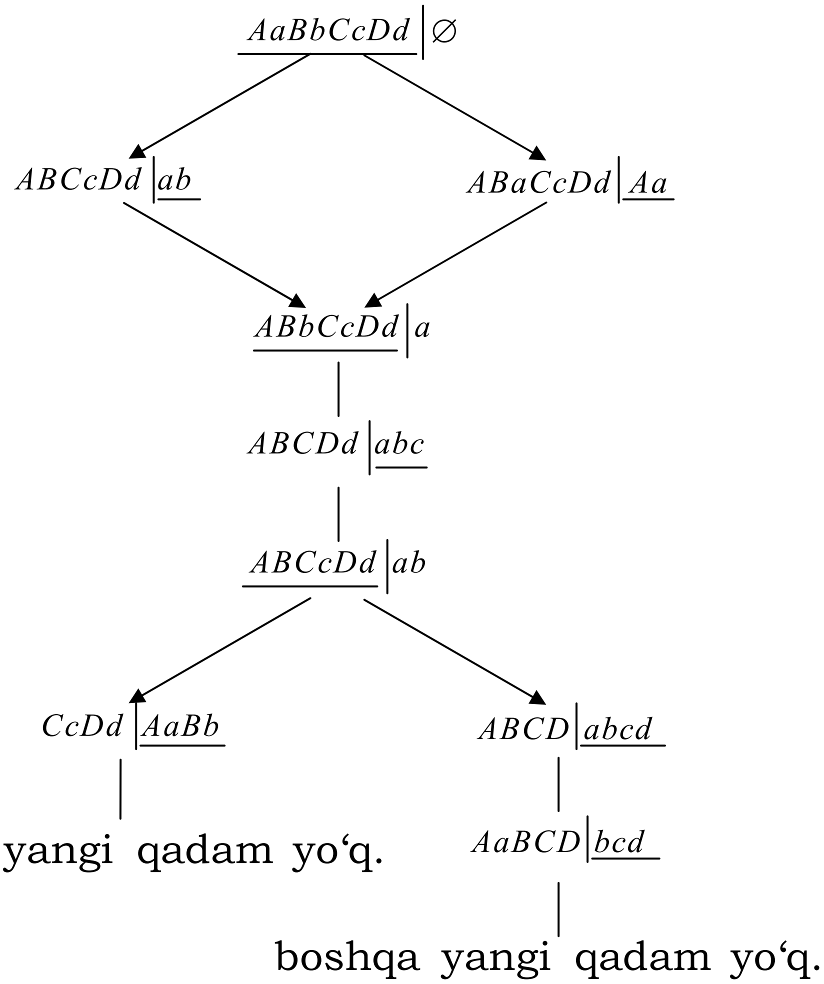
2-qadamda qayiq ortga qaytishi lozim. Ikki kishi qaytib o‘tishi befoyda, albatta. Yuqoridagi sxemaning o‘ng variantida



ayolning bir o‘zi qaytishi mumkin emas. Demak, har ikki variantda ham o‘ng sohilda bir ayol qolishi lozim:

(Chap variantda a o‘tadimi yo b – baribir).

Mulohazalarni shu tarzda davom ettirib quyidagi sxemaga kelamiz:



Qanday yurishlar qilinmasin, yo avvalgi holatlardan biriga qaytiladi yoki taqiqlangan holatga kelinadi. Demak, $\varnothing | AaBbCcDd$ holatga kelish mumkin emas.

Mashq. Agar qayiq uch kishini ko‘tara olsa, 5 juft er-xotin narigi tomonga o‘ta oladimi? 6 juft-chi?

Mashq. Agar qayiq to‘rt kishini ko‘tara olsa, nechta juft er-xotin u sohilga o‘ta oladi?

Endi maqolada berilgan masalalarga kelaylik.

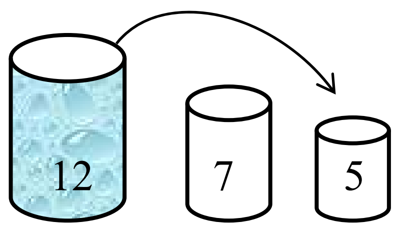
Mashq. 1 va 2 masalada javob “mumkin”, 3-masalada esa “mumkin emas” bo‘lishini asoslang**.**

§ 8. Mumkin bo‘lsa, necha qadamda?[9]

Mashhur fransuz matematigi va fizigi Deni Simon Puasson (1781-1840) bolaligida quyidagi masala tufayli fanga qiziqib qolgan ekan: 12 litrli idishda to‘la ichimlik bor. Uni 7 va 5 litrli bo‘sh idishlar vositasida teng ikkiga bo‘lish mumkinmi?

Masalaning javobini ichimlikni biridan ikkinchisiga quyib ko‘rib topsa bo‘ladi: “Ha, mumkin”. Bunda kimdir topshiriqni 15 qadamda, kimdir 13 qadamda hal qiladi (har bir qadamda yo bir idish bo‘shaguncha boshqasiga ag‘darilishi, yoki ikkinchi idish to‘lguncha quyilishi lozim.)

Quyidagi sxemada 12 qadamli yechim tasvirlangan (1-qadamdagi amal yoy bilan ko‘rsatilgan):



1)	7	0	5
2)	7	5	0
3)	2	5	5
4)	2	7	3
5)	9	0	3
6)	9	3	0
7)	4	3	5
8)	4	7	1
9)	11	0	1
10)	11	1	0
11)	6	1	5
12)	6	6	0

Mashq. 1. Idishlar hajmi 12, 8, 5 yoki 12, 7, 4 bo‘lganda Puasson masalasini yeching.

2. Idishlar hajmi 12, 7 va 5 bo‘lganda ichimlikni teng uchga bo‘lish mumkinmi?

Endi shunday savolni qaraylik: Xo‘sh, Puasson masalasi 12 qadamda yechilar ekan, bundan ham qisqaroq yechim bormi? Umuman, eng qisqa yechim necha qadamdan iborat? Tabiiyki, bunday savolga masalani sinab ko‘rish usuli bilan yechish orqali javob berib bo‘lmaydi, har qancha sinab ko‘rgan bilan, balki, yana ham

---

[9] FMI, 2013, №6.

qisqaroq yechim bordir, degan shubha qolaveradi.

Eng qisqa yechimni topish uchun, avvalgi maqoladagi singari mumkin bo‘lgan har bir qadamni o‘zida aks ettiradigan sxema quramiz.Aytaylik, birinchi qadamda faqat ikki variant bo‘lishi mumkin:

$$12, 0, 0 \to 7, 0, 5 \text{ va } 12, 0, 0 \to 5, 7, 0$$

O‘z navbatida chapdagi variantni uch usulda davom ettirsa bo‘ladi:

12, 0, 0

↙ ↓ ↘

12, 0, 0 5, 7, 0 7, 0, 5

Bulardan birinchi variant foydasiz (dastlabki holatga qaytaradi).

Shu yo‘sinda har bir holatni necha usulda davom ettirish

12, 0, 0

↙	↘
5, 7, 0 ↓	7, 0, 5 ↓
5, 2, 5 ↓	7, 5, 0 ↓
10, 2, 0 ↓	2, 5, 5 ↓
10, 0, 2 ↓	10, 0, 2 ↓
3, 7, 2 ↓	2, 7, 3 ↓
3, 4, 5 ↓	9, 0, 3 ↓
8, 4, 0 ↓	9, 3, 0 ↓
8, 0, 4 ↓	4, 3, 5 ↓
1, 7, 4 ↓	11, 0, 1 ↓
1, 6, 5 ↓	11, 1, 0 ↓
6, 6, 0 !	6, 1, 5 ↓
11-qadamda	6, 6, 0
	12-qadamda.

variantlarini birma-bir qarab chiqib, yuqoridagi yakuniy sxemaga ega boʻlamiz (chap ustunda har bir holatda mumkin boʻlgan barcha variantlar koʻrsatilgan, ortiqcha va befoyda variantlar uzlukli chiziq bilan tasvirlangan, oʻng ustunda esa ortiqcha variantlarga mos chiziqlar tushirib qoldirilgan).

Bu sxemadan masalani 11-qadamda yechish mumkinligi va bundan qisqaroq yechim mavjud emasligi kelib chiqadi.

§ 9. "Yalqovcha" kasr qisqartirish[10]

Darslardan birida oʻqituvchi qobiliyati binoyidek, ammo yalqovlik boʻyicha sinfda birinchi boʻlgan oʻquvchini doskaga chiqardi-da,

$$\frac{26}{65}$$

kasrni qisqartirishni buyurdi. Oʻquvchi oʻylanib ham oʻtirmay, 6 larni oʻchirib mana bunday qilib "qisqartirib" tashladi:

$$\frac{26}{65}=\frac{2}{5}.$$

Butun sinf gurillab kulib yubordi – bunaqa antiqa qisqartirishni hech koʻrmagan edi-da. Lekin "Matematik" laqabli oʻquvchining luqmasi hammani lol qildi:

– Javobi toʻgʻri!

Chindan ham

$$\frac{26}{65}=\frac{2\cdot 13}{5\cdot 13}=\frac{2}{5}.$$

[10]FMI, 2006, №5.

– Bu, albatta, tasodif, – izoh berdi o‘qituvchi. U avval misolni boshqasiga almashtirib, darsni reja bo‘yicha davom ettirmoqchi bo‘ldi. Lekin o‘quvchilarning ko‘zida chaqnab turgan qiziqishni sezib fikridan qaytdi. “Mayli, bitta darsda dasturdan chetga chiqsak chiqibmiz-da, tekshiradigan komissiya yeb qo‘ymas”, – o‘yidan o‘tkazdi u. So‘ng sinfga murojaat qildi:

– Xo‘sh, nima deysizlar, shunaqa usulda qisqartirsa bo‘ladigan kasrlar yana bormi?

– Izlaylik, izlaylik, – jonlanib chug‘urlashdi bolalar. Axir kasrlarni qisqartirish, ko‘paytuvchilarga ajratish, ifodalarni soddalashtirish kabi mashqlarni bajaraverib, allaqachon “matematika – zerikarli fan”– degan xulosaga kelib bo‘lishgan, “yalqovcha” qisqartirish esa o‘zining sirliligi bilan ularning e’tiborini tortgan edi.

– Qani, bo‘lmasa, nimadan boshlaymiz?

– “Matematik” chiqsin. O‘zining “unvon”ini oqlasin-da, – dedi o‘quvchilardan biri. Boshqalar uni quvvatladi. “Matematik” shoshilmay sinf taxtasiga yaqinlashdi – yo‘l-yo‘lakay masalani yechish rejasini tuza boshlagan edi.

– Ikki xonali sonlarni izlashim kerakmi?

– Hozircha, – miyig‘ida kulib qo‘ydi o‘qituvchi.

Shundan so‘ng taxtada mana bunday yozuvlar paydo bo‘ldi:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}, \quad \frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}.$$

$$(10a+b)c = (10b+c)a,$$

$$10ac + bc = 10ab + ac,$$

$$9ac + bc = 10ab,$$

$$(9a+b)c = 10ab. \qquad (1)$$

So‘ng “$a = b$ bo‘lgan holni chiqarib tashlaymiz: qizig‘i yo‘q”, –dedi. Shu joyda o‘qituvchi aralashdi: – qizig‘i bormi, yo‘qmi, baribir tashlab ketish yaxshi emas. Bu holni uyga vazifa sifatida qoldiramiz.

Mashq. “Yalqovcha” usulda qisqartirish mumkin bo‘lgan $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$ ko‘rinishdagi barcha kasrlarni toping.

– Oxirgi yozgan (1) tengligimizdan ko‘rinib turibdiki, – davom etdi “Matematik”, – yo $9a+b$ ifoda yo c beshga bo‘linishi kerak. Bu yerda a va b turli raqamlar bo‘lgani uchun birma-bir qarab chiqish qiyin emas.

– To‘g‘ri, – yordamga keldi o‘qituvchi, – faqat hisoblash oson bo‘lishi uchun $9a+b$ ni kichikroq ifoda bilan almashtirib olish mumkin emasmi?

– Ha, bo‘lar ekan: $9a+b$ ifoda 5 ga bo‘linsa, $4a+b$ ham 5 ga bo‘linishi shart. a va b ga birma-bir qiymatlar beramiz-da, $4a+b$ ifoda beshga bo‘linadigan hol uchun c ning qiymatlarini topamiz. Ular

$$c=\frac{10ab}{9a+b}$$

formuladan topiladi.

– Voy-bo‘, – vahima qildi kimdir. – c kasr bo‘lib qolyapti-ku!

– Albatta, hisoblaganda c kasr chiqadigan hollarni tashlab yuboramiz, – tinchlantirdi o‘qituvchi. Qani, “Matematik”, boshla.

– Agar $a=1$ bo‘lsa, b faqat 6 bo‘lishi mumkin: $9a+b=9+6=15.$ U holda c ning qiymati

$$c=\frac{10ab}{9a+b}=\frac{10\cdot1\cdot6}{9\cdot1+6}=4$$

– Yaraydi.

– Yaxshi, – o‘qituvchi sinfga murojaat qildi. – Vaqtni tejash uchun a ning qiymatlarini bo‘lib olib hisoblaymiz. Har kim sinf jurnali ro‘yxatidagi nomeri qanday raqam bilan tugasa, a ning shu qiymati uchun b va c ni hisoblasin. Nomeri 0 va 1 raqami bilan tugaydiganlar sherigiga yordam berishi mumkin. Bolalar chug'urlashib hisobga tushib ketishdi:

– Menda c kasr chiqdi.

– Menda ham.

Faqat bir o'quvchi c butun chiqqanini e'lon qildi. O'qituvchi "Matematik"ka natijalarni jadval ko'rinishda to'ldirib chiqishni taklif etdi:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	6	7	8	9	0	1	2	3	4
c	4	Kasr	Kasr	8	Kasr	Kasr	Kasr	Kasr	Kasr
Natija	+	–	–	+	–	–	–	–	–

– Demak, $4a+b$ ifoda 5 ga bo'linadigan holni qaraydigan bo'lsak, ikkita kasr topilar ekan. Faqat topilgan kasrlarni chindan ham "yalqovlarcha" qisqartirish mumkinmi – tekshirib, ishonch hosil qilish lozim. Bolalar bu ishga ham katta qiziqish va biroz hayajon bilan kirishdilar:

$$\frac{16}{64}=\frac{16}{16\cdot 4}=\frac{1}{4}, \quad \frac{49}{98}=\frac{49}{49\cdot 2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Haqiqatan, har ikki holda ham kasrlarni "yalqovcha" qisqartirsa bo'lar ekan.

– Boshida ko'rgan misolimiz chiqmadi-ku! – Kimdir ming'illadi.

– Darvoqe, – o'qituvchi bolalarga sinovchan razm soldi.

– Hali c soni 5 ga bo'linadigan holni qaramadik, – topqirlik qildi boshqa bir o'quvchi.

– c raqamga 5 bo'linsa, o'zi 5 ekan-da, – undan qolishmadi yana biri.

– Barakalla, demak, ishimiz yengillashdi. "Matematik" davom ettirdi: $(9a+b)c=10ab$ tenglikka $c=5$ ni qo'yib qisqartirsak,

$$9a+b=2ab$$

hosil bo'ladi.

– Tushunarli, yana a ga birma-bir qiymat qo‘yib chiqish kerak, – taklif qildi kimdir.

– Shunday qilsa ham bo‘ladi. Lekin bu yerda yaqinroq yo‘ldan yurish mumkin. Tengligimizni

$$9a = (2a-1)b$$

ko‘rinishda yozib olsak, ko‘rinadiki, o‘ng tomondagi ko‘paytma a ga bo‘linishi kerak. Lekin a bilan $2a-1$ o‘zaro tub. Demak, b soni a ga bo‘linishi shart. $b = ad$ bo‘lsin. U holda tengligimiz ancha soddalashadi:

$$9 = (2a-1)d.$$

– Demak, atigi uchta hol bo‘lishi mumkin, – ilib ketdi “Matematik”:

1) $2a-1=9$, $d=1$, bundan, $a=5$, $b=5$ – bu holni qaramaymiz, uyga vazifa qilib qoldirilgan;

2) $2a-1=1$, $d=9$, bundan, $a=1$, $b=9$ – yaraydi;

3) $2a-1=3$, $d=3$, bundan, $a=2$, $b=6$ – yaraydi.

Yana ikkita kasr topildi. Tekshirib ko‘ramiz:

$$\frac{19}{95} = \frac{19}{19\cdot 5} = \frac{1}{5}$$ – yangi misol,

$$\frac{26}{65}$$ – bu esa “o‘zimizning” kasr.

– Shunday qilib, – yakun yasadi o‘qituvchi, – “yalqovcha” usulda qisqartirsa bo‘ladigan to‘rtta kasr topdik. – So‘ng u soatga qaradi. Hali darsning yarmi ham o‘tmagan edi. – Kelinglar, endi biroz algebra bilan ham shug‘ullanaylik. – Shunday deb O‘qituvchi taxtaga yozdi:

$$\frac{26...}{...65}$$

– Ko‘rib turibsizlar, uch nuqtalar e’tiborga olinmasa, bu – dastlabki kasrimiz. Uch nuqtalar o‘rniga 6 raqamini qo‘yamiz. Suratda ham, mahrajda ham bir xil miqdorda. Yana avvalgicha yo‘l tutamiz: har kim jurnaldagi nomerining oxirgi raqami necha bo‘lsa, shunchadan 6 qo‘yib chiqsin. Shundan so‘ng hosil bo‘lgan kasrlarni qisqartirsin. O‘quvchilar mashqni bajarib bo‘lishiga qarab (kimdir $\frac{266}{665}$ ni, kimdir esa to‘qqiztadan 6 yozib qisqartirishiga to‘g‘ri kelgan-da), taxtada shunday yozuvlar paydo bo‘ldi:

$$\frac{266}{665}=\frac{2\cdot 133}{133\cdot 5}=\frac{2}{5},\ \ \frac{2666}{6665}=\frac{2\cdot 1333}{5\cdot 1333},\ \ \frac{26666}{66665}=\frac{2\cdot 13333}{5\cdot 13333}=\frac{2}{5},\ldots$$

– Kasrni 6 raqamlari bilan istalgancha cho‘zsa bo‘ladiganga o‘xshaydi, – kimdir faraz qildi.

– Topgan boshqa kasrlarimiz ham shu xossaga ega emasmikin? – Qo‘shimcha qildi boshqa o‘quvchi.

O‘qituvchi:

– Kelinglar, mana shu farazni bayon qilaylik. Biz uni “jajji teorema” deb atashimiz mumkin:

Agar $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\frac{a}{c}$ bo‘lsa, u holda $\frac{\overline{abb...b}}{\overline{bb...bc}}=\frac{a}{c}$ bo‘ladi.

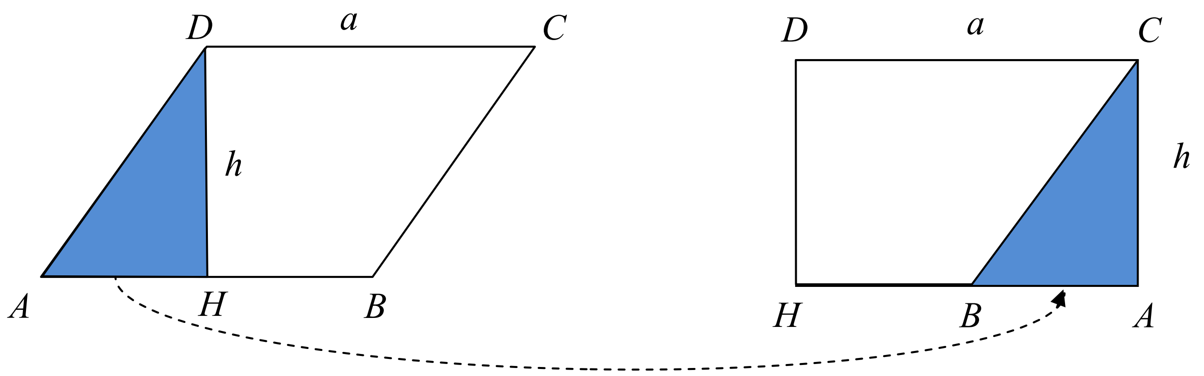
(oxirgi kasrning suratida ham, mahrajida ham n tadan b).

Mashq. “Jajji teorema”ni isbotlang.

§ 10. “Qaychi va qog‘oz” geometriyasi[11]

Bunday “geometriya” bilan shug‘ullanish uchun yetarli miqdorda qog‘oz bilan tig‘i tep-tekis uzun qaychi lozim. Ma’lumki, “geometriya” so‘zi yunoncha – yer o‘lchash haqida fan degan ma’noni bildiradi. Bizning “geometriya”da yer sathi vazifasini qog‘oz o‘taydi. Bu “geometriya”ning ayrim masalalari bilan tanishaylik.

1. Parallelogramm yuzi asosi bilan balandligining ko‘paytmasiga teng. Haqiqatan, ABC parallelogrammning o‘tmas burchagi uchidan asosiga balandlik tushiramiz. So‘ng, ADH uchburchakni qirqib olib AD tomoni bilan parallelogrammning BC tomoniga yopishtirsak, to‘g‘ri to‘rtburchak hosil bo‘ladi. Demak, berilgan parallelogramm yuzi ah ga teng (1-rasm).



1-rasm.

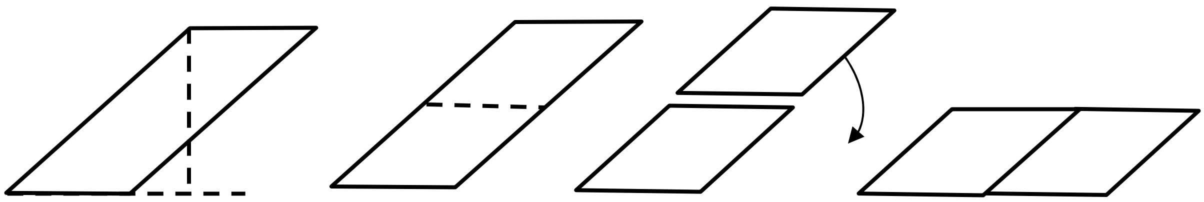
Odatda, darsliklarda isbot shu bilan yakunlanadi. Lekin parallelogramm og‘ishi katta bo‘lsa (2-rasm), bu mushohada o‘tmaydi. O‘quvchi aytishi mumkin: bunaqa parallellogrammni katta tomonini asos qilib yotqizib olish kerak.

To‘g‘ri, faqat bunda yuqoridagi teoremani quyidagicha o‘qishga to‘g‘ri kelar edi: parallelogramm yuzi <u>katta</u>

[11]FMI, 2005, №5.

tomoni bilan unga tushirilgan balandlik ko‘paytmasiga teng.

Lekin aslida 1-qoida qaysi tomon asos qilib olinishidan qat’iy nazar yaroqli. Buni qaychi bilan shunday “isbotlash” mumkin. Balandlik, 2-rasmdagi kabi asosning davomiga tushsin. U holda parallelogrammni asosiga parallel o‘rta chizig‘i bo‘ylab kesib, yuqori bo‘lagini ostki bo‘lakning yonboshiga ko‘chiramiz. Yana parallelogramm hosil bo‘ladi – buning natijasida asos ikki marta kattalashib, balandlik ikki marta kichrayadi. Demak, asos bilan balandlik ko‘paytmasi o‘zgarmaydi!



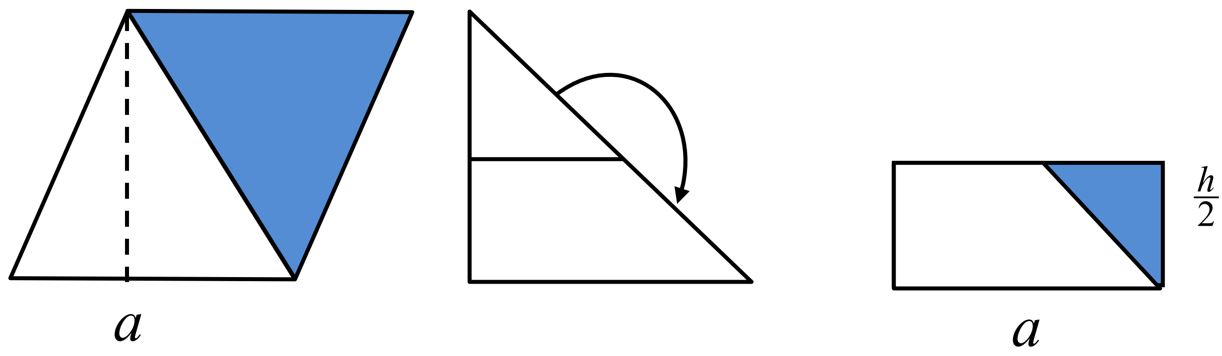
2-rasm.

Yangi parallelogramda balandlik asosni kesib o‘tsa, avvalgi mushohada yaraydi. Aks holda yana o‘rta chizig‘idan kesib, bo‘laklarni qayta joylashga to‘g‘ri keladi. Dastlab qanday parallelogram olinmasin, uni asosiga parallel, balandligini teng 2, 4, 8 vah.k. bo‘laklarga bo‘luvchi kesmalar bilan qirqib, bo‘laklarni yonma-yon joylashtirish yo‘li bilan har doim asosi yon tomonidan katta parallelogramm hosil qilish mumkin.

2. Uchburchakning yuzi asosi bilan balandligi ko‘paytmasining yarmiga teng.

Bu qoidani chiqarish uchun, odatda, bunday uchburchakdan ikkitasini qirqib, ulardan parallelogramm yasaladi (3-rasm).

Xo‘sh, bitta uchburchakni qirqish yo‘li bilan bu qoidani chiqarib bo‘lmaydimi? Bo‘ladi, albatta. To‘g‘ri burchakli uchburchak uchun bu juda oson: gipotenuzaning o‘rtasidan bir katetga parallel kesma (o‘rta chiziq) bo‘yicha qirqilsa, qiyqimlar to‘g‘ri to‘rtburchak hosil qiladi – uning bo‘yi olingan uchburchak asosiga, eni esa uchburchak balandligining yarmiga teng.



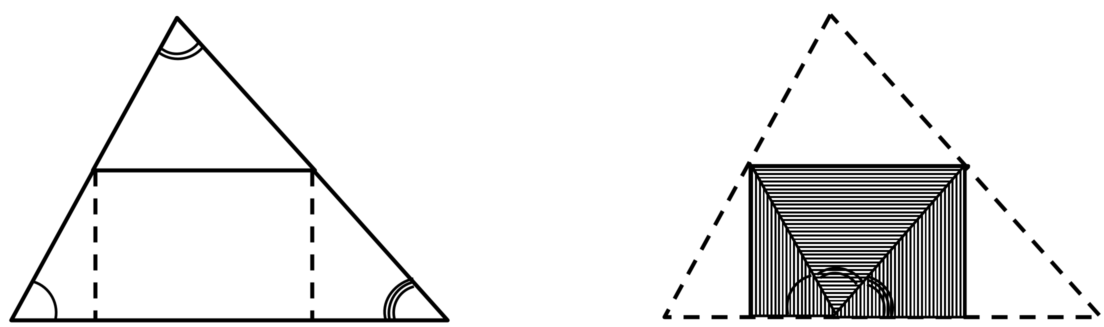
3-rasm.

Mashq. Bu usul o‘tkir burchakli uchburchak uchun ham, o‘tmas burchakli uchburchak uchun ham yaroqli ekanini ko‘rsating.

Mashq. Qog‘oz trapetsiyani qirqish yo‘li bilan “trapetsiyaning yuzi o‘rta chizig‘i bilan balandligining ko‘paytmasiga teng” degan qoidani keltirib chiqaring. Trapetsiya o‘tmas burchakli bo‘lgan holni alohida qarashni unutmang.

3. Uchburchak burchaklarining yig‘indisi yoyiq burchakdan iborat.

Bu xossani “isbotlash” uchun yuz tomoni oq, orqasi rangli qog‘ozdan uchburchak qirqamiz. Uni avval katta



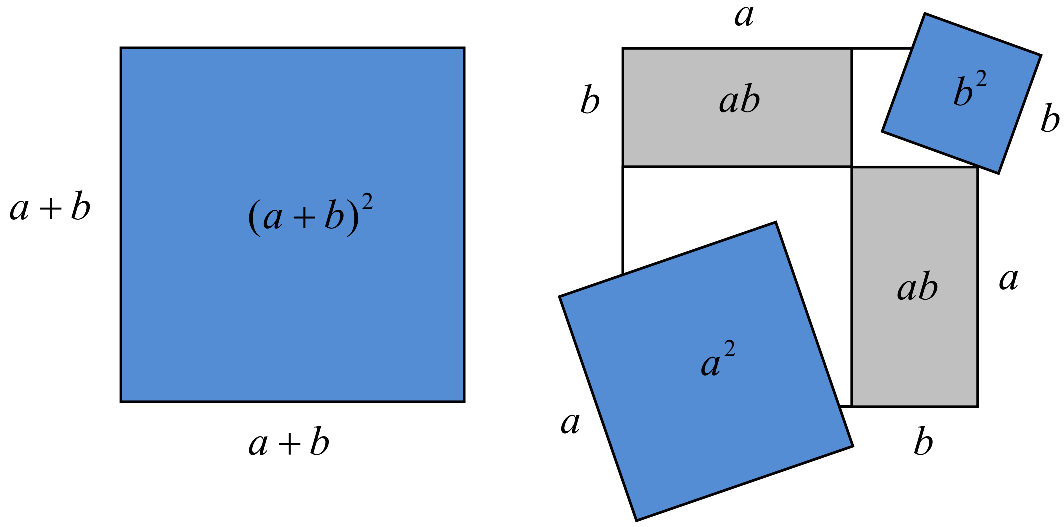
4-rasm.

tomoniga parallel o‘rta chizig‘i bo‘yicha bukamiz. So‘ng o‘rta chiziq uchlaridan asosga tushirilgan perpendikulyarlar bo‘yicha bukamiz. Shunda uchburchakning uchala burchagi bir nuqtaga jamlanib, roppa-rosa yoyiq burchak tashkil etadi (4-rasm).

4. Ikki had yig‘indisining kvadrati:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Tomoni $a+b$ ga teng kvadrat olamiz va uning burchagidan tomoni a ga teng kvadratni, qarami qarshi burchagidan esa tomoni



5-rasm.

b ga teng kvadratni qirqib olsak, ikkita to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi qiyqim ortib qoladi. Bu to‘rtburchaklari tomonlari a va b demak, yuzlari birga $2ab$ (5-rasm).

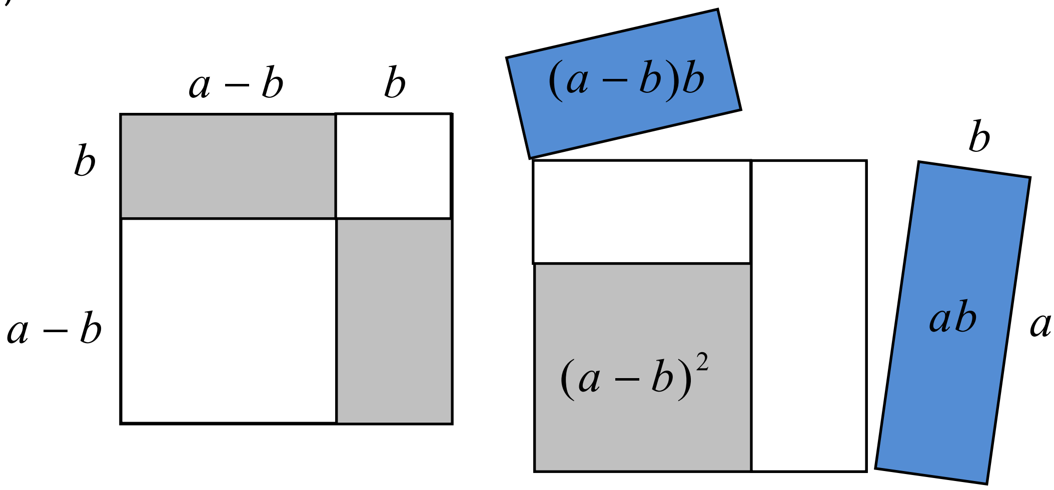
5. Ikki had ayirmasining kvadrati:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Bu ayniyatni “qaychi bilan isbotlash” uchun uni

$$a^2 = b(a-b) + b^2 + (a-b)b + (a-b)(a-b)$$

ko‘rinishda yozib olamiz. So‘ng tomoni a ga teng kvadratdan tomonlari a va b ga teng hamda tomonlari $a-b$ va b ga teng ikkita to‘g‘ri to‘rtburchakni qirqib olsak, aynan tomoni $a-b$ bo‘lgan kvadrat qoladi (6-rasm).



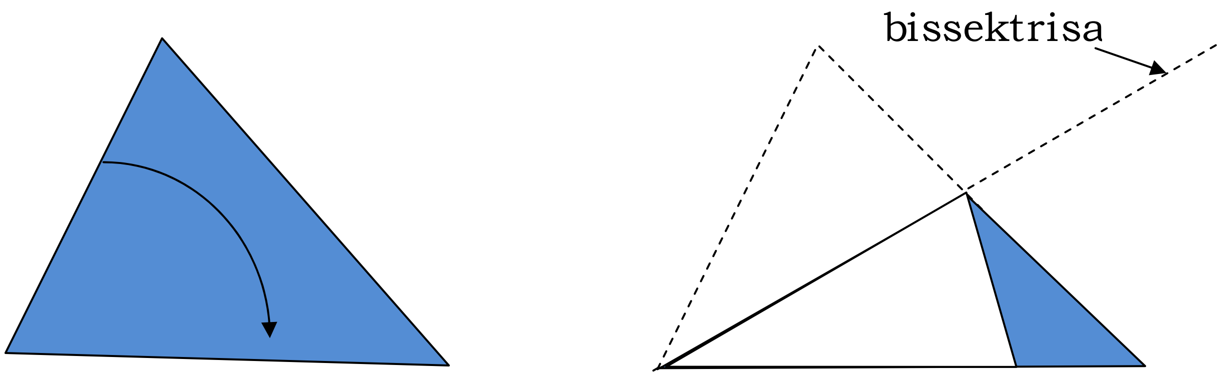
6-rasm.

Mashq. Kvadratlar ayirmasi uchun $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ayniyatni qaychi vositasida namoyish eting.

6. Uchburchak bissektrisalari bir nuqtada kesishadi. Bu teoremani qog‘ozda tekshirib ko‘rish juda ham oson: uchburchakni shunday bukamizki, bukish chizig‘i uning bir uchidan o‘tsin hamda bu uchdan chiquvchi tomonlar esa ustma-ust tushsin (7-rasm). So‘ng qog‘ozni yoysak, bukish chizig‘i aynan bissektrisa ustida yotadi. Endi shu amalni qolgan ikkita uchga nisbatan bajarsak, uchta bukish chizig‘i hosil bo‘ladi. Agar mashq puxta bajarilsa, bukish chiziqlari bir nuqtada kesishishini ko‘rish qiyin emas.

Mashq. “Uchburchak medianalari bir nuqta kesishadi”, degan xossani qog‘ozda tekshirib ko‘ring.

Mashq. Mana bu xossani ham isbotlang: o‘tkir burchakli uchburchak balandliklari bir nuqtada kesishadi.

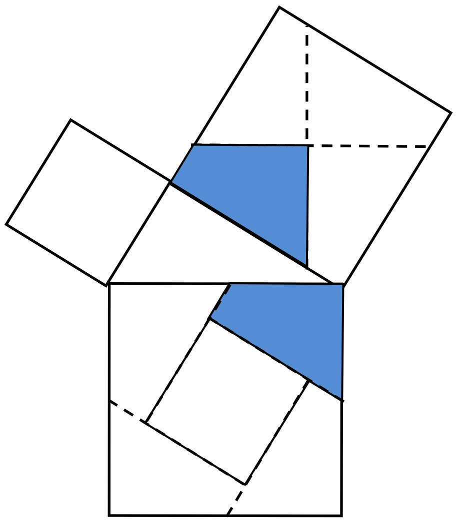


7-rasm.

Tadqiqot uchun masala. Ma'lumki, o'tmas burchakli uchburchakning balandliklari yotadigan uchta to'g'ri chiziq ham bir nuqtada kesishadi (faqat bu safar kesishish nuqtasi uchburchakdan tashqarida yotadi). O'tmas burchakli uchburchak balandliklari bir nuqtada kesishishini qog'oz (zarur bo'lsa qaychi) vositasida qanday tekshirib ko'rish mumkin?

7. Pifagor teoremasi: To'g'ri burchakli uchburchak katetlariga yasalgan kvadratlar yuzlari yig'indisi gipotenuzaga yasalgan kvadrat yuziga teng.

Pifagor teoremasini qaychi bilan "isbotlash"ning son-sanoqsiz usuli mavjud. Ulardan eng soddasi mana bu rasmga asoslanadi (8-rasm):

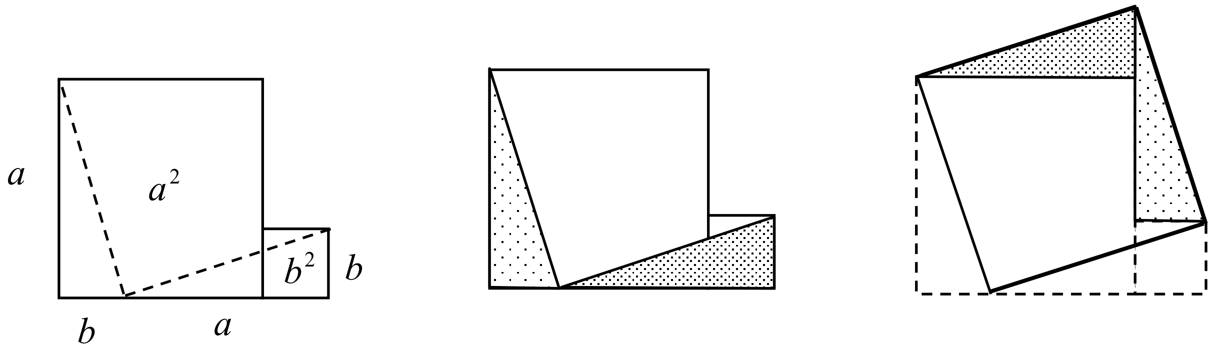


8-rasm.

Bu rasm shunday hosil qilingan: kichik kvadrat katta kvadratning ichiga markazlar ustma-ust tushadigan qilib parallel ko'chiriladi va tomonlari davom ettiriladi. Uzun katetga tiralgan kvadrat esa uning markazidan o'tadigan va katta kvadrat tomonlariga parallel kesmalar bilan teng to'rt bo'lakka bo'linadi. Qog'ozdan qiyib, bu bo'laklar kichik kvadrat atrofini roppa-rosa to‘ldirishiga ishonch hosil qilish mumkin.

Mashq. Rasmda bo‘yalgan to‘rtburchaklar teng ekanini geometrik yo‘l bilan isbotlang.

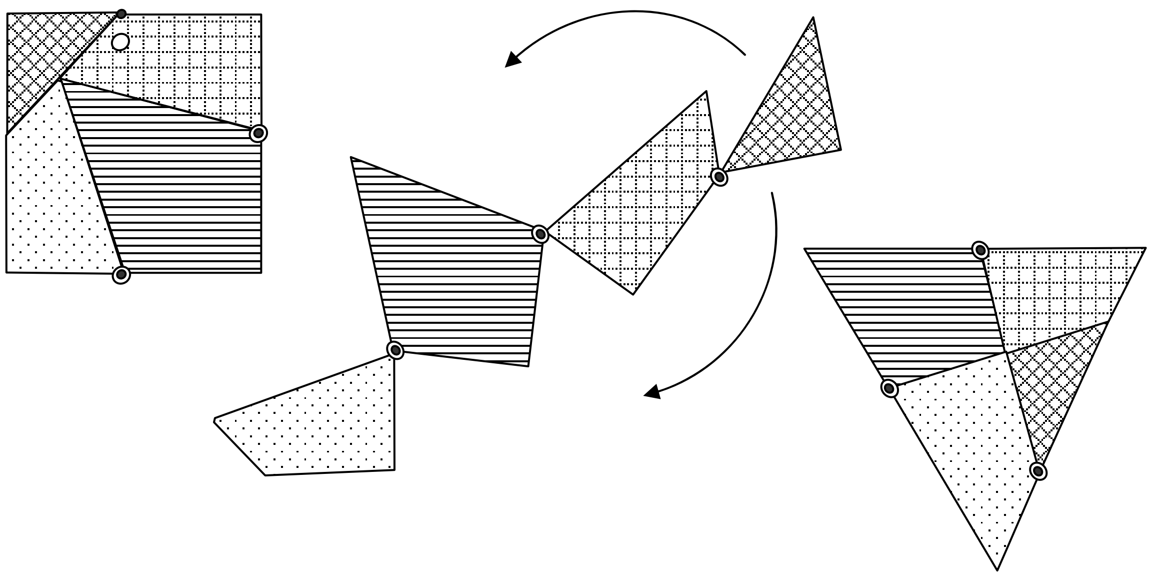
Pifagor teoremasining qog‘oz va qaychi vositasida eng ixcham isbotni qadimgi hind matematigi Annairitsi topgan (9-rasm):



9-rasm.

8. Muntazam ko‘pburchaklarni kvadratga aylantirish.

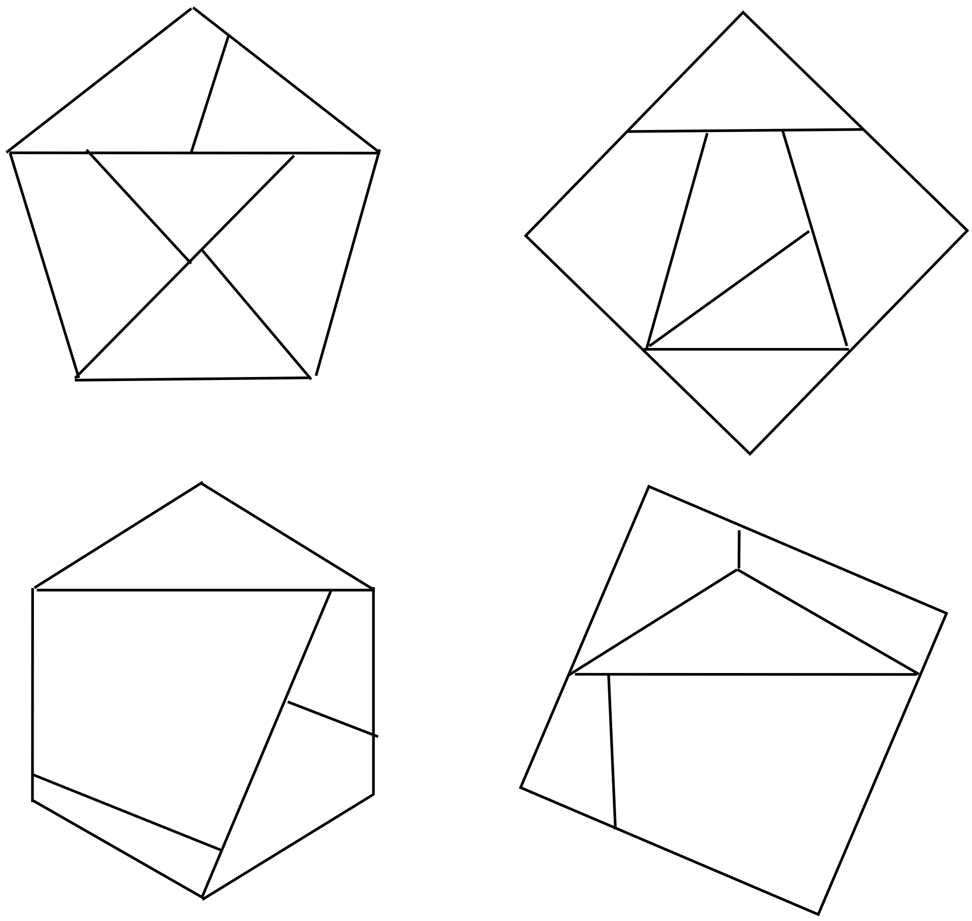
Pifagor teoremasini qaychi bilan “isbotlash” berilgan ikkita kvadratni qirqib, bo‘laklardan bitta kvadrat yasash masalasi



10-rasm.

bilan tengkuchli. Bu masala esa, o‘z navbatida, muntazam ko‘pburchaklarni qirqish yo‘li bilan boshqa muntazam ko‘pburchakka aylantirish haqidagi masalalar oilasining bir a’zosi. G.Dyudeni muntazam uchburchakni kvadratga aylantirishning mana bunday g‘aroyib usulini topgan (10-rasm).

Muntazam beshburchak va oltiburchakni qirqib kvadratga keltirish masalasining quyidagi yechimlari ham Dyudeniga tegishli (11-rasm).



11-rasm.

Bu yasashlar maxsus usullar bilangina topilishi mumkin, albatta. Ularning muhim xususiyati – hozirgacha topilgan yasashlar ichida qiyqimlar soni eng kamligi, ya’ni, shu ko‘rsatkich bo‘yicha rekord yasashlar ekanligida. Yechimlarning to‘g‘riligini qat’iy isbotlash, ya'ni muntazam koʻpburchak va tegishli kvadratdagi mos qiyqimlar oʻzaro teng ekanligini asoslash yana ham murakkab. Muntazam koʻpburchaklar tomonlari soni ortib borishi bilan masala qiyinlashib boradi, albatta. Shunga qaramay "qaychi geometriyasi" sohasidagi taniqli mutaxassis G.Lindgren kitobida $n = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12$ uchun muntazam n-burchakni kvadratga aylantirish masalalarining ham rekord yechimlari bayon qilingan.

Agar qiyqimlar soniga chegara qoʻyilmasa, u holda masala bira toʻla hal etilishi mumkin ekan. Bu quyidagi teoremadan iborat.

9. Boyyai-Gervin teoremasi: yuzlari teng ikki koʻpburchak berilgan boʻlsa, birini chekli sondagi koʻpburchaklarga qirqib, qiyqimlarni qaytadan joylash yoʻli bilan ikkinchisini hosil qilish mumkin.

Ravshanki, istalgan koʻpburchakni qirqish yoʻli bilan kvadratga aylantirish mumkinligi isbotlansa, bundan Boyyai-Gervin teoremasi kelib chiqadi. Isbotning sxemasi:

1-qadam. Berilgan koʻpburchakni uchburchaklarga boʻlamiz.

2-qadam. Har bir uchburchakni toʻgʻri toʻrtburchakka aylantiramiz.

3-qadam. Har bir toʻgʻri toʻrburchakni bir tomoni 1 ga teng boʻlgan toʻgʻri toʻrtburchakka aylantiramiz.

4-qadam. Hosil boʻlgan toʻgʻri toʻrtburchaklarni teng tomonlari bilan yonma-yon terib bitta toʻgʻri toʻrtburchak hosil qilamiz – u dastlabki koʻpburchakka tengdosh boʻladi.

5-qadam. Hosil qilingan toʻgʻri toʻrtburchakni kvadratga aylantiramiz.

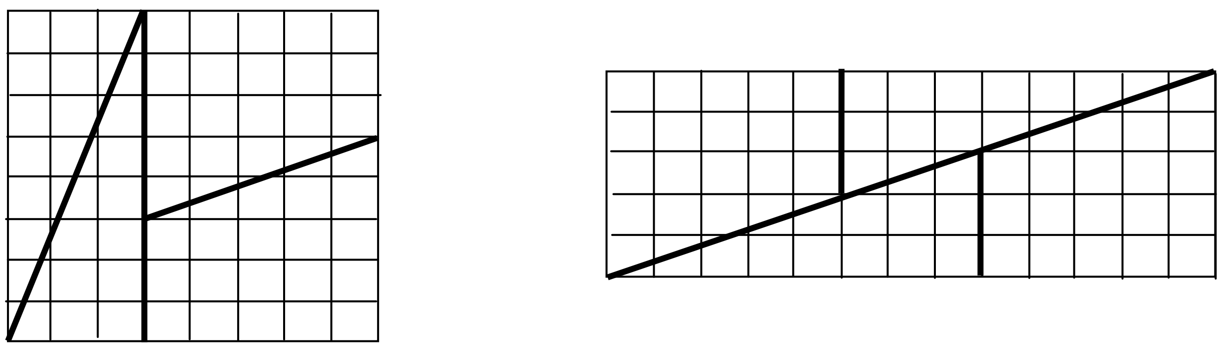
Mashq. 3 va 5-qadamlarni isbotlang.

10. Geometrik teoremalarni oʻlchash yoki qogʻozda tajriba qilish yoʻli bilan isbotlab boʻlmaydi!

Pifagor teoremasi yoki uchburchak burchaklarining yigʻindisi haqidagi teoremaning yuqorida bayon qilingan, ya'ni qog'oz va qaychi vositasidagi isbotlari, sirtdan qaraganda, ancha sodda tuyuladi. Lekin ular isbot vazifasini o'tay olmaydi – shuning uchun hamma joyda shu yo'sindagi "isbot" qo'shtirnoq bilan yozildi. Sababi nima?

Gap shundaki, geometrik xossalarni o'lchash, yer sirtida yoki qog'ozda chizma chizish, qiyish kabi tajribalar bilan isbotlash mumkin emas. Birinchidan, bunday tajribalar tayin rasmlar ustida qilinishi mumkin, xolos, geometrik xossa esa, odatda ixtiyoriy rasmlar uchun "da'vo" qilinadi. Masalan, Pifagor teoremasi – istalgan to'g'ri burchakli uchburchakka, burchaklar yig'indisi haqida teorema istalgan uchburchakka doir xossadir.

Ikkinchidan, tajriba – amaliy o'lchashlar, chizmalar, qog'oz qiyqimlari har doim taqribiy natija beradi. Bunga ishonch hosil qilish uchun, masalan, Pifagor teoremasini to'g'ri to'rtburchak shaklidagi deraza oynasi uchun tekshirib ko'ring: uning tomonlarini va diagonalini chizg'ich bilan millimetr aniqligida o'lchang; so'ng tomonlar uzunliklarini kvadratga oshirib qo'shing va yig'indini diagonal uzunligining kvadrati bilan solishtiring. Amalda bu ikki son aynan teng chiqishi amri mahol.



12-rasm.

Endi mana bu misolni izohlashga urinib ko'ring:

Tomoni 8 birlik bo‘lgan kvadrat olib, uni to‘rt bo‘lakka bo‘lamiz. 12-rasmdagi yo‘l bilan bo‘laklarni qayta terib, o‘lchami 5×13 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak tuzish mumkin:

Lekin kvadrat yuzi 64 kvadrat birlik, to‘g‘ri to‘rtburchak yuzi esa – 65 kvadrat birlik!

So‘nggi mashq. Bu paradoksning sababini aniqlang: qo‘shimcha bir kvadrat birlik qayerdan paydo bo‘ldi? Yuzi $13^2=169$ katakdan iborat kvadratni qirqib, yuzi $8\times21=168$ katakka teng to‘g‘ri to‘rtburchak “tuzish mumkin”ligini tajriba qilib ko‘ring. Bu safar bir kvadrat birlik qayoqqa g‘oyib bo‘lganini izohlang.

Tadqiqot uchun masala. Qachon yuzi n^2 ga teng kvadratni qirqib, qiyqimlardan yuzlarining yig‘indisi n^2+1 yoki n^2-1 chiqadigan bo‘laklarga ajratish mumkin?

§ 11. Matematikada “telepatiya”[12]

Ma’lumki, telepatiya – bu birovning fikrini bevosita muloqotsiz “o‘qiy olish” qobiliyati. Masalan, narigi xonada turgan odamning boshida tug‘iladigan fikrlarni aytib berish – telepatik qobiliyat sanaladi. Aytish lozimki, kishining ko‘ziga, yuziga qarab u nimani o‘ylayotganini aytish telepatiyaga kirmaydi – razvedkachilar maktablarida bunday qobiliyat ta’lim-tarbiya orqali shakllantirilishi ma’lum. Odamning ko‘zi, yuz mimikasi, boshqa hatti-harakatlarini kuzatish – bu bevosita muloqotga kiradi. (Bu usuldan turli toifadagi folbinlar ustalik bilan foydalanadi.) Hatto telefonda so‘zlashayotgan kishining ovozi, nafas olishidagi o‘zgarishlarga qarab ham u qanday fikrlayotgani haqida muayyan xulosalar chiqarish mumkin – bu hozirgi zamon

[12]FMI, 2007, №6.

ilm-faniga zid emas. Telepatiya esa – g'ayri-ilmiy ta'limot, u biron-bir ilmiy asosga ega emas, hozirgacha birorta ham xolis tajribada tasdiqlanmagan.

Shuning uchun ushbu maqola sarlavhasidagi "telepatiya" so'zi qo'shtirnoqqa olib yozildi. Bunda qanday hodisa nazarda tutilyapti? Kimdir o'ylagan sonni "bashorat qilish qobiliyati". Mana bu dialogga quloq tutaylik.

Matematik-"telepat": biror sonni o'ylang. Uni ikkiga ko'paytiring, hosil bo'lgan ko'paytmaga 5 ni qo'shing. Yig'indi necha? 25 deysizmi? Siz 10 sonini o'ylagansiz.

– E-e-e. Shu ham telepatiya bo'ldi-yu. Bitta javobga qarab, bitta noma'lum sonni topishda hech bir mo'jiza yo'q. Bu shunchaki bir noma'lumli tenglamani yechish degan gap: o'ylangan son x bo'lsa, $2x+5=25$, demak, $x=10$.

– Durust, durust. Xo'p. Yana bir son o'ylang. Uni ikkiga ko'paytiring, ko'paytmaga 16 ni qo'shing, natijani 2 ga bo'ling, bo'linmadan o'ylagan dastlabki soningizni ayiring. Natijaga 7 ni qo'shing. Sizda 15 hosil bo'ldi, to'g'rimi?

– To'g'ri.

– Endi nima deysiz? Bu safar men sizdan biror natija so'ramadim. Demak, tenglama ham yo'q.

– Baribir bu ham telepatiya emas. Tenglama yo'q, ammo ayniyat bor: o'ylangan son x bo'lsa, bajarilgan amallar natijasida birinchi qadamdan so'ng $2x$, ikkinchi amaldan keyin $2x+16$, uni 2 ga bo'lganda $x+8$, bundan o'ylangan son (ya'ni x) ayrilgach, 8 qoladi, unga 7 qo'shilsa, 15 chiqadi. Bularning bari qisqacha qilib yozilsa,

$$(2x+16):2-x+7=15$$

ayniyat hosil bo'ladi. Ya'ni, o'ylangan son qanday bo'lishidan qat'iy nazar, natija doim 15 chiqaveradi.

Ko'rinib turganidek, to'rtinchi qadamdagi "o'ylangan sonni ayiring" degan topshiriq bajarilganda, x yo'qolib ketadi.

– Xo'p, o'ylangan sonni ayirmaymiz. Biror raqam o'ylang, noldan boshqa. Uni 5 ga ko'paytiring. Ko'paytmadan 3 ni ayiring, ayirmani 2 ga ko'paytiring, natijaga 111 ni qo'shing. Sizda uch xonali son hosil bo'ldi. O'rtadagi raqamini o'chirib tashlab, ikki xonali son hosil qiling. Uni 3 ga bo'ling. 5 hosil bo'ldi, to'g'rimi? Qalay? Bu safar "o'ylagan son"dan uning o'zini ayirmadik.

– Ayirishga-ku ayirmadik, ammo... Qani algebraga solib ko'raylik-chi. O'ylangan raqam x bo'lsin. Ketma-ket amallar natijasi:

$$5x,$$
$$5x-3,$$
$$(5x-3)\cdot 2=10x-6,$$
$$10x-6+111=10x+105, \ldots$$

Bu sonning o'rtasidagi raqam?...Darvoqe, x ixtiyoriy son emas,1, 2, 3, ..., 9 raqamlaridan bittasi edi. Shuni nazarda tutib, oxirgi natijani

$$100+10x+5$$

ko'rinishda yozib olsak, $1x5$ ko'rinishdagi uch xonali son hosil bo'ladi. Uning o'rtasidagi raqam, ya'ni x ni o'chirsak (!), 15, uni 3 ga bo'lsak, 5 chiqadi. Xullas, "o'rtadagi raqamni o'chirish" o'ylangan sonni ayirishday gap ekan.

– Shoshmay turing hali. Bo'lmasam, raqamlari har xil uch xonali son o'ylang. Uni teskari tartibda, ya'ni birinchi va oxirgi raqamlari o'rnini almashtirib yozing (bunday amalni "ag'darish" deb ataymiz). Siz ikkita uch xonali songa ega bo'ldingiz. Ularning kattasidan kichigini ayiring. Ayirmaning raqamlarini qo‘shing. Yig‘indidan 13 ni ayiring. 5 qoldi, to‘g‘rimi? Endi nima deysiz?

– Bu safar o‘ylangan son qayoqqa ketdi ekan? Nahotki, telepatiya bo‘lsa?! Balki bu safar ham “mo‘jizakorlik” sirini algebra fosh qilar? O‘ylangan son abc bo‘lsin. Ag‘darib yozsak, cba. Raqamlar har xil bo‘lgani uchun yo $a > c$, yoki $c > a$. Bu uncha ahamiyatli emas, $a > c$ deb hisoblayverish mumkin. Bunda abc soni cba dan katta bo‘ladi. Ammo shu ko‘rinishda birinchi sondan ikkinchisi ayrilsa, nima chiqishini yozib bo‘lmaydi. Shu maqsadda bu sonlarni yoyib yozamiz (axir, masalan, 357 degani aslida $3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$ degani-da):

$$abc = 100a + 10b + c, \qquad cba = 100c + 10b + a.$$

Endi ayirish mumkin:

$$abc - cba = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) =$$
$$= 100\left(a - c\right) + c - a = 99\left(a - c\right).$$

Navbatdagi qadam – hosil bo‘lgan ayirmaning raqamlarini qo‘shish kerak. Buning uchun a bilan c turli raqamlar ekanini eslaymiz. Demak $a - c$ ayirma $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ va 8 ga teng bo‘lishi mumkin, xolos. Shuning uchun $99(a - c)$ soni 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 yoki 891 sonlaridan biriga teng chiqishi shart. Barcha holda ham raqamlar yig‘indisi 18 bo‘ladi. Demak, bu natija, o‘ylangan son qanday bo‘lishidan qat’iy nazar, bizning “telepat”imizga oldindan ma’lum ekan.

Endi o‘ylangan uch xonali son nima uchun turli raqamli bo‘lishi ham oydinlashdi: uning birinchi va oxirgi raqami bir xil bo‘lsa, $abc - cba$ ayirma 0 bo‘lib qoladi.

Shunday qilib, bu “telepatik” bashoratni ixcham ayniyat ko‘rinishida yozib bo‘lmaydi, ammo teoremacha sifatida yozish mumkin:

Agar birinchi va uchinchi raqami turli ixtiyoriy uch xonali son olinib, uning ana shu ikki raqami o‘rni almashtirilsa, so‘ng bu uch xonali sonlarning kattasidan kichigi ayrilsa, ayirmaning raqamlari yig‘indisi 18 ga teng bo‘ladi.

Mashq. Yana chetki raqamlari har xil uch xonali son berilgan bo‘lsin. Uning raqamlarini ag‘darib, ikkinchi uch xonali son hosil qilaylik va kattasidan kichigini ayiraylik. So‘ng ayirmaning raqamlarini ag‘daraylik. Ayirma va uning ag‘darilgani qo‘shilsa, yig‘indi doim 1089 chiqadi. Bu xossani algebra vositasida isbotlang.

Misollar.

$$358 \to 853 \to 853-358=495 \to 594 \to 495+594=1089,$$

$$352 \to 253 \to 352-253=99 \to 990 \to 99+990=1089.$$

(Ikkinchi misolda 99 ni 099 deb, so‘ng ag‘darilganiga e’tibor bering.)

Mashq. Raqamlari turli ixtiyoriy ikki xonali son uchun quyidagi xossani isbotlang: bu sonning raqamlari o‘rni almashtirib, kattasidan kichigi ayrilsa va ayirmaning raqamlari qo‘shilsa, doim 9 hosil bo‘ladi.

Mashq. Raqamlari turli ixtiyoriy ikki xonali son uchun quyidagi xossani isbotlang: bu sonning raqamlari o‘rni almashtirilib, kattasidan kichigi ayrilsa va ayirmaning raqamlari almashtirilib, ayirmaga qo‘shilsa, doim 99 hosil bo‘ladi.

Mashq. Yuqoridagi kabi xossalarni to‘rt xonali sonlar uchun tadqiq qiling.

“Telepat”imizning yana bir urinishi: Menga ko‘rsatmay bir qo‘lingizga 10 tiyinlik, ikkinchi qo‘lingizga 15 tiyinlik tangalarni oling. (Hozir muomalada bunday tangalar yo‘q. Tangalar o‘rniga qog‘oz parchalariga 10 va 15 sonlarini yozib foydalanish mumkin.) O‘ng qo‘lingizdagi tangani 2 ga ko‘paytiring, chap qo‘lingizdagi tangani 3 ga ko‘paytiring. Ko‘paytirdingizmi? Endi ko‘paytmalarni qo‘shing. Necha chiqdi? Yarim so‘m? O‘ng qo‘lingizdagi tanga – 10 tiyinlik.

– Javob to‘g‘ri. Lekin bu bilan meni qoyil qilmadingiz. Atigi ikki imkoniyat bor, xolos. O‘ng qo‘limdagi tanga 15 tiyinlik bo‘lsa, natija $15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 60$ chiqqan bo‘lar edi.

– Xo‘p. Yana tangalarni yashiring. O‘ng qo‘lingizdagi tangani 4 ga, chap qo‘lingizdagisini 5 ga ko‘paytiring. Ko‘paytmalarni qo‘shing. Yo‘q, bu safar natijani so‘ramayman. Yig‘indini yarmi necha tiyin bo‘lishini hisoblang. Hisobladingizmi? O‘ng qo‘lingizda 15 tiyinlik tanga.

– Qiziq. Chindan ham natijani so‘ramadingiz. Bajarilgan amallar: $15 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 90$, yarmi 45 tiyin.

Qani, ikkinchi holni ko‘raylik-chi: $10 \cdot 4 + 15 \cdot 5 = 115$, tiyin, yarmi ...

Tushunarli, yig‘indi ikkiga bo‘linadimi yo yo‘qmi– shunga qarab, “telepatlik” qilish mumkin ekan.

– Ha, mayli. Bo‘lishni ham talab qilmaylik. O‘ng qo‘lingizdagi tangani 6 ga ko‘paytiring. (Hamsuhbat hisobladim, deganday bosh qimirlatadi). Chap qo‘lingizdagisini 7 ga ko‘paytiring. Ko‘paytirdingizmi? Har ikkisini qo‘shing. O‘ng qo‘lingizdagi tanga 10 tiyin.

– Yana to‘g‘ri. Bu safar chindan g‘alati. Nahotki “telepatiya” bo‘lsa?..

Siz nima deb o‘ylaysiz, muhtaram o‘quvchi, bu safar “telepat”imiz qaysi qo‘lda qaysi tanga yashirilganini qanday qilib aniqladi?

§ 12. Kuzatuv-faraz-teorema-masala[13]

N.P.Bogdanov-Belskiyning (rus rassomi, 1868-1948) "Og'zaki hisob" nomli kartinasi bor. Unda Lev Tolstoy izidan borib, universitetda professorlikni tashlab, qishloq maktabida dehqonlar bolalarini o'qitish bilan shug'ullangan S.A.Rachinskiyning darsidagi holat tasvirlangan: sinf taxtasiga og'zaki hisoblash uchun

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365} \tag{1}$$

misoli yozilgan va bolalar berilib, uni bajarishga tirishmoqda. Kasrning mahraji – 365, go'yo bir yildagi kunlar sonidan olinganday. Bir qarashda, suratdagi amallar bajarilib, natija 365 ga bo'linsa, butun son chiqishi dargumon tuyuladi. Ammo pedagogning mahoratini qarangki, kasrning qiymati nafaqat butun son chiqar, balki mana bunday g'aroyib xossaga ham ega ekan:

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2 \tag{2}$$

Bunda har ikki yig'indi ham 365 ga teng! Shunday qilib, topshiriqning javobi 2 dan iborat.

Shu misoldan kelib chiqib, ketma-ket $k+1$ ta natural son kvadratlarining yig'indisi navbatdagi k ta son kvadratlari yig'indisiga teng bo'lsa, bu sonlarni **Rachinskiy sonlari** deyish mumkin.

Agar Rachinskiy sonlari $n+1$ dan boshlansa, tegishli xossa

$$\begin{aligned} &n^2+(n+1)^2+\ldots+(n+k)^2= \\ &=(n+k+1)^2+(n+k+2)^2+\ldots+(n+2k)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

[13] FMI, 2008, №1.

ko‘rinishda bo‘ladi. Yuqoridagi misolda $n=10$, $k=2$.

(2) munosabatning o‘ng tomonidagi tenglik beixtiyor ma’lum va mashhur

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \tag{4}$$

tenglikni yodga soladi: 3, 4 va 5 – Pifagor uchligi deb ataladigan sonlar guruhlaridan eng kichigidir. Ko‘rinib turibdiki, bu uchlik ayni paytda Rachinskiy sonlarining ham eng ixchami: $n=3$, $k=1$.

Xo‘sh, k va n ning xuddi shu qiymatlari uchun boshqa Rachinskiy uchliklari mavjudmi? (Pifagor uchliklari cheksiz ko‘pligini bilamiz – lekin ular ketma-ket sonlar bo‘lishi shart emas.) Bu savolga javob berish uchun tegishli tenglikni yozamiz: $n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$.

Qavslarni ochib soddalashtirsak, $n^2-2n-3=(n+1)(n-3)=0$. ko‘rinishga keladi. Demak, yo $n=-1$, yoki $n=3$. Bu qiymatlardan ikkinchisi yuqoridagi uchlikni beradi, birinchisiga -1, 0, 1 sonlar to‘g‘ri kelib, ular chindan ham $(-1)^2+0^2=1^2$ xossasiga ega, ammo biz natural sonlarni qarash bilan cheklanamiz.

Shunday qilib, $k=1$ bo‘lganda faqat bitta Rachinskiy sonlari guruhi mavjud ekan.

Mashq. $k=2$ bo‘lganda ham (3) dan boshqa musbat Rachinskiy sonlari guruhi mavjud emasligini ko‘rsating.

Endi shunday savol tug‘iladi: $k=3$ bo‘lganda Rachinskiy sonlari mavjudmi? Tajriba qilib, ya’ni n ga qiymatlar berib, to‘rtta ketma-kent son kvadratlari yig‘indisini navbatdagi uchta son kvadratlari yig‘indisi bilan taqqoslaymiz. Bunda hisob-kitob hajmini kamaytirish uchun shunday ish tutamiz: kvadratlarning oxirgi raqamlarinigina qaraymiz. Masalan, 1, 2, 3 va 4 ning kvadratlari oxirgi raqamlari yig‘indisi $1+4+9+6=20$, 5, 6 va 7 uchun $5+6+9=20$ – har ikkisi ham 0 bilan tugaydi, demak, yaraydi, $4+9+6+5$ yig‘indilarning oxirgi raqamlari har xil $6+9+4$ bo‘lgani uchun, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 guruh yaramaydi. Tekshirishni mana bunday jadval ko‘rinishida davom ettirish qulay:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
$n^2 \pmod{10}$	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0	1	4	9	…

Shu yo‘l bilan, $k=3$ bo‘lganda Rachinskiy sonlarining birinchisi yo 1, yoki 9 raqami bilan tugashi shart degan xulosaga kelamiz. 11 va 19 bilan boshlanadigan guruhlar yaramaydi, ammo

$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2. \tag{5}$$

Bu xossaga ega yana boshqa yettiliklar bormi? Bu savolga javob topish maqsadida

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=(n+4)^2+(n+5)^2+(n+6)^2$$

munosabatni o‘rganamiz. Uni ixchamlab, $n^2-18n-63=0$, ya’ni $(n+3)(n-21)=0$ tenglama hosil qilamiz. Musbat bo‘lagi uchun, $n=21$ – yuqoridagi misolga mos keladi. Demak, $k=3$ uchun ham (5) misoldagidan boshqa Rachinskiy sonlari guruhi mavjud emas ekan.

O‘tkazilgan kuzatuv va tajribalar quyidagi farazni uyg‘otadi:

Har bir k uchun Rachinskiy sonlari guruhi mavjud va yagona.

Bu farazni isbotlashga unnaymiz. Buning uchun (3) tenglikdagi qavslarni ochib chiqish lozim. Bu anchayin sermehnat yumush. Ishni yengillatish uchun “simmetriya” g‘oyasidan foydalanamiz – ixtiyorimizda $2k+1$ ta son bor (tegishli xossaning chap tomonida $k+1$ ta, o‘ng tomonida k ta). Ulardan o‘rtadagisini m bilan belgilaymiz, ya’ni $n+k=m$ deb olamiz. Shunda (3) tenglik

$$(m-k)^2+(m-(k-1))^2+\ldots+(m-1)^2+m^2= \\ =(m+1)^2+(m+2)^2+\ldots+(m+\kappa)^2 \qquad (6)$$

ko'rinishda yoziladi. Endi qavslar ochilsa, hadlarning ko'pi qisqarib ketadi:

$$-2mk-2m(k-1)-\ \ldots-2m+m^2=2m+4m+\ldots+2m(k-1)+2mk,$$

ya'ni $m^2=4m(1+2+\ldots+k)=2mk(k+1).$

Bu yerda ham m ning musbat ekanligini hisobga olib, $m=2k(k+1)$ bo'lishini topamiz. Shu bilan yuqoridagi faraz tasdiqqa aylanadi:

Teorema. Har bir k uchun yagona Rachinskiy sonlari guruhi mavjud.

Biz kutilgandan ko'proq natijaga erishdik – bu guruh $m-k=2k^2+k$ dan boshlanib, $m+k=2k^2+3k$ bilan tugaydi.

Xususan, $k=4$ uchun

$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2,$$

$k=5$ uchun

$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2$$

va h.k.

Mashq. (6) tenglikning chap tomonidagi yig'indi doim beshga qoldiqsiz bo'linishi isbotlang. U qachon 10 ga qoldiqsiz bo'linadi?

Shu yerda suhbatimizga nuqta qo'ysak ham bo'lar edi. Ammo matematikaning qiziq va aynan jozibali xususiyatlaridan biri – yechilgan bir masala ketidan bir necha yangi masala "bosh ko'tarib" chiqishida. Chunonchi,

1-masala. Shunday ketma-ket sonlar guruhlarini topingki, har bir guruhda dastlabki bir nechta son kvadratlarining yig‘indisi keyingilari kvadratlarining yig‘indisiga teng bo‘lsin. Masalan,

$$18^2+19^2+20^2+21^2+22^2+23^2+24^2+25^2+26^2+27^2+28^2+29^2+30^2+$$
$$+31^2+34^2=35^2+36^2+37^2+38^2+39^2+40^2+41^2+42^2.$$

2-masala. Umuman, bir guruh ketma-ket sonlar kvadratlari yig‘indisi boshqa bir guruh ketma-ket sonlar kvadratlari yig‘indisiga teng bo‘lgan barcha hollarni aniqlang. Masalan,

$$7^2+8^2+9^2+10^2+11^2+12^2+13^2+14^2+15^2+16^2=26^2+27^2,$$

$$20^2+21^2+22^2+23^2+24^2+25^2+26^2+27^2+28^2=$$
$$=22^2+23^2+24^2+25^2+26^2+27^2+28^2+29^2$$

(bu misol $20^2+21^2=29^2$ Pifagor uchligidan hosil qilingan).

Mashq. Agar kvadratlar o‘rniga kublar olinsa, (6) tenglikni qanoatlantiradigan sonlar guruhi mavjud bo‘lmasligini ko‘rsating.

Agar tenglikning o‘ng tomonidagi sonlar miqdori cheklanmasa, bunday guruh topiladi. Masalan, $3^3+4^3+5^3=6^3$.

3-masala. Bunday guruhlarning barchasini aniqlang. Agar o‘ng tomondagi sonlar guruhi chap tomondagi guruhning davomi bo‘lishi shart bo‘lmasa, misollar ko‘payadi:

$$3^3+4^3+\ldots+22^3=40^3, \quad 11^3+12^3+13^3+14^3=20^3.$$

So‘nggi holdan yana bir misol hosil bo‘ladi:

$$11^3+12^3+13^3+14^3+15^3+16^3+17^3+18^3+19^3=$$
$$=15^3+16^3+17^3+18^3+19^3+20^3.$$

4-masala. Bunday guruhlarni aniqlang. Xususan, bunday guruhlar cheksiz ko‘pmi yoki cheklimi?

5-masala. Kublar o‘rniga yuqori darajalar olinganda masalani tekshiring.

§ 13. Diofant tenglamalari. I[14]

Dastavval mana bu masalani ko‘raylik:

1-masala. Eshmat bozordan 500 so‘mga 40 ta qovun-tarvuz sotib oldi. Bunda bitta qovunning narxi 17 so‘m, bitta tarvuzniki 7 so‘mga to‘g‘ri keldi. Eshmat nechta qovun va nechta tarvuz sotib olgan?

Bu – asli arifmetik masala. Lekin uni algebra vositasida yechish osonroq (narxlar so‘m hisobida):

qovunlar soni – x, tarvuzlar soni – y;

qovunlar narxi – $17x$, tarvuzlarniki – $7y$.

Shartga ko‘ra:

qovun-tarvuzlar soni – $x+y=40$,

jami narxi – $17x+7y=500$.

Shunday qilib, aljabr tilida

$$\begin{cases} x+y=40 \\ 17x+7y=500 \end{cases} \qquad (1)$$

sistema hosil qilamiz. Birinchi tenglamani hadma-had 7 ga ko‘paytirib, ikkinchisidan ayirsak, y li had yo‘qolib,

$$10x=220 \qquad (2)$$

tenglamaga kelamiz. Uni yechib, $x=22$, so‘ng birinchi tenglamadan $y=18$ qiymatlarni topamiz.

Shunday qilib, yechim yagona: $x=8$, $y=17$, ya’ni Eshmat 8 ta qovun va 17 ta tarvuz olgan.

---

[14] FMI, 2005, №6.

Bu masalani algebrani qo'llamay, sof arifmetik mushohada bilan yechish ham qiyin emas. Lekin hozir biz uchun muhimi shuki, birinchidan, algebrani qo'llaganda ikki noma'lumli ikkita tenglamadan iborat (1) sistema hosil bo'ldi. Ikkinchidan, bu sistemadan y ni yo'qotish natijasida bir noma'lumli bitta (2) tenglama hosil bo'ldi. Bunday tenglama va sistemalar aniq deb yuritiladi. Ularda noma'lumlar soni bilan tenglamalar soni teng va, bundan tashqari, yechim faqat bitta chiqadi.

(Bu ta'rifga ko'ra,

$$\begin{cases} x+y=40 \\ 7x+7y=280 \end{cases}$$

sistema aniq emas: garchi noma'lumlar va tenglamalar soni bir xil bo'lsa ham, sistema aslida bitta tenglamaga tengkuchli.)

Endi mana bu masalani olaylik:

2-masala. Toshmat bozorga borib 500 so'mga jami 100 dona karam, pomidor va bodring sotib oldi: karam – 50 so'mdan, pomidor – 10 so'mdan, bodring – 1 so'mdan. Toshmat nechtadan karam, pomidor va bodring sotib olgan?

Algebrani qo'llaymiz: sotib olingan karamlar soni x, pomidorlar soni y va bodringlar soni z bo'lsin. Bu safar

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 50x+10y+z=500 \end{cases} \tag{3}$$

sistema hosil bo'ladi. Agar ikkinchi tenglamadan birinchisi hadma-had ayrilsa,

$$49x+9y=400 \tag{4}$$

tenglama kelib chiqadi. (3) sistema uchta noma'lumga nisbatan ikkita tenglamadan iborat. Shu singari, (4) –

ikki noma’lumli bitta tenglama. Ya’ni, bu ikki holda noma’lumlar soni tenglamalar sonidan ko‘p. Mana shu kabi hollarda aniqmas tenglama, aniqmas sistema iboralari qo‘llanadi.

Aniqmas tenglamada, odatda, noma’lumlarning qiymatini aniq topib bo‘lmaydi – bir yoki bir necha noma’lum erkin qoladi. Masalan, (4) tenglamani y noma’lumga nisbatan yechsak,

$$y=\frac{400-49x}{9} \tag{5}$$

formula chiqadi. Ravshanki, x ning qiymati qanday bo‘lmasin, y ning qiymati (5) formula bilan topilsa, (x,y) juftligi (4) tenglamaning yechimini beraveradi. Bunda, tabiiy, x nafaqat butun musbat, balki manfiy, kasr, hatto irratsional qiymatlar ham qabul qilishi mumkin.

Agar koordinatalar tekisligiga murojaat qilinsa, (4) tenglama to‘g‘ri chiziqni tasvirlashi ma’lum. Boshqacha qilib aytganda, (4) tenglamaning barcha yechimlari to‘g‘ri chiziq nuqtalari bilan o‘zaro mos keladi.

Qiziq holat: dastlab sistemada bitta tenglama kamlik qilgan edi. Yechimini olsak, u haddan ziyod ko‘p bo‘lmoqda. Xullas, masalada nimadir yetishmayotgandek.

Aslida ham shunday. 2-masalaga qaytaylik. Belgilashga ko‘ra x, y, z – karam, pomidor va bodringlar soni. Boshqa masalada mol, qo‘y kabi hayvonlar, yana birida xo‘roz, tovuqlar sonini va hokazo topish talab etilishi mumkin. Ravshanki, bu kabi masalalarda noma’lumlar kasr yoki manfiy son chiqishi masala mazmuniga zid. (Biror noma’lum 0 ga teng chiqishi joizmi – bu kelishuvga bog‘liq. Aytaylik, dehqon bozorga borgan-u pomidor bilan bodring olib, karam olmagan bo‘lsa, $x=0$.)

Demak, aslida (3) sistema 2-masalaning aynan algebraik ifodasi, deyish u qadar o‘rinli emas – sistemaga

$x,\ y,\ z$ ning butunligini va manfiy emasligini ham ilova qilish kerak. Odatda manfiy boʻlmagan butun sonlar toʻplami $\mathbb{N}$ deb belgilanadi.

Shunday qilib, 2-masalaga mos algebraik masalani

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 50x+10y+z=500 \\ x,y,z\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{6}$$

koʻrinishda yozish toʻgʻri boʻladi.

Shu singari, (3) sistemadan kelib chiqqan (4) tenglama aslida

$$49x+9y=400,\quad x,\ y\in\mathbb{N} \tag{7}$$

koʻrinishda yozilishi kerak.

Izoh. Ba’zi hollarda noma’lumlar butun manfiy qiymatlar, boshqa hollarda esa ratsional qiymatlar qabul qilishi joiz boʻladi. Bunday hollarda sistema yoki tenglamaga mos ravishda $x,y,z\in\mathbb{Z}$ yoki $x,y\in\mathbb{Q}$ kabi shartlar ilova qilinadi (chunki $\mathbb{Z}$ – barcha butun sonlar toʻplamini, $\mathbb{Q}$ esa ratsional sonlar toʻplamini belgilaydi). Biz bu maqola davomida yechimlar $\mathbb{Z}$ yoki $\mathbb{N}$ ga tegishli boʻlgan tenglamalarni qaramaymiz.

Taʻrif. Noma’lumlarning butun qiymatlarini topish talab etiladigan aniqmas tenglamalar ***Diofant tenglamalari*** deb yuritiladi.

Diofant – III asrda yashagan yunon matematigi. Uning “Arifmetika” deb nomlangan asari asosan mana shu toifa tenglamalarga bagʻishlangan.

Tabiiyki, Diofant tenglamasining nafaqat izlanadigan yechimlari, ayni paytda koeffitsientlari ham butun sonlar boʻlishi kerak.

Diofant tenglamalari algebraning oddiy tenglamalariga nisbatan boshqacha yondoshuvni talab etadi. Xususan, (5) formula (7) Diofant tenglamasining yechimi boʻla olmaydi – x ning qanday qiymatlarida y butun chiqishi ochiq qolmoqda. Bu tenglamani, masalan, quyidagicha yechish mumkin. Uni $45x+9y+4x=400$ shaklda yozib olamiz va 9 ga boʻlinadigan hadlarni jamlaymiz: $9(5x+y)+4x=400$.

Demak, $5x+y=u$ desak,

$$9u+4x=400 \tag{8}$$

hosil boʻladi. Bu – yangi aniqmas tenglama, lekin uning koeffitsientlari (7) nikiga qaraganda ancha kichik! Odatda (7) koʻrinishdagi Diofant tenglamasi mana shu yoʻsinda, ya'ni koeffitsientlarini qadamma-qadam kichraytirish yoʻli bilan yechiladi. Bu yerda esa osonroq yoʻldan davom etishga imkon bor: (8) tenglamadan u ning 4 ga boʻlinishi shart ekanligi koʻrinib turibdi. Demak, $u=4t$ deb olish mumkin, bunda t – ixtiyoriy butun son. Buni (8) tenglamaga qoʻyib, qisqartirgach,

$$x=100-9t$$

formula hosil qilamiz. Noma'lumlardan bittasi topildi. Endi ikkinchisini (7) tenglamadan yoki, $u=4t$ formuladan foydalanish mumkin:

$$y=u-5x=4t-5(100-9t)=49t-500.$$

Shunday qilib, (7) tenglamaning yechimlari uchun

$$x=100-9t, \quad y=49t-500, \quad t\in Z \tag{9}$$

ifoda hosil qildik.

Mashq. (9) formulalar bilan topilgan x va y haqiqatdan ham (7) formulani qanoatlantirishiga ishonch hosil qiling.

Umuman olganda, (9) formulalar (7) tenglamaning butun yechimlarini beradi. Biz esa uning butun musbat yechimlarini topishimiz kerak edi. Buning uchun

$$x = 100 - 9t \geq 0,\ \ y = 49t - 500 \geq 0,\ \text{ya'ni}\ 10\frac{10}{49} \leq t \leq 11\frac{1}{9}$$

tengsizliklar o'rinli bo'lishi kerak. t ning butun qiymatlaridan bu shartlarni faqat birgina $t = 11$ qanoatlantirishi ko'rinib turibdi. Bu qiymatni (9) formulalarga qo'yib, (7) tenglamaning $\mathbb{N}$ to'plamdagi yagona yechimi $x = 1,\ \ y = 39$ ekanligini topamiz. Bundan tashqari $x + y + z = 100$ tenglamadan $z = 60$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, 2-masalaning yechimi: Toshmat bitta karam, 39 ta pomidor va 60 ta bodring sotib olgan.

Mashq. Bu javob masala shartlarini qanoatlantirishini bevosita tekshirib ko'ring.

Natija g'aroyib: garchi (3) sistema aniqmas bo'lsa-da, masala yechimi yagona bo'lib chiqdi. Gap shundaki, $x, y,\ z \in \mathbb{N}$ shart masalani aniqlashtirib qo'ydi.

3-masala. (Qadimgi Xitoy, II asr). Dehqon bozordan 100 tangaga 100 ta parranda sotib oldi: xo'rozlarni 5 tangadan, makiyonlarni 4 tangadan, jo'jalarning to'rttasini bir tangadan. Dehqon nechtadan xo'roz, makiyon va jo'ja sotib olgan?

Sistema tuzamiz:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 4y + \dfrac{z}{4} = 100,\ \ x, y,\ z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tenglamalardan z ni yo'qotsak, x va y ga nisbatan $19x + 15y = 300$ Diofant tenglamasi hosil bo'ladi. Tenglamadan ko'rinib turibdiki, x albatta 15 ga bo'linishi kerak: $x = 15t,\ \ t \in \mathbb{Z}$. Bu qiymatni tenglamaga qo'yib, $y = 20 - 19t$ ni topamiz. Demak, ko'rilayotgan Diofant tenglamasining $\mathbb{Z}$ to'plamdagi yechimi $x = 15t,\ \ y = 20 - 19t$, $t \in \mathbb{Z}$ formulalar bilan berilar ekan. $\mathbb{N}$ to'plamdagi yechim bu safar ham yagona – u $t=1$ bo‘lganda hosil bo‘ladi. Javob: $x=5,\ y=1,\ z=84$.

Diofant tenglamasining musbat yechimi yagona chiqishi shart emas, albatta.

4-masala. Xolmat 100 so‘mga yuzta o‘quv quroli: daftar, ruchka va qalam xarid qildi. Agar daftarning narxi 3 so‘m, ruchkaniki – 5 so‘m bo‘lsa hamda bir so‘mga uchtadan qalam berilsa, Xolmat har bir o‘quv qurolidan nechtadan olgan?

Sistema tuzamiz:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\dfrac{z}{3}=100 \\ x, y,\ z\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Bu safar $7x+4y=100,\quad x,\ y\in\mathbb{N}$ Diofant tenglamasi kelib chiqadi.

Mashq. Bu tenglamani $\mathbb{Z}$ to‘plamda qarab, mustaqil yeching.

Javob: $x=4t,\quad y=25-7t,\quad t\in\mathbb{Z}$. Bundan ko‘rinadiki, agar $t=0$ qiymatni hisobga olmaganimizda ham, $t=1,2,3$ qiymatlarda mos x va y musbat bo‘ladi. Natijada uchta yechim hosil qilamiz:

O‘quv quroli	Belgisi	$t=1$		$t=2$		$t=3$	
		soni	narxi	soni	narxi	soni	narxi
Ruchka	x	4 ta	20 so‘m	8 ta	40 so‘m	12 ta	60 so‘m
Daftar	y	18 ta	54 so‘m	11 ta	33 so‘m	4 ta	12 so‘m
Qalam	z	78 ta	26 so‘m	81 ta	27 so‘m	84 ta	28 so‘m
JAMI		100 ta	100 so‘m	100 ta	100 so‘m	100 ta	100 so‘m

Matematik nuqtai nazardan masala to‘la yechildi. Ammo Xolmat aslida har qaysi o‘quv qurolidan nechtadan olganini aniqlash uchun qo‘shimcha ma’lumot zarur. Aytaylik, u har bir o‘quv qurolini to‘rtta o‘rtog‘iga teng qilib bo‘lib berishi kerak bo‘lsa, u holda uchinchi yechim masalaning yagona javobi bo‘ladi.

5-masala. Jonatan Svift asarining qahramoni Gulliver biri-biridan ajoyib va g‘aroyib mamlakatlarga sayohatlari bilan mashhur. Ana shunday mamlakatlardan biri bo‘lmish Laputada ikki xil qiymatli tangalardan foydalanilar ekan: 9 lapuli va 14 lapuli (lapu – Laputa pul birligi, xalqaro valyuta birjasidagi kursi bo‘yicha 1 lapu = $\sqrt{2}$ $ ekanligi qayd etilgan). Gulliverga maosh sifatida bir xalta 14 lapulik tanga berishdi. U do‘kondan 48 lapuga u-bu xarid qildi. O‘chakishganday, do‘konchida faqat 9 lapulik tangalar bor ekan. Gulliver do‘konchi bilan qanday hisob-kitob qilishi mumkin?

Yechish. Gulliver do‘konchiga x ta tanga bersin, do‘konchi unga y ta tanga qaytarsin. Agar

$$14x - 9y = 48 \tag{10}$$

shart bajarilsa, hisob-kitob joyida bo‘ladi. Shunday qilib, (10) Diofant tenglamasini yechishimiz lozim. 9 va 48 uchga bo‘lingani uchun, x ham uchga bo‘linishi shart. Shuning uchun, $x = 3z$ deb olish mumkin, bunda z – butun son. O‘rniga qo‘yib qisqartirsak,

$$14z - 3y = 16 \tag{11}$$

Diofant tenglamasi hosil bo‘ladi. Uni koeffitsientlarini kichraytirish usuli bilan yechamiz:

$$12z - 3y + 2z = 16,$$

$4z - y = u$ deb belgilangach,

$$3u+2z=16, \;\; 3u+3z-z=16,$$

$u+z=t$, deb belgilangach, $3t-z=16$ – shu yerda toʻxtaymiz, chunki nomaʼlumlardan birining oldidagi koeffitsient 1 ga teng boʻlib qoldi (ishorasidan qatʼiy nazar). Shuning uchun u bevosita topiladi: $z=16-3t$.

Bu qiymatni (11) tenglamaga qoʻyib, y ni aniqlaymiz: $y=14t-80$. Soʻng (10) dan x topiladi: $x=9t-48$.

Agar t ning qiymati 6 dan kichik boʻlsa, x va y manfiy chiqadi. $t=6$ boʻlganda, $x=6$, $y=4$ qiymatlarni topamiz. Shunday qilib, Gulliver doʻkonchiga 6 ta 14 lapulik tanga bersa va doʻkonchi unga 4 ta 9 lapulik tangga qaytarsa, roppa-rosa $6\cdot 14-4\cdot 9=84-36=48$ lapu toʻlangan boʻladi.

Eʼtibor qiling, bu safar Diofant tenglamasining butun musbat yechimi cheksiz koʻp – t ning 6 dan boshlab ixtiyoriy butun qiymatida yechim chiqaveradi. Xususan, $t=7$ ga mos yechim: Gulliver 15 ta 14 lapulik tanga berib, 18 ta 9 lapulik tanga qaytim olsa ham 48 lapu toʻlagan boʻladi.

6-masala. Kovboy qahvaxonaga kirib, 15 pachka sigaret va 6 otim nosvoy olgan edi, qahvafurush “20 dollar toʻlaysiz”, dedi. Shunda kovboy “Kimni aldamoqchisan?” deya toʻpponchasini chiqardi. Qoʻrqib ketgan barmen “Uzr, uzr, yanglishibman, yanagi safar toʻlab ketarsiz” deb javob berdi-yu, kovboy ketgach, oʻylanib qoldi: “Oʻz foydamga yanglish hisoblaganimni qanday qilib bir zumda bilvoldi ekan?”

Agar bir pachka sigareta x (dollar hisobida), bir otim nosvoy y dollar tursa, qahvafurush talabidan

$$6x+15y=20 \qquad (12)$$

Diofant tenglamasi kelib chiqadi. U butun yechimga ega emas – (12) tenglamaning chap tomoni 3 ga qoldiqsiz bo‘linadi, o‘ng tomoni esa 3 ga bo‘linmaydi.

Shunday qilib, $ax+by=c$ ko‘rinishdagi Diofant tenglamasi yechimga ega bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin ekan. Bu masalaning umumiy holi bilan kelgusi maqolada suhbatlashamiz.

Mashqlar. 1. (Hind matematigi Bxaskara masalalari). Diofant tenglamalarini yeching: a) $100x+90=63y$; b) $60x+16=13y$.

2. Agar Gulliverda faqat 9 lapulik, do‘konchida esa faqat 14 lapulik tangalar bo‘lsa, Gulliver qanday qilib 48 lapu to‘lashi mumkin?

3. Italyan matematigi Fibonachchi (12) masalasi: 30 parranda 30 tangaga sotildi. Agar tustovuqlar 3 tangadan, kakliklar 2 tangadan va bedanalarning ikkitasi bir tangadan sotilgan bo‘lsa, har qaysi parrandadan nechtadan sotilgan?

4. Shunday natural son topingki, 37 ga bo‘lsa, 30 qoldiq bersin, 47 ga bo‘lganda esa 40 qoldiq bersin.

§ 14. Diofant tenglamalari, eng katta umumiy bo'luvchi va Evklid algoritmi[15]

Avvalgi suhbatimizda

$$ax + by = c \qquad (1)$$

ko'rinishdagi ikki noma'lumli bitta tenglamaga misollar ko'rgandik. Agar bunday tenglamaning koeffisientlari ham butun son bo'lib, faqat butun yechimlari izlansa, u Diofant tenglamasi deb ataladi.

(1) tenglama koordinatalar tekisligida to'g'ri chiziqni tasvirlagani uchun, u chiziqli tenglama deyiladi. Biz o'rganayotgan holda esa, chiziqli Diofant tenglamasi deb ataladi.

Endi (1) ko'rinishdagi Diofant tenglamalari bilan yaqinroq tanishaylik. Qarangki, ular ikki butun sonning eng katta umumiy bo'luvchisi (qisqacha EKUB) tushunchasi bilan chambarchas bog'liq ekan.

Teorema. Agar (1) Diofant tenglamasi yechimga ega bo'lsa, c soni a va b ning EKUBiga qoldiqsiz bo'linadi. Aksincha, c soni a va b larning EKUBiga qoldiqsiz bo'linsa, (1) Diofant tenglamasi yechimga ega bo'ladi.

Teoremada, garchi Diofant tenglamasining yechimi qanday topilishi haqida hech narsa deyilmayotgan bo'lsa-da, uning isboti yechish usulini berishini ko'ramiz. Hozircha esa a va b koeffisientlarning EKUBi qanday topilishi ustida bosh qotiraylik. Birinchi usul – a va b sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish. Lekin bu qulay usul emas. Aytaylik, a sonining biror tub ko'paytuvchisini topish uchun bu sonni ketma-ket 2, 3, 5, 7, 11 va hokazo tub sonlarga bo'la boshlash va bu ishni to tub ko'paytuvchiga yo'liqquncha davom ettirish kerak. Masalan, $a =$ 5183 bo'lsa, bo'lish jarayoni 71 ga

---

[15] FMI, 2006, №1.

borganda toʻxtaydi. Shundan soʻng bu ish boʻlinma ustida davom ettirilishi lozim.

Ikki-uch xonali sonlar uchun-ku, tub koʻpaytuvchilarni topish u qadar qiyin emas, ammo vazifani 5-6 xonali sonlar uchun bajargudek boʻlsak, ancha hisob-kitob talab etadi. Yana ustiga-ustak, bu ishni b ustida ham bajarish lozim.

Qadimgi yunon olimi Evklid oʻzining “Negizlar” kitobida EKUBni topishning ancha oʻngʻay usulini bayon etgan. Bu usul Evklid algoritmi deb ataladi. (E’tibor bering: algoritm soʻzi Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy nisbasidan olingan, Evklid esa undan 1200 yil avval yashab oʻtgan. Gap shundaki, al-Xorazmiyning oʻnli sanoq sistemasiga bagʻishlangan “Hind hisobi haqida” kitobida algoritm gʻoyasi, ya’ni tayin natija bilan yakunlanadigan aniq farmoyishlar tizimi keng va izchil qoʻllangan. “Negizlar”dagi usul ham shu talabga javob bergani bois u Evklid algoritmi deb atalgan. Natijada bitta nomda ikki buyuk matematik xotirasi abadiylashgan).

Evklid algoritmi. Ikki butun musbat sonning EKUBini topish uchun:

1-qadam. Berilgan sonlarni taqqosla. Ular teng boʻlsa, 6-qadamga oʻt, aks holda 2-qadamga oʻt.

2-qadam. Birinchi sonni ikkinchisiga boʻl.

3-qadam. Qoldiqqa boq: agar u 0 ga teng boʻlsa, 6-qadamga, aks holda keyingi qadamga oʻt.

4-qadam. Ikkinchi sonni birinchi son deb, qoldiqni ikkinchi son deb ol.

5-qadam. 2-qadamga oʻt.

6-qadam. Ikkinchi son izlanayotgan EKUB boʻladi.

Misol. Berilgan sonlar 7560 va 1834 boʻlsin. Algoritmga muvofiq, 7560 ni 1834 ga boʻlamiz. Boʻlinma 4, qoldiq 224.

1834 ni 224 ga boʻlamiz. Boʻlinma 7, qoldiq 42.

224 ni 42 ga bo‘lamiz. Bo‘linma 5, qoldiq 14.

42 ni 14 ga bo‘lamiz. Bo‘linma 3, qoldiq 0.

Demak, 7560 bilan 1834 ning EKUBi 14 ekan.

Mashq. Natijani 7560 va 1834 sonlarini tub ko‘paytuvchilarga ajratib, tekshirib ko‘ring.

Endi nima uchun Evklid algoritmi chindan EKUB ni aniqlashini asoslaylik.

Birinchidan, bir sonni ikkinchi songa bo‘lganda, qoldiq har doim bo‘luvchidan kichik chiqadi. Ya’ni, Evklid algoritmida qoldiqlar qadamba-qadam kamayib boradi. Shuning uchun chekli qadamdan so‘ng qoldiq albatta 0 ga teng bo‘ladi.

Ikkinchidan, yuqoridagi hisob-kitoblarni ixcham qilib yozaylik:

$$7560 = 4\cdot 1834 + 224, \tag{2}$$
$$1834 = 7\cdot 224 + 42, \tag{3}$$
$$224 = 5\cdot 42 + 14, \tag{4}$$
$$42 = 3\cdot 14. \tag{5}$$

So‘ng bu “zinapoya” bo‘yicha “yuqoriga chiqib tushamiz”.

Yuqoriga:

(5) tenglikka ko‘ra, 42 soni 14 ga bo‘linadi. Demak,

(4) tenglikka ko‘ra, 224 soni 14 ga bo‘linadi. Demak,

(3) tenglikka ko‘ra, 1834 soni 14 ga bo‘linadi. Demak,

(2) tenglikka ko‘ra, 7560 soni 14 ga bo‘linadi.

Shunday qilib, 14 soni 7560 va 1834 ning umumiy bo‘luvchisi ekan.

Quyiga: soni 7560 va 1834 ning biror umumiy bo‘luvchisi d bo‘lsin. Ya’ni, 7560 ham, 1834 ham d ga bo‘linsin. U holda,

(2) tenglikka ko‘ra, d ga 224 bo‘linishi lozim. U holda,

(3) tenglikka ko‘ra, d ga 42 bo‘linishi lozim. U holda,

(4) tenglikka ko‘ra, d ga 14 bo‘linishi lozim.

Demak, 14 d dan katta bo‘lsa kattaki, kichik emas.

Shunday qilib, 14 chindan 7560 va 1834 sonlari umumiy bo‘luvchilarining eng kattasi ekan!

Bu yerda tayin bir misol uchun o‘tkazilgan mushohada umumiy holda ham o‘rinli. Yuqori sinf o‘quvchilariga “yuqoriga va quyiga” mushohadasini umumiy holda, ya’ni berilgan sonlar n_1 va n_2 bo‘lganda bajarib, Evklid algoritmini to‘liq isbotlashni tavsiya etamiz. Bunda “zinapoya” mana bunday ko‘rinishda bo‘ladi:

$n_1 = m_1\, n_2 + n_3$ – bo‘linma m_1, qoldiq n_3,
$n_2 = m_2\, n_3 + n_4$ – bo‘linma m_2, qoldiq n_4,
$n_3 = m_3\, n_4 + n_5$ – bo‘linma m_3, qoldiq n_5,
...
$n_{k-3} = m_{k-3}\, n_{k-2} + n_{k-1}$ – bo‘linma m_{k-3}, qoldiq n_{k-1},
$n_{k-2} = m_{k-2}\, n_{k-1} + n_k$ – bo‘linma m_{k-2}, qoldiq n_k,
$n_{k-1} = m_{k-1}\, n_k$ – bo‘linma m_k, qoldiq 0.

Endi Evklid algoritmining Diofant tenglamasiga aloqasini ko‘raylik. Buning uchun (2)-(4) tengliklarni mana bunday qilib yozib olamiz:

$$7560 - 4 \cdot 1834 = 224, \qquad (2')$$
$$1834 - 7 \cdot 224 = 42, \qquad (3')$$
$$224 - 5 \cdot 42 = 14. \qquad (4')$$

So‘ng ko‘rsatilgani bo‘yicha sonlarni o‘ziga teng ifodalar bilan almashtirish amalini bajaramiz. Bunda “pastdan yuqoriga” tomon harakat qilamiz.

Birinchi qadam. (4′) tenglikdagi 42 o‘rniga (3′) tenglikning chap tomonidagi ifodani qo‘yamiz: $224 - 5 \cdot (1834 - 7 \cdot 224) = 14$.

Bu ifodani mana bunday tarzda ixchamlaymiz:

$$-5 \cdot 1834 + 36 \cdot 224 = 14. \qquad (6)$$

Ikkinchi qadam. (6) tenglikdagi 224 o'rniga (2$'$) tenglikning chap tomonidagi ifodani qo'yamiz:

$$-5\cdot 1834+36\cdot(7560-4\cdot 1834)=14.$$

Ixchamlasak: $36\cdot 7560-149\cdot 1834=14$. Yoki baribir

$$7560\cdot 36+1834\cdot(-149)=14, \tag{7}$$

Bu tenglikdan ko'rinadiki, $x=36$ va $y=-149$ sonlari $7560x+1834y=14$ Diofant tenglamasining yechimidan iborat.

Savol tug'iladi: 14 – bu 7560 bilan 1834 ning EKUB edi, 14 o'rnida boshqa son tursa-chi? Masalan,

$$7560x+1834y=c. \tag{8}$$

Ravshanki, agar c soni 14 ga bo'linmasa, (8) tenglama yechimga ega emas, chunki chap tomoni 14 ga bo'linadi.

c soni 14 ga bo'linsin, aytaylik, $c=14s$ bo'lsin. U holda (7) tenglikning har ikki tomonini s ga ko'paytiramiz:

$$7560\cdot 36s+1834\cdot(-149s)=14s.$$

Binobarin, $x=36s$ va $y=-149s$ sonlari (8) tenglamaning yechimi bo'ladi.

Xullas, Evklid algoritmi Diofant tenglamasining bitta yechimini topib beradi. Bunday yechim Diofant tenglamasining xususiy yechimi deb yuritiladi. Jumladan, $x=36$, $y=-149$ juftlik $7560x+1834y=14$ tenglamaning xususiy yechimi bo'ladi.

Xususiy yechimdagi x, y ning qiymatlaridan biri manfiy chiqishi mumkin. Shuning uchun "Diofant tenglamasining boshqa yechimlari ham bormi? Bor bo'lsa, qanday topiladi?" degan masala tug'iladi. Bu masala oson yechilar ekan.

Faraz qilaylik, (1) Diofant tenglamasining x_0, y_0 xususiy yechimi ma'lum. Tenglama yechimga ega bo'lishi uchun, c had a va b ning EKUBi, ya'ni $d=(a,b)$ ga bo'linishi shart ekanligini aytib o'tgan edik. Demak, tenglamada a,b,c sonlarini d ga qisqartirish mumkin. Natijada, x va y oldidagi koefftsientlar o'zaro tub bo'lgan tenglama hosil bo'ladi. Biz berilgan (1) tenglamaning o'zida a va b o'zaro tub deb olaveramiz.

(1) tenglama bilan bir qatorda

$$ax+by=0 \tag{9}$$

tenglamani o'rganamiz. U bir jinsli chiziqli Diofant tenglamasi deb ataladi. Uni $ax=-by$ ko'rinishda yozib olsak, a va b ning o'zaro tubligidan shunday xulosa kelib chiqadi: x va y ning qiymatlari (9) tenglamani qanoatlantirsa, u holda x soni b ga, y soni esa a ga bo'linadi. Boshqacha qilib aytganda, $\frac{x}{b}$, $\frac{y}{a}$, nisbatlar butun sonlardan iborat. (9) tenglamaga asosan,

$$\frac{x}{b}=-\frac{y}{a}$$

bo'lishini ko'ramiz. Demak, bu ikki nisbat butun sondan iborat. Shu sonni t bilan belgilasak,

$$x=bt,\ \ y=-at \tag{10}$$

tengliklarni hosil qilamiz. t ning ixtiyoriy butun qiymatida (10) formulalar bilan aniqlangan (9) tenglamani qanoatlantirishi ko'rinib turibdi. Ya'ni, (9) tenglamaning barcha yechimlari

$$x=bt,\ \ y=-at,\ \ t\in\mathbb{Z} \tag{11}$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Shunday qilib, x, y (9) tenglamaning butun yechimi bo‘lsa, (11) formula o‘rinlidir. Aksincha, (11) formulalar (9) Diofant tenglamasini qanoatlantirishi ko‘rinib turibdi. Shuning uchun (11) formulalar birjinsli Diofant tenglamasining umumiy yechimi deyiladi.

Endi (1) Diofant tenglamasining umumiy yechimini osongina topa olamiz:

(1) Diofant tenglamasining umumiy yechimi uning xususiy yechimga va mos birjinsli (9) tenglamaning umumiy yechimini qo‘shish bilan hosil qilinadi:

$$x_{um} = x_0 + bt,\ y_{um} = y_0 - at,\ t \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Belgilashga ko‘ra x_0, y_0 (1) tenglamaning xususiy yechimi edi. x_1, y_1 uning boshqa (istalgan) yechimi bo‘lsin. Demak,

$$ax_1 + by_1 = c,$$
$$ax_0 + by_0 = c.$$

Yuqoridagi tenglamadan quyidagisini hadma-had ayirsak,

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0$$

tenglik hosil bo‘ladi. Bundan $x_1 - x_0, y_1 - y_0$ sonlari (9) tenglamaning yechimini tashkil qilishi kelib chiqadi. U holda, isbotlanganga ko‘ra, biror butun t uchun
$x_1 - x_0 = bt,\ \ y_1 - y_0 = -at$
formulalar o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa (12) formulalar olinadi.

Misol. Toshmatning bozorga borgani to‘g‘risidagi masala

$$49x + 9y = 400 \qquad (13)$$

Diofant tenglamasiga keltirilgan edi (§13 ga q.) Evklid algoritmini qo‘llasak, ikki qadamdayoq qoldiq 1 ga teng chiqadi:

$49 = 5 \cdot 9 + 4,$
9= $2 \cdot 4 + 1$ bu – 49 va 9 o‘zaro tub degani.

Endi yuqoridagi tenglikni $4 = 49 - 5 \cdot 9$ deb yozib olib, quyidagi tenglamaga qo‘ysak, $9 - 2 \cdot (49 - 5 \cdot 9) = 1,$ yoki $49 \cdot (-2) + 9 \cdot 11 = 1$ hosil bo‘ladi. Bu tenglikning har ikki tomonini 400 ga ko‘paytirsak:

$$49 \cdot (-2 \cdot 400) + 9 \cdot (11 \cdot 400) = 1.$$

Demak, $x_1 = -800,\ y_1 = 4400$ qarayotgan tenglamamizning xususiy yechimi bo‘lar ekan. (13) ga mos birjinsli tenglamaning umumiy yechimi:

$$x = bt = 9t, \quad y = -at = -49t,\ t \in \mathbb{Z}.$$

Demak, (13) tenglamaning umumiy yechimi, qoidaga ko‘ra:

$$x_1 = x_0 + bt = -800 + 9t, \quad y_1 = y_0 - at = 4400 - 49t,\ t \in \mathbb{Z}.$$

Masalaning shartiga muvofiq yechim musbat sonlardan iborat bo‘lishi kerak:

$$-800 + 9t > 0, \quad 4400 - 49t > 0.$$

Bundan $88\frac{8}{9} < t < 89\frac{39}{49}$ – bu qo‘sh tengsizlikni t ning faqat bitta butun qiymati qanoatlatiradi: $t = 89.$ Shunday qilib, masala faqat bitta yechimga ega:

$$x_1 = -800 + 9 \cdot 89 = -800 + 801 = 1,$$
$$y_1 = 400 - 49 \cdot 89 = 4400 - 4361 = 39.$$

Biz bu yechimni avvalgi maqolada ancha qisqa yo‘l bilan topgan edik. Bu yerda keltirilgan yechim umuman olganda qisqa emas, lekin u (1) ko‘rinishdagi Diofant tenglamasini yechishning umumiy qoidasini beradi.

Masala. Shunday natural son topingki, 37 ga bo‘lsa, 30 qoldiq bersin, 47 ga bo‘lganda esa 40 qoldiq bersin.

Yechish. So‘ralayotgan sonni n, uni 37 va 47 ga bo‘lganda chiqadigan bo‘linmalarni x va y deb belgilaylik. U holda,

$$n = 37x + 30, \quad n = 47y + 40.$$

Demak, $37x + 30 = 47y + 40$, ya’ni $37x - 47y = 10$ Diofant tenglamasi hosil bo‘ladi. Koeffisientlariga Evklid algoritmini qo‘llaymiz:

$$47 = 37 + 10, \quad 37 = 3 \cdot 10 + 7, \;\; 10 = 7 + 3, \;\; 7 = 2 \cdot 3 + 1.$$

Bu tengliklarga asosan:

$$1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2 \cdot (10 - 7) = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 3 \cdot (37 - 3 \cdot 10) - 2 \cdot 10 =$$
$$= 3 \cdot 37 - 11 \cdot 10 = 3 \cdot 37 - 11 \cdot (47 - 37) = 14 \cdot 37 - 11 \cdot 47.$$

Shunday qilib, $x = 14, y = 11$ qiymatlar $37x - 47y = 1$ tenglamaning xususiy yechimi, $x = 140, y = 110$ qiymatlar esa berilgan $37x - 47y = 10$ tenglamaning xususiy yechimi.

$37x - 47y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi $x = 47t$, $y = 37t$, $t \in \mathbb{Z}$, bo‘lishini payqash qiyin emas (tenglamadagi – ishorasi evaziga y uchun formulada bu ishora bo‘lmaydi).

Demak, tenglamamizning umumiy yechimi:

$$x = 140 + 47t, \quad y = 110 + 37t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Bu safar Diofant tenglamasi cheksiz ko‘p musbat yechimlarga ega: $t = 0, 1, 2, 3, ...$ qiymatlar qo‘yilsa, x ham, y ham musbat chiqaveradi. Ulardan eng kichigini topaylik:

$$140 + 47t \geq 0, \quad 110 + 37t \geq 0;$$

$$t \geq -2\frac{46}{47}, \qquad t \geq -2\frac{36}{37},$$

demak, $t = -2$ bo‘lganda eng kichik qiymatlar chiqadi.

Yechimni oxiriga yetkazish uchun, (12) tenglikka asosan, n uchun formula chiqarish qoladi:

$$n = 37x + 30 = 37 \cdot (140 + 47t) + 30 = 5210 + 1739t, \quad t \in Z.$$

Xususan, 37 ga bo‘lganda 30, 47 ga bo‘lganda 40 qoldiq beradigan musbat sonlardan eng kichigi

$$n = 5210 + 1739 \cdot (-2) = 1732.$$

Haqiqatda 1732 ni 37 ga bo‘lganda 30 qoldiq, 47 ga bo‘lganda esa 40 qoldiq chiqishini tekshirib ko‘rish mumkin.

Mashq. 7 ga bo‘lganda 3 qoldiq, 17 ga bo‘lganda 13 qoldiq, 27 ga bo‘lganda 23 qoldiq beradigan sonlarni toping.

Ko‘rsatma. Avval 7 ga bo‘lganda 3 qoldiq, 17 ga bo‘lganda 13 qoldiq beradigan sonlar uchun umumiy formula toping. So‘ng ular orasidan 27 ga bo‘lganda 23 qoldiq beradiganlarini izlang.

§ 15. Eng mashhur teorema[16]

Eng mashhur teorema bu, albatta, Pifagor teoremasidir: katetlar kvadratlari yig‘indisi gipotenuzaning kvadratiga teng.

Bu teorema, birinchidan, Pifagordan ancha avval – Bobil va Qadimgi Misr yozma yodgorliklarida uchraydi, Pifagordan qolgan yodgorliklarda esa, aksincha, uchramaydi. Lekin u teorema sifatida birinchi marta Pifagor davrida, uning o‘zi yoki shogirlaridan biri tomonidan isbotlangani tarixiy dalillar asosida aniqlangan.

Ikkinchidan, yuqoridagi ta’rif juda ixchamligi bilan esda qolarli-yu, ammo uncha to‘g‘ri emas: uchburchak tomoni – bu kesma, kesmaning kvadrati tushunchasi esa aniq emas. Pifagor teoremasini ikki usulda aniq bayon qilish mumkin.

Yuzalar bayonida: To‘g‘ri burchakli uchburchak tomonlariga kvadratlar yasalgan bo‘lsa, katetlarga yasalgan kvadratlar yuzlarining yig‘indisi, gipotenuzaga yasalgan kvadrat yuziga teng.

Kesmalar (uzunliklari) bayonida: To‘g‘ri burchakli uchburchak katetlarining uzunligi a, b gipotenuzasining uzunligi c bo‘lsa, u holda $a^2+b^2=c^2$ (bunda har uch kesmaning uzunligi bir xil o‘lchov birligida, masalan, metrlarda o‘lchanishi ko‘zda tutiladi).

Pifagor teoremasi ko‘pchilikka ma’lumligidan tashqari yana bir jihati bilan ham mashhur: uning xilma-xil isbotlari topilgan (yuzdan ortadi). Bu maqola mana shu mavzuga bag‘ishlangan.

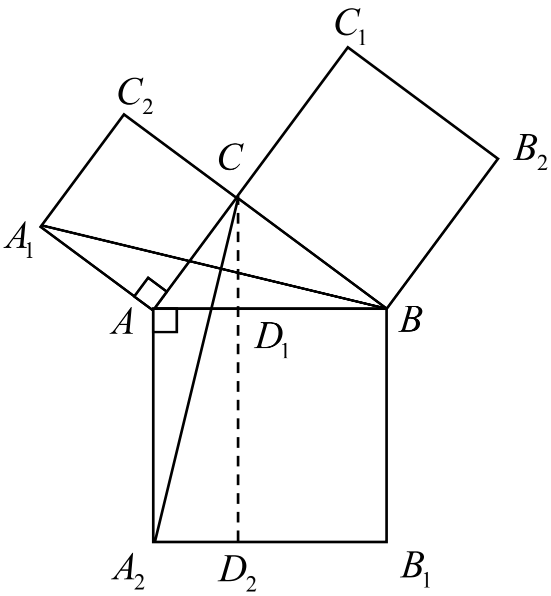
1-isbot (Prokl, III asr). To‘g‘ri burchak uchidan gipotenuzaga perpendikulyar o‘tgan to‘g‘ri chiziq bilan katta kvadratni ikkita to‘g‘ri to‘rtburchakka bo‘lamiz.

---

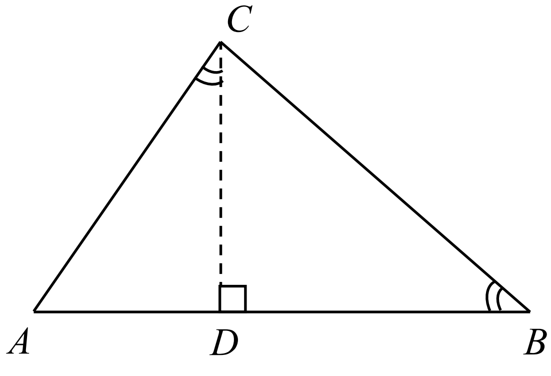
[16] FMI, 2002, №2.

So‘ng A_1 va B uchlarni hamda A_2 va C uchlarni tutashtiramiz. Hosil bo‘lgan AA_1B va AA_2C uchburchaklar teng, chunki bittadan tomonlari kichik kvadrat tomonlaridan iborat, yana bittadan tomonlari katta kvadrat tomonlaridir, ular orasidagi har ikki burchak ham BAC burchakka to‘g‘ri burchak qo‘shilganiga teng (1-rasm).

Endi quyidagiga e’tibor qilaylik: AA_1B uchburchakning asosi kichik kvadrat asosi bilan bitta, balandliklari ham bir xil, demak, uning yuzi kichik kvadrat yuzining yarmiga teng. Shu singari, AA_2C uchburchak yuzi $AA_2D_2D_1$ to‘rtburchak yuzining yarmiga teng. Bundan kichik to‘rtburchak yuzi kichik kvadratning yuziga tengligi kelib chiqadi. (Bu xossa Evklid teoremasi ham deyiladi). Xuddi shu singari, BB_2C_1C kvadrat yuzi $BB_1D_2D_1$ to‘rtburchak yuziga teng. Shu bilan Pifagor teoremasi isbotlandi (yuzlar bayonida).



1-rasm.



2-rasm.

Isbotning afzalligi: nozik va go‘zal mushohadaga asoslangan; kamchiligi: uni bilmagan odam o‘ylab topishi qiyin. (Bu isbotni nemis matematigi Shopengauer “geometrik qopqon” deb atagan).

2-isbot (an’anaviy). Gipotenuzaga tushirilgan CD

perpendikulyar to‘g‘ri burchakli uchburchakni uning o‘ziga o‘xshash ikkita uchburchakka ajratadi (2-rasm) (uchchala uchburchakning ikkitadan burchaklari teng). O‘xshash uchburchaklarning mos tomonlari proportsional bo‘lishiga asoslanib quyidagi nisbatlarni hosil qilamiz:

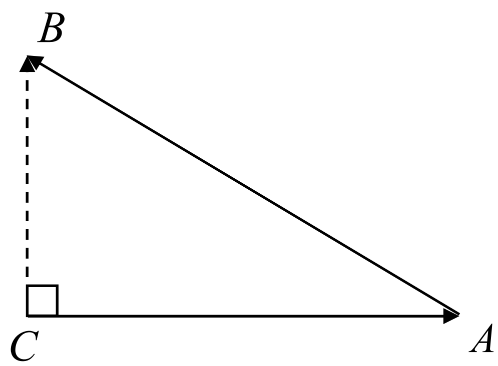
$$AD : AC = AC : AB, \quad BD : BC = BC : AB$$

Bundan $AC^2 = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD}$, $BC^2 = \mathrm{AB} \cdot BD$. Har ikki tenglikni qo‘shib, $AD + BD = AB$ ekanini hisobga olsak, $AC^2 + BC^2 = AB^2$ tenglikka kelamiz. Bu esa – Pifagor teoremasi (kesmalar bayonida). Afzalligi: mantiqiy eng bekamu ko‘st isbot; kamchiligi – geometriyaning nisbatan sodda teoremasi ancha murakkab mavzu – o‘xshashlikka asoslanadi (“O‘xshash uchburchaklar nima?” degan savolning o‘zi sodda emas).

3-isbot (Burbakicha). ABC uchburchak tomonlari buylab vektorlar yunaltiramiz. Shunda $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, demak,

$$\overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2 = \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}^2 \qquad (*)$$

ACB burchak to‘g‘ri bo‘lsa, $\overrightarrow{CB}$ va $\overrightarrow{CA}$ vektorlar ortogonal va skalyar ko‘paytmasi, ya’ni $2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$ had 0 ga teng bo‘ladi (3-rasm).



3-rasm.

Afzalligi: eng lo‘nda isbot; kamchiligi: geometriya emas, algebra. (Burbaki – geometriyani chizmalarsiz bayon qilish va o‘qitish tarafdori bo‘lgan fransiyalik matematiklar guruhining laqabi, XX asr).

4-isbot (trigonometrik).

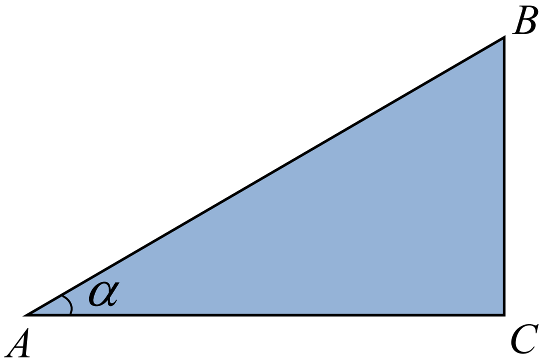
Ta'rifga ko'ra, (4-rasm).

$$AC = AB\cos\alpha,\ \ BC = AB\sin\alpha.$$

Bundan, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ayniyatga ko'ra:

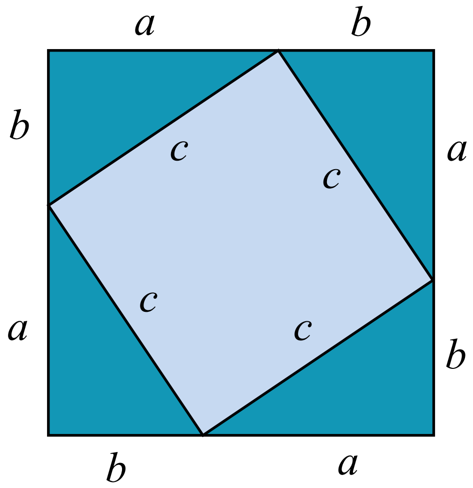
$$AC^2\ +\ BC^2 =$$

$$AB^2\cos^2\alpha + AB^2\sin^2\alpha = AB^2.$$



4-rasm.

Afzalligi: qisqa, kamchiligi: g'irromroq, chunki quyidagi $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ayniyat aslida Pifagor teoremasiga asoslanadi. Bu isbotni mantiqan to'g'rilash mumkin, lekin unda soddalik xususiyatini yo'qotadi.



5-rasm.

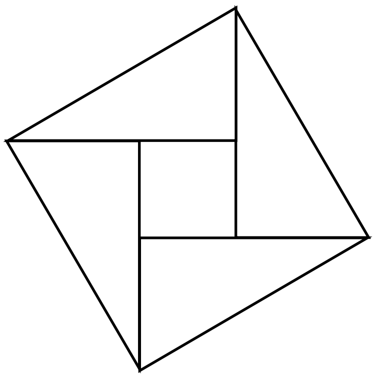
5-isbot. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ formulaning geometrik ifodasiga asoslanadi. Qadimgi Yunonistonda algebra formulalari aynan geometrik ko'rinishda ishlatilgan, Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy ularni shu ko'rinishda kvadrat tenglamaning yechimini asoslashga qo'llagan.

Tomoni c ga teng kvadratga tashqi tomondan to'g'ri burchakli uchburchaklar yopishtirilgan (5-rasm). Uchburchak burchaklari yig'indisi yoyiq burchakka teng bo'lgani uchun bir uchburchakning katta kateti unga qo'shni uchburchakning kichik katetining davomi bo'ladi. Demak, natijada tomoni $a+b$ ga teng kvadrat hosil bo'ladi. Uning yuzini ikki usulda hisoblaymiz:

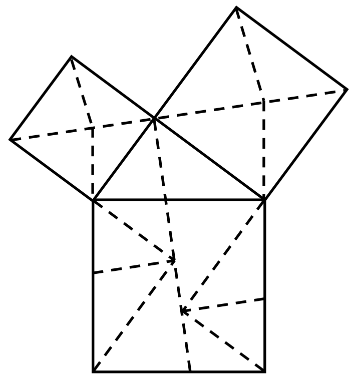
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + \ b^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

So‘nggi tenglikning har ikki tomoni $2ab$ ga qisqartirilsa, Pifagor teoremasi hosil bo‘ladi.

3.1-masala. Uchburchaklarni kvadrat ichiga chizib, Pifagor teoremasining yana bir isbotini namoyish eting. Eradan oldingi III asrda qadimgi Xitoyda Pifagor teoremasi shu usulda isbotlangan. Afzalligi: sodda va yaqqol; kamchiligi: yana asosan algebra (6-rasm).



6-rasm.



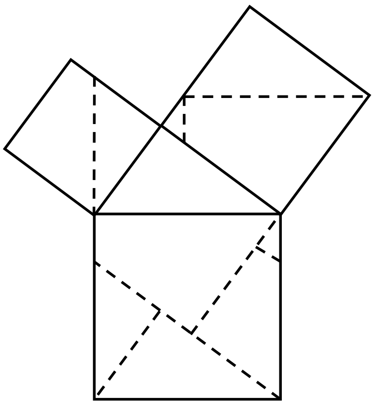
7*a*-rasm.
Enshteyn (XVIII asr)

6-8 isbotlar (qaychi bilan).

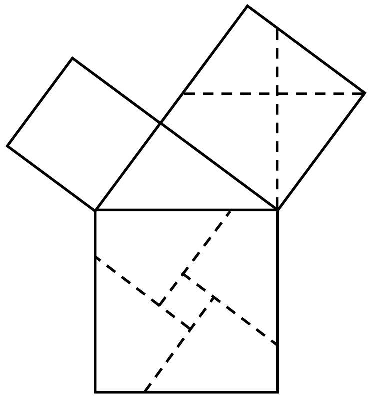
Bu isbotni XVIII asrda Enshteyn ismli matematik topgan. Hozir bu toifadagi isbotlarning yuzga yaqin namunasi ma’lum. Ulardan ikkita eng ixchamlari diqqatga molik (7*a* – 7*c* rasmlar).

Afzalligi: yaqqol. An-Nayriziy isbotining qo‘shimcha xossasi: katta kvadrat atigi 5 bo‘lakka bo‘lingan va bo‘laklarini parallel ko‘chirib kichik kvadratlarni yig‘ish mumkin. Perigal isbotining qo‘shimcha xossasi: kvadratlar bo‘linishi simmetrik; kamchiligi: to‘liq emas – mos shakllarning o‘zaro tengligi isbotlanishi lozim.

3.2-masala. Uchchala holda ham mos shakllarning o‘zaro tengligini ko‘rsating.



7b-rasm
An-Nayriziy isboti
(X asr)

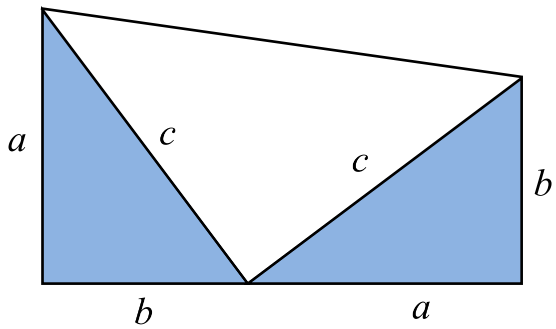


7c-rasm
Perigal isboti
("Tegirmon", XIX asr)

9-isbot (shakli eng tejamli). Bir tomondan, trapetsiyaning asoslari a, b balandligi $a+b$, demak, yuzi

$$\frac{a+b}{2}\cdot(a+b)=\frac{a^2}{2}+ab+\frac{b^2}{2},$$

ikkinchi tomondan, u uchta to'g'ri burchakli uchburchakdan tashkil topgani uchun yuzi



8-rasm.

$$\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{ab}{2}=ab+\frac{c^2}{2}$$

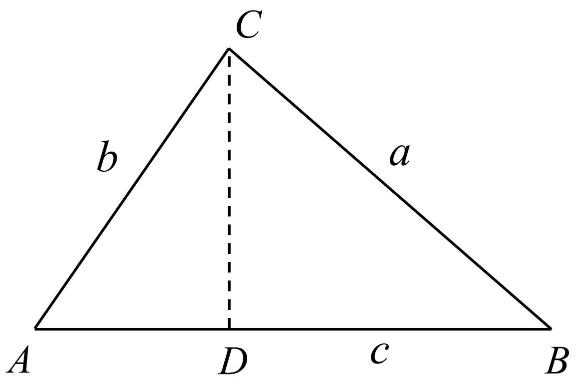
Har ikki ifoda tenglashtirilsa,

$$a^2+b^2=c^2$$

Afzalligi: g'aroyib; kamchiligi ham shunda (8-rasm).

3.3-masala. Pifagor teoremasini Geron formulasidan keltirib chiqarish mumkinligini isbotlang. Geron formulasining o'zi Pifagor teoremasiga asoslanadimi?

10-isbot (Teoremadan teorema). “O‘xshash ikki uchburchak yuzlarining nisbati mos tomonlar kvadratlarining nisbatiga teng”, degan teoremadan foydalanamiz. Gipotenuzaga balandlik tushirilsa, o‘zaro o‘xshash uchta uchburchak hosil bo‘lishini ta’kidlagan edik. Demak,



$$\frac{c^2}{S_{ABC}}=\frac{a^2}{S_{BCD}}=\frac{b^2}{S_{ACD}}.$$

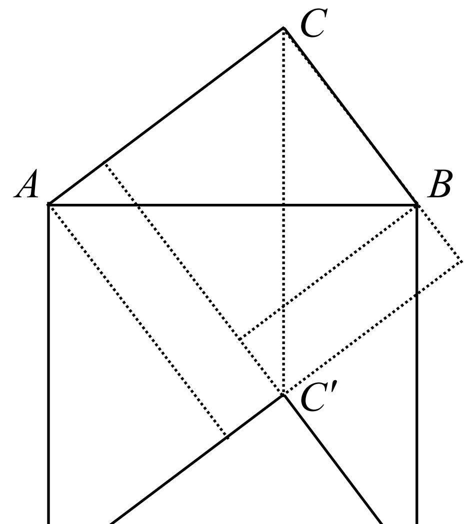
9-rasm.

Proportsiya xossasiga ko‘ra

$$\frac{c^2}{S_{ABC}}=\frac{a^2+b^2}{S_{BCD}+S_{ACD}}=\frac{a^2+b^2}{S_{ABC}}.$$

Bundan Pifagor teoremasi hosil bo‘ladi (9-rasm).

11-isbot (nihoyat, navbat fizikaga). To‘g‘ri burchakli uchburchakning yuzi S (m^2 larda o‘lchansin) uning gipotenuzasi uzunligi c (m larda) va bir o‘tkir burchagi α (radianda, ya’ni, o‘lchovsiz) orqali to‘liq aniqlanadi. Bu uch kattalik o‘rtasida faqat $S=c^2 f(\alpha)$ ko‘rinishidagi bog‘lanish bo‘lishi mumkin. 9-rasmga ko‘ra,



$$a^2 f(\alpha)+b^2 f(\alpha)=c^2 f(\alpha)$$

10-rasm.

$f(\alpha)\neq 0$ emasligi ravshan. Demak, $a^2+b^2=c^2$.

Pifagor teoremasi haqidagi hikoyamizni uning yana bir, muallifga hozirgacha adabiyotda uchramagan isboti bilan yakunlaymiz. U birinchi hamda 3.1-masala g‘oyalariga asoslanib, isbotning yaqqol va ixchamligi bilan xarakterlanadi. ABC uchburchak gipotenuzasiga tashqaridan, katetlariga esa ichkaridan kvadrat yasaymiz. Agar ABC uchburchak parallel ko‘chirilib, katta kvadratning qarama-qarshi tomoniga yopishtirilsa, hosil bo‘lgan $ACBB'C'A'$ oltiburchak yuzi katta kvadrat yuziga teng bo‘ladi (10-rasm). Lekin $CC'BB'$ parallelogramm BC katetga yasalgan kvadrat bilan tengdosh – har ikkisining asoslari BC, balandliklari ham umumiy. Xuddi shu singari, $AA'CC'$ parallelogramm AC katetga yasalgan kvadrat bilan tengdosh.

§ 16. Eng sodda geometriya[17]

Maktabda geometriyaning ikki muhim bo‘limi o‘rganiladi:

planimetriyada – tekislikdagi figuralarning xossalari,

stereometriyada – fazoviy figuralarning xossalari.

Trigonometriya-chi? Kelib chiqishiga ko‘ra u planimetriyaning bir bo‘lagi – uchburchaklar xosssalarini o‘rganadi. Bunda uchburchaklarning burchagi 0° bilan 180° orasida yotadi, xolos. Agar trigonometrik funksiyalar istalgan burchaklar uchun aniqlansa, ular geometriyadan ko‘ra ko‘proq algebra va matematik analizga taalluqli bo‘ladi.

Lekin boshqa tomondan geometriyaning yuqorida tilga olingan ikki qismidan boshqa yana juda ko‘p sohalari bor: noevklid geometriya, sferik geometriya, proyektiv geometriya, ko‘p o‘lchovli geometriya.

[17] FMI, 2008, №6.

Ulardan ayrimlari u yoki bu darajada maktab matematikasida uchraydi. Masalan, ikki uchburchak tengligining alomatlari asosan Evklid geometriyasining teoremalari bo'lsa, ikki uchburchak o'xshashligining alomatlari mohiyatan boshqa – o'xshashlik geometriyasining teoremalaridir. “Uchburchakning balandliklari bir nuqtada kesishadi” degan teorema ham ana shu o'xshashlik geometriyasiga oid, “uchburchakning medianalari bir nuqta kesishadi” degan teorema esa asosan affin geometriya deb ataladigan sohaga taalluqli.

Geometriyaning tilga olingan uch sohasi kengayib borgan:

$$\text{Evklid geometriyasi} \Leftarrow \text{o'xshashlik geometriyasi} \Leftarrow \text{affin geometriya.}$$

(Bu munosabatlarni shunday tushunish lozim: affin geometriyaning teoremalari o'xshashlik geometriyasida ham o'rinli bo'ladi, o'xshashlik geometriyasining teoremasi esa albatta Evklid geometriyasining ham teoremasi bo'ladi.)

Bir-biridan keskin farq qiladigan teoremalarga ega geometriyalar ham mavjud. Masalan,

Evklid (o'xshashlik) geometriyasida uchburchak ichki burchaklar yig'indisi 180° ga teng.

Sfera ustidagi geometriyada (hamda unga yaqin Riman geometriyasida) uchburchak ichki burchaklar yig'indisi 180° dan katta.

Lobachevskiy geometriyasida uchburchak ichki burchaklari yig'indisi 180° dan kichik.

Bu uch xossa mos tartibda mana bu xossalarga teng kuchli: a to'g'ri chiziq bilan uning ustida yotmaydigan P nuqta olingan bo'lsin. U holda:

P nuqta orqali a ga parallel yagona to'g'ri chiziq o'tadi;

P nuqta orqali a ga bitta ham parallel to‘g‘ri chiziq o‘tmaydi;

P nuqta orqali a ga parallel cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

Biz xilma-xil geometriyalar mavzusiga yana qaytamiz. Hozir esa birinchi qadam sifatida geometriyalarning eng soddasi bilan shug‘ullanaylik. U – to‘g‘ri chiziq ustidagi geometriyadir. Bu geometriya shu qadar soddaki, uni hatto geometriya deb atashga uncha til bormaydi. Axir bunday geometriyada, masalan, burchak degan tushuncha yo‘q, figuralar esa nuqta, kesma, nur, yana...

Shu bilan birga, unda geometriya uchun muhim masofa tushunchasi bor.

Tekislik va fazo geometriyasidagi kabi koordinatalar sistemasi kiritilsa, to‘g‘ri chiziq son o‘qiga aylanadi. Biz qulaylik uchun bu ish bajarilgan deb hisoblaymiz. Bunda to‘g‘ri chiziq nuqtalari o‘rniga ularning koordinatalari – haqiqiy sonlar bilan ishlayverish mumkin. Masalan, x va y orasidagi $|xy|$ masofa (geometrik tushuncha) $|x-y|$ ga teng bo‘ladi (ya’ni, ayirma va absolyut qiymat kabi algebraik amallar orqali ifodalanadi).

Geometriya qanaqa bo‘lmasin, birinchi navbatda tenglik tushunchasini aniqlab olish lozim.

Tekislik geometriyasida ikki figuraning tengligiga ta’rif berish oson emas – axir figuralar g‘oyat xilma-xil-da. Evklid geometriyasida odatda figuralar tengligi harakat tushunchasi asosida ta’riflanadi: agar A figurani biror harakat vositasida B figura bilan ustma-ust tushurish mumkin bo‘lsa, A figura B ga teng deyiladi.

To‘g‘risini aytganda, bu ta’rif mantiqan mukammal emas. Xo‘sh, harakat nima degani? Ustma-ust tushirish mumkin degani-chi? Kavlasa, yana boshqa savollar ham chiqadi. Bu maqolada “eng sodda geometriya” misolida masalaga oydinlik kiritmoqchimiz. Harakatning eng muhim xossasi: harakat natijasida nuqtalar orasidagi masofa o‘zgarmaydi.

Shundan kelib chiqib, ayrim kitoblarda harakatga mana bunday ta’rif beriladi:

Tekislikning harakati – tekislikning nuqtalar orasidagi masofani o‘zgartirmaydigan akslantirishidir.

f – tekislikning o‘zini o‘ziga akslantirishi bo‘lsin. Tekislikning ixtiyoriy A va B nuqtalarini olamiz. Akslantirishda ular mos tartibda A' va B' nuqtalarga o‘tsin. Shunda f akslantirishning harakat bo‘lishi $|A'B'| = |AB|$ tenglik bilan ifodalanadi.

Masalan, bu xossa tekislik harakatining mana bu turlari uchun o‘rinli:

tekislikni biror vektorga surish,

tekislikni biror nuqta atrofida biror burchakka burish,

tekislikni biror to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik akslantirish.

Shuningdek, bu uch xil amalni istalgancha marta takrorlasak yana harakat chiqadi. Lekin tabiiy savol tug‘iladi: nuqtalar orasidagi masofani o‘zgartirmaydigan yana qanaqa akslantirishlar bo‘lishi mumkin?

To‘g‘ri chiziq geometriyasida esa bu masala ancha yengil hal etiladi.

Teorema. To‘g‘ri chiziq ustidagi harakat barcha nuqtalarni biror kesmaga surish yoki biror nuqtaga nisbatan simmetrik akslantirish yoki bitta surish bilan bitta simmetrik akslantirishning natijasidan iborat.

Isboti. f – to‘g‘ri chiziqning harakati, ya’ni istalgan ikki nuqta orasidagi masofani o‘zgartirmaydigan akslantirish bo‘lsin. To‘g‘ri chiziqda koordinatalar sistemasini kiritsak, masala algebra tiliga ko‘chadi: ixtiyoriy x va y sonlar uchun $|f(x) - f(y)| = |x - y|$

tenglikni qanoatlantiradigan akslantirishlarni o‘rganish kerak.

$a=f(0)$ bo‘lsin. $g(x)=f(x)-a$ deb olamiz. ($a=0$ bo‘lgan xususiy holda $f(x)=g(x)$). Ko‘rinib turibdiki,

$$|g(x)-g(y)|=|x-y|, \tag{1}$$

ya’ni $g(x)$ akslantirish ham masofani saqlaydi, faqat u $f(x)$ dan farqli $g(0)=0$ qo‘shimcha xossaga ega. Bundan esa o‘z navbatida

$$|g(x)|=|x| \tag{2}$$

xossa kelib chiqadi – buning uchun (1) ayniyatda $y=0$ deb olish kifoya.

Endi $b=g(1)$ sonini qaraylik. U (2) xossaga ko‘ra yo $+1$ ga, yoki -1 ga teng.

1-hol. $b=+1$, ya’ni $g(1)=1$. Bu holda $g(x)=x$ bo‘ladi. Haqiqatan, biror x uchun $g(x)=-x$ deylik. Bunday x nuqta 0 va 1 dan farqli bo‘lishi lozim, albatta. (1) xossaga ko‘ra

$$|g(x)-g(1)|=|x-1|,$$
$$|-x-1|=|x-1|,$$
$$|x+1|=|x-1|,$$

ya’ni, x nuqtadan 1 va -1 nuqtalargacha masofa bir xil. Bu esa x nuqta $[-1;1]$ kesmaning o‘rtasi, ya’ni $x=0$ bo‘lgandagina mumkin. Hosil bo‘lgan ziddiyatdan barcha x uchun $g(x)=x$ ekanligi kelib chiqadi.

2-hol. $b=-1$, ya’ni $g(1)=-1$. Bu holda yuqoridagi kabi mulohozalar bilan barcha x uchun $g(x)=-x$ tenglik isbotlanadi. (Yoki $g(x)$ o‘rniga $h(x)=-g(x)$ qaralsa, 1-holga keladi.)

Shunday qilib, to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy harakati $f(x) = a + x$ yoki $f(x) = a - x$ ko‘rinishda bo‘lar ekan. Birinchi holda harakat natijasida har bir x nuqta tayin yo‘nalishda uzunligi a ga teng kesmaga suriladi ($a > 0$ bo‘lgan holda o‘ngga, $a < 0$ holda esa chapga).

Ikkinchi holda $a = 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqning 0 nuqtaga nisbatan simmetrik akslantirishini hosil qilamiz, $a \neq 0$ bo‘lganda esa, avval simmetrik akslantirib, so‘ng o‘ngga surish chiqadi:

$$x \to -x \to -x + a.$$

Mashq. Avval to‘g‘ri chiziq biror a ga surilib, keyin 0 nuqtaga simmetrik akslantirildi. Bu harakatni avval simmetrik akslantirib, so‘ng surish orqali hosil qilish mumkinligini isbotlang.

Mashq. Son o‘qi b nuqtaga nisbatan simmetrik akslantirilganda x nuqta qanday nuqtaga o‘tadi?

Endi to‘g‘ri chiziqda biror figura olaylik. Bu yerda biz figura deganda to‘g‘ri chiziqning qism-to‘plamini tushunamiz. (Bunday figuralar bilan ishlaganda yana koordinatalardan foydalanish o‘ng‘ay.)

Agar figura biror harakat natijasida o‘zgarmasa, ya’ni yana shu figuraning aynan o‘zi hosil bo‘lsa, u olingan harakatga nisbatan invariant deyiladi. Masalan, juft va toq funksiyalarning aniqlanish sohasi 0 nuqtaga nisbatan simmetrik (ya’ni simmetrik akslantirishga nisbatan invariant) bo‘lishi lozim.

Mashq. $y = x^2$ funksiyaning aniqlanish sohasi sifatida quyidagi to‘plamlardan biri qaraladi:

a) $(-1,\ 1)$; *b*) $(-\infty,\ -1] \cup [1,\ \infty)$; *c*) $[-2,\ -1) \cup (1,\ 2]$;

d) $N = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$; *e*) $x \neq 0$.

Qaysi hollarda bu funksiya juft bo‘ladi?

Shu singari, davriy funksiyalarning aniqlanish sohasi surishga nisbatan invariant to‘plamdir.

Mashq. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping va chizmada tasvirlang:

a) $y=\sqrt{\sin x}$; *b*) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$;

c) $y=\sqrt{tgx}$; *d*) $y=\sqrt{\sin(4x+\pi)}+\dfrac{1}{\sqrt{\sin(x/2)}}$.

Mashq. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari surishga nisbatan invariant boʻladi?

a) barcha butun musbat sonlar toʻplami;

b) barcha butun sonlar toʻplami;

c) barcha 5 ga karrali sonlar toʻplami;

d) barcha toq sonlar toʻplami;

e) barcha ratsional sonlar toʻplami;

barcha $\dfrac{n}{2^m}$ koʻrinishdagi kasrlar toʻplami (*n* – ixtiyoriy butun son, $m=0, 1, 2, ...$).

Javob: *a*) dan boshqa barcha misollar biror surishga nisbatan invariant.

Mashqni bajargan oʻquvchi quyidagi munosabatlarni kuzatadi:

b), *c*), *d*) misollarda hamda avvalgi mashqdagi toʻplamlar surganda invariant qoladigan musbat sonlardan eng kichigi mavjud. Masalan, *c*) misoldagi toʻplam 10 yoki 25 ga surilsa, oʻzgarmaydi, bu xossaga ega eng kichik musbat son 5 dan iborat, chunki u $0<a<5$ boʻlgan a soniga surilsa, oʻzi bilan ustma-ust tushmaydi.

Oxirgi uchta misolda esa toʻplamni istalgancha kichik musbat songa surib, oʻzi bilan ustma-ust tushirish mumkin.

Agar toʻgʻri chiziqdagi F toʻplam quyidagi ikki xossaga ega boʻlsa, u **naqsh (ornament)** deyiladi:

biror songa surishga nisbatan invariant – bunday sonni naqshning davri deb ataymiz;

musbat davrlarning ichida eng kichigi mavjud.

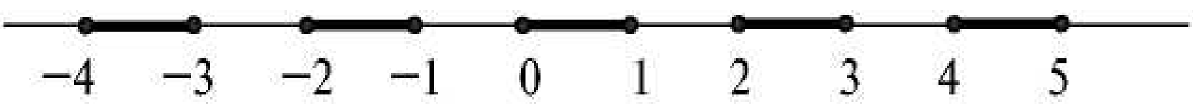
Ikkinchi xossadagi eng kichik musbat davr a bo‘lsin. U holda F to‘plamni $2a$, $3a,\dots$ sonlarga sursa ham invariantligicha qolishi ravshan. Shuningdek, $-a$ ga surganda bu xossa o‘rinli bo‘lar ekan. Haqiqatan, F dan ixtiyoriy x nuqtani olaylik. To‘plam $-a$ ga surilganda, bu nuqta $x-a$ ga o‘tadi. Biz $x-a$ nuqta F ga tegishli ekanini ko‘rsatishimiz kerak.

Berilganga ko‘ra, F to‘plamni a ga sursak, o‘zi bilan ustma-ust tushadi. Demak, F to‘plamda a ga surganda x chiqadigan biror y nuqta mavjud: $y+a=x$. Demak, $x-a=y$ ham F da yotar ekan.

Bu xossadan F ni $-2a, -3a, \dots$ sonlarga sursa ham invariant qolishi kelib chiqadi.

Mashq. F to‘plam uchun a va b sonlari davr ekanligi berilgan. Quyidagilarni isbotlang: agar $\frac{a}{b}$ nisbat ratsional son bo‘lsa, F naqsh bo‘ladi (ya’ni eng kichik musbat davri mavjud bo‘ladi); agar $\frac{a}{b}$ nisbat irratsional son bo‘lsa, F naqsh bo‘lmaydi (ya’ni eng kichik musbat davri mavjud bo‘lmaydi).

Naqsh surishdan tashqari simmetriyaga nisbatan ham invariant bo‘lishi mumkin. Masalan, $[2n, 2n+1]$ kesmalardan iborat F to‘plam 2 ga surilsa, invariant qoladi (n – butun son). Shu bilan birga u istalgan $n+\frac{1}{2}$ koordinatali nuqtalarga nisbatan simmetrik.



Agar $[2n, 2n+1]$ kesmalar o‘rniga $[2n, 2n+1)$ ko‘rinishdagi oraliqlardan to‘plam tuzsak, y faqat surishga nisbatan invariant bo‘lib, hech bir nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lmaydi. Bunday naqshni birinchi toifali deb ataymiz.

Yana misol rasmda tasvirlangan:

Agar naqsh simmetriya markaziga ham ega bo‘lsa, uni ikkinchi toifali deb yuritamiz.

Mashq. *a*) Tasviri shu rasmdagi kabi bo‘ladigan to‘plamning ifodasini yozing. *b*) Aniqlanish sohasi surishga nisbatan invariant, ammo nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lmagan funksiyaga misol ko‘rsating.

Mashq. Agar to‘g‘ri chiziqdagi to‘plam ikkita nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lsa, u a) cheksiz ko‘p simmetriya markaziga ega bo‘lishini; b) surishga nisbatan ham invariant bo‘lishini isbotlang. Bunda agar simmetriya markazlari orasidagi masofa biror musbat sondan kichik bo‘la olmasa, u ikkinchi toifa naqsh hosil qilishini asoslang.

Bu mashqdan shunday xulosa kelib chiqadi.

Teorema. To‘g‘ri chiziqda naqshlar harakatlarga nisbatan invariantligi bo‘yicha faqat ikki toifali bo‘ladi:

1-toifa: faqat surilganda invariant qoladigan naqshlar;

2-toifa: ham surilganda, ham nuqtaga nisbatan simmetrik akslantirilganda invariant qoladigan naqshlar.

Bunga nisbatan rangbarangroq naqshlar cheksiz tasmada va tekislikda hosil bo‘ladi. Bu haqda navbatdagi maqolada suhbatlashamiz.

§ 17. Islimiy naqshlar geometriyasi[18]

Tasma – tekislikning ikki parallel tog‘ri chiziqlar bilan chegaralangan sohasi. Avvalgi mavzuda biz to‘g‘ri chiziq geometriyasi, jumladan, to‘g‘ri chiziq ustidagi naqshlar bilan shug‘ullangan edik. To‘g‘ri chiziq geometriyasi juda sodda, shu bois undagi naqshlar ham atigi ikki toifali bo‘lishini ko‘rdik. To‘g‘ri chiziqqa nisbatan tasma geometriyasi ancha boy. Buni ko‘rish uchun yana koordinatalar sistemasidan foydalanamiz. Bunda abssissa o‘qini tasmaning qoq o‘rtasidan tomonlariga parallel o‘tgan to‘g‘ri chiziq – tasmaning o‘qi bo‘ylab yo‘naltiramiz (3-rasm). Bunda ordinata o‘qi tasmaning tomonlariga tik bo‘ladi (bunday to‘g‘ri chiziqni **ko‘ndalang o‘q** deb ataymiz), kooordinata boshini esa tasma o‘qining istalgan nuqtasiga joylash mumkin.

Quyidagi teorema to‘g‘ri chiziq geometriyasidagi kabi isbotlanadi.

Teorema. Tasmaning harakati, ya’ni nuqtalar orasidagi masofani saqlaydigan akslantirishlar quyidagi 5 toifadan biriga mansub bo‘ladi:

a) tasmani surish; bunda (x, u) nuqta $(x+a, u)$ nuqtaga akslanadi, boshqacha qilib aytganda tasma $(a, 0)$ vektorga suriladi;

b) ko‘ndalang o‘qqa nisbatan simmetriya; agar bu o‘q sifatida ordinatalar o‘qi olinsa, ya’ni abssissa o‘qini $x=0$ nuqtada kessa, (x, u) ga simmetrik nuqta $(-x, u)$ bo‘lishini ko‘rish qiyin emas.

Mashq. Simetriya o‘qi abssissa o‘qini $x=b$ nuqtada kesgan holda, (x, u) nuqtaga simmetrik nuqtani aniqlang.

Bu ikki toifa harakat to‘g‘ri chiziq geometriyasiga ham xos edi. Tasmada yana bir necha yangi toifali harakatlar mavjud:

---

[18] FMI, 2009, №1.

c) tasmaning o‘z o‘qiga nisbatan simmetriyasi; bunda (x, u) nuqta $(x, -u)$ nuqtaga akslanadi;

d) tasma o‘qi ustidagi nuqtaga nisbatan markaziy simmetrik akslantirish; agar simmetriya markazi sifatida $(0, 0)$ nuqta olinsa, (x, u) nuqta $(-x, -u)$ nuqtaga akslanadi.

Mashq. Simmetriya markazi sifatida $(p, 0)$ nuqta olingan holda, (x, u) nuqtaga simmetrik nuqtani aniqlang.

Javob: $(2p-x, -y)$.

e) (*kurak harakati*) tasmani surish va o‘z o‘qiga nisbatan akslantirish; bunda (x, u) nuqta avval $(x+a, y)$ nuqtaga, so‘ng yakuniy $(x+a, -y)$ nuqtaga o‘tadi.

Teorema isbotining muhim qismi – surish bilan d) simmetriya qo‘shib bajarilsa, yangi toifadagi harakat chiqmasligi. Chindan, surish natijasida (x, u) nuqta $(x+a, u)$ ga o‘tadi, $(0, 0)$ nuqtaga nisbatan markaziy simmetriya natijasida $(-x-a, -u)$ nuqtaga o‘tadi. Lekin $(x, u) \to (-x-a, -u)$ harakatni $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ nuqtaga nisbatan bitta markaziy simmetriya bilan hosil qilish mumkin. Buni ko‘rish uchun oxirgi mashqda $p = -\frac{a}{2}$ deb olaylik. Mashq javobiga ko‘ra, (x, u) nuqta

$$(2p-x,\ y) = \left(2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)-x,\ -y\right) = (-a-x,\ y)$$

nuqtaga o‘tadi!

Endi tasmada biror F to‘plam olaylik. Bu to‘plamni qachon naqsh deb atash mumkin? To‘g‘ri chiziq geometriyasidagi kabi yo‘l tutish tabiiy.

Ta'rif. Quyidagi ikki xossaga ega bo'lgan F to'plam ***islimiy naqsh*** (qisqacha islimi) deb ataladi:

1) F to'plam biror noldan farqli $(a, 0)$ vektorga surilganda o'zi bilan ustma-ust tushadi; bunda a sonini musbat deb olish mumkin, chunki to'g'ri chiziqdagi kabi tasma $(na, 0)$ vektorga surilganda ham o'zi bilan ustma-ust tushaveradi $(n = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...)$;

2) bunday xossaga ega $(a, 0)$ vektorlar ichida musbat a soni eng kichik bo'ladigani mavjud.

Mashq. 1) xossa o'rinli, ammo 2) xossa o'rinli bo'lmagan G to'plamga misol keltiring. Nima uchun bunday to'plamlarni naqsh deb atash qabul qilinmagan?

Islimiy naqshlar devorlarni, kitob sahifalarini bezashda keng qo'llanadi. Gazlamalarning gullari ham aslan shu toifaga mansub.

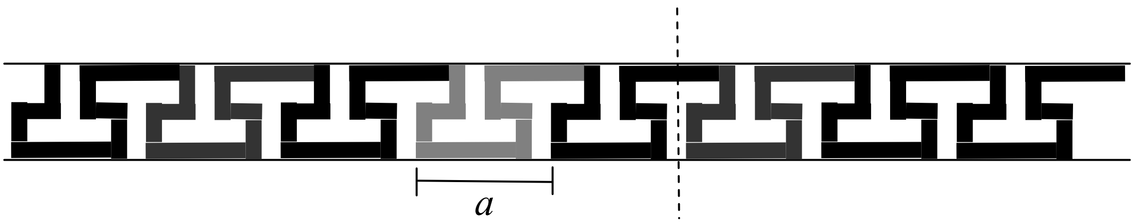
Tasmaning tayin G qism-to'plami berilgan bo'lsa, u islimi bo'ladimi yo yo'qmi – 1) va 2) shartlarni tekshirish lozim bo'ladi. Odatda islimiy naqshlarni boshqa yaqqolroq usulda qurish oson. Buning uchun tasmada G to'plam olinadi va u $..., (-3a, 0), (-2a, 0), (-a, 0), (2a, 0), (3a, 0), ...$ vektorlarga surib chiqiladi. Bu ro'yxatga mukammallik uchun $(0, 0)$ vektorga surishni ham qo'shish kerak. Shunda ularning birlashmasi 1-xossaga ega bo'ladi va 2-xossani tekshirish qoladi.

Albatta, G to'plamni juda xilma-xil qilib tanlash mumkin. Shakl nuqtai nazaridan bunda shu qadar xilma-xil hoshiya-naqshlar hosil bo'laveradi. Naqqosh, me'mor, kitob bezovchi kabi mutaxassislar uchun bunday naqshlar chindan ham bir-biridan farqli. Bizni esa hoshiya-naqshlarni geometrik nuqtai nazardan tasnifi, ya'ni quyidagi masala qiziqtiradi:

Hoshiya-naqshlar surishdan tashqari tasmaning yana qanday harakatlarida o'zi bilan ustma-ust tushishi mumkin?

Masalan, 1 va 2-rasmlarda tasvirlangan qadimgi yunon naqshlari tashqi jihatdan o'xshash, ammo simmetriya nuqtai nazaridan tubdan farq qiladi (tegishli to'plam ajratib ko'rsatilgan):

1-rasmdagi naqsh surishdan tashqari ko'ndalang o'qqa nisbatan simmetriyaga ega (ulardan biri ko'rsatilgan).



1-rasm

2-rasm

Mashq. Agar islimiy naqsh biror ko'ndalang o'qqa nisbatan simmetrik bo'lsa, u cheksiz ko'p simmetriya o'qiga ega bo'lishini isbotlang.

2-rasmdagi naqsh esa markaziy simmetriyaga ega (ulardan birining markazi ko'rsatilgan).

Mashq. Agar islimiy naqsh markaziy simmetriyaga ega bo'lsa, uning cheksiz ko'p markaziy simmetriya nuqtasi bo'lishini isbotlang.

Bundan tashqari har ikki naqsh kurak harakatida ham o'zi bilan ustma-ust tushadi.

Mashq. Bunday harakatlarni formula orqali ko'rsating.

Avvalgi maqola mavzusini davom etdirib, islimiy naqshlar qanday simmetriyalarga ega bo'lishi mumkinligini tahlil qilaylik.

Simmetriya nuqtai nazaridan tasmadagi naqsh toifalari to'g'ri chiziqdagi naqshlarnikiga nisbatan ko'proq bo‘lishi tabiiy, chunki, yuqorida ko‘rganimizdek, tasmaning harakat turlari to‘g‘ri chiziqnikiga nisbatan ancha boy. Shunga muvofiq islimiy naqsh surishdan tashqari yana quyidagi harakatlarga nisbatan simmetrik bo‘lishi mumkin:

α) tasmaning ko‘ndalang o‘qiga nisbatan;

β) tasmaning o‘qiga nisbatan;

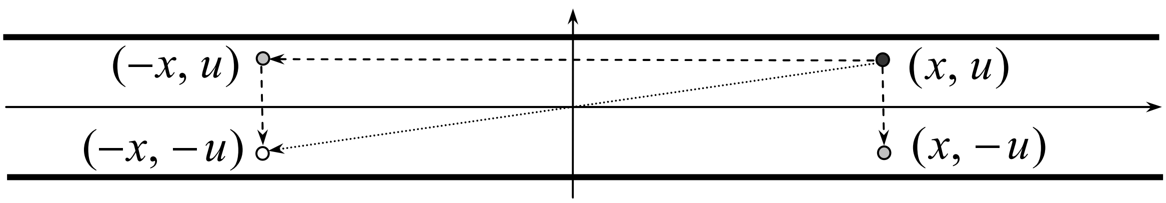
γ) tasmaning o‘qidagi nuqtaga nisbatan.

Naqshning bunday simmetriyaga ega yoki ega emasligiga qarab sakkizta imkoniyat vujudga keladi:

$$\alpha\beta\gamma,\ \alpha\beta\overline{\gamma},\ \alpha\overline{\beta}\gamma,\ \alpha\overline{\beta}\overline{\gamma},\ \overline{\alpha}\beta\gamma,\ \overline{\alpha}\beta\overline{\gamma},\ \overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma,\ \overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}.$$

Bu belgilashda harf ustidagi chiziqcha tegishli xossa o‘rinli bo‘lmasligini bildiradi. Masalan, $\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}$ belgi islimiy naqsh tasmaning o‘qiga nisbatan simmetrik, ammo boshqa simmetriyaga ega emasligini anglatadi. Sanalgan 8 imkoniyatdan ustiga chizilgan ikkitasi bo‘lishi mumkin emas ekan.

Teorema. Islimiy naqsh α va β simmetriyalarga ega bo‘lsa, u albatta γ simmetriyaga ham ega bo‘ladi.



3-rasm.

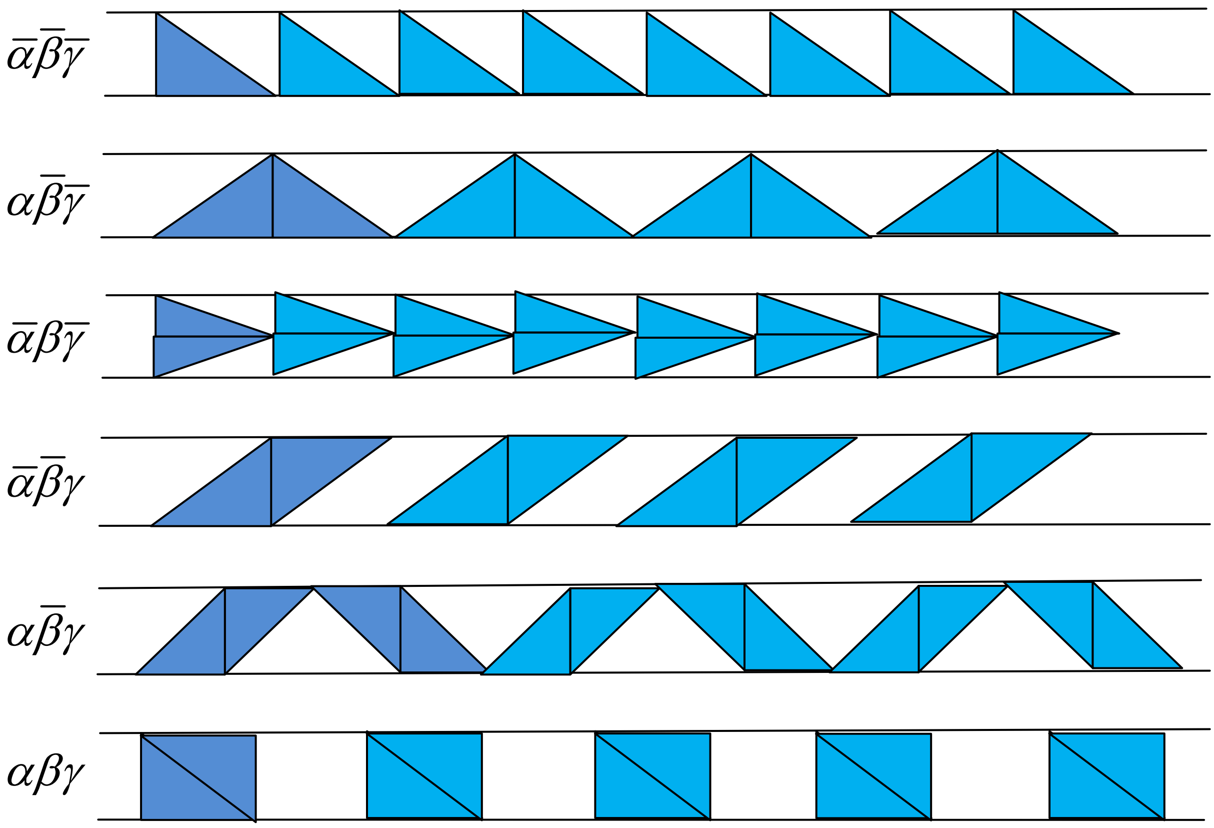
Isboti. G – qaralayotgan naqsh, (x, u) uning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Naqsh α va β simmetriyalarga ega bo‘lsin (3-rasm).

Berilgan:

$$(x, u) \in G \Rightarrow (-x, u) \in G \ (\alpha \text{ xossa});$$

$$(x, u) \in G \Rightarrow (x, -u) \in G \ \ (\beta \text{ xossa}).$$

Isbot qilish kifoya: $(x, u) \in G \Rightarrow (-x, -u) \in G$ (γ xossa). Lekin bu ravshan: γ simmetriya α va β ning kompozitsiyasidan iborat boʻlishi koʻrinib turibdi.



4-rasm.

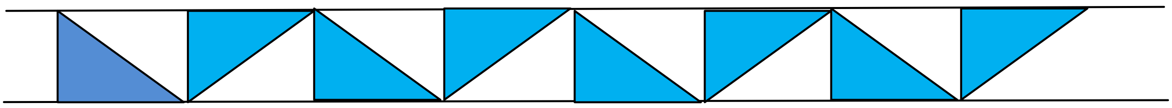
Xuddi shu singari mana bu teorema ham oʻrinli.

Teorema. Islimiy naqsh β va γ simmetriyalarga ega boʻlsa, u albatta α simmetriyaga ham ega boʻladi.

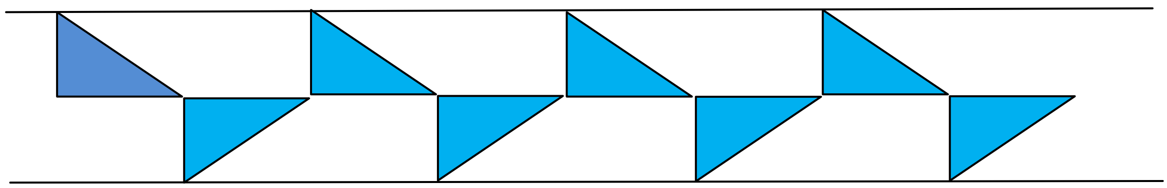
1-rasmdagi misol koʻrsatadiki, islimiy naqsh α va γ simmetriyaga ega boʻlgani holda β simmetriyaga ega boʻlmasligi mumkin ekan. Shunday qilib, sanalgan 8 imkoniyatdan olti imkoniyat qoladi. Ularga mos islimiylar mavjuddir. Bunday naqshlarni qurishning eng sodda usuli – biron-bir simmetriyaga ega boʻlmagan shakl olib, uni simmetriya bilan boyitib borish. Masalan, bunday shakl sifatida to‘g‘ri burchakli uchburchak (go‘niya) olinsa, quyidagi namunalar hosil bo‘ladi (4-rasm).

Hozircha biz tasma harakatining hamma turini ko‘rib chiqqanimiz yo‘q – kurak harakati deb atalgan hol ham bor. Masalan, 1-rasmdagi islimiy naqsh $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ vektorga surilib, tasma o‘qiga nisbatan akslantirilsa, ya’ni kurak harakati qo‘llansa, u o‘zi bilan ustma-ust tushadi. Kurak harakatini uchburchakka nisbatan qo‘llaylik. Bunda yana bir toifa islimiy naqsh hosil bo‘ladi (5-rasm).

δ



Yoki, simmetriya nuqtai nazarian baribir



5-rasm.

Shu bilan islimiy naqsh turlari tugar ekan.

Teorema. Simmetriya nuqtai nazaridan har qanday islimiy naqsh $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\overline{\gamma}$, $\alpha\overline{\beta}\gamma$, $\alpha\overline{\beta}\overline{\gamma}$, $\overline{\alpha}\beta\gamma$, $\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}$, $\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma$, $\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}$, δ. toifadan biriga mansub.

Teorema isboti qisman yuqorida bajarildi. Isbotni nihoyasiga yetkazish uchun, δ simmetriyani qolgan olti simmetriya bilan birga bajarganda yangi turdagi naqsh hosil bo‘lmasligini ko‘rsatish kifoya. Masalan, $\alpha\beta\gamma$ toifa avtomatik tarzda δ simmetriyaga ham ega bo‘ladi, $\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}$ bilan δ ning kompozitsiyasi esa shu δ ning o‘zidan iborat. δ harakat bilan $\alpha\overline{\beta}\gamma$ ning kompozitsiyasi natijasida nima hosil bo‘lishini ko‘raylik:

$$(x,y)\xrightarrow{\ \delta\ }(x+a,\,-y)\xrightarrow{\ \alpha\ }(-x-a,\,-y)\xrightarrow{\ \gamma\ }(x+a,\,y)$$

– bundan ko‘rinadiki, natija surishdan iborat, demak, δ, α, γ birga yana $\alpha\bar{\beta}\gamma$ simmetriyaning o‘zini hosil qilar ekan.

Boshqa hollar ham shu kabi tekshiriladi.

Mashq. Isbotni yakuniga yetkazing.

Mashq. Quyidagi harfiy islimiylar toifalarini aniqlang:

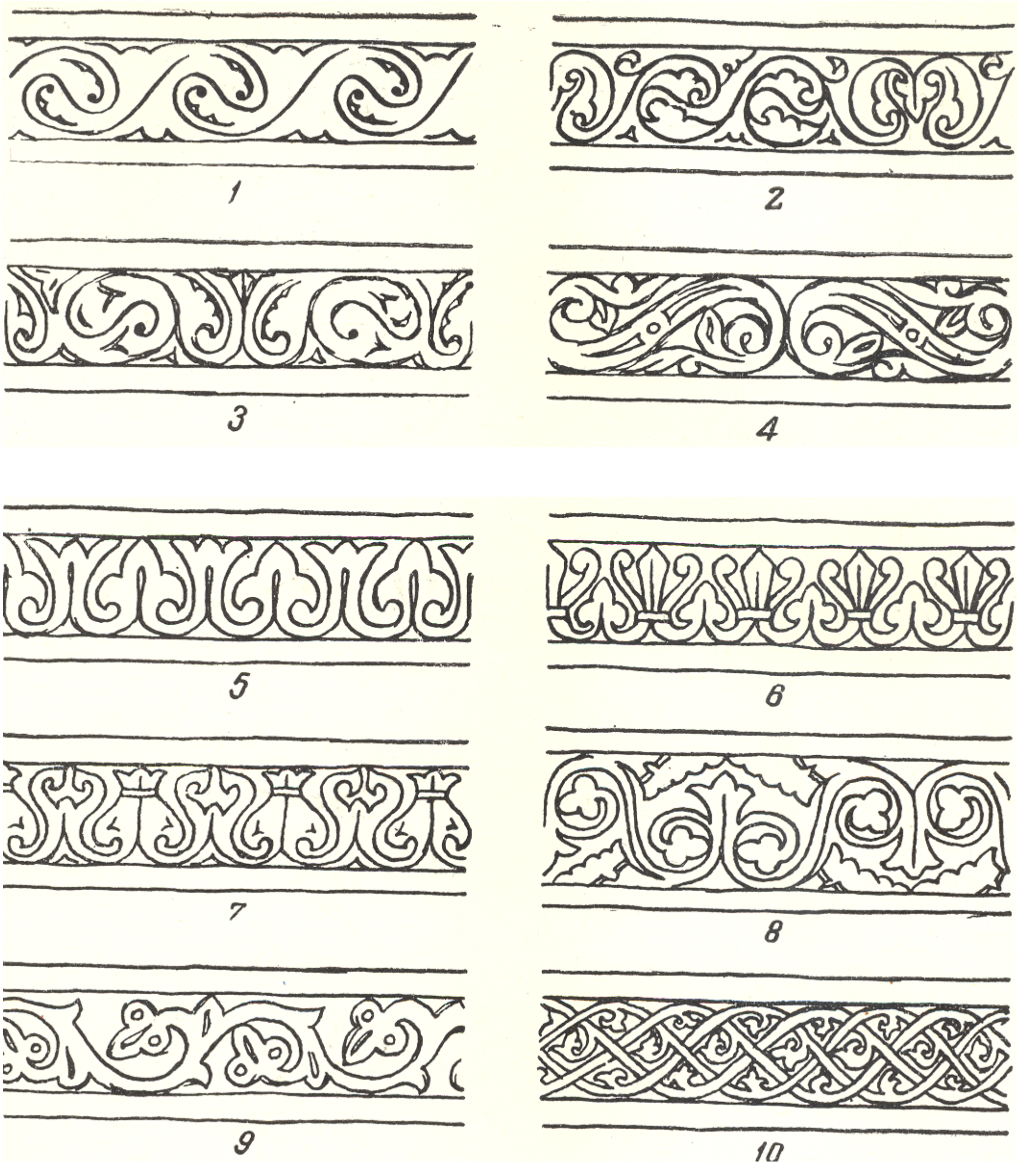
...BBBBBB..., ...ININININ..., ...pdpdpdpd...,

...VVVVVV..., ...LGLGLGLG..., ...pqpqpqpq...,

...MMMMM..., ...SSSSSSSS..., ...oooooooooo...

Islimiy naqsh chiroyliroq bo‘lishi uchun uchburchak o‘rniga tegishli shakl olish lozim. Masalan, 6-rasmda yurtimizdagi arxeologik qazilmalardan topilgan, eradan avvalgi IV-II ming yilliklarga mansub sopol idishlar naqshidan namunalar tasvirlangan. 7-rasm X-XI asrlarda Xorazm me’morlari qo‘llagan islimiy naqsh namunalari berilgan, 8-rasmda esa binolarni bezashda Sharqda ham G‘arbda ham ko‘p uchraydigan islimilar misoli ko‘rsatilgan.

6-rasm.



7-rasm.

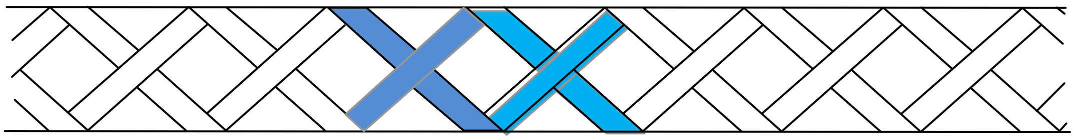
8-rasm.

Mashq. 6-8-rasmlardagi islimiylar simmetriya turlarini aniqlang.

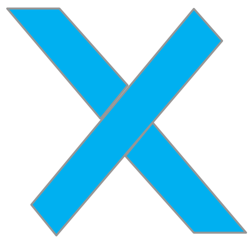
Islimiy naqshlar gazlamaga gul bosish, kitob sahifalarini bezash va boshqa oʻrinlarda koʻp qoʻllanadi. 9-rasmda ana shu maqsadga moʻljallangan islimiy elementlari tasvirlangan. Bu elementlarni 4-5-rasmlardagi uchburchak oʻrniga olib, xilma-xil islimiylar hosil qilish mumkin (9-rasm).

Mashq. Bu elementlardan turli simmetriyaga ega islimiylar yasang.

Arxitekturada islimiy naqshning yana bir turi uchraydi (10-rasm).



10-rasm.



Bunday olib qarasa, bu naqsh $\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma$ simmetriyaga ega islimiyga oʻxshaydi. Ammo diqqat qilinsa, uni umuman tasmaning qism-toʻplami sifatida hosil qilib boʻlmaydi. Chunonchi, asos qilib olingan qism-toʻplam aslida oʻngdagi toʻplamdan iborat – chunki tasma nuqtalarining rangi yoʻq, “bir qism-toʻplam ikkinchi qism-toʻplamning ustidan oʻtadi” degan tushuncha ham yoʻq. Bunday tushunchani kiritish uchun ikki tomonli (masalan, qogʻozdan qiyilgan) tasma qaralishi lozim. Bunda α, β, γ simmetriyalardan tashqari yana ikki xil yangi simmetriya qoʻshiladi – tasmani oʻqi atrofida agʻdarish (180° ga burish, uni ε bilan belgilaylik) hamda tasmani perpendikulyar oʻq atrofida agʻdarish (uni η bilan belgilaymiz). Yuqoridagi naqsh η ga nisbatan simmetrik. Shuningdek, u avval ε, soʻng β harakat natijasida ham oʻzi bilan ustma-ust tushadi.

Ikki tomonlama islimiy naqsh turlari oddiy tasmadagiga nisbatan ancha boy – 31 xil ekan (Shubnikov teoremasi). Biz ancha-muncha geometrik tasavvur, mantiqiy mushohada va mehnat talab qiladigan bu teoremani isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz. Bunda "rangli koordinatalar" qo'l keladi: agar (x, u) nuqta tasmaning ustki tomonida yotsa, uni (x^*, u^*) kabi belgilash, ostki tomonida yotsa, (x_*, y_*) kabi belgilash mumkin. Shunda ε almashtirish natijasida (x^*, u^*) nuqta $(x_*, -y_*)$ nuqtaga o'tadi, agar η almashtirish qo'llansa, $(-x_*, y_*)$ nuqtaga o'tadi.

Mashq. Ikki xil rangli harflar vositasida qolgan 24 xil ikki tomonli islimiy naqshlarga namunalar quring. (Masalan, RYaRYaRYaRYaRYa ketma-ketlik 10-rasmdagi naqsh simmetriyasiga ega.)

§ 18. Matematik koshinkorlik qilganda[19]

Qiziqarli matematikaning eng jozibali sohalaridan biri bu mozaikalardir. Tasavvur qilaylik, matematik koshin ishlab chiqaradigan korxonaga qalin qog'ozdan qirqilgan ko'pburchak olib keldida, "Menga mana shu shaklda koshinlardan yasab berasiz", dedi. So'ng "Necha dona?" degan savolga "Cheksiz ko'p", deya qo'shimcha ham qilib qo'ydi. Sababi – matematik yashaydigan uyning poli cheksiz tekislikdan iborat bo'lib, u ana shu tekislikni hammasi bir xil koshinlar bilan qoplashni niyat qilgan edi. Albatta, hayotda biror matematik bunday ishga qo'l urmaydi. Lekin geometrik masala sifatida tekislikni bir xil shakllar bilan qoplash, ya'ni mozaikalar jozibali masaladir. Shuning uchun u bilan juda ko'p

[19] FMI, 2002, №4.

matematiklar shug'ullangan. Ular orasida I.Kepler, H.Veyl, A.Kolmogorov, G.H.Kokster kabi atoqli olimlar nomi ham uchraydi.

Masalaning aniq tavsifini beraylik. M ko'pburchak bo'lsin. Biz faqat M qavariq bo'lgan hollarni qaraymiz va buni alohida ta'kidlab o'tirmaymiz[20]. M tekislikda harakatlantirilsa, ya'ni ko'chirilsa va burilsa, unga teng (kongurent) ko'pburchaklar hosil bo'ladi. $M_1, M_2, M_3, \ldots$ ana shunday, ya'ni M ga teng ko'pburchaklar bo'lib, quyidagi 2 shartni qanoatlantirsin: birinchidan, butun tekislikni qoplasin; ikkinchidan, ulardan ixtiyoriy ikkitasi yo umuman kesishmasin, yoki faqat chegarasida kesishsin.

Matematik belgilarda bu ikki shart quyidagicha yoziladi:

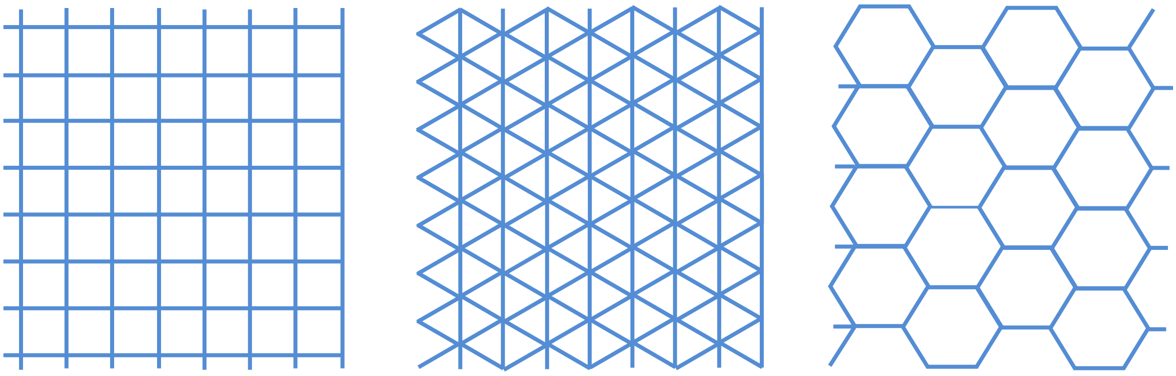
a) $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots = \mathbb{R}^2$;

b) agar $i \neq j$ bo'lsa, u holda $M_i \cap M_j$ kesishma yo bo'sh to'plam, yo nuqta, yoki kesmadan iborat.

Mana shu ikki shart bajarilsa, $M_1, M_2, M_3 \ldots$ ko'pburchaklar majmuasi ***mozaika*** deyiladi. Agar mozaika M ko'pburchakning nusxalaridan hosil qilingan bo'lsa, uni M dan hosil bo'lgan yoki yasalgan mozaika deb atashga kelishamiz, M ning o'zini esa ***mozaikabop ko'pburchak*** deb ataymiz.

Misollarga murojat qilaylik. Kvadratlardan yasalgan mozaikani ko'p uchratgansiz. Buning uchun katak daftar varag'iga nazar tashlash kifoya. Mozaika tushunchasini mustahkamlash uchun o'ylab ko'ring: bir xil kvadratlardan katak daftar mozaikasidan boshqa mozaikalar yasash mumkinmi? (Javob: bir kvadratdan cheksiz ko'p usulda bir-biridan farqlanadigan mozaikalar hosil qilish mumkin.)

[20] Qavariq bo'lmagan ko'pburchaklardan mozaika yasash masalasi ham g'oyat jozibali, lekin bu alohida mavzu.



1-rasm.

2-rasm.

Kvadratdan tashqari yana tengtomonli uchburchak va muntazam olti burchak ham mozaika hosil qiladi (1-rasm). Darvoqe, muntazam oltiburchakli mozaika yasashni asalarilar ham yaxshi biladi (2-rasm).

1-masala. Muntazam uchburchak, to'rtburchak va oltiburchakdan farqli muntazam ko'pburchak mozaika hosil qilmasligini isbotlang.

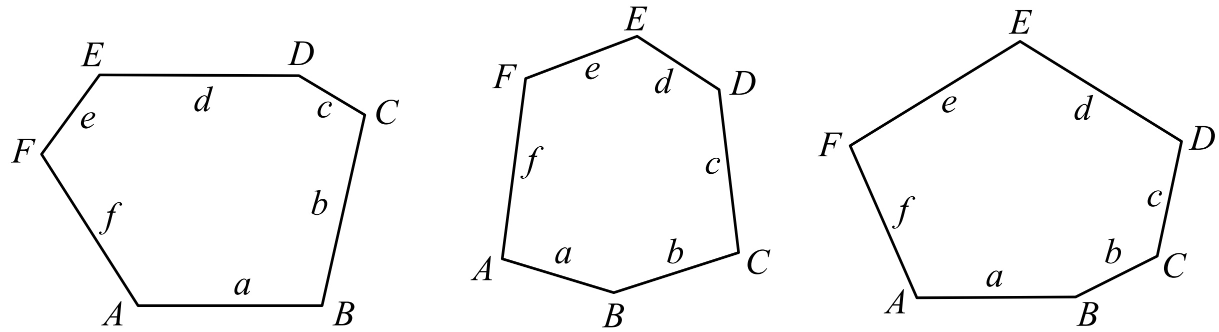
Endi umumiy holni – M ixtiyoriy (lekin, kelishuvga muvofiq qavariq) ko'pburchak bo'lgan holni qarashga o'taylik. Istalgan uchburchak mozaika hosil qiladi, albatta, chunki ikkita uchburchak parallelogramm tashkil etadi, parallelogrammlar esa mozaika yasashda kvadratdan farq qilmaydi.

2-masala. Ixtiyoriy to'rtburchak mozaika hosil qilishini ko'rsating.

Tomonlarining soni bo'yicha navbatdagi hol bu beshburchak. U hikoyamizning asosiy “qahramoni”dir. Shuning uchun bu holni keyinroqqa surib, $n > 5$ bo'lgandagi n-burchaklarni qaraylik.

1918 yilda nemis matematigi K.Reynxardt mozaikalarga bag‘ishlangan dissertatsiyasida quyidagi faktni isbotlagan:

Reynxardt teoremasi. Mozaika hosil qilishi mumkin bo‘lgan faqat uch toifa oltiburchak mavjud.
Ular 3-rasmda tasvirlangan.



1) $A+E+F=360^\circ$, $B+C+D=360^\circ$, $a=d$

2) $F+B+C=360^\circ$, $A+D+E=360^\circ$, $a=e,\ \ c=f$

3) $A=C=E=120^\circ$, $A+D+E=360^\circ$, $a=f,\ b=c,\ d=e$

3-rasm.

3-masala. Bu toifa oltiburchaklarning har biri chindan mozaika hosil qilishini ko‘rsating.

A.Niven teoremasi. $n>6$ bo‘lsa, hech bir n-burchak mozaika hosil qilolmaydi.

Reynxardt va Niven teoremalarining isboti elementar tabiatli bo‘lsa-da, ammo sodda emas. Ular Evklidning “n-burchak ichki burchaklarining yigindisi 180° ga teng” degan teoremasidan kelib chiqadigan quyidagi xossalarga asoslanadi:

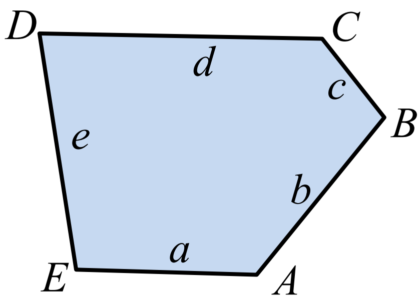
4-masala. Ixtiyoriy ko‘pburchakda o‘tkir burchaklar soni 3 tadan ortiq bo‘lishi mumkin emas.

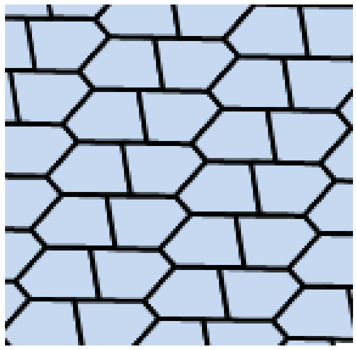
5-masala. Ixtiyoriy ko‘pburchakda o‘tkir yoki to‘g‘ri burchaklar soni 4 tadan ortiq bo‘lishi mumkin emas.

6-masala. Agar ko'pburchakning 4 ta burchagi o'tkir yoki to'g'ri burchak bo'lsa, u to'g'ri to'rtburchakdan iborat.

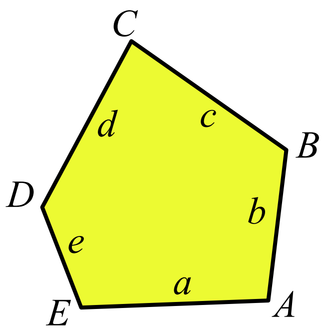
Mashq. Uchta burchagi o'tkir bo'lgan mingburchak yasang.

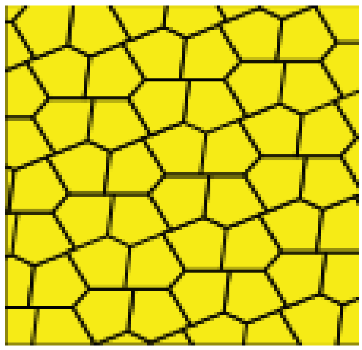
Reynxardt o'z dissertatsiyasida beshburchaklardan mozaika yasash masalasini ham qaragan: mozaika hosil qiladigan beshburchaklarning 5 ta toifasini topgan. Bu-ku, yaxshi. Faqat u oltiburchaklar singari mozaikabop beshburchaklarning ham barchasini topdim deb o'ylagan (4-a rasm).



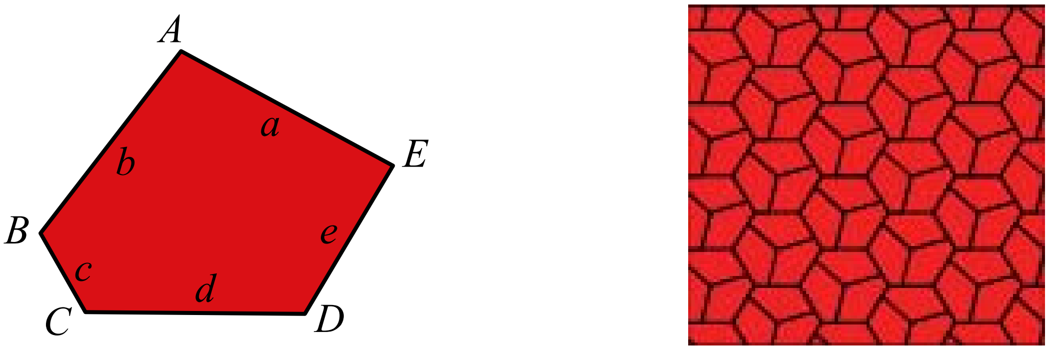


1) $A+B+C=360^\circ$

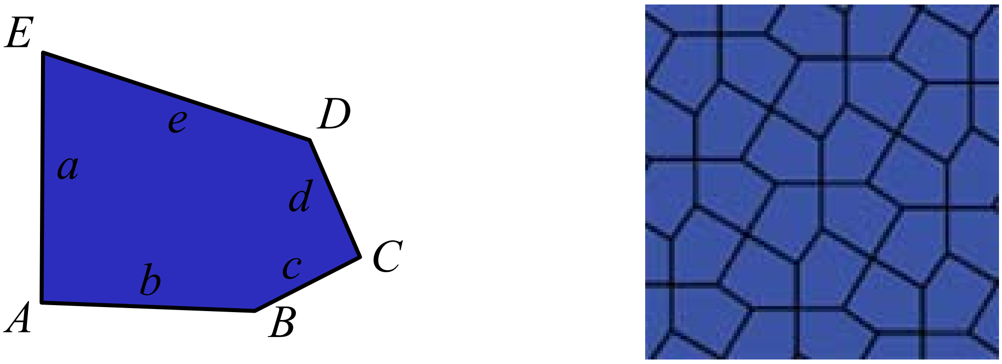




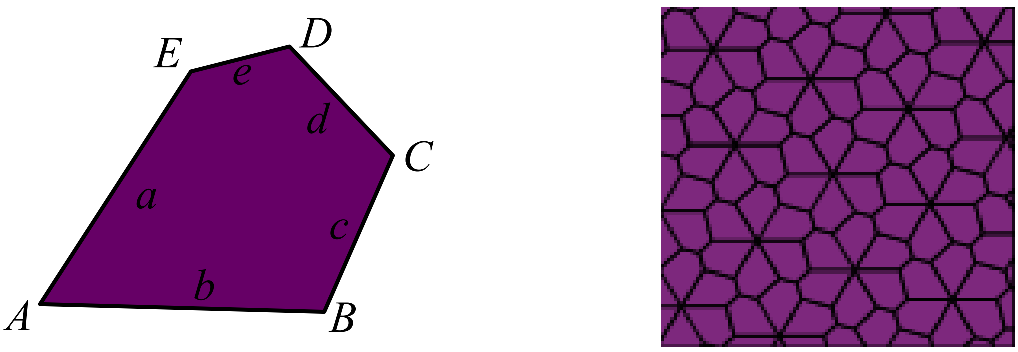
2) $A+B+D=360^\circ,\ a=d$



3) $A = C = D = 120^\circ,\ a = b,\ d = c + e$



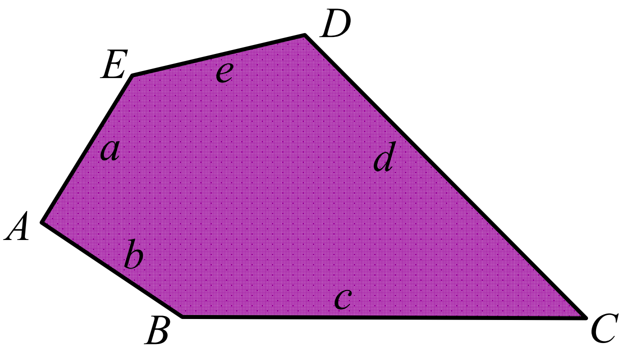
4) $A = C = 90^\circ,\ a = b,\ \ c = d$

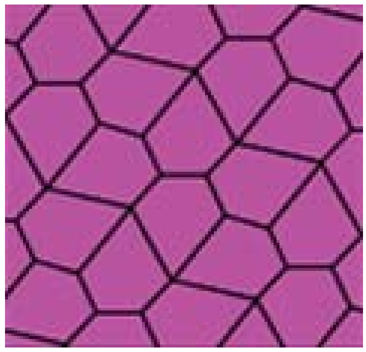


5) $A = 60^\circ, C = 120^\circ,\ a = b,\ c = d$

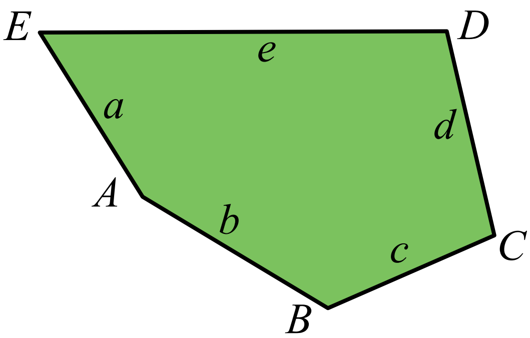
4-a rasm.

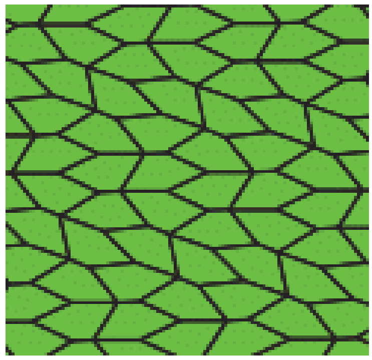
Lekin Reynxardtning bu tasdig‘i o‘rinsiz (isboti noqis) bo‘lib chiqdi. 1968 yilda AQShlik matematik R.Kershner Reynxardt topgan toifalardan farqli, ammo mozaika hosil qiladigan yana uch toifa beshburchak topadi (4-b rasm).



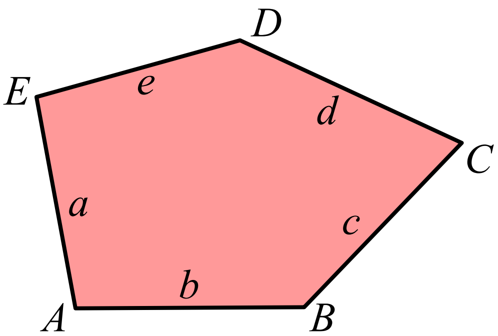


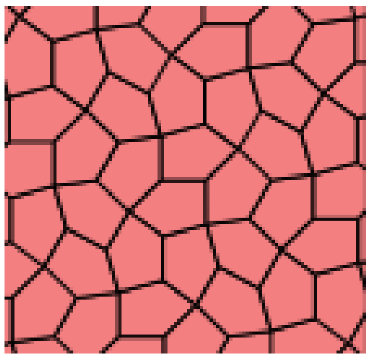
6) $C+E=180^\circ,\ A=2C,\ a=b=e,\ c=d$





7) $2B+C=2D+A=360^\circ,\quad a=b=c=d$





8) $2A+B=2D+A=360^\circ,\ A=2C,\ a=b=c=d$

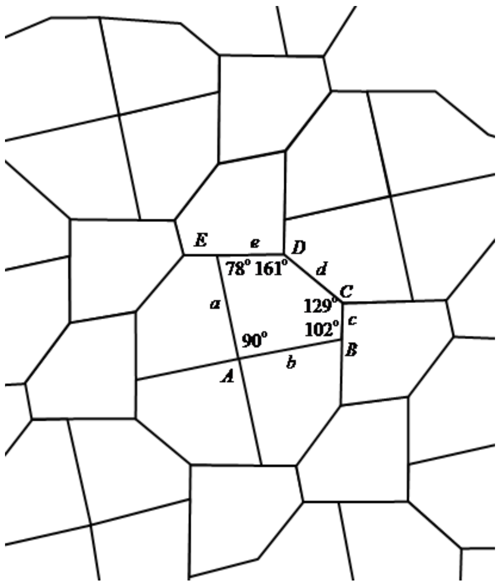
4-b rasm.

U ham mozaika hosil qiladigan beshburchaklarning hammasi topildi, deb hisoblaydi. Lekin... bu tasdiq yana xato bo‘lib chiqadi. Gapning buyog‘iga o‘tishdan avval bor natijalarni bir jamlab olaylik:

$n=$	3	4	5	6	$n \geq 7$
Natija:	ixtiyoriy		1968 yilda 8 xil …	1818 yilda yana 3 xil!	Mumkin emas! 1978 yil

Kershnerdan so‘ng ko‘pburchakli mozaikalar masalasida “estafeta tayoqchasi” professional matematiklardan havaskor matematiklar qo‘liga o‘tadi. Chunki matematikani ommalashtirishda dong chiqargan M.Gardner “Scientific American” jurnalining (bizning “Fan va turmush”ga o‘xshash AQSh jurnali) 1975 yil iyul sonida beshburchakli mozaikalar haqida maqola beradi. Gardner maqolasini o‘qigan ingliz zodagoni, havaskor matematik ser R.Jeyms mozaikabop yangi besh burchak topadi. Aslida u bus-butun 9-toifa beshburchaklardan biri bo‘lib chiqadi (5-rasm).

Janob Jeymsning ixtirosi professional matematiklarni ajablantiradi. M.Gardner, tabiiy, R.Jeymsning kashfiyoti haqida ham maqola yozadi. Shu bilan geometriyaning ancha tor doirasiga mansub masalaga qiziqish kuchayadi. Ko‘pchilik Gardner maqolalarini o‘qish bilan cheklangan. Faqat San-Diego shahrida (Kaliforniya shtati) istiqomat qiladigan, besh farzandning onasi bo‘lmish Marjori Rays xonim yeng shimarib ishga tushib ketadi. U professional

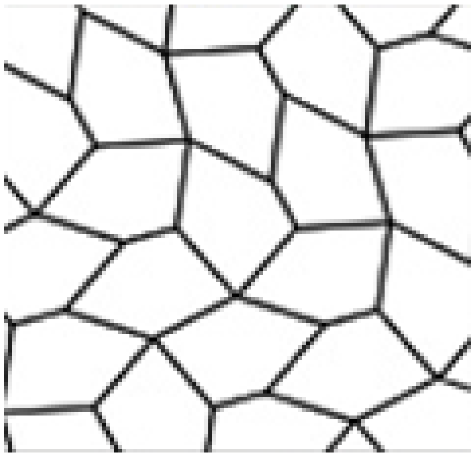


$$A = 90^\circ, \quad B + E = 180^\circ,$$

$$C + D = 270^\circ + \frac{B}{2}, \; a + e = b + d$$

5-rasm.

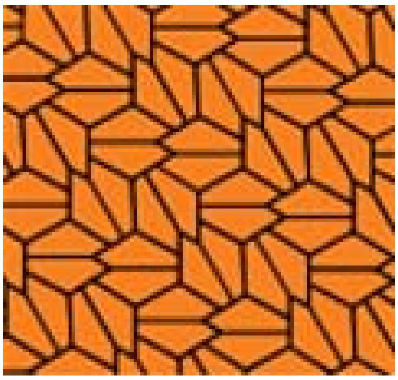
matematik bo‘lmagani uchun o‘zidan avvalgi salaflarining maqolalarini o‘qish, demak, Reynxardt, Kershner qo‘llagan mushohadalar bilan tanishish imkoniyatiga ega emas edi. Shuning uchun mozaika yasash mumkin bo‘lgan beshburchaklarni bir chetdan saralashga kirishadi.



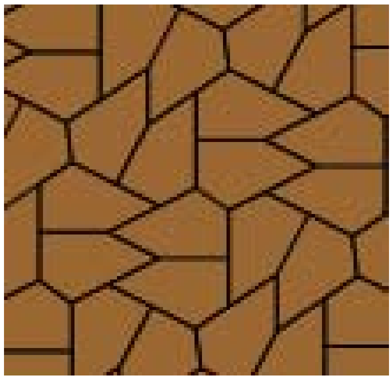
6-rasm

Bunda o‘ziga xos belgilashlar uslubini ham ishlab chiqadi.

Nihoyat, Rays xonimning omadi chopadi: 1976 yilning fevralida u mozaikabop beshburchaklarning yangi 10-toifasini ixtiro qiladi (6-rasm). Shu yil dekabrda u bir yo‘la yana yangi ikki toifa beshburchaklarni topishga muvaffaq bo‘ladi (7 va 8-rasmlar).



7-rasm.

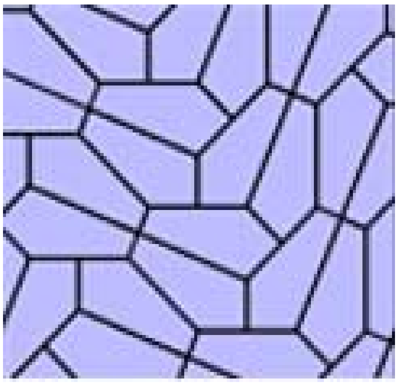


8-rasm.

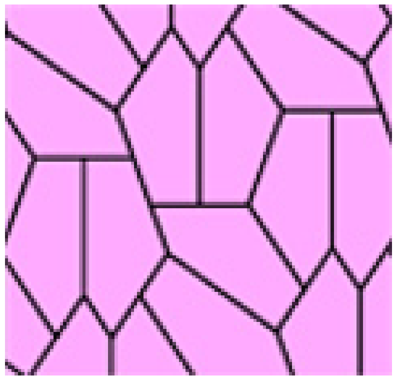
Oradan bir yil o‘tib (to‘g‘rirog‘i, bir yillik izlanishlardan so‘ng), mozaikabop beshburchaklarning 13-toifasini aniqlaydi (9-rasm).

Bu matematika tarixida misli ko‘rilmagan natija edi. Marjori Rays rekordi to 1985 yilgacha saqlanadi. Olimlar endi boshqa toplimasa kerak, degan o‘y bailan, shunday tasdiqni isbotlashga ko‘proq e’tibor berishadi.

Ammo... 1985 yili R. Steyn 14-toifa beshburchakli mozaika quradi (10-rasm).



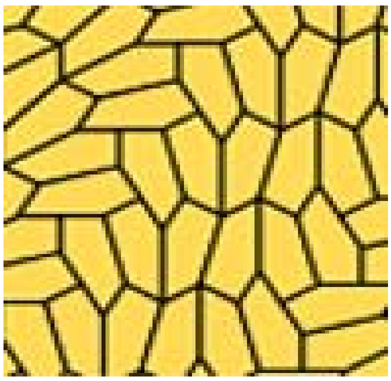
9-rasm.



10-rasm.

Bu ixtiro endi matematiklarni jumboqqa soldi: balki yana bordir? Qarangki, oradan 30 yil (!) oʻtib, AQShlik bir guruh matematiklar yana bir toifa mozaikabop beshburchak topishadi (11-rasm).

Bu safar beshburchak tomonlari ancha murakkab shartlar bilan beriladi.



11-rasm.

Shunday qilib, beshburchakli mozaikalar masalasi hamon oxirigacha yechilmasdan qolmoqda. Holbuki, u – hatto uy bekalari ham shugʻullansa boʻladigan elementar matematika masalasidir!

Koʻpburchakli mozaikalar haqidagi hikoyamizni bir masala bilan yakunlaymiz.

Yuqorida muntazam beshburchaklardan mozaika yasab boʻlmasligini aytgan edik. Mozaika yasash mumkin boʻlgan beshburchaklardan muntazamlikka eng yaqini bu 8-toifaga mansub teng tomonli simmetrik beshburchakdir (12-rasm).

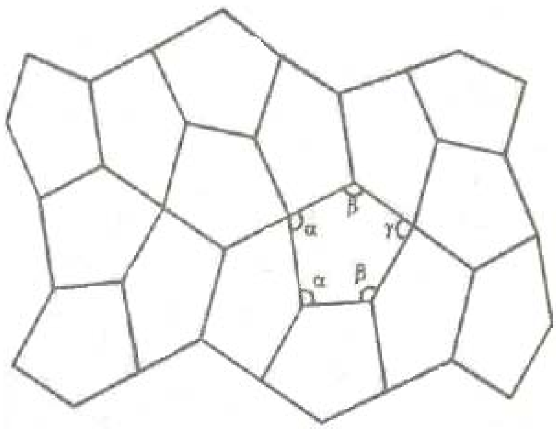
Biz uni deyarli muntazam deb ataymiz (chunki uning kamchiligini – burchaklari teng emasligini simmetrikligi va mozaika hosil qilishi qay darajadir to‘ldiradi).

Masala. Deyarli muntazam beshburchakning burchaklarini toping.

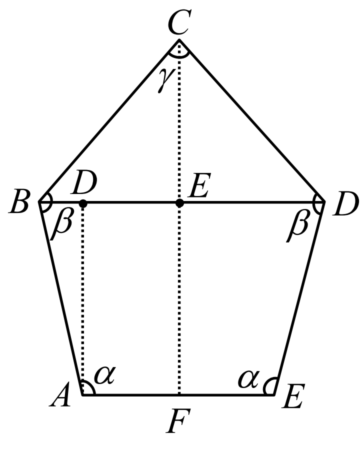
Yechish. Burchaklarni 12-rasmdagi kabi belgilaylik. U holda, birinchidan, Evklid teoremasiga ko‘ra

$$2\alpha + 2\beta + \gamma = (5-2)180^\circ = 540^\circ \qquad (*)$$

Ikkinchi tomondan, mozaikaning tugunlaridagi burchaklarni hisoblasak, $\alpha + 2\beta = 360^\circ$, $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$ munosabatlar hosil bo‘ladi. Ammo (*) munosabat so‘nggi ikki tenglikning natijasi ekanini ko‘rish qiyin emas. Demak, uch α, β, γ noma’lumni topish uchun biz hozircha ikkita tenglamaga egamiz va yana bir munosabatga muhtojmiz. Shunday bo‘lishi ham kerak, albatta, chunki hozirgacha qaralayotgan beshburchakning tomonlari tengligidan foydalanmadik. Buni amalga oshirish uchun uni alohida chizib olaylik (13-rasm).



12-rasm.



13-rasm.

Rasmdan ravshanki, $\angle BAD = \alpha - 90^\circ$; $\angle ABD = 180^\circ - \alpha$; $\angle CBE = \alpha + \beta - 180^\circ$. Tomonlari o‘zaro teng bo‘lgani uchun, uzunligini 1 ga teng deb hisoblash mumkin. Demak,

$$BE = BC\cos(\alpha + \beta - 180^\circ) = -\cos(\alpha + \beta);$$

$$BD = AB\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos a;$$

$$AF = BE - BD = -\cos(\alpha + \beta) + \cos\alpha.$$

Shunday qilib, $AF = \frac{1}{2}$ bo‘lgani uchun, izlanayotgan uchinchi munosabatni hosil qilamiz:

$$-\cos(\alpha + \beta) + \cos\alpha = \frac{1}{2}.$$

Endi $\alpha = 360^\circ - 2\beta$ ekanidan foydalansak, sodda trigonometrik tenglama hosil qilamiz:

$$\cos 2\beta - \cos\beta = \frac{1}{2}.$$

8-masala. (*) tenglamadan $\cos\beta$ ni toping.

Javob: $\cos\beta = -\frac{\sqrt{13} - 1}{4} \approx -0.65$.

Demak, $\beta \approx 130{,}5^\circ$, $\alpha = 360^\circ - 2\beta \approx 99^\circ$, $\gamma = 180^\circ - \alpha \approx 81^\circ$. Topilgan burchaklar buyicha, transportirdan foydalanib qalin qog‘ozdan deyarli muntazam beshburchakning bir nusxasini yasab olish, so‘ng undan chizg‘ich sifatida foydalanib, mozaika yasash mumkin.

§ 19. Kepler naqshlari[21]

Bizga yaxshi ma'lumki, tekislikni bir xil kvadratlar yoki bir xil teng tomonli uchburchaklar yo bo'lmasa bir xil muntazam oltiburchaklar bilan qoplash mumkin. Bunda ko'pburchaklar bir-biriga "mingashmasligi", tekislikda ochiq joylar qolmasligi lozim. Mana shu ikki shartni qanoatlantiradigan ko'pburchaklar majmualarini qoplama deb ataymiz.

Yuqoridagi uch hol mustasno qilinsa, boshqa hech bir muntazam ko'pburchakning bir xil nusxalari bilan tekislikni qoplab bo'lmaydi. Isboti ayon, muntazam n-burchakning ichki burchaklari yig'indisi $180^{\circ}(n-2)$ dan iborat, demak, uning har bir ichki burchagi $\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}$ ga teng. Shuning uchun tekislikni bir xil muntazam n-burchaklar bilan qoplash mumkin bo'lishi uchun $\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}$ li burchaklardan bir nechtasi qo'shilib, 360° ni berishi kerak:

$$k\frac{180^{\circ}\left(n-2\right)}{n}=360^{\circ}.$$

Bu tenglikni mana bunday ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Mashq. (1) Diofant tenglamasi faqat uchta yechimga ega bo'lishini isbotlang.

---

[21] FMI, 2007, №4.

Bu yechimlar: $k=3$ va $n=6$ – muntazam oltiburchaklar bilan qoplash, bunda uchtadan oltiburchak uchlari bir nuqtada tutashadi;

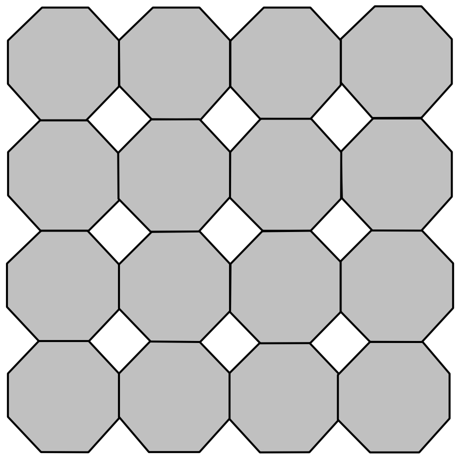
$k=4$ va $n=4$ – kvadratlar bilan qoplash, to‘rttadan kvadrat uchlari bir nuqtada tutashadi;

$k=6$ va $n=3$ – teng tomonli uchburchaklar bilan qoplash, bunda oltitadan uchburchak uchlari bir nuqtada tutashadi.

Endi masala ko‘lamini kengaytiramiz:

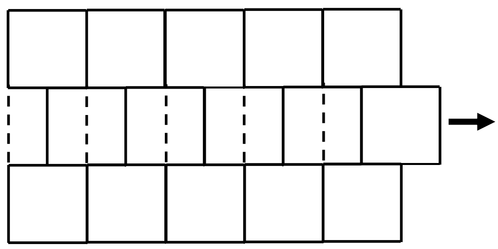
<u>Tekislikni necha xil usulda muntazam ko‘pburchaklar bilan qoplash mumkin?</u>

Bunda ko‘pburchaklarning barchasi bir xil bo‘lmagan hollarni qarash kifoya, albatta. Qo‘yilgan shartda qoplamada uchburchak, kvadrat va oltiburchaklardan boshqa muntazam ko‘pburchaklar qatnashishi ham mumkin ekan. Masalan, mana bu qoplamada muntazam sakkiz burchakliklar qatnashadi (1-rasm).



1-rasm.

Agar boshqa shartlar qo‘yilmasa, masala g‘oyat kengayib, jozibasini yo‘qotib qo‘yar ekan. Masalan, tekislikning bir xil kvadratlar bilan qoplamasani olaylik. Agar markazlari bir to‘g‘ri chiziqda yotgan kvadratlar tasmasi shu to‘g‘ri chiziq bo‘ylab surilsa, yangi qoplama hosil bo‘ladi (2-rasm).



2-rasm.

Bunday hollarni soqit qilish uchun qoplash masalasiga qo‘shimcha shart qo‘yamiz:

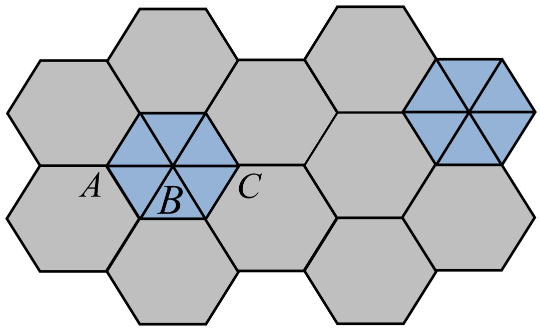
Qo‘shni ko‘pburchaklar bir-biriga tomonlari bilan to‘liq tutashadi.

Lekin bu shart ham hali kifoya emas. Aytaylik, tekislikni avval bir xil muntazam oltiburchaklar bilan qoplab, so‘ng ulardan ayrimlari oltita teng tomonli uchburchakka bo‘linsa, yuqoridagi shart bajarilaveradi (3-rasm).

Ravshanki, bunday yechimlarning son-sanog‘i yo‘q. Muhimi, bunday qoplamalarni “chiroyli” deb bo‘lmaydi – simmetriyasi buzilgan. Shuning uchun mana bunday shartni qo‘shamiz:

Qoplamaning har bir tugun nuqtasiga tutashadigan ko‘pburchaklar tarkibi bir xil.

3-rasmda qoplamada bu shart bajarilmagan, albatta: A tugun nuqtada ikkita oltiburchak va ikkita uchburchak tutashgan, B nuqtada oltita uchburchak, C nuqtada esa uchta oltiburchak tutashgan.



3-rasm.

Qoplamalarga qo‘yilgan qo‘shimcha shartlar endi ularni ancha chuqur tahlil qilish imkonini beradi. Avvalambor shuni ta’kidlaymizki, tugun nuqtada ko‘pi bilan oltita ko‘pburchak tutashishi mumkin. Shunda ham agar roppa-rosa oltita muntazam ko‘pburchak tutashguday bo‘lsa, ularning har biri teng tomonli uchburchak bo‘lishi shart – biz bunday hollarni bu yerda qaramaslikka kelishganmiz.

Demak, tugun nuqtada tutashadigan ko‘pburchaklar soni 3, 4 yoki 5 ta bo‘lishi mumkin.

Uchtadan ko‘pburchak tutashadigan hol ustida batafsilroq to‘xtaylik. Ya’ni, qoplamaning bir tugun nuqtasida muntazam n-burchak, m-burchak va l-burchak tutashsin. Demak,

$$180^\circ \frac{(n-2)}{n} + 180^\circ \frac{(m-2)}{m} + 180^\circ \frac{(l-2)}{l} = 360^\circ.$$

Bu tenglikni mana bunday qilib oʻzgartirib olish qulay:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{l} = \frac{1}{2} \tag{2}$$

Biz uch nomaʼlumli Diofant tenglamasiga keldik. Bu hozircha zaruriy shart. Yaʼni, biz izlayotgan har bir qoplamaga (2) tenglamaning biror yechimiga mos keladi, lekin (2) tenglama yechimlari ichida begonalari boʻlishi ham istisno emas.

Dastavval $n \geq m \geq l \geq 3$ deb olish mumkinligini taʼkidlaymiz. Soʻng l soni 6 dan katta boʻla olmasligini eʼtiborga olamiz. Aslida $l = 6$ boʻlgan hol ham soqit qilinishi mumkin, chunki bu holda (2) tenglamadan $n = m = l = 6$ boʻlishi kelib chiqadi – bu yechimga tekislikni bir xil muntazam oltiburchaklar bilan qoplamasi mos keladi.

Xullas, $l = 3, 4, 5$ boʻlgan hollarni qarash kerak.

$l = 3$ boʻlgan hol. Bu holda (2) tenglama

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{l} = \frac{1}{6} \tag{3}$$

koʻrinishga keladi. (3) nisbatan sodda Diofant tenglamasi. U faqat chekli sondagi yechimga ega boʻlishi mumkin: bir tomondan $m \geq 7$ zarurligi koʻrinib turibdi. Ikkinchi tomondan, $m \geq 7$ ekan, demak,

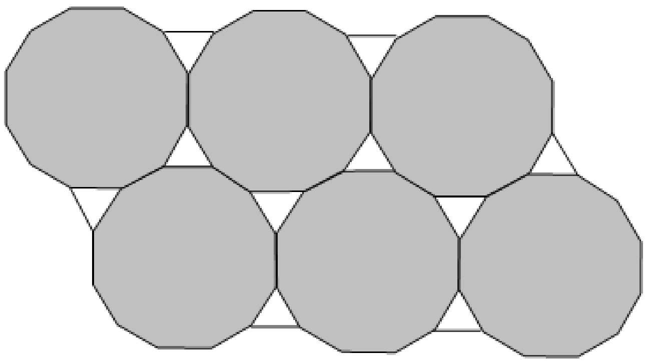
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{6} - \frac{1}{m} \geq \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42},$$

yaʼni $n \leq 42$. Xullas, $7 \leq m \leq n \leq 42$. Bu xossadan (2) tenglama chekli sondagi yechimlarga ega boʻlishi kelib chiqadi. Ularni arifmetik mushohada yoki kompyuterda dasturlash usuli bilan topish mumkin. (3) tenglama yechimlari quyidagi jadvalda keltirilgan:

$$l=3,\ \ m=7,\ \ \ n=42;$$
$$l=3,\ \ m=8,\ \ \ n=24;$$
$$l=3,\ \ m=9,\ \ \ n=18;$$
$$l=3,\ \ m=10,\ \ n=15;$$
$$l=3,\ \ m=12,\ \ n=12.$$

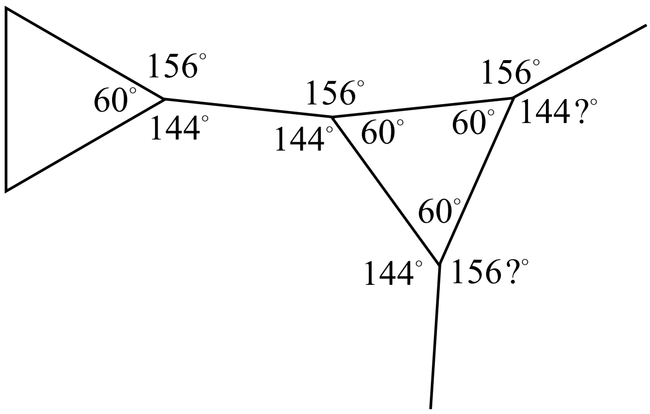
Bu yechimlardan atigi so‘nggisiga tekislikning biz izlayotgan qoplamasiga mos kelar ekan (4-rasm).

Boshqa yechimlarga qoplama mos kelmaydi. Buni $l=3,\ m=10,\ n=15$ yechim uchun isbotlaymiz. Shu maqsadda teskarisini faraz qilamiz: muntazam uchburchak, o‘nburchak va o‘nbeshburchaklar bilan tekislikni qoplash mumkin bo‘lsin.



4-rasm.

Bu ko‘pburchaklarning ichki burchaklari 60°, 144° va 156° bo‘lishini eslab qolaylik. Qoplamada o‘nbeshburchakning A_1A_2 tomoniga uchburchak yopishgan bo‘lsin. U holda o‘nbeshburchakning A_2A_3 tomoniga uchburchak yopishishi mumkin emas – ikki qo‘shni uchburchaklar orasidagi burchak 56° bo‘lib, unga na



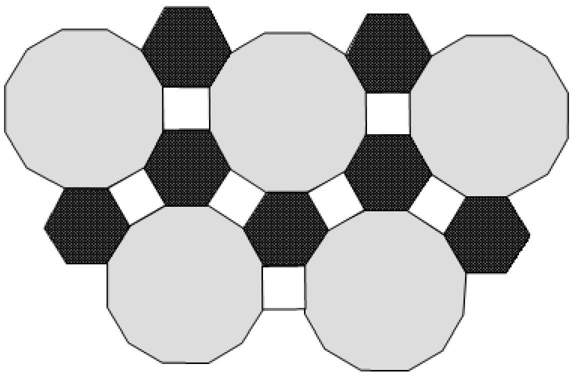
5-rasm.

muntazam uchburchak, na o‘nburchak, na o‘nbeshburchak sig‘ar edi. Shu singari A_2A_3 tomonga yana o‘nbeshburchak yopishishi ham mumkin emas. Ya’ni, bu tomonga o‘nburchak yopishgan bo‘lishi lozim. Mana shu holatga diqqat qilaylik (5-rasm).

Natijada ? belgisi qo‘yilgan burchaklardan biri 144° ikkinchisi 156° bo‘lishi kerak degan xulosa chiqadi. Bu esa ziddiyat keltirib chiqaradi.

Mashq. (2) tenglamaning dastlabki to‘rtta yechimiga ham tekislikni muntazam ko‘pburchaklar bilan qoplamasi mos kelmasligini isbotlang.

Yuqoridagi kabi mushohadalar $l=4$ uchun o‘tkazilsa, yana ikki xil qoplama topiladi: ulardan bittasi – yuqorida ko‘rilgan misol, ya’ni muntazam sakkizburchak va kvadratlardan tuzilgan yechim, ikkinchisi rasmda tasvirlangan (6-rasm).


6-rasm.

Bir xil muntazam beshburchaklar bilan tekislikni qoplab bo‘lmasligi o‘quvchiga ma’lum. Qarangki, tekislik har xil muntazam ko‘pburchaklar bilan qoplansa ham, qoplamada beshburchak qatnasha olmas ekan. Sababi – (2) tenglamaning $l=5$ bo‘lgan ikkitagina yechimi mavjud ekan:

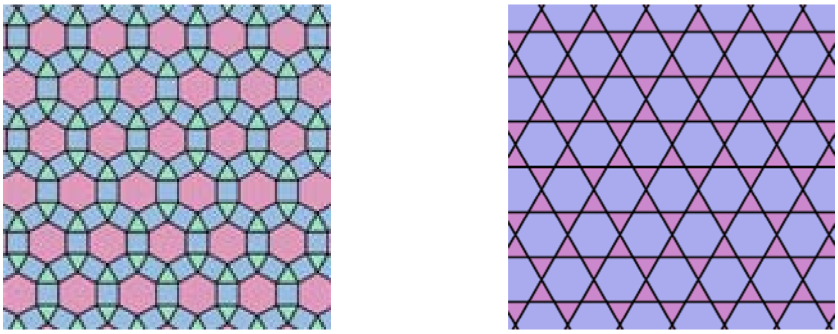
$$l=5,\ \ m=4,\quad n=20;$$

$$l=5,\ \ m=5,\quad n=10.$$

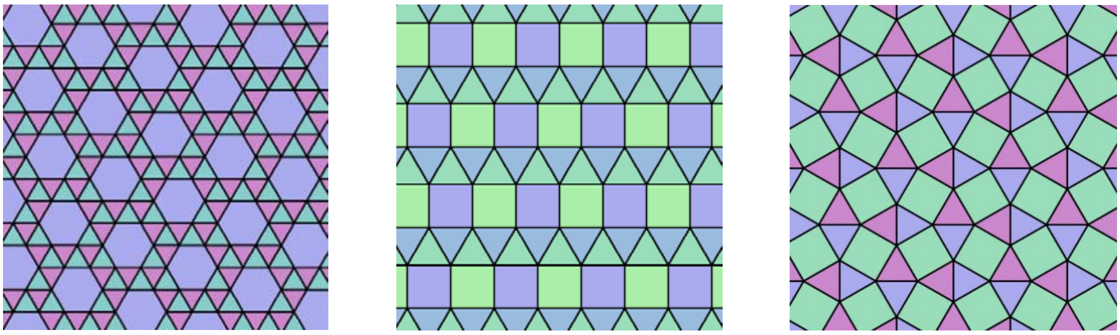
Bu yechimlarga qoplama mos kelmasligi yuqorida yuritilgani kabi mushohadalar bilan isbotlanadi.

Shunday qilib biz bir tugun nuqtada uchtadan muntazam ko‘pburchak tutashgan hollarning hammasini qarab chiqdik va uch xil qoplama topdik – ular 1, 4 va 6-

rasmlarda tasvirlangan. Bir tugun nuqtada to‘rttadan ko‘pburchak tutashadigan qoplamalar atigi ikki xil (7-rasm), beshtadan tutashadigan qoplamalar esa uch xil bo‘lishi mumkin ekan (8-rasm).



7-rasm.



8-rasm.

Mashq. Ostiga chizilgan tasdiqlarni isbotlang.

Bu mashq bajarilgach, quyidagi teorema to‘liq isbot bo‘ladi:

Teorema. Tekislikni muntazam turli ko‘pburchaklar bilan sakkiz usulda qoplash mumkin.

§ 20. “Al-jabr va al-muqobala”da geometrik algebra[22]

Matematika taraqqiyotining katta qismi geometriya va algebra g‘oyalarining o‘zaro chatishuvi, sinteziga asoslanadi, deyilsa, katta xato bo‘lmaydi. Bunday chatishuv Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning “Al-jabr va al-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob” asaridan boshlangan desak, Ayni haqiqat bo‘ladi (Bu asarning nomini soddaroq qilib, “Al-jabr va al-muqobala” deb yuritishga kelishamiz). Hozirgi zamon algebra faniga poydevor bo‘lgan bu asarda sof algebra masalalaridan tashqari, maxsus yirik bob geometriyaga bag‘ishlangan. Lekin, bu bobda geometriyadan boshlang‘ich ma’lumotlar keltirilgan, xolos. Aksincha, kitobning algebra qismida nafis geometrik mushohadalar qo‘llangani diqqatga molik: kvadrat tenglamani yechish qoidalari Evklid ruhida geometrik mushohadalar bilan isbotlangan.

“Al-jabr va al-muqobala”ni o‘zbek tiliga prof. A.Ahmedov tomonidan nashr etilgan bo‘lib, uning so‘zboshisida ana shu isbotlar hozirgi belgilashlarda bayon qilib berilgan. Bu nashr hozir noyob bo‘lib ketgani uchun, bu yerda Al-Xorazmiy mushohadalarini imkon boricha ixchamlangan va oydinlashtirilgan tarzda kitobxonlarga taqdim etishni lozim topdik.

Dastlab al-Xorazmiy kvadrat tenglamalarning tasnifini (klassifikatsiyasini) beradi:

1-toifa: $cx^2 = bx$ – kvadratlar (cx^2) ildizlarga (bx) teng;

2-toifa: $cx^2 = a$ – kvadratlar (cx^2) songa (a) teng;

3-toifa: $bx = a$ – ildizlar songa teng;

4-toifa: $cx^2 + bx = a$ – kvadratlar va ildizlar songa teng;

5-toifa: $cx^2 + a = bx$ – kvadratlar va son ildizlarga teng;

6-toifa: $bx + a = cx^2$ – ildizlar va son kvadratlarga teng.

[22] FMI, 2002, №5 (N.Normurodov bilan hammualliflikda).

Hozirgi zamon matematikasi tilida Al-Xorazmiy tasnifini shunday bayon qilish mumkin:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ko'rinishidagi tenglamaning musbat ildizlarini topish lozim bo'lsin. a, b yoki c koeffisientlardan biri 0 ga teng bo'lsa, 1–3 toifa tenglamalar hosil bo'lib, oson yechilgani uchun, ularning uchchalasi ham 0 dan farqli bo'lgan hollarni qaraymiz. Bu shartda tenglamani hadma-had a ga bo'lib,

$$x^2 + rx + s = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishga keltirib olamiz. Shunda to'rtta imkoniyat mavjud bo'ladi:

1. $r > 0, s > 0$ – bu holda tenglama musbat ildizga ega emas.
2. $r > 0, s < 0$ – bu holda (1) tenglamani

$$x^2 + px = q \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bunda p va q koeffisientlar musbat sonlar bo'ladi. (2) tenglama al-Xorazmiy tasnifida to'rtinchi toifani tashkil etadi.

3. $r < 0, s > 0$ – bu holda (1) tenglamani $x^2 + q = px$ ko'rinishda yozish mumkin. Natijada al-Xorazmiy tasnifidagi beshinchi toifa tenglama hosil bo'ladi.
4. $r < 0, s < 0$ – bu holda (1) tenglamani $x^2 = px + q$ ko'rinishda yozish mumkin va u oltinchi toifa tenglamani beradi.

Al-Xorazmiy tenglamalarni tavsiflash va ularni yechish qoidalarini sof algebraik uslubda bayon etadi. Agar qiyoslaydigan bo'lsak, yunon matematiklari, aksincha, algebraik masalalarni ham sof geometrik tilda ta'riflaganlar. Masalan, (1) tenglamani Evklid mana bunday ifodalagan bo'lar edi: shunday kesma topingki (uning uzunligi tenglamadagi x ga mos keladi), unga yasalgan kvadrat (yuzi x^2) hamda eni p ga teng to'g'ri to'rtburchak (ya'ni, yuzi px) berilgan kvadratga (ya'ni q) teng bo'lsin. Masalani yunonlar geometrik yo'sinda – sirkul va chizg'ich bilan yechar edilar.

Al-Xorazmiy amaliyotda geometrik til har doim ham o'ng'ay bo'lavermasligini hisobga olgan. Xususan, meros taqsimotiga oid masalalar asosan chiziqli va kvadrat tenglamaga kelishini kitobning ikkinchi qismida ko'rsatib bergan. Algebra masalasi geometriyadan kelib chiqqan bo'lsa-ku, uni geometrik tilda bayon qilinishi tushunarli. Lekin meros taqsimotiga oid masalani geometrik tilda bayon qilish sun'iy, albatta. Shuning uchun al-Xorazmiy algebraik tenglamalar va ularni yechish qoidalarini geometrik tildan xalos qilib, algebraik mushohada uslubini ixtiro etgan. Masalan, al-Xorazmiy kitobida 4-toifa kvadrat tenglamani yechish qoidasi shunday bayon qilinadi: "Shuningdek, agar kvadratning yarmi va beshta ildiz yigirma sakkiz dirhamga teng deyilsa, bu anglatadiki: agar kvadratning yarmiga uning beshta ildiziga teng son qo'shilsa, yigirma sakkiz dirxam hosil bo'ladi. Sen o'z kvadratingni, u to'liq kvadrat bo'lsin deb, to'ldirmoqchisan, ya'ni uni ikki baravarlamoqchisan. Uni ikki baravarla va u hadlarning barchasini ikki baravarla. Hosil bo'ladi: kvadrat va o'nta ildiz ellik olti dirhamga teng. [Yechish] qoidasi bunday:

1) *ildizlar sonini ikkiga bo'l, besh hosil bo'ladi;*

2) *buni o'ziga tengiga ko'paytir (kvadratga oshir), yigirma besh bo'ladi;*

3) *buni ellik oltiga qo'sh, sakson bir bo'ladi;*

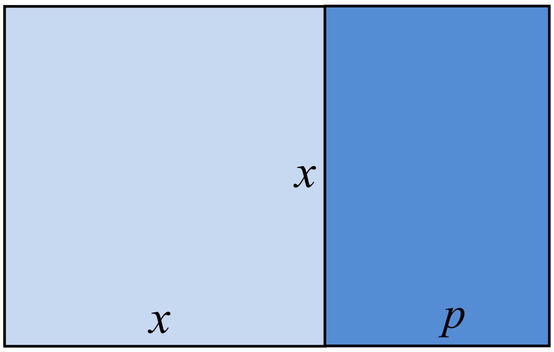
4) *bundan ildiz chiqar, to'qqiz bo'ladi;*

5) *undan ildizlar yarmini, ya'ni beshni ayir, to'rt qoladi;*

6) *mana shu sen qidirgan kvadrat ildiz bo'ladi".*

Koʻrinib turibdiki, geometriyadan mutlaqo asar yoʻq, xatto ozod had uchun “dirham” soʻzi ham atayin algebrani geometriyadan uzoqlashtirish uchun qoʻllanganday. Har bir toifa tenglamani yechish qoidasi yetarlicha (jumladan, kasr koeffisientli) misollarda namoyish qilingach, al-Xorazmiy qoidalarni isbotlashga oʻtadi. Bu yerda endi boshqa vaziyatga duch kelamiz. Hozir kvadrat tenglamani yechish formulasi algebraik shakl almashtirishlar vositasida keltirib chiqariladi. Al-Xorazmiy davrida isbot tushunchasi sof geometrik mazmunga ega boʻlgan. Shuning uchun u kvadrat tenglamalarni yechish qoidalarini Evklidning “Negizlar” asari ruxida geometrik mushohadalar bilan isbotlaydi.

Al-Xorazmiy mushohadalari bilan tanishish bugungi oʻquvchi uchun ham ibratlidir. Zero, hozir biz aks holat: geometrik masalalarni ham sof algebraik yoʻl bilan yechishga odatlanganmiz. Holbuki, bunda isbot soddalashadi-yu ammo, mantiqiy mushohadaning jozibasiga putur yetadi. Kvadrat tenglamalarni yechish formulasining geometrik isboti esa chindan ham jozibalidir.



1-a rasm.

4-toifadagi $x^2 + px = q$ tenglamani yechish qoidasi oson isbotlanadi:

1) tomoni x boʻlgan kvadratga asosi p boʻlgan toʻgʻri toʻrtburchakni tirkaymiz (1-a rasm).

Tenglamaga koʻra butun shakl yuzasi q ga teng. (Barcha shakllarda yuzi q ga teng toʻrtburchak va oltiburchaklar shtrixlangan.)

2) So‘ng to‘g‘ri to‘rtburchakni ikkiga bo‘lamiz va yarmini kvadrat yuqorisiga ko‘chiramiz (1-b rasm).

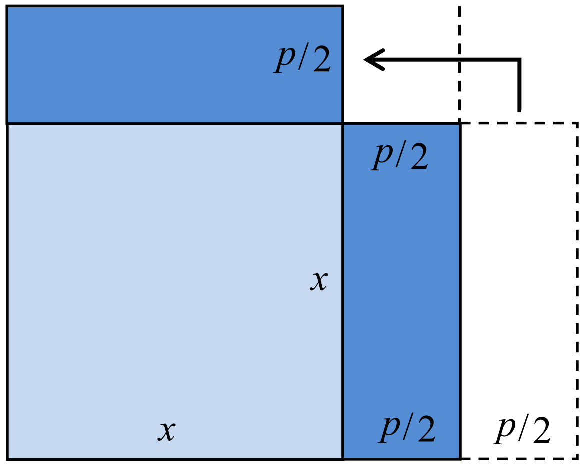
Demak, hosil bo‘lgan oltiburchak berilgan to‘g‘ri to‘rtburchak yuziga tengligicha qoladi.

3) Hosil bo‘lgan oltiburchak tomoni $\dfrac{p}{2}$ ga teng kvadratcha bilan to‘ldirilsa, yuzasi $q+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$ ga teng kvadrat hosil bo‘ladi (1-v rasm).

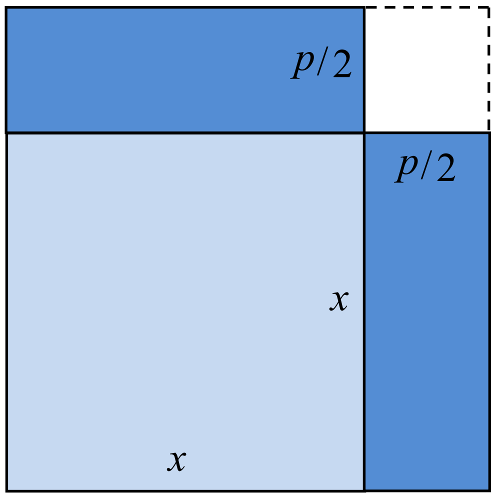
Bu kvadratning tomoni $x+\dfrac{p}{2}$ bo‘lgani uchun

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=q+\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Demak, $x=\sqrt{q+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2}-\dfrac{p}{2}$.



1-b rasm.



1-v rasm.

5-toifa tenglama $x^2+q=px$ uchun yechish qoidasining isboti.

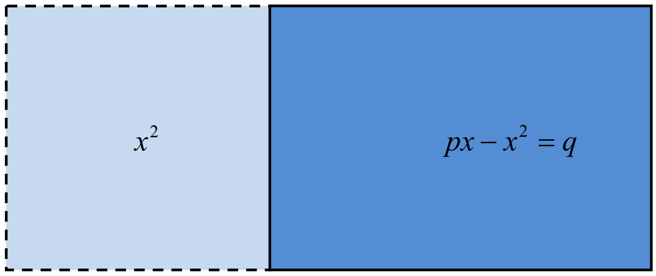
1) Bu safar tomonlari p, x bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak ichiga kvadrat chizamiz (2-*a* rasm).

2) To‘g‘ri to‘rtburchakni ikkiga bo‘lib, chap yarmining kvadratdan ortgan qismini o‘ng yarmining yuqorisiga ko‘chiramiz (2-*b* rasm).

Uning tomonlari x va $\frac{p}{2}$ ga teng. Hosil bo‘lgan olti burchakning yuzi $px - x^2 = q$ ga teng.

3) Uning kemtigi tomoni $\frac{p}{2} - x$ ga teng kvadratdan iborat.

Bu kemtik to‘ldirilsa tomoni $\frac{p}{2}$ ga teng kvadrat hosil bo‘ladi. Shuning uchun $\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$

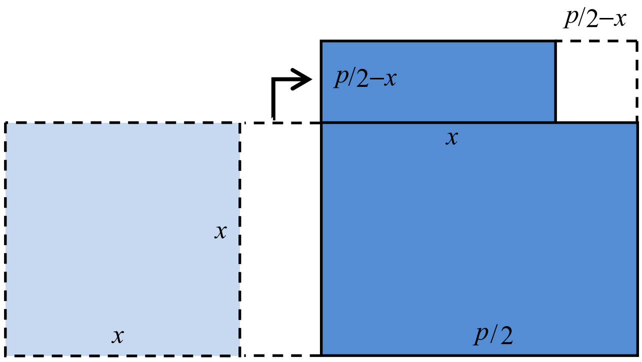


2-*a* rasm.

Demak,

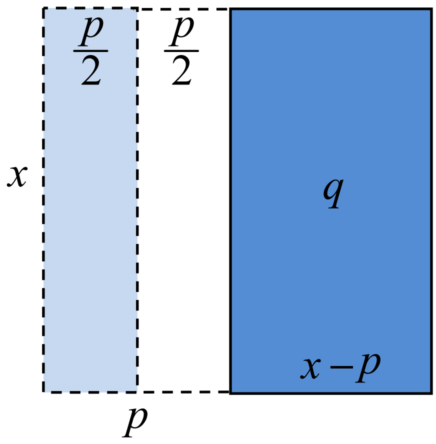
$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Bu mushohada, umuman olganda, $x < \frac{p}{2}$ bo‘lganda o‘rinli (2-*b* rasm).

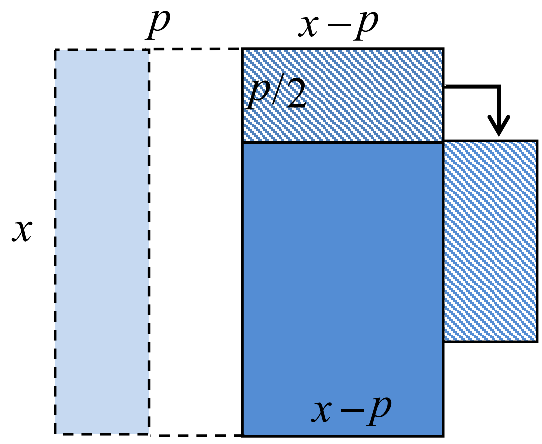


2-*b* rasm.

Lekin $x > \frac{p}{2}$ bo‘lsa ham (2-*c* rasm), mushohadaning mohiyati o‘zgarmaydi, faqat bu safar yuzi x ga teng to‘g‘ri to‘rtburchakdan 2-*c* rasmdagi kabi tasmani qirqib, yonboshiga ko‘chirish kerak. Hosil bo‘lgan oltiburchak kvadratga to‘ldirilsa, tomoni $\frac{p}{2}$ ga teng chiqishini ko‘rish qiyin emas.



2-c rasm.



2-d rasm.

Demak to‘ldiruvchi kvadratchaning yuzi $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$.

Shuning uchun $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$. Bundan $x=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.

6-toifaga mansub: $x^2=px+q$ tenglamani yechish qoidasi isboti ham shunga o‘xshash:

1) tomoni x ga teng kvadrat yasab, undan tomonlari x va p bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni ajratamiz (3-a rasm).

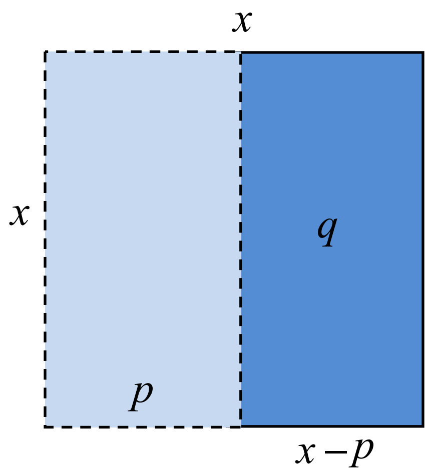
2) Qolgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi, tenglamaga ko‘ra, q ga teng. Bu to‘rtburchak ostidan tomonlari $x-p$ va $\frac{p}{2}$ bo‘lgan tasmani kesib, yonboshiga ko‘chiramiz (3-b rasm). Tabiiy, hosil bo‘lgan olti burchak yuzi q ga tengligicha qoladi.

3) Oltiburchakning kemtigi – tomoni $\frac{p}{2}$ bo‘lgan kvadratchadan iborat bo‘lib, u to‘ldirilsa, tomoni $x-\frac{p}{2}$ ga

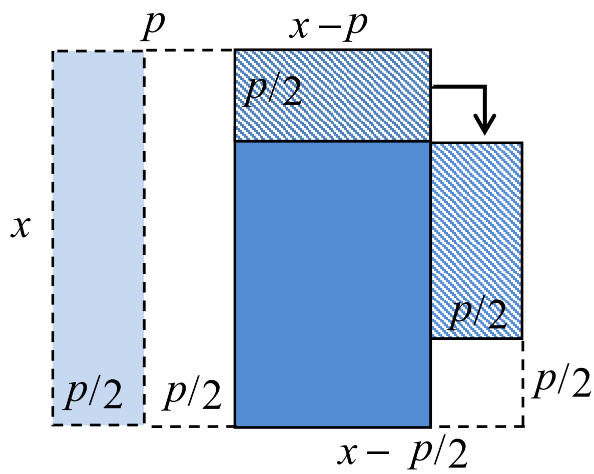
teng kvadrat hosil bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+q.$$

Bundan $x=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$.



3-a rasm.



3-b rasm.

Al-Xorazmiyning kvadrat tenglamalar yechish qoidasini geometrik yo‘l bilan isbotlashi o‘ziga xos nafosatga ega. Shu bilan birga uni sodda deb ham bo‘lmaydi. Bundan ikki xulosa chiqadi:

Birinchidan, al-Xorazmiy tenglamalar yechish qoidasini Evklid zamonasidan buyon hukmron bo‘lib kelgan murakkab geometrik tilda bayon qilish o‘rniga o‘quvchiga oson bo‘lgan sodda va lo‘nda usulda algoritm tarzidan bergan. Bunday qoidalar Qadimgi Bobil zamonidan uchrasa-da, al-Xorazmiyning buyuk xizmati shundaki, u algebraik tilni tizimga solgan va shu bilan algebraga mustaqil fan sohasi sifatida asos solgan.

Ikkinchidan, al-Xorazmiy Evklid “Negizlari”, umuman geometriya bilan yaxshi tanish bo‘lgan (buni olimning quyosh soati yasashga oid asari ham tasdiqlaydi).

Jumladan, al-Xorazmiy ham Evklid kabi to‘g‘ri to‘rtburchakni uning diagonali orqali belgilashi ham shundan dalolat beradi. Ahmad Farg‘oniyning xabar berishicha, al-Xorazmiy geometriyaga oid ham risola yozgan, ammo, afsuski, hozirgacha u topilgan emas.

§ 21. Isbotdan isbotning farqi bor[23]

Matematika fanining asosiy maqsadlaridan biri, eng asosiysi desa ham bo‘ladi, bu – munosabat o‘rnatishdir. Har bir teorema, har bir formula tushunchalar o‘rtasidagi munosabatning tayin ko‘rinishda namoyonidan iborat. Munosabatlar esa, shaklan ixcham yoki juda uzun, nafis yoki nihoyatda dag‘al, har qancha uringan bilan esda qolmaydigan yoki bir ko‘rishdayoq miyaga mixlanib, sira esdan chiqmaydigan bo‘lishi mumkin. So‘nggi toifaga mansub munosabatlardan biri, ko‘pchilik matematiklar tan olishicha, mana bu ayniyatdir:

$$1^3+2^3+3^3+....+n^3 \ =(1+2+3+...+n)^2. \qquad (1)$$

Haqiqatan, $n=1$ bo‘lsa, (1) tenglik $1=1$; $n=2$ bo‘lsa, $1+8=3^2$; $n=3$ bo‘lganda esa $1+8+27=6^2$ va hokazo.

(1) ayniyat qadimgi yunonlik matematiklarga ma’lum bo‘lgan. Bu munosabatni birinchi bo‘lib topgan matematik chuqur hayajonga tushgani shubhasiz. Chunki, hozir ham uni mustaqil payqagan odamni hayajon bosadi, ko‘rgan kishi albatta taajjubga tushadi: “Nahotki?”

Biz, bu yerda ko‘pchilik matematika bilimdonlariga yaxshi tanish bo‘lgan (1) munosabatning o‘zi haqida emas, avvalambor, u bilan geometriya o‘rtasidagi munosabat ustida to‘xtalmoqchimiz. Lekin bayon to‘liq

[23] FMI, 2002, №6.

bo‘lishi uchun avval (1)ning isbotini keltiramiz. Bir qarashda tabiiy tuyulsada, (1) tenglikni bevosita, matematik induksiya usuli bilan isbotlash mushkul. Bu usulni ikki marta,

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

va

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \tag{3}$$

formulalarni alohida-alohida isbotlashga qo‘llash o‘ng‘ay.

Aslida (2) formula 1, 2, 3, 4,... arifmetik progressiya dastlabki n ta hadining yig‘indisidan iborat.

(3) formulaga kelsak, $n=1$ bo‘lganda uning to‘g‘riligi ko‘rinib turibdi. Aytaylik n ning biror qiymati uchun (3) tenglik to‘g‘ri bo‘lsin. Uning har ikki tomoniga $(n+1)^3$ ni qo‘shib, chap tomonini aynan o‘zgartiramiz:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=$$

$$=(n+1)^2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2+(n+1)\right]=(n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right]=$$

$$=(n+1)^2\left[\left(\frac{n+2}{2}\right)^2\right]=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Shunday qilib,(3) formula n ning biror qiymati uchun o‘rinli bo‘lsa, undan keyingi $n+1$ qiymati uchun ham o‘rinli bo‘lar ekan. Demak, matematik induksiya prinsipiga ko‘ra, u umuman to‘g‘ri.

(3) formulaning yig‘indilarini topishga asoslangan yana bir boshqa isboti ham bor. U

$$m^4 + 4m^4 + 6m^2 + 4m + 1 = (m+1)^4 \qquad (4)$$

tenglikka tayanadi. (4) tenglikda $m = 1,\ 2,\ ...,\ n-1,\ n$ deb olsak,

$$1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1 = (1+1)^4 = 2^4,$$

$$2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1 = (2+1)^4 = 3^4,$$

$$3^4 + 4\cdot 3^3 + 6\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 1 = (3+1)^4 = 4^4, ...$$

– –

$$(n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1 = (n-1+1)^4 = n^4$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (n+1)^4$$

tengliklar hosil bo‘ladi. Bu tengliklar hadma-had qo‘shib chiqilsa, to‘rtinchi darajalarning deyarli barchasi qisqarib ketadi (1-tenglikning eng chap tomonidagi 1^4 had bilan oxirgi tenglikning o‘ng tomonidagi $(n+1)^4$ had qoladi, xolos).

Qulaylik uchun quyidagi belgilashni qabul qilaylik:

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k.$$

Yuqorida tengliklar qo‘shilganda, bir xil koeffisientli mos hadlar yig‘ib chiqilsa,

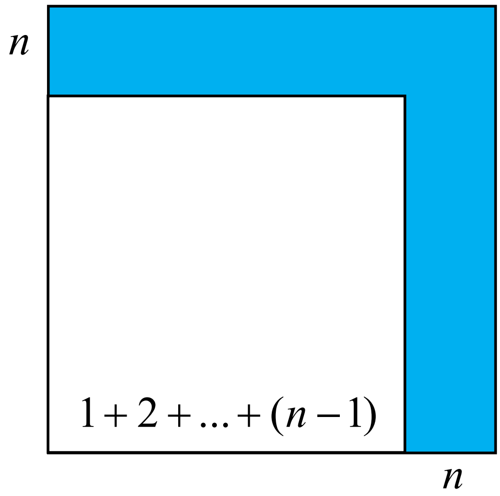
$$1 + 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + n = (n+1)^4 \qquad (5)$$

tenglik hosil bo‘ladi. Ya’ni $S_3(n)$, $S_2(n)$, $S_1(n)$ yig‘indilarni o‘zaro bog‘lovchi munosabat – *rekurrent formula* hosil qildik. Shuning uchun, bu uch yig‘indidan ikkitasi ma’lum bo‘lsa, uchinchisini aniqlash mumkin. $S_1(n)$ yig‘indi uchun formulani yuqorida yozgan edik. Agar

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (6)$$

formulani ma’lum desak, u holda (5) munosabatdan (1) ayniyatni keltirib chiqarish qiyin emas.

Mashq. (6) formulani kamida ikki usulda isbotlang!

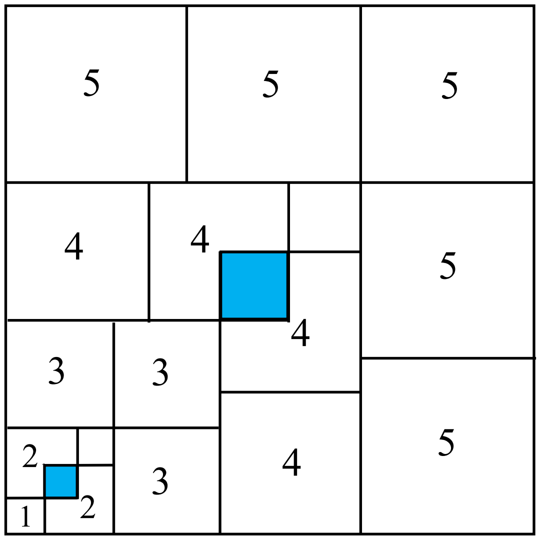


Endi asosiy maqsadga ko‘chaylik. Sharqning yirik matematikalaridan biri, Beruniyga zamondosh bo‘lgan Abu Bakr al-Karojiy (1) formulaning ajoyib isbotini bayon qilgan. Uning mushohadasi algebra va geometriya chatishuvidan tashkil topgan. Al-Karojiy tomonining uzunligi $1+2+...+n$ ga teng kvadrat qaraydi. Bu kvadratning ikki tomonidan go‘niya shaklidagi, eni n ga teng tasma chiqarib tashlansa, tomoni $1+2+...+(n-1)$ ga teng kvadrat qolishi ravshan. Al-Karojiy qirqib tashlanayotgan tasmaning yuzi roppa-rosa n^3 ga tengligini payqagan. Bundan (1) formula kelib chiqadi.

Mashq. Al-Karajiy isbotini tiklang.

Avstraliyalik matematika o‘qituvchisi R.Egglton al-Karojiy mushohadasi asosida (1) ayniyatning sof geometrik isbotini topishga muvaffaq bo‘lgan. Isbot bo‘lganda ham, sodda, hech bir hisob-kitob jalb qilmaydi – chizmaga qaralsa bas, ko‘rinadi-qoladi:

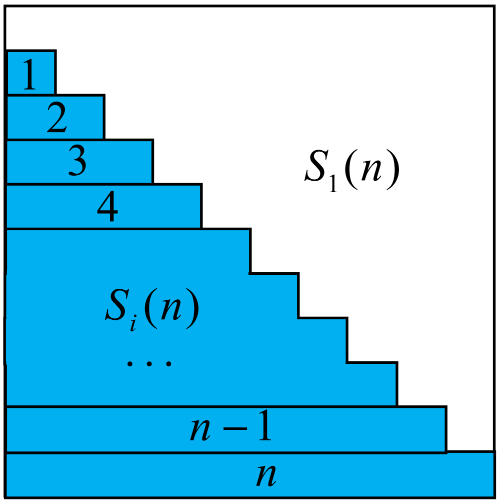
Shaklga izoh beraylik: pastki chap burchakda bitta tomoni 1 ga teng kvadrat joylashgan. Uning yuqorisiga va o‘ng tomoniga – tomoni 2 ga teng ikkita kvadrat qo‘yilgan (kvadratlar tomonlarining uzunliklari ichiga yozib ko‘rsatilgan). So‘ng yuqori va o‘ng tarafdan tomoni 3 ga teng uchta kvadrat tirkalgan va hokazo. Bunda uzunligi toq tomonli kvadratlar bir tekis joylashadi, tomonlarining uzunligi juft kvadratlar esa qisman bir-birining ustiga mingashadi hamda yuqori o‘ng burchakda bo‘sh sohalar qoladi. Kvadratlarning mingashgan qismi ham, bo‘sh qolgan soha ham o‘zaro teng kvadratlar bo‘lishini ko‘rish qiyin emas.



Shuning uchun birining kemtigini ikkinchisi qoplaydi. Demak, n qadamdan so‘ng yuzi

$$1+2\cdot 2^2+3\cdot 3^2+4\cdot 4^2+...+n\cdot n^2$$

ga teng katta kvadrat hosil bo‘ladi. Uning tomoni $1+2+3+...+n$ ga teng bo‘lganidan (1) ayniyat kelib chiqadi.



R.Egllton isboti haqiqatan jozibali. Ayni paytda sermazmun – sonlar nazariyasi bilan geometriya o‘rtasida munosabat o‘rnatadi.

R.Egglton topilmasi munosabati bilan o‘quvchilar diqqatini bir muammoga qaratamiz. Avstraliyalik matematik o‘z isbotini izlab topishda (2) formulaning ko‘pchilikka yaxshi ma’lum, chapdagi shaklga asoslangan isbotidan kelib chiqqan bo‘lishi kerak.

Bu shakldan $2\cdot S_1(n)=n^2+n$, ya’ni (2) formula kelib chiqadi. Endi shunday faraz tug‘iladi: $S_1(n)$ va $S_3(n)$ uchun formulaning sodda geometrik isboti bor ekan, shunday isbot $S_2(n)$ uchun, ya’ni (6) formulaga nisbatan ham mavjud bo‘lishi kerak. O‘quvchilarimiz bunday isbotni izlab ko‘radilar deb umid qilamiz.

Hikoyamizning oxirida muhokama qilingan mavzu tarixi haqida qisqacha to‘xtalamiz. (2) formula juda qadim zamonlardayoq ma’lum bo‘lgan. (6) formula ham qadimgi Bobil yodgorliklarida uchraydi. Uni Arximed parabola segmentining yuzini hisoblashda qo‘llagan. Qadimgi yunon matematigi Nikomax $S_3(n)$ uchun formulani bilgan.

Islom Sharqining taniqli olimlaridan biri Ibn al-Xaysam $S_4(n)$ ni hisoblash qoidasini topgan.

Mashq. Ibn al-Xaysam qoidasini G‘iyosiddin Jamshid Koshiy ko‘rinishida isbotlang (kamida ikki usulda):

$$S_4(n)=\left(\frac{1}{5}\big(S_1(n)-1\big)+S_1(n)\right)S_2(n).$$

1617 yilda nemis matematigi I.Faulgaber k ning 11 gacha qiymati uchun $S_k(n)$ fomulasini hisoblaydi. Nihoyat Yakob Bernulli 1713 yilda $S_k(n)$ ni hisoblashning umumiy qoidasini beradi, u (5) munosabatning umumlashmasidan iborat.

§ 22. Isbotning isbotga o'xshashligi bor[24]

Avvalgi mavzuda

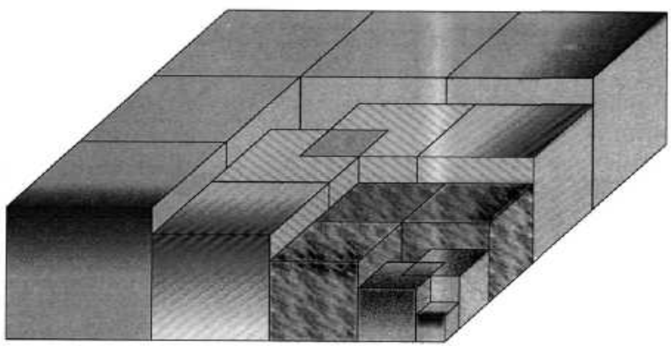
$$1^3+2^3+...+n^3=(1+2+...+n)^2 \quad (1)$$

formulaning sof geometrik isboti to'g'risida hikoya qilgan edik. Bu safar ana shu g'oya asosida $1^4+2^4+...+n^4$ yig'indi uchun formula keltirib chiqaramiz. Albatta, bu yig'indi uchun formula yaxshi ma'lum, masalan,

$$S_4(n)=1^4+2^4+...+n^4=\left[\frac{5}{6}S_1(n)-1\right]S_2(n) \quad (2)$$

formulani o'rta asrlik mashhur matematiklardan biri Ibn al-Xaysam bilgan. Bizning maqsadimiz – $S_4(n)$ yig'indini imkon qadar sodda usulda topish.

(1) formulani isbotlashga qo'llangan g'oya $S_4(n)=1^4+2^4+...+n^4$ yig'indini hisoblash uchun ham foydali ekan. Buning uchun asosi $(1+2+...+n)\times(1+2+...+n)$ o'lchamli kvadrat, balandligi esa n ga teng parallelepiped rasmidagi quti olamizda, unga qirrasi 1 ga teng bitta kub, qirrasi 2 ga teng 2 ta kub va hokazo qirrasi n ga teng n ta kubni terib chiqamiz. 1-rasmda bu qanday amalga oshirilishi tasvirlangan. Bu yerda ham, birinchidan,



1-rasm.

[24] FMI, 2008, №4 (X.Qurbonov bilan hammualliflikda).

qirrasi juft songa teng bir juftdan kublar bir-biriga xalaqit qilib qoladi. Ammo ulardan birining ana shu qismi qirqib olinsa, bo‘sh qolgan chuqurchalarni roppa-rosa to‘ldiradi.

Ikkinchidan, bu safar $n\times\left(1+2+...+n\right)^2$ o‘lchamli quti tepasigacha to‘lmaydi. Xo‘sh, qutining to‘lmay qolgan qismi qancha? Buni hisoblash qiyin emas – qutini to‘ldirish uchun bitta qirrasi 1 ga teng kubcha kerak – u eng chuqurdagi kovakni to‘ldiradi. Uning yuqorisidagi qatlam $(1+2)\times(1+2)$ o‘lchamli kvadrat ekanligi ko‘rinib turibdi. Undan yuqoridagi qatlam esa

$$(1+2+3)\times(1+2+3)$$

o‘lchamli kvadrat va hokazo, eng yuqoridagi qatlamdagi bo‘sh joy roppa-rosa

$$(1+2+...+(n-1))\times(1+2+...+(n-1))$$

kvadratdir. Shunday qilib, hech bir hisob-kitobsiz

$$S_4\left(n\right)=n\times\left(1+2+...+n\right)^2-\left[1^2+\left(1+2\right)^2+\left(1+2+3\right)^2+...+\left(1+2+...+\left(n-1\right)\right)^2\right] \tag{3}$$

formulani hosil qildik. Geometriya o‘z ishini bajarib bo‘ldi. Buyog‘i – algebra:

$$S_4\left(n\right)=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\left(3n^2+3n-1\right)}{30} \tag{4}$$

Mashq. $\left(1+2+...+\left(k-1\right)\right)^2=\left[\frac{k\left(k+1\right)}{2}\right]^2=\frac{k^4+2k^3+k^2}{4}$

tenglikdan foydalanib, (3) ayniyatdan (4) formulani keltirib chiqaring.

Maqola so‘ngida o‘quvchilar diqqatini hozirgacha hal bo‘lmay qolayotgan ikki masalaga qaratamiz.

1) (4) tenglikni algebraik hisoblarsiz, sof geometrik yo‘l bilan keltirib chiqarish mumkinmi?

2) Xuddi shunday savol

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

formulani keltirib chiqarish uchun qo‘yilsa-chi?

§ 23. Cheksiz “shaxmat taxtasi” ustida matematik “o‘yin”[25]

Matematikada xilma-xil masalalar o‘rganiladi. Ularning ichida “Fermaning katta teoremasi” kabi sof nazariy musobaqa, suyuqlik oqimida uyurmalar hosil bo‘lishining qonuniyatini topishday beqiyos amaliy ahamiyatga molik muammolar, topologiyadagi Puankare farazi kabi qiyin, ammo matematika taraqqiyoti uchun g‘oyat muhim masalalar, “mukammal sonlar cheklimi yoki cheksiz ko‘pmi?” qabilidagi bayoni juda sodda, ammo yechish yo‘lida 2500 yildan buyon “yilt” etgan ziyo ko‘rinmaydigan boshqotirmalar ko‘p.

Elementar (ya’ni maktab dasturi doirasidagi) matematik masalalarning turli toifalari ichida eng jozibalisi bu – geometrik yasashga oid masalalar, desak, u qadar yanglishmaymiz. Bunday masalalar xuddi “cheksiz shaxmat taxtasi ustida o‘ziga xos matematik o‘yin”ni eslatadi:

shaxmat taxtasi – butun (!) tekislik;

donalar – qalam, chizg‘ich va sirkul (pargar);

---

[25]FMI, 2003, №5.

o‘yin qoidalari – shaxmatdagidan ham qat’iyroq (ular quyida sanalgan);

o‘yinchi – matematik;

uning raqibi – masala yechimini yashirib turuvchi xilqat (uni, balki, matematika farishtasi, desa bo‘lar).

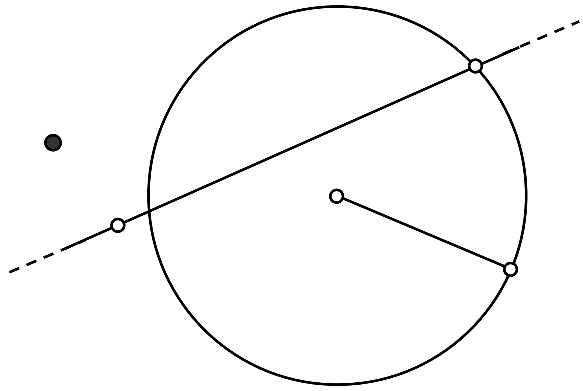
Endi o‘yin qoidalarini bayon qilaylik. Avvalambor, shuni ta’kidlaymizki, o‘yin bo‘m-bo‘sh tekislikdan boshlanishi ham mumkin (masalan: muntazam beshburchak yasang) yoki tekislikda berilgan bir necha nuqta va chiziqlardan boshlanishi ham mumkin (masalan: bir tomoni berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladigan qilib, berilgan aylanaga ichki chizilgan muntazam beshburchak yasang). Biz masalaning shartida berilgan nuqta va chiziqlarni hamda yechim davomida yasaladigan nuqta va chiziqlarni bitta so‘z bilan “belgilangan” deb ataymiz. Odatda “berilgan”, “yasalgan” so‘zlari qatorida “olingan”, “qurilgan”, “o‘tkazilgan” kabi so‘zlar ham qo‘llaniladi. Agar to‘g‘ri chiziq ustida ikkita, aytaylik, A va B nuqta belgilangan bo‘lsa, AB kesma belgilangan deyish tabiiy. Xuddi shu vaziyatda AB nur belgilangan deyish ham tushunarli – bunda A nurning uchi, B uning yo‘nalishini ko‘rsatuvchi nuqtasi bo‘ladi. Shu singari, aylananing yoyi belgilanadi.

“O‘yin”da yurishlar uch toifa bo‘ladi:

I. Tekislikning nuqtasini belgilash (bu “yurish” uchi o‘tkir qalamda bajariladi): bunda belgilanadigan nuqta a) tekislik ustida olinishi mumkin; b) belgilangan to‘g‘ri chiziq yoki aylana ustida olinishi mumkin; v) tekislikda – belgilangan to‘g‘ri chiziq yoki aylananing tayin tomonida olinishi mumkin; g) belgilangan to‘g‘ri chiziq ustida, unda belgilangan nuqtaning tayin tomonida olinishi mumkin; nihoyat, d) belgilangan kesmaning ichida, belgilangan nur ustida yoki belgilangan aylana yoyida olinishi mumkin.

II. Belgilangan ikki nuqta orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkazish (bu “yurish” qalam va chizg‘ich vositasida bajariladi); A va B nuqtalar orqali o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqni AB ko‘rinishda yozamiz.

III. Markazi belgilangan nuqtada bo‘lgan, radiusi belgilangan kesmaga teng aylana chizish (sirkul vositasida).



O‘yindan maqsad – ma’lum shartlarni qanoatlantiruvchi shakl yasash.

Bu o‘yinda donalar matematika tushunchalari ekanini yodda tutish lozim. Chunonchi:

– nuqtalarning o‘lchovi yo‘q, ya’ni ularga lupa yoki eng kuchli mikroskop orqali qaraganda ham baribir nuqtaligicha qoladi;

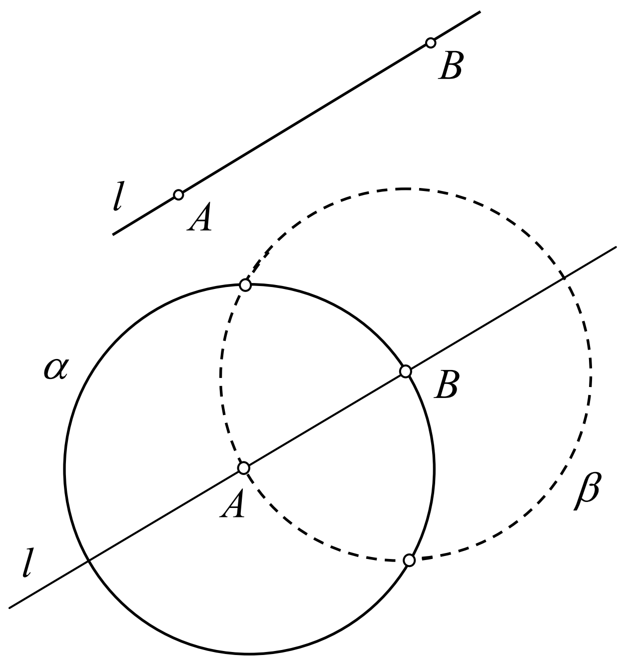
– to‘g‘ri chiziqlar ham shu kabi ideal: eni yo‘q, to‘ppa-to‘g‘ri va har ikki tomonga cheksiz davom etadi. (E’tibor qiling: demak, chizg‘ichning faqat bitta qirrasi bor, xolos, ustida santimetr, millimetr shtrixlari yoki boshqa belgilar mutlaqo yo‘q, ammo cheksiz uzun!)

– aylana ham ideal (sirkulning oyoqlari istalgancha katta yoki, aksincha, juda kichik ochilishi mumkin!)

Mana shu o‘yin “chizg‘ich va sirkul vositasida yasashlar” yoki qisqacha “geometrik yasashlar” deb ataladi. (Aslida geometrik yasashlar tushunchasi ancha keng – bu keyingi abzasdagi savolning javobidan ham ko‘rinadi.)

Tabiiy savol tug‘iladi: xo‘sh, nega endi ikki tomonli, yoki santimetr va millimetrlar ko‘rsatilgan oddiy chizg‘ichdan foydalanish mumkin emas?

Bir tomondan, yog‘och, temir yoki plasmassadan yasalgan chizg‘ich bilan ideal to‘g‘ri chiziq yasab bo‘lmaydi. Ya’ni, bunday chizg‘ich aslida matematik to‘g‘ri chiziqni emas, balki uning anchayin qo‘pol tasvirini yasashga imkon beradi, xolos. (Bu gap qalam bilan sirkulga ham taalluqli, albatta). Boshqa tomondan, ikki tomonli ideal chig‘zich yordamida geometrik yasashlar masalasini qarash mumkin, lekin bu boshqa o‘yin bo‘ladi (stol tennisi bilan katta tennisning farqiga o‘xshash). Uchinchidan, o‘yin ma’qul bo‘lsa, nega uning qoidalari unday emas, bunday deb so‘rashning ma’nosi yo‘q. Shaxmat qadimgi Hindistonda ixtiro qilinib, uning qoidalari allaqachon sayqallanib bo‘lgani singari, chizg‘ich va sirkul vositasida geometrik yasashlar “o‘yini”ning qoidalari bizga Qadimgi Yunonistondan meros bo‘lib qolgan.



Bu qoidalar lo‘nda va sodda ekanligiga qaramay, shunday go‘zal partiyalar o‘ynalganki, yunon matematiklariga tasannolar aytmay iloj yo‘q. Ulardan ayrimlari bilan tanishishdan avval shaxmatdagi kabi “yurish”larni belgilash usulini qabul qilamiz:

1. Belgilangan nuqtalar, xususiy holda, “o‘yin boshida” berilgan nuqtalar – katta lotin harflari (zarur bo‘lganda indekslar bilan). Masalan, A, B_1, F'.

2. A va B nuqtalardan o‘tkaziladigan to‘g‘ri chiziq: AB yoki kichik lotin harflari bilan. Masalan, $l = AB$ yozuvi l to‘g‘ri chiziq belgilangan A va B nuqtalar orqali o‘tkazilishini bildiradi.

3. $O(A;\, BC)$ – markazi belgilangan A nuqtada, radiusi belgilangan BC kesmaga teng aylana. Aylanalarni qisqacha kichik yunon harflari bilan belgilashga kelishamiz.

1-masala. Berilgan kesmaning o‘rtasini yasang.

Masalani “o‘yinimiz tilida” oydinlashtirib olamiz: “kesma berilgan” degani bu – l to‘g‘ri chiziq va uning ustida A va B nuqtalar berilgan, deganidir.

Bu masalaning yechimi quyidagi partiya tarzida amalga oshadi:

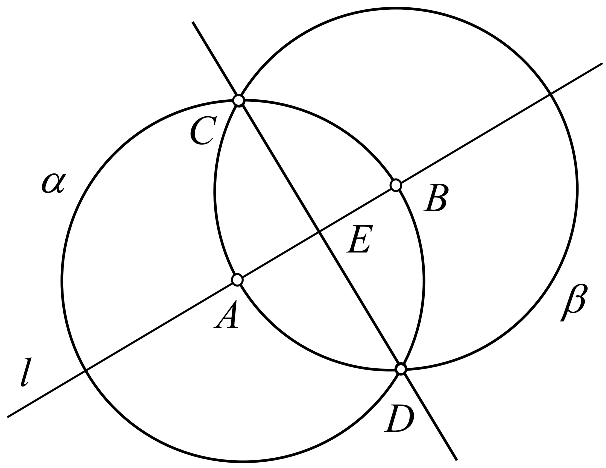
1-yurish. $\alpha = O(A;\, AB)$ – markazi A, radiusi AB bo‘lgan aylana chizamiz.

2-yurish. $\beta = O(B;\, AB)$ – markazi B, radiusi AB bo‘lgan aylana chizamiz.

3-yurish. Aylanalar kesishgan C va D nuqtalarni belgilaymiz.

4-yurish. Kesishish nuqtalaridan CD to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz.

5-yurish. AB va CD to‘g‘ri chiziqlar kesishgan E nuqtani belgilaymiz.



Masala yechildi: E nuqta AB kesmaning o‘rtasi bo‘ladi.

Buni, albatta, isbotlash zarur. Shuningdek, yo‘l-yo‘lakay qilingan mushohadalar ham asoslanishi kerak. Masalan, nima uchun α va β aylanalar kesishadi? Balki kesishmas? Nega ikkita nuqtada kesishadi? Balki faqat bitta nuqtada bir-biriga urinib qolar? Bunday savollarga albatta javob berilishi lozim. Lekin bu grossmeysterdan “nega siz o‘yin paytida bunday yurish qildingiz? Boshqa yurish qilsangiz bo‘lmasmidi?” qabilidagi savollarga o'xshaydi. Biz bunday savollar bilan shug'ullanishni keyinroqqa qoldirib, hozir "cheksiz taxta ustida shaxmat o'yini" bilan chuqurroq tanishamiz.

2-masala. To'g'ri chiziqqa undan tashqarida yotgan nuqtadan perpendikulyar tushiring.

Yechish. Berilgan: l to'g'ri chiziq, unda yotmaydigan C nuqta.

1-yurish. l to'g'ri chiziqda biror A nuqta olamiz.

2-yurish. $\alpha = O(C;\ AC)$ aylana yasaymiz.

3-yurish. α aylana l to'g'ri chiziqni A nuqtada va yana B nuqtada kesadi.

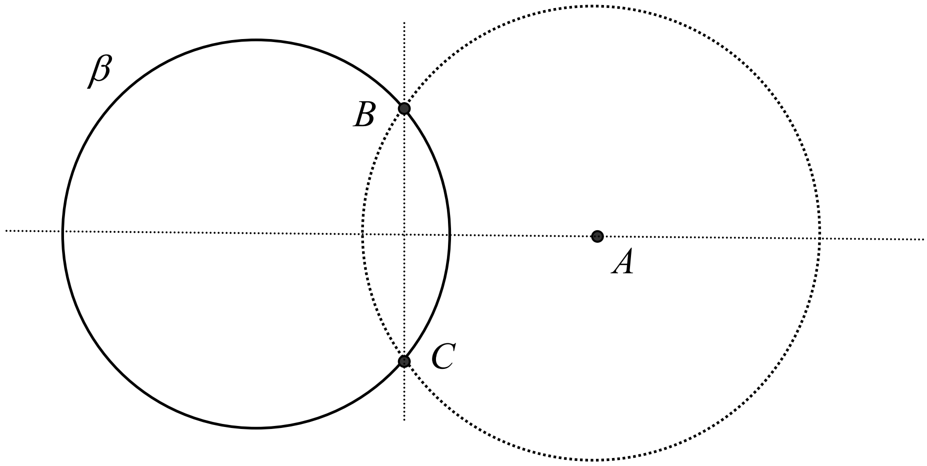
Shu yerda 1-masalani eslaylik: AB kesmaning o'rtasini topishda CD to'g'ri chiziq yasagan edik. Bu to'g'ri chiziq l ga perpendikulyar bo'ladi. Demak, masala hal bo'ldi.

1-mashq. To'g'ri chiziqqa unda yotgan nuqtadan perpendikulyar tiklang.

Sinchkov o'quvchida shunday savol tug'ilishi mumkin: 2-masalani yechish borasida l to'g'ri chiziqdan A nuqta olib, $\alpha = O(C;\ AC)$ aylana yasadik va bu aylana l to'g'ri chiziqni yana B nuqtada kesib o'tsin, dedik. Bordiyu, tanlagan A nuqtamiz C dan l ga tushirilgan perpedikulyarda yotib qolsa, $\alpha = O(C;\ AC)$ aylana l ni boshqa nuqtada kesmaydi-ku? To'g'ri, lekin bu holda A nuqta α aylana bilan l to'g'ri chiziqning urinish nuqtasi bo'lib qoladi. Xo'sh, nima bo'libdi? Gap shundaki, o'yinimiz qoidalariga ko'ra, nuqta tanlanganda u berilgan chiziq ustida yotishi yoki yotmasligi, yotmagan holda qaysi tomonda yotishigina belgilanishi mumkin, bulardan boshqa xossaga ega bo'lmasligi kerak. Shuning uchun l to'g'ri chiziq ustida A nuqta olinganda, AC to'g'ri chiziq l ga perpendikulyar bo'lib qolishi istisno qilinadi.

Xuddi shu singari, agar biror β aylana va undan tashqarida A nuqta berilgan bo'lsa, A dan o'tkazilgan to'g'ri chiziq tasodifan β ga urinma bo'lib qolishi yoki uning markazidan o‘tishi istisno qilinadi – bunday xossalarga ega to‘g‘ri chiziqlar yasalishi lozim!

3-masala. Berilgan nuqtadan berilgan aylananing markazi orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq yasang.



Yechish. Berilgan nuqta A bo‘lsin. Berilgan aylana β ustida B nuqta olib, $O(A; AB)$ aylana yasaymiz. Bu aylana β ni yana bir C nuqtada kesadi. A nuqtadan BC to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tkazilsa (2-masala!), u β aylananing markazidan o‘tadi.

3-masala yechimidan quyidagi masala yechimini keltirib chiqarish qiyin emas:

2-mashq. Berilgan aylananing markazini yasang.

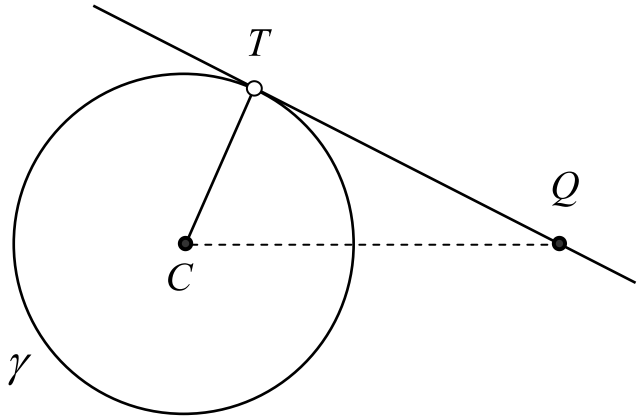
3-mashq. Aylanaga uning P nuqtasidan o‘tuvchi urinma yasang.

Yechish tarhi: aylananing C markazini yasaymiz (2-mashq), PC to‘g‘ri chiziqqa (ya’ni, radiusga) P nuqtadan perpendikulyar o‘tkazamiz (1-mashq). Bu perpendikulyar talab qilingan urinmadir.

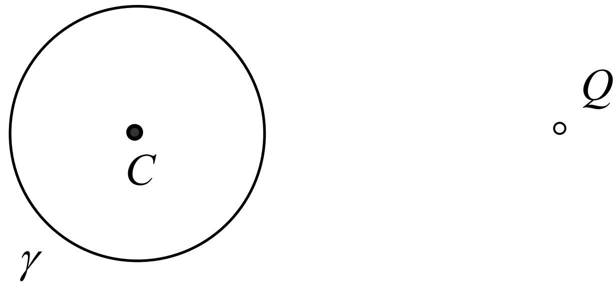
Yasashga doir masala har doim ham to‘g‘ridan-to‘g‘ri yechilavermaydi. Bunga misol sifatida 3-mashqning shartini biroz o‘zgartiraylik:

4-masala. Aylanaga uning tashqarisida yotuvchi nuqtadan urinma o‘tkazing.

Yasashni nimadan boshlash kerakligi bir qarashda ko‘rinmaydi. Vaqtincha masala yechilgan, ya’ni berilgan γ aylanaga uning tashqarisida yotuvchi Q nuqtadan urinma o‘tkazilgan, deb faraz qilaylik. C – aylananing markazi, T – urinish nuqtasi bo‘lsin. Urinmaning ma’lum xossasiga ko‘ra QT urinma CT radiusga tik bo‘ladi. Demak, QCT uchburchak to‘g‘ri burchakli ekan. U holda T nuqta QC kesma diametr qilib yasalgan aylanada yotishi lozim. Xuddi mana shu xossa masalani yechishga kalit bo‘ladi:



1-yurish. Aylananing C markazini yasaymiz. (Bu yurish aslida bir necha yurishdan iborat – 2-mashqqa qarang).

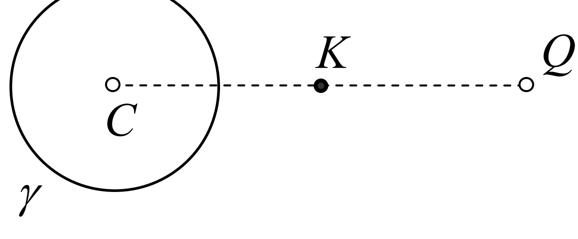


2-yurish. QC kesmaning o‘rtasini yasaymiz (bu – 1-masala edi). Bu nuqta K bo‘lsin.

3-yurish. $O(K; KC)$ aylana yasaymiz.

4-yurish. $O(K; KC)$ va γ aylanalar kesishgan nuqtalarni belgilaymiz: T_1, T_2.

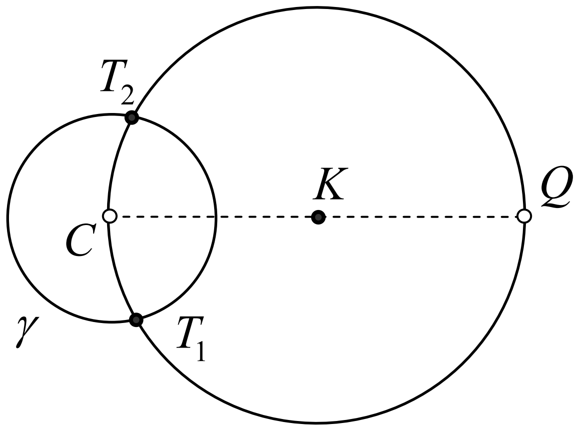
5-yurish. QT_1 va QT_2 to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz.

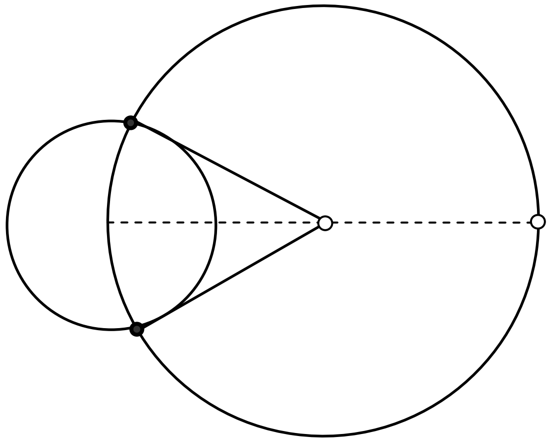


Masala yechildi: mana shu to‘g‘ri chiziqlar izlangan urinmalardir. Buni isbotlaylik.

Avvalambor, C nuqta

aylana γ ichida, Q nuqta esa uning tashqarisida yotgani uchun, $O(K;KC)$ va γ aylanalar haqiqatda kesishadi. T_1 va T_2 nuqtalar γ aylanada yotishi barobarida, $O(K;KC)$ aylanada ham yotgani, QC kesma esa bu aylananing diametri bo‘lgani uchun, CT_1Q burchak to‘g‘ri burchakdir. Ya’ni QT_1 – urinma. Xuddi shu singari QT_2 to‘g‘ri chiziq ham urinma.





Shunday qilib, masala roppa-rosa ikkita yechimga ega bo‘lar ekan.

Eslab qoling: masalani yechish yo‘lini izlash, buning uchun uni yechilgan deb, yechimning xossalarini o‘rganish analiz (tahlil) deb ataladi. Analiz to masalani yechishga kalit bo‘la oladigan xossa topilguncha davom ettiriladi. So‘ng mana shu xossaga tayanib masalani yechish sintez (Sharq falsafasi terminologiyasida ta’lif) deb yuritiladi. Topilgan yechim to‘g‘riligini asoslash isbot deb atalishi tabiiy. Nihoyat, masala nechta yechimga ega bo‘lishi, yechimda qanday istisnolar yoki nozik holatlar bo‘lishi mumkinligini o‘rganish tekshiruv (tahqiq) deb yuritiladi.

Ko‘rilgan masalada tekshiruv natijasi quyidagidan iborat: agar Q nuqta aylana tashqarisida bo‘lsa, masala ikkita yechimga ega bo‘ladi, chunki bu holda $O(K;KC)$

va γ aylanalar ikkita nuqtada kesishadi. Agar Q nuqta aylana ustida yotsa, yechim bitta bo‘ladi – bu holda $O(K; KC)$ aylana γ aylanaga ichkaridan urinadi. Nihoyat, Q nuqta aylana ichida yotsa, masala yechimga ega bo‘lmaydi.

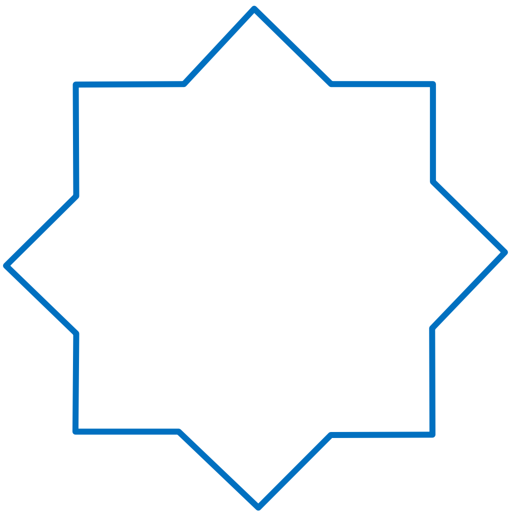
Shunday qilib, yasashga doir masalani to‘liq yechish odatda to‘rtta qadamda amalga oshirilar ekan. Lekin bu qoidaga yopishib olish (uni dogmaga aylantirish) maqbul emas, zotan, maqsad – masalani yechish. Quyidagi masalalarda, yuqoridagi misollardagi kabi, barcha yasashlar chizg‘ich va sirkul vositasida, bayon qilingan qoidalar asosida amalga oshirilishi ko‘zda tutiladi.

5-mashq. Tomoni berilgan kesmadan iborat kvadrat yasang.

6-mashq. γ aylana va m to‘g‘ri chiziq berilgan. Bir juft tomoni m ga parallel bo‘ladigan qilib, γ ga ichki chizilgan kvadrat yasang.

7-mashq. Berilgan aylanaga ichki chizilgan muntazam sakkizburchak yasang.

8-mashq. Sakkiz uchli yulduz yasang (rasmga q.).



§ 24. Cheksiz shaxmat taxtasi ustida o‘yin: “oltin partiya”[26]

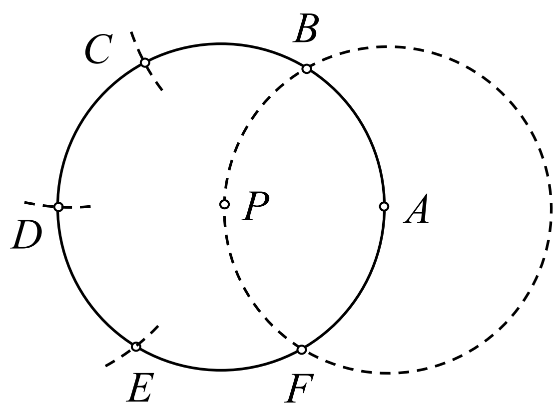
Yasashga oid masalalarning muhim turi – muntazam ko‘pburchaklar yasash. Bunda birinchi navbatda chizg‘ich va sirkul yordamida yasashlar nazarda tutiladi. Masalan, muntazam oltiburchak yasash usuli shu qadar soddaki, uni qo‘liga sirkul ushlagan quyi sinf o‘quvchisi odatda o‘zi mustaqil “ixtiro” qiladi:

1-yurish. Ixtiyoriy $O(P,r)$ aylana chizamiz (§23 dagi maqoladagidek, $O(P,r)$ bilan markazi P nuqtada, radiusi r ga teng aylana belgilanadi);

2-yurish. $O(P,r)$ aylananing ixtiyoriy A nuqtasini tanlaymiz va $O(A,r)$ aylana yasaymiz;

3-yurish. Yasalgan aylanalar kesishgan nuqtalardan birini, aytaylik, B nuqtani markaz qilib aylana $O(B,r)$ chizamiz;

4-yurish. U dastlabki aylanani A nuqtadan tashqari yana C nuqtada kessin, endi $O(C,r)$ aylana chizamiz va hokazo. Hosil bo‘lgan $ABCDEF$ oltiburchak muntazam bo‘ladi (1-rasm).



1-rasm.

Isboti. PAB uchburchakning uchchala tomoni ham radiusga teng, demak, APB burchak 60°. Shu singari BPC, CPD, DPE, EPF, FPA burchaklar ham 60°. Bundan $ABCDEF$ oltiburchakning muntazamligi kelib chiqadi.

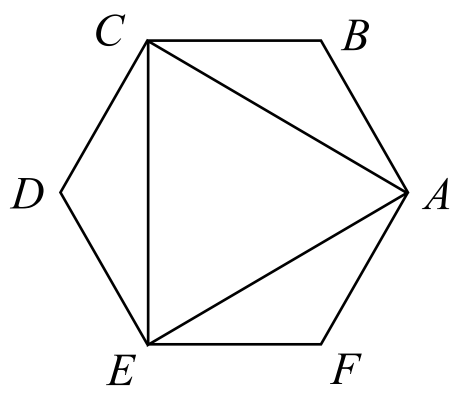
[26] FMI, 2004, №2.

Ko‘rib turibsizki, muntazam oltiburchakni sirkulning oyoqlarini o‘zgartirmay yasash mumkin ekan. Mabodo, oltiburchak uchlarini yasash bilan cheklanilsa, chizg‘ichga ham hojat bo‘lmaydi.

1-mashq. Tekislikda tayin kesma chizilgan. Chizg‘ich va sirkul yordamida bir tomoni mana shu kesmadan iborat muntazam oltiburchak yasang.

2-mashq. Berilgan aylanaga tashqi chizilgan muntazam oltiburchak yasang.

Agar muntazam oltiburchakning qo‘shni bo‘lmagan uchta uchini tutashtirsak, muntazam, ya’ni teng tomonli uchburchak hosil bo‘ladi (2-rasm). Lekin bu vazifani yana ham yengilroq yo‘l bilan bajarish mumkin.



2-rasm.

Muntazam n-burchakning n ta uchi va n ta tomoni bor. Ravshanki, uni qurish uchun ikki tomoni yoki, baribir, uchta qo‘shni uchi yasalishi kifoya.

3-mashq. Bu tasdiqni asoslang.

Shuningdek, muntazam n-burchakka tashqi chizilgan aylana ma’lum bo‘lsa, uni yasash masalasi markaziy burchaklaridan birini yasashga teng kuchli. Chizg‘ich va sirkul yordamida istalgan burchakni teng ikkiga bo‘lish usuli ma’lum. Bu mushohadadan shunday xulosa kelib chiqadi:

Agar chizg‘ich va sirkul yordamida muntazam n-burchak yasash mumkin bo‘lsa, u holda muntazam $2n$-burchak ham yasash mumkin.

Bu xossa yana quyidagi formuladan ham kelib chiqadi (a_n bilan radiusi R ga teng aylanaga ichki chizilgan muntazam n-burchak tomonining uzunligi belgilangan):

$$a_{2n} = \sqrt{R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}}$$

4-mashq. R va a_n kesmalar berilgan deb, a_{2n} kesmani yasash usulini ko'rsating.

Natija. Chizg'ich va sirkul yordamida tomonlari soni

$$n = 3, 6, 12, 24, \ldots, 2^k \cdot 3, \ldots \qquad (1)$$

ga teng bo'lgan muntazam n-burchak yasash mumkin.

Bu xossadan darhol muntazam to'rtburchak, ya'ni kvadrat yasash mumkinligi ham kelib chiqadi, chunki muntazam 12-burchakning 1, 4, 7 va 11 raqamli uchlari kvadrat hosil qiladi. Amalda kvadratni bevosita yasash o'ng'ay, albatta.

5-mashq. Chizg'ich va sirkul yordamida kvadrat yasashning imkoni boricha ixcham usulini toping.

Kvadratdan yo'lga chiqib, yuqoridagi kabi tomonlari soni

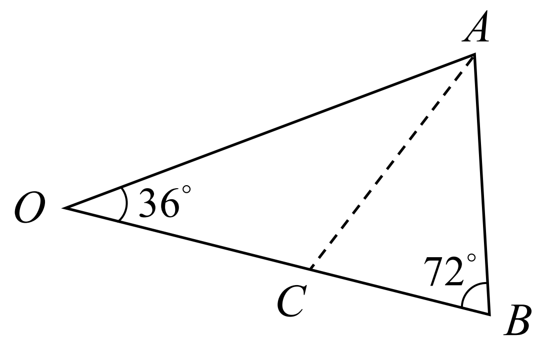
$$n = 4, 8, 16, \ldots, 2^k, \ldots \qquad (2)$$

ga teng muntazam n-burchak yasash mumkin, degan xulosaga kelamiz.

Qadimgi yunon matematiklari muntazam beshburchak yasash usulini ham ixtiro qilishgan. U nafis mushohadaga asoslanadi. Bu holda ham avval muntazam 10-burchak yasab olish osonroq bo'lar ekan.

Faraz qilaylik, muntazam 10-burchak yasalgan bo'lsin. Uning bir "tilimi"ni – markazini ikki qo'shni uchi bilan tutashtirib hosil qilingan OAB uchburchakni qaraylik. Bu teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi $360^\circ : 10 = 36^\circ$ ga, asosidagi burchaklar esa $(180^\circ - 36^\circ) : 2 = 72^\circ$ ga teng. Xuddi shunday, ya'ni burchaklari 36°, 72°, 72° bo'lgan uchburchakni "oltin uchburchak" deb ataymiz. Sababi – u mana bunday ajoyib xossaga ega ekan: asosidagi burchak bissektrisasi AC uni ikkita teng yonli uchburchakka bo'ladi (3-rasm).

Haqiqatan, AC bissektrisa bo'lgani uchun, OAC va BAC burchaklar 36° dan, demak, OAC uchburchak teng yonli. ABC uchburchakda C burchak $180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ bo'lib, B burchakka teng, demak, ABC ham teng yonli.



3-rasm.

Natija. ABC uchburchak OAB ga o'xshash va

$$AB : OB = BC : AB. \qquad (3)$$

Masala. To'g'ri chiziq bilan ikkita teng yonli uchburchakka bo'linadigan barcha uchburchaklarni toping.

Agar OB kesmaning C nuqtasi uchun (3) xossa o'rinli bo'lsa, u holda "C nuqta OB kesmani o'rta va chet nisbatda bo'ladi", deb yuritiladi. Mana shunday nuqtani yasash, ya'ni kesmani o'rta va chet nisbatda bo'lish "oltin kesim" deyiladi. (3) nisbatning qiymati "oltin nisbat" nomi bilan ataladi va odatda γ harfi bilan belgilanadi. Uni hisoblaylik $OB = P$, $AB = x$ desak, (3) dan $x^2 = R(R - x)$, ya'ni

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

kvadrat tenglama hosil bo‘ladi. U bitta musbat ildizga ega. “Oltin nisbat” mana shu ildizning R ga nisbatiga teng:

$$\gamma = \frac{x}{R} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180339887...$$

Bu son, garchi π yoki e sonlari darajasida bo‘lmasa ham, o‘ziga yarasha mashhur son. Masalan, u quyidagicha cheksiz zanjir kasrga yoyiladi:

$$\gamma = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$$

Agar bu kasrni yuqoridan pog‘onama-pog‘ona qirqa boshlasak, “oltin nisbat”ning taqribiy qiymatlarini hosil qila boramiz:

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},\quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}} = \frac{2}{3},\quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}} = \frac{3}{5},\quad \frac{5}{8},\quad \frac{8}{13},\ ...$$

Ikkinchisidan boshlab har bir kasrning surati oldingi kasr maxrajiga, maxraji esa oldingi kasr surat va maxrajining yigindisiga teng chiqadi, suratlari ketma-ketligi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Fibonachchi sonlari hosil qiladi, ya’ni uchinchisidan boshlab

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

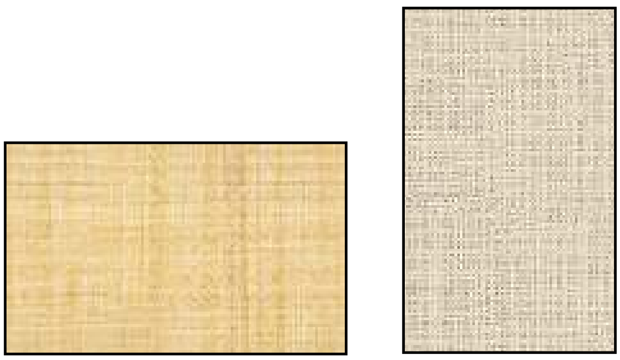
xossa o‘rinli bo‘ladi.

Masala. Isbotlang: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\gamma$.

Endi γ soni nima uchun “oltin kesim” degan sharafga sazovor bo‘lganiga kelaylik. Kartinalar galereyasiga borgansiz yoki kitob va jurnallarda ko‘plab kartinalarni ko‘rgansiz, albatta. Kartinalarning bo‘yi va eni istalgancha bo‘lavermaydi, balki Aristotel zamonidan buyon kichik tomonining katta tomoniga nisbati “oltin kesim”ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak shakli chiroyli, odam nazariga yoqimli deb hisoblanadi. Leonardo da Vinchi, Alberxt Dyurer kabi uyg‘onish davrining buyuk mutafakkirlari ham shu fikrni tasdiqlaganlar. Hatto da Vinchi Xudo odamni “oltin kesim” qoidasiga muvofiq yaratgan, degan g‘oyani ilgari surgan: uning hisoblashicha, qaddi-qomati kelishgan odamning kindigi uning bo‘yini “oltin nisbatda” da bo‘lar ekan!

Hozirgi rassomlar kartina chizganda “oltin kesim” qoidasiga qat’iy amal qilishmaydi, lekin ramka boshqacha ko‘rinishda bo‘lsa, hozir ham ko‘pchilik uchun “g‘alati” ko‘rinadi (4-rasm).

6-mashq. Tomonlarining nisbati “oltin kesim”ga teng to‘rtburchakni ikkiga bo‘lib, kvadrat kesib olsak, kichik bo‘lak tomonlari yana “oltin kesim” hosil qilishini ko‘rsating.



4-rasm.

Endi muntazam o‘nburchak yasash masalasiga qaytaylik. Bayon qilingan mushohadadan bu masala berilgan kesmani “oltin nisbat”da bo‘lishga teng kuchli ekanligi kelib chiqadi:

muntazam o‘nburchak tomonining tashqi chizilgan aylanaga nisbati γ ga teng. “Oltin kesim” masalasi esa Evklidning “Negizlar” asarida quyidagicha hal etilgan:

1-qadam. Berilgan AB kesmaning A uchidan unga tik to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz (5-rasm).

2-qadam. Bu to‘g‘ri chiziqda $AC=\frac{1}{2}AB$ bo‘ladigan C nuqta tanlaymiz.

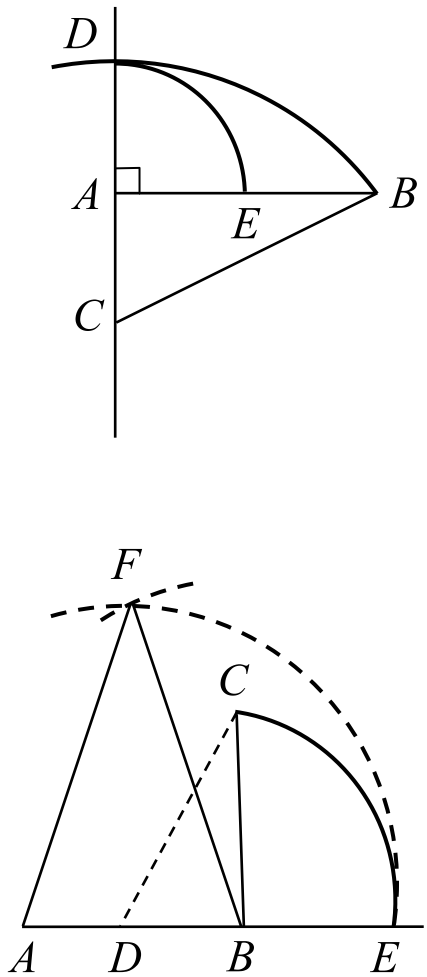
3-qadam. $O(C;BC)$ aylana chizamiz.

4-qadam. Bu aylananing CA to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasi D ni belgilaymiz va $O(A;AD)$ aylana yasaymiz.

Bu aylana AB kesmani kesib o‘tgan E nuqta “oltin kesim” nuqtasi bo‘ladi.

7-mashq. $AE:AB=BE:AE=\gamma$ bo‘lishini isbotlang.

Albatta, muntazam o‘nburchak yasash usulidan muntazam beshburchak yasash usuli ham kelib chiqadi. Amalda uni yasashning nisbatan ixchamroq usullari qo‘llanadi. Abul Vafo Birjandiy (940-998 yillarda yashagan Xurosonlik matematik) taklif qilgan usul bilan tanishaylik. Bir tomoni berilgan AB kesmadan muntazam beshburchak yasash talab qilinsin.



5-rasm.

1-yurish. $BC\perp AB$ va $BC=AB$ bo‘lgan C nuqta yasaymiz.

2-yurish. D nuqta AB kesmaning oʻrtasi boʻlsin. $O(D;CD)$ aylana yasaymiz. Bu aylana AB toʻgʻri chiziq bilan E nuqtada kesishsin.

3-yurish. $O(A;AE)$ va $O(B;AE)$ aylanalar yasaymiz. Ular kesishgan nuqtalardan biri F boʻlsin.

8-mashq. A, B va F nuqtalar "oltin uchburchak" hosil qilishini, ya'ni $AF : AB = \gamma$ boʻlishini isbotlang.

Bu mashq natijasidan AF va BF kesmalar izlanayotgan beshburchakning diagonallari boʻlishi kelib chiqadi. Endi yasashni nihoyasiga yetkazish qiyin emas. Masalan, AF va BF kesmalarning oʻrtalaridan perpendikulyarlar oʻtkazilsa, ular kesishgan nuqta muntazam beshburchak markazi boʻladi (muntazam beshburchak yasashni oxiriga yetkazing).

Shunday qilib, chizgʻich va sirkul yordamida yasash mumkin boʻlgan muntazam n-burchaklarning yana bir seriyasini hosil qilamiz:

$$n = 5,\ 2\cdot 5,\ 4\cdot 5,\ 8\cdot 5, ...,\ 2^k\cdot 5, ... \qquad (4)$$

Shundan soʻng yasash navbati muntazam yettiburchakka keladi. Lekin qadimgi yunon matematiklari, har qancha urinmasin bu masalani hal qilolmaydilar. Taajjublisi shundaki, chizgʻich va sirkul vositasida muntazam toʻqqiz burchak yasash masalasini ham hal etib boʻlmagan – bunday qaraganda, muntazam uchburchakdan muntazam toʻqqiz burchak hosil qilish mumkin boʻlishi lozimday tuyuladi-da. Shundan keyin muntazam 11 va 13-burchaklarni ham yasab boʻlmagani ajablanarli emas. Endi tasavvur qilaylik: muntazam 7-burchak, 9-burchak, 11-burchak, 13-burchak yasashning imkoni bo‘lmadi. Bunday holda har kim ham boshqa ko‘pburchaklarni qarashni to‘xtatadi. Biroq...

Yunon matematiklariga tan berish kerak – ular to‘xtamaganlar, sirkul va chizg‘ich yordamida muntazam 15-burchak yasashga muvaffaq bo‘lganlar! Bu yasash ham nafis mushohadaga asoslanadi – arifmetika yo‘li bilan hal bo‘lar ekan: muntazam oltiburchakning markaziy burchagi 60°, muntazam beshburchakniki 72°. Demak, $72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$ – bu roppa-rosa muntazam 30-burchakning markaziy burchagidir.

Geometrik tilga ko‘chirish: ayni bir aylanani bir nuqtasidan boshlab avval teng uchta yoyga, keyin teng beshta yoyga bo‘laylik. Yoylar uzunliklarining farqi aylananing $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ qismiga teng bo‘ladi. Bundan aylanani teng 15 bo‘lakka bo‘lish mumkinligi kelib chiqadi!

Shunday qilib, tomonlari soni

$$n = 3\cdot 5,\ 2\cdot 3\cdot 5,\ 4\cdot 3\cdot 5,\ 8\cdot 5,\ ...,\ 2^n\cdot 3\cdot 5,\ ... \qquad (5)$$

bo‘lgan muntazam n-burchak yasash ham mumkin ekan.

Xulosa qilsak, qadimgi yunon matematiklari chizg‘ich va sirkul vositasida yasash mumkin bo‘lgan n-burchaklarning (1), (2), (4) va (5) seriyalarini topishga muvaffaq bo‘lganlar. Bu ularning “cheksiz shaxmat taxtasi ustidagi oltin partiyasi”dir.

Yana qanday muntazam ko‘pburchak yasash mumkin degan masala oradan 2000 yildan ko‘proq vaqt o‘tgach – 18-asrning oxiriga kelibgina, joyidan surildi. Bu haqda keyinroq suhbatlashamiz.

Mustaqil shug‘ullanish uchun qiziqarli masalalar

Arifmetik rebuslarda bir xil harflarga bir xil raqamlar, turli harflarga esa turli raqamlar mos keladi, yulduzchalar va nuqtalar o‘rnida esa 0 dan 9 gacha istalgan raqam turishi mumkin. Bundan tashqari hech qaysi son 0 dan boshlanmaydi, deb hisoblanadi. Quyidagi arifmetik rebuslarni yeching.

a)
```
       * * *
   ×   * * *
      -------
      7 * * *
 +     * * *
   * * * *
 -------------
 * * * 7 7 7
```

b)
```
 − * * *  | * *
   * *    |---------
  -----   | *,* * *
  − * * *
     * *
    -----
    − * * *
       * *
      -----
      − * * *
        * * *
        -----
```

v)
```
      × O L T I
        O L T I
       ---------
      * * * * I
    * * * * T
 + * * * * L
   * * * O
 ---------------
   * * * * * * *
```

g)
```
      × O‘YLA
        * * * *
       ---------
     * * * * A
 +   * * * L
   * * * * Y
 * * * * O‘
 -----------------
 * * * * * * * *
```

d)
```
          × ABCDEF
            * * * * * *
           -------------
            C * * * * B
          E * * * * D
 +      B * * * * A
      D * * * * C
    A * * * * F
  F * * * * E
 -------------------------
  * * * * * * * * * * *
```

e)
```
 − • • • • • • • 4 | • • • •
   • • • •         |---------
   --------        | • 4 • •
   − • • 4 •
     • • • •
     --------
     − • • • •  •
         • 4 •
       --------
       − • • • •
         • • • •
         --------
```

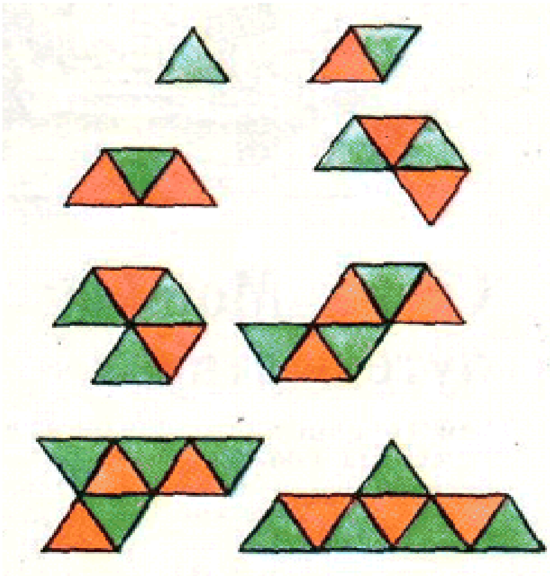
Oxirgi masalaning 4 ta yechimi bor (ularni toping), agar yana bir nuqta o‘rniga 4 raqami qo‘yilsa, masala yagona yechimga ega bo‘ladi. Uni qayerga qo‘yish kerak?

1. Quyidagi ko‘paytirish amalida xatoga yo‘l qo‘yilgan. Uni topib, amalni to‘g‘rilang.

$$\begin{array}{r} \times \; * * * 27 \\ * * \\ \hline + \; * * * * * 6 \\ * * * * * \\ \hline * * * * 4 6 \end{array}$$

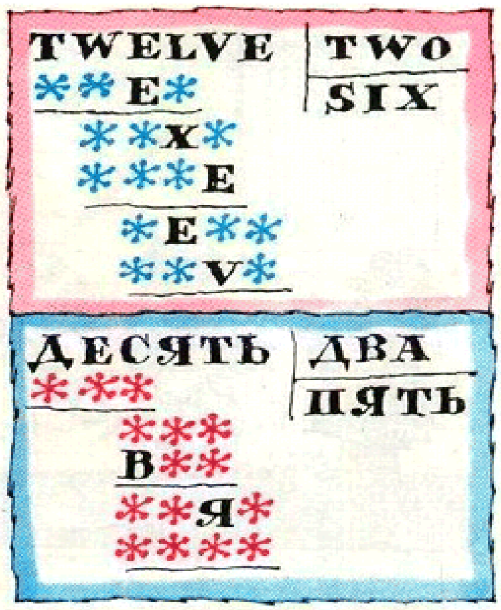
2. (“Kvant” jurnalidan). Soat 4 sekundda 3 marta bong uradi. Necha sekundda u 9 marta bong uradi?

3. (“Kvant” jurnalidan). Rasmda ko‘rsatilgan muntazam uchburchaklardan hosil qilingan shakllardan bitta katta muntazam uchburchak hosil qiling.



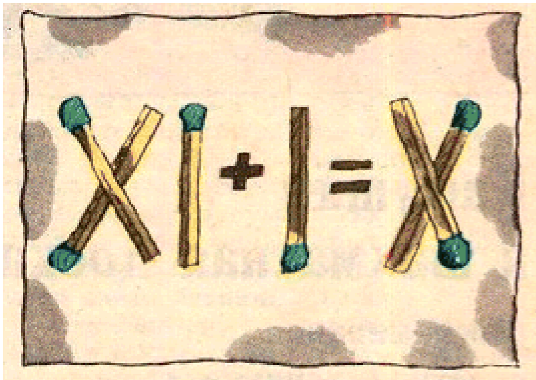
4. (“Kvant” jurnalidan). Yulduzchalar o‘rniga shunday raqamlar qo‘yinki natijada hosil bo‘lgan son 36 ga bo‘linsin: $52*2*$

5. (“Kvant” jurnalidan). Rasmda ko‘rsatilgan sonli rebuslarni yeching.

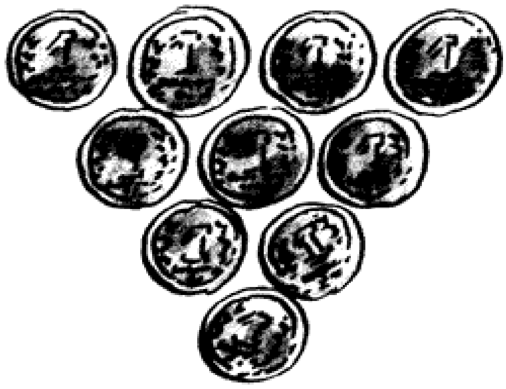


6. (“Kvant” jurnalidan). Kitobning sahifalarini raqamlash uchun 1392 ta raqam ketdi. Bu kitob necha sahifadan iborat?

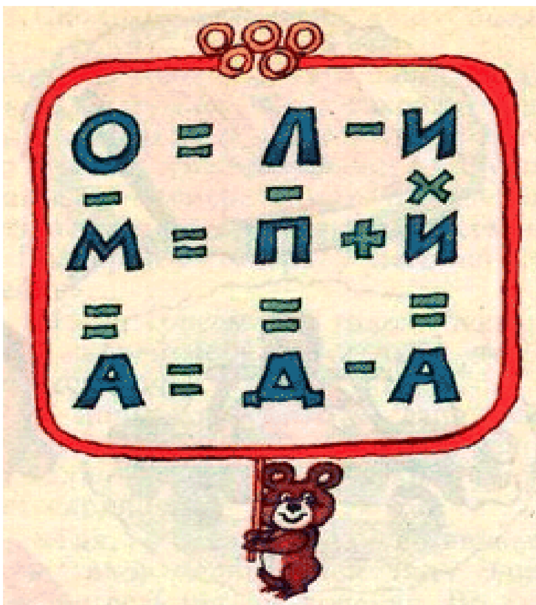
7. (“Kvant” jurnalidan). Gugurt cho‘plaridan rasmda ko‘rsatilgandek tenglik hosil qilingan (tenglik belgisiga cho‘plar ishlatilmagan). Tenglik to‘g‘ri bo‘lishi uchun qay yo‘sinda eng kam sondagi cho‘plarni olib boshqa joyga qo‘yish lozim?



8. (“Kvant” jurnalidan). 9 ta bir xil tanga rasmda ko‘rsatilgandek “pastga qaragan” muntazam uchburchak hosil qiladi. 3 ta tangani shunday olib qo‘yingki, natijada “tepaga qaragan” muntazam uchburchak hosil bo‘lsin.



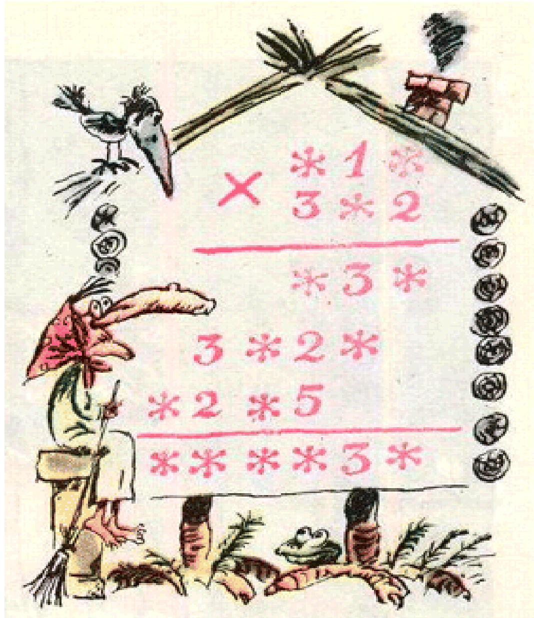
9. (“Kvant” jurnalidan). Rasmda berilgan rebusni yechib sonlarni toping va quyidagi ifodaga olib kelib qo‘ying:



∗*О*∗*Л*∗*И*∗*М*∗*П*∗*И*∗*А*∗*Д*∗*А*.

Oxirgi tenglikdagi yulduzchalar o‘rniga arifmetik amallar, qavs, yoki bo‘sh joy (ya’ni o‘chirish mumkin) lardan birini qo‘yib chiqib to‘g‘ri tenglik hosil qiling.

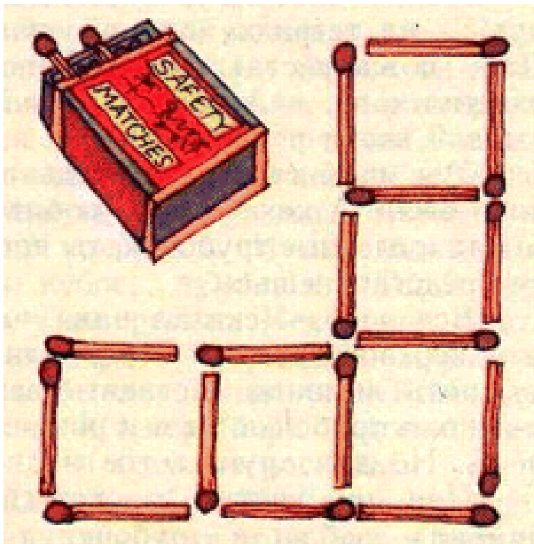
10. (“Kvant” jurnalidan). Rasmda ko‘rsatilgan ko‘paytirishda ba’zi raqamlar o‘chirilib, o‘rniga yulduzcha belgisi qo‘yilgan. Shu o‘chirilgan sonlarni toping.



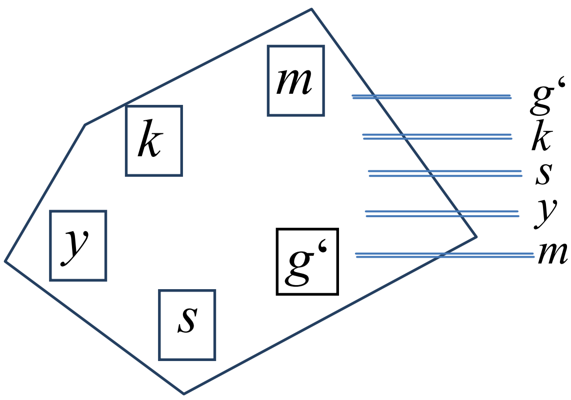
11. Rebusni yeching:

$$AHHAAH : PIQR = HA.$$

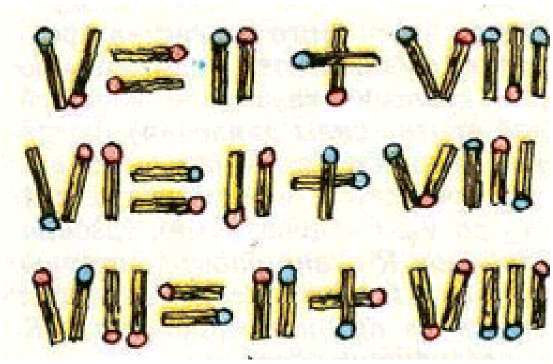
12. (“Kvant” jurnalidan). 16 ta gugurt cho‘pidan rasmda ko‘rsatilgandek 5 ta kvadrat hosil qilindi. 2 ta gugurt cho‘pini shunday olib qo‘yingki, natijada kvadratlar soni 1 taga kamaysin.



13. (G.Dyudeni masalasi). Temir yo‘l stansiyasida g‘alla, sement, yog‘och, metal va ko‘mir omborlari bor (rasmda tegishli harflar bilan belgilangan). Ularga beshta temir yo‘l izini o‘tkazish kerak. Afsuski, omborlar joylashuvi bilan tegishli yuk olib kelinadigan izlar joylashuvi ancha chalkash. Har bir izni o‘ziga mos ombor bilan tutashtirish kerak. Bu ishni izlar o‘zaro kesishmaydigan qilib bajarish mumkinmi?



14. (“Kvant” jurnalidan). Rasmda ko‘rsatilgan gugurt cho‘plaridan bittasini olib o‘sha qatordagi boshqa joyga shunday qo‘yingki natijada to‘g‘ri tenglik hosil bo‘lsin. (Bu isni har uch tenglikda bajarish kerak.)



15. (“Kvant” jurnalidan). Sonli rebusni yeching (bu yerda bir xil harflar bir xil raqamni ifodalaydi):

$$(HE)^2 = SHE.$$

16. (M.Gardner masalasi). Ko‘paytirish amalini tiklang (j – juft raqamni, t – toq raqamni bildiradi).

$$\begin{array}{r} j\;j\;t \\ \times \qquad t\;t \\ \hline j\;t\;j\;t \\ +\; j\;t\;t\;\;\; \\ \hline t\;t\;t\;t \end{array}$$

17. (“Kvant” jurnalidan). Abdurahim o‘zining o‘rtog‘i Bekzodga shunday dedi: “Men bo‘lishga oid shunday misol topdimki, bunda bo‘linuvchi, bo‘luvchi, bo‘linma va qoldiq mos ravishda 1, 3, 5, 7 raqamlari bilan tugaydi.” Bekzod o‘ylab turib quyidagicha javob qildi: “Sen adashyapsan”. Bekzod haqmi?

18. (G.Dyudeni masalasi). O‘nli sanoq sistemasida *abcde* sonini *fg* ga ko‘paytirganda, ko‘paytma *gabcdef* bo‘ldi. Bu sonlarni toping.

19. (“Kvant” jurnalidan). Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi 2 ta sonni toping: Bu sonlarni birining o‘nli

kasrdagi yozuvida butun qismi ham kasr qismi ham bo‘luvchi bo‘ladi.

20. Ikki o‘yinchi navbat bilan 1 dan 9 gacha raqamlardan birini tanlaydi. Har yurishda tanlangan raqamlarni hakam qo‘shib boradi. Kim oldin 100 ga yetsa, yutgan bo‘ladi. O‘yin kimning foydasiga hal bo‘ladi?

21. (“Kvant” jurnalidan). Komil ismli do‘stim bir kuni menga shunday dedi: “Kechadan oldin kuni 10 yoshda edim, kelasi yil 13 yoshga to‘laman.” Shunday bo‘lishi mumkinmi?

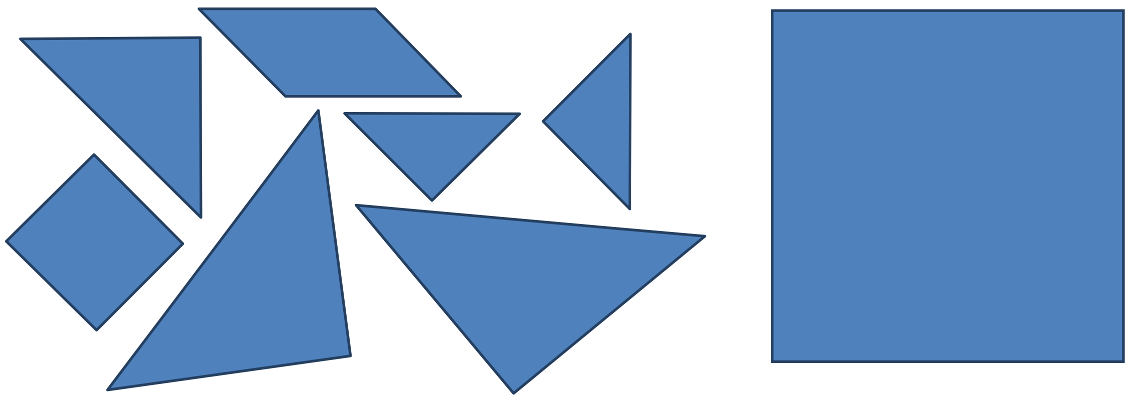
22. (L.Lengli-Kun masalasi). Katak daftarda chegarasi daftar chiziqlari bo‘ylab o‘tadigan va quyidagi xossaga ega to‘g‘ri to‘rtburchak yasash kerak: to‘g‘ri to‘rtburchak chegarasida yotadigan kataklar soni uning ichida yotadigan kataklar soniga teng bo‘lsin.

23. Ko‘chada aylana shaklida turib 4 ta qiz suhbatlashyapdi: Malika, Muxlisa, Munisa va Mehrona. Yashil ko‘ylakdagi qiz (Muxlisa va Malika emas) Mehrona va ko‘k ko‘ylakdagi qiz orasida turibdi. Oq ko‘ylakdagi qiz Muxlisa va pushti ko‘ylakdagi qiz orasida turibdi. Har bir qiz qanday rangdagi ko‘ylak kiygan?

24. Usta kvadrat shaklidagi xonaning polini kvadrat kafel plitkalari bilan qoplamoqchi. Xona bilan plitkalar o‘lchovi shundayki, usta ishni bitta ham plitkani kesmasdan bajarishi mumkin. Dastavval u polni aylantirib, bir qator plitka terib chiqdi. Bunga 56 ta plitka ketti. Usta yana nechta plitka terishi kerak?

25. ("Kvant" jurnalidan). Biror sondan 7 ni ayirib natijani 7 ga ko'paytirsak, o'sha sondan 11 ni ayirib natijani 11 ga ko'paytirganimizga teng. Shu sonni toping.

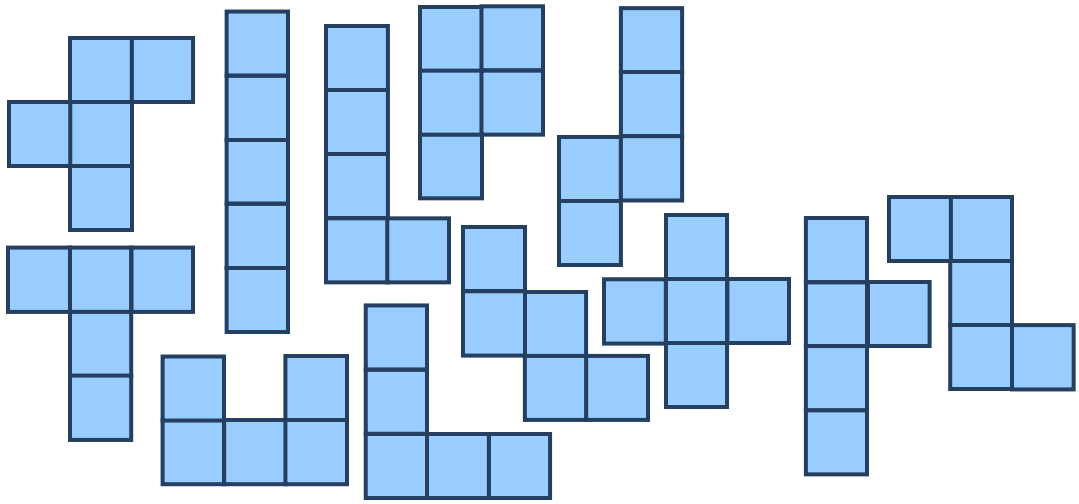
26. (Tangram). Bu qadimgi Xitoy ko'ngilyozar boshqotirmasidir. U 7 ta shakldan iborat: ikkita katta bir xil uchburchak, bitta o'rtacha uchburchak – katta uchburchakning yarmicha, ikkita kichik uchburchak – o'rtacha uchburchakning yarmicha, kvadrat bilan romb – har biri ikkita kichik uchburchakdan tashkil topgan (rasmga qarang).



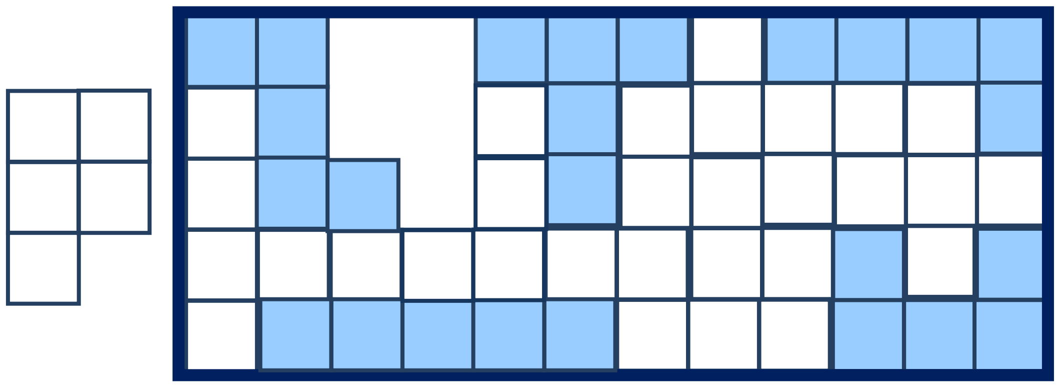
A) Tangram shakllarini kvadrat qutiga joylang (qutining tomoni katta uchburchak gipotenuzasiga teng); B) Tangram shakllaridan necha xil qavariq ko'pburchak yasay olasiz? (Xitoyliklar turli hayvonlar, uy jihozlari, har xil holatdagi odam qiyofalari kabi son-sanoqsiz shakl yasashadi.)

27. Pentamino. Bu o'yinni AQShlik matematik S.Golomb o'ylab topgan. U har biri besh katakli 12 ta unsurdan iborat. Unsurlar o'xshashligiga qarab F, I, L, P, N (**FIL**i**P**pi**N** so'zida qatnashadi, rasmda yuqori qatorda tasvirlangan) hamda T, U, V, W, X, Y, Z deb belgilanadi.

Bir komplekt pentamino jamlamasida jami 60 ta katak bor. Boshqotirma – bu unsurlardan geometrik shakllar qurish.



Quyidagi rasmda 5×12 to‘g‘ri to‘rtburchak uchun yechim tasvirlangan – uni oxiriga yetkazish uchun P shaklni ag‘darib qo‘yish kifoya. Pentaminodan 6×10 4×15 hamda 3×20 to‘g‘ri to‘rtburchaklar ham yasash mumkin.



Bunda 3×20 to‘g‘ri to‘rtburchakni yasash murakkabroq, chunki yechim atigi ikki xil bo‘lib, ulardan biri ikkinchisidan kelib chiqadi, qolgan to‘rtburchaklar uchun esa yechimlar ko‘proq. Pentamino shakllarini plastmassa, fanera, qalin kartondan qirqib yasash oson bo‘lib, bolalarning aqliy qobiliyatini o‘stirishda muhim vosita sanaladi.

28. (“Kvant” jurnalidan). Quyidagi sonli qatordagi sonlar qandaydir qonuniyat asosida hosil qilingan: $0, 4, 18, 48, *, 180, \ldots$

Aynan qanday formula asosida? $*$ o‘rnida turgan sonni toping.

29. 12 ta ko‘rinishi bir xil tanga bor. Ulardan bittasi qalbaki bo‘lib, og‘irligi haqiqiy tangalarnikidan farq qiladi. Ikki pallali torozida uch marta tortib, qalbaki tangani ajratish va uning haqiqiy tanglalardan og‘ir yoki yengilligini ham aniqlash mumkinligni isbotlang.

30. Og‘zaki hisoblab ko‘ring:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\frac{4}{5}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}$$

31. (“Kvant” jurnalidan). 13 ta har xil natural son yig‘indisi 92 ga teng. Bu sonlarni toping.

32. (“Kvant” jurnalidan). Qog‘oz bo‘lagiga 606 soni yozilgan. Bu sonni 1,5 barobar kattalashtirish uchun qanday amal bajarish kerak?

33. (“Kvant” jurnalidan). Quyidagi rebusni yeching:

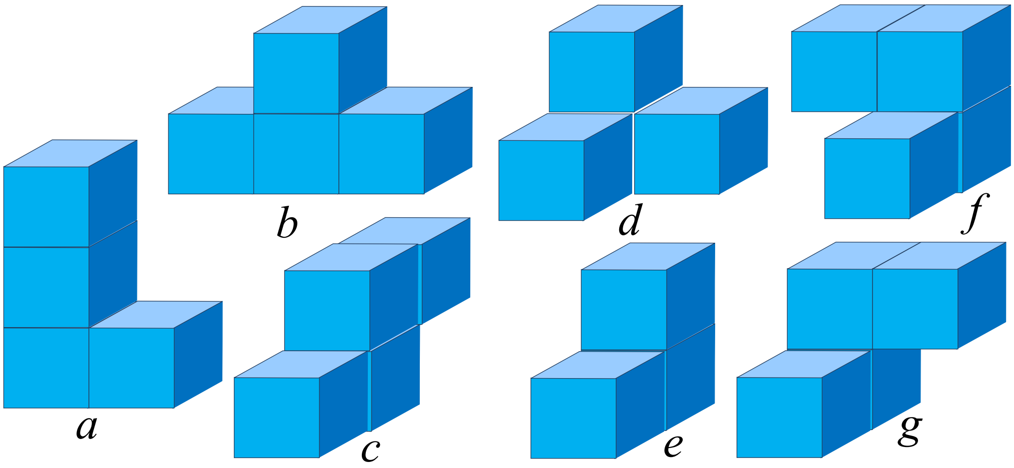
$$(ПС)^{И} = ИКС.$$

34. (“Kvant” jurnalidan).

a) 2 ta natural sonning farqi 2 ga, ular kvadratlarining farqi esa 100 ga teng bo‘lsa, bu sonlarni toping.

b) 2 ta ketma ket kelgan ikki xonali natural son kvadratlarining farqi ikkinchi sonning raqamlari o‘rnini almashtirishdan hosil qilinadi. Bu sonlarni toping.

35. Som kubchalari



Bu o‘yinni daniyalik fizik va shoir (!) Pit Xeyn ixtiro qilgan. U to‘rttagacha kubchadan yasash mumkin bo‘lgan “eng beso‘naqay” shakllarni ajratgan (beso‘naqay shu ma’nodaki, parallelepiped emas). Masalan, uchta kubik qator terilganda hosil bo‘ladigan parallelepipedni chiqarib tashlagan, ammo rasmda *e* deb belgilangan shaklni qoldirgan. Shu tariqa 4 ta kubchadan 6 ta shakl hosil qilgan. Ulardan *f* va *g* deb belgilanganlari jism sifatida teng, ammo bir juft qo‘lqop singari biri ikkinchisining ko‘zgudagi aksiga o‘xshaydi. Shunday qilib 7 ta shakl jami 27 ta kubchadan tarkib topgan. Boshqotirma – bu shakllardan biror xususiyati bilan ko‘zga tashlanadigan jismlar hosil qilish. Masalan, ulardan $3\times3\times3$ o‘lchamli kub yig‘ib bo‘ladimi? Bir qarashda bu juda qiyin – nahot 7 ta eng beso‘naqay shakldan kub qurib bo‘lsa? Qarangki, bu masala juda ko‘p yechimga ega ekan. Ulardan birini o‘quvchining o‘zi bemalol yig‘a oladi, deb o‘ylaymiz.

Masalaning yechimi ko‘p bo‘lsa, odatda matematiklar qo‘shimcha shart qo‘yib, uni qanoatlantiruvchi yechim izlashadi. Xususan, rasmda a, b, c deb belgilangan shakl $3\times3\times3$ o‘lchamli kubda uchta yo‘nalishda joylashsin, degan shart qo‘yilsa, yechim yagona bo‘ladi (rasmda bu uch shakl shunday tasvirlangan: a shakl pastdan yuqoriga, b shakl chapdan o‘ngga, c esa old tomondan orqa tomonga cho‘zilgan; albatta, kubda ular boshqa tarzda joylashishi ham mumkin).

Mundarija

A.A’zamov, A.Tilavov

CHIN QIZIQARLI MATEMATIKA

I

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining quyi
va o‘rta sinf o‘quvchilari uchun

Muharrir A.Muxtorov
Musahhih O.Muxtorov
Sahifalovchi D.Akramova

Nashriyot litsenziyasi A1№ 231.16.11.12.
Terishga berildi: 22.08.2018-y.
Bosishga ruxsat etildi: 12.09.2018-y. Ofset qog‘ozi.
Qog‘oz bichimi 84x108 $^{1}/_{32}$
“SchoolBookAC” garniturasi. Ofset usulida bosiladi.
Shartli b.t.:10.75 Adadi:1000 nusxa.

“ADAD PLYUS” MCHJ matbaa
korxonasida chop etildi.
Toshkent sh. Chilonzor tumani,
Bunyodkor ko‘chasi, 28-uy.