Бакирова А.Ю. Сайдалиева Ф.Х.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Ташкент 2007

Предисловие

Общественное развитие выдвигает все новые и новые требования к уровню и содержанию образования и культуре населения.

Наряду с общепедагогическими имеется множество актуальных задач, связанных с перестройкой процесса обучения отдельным предметам, и особенно математике. Поэтому в условиях работы общеобразовательной школы, академических лицеев и профессиональных колледжей по новым программам роль учителя математики и требования к его подготовке резко возрастают.

В силу этого, в соответствии с программой по методике преподавания математике авторы данного пособия, отказавшись от обучения студентов по «рецептурной» методике в пользу обучения по методике творческого педагогического поиска, предлагают методику учитывающую различные варианты изложения рассматриваемых вопросов.

В данном пособии нашли свое отражение основные вопросы действующей программы по методике преподавания математики педагогических вузов.

При подготовке пособия мы руководствовались идеями выдвинутыми в законах «Об образовании», «Национальной программе по подготовке кадров, а также положениями сформулированными в государственных стандартах высшего, общего, среднего и среднеспециального образования.

За основу нами были взяты труды по методике преподавания математики таких ученых, как доктор педагогических наук, профессора Т.Р.Туляганова «Математика укитиш методикасидан маърузалар туплами», А.С.Алиханова «Математика укитиш методикаси», В.А. Оганесяна, Ю.М. Колягина и др. «Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика».

Данное пособие может быть использовано и преподавателями математики общеобразовательных школ, академических лицеев и профессиональных колледжей.

Составители: кандидат педагогических наук Бакирова А.Ю.,
кандидат педагогических наук Сайдалиева Ф.Х.

Рецензенты: кандидат педагогических наук, Норматов А.А.,
кандидат физико-математических наук,
доц. Тургунбаев Р.М.

Утверждено на Ученом совете Ташкентского государственного педагогического университета им.Низами.

От «______»______________________2007г.

Введение

Человек, его гармоничное развитие и благосостояние являются главной целью и движущей силой реализуемых в республике преобразований. Формирование образованной, профессионально-компетентной, граждански зрелой, социально активной личности, способной адаптироваться в современных социально-экономических условиях невозможно без широкой общеобразовательной подготовки. Ярким проявлением внимания правительства Республики Узбекистан к проблемам совершенствования образования является проводимое у нас в стране коренное реформирование системы образования и воспитания. В речи Президента Ислама Абдуганиевича Каримова на девятой сессии Олий Мажлиса Республики Узбекистан 29 августа 1997 г. подчеркивается: « ... мы должны иметь глубокие представления о слабых сторонах действующей ныне системы образования и воспитания, тех ее аспектах, которые не отвечают требованиям времени, будущему и целям нашего общества, изучать опыт стран, живущих свободно и благополучно, и исходя из этого, основным условием нашей программы должна стать подготовка высоко квалифицированных, всесторонне совершенных кадров».

Из этого следует, что в процессе обучения необходимо решать задачи на достижение научной образованности, умственной развитости и идейной воспитанности молодежи.

Министерство Высшего и среднего специального образования республики Узбекистан при участии научно-педагогической общественности разработало новые учебные планы по основным специальностям педагогических вузов и программы к ним, в которых нашли отражение требования к подготовке преподавателей школ и средних специальных учебных заведений.

Современному преподавателю предстоит овладеть умениями постановки непрерывного методического «эксперимента», систематически оценивая эффективность учебного процесса, сравнивая различные формы и методы обучения, выбирая наиболее результативные пути изучения математики, усвоение математического языка, их методов математического исследования.

Для того, чтобы быть таким мастером надо многое уметь и, в первую очередь, необходимо усвоить содержание учебных программ, свободно владеть основными понятиями курса математики школ и средних специальных учебных заведений, знать место этих понятий на различных этапах обучения, их роль в системе математических знаний учащихся.

Определим основные компоненты методической подготовки будущих преподавателей математики:

- понимание задач средних и средних специальных учебных заведений на современном этапе развития нашего общества;

- знание теоретических основ методики преподавания математики как педагогической науки и ее методов исследования;
- глубокое знание действующих программ, учебников и учебных пособий по математике для школ и средних специальных учебных заведений;
- умение творчески применять свои педагогические знания, выбирая оптимальный вариант обучения в определенных условиях;
- умение осуществлять методическую (дидактическую) обработку научного материала с целью его изучения учащимися;
- знание новых методов и технологий обучения математике;
- стремление постоянно совершенствовать свои методические знания, овладевая методами и приемами лучших педагогов;
- умение вести научно-методическую исследовательскую работу;
- умение пробуждать и развивать интерес у учащихся к математике;
- владеть навыками обращения технологическими средствами обучения;
- владеть навыками организации внеклассной работы по математике;
- уметь организовать обучение на основе новых педагогических технологий.

Очень важным для будущего преподавателя является не рассмотрение отдельных фактов предмета, а методическая и логическая концепция предмета в целом. Поэтому преподаватель математики должен видеть конкретные методические модели изучения компонент содержания учебного материала предмета математики, уметь выделять отдельные содержательные линии предмета. На это нацеливает предмет методики математики.

Раздел I. Общая методика обучения математике

1.1. Предмет методики преподавания математики

План

1. О развитии математики как науки.
2. Характеристика математики как учебного предмета СШ.
3. Предмет МПМ и её задачи.
4. Связь МПМ с другими науками.
5. Методы педагогики математики.
6. Цели обучения математике.

1. О развитии математики как науки. В истории развития математики обычно выделяют четыре периода.

I период - период зарождения математики - связан с практическими вычислениями и измерениями, с формированием понятий числа и фигуры. В этом периоде берут своё начало арифметика и геометрия, выступающие в виде эмпирически установленных правил для решения практических задач; об этом, в частности, свидетельствуют начальные слова математических трактатов того времени: "Делай так, как делается, а делается так :".

II период - период математики постоянных величин (период элементарной математики) - начинается с VI-V в. в. до н.э. В этот период уже возникает понимание математики как самостоятельной научной дисциплины, имеющей собственный предмет исследования (число и фигура) и собственные методы исследования. Математику этого периода Аристотель (384-322 гг. до н.э.) определяет как науку о количестве. Этот период характеризуется возникновением дедуктивного метода, получившего развитие в работах Евклида, Архимеда и Аполлония. Во втором периоде возникает и развивается новая математическая дисциплина - "алгебра"; вырабатывается специальная символика. Предмет исследования математики существенно расширяется.

III период (период классической, высшей математики), начавшийся с XVII в. и продолжавшийся до середины XIX в., - период математики переменных величин - характеризуется дальнейшим расширением предмета исследования. Прочное место занимает идея функции и связанные с ней непрерывность и движение. Возникновение математического анализа делает математику мощным инструментом познания природы. Возникновение аналитической геометрии связывает геометрию с алгеброй и анализом. Большой успех в развитии и приложении аксиоматического метода выдвигает на первое место логическое обоснование математики, что создаёт возможность исследования природы математики как таковой.

Центральным становится вопрос о том, отражает ли математика законы и процессы реального мира или является продуктом мышления человека.

IV период (с середины XIX в.) - период математики переменных отношений (современная математика) - характеризуется возросшей ролью абстрактных математических построений и широким использованием метода моделирования, широким разветвлением математики, возникновением математических структур, ЭВМ и т.п.

2.Характеристика математики - учебного предмета СШ. Развитие человеческого общества немыслимо без передачи новому поколению знаний и опыта предшествующих поколений. Это касается всех областей знаний, в том числе и математики. В школьный курса математики должна быть отобрана та часть математических знаний обязательная), которая даст общее представление о науке, поможет овладеть математическими методами и будет способствовать необходимому развитию математического мышления у школьников.

Первые сведения об учении детей простейшим вычислениям встречаются в источниках по истории стран Древнего Востока. Большое влияние на развитие математического образования оказала математическая культура Древней Греции, где уже в 5 веке до н.э. в связи с развитием торговли, мореплавания, ремёсел в начальной школе изучались счёт и практическая геометрия.

Содержание учебного предмета математики меняется со временем в связи с расширением целей образования, появления новых требований к школьной подготовке, подготовке в колледжах и лицеях, изменением стандартов образования.

Кроме того, непрерывное развитие самой науки, появление новых ее отраслей и направлений влечет за собой также обновление содержания образования: сокращаются разделы, не имеющие практическую ценность, вводятся новые перспективные и актуальные темы. Вместе с тем, не стоят на месте и педагогические науки, новый педагогический опыт вводится в практику работы массовой школы, колледжей и лицеев.

Учебный предмет математики в школе представляет собой элементы арифметики, алгебры, начал математического анализа, евклидовой геометрии плоскости и пространства, аналитической геометрии, тригонометрии.

В академических лицеях и профессиональных колледжах в программу включены следующие разделы: элементы математической логики, дифференциальные уравнения, элементы теории вероятностей и математической статистики.

Обучение учащихся математике направлено на овладение учащимися системой математических знаний, умений и навыков, необходимых для дальнейшего изучения математики и смежных учебных предметов и решения практических задач, на развитие логического мышления, пространственного воображения, устной и письменной математической речи, формирование навыков вычислений, алгебраических преобразований, решения уравнений и неравенств, инструментальных и графических навыков.

Математика как учебный предмет отличается от математики как науки не только объёмом, системой и глубиной изложения, но и прикладной направленностью изучаемых вопросов.

Учебный курс математики постоянно оказывается перед необходимостью преодолевать противоречие между математикой - развивающейся наукой и стабильным ядром математики - учебным предметом. Развитие науки требует непрерывного обновления содержания математического образования, сближения учебного предмета с наукой, соответствия его содержания социальному заказу общества.

Современный этап развития математики как учебного предмета характеризуется: жёстким отбором основ содержания; чётким определением конкретных целей обучения, межпредметных связей, требованиями к математической подготовке учащихся на каждом этапе обучения; усилением воспитывающей и развивающей роли математики, её связи с жизнью; систематическим формированием интереса учащихся к предмету и его приложениям.

Дальнейшее совершенствование содержания математического образования связано с требованиями, которые предъявляет к математическим знаниям учащихся практика: промышленность, производство, военное дело, сельское хозяйство, социальное переустройство и т.д.

Движение за гуманизацию, демократизацию среднего образования оказало определённое влияние и на содержание математического образования. Идея дифференциации обучения проявилась в возникновении относительно нового типа школ (лицеев, гимназий, колледжей и др.) или классов различных направлений (гуманитарного, технического, экономического, физико-математического и др.). В связи с существенными различиями в построении курса математики для школ разного профиля возникает актуальная проблема «математического стандарта», под которым понимается содержание и уровень математической подготовки.

3.Предмет методики преподавания математики (МПМ) и её задачи.

"Методика" - греческое слово ("метод" - путь).

Методика математики (говорят ещё: дидактика или педагогика математики) - раздел педагогики, исследующий закономерности обучения математике на определённом уровне её развития в соответствии с целями обучения, поставленными обществом.

Методика преподавания математики (МПМ) - дисциплина, которая занимается разработкой целей, содержания, средств, форм и методов обучения математике в учебных заведениях различных типов.

Предметом МПМ является обучение математике. В широком смысле - это научная область, которая занимается исследованием на всех уровнях, а в узком - обучение в средней школе.

Обучение, в частности, математике, - сложный процесс управления, осуществляемый учителем с использованием ряда вспомогательных средств (учебников, наглядных пособий, ТСО, компьютеров и т.п.). Обучение включает: восприятие, переработку, хранение и передачу информации.

Учитель передаёт информацию ученику, ученик её перерабатывает (и добавляет еще другие источники) и по требованию педагога передаёт ему информацию о качестве усвоения учебного материала и достигнутом уровне мыслительной деятельности. Таким образом происходит передача в двух направлениях: учитель - ученик.

Обратная связь - это существенная составная часть процесса обучения.

Для выявления предмета МПМ мы выделим следующие элементы процесса обучения:

а) цели обучения (для чего мы учим?);

б) объект обучения (кого мы учим?);

в) содержание обучения (чему мы учим?);

г) методы обучения (как мы учим?).

Следовательно, МПМ призвана дать ответ на три основных вопроса:

Зачем обучать математике?

Что изучать из математики?

Как обучать математике?

Впервые МПМ возникла в трудах швейцарского педагога Г. Песталлоци (1746 - 1827 гг.), опубликовавшего в 1803 г. работу "Наглядное учение о числе". Таким образом, научной дисциплиной МПМ становится лишь с начала XIX в.

МПМ определяет содержание и разрабатывает методы обучения, соответствующие этому содержанию и уровню мыслительной деятельности учащихся.

Существуют два класса проблем в МПМ: "Чему учить?" и "Как учить?". (Это разделение условно).

Существуют разные точки зрения на содержание понятия «методика». Одни, признавая методику наукой педагогической, рассматривали ее как частную дидактику с общими для всех предметов принципами обучения. Другие считали методику специальной педагогической наукой, решающей все задачи обучения и развития личности через содержание предмета. Приведем несколько примеров определений.

Методика преподавания математики - наука о математике как учебном предмете и закономерностях процесса обучения математике учащихся различных возрастных групп и способностей.

Методика преподавания математики - раздел педагогики, исследующий закономерности обучения математике на определенном уровне ее развития в соответствии с целями обучения подрастающего поколения, поставленными обществом. Методика обучения математике призвана исследовать проблемы математического образования, обучения математике и математического воспитания.

Методика преподавания математики в средней школе возникла с целью поиска педагогически целесообразных путей и способов изложения учебного материала. Методика преподавания математики начала разрабатываться чешским учёным Я.А. Коменским. Методика обучения математике впервые выделилась как самостоятельная дисциплина в книге швейцарского учёного И.Г. Песталоцци «Наглядное учение о числе» (1803, русский перевод 1806). Первым пособием по методике математики в России стала книга Ф.И. Буссе «Руководство к преподаванию арифметики для учителей» (1831). Создателем русской методики арифметики для народной школы считается П.С. Гурьев, который критерием правильности решения методических проблем признавал опыт и практику.

Методика обучения математике – это педагогическая наука о задачах, содержании и методах обучения математике. Она изучает и исследует процесс обучения математике в целях повышения его эффективности и качества. Методика обучения математике рассматривает вопрос о том, как надо преподавать математику.

Цель методики обучения математике заключается в исследовании основных компонентов системы обучения математике в школе и связей между ними. Под основными компонентами понимаются: цели, содержание, методы, формы и средства обучения математике.

Предмет методики обучения математике отличается исключительной сложностью. **Предметом методики обучения математике** является обучение математике, состоящее из целей и содержания математического образования, методов, средств, форм обучения математике.

На функционирование системы обучения математике оказывает влияние ряд факторов: общие цели образования, гуманизация и гуманитаризация образования, развитие математики как науки, прикладная и практическая направленность математики, новые образовательные идеи и технологии, результаты исследований в психологии, дидактике, логике и т.д. Совокупность этих факторов образует внешнюю среду, которая оказывает непосредственное влияние на систему обучения математике. Многие компоненты внешней среды воздействуют на нее через цели обучения математике.

Методика преподавания математики претерпевает в своем развитии большие трудности, прежде всего, из-за сложностей преодоления разрыва между школьной математикой и математической наукой, а также из-за того, что она является пограничным разделом педагогики на стыке философии, математики, логики, психологии, биологии, кибернетики и, кроме того, искусства.

В методике преподавания математики, в практике обучения предмету находят свое отражение особенности многовековой истории развития математики от глубокой древности до наших дней. Для глубокого понимания методических закономерностей студентам необходимо знать историю развития методики преподавания математики.

Основные задачи методики преподавания математики:

1. Определить конкретные цели изучения математики по классам, темам урокам.

2. Отбирать содержание учебного предмета в соответствии с целями и познавательными возможностями учащихся.

3. Разработать наиболее рациональные методы и организационные формы обучения, направленные на достижение поставленных целей.

4. Рассмотреть необходимые средства обучения и разработать рекомендации по их применению в практике работы учителя.

Методика преподавания математики призвана дать ответы на следующие три вопроса: Зачем надо учить математике? Что надо изучать? Как надо обучать математике?

Структурно методика преподавания математики (МПМ) может быть представлена тремя ее разделами (рис. 1).

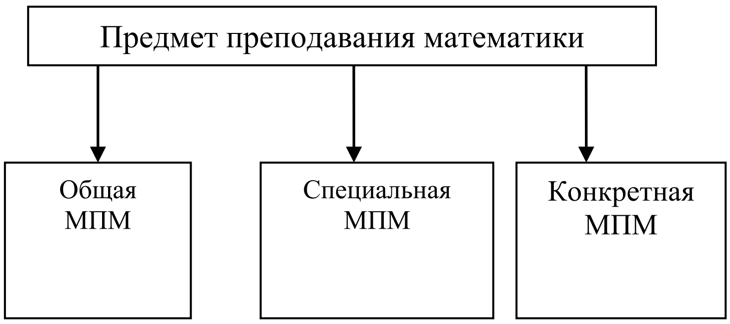


Рис. 1. Структура методики преподавания математики

Предусмотренное программой содержание школьного математического образования, несмотря на происходящие в нем изменения, в течение достаточно длительного времени сохраняет свое основное ядро. Такая устойчивость основного содержания программы объясняется тем, что математика, приобретая в своем развитии много нового, сохраняет и все ранее накопленные научные знания, не отбрасывая их как устаревшие и ставшие ненужными. Каждый из вошедших в это “ядро” разделов имеет свою историю развития как предмет изучения в средней школе. Вопросы их изучения подробно рассматриваются в специальной методике преподавания математики.

Выделенное ядро курса математики составляет основу его базисной программы, которая является исходным документом для разработки тематических программ. В тематической программе для средней школы, кроме распределения учебного материала по классам, излагаются требования к знаниям, умениям и навыкам учащихся, раскрываются межпредметные связи, даются примерные нормы оценок.

За рубежом, в школах развитых стран, значительное место в программах по математике отводится теории вероятностей и статистике. В программах школ Японии раздел «Статистика» является основным уже в 1-м классе начальной школы. Элементы теории вероятностей на строгой математической основе вводятся в старших классах школ Бельгии и Франции. Геометрия как самостоятельный учебный предмет во многих школах не изучается, отдельные её вопросы включены в курс арифметики, алгебры и начал математического анализа.

В республике Узбекистан, согласно Национальной программе подготовки кадров и государственным стандартам образования, математическое образование на старшей ступени общеобразовательной подготовки дифференцировано в соответствии с определенным профилем специализации. На всех ступенях обучения большую роль играет развитие функциональных представлений, овладение математическими методами, формирование исследовательских навыков.

4.Связь с другими науками. Методика обучения математике тесно связана с другими науками и прежде всего с **математикой** – ее базовой дисциплиной. Цель методики – отобрать основные данные математической науки и, дидактически обработав и адаптировав их, включить в содержание школьных курсов математики.

Методика обучения математике связана с такими науками, как философия, математика, психология, педагогика, логика, информатика, история математики и математического образования, физиология человека.

Философия разрабатывает методы познания, которые используются в педагогических, методических исследованиях и обучении математике: системный подход (компоненты методики преподавания математике и их взаимосвязь); методы научного познания (аналогия, обобщение, конкретизация, абстрагирование и т. д.); философские законы; диалектический метод познания.

Логика исследует законы «правильного» мышления. Такие понятия, как «выражение», «теорема», «доказательство», «уравнение», «правило вывода», являются логическими понятиями. Доказательства математических утверждений базируются на логических действиях. Формирование математических понятий осуществляется на основе логических законов.

Методика математики тесно связана с **педагогикой**, в частности дидактикой. В дидактике основным отношением, характеризующим обучение, является «преподавание - учение», в методике - «преподавание - учебный материал - учение». Педагогика определяет методы обучения, цели воспитания, методы научного исследования. Взяв за основу эти методы и цели из педагогики, методика вносит как в учебный процесс, так и в научные исследования, свое конкретное математической содержание.

Методика обучения математике ориентируется на особенности учащихся определенных возрастных групп, используя закономерности индивидуальных особенностей учащихся в определенном возрасте (память, мышление, внимание и т. д.). Влияние **психологии** на методику обучения математике усиливается в связи с внедрением личностно ориентированного образования, характеризующегося усиление внимания к учащемуся, его саморазвитию, самопознанию, к воспитании умения искать и находить свое место в жизни.

Методика обучения математике связана с **историей математики**. История математики обращает внимание учителя на трудности, с которыми он может встретиться при изучении курса математики, придает математическим знаниям личностно значимый характер.

Информатика - наука, изучающая проблемы получения, хранения, преобразования, передачи и использования информации. В последнее время в связи с развитием информатики, усиливается ее влияние на методику обучения математике: формируется определенный стиль мышления, связанный с использованием компьютера, кодированием информации; используются информационные технологии, ориентированные на повышение эффективности обучения математике.

Методика обучения математике не может не учитывать данные **физиологии**, особенно в исследованиях, например, при изучении рефлексов, связанных с сигналами, поступающими как от материальных предметов и явлений, так и от слов, символов, знаков.

5.Методы педагогики математики. Для решения проблем методического характера используются следующие методы: эксперимент; изучение и использование отечественного и зарубежного опыта обучения учащихся; анкетирование, беседы с учителями и учащимися; анализ; синтез, моделирование, ранжирование, шкалирование и т.д.

Методологическую основу исследований составляют диалектика, системный анализ и деятельностный подход. Термин «диалектика» можно рассматривается в связи: с наиболее общими законами развития природы, общества и мышления (единство и борьба противоположностей, переход количественных изменений в качественные, отрицание отрицания); с рассмотрением познаваемых объектов и явлений в развитии, обусловленности их изменений различными факторами, взаимосвязи с другими объектами и явлениями.

Все большее распространение в методике обучения математике получает **деятельностный подход**, рассматриваемый: как составляющая методологической основы методики обучения математике; как обучение способам деятельности; как обучение различным действиям, адекватным содержанию обучения математике; как учебная деятельность.

Деятельность - процесс активности человека, характеризуемый предметом, потребностью и мотивом, целями и условиями их достижения, действиями и операциями. Учебная деятельность – важнейший вид деятельности. Учебная деятельность представляет собой деятельность учащегося, направленную на приобретение теоретических знаний о предмете изучения и общих приемах решения связанных с ним задач. Решение учебной задачи происходит посредством учебных действий и действий контроля и оценки.

Для доказательства предполагаемых суждений в методике обучения математике используют **эксперимент -** организуемое обучение с целью проверки гипотезы, фиксации реального уровня знаний, умений, навыков, развития учащегося, сравнения результативности предлагаемых методик и традиционно используемых, обоснования различных утверждений. На этапе обоснования гипотезы используется констатирующий эксперимент, позволяющий выявить состояние объекта исследования или проверить предположение, а также уточнить отдельные факты. В процессе ее проверки гипотезы используется обучающий (поисковый, формирующий) эксперимент, который проводится с целью выявить эффективность разработанной методики. Отбираются экспериментальные и контрольные классы. В контрольных классах обучение ведется по традиционной схеме, а в экспериментальных - по разработанной исследователем модели или схеме. В организации эксперимента используются: наблюдение, анкетирование, качественный и количественный анализ результатов обучения.

Качественный анализ результатов исследования осуществляется с помощью контрольных работ, тестов учащихся, а количественный - по результатам статистической обработки контрольных работ, тестов.

В дидактике математики накоплен огромный опыт активизации обучения учащихся. Однако, проблема воспитания творческой активности учащихся до сих пор не теряет своей актуальности. Решение связано с преодолением многочисленных противоречий и ряда проблем, присущих процессу обучения.

Таковыми, например, являются:

- противоречия между объемом и содержанием учебного материала, которые жестко определены программой и естественным стремлением творчески работающего учителя выйти за ее границы, рассмотреть тот или иной вопрос в трактовке, отличной от принятой учебником;

- противоречие между экономичностью (проявляющихся в сообщении учащимся готовых знаний и приводящих часто к формальному их усвоению) и неэкономичностью во времени индуктивных методов (широко используемых в проблемном обучении и активизирующих самостоятельную познавательную деятельность учащихся);

- противоречие между повседневной коллективной учебной работой учащихся и индивидуальными особенностями усвоения ими знаний, формирования их умений и навыков, их темпом и характером работы;

- противоречия между развитием математики и методикой преподавания математики, если математика развивается необычайно быстро, приобретая все новые и новые знания, находящие свое отражение в учебных курсах, то методика преподавания математики, особенно в условиях массового обучения, развивается намного медленнее.

6.Цели обучения математики. Цели образования - один из определяющих компонентов педагогической системы. Они зависят от современных условий, социального заказа общества к образованию граждан.

Цели обучения математике отражают общедидактические цели и вместе с тем учитывают специфику данного учебного предмета. Разработка целей обучения является непростым делом. В дидактике и частных методиках в этом направлении сделаны определенные шаги.

Основные цели обучения математике (в широком смысле):

1. Овладение всеми учащимися элементами мышления и деятельности, которые наиболее ярко проявляются в математической ветви человеческой культуры и которые необходимы каждому для полноценного развития в современном обществе.

2. Создание условий для зарождения интереса к математике и развития математических способностей одаренных учащихся.

Соответственно целям обучения выделяются уровни обучения математике (рис. 2):

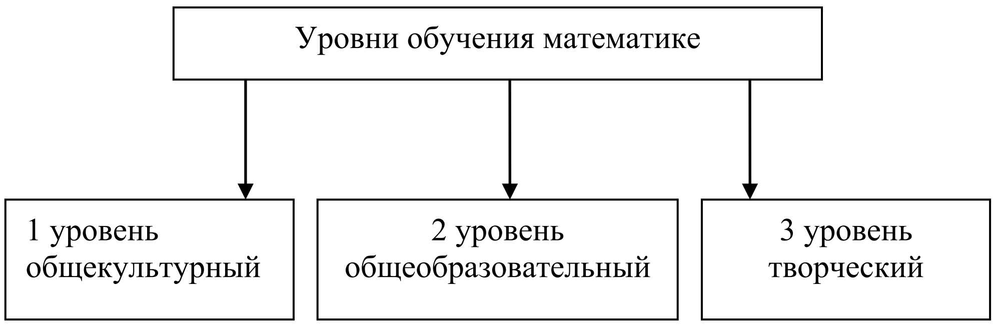


Рис. 2. Уровни обучения математике

Цели обучения математике (в узком смысле): общеобразовательные, воспитательные, развивающие.

Общеобразовательные (прогностические) **цели**: овладение учащимися системой математических знаний, умений и навыков, дающей представление о предмете математики, о математических приемах и методах познания, применяемых в математике.

Образовательные цели обучения во многом зависят от принятой формы *дифференциации обучения.* Основным документом, в котором фиксируются цели обучения математике, является программа по математике. Необходимо различать два уровня описания целей обучения: *общая характеристика целей обучения* и *конкретное их представление.* Общая характеристика целей обучения дается в объяснительной записке к программе по математике. Существуют различные *способы конкретного представления целей обучения.* Образовательные цели, например, формулируются в виде требований к уровню математической подготовки учащихся. В программе по математике для этого выделяется специальный раздел "Требования к математической подготовке учащихся". Другой раздел программы "Содержание обучения" представляет образовательные цели в еще более конкретной форме. Дальнейшей конкретизацией образовательных целей служит учебник. Предельно конкретный уровень представления образовательных целей имеет место в экзаменационных билетах для учащихся, контрольных работах, предлагаемых Министерством общего и профессионального образования. В методических пособиях часто формулируются цели обучения для отдельных тем, уроков. Образовательные цели призваны разграничить основной и второстепенный материал и в соответствии с этим помочь учителю рационально распределить учебное время.

Воспитательные (мировоззренческие) **цели**: воспитание активности, самостоятельности, ответственности; воспитание нравственности, культуры общения; воспитание эстетической культуры, воспитание графической культуры школьников.

Воспитательные цели должны быть тесно связаны с содержанием урока. Это могут быть цели по формированию мировоззрения, сознательного отношения к учебе, развитию" познавательной и общественной активности, культуры учебного труда, воспитанию сознательности, расширению политехнического кругозора, подготовке к сознательному выбору профессии и т. д.

Развивающие цели: формирование мировоззрения учащихся, логической и эвристической составляющих мышления, алгоритмического мышления; развитие пространственного воображения.

Развивающие цели должны находиться также в тесной связи с содержанием урока. Приведем примеры постановки развивающих целей:

- развитие у учащихся навыков применения анализа, синтеза, сравнения, аналогии, индукции, дедукции, обобщения, конкретизации, моделирования классификации;

- развитие у учащихся геометрической, алгебраической и числовой интуиции, пространственного представления и воображения, сообразительности, наблюдательности, памяти и т. д.

Цели обучения могут формулироваться по-разному в зависимости от их ориентации. Например, можно определить цель обучения через деятельность учителя; через учебную деятельность учащихся.

Достижение целей обучения математике определяется функциями обучения математике.

Требования к целям:

а) прогностические цели должны обладать - конкретностью, конструктивностью, проверяемостью, участием учащегося в процессе учения;

б) мировоззренческие должны пронизывать весь учебный процесс, выражать стремление к аргументации и четким логическим схемам рассуждения, к четкому расчленению рассуждения и т.п.;

в) личностно-ориентированные должны учитывать формирование возможных в том или ином возрасте качеств личности средствами предмета.

Этапы формирования действия целеполагания у учащихся:

а) первый этап - учитель раскрывает структуру действия постановки (полагания) цели;

б) второй этап - учитель привлекает детей к постановке цели и критическому осмыслению полученных результатов при достижении цели;

в) третий этап - учащиеся под руководством учителя конструируют цель изучения конкретного учебного материала;

г) четвертый этап - учащиеся самостоятельно ставят цели, а классный коллектив критически анализирует процедуру постановки цели и достижения результата.

Умение правильно формулировать цели уроков приходит к начинающему учителю не сразу. В период педагогической практики студенты нередко испытывают затруднения в постановке целей урока. При формулировании ими образовательной цели урока не всегда хватает четкости, конкретности (особенно в дифференциации целей "соседних" уроков). Иногда образовательная цель повторяет (или почти повторяет) название темы урока. Например, цель урока на тему "Первый признак равенства треугольников" чаще всего формулируется так: "Изучить первый признак равенства треугольников". Аналогично формулируются цели и в других случаях: "Изучить теорему Виета", "Изучить определение производной функции" и т.д. Во всех этих формулировках имеется общий недостаток: в них не уточняется, на каком уровне должен быть изучен данный элемент учебного материала. Необходимо указывать, когда ставится цель только ознакомить учащихся с тем или иным элементом учебного материала, когда - добиться хорошего воспроизведения учебного материала учащимся, а когда - заложить первоначальные умения и навыки и т. д. Еще большие затруднения начинающий учитель испытывает при постановке воспитательных и развивающих целей урока.

В некоторых методических руководствах имеются непосредственные указания, на каком уровне должен быть изучен тот или иной теоретический материал, в решении каких задач должны быть сформированы умения и навыки. Эти указания помогут начинающему учителю точнее формулировать цели урока.

О целях урока

В построении урока важным моментом является выбор общей цели урока и целей его составных частей.

Для одного и того же урока цели могут быть сформулированы по-разному. Например, для урока по изучению теоремы Виета целесообразно выделить следующие цели:

1) образовательные (ознакомить учащихся с теоремой, её доказательством и первыми упражнениями на применение этой теоремы);

2) воспитательные:

a) обеспечить интерес учащихся путём акцентирования элемента новизны: учащиеся ознакомятся с новой интересной закономерностью, связывающей корни квадратного уравнения с его коэффициентами;

b) стимулировать интерес учащихся путём проведения машинного эксперимента на микрокалькуляторах, приводящего к обнаружению теоремы Виета;

c) стимулировать ответственное отношение учащихся к учебной работе путём поощрения их участия в проведении доказательства теоремы Виета;

3) развивающие (развитие умений обобщать результаты машинного эксперимента, сформулировать учебную гипотезу в общем виде, указать способ логического обоснования теоремы);

4) практическую (закрепить навыки применения микрокалькулятора). Формулировки задач урока должны быть предельно краткими: какое понятие усвоить, какие навыки отработать, какую мировоззренческую идею проанализировать.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие периоды выделяют в истории развития математики как науки? Дайте краткую характеристику каждого периода.
2. Охарактеризуйте математику как учебный предмет средней школы. Где отражено ее содержание? Каковы цели обучения математике в средней школе?
3. Что такое методика преподавания математики (МПМ)?
4. Что является предметом МПМ?
5. Какие элементы включает в себя обучение?
6. Как Вы понимаете связь учитель - ученик?
7. Какие основные проблемы существуют в МПМ?
8. Как условно можно разделить МПМ?
9. Как связана МПМ с другими науками?
10. Какие методы педагогики математики Вы знаете?
11. Назовите наиболее выдающихся ученых-методистов из истории МПМ.

1.2. Реализация дидактических принципов в обучении математике

План
1. Дидактика. Дидактические принципы.
2. Принципы обучения как категории дидактики.
3. Принцип воспитания.
4. Принцип научности.
5. Принцип усиления прикладной направленности обучения.
6. Принцип систематичности и последовательности.
7. Принцип доступности.
8. Принцип сознательности, активности, самостоятельности и прочности усвоения.
9. Принцип наглядности.
10. Принцип индивидуального подхода к учащимся.
11. Принцип прочности знаний.

1. Дидактика (греч.слово, означающее - поучающий) - отрасль педагогики, разрабатывающая теорию образования и обучения. Предметом дидактики являются закономерности и принципы обучения, его цели, научные основы содержания образования, методы, формы и средства обучения.

Задачи дидактики состоят в том, чтобы: описывать и объяснять процесс обучения и условия его реализации; разрабатывать более совершенную организацию процесса обучения, новые обучающие системы и технологии. В дидактике обобщены те положения в обучении той или иной учебной дисциплине, которые имеют универсальный характер.

Принципы обучения - это руководящие идеи, нормативные требования к организации и проведению дидактического процесса. Они носят характер общих указаний, правил, норм, регулирующих процесс обучения. Принципы обучения – это система важнейших требований, соблюдение которых обеспечивает эффективное и качественное развитие учебного процесса.

Дидактические принципы обучения математике представляют по существу совокупность единых требований, которым должно удовлетворять обучение математике: принцип научности; принцип воспитания; принцип наглядности; принцип доступности; принцип сознательности и активности; принцип прочности усвоения знаний; принцип систематичности; принцип последовательности; принцип учета возрастных особенностей; принцип индивидуализации обучения; принцип воспитывающего обучения.

В основу **концепции математического образования** сегодня положены следующие принципы:
- научности в обучении математике;
- сознательности, активности и самостоятельности в обучении математике;
- доступности в обучении математике;

- наглядности в обучении математике;
- всеобщность и непрерывность математического;
- преемственность и перспективность содержания образования, организационных форм и методов обучения;
- систематичности и последовательности;
- системности математических знаний;
- дифференциация и индивидуализация математического образования, создание таких условий, при которых возможен свободный выбор уровня изучения математики;
- гуманизация математического образования;
- усиление воспитательной функции обучения математике;
- практической направленности обучения математике;
- применения альтернативного учебно-методического обеспечения;
- компьютеризации обучения и т.д.

2. Принципы обучения как категории дидактики. Процесс обучения, являясь составной частью целостного педагогического процесса, направлен на формирование всесторонне и гармонически развитой личности.

Обобщенный опыт обучения основам науки показывает, что для обеспечения единого подхода к учащимся, к выбору средств и методов учебной работы учитель должен придерживаться положений, носящих в определенном смысле универсальный характер.

В связи с этим в дидактике разработаны принципы, которые рассматриваются как важнейшие требования к организации процесса обучения, его содержанию, формам и методам. Эти единые требования получили название дидактических принципов или принципов обучения. Организация процесса обучения в соответствии с дидактическими принципами позволяет построить его на научной основе.

Вместе с тем следует иметь в виду, что дидактические принципы, выражая определенные закономерности обучения и передовой опыт учебновоспитательной деятельности школы, не являются раз и навсегда установленными. Они постоянно углубляются и видоизменяются в соответствии с теми задачами, которые ставит перед школой общество.

Таким образом, дидактические принципы - это основные направляющие положения, возникающие в результате анализа научнопедагогических закономерностей и практического педагогического опыта. Они являются главным ориентиром в педагогической работе учителя.

Дидактические принципы - это принципы деятельности, представляющие собой наиболее общее нормативное знание о том, как надо строить, осуществлять и совершенствовать обучение и воспитание. Закономерности этой деятельности являются теоретической основой для выработки норм учебно-воспитательной работы учителя. Однако сами по себе они не содержат конкретных указаний для такой деятельности. Эти указания дают принципы. Таким образом, принципы обучения взаимообусловлены его закономерностями. Например, принцип проблемности в обучении вытекает из закономерности, установленной С. Л. Рубинштейном, состоящей в том, что мышление возникает из проблемной ситуации и направлено на ее разрешение.

Однако, кроме законов и закономерностей обучения в становлении принципов, учитываются и другие факторы, а именно: 1) цели, которые ставит общество перед обучением и воспитанием; 2) конкретные условия, в которых осуществляется учебный процесс; 3) психологические характеристики процесса учения; 4) существующие способы конструирования учебных и воспитательных ситуаций.

Здесь следует заметить, что если речь идет не о дидактическом, а о методическом принципе, то в этом случае должна учитываться специфика конкретного учебного предмета и его функции в общем образовании.

Например, А. А. Столяр предлагает систему дидактических принципов дополнить двумя принципами, характерными для обучения математике:

1) школьный курс математики должен отражать фундаментальные идеи и логику современной математики (в соответствии с уровнем мыслительной деятельности учащихся);
2) процесс обучения математике должен строиться подобно процессу исследования в математике, он должен имитировать процесс творческого поиска в математике (в определенной мере, в какой это допускает уровень мыслительной деятельности учащихся).

Первый принцип относится к построению содержания обучения математике и в определенной степени конкретизирует дидактический принцип научности. Второй принцип относится к построению процесса обучения и конкретизирует дидактический принцип проблемности обучения.

В методической литературе по математике общепризнанной является следующая система дидактических принципов:

1. Принцип воспитания в обучении математике.
2. Принцип научности в обучении математике.
3. Принцип сознательности, активности и самостоятельности в обучении математике.
4. Принцип систематичности и последовательности в обучении математике.
5. Принцип доступности в обучении математике.
6. Принцип наглядности в обучении математике.
7. Принцип индивидуального подхода к учащимся в обучении математике.
8. Принцип прочности знаний в обучении математике.

3. Принцип воспитания. Общей целью воспитания является подготовка всесторонне развитых людей, способных построить и защитить общество. Всестороннее развитие личности предполагает умственное и нравственное развитие, политехническое образование и профессиональную подготовку, богатую духовную жизнь, физическое и эстетическое развитие. Реализация общей цели воспитания требует поэтому решения более частных задач, которые рассматриваются в качестве составных частей или сторон воспитания. Составными частями воспитания являются трудовое, нравственное, умственное, эстетическое и физическое воспитание.

Выделение составных частей воспитания опирается на объективные требования общества в развитии определенных свойств (качеств) личности. Так как свойства личности формируются не изолированно друг от друга, то и стороны воспитания, находясь во всеобщей взаимосвязи, способствуют формированию целостной личности. Поэтому такие качества целостной личности, как знание, умение, убеждение, поведение и др., могут быть составной частью каждой из указанных выше сторон воспитания.

Формирование мировоззрения и морали - центральная задача воспитания. Под мировоззрением понимается система философских, научных, политических, нравственных и эстетических представлений и убеждений человека, которая отражает понимание человеком окружающей его природной и социальной среды, его отношение к ней и определяет общую направленность всей его деятельности.

Мораль - это совокупность норм, принципов и правил, регулирующих поведение людей во всех сферах общественной жизни. Воспитание мировоззрения и морали способствует формированию характера каждого человека. Чтобы учащийся мог действовать в соответствии с принципами мировоззрения и морали, он должен сформировать у себя такие черты характера, как принципиальность, сила воли, скромность, честность по отношению к самому себе и другим людям.

Мировоззрение, базирующееся на научном знании и практическом жизненном опыте, связывает в единое целое эти свойства личности. Отсюда вытекают возможность и необходимость передачи всем людям знаний о закономерностях развития природы, общества и человеческого мышления, чтобы они могли сознательно осуществлять деятельность, направленную на построение общества.

Итак, принцип воспитания подрастающего поколения имеет своей целью воспитание в процессе обучения всесторонне развитой личности на основе формирования мировоззрения и морали.

Следовательно, в формировании убеждений возрастает роль процесса усвоения знаний. В связи с этим в преподавании математики (как и каждого учебного предмета) необходимо повышать активность учащихся и возбуждать у них интерес к вопросам, имеющим мировоззренческое значение. Важную роль в этом приобретает освещение в преподавании математики (также других предметов) новых идей современной науки.

Чтобы в обучении (в частности, математике) реализовывался принцип воспитания, учителю необходимо руководствоваться принципами научности, сознательности, активности и самостоятельности, стимулирования и мотивации положительного отношения учащихся к учению и т. п.

4. Принцип научности. Под научностью содержания образования следует понимать такую его качественную характеристику, которая удовлетворяет трем признакам:

а) соответствие содержания образования уровню современной науки;

б) создание у учащихся верных представлений об общих методах научного познания;

в) показ важнейших закономерностей процесса познания.

Эти условия взаимосвязаны между собой, ибо реализация каждого из последующих обусловлена выполнением предыдущих. Каждое предыдущее условие является необходимой базой для реализации последующего.

Первое условие говорит о том, что в соответствии с принципом научности образовательный материал, составляющий содержание обучения, должен в определенной мере соответствовать уровню современной науки.

Второе условие говорит о том, что принцип научности требует также знания общих методов научного познания. Но это лишь необходимое условие научности знаний. Оно недостаточно для создания у учащихся представлений о процессе познания. Одним из наиболее эффективных методов научного познания действительности в математике является построение математических моделей изучаемых явлений. Метод моделирования широко применяется сейчас в самых разнообразных областях знаний. Поэтому второе требование принципа научности естественным образом выдвигает на первый план обучение учащихся доступным для них способам математического моделирования.

Третье условие указывает на то, что принцип научности требует формирования у учащихся представлении о процессе познания и его закономерностях.

В обучении математике у учителя имеется много возможностей показать учащимся закономерности процесса познания. Эти вопросы будут предметом специального рассмотрения в последующих главах. Именно поэтому в процессе обучения основам наук шире должны внедряться проблемное обучение и разнообразные исследовательские приемы. В процессе реализации принципа научности учитель должен соблюдать также принцип доступности, чтобы содержание, формы и методы обучения учитывали реальные возможности учащихся. При этом необходимо учитывать и то, что принцип доступности предполагает обучение на достаточно высоком уровне трудности. Однако это можно достигнуть лишь при наилучшем сочетании индивидуальных и коллективных форм познавательной деятельности учащихся в обучении.

Можно выделить *три аспекта реализации принципа научности* в обучении: 1) реализация его в учебнике (соответствие содержания учебника современному уровню науки); 2) обеспечение высокого научного уровня изложения учебного материала учителем на уроке; 3) выработка у учащихся учебно-исследовательских навыков и умений.

5. Принцип усиления прикладной направленности обучения. Изучение основ науки должно осуществляться в тесной связи с раскрытием важнейших их применений в промышленности, сельском хозяйстве и общественной жизни. При этом основы науки не должны подменяться ее приложениями.

Использование в обучении математических моделей реальных ситуаций, отбор содержания обучения, отвечающего поставленной цели, представляют собой основные средства реализации принципа связи обучения с жизнью. Важной составной частью этих средств являются задачи и примеры прикладного характера.

6. Принцип систематичности и последовательности. Нельзя овладеть наукой, не изучая ее в определенной системе. В такой же мере нельзя успешно развивать познавательные и творческие способности учащихся без строго продуманной системы их обучения и воспитания.

Принцип систематичности и последовательности в обучении проводится во всей системе учебной работы. Излагать знания систематически - это значит при изучении нового опираться на ранее пройденное, выделять в нем главное, вскрывать общую идею, формировать у учащихся умение анализировать, систематизировать и обобщать изучаемые явления и факты.

Важное значение принцип систематичности и последовательности приобретает в выработке у учащихся умений и навыков самостоятельной работы с книгой, в воспитании у них навыков организованности и последовательности в приобретении знаний.

Систематичность в обучении математике предполагает соблюдение определенной последовательности в изучении учебного материала и постепенное овладение основными понятиями математики.

Принцип систематичности ориентирует учителя на достижение системности знаний в сознании учащихся путем установления теснейшей связи между элементами изучаемого материала, раскрытия единства элемента и структуры, части и целого.

Систематические знания характеризуются как знания о научных основах учебного предмета. Они формируются на основе усвоения понятий и фактов в определенной логической последовательности. Наиболее полное свое выражение этот принцип находит в *систематических курсах математики.* Можно выделить три вида систематизации учебного материала: *целевая, логическая* и *психологическая*. В качестве методов систематизации широко применяются индуктивные и дедуктивные методы, аналогия, обобщение, конкретизация и др. Различают еще *системные знания*. Они характеризуются, прежде всего, как методологические знания основ научной теории. Одним из средств формирования системных знаний является включение в учебник сведений о математической теории и способах ее построения.

Следовательно, смысл принципа систематичности заключается в том, что учащиеся осознают приобретенные знания как элементы целостной, единой системы.

Сказанное позволяет утверждать, что научность обучения немыслима без систематичности, а с систематичностью тесно связан вопрос о преемственности в обучении. Ее характеризует опора на пройденное, дальнейшее развитие имеющихся у учащихся знаний, умений и навыков, установление связей между новыми и ранее приобретенными знаниями. В результате этого знания становятся прочными и глубокими.

Систематичность имеет место и в организационных приемах работы учителя - в системе его требований к учащимся. Систематичность должна быть также в учебной деятельности учащихся, в системе методов работы над каждым учебным предметом, в последовательности выполнения домашних заданий и т. п.

Последовательность в обучении математике означает, что обучение осуществляется в соответствии с правилами обучения: а) от простого к сложному; б) от легкого к трудному; в) от известного к неизвестному; г) от представлений к понятиям; д) от знания к умению, а от него к навыку.

Учитель реализует этот принцип, если обучение математике представляет собой цепочку последовательных шагов, каждый из которых последовательно дополняет известные учащимся знания, умения и навыки разумной дозой новых знаний, умений и навыков.

В заключение отметим, что успешная реализация принципа систематичности и последовательности в обучении во многом зависит от того, какое значение придается учителем межпредметным связям в обучении, как скоординированы требования к учащимся между преподавателями различных учебных предметов, соблюдается ли преемственность в изучении отдельных тем и учебных предметов.

7. Принцип доступности. Принцип доступности в обучении вытекает из требований учета возрастных особенностей учащихся. Он лежит в основе составления учебных планов и программ.

Принцип доступности требует, чтобы объем и содержание учебного материала были по силам учащимся, соответствовали уровню их умственного развития и имеющемуся запасу знаний, умений и навыков.

Доступность не следует понимать как учение без трудностей. Она не исключает приучение учащихся к преодолению трудностей в учебной деятельности. Это понятно, так как учебная работа требует определенных усилий учащихся в достижении поставленных целей. Суть вопроса заключается не в том, чтобы обходить трудности, а в том, чтобы эти трудности не подрывали, а развивали силы учащегося и способствовали повышению результатов учебных занятий.

Реализация принципа доступности предполагает выполнение следующих условий - дидактических правил: а) следовать в обучении от простого к сложному; б) от легкого к трудному; в) от известного к неизвестному.

Отсюда следует, что строгое соблюдение в обучении принципа систематичности и последовательности предопределяет успешную реализацию принципа доступности.

Следовать в обучении от простого к сложному означает, что изучение учащимися фактов, явлений, закономерностей, понятий и т. п. должно начинаться с наиболее простых, с тем чтобы подготовить их к пониманию более сложных. Это положение касается как теоретического, так и практического учебного материала.

Принцип доступности в обучении привлекает к себе особое внимание также в связи с проблемой индивидуального подхода к учащимся и условиях массового обучения.

Принцип доступности требует, чтобы обучение строилось на основе учета возрастных возможностей учащихся. С его помощью регулируется *уровень сложности учебного материала*, определяется выбор методических подходов изложения его на уроке, правильная дозировка домашних заданий. Слишком упрощенное содержание обучения снижает его развивающие и воспитательные возможности. Поэтому рекомендуется (по Л. В. Занкову), чтобы содержание заданий для учащихся находилось в *"зоне их ближайшего развития"*.

8. Принцип сознательности, активности, самостоятельности и прочности усвоения. Данный принцип заключается в целенаправленном активном восприятии изучаемых явлений, их осмыслении, творческой переработке и применении. Он вытекает из целей и задач учебных заведений, призванных готовить активных и самостоятельных членов общества, а также из особенностей процесса обучения, требующего осмысленного и творческого подхода к изучаемому материалу.

Реализация принципа сознательности, активности и самостоятельности в обучении предполагает выполнение следующих условий:

а) соответствие познавательной деятельности учащихся закономерностям процесса учения;

б) познавательная активность учащихся в процессе учения;

в) осознание учащимися процесса учения;

г) владение учащимися методами умственной работы в процессе познания "нового".

Остановимся кратко на сущности этой совокупности условий. Учебное познание есть учение, т. е. деятельность учащихся по усвоению новых знаний и способов деятельности. Следовательно, говоря об усвоении, мы имеем в виду познавательную деятельность учащихся (процесс учения), но всегда в единстве с руководящей, обучающей ролью учителя и содержанием учебного материала с учетом его структуры.

Отсюда следует, что сущность процесса обучения в целом и его составной части - учения (усвоения) заключается в том, что этот процесс вытекает из общего хода процесса познания и его закономерностей. В соответствии с ним дидактика выделяет в процессе усвоения диалектически взаимосвязанные этапы познавательной деятельности учащихся: восприятие - осмысление - закрепление - применение.

Если в процессе познания нового учащиеся будут совершать умственные и практические действия в соответствии с выделенными этапами процесса учения, включающими в себя действия по восприятию изучаемого материала, его осмыслению (пониманию), закреплению и применению, то можно утверждать, что в обучении созданы условия для активизации познавательной деятельности учащихся и осознания ими процесса учения.

Здесь следует обратить внимание на три обстоятельства. Во-первых, процесс познавательной деятельности в каждом отдельном случае не обязательно проходит по всем этапам учебного познания и в указанной последовательности. Например, при дедуктивном рассуждении учащимся нет необходимости проходить этап восприятия изучаемых явлений и формирования соответствующих представлений. Так, при усвоении нового знания о том, что всякое сечение шара плоскостью есть круг, учащимся предлагается конкретный факт - данная плоскость пересекает шар - и общее правило относительно всех плоскостей, пересекающих шар, - всякое сечение шара плоскостью есть круг.. Применив это общее правило к конкретному факту, учащиеся приходят к одному и тому же выводу: "Следовательно, данное сечение есть круг". Во-вторых, выделенные выше четыре условия реализации принципа сознательности, активности и самостоятельности не являются независимыми. Выполнение первого условия означает выполнение остальных. Однако выделение такой совокупности условий раскрывает дидактический механизм действия самого принципа, что важно и необходимо знать учителю. В-третьих, чтобы в обучении было установлено соответствие познавательной деятельности учащихся закономерностям процесса учения (первое условие), необходима целенаправленная деятельность учителя по формированию у учащихся ответственного отношения к приобретению и усвоению знаний, их осмысливанию и практическому применению. Только в результате такой управляющей деятельности учителя можно говорить о реализации принципа сознательности, активности и самостоятельности учащихся в обучении.

Сознательность понимается в дидактике как овладение учащимися данными науки, учебным материалом, глубокое осмысление его, умение пользоваться знаниями на практике в новых условиях, превращение знаний в убеждения, в руководство к действию.

В процессе сознательного усвоения знаний формируется творческое отношение к изучению и применению знаний, логическое мышление учащихся и их мировоззрение. Сознательное усвоение знаний исключает догматическое, при котором учащиеся принимают на веру преподносимые учителем знания. Результатом догматического усвоения является формализм знаний. Основными признаками формализма знаний являются отсутствие конкретных представлений об изучаемых явлениях; запоминание без понимания, без умения творчески применять знания на практике; безынициативность; отсутствие высоких общественных идеалов, глубоких убеждений и готовности бороться за них.

Конкретно в обучении математике формализм в знаниях особенно часто проявляется в том, что учащиеся безошибочно дают формулировку определения того или иного понятия, но не могут им воспользоваться при решении задач, доказательстве теорем.

В теории обучения выявлены признаки осознанности знаний, которыми может руководствоваться учитель в процессе обучения. К ним относится следующая совокупность признаков:

а) понимание учащимися характера связей между знаниями (рядоположности и соподчиненности, степени их существенности);

б) понимание механизма становления и проявления связей;

в) умение обосновывать знания;

г) понимание способов получения знаний и сферы их применения. Сознательное обучение обязательно предполагает активную деятельность учащихся в этом процессе.

Активность есть деятельное состояние учащегося, которое характеризуется стремлением к учению, умственным напряжением и проявлением волевых усилий в процессе овладения знаниями. Такую активность учащихся в обучении называют познавательной активностью.

В учебном процессе активность учащихся получает свое выражение не только в работе мысли, но и в практической деятельности, в общественной работе, в волевом напряжении и в эмоциональных переживаниях.

Умственная активность учащихся в процессе обучения математике имеет особо важное значение при формировании понятий. Поэтому учителю необходимо владеть методическими приемами, возбуждающими мыслительную активность учащихся в этом процессе.

Активность учащихся в обучении проявляется в их инициативности и высокой степени самостоятельности (или познавательной самостоятельности).

Познавательная самостоятельность является высшей формой активности и сознательности учащихся в процессе учения. Поэтому осуществление в обучении сознательного и активного процесса учения неизбежно формирует такое важное качество личности, как познавательная самостоятельность, которая является важнейшей характеристикой деятельности учащегося в учебном процессе.

В теории обучения выделены признаки познавательной самостоятельности учащихся. К ним относятся стремление и умение самостоятельно мыслить; способность ориентироваться в новой ситуации, найти свой подход к решению новой задачи; желание понять не только усваиваемые знания, но и способы их добывания; критический подход к суждению других; независимость собственных суждений. Большое значение в плане формирования познавательной активности и самостоятельности учащихся имеют самостоятельные работы. Самостоятельные работы являются формой совместной единой деятельности учителя и учащихся. Выполняя самостоятельную работу, учащиеся активно оперируют приобретенными знаниями, умениями и навыками, совершают поисковую деятельность. Поэтому в этой самостоятельной деятельности учащегося укрепляются и взаимообусловливаются его познавательная активность и самостоятельность, а такая деятельность отличается высоким уровнем сознательности.

Если в результате обучения учащиеся приобрели такое качество личности, как познавательная самостоятельность, то можно утверждать, что на всех этапах учебного познания реализовывался дидактический принцип сознательности, активности и самостоятельности в обучении.

9. Принцип наглядности. Теоретическое обоснование принципу наглядности впервые было дано чешским педагогом Я.А. Коменским, который выдвинул требование учить людей познавать самые вещи, а не только чужие свидетельства о них.

Русский педагог К.Д. Ушинский указывал, что наглядность отвечает психологическим особенностям детей, мыслящих "формами, звуками, красками, ощущениями". Наглядное обучение, по словам К. Д. Ушинского, "строится не на отвлеченных представлениях и словах, а на конкретных образах, непосредственно воспринятых ребенком". Наглядность обогащает круг представлений ребенка, делает обучение более доступным, конкретным и интересным, развивает наблюдательность и мышление.

Принцип наглядности вытекает из сущности процесса восприятия, осмысления и обобщения учащимися изучаемого материала. Он означает, что в обучении необходимо, следуя логике процесса усвоения знаний, на каждом этапе обучения найти его исходное начало в фактах и наблюдениях единичного или в аксиомах, научных понятиях и теориях, после чего определить закономерный переход от восприятия единичного, конкретного предмета к общему, абстрактному или, наоборот, от общего, абстрактного к единичному, конкретному. Таким образом, дидактика исходит из единства чувственного и логического, считает, что наглядность обеспечивает связь между конкретным и абстрактным, содействует развитию абстрактного мышления, во многих случаях служит его опорой. Однако характер и степень использования наглядности различны на разных этапах обучения. Излишнее увлечение наглядностью в обучении может привести к нежелательным результатам. Конкретная наглядность (например, рассмотрение моделей геометрических тел) должна постепенно уступать место абстрактной наглядности (рассмотрению плоских чертежей).

Говоря о значении принципа наглядности и о его роли в процессе учебного познания, дидактика утверждает, что наглядность является исходным моментом обучения главным образом в младших классах. По мере движения учащихся к старшим классам учитель постепенно должен находить в обучении историко-индуктивный путь пополнения знаний: постановка проблемы, история ее решения и современное состояние, затем практические или лабораторные работы. Здесь наглядность получает свою реализацию дважды: как иллюстрация истории открытия и как способ раскрытия современного решения проблемы.

Однако исторический подход занимает много времени и не всегда необходим. Поэтому исходным началом могут быть теоретические положения, аксиомы, системы понятий, усвоенные учащимися на предшествующих этапах обучения. В этом случае наглядность используется лишь для иллюстрации усвоенных учащимися знаний в процессе их применения к решению задач. По характеру отражения окружающей действительности различают следующие виды наглядности:

- натуральная (естественная) наглядность, представляющая собой реальные предметы или процессы (объекты и явления, раздаточный материал и др.);
- изобразительная наглядность (фотографии, художественные картины, рисунки, учебные картины и др.) применяется, когда показ натурального предмета затруднен, а созерцание конкретного образа необходимо;
- символическая наглядность (чертежи, графики, схемы, таблицы, диаграммы) по существу является своеобразным языком, а потому должна специально изучаться, чтобы стать понятной. Например, при изучении свойств функций (возрастание, убывание, максимум, минимум и др.) целесообразно их аналитическую запись переводить на язык графиков и на этой основе тренировать учащихся "читать" графики функций.

Различные виды наглядности выполняют различные функции. Одни содействуют оживлению представлений (картины, предметы жизни), другие являются опорой для отвлеченного мышления.

Наглядность применяется и как средство познания нового, и для иллюстрации мысли, и для развития наблюдательности, и для лучшего запоминания материала. Средства наглядности используются на всех этапах процесса обучения: при объяснении нового материала учителем, при закреплении знаний, формировании умений и навыков, при выполнении домашних заданий, при контроле усвоения учебного материала.

Применение наглядных пособий в обучении подчинено ряду правил:

- ориентировать учащихся на всестороннее восприятие предмета с помощью разных органов чувств;
- обращать внимание учащихся на самые важные, существенные признаки предмета;

- показать предмет (по возможности) в его развитии; предоставить учащимся возможность проявлять максимум активности и самостоятельности при рассмотрении наглядных пособий;

- использовать средства наглядности ровно столько, сколько это нужно, не допускать перегрузки обучения наглядными пособиями, не превращать наглядность в самоцель.

Следовательно, умелое применение средств наглядности в обучении всецело находится в руках учителя. Учитель в каждом отдельном случае должен самостоятельно решать, когда и в какой мере надо применять наглядность в процессе обучения, ибо от этого в определенной степени зависит качество знаний учащихся.

10. Принцип индивидуального подхода к учащимся. Повышение эффективности обучения непосредственно связано с тем, насколько полно учитываются особенности каждого учащегося. Важной индивидуальной особенностью учащихся является их способность к усвоению знаний, т. е. обучаемость. Под влиянием возрастающих требований жизни увеличивается объем и усложняется содержание знаний, подлежащих усвоению. Чем глубже развивается этот процесс, тем более четко выступают индивидуальные различия в обучаемости учащихся.

Как показали многочисленные психолого-дидактические исследования, если уровнять многие факторы, влияющие на уровень усвоения новых знаний, а именно: обеспечить одинаковый исходный минимум знаний у всех учащихся, положительное отношение их к уроку, желание как можно лучше усвоить материал, тщательно разработать методику введения нового материала, то, несмотря на равенство этих условий, новые знания будут усвоены по разному. Одни учащиеся достаточно полно усвоят новое и могут применить его в новых, но сходных с учебной обстановкой условиях, требующих самостоятельного развития новых знаний (высший уровень усвоения). Другие усвоят существенные стороны нового понятия или закономерности и сумеют применить их к решению задач, близких к тем, которые разбирались в процессе объяснения нового материала (средний уровень усвоения). Наконец, будут и такие, кто вынес лишь отдельные, нередко несущественные стороны нового понятия или закономерности и не может применить их к решению даже простых задач (низший уровень усвоения). При этом потребуется различное количество упражнений и различная мера помощи со стороны учителя тем учащимся, которых предстоит довести до высшего уровня усвоения.

В психологии обучения выявлено несколько характеристик индивидуальных различий учащихся, связанных с понятием обучаемости. К ним относятся: а) темп усвоения или продвижения в обучении как наиболее устойчивая характеристика; б) полнота и точность анализа и синтеза и неразрывно связанных с ними обобщения и абстрагирования; в) устойчивая предрасположенность учащихся к тому или иному виду анализа, особенно при первичной работе над материалом; г) уровень формируемых у учащегося обобщений; д) уровень выделения и обобщения учащимися способов оперирования знаниями; е) экономичность мышления и др.

Следует заметить, что предпоследняя (указанная здесь) сторона мыслительной деятельности позволила психологам сделать предположение о том, что не всякое усвоение знаний означает сдвиг в умственном развитии учащегося. Этот сдвиг происходит тогда, когда обучение обеспечивает овладение не только содержанием знаний, но и методами, способами их приобретения, благодаря чему учащиеся могут самостоятельно приобретать новые знания.

Отмеченные выше явления, имеющие место в обучении, показали невозможность создать в обучении систему, равно оптимальную для каждого учащегося. Это обстоятельство привело к необходимости реализации в обучении принципа индивидуального подхода к учащимся. Сущность принципа индивидуального подхода по существу состоит в адаптации (приспособлении) обучения либо к содержанию и уровню знаний, умений и навыков каждого учащегося, либо также к характерным для него особенностям процесса усвоения, либо даже к некоторым устойчивым особенностям его личности. Основным средством реализации принципа индивидуального подхода являются индивидуальные самостоятельные работы, предназначенные для учащихся. Они выступают в качестве специфического дидактического средства организации и управления самостоятельной деятельностью учащихся на всех этапах обучения.

11. Принцип прочности знаний. Принцип прочности знаний обусловливается как задачами школы, так и закономерностями процесса обучения. Опираться на приобретенные знания, умения и навыки можно лишь в том случае, когда они усвоены твердо и длительное время удерживаются в памяти.

Прочные знания, умения и навыки необходимы как для успешного продолжения образования, так и для формирования у учащихся научного мировоззрения, развития их способностей, подготовки к практической деятельности.

В дидактике сформулированы условия прочности знаний. К ним относятся:

- активное приобретение знаний с целью сознательного их усвоения;
- научность обучения;
- создание в обучении условий для запоминания учебного материала.

Содержание и сущность принципов научности и сознательности в обучении было раскрыто выше. Поэтому рассмотрим некоторые основы механизма запоминания в процессе обучения.

Запоминание есть процесс памяти, в результате которого происходит закрепление нового путем связывания его с ранее приобретенным. Запоминание всегда избирательно: в памяти сохраняется не все, что оказывает воздействие на органы чувств индивида. От чего это зависит? Запоминание является закономерным продуктом действия субъекта с объектом, т. е. запоминается то, с чем человек действует. При этом успешность запоминания учебного материала определяется мотивами, целями и способами деятельности личности. Назовем основные условия запоминания материала в обучении: учебный материал запоминается учащимися лучше, если он входит в содержание основной цели деятельности. Например, если целью действий учащихся является выявление свойств той или иной геометрической фигуры, то их запоминание будет лучшим, нежели в том случае, когда свойства фигуры сообщаются непосредственно учителем; учебный материал запоминается лучше, если он вызывает активную умственную работу над ним. Поэтому материал более трудный запоминается лучше, чем легкий, так как связи между элементами трудного текста являются более содержательными.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие основные дидактические принципы применяются на уроках математики?
2. Каковы аспекты реализации принципа научности в обучении математике?
3. Что такое дидактическая система и какими особенностями она обладает?
4. Какие виды формализма в знаниях учащихся по математике Вы знаете? Приведите примеры.
5. Как достичь сознательности и прочности усвоения знаний по математике?
6. Что является "золотым правилом дидактики"? Какую роль оно играет в математике?
7. Какие виды наглядности Вы знаете?
8. Каковы основные правила применения наглядности?

1.3. Методы обучения математике

План

I. Методы обучения, выделяемые по источнику знаний:

1. словесные;
2. наглядные;
3. практические.

2. Методы обучения, определяемые уровнем познавательной деятельности учащихся

3. Проблемное обучение

4. Программированное обучение

5. Математическое моделирование

6 Аксиоматический метод

7. Методы информатики в обучении математике

8. Сочетании и выбор методов обучения.
9. Логико-дидактический анализ учебного материала.

Науку о закономерностях процесса обучения математике называют методикой обучения математике. В ней устанавливается, какими способами можно добиться у всех учащихся прочных знаний, умений и навыков, затрачивая на это минимум времени и сил, как развивать творческие способности учащихся и достигать всех тех учебно-воспитательных целей, которые ставятся при изучении математики. Для решения этих задач в методике математики разрабатывают систему методов и приёмов обучения.

Понятие "метод обучения" определяют различным образом. Возьмём за основу одно из принятых в дидактике определений.

Методы обучения - это упорядоченные способы взаимосвязанной деятельности учителя и учащихся, направленные на достижение учебно-воспитательных задач.

Для понятия "приём обучения" в дидактике не найдено согласованного определения. Ввиду отсутствия чётких критериев, позволяющих отделять методы от приёмов, в некоторых случаях трудно провести между ними резкую грань. Однако в практической работе учителя это не имеет существенного значения.

В математике накоплен богатейший опыт, разработаны и проверены различные методы и приёмы, и при том в таком количестве, что учитель может для любой ситуации подобрать наиболее приемлемые из них. В то же время, по различным вопросам преподавания математики высказываются нередко бездоказательные рекомендации рецептурного характера, наблюдаются неоправданные увлечения отдельными методами. Эти негативные явления в некоторой мере происходят из-за отсутствия в методике математики теоретической основы. Например, А.А. Столяр пишет: "Достаточно развитой научной теории обучения математике пока нет ни в нашей, ни в зарубежной литературе".

Противоречивость некоторых методических рекомендаций особенно наглядно выявляется в периоды массового увлечения отдельными методами и последующего неизбежного разочарования в них, например липецким методом, программированным обучением и т.д. Универсального метода нет.

Методы и приёмы не стоит подразделять на эффективные и неэффективные. Каждый метод или приём обладает и достоинствами, и недостатками.

Эффективность применяемого метода (приёма) зависит от сочетания с другими методами, содержания изучаемого материала, уровня развития учащихся и других факторов.

1. Методы обучения, выделяемые по источнику знаний.

1. *Словесные методы обучения*. Наиболее важными словесными методами являются рассказ, лекция, беседа и др.

Рассказ - это словесный метод обучения, который:

1) предполагает устное повествовательное, целеустремлённое изложение учебного материала;

2) применяется при изложении учебного материала, носящего ознакомительный характер;

3) не прерывается вопросами к учащимся;

4) позволяет при минимальных затратах времени сообщить максимум знаний;

5) предполагает использование таких методических приёмов, как изложение информации, активизация внимания, ускорение запоминания, а также логических приёмов сравнения, сопоставления, выделения главного, резюмирования;

6) характеризуется недостаточной долей самостоятельного познания учащихся, ограниченностью элементов поисковой деятельности;

7) затрудняет обратную связь: учитель не получает достаточной информации о качестве усвоения знаний, не может учесть индивидуальных особенностей всех учащихся.

Существует несколько видов рассказа: рассказ-вступление, рассказ-изложение, рассказ-заключение.

Условиями эффективного применения рассказа являются тщательное продумывание плана, выбор наиболее рациональной последовательности раскрытия темы, удачный подбор примеров и иллюстраций, поддержание должного эмоционального тона изложения.

Эффективность беседы зависит от того, насколько умело подобраны вопросы, которыми направляется беседа.

Составление вопросов облегчается, если учебный материал разбивается вначале на отдельные смысловые части; затем подбираются вопросы таким образом, чтобы облегчить учащимся переход от одной части к другой.

Великий русский математик Н.И. Лобачевский придавал огромную роль методике преподавания математике. Он писал: "Самое важное в математике - способ преподавания" (статья "Наставление учителям математики в гимназиях").

2. *Наглядные методы обучения.*

Метод иллюстраций предполагает показ учащимся различных иллюстративных пособий: плакатов, таблиц, схем, рисунков из учебника, зарисовок и записей на доске, моделей геометрических фигур, натуральных предметов и т.д.

Метод демонстраций обычно связан с демонстрацией приборов, опытов, показом кинофильмов, диафильмов, слайдов, кодопозитивов, использования учебного телевидения, магнитофонных записей и т.д.

Условия успешного применения наглядных средств обучения:

хорошее обозрение наглядного пособия;

постановка учебной цели, чёткое выделение главного при демонстрации пособия;

умелое сочетание слова и показа средства наглядности; осуществление ориентации действий учащихся на достижение учебной цели с помощью средства наглядности;

привлечение учащихся к нахождению желаемой информации (с помощью наглядного пособия), постановка перед ними проблемных заданий.

Задание: Поясните каждое из названных выше условий.

3.*Практические методы обучения.*

Они охватывают различные виды деятельности ученика: постановку практических заданий, планирование хода его выполнения, формулирование и анализ итогов практической работы.

Практические работы обычно связываются с построениями, измерениями, вычислениями, изготовлением наглядных пособий. К практическим работам относятся письменные упражнения (тренировочные, комментированные), лабораторные работы, выполнение заданий в учебных мастерских с применением измерительных и разметочных инструментов.

В связи с компьютеризацией повышается роль автоматизированных систем обучения на базе ЭВМ (контролирующие и обучающие программы).

2. Методы обучения, определяемые уровнем познавательной деятельности учащихся

К методам этой группы относятся *репродуктивные, проблемно-поисковые* и *самостоятельная работа учащихся*.

В практике многих учителей широко используется самостоятельная работа учащихся. Она проводится почти на каждом уроке в пределах 7-15 мин. Первые самостоятельные работы по теме носят в основном обучающий и корректирующий характер. С их помощью осуществляется оперативная обратная связь в обучении: учитель видит все недостатки в знаниях учащихся и своевременно устраняет их. От занесения в классный журнал оценок "2" и "3" можно пока воздержаться (выставляя их в тетради или дневнике учащегося). Если самостоятельная работа носит контролирующий характер, то в журнал выставляются все оценки. Такая система оценивания является достаточно гуманной, хорошо мобилизует учащихся, помогает им лучше осмысливать свои затруднения и преодолевать их, способствует повышению качества знаний. Учащиеся оказываются лучше подготовленными к контрольной работе, у них исчезает страх перед такой работой, боязнь получить двойку. Количество неудовлетворительных оценок, как правило, резко сокращается. У учащихся вырабатывается положительное отношение к деловой, ритмичной работе, рациональному использованию времени урока.

Существует ряд других классификаций методов обучения.

По характеру познавательной деятельности (М.Н. Скаткин, М.И. Махмутов, И.Я. Лернер):

• объяснительно-иллюстративные (рассказ, лекция, беседа, демонстрация и т.д.);
• репродуктивные (решение задач, повторение опытов и т.д.);
• проблемные (проблемные задачи, познавательные задачи и т.д.);
• частично-поисковые – эвристические;
• исследовательские.

По компонентам деятельности (Ю.К. Бабанский):
• организационно-действенному – методы организации и осуществления учебно-познавательной деятельности;
• стимулирующему – методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности;
• контрольно-оценочному – методы контроля и самоконтроля эффективности учебно-познавательной деятельности.

По дидактическим целям (методы изучения новых знаний, методы закрепления знаний, методы контроля).

По способам изложения учебного материала:
• монологические - информационно-сообщающие (рассказ, лекция, объяснение);
• диалогические (проблемное изложение, беседа, диспут).

По формам организации учебной деятельности.

По уровням самостоятельной активности учащихся.

По источникам передачи знаний (А.А, Вагин, П.В. Гора):
• словесные: рассказ, лекция, беседа, инструктаж, дискуссия;
• наглядные: демонстрация, иллюстрация, схема, показ материала, график;
• практические: упражнение, лабораторная работа, практикум.

По учету структуры личности (сознания, поведение, чувства):
• сознание (рассказ, беседа, инструктаж, иллюстрирование и др.);
• поведение (упражнение, тренировка и т.д.);
• чувства – стимулирование (одобрение, похвала, порицание, контроль и т.д.).

Все из указанных классификаций рассматриваются в дидактическом аспекте, предметное содержание математики учитывается здесь не в достаточной мере, поэтому невозможно отразить всю номенклатуру методов обучения математике. Выбор методов обучения - дело творческое, однако, оно основано на знании теории обучения. Методы обучения невозможно разделить, универсализировать или рассматривать изолированно. Кроме того, один и тот же метод обучения может оказаться эффективным или неэффективным в зависимости от условий его применения.

Новое содержание образования порождает новые методы в обучении математике. Необходим комплексный подход в применении методов обучения, их гибкость и динамичность.

Педагогическая классификация методов обучения разделяет методы преподавания и методы изучения (учения), которые в свою очередь представлены научными и учебными методами изучения математики (рис. 3).

Методы преподавания - средства и приемы, способы информации, управления и контроля познавательной деятельностью учащихся.

Методы учения - средства и приемы, способы усвоения учебного материала, репродуктивные и продуктивные приемы учения и самоконтроля.

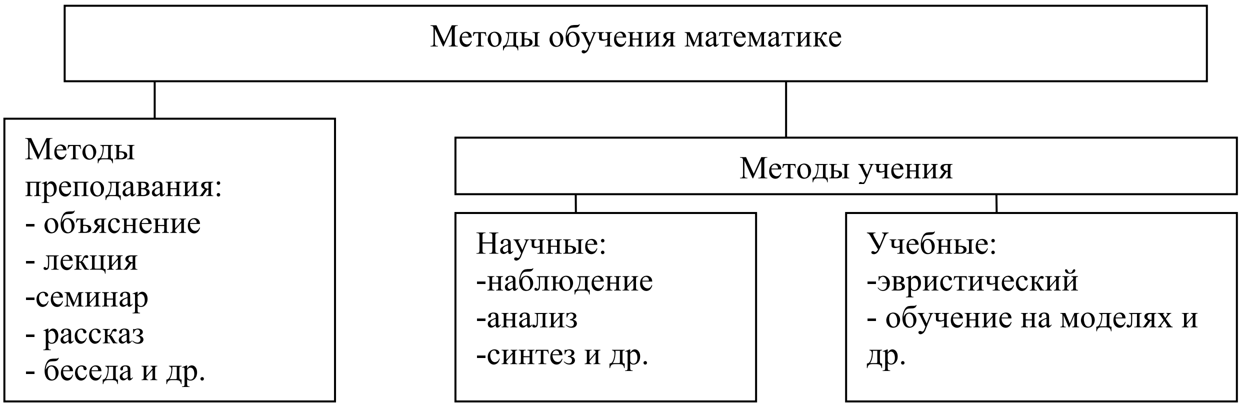


Рис. 3. Методы обучения математике

Основными методами математического исследования являются: наблюдение и опыт; сравнение; анализ и синтез; обобщение и специализация; абстрагирование и конкретизация.

Современные методы обучения математике: проблемный (перспективный) метод; лабораторный метод; метод программированного обучения; эвристический метод; метод построения математических моделей, аксиоматический метод и др.

Рассмотрим классификацию методов обучения (рис. 4).

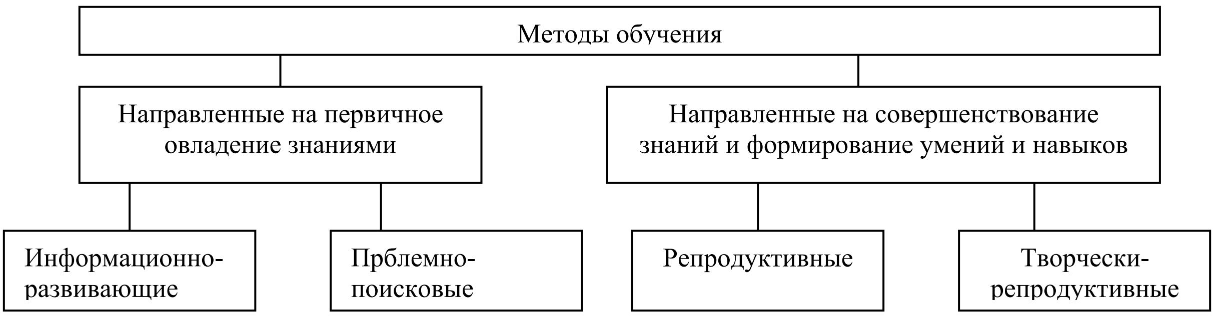


Рис. 4. Классификация методов обучения

Информационно-развивающие методы обучения разделяются на два класса:

а) передача информации в готовом виде (лекция, объяснение, демонстрация учебных кинофильмов и видеофильмов, слушание магнитозаписей и др.);

б) самостоятельное добывание знаний (самостоятельная работа с книгой, самостоятельная работа с обучающей программой, самостоятельная работа с информационными базами данных - использование информационных технологий).

К проблемно-поисковым методам относятся: проблемное изложение учебного материала (эвристическая беседа), учебная дискуссия, лабораторная поисковая работа (предшествующая изучению материала), организация коллективной мыслительной деятельности (КМД) в работе малыми группами, организационно-деятельностная игра, исследовательская работа.

Репродуктивные методы: пересказ учебного материала, выполнение упражнения по образцу, лабораторная работа по инструкции, упражнения на тренажерах.

Творчески-репродуктивные методы: сочинение, вариативные упражнения, анализ производственных ситуаций, деловые игры и другие виды имитации профессиональной деятельности.

Составной частью методов обучения являются **приемы** учебной деятельности учителя и учащихся (М.И. Махмутов). **Методические приемы** - действия, способы работы, направленные на решение конкретной задачи. За приемами учебной работы скрыты приемы умственной деятельности (анализ и синтез, сравнение и обобщение, доказательство, абстрагирование, конкретизация, выявление существенного, формулирование выводов, понятий, приемы воображения и запоминания).

Методы обучения постоянно дополняются современными методами обучения, главным образом ориентированными на обучение не готовым знаниям, а деятельности по самостоятельному приобретению новых знаний, т.е. познавательной деятельностью.

Специальные методы обучения - это адаптированные для обучения основные методы познания, применяемые в самой математике, характерные для математики методы изучения действительности (построение математических моделей, способы абстрагирования, используемые при построении таких моделей, аксиоматический метод).

3. Проблемное обучение. Если человека постоянно приучать усваивать знания и умения в готовом виде, то можно таким образом «разучить» его думать самостоятельно.

Проблемное обучение – это дидактическая система, основанная на закономерностях творческого усвоения знаний и способов деятельности, включающая сочетание приемов и методов преподавания и учения, которым присущи основные черты научного поиска (Д.В. Чернилевкий).

Проблемный метод обучения - обучение, протекающее в виде снятия (разрешения) последовательно создаваемых в учебных целях проблемных ситуаций.

Под **проблемной ситуацией** понимают осознанное затруднение, порождаемое несоответствием между имеющимися знаниями и теми знаниями, которые необходимы для решения предложенной задачи.

Задача, создающая проблемную ситуацию, называется **проблемной задачей**, или просто **проблемой**. Признаками проблемы являются:

1) порождение проблемной ситуации;

2) определенная готовность и определенный интерес решающего к поиску решения;
3) возможность неоднозначного пути решения, обусловливающая наличие различных направлений поиска.

Проблема должна быть доступной пониманию учащихся, а ее формулировка должна вызывать интерес и желание учащихся ее разрешить.

Следует различать проблемную задачу и проблему. Проблема шире, она распадается на последовательность или разветвленную совокупность проблемных задач. Таким образом, проблемную задачу можно рассматривать как простейший, частный случай проблемы, состоящей из одной задачи. Например, можно поставить проблему изучения ромба. Одна из проблемных задач, входящих в эту учебную задачу, состоит в открытии свойства диагоналей ромба.

Проблемное обучение ориентировано на формирование и развитие способности учащихся к творческой деятельности и потребности в ней. В осуществлении проблемного обучения целесообразно начинать с проблемных задач, подготавливая этим самым почву для постановки учебных задач.

Существует три основных типа учебных проблем:

Проблема математизации, математического описания, перевода на язык математики ситуаций и задач, возникающих вне математики или внутри математики, т.е. проблема построения математических моделей.

Проблема исследования различных классов моделей, результатом решения проблем этого типа является дальнейшее развитие системы теоретических знаний путем включения в нее новых “маленьких теорий”.

Проблема применения новых теоретических знаний в новых ситуациях, перенос математических знаний на изучение новых объектов.

Рассмотрим деятельность учителя и учащихся в условиях применения проблемного метода в обучении математике:

Деятельность учителя	Деятельность учащихся
1. Создает проблемную ситуацию.	1.Осознает противоречия в изучаемом явлении.
2. Организует размышление над проблемой и ее формулировкой.	2. Формулирует проблему.
3. Организует поиск гипотезы - предположительного объяснения обнаруженных противоречий.	3. Выдвигает гипотезы, объясняющие явления.
4. Организует проверку гипотезы.	4. Проверяет гипотезу в эксперименте, решении задач.
5. Организует обобщение результатов и применение полученных знаний.	5.Анализирует результаты, делает выводы, применяет полученные знания.

Проблемное обучение имеет следующую структуру:

- Актуализация изученного материала.

- Создание проблемной ситуации.
- Постановка учебной проблемы.
- Построение проблемной задачи.
- Поиск и решение проблемы (формулирование гипотезы, доказательство гипотезы, анализ подходов, обобщение).
- Проверка решения проблемы. Исследование. Анализ результатов поиска.

Проблемное обучение - обучение, при котором учитель не сообщает учащимся готовых знаний, а организует учащихся на их поиск. Математические понятия, закономерности, теории излагаются в ходе поиска, наблюдения и анализа.

Проблемное обучение реализуется успешно лишь при определенном стиле общения между учителем и учащимися, когда возможна свобода выбора выражения своих мыслей, когда диалог между учителем и учащимися осуществляется в доброжелательной обстановке.

Проблемность является неотъемлемой чертой педагогического процесса, однако, не всякое занятие можно назвать проблемных. Все зависит от того, каков объем методов и организационных форм, свойственных проблемному обучению, используется на занятии.

Под проблемным обучением обычно понимают обучение, протекающее в виде снятия (разрешения) последовательно создаваемых в учебных целях проблемных ситуаций. Что же такое проблемная ситуация?

С психологической точки зрения проблемная ситуация представляет собой более или менее явно осознанное затруднение, порождаемое несоответствием, несогласованностью между имеющимися знаниями и теми, которые необходимы для решения возникшей или предложенной задачи.

Задача, создающая проблемную ситуацию, и называется проблемной задачей, или просто проблемой.

Сказанное относится и к науке, и к обучению, названному проблемным и имитирующему в какой-то мере процесс развития научных знаний путем разрешения проблемных ситуаций. Нередко задача, которая является проблемной при изучении школьного курса математики (учебной проблемой), когда-то возникала как научная проблема.

В качестве психологической основы проблемного обучения обычно называют сформулированный С. Л. Рубинштейном тезис: "Мышление начинается с проблемной ситуации".

Осознание характера затруднения, недостаточности имеющихся знаний раскрывает пути его преодоления, состоящие в поиске новых знаний, новых способов действий, а поиск - компонент процесса творческого мышления. Без такого осознания не возникает потребности в поиске, а следовательно, нет и творческого мышления. Таким образом, не всякое затруднение вызывает проблемную ситуацию. Оно должно порождаться недостаточностью имеющихся знаний, и эта недостаточность должна быть осознана учащимися. Однако и не всякая проблемная ситуация порождает процесс мышления. Он не возникает, в частности, когда поиск путей разрешения проблемной ситуации непосилен для учащихся на данном этапе обучения в связи с их неподготовленностью к необходимой деятельности. Это чрезвычайно важно учесть, чтобы не включать в учебный процесс непосильных задач, способствующих не развитию самостоятельного мышления, а отвращению от него и ослаблению веры в свои силы.

Какую же задачу можно считать проблемной для учащихся определенного класса, каковы признаки проблемы? Признаками проблемы являются:

1) порождение проблемной ситуации (в науке или в процессе обучения),
2) определенная готовность и определенный интерес решающего к поиску решения и
3) возможность неоднозначного пути решения, обусловливающая наличие различных направлений поиска.

Совершенно очевидно, что эти признаки носят прагматический характер, т. е. они отражают отношение между задачей и теми, кому она предложена. Не имеет смысла ставить вопрос, например: "Является ли задача "Решить уравнение $x^2-5x-4=0$" проблемной?" - безотносительно к тому, кому она предложена. Вопрос неопределенный, так как на него нельзя однозначно ответить. Если эта задача предложена учащимся до того, как они изучили теорию квадратных уравнений и знают формулу корней, она для них несомненно проблема, создает у них проблемную ситуацию, так как имеющиеся у них знания недостаточны для ее решения. Если же эта задача предложена учащимся, уже владеющим соответствующим алгоритмом, то, естественно, для них она не является проблемой.

В связи с проблемным обучением употребляют обычно два термина: "проблема" и "проблемная задача". Иногда они понимаются как синонимы, чаще же объекты, обозначаемые этими терминами, отличают по объему. Проблема распадается на последовательность (или разветвленную совокупность) проблемных задач. Таким образом, проблемную задачу можно рассматривать как простейший, частный случай проблемы, состоящей из одной задачи.

Например, можно поставить проблему изучения трапеции. Одна из проблемных задач, входящих в эту учебную проблему, состоит в открытии (а точнее, переоткрытии) свойства средней линии трапеции. Можно поставить проблему изучения некоторой новой функции. Одна из проблемных задач, входящих в состав этой проблемы, состоит в определении промежутков возрастания, убывания этой функции. Другая задача - выяснение наличия экстремумов и т. д. В осуществлении проблемного обучения естественно начинать с проблемных задач, подготавливая этим самым почву и для постановки учебных проблем.

Проблемное обучение ориентировано на формирование и развитие способности к творческой деятельности и потребности в ней, т. е. оно более интенсивно, чем непроблемное обучение, влияет на развитие творческого мышления учащихся. Но чтобы эта функция проблемного обучения наилучшим образом была реализована, недостаточно включить в процесс обучения случайную совокупность проблем. Система проблем должна охватывать основные типы проблем, свойственных данной области знаний, хотя может и не ограничиваться ими. Какие же типы проблем свойственны математике и могут быть включены (разумеется, на соответствующем уровне) в проблемное обучение математике?

Исследования математике охватывают большое разнообразие типов проблем. Одни проблемы возникают внутри математики и связаны с дальнейшим развитием или внутренним строением математических теорий, другие же возникают вне математики и связаны с ее приложениями в различных областях знаний. Часто именно предъявляемые математике извне новые задачи обусловливают дальнейшее развитие математических теорий или создание новых теорий. Это обстоятельство является важнейшим при отборе основных типов проблем для обучения математике. Мы должны исходить из реальных ситуаций и задач, возникающих как в самой математике, так и вне математики, чтобы ими мотивировать необходимость дальнейшего развития математических знаний. В последнем случае подобные исследования часто начинаются с поиска математического языка для описания рассматриваемой ситуации, изучаемого объекта, построения его математической модели. Построенная модель подлежит затем исследованию с помощью соответствующей теории (если она уже построена). Или для этой цели необходимо дальнейшее развитие теоретических знаний, построение теории изучаемого объекта. И наконец, построенная теория с помощью различных интерпретаций применяется к новым объектам.

Таким образом, можно указать по крайней мере три основных типа учебных проблем, приближающих, уподобляющих процесс обучения математике процессу исследования в математике.

Это, во-первых, проблема математизации, математического описания, перевода на язык математики ситуаций и задач, возникающих вне математики (в различных областях знаний, техники, производства) или внутри математики (например, перевод геометрической ситуации на язык алгебры или обратно). В самом общем виде ее можно назвать проблемой построения математических моделей.

Второй основной тип проблем состоит в исследовании результата решения проблем первого типа, это проблема исследования различных классов моделей. Результатом решения проблем этого типа является дальнейшее развитие системы теоретических знаний путем включения в нее новых "маленьких теорий".

Третий основной тип проблем связан с применением новых теоретических знаний, полученных в результате решения проблем второго типа, в новых ситуациях, существенно отличающихся от тех, в которых приобретены эти знания. Результатом решения проблем этого типа является перенос математических знаний на изучение новых объектов.

Таким образом, три основных типа проблем выполняют различные функции: решение проблем первого типа дает новые знания; решение проблем второго типа приводит эти знания в систему; решение проблем третьего типа раскрывает новые возможности применения этой .системы знаний.

Несмотря на совершенно явные достоинства проблемного обучения перед непроблемным, ни на каком этапе школьное обучение не может строиться целиком как проблемное. Для этого потребовалось бы много времени, намного больше, чем возможно выделить на обучение математике. Более того, переоткрытие всего программного содержания в процессе обучения привело бы к обеднению этого процесса (например, в выработке навыков самостоятельной работы с книгой, усвоения лекций и др.).

Поэтому возникает педагогическая проблема отбора фрагментов школьного курса математики (отдельных разделов, тем, пунктов) для осуществления проблемного обучения. Этот отбор требует проведения логикодидактического анализа учебного материала, выяснения возможности постановки основных или других типов проблем, их эффективности в достижении целей обучения. Во многом это зависит и от конкретных условий работы в том или ином классе.

Изложение учебного материала в учебниках редко приспособлено для проблемного обучения. Но учебные тексты могут быть легко переработаны для осуществления такого обучения.

К методам проблемного обучения относятся: исследовательский метод, эвристический метод и метод проблемного изложения.

Исследовательский метод. Центральное место в проблемном обучении занимает исследовательский метод. Этот метод предполагает построение процесса обучения наподобие процесса научного исследования, осуществление основных этапов исследовательского процесса, разумеется, в упрощенной, доступной учащимся форме: выявление неизвестных (неясных) фактов, подлежащих исследованию (ядро проблемы); уточнение и формулировка проблемы; выдвижение гипотез; составление плана исследования; осуществление исследовательского плана, исследование неизвестных фактов и их связей с другими, проверка выдвинутых гипотез; формулировка результата; оценка значимости полученного нового знания, возможностей его применения.

Важная особенность исследовательского метода состоит в том, что в процессе решения одних проблем постоянно возникают новые.

Исследовательский метод в обучении, однако, лишь в какой-то мере имитирует процесс научного исследования. Учебное исследование отличается от научного некоторыми существенными особенностями.

Во-первых, учебная проблема, т. е. то, что исследуется в процессе проблемного обучения, и та истина, которую учащиеся открывают, для науки не являются новыми. Но они новы для учащихся, а открывая для себя то, что в науке давно открыто, учащиеся на этом этапе своей учебной деятельности мыслят как первооткрыватели. Поэтому применение исследовательского метода в обучении относят к дидактике "переоткрытия" (учащиеся приводятся к самостоятельному "переоткрытию" того, что в науке уже давно открыто).

Во-вторых, стимулы учащихся к проведению исследования отличны от стимулов, побуждающих ученого к исследованию. Учебное исследование ведется учащимися под руководством, с личным участием и с помощью учителя. Эта помощь должна быть такой, чтобы учащиеся считали, что они самостоятельно достигли цели.

Д. Пойа различает внутренние и внешние подсказки. Первые таковы, что они как будто извлекают у учащихся их собственные мысли, вторые (более грубые) подсказки оставляют учащимся лишь выполнение технической работы, снимая потребность поиска. Естественно, что руководство поиском учащихся требует хорошей методической подготовки, разработки для каждого планируемого учебного исследования соответствующей системы вопросов и указаний (подсказок), "подталкивающих" учащихся по направлению поиска.

В-третьих, как и всякий другой метод обучения, исследовательский метод не является универсальным методом обучения. В младших и средних классах школы в деятельность учащихся могут включаться лишь отдельные элементы исследований. Это является подготовкой для применения в старших классах исследовательского метода в более развитой и сложной форме. Но и на этом этапе обучения этот метод может применяться лишь для изучения отдельных тем, вопросов. Для того чтобы знания учащихся были результатом их собственных поисков, управляемых учителем, их самостоятельной познавательной деятельности, необходимо организовать эти поиски, развивать познавательную деятельность учащихся, что, несомненно, более сложно и требует методической подготовки более высокого уровня, чем объяснение изложенного в школьном учебнике материала и требование его заучивания учащимися.

Для того чтобы учитель мог организовать процесс обучения, подобно процессу исследования, создавать педагогические ситуации, стимулирующие их открытия, управлять творческим поиском учащихся, он должен иметь некоторый собственный опыт исследовательской работы, хотя бы на уровне учебных исследований, иметь на своем собственном счету немало "открытий" (пусть и маленьких открытий для себя). Выражаясь словами Д. Пойа, учитель должен сам почувствовать "напряженность поиска и радость открытия", чтобы он мог вызвать их у своих учеников. Нельзя пренебречь в обучении этими эмоциональными факторами. Учащийся, испытавший радость открытия, смело идет на поиск решения новых задач. Он уже знает, что его ожидает, что напряженность поиска сменяется радостью открытия.

Нетрудно заметить в этом большое воспитательное и развивающее значение исследовательского метода.

1) Иногда текст учебника подсказывает возможность применения исследовательского метода.

2) Такой подход наряду с несомненными достоинствами требует чрезмерно большого времени. Хотя это дополнительное время окупается эффективностью развития творческого мышления учащихся, когда этого времени нет, естественно ограничиться применением исследовательского метода к отдельным темам, наиболее подходящим для этой цели. При такой методике и в тех случаях, когда некоторые темы будут изучаться непосредственно по учебнику, без предварительного исследования, учащиеся будут смотреть и на этот изложенный в учебнике материал как на результат некоторых исследований (проведенных другими), что будет положительно влиять на уровень его усвоения.

Фактор времени часто вынуждает применять в обучении методы, являющиеся лишь частично исследовательскими.

Метод проблемного изложения. Если учитель не излагает готовые научные истины (формулировки теорем, их доказательства и т. п.), а в какой-то мере воспроизводит путь открытия этих знаний, то такой метод называют проблемным изложением. По существу учитель раскрывает перед учащимися путь исследования, поиска и открытия новых знаний, готовя их тем самым к самостоятельному поиску в дальнейшем.

Проблемное изложение, как и исследовательский метод, предъявляет высокие требования к научной подготовке учителя. Он должен не только свободно владеть учебным материалом, но и знать, какими путями шла наука, открывая свои истины. (В этом плане большую помощь окажут учителю переведенные на русский язык книги Д. Пойа "Математика и правдоподобные рассуждения", "Математическое открытие".)

Как будет видно далее, проблемное изложение подготавливает базу для применения эвристического метода, а эвристический метод - для применения исследовательского метода.

Необходимо отметить особую значимость методов проблемного обучения в воспитательном отношении: они формируют и развивают творческую познавательную деятельность учащихся, способствуют правильному уяснению мировоззренческих проблем.

Эвристический метод обучения математике. Эвристика - молодая научная дисциплина, возникшая на стыке таких наук, как философия, кибернетика, психология и педагогика. Специалисты каждой из этих наук рассматривают эвристику со своих позиций, придают своеобразное толкование ее основным понятиям и положениям.

Так, кибернетики считают, что эвристика - методы и способы, связанные с улучшением эффективности системы (человека или машины), решающей задачи. Психологи считают эвристику разделом психологии, изучающим творческое мышление. Педагоги считают эвристикой науку о средствах и методах решения задач. Философы термин "эвристический" приписывают таким правилам или утверждениям, которые способствуют открытию нового.

В последние годы к эвристике относят и те исследования представителей кибернетики, которые пытаются моделировать высшие проявления интеллекта. Уже и сейчас проблемы эвристики разрабатываются инженерами и математиками, психологами и физиологами, педагогами и организаторами производства. Все же основой эвристики является психология, особенно тот ее раздел, который получил название психологии творческого, или продуктивного, мышления.

Эвристическая деятельность или эвристические процессы, хотя и включают в себя умственные операции в качестве важного своего компонента, вместе с тем обладают некоторой спецификой. Именно поэтому эвристическую деятельность следует рассматривать как такую разновидность человеческого мышления, которая создает новую систему действий или открывает неизвестные ранее закономерности окружающих человека объектов (или объектов изучаемой науки).

Попытки проникнуть в механизм этого процесса, раскрыть его закономерности предпринимали и предпринимают многие исследователи в различных отраслях науки.

В эвристике, как молодой, развивающейся науке, не все понятия достаточно четко определены. Это прежде всего относится к понятию "эвристический метод". Многие исследователи понимают под ним определенный эффективный, но недостаточно надежный способ решения задач. Он позволяет ограничивать перебор вариантов решения, т. е. сокращать число вариантов, изучаемых перед тем, как выбрать окончательное решение. Понятно, что это определение понятия "эвристический метод" не может быть признано удовлетворительным, так как в нем представлена лишь внешняя характеристика явления, но не раскрыты существенные его черты.

Чтобы раскрыть существо этого понятия, необходимо иметь в виду, что сам термин "эвристический" применим к явлениям двоякого рода. Во-первых, можно рассмотреть как эвристическую такую деятельность человека, которая приводит к решению сложной, нестандартной задачи, во-вторых, эвристическими можно считать и специфические приемы, которые человек сформировал у себя в ходе решения одних задач и более или менее сознательно переносит на решение других задач.

Эвристические приемы как готовые схемы действия составляют объект эвристической логики, а реальный процесс эвристической деятельности - объект психологии. Но если эвристические приемы могут быть представлены в виде определенной логической схемы, т. е. могут быть описаны математическим языком, то эвристическая деятельность на современном этапе развития науки не имеет своего математического выражения.

Начало применения эвристического метода как метода обучения - математике можно найти еще в книге известного французского педагога -

математика Лезана "Развитие математической инициативы". В этой книге эвристический метод не имеет еще современного названия и выступает в виде советов учителю. Вот некоторые из них:

Основной принцип преподавания - "сохранять видимость игры, уважать свободу ребенка, поддерживая иллюзию (если есть таковая) его собственного открытия истины"; "избегать в первоначальном воспитании ребенка опасного искуса злоупотреблением упражнениями памяти", ибо это убивает его врожденные качества; обучать, опираясь на интерес к изучаемому.

Лезан приводит множество примеров, наглядно показывая, как сделать обучение математике более эффективным, опираясь на явную заинтересованность учащихся процессом обучения.

Эвристический метод обучения рассматривался в русской школе с начала XIX в. Многие русские педагоги-математики того времени не раз пересматривали традиционные методы обучения, представлявшиеся им устаревшими, не отвечающими основным задачам математического образования.

На необходимость пересмотра традиционной программы обучения в русской школе указывал, в частности, известный педагог-математик С. И. Шохор-Троцкий. В книге "Геометрия на задачах" он писал, что нельзя излагать учащихся данный раздел математики в совершенно готовом виде. Поступать так - значит идти вразрез с основными принципами обучения и воспитания. В частности, он указывал, что "занятия геометрией могут быть для ученика занимательны только тогда, когда они требуют от него посильного и планомерного труда... требуют умственной работы, а не заучивания слов на память".

Известный методист-математик В. М. Брадис определяет эвристический метод следующим образом: "Эвристическим называется такой метод обучения, когда руководитель не сообщает учащимся готовых, подлежащих усвоению сведений, а подводит учащихся к самостоятельному переоткрытию соответствующих предложений и правил"

Определение эвристического метода преподавания дается также В. В. Репьевым. Только название метода здесь звучит несколько иначе - эвристическая беседа. "... Этот метод состоит в том, что учитель ставит перед классом проблему (теорему, задачу), а затем путем целесообразных вопросов приводит учащихся к решению проблемы".

Но суть этих определений одна - самостоятельный, планируемый лишь в общих чертах поиск решения поставленной проблемы.

Роль эвристической деятельности в науке и в практике обучения математике подробно освещается в книгах американского математика Д. Пойа. В книге "Как решать задачу". Д. Пойа пытается охарактеризовать эвристику как специальную отрасль знания. Цель эвристики - исследовать правила и методы, ведущие к открытиям и изобретениям. Интересно, что основным методом, с помощью которого можно изучить структуру творческого мыслительного процесса, является, по его мнению, исследование личного опыта в решении задач и наблюдение за тем, как решают задачи другие. Автор пытается вывести некоторые правила, следуя которым можно прийти к открытиям, не анализируя той психической деятельности, в отношении которой предлагаются эти правила. "Первое правило - надо иметь способности, а наряду с ними удачу. Второе правило - стойко держаться и не отступать, пока не появится счастливая идея". Интересна приводимая в конце книги схема решения задач. Схема указывает, в какой последовательности нужно совершать действия, чтобы добиться успеха. Она включает четыре этапа:

1. Понимание постановки задачи.
2. Составление плана решения.
3. Осуществление плана.
4. Взгляд назад (изучение полученного решения).

В ходе выполнения этих этапов решающий задачу должен ответить на следующие вопросы: Что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие? Не встречалась ли мне раньше эта задача, хотя бы в несколько другой форме? Есть ли какая-нибудь родственная данной задача? Нельзя ли воспользоваться ею?

Нетрудно видеть, что эта схема подчеркивает главным образом один принцип эвристической деятельности: использование в том или ином виде прошлого опыта. Но этот принцип не может считаться единственным в структуре творческой мыслительной деятельности. Понятно, что многие весьма важные компоненты продуктивного мышления в работах Д. Пойа и не могут выступить с должной отчетливостью, так как речь у него идет об учебных, а не о чисто творческих задачах.

Близка точке зрения Д. Пойа та характеристика эвристической деятельности, которая дается известным американским психологом Д. Брунером в его книге "Процесс обучения". Эвристические приемы характеризуются Д. Брунером как некоторые не вполне точные способы решения задач, с помощью которых можно прийти, а можно и не прийти к нужному результату. У Брунера понятие "эвристический" служит для характеристики лишь приемов, помогающих решать задачу, как и у Д. Пойа. Д. Брунер не исследует эвристическую деятельность человека как процесс, приводящий к формированию приемов или схемы действий. Между тем обучение деятельности - это значительно более сложная и вместе с тем гораздо более важная проблема, чем обучение готовым, сложившимся приемам решения задач.

Весьма интересна с точки зрения применения эвристического метода в школе книга американского педагога У. Сойера "Прелюдия к математике".

"Для всех математиков, - пишет Сойер, - характерна дерзость ума. Математик не любит, когда ему о чем-нибудь рассказывают, он сам хочет дойти до всего"

Эта "дерзость ума", по словам Сойера, особенно сильно проявляется у детей.

"Если вы, например, преподаете геометрию 9-10-летним ребятам, - говорит Сойер, - и рассказываете, что никто еще не смог разделить угол на три равные части при помощи линейки и циркуля, вы непременно увидите, что один-два мальчика останутся после уроков и будут пытаться найти решение. То обстоятельство, что в течение 2000 лет никто не решил эту задачу, не помешает им надеяться, что они смогут это сделать в течение часового перерыва на обед. Это, конечно, не очень скромно, но и не свидетельствует об их самонадеянности. Они просто готовы принять любой вызов. А ведь в действительности уже доказано, что невозможно разделить угол на три равные части при помощи линейки и циркуля. Их попытка найти решение - того же рода, что попытка представить "корень из двух" в виде рациональной дроби p/q

Хороший ученик всегда старается забежать вперед. Если вы ему объясните, как решать квадратное уравнение дополнением до полного квадрата, он непременно захочет узнать, можно ли решить кубическое уравнение дополнением до полного куба. Вот это желание исследовать является отличительной **чертой** математика. Это одна из сил, содействующих росту математика. Математик получает удовольствие от знаний, которыми он **уже овладел**, и всегда стремится к новым знаниям".

Другим необходимым качеством математика является интерес к закономерностям. Закономерность - это наиболее стабильная характеристика постоянно меняющегося мира. Сегодняшний день не может быть похожим на вчерашний. Нельзя увидеть дважды одно и то же лицо под одним и тем же углом зрения. Закономерности встречаются уже в самом начале арифметики. В таблице умножения имеется немало элементарных примеров закономерностей. Вот один из них. Обычно дети любят умножать на 2 и на 5, потому что последние цифры ответа легко запомнить: при умножении на 2 всегда получаются четные числа, а при умножении на 5, еще проще, всегда 0 или 5. Но даже в умножении на 7 есть свои закономерности. Если мы посмотрим последние цифры произведений 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, т.е. на 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0, то увидим, что разность между последующей и предыдущей цифрами составляет:-3; +7;-3;-3; +7; -3; -3, -3. В этом ряду чувствуется совершенно определенный ритм.

Если прочесть конечные цифры ответов при умножении на 7 в обратном порядке, то мы получаем конечные цифры от умножения на 3. Даже в начальной школе можно развить навык наблюдения за математическими закономерностями.

В книге "Прелюдия к математике" Сойер приводит много примеров наблюдений закономерностей и в арифметике, и в алгебре, и в геометрии. Итак. одним из основных методов, который позволяет учащимся проявить творческую активность в процессе обучения математике, является эвристический метод. Грубо говоря, этот метод состоит в том, что учитель ставит перед классом некоторую учебную проблему, а затем путем последовательно поставленных заданий "наводит" учащихся на самостоятельное обнаружение того или иного математического факта. Учащиеся постепенно, шаг за шагом, преодолевают трудности в решении поставленной проблемы и "открывают" сами ее решение.

Известно, что в процессе изучения математики учащиеся часто сталкиваются с различными трудностями. Однако в обучении, построенном эвристически, эти трудности часто становятся своеобразным стимулом для изучения. Так, например, если у учащихся обнаруживается недостаточный запас знаний для решения какой-либо задачи или доказательства теоремы, то они сами стремятся восполнить этот пробел, самостоятельно "открывая" то или иное свойство и тем самым сразу обнаруживая полезность его изучения. В этом случае роль учителя сводится к тому, чтобы организовать и направить работу учащегося, чтобы трудности, которые учащийся преодолевает, были ему по силам. Нередко эвристический метод выступает в практике обучения в форме так называемой эвристической беседы. Опыт многих учителей, широко применяющих эвристический метод, показал, что он влияет на отношение учащихся к учебной деятельности. Приобретя "вкус" к эвристике, учащиеся начинают расценивать работу по "готовым указаниям", как работу неинтересную и скучную. Наиболее значимыми моментами их учебной деятельности на уроке и в домашних условиях становятся самостоятельные "открытия" того или иного способа решения задачи. Явно возрастает интерес учащихся к тем видам работ, в которых находят применение эвристические методы и приемы.

Современные экспериментальные исследования свидетельствуют о полезности широкого использования эвристического метода при изучении математики учащимися средней школы, начиная уже с начального школьного возраста. Естественно, что в таком случае перед учащимися можно поставить только те учебные проблемы, которые могут быть поняты и разрешены учащимися на данном этапе обучения.

К сожалению, на частое применение эвристического метода в процессе обучения поставленных учебных проблем требуется гораздо больше учебного времени, чем на изучение этого же вопроса методом сообщения учителем готового решения (доказательства, результата). Поэтому учитель не может использовать эвристический метод преподавания на каждом уроке. К тому же длительное использование только одного (даже весьма эффективного метода) противопоказано в обучении. Однако следует отметить, что "время, затраченное на фундаментальные вопросы, проработанные с личным участием учащихся, - не потерянное время: новые знания приобретаются почти без затраты усилий благодаря ранее полученному глубокому мыслительному опыту".

Проблемное обучение имеет свои преимущества и недостатки.

В качестве преимуществ можно отметить: развитие мыслительной деятельности учащихся; развитие математических способностей; формирование интереса к учению; воспитание активности в обучении; формирование творческого начала.

Существенным недостатком применяемого метода в обучении является необходимость больших временных затрат, а также необходимость специальной методической подготовки учителя.

4. Программированное обучение.

Программированное обучение - это такое обучение, когда решение задачи представлено в виде строгой последовательности элементарных операций, в “обучающих программах” изучаемый материал подается в форме строгой последовательности кадров, каждый из которых содержит, как правило, порцию нового материала и контрольный вопрос или задание.

Программированное обучение возникло в начале 50-х годов XX в., когда американский психолог Б. Скиннер предложил повысить эффективность управления усвоением учебного материала, построив его как последовательную программу подачи порций информации и их контроля. Впоследствии Н.Краудер разработал разветвленные программы, которые в зависимости от результатов контроля предлагали ученику различный материал для самостоятельной работы. Предполагалось, что это позволит учитывать индивидуальные данные обучаемого, а на основе научно разработанной программы повысится общая эффективность обучения.

Программированное обучение предусматривает:

1) правильный отбор и разбиение учебного материала на небольшие порции;

2) частый контроль знаний;

3) переход к следующей порции лишь после ознакомления учащегося с правильным ответом или характером допущенной им ошибки;

4) обеспечение возможности каждому учащемуся работать со свойственной ему, индивидуальной скоростью усвоения, что является необходимым условием активной самостоятельной деятельности учащегося по усвоению учебного материала.

В эпоху компьютеризации программированное обучение осуществляется с помощью “обучающих программ”, которые определяют не только содержание, но и процесс обучения. Существуют две различные системы программирования учебного материала - “линейная” и “разветвленная” программы с элементами “циклической”, отличающиеся друг от друга некоторыми важными исходными предпосылками и структурой. Сравнивая две системы программирования учебного материала, можно отметить, что при линейном программировании учащийся самостоятельно формулирует ответы на контрольные вопросы, при разветвленном он лишь выбирает один из нескольких готовых ответов. В этом преимущество линейной программы.

С другой стороны, разветвленная программа составляется с учетом возможных ошибочных ответов учащихся и с этой точки зрения она ближе к реальному процессу обучения. В разветвленной программе особо важно то, что различных учащихся она ведет к усвоению нового материала различными путями с учетом их возможностей и потребностей в дополнительных разъяснениях и указаниях. Один учащийся продвигается прямо от одной порции нового материала к следующей, другой же пользуется дополнительными объяснениями, разъяснениями его ошибочных ответов, отражающих непонимание учебного материала. В результате и получается, что разные учащиеся продвигаются в усвоении изучаемого материала с различными индивидуальными скоростями. Именно эти индивидуальные скорости усвоения, учитываемые при программированном обучении, не учитываются при непрограммированном обучении, а учет индивидуальной скорости усвоения обеспечивает осуществление принципа индивидуального подхода в обучении.

Программированное обучение может осуществляться с применением так называемых обучающих машин или в виде безмашинного обучения, использующего программированные учебники.

Основной недостаток безмашинного программированного обучения состоит в его громоздкости, однообразии. Кроме того, имея возможность свободно листать программированный учебник, некоторые учащиеся будут нарушать инструкцию и читать страницы не в том порядке, которые соответствуют выбранному ответу (если учебник составлен по разветвленной программе), или могут подсмотреть ответ до того, как сами его сформулировали (если учебник составлен по линейной программе). Практика показала, что безмашинное программированное обучение воспринимается лишь весьма прилежными учащимися, которые при непрограммированном обучении показывают не худшие результаты.

Иногда программированное обучение неправильно отождествляют с машинным обучением, или обучением без учителя. В действительности же это не так. Всякие обучающие машины, в том числе и наиболее совершенные АСО, являются лишь автоматизированными системами (а не автоматическими), создаваемыми в помощь, а не взамен учителю.

Программированное обучение содержит ряд достоинств, прежде всего в осуществлении принципа индивидуального подхода, своевременной обратной связи (учащийся-учитель). Однако для его внедрения в широкую практику обучения нет ещё достаточных экспериментальных данных. Здесь еще нужна большая исследовательская работа, включая конструирование обучающих машин и АСО, составление рациональных обучающих программ. Недостаточно изучены также вопросы сочетания программированного обучения с другими методами преподавания, возможности и целесообразности применения отдельных элементов программированного обучения с целью лучшего учета индивидуальных скоростей усвоения математического материала сильными, средними и слабыми учащимися. Это особенно важно учитывать в обучении математике, где границы индивидуальных скоростей усвоения шире, чем по другим предметам, а ориентация на идеализированного среднего учащегося приводит обычно к потере интереса к предмету у одних и к неуспеваемости других.

Всестороннее исследование названных и других вопросов может сделать программированное обучение полезным и применимым в широкой практике обучения.

Рассмотрим деятельность учителя и учащихся в условиях применения программированного метода в обучении математике:

Деятельность учителя	Деятельность учащихся
1. Предъявляет 1 дозу учебного материала.	1. Воспринимает информацию.
2. Объясняет 1 дозу материала и действия с ним.	2. Выполняет операции по усвоению 1 дозы материала.
3. Ставит контрольные вопросы.	3. Отвечает на вопросы.
4. Если ответ верный, то предъявляет 2 дозу учебного материла. В противном случае, объясняет ошибки, возвращается к 1 дозе.	4. Переходит к следующей дозе материала. Если ответ неверный, то возвращается к изучению 1 дозы.

Таким образом, программированное обучение имеет свои преимущества и недостатки. В качестве преимуществ можно отметить: дозированность учебного материала, который усваивается безошибочно, что ведет к высоким результатам обучения; усвоение выполняется индивидуально; постоянный контроль усвоения; возможность использования технических автоматизированных устройств обучения.

Существенными недостатками применения этого метода являются следующие: не всякий учебный материал поддается программированной обработке; этот метод ограничивает умственное развитие учащихся репродуктивными операциями; при использовании этого метода наблюдается дефицит общения с учителем и учащимися; отсутствует эмоционально-чувственная компонента в обучении.

5. Математическое моделирование. Одним из наиболее плодотворных методов математического познания действительности является **метод построения математических моделей** изучаемых реальных объектов или объектов, уже описанных в других областях знаний с целью их глубокого изучения и решения всех возникающих в этих реальных ситуациях задач с помощью математического аппарата.

Математическая модель - это приближенное описание какого-либо класса явлений, выраженное на языке какой-нибудь математической теории (с помощью алгебраических функций или их систем, дифференциальных или интегральных уравнений или неравенств, системы геометрических предложений или других математических объектов).

Анализ математической модели позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений. Математическая модель - мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления. Процесс математического моделирования, то есть изучения явления с помощью математических моделей, можно подразделить на четыре этапа.

С помощью метода математического моделирования раскрывается двойная связь математики с реальным миром. С одной стороны, математика служит практике по изучению и освоению объектов окружающего нас реального мира, с другой - сама жизнь, практика способствует дальнейшему развитию математики и направляет это развитие.

Метод математического моделирования состоит из нескольких этапов:

1. Поиск языка и средств для перевода задачи в математическую, т.е. построение математической модели.

2. Изучение математической модели, ее исследование, расширение теоретических знаний учащихся.

3. Поиск решения математической задачи, рассмотрение различных способов решения, выбор наиболее рационального пути решения.

4. Перевод результата решения математической задачи в исходный, анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели, а в будущем - построение новой, более совершенной математической модели.

Метод математического моделирования, сводящий исследование явлений внешнего мира к математическим задачам, занимает ведущее место среди других методов исследования. Методом математического моделирования решаются многие задачи межпредметного характера. Особенно актуальным это метод стал в связи с появлением компьютеров.

6. Аксиоматический метод. Математика изучает формы и отношения, отвлекаясь от их содержания, все математические доказательства проводятся путем логического рассуждения. Но если теорема A выводится из теоремы B, а теорема B из теоремы C и т.д., то получается “бесконечное возвращение назад”. Аналогичная ситуация возникает при попытке давать определения новым понятиям, основываясь на ранее введенных понятиях. Чтобы избежать такого “бесконечного возвращения назад”, применяют **аксиоматический метод**.

Первой дошедшей до нас попыткой такого изложения математической дисциплины была книга Евклида “Начала”. Аксиоматический метод широко применяется в математике. Его можно рассматривать как метод построения теорий, как научный метод познания, как метод обучения математике.

Сущность аксиоматического метода, метода установления истинности предложений, заключается в следующем: некоторые предложения принимаются за исходные предложения (их называют аксиомами), истинность же других предложений, не входящих в список аксиом (называемых теоремами), устанавливается с помощью логического доказательства, в котором (обычно неявно) используются правила логического следования (вывода), гарантирующие истинность заключения при истинности посылок. Явное использование этих правил вывода (дедукции) превращает таким образом построенную математическую теорию в дедуктивную (аксиоматическую) систему.

Аксиоматический метод в самой математике как метод построения математических теорий дает возможность использовать его в качестве метода обучения, если в процессе обучения привлекать самих учащихся к построению “маленьких теорий”, постепенно расширяющих изучаемую теорию, в которую они включаются.

Аксиоматический метод как метод обучения служит для систематизации знаний учащихся, выяснения того, “что их чего следует”, для установления истинности предложений специфическим для математики способом, для вывода новых знаний из имеющихся.

7. Методы информатики в обучении математике. Как уже отмечалось, под влиянием информатики в педагогике появилась идея подхода к обучению как к процессу управления учебной деятельностью учащихся, к процессу обучения людей начали применять такие средства, как элементы теории алгоритмов и теории информации, вычислительную технику и автоматизацию обучения. Это привело к разработке так называемого логико-алгоритмического подхода к обучению, метода программированного обучения, компьютеризации обучения.

Математика и информатика имеют общие объекты исследования, например, алгоритмы. Для математики алгоритмы - одно из фундаментальных понятий оснований математики, а информатика ставит своей задачей разрабатывать практически удобные методы синтеза конкретных систем, в том числе и алгоритмов. Отсюда логико-алгоритмический метод или алгоритмизация обучения понимается в двух смыслах:

а) обучение учащихся алгоритмам,

б) построение и использование алгоритмов самого обучения.

I. Под алгоритмом, как известно, понимается общепринятое и однозначное предписание, определяющее процесс последовательного преобразования исходных данных в искомый результат. Точное выполнение алгоритма всегда приводит к решению любой задачи из того класса задач, для которого он составлен. В математике алгоритмов для решения задач разных классов, поэтому обучение математике на любом уровне обязательно включает обучение алгоритмам. Умение формулировать и применять алгоритмы важно не только для развития математического мышления и математических умений; оно означает также и умение вообще формулировать правила и выполнять их, что важно в любой - сфере человеческой деятельности и имеет поэтому огромное воспитателе значение.

Существует два способа обучения алгоритмам:

а) сообщение готовых алгоритмов, что является вариантом догматического метода обучения и поэтому ограничу развитие активности и творческого мышления учащихся

б) подведение учащихся к самостоятельному открытию необходимых алгоритмов, что является вариантом эвристического метода обучения и предполагает реализацию все тех же трех этапов изучения математического материала - выявление отдельных шагов алгоритма, его формулировку и применение. В обоих случаях полезно применять специальную краткую запись алгоритмов, блок-схему и другие средства, которые затем будут систематизированы в курсе информатики.

II. Второй аспект логико-алгоритмического метода состоит в построении алгоритмов обучения, т.е. в описании обучающей деятельности учителя с помощью предписаний, алгоритмического типа. Реальный процесс обучения состоит из определенных действий, с помощью которых, учитель традиционно решает определенные дидактические задачи. Например, постановка вопросов, приведение примеров, показ наглядного материала, решение упражнений и т. д. Этот процесс можно проанализировать и выявить составляющие его действия; тогда определённая часть процесса обучения определённых учащихся определенному содержанию может быть представлена в виде так называемого "алгоритма обучения" (в нашем курсе - "методическая схема")

Для построения алгоритма нужно проанализировать содержание и цели обучения, деятельность учащихся по его усвоению, деятельность учителя по организации этого усвоения. Построенный алгоритм обучения должен быть осуществим не только теоретически, но и практически, учитывать особенности учащихся данного класса. Примерами алгоритмов обучения математике могут служить: обучение доказательству теорем, обучение решению задач и другие. Алгоритмы обучения являются составной частью педагогических технологий.

Информатика занимается также созданием аппарата, удобного для выполнения преобразований алгоритмов: вместо простейшей формы представления информации в виде слов в абстрактном алфавите, конструируются сложные, структуры, необходимые для реализации алгоритмов на ЭВМ, - алгоритмические языки.

Процесс подготовки задач для решения на ЭВМ (составление алгоритма решения; его описание на языке программирования, т.е. составление программы; трансляция программы на машинный язык в виде последовательности команд, реализация которых техническими средствами ЭВМ и есть процесс решения задачи) называется программированием.

Успехи в развитии компьютерной техники привели к возрастанию роли компьютеров во всех областях жизни современного общества и сделали необратимым процесс компьютеризации обучения на основе его программирования.

Широкое внедрение компьютеров во все сферы человеческой деятельности со временем коренным образом изменит среду обитания людей. Растет количество людей, профессионально занятых сбором, накоплением, обработкой, распространением и хранением информации. Говорят, что мир сейчас стоит на пороге информационного обществе - создаются различные автоматизированные системы, функционирование которых опирается на использование всего арсенала информатики новые информационные технологии в разнообразных областях человеческой деятельности.

Компьютеризация обучения в настоящее время предполагает два направления

а) компьютер как объект изучения, что в первую очередь связано с введением в школу предмета "Основы информатики и вычислительной техники";

б) компьютер как средство обучения. Первое направление создает предпосылки для значительного повышения эффективности учебной, а затем и будущей профессиональной деятельности человека, для усиления его интеллектуальной деятельности.

Применение компьютера в обучении - это, прежде всего, средство управления учебной деятельностью учащихся: он обеспечивает индивидуализацию обучения "в массовом порядке"; помогает создать проблемную ситуацию; дает возможность учащемуся выступать в роли пользователя современной вычислительной техники получить доступ к самой различной информации, сделав ее средством деятельности; используя цвет, мультипликацию и т.п., усиливает наглядность учебного материала; способствует активизации учащихся. Другие сильные стороны компьютера: новизна работы с ним вызывает у учащихся повышенный интерес и усиливает мотивы учения; с его помощью реализуется личностная манера общения; расширяются наборы применяемых учебных задач с использованием моделирования.

Еще относительно недавно при определении места компьютера в учебном процессе сталкивались крайние взгляды: сплошная компьютеризация обучения и полный отказ от ЭВМ. Сейчас вопрос ставится иначе где, когда и как целесообразно использовать компьютер. Выделяют два типа компьютерного обучения:

а) непосредственное взаимодействие учащихся с компьютером (обучение без учителя),

б) взаимодействие учащихся с компьютером через педагога, - обычно тогда, когда нельзя снабдить компьютером каждого учащегося. В обоих, случаях необходимо учитывать, какие именно функции учителя и учащегося при этом автоматизируются и передаются компьютеру.

Н.Ф.Талызина выделяет следующие типы таких функций:

1) создание положительных мотивов изучения материала, объяснение, показ и фиксация формируемой деятельности и входящих в неё знаний,
2) организация и контроль деятельности учащихся,
3) передача машине рутинной части учебной деятельности;
4) составление и предъявление учебных заданий, соответствующих разным этапам процесса усвоения, а также индивидуальным особенностям учащегося и уровню его учебной деятельности в данный момент.

Эти функции учитываются при разработке различных типов обучающих компьютерных программ. Напомним основные из них:

1) программы, ориентированные на усвоение нового материала в режиме программированного обучения;
2) программы, реализующие проблемное обучение, учитывающие не только результат, но и стратегию изучения материала;
3) программы, предназначенные для закрепления умений и навыков (тренажеры);
4) демонстрационные и иллюстрационные программы, моделирующие и анализирующие конкретные ситуации;
5) обучающие игровые программы, получившие широкое распространение из-за своей привлекательности;
6) контролирующие программы;
7) информационные и
8) вычислительные программы, суть которых понятна из названия.

Для компьютеризации обучения (для составления обучающей программы) необходима такая трактовка метода обучения, которая допускает его пооперационное описание и тем самым его технологизацию (как программированное обучение); отсюда - "новые информационные (в частности, компьютерные) технологии обучения".

Как выразился А.П. Ершов, "…математики тоже люди и им компьютер может помогать непосредственно, как и всем остальным": он помогает провести вычислительный эксперимент с математической моделью, способствует визуализации абстракций и динамизации математических объектов, воспитанию базовых способностей и умений, систематизации математической теории, расширению математической практики, пробуждению первичного интереса.

Однако в силу специфики целей обучения математике - не столько передать информацию, сколько научить решать определенные классы задач и развивать мышление учащихся - применение компьютера здесь вызывает определённые трудности. Из различных типов обучающих программ в практике обучения используются самые простые - контролирующие, вычислительные, иллюстративные, программы-тренажёры. Имея дело, как правило, лишь с образами и результатами решения задач, эти программы используют компьютер как большой калькулятор, а математика содержит не так уж много объектов для наглядной иллюстрации. Используемые обучающие программы, как правило, в режиме программированного обучения (кроме вычислительных), не используют возможностей других методов обучения. Причины не только в особенностях математики как учебного предмета и целей его изучения, не только в проблемах материально-технического обеспечения, но больше всего в психолого-педагогических проблемах, без решения которых самые современные компьютеры при наличии мощного программного обеспечения не могут сами по себе сделать обучение математике эффективным. Многие авторитетные специалисты полагают, что создание учебного обеспечения - более сложная задача, чем разработка программного обеспечения, и её решение потребует еще немало времени и методических исследований.

С этих позиций, по-видимому, заслуживает внимание использование машинного эксперимента как метода обучения для достижения тех же целей, что и другие эмпирические методы. Вычислительный графический эксперимент в этом случае выступает как метод исследования и открытия нового средствами компьютерной технологии.

Программированное обучение называют первым "детищем" технологизации педагогического процесса и одновременно фундаментом; над которым надстраивались последующие этажи педагогической технологии. Его характерными чертами стали уточнение учебных целей и последовательная, поэлементная процедура их достижения. Последовательно "технологическое" понимание полностью разработанной программы обучения включает в себя: составление полного набора учебных целей, подбор критериев их измерения и оценки, точное описание условий обучения, конструирование учебного процесса. Технология обучения отличается от традиционной методики тем, что она выделяет виды деятельности участников педагогического процесса, последовательность их выполнения, четкое соблюдение которых и приводит к достижению поставленных целей обучения.

Проектирование обучающей системы в существующих в настоящее время технология обучения содержит три этапа: 1) подготовка учебного материала (тематическое планирование, система целей в виде планируемых результатов обучения, планируемые сроки изучения, уровни усвоения, контрольные задания для диагностики достижения целей, дидактические материалы для самостоятельной работы учащихся); 2) ориентация учащихся (ознакомление с целями обучения, которые нужно преобразовать в цели учения, создание мотивов учебной деятельности учащихся, ознакомление их, с процессуальной стороной обучения и распределением функций между, участниками учебной работы, разъяснение критериев и механизмов контроля и оценки усвоения); 3) организация хода учебного занятия, для которого характерно увеличение доли самостоятельной деятельности учащихся, максимально возможная индивидуализация, активные формы и методы обучения, постоянная обратная связь.

Обратная связь осуществляется с помощью трех видов контроля: 1) входной контроль (для информации об уровне готовности учащихся к работе над новым материалов, при необходимости - коррекция этого уровня; 2) текущий или промежуточный контроль после каждого учебного элемента (как правило, мягкий, без оценки, для выявления пробелов в усвоении: самоконтроль, взаимоконтроль, сверка с образцом); 3) итоговый контроль с оценкой, показывающий уровень усвоения.

Элементы технологизации обучения содержатся и в традиционных методиках обучения математике. Отметим некоторые из них.

Технологический подход прежде всего виден на стадии подготовки учебного материала. Во-первых, это - логико-математический анализ учебного материала (изучаемой темы), который состоит в выделении понятийного аппарата и его структуры, свойств математических понятий и их структуры, основных идей и методов изучения этих свойств. По словам Е.И. Лященко, "логико-математический анализ учебного материала - это как бы чтение школьного учебника внимательными и грамотными глазами учителя". Во-вторых, на основе этого анализа - определение целей изучения темы (о технологизации которых мы говорили выше). В-третьих, это - составление тематического плана.

В-четвертых, это - планирование урока, осуществляемое в следующей последовательности:

1) тема урока,
2) цели урока,
3) тип урока,
4) оборудование урока,
5) план урока (перечисление его этапов)
   а) ведущие методы обучения,
   б) ход урока по схеме.

Элементами технологии на стадии организации хода учебного занятия, кроме рассмотренных методов обучения, могут быть названы: общая методическая схема обучения решению математических задач, этапы работы над понятиями и теоремами, этапы применения математических методов, методика построения обучения математике через систему задач, все приемы учебной деятельности учащихся и методика формирования приемов учебной деятельности.

8. Сочетание и выбор методов обучения. Методы обучения характеризуются не только выбором источника знаний, методов познания, уровня познавательной деятельности учащихся. Они имеют многие другие существенные признаки, которые также необходимо принимать во внимание. Одни из этих признаков больше подчеркивают обучающую сторону метода, другие - воспитывающую, третьи - развивающую. В воспитании интереса к учебе большую роль играют методы познавательных игр и учебных дискуссий, использование математических софизмов, исторического материала и т. д. Как правило, методы обучения используются в сочетании друг с другом. Сочетание методов обучения дает такой метод, который характеризуется не одним каким-либо признаком, а целой их совокупностью. С точки зрения одного признака, данный метод обучения может быть, например, наглядным, с точки зрения другого,- индуктивным, с точки зрения третьего,- проблемным изложением и т. д. Умение охарактеризовать один и тот же метод обучения с точки зрения различных признаков является необходимым качеством учителя, но выработать его можно лишь постепенно, по мере накопления практического опыта, при целенаправленном подходе к анализу методов обучения.

Выскажем некоторые соображения о построении системы методов обучения по курсу (разделу, теме). Оправдать выбор отдельного, метода при изучении конкретного вопроса, или, наоборот, обосновать нецелесообразность его можно только с позиции системы методов обучения. Для того чтобы составить общее представление о системе методов обучения по отдельному предмету (разделу, теме), необходимо вести их учет. Учет применений каждого метода, соотнесение результатов анализа совокупности методов обучения с результатами обучения, воспитания и развития учащихся помогают корректировать совокупность методов обучения, совершенствовать ее - в этом и состоит естественный путь к созданию системы методов обучения. Построение системы методов обучения целесообразно вести на основе логико-дидактического анализа учебного материала. Логико-дидактический анализ начинается с выяснения структуры учебного материала (логического анализа). Анализу подвергается определение отдельного понятия, система понятий, отдельное предложение, система предложений и доказательств, весь учебный материал темы, различные варианты изложения темы. Результаты логического анализа учитываются в последующем дидактическом анализе учебного материала, в ходе которого определяется методика изучения выделенных элементов и блоков учебного материала. В процессе дидактического анализа изучаются особенности реализации дидактических принципов, возможности применения и целесообразного сочетания различных методов обучения, построения системы уроков.

Значительный вклад в разработку систем методов обучения вносят учителя-новаторы. Знакомство с их опытом крайне важно для практической подготовки студентов.

	Этапы учебного процесса	МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ	ЭТАПЫ УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ УЧАЩИМИСЯ
1	Подготовка к изучению нового материала	Повторение нужного материала: фронтальная беседа, устный опрос, математический диктант, тестирование, устный счет; все методы мотивации учебной деятельности, эмпирические методы	Актуализация опорных знаний, мотивация изучения нового материала
2	Изучение нового материала	**1.** уровень - словесные методы, в том числе, объяснительно-иллюстративный эвристическая беседа, исторический подход, методы психологии, индукция, аналогия; **2.** уровень - самостоятельная работа с учебником, частично-поисковые методы; уровень - проблемные,	Восприятие, осмысление, первичное закрепление, непроизвольное запоминание

		исследовательские, математические методы, самостоятельное решение задач	
3	Закрепление знаний и способов деятельности	**1.** уровень репродуктивные методы, наглядные методы, решение задач тренировочного характера, алгоритмический метод классификация и конкретизация изученного, текущий контроль; **2.** уровень (дополнительно) типовые (стандартные) задачи, изготовление наглядных пособий, составление задач, работа на компьютере;**3.** уровень (дополнительно) - творческие задания	Первичное обобщение, произвольное запоминание, применение знаний и способов деятельности в типичных ситуациях
4	Применение знаний и способов деятельности	уровень решение типовых и прикладных задач на применение теории в сходных ситуациях, практические и игровые методы, текущий контроль	Первичная систематизация знаний и способов деятельностьи, их перенос и применение в новых ситуациях
5	Обобщение и систематизация изученного	Методы обобщения и систематизации: словесные, наглядные, игровые, практические; обобщающие и межпредметные уроки, диспуты, коллоквиумы, семинары, деловые игры	Обобщение знаний и способов деятельности, включение их в систему
6	контроль, оценка и коррекция знаний и способов деятельности	Итоговый контроль: разноуровневые контрольные работы, тестирование, рейтинг, самооценка и взаимооценка; индивидуальная коррекция результатов, зачет, экзамен	Итоговый контроль, коррекция, оценка и самооценка

Выбор методов обучения определяется различными условиями организации учебного процесса; выделим некоторые из них.

Во-первых, это - возраст учащихся, что отмечается в стандартах по математике. В 5-6 классах для обобщения и систематизации изученного в начальной школе необходимы словесные методы обучения, а для изучения нового материала - наглядно-интуитивные, практические, индуктивные (с небольшими элементами дедукции), алгоритмический метод (в виде изучения алгоритмов и правил). В 7-9 классах, где уже возможно повышение теоретического уровня изучения систематических курсов алгебры и геометрии, необходимо сочетание логической строгости с наглядностью, теоретические обобщения и дедуктивные умозаключений, практическая направленность преподавания математики. Следовательно, это - аналитической и синтетический методы, методы логики при сохранении наглядно-практических методов. В колледжах и лицеях, наряду с методами логики, преобладают математические методы, абстрагирование, систематизация и обобщения изученного, прикладная направленность обучения математике.

Во-вторых, это - содержание изучаемого материала, что следует из его логико-математического анализа. Этот анализ показывает, какие математические идеи и методы нужно использовать для его изучения; какие математические и учебные задачи включить в систему задач и упражнений; какие методы использовать на этапах работы над определениями, теоремами, задачами; можно ли использовать сравнение или аналогию с ранее изученным материалом; есть ли примерная методическая схема изучения данной темы.

В-третьих, это - этапы усвоении знаний учащимися и соответствующие им этапы учебного процесса; в настоящее время при этом стараются учитывать и уровень усвоения знаний различными учащимися.

В-четвертых, это - достижение развивающих и воспитательных целей обучения. Мы уже отмечали, что для этого необходимо использование гуманитарных знаний, связанных с математикой, решение задач с соответствующим содержанием, различные формы учебной деятельности учащихся, нестандартные методы обучения.

9. Логико-математический анализ учебного материала - это как бы чтение школьного учебника внимательными и грамотными глазами учителя. "Читая" так учебник для определённого класса, учитель должен ответить себе на ряд вопросов:

- какие новые понятия, объекты вводятся?
- даются ли им определения?
- к какому по структуре виду определений можно отнести данное определение?
- встречались ли ранее определения с такой структурой или мы имеем дело с новой структурой?
- какие познавательные и учебные действия можно выполнять для раскрытия структуры определения и его применения?
- какой возможен содержательный материал для раскрытия всех операций и действий.

Ответы на эти вопросы позволяют сделать вывод о логической структуре определения, понятия или объекта.

Логико-дидактический анализ темы представляет последовательность действий:

- Определение цели обучения теме;
- Логический и математический анализ содержания темы (теоретического и задачного материала);
- Постановка основных учебных задач и выбор соответствующих учебно-познавательных действий;
- Отбор основных средств, методов и приёмов обучения;
- Определение форм контроля и оценки процесса и результата учебной деятельности учащихся.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое метод обучения (прием обучения)?
2. Как можно классифицировать методы обучения? Приведите примеры различных классификаций. Укажите их достоинства и недостатки.
3. Чем характеризуется рассказ как словесный метод обучения? Виды рассказа, его применение на уроках математики.
4. Чем отличается рассказ от лекции?
5. Что такое эвристическая беседа? От чего зависит эффективность беседы?
6. Какова суть метода иллюстраций и метода демонстраций?
7. Какие условия успешного применения наглядных средств обучения, Вы знаете?
8. Какие виды деятельности ученика охватывают практические методы обучения?
9. Что такое проблемное обучение?
10. Каково значение проблемного обучения в преподавании математики?
11. В чем заключается сущность проблемного подхода?
12. Что такое проблемная ситуация?
13. Какие методические условия для возникновения проблемной ситуации разработаны современной наукой?
14. Что такое проблемная задача?
15. Назовите принципы проблемного обучения.
16. Укажите недостатки проблемного обучения.
17. Что такое программированное обучение?
18. Из каких "шагов" состоит процесс программированного обучения? Из каких частей состоит каждый "шаг"?
19. На какой основе целесообразно вести построение системы методов при изучении математики?
20. Какие новые технологии обучения математике Вы знаете? Раскройте сущность каждой технологии.
21. Что такое логико-математический анализ учебного материала?
22. Что такое логико-дидактический анализ темы?

1.4. Методы научного познания в обучении математике

План

1. Логические методы познания: анализ, синтез, индукция, дедукция, сравнение, аналогия, абстрагирование, обобщение, конкретизация, моделирование, классификация и другие.

2. Эмпирические методы познания: наблюдение, описание, измерение и эксперимент.

3. Математические методы познания: метод математических моделей (математическое моделирование), аксиоматический метод.

1. Логические методы познания. Анализ и синтез в преподавании математики.

Анализ и синтез в преподавании математики. Методы научного познания (исследования) - анализ и синтез в математике играют особенно важную роль. В обучении математике они выступают в самых разнообразных формах: как методы решения задач, доказательства теорем, изучения свойств математических понятий и т.д.

Анализ - метод (способ) рассуждения или доказательства, при котором мы отправляемся от неизвестного к известному, от искомого к данному, то есть первоначально анализ рассматривался как путь (метод мышления) от целого к частям этого целого.

Синтез - метод (способ) рассуждения, при котором следуют от известного к неизвестному, от данного к искомому, то есть синтез - путь (метод мышления) от частей к целому.

Бытовой пример применения анализа и синтеза: ребенок разбирает игрушку (анализ) и собирает ее (синтез).

Анализ и синтез практически неотделимы друг от друга, они сопутствуют друг другу, дополняя друг друга, составляя единый аналитико-синтетический метод. Анализ и синтез широко применяются в химии и других науках.

В процессе развития анализ стали понимать как прием мышления, при котором от следствия переходят к причине, породившей это следствие, а синтез - как прием мышления, при котором от причины переходят к следствию, порожденному этой причиной.

Легко заметить, что синтез более доступен для понимания учащихся, хотя он меньше развивает логическое мышление, чем анализ. Применяя синтез, учащиеся рассуждают вслепую, пассивно; трудно догадаться, с чего начать доказательство, в то время как рассуждая аналитическим путем, мы мыслим ясно и творчески, активно ищем путь доказательства того или иного предложения.

Синтез в чистом виде почти никогда не встречается, он всегда включает в себя элементы анализа. Синтез и анализ взаимно связаны и неотделимы друг от друга. Они представляют собой две стороны одного и того же процесса рассуждения.

Многочисленные психологические исследования показали, что анализ выступает в различных формах, например:

а) анализ типа "фильтр"; б) анализ через синтез.

В случае а) человек, решающий задачу, действует наугад, хаотично, без всякой видимой системы, пробует один способ за другим, отбрасывает, отсеивает и т. п. Это при решении головоломок и т. д. (например, из 6 спичек сложить 4 равносторонних треугольника). Исследования показали, что догадка опирается на анализ.

В случае б) в начале поиска выполняется синтез различных частей задачи, а затем проводится анализ того, что может дать такой синтез для решения задачи. Подобное применение анализа является распространенным и имеет специальное название - анализ через синтез.

Иногда, при решении задачи возможен повторный анализ, анализ с новой целью, с иной точки зрения и т. п.

Теперь рассмотрим конкретно применение анализа и синтеза при решении задач.

Ведущий вопрос при анализе: что надо знать, чтобы ответить на поставленный вопрос?

Ведущий вопрос при синтезе: что мы можем узнать по данным условия?

Поиск решения задачи при синтезе направляется вопросом: *зная то-то и то-то, что можно найти?*

Сущность аналитического метода утверждений состоит в том, что исходным пунктом для обоснования требуемого утверждения является само это утверждение, которое путем логически обоснованных шагов сводится к утверждению, известному как истинное.

Сущность синтетического метода состоит в том, что отыскиваются такие истинные утверждения, которые можно было бы путем логически обоснованных шагов преобразовать в данное утверждение (требуемое утверждение).

Метод восходящего анализа. Одной из форм доказательства утверждений, в которых правомерно может использоваться аналитический метод, является так называемый восходящий анализ.

Сущность метода восходящего анализа видна из следующих рассуждений: для того, чтобы А было верно, *достаточно*, чтобы было верно В:

Преимущество восходящего анализа в следующем:

1) восходящий анализ обеспечивает сознательное и самостоятельное отыскание метода доказательства теоремы самими учащимися;

2) способствует развитию логического мышления;

3) обеспечивает осознанность, целенаправленность действий на каждом этапе доказательства;

4) схема метода проста: *что требуется доказать? Что для этого достаточно знать?*

Но этот метод, как и другие, не следует считать универсальным.

Вывод: учителю важно уметь выделять там, где это нужно, либо анализ, либо синтез, помня, что анализ - это путь к открытию, а синтез - это путь к обоснованию.

Аналитико-синтетические методы. Различают три вида аналитико-синтетических методов: синтетический, аналитический и метод попеременного движения с обоих концов.

Если исходным моментом при отыскании решения задачи являются данные, то такой метод называется синтетическим. Причем под данными подразумеваются не только данные предложенной задачи, но и ранее доказанные истины.

Если же исходным моментом решения является искомое, то метод называется аналитическим.

Аналитический метод проявляется в следующих формах:

1) восходящий анализ: (анализ Паппа)

2) нисходящий анализ (анализ Евклида), который имеет две разновидности:

а) несовершенный анализ; б) метод доказательства от противного;

3) алгебраический метод;

4) математическая индукция.

Если при отыскании решения задачи пользуются преобразованием как данных, так и искомых, то это метод попеременного движения с обоих концов.

Сущность метода восходящего анализа заключается в том, что исходным моментом решения задачи на доказательство является заключение, преобразование которого происходит путем отыскания достаточных признаков справедливости его.

Особенности восходящего анализа определяют его *достоинства*:

1) восходящий анализ представляет большую педагогическую ценность как метод, обеспечивающий учащимся сознательное и самостоятельное отыскание решений задач на доказательство;

2) он способствует развитию логического мышления;

3) обеспечивает осознанность действий на каждом этапе решения, целенаправленность их, вследствие чего почти исключается возможность сделать неправильное заключение;

4) дает возможность найти различные способы решения;

5) усвоение этого метода доступно для большинства учащихся, так как проста схема практического применения: что требуется доказать? Что для этого достаточно знать?

Недостатки:

1) восходящий анализ не удобен для изложения найденного доказательства, которое получается очень длинным. Этого можно избежать, если восходящим анализом пользоваться для отыскания доказательства, а изложение вести синтетическим методом;

2) решение не всякой задачи на доказательство легко найти при помощи восходящего анализа. Например, когда заключение - следствие нескольких оснований.

Несовершенный анализ. Он применяется в геометрии для составления плана решения задач на доказательство и на построение. Исходным моментом является заключение. Преобразование заключения происходит путем отыскания необходимых признаков справедливости его в предположении того, что заключение теоремы верно.

План решения задачи считается составленным, когда отыскание следствий, вытекающих из предположения справедливости заключения, приводит к верному следствию. Для проверки применяют обратный ход, исходным моментом которого является последний полученный верный вывод. Этот обратный ход называют иногда синтезом, в задачах конструктивных - это построение и доказательство.

Достоинства те же, что и у восходящего анализа.

Недостатки несовершенного анализа.

1. Если в случае получения верного следствия попытка обратить рассуждение не удается, то вопрос о верности решения остается открытым. И нужно искать другой метод.
2. Преобразование данной задачи во вспомогательную происходит с целью отыскания задачи, решение которой известно. Но этот процесс многозначен, и не каждое преобразование ведет к цели.

Метод доказательства от противного. Вообще *доказать какое-либо утверждение* - это значит показать, что это утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним утверждений.

Сущность доказательства методом от противного состоит в следующем.

Пусть требуется доказать теорему "A=>B". При доказательстве методом от противного допускают, что заключение теоремы (B) ложно, а, следовательно, его отрицание истинно. Присоединив предложение B к совокупности истинных посылок, используемых в процессе доказательства (среди которых находится и условие A), строят цепочку дедуктивных умозаключений до тех пор, пока не получится утверждение, противоречащее одной из посылок и, в частности, условию A. Как только такое противоречие устанавливают, процесс доказательства заканчивают и говорят, что полученное противоречие доказывает истинность теоремы "A=>B".

Индукция и дедукция.

Прочное усвоение математических знаний невозможно без целенаправленного развития мышления. Развитие мышления - одна из основных задач современного школьного обучения.

Мышление - есть активный процесс отражения объективного мира в сознании человека.

С точки зрения формальной логики мышление характеризуется тремя основными формами: понятиями, суждениями, умозаключениями.

Формой связи понятий друг с другом является суждение. *Мыслить* - значит высказывать *суждения*. С помощью суждений мысль получает свое дальнейшее развитие.

Умозаключение - это процесс получения нового суждения - вывода из одного или нескольких данных суждений. Умозаключение отличается (как форма мышления) от понятия и суждения тем, что оно представляет собой логическую операцию над отдельными мыслями.

Различают два основных вида умозаключений: индукцию и дедукцию. Понятие об индукции впервые упоминается в трудах древнегреческого философа Сократа (469-399 г. до н. э.).

Индукция - умозаключение (вывод) от частного к общему, то есть общий вывод, основанный на изучении свойств отдельных, частных фактов (частных экспериментов или наблюдений). Или иначе, индукция - это вывод общего заключения из частных посылок.

Например, построить графики конечного числа линейных уравнений с двумя переменными: $2x-y+3=0$, $x+2y+4=0$. Мы заключаем, что график уравнений вида $ax+by+c=0$ - прямая линия.

Индукция бывает *полной и неполной*. Индукция называется полной или совершенной, если общий вывод делается на основании изучения (рассмотрения) всех частных фактов (объектов, фигур, чисел и т.д.).

Индукция называется *неполной* или несовершенной, если общий вывод делается на основании изучения только части множества всех фактов (объектов).

Например, если доказать теорему о вписанном в окружность угле, рассматривая при этом все частные случаи расположения центра окружности по отношению к сторонам угла, то полученный вывод будет представлять собой полную индукцию.

В процессе обучения неполная индукция применяется при изучении законов сложения (вряд ли у кого возникнет сомнение). И как мы уже отметили, вывод, основанный на неполной индукции, может быть ошибочным, но ее значение в том, что рассмотрение частных случаев наводит на мысль о существовании той или иной закономерности, помогает высказать гипотезу, которую можно доказать дедуктивным путем. Например, такой прием применяется в школе при изучении прогрессий.

Дедукция (лат. deductio - выведение) есть форма умозаключения при которой от одного общего суждения идут к частному суждению.

Если индукция является важным эвристическим средством, то с помощью дедукции мы доказываем предложения, сформулированные как гипотезы (предположения) в результате индукции.

Существенным различием между индукцией и дедукцией является характер заключения. *Заключение по индукции лишь правдоподобно, заключение же по дедукции достоверно*.

Дедукция (логический вывод) носит формальный характер, состоящий в том, что в наших рассуждениях, доказательствах одни предложения выводятся из других в силу определенной связи между их формой, структурой, независимо от конкретного содержания этих предложений. Например, квадрат - ромб, ромб - параллелограмм, значит, квадрат - параллелограмм.

В настоящее время дедукцией, или дедуктивным методом доказательства, называется доказательство, основанное на системе определенных аксиом. И поэтому дедуктивный метод называется аксиоматическим методом. Дедукция является строгим, логически обоснованным методом доказательства в математике.

Как видим, дедукция и индукция тоже тесно связаны между собой.

Сравнение. Сравнение - мысленное установление сходства или различия объектов изучения. "Все познается в сравнении".

Используя метод сравнения, необходимо иметь в виду следующие *принципы сравнения*.

1. Сравнивать можно только такие объекты, которые имеют определенную связь друг с другом, то есть сравнение должно иметь смысл.
2. Сравнение должно проходить планомерно, то есть требуется четкое выделение тех свойств, по которым проводится сравнение (по периметру, по площади, по объему и т.п.)
3. Сравнение по одним и тем же свойствам материальных объектов должно быть полным, доведенным до конца. К.Д. Ушинский считал, "что в дидактике сравнение должно быть основным приемом". Сравнение очень полезно и при решении задач.

Аналогия. Аналогия (гр.. analogia - соответствие, сходство) - умозаключение по сходству частных свойств (признаков), имеющихся у двух математических понятий (фигур, отношений и т.д.).

Аналогия широко используется в преподавании математики благодаря своей наглядности и доступности.

Например:

1) при изучении десятичных дробей аналогия с натуральными числами;

2) свойства алгебраических дробей аналогичны свойствам обыкновенных дробей;

3) методы решения задач на составление уравнений первой степени аналогичны методам решения задач на составление уравнений второй степени;

4) свойства арифметической и геометрической прогрессий;

5) свойства планиметрии и стереометрии.

Заключение по аналогии можно представить так:

А имеет признаки a, b, c, d;

В имеет признаки a_1, b_1, c_1; свойства a_1, b_1, c_1 аналогичны a, b, c. Тогда В имеет признак d.

Но это заключение не является строгим, поэтому необходимо предостеречь учащихся от возможных ошибок.

Аналогия *"полезная" и "вредная"*.

Ошибки:

1)при сокращении $\frac{2a}{ab} = \frac{2}{b}$ и $\frac{\sin 2\alpha}{2} = \sin \alpha$?

2)a(b+c)=ab+ac и lg(a+b)=lg a + lg b ?

3) √ab = √a * √b (a,b больше или равны 0) и sin(a +b)=sin(a)+sin(b) или √ab = √a + √b?

Значит, аналогия, как и индукция, может привести к ложным выводам.

Обобщение и абстрагирование.

Обобщение и абстрагирование - два логических приема, применяемые почти всегда совместно в процессе познания.

Обобщение - это мысленное выделение, фиксирование каких-нибудь общих существенных свойств, принадлежащих только данному классу объектов или отношений.

Абстрагирование - это мысленное отвлечение общих существенных свойств, выделенных в результате обобщения, от прочих несущественных для нашего изучения свойств рассматриваемых объектов или отношений и отбрасывание (в рамках нашего изучения) этих несущественных свойств.

Например, в начальных классах обобщение и абстрагирование при изучении переместительного закона сложения:

2+3=3+2 (для ручек); 1+5=5+1 (для тетрадей и т. п.);

далее отвлекаемся 4+7=7+4 (просто для чисел)

...+...=.
..+...; | ○+□=□+○

a+b=b+a; или x+y=y+x - получаем закон.

Или при изучении формулы общего члена арифметической прогрессии:

$a_2=a_1+d$

$a_3=a_2+d=a_1+2d$:

$a_n=a_1+d(n-1)$ и далее y=kx+b, где x N - как функция натурального аргумента.

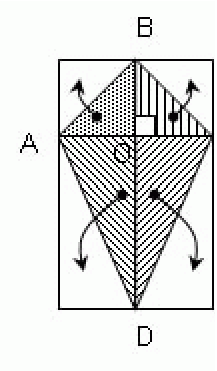
Или при умножении натуральных чисел 3*6=18 произведение можно понимать как стоимость трех тетрадей или путь, пройденный за 3 часа и т. д.

Конкретизация.

Процессу абстрагирования противоположен процесс конкретизации.

Конкретизация - это мыслительная деятельность, при которой односторонне фиксируется та или иная сторона объекта изучения, вне связи с другими его сторонами.

Конкретизация может выступать и как наглядная иллюстрация, и как подтверждение какого-либо абстрактного положения, и как приложение некоторого свойства в конкретных условиях.



Например, задача: в четырехугольнике ABCD d_1 перпендикулярна d_2. Доказать: $S = 1/2\ d_1d_2$. Сначала задача решается обычным путем через треугольники (ABD и BCD). А можно воспользоваться методом конкретизации. Можно записать $S = 1/2\ ab$. Попытаемся найти новое доказательство. Для этого попытаемся конкретизировать эту формулу. С чем можно связать произведение ab? (С площадью прямоугольника). А теперь уже достроить его нетрудно. И сразу видно решение.

Моделирование.

А теперь попытаемся связать эту задачу с моделью. Вырежем из картона модели треугольников и приложим их, как показано на рисунке. И полученная модель подсказывает способ решения. Это и есть моделирование. В чем состоит отличие поиска решения задачи в первом и во втором случаях?

Моделирование - это использование различных моделей в процессе преподавания математики.

Классификация.

Классификация - это разделение (разбиение) множества объектов, составляющих объем родового понятия, на виды (или просто - разбиение множества на классы).

Правильная классификация предполагает соблюдение *определенных условий*:

1. Классификация должна проводиться по определенному признаку, остающемуся неизменным в процессе классификации.
2. Понятия, получающиеся в процессе классификации, должны быть взаимно независимыми.
3. Сумма объемов понятий, получающихся при классификации, должна равняться объему исходного понятия.
4. В процессе классификации необходимо переходить к ближайшему в данном родовом понятии виду.

2. Эмпирические методы познания. К ним относятся наблюдение, описание, измерение и эксперимент. Наиболее часто эти методы применяются в естественных дисциплинах. Для математики они не являются характерными, но мы знаем, что эмпирические методы сыграли неоценимую роль в зарождении математических знаний, становлении математики как самостоятельной теоретической дисциплины.

Использование средств наглядности и ТСО, как правило, предполагает применение различных эмпирических методов. Часто имеет место одновременное использование наблюдения, описания, измерения и эксперимента. Это помогает избежать пассивной созерцательности, активизирует учащихся.

Наблюдение - это метод изучения, фиксирования свойств и отношений отдельных объектов и явлений окружающего мира, рассматриваемых в их естественных условиях и в той естественной связи признаков объекта, в какой они существуют в самом объекте. Наблюдение надо отличать от восприятия.

Опыт (или **эксперимент**) - это такой метод изучения объектов и явлений, посредством которого мы вмешиваемся в их естественное состояние и развитие, создавая для них искусственные условия, искусственно их расчленяя на части и соединяя с другими объектами и явлениями. Всякий эксперимент связан с наблюдением.

Описание - перечисление ряда заслуживающих внимания признаков единичных предметов.

Измерить величину - это значит сравнить ее с другой, однородной ей величиной, принятой за единицу измерения.

Выбираем единицу измерения.

Осуществляем процесс измерения - сравнение.

3. Математические методы познания.

Одним из наиболее универсальных математических методов познания является метод математических моделей (математическое моделирование).

Математическая модель - это описание какого-либо класса явлений реального мира на языке математики.

Метод моделирования дает возможность применять математический аппарат к решению практических задач. Понятия числа, геометрической фигуры, уравнения, неравенства, функции, производной являются примерами математических моделей.

В процессе математического моделирования широко используются абстракции, отождествления (обобщения), осуществимости, идеализация.

Аксиоматический метод также относится к числу наиболее характерных методов математики. Ознакомлению учащихся с аксиоматическим методом помогает методическая схема.

1. Составить набор математических утверждений. Они пока не связаны друг с другом, поэтому надо логически организовать имеющийся математический материал.
2. Найти исходные утверждения, на основе которых могут быть доказаны остальные.
3. Провести доказательства утверждений, не отнесенных к числу исходных.
4. Сформулировать аксиомы, определения, теоремы.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите: а) логические методы познания, б) эмпирические методы познания, в) математические методы познания.
2. Что такое анализ, синтез?
3. Какие формы анализа вы знаете?
4. Какой вопрос является ведущим при анализе, синтезе?
5. В чем состоит сущность аналитического метода рассуждений, синтетического метода?
6. В чем заключается сущность метода восходящего анализа? Укажите достоинства и недостатки этого метода.
7. С какой целью применяется несовершенный анализ? В чем его суть? Каковы достоинства и недостатки несовершенного анализа?
8. Что такое индукция, дедукция? Какие виды индукции Вы знаете?
9. В чем состоит существенное различие между индукцией и дедукцией?
10. Что такое сравнение? Назовите принципы сравнения.
11. Раскройте сущность аналогии и ее значение в математике.
12. Разъясните смысл понятий "обобщение" и "абстрагирование".
13. Что такое конкретизация?
14. В чем состоит метод моделирования?
15. Дайте определение классификации. Назовите условия правильной классификации.
16. Какие методы познания относятся к эмпирическим? Поясните их смысл.
17. Что такое математическая модель? В чем сущность математического моделирования?
18. Раскройте суть аксиоматического метода.

1.5. Методика обучения учащихся решению задач

План
1. Определение задачи.
2. Функции задач в обучении.
3. Классификация задач.
4. Обучение поиску решения задач.

1. Определение задачи. Задача - это вопрос, требующий решения на основании определенных знаний и размышления.

Процесс решения задачи представляет собой поиск выхода из затруднения или пути обхода препятствия - это процесс достижения цели, которая первоначально не кажется сразу доступной.

Задача предполагает необходимость сознательного поиска соответствующего средства для достижения ясно видимой, но непосредственно недоступной цели.

Найти решение задачи - это значит установить связь между заранее дифференцированными объектами или идеями (объектами, которые у нас имеются, и объектами, которые нам требуется отыскать, данными и неизвестным, предпосылкой и заключением).

2. Функции задач в обучении. Выделяются задачи с дидактическими, познавательными и развивающими функциями. *Задачи с дидактическими функциями* (вводные, тренировочные) предназначаются преимущественно для облегчения введения или закрепления изучаемых теоретических сведений. Это задачи на непосредственное применение изучаемой теории, закрепление основных понятий и фактов. *Задачи с познавательными функциями* (теоретические, практические) содержат новую для учащихся учебную информацию. Они ориентированы на более глубокое усвоение основного материала школьного курса, в процессе их решения учащиеся знакомятся с новыми в познавательном отношении теоретическими сведениями: новыми понятиями, фактами, методами решения задач. К *задачам с развивающими функциями* относятся задачи, содержание которых несколько отходит от основного курса, посильно осложняет вопросы программы. Это задачи на сообразительность, развитие числовой и геометрической интуиции, пространственного представления и воображения, логического мышления. Часто одна и та же задача выполняет в обучении несколько функций одновременно.

Задачи являются и *предметом*, и *средством обучения. Они* способствуют достижению всех целей обучения: воспитательных, образовательных, развивающих. Возможны различные *подходы к определению последовательности в изучении теоретического материала и решении задач*: а) изучается небольшой блок теоретического материала, затем решаются задачи, связанные с ним (традиционный подход); б) ведется "опережающее" изучение теоретического материала, после изучения крупного блока теории решаются задачи сразу по всему материалу этого блока; в) ведется "опережающее" решение задач (теоретический материал темы рассматривается вначале на ознакомительном уровне, теоремы пока не доказываются; после ознакомления с формулировками определений и теорем сразу переходят к решению задач; по мере приобретения навыков решения задач обращаются к изучению доказательств теорем теоретической части курса, причем многие из этих доказательств проводятся учащимися самостоятельно). Опыт учителей-новаторов показывает, что "крупноблочное" изучение теоретического материала позволяет решить проблему дефицита учебного времени, интенсифицировать учебный процесс, не перегружая учащихся.

3. Классификация задач. Сначала необходимо определить тот признак, по которому будем классифицировать.

По **содержанию** задачи делятся на *практические* (задачи с практическим содержанием) и *математические*. При решении практических задач используется метод математического моделирования, его суть в следующем: а) переводим реальную ситуацию на математический язык и строим математическую модель; б) работаем внутри математической модели и получаем результат; в) переводим обратно на реальный язык или интерпретируем результат. При решении математической задачи используется только второй этап.

По **требованию** выделяют задачи на *доказательство, на построение* и *на вычисление*.

По **характеру мыслительной деятельности** различают *стандартные* и *нестандартные* задачи. К *стандартным* относятся задачи, которые имеют определенный алгоритм решения (*алгоритмически разрешимые задачи*). Задачи, не имеющие общего алгоритма решения, называются *нестандартными*. Нестандартные задачи имеют отчетливо выраженную развивающую функцию. Функции решаемой стандартной задачи зависят от того, какими теоретическими знаниями обладают учащиеся к моменту ее решения. Если учащимся известен алгоритм решения этой задачи, то ее можно считать *шаблонной*. Если к моменту решения стандартной задачи общий метод ее решения не известен, то такая задача является *нешаблонной* (при ее решении необходимо обнаружить общий метод решения или применить какой-либо искусственный прием). Нестандартные и нешаблонные задачи (вследствие общности их функции в обучении) можно объединить в одну группу - группу *творческих задач*.

По **целям применения задач** в учебном процессе выделяют задачи *подготовительные, задачи на закрепление, на приобретение новых знаний, на развитие мышления*.

4. Обучение поиску решения задач. Анализ и синтез при решении задач. Анализ и синтез находят широкое применение при решении математических задач. Напомним, что анализ - это метод рассуждений от искомых к данным. Синтез - метод рассуждений, ведущий от данных к искомым. Оба эти метода обычно применяются во взаимосвязи.

Анализ и синтез находят применение практически при решении каждого вида задач, каждой задачи.

1) Анализ и синтез при решении задач на доказательство.

2) Анализ и синтез при решении текстовых задач. Текстовыми задачами здесь названы математические задачи, в которых входная информация содержит не только математические данные, но еще и некоторый сюжет (фабулу задачи).

При решении текстовых задач с помощью аппарата арифметики роль анализа сводится к составлению плана решения, задача же чаще всего решается синтетическим методом.

3) Анализ и синтез при решении задач на построение в геометрии. Анализ и синтез применяются и при решении задач на построение в геометрии, иначе, конструктивных задач геометрии. Как известно, решение этих задач выполняется по следующему плану: анализ, построение, доказательство, исследование. Название первой части - анализ говорит само за себя: это действительно метод анализа, ведущий от искомых ("предположим, что искомая фигура построена") к данным, точнее, к их использованию в построении. При анализе намечается план построения, которое выполняется синтетическим путем. При доказательстве возможно использование как анализа, так и синтеза, но чаще применяется последний. Исследование предполагает преимущественное применение метода анализа.

Метод исчерпывающих проб, основой которого является выявление всех логических возможностей и отбор из них таких, которые удовлетворяют условию задачи. Если логических возможностей, соответствующих условию задачи, - конечное число, то может оказаться возможным перебрать все их и в ходе этого перебора выделить вполне удовлетворяющие условию. С помощью этого приема решаются, в частности, некоторые элементарные задачи теоретико-числового содержания. Методом исчерпывающих проб с большим успехом можно пользоваться и для решения многих логических задач. Развитием указанного приема служат некоторые методы решения в целых или рациональных числах неопределенных уравнений, и в частности хорошо известный метод рассеивания.

Второй метод - это метод сведения. Суть его состоит в том, что данные задачи подвергаются последовательным преобразованиям. Концом получающейся таким образом цепочки преобразований может быть состояние, простое рассмотрение которого дает требуемый результат. Если, например, нужно решить уравнение, то обычно составляют такую конечную последовательность уравнений, эквивалентных данному, последним звеном которой является уравнение с очевидным решением. Точно так же поступают при решении систем уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств. Решение задач на доказательство очень часто представляет собой цепочки тождественных преобразований, тянущиеся от левой части доказываемых тождеств к правой, или наоборот, или от левой и правой частей к одному и тому же выражению. Конечно, указанное сведение нужно понимать и как выведение, как конечную последовательность, ведущую от искомых к данным. Этот метод наиболее часто применяется в тех случаях, в которых заданное отношение обладает свойством транзитивности. Таковы отношения эквивалентности (равенства, уравнения, тождества, логическая равносильность, параллельность) и порядка (строгие и нестрогие неравенства, включение множеств, логическое следование). Прием "сведения" лежит в основе решения геометрических задач на построение. В каждой задаче этого вида содержится требование: исходя из данных фигур (или данных их элементов), с помощью указанных конструктивных элементов построить фигуру, удовлетворяющую определенным условиям.

Это означает, что требуемое построение должно быть сведено к так называемым элементарным построениям, выполняемым реальными инструментами.

Метод сведения находит постоянное применение при решении текстовых задач арифметическими способами. Суть дела здесь состоит в том, что данная задача сводится к простым задачам.

Решение задач на доказательство теорем в своей основе имеет также сведение: доказываемое утверждение сводится к ранее доказанным теоремам и ранее введенным аксиомам и определениям данной научной области. Доказать - это значит свести новую теорему (задачу) в конечном счете к аксиомам.

Третий метод решения задач имеет своей основой **моделирование** (математическое и предметное). Для моделирования привлекаются различные математические объекты: числовые формулы, числовые таблицы, буквенные формулы, функции, уравнения алгебраические или дифференциальные и их системы, неравенства, системы неравенств (а также неравенств и уравнений), ряды, геометрические фигуры, разнообразные графосхемы, диаграммы Венна, графы и т. д.

Математическое моделирование находит применение при решении многих текстовых (сюжетных) задач. Уже уравнение, составленное по условию текстовой задачи, является ее алгебраической (аналитической) моделью. Чертеж фигуры, заданной в геометрической задаче, с обозначенными на ней данными и искомыми тоже является геометрической моделью задачи. Но нередко решению задачи помогает и предметная ее модель (например, объемная геометрическая фигура, модель с использованием или изображением предметов и объектов, заданных в задаче, и др.).

Большое практическое значение имеют методы нахождения приближенных значений искомых величин.

Все графические приемы решения задач на вычисление дают приближенные решения. Но приближенные решения могут получаться и с помощью численных методов (например, при решении квадратных уравнений по формулам их корней).

В геометрии используются приближенные методы построения. Примерами их служат спрямление окружности, построение квадрата, равновеликого данному кругу, деление угла на равные части и т. д.

Таковы основные приемы решения задач по курсу математики. Остается подчеркнуть, что в практике решения задач они часто комбинируются.

Одна из основных целей решения задач в школьном курсе математики и состоит в том, чтобы обеспечить действенное усвоение каждым учащимся основных методов и приемов решения учебных математических задач.

Для того чтобы научиться решать задачи, надо приобрести опыт их решения. Редкие учащиеся самостоятельно приобретают такой опыт. Долг учителя - помочь учащимся приобрести опыт решения задач, научить их решать задачи. Однако помощь учителя не должна быть чрезмерной. Если учитель много будет помогать обучаемому, на долю последнего ничего не останется или останется слишком мало работы по приобретению опыта решения задач. Так учащийся не научится решать задачи. Если же помощь учителя будет мала, учащийся также может не научиться решать задача. Учитель должен помогать учащемуся путем советов, как решать задачу, или вопросов, отвечая на которые он успешнее решит задачу. Иногда учитель разыгрывает решение задачи, сам задавая вопросы и сам же отвечая на них. Учащиеся подражают ему в этом, постепенно приучаясь решать задачи. Но такой вариант обучения требует большей затраты времени и не всегда приводит к хорошим результатам. Можно сказать, что механическое подражание не метод обучения решению задач. Нужны вопросы и советы учителя ученику, вызывающие его мыслительную деятельность, помогающие развивать творческий подход к решению задач.

Такие вопросы и советы должны обладать общностью для различных задач, иначе учащиеся не научатся решать многие задачи, а будут учиться решать каждую конкретную задачу в отдельности. В то же время вопросы и советы должны быть естественны и просты, должны иметь своим источником простой здравый смысл.

Но одних вопросов и советов учителя недостаточно для обучения решению задач. Нельзя забывать, что "умение решать задачи есть искусство, приобретаемое практикой".

Вопросы и советы условно можно подразделить на четыре группы. Это подразделение вопросов, вообще говоря, не является категоричным. Может оказаться, что вопросы, рекомендуемые для первого этапа, окажут помощь и на втором этапе, а рекомендуемые для второго этапа - на третьем и т. п. Дело в том, что этапы решения задачи не могут быть строго изолированы один от другого, между ними существует определенная связь, в их единстве заключается процесс решения задачи.

Далее формулируются и поясняются вопросы и советы учителя учащемуся, предлагаемые на каждом этапе решения задачи.

1) Вопросы и советы для усвоения содержания задачи (1-й этап). Нельзя приступать к решению задачи, не уяснив четко, в чем заключается задание, т. е. не установив, каковы данные и искомые или посылки и заключения. Первый совет учителя: не спешить начинать решать задачу. Этот совет не означает, что задачу надо решать как можно медленней. Он означает, что решению задачи должна предшествовать подготовка, заключающаяся в следующем:

а) сначала следует ознакомиться с задачей, внимательно прочитав ее содержание. При этом схватывается общая ситуация, описанная в задаче;

б) ознакомившись с задачей, необходимо вникнуть в ее содержание. При этом нужно следовать такому совету: выделить в задаче данные и искомые, а в задаче на доказательство - посылки и заключения.

в) Если задача геометрическая или связана с геометрическими фигурами, полезно сделать чертеж к задаче и обозначить на чертеже данные и искомые.
г) В том случае, когда данные (или искомые) в задаче не обозначены, надо ввести подходящие обозначения. При решении текстовых задач алгебры и начал анализа вводят обозначения искомых или других переменных, принятых за искомые.
д) Уже на первой стадии решения задачи, стадии понимания задания, полезно попытаться ответить на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?" Не всегда сразу удается ответить на этот вопрос, но иногда это можно сделать.

2) Составление плана решения задачи (2-й этап). Составление плана решения задачи, пожалуй, является главным шагом на пути ее решения. Правильно составленный план решения задачи почти гарантирует правильное ее решение. Но составление плана может оказаться сложным и длительным процессом. Поэтому крайне необходимо предлагать учащемуся ненавязчивые вопросы, советы, помогающие ему лучше и быстрее составить план решения задачи, "открыть" идею ее решения:
а) Известна ли решающему какая-либо родственная задача? Аналогичная задача? Если такая или родственная задача известна, то составление плана решения задачи не будет затруднительным. Но далеко не всегда известна задача, родственная решаемой. В этом случае может помочь в составлении плана решения совет.
б) Подумайте, известна ли вам задача, к которой можно свести решаемую. Если такая задача известна решающему, то путь составления плана решения данной задачи очевиден: свести решаемую задачу к решенной ранее. Может оказаться, что родственная задача неизвестна решающему и он не может свести данную задачу к какой-либо известной. План же сразу составить не удается.

Стоит воспользоваться советом: "Попытайтесь сформулировать задачу иначе". Иными словами, попытайтесь перефразировать задачу, не меняя ее математического содержания.

При переформулировании задачи пользуются либо определениями данных в ней математических понятий (заменяют термины их определениями), либо их признаками (точнее сказать, достаточными условиями). Надо отметить, что способность учащегося переформулировать текст задачи является показателем понимания математического содержания задачи.

Некоторые авторы относят к переформулировке задачи и перевод ее на язык математики, т. е. язык алгебры, геометрии или анализа. Это, скорее, формализация задачи, "математизация" ее. К такому приему и приходится часто прибегать при решении многих текстовых задач.
г) Составляя план решения задачи, всегда следует задавать себе (или решающему задачу) вопрос: "Все ли данные задачи использованы?"

Выявление неучтенных данных задачи облегчает составление плана ее решения.

д) При составлении плана задачи иногда бывает полезно следовать совету: "Попытайтесь преобразовать искомые или данные". Часто преобразование искомых или данных способствует более быстрому составлению плана решения. При этом искомые преобразуют так, чтобы они приблизились к данным, а данные - так, чтобы они приблизились к искомым. Так, при каждом случае тождественных преобразований данные преобразуются, постепенно приближаясь к результату (искомому). Аналогично уравнение, систему уравнений, неравенство или систему неравенств преобразуют в равносильные, чтобы найти их корни или множество решений.

е) Нередко случается так, что, следуя указанным выше советам, решающий задачу все же не может составить план ее решения. Тогда может помочь еще один совет: "Попробуйте решить лишь часть задачи", т. е. попробуйте сначала удовлетворить лишь части условий, с тем чтобы далее искать способ удовлетворить оставшимся условиям задачи.

ж) Нередко в составлении плана решения задачи помогает ответ на вопрос: "Для какого частного случая возможно достаточно быстро решить эту задачу?" Обнаружив такой частный случай, решающий ставит перед собой новую цель - воспользоваться решением задачи в найденном частном случае для более общего (но, может быть, не самого общего) случая. Так можно поступить, постепенно обобщая задачу до исходной, решаемой задачи. Предполагаемый вариант рассуждений - явное применение полной индукции. Итак, совет: "Рассмотрите частные случаи задачной ситуации, решите задачу для какого-нибудь частного случая, примените индуктивные рассуждения".

3) Реализация плана решения задачи (3-й этап). План указывает лишь общий контур решения задачи. При реализации плана решающий задачу рассматривает все детали, которые вписываются в этот контур. Эти детали надо рассматривать тщательно и терпеливо. Но при этом решающему задачу полезно следовать некоторым советам:

а) Проверяйте каждый свой шаг, убеждайтесь, что он совершен правильно. Иными словами, нужно доказывать правильность каждого шага ссылками на соответствующие, известные ранее математические факты, предложения.

б) При реализации плана поможет и совет: "Замените термины и символы их определениями". Так, термин "параллелограмм" заменяется его определением: "Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны", термин "предел числовой последовательности" для доказательства, например, того предложения, что предел суммы двух последовательностей, имеющих пределы, равен сумме пределов этих последовательностей, можно заменить, и вполне успешно, его определением.

в) При решении некоторых задач помогает совет: "Воспользуйтесь свойствами данных в условии объектов".

4) Анализ и проверка правильности решения задачи (4-й этап). Даже очень хорошие учащиеся, получив ответ и тщательно изложив ход решения,

считают задачу решенной. А ведь получение результата не означает еще, что задача решена правильно. Тем более не означает, что для решения выбран лучший, наиболее удачный, изящный, если можно так выразиться, вариант. По В. М. Брадису, задачу можно считать решенной, если найденное решение: 1) безошибочно, 2) обоснованно, 3) имеет исчерпывающий характер. Поэтому анализ решения задачи, проверка решения и достоверности результата должны быть этапом решения задачи. Итак, два совета: "Проверьте результат", "Проверьте ход решения". Проверка результата может производиться различными способами. Проверяя правильность хода решения, мы тем самым убеждаемся и в правильности результата. Значит, надо выполнить совет: "Проверьте все узловые пункты решения", еще раз убедитесь в истинности проведенных рассуждений.

Второй способ проверки результата заключается в получении того же результата применением другого метода решения задачи, поэтому полезно всегда задавать решающему вопрос: "Нельзя ли тот же результат получить иначе?" Иными словами, стоит последовать совету: "Решите задачу другим способом". Если при решении задачи другим способом получен тот же результат, что и в первом случае, задачу можно считать решенной правильно. К тому же получение различных вариантов решения одной и той же задачи имеет важное обучающее значение.

Изложенные выше советы для решения задач позволяют решать многие задачи, но, разумеется, не могут служить рецептом для решения любой задачи. Эти советы, многие из которых сформулировал Д. Пойа, правильно ориентируют решающего задачи на поиск решения, сокращают время решения многих задач, повышают вероятность отыскания верного и рационального способа решения задач. Единого же рецепта для решения любых задач попросту не существует.

5) От общих советов к частным. Начинать надо с общих вопросов, с общих советов, т. е. именно с тех, которые были приведены выше. Может оказаться, что общие вопросы не окажут помощи. Тогда надо обратиться к дополнительным, более частным вопросам, так чтобы дойти до вопросов, соответствующих уровню развития и математической подготовке учащегося. Переходить к частным, конкретным вопросам надо постепенно, чтобы на его долю досталась наибольшая часть работы по решению задачи.

Таким образом, решение задачи осуществляется в несколько этапов.

I. Ознакомление с содержанием задачи.

На первом этапе процесса решения задачи имеют место осознание условия и требования задачи, усвоение и разработка элементов условия (или элементов цели), поиск необходимой информации в сложной системе памяти, соотнесение условия и заключения задачи с имеющимися знаниями и опытом и т.д.

II. Поиск решения - выдвижение плана решения задачи.

На втором этапе происходят целенаправленные пробы различных сочетаний из данных и искомых, попытки подвести задачу под известный тип, выбор наиболее приемлемого в данных условиях метода решения (из известных), выбор стратегии решения, поиск плана решения и его корректировка на основе предварительной апробации, соотнесения с условием задачи и интуитивных соображений, фиксирование определенного плана решения задачи и т.д.

III. Процесс решения - реализация плана решения.

На третьем этапе проводится практическая реализация плана решения во всех его деталях с одновременной корректировкой через соотнесение с условием и выбранным базисом, выбор способа оформления решения, запись результата и т.д.

IV. Проверка решения задачи.

На четвертом этапе фиксируется конечный результат решения, проводится критический анализ результата, поиск путей рационализации решения, исследование особых и частных случаев, выявление существенного (потенциально полезного), систематизация новых знаний и опыта и т.д.

Сюжетной задачей называют такую задачу, в которой данные и связь между ними включены в фабулу. Содержание сюжетной задачи чаще всего представляет собой некоторую ситуацию, более или менее близкую к жизни. Эти задачи важны главным образом для усвоения учащимися математических отношений, для овладения эффективным методом познания - моделированием, для развития способностей и интереса учащихся к математике. Таковыми являются, например, текстовые задачи на составление уравнения. При решении текстовой задачи с помощью составления уравнения необходимо придерживаться следующей последовательности действий:

1) вычленить условие и требование задачи;
2) установить зависимость между данными и искомыми;
3) выявить способ составления уравнения и т. д.

Учебными действиями, посредством которых решается учебная задача, являются следующие:

1) преобразование условий предметной задачи с целью выявления в ней основного отношения;
2) моделирование выделенного отношения в предметной, графической или буквенной форме;
3) преобразование модели отношения для изучения его свойств;
4) построение системы частных задач, решаемых общим способом.

Решение задач в V - VI классах осуществляется в основном тремя способами:

- **арифметическим**, при котором все логические операции при решении задачи проводятся над конкретными числами, и основой рассуждения является знание смысла арифметических действий;

- **алгебраическим**, при котором составляется уравнение (система уравнений), решение которого основано на свойствах уравнений;

- комбинированным, который включает как арифметический, так и алгебраический способы решения.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое задача?
2. Какие классификации задач существуют?
3. Назовите функции задач в обучении.
4. Что значит решить математическую задачу?
5. Какова структура процесса решения задачи?
6. Перечислите общие приемы мыслительной деятельности при решении задач и раскройте их суть на примерах: а) арифметических; б) алгебраических; в) геометрических.
7. Как можно организовать обучение решению математических задач?
8. Как можно усилить развивающие функции задач в обучении?

1.6. Методика изучения математических понятий

План
1. Сущность понятия. Содержание и объем понятия.
2. Определение математических понятий.
3. Классификация математических понятий.
4. Методика введения новых математических понятий.
5. Ошибки в определениях.

1. Сущность понятия. Содержание и объем понятия. При помощи понятий мы выражаем общие, существенные признаки вещей и явлений объективной действительности. Для выяснения сущности понятий сравним их с восприятиями и представлениями.

Восприятием называется непосредственное чувственное отражение действительности в сознании человека.

Представлением называется запечатленный в нашем сознании образ предмета или явления, в данный момент нами не воспринимаемого.

Восприятие исчезает как только воздействие предмета на органы чувств человека кончается. Остается представление. Например, показываем куб, а потом его убираем. Мы знаем различные кубы, разного цвета и т. п., но мы от этого отвлекаемся, сохраняя общее и существенное.

Понятие абстрагируется от индивидуальных черт и признаков отдельных восприятий и представлений и является, таким образом, результатом обобщения восприятий и представлений очень большого количества однородных явлений и предметов, например: число, пирамида, окружность, прямая. Понятия образуются путем таких логических приемов, как анализ и синтез, абстрагирование и обобщение.

Понятием будем называть мысль о предмете, выделяющую его существенные признаки.

Существенными признаками понятия называются такие признаки, каждый из которых необходим, а все вместе достаточны, чтобы отличить объекты данного рода от других объектов (например, параллелограмм.)

Надо отметить, что выбор существенных признаков для образования определения из всей совокупности признаков не является однозначным.

В каждом понятии различают его содержание и объем.

Содержанием понятия называется совокупность существенных признаков объектов, охватываемых понятием.

Объемом понятия называется совокупность объектов, на которое распространяется данное понятие.

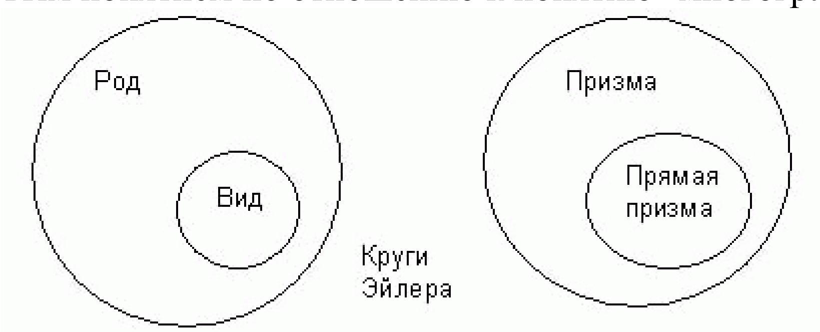
Например, понятие "человек". Содержание: живое существо, создает орудия производства, обладает способностью абстрактного мышления. Объем: все люди.

"Тетраэдр". Содержание: многогранник, ограниченный четырьмя гранями, имеющими форму треугольников. Объем: множество всех тетраэдров.

Между объемом и содержанием понятия существует такое соотношение: чем больше содержание понятия, тем меньше его объем.

Если объем одного понятия входит как часть в объем другого понятия, то первое понятие называется **видовым**, а второе - **родовым**.

Понятия род и вид имеют *относительный* характер. Например, понятие "призма" является родовым по отношению к понятию "прямая призма", но видовым понятием по отношению к понятию "многогранник".



2. Определение математических понятий. Содержание понятия раскрывается с помощью определения.

Определением называется такая логическая операция, при помощи которой раскрывается содержание вводимого в рассмотрение понятия.

Определить понятие - это значит перечислить существенные признаки предметов, отображенных в данном понятии.

Задача перечисления признаков бывает нелегкой, но она упрощается, если опираться на понятия, ранее уже установленные. Понятие фиксируется в речи с помощью слова или словосочетания, называемого **именем** или **термином** понятия. В математике понятие часто обозначается не только именем, но и **символом**. Например, $\sqrt{2}$ и другие.

Что значит дать определение? Это значит прежде всего подвести данное понятие под другое, более широкое.

Таким образом, в определении сначала указывается род, в который определяемое понятие входит как вид. А затем указывают те признаки, которые отличают этот вид от других видов ближайшего рода.

Такой прием определения понятия называется **определением понятия через ближайший род и видовое отличие**.

Понятие = род + видовое отличие

Итак, мы подошли к видам определений. Часто все определения делятся на два вида: **явные** и **неявные**.

Явными называются определения, в которых смысл определяемого термина полностью передается через смысл определяющих терминов. Определение через ближайший род и видовое отличие относится к явным.

В **неявных** определениях смысл определяемого термина не передается полностью определяющими терминами.

Типичный пример неявного определения - определение исходных понятий с помощью системы аксиом. Такие определения называются **аксиоматическими**. Примерами аксиоматических определений являются определения группы, кольца и поля, и т. п. (аксиоматика Гильберта, Вейля, система аксиом Пеано для натуральных чисел).

Генетическим называется определение объекта путем указания способа его построения.

Например, "усеченный конус есть тело, происходящее от вращения прямоугольной трапеции вокруг стороны, перпендикулярной к основаниям трапеции". Или определение понятия "линейный угол двугранного угла".

В **индуктивном (рекуррентном)** определении объект задается как функция f(n) от натурального числа n. Это задание обеспечивается указанием значения f(1) и некоторого равенства, связывающего значения f(n+1) и f(n).

Индуктивным является, например, известное определение суммы натуральных числе Грассмана, состоящее из двух равенств:

m+1=m`, m+n`=(m+n`)`.

Чтобы дать логически правильное определение, нужно соблюдать следующие **правила определения**.

1. Определение должно быть **соразмерным**, то есть определяемое и определяющее понятия должны быть равны по объему.

Чтобы проверить соразмерность, нужно убедиться, что определяемое понятие удовлетворяет признакам определяющего понятия и наоборот. Для последнего достаточно в определении поменять местами определяемое и определяющее понятия и в начале присоединить слово *"всякий"*.

Например, дано определение: "Параллелограмм есть многоугольник, у которого противоположные стороны параллельны". Проверяем его: "*Всякий* многоугольник, у которого противоположные стороны параллельны, есть параллелограмм" - это неверно. Или: "параллельными прямыми называются прямые, которые не пересекаются" (неверно, это могут быть и скрещивающиеся прямые).

2. Определение не должно заключать в себе "**порочного круга**". Это означает, что нельзя строить определение таким образом, чтобы определяющим понятием было такое, которое само (явно или неявно) определяется при помощи определяемого понятия. Например, "прямым углом называется угол, содержащий 90°, а градусом называется 1/90 часть прямого угла".

Ошибка "порочный круг" иногда принимает форму тавтологии (то же посредством того же) - употребление слова, имеющего то же самое значение.

3. Определение по возможности не должно быть отрицательным. В определении должны указываться существенные признаки предмета, а не то, чем не является предмет.

Например, "ромб - это не треугольник", "эллипс - это не окружность". Однако в математике в некоторых случаях отрицательные определения допустимы, например, "трансцендентной функцией называется всякая неалгебраическая функция " (Н. Лузин) (ни явная, ни неявная).

4. Определение должно быть **ясным**, не допускающим двусмысленных или метафорических выражений.

Например, "арифметика есть царица математики" - образное сравнение, а не определение.

3. Классификация математических понятий. Детальное изучение объема понятия часто осуществляется с помощью классификации. О требованиях к классификации мы уже говорили. Например, выполните классификацию:

1) взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве;

2) чисел, изучаемых в средней школе;

3) движений, изучаемых в курсе планиметрии;

4) классификацию треугольников (по разным основаниям: по величине углов, по длине сторон).

Классификацию удобно иллюстрировать с помощью кругов Эйлера-Венна, тогда схема более компактна и наглядна.

При изучении классификации фигур полезно составлять сказки (найдите примеры сказок в методической литературе или придумайте сами).

В процессе определения и классификации понятий данной науки образуется **система понятий** этой науки.

4. Методика введения новых математических понятий. Формирование понятий – сложный психологический процесс. Он осуществляется и протекает по следующей схеме:

ощущения -> восприятие -> представление -> понятие

Процесс формирования понятий состоит из мотивации введения понятия, выделения его существенных свойств, усвоения определения, применения понятия, понимания связи изучаемого понятия с ранее изученными понятиями. Формирование понятия осуществляется в несколько этапов:

1. мотивация (подчеркивается важность изучения понятия, активизируется целенаправленная деятельность школьников, возбуждается интерес к изучению понятия с помощью привлечения средств нематематического содержания, выполнения специальных упражнений, объясняющих необходимость развития математической теории);

2. выявление существенных свойств понятия (выполнение упражнений, где выделяются существенные свойства изучаемого понятия);

3. формулировка определения понятия (выполнение действий на распознавание объектов, принадлежащих понятию, конструирование объектов, относящихся к объему понятия).

Выделяются два пути формирования понятий (рис. 5).

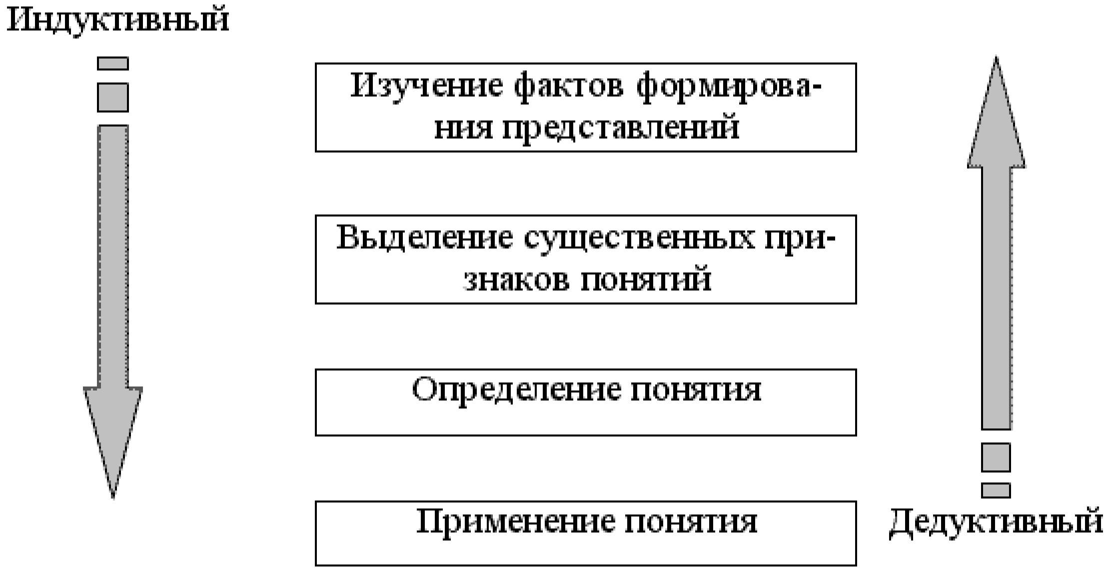


Рис.5. Пути формирования понятий

Объем понятия раскрывается с помощью классификации. Под классификацией часто понимают последовательное, многоступенчатое разбиение множества на классы с помощью некоторого свойства.

Классификация понятий - выяснение объема понятий, т.е. разделение множества объектов, составляющих объем родового понятия, на виды. Это разделение основано на сходстве объектов одного вида и отличии их от объектов других видов. Правильная классификация понятий предполагает соблюдение некоторых условий:

1. Классификация должна проводиться по определенному признаку, остающемуся неизменным в процессе классификации.

2. Понятия, получающиеся в результате классификации, должны быть взаимно независимыми, т.е. их пересечение должно быть пустым множеством.

3. Сумма объемов понятий, получающихся при классификации, должна равняться объему исходного понятия.

4. В процессе классификации необходимо переходить к ближайшему в данном родовом понятии виду.

Классификация натуральных чисел (рис. 6) и классификация треугольников по сторонам и углам (рис. 7), позволяют наблюдать выполнение этих четырех условий.

Рис. 6. Классификация натуральных чисел

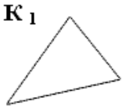
	Остроугольные	Прямоугольные	Тупоугольные
Разно-сторонние	**К$_1$** 	**К$_2$** 	**К$_3$** 
Равно-бедренные	**К$_4$** 	**К$_5$** 	**К$_6$** 
Равно-сторонние	**К$_7$** 	**К$_8$** не существуют	**К$_9$** не существуют

Рис. 7. Классификация треугольников

методическом смысле полезными в обучении математике могут оказаться и схемы, на которых изображена зависимость изучаемых объектов. Например, в курсе планиметрии рассмотрим класс четырехугольников (рис. 8):

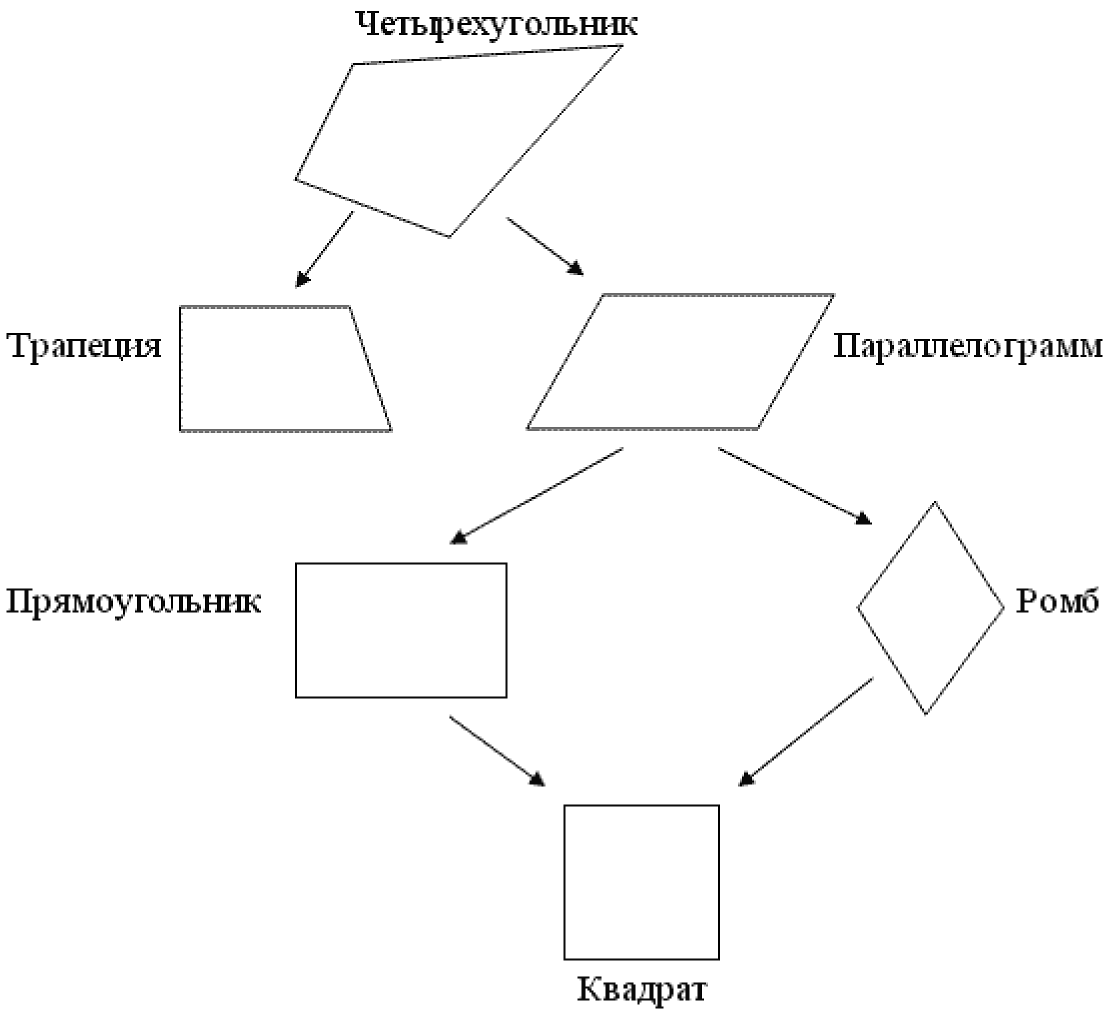


Рис. 8. Схема четырехугольников

В методике преподавания математики выделяются два метода введения понятий: конкретно-индуктивный и абстрактно-дедуктивный (термины введены русским методистом К.Ф. Лебединцевым).

Схема применения конкретно-индуктивного *метода*.

1. Рассматриваются и анализируются примеры (анализ, сравнение, абстрагирование, обобщение,...).
2. Выясняются общие признаки понятия, которые его характеризуют.
3. Формулируется определение.
4. Определение закрепляется путем приведения примеров и контрпримеров.
5. Дальнейшее усвоение понятия и его определения проходит в процессе их применения.

Например, понятие параллелограмма.

Схема применения абстрактно-дедуктивного *метода*.

1. Формулируется определение понятия.

2. Приводятся примеры и контрпримеры.
3. Закрепляется понятие путем выполнения различных упражнений.

Например, введение квадратного уравнения, понятия декартовых координат и т.п.

При формировании понятий целесообразно применять рекомендации психолого-педагогических наук, например, теорию поэтапного формирования умственных действий (П.Я. Гальперина и др.):

I этап. Разъясняют цель вводимого понятия, дают ориентировку.

II этап. Учащиеся формулируют определение исходя из рисунка.

III этап. Учащиеся формулируют определение, пользуясь громкой (внешней) речью без опоры на рисунок.

IV этап. Определение проговаривается в форме внешней речи про себя.

V этап. Определение проговаривается в форме внутренней речи.

При изучении понятий надо варьировать несущественные признаки (принципы варьирования) - это разнообразное расположение на доске рисунков и чертежей, например, треугольника, его высоты, перпендикуляра к прямой и т.д. (не только горизонтальное расположение прямой, основания треугольника и т.п.).

Усвоению определений помогает анализ логической структуры определений. С этой целью составляются алгоритмы для распознавания понятий; математические диктанты и тесты.

5. Ошибки в определениях.

1. Ошибка "слишком широкого определения".

"Параллелограмм - это многогранник, противоположные стороны которого параллельны".

2. Ошибка "слишком узкого определения".

"Параллелограмм - это четырехугольник с равными сторонами".

3. Тавтология.

"Геометрия - это наука, которая изучает геометрические фигуры".

4. Круг в определении.

"Прямыми углами называются углы, которые получаются при пересечении перпендикулярных прямых", а "перпендикулярными прямые, если пересекаются под прямым углом".

5. Избыточные определения.

"Параллелограмм - это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны и равны".

6. Отсутствие указания на родовое понятие.

"Ромб - это когда стороны равны".

7. Указание не того родового понятия, к которому данное понятие относится.

"Отношением называется сравнение двух чисел посредством деления" (отношение - это число, а сравнение - это процесс получения).

Вопросы для самоконтроля

1. Что мы понимаем под понятием?
2. Какие признаки понятия называются существенными?
3. Что такое содержание понятия? Объем понятия? Какова зависимость между содержанием и объемом понятия?
4. Что значит определить понятие?
5. Какие виды определений вы знаете? Поясните суть каждого вида и их логическую структуру.
6. Перечислите правила определения.
7. Для чего нужна классификация?
8. Назовите методы введения новых понятий.
9. Раскройте сущность конкретно-индуктивного метода.
10. В чем заключается абстрактно-дедуктивный метод?
11. Какие ошибки в определениях допускают учащиеся? Приведите примеры. Укажите методику исправления этих ошибок.

1.7. Контроль знаний по математике

План

1. Определение и роль контроля (проверки) знаний учащихся в процессе преподавания математики.
2. Функции проверки.
3. Принципы проверки.
4. Формы, виды и методы проверки.
5. Средства проверки.

Диагностика в педагогическом процессе понимается как «контроль в учебном процессе». Целями диагностирования являются выявление, оценивание, анализ и коррекция учебного процесса для его эффективности.

В процессе изучения математики учащиеся должны овладеть множеством математических понятий, их свойств, отношений, а также должны уметь обнаруживать и обосновывать эти свойства, применять их при решении практических задач. Достижение этих целей учащимися подлежит систематическому контролю со стороны учителя и самоконтролю.

Контроль - это часть процесса обучения. Контроль - это выявление и сравнение (на определенном этапе обучения) результата учебной деятельности с требованиями, которые задаются к этому результату программой. Причем, контроль знаний и умений конкретного ученика предусматривает оценку этих знаний и умений только по результатам его личной учебной деятельности.

Составным компонентом контроля является **проверка** знаний. Основной дидактической функцией проверки знаний учащихся по математике является обеспечение обратной связи между учителем и учащимися, что включает в себя: выявление недостатков течения учебного процесса, выявление пробелов знаний у учащихся, определение степени усвоения учебного материала по математике. Кроме проверки контроль содержит в себе **оценивание** (как процесс) и **выставление отметки** (результата оценивания).

В зависимости от того, кто именно осуществляет контроль за результатами учебной деятельности учащегося, выделяют три типа контроля: **внешний** (осуществляется учителем над деятельностью ученика); **взаимный** (осуществляется одним учеником над деятельностью другого ученика); **самоконтроль** (осуществляется учеником над собственной деятельностью).

1. Определение и роль контроля (проверки) знаний учащихся в процессе преподавания математики. В структуре учебной деятельности контроль и оценка выступают как необходимые учебные действия, направленные на решение учебной задачи, они тесно связаны между собой, но не тождественны друг другу. **Функция контроля** заключается в определении правильности и полноты выполнения учеником операций в составе действия, направленного на решение учебной задачи. **Действие оценки, с одной стороны**, состоит в содержательном качественном рассмотрении результата усвоения способа действия в его сопоставлении с намеченными целями; а **с другой стороны**, действие оценки направлено на выявление тех изменений, которые произошли в самом субъекте в результате решения учебной задачи.

В процессе обучения контроль знаний и умений школьников является важным звеном и зависит от специфики предмета. От того, как он организован, на что нацелен, существенно зависит эффективность учебной работы. Именно поэтому в школьной практике необходимо уделять серьезное внимание способам организации контроля. Содержание предмета обуславливает характер используемых методических приемов контроля: определяет спектр задач и упражнений, решаемых различными способами; подбор комплекса заданий, решение которых неизбежно приводит к использованию указанного метода; возможность классификации задач по методам решения, составление задач, обратных данным.

В частности, анализ литературы показал, что проблема контроля многоаспектна и здесь нет единой точки зрения даже в трактовке данного понятия. Наиболее удачна на наш взгляд, точка зрения на **контроль** как составную часть учебного процесса, заключающуюся в выявлении степени соответствия или несоответствия запланированного результата выполнения учебной задачи достигнутому и на основе данной информации обеспечивающая управление и совершенствование дальнейшего хода обучения. Как видим, организация контроля, предполагает ответы на ряд вопросов: **что**, **как** и **когда контролировать.** Все это обуславливает в контролирующей деятельности учителя не только знание содержания предмета, видение взаимосвязей внутри него, определение основного и вспомогательного материала, но и соотнесение его с целями обучения.

Общей целью контроля является "взвешивание" и определение качества усвоения и овладения материалом, степени соответствия сформированных умений и навыков целям и задачам обучения. Если ученик **усвоил** - это значит, во-первых, он нечто знает, запомнил, во-вторых, он понимает, не просто умеет повторить, а мотивировать, почему так, а не иначе. А чтобы ученик **овладел** знаниями, он должен **уметь применить** их на практике. Как предлагает В.А. Далингер, используя математический язык, условно мы можем записать такие "формулы":

УСВОЕНИЕ = ПОНИМАНИЕ + ЗАПОМИНАНИЕ, ОВЛАДЕНИЕ = УСВОЕНИЕ + ПРИМЕНЕНИЕ ЗНАНИЙ НА ПРАКТИКЕ.

2.Функции проверки. Основными функциями проверки являются: контролирующая, обучающая, диагностическая, прогностическая, развивающая, ориентирующая, воспитывающая и др. (зачем нужна проверка).

Функции самоконтроля в процессе учебной деятельности: прогнозирующую, планирующую, проверочную, оценочную, корректировочную, регулирующую, обучающую, воспитывающую, развивающую. Функции самоконтроля аналогичны функциям контроля, разница состоит лишь в направленности действия: при самоконтроле - на себя, при контроле - на какой-либо объект. С учетом того, что мы не останавливались подробно на содержании функций контроля, дадим разъяснение обозначенных функций:

- прогнозирующая. Смысл ее состоит в формировании у обучаемых умения предвидеть реальный результат своей деятельности в соответствии с поставленной целью и зоны трудности, возникающие при его достижении;
- планирующая. Предполагает формирование умения планировать свою деятельность с учетом зон трудности ее осуществления;
- проверочная. Обуславливает формирование умения проверять ход своей деятельности с целью ее улучшения и внесения необходимых коррекций;
- оценочная. Предопределяет формирование у обучаемых умения осуществлять самооценку своей деятельности;
- корректировочная. Смысл ее сводится к формированию умения осуществлять коррекцию своей деятельности на основе самооценки;
- регулирующая. Предполагает сформировать умение планировать свой учебный труд и обеспечивать его целенаправленное протекание;
- обучающая. Смысл ее состоит в стимулировании в учебном процессе овладение необходимыми знаниями, умениями и навыками;

- воспитывающая. Предопределяет приучение школьников или студентов к систематической работе, дисциплине, формирование воли, активности и других качеств личности;

- развивающая. Обуславливает развитие у будущих учителей умения видеть главное в изучаемом, самостоятельность и активность.

Все эти функции реализуются в единстве, однако, на разных этапах развития самоконтроля та или иная из них доминирует. Так оценочная функция является системообразующей, поэтому она имеет место на всех этапах формирования самоконтроля, и от качества ее реализации зависят все остальные функции.

Контроль знаний учащихся по математике выполняет следующие функции:

1. **Контролирующая и диагностическая функция -** выявление и диагностика результатов обучения.
2. **Образовательная (обучающая) функция.** Повышение качества знаний, их систематизация, формирование приемов учебной работы.
3. **Стимулирующая (развивающая) функция.** Создание необходимой основы для стимулирующих содержательных оценок деятельности учащихся, для развития познавательной активности школьников.
4. **Воспитательная функция.** Воспитание у каждого школьника чувства ответственности за результаты учения, формирование познавательной мотивации учения.
5. **Прогностическая функция.** Управление процессом усвоения знаний, умений и его коррекция.

Осуществляя проверку знаний, необходимо помнить, что контролирующая функция - основная функция. При разных целях и видах проверки эти функции могут проявляться по-разному. Например, при текущей проверке усвоения учебного материала по математике доминирующей должна быть обучающая функция, а при итоговом контроле преобладает контролирующая функция.

3.Принципы проверки. Принципы проверки (какой должна быть проверка?): целенаправленность; объективность; всесторонность; регулярность; индивидуальность.

Контроль знаний учащихся должен быть:

- мотивированным;
- систематическим и регулярным;
- разнообразным по формам, включать всех учащихся в работу;
- быть всесторонним и объективным на основе дифференцированного подхода к учащимся;
- базироваться на единстве требований учителей, осуществляющих контроль за учебной работой учащихся.

4. **Формы, виды и методы проверки.**

Методы контроля - способы, с помощью которых определяется результативность учебно-познавательной деятельности учителя и учащихся.

Существует много различных классификаций методов и приемов контроля знаний учащихся по математике. Рассмотри некоторые из них.

Выделяют следующие методы контроля:

1. Устные (опрос, устная контрольная работа и др.).
2. Письменные (математический диктант, контрольная работа, тематический реферат и др.).
3. Практические (опыт, практическая работа, лабораторная работа, экспериментальное задание и др.).
4. Зачеты.
5. Экзамены.

Другая классификация контроля за знаниями учащихся по математике представлена на рис. 9.

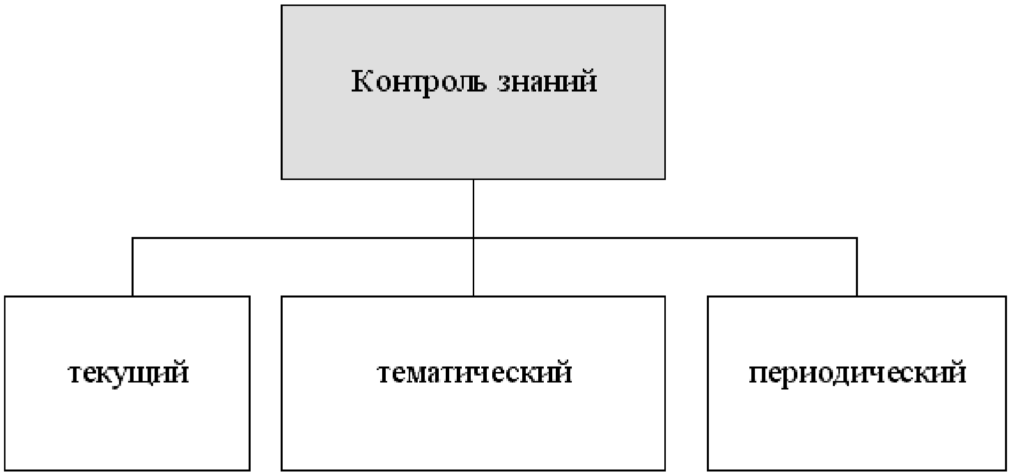


Рис. 9. Виды контроля знаний

Текущий контроль: различные формы устного опроса, проверка домашнего задания, проверка тетрадей, проверка с помощью перфокарт, проверка с помощью компьютера, текущие тесты на компьютере и др.

Тематический контроль: тематическая контрольная работа, тематический смотр знаний и др.

Периодический контроль: итоговая контрольная работа, экзамены, зачеты и др.

Формы контроля знаний и умений учащихся выделяются в соответствии с формами обучения - массовой (иногда в ней выделяют групповую и фронтальную) и индивидуальной (рис. 10).

Формы контроля: фронтальный, групповой, индивидуальный, комбинированный контроль, самоконтроль.

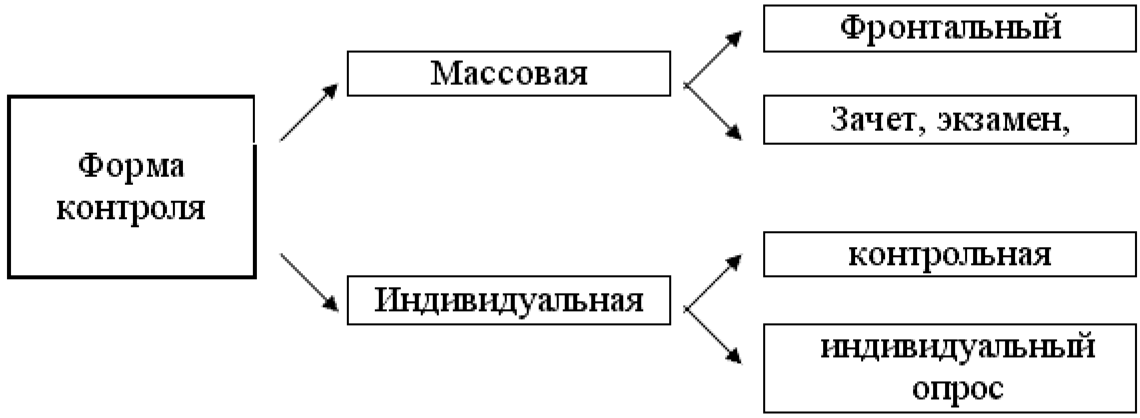


Рис. 10. Формы контроля

Форы контроля не должны сводиться только к воспроизводящей, репродуктивной деятельности учащихся. При выборе форм контроля необходимо учитывать индивидуальные особенности учащихся по математике и их математические способности.

5.Средства контроля. Тестовый контроль.

Говоря о средствах контроля знаний и умений учащихся, чаще всего имеют ввиду задание или несколько заданий, которые предлагаются учащимся с целью выявления соответствующих поставленным целям результатов обучения.

В основу классификации таких средств может быть положена форма вывода ответа на контролирующее задание. В этом случае выделяются два задания свободного выбора ответа и задания-тесты.

Тестовая форма проверки и оценки знаний учащихся в последнее время получила наибольшее распространение. Ее оперативность и четкость позволяют проверить знания учащихся по объемному содержанию образования.

Тесты делятся на два вида: тесты на припоминание и дополнение; избирательные тесты.

Тесты на припоминание и дополнение представляют собой задания учащимся заполнить пропуски в предложенном им связном тексте. Существуют два способа подачи тестов на дополнение:

- запись текста с пропусками на переносной доске или на обычной карточке;

- использование специализированных перфокарт.

В первом случае все пропуски нумеруются, а учащиеся записывают ответы под соответствующими номерами.

Во втором случае тест записывается на карточке, а на месте каждого пропуска вырезаются “окна”, получается перфокарта. Под нее подкладывается бумага, ответы записываются в прорезях.

Тесты на дополнение по перфокартам с успехом могут применяться и при организации устного счета с записью ответов. Все вычисления учащиеся производят в уме, лишь в наиболее трудных случаях прибегая к черновикам.

Избирательные тесты делятся на альтернативные, перекрестного выбора и множественного выбора. Избирательный тест, например, состоит из задания и нескольких вариантов ответа, среди которых помимо правильного и полного, есть правильные, но неполные, а также неправильные ответы.

Проверка производится с помощью дешифратора - точной копии тестовой карточки, изготовленной из прозрачного материала. В ней заранее отмечены клетки с правильными ответами.

В заданиях, построенных на основе избирательного теста, не менее важна и система предлагаемых ответов. Нужно включать в нее устойчивые, типичные ошибки учащихся, а правильные ответы располагать на различных местах.

Альтернативный тест - это задание, при выполнении которого ученик из двух предложенных ему ответов должен выбрать один (по его мнению правильный).

Осуществляя отбор и составление средств контроля знаний и умений учащихся, учителю прежде всего следует иметь ввиду, что содержание задания должно соответствовать цели контроля. Задания следует составлять таким образом, чтобы была возможность с их помощью получить максимум информации об объекте контроля.

Приведем несколько примеров:

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Заполни пропущенные записи:

1. $(\ldots - 9c^2)^2 = 25a^2 - \ldots + \ldots$
2. $\ldots + 30xy + 9y^2 = (\ldots + 3y)^2$
3. $a^2 + 6a + \ldots = (\ldots + \ldots)^2$
4. $(5x + \ldots)^2 = \ldots + 70xy + \ldots$
5. $(9a - \ldots)^2 = \ldots - \ldots + 100b^2$

Рис. 11. Дидактический материал контролирующего характера

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

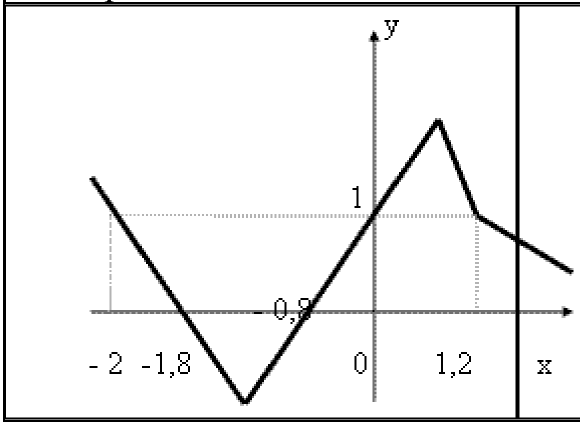
Найти неизвестные величины углов треугольника ABC:

< A	< B	< C
27		38
123	18	
	33	90
65	68	

Рис. 12. Образец перфокарты контролирующего характера

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

При каких значениях x значение функции f(x):



а) больше 0

б) равно 0

в) меньше 0

г) больше 1

Рис. 13. Дидактический материал контролирующего характера

Наряду с тестовой формой контроля на уроках математики могут применяться разного рода **игры,** в частности, **чайнворды, кроссворды, криптограммы.** Они вошли в практику обучения сравнительно недавно, опыт их применения основательно не изучен и не обобщен, но польза, приносимая ими, их влияние на усвоение учебного материала совершенно очевидны и реально ощутимы. Содержание, вкладываемое в игры, может быть различным. В основном это математическая терминология, не исключены и отдельные цифровые данные.

Отметка и оценка. Результаты контроля выражаются в **оценке**. В зависимости от типа контроля эта оценка будет либо внешней, либо внутренней (самооценкой). Всякая оценка выражает уровень соответствия результатов учебных действий ученика проверяемым параметрам этих действий. Следовательно, для оценка должна существовать какая-то шкала этого соответствия, которая может быть бинарной (выполнил - не выполнил), или более сложной, выражающейся в виде балльной шкалы отметок. При этом **отметка** выступает как внешнее выражение оценки.

Всякая оценка складывается под влиянием двух факторов: объективного и субъективного. Объективный фактор - это фактический результат контроля (проверки) учебных действий ученика, а субъективный - это отношение оценивающего субъекта (учителя, ученика) к оцениваемому субъекту (ученику), а также цель самого действия оценивания. При оценивании учебных действий ученика производится сравнение этих действий с одним из следующих: а) с прошлыми действиями это же ученика; б) с аналогичными действиями других учеников; в) с остановленной нормой этих действий.

Соответственно можно выделить способы оценивания: а) личностный; б) сопоставительный; в) нормативный.

Итак, процесс контроля знаний и умений учащихся связан с оценкой и отметкой. Оценка - это процесс, действие (деятельность) оценивания, которое осуществляется человеком. Отметка выступает как результат этого процесса (результат действия), как его условно формальное выражение. Оценка и отметка определяются знаниями и умениями ученика, которые он показал в процессе контроля. Одним из показателей, по которому учитель имеет возможность судить об этих знаниях, умениях, служат погрешности, допущенные учащимися при работе со средствами контроля, предложенными учителем. Погрешности делят на **ошибки и недочеты.**

Оценка должна ставиться за уровень и характер знаний по математике. Чем больше объективности в оценке знаний, тем больше это стимулирует учащихся и активизирует для дальнейшей учебной деятельности по предмету. Совершенно недопустимо влияние на оценку личностно-негативного отношения учителя к отдельным учащимся.

Зачетная система контроля.

С целью систематического контроля за уровнем обучения в ходе учебного процесса учителю целесообразно выбрать такую систему контроля, как зачет. От стандартных форм контроля **зачетная система** отличается по характеру проведения, по системе оценивания. Зачет - это специальный этап контроля, целью которого является проверка достижения учащимися уровня обязательной подготовки. Оценка результатов сдачи зачета оценивается по двухбалльной шкале: «зачтено» - «не зачтено».

Зачеты необходимо проводить по каждой теме школьного курса математики. Каждый учащийся сдает все предусмотренные программой зачеты. Зачет считается сданным, если учащийся решил все соответствующие обязательному уровню задачи и упражнения. Зачет подлежит пересдаче, если оценка «зачтено» не выставляется. Причем пересдается не весь зачет целиком, а лишь те виды задач, с которыми учащийся не справился.

Итоговое оценивание знаний ученика непосредственно зависит от результатов сдачи зачетов. Оценка является положительной при условии, если все зачеты за этот период учеником сданы.

Условия организации зачетов повышают содержательность и объективность итогового оценивания. Систему зачетов учитель может строить по-разному. Аналогично видам контроля, зачеты можно разделить на два класса: тематические зачеты; текущие зачеты.

Тематические зачеты проводятся в конце изучения темы и направлены на проверку усвоения материала в целом.

Текущие зачеты проводятся систематически в ходе изучения темы по небольшим, законченным по смыслу порциям учебного материала.

При любой форме проведения зачета наиболее эффективна такая организация, когда ученик в ходе проведения зачета узнает результаты своей деятельности: успешно ли он справился с работой, какие ошибки допустил и над какими разделами учебного материала ему предстоит еще работать.

Таким образом, под средством контроля знаний, умений и навыков мы разумеем инструмент, который позволяет контролирующему выявить наличие или отсутствие знания, его полноту, объем, действенность.

Полнота знаний связана с такими характерными действиями учащегося, как точная формулировка правил, определений, теорем, знание доказательств, их аргументированность. Под **объемом** контроля понимается как общее количество, так и возможный перечень параметров, подлежащих контролю. Действенность характеризует умение учащегося применить полученные знания во всем многообразии связей и отношений.

Одним из основных средств контроля является **вопрос**, ответ на который происходит в устной или письменной форме, в форме практического действия. И чтобы ответ на вопрос соответствовал цели контроля, он должен быть продуман заранее и правильно, четко и однозначно сформулирован.

Вопросы обычно распределяются по степени сложности, и в зависимости от специфики предмета вырабатывается определенный порядок их следования. При этом следует помнить, что каждый вопрос может выполнять несколько функций, совмещая контроль с обучением и устанавливая обратную связь.

Информация, полученная в процессе контроля, сравнивается, сопоставляется с **эталоном**, и на основе полученных данных производится анализ, выявляются ошибки и их причины. В результате сличения устанавливается степень рассогласования между контролируемой и эталонной составляющими. И если сигнал рассогласования окажется равным нулю, то это будет означать, что контролируемая составляющая соответствует эталону, тогда необходимо подвести итог, выразив результаты оценивания в определенной форме оценки (оценочное суждение, отметка и т.п.).

Причинами ошибки могут быть как недостатки в деятельности учащегося, так и учителя. Выявление причин ошибок представляет большую трудность, чем установление самого факта ошибки.

При появлении ошибок учитель, как правило, проводит исследование их истоков. Установив характер и причину, осуществляет покомпонентный анализ и устанавливает звено, за счет которого появились пробелы в учебно-познавательной деятельности ученика, то есть устанавливает, какие действия им не были реализованы, какие обучающие воздействия не были представлены.

В зависимости от установленных недостатков, проводит **коррекцию**, под которой мы будем понимать действия преподавателя (студента, школьника), направленные на устранение расхождения между реальными результатами деятельности и эталоном. Таким образом, особенностью коррекционных процессов является то, что они протекают в *двух уровнях*: первый - восприятие и анализ данных о ходе формирования умений, установление успешности или недостатков данного процесса и осуществления коррекций; второй уровень - это анализ собственной деятельности, выявление ее недостатков, выбор и реализация действий, призванных ликвидировать недостатки.

Вопросы для самоконтроля

1.Каковы цели и задачи контроля знаний по математике?

2.Дайте характеристику понятиям: «диагностика», «контроль», «проверка», «оценивание», «оценка», «отметка».

3. Каковы важнейшие функции проверки и оценки знаний учащихся по математике? Охарактеризуйте функции контроля знаний.

4. Какие педагогические требования предъявляются к оценке знаний учащихся?

5. Какие типы контроля существуют?

6. Охарактеризуйте методы контроля знаний по математике.

7. Назовите и дайте характеристику формам контроля знаний.

8. Что представляет собой тестовая форма проверки и оценки знаний учащихся? Дайте характеристику избирательным тестам, альтернативным тестам, тестам с выборочными ответами. Расскажите методику проведения тестирования по математике.

9. Чем отличается оценка от отметки?

10. Что представляет собой зачетная система контроля знаний по математике? Назовите условия организации зачетов по математике.

1.8. Формы организации обучения. Урок

План

1. Урок как ведущая форма организации обучения.
2. Требования к современному уроку.
3. Типы и структура уроков.
4. Подготовка учителя к уроку.
5. Анализ урока.

1. Урок как ведущая форма организации обучения. Урок ведущая форма, но это не означает, что лучшая.

В первоначальном смысле слово "урок" означало трудовое задание, которое требуется выполнить за определённый срок. Школьный урок тоже можно рассматривать как трудовое (учебное) задание классу, рассчитанное на 45 минут.

Урок как форма учебной работы существует с XVII века, т.е. более 300 лет. Это педагогическое изобретение оказалось столь жизнеспособным, что и в наши дни урок остаётся основной формой организации учебных занятий.

Урок есть основное звено процесса обучения.

Урок - это логически законченный, целостный, ограниченный определёнными рамками времени отрезок учебно-воспитательного процесса.

В уроке представлены в сложном взаимодействии все основные элементы учебно-воспитательного процесса: цели, содержания, средства, методы, методы, организация.

Качество урока зависит от правильного определения каждого из этих компонентов и их рационального сочетания.

Урок обязательно дополняется другими формами организации обучения, а именно: домашней работой; факультативами; кружками; лекциями; семинарами; экскурсиями; экзаменами и зачётами.

Урок - единица процесса обучения, т.е. он имеет ту же структуру, что и процесс обучения.

2. Сформулируем основные требования к уроку математики.

Наличие на уроке основной дидактической (учебной) цели - отчётливая целенаправленность урока.

Решение на уроке наряду с образовательными задачами и определённых воспитательных задач.

Обоснованный отбор учебного материала на урок.

Применение на уроке методов обучения, обеспечивающих активное учение школьников - выбор наиболее рациональных методов и приёмов обучения и их использование с учётом дидактических задач урока и особенностей изучаемого материала.

Организационная чёткость урока (своевременность начала, максимальное использование каждой минуты, логическая стройность и законченность).

Рабочие или технологические требования к ведению урока:

Достаточное организационное и материальное обеспечение урока.

Оптимальный психологический режим урока.

Оптимальный темп и ритм работы на уроке.

Систематическая последовательность и преемственность учебных операций.

Завершённость операций.

Экономия времени на уроке.

Непрерывный контроль и самоконтроль.

Восстановление делового равновесия при его нарушении.

Закрепление и "отделка" знаний и умений.

Непрерывное совершенствования учебного процесса (обобщающее требование).

На уроке должен быть психологический комфорт.

На каждом уроке одновременно - знания, умения, навыки, но в каждом уроке должна быть какая-то прибавка, в центре должны быть способы (особенно творческие), проблемы нравственного развития школьников, интеллектуальное развитие и т.п.

3.Типы уроков. В теории обучения существуют различные подходы к их классификации, они делят уроки на типы:

1) по содержанию (математика, химия и т.д.);

2) по методам проведения (т.е. по тому, какой ведущий метод обучения используется - это уроки-лекции, семинары, беседы, кино-уроки и т.п.);

3) по ведущей дидактической цели урока (она связана с системой знаний, умений, навыков - это наиболее точная классификация).

Учебная деятельность строится с учётом конкретных задач, решаемых на данном уроке, а также с учётом его значений в единой цепи учебных занятий по изучаемому предмету.

Выделяют: 1) уроки по изучению нового материала, 2) уроки повторения, 3) уроки закрепления, 4) уроки систематизации знаний, умений и навыков, 5) повторительно-обобщающие уроки, 6) комбинированный урок, 7) урок контроля и проверки знаний и т.д.

Урок - это целостное действие, он так и воспринимается, но в каждом уроке можно выделить определённые элементы, которые связаны с теми подходами, что мы рассматривали.

Например, при проблемном обучении - это: введение в проблему, формулирование проблемы, выдвижение гипотез, поиск путей решения, проверка.

Структура традиционного урока: проверка домашнего задания, изучение нового материала, закрепление материала, дача домашнего задания, вывод по уроку.

Суть педагогической проблемы состоит в том, чтобы каждый раз, в зависимости от цели, мы определили последовательность элементов урока, его частей, выбрали оптимальный вариант.

Формы работы учащихся на уроке: индивидуальные, фронтальные, групповые.

Индивидуальные формы отличаются тем, что учащиеся выполняют отдельные задания.

Фронтальные формы можно разделить на: а) индивидуально-фронтальную работу (работают все, но независимо друг от друга - это индивидуальная работа (у В.Ф. Шаталова), например, урок-конференция -

яркий пример индивидуально-фронтальной работы, но имеет видимость коллективной работы; б) коллективно-фронтальную работу - она предполагает, что работают не просто рядом, а сообща и двумя способами: по принципу разделению труда (когда общая задача подразделена на подзадачи и т.д.); сотрудничество - объединение общих усилий для решения одной задачи.

Способы групповой работы: а) индивидуально-групповой (например, вызвали 10 человек); б) коллективно-групповой (например, даём 10 задач, лидер распределяет, но оценить надо каждого, а не всех вместе).

Еще А. Дистервег понимал, что *"развитие и образование ни одному человеку не могут быть даны или сообщены. Всякий, кто желает к ним приобщиться, должен достигнуть этого собственной деятельностью, собственными силами, собственным напряжением. Извне он может получить только возбуждение.: Поэтому самодеятельность - средство и одновременно результат образования"* [20].

Под *структурой урока* можно понимать совокупность различных вариантов взаимодействий между элементами урока, возникающую в процессе обучения и обеспечивающую его целенаправленную действенность [20].

4.Подготовка учителя к уроку

I. 1. *Стратегический этап* подготовки включает момент образовательный (овладение основами профессии), накопление учебно-методической литературы, постижение механизма самообразования.

2. *Психологическая подготовка* - это не просто овладение знаниями по психологии, а формирование в себе определенных психических процессов (волевых и т.п.), настроя на работу учителем.

3. *Физическая подготовка*: "здоровье учителя - это его главный капитал".

II. *Подготовка учителя к каждому учебному году*. Тщательное изучение программ, учебников, учебно-методической литературы, составление тематического плана (согласование его с планами других учебных предметов для исключения совпадения сроков проведения контрольных работ и т.п.) и т.д.

III. *Подготовка учителя к каждой теме*. Необходимо готовиться не только к текущему уроку, а продумывать всю систему уроков по теме (подбор задач, выбор методов и приемов и т.д.), т.е. видеть перспективы своей работы.

IV. *Подготовка к конкретному уроку*.

Ознакомиться с учебным материалом по основному учебнику, а также по другим альтернативным учебникам. Выполнить логико-дидактический анализ темы.

Изучить методические рекомендации к данной теме в пособиях для учителя, методических журналах, учебниках по методике преподавания математики или других публикациях.

Выбрать наиболее рациональные методы и приемы работы для данного урока, определить необходимое оборудование.

Продумать структуру урока.

Рассчитать время, необходимое для каждого этапа урока.

Продумать домашнее задание.

Написать развернутый план урока (или конспект).

Планируя урок, определяя его задачи, необходимо учитывать, что он всегда является лишь частью, одним звеном более или менее длинной цепочки уроков, реализующих тему, раздел, учебный предмет в целом. Поэтому должен быть связан со всеми предшествующими и последующими уроками.

Качество урока в значительной степени зависит от качества его подготовки. **Готовясь к уроку, нужно**:

1. Ясно осознать его ЦЕЛИ:

а) учебные, т.е. что ученики должны будут усвоить, какие новые умения и навыки нужно сформировать (первоначальное ознакомление с новым материалом, понятием; знакомства с новыми вычислительными приемами и т.д.), повторить из ранее изученного, углубить и расширить то или иное понятие, закрепить ранее сформированное приемы вычислений или проверка знаний, умение и навыков учащихся;

б) развивающие, т.е. каких сдвигов надо достигнуть у учащихся в развитии их познавательных способностей - мышления, памяти, внимания, математической речи, наблюдательности, в обучении их способам приобретения, мыслительной переработки и применения знаний;

в) воспитательные, т.е. как будут использованы организация учебной деятельности учащихся и методы обучения для воспитания и закрепления таких качеств, как интерес к знаниям, чувство долга и ответственности, взаимоподдержка школьников, трудолюбие, прилежание, воля и т.д.

Все эти цели осуществляются на одном и том же уроке. Но при этом часто одна из сторон этих целей на данном уроке является основной, ведущей, наиболее ярко выраженной.

2. Работая над СОДЕРЖАНИЕМ программного материала, который будет изучаться или закрепляться на предстоящем уроке, нужно решить следующие *задачи*:

а) отобрать главный, обязательный для усвоения материал, ведущие знания, не допускать "растворения" его в материале второстепенного значения. Отбор материала надо проводить с учетом запаса знаний, умений и навыков учащихся, чтобы отыскать наилучшие способы ознакомления с математическими понятиями и вычислительными приемами;

б) в ходе подготовки осмыслить понятия, правила, законы, которые будут изучаться на уроке, и обеспечить изучение их на высоком научно-теоретическом уровне;

в) наметить, какой материал из ранее изученного целесообразно повторить и закрепить на предстоящем уроке, подобрать специальные упражнения для подготовки к восприятию нового материала и если того требует программный материал, упражнения, которые помогут постепенно подвести учащихся к изучению "трудных" тем, изучающихся позже;

г) определить материал, изучение которого можно увязать с жизнью и трудом детей;

д) определить программный материал, который можно использовать в воспитательных целях;

3. Продумать, какие МЕТОДЫ, ПРИЕМЫ И СРЕДСТВА обучения целесообразно использовать на предстоящем уроке. Применение эффективных методов и приемов обучения воспитывает интерес к учебному предмету, волевые качества, настойчивость к преодолению посильных логических трудностей.

Отбор методов и средств обучения диктуется содержанием и целями урока. Нужно помнить, что удачно отобранные и использованные методы, сочетание словесных с наглядными и практическими методами помогут более эффективному выполнению поставленных перед уроком целей. Надо четко определить время и место использования на уроке НАГЛЯДНОСТИ и ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ обучения.

4. Нужно также определить и СТРУКТУРУ УРОКА: будет ли урок комбинированным, уроком усвоения новых знаний или их закрепления, повторительно-обобщающий или урок проверки знаний.

Важно продумать вопрос о соразмерности частей урока и особенно об экономичном расходовании его времени, о том, какой стиль отношений с учащимися будет наиболее верным. Необходимо продумать и индивидуальную работу как со слабыми, так и с сильными учащимися.

5. В ходе подготовки учителя к уроку составляется *поурочный план*, который опирается на тематический план и в соответствии с программой.

В своем **рабочем плане** учитель должен отразить:

Тип урока (или вид занятий).

Тему урока.

Цели и задачи урока.

Оборудование (для детей и учителя), использование доски, наглядности, ТСО.

Ход урока (возможны следующие составные части):

- организационная часть;
- проверка домашнего задания;
- сообщение темы и цели урока;

- подготовка учеников к восприятию нового материала путем повторения ранее изученного или воспроизведение жизненного опыта детей;
- специальные упражнения в устных вычислениях;
- изучение нового материала (как основная часть урока);
- первоначальное закрепление знаний и умений в виде коллективной работы детей;
- упражнение в совершенствовании знаний, умений и навыков (как основная часть урока);
- самостоятельная работа учеников и ее проверка;
- задание на дом;
- подытоживание и завершение урока.

Урок может включать различные составные части. Целесообразность включения в урок той или иной части и соотношение ее с другими частями зависит от цели и содержание занятия, а также от методов, применяемых на данном уроке.

5.Методический анализ урока математики (по Истоминой Н.Б.)

С понятием "анализ урока" вы познакомились в курсе педагогики. Методический анализ урока, включая в себя все компоненты педагогического анализа, имеет свою специфику, которая прежде всего обусловливается содержанием предмета.

На каких же аспектах урока следует сосредоточить внимание, анализируя его с методической точки зрения?

Особенность методического анализа заключается в том, что он должен проводиться в **два этапа**.

На первом этапе учитель сам оценивает, удалось ли ему реализовать намеченный план на практике. Для этого он формулирует цель урока и обосновывает логику своих действий, которые спланировал для достижения этой цели. Затем сравнивает логику запланированных действий с логикой проведения реального урока. Для этого целесообразно остановиться на следующих вопросах:

- Какие моменты урока оказались для учителя неожиданными?
- Чего он не смог учесть при планировании урока?
- На какие ответы учащихся не смог отреагировать?
- Пришлось ли ему отступить от запланированных им действий и почему?
- Заметил ли он свои речевые ошибки, недочеты, неудачно сформулированные вопросы?
- Считает ли учитель, что урок достиг поставленной цели? Что является критерием этой оценки? (Активная работа школьников, их интерес к уроку, успешное выполнение самостоятельной работы и т. д.)

На втором этапе все эти вопросы - предмет дальнейшего обсуждения урока коллегами (методистом, студентами), присутствующими на уроке.

План этого *обсуждения* можно представить в виде следующей последовательности вопросов:

1. Соответствует ли логика урока его цели? (При обсуждении данного вопроса полезно остановиться не только на реальном уроке, но и на той логике, которая лежала в основе его планирования.)

2. Какие виды учебных заданий использовал учитель на уроке: тренировочные, частично-поисковые, творческие? Какие из них заслуживают положительной оценки? Почему?

3. Соответствуют ли учебные задания, подобранные учителем, цели урока?

4. Какие функции выполняли задания, предложенные учителем: обучающую, развивающую, контролирующую? Что заслуживает положительной оценки?

5. Грамотно ли учитель использовал математическую терминологию, предлагал учащимся вопросы и задания?

6. Какие методические приемы, используемые учителем на уроке, заслуживают положительной оценки? При работе над отдельными заданиями, при изучении нового, при закреплении, проверке?

7. Какие формы организации деятельности учащихся (индивидуальная, фронтальная, групповая), применяемые учителем на уроке, заслуживают положительной оценки?

8. Удалось ли учителю установить контакт с детьми (обратная связь), успешно осуществлять коррекцию их действий, создавая ситуации успеха, реализовать идею сотрудничества? Какие моменты урока заслуживают положительной оценки с этой точки зрения?

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите исторически сложившиеся системы обучения.
2. Что такое урок? Какими формами организации обучения он дополняется?
3. Что мы понимаем под структурой урока?
4. Какова структура традиционного урока?
5. Перечислите основные требования к современному уроку.
6. Какие типы уроков Вы знаете?
7. Назовите формы работы учащихся на уроке математики.
8. В чем заключается подготовка учителя к уроку?
9. Как Вы будете проводить анализ урока математики?
10. Какие нетрадиционные формы обучения Вы знаете?

1.9. Внеклассная работа по математике

План

1. Понятие внеклассной работы, ее цели и задачи.
2. Математические кружки.

3. Математические олимпиады.
4. Школьная математическая печать.
5. Математические викторины.
6. Математические игры.

1. Понятие внеклассной работы, ее цели и задачи. Математические школы и факультативные занятия по математике призваны углублять математические знания школьников, уже определивших основной круг своих учебных интересов. Однако в V - VII и даже VIII - IX классах интересы учащихся редко бывают настолько четкими и устойчивыми, чтобы они сами могли назвать их с полной определенностью.

На уроках математики имеется немало возможностей заинтересовать школьников содержанием этой науки. Вместе с тем основная цель уроков все же состоит в обучении определенному комплексу процедур математического характера; занимательность изложения подчинена этой цели; развитие способностей учащихся происходят в рамках изучения обязательного материала.

Дополнительные возможности для развития способностей учащихся и привития им интереса к математике и ее приложениям предоставляют различные внеклассные формы занятий по математике. Они могут быть нацелены на развитие определенных сторон мышления и черт характера учащихся, иногда не преследуя в качестве основной цели расширения или углубления фактических знаний по математике. Такое расширение происходит как бы само собой, как результат возникшего интереса к предмету.

Таким образом, под *"внеклассной работой"* по математике надо понимать занятия, проводимые во внеурочное время, основанные на принципе добровольного участия и призванные решать *три основные задачи*:

1) повышение уровня математического мышления, углубление теоретических знаний и развитие практических навыков учащихся, выявление математических способностей;

2) побуждение учащихся к вступлению в ряды "любителей" математики;

3) организация досуга учащихся в свободное от учебы время.

Внеклассные занятия по математике могут быть построены как на материале, лишь косвенно связанном со школьной программой, так и на материале, непосредственно примыкающем к работе в классе, но не дублирующем эту работу в рамках общеобязательного минимума.

Реализация перечисленных целей частично осуществляется на уроках. Однако в процессе классных занятий, ограниченных рамками учебного времени и программой, это не удается сделать с достаточной полнотой. Поэтому окончательная и полная реализация этих целей переносится на внеклассные занятия этого вида.

Между учебной и воспитательной работой, проводимой на уроках, и внеклассной работой существует тесная взаимосвязь: учебные занятия, развивая у учащихся интерес к знаниям, содействуют развертыванию внеклассной работы, и наоборот, внеклассные занятия, позволяющие углублять эти знания, повышают успеваемость учащихся и их интерес к учению. Однако внеклассная работа не должна дублировать учебную работу в классе, иначе она превратится в обычные дополнительные занятия.

Говоря о содержании внеклассной работы с учащимися, интересующимися математикой, отметим следующее.

Традиционная тематика внеклассных занятий ограничивалась обычно рассмотрением таких вопросов, которые хотя и выходили за рамки официальной программы, но имели много точек соприкосновения с рассматриваемыми в ней вопросами. Например, при изучении в V классе признаков делимости натуральных чисел на занятиях математического кружка рассматривались признаки делимости чисел, не предусмотренные программой (признак делимости на 7, на 11 и т. д.).

Также традиционным для рассмотрения на внеклассных занятиях по математике были исторические экскурсы по той или иной теме, математические софизмы, задачи повышенной трудности.

За последние десятилетия в математике возникли новые направления, имеющие не только большое практическое значение, но и представляющие большой познавательный интерес. Обновление содержания основного курса математики привело к возникновению тенденций обновления содержания внеклассных занятий по математике, однако это не означает, что следует полностью отказаться от тех или иных традиционных вопросов, которые составляли до сих пор содержание внеклассных занятий и вызывают у учащихся неизменный интерес (например, функции и графики, математические парадоксы и софизмы, неопределенные уравнения, логические и исторические задачи и т. д.).

Можно рекомендовать следующие *формы проведения внеклассной работы*: математические кружки; математические конкурсы, викторины и олимпиады; математические вечера; математические экскурсии; внеклассное чтение математической литературы, математические рефераты и сочинения; школьная математическая печать.

Раскроем содержание этих форм внеклассной работы.

2. Математические кружки. Математические кружки организуются для детей, проявляющих повышенный интерес к математике. Их целью является углубление знаний, полученных на уроке, развитие мышления, интуиции, навыков решения задач.

Решение задач должно составлять основное содержание кружкового занятия. Задачи, подбираемые с этой целью, должны быть в большинстве своем нестандартными, требующими не запоминания какого-то алгоритма, а умения самостоятельно "открывать" способ решения.

Полезно привлекать также задачи, позволяющие познакомить учащихся с новыми для них методами решения задач школьного курса.

На кружковых занятиях может рассматриваться и теория. Обычно это вопросы, тесно примыкающие к обязательному курсу и дающие возможность более широкого взгляда на рассматриваемые в ней проблемы.

Например, в V - VII классах большой интерес может вызвать знакомство с различными системами счисления. Дети охотно учатся записывать числа в недесятичных системах счисления: двоичной, пятеричной, двенадцатиричной, шестнадцатиричной, переходить от одной из этих систем к другой, выполнять в них арифметические операции.

Для кружкового занятия подбираются также интересный материал из истории математики, занимательные задачи, математические развлечения. Однако основным содержанием занятия должно быть, как уже отмечалось, решение достаточно серьезных математических задач.

Организационные формы и структура могут быть, вообще говоря, различными. Наиболее распространенной формой работы кружка является так называемое теоретическое занятие, которое состоит в последовательном рассмотрении серии задач, подобранных учителем заранее и раскрывающих определенную тему. Тематическое занятие входит как составная часть в большинство кружковых занятий, особенно в VII - IX классах.

Другой распространенной формой работы, используемой на кружковых занятиях, является "десятиминутка". Это небольшое сообщение или серия сообщений из истории математики, из жизни ученых, внесших серьезный вклад в ее развитие, краткий обзор новинок литературы и т. д. Эти сообщения делает учитель или учащиеся, которых учитель заранее тщательно подготовил. "Десятиминутка" проводится после основной части занятия и не должна требовать большого напряжения от слушателей.

В конце занятия проводятся викторины, игры, фокусы, рассматриваются софизмы. В проведении этой части занятия могут участвовать члены кружка.

Организуя занятия математического кружка, следует помнить, что они проводятся обычно после уроков, после напряженного рабочего дня. Участие в кружке - тоже серьезный умственный труд. Чтобы кружок не распался, нужно тщательно продумывать и содержание, и форму занятий. К занятию следует подбирать яркий, интересный материал, широко использовать проблемные ситуации и при изложении теории, и при решении задач. В V - VII классах достаточно широко должны использоваться игровые формы занятия.

3. Математические олимпиады. На олимпиадах учащиеся показывают умение разбираться в различных математических вопросах, проверяют свой уровень математической подготовки. Олимпиады способствуют повышению интереса к предмету и воспитанию высокой культуры математического мышления.

Важное значение имеет подбор задач. Они должны быть основаны на использовании материала школьной программы, потому что в I туре может участвовать любой проявивший желание школьник. Одной из особенностей математической олимпиады является то, что здесь элемент творчества присутствует во всех формах математического мышления, таким образом, математические олимпиады способствуют развитию таких ценных качеств личности, как настойчивость и целеустремленность, самостоятельность и трудолюбие, вырабатывают навыки научно-исследовательского характера, помогают выявить и отобрать талантливых учащихся.

Математическая олимпиада приносит пользу лишь тогда, когда она является заключительным этапом целого комплекса внеклассной работы. Если же олимпиаде не предшествует развернутая деятельность, то она может скорее принести вред, а не пользу, оттолкнет учащихся, а не привлечет к ней.

После каждого тура олимпиады следует вывесить в школе текст задач, чтобы все школьники могли с ними ознакомиться.

Жюри олимпиады проверяют работу участников и присуждает победителям II тура премии и грамоты, а также отмечает учащихся, которые прошли III тур.

4.Школьная математическая печать. В практике встречаются разные формы математической печати: стенгазета, радиогазета, историко-математический календарь, математический словарь.

Выпуск математической газеты требует определенной "математической активности" трех групп учащихся:

1) редакционной коллегии;

2) группы корреспондентов, постоянно и эпизодически участвующих в выпуске;

3) наиболее многочисленной группы читателей.

Основными целями организации и выпуска школьной математической газеты являются:

1) освещение математической жизни школы;

2) пробуждение у учащихся глубокого интереса к математике;

3) привитие навыков к работе с научно-популярной и занимательной литературой по математике;

4) расширение математического кругозора;

5) привлечение широких масс учащихся к активному решению задач.

Рекомендуется материал в газете располагать примерно в таком порядке: 1) научно-популярный раздел; 2) раздел школьной математики; 3) критико-библиографический раздел; 4) школьная жизнь и информация; 5) задачи и развлечения; 6) викторины.

Полезно выпускать тематические газеты, посвященные истории развития математики у какого-нибудь народа (китайцев, индийцев, греков, узбеков); жизни и деятельности выдающихся математиков; определенному разделу или области математики (уравнениям, логарифмам, системам счисления, алгебре, геометрии); значение математики в жизни человека и другие.

Незачем помещать в газету большую передовую статью. Предпочтения заслуживают мелкие заметки в 8 - 15 строк.

В каждом номере должно быть не менее 2 - 3 фотографий или рисунков.

5. Математические викторины. Математические викторины относятся к интересной, увлекательной и массовой форме внеклассной работы, имеющей немаловажное значение в учебно-воспитательной работе школы. Они могут проводиться как самостоятельное мероприятие и как форма составной части математического вечера.

Тематика вопросов может быть следующая.

1. Выдающиеся русские математики и их вклад в развитие науки.
2. Биографии русских ученых-математиков и т.п.

Вопросы можно задавать устно или писать на плакате, можно предлагать в виде кроссвордов и т. д. Также целесообразно применять материал, помещенный в математических газетах.

Разнообразие заданий поддерживает интерес. Победители поощряются. Их достижения отмечают в школьной стенгазете и специальных бюллетенях.

6. Математические игры. Игры являются одним из важных средств воспитания учащихся, имеющих большие педагогические и образовательные возможности. При умелой организации математические игры способствуют расширению кругозора, закреплению школьных знаний, полученных на уроке математики. Степень воспитательной и образовательной полезности дидактической игры зависит от методики и качества ее организации. Задания для игры должны быть составлены так, чтобы они способствовали развитию воображения, фантазии, изобретательности и творчества. Математические игры помогают развитию навыка исследовательской работы. Полезно для этой цели задачи, которые имеют не один путь решения, а несколько, а также задачи на установление полных данных и на определение дополнительных условий для ее решения.

Задачи-игры эффективны для развития разговорной математической культуры и четкого понимания того, что значит решить задачу.

С другими формами внеклассной работы можно ознакомиться в методической, учебной и научно-популярной литературе.

Вопросы для самоконтроля

1. Что мы понимаем под внеклассной работой по математике?
2. С какой целью проводят внеклассную работу по математике?
3. Виды внеклассной работы по математике.
4. Этапы проведения математических олимпиад
5. Когда целесообразно проводить математические викторины?

1.10. Деятельность учителя математики

План
1. Деятельность учителя математики
2. Уровни сформированности методических умений учителя математики

1. Деятельность учителя математики. В новых современных условиях развития образования необходим учитель-профессионал, хорошо знающий особенности личности учащегося и опирающийся в своей работе на всю математическую общественность (ученых, преподавателей высшей школы).

Педагогическую деятельность учителя будем понимать как совокупность отдельных деятельностей, в которую включаем следующие умения:
- анализировать психолого-педагогическую литературу, нормативные документы, учебные планы, программы, методические пособия, дидактический материал и др.;
- отбирать с учетом возрастных особенностей определенных групп учащихся учебный материал, необходимый для изучения;
- конструировать предметное содержание образования;
- планировать свою работу (уроки, мероприятия и т. д.);
- организовывать различные виды деятельности учащихся;
- помогать учащимся выполнять запланированное путем умелой и рациональной организации учебной деятельности;
- управлять деятельностью учащихся;
- оценивать деятельность учащихся с целью ее коррекции.

Деятельность учителя математики выполняет ряд функций:

Гностическая функция. Изучение программ по математике, планирование целей обучения, отбор содержания обучения по математике и др.

Конструктивная функция. Планирование этапов обучения математике, отбор приемов и средств обучения математике, определение форм деятельности познавательных заданий и др.

Организационная функция. Организация познавательной деятельности учащихся, организация процесса обучения математике и др.

Информативная функция. Изложение учебного материала, применение приемов и средств обучения математике, отбор и методическое построение содержания и образования и др.

Контрольно-оценочная функция. Коррекция знаний, систематическая проверка знаний и умений по математике, оценка качества и эффективности обучения математике и др.

Для эффективного выполнения педагогических функций современному педагогу важно осознавать структуру педагогической деятельности, включающей в себя гностический, конструктивный, организаторский и коммуникативный компоненты.

В современной образовательной ситуации особенно актуальна проблема соотношения целей и мотивов обучения. Основной задачей учителя математики становится обеспечение принятия цели обучения учащимся как цели, имеющей личностно-значимый смысл. Чтобы цель обучения, поставленная учителем, стала целью обучения учащегося, необходимо, чтобы она стала мотивом деятельности ребенка, т.е. каждый учащийся должен понимать, зачем он изучает ту или иную тему курса математики. В каком же соотношении находятся цель и мотив обучения? Важно усвоить, что цель направлена на результат деятельности, а мотив направлен на то, где этот результат может быть использован.

Для учителя проблема целеполагания представляет собой сложную проблему, решение которой включает в себя:

Ознакомление с целями изучения и учебной программой курса.

Знакомство с примерным тематическим планированием.

Установление межпредметных связей в курсе дисциплины.

Умение выделить основной и сопутствующий учебный материал.

Важную роль в подготовке учителя математики играет планирование. Любая деятельность начинается с планирования действий. Подготовка учителя к урокам математики начинается с годового и тематического планирования учебного процесса.

Годовое планирование предполагает распределение тематик уроков и количества часов, отведенных на них, выделение базовых тем учебного материала для повторения и систематизации, подбор средств обучения (наглядных и учебных пособий, оборудования, дидактического материала и др.), распределение уроков по типам.

Тематическое планирование включает в себя определение задач изучения темы, знакомство с содержанием учебного материала, построение логической последовательности изучения темы в соответствии с дидактическими принципами, распределение количества часов на изучение темы, определение роли каждого конкретного урока в системе уроков по теме, выбор средств обучения темы.

2. Уровни сформированности методических умений учителя математики. Содержание деятельности учителя математики опирается на определенные профессиональные знания и умения. В методических умениях различают несколько уровней их сформированности. Первый уровень предполагает осознание цели выполнения методического действия; осмысление его операционного состава; поиск способов выполнения чаще всего на основе образца, приложенного к инструкции. Второй уровень предполагает перенос отдельных сформированных методических умений на новые предметные объекты и более крупные блоки учебного материала. На третьем уровне сформированности методических умений учителя математики наблюдается высокоразвитое методическое умение, которое определяется осознанием мотивов и средств выбора способов деятельности;

использование различных средств и методических умений в соответствии с конкретной педагогической ситуацией. Формирование умений второго и третьего уровней предполагает соответствующую систему теоретической и практической подготовки учителя. Источниками методических знаний учителя математики выступают следующие компоненты (рис. 14).

Рис. 14. Источники методических знаний учителя математики

Вопросы для самоконтроля

1. Какие компоненты включает в себя педагогическая деятельность учителя математики?

2. Какими умениями должен обладать современный учитель математики?

3. Охарактеризуйте деятельность учителя математики с позиции ее функционального назначения:

- гностическая,
- конструктивная,
- организационная,
- информативная,
- контрольно-оценочная.

4. Дайте характеристику уровням методических умений учителя математики.

5. Какую роль в педагогической деятельности учителя математики занимает планирование? Охарактеризуйте виды планирования.

6. Назовите источники методических знаний учителя математики и приведите примеры.

7. Что представляет собой педагогический опыт?

Раздел II. Частная методика обучения математике

2.1. Методика изучения числовых систем

План

1. Характеристика числовых множеств.
2. Научные основы теории числовых систем, изучаемой в школьном курсе математики.
3. Различные подходы к введению числовых множеств.
4. Методика изучения натуральных чисел.
5. Методика изучения обыкновенных и десятичных дробей.
6. Методика изучения отрицательных чисел.
7. Методика введения иррациональных чисел.

1. Характеристика числовых множеств

Учащиеся средней школы должны уметь охарактеризовать известные им числовые множества примерно так:

1) множество N натуральных чисел - бесконечное, упорядоченное, дискретное, с начальным элементом и без конечного элемента, замкнутое относительно сложения и умножения и незамкнутое относительно вычитания и деления;

2) множество Z целых чисел - бесконечное, упорядоченное, дискретное, без начального и конечного элементов, замкнутое относительно сложения, умножения и вычитания, незамкнутое относительно деления;

3) множество Q рациональных чисел - бесконечное, упорядоченное, без начального и конечного элементов, замкнутое относительно сложения, умножения, вычитания и деления (за исключением деления на 0);

4) множество R вещественных чисел - бесконечное, упорядоченное, без начального и конечного элементов, всюду плотное, полное, замкнутое относительно сложения, умножения, вычитания и деления, а также относительно операции определения предела □ сходящейся последовательности вещественных чисел (непрерывное).

2. Научные основы теории числовых систем, изучаемой в школьном курсе математики.

Множество натуральных чисел изучается с начальной школы.

Без понимания структуры множества N нельзя достичь понимания структуры множеств Z, Q, R. Свойства структуры порядка [N,<] и алгебраической структуры [N,+, •] должны быть предметом изучения в связи с развитием понятия числа в школьном курсе.

Уже в начальных классах учащиеся понимают, что отношение "меньше" устанавливает определенный порядок в множестве N. Это объясняется с помощью упражнения: "b следует за a или a предшествует b, если a< b" .

Далее на базе отношения "меньше" можно разъяснить более сложные отношения: "лежит между" и "непосредственно следует за" - это определяет свойство дискретности (то есть между ними нет ничего).

Учащиеся старших классов уже знакомятся с системой аксиом, характеризующей структуру [N,<]:

A1: $\exists x=(1=x')$ (существование начального элемента 1);

A2: $\forall x\exists y(y=x')$ (существует следующее);

A3: $\forall x,\forall y(x=y\Rightarrow x'=y')$;

A4: $\forall x,\forall y(x'=y'\Rightarrow x=y)$;

A5: $P(1)$ и $\forall x(P(x)=P(x')) \Rightarrow \forall yP(y)$ (аксиома полной или математической индукции).

(Если 1 обладает некоторым свойством P и если для всякого натурального числа из того, что оно обладает свойством P, вытекает, что и непосредственно следующее за ним число обладает этим свойством, то всякое натуральное число обладает свойством P).

Понимание аксиом не вызывает затруднений. Необходимо разъяснить учащимся точный смысл следующих свойств алгебраической структуры [N,+, •] .

1. $\forall x\forall y\exists z(x+y=z)$; 2. $\forall x\forall y\exists z(x\cdot y=z)$; 3. $\forall x\forall y(x+y=y+x)$ 4. $\forall x\forall y(x\cdot y=y\cdot x)$; 5. $\forall x\forall y\forall z((x+y)+z=x+(y+z))$; 6. $\forall x\forall y\forall z((x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z))$; 7. $\forall x\forall y\forall z(x(y+z)=xy+zx)$; 8. $\forall x(x\cdot 1=x)$; 9. В множестве $N_0=N\cup\{0\}$ имеется нейтральный элемент относительно сложения $\forall x(x+0=x)$.

Порядковая структура [Z,<], как и [N,<], обладает свойством дискретности (A2), но множество Z не имеет начального элемента (не выполняется A1). Здесь имеет место свойство □$\forall x\forall y(y< x)$.

Алгебраическая структура [Z,+, •] обладает всеми свойствами [N,+, •], то есть вышеперечисленными свойствами 1 - 9 и, кроме того, следующим свойством: 10. $\forall x\ \exists(-x)(x+(-x)=0)$□ (существует симметричный элемент).

Отсюда следует, что уравнение a+x=b всегда разрешимо.

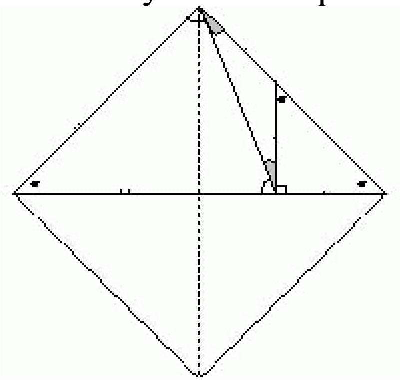
Структура [Z,+] характеризуется тем, что операция "+" ассоциативна, имеет нейтральный элемент и для каждого элемента существует симметричный элемент. В таком случае говорят, что операция "+" определяет в Z групповую структуру или что [Z,+] - группа. Так как операция "+" коммутативна, то это коммутативная группа.

Структура - кольцо (кольцо характеризуется тем, что первая операция "+" придает множеству структуру коммутативной группы, а вторая "•" ассоциативна и дистрибутивна относительно первой).

Структура [Q,<] уже не обладает свойством дискретности. В Q истинно высказывание □$\forall x\forall y(x< y\Rightarrow\exists(x< z$ и $z< y)$ или □$\forall x\forall y(x< y\Rightarrow\exists z(x< z< y)$. Это выражает свойство плотности.

Учащиеся склонны считать множество Q не только всюду плотным, но и полным, то есть покрывающим прямую без пробелов. Это ошибочное понимание порождается восприятием геометрического изображения чисел в виде точек на прямой. Опровергнуть это можно показав несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной.

Используем геометрический эквивалент алгоритма Евклида.



Алгебраическая структура [Q,+, •] обладает всеми свойствами 1-10 и, кроме того, свойством: 11. $\forall x \neq 0\ \exists x^{-1}(x \cdot x^{-1}=1)$, числа x и x^{-1} симметричны относительно умножения и взаимообратны.

Структура [O,+, •] является кольцом, в котором вторая операция (•) придает множеству Q новую групповую структуру, если только удалить из Q нейтральный элемент относительно первой операции (т. е. O), причем эта группа [Q, •] тоже коммутативна. В таком случае говорят, что операции "+" и "•" придают множеству Q структуру поля.

Полем называется множество, в котором определены операции "+" и "•" и выполняются следующие условия:

1. $x+y=y+x$
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$
3. $xy=yx$
4. $x(yz)=(xy)z$
5. $x(y+z)=xy+xz$
6. $0+x=x$ (нейтральный элемент, нуль относительно сложения)
7. $1\cdot x=x$ (нейтральный элемент относительно умножения)
8. $x+(-x)=0$ (противоположный элемент)
9. $x\cdot x^{-1}=1$ (обратный элемент)

Имеются различные теории изложения действительных чисел (по Вейерштрассу, по Дедекинду или по Кантору). Рассмотрим лишь вопросы о различии структур Q и R, если R получено дополнением Q до бесконечности десятичными непериодичными дробями (иррациональными числами).

1.Показываем, что бесконечные десятичные дроби порождают пары сходящихся числовых последовательностей (с недостатком и с избытком) 1,4<1,41<1,414<...< $\sqrt{2}$< ...< 1,4,15<1,42<1,5

2.Показываем, что это число ($\sqrt{2}$) - единственное (как предел).

3. Различные подходы к введению числовых множеств

Изучение чисел в школьном курсе математики ведется в такой *последовательности*: натуральные числа, нуль, дроби (положительные), отрицательные числа и множество рациональных чисел, иррациональные числа и множество действительных чисел. Эта последовательность отражает исторический путь развития понятия числа в математике: $\mathbf{N}\to\mathbf{Q^+}\to\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$ (*историческая схема развития понятия числа*). В математике дроби возникли значительно раньше, чем отрицательные числа.

В современной математике принята другая последовательность: $\mathbf{N}\to\mathbf{Z}\to\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$ ёё (*логическая схема развития понятия числа*). От исторической она отличается более ранним введением отрицательных чисел. Поэтому в такой последовательности после натуральных чисел изучаются целые числа. Множество Z по своим свойствам проще множества Q^+, например, множество Z - дискретное, а множество Q^+ - плотное. Это является одним из преимуществ логической схемы. Приверженность школьного курса исторической схеме объясняется тем, что понятие дроби доступнее, чем понятие отрицательного числа. Совершенствование методики изучения отрицательных чисел, проникновение их в повседневную деятельность людей способствуют более раннему изучению отрицательных чисел. В настоящее время отрицательные числа изучаются в начале VI класса. До введения программы по математике 1968 г. они изучались во втором полугодии VII класса. В раннем изучении отрицательных чисел проявляется действие логической схемы развития понятия числа. (Существенную роль в развитии этой тенденции сыграли эксперименты Л.В. Занкова, П.Я. Гальперина, В.В. Давыдова и др.).

В школьном курсе изучение отдельных числовых систем носит *концентрический характер*. Поэтому последовательность изучения чисел в школе сложнее, чем приведенные выше историческая или логическая схемы развития понятия числа (в программе по математике проследите последовательность изучения числовых множеств; выявите, в чем состоит усложнение учебной схемы развития понятия числа, и чем оно вызвано?).

Многоэтапность изучения чисел в школе возрастает также за счет того, что для некоторых из них рассматриваются различные содержательные трактовки (интерпретации). В школьном учебнике в подобных случаях говорится о "различных формах записи чисел". Например, рациональное число представляется и как дробное число, и как десятичная дробь. При этом возникают определенные методические проблемы: объяснение учащимся целесообразности "двойного" изучения рациональных чисел (внутриматематические, практические потребности), определение соотношения различных подходов (чему больше уделять внимания: изучению рациональных чисел и представления их как дробных чисел или как десятичных дробей), выбор последовательности изучения (что изучать вначале: обыкновенные дроби или десятичные дроби).

В математике существуют два подхода к построению числовых систем: *аксиоматический* и *конструктивный*. В школьном курсе присутствуют элементы обоих этих подходов. Некоторое применение в школьных учебниках находит *операторная точка зрения на число* (операторному истолкованию числа много внимания уделял, например, Н. И. Лобачевский).

Определенную роль в развитии методики изучения числовых систем сыграли дискуссии об умножении и делении на дробь (1949-1950 гг.), о последовательности изучения тем "Обыкновенные дроби" и "Десятичные дроби" (1961 - 1962 гг.).

4. Методика изучения натуральных чисел

Правильная ориентация в методике изучения натуральных чисел в V классе предполагает знание, с одной стороны, связи данной темы с курсом I - IV классов, с другой стороны - знание нового в содержании учебного материала и методике его изложения в V классе. Необходимо также учитывать общие особенности учебника математики V класса. В этом учебнике *усиливается роль теоретического материала*: приводятся определения, математические термины и обозначения, формулируются факты и законы, отдельные факты получают теоретическое объяснение. В учебниках соответствующий теоретический материал излагается в виде небольших фрагментов, после чего приводятся упражнения и задачи.

Рассмотрим методические вопросы изучения теоретического материала (понятий, фактов, обоснований) и решения задач.

В V классе даются определения (или описания) понятий: натурального числа, десятичной записи числа, миллиарда, координатного луча, координаты точки, суммы двух чисел, слагаемых, числового выражения, значения выражения, разложения числа по разрядам, разрядных слагаемых, разности двух чисел, уменьшаемого, вычитаемого, произведения двух чисел, множителей, частного двух чисел, делителя числа, кратного числа и др. При этом учителю необходимо различать, в каком случае в учебнике приводится полноценное в логическом отношении определение, а в каком - описание понятия, не претендующее на строгость.

Обратимся, например, к понятию натурального числа, являющемуся центральным в данной теме. В учебнике говорится, что "числа, употребляемые при счете предметов, называются *натуральными числами"* . С чем мы имеем дело в данном случае: с определением или описанием? Конечно, с описанием.

В математике при аксиоматическом построении теории натуральных чисел (например, на основе аксиом Пеано) понятие натурального числа является неопределяемым (исходным). Оно определяется косвенным способом: натуральным числом может быть любой объект, который удовлетворяет системе аксиом. В количественной теории натуральных чисел натуральное число определяется как мощность конечного множества. В учебнике по понятным причинам эти определения не приводятся. В тех случаях, когда понятие вводится описанием, заучивать соответствующую формулировку с учащимися, конечно, не нужно.

Посмотрим, каким образом вводятся понятия "вычесть из числа a число b", "разность чисел a и b", "уменьшаемое", "вычитаемое". В учебнике говорится: "Вычесть из числа а число b - значит найти такое число x, которое в сумме с числом b дает a: $x + b = a$. Число x называют разностью чисел a и b, число a - уменьшаемым, а число b - вычитаемым". Это уже пример настоящего определения, которое именно в таком виде широко используется в математической науке.

Наличие определений в V классе является одним из признаков повышения теоретического уровня изложения учебного материала. Понятие разности двух чисел должно быть разъяснено, а формулировка определения - тщательно отработана. Таким образом, учителю важно выяснить для себя, какие понятия, относящиеся к натуральным числам, вводятся в учебнике описанием, а какие - определением. Это позволит четче выделить элементы нового подхода в методике изучения натуральных чисел в V классе (по сравнению с методикой изучения числового материала в начальных классах).

Усиление роли теоретических объяснений проявляется *в сочетании индукции и дедукции* (приведите примеры).

5. Методика изучения обыкновенных и десятичных дробей

Первое знакомство с обыкновенными дробями происходит в III классе параллельно изучению натуральных чисел. Систематическое изучение дробей начинается в V классе. Десятичные дроби не являются новыми числами по сравнению с обыкновенными дробями. Они представляют лишь другую запись ранее известных обыкновенных дробей со знаменателями 10, 100, 1000 и т. д. В математических вычислениях и практических расчетах более удобными являются десятичные дроби. Обыкновенные дроби в вычислениях используются гораздо реже. Современный пример применения десятичных дробей в вычислениях дают ЭВМ, которые оперируют именно с такими дробями. В связи с этим в методике математики существует проблема *порядка изучения обыкновенных и десятичных дробей*. Рассмотрим возможные подходы к решению этой проблемы: 1) вначале изучаются обыкновенные дроби, затем - десятичные (традиционный подход); 2) вначале изучаются десятичные дроби, затем - обыкновенные; 3) смешанный вариант, при котором изучение обыкновенных и десятичных дробей чередуется. В действующем учебнике V класса придерживаются смешанного варианта. Вначале в нем вводится понятие обыкновенной дроби. Затем рассматриваются вопросы сравнения, сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. После этого осуществляется переход к десятичным дробям и рассматриваются все четыре арифметических действия над ними. Изучение десятичных дробей начинается и заканчивается в V классе. После этого в VI классе вновь возвращаются к обыкновенным дробям: изучают сравнение произвольных дробей, арифметические действия над ними. Понятие процента примыкает к понятию десятичной дроби. Проценты - это новая форма записи десятичных дробей со знаменателем 100.

Центральным в теме "Дробные числа" (V класс) является понятие обыкновенной дроби. Оно вводится таким описанием (аналогично тому, как это делалось в III классе): приводится рисунок с изображением пирога, разрезанного на четыре равные части. Одна из них лежит на одной тарелке, а три части - на другой. Говорят: "На первой тарелке лежит одна четвертая часть пирога, а на второй - три четвертых части пирога". Пишут:

"1/4 пирога, 3/4 пирога". Далее сообщают, что такие числа, как 1/4 и 3/4, называют обыкновенными дробями. В дроби 3/4 число 3 называют числителем дроби, а число 4 - ее знаменателем. *Характеристика дроби начинается со знаменателя: знаменатель показывает*, на сколько равных частей разрезан пирог, а числитель - сколько надо взять таких частей. Числитель пишут над чертой, а знаменатель - под чертой. Проведенные разъяснения повторяются на других примерах. Вместо пирога может быть взят круг (отрезок, прямоугольник, квадрат), разделенный на шесть (восемь, семь, восемнадцать) равных частей.

В соответствии с изложенным можно предложить следующую методическую схему введения понятия обыкновенной дроби в V классе: 1) выполнить материализованные действия по делению предмета на 4 равные части; 2) сообщить термины "одна четвертая", "три четвертых"; 3) ввести записи: 1/4, 3/4; 4) сообщить термины "обыкновенная дробь", "числитель дроби", "знаменатель дроби"; 5) дать содержательную характеристику дроби (что показывает знаменатель дроби, что показывает ее числитель); 6) привести другие примеры дробей, записать и прочитать их.

Задание. К практическому занятию приготовьте модель, которой можно воспользоваться при введении понятия обыкновенной дроби. Разработайте беседу с учащимися по введению данного понятия.

Важным элементом методики изучения чисел является *убеждение учащихся в целесообразности введения новых чисел*. Возможность записать доли с помощью обыкновенных дробей является одним из приемов убеждения учащихся в полезности таких дробей. Помимо этого существуют еще два других приема, показывающих необходимость введения дробных чисел. Мотивировать введение дробных чисел можно также тем, что с их помощью операция деления натуральных чисел делается всегда выполнимой. Как известно, в множестве натуральных чисел число 2 не делится на число 3. Дополним это множество дробями и вновь рассмотрим деление числа 2 на 3. Пусть требуется 2 яблока разделить между 3 учениками. Как это сделать? (Объясните).

Третий прием мотивации введения дробных чисел связывается с задачей измерения величин. Пусть, например, требуется измерить длину отрезка в сантиметрах (выбирается отрезок, длина которого меньше 1 см). При измерении учащимися отрезка обнаруживается, что его длина меньше 1 см. Для измерения такого отрезка удобно привлечь доли 1 см - миллиметры, при этом учитывая, что 1 мм = 1/10 см. Пусть длина отрезка оказалась равной 9 мм. Это означает, что отрезок содержит 9/10 см. Как видно, длина данного отрезка выражается в сантиметрах дробным числом. Без дробных чисел измерение его в сантиметрах невозможно.

Тенденция на усиление роли теоретических объяснений имеет место и при изучении темы "Дробные числа". По аналогии с натуральными числами дайте объяснение правил сложения и вычитания десятичных дробей. (приведите примеры).

6. Методика изучения отрицательных чисел

Первая методическая задача, возникающая при введении отрицательных чисел, состоит в том, чтобы *убедить учащихся в необходимости введения новых чисел*. Достигается это с помощью *целесообразно подобранных задач*. Приведем примеры таких задач: *Белка вылезла из дупла и бегает по стволу дерева вверх и вниз. Покажите на рисунке:*

1) где будет находиться белка, если она удалена от дупла на 3 м (Можно ли указать местоположение белки единственным образом?);

2) где окажется белка, если она будет: а) выше дупла на 2 м; б) ниже дупла на 3 м; в) ниже дупла на 1,5 м; г) выше дупла на 2,5 м.

При решении этих задач устанавливается, что для того, чтобы определить местоположение белки на дереве, необходимо знать: расстояние, на которое она удалена от дупла, и направление, в котором она переместилась (выше дупла, ниже дупла). Выясняется, что известных чисел недостаточно для того, чтобы охарактеризовать ими и расстояние, и направление. Необходимы новые числа.

Рассмотренные выше задачи полезно представить в более *математизированной форме*. Для этого достаточно вместо дерева взять прямую, вместо дупла - некоторую фиксированную точку этой прямой, вместо белки - произвольную точку прямой. Созданию наглядно-геометрической основы для введения новых чисел служит такая задача.

Проведите прямую слева направо и отметьте на ней точку О. Изобразите на этой прямой точки А, В, С и К, если известно, что точка А расположена правее О на 6 клеток, точка В - правее О на 5,5 клетки, точка С - левее О на 2 клетки и точка К ~ левее О на 7,5 клетки.

В результате учащиеся будут подготовлены к восприятию понятия "координатная прямая". Учителю останется лишь ввести термины: "начало отсчета", "положительное направление прямой", "отрицательное направление прямой". Если положительное направление обозначать знаком " + ", а отрицательное - знаком "-", то ясно, что положение точки А в предыдущей задаче определяется числом +6, положение точки В - числом +5,5, положение точки С - числом -2, положение точки К - числом -7,5, положение самой точки О - числом 0. Числа +6, +5,5, 0 были известны ранее, числа -2, -7,5 - новые. Числа +6, +5,5, ... называются положительными (их можно записывать и без знака "+"), числа -2, - 7,5 ...- отрицательными. С помощью положительных, отрицательных чисел и числа 0 можно полностью охарактеризовать положение точки на прямой.

Важно, чтобы учащиеся осознали не только необходимость введения новых чисел, но и правильно понимали их смысл. В этих целях полезны упражнения на чтение и запись положительных и отрицательных чисел, на изображение их точками на координатной прямой.

Полезны задания и на обратный перевод (с математического языка на естественный):

Посмотрим, как вводятся действия над положительными и отрицательными числами. Правила выполнения действий над положительными и отрицательными числами устанавливаются на основании решения содержательных задач (например, задач на определение температуры). Математические формулировки этих правил опираются на понятие модуля числа.

Задание. Составьте план урока по изучению понятия модуля числа.

Приведем *методическую схему введения правила сложения положительных и отрицательных чисел* (в основу ее положено индуктивное обобщение):

1) показать, что результат изменения температуры находится с помощью действия сложения;

2) на основании измерений температуры с помощью термометра выполнить следующие действия: + 2 + (+3)=+5, -2 + (-3)=-5, 2 + (+3)= +1, +2 + (-3)=-1;

3) ввести установку: каждое число определяется своим модулем и знаком; с помощью этой установки высказать догадки о том, как найти модуль суммы и ее знак (соответствующие записи полезно оформить в виде таблицы):

+2+ (+3)=+(|+2| + |+3|)=+5, -2 + (-3)=-(|-2| + |-3|)=-5,

-2 + (+3)= +(|+3| - |-2])= +1, +2+ (-3)=-(|-3| - |-2|)=-1;

4) сформулировать правило сложения чисел с одинаковыми и разными знаками;

5) закрепить это правило письменными упражнениями с подробными записями;

6) осуществить переход к более сокращенным записям вычислений, сопроводив их полным устным комментарием;

7) на следующем уроке (в качестве повторения и закрепления правила) привести схему соответствующего алгоритма.

При изучении сложения и вычитания положительных и отрицательных чисел рекомендуется использовать элементы методики В.Ф. Шаталова, например, игру "Бильярд". Рисунок для игры остается на обратной стороне доски и висит дней десять (меняются только числа).

Говорим так: (+3) да (-4) (пауза, дети считают и показывают ответ на планшетах или другим способом) (-1); (-10) да (+11) : (+1) и т.д.

I игра (1 - 1,5 мин.). Учитель показывает и громко называет числа, дети считают и показывают ответ: (+1) да (-2) : (-1) и т. д. 9 - 10 примеров.

II игра. Вызывается к доске 2 человека, один другому показывает примеры, а после пятого показа - ответ (называет второй ученик, весь класс тоже играет с этими учениками, учитель контролирует правильность ответов). Затем ученики меняются ролями. Остается у доски тот, кто дает правильный ответ, а если ошибается, то садится на место, а к доске выходит следующий ученик и т.д.

III игра. Учитель показывает несколько чисел (не говоря вслух), а учащиеся, сосчитав, показывают ответ. Потом ответ называет учитель.

IV игра. Начинается, когда на доске записаны примеры вида: (-9) + (-6) - (+2) - (+4) + (8) + : = : . Самые различные варианты. Как видим, здесь введена скобка, учитель объясняет, что если перед ней стоит "+", то он "съедает" скобку, а если "-", то знак меняется на противоположный (это пропедевтика раскрытия скобок, поэтому пока дается такое объяснение без всяких теоретических обоснований).

Приведенный выше пример читается так: (-9) да (-6) : (-15), да (-2) и т.д.

Первоначально примеры читает сам учитель, затем можно использовать следующие варианты этой игры:

а) ведет игру ученик, который говорит громко;

б) далее вызывается ученик, который говорит тихо;

г) игра *"инкогнито"*: указанный пример дети считают сами, как только ответ готов, выбегают к доске и пишут на тыльной стороне ответы; потом считают вслух все вместе и пишут ответ на доске, после чего отворачивают доску и сверяют ответы (каждый знает, где написан его ответ). Затем можно игру повторить, но с записью ответов на лицевой стороне доски.

Учитель может придумать самые различные варианты игр такого типа. А через десять дней он убедится, что все школьники прекрасно овладели сложением и вычитанием положительных и отрицательных чисел.

Приведем *методическую схему введения правила умножения положительных и отрицательных чисел*:

1) предложить задачу: "Температура воздуха изменяется в течение b суток, причем в каждые сутки на *a* градусов. Как изменится температура через b суток (по сравнению с настоящим моментом), если: а) a = 2, b = 3-б) a = -2, b= 3; в) a = 2, b= -3; г) a = -2 b= -3?";

2) выяснить смысл высказываемых в задаче предложений: что означает утверждение о том, что температура воздуха изменилась на *a* градусов, если *a* равно: 2; -2; объяснить смысл утверждения о том, что температура изменяется в течение *b* суток, если *b* равно-3; -3;

3) провести решение задачи для случая а: "За 3 суток температура повысится в 3 раза; увеличение в 3 раза находится умножением на 3; отсюда искомое изменение температуры получим, если 2 умножим на 3:

+2 •(+3) = = +6". Так как остальные задачи - аналогичные, то делается вывод, что они также должны решаться с помощью умножения. Поэтому возникает необходимость научиться выполнять умножение с положительными и отрицательными числами;

4) сформулировать задачу для случая б: "Как изменится температура воздуха через 3 суток, если каждые сутки она понижается на 2 градуса?" и привести ее решение: "Вначале устанавливается, что температура воздуха через 3 суток понизится на 6 градусов. Это понижение характеризуется числом -6 и делается запись ab = (-2) • (+3) = -6";

5) поставить и решить задачи для остальных случаев, сделать аналогичные записи: ab = 2•(-3) =-6, ab = (-2) • (-3)=+6;

6) высказать догадку о том, как найденные произведения можно получить математическим способом;

7) сформулировать правило умножения положительных и отрицательных чисел;

8) закрепить это правило составлением схемы соответствующего алгоритма и письменными упражнениями с подробными записями, показывающими, как выбирается знак произведения и находится его модуль;

9) осуществить постепенный переход к сокращенным записям вычислений [19, с. 100 - 101].

7. Методика введения иррациональных чисел

В математике существуют различные построении теории действительных чисел (по Дедекинду, Вейерштрассу, Кантору и др.). Однако все эти построения являются сложными (не случайно, что в математике они окончательно оформились лишь во второй половине XIX в.). Имеются попытки относительно строгого построения действительных чисел для учащихся математических классов, кружковой работы, но они не пригодны для массовой школы. Вместе с этим понятие действительного числа (как бесконечной десятичной дроби), основные факты теории действительных чисел доступны учащимся уже в VII-VIII классах. В настоящее время наблюдается тенденция более раннего завершения изучения действительных чисел. Программа рекомендует знакомить с представлением рациональных чисел в виде бесконечной десятичной дроби в VI классе, с понятиями иррационального и действительного чисел в VIII классе. В дальнейшем к рассмотрению действительных чисел на более высоком уровне строгости в средней школе не возвращаются. Раннее изучение действительных чисел ускоряет формирование у учащихся цельной системы знаний о числах, полнее обеспечивает потребности практики вычислений, позволяет строже изложить некоторые вопросы о функциях и т. д.

Известно, что для практических вычислений множества рациональных чисел достаточно. Поэтому мотивировка введения иррациональных чисел опирается, прежде всего, на выявление *внутренних потребностей* *математики*. Они обнаруживаются, например, при решении следующих задач:

1. Решить уравнение: $x^2 = 2$.
2. Найти отношение длины окружности к диаметру.
3. Найти сторону квадрата, если его площадь равна 3.
4. К множеству каких чисел относятся числа: 2,565565556...; 7,232332333...; 0,12312341234512345б... и т.д.

Задание. 1**.** Используя данные задачи, объясните методические особенности введения иррациональных чисел.

2. Изучите по учебникам, как вводятся действия над действительными числами, как разъясняется их *арифметический* и *геометрический* смысл.

Вопросы для самоконтроля.

1. В какой последовательности ведется изучение чисел в школьном курсе математики?
2. Какова история развития понятия числа?
3. В чем проявляется концентрический характер изучения отдельных числовых систем в школьном курсе?
4. Каковы особенности изучения натуральных чисел в начальной школе? В V классе?
5. Какие умения и навыки необходимо сформировать у учащихся V класса при изучении натуральных чисел; при изучении десятичных дробей?
6. Каким образом вводятся правила выполнения арифметических действий над многозначными числами? Какую роль при этом играют индукция и дедукция?
7. Какие подходы к изучению обыкновенных и десятичных дробей существуют в школьном курсе математики? Какой подход, с Вашей точки зрения, рациональнее? Дайте обоснование.
8. Какова методическая схема введения понятия обыкновенной дроби в V классе?
9. Как Вы объясните учащимся необходимость введения новых чисел: дробных, отрицательных, иррациональных?
10. Какова роль исторического материала при изучении темы?
11. Как применить теорию поэтапного формирования умственных действий при изучении натуральных чисел, обыкновенных и десятичных дробей? Приведите примеры.
12. Какие методические приёмы используются при введении отрицательных чисел и при изучении действий над ними?
13. Что называется модулем числа? С какой целью вводится это понятие в школьном курсе математики? Каковы методические особенности его изучения?
14. Какие числа называются натуральными, целыми, рациональными, иррациональными, алгебраическими, трансцендентными, действительными?

Даются ли им определения в школьном курсе математики? Как можно классифицировать действительные числа? Приведите примеры различных схем.

2.2. Линия тождественных преобразований в курсе математики

План

1. Значение тождественных преобразований в курсе математики.
2. Алгебраический и функциональный подходы к изложению раздела "Тождественные преобразования".
3. О различных трактовках понятия тождества.
4. Методические особенности изучения тождественных преобразований.

1. Значение тождественных преобразований в курсе математики

Программа по математике выделяет в курсе алгебры четыре основных раздела: "Рациональные и иррациональные числа", "Тождественные преобразования", "Уравнения и неравенства", "Элементарные функции".

Раздел "Тождественные преобразования" занимает центральное место. Изучение тождественных преобразований, *во-первых*, имеет самостоятельное значение. Это обусловлено тем, что данный учебный материал связан со следующими вопросами:

а) обобщение операций над числами, проведение вычислений "в общем виде", обучение использованию букв в математике и ее приложениях;

б) классификация и распознавание алгебраических выражений, преобразование выражений к стандартному виду;

в) рационализация выражений.

Во-вторых, тождественные преобразования играют роль вспомогательного "инструмента" при решении уравнений и неравенств, при исследовании функций и ряде других тем школьного курса математики.

В-третьих, тождественные преобразования имеют большое воспитательное значение, так как они способствуют развитию у учащихся операционного мышления, воспитанию таких качеств личности, как целеустремленность в поиске решения, сообразительность, аккуратность.

2. Алгебраический и функциональный подходы к изложению раздела "Тождественные преобразования"

Существует два основных подхода к изложению раздела "Тождественные преобразования": алгебраический и функциональный. *Алгебраический подход* устремляет внимание к букве и к операциям над буквами. Отправным пунктом *функционального подхода* является общее понятие функции как соответствия между независимыми и зависимыми переменными.

При алгебраическом подходе на преобразуемое выражение мы смотрим как на формальное выражение, не задумываясь над тем, какие значения принимают входящие в него буквы (с точки зрения алгебры мы его рассматриваем как элемент кольца многочленов от нескольких букв, или поля отношений этого кольца). Тождественность преобразований опирается на правила действий над выражениями (многочленами и рациональными дробями), на свойства действий и правила подстановки и замены равным выражением.

При функциональном подходе алгебраическое выражение трактуется как "поставщик" правила для вычисления значений некоторой функции. Поэтому входящие в выражение буквы понимаются как переменные, а тождественные преобразования опираются на условие равенства функций (т.е. на равенство значений при всех допустимых значениях переменных).

Алгебраический подход является главенствующим в дореформенных и пробных учебниках алгебры, функциональный - в действующих. И в тех, и в других учебниках есть свои достоинства и недостатки. Одним из возможных путей устранения недостатков является путь, основанный на рациональном сочетании алгебраического и функционального подходов.

В любой области знаний, использующей математику, появляется необходимость заменять одно выражение другим, более простым или более удобным, для решения рассматриваемой задачи. Иначе говоря, приходится совершать тождественные преобразования выражений. Они составляют одну из основных линий школьного курса математики.

Проследим цепочку тождественных преобразований от класса к классу. В начальной школе формируются навыки устного выполнения действий над однозначными и двузначными числами. Решение основывается на непосредственном применении свойств действий или на предварительном преобразовании хотя бы одного из компонентов.

В V классе развитие культуры устных вычислений начинается с повторения устной нумерации, которая постепенно расширяется миллиардом. Повторяются арифметические действия и их свойства. Приемы устных вычислений и тождественных преобразований усваиваются более осознанно, особенно при их обосновании с подробными записями:

$526 + 241 = (500 + 20 + 6) + (200 + 40 + 1) = (500 + 200) + (20 + 40) + (6 + +1) = 700 + 60 + 7 = 767$.

Расширяется и обобщается понятие о числе, вводятся новые действия и тождественные преобразования совершенствуются (введение дробных и отрицательных чисел в VI классе, рациональных чисел в VII классе, изучение степеней и корней и т.д.). Затем в старших классах тождественные преобразования усложняются в связи с рассмотрением логарифмов, тригонометрических функций т. п.

На протяжении всего обучения необходимо отметить важную роль устных упражнений, цель выполнения которых должна сообщаться ученикам (о значении устных упражнений прочитать самостоятельно) [11, с. 84].

3. О различных трактовках понятия тождества

Прежде чем говорить о методике тождественных преобразований, рассмотрим понятие тождества.

Определение 1. Равенство, верное при любых значениях переменных, называется тождеством.

Два выражения называются тождественно равными, если при любых значениях переменных соответствующие значения этих выражений равны. Замену одного выражения другим, ему тождественно равным, называют тождественным преобразованием этого выражения.

Определение 2. Равенство, верное при всех допустимых значениях переменных, называется тождеством.

Под допустимыми значениями переменных здесь подразумеваются все значения переменных, при которых имеют смысл левая и правая части рассматриваемого равенства.

Определение 3. Равенство, верное при любых значениях переменной (пар значений переменных, троек значений переменных и т.д.), принадлежащих данному множеству, называется тождеством на этом множестве.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему на данном множестве, называют тождественным преобразованием этого выражения на указанном множестве.

Выясним достоинства и недостатки каждого из этих подходов.

Определение 1 имеет краткую формулировку. Оно удобно, если ограничиться рассмотрением целых рациональных выражений. Однако по этому определению нельзя считать тождественными даже такие равенства, как $\frac{a^2}{a} = a$ (ложно при $a = 0$) и $\sqrt{a} * \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (ложно, если $a < 0$, $b < 0$).

Отмеченных недостатков лишено определение 2. Все равенства, которые являются тождествами по определению 1, будут тождествами и по определению 2. А кроме того, еще и такие, как $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$; $\left(a^{-2}\right)^{-3} = a^6$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\lg a + \lg b = \lg(ab)$; $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$.

К сожалению, определению 2 удовлетворяют не только приведенные выше, но и такие равенства, как $\sqrt{-x} = \sqrt{x}$, $\sqrt{1 - x^4} = \sqrt{x - 1}$. Очевидно, что такие "тождества" с практической точки зрения не интересны.

Как известно, ценность тождеств состоит в том, что одно выражение заменяют другим, тождественно равным первому, второе - третьим и т.д. Иначе говоря, представляют интерес такие тождества, которые обладают свойством: из того, что $(A \equiv B \text{ и } B \equiv C) \Rightarrow A \equiv C$.

С этой точки зрения определение 2 тоже имеет дефекты, так как указанным свойством не обладает ряд равенств, которые являются тождествами по определению 2. Действительно, $\sqrt{x^2} = \left(\sqrt{x}\right)^2$ и $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ - тождества, а равенство $\sqrt{x^2} = x$ не является тождеством. И таких примеров можно привести сколько угодно.

Использование многих равенств, являющихся тождествами по определению2, при решении уравнений может привести к уравнению, неравносильному данному. Например, замена $\sqrt{x}*\sqrt{x+3}$ тождественно равным ему выражением $\sqrt{x*(x+3)}$ при решении уравнения $\sqrt{x}*\sqrt{x+3}=2$ приводит к уравнению $\sqrt{x*(x+3)}=2$, неравносильному данному (ему удовлетворяет $x=-4$ - "посторонний корень").

Указанных недостатков не имеет определение 3. Из определения тождества на множестве непосредственно следует, что отношение тождественного равенства на данном множестве между выражениями рефлексивно, симметрично и транзитивно. Таким образом, отношение тождественного равенства на данном множестве между выражениями является отношением эквивалентности.

При подходе к понятию тождества по определению 3 проводится теоретико-функциональная точка зрения. Она хорошо раскрывает смысл тождественно равных выражений: два выражения с одной переменной тождественно равны на данном множестве M, если при любых значениях переменной, принадлежащих данному множеству M, равны их соответствующие значения. При таком подходе легко доказать, что два выражения $A(x)$ и $B(x)$ на указанном множестве M не являются тождественно равными. Для этого достаточно найти такое $x_0 \in M$, при котором $A(x_0) \neq B(x_0)$. Например, выражения x^2+x^2 и x^4 не являются тождественно равными на множестве R, так как при $x=1$ $1^2+1^2 \neq 1^4$.

Доказать же, что два выражения являются тождественно равными на некотором бесконечном множестве, опираясь на теоретико-функциональную точку зрения на понятие тождества, невозможно.

Для этого пользуются некоторыми исходными тождествами, выражающими свойства операций, истинность которых принимается в качестве аксиом:

1. $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$;
2. $a+b=b+a$, $ab=ba$;
3. $0+a=a$, $1*a=a$;
4. $a+(-a)=0$, $a*\frac{1}{a}=1, (a \neq 0)$;
5. $a(b+c)=ab+ac$. Опираясь на эти тождества, выводят новые тождества, которые выражают правила тождественных преобразований, изучаемые в школьном курсе алгебры. Например, тождество $(a+b)*(c+d)=ac+bc+ad+bd$, для доказательства которого полагают $a+b=x$ и т.д. При выводе новых тождеств используются также некоторые определения, например, $x^5=xxxxx$, $a^0=1$, если $a \neq 0$.

Выражения и их виды

В школьном курсе математики рассматриваются различные выражения. Например, выражение $\frac{x+2y}{y-3x}$ содержит операции сложения, вычитания, умножения и деления.

Выражения, которые не содержат иных действий над переменными, кроме сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения корня, возведения в степень с рациональным показателем, называют алгебраическими.

Алгебраические выражения можно разбить на два класса: рациональные и иррациональные.

К рациональным относят выражения, которые не содержат других действий над переменными, кроме сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

К иррациональным выражениям относят все остальные алгебраические выражения, то есть выражения, содержащие извлечение корня или возведение в степень с дробным показателем.

Рациональные выражения также можно разбить на два класса: на множество целых выражений и множество дробных.

К целым рациональным относят выражения, которые не содержат деления на выражение с переменными.

Дробными считают те рациональные выражения, которые не являются целыми, то есть содержат деление на выражение с переменными и возведение переменной в степень с отрицательным показателем.

Кроме алгебраических, в школьном курсе математики рассматриваются выражения, которые содержат переменные под знаком $\lg, Sin, Cos, tg$,знаком модуля, а также выражения, содержащие операцию возведения в степень с иррациональным показателем. Такие выражения называются неалгебраическими.

Заметим, что выражения $\lg 2, Sin1$, хотя и содержат знаки $\lg$ и Sin, являются алгебраическими, так как под знаками $\lg$ и Sin находятся не переменные, а числа.

Проведенная классификация относит то или иное выражение к определенному классу по "внешнему виду", то есть в зависимости от производимых операций. Эта точка зрения отражена и в действующих учебниках. Заметим, что выражение одного класса может быть тождественно равным выражению другого класса. Например, неалгебраические выражения $3^{\log_3(x+1)}$ и $|a|$ тождественны на множестве всех целых чисел соответственно алгебраическим выражениям $x+1$ и $\sqrt{a^2}$.

Задание: ознакомьтесь с расширением тождественных преобразований в средней школе с V по IX класс включительно (изучите программу по математике и учебники).

4. Методические особенности изучения тождественных преобразований.

При изучении тождественных преобразований учитель должен показать учащимся образцы рассуждений, полезны и общие указания типа: перед вычислением или преобразованием выяснить:

1) последовательность выполнения действий, преобразований;

2) какие действия (преобразования) можно выполнить устно;

3) нельзя ли применить свойства действий для упрощения вычислений (преобразований);

4) вести ли запись в виде цепочки равенств или по нумерованным действиям (частям) или составить удобную вычислительную схему;

5) как проверить результат.

Не забывать приемы устных вычислений!

Следует иметь в виду, что к формированию навыков тождественных преобразований выражений целесообразно приступать лишь тогда, когда учащиеся усвоят содержание изучаемых вопросов и познакомятся с основными приемами преобразований, которые подлежат изучению. При этом важно, чтобы учитель давал такие указания, которые бы служили руководством к действию в разнообразных ситуациях.

Например, при сокращении дроби $\frac{a^3-a^2b}{a^2-a^2b}$ учитель (или ученик) говорит о том, что для сокращения необходимо разложить на множители числитель и знаменатель, выделив у них общий множитель. Такая рекомендация годится не только к этой дроби, но и к любой другой. А если мы скажем, что нужно в числителе и знаменателе вынести общий множитель за скобки и т.п., то такое указание носит частный характер и может оказаться неприменимым в другом случае, например, $\frac{a+b}{a^2-b^2}$. Кроме того, это рекомендация о способе разложения, а не о самом факте разложения.

Ученики при выполнении тождественных преобразований выражений допускают ошибки такого рода:

$$5a+13=18a,\ \frac{x+3}{6}=\frac{x}{2},\ x-(y+z+t)=x-y+z+t,\ (a-b)^2=a^2-b^2,\ Sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}Sin\alpha;$$

Каковы причины этих ошибок? Укажите приемы их исправления.
Как предупредить ошибки такого рода?

Вопросы самоконтроля.

1. Что называется тождеством? Дайте различные определения и сделайте их сравнительный анализ.
2. Какие способы доказательства тождеств Вы знаете?
3. Какие выражения называются тождественно равными?
4. Что называется тождественным преобразованием выражения?

5. Какие выражения называются алгебраическими, рациональными, иррациональными, целыми, дробными, неалгебраическими?
Дайте классификацию этих выражений. По какому признаку Вы ее выполнили? Приведите примеры выражений каждого вида.
6. В чём состоит ценность тождеств в обучении математике?
7. Какова роль примеров и контрпримеров при доказательстве тождеств?

2.3. Методика изучения линейной, степенной и квадратичной функции

План
1. Методическая схема изучения функций.
2. Методические особенности изучения линейной функции.
3. Методические особенности изучения квадратичной функции.
4. Методические особенности изучения степенной функции.

1.Методическая схема изучения функций. Значительная часть материала функциональной линии относится к изучению класса функций, получивших название элементарных. К *элементарным* принадлежат целые функции, рациональные функции, степенные, показательная, логарифмическая, тригонометрическая и обратные тригонометрические функции, а также различные их комбинации.

Опыт показывает, что изучение конкретных функций полезно проводить по следующей *методической схеме*.

1. Рассмотреть конкретные ситуации (или задачи), приводящие к данной функции. На этом этапе учащиеся должны убедиться в целесообразности изучения данной функции, исходя из соображений практики или дальнейшего развития теории.

2. Сформулировать определение данной функции, дать запись функции формулой, провести исследование входящих в эту формулу параметров. На этом этапе изучения учащиеся получат четкое представление о данной функции, о ее характеристических свойствах, выделяющих данную функцию из множества других.

3. Ознакомить учащихся с графиком данной функции. На этом этапе они учатся изображать изучаемую функцию графически, отличать по графику данную функцию от других, заданных графиком функций, устанавливать влияние параметров на характер графического изображения функции.

4. Исследовать функцию на основные свойства: области определения и значения, возрастание и убывание, промежутки знакопостоянства, нули, экстремумы, четность или нечетность (или отсутствие этих свойств), периодичность, ограниченность, непрерывность.

Сначала свойства функций устанавливаются по ее графику, т.е. на основе наглядных соображений, и лишь немногие устанавливаются аналитически; понятно, что перечень свойств, подлежащих рассмотрению, увеличивается постепенно, по мере овладения соответствующим теоретическим материалом.

В старших классах исследование функций обычно предшествует построению ее графиков (к этому времени в распоряжении учащихся имеется весьма мощный аппарат анализа - понятие производной; к тому же сложность рассматриваемых конкретных примеров функций возрастает, а отсюда возникают трудности в построении графика "по отдельным точкам").

В VI - IX классах школьники учатся истолковывать те или иные свойства функций на трех "языках": графическом, словесном и символическом. Это умение формируется не сразу, но дидактическую значимость его трудно переоценить.

5. Использовать изученные свойства функций при решении задач, в частности уравнений и неравенств. Этот этап является этапом закрепления основных понятий и теоретических положений, связанных с изучаемой функцией, а также этапом формирования соответствующих умений и навыков.

2. Линейная функция.

Проиллюстрируем данную методическую схему изучения функции на примере линейной функции, изучаемой в настоящее время в курсе алгебры VII класса (10 часов).

Изучение линейной функции можно начать с ряда задач, предложенных ученикам или составленных ими самостоятельно, например:

1)зависимость стоимости телеграммы от числа слов;

2)расстояние, проходимое поездом от некоторой станции в зависимости от времени движения с данной постоянной скоростью, если в начале движения поезд находился на данном расстоянии от станции (в определенном направлении);

3)зависимость количества жидкости, остающейся в баке, от времени ее вытекания, если дана вместимость бака и скорость, с которой жидкость равномерно вытекает, при условии, что бак был полным;

4)зависимость длины одного основания трапеции от длины основания при заданной средней линии.

В каждой задаче лучше задавать числовые данные, тогда получается примерно следующие формулы (при некоторых числовых данных):

1)y=3x+10;

2)y=200-2,5x или y=-2,5x+200;

3) $\frac{x+y}{2}=10$ или y=-x+20.

Подобные примеры и приводят к общему виду функциональной зависимости одного и того же характера y=ax+b. Поэтому ученикам можно сказать, что поскольку эти факты и явления (и, наверное, еще многие другие) описываются одной и той же функцией, то естественна такая постановка задачи: присвоить этой функции специальное название и обстоятельно изучить ее свойства.

Функция вида *y=ax+b* называется линейной.

Далее можно предложить ряд упражнений на узнавание.

1. Чему равны коэффициенты a и b для следующих линейных функций:

y=24 x+13; y=-$4\frac{1}{2}$x+2,7; y=1,47 x-3,8; y=-5+x;

y=-$\frac{4}{7}$x-$\frac{1}{2}$; y=6,9-$\frac{x}{3}$.

2. Какая функция является линейной:

a) y= xЧx; b) y=2x+6; c)y= $\frac{4x}{5}-7$; d) y=$\frac{7}{x}$; e) y= $\frac{10+x}{1-x}$; f) y=2 x?

Обратим внимание на случаи b) и f).

Построим график функций y=2x+6 и y=2x. Для этого сначала изобразим таблицы изменения этих функций. Выясняем, что графиком линейной функции является прямая.

Полезно задать ученикам домашнюю работу: построить графики рассмотренной зависимости при различных значениях a и b (для каждой пары графиков построения выполнить на одном чертеже). Значения a и b следует задать, например:

a=$\frac{1}{2}$, b=0; a=$\frac{1}{2}$, b=1;

a=1, b=3; a=1, b=0 и т.д.

В классе нужно рассмотреть хотя бы часть этих графиков, построив их на доске, используя цветные мелки.

Учащиеся легко понимают геометрическое значение *a* и *b*. При этом следует показать, что для построения графиков функции *y=ax+b* при различных значениях *b*, но при одном и том же значении a нет необходимости строить графики каждой функции по точкам, а достаточно построить график *y=ax* и сместить его параллельно самому себе, так как ординаты точек, имеющих равные абсциссы, будут отличаться друг от друга на число *b*, а знак *b* определит направление этого смещения.

Подметив геометрические значения параметров *a* и *b*, полезно выяснить с учениками, в каком случае графики двух линейных функций совпадают, пересекаются, в каких параллельны. Эти сведения пригодятся при графическом решении систем двух уравнений с двумя неизвестными.

После ознакомления учащихся с функциями и их графиками чрезвычайно полезно рассмотреть какую-либо задачу, которая привела бы учеников к пониманию уравнения с одним неизвестным как равенства значений двух функций от одного и того же аргумента, например: определить при какой ширине прямоугольник, длина которого 3 м, имеет площадь, численно равную его периметру. Элементарные рассуждения приводят к тому, что в этом случае периметр прямоугольника выразится (2 x+6) м, а площадь (3 x) м^2. Так как эти выражения равны по условию, то можно составить уравнение 2 x+6=3x, которое легко решается (x=6).

Вместе с этим каждое из выражений можно рассматривать как функцию $y=2x+6$ и $y=3x$. Для каждой из них можно построить график (в одной системе координат). Абсцисса точки пересечения $x=6$ дает то значение функции ($y=18$), при которой рассматриваемые функции равны.

После изучения понятия возрастания и убывания функций выясняется вопрос: в каком случае линейная функция возрастающая (при $a>0$) и когда убывающая (при $a<0$). Необходимо указать, что независимо от значений a и b область задания функции есть любое значение x. Рекомендуется учащимся с помощью учителя составить таблицу.

3. Квадратичная функция. Данная тема рассматривается в VIII классе – 16 часов. Изучение квадратичной функции начинается с наиболее простого вида этой функции, то есть с функции $y=ax^2$. В этом случае ее значение пропорционально квадрату значений независимой переменной.

Сперва рассматривается частный случай, когда $a=1$, т. е. функция $y=x^2$. Легко устанавливается, что:

1)функция определена для любого значения аргумента, так как каждое число может быть возведено в квадрат;

2)функция может принимать только положительные значения и 0;

3)график функции, кроме точки (0;0), расположен над осью Ox и ось Oy является осью симметрии графика функции (график данной функции называется параболой);

4)функция $y=x^2$ при изменении x от 0 до $+\infty$ возрастает, а при изменении x от $-\infty$ до 0 убывает;

5)при $x=0$ функция достигает минимума.

После этого следует перейти к рассмотрению функции $y=ax^2$, где $a\neq1$. На одном чертеже строятся графики функции для различных значений $a>0$, например:

$y=x^2$; $y=2x^2$; $y=\frac{1}{2}x^2$.

Ученики легко усваивают, что эти функции обладают теми же свойствами, что и функция $y=x^2$$y=x^2$. Различие только в том, что при $a>1$ графики быстрее поднимаются вверх, а при $x=0$ функция $y=ax^2$ достигает наименьшего значения; наибольшего значения функция не имеет.

Для построения этих графиков нет необходимости составлять заново таблицу значений. Например, имея график функции $y=x^2$, для нахождения графика функции $y=2x^2$ достаточно уменьшить масштаб на оси Oy в два раза.

Необходимо установить общность и различие свойств функции $y=ax^2$ при $a>0$ и $a<0$.

Необходимо обратить внимание учеников на то, что при $a<0$ функция $y=ax^2$ принимает наибольшее значение при $x=0$ и не имеет наименьшего значения, что при $a<0$ ветви параболы направлены вниз.

Полезны упражнения следующего рода: построить график функции $y=-ax^2$, если дан график функции $y=ax^2$.

Изучение функции $y=ax^2$+с и построение ее графика не вызовет затруднений, если сравнить ее с функцией $y=ax^2$. При $a>0$ функция имеет минимум при х=0; при $a<0$ функция имеет максимум при х=0. Различие будет в том, что вершина параболы смещается вдоль оси Оу в зависимости от знака с.

Полезно предложить учащимся начертить таблицу для различных случаев расположения графиков.

Особенно *существенным* является вопрос о корнях уравнения ax^2+с=0, то есть тех значений аргумента, при которых функция принимает значение, равное 0.

После изучения функции вида $y=ax^2$+с переходят к изучению функции, представляющей полный квадратный двучлен, то есть к функции вида
у= a(х+m)^2. Этот промежуточный этап облегчает понимание сдвига параболы вправо или влево вдоль оси Ох. Останавливаться очень подробно на функции данного вида нет большой необходимости. Достаточно проделать с учащимися несколько примеров следующего вида:

у=2х^2-12х+18 или у=2(х-3)^2.

Ученики должны ясно представлять себе, что парабола обращена ветвями вверх (a =2>0), вершина параболы сдвигается вдоль оси Ох на расстояние, равное 3 единицам, в точке М(3, 0) парабола касается оси Ох и при х=3 функция достигает минимума. Аналогично исследуется и функция у=-3х^2-12х-12.

Далее следует перейти к рассмотрению квадратичной функции общего вида: $y=ax^2+bx+c$.

Исследование квадратичной функции полезно увязать с дискриминантом соответствующего квадратного уравнения. В результате исследования ученики могут составить соответствующую таблицу (сделать самостоятельно).

Функция $y=ax^2+bx+c$.

Координаты вершины $x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = \frac{b^2-4ac}{4a}$.

4. Степенная функция.

С частными случаями степенной функции учащиеся знакомятся в 9 классе средней школы (среднее звено). Ей уделено 10 часов. Из степенных функций с натуральным показателем учащиеся знакомятся с функциями у=х, у=х^2, у=х^3 (график этой функции называется кубической параболой). Степенная функция с целым отрицательным показателем встречается только в виде частного случая, так называемой обратной пропорциональности: $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Примером степенной функции с дробным показателем является функция $y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}$. В 9 классе вводится понятие степенной функции, изучаются ее свойства, строятся графики.

Понятие степенной функции углубляется в курсе математики академического лицея, только после изучения тем дифференциального и интегрального исчислений, показательной и логарифмической функций. Поскольку производная уже известна, то исследование функции проводится по полной схеме.

Заметим, что степенная функция вводится следующим образом: "Функция вида $f(x)=x^p$, определенная на интервале (0;+ ∞), называется степенной (с показателем степени p)".

Аналогично предыдущим функциям строится таблица.

Степенная функция $f(x)=x^p$ (D(y)= (0;+ ∞)).

2.4. Методика изучения логарифмической и показательной функции

План

1. Примеры, приводящие к показательной функции.
2. Введение логарифмической функции как обратной показательной.
3. Свойства и графики показательной и логарифмической функций

1. Примеры, приводящие к показательной функции.

Одной из важных задач курса математики старших классов является развитие и в некотором смысле завершение всех основных линий, составляющих основу школьного математического образования, в том числе систематизация и углубление знаний о функции. В этом аспекте и следует рассматривать изучение показательной функции в XI классе.

Изучение показательной функции, равно как и логарифмической, представляет большие возможности для обогащения знаний учащихся о функциях вообще, о способах их задания, о связи способа задания со свойствами функции. На примере показательной функции можно развить представления о функциях как о моделях процессов и закономерностных связей явлений. Это подчеркивает важную в мировоззренческом плане мысль о том, что широта применимости математических методов, общность математических понятий определяются единством материального мира.

Рассмотрим *ситуации*, для описания которых употребляется показательная функция.

1. Если однолетнее растение дает 100 семян и из них прорастет половина, то за каждый год, т.е. при увеличении времени на единицу, число растений увеличивается в 50 раз. (Конечно, в естественных условиях погибает большая часть растений, но в идеальных условиях, которые иногда возникают в природе или создаются искусственно человеком, рост числа особей идет именно так)

2. Сберкасса выплачивает вкладчикам проценты по вкладам в размере 2% в год, т.е. за каждый год вклад увеличивается в 1,02 раза.

При использовании этого примера следует иметь в виду, что проценты начисляются только в конце года (т.е. формула, выражающая зависимость величины вклада от времени, y=1,02x, верна только для целых значений x), а в течение года считается, что вклад растет линейно: за полгода начисляется 1%, за три месяца (если вкладчик имеет вклад) - 0,5% и т.д.

Во всех приведенных примерах рассмотрены такие процессы и явления, для которых характерно общее свойство: при изменении значения одной величины на некоторое постоянное число значение другой величины изменяется в одном и том же отношении, т. е. умножается на постоянный множитель.

В примере 1 при возрастании времени на 1 год число растений увеличивается в 50 раз, т.е. умножалось на 50. В примере 2 при увеличении времени на 1 год величина вклада увеличивается на 2%, т. е. умножалась на 1,02 и т.д.

Характерно и то, что и за другие равные промежутки времени изменение рассматриваемой величины следует тому же закону. Например, за любые два года число растений (пример 1) увеличивается в 2500 раз.

Если проводить, как это всегда делается в математике, изучение таких зависимостей между величинами, отвлекаясь от реального смысла процесса, то задачу можно сформулировать так: "Найти функцию, обладающую следующим свойством: если аргумент получает равные приращения, то значения функции увеличиваются (или уменьшаются) в одном и том же отношении".

Далее можно сразу сообщить учащимся, что таким свойством обладает показательная функция $f(x)=a^x$, и показать, что действительно равным приращениям аргумента соответствует увеличение или уменьшение значений в одном и том же отношении. Перечисляются свойства показательной функции, изображается график.

Среди упражнений по закреплению свойств показательной функции рекомендуется включать разнообразные упражнения на построение и узнавание графиков функций.

2. Введение логарифмической функции как обратной показательной.

К моменту изучения логарифмической функции учащимся должно быть известно понятие обратной функции и условие, при котором обратная функция существует. Собственно, это то место курса, где впервые по-настоящему используются эти функции.

Введение функции, обратной данной, представляет довольно сложную *методическую задачу*, поэтому на этом моменте следует остановиться подробнее. Трудность состоит в обосновании необходимости изучения этого материала. В этом случае можно использовать такую игровую ситуацию.

Идет дискотека. Звучит медленный танец. Юноши и девушки танцуют парами. Возникают разные ситуации. Например, все юноши танцуют, но кое-кто из девушек "стоит в сторонке". А может быть, кое-кто из юношей вовсе не умеет танцевать, и часть девушек тоже не танцует. А может быть: Только договоримся, что юноша с юношей, как и девушка с девушкой, тоже не должны танцевать. Если мы покажем все возможные ситуации на языке соответствий, то станет ясно, что случай "все мальчики танцуют" вовсе не означает, что все девочки приглашены. Проще говоря, соответствие в одну сторону далеко не всегда влечет за собой аналогичное соответствие в другую. Но есть и особенная ситуация, пожалуй, наиболее привлекательная: каждому юноше соответствует одна и только одна девушка (такое соответствие является функцией) и одновременно каждой девушке соответствует один и только один юноша (обратное соответствие тоже является функцией). В математике тоже описывается такой случай и описанное обратное соответствие называется обратной функцией. Вводится строгое определение обратной функции, обратимой функции, доказывается теорема об обратимости монотонной функции.

Введя подобным образом необходимые понятия, можно с достаточной точностью говорить о функции $y = \sqrt[n]{x}$ как обратной по отношению к $y=x^n$. При этом особое внимание следует уделить использованию монотонности функции $y=x^n$ для доказательства ее обратимости. Теперь создана база для сознательного перехода от показательной функции к логарифмической.

Очевидно, что показательная функция как функция монотонная должна иметь обратную функцию. Эту функцию, обратную показательной функции $y=a^x$ (где $a>0$ и $a\neq 1$), условились называть логарифмической и обозначать $\log_a x$.

Учащиеся также знают взаимное расположение графиков данной функции и ей обратной. Это позволяет, не прибегая к аналитическому исследованию свойств логарифмической функции, выявлять ее свойства по графику.

Еще следует отметить, что дальше переходят к изучению производной показательной и логарифмической функций. Построим графики функций $y=a^x$, $a>1$ для $a=2;3;4$. Затем проведем касательные к этим графикам в точке (0,1). Углы наклона этих касательных к оси абсцисс будут равны? (После измерения учащиеся отвечают ≈35°,48°,51°) Проведите прямую, проходящую через точку (0,1) и наклоненную к оси Ох под углом 45°. Построить схематично кривую (частный случай функции $y=a^x$, $a>1$), для которой проведенная ранее прямая будет касательной. Эта кривая - есть график функции $y=e^x$, где $2 < e < 3$.

Интересна функция $y=e^x$ еще и тем, что $(e^x)'=e^x$.

Доказано, что число e иррационально и поэтому записывается в виде бесконечной десятичной непериодической дроби. С помощью электронных вычислительных машин найдено более двух тысяч десятичных знаков числа e. Первые знаки этой дроби таковы: e=2,71828: .

Функцию $y=e^x$ часто называют *экспонентой* и обозначают $\exp x$.
Понятие натурального логарифма вводится как логарифм по основанию e.

Однако существует другой вариант изложения теории, которая начинается с определения логарифмической функции:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Изучаются свойства функции *y=ln x*, далее переходят к логарифму по любому основанию $a>0,\ a\neq 1$ (свойства обобщаются). Потом вводятся определения понятий обратной обратимой функций, условие существования обратной функции. И показательная функция изучается как функция обратная логарифмической. Такой подход реализован в учебнике Виленкина Н.Я. и др. "Алгебра и начала анализа" (11 класс) для школ и классов с углубленным изучением математики.

3. Свойства и графики показательной и логарифмической функций.

Задание: изучите самостоятельно построение графиков показательной и логарифмической функций и их свойства.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что называется функцией? Дайте различные определения и сделайте их сравнительный анализ.
2. Какие подходы существуют к определению понятия функции?
3. Что такое область определения функции, множество значений функции?
4. Какие способы задания функций Вы знаете?
5. Какая функция называется: а) четной, нечетной? б) периодической?
6. Какая функция называется возрастающей, убывающей?
7. Какова схема изучения функций?
8. Что включает в себя чтение графика функции? Что называется графиком функции?
9. Какие функции изучаются в школьном курсе математики? Дайте определение каждой из функций и укажите методические особенности их изучения.
10. Какова схема исследования функции?
11. Какие функции называются элементарными? Приведите примеры.
12. Каково содержание функциональной пропедевтики в IV-VI классах?

2.5.Уравнения и неравенства в курсе математики

План

1. О трактовке понятий уравнения и неравенства с переменными.
2. Равносильность уравнений и неравенств.

3. Виды уравнений и неравенств, рассматриваемые в курсе математики, и методические особенности их изучения.

1. О трактовке понятий уравнения и неравенства с переменными

Уравнения и неравенства - традиционная тема школьного курса математики, занимающая большое место, начиная с младших классов, где простейшие уравнения и неравенства решаются до введения теории на основе свойств арифметических действий, и кончая старшими классами, где решаются трансцендентные уравнения, а также системы уравнений и неравенств.

Уравнения и неравенства и их системы представляют собой тот алгебраический аппарат, тот язык, на который переводятся разного рода задачи, в том числе и прикладные, строятся их математические модели.

(Далее знакомимся по программе с распределением материала темы по классам и целями изучения темы.)

В методической литературе встречаются следующие определения понятия уравнения.

1. Равенство, выражающее вопрос, при каком значении некоторой буквы два алгебраических выражения, содержащих эту букву, имеют равные числовые значения, называется уравнением.

2. Уравнение часто определяется с помощью понятия функции: уравнение с одним неизвестным *x* имеет вид $f(x)=\varphi(x)$: Число x_0 называется корнем уравнения, если, во-первых, это число принадлежит области определения каждой из функций $f(x)$, $\varphi(x)$ и, во-вторых, справедливо числовое равенство $f(x_0)=\varphi(x_0)$. *Решить уравнение* - значит, найти все его корни.

3. Уравнением (неравенством) с одной переменной называется равенство (неравенство), содержащее эту переменную. Переменную в уравнении (неравенстве) часто называют неизвестным. Значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство, называется корнем (или решением) уравнения.

4. Равенство, содержащее неизвестное число, называют уравнением. Найденное значение неизвестного числа называют корнем уравнения. *Решить уравнение* - значит, найти все его корни.

Непосредственная связь понятий уравнения и тождества устанавливается таким определением: уравнение $f(x)=\varphi(x)$ называется тождеством, если множество решений этого уравнения совпадает с областью определения данного уравнения (пересечением областей определений функций $f(x)$ и $\varphi(x)$).

Среди математиков и методистов велись и поныне ведутся споры по поводу трактовки понятия "уравнение (неравенство)". Эти трактовки приписывают понятию "уравнение" различные числовые значения.

Известна точка зрения, согласно которой тождество как равенство, справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв, противопоставляется уравнению как равенству, справедливому не при всех допустимых значениях букв - неизвестных. Если принять эту точку зрения, мы не сможем ответить на вопрос, что представляет собой запись "$f(x) = \varphi(x)$" (уравнение или тождество), пока не выясним, при всех или не при всех допустимых значениях имеет место равенство.

Или, например, если дано $ax = в$, то по этой точке зрения при $a \neq 0$ - это уравнение, а при $a = в = 0$ - тождество.

Известна другая точка зрения, согласно которой тождество не противопоставляется уравнению, а трактуется как его частный случай, причем уравнение рассматривается как равенство значений двух функций (определение 2). Равенство $f(x) = \varphi(x)$ может оказаться верным при всех допустимых значениях x и тогда это тождество. А если нет таких значений, то уравнение не имеет корней, но существует ли оно само?

Здесь, как и в первой трактовке, трудности возникают по существу из-за двусмысленности термина "равенство" - это: а) отношение равенства, понимаемое как совпадение, представляющее собой модель общего отношения эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно); б) предложение о равенстве как синтаксическое образование, содержащее знак "=", которое, разумеется, может оказаться истинным или ложным.

По определению 1, согласно которому уравнение - это не само равенство, а лишь вопрос о существовании значений неизвестного, при которых имеет место равенство. Принятие этой точки зрения также приводит к трудностям. В соответствии с ней запись $S = \frac{gt^2}{2}$ не представляет собой уравнения, пока не поставлен вопрос о существовании "неизвестных", при которых имеет место равенство, но говорят, что это "уравнение свободного падения тел".

Точка зрения на уравнение как на "вопрос", по существу, отождествляет понятия "уравнение" и "решить уравнение", а вопрос о том, что же такое уравнение, остается открытым, поэтому данная трактовка нецелесообразна.

Первое разъяснение понятия уравнения дается в начальной школе, используется определение 4. Это простое определение, оно доступно для учащихся, но в средней школе пользоваться им нежелательно, так как замена понятия переменной "неизвестным числом" приводит к трудностям при графическом решении уравнения $f(x) = \varphi(x)$, где мы используем x как переменную. И поэтому более удобным является определение 3.

Трактовка уравнений и неравенств с переменными как особого вида предложений с переменными позволяет внести четкость в трактовку других понятий. Так, система уравнений или неравенств с переменной есть не что иное как особый вид конъюнкции (и) предложений с переменными.

Предложение, составленное из уравнений и неравенств с помощью связки "или", представляет собой частный вид дизъюнкции предложений с переменными. Такие предложения называются "совокупностями" уравнений или неравенств. Ее решение - значения переменной, при которых верно хотя бы одно уравнение, а другие имеют смысл.

2. Равносильность уравнений и неравенств

Вопрос о равносильности уравнений и неравенств повторить самостоятельно. Обратить внимание на то, что данная тема рассматривалась отдельно для уравнений и неравенств, но между тем эти вопросы чрезвычайно близки по содержанию и тесно взаимосвязаны. Часто встречаются случаи, когда уравнение равносильно системе уравнений, неравенство равносильно уравнению и т.п. (привести примеры).

Два предложения называются равносильными, если из первого следует второе, а из второго следует первое.

На понятии равносильности основан принцип решения уравнений и неравенств. В ранее действовавших учебниках не было согласованности между свойствами равносильности уравнений и неравенств. Например, для уравнений говорили о прибавлении к обеим частям многочлена, а для неравенств - о прибавлении выражения и т.п.

В настоящее время в школьном курсе математики никаких теорем о равносильности не доказывается, основной акцент делается на раскрытие понятия равносильности. Учащиеся осознанно выполняют преобразования уравнений или неравенств, понимая, что их равносильность вытекает из свойств истинных числовых равенств и неравенств.

3. Виды уравнений и неравенств, рассматриваемые в школьном курсе математики, и методические особенности их изучения

Остановимся теперь на основных видах уравнений и неравенств с одной переменной, которые рассматриваются в школе, и проанализируем их решения с точки зрения теории равносильности.

1. *Уравнения вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ - целые выражения*

Алгоритм решения уравнения вида $f(x) = g(x)$ состоит в том, что, прибавив к обеим частям $(-g(x))$, получим уравнение $f(x) - g(x) = 0$, равносильное исходному.

Преобразовав целое выражение $f(x) - g(x) = 0$ в тождественно равный ему многочлен стандартного вида, получим уравнение $h(x) = 0$, равносильное уравнению $f(x) - g(x) = 0$. В зависимости от степени h(x) уравнение имеет вид:

$ax + b = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, $ax^3 + bx^2 + cx = 0$, где $a \neq 0$ и т.д.

Рассмотрим решение уравнения $ax + b = 0$.

Если $a \neq 0$, то $ax + b = 0$ равносильно $x = -b/a$;

Если $a = 0$, а $b \neq 0$, $0x + b = 0$ - не имеет решений;

Если $a = 0$ и $b = 0$, $0x + 0 = 0$ - решением является множество всех действительных чисел.

При решении квадратных уравнений необходимо научить учащихся применять не только общую формулу корней квадратного уравнения, но и формулу для случая, если b - четное, а также пользоваться теоремой Виета как для нахождения корней, так и для их проверки.

Сложным моментом для учащихся является вывод формулы корней квадратного уравнения путем выделения квадрата двучлена, поэтому здесь надо применить конкретно-индуктивный метод, постепенно усложняя примеры и переходя к общему случаю: $x^2 - 6x - 2 = 0$, $x^2 + 5x + 1 = 0$, $2x^2 - 9x + 10 = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ (вывод знать). Обращать внимание и на решение неполных квадратных уравнений.

Для решения уравнений третьей и четвертой степеней пользуемся приемами разложения многочленов на множители, а если это невозможно, то применяем метод подбора корней, используя деление многочлена на многочлен, чтобы разложить многочлен на множители.

Для решения биквадратных уравнений $ax^4 + bx^2 + c = 0$ используем прием введения новой переменной.

Уравнение вида $ax^n + b = 0$ можно заменить равносильным уравнением $x^n = -b/a$ и далее решать в зависимости от того, n четное или нечетное.

2. *Уравнения вида $r(x) = p(x)$, где $r(x)$ и $p(x)$ - рациональные выражения, причем хотя бы одно из них является дробным*

Уравнение $r(x) = p(x)$ записываем $r(x) - p(x) = 0$ и приводим к виду $f(x)/g(x)=0$, которое равносильно системе $f(x) = 0$ и $g(x) \neq 0$.

При решении уравнений данного типа необходимо обращать внимание на область допустимых значений переменной, особенно при сокращении дробей.

3. *Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля*

При решении этого типа уравнений необходимо повторить понятие модуля и его геометрический смысл: $|m| = m$ верно тогда и только тогда, когда $m \geq 0$, $|m| = -m$ верно тогда и только тогда, когда $m \leq 0$. На основе этих утверждений решаются практически все уравнения данного типа в школьном курсе математики. При решении уравнения $|ax + b| = c$ надо различать случаи, когда $c < 0$, $c > 0$, $c = 0$. При $c < 0$ корней нет, при $c = 0$ имеем $ax + b = 0$, при $c > 0$ получаем $ax + b = -c$ или $ax + b = c$.

4. *Иррациональные, показательные и логарифмические уравнения*

Эти уравнения рассматриваются в связи с изучением функций $y = \sqrt[n]{x}, y = a^x, y = \lg x$ и используются для лучшего усвоения свойств этих функций. Уравнение $\sqrt[n]{p(x)} = c$ равносильно системе $\begin{cases} p(x) \geq 0, \\ p(x) = c^n \end{cases}$.

А для решения уравнения $\sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x} - 1 = 0$ используется подстановка $y = \sqrt[6]{x}$,которая приводит к квадратному уравнению относительно y : $y \; + 2y^2 - 1 = 0$.

К иррациональным относят и уравнения вида $x^{\frac{m}{n}} = c$, где $\frac{m}{n}$ - некоторое дробное число (положительное или отрицательное), c - произвольное. Если $c < 0$, то решений нет (так как по определению степени с дробным показателем она имеет смысл только при неотрицательном основании);

если $c \geq 0$, то существует единственный корень, который находим путем возведения в степень $\frac{m}{n}$.

Обратите внимание на следующие уравнения: $\sqrt[3]{x}=-1$ имеет корень $x=-1$, а уравнение $x^{\frac{1}{3}}=-1$ корней не имеет (здесь $x \geq 0$). Или уравнение $x^{0,2}x^{1,8}=1$ (здесь $x \geq 0$) неравносильно уравнению $x^2=1$, которое имеет два корня: $x_1=-1, x_2=1$.

5. *Тригонометрические уравнения*

Эти уравнения рассматриваются в связи с изучением тригонометрических функций и используются для лучшего усвоения свойств этих функций. Методика изучения описана в соответствующем вопросе.

Классификация неравенств аналогична приведенной классификации уравнений. Существуют и другие классификации уравнений и неравенств, с которыми можно познакомиться в методической литературе.

Иррациональные уравнения и неравенства. *Иррациональным* уравнением называют уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком радикала. Область допустимых значений неизвестных иррационального уравнения состоит из тех значений неизвестного, при которых неотрицательны все выражения, стоящие под знаками радикалов четной степени.

Решение иррационального уравнения возведением в степень. Один из способов решения иррационального уравнения заключается в последовательном возведении обеих частей уравнения в степень, являющуюся наименьшим общим кратным показателей всех радикалов, входящих в данное уравнение. Если степень, в которую возводится уравнение, четная, то полученное уравнение может иметь корни, не являющиеся корнями исходного уравнения. Поэтому необходима проверка корней.

Некоторые специальные приемы решения иррациональных уравнений. В некоторых случаях можно *освободиться от иррациональности* в уравнении умножением обеих частей уравнений на некоторое не обращающееся в нуль выражение. Например, решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1. \qquad (*)$$

Решение. Умножим обе части уравнения на выражение

$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1},$$

являющееся сопряженным левой части уравнения (*). После приведения подобных членов получаем уравнение

$$7=\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}, \qquad (**)$$

которое эквивалентно исходному, так как уравнение

$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=0$$

действительных корней не имеет. Складывая уравнения (*) и (**), получаем

$$\sqrt{3x^2+5x+8}=4.$$

Возводя последнее уравнение в квадрат, получаем квадратное уравнение

$$3x^2+5x-8=0,$$

корни которого x_1=-8/3, x_2=1. Делая проверку, убеждаемся, что оба корня являются корнями исходного уравнения. Ответ: x_1=-8/3, x_2=1.

Введение вспомогательных неизвестных в ряде случаев позволяет перейти от иррационального уравнения к системе рациональных уравнений.

Решение иррациональных уравнений *методом выделения полного квадрата* в подкоренных выражениях.

Например, решить уравнение

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=1.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x-2}=t;$ тогда исходное уравнение приобретает вид

$$\sqrt{t^2+2t+1}-\sqrt{t^2-2t+1}=1. \qquad (*)$$

Так как под радикалами в левой части уравнения (*) стоят полные квадраты, то уравнение сводится к следующему уравнению |t+1|-|t-1|=1.

Единственным корнем этого уравнения является t = 0,5. Возвращаясь к исходному неизвестному, получаем уравнение $\sqrt{x-2}=0{,}5$, корнем которого является x = 2,25 [19].

Иррациональные неравенства. Под иррациональным неравенством понимается неравенство, в котором неизвестные величины (или некоторые функции неизвестных величин) находятся под знаком радикала. Для того чтобы найти множество решений иррационального неравенства, приходится, как правило, возводить обе части неравенства в натуральную степень. При этом (в силу принципиальной невозможности проверки полученных решений подстановкой) необходимо следить за тем, чтобы при преобразовании неравенств каждый раз получалось неравенство, эквивалентное исходному.

При решении иррациональных неравенств следует помнить, что при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается неравенство, эквивалентное исходному неравенству. Если же обе части неравенства возводить в четную степень, то будет получаться неравенство, эквивалентное исходному и имеющее тот же знак лишь в случае, если *обе части исходного неравенства неотрицательны*.

Отметим, что:

1) все корни четной степени, входящие в уравнение, являются арифметическими (другими словами, если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла; если подкоренное выражение равно нулю, то корень также равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то и значение корня положительно).

2) все корни нечетной степени, входящие в уравнение, определены при любом действительном значении подкоренного выражения (при этом корень отрицателен, если подкоренное выражение отрицательно; равен нулю, если подкоренное выражение равно нулю; положителен, если подкоренное выражение положительно).

3) функции $y = \sqrt[2n]{x}$ и $u = \sqrt[2n+1]{x}$ являются возрастающими на своей области существования.

Используя эти свойства, в некоторых случаях можно установить, не прибегая к преобразованиям, что уравнение не имеет решения.

При возведении обеих частей иррационального уравнения в степень, позволяющую избавиться от радикалов, появление посторонних корней исходного уравнения происходит, как правило, по следующим причинам:

а) за счет возможного расширения области допустимых значений (ОДЗ) исходного уравнения (т. е. ОДЗ полученного уравнения шире ОДЗ исходного уравнения);

б) за счет возведения в четную степень его левой и правой частей, которые равны по абсолютной величине, но одна из них положительная, а другая отрицательная.

Решение иррациональных уравнений путем замены уравнения его следствием (с последующей проверкой корней) можно проводить таким образом.

1. Найти ОДЗ исходного уравнения.
2. Перейти от уравнения к его следствию.
3. Найти корни полученного уравнения.
4. Проверить, являются ли найденные корни корнями исходного уравнения.

Проверка состоит в следующем:

а) проверяется принадлежность каждого найденного корня ОДЗ исходного уравнения (те корни, которые не принадлежат ОДЗ, являются посторонними для исходного уравнения);

б) для каждого корня, входящего в ОДЗ исходного уравнения, проверяется, имеют ли одинаковые знаки левая и правая части каждого из уравнений, возникающих в процессе решения исходного уравнения и возводимых в четную степень (те корни, для которых части какого-либо возводимого в четную степень уравнения имеют разные знаки, являются посторонними для исходного уравнения);

в) только те корни, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения и для которых обе части каждого из уравнений, возникающих в процессе решения исходного уравнения и возводимых в четную степень, имеют одинаковые знаки, проверяются непосредственной подстановкой в исходное уравнение.

Такой метод решения с указанным способом проверки позволяет избежать громоздких вычислений в случае непосредственной подстановки каждого из найденных корней последнего уравнения в исходное.

Некоторые преобразования приводят к тому, что ОДЗ полученного уравнения не содержит некоторой части ОДЗ исходного уравнения и в то же время имеет часть, не содержащуюся в ОДЗ исходного уравнения. Делая такие преобразования, можно получить уравнение, среди корней которого нет некоторых корней исходного уравнения и в то же время среди корней полученного уравнения содержатся посторонние его корни.

Чтобы избежать потери корней и появления посторонних корней, целесообразно решать уравнение методом равносильного перехода, т. е. решать уравнение только на его ОДЗ, заменяя уравнение равносильным. Если желаемое преобразование уравнения или его членов на всей ОДЗ сделать нельзя, то надо разбить ОДЗ уравнения на части и на каждой из этих частей решить уравнение. Затем, объединяя множества решений уравнения на всех частях ОДЗ уравнения, получим множество всех решений уравнения [19].

Вопросы для самоконтроля.

1. Что называется уравнением, неравенством? Дайте различные определения и проведите их сравнительный анализ.
2. Как устанавливается связь понятий уравнения и тождества?
3. Что называется корнем уравнения? Что значит решить уравнение?
4. Какие уравнения (неравенства) называются равносильными? Как раскрывается суть этого понятия в школьном курсе?
5. Каковы особенности решения уравнений и неравенств в I-V классах? Какой терминологией пользуются учащиеся?
6. Какие виды уравнений (неравенств) изучаются в школьном курсе математики с V по XI классы? Дайте определение каждого вида и расскажите о методах их решения и методических особенностях изучения.
7. На какой логической и математической основе решаются линейные и квадратные уравнения в школе? В случае затруднения обратитесь к литературе [39, С. 209-214].
8. Что называется областью определения уравнения (неравенства) и какова её роль при решении уравнений (неравенств)?

2.6. Числовые последовательности и прогрессии в курсе математики. Предел числовой последовательности

План

1. Пропедевтическая работа.
2. Методические особенности изучения арифметической и геометрической прогрессий.
3. Понятие предела последовательности.
4. Понятие предела функции.
5. Понятие непрерывности функции.

1. Пропедевтическая работа

Курс алгебры и начал анализа предъявляет серьезные требования к логической подготовке учащихся. С этой целью необходимо проводить пропедевтическую работу, которая заключается в следующем.

1. В процессе обучения математике давать, где это возможно, определения на формализованном языке (при изучении понятий функции, рационального числа, возрастания и убывания функции на множестве, прогрессий и др. использовать слова "для любого" и "существует").

2. При построении графиков обращать внимание "на непрерывность".

3. Интуитивно готовить учащихся к восприятию понятия предела (обращать внимание на предел скорости велосипедиста, машины, самолета и т.д.).

4. Научить хорошо решать и понимать неравенства с модулем.

При введении понятия последовательности добиться понимания понятий: предыдущий и последующий члены последовательности, номер члена последовательности, способы задания последовательности.

2. Методические особенности изучения арифметической и геометрической прогрессий

Наиболее важными из числовых последовательностей являются арифметическая и геометрическая прогрессии. Их понятие вводим конкретно-индуктивным методом. Данная тема в методическом отношении трудностей не вызывает, поэтому подробно останавливаться на ней не будем. (Изложите коротко содержание темы по школьному учебнику.)

Обратим внимание лишь на то, как дать определение прогрессий на формализованном языке: числовая последовательность (a_n) называется арифметической прогрессией, если $\exists d$, что для $\forall n$ $a_{n+1} = a_n + d$. Здесь большую роль играет порядок слов, поэтому встает вопрос: можно ли переставить местами обороты "если $\exists d$" и "для $\forall n$", то есть сказать: ": для $\forall n$ $\exists d$, такое, что:"? Нельзя, а почему? Ответ обоснуйте. Аналогично можно сказать о геометрической прогрессии.

Перед тем, как дать определение на формализованном языке, необходимо отработать способы доказательства того, что данная последовательность является прогрессией (по определению прогрессии, по характеристическому свойству) и подводим к определению прогрессий на формализованном языке. Так как доказательство необходимо провести в общем виде, то учащиеся почувствуют ценность последнего определения.

С этой целью можно рассмотреть примеры типа: проверьте, являются ли прогрессиями данные последовательности:

(a_n): 1; 3; 5; ...; 2n-1; ...;

$(в_n)$: 2; 5; 8; ...;3n-1; ...;

(c_n): 5; 0; -5; -10; ...; -5n+10; ... ?

3. Понятие "предел последовательности"

Определение. Число a называется пределом последовательности (y_n), если для любого $\varepsilon > 0$ существует N - натуральное, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$.

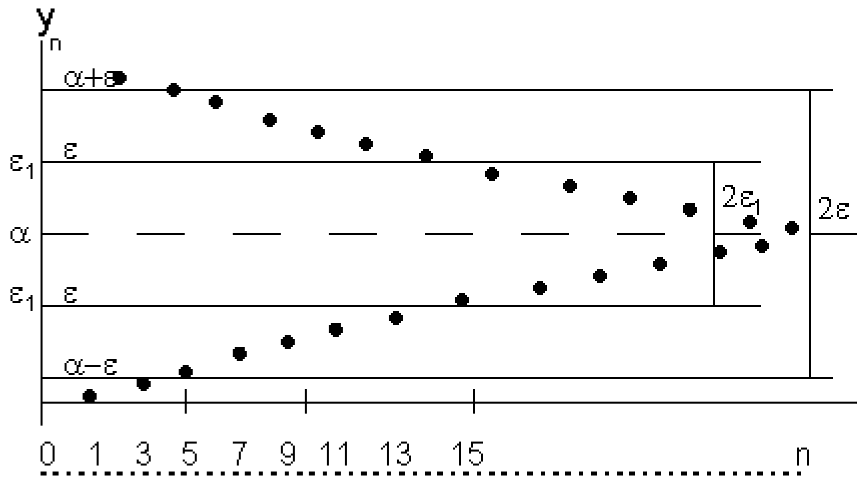
Работу над определением осуществляем в *два этапа*.

1. Создание геометрического представления о пределе как о таком числе, что в любой окрестности точки, ему соответствующей, находятся все члены последовательности начиная с некоторого номера n.

2. Математизация наглядных представлений, позволяющая получить определение предела числовой последовательности на языке "ε - N".

Необходимо понять структуру и внутреннюю логику этого определения. Здесь два "тонких" момента: 1) число N должно существовать для любого положительного ε, а ведь таких чисел бесконечно много; 2) неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$ должно всякий раз выполняться при всех $n > N$, а ведь таких n тоже бесконечно много!

Рассмотрим последовательность (y_n), заданную геометрически (так легче подметить закономерность).



Число ε выбирается произвольно. Рассматриваем, как члены последовательности расположены на рисунке, и подмечаем закономерность.

Условимся, что если закономерность подмечена, например, для 20 членов, то можно считать ее и при $n > 20$.

1)Выбираем ε и задаем вопрос: *начиная с какого номера N все члены последовательности попадут в полосу шириной 2ε ?* Находим $N = 5$, тогда для всех $n > 5$ будет выполняться неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$ (данное неравенство является математической записью слов: *все члены последовательности попадут в полосу шириной 2ε*).

2)Выбираем ε_1 и опять задаем вопрос: *начиная с какого номера N все члены последовательности попадут в полосу шириной $2\varepsilon_1$?*

Находим $N = 15$, тогда для всех $n > 15$ будет выполняться неравенство $|y_n - a| < \varepsilon_1$ и т.д., повторяем эту работу 3 - 4 раза, а затем формулируем определение предела последовательности.

4. После усвоения определения предела последовательности аналогичным образом ведется работа над определением предела функции.

5. Задание. Методику изучения предела и непрерывности функции рассмотрите по учебному пособия В.И. Мишина.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что такое числовая последовательность?
2. Какие виды числовых последовательностей Вы знаете?
3. Что называется арифметической прогрессией, геометрической прогрессией?
4. Каковы методические особенности изучения арифметической и геометрической прогрессий в школьном курсе математики?
5. Какова роль аналогий при изучении прогрессий?
6. Что называется пределом последовательности?
7. Какова необходимость введения данного понятия в школьном курсе математики?
8. Как можно ввести понятие предела на наглядно-интуитивном уровне?
9. Чем отличается числовая последовательность от функции?
10. Что называется пределом функции в точке?
11. Какова методика разъяснения учащимся структуры и внутренней логики определений предела последовательности и предела функции?
12. Какую пропедевтическую работу необходимо проводить с учащимися V - IX классов?
13. Каковы методические особенности изучения теорем о вычислении пределов?
14. Какая функция называется непрерывной? Какова пропедевтика этого понятия?

2.7. Методика изучения понятия производной. Производные элементарных функций

План

1. Пропедевтика понятия производной.
2. Задачи, приводящие к понятию производной.
3. О различных формулировках определений производной.
4. Введение понятия производной.

1. Пропедевтика понятия производной

Основная идея дифференциального исчисления - представление о функции как линейной в достаточно малой окрестности точки. Отсюда *первое направление пропедевтики* - глубокое изучение линейной функции.

К моменту введения производной учащимся должно быть известно определение линейной функции, вид ее графика и утверждение: всякая прямая, не параллельная оси ординат, является графиком некоторой линейной функции. Важно, чтобы учащиеся имели отчетливое представление об угле, составленном прямой с осью абсцисс (величину этого угла будем называть углом наклона прямой). Угол наклона прямой удовлетворяет неравенству $0° \leq \alpha < 180°$. Заметим, что если график функции расположен в нижней полуплоскости, то учащиеся иногда делают ошибку в выборе указанного угла. От этой ошибки их надо предостеречь. Главным итогом пропедевтики этого направления должно стать прочное усвоение того, что если линейная функция задана формулой у=кх+в, то тангенс угла наклона прямой, являющейся графиком этой функции, равен к.

Второе направление - работа над понятиями приращения аргумента и приращения функции. При введении понятий приращения аргумента и приращения функции удобно использовать обозначения Δx, Δy, $\Delta f(x)$ (а не обозначать их одной буквой), так как видно, приращение какой переменной рассматривается. Следует предупредить учащихся о том, что символ Δ заменяет слово "разность", но его нельзя отрывать от обозначения переменной, стоящей следом за Δ.Основные равенства, содержащие этот символ, таковы:

$x-x_0=\Delta x$, т.е. $x=x_0+\Delta x$; $f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$, т.е. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$.

Подчеркнем роль геометрических иллюстраций. На рисунке можно показать, что приращение аргумента может быть положительным, отрицательным, равным нулю; то же показано и для приращения функции. Среди упражнений на закрепление введенных определений должны быть такие, где требуется найти приращение функции в точке х, соответствующее приращению аргумента Δx, а затем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.Важно научить находить их в каждом конкретном случае.

Примеры. Найти $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если а) $y=x^2$; б) $y=x^3$; в) $y=3x^2+2x+1$; г) $y=ax^2+вx+c$; д) у=кх+в.

При введении определения производной учащиеся должны отчетливо представлять, что в этом случае отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является функцией Δx; на ряде примеров необходимо подготовить понимание этого факта. Исключительно важны для дальнейшего их использования геометрическая и механическая интерпретация отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Третье направление - введение понятий "касательная" и "кривая". Поскольку задача о проведении касательной к кривой сыграла огромную роль в создании математического анализа, послужив математической моделью для большого числа различных естественнонаучных задач, ей уделяется большое внимание в учебной литературе по математическому анализу. Для школьного курса она играет основную роль при формировании геометрической интуиции, связанной с понятием производной.

2. Задачи, приводящие к понятию производной

Введению понятия производной функции предшествует рассмотрение задач, которые показывают важность предела некоторого вида и тем необходимость его изучения. Такими задачами являются, например, задачи о мгновенной скорости прямолинейного движения тела, о мгновенной величине тока, о теплоемкости тела в точке, о линейной плотности в точке, о проведении касательной к графику функции..

<u>Задача о мгновенной величине тока</u>

Представим себе электрическую цепь с некоторым источником тока. Обозначим через q = q(t) количество электричества (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника за время t. Количество электричества есть функция времени, так как каждому значению времени t соответствует определенное значение количества электричества. Путь Δt- некоторый промежуток времени, $\Delta q=q(t+\Delta t)-q(t)$ - количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$. Тогда отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называют средней силой тока за промежуток времени Δt и обозначают $I_{ср}$. Иначе говоря, средней силой тока называется количество электричества, протекающее по проводнику за единицу времени. Поэтому для цепи переменного тока вводят понятие мгновенной силы тока, или силы тока в данный момент времени.

Мгновенной силой тока в момент t называется предел отношения приращения количества электричества Δq ко времени Δt, за которое произошло это приращение, при условии, что $\Delta t \to 0$.Он обозначается $I(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0} I_{ср}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}$.

<u>Задача о скорости химической реакции</u> Пусть некоторое вещество вступает в химическую реакцию. Количество этого вещества, уже вступившего в реакцию к моменту времени t, обозначим через y(t). Таким образом, y есть функция времени, т.е. переменной t. Если Δt - некоторый промежуток времени, то за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$ вступит в реакцию еще некоторое количество вещества $\Delta y=y(t+\Delta t)-y(t)$. Следовательно, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ выразит среднюю скорость химической реакции за промежуток времени Δt. Для характеристики скорости химической реакции в данный момент t следует рассмотреть предел этого отношения при $\Delta t \to 0$,т.е. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$.

Итак, подводя итог, следует обратить внимание учащихся на то, что в рассмотренных задачах речь идет о понятии мгновенной силы тока как величине, характеризующей скорость изменения количества электричества с течением времени; о скорости химической реакции в момент времени как скорости изменения количества вещества, участвующего в этой реакции, с течением времени. Отмечается, что введение рассмотренных выше понятий проводилось с помощью предела особого вида, а именно предела отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. В результате рассмотрения задач такого рода учащиеся должны прийти к выводу о том, что понятие скорости изменения функции необходимо при решении большого числа задач, важных в практическом отношении.

3. О различных формулировках определений производной

В учебниках встречаются несколько различных формулировок определений производной.

Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ (по Колмогорову А.Н.)

Предел разности отношения $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ при $h \to 0$ (если этот предел существует) называется производной функции f(x) в точке x и обозначается fў(x). Таким образом, fў(x)= $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (по Алимову Ш.А.).

Производной функции y=f(x) называется предел отношения $\frac{f(x_1) - f(x)}{(x_1 - x)}$ при стремлении x_1 к x (по Башмакову М.И.).

Заметим, что в последнем случае говорится не о производной в точках, а о "производной при $x_{1\to}$R x". Общепринятый сейчас термин "производная в точке" представляется более удачным: он короче и создает преемственность с термином "предел функции в точке". Важно однако, чтобы учащиеся понимали различия в использовании слова "точка" (например, "производная в точке" и "точка касания"). На первых порах точку, в которой ищется производная, целесообразно обозначить через x_0 (а не x), чтобы нагляднее отобразить соответствие x_0 с $f(x_0)$.

Обозначение аргумента через x используется тогда, когда производная начинает рассматриваться как функция; при этом в каждой конкретной задаче, например при выводе формул дифференцирования, следует отмечать, что предел находится при условии $\Delta x \to 0$, а значения x и Δx независимы, т.е. x рассматривают как постоянную.

Важно, чтобы ученики запомнили символическую запись и хорошо понимали смысл входящих в нее символов; тогда, вообще говоря, отпадает необходимость в заучивании словесной формулировки определения.

4. Введение понятия производной

Понятию производной должно предшествовать рассмотрение двух-трех задач о мгновенной скорости, о касательной линии, а затем перейти к задачам на скорость изменения функции (например, задачи, рассмотренные выше), т.е. понятие производной функции должно формироваться на основе задач, приводящих к этому понятию. Заметим, что чем задачи разнороднее, тем лучше, так как именно разнородностью приложения подчеркивается общность понятия производной. Отметим также, что рассмотрение задачи о мгновенной скорости позволяет выяснить механический смысл производной, а задачи о касательной к линии - ее геометрический смысл.

Рассмотрев с учащимися задачи, решение которых приводит к необходимости вычисления предела отношения приращения функции к вызвавшему ее приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, следует отметить целесообразность изучения предела такого вида произвольной функции.

Внимание учащихся обращается на то, что решение каждой рассмотренной выше конкретной задачи, по существу, сводится к следующему.

Рассматривается функция f(x), определенная на некотором интервале (a;b). Берется некоторая точка x_0 -фиксированная точка интервала (a;b) и точка $x_0+\Delta x$ - произвольная точка интервала (a; b) (Δx -приращение аргумента, которое может быть как положительным, так и отрицательным).

Рассматривается приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx: $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, и затем отношение приращения функции Δf к вызвавшему его приращению аргумента Δx:

$$\frac{\Delta f}{x\Delta} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = F(\Delta x).$$

Данное отношение есть функция переменной Δx, определенная для всех значений Δx из интервала (a-x, b-x), кроме $\Delta x = 0$. Имеется предел функции $F(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Если он существует, то его называют производной функции f(x) в данной точке x.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что называется производной функции в точке? Дайте различные формулировки и укажите методические особенности их изучения.
2. Какова пропедевтика понятия производной?
3. Какова методически схема изучения темы "Производная" в школьном курсе математики?
4. Какова методика решения задач, подводящих к понятию производной?
5. В чем состоит геометрический смысл производной, ее физический смысл?
6. Какую роль играет теорема Ферма в школьном курсе математики? Назовите методическую схему ее изучения.
7. Зачем нужна теорема Лагранжа в школьном курсе математики?
8. Каков план исследования функции с помощью производной?

2.7.1.Приложения производной в курсе математики академического лицея и профессионального колледжа

План
1. Приближенные вычисления.
2. Касательная к графику функции
3. Исследование функции с помощью производной.

Одной из центральных тем в курсе "Алгебры и начал анализа" для академического лицея и профессионального колледжа является тема "Применение производной". Если в предыдущей теме "Производная" понятие производной выступало в качестве предмета изучения, то в данной теме оно является средством изучения других вопросов курса математики. А именно рассматривается применение производной к кривой, исследованию функций, решению текстовых задач на отыскание наибольших и наименьших значений функций. Учитель здесь может показать, как понятие производной используется для изучения многообразных явлений и процессов реального мира, как с помощью этого понятия получают единую трактовку такие понятия, как "скорость химических реакций", "мгновенная скорость прямолинейного движения", "линейная плотность неоднородного стержня", "сила тока в цепи" и т. д.

Несмотря на то, что математика является одной из самых абстрактных наук, учитель при изучении данной темы должен показать учащимся, что абстрактность эта не означает оторванности ее понятий от понятий действительного мира. Глубина идей, заложенных в тех или иных математических понятиях, позволяет найти им приложения в различных сферах. А значит, основная задача учащихся будет состоять не в заучивании суммы фактов, а в уяснении общих подходов и методов.

1. Приближенные вычисления

Изучение темы начинается с вопроса о применении производной к приближенным вычислениям. Этот вопрос дает возможность познакомиться с глубокими сведениями об изучении функций методами математического анализа и служит хорошим фундаментом для разъяснения материала о касательной к графику функции, а также об исследовании функций с помощью производной. Кроме того, формула, выражающая приближенные значения дифференцируемой функции, дает возможность на вполне доступном для учащихся уровне ознакомить их с общей идеей аппроксимации (приближения). Учащиеся часто спрашивают: "Вот мы умеем, зная формулу, задающую функцию, построить ее график; а можно ли решить обратную задачу: по графику найти формулу, позволяющую вычислять значения функции?" Или: "Как составляется таблица значений синуса?"

Изучение формулы $f(x+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Конечно, нет ни возможности, ни необходимости разбирать с учащимися этот вопрос в общем плане (учителю ясно, что эта формула является частным случаем решения задачи приближения функции многочленом с помощью формулы Тейлора). Но внимание к постановке задачи, отдельные реплики и примеры не только расширят кругозор учащихся, повысят их интерес к изучению материала, но и помогут преодолеть некоторые *методические трудности.*

Одной из таких трудностей, как показал опыт, является переход от равенства $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ к равенству $\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$. Возникновение этой трудности можно предотвратить уже при постановке проблемы, начав изложение примерно таким пояснением.

"Вы знаете, что для функции f, непрерывной в точке x_0, выполняется равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. С другой стороны, если функция в некоторой точке x_0 имеет предел, то ее значение вблизи x_0 приближенно равно этому пределу, т. е. $f(x)\approx\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ для $x\approx x_0$ (1). Отсюда следует, что для непрерывной в x_0 функции ее значение вблизи x_0 можно приближенно вычислять по формуле $f(x)\approx f(x_0)$. Мы покажем, что если f не только непрерывна в точке x_0, но и дифференцируема в этой точке, то можно получить формулу для вычисления значений этой функции с более высокой точностью".

Так как в этом вступлении напоминается равенство (1), то теперь вывод формулы получится без труда: так как $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то для $\Delta x\approx 0$ выполняется равенство $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\approx f'(x_0)$, откуда $\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Поставлена во вступлении и другая задача - оценить погрешность полученной формулы. Следует иметь в виду, что для ряда учащихся оказываются трудными рассуждения, проведенные в учебнике в общем виде для оценки остаточного члена $R(\Delta x)$. Преодолеть эту трудность можно, заменив общее рассуждение конкретным примером, используя то, что в частном случае (для многочлена) величину отбрасываемого многочлена можно легко оценить. Итак, чтобы оценить погрешность рассматриваемой формулы, на уроке разбирается пример. Пусть $f(x)=x^3-3x$. Тогда наша формула дает: $f(x_0+\Delta x)\approx x_0^3-3x_0+(3x_0^2-3)(\Delta x)$. Вычислим теперь $f(x_0+\Delta x)$ точно:

$$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^3-3(x_0+\Delta x)=x_0^3-3x_0+(3x_0^2-3)\Delta x+3x_0\Delta x^2+\Delta x^3 \quad (2).$$

Мы видим, что вычисляя по приближенной формуле, мы отбрасываем два слагаемых с Δx^2 иΔx^3. Если Δx мала, т. е. если мы вычисляем значение функции в точке, близкой к точке Δx , то эти слагаемые еще меньше.

Δx	Δx^2	Δx^3
0,01	0,0001	0,000001
0,001	0,000001	0,000000001
0,0001	0,00000001	0,000000000001

Что это значит, видно из таблицы.

Приведенные рассуждения показывают, что чем меньше |Δx| , тем точнее приближение, получаемое при отбрасывании двух последних слагаемых в равенстве (2).

В заключение такого разъяснения следует сказать, что и для других функций погрешность будет зависеть от Δx таким же образом.

Конечно, такой подход к выводу оценки погрешности формулы не может претендовать на общность рассуждений, но преимущество его состоит в том, что он более доступен учащимся.

Таким образом, получение формулы $f(x+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ (3) предстанет перед учащимися как частный случай решения общей задачи приближения функции многочленом, что дает возможность заменять сложные вычисления простыми. Этот прикладной смысл формулы (3) на уроках иллюстрируется обычно или на примере извлечения корня, или на примере обратной пропорциональности: действительно, умножать проще, чем делить, а извлекать корень, например, пятой степени учащиеся вообще не умеют. Однако значение этой формулы учащиеся оценят лишь в том случае, если увидят, что вычисления действительно упрощаются. Поэтому, в частности, не следует особенно увлекаться отработкой общей формулы $\sqrt[n]{x_0+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{n \cdot x_0} \cdot \Delta x$, которая все-таки требует довольно громоздких вычислений. Полезнее и интереснее для учащихся дать ее очень простой частный случай для приближенного извлечения корня из чисел, близких к единице. Действительно, для $x_0=1$ имеем: $\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n} \cdot \Delta x$.

Например, $\sqrt[5]{1{,}03} \approx 1 + \frac{0{,}03}{5} = 1{,}006; \sqrt[3]{1{,}02} \approx 1{,}007$ и т. д.

2. Касательная к графику функции.

При изучении вопроса о построении касательной к графику функции учителю следует обратить внимание учащихся на следующие *два факта*.

1. Если производная функции в какой-либо точке существует, то это означает, что к графику функции в этой точке можно провести касательную, и притом одну; если же производная в какой-либо точке не существует, то такой касательной провести нельзя или касательная вертикальна. К примеру,

пусть задана функция $y = x^{\frac{2}{3}}(x-2)$. Ее производная $y' = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$ существует на всей числовой прямой, кроме *x=0,* и мы можем заметить, что и касательная к кривой в этой точке вертикальна.

2. Если производная функции в какой-либо точке равна 0, то это означает, что угловой коэффициент касательной, проведенный к графику функции в этой точке, равен нулю, а из этого в свою очередь следует, что касательная, проведенная к графику функции, в этой точке параллельна оси Ох.

Уяснение учащимися этих двух фактов облегчит им в дальнейшем построение графиков функций.

3. **Исследование функции с помощью производной проводится по общей схеме:**

а) нахождение области определения функции;

б) нахождение производной функции;

в) нахождение критических точек данной функции;

г) нахождение промежутков монотонности и экстремумов функции;

д) построение графика функции.

Следует отметить, что первые четыре части плана не вызывают у учащихся затруднений. Значительно большую сложность для них представляет пятый пункт плана, когда учащийся по уже проведенному исследованию, оформленному в виде таблицы, должен построить график функции.

При этом наибольшее число ошибок учащиеся допускают при построении графика в экстремальных точках и точках, близлежащих к ним. Проанализируйте, какие ошибки могут допустить учащиеся при построении графика функции $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Эти ошибки происходят из-за того, что учащиеся при построении графика функции берут во внимание лишь характер монотонности функции и то, какой экстремум имеет функция в той или иной экстремальной точке, забывая при этом учесть, существует ли производная функции в этих точках, и если да, то каково ее значение.

Действительно, график построен так, что в точках (-1;-4);(0;-3);(1;-4) к кривой нельзя провести касательные, в то время как производная функции существует (она равна нулю), а значит, проведение касательных возможно.

Следовательно, при построении графика функции учащиеся должны уметь сопоставить ход кривой в окрестностях экстремальных точек с тем, возможно ли проведение касательных или нет, причем в случае равенства нулю производной функции в этих точках касательные должны быть параллельны оси Ох.

Так, в данном случае при построении графика функции $y = x^4 - 2x^2 - 3$ учащиеся оформляют проведенное исследование в виде таблицы. Затем строят в системе координат точки (-1; -4); (0; -3); (1; -4) и график функции.

X	(-∞; 1)	1	(-1;0)	0	(0;1)	1	(1;+∞)
y'(x)	-	0	+	0	-	0	+
y(x)		-4		-3		-4	
		min		max		min	

2.8. Методика изучения первообразной

План
1. Различные подходы к изложению темы.
2. Различные определения первообразной.
3. Методика изучения понятия "Первообразная функции".

1. Различные подходы к изложению темы

В учебной и методической литературе встречается разный порядок изложения вопросов интегрального исчисления.

Иногда введение и изучение определенного интеграла не связываются с использованием производной. Чаще до введения определенного интеграла понятие производной уже дано. Тогда авторы по-разному выбирают порядок изучения определенного интеграла и первообразной: либо раньше дается определение определенного интеграла, а первообразная появляется, когда учащиеся в достаточной мере могут оценить преимущества, даваемые формулой Ньютона - Лейбница, либо сначала вводится понятие первообразной, а потом определенный интеграл, причем определения его могут быть разными (интеграл рассматривается как приращение первообразной или как предел интегральных сумм), но в вычислении определенного интеграла основную роль играет применение первообразной.

Последний подход преобладает в учебниках и учебных пособиях для средней школы. Такой порядок более соответствует школьной программе: изучение понятия первообразной функции естественным образом связывается с теми вопросами дифференциального исчисления, которые входят в школьную программу, а возможность применения первообразной дает богатый материал для решения задач.

2. Различные определения первообразной

Начнем с определения первообразной. Сравним два определения.

1. Функция F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка F'(x)=f(x).

2. Функция F(x) называется первообразной в промежутке от функции f(x), если в этом промежутке функция F(x) непрерывна, а в каждой внутренней точке промежутка справедливо равенство F'(x)=f(x).

Первое определение короче за счет того, что формируется более сильное требование: на концах промежутка требуется дифференцированность, а не непрерывность, как во втором определении. Первое определение мы примем для дальнейшего изложения.

Иногда авторы пособий отказываются от указания промежутка, в котором рассматривается первообразная. Вред ли это стоит делать: правда, большей частью ученики будут встречаться со случаями, когда функция и ее первообразная определены на множестве действительных чисел, но встречаются и другие случаи. Например, при доказательстве теоремы о производной площади криволинейной трапеции соответствующая функция рассматривается на отрезке.

3. Методика изучения понятия "Первообразная функции"

Первый урок по теме " Первообразная" можно начать математическим диктантом, чтобы проверить, все ли ученики готовы к восприятию нового, все ли они умеют дифференцировать и понимают физический смысл производной. Вот примерный текст диктанта:

1. Найдите производную функции y=8.
2. Найдите производную функции y=7.
3. Найдите производную функции $y=3x^2+5x+7$.
4. Найдите производную функции $y=3x^2+5x+12$.
5. Найдите производную функции $y=3\sin^2 x$.
6. Уравнение пути движущейся точки $s=8x^3$. Найдите уравнение скорости ее движения.
7. Найдите уравнение ускорения движения той же точки.

Этот диктант следует проверить сразу, чтобы уже перед объяснением видеть, на каком уровне подготовленности находится класс. С этой целью учащиеся могут записывать ответы на двух листах под копирку: один лист сдается учителю для оценки, а по второму листу ученик проверяет и анализирует свои ответы.

При анализе диктанта нужно подчеркнуть, что разные функции могут иметь одну и ту же производную (вопросы 1-2 и 3-4).

$y=c$ (c-const) $y'=0$

$y=x$ $y'=1$

$y=x^2$ $y'=2x$

$y=x^3$ $y'=3x^2$

$y=x^{-2}$ $y'=-2x^{-3}$

$y=x^{-3}$ $y'=-3x^{-4}$

$y=x^k$ ($k€Z$) $y'=kx^{k-1}$

$y=\sin x$ $y'=\cos x$

$y=\cos x$ $y'=-\sin x$

После анализа диктанта переходим к объяснению нового материала. Начав с краткого введения о необходимости решать задачу, обратную дифференцированию, можно показать таблицу и научить школьников использовать ее для нахождения функции по ее производной. Здесь же важно подчеркнуть, опираясь на примеры из диктанта, что задача эта решается неоднозначно. Например, если производная f'(x) равна 0, то искомой функцией может быть и f(x)=7, и f(x)=8, и вообще любая f(x)=c, c€R. Далее можно по учебнику ознакомить учащихся с определением первообразной и разобрать приведенные примеры.

Закрепление материала позволяет провести задания с пропусками. Эти задания полезно предъявить классу в виде печатных раздаточных материалов (тетради с печатной основой и т. п.), но можно подать и фронтально кодоскопом или мелом на доске, или даже на слух.

1. Заполните пропуски в определении первообразной: функция F называется ___________ на заданном __________ для функции f или для всех __________ из этого промежутка ____________ = ___________.

2. Докажите, что $2x^2$ есть первообразная для 2x на (-∞; +∞). Доказательство: (_____) =_____ для всех x __.

3. Докажите, что функция H(t) есть первообразная для функции h(t) на указанном промежутке, если _______________ .

а) $H(t) = 2 - 3t + \frac{t^5}{5}$, *h(t)=t⁴-3, t€* (-∞; +∞).

Решение.

По определению, функция _______ есть первообразная на данном промежутке для функции ________, если для ___________ данного промежутка _____ = _______.

$H(t) = 2 - 3t + \frac{t^5}{5}$ есть первообразная для $h(t)=t^4-3$ на промежутке (-∞; +∞), т. к. $H'(t) = (2 - 3t + \frac{t^5}{5})' = 2' - (3t)' +$ ____=0 - ____ + ____ = ______ для всех t€___;

б) $H(t) = \frac{3}{\sqrt[3]{t^2}}; h(t) = -\frac{2}{\sqrt[3]{t^5}}, t \in (0;+\infty).$ Решение. $H(t) = \frac{3}{\sqrt[3]{t^2}}$ есть и ______ для h(t)=______ на промежутке _______, т. к. $H'(t) = \left(\frac{3}{\sqrt[3]{t^2}}\right)' = \left(\frac{3}{t^{--}}\right)' = \left(3t^{--}\right)' = 3\left(-\frac{2}{3}\right) =$ _______=______ для всех _______.

4. G(x) есть первообразная для g(x) на R; найдите g(x), если

а) $G(x)=x^2-2x$; б) G(x)= 5; в) $G(x)=(x-1)^2$; г) G(x)=89.

Решение. Если G(x) - первообразная для g(x) на R, то для всех x€_____ выполняется равенство _________=__________, следовательно,

а) $g(x)=G\ (x)=(x^2\ 2x)$ =_________; б) g(x)=G (x)=_________________;

в) g(x)=_________________________; г) ____=______=________________.

5. Найдите среди приведенных в предыдущем задании функций первообразные для функций:

а) g(x)=2x 2 на R; б) g(x)=0 на R.

Ответ. а) ____________; б) ___________.

6. Найдите четыре первообразных для функции f(x)=3. Сделайте вывод.

Решение. (3x) =______. Поэтому одна из первообразных F(x)=__________. (3x+18) =_________. Поэтому еще одна первообразная F(x)=_________. (3x+___)=_________. Поэтому еще одна первообразная F(x)=________________. (3x ___)=_________. Поэтому еще одна первообразная F(x)=________________.

Ответ. 1) _______; 2) _______; 3) _______; 4) _______.

7. Пользуясь таблицей с формулами дифференцирования, найдите по одной из первообразной для каждой из следующих функций:

а) $\frac{1}{\cos^2 x}$; б) sin x; в) x; г) 1; д) $-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Решение. а) Первообразной для является функция ________; б) _________ для __________ является функция ______________; в) первообразной для ________ является ________________ x; г) __________ для _________ является ___________; д) ______________________.

Закончить такой урок можно предупреждением, что на следующем уроке будет письменный опрос, в процессе которого каждый ученик напишет полное определение первообразной и выполнит задание, аналогичное упражнениям учебника.

Следующий урок начинается с письменного опроса.

1) Написать определение первообразной.

2) Доказать, что функция $x^3+17x+9$ является первообразной для функции $3x^2+17$.

3) Найти одну из первообразных функции косинуса. Ответ обосновать.

f(x)=0 F(x)=c (c=const)

f(x)=1 F(x)=x+c

f(x)=2x F(x)=x^2+c

f(x)=$3x^2$ F(x)=

f(x)= $2x^{\ 3}$, x≠0 F(x)=

f(x)= $3x^{\ 4}$, x≠0 F(x)=

f(x)=$kx^{k\ 1}$, k€Z F(x)=

f(x)=cos x F(x)=

f(x)=sin x F(x)=

Работу желательно проверить на уроке. Далее на этом же уроке может быть изложено основное свойство первообразной. В качестве задания рекомендуется заполнить таблицу.

Далее доказываются теоремы - правила отыскания первообразных суммы, произведения на постоянный множитель и функции f(kx+b).

Вопросы для самоконтроля.

1. Что называется первообразной для данной функции на промежутке?
2. Как вводится в школьном учебнике определение понятия первообразной?
3. Что такое интегрирование? Какова мотивировка введения этой операции?
4. Каково основное свойство первообразной? Каков его геометрический смысл?
5. В чем сходство и различие производной и первообразной?
6. Что называется криволинейной трапецией?
7. Как найти площадь криволинейной трапеции?

2.9. Методика введения понятия определенного интеграла

План

1. О месте понятия определенного интеграла в курсе “Алгебра и начала анализа” академического лицея.
2. О введении понятия интеграла.
3. Применение интеграла при решении геометрических и физических задач.

1. После ознакомления учащихся в курсе «Алгебра и начала анализа» с понятиями предела и производной, способами их вычисления и некоторыми их применениями учащихся знакомят с понятиями и и основными идеями интегрального исчисления. В теме «Интеграл», на которую отведено 14 часов, рассматриваются вопросы: первообразная функции, интеграл и его применение к нахождению площади, интеграл как предел интегральных сумм, площадь круга и его частей. Кроме того, в курсе «Геометрия» академического лицея учащиеся знакомятся с применением определенных интегралов к вычислению объемов тел. Программа по математике для средней школы не предусматривает систематизации приемов и методов интегрирования и не предполагает выработки навыков и техники интегрирования сложных функций.

2. Как известно, главной методической проблемой, от решения которой не в последнюю очередь зависит усвоение учащимися элементов интегрального исчисления, является вопрос о способе введения понятия определенного интеграла в виде приращения первообразной (как этого требует программа) или в виде предела интегральных сумм (как это обычно делается в вузе). Первый способ изложения короче и не требует вывода формулы Ньютона — Лейбница. Однако при этом способе введения понятия определенного интеграла идея метода суммирования, лежащая в основе понятия определенного интеграла (так исторически возник определенный интеграл), отходит на второй план. При втором способе введения понятия определенного интеграла как предела интегральных сумм требуется больше времени на изучение интеграла, так как требуется провести большую подготовительную работу по рассмотрению задач, приводящих к понятию определенного интеграла, а затем рассмотреть теорему Ньютона — Лейбница (ибо без нее, исходя только из определения, трудно вычислять определенные интегралы как пределы сумм).

Однако при таком подходе к понятию определенного интеграла, т. е. когда он рассматривается как особый вид предела некоторого вида, к нахождению которого сводится решение различных геометрических и физических задач, определенный интеграл оказывается более понятным и доступным, а его введение воспринимается учащимися как закономерная необходимость.

Дадим краткую характеристику изучения понятия определенного интеграла, изложенную различными авторами пробных учебников и учебных пособий для средней школы.

а) В учебном пособии принимается первый вариант введения понятия определенного интеграла. Поэтому изложение вопроса начинается с изучения первообразной функции (дается определение и доказываются основная теорема и правила нахождения первообразных). Затем рассматривается задача вычисления площади криволинейной трапеции; показывается, что для случая неотрицательной пункции *f* (*x*) площадь *S(x)* криволинейной трапеции с основанием [*a, x*] является одной из первообразных этой функции *f (x),* причем отмечается, что приращение этой первообразной на отрезке *[a, b]* равно площади криволинейной трапеции с основанием *[a, b]*.

Затем выражение

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

где *F (x)* есть первообразная функции *f (x),* называют интегралом функции

f (x) в пределах от *a* до *b*.

Авторы не употребляют термина «определенный интеграл», хотя используют термин «неопределенный интеграл функции», понимая под ним совокупность всех первообразных этой функции.

Таким образом, введя понятие определенного интеграла через приращение первообразной, авторы тем самым получают и формулу Ньютона — Лейбница в готовом виде (т. е. без доказательства—в виде определения). Указав на связь интеграла с площадью криволинейной трапеции, авторы тем самым выясняют геометрический смысл этого интеграла. Наконец, авторы рассматривают интеграл как предел интегральных сумм. Введя понятие площади и рассмотрев ее свойства, далее изучают площадь круга и его частей. В заключение рассматривается задача о работе переменной силы, при решении которой используется определенный интеграл.

б) В учебном пособии для X—XI классов средней школы с математической специализацией «Математический анализ» Н. Я. Виленкина и С. И. Шварцбурда (М., «Просвещение», 1973) тема «Интеграл» изучается в стиле, близком к вузовскому. Изложение наминается с введения понятия неопределенного интеграла функции $f\ (x)$ (обозначение: $\int f(x)dx$) как множества всех первообразных пункций для *f (x)* и рассмотрения его свойств. Затем достаточно полно изучается вопрос об интегрировании функций (интегрирование методом подстановки и интегрирование по частям). Далее рассматривается задача о нахождении площади криволинейной трапеции, причем проводится доказательство существования этой площади.

Определив понятие нижней и верхней интегральных сумм для непрерывной функции *f (x),* авторы вводят понятие определенного интеграла непрерывной функции *f (x)* по отрезку *[a, b].* Рассмотрев определенный интеграл как функцию верхнего предела, выводят формулу Ньютона — Лейбница для вычисления определенного интеграла. Затем рассматривают приложения определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур; объема цилиндрических тел, объема пирамиды и усеченной пирамиды, объемов тел вращения; объемов тел, у которых известны площади параллельных сечений, площади поверхности вращения, приводят обе теоремы Гюльдена.

3. Рассмотрим некоторые задачи из геометрии и физики, которые при первом подходе к введению понятия интеграла (т. е. как приращению первообразной) следует рассмотреть в конце темы «Интеграл» как иллюстрацию связи интеграла с физикой и геометрией, а при втором подходе (т. е. когда интеграл рассматривается как предел интегральных сумм) с них целесообразно начинать, т. е. использовать их как задачи, приводящие к понятию интеграла.

К числу таких задач следует отнести, прежде всего, такие важнейшие задачи, как задача о площади плоской фигуры, задача о вычислении пути, задача о силе давления жидкости и др. Разберем эти задачи.

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть в плоскости, снабженной декартовой системой координат, задана фигура *aABb,* ограниченная отрезком *[a, b]* оси *Ox,*

прямыми $x = a$ и $x = b$ кривой $y = f\ (x)$, где *f (x)* — однозначная, непрерывная, неотрицательная на отрезке *[a, b]* функция (рис. 1). Такую фигуру называют *криволинейной трапецией* с основанием *[a, b].*

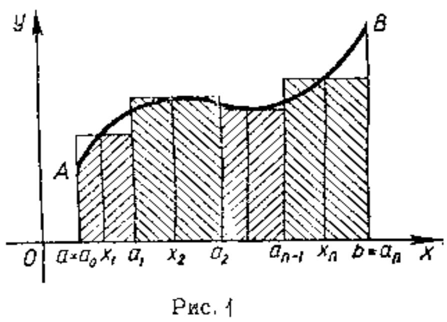


Рис. 1

Отметим, что данная здесь терминология отличается от принятой в курсе элементарной геометрии, где отрезок *[a, b]* называется высотой трапеции, а основаниями трапеции называются отрезки параллельных прямых $x = a$ и $x = b$. Отметим также, что точка A может совпадать с точкой a, а точка B - с точкой b. Поставим задачу: «Найти площадь криволинейной трапеции».

Для решения поставленной задачи поступают следующим образом. Разбивают отрезок *[a, b]* на n частей одинаковой длины: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = a_i - a_{i-1}$, где точки a_i есть $a=a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n = b (a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n)$

Затем через точки деления a_i $(i = 1, 2, ..., n - 1)$ проводят прямые параллельные оси Oy. В результате проделанной операции данная криволинейная трапеция $aABb$ разбивается на n криволинейных трапеций с основаниями $[a_{i-1}, a_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

На каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выбирают произвольную точку x_i $(a_{i-1} \le x_i \le a_i)$. Далее строят прямоугольники с основаниями, равными

$\Delta x = a_i - a_{i-1}$, и высотами длины $f(x_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$, площадь каждого такого прямоугольника равна произведению $f(x_i) \times (a_i - a_{i-1}) = f(x_i) \cdot \Delta x$. Из построенных прямоугольников образуют ступенчатую фигуру (рис. 1), площадь которой вычисляется по формуле

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Это есть приближение площади криволинейной трапеции $aABb$. Очевидно, что, чем мельче отрезки деления $[a_{i-1}, a_i]$ $(i = 1, 2, ... n)$, тем лучше будет приближение. Поэтому, если рассмотреть, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, то получим площадь криволинейной трапеции. Если понятие интеграла уже введено, то можно записать, что площадь такой криволинейной трапеции вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Задача о вычислении пути

Пусть материальная точка движется прямолинейно с некоторой мгновенной скоростью $\vartheta = \vartheta(t)$, т. е. известна скорость точки в любой момент времени t, $\vartheta(t)$- непрерывная функция на отрезке $[T_1, T_2]$. Требуется найти путь, который пройдет тело за промежуток времени от $t_L = T_1$ до $t_2 = T_2$ (рис. 2).

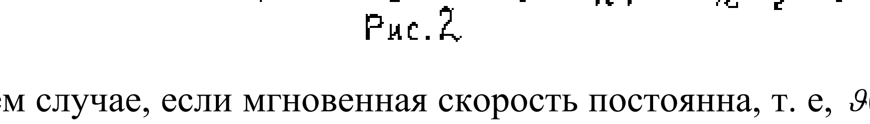


Рис.2

В простейшем случае, если мгновенная скорость постоянна, т. е, $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{const}$ для $t \in [T_1, T_2]$, то путь, пройденный телом, равен (по определению, известному из курса физики) произведению скорости на время движения: s = ϑ_0 $(T_2$ — $T_1)$. В общем случае, когда мгновенная скорость непостоянна, поступают следующим образом.

Промежуток изменения времени $[T_1, T_г]$ разбивают точками $t_o = T_1, t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_n = T_г$ $(t_0 < t_1 < ... < t_n)$ на n отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ одинаковой длины

$$\Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{T_2 - T_1}{n}.$$

Далее, выбрав на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ произвольную точку $\tau_i\,(t_{i-1} \le \tau_i \le t_i)$, составляют сумму $\sum_{i=1}^{n} \vartheta(\tau_i)\Delta t...$ (*). Каждое слагаемое $\vartheta(t_i)\Delta t$ этой суммы дает приближение пути, пройденного телом за время от $t = t_{i-1}$ до $t = t_i$. Действительно, скорость $\vartheta(t)$ в точках отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ мало отличается от ее значения в точке τ_i так как функция $\vartheta(t)$ непрерывна. Поэтому путь, который прошло тело за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$, приближенно равен пути, который проходит тело за это время с постоянной скоростью, равной $\vartheta(\tau_i)$. Следовательно, путь, пройденный телом за время от $t = T_1$ до $t = T_г$, приближенно выражается суммой (*):

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \vartheta(\tau_i)\Delta t,$$

так как он складывается из путей, пройденных телом за каждый промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$, на которые разбит отрезок времени $[T_1, T_г]$. Легко видеть, что приближение будет тем лучше, чем мельче отрезки деления $[t_{i-1}, t_i]$
$(i = 1, 2, ..., n)$.

Поэтому путь, пройденный телом за отрезок времени $[T_1, T_2]$, определяется как предел следующего вида:

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vartheta(\tau_i)\Delta t.$$

Если учащимся известно понятие интеграла, то путь, пройденный телом, можно вычислить по формуле $s = \int_{T_1}^{T_2} \vartheta(t)dt.$.

Задача о силе давления жидкости

Пусть пластинка в виде трапеции погружена вертикально в жидкость с удельным весом y так, что ее основания параллельны свободной поверхности жидкости и находятся ниже ее уровня соответственно на расстоянии a и b (рис. 3). Требуется определить силу давления жидкости на пластинку. Если бы пластинка находилась в горизонтальном положении на глубине h от свободной поверхности (уровня) жидкости, то сила давления жидкости F на пластинку была бы равна весу столба жидкости, имеющего основанием данную пластинку, а высотой — глубину h, т. е.

$$F = \gamma \cdot h \cdot S, \qquad (*)$$

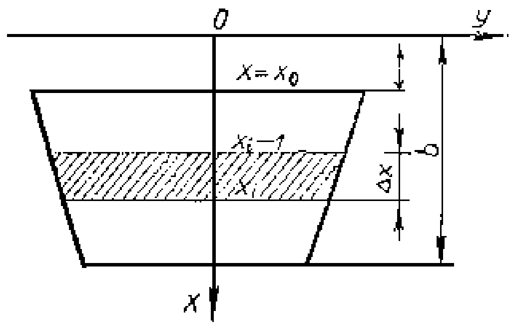


Рис. 3

где S — площадь пластинки. Если же пластинка погружена в жидкость вертикально, то по формуле (*) давление жидкости на пластинку не может быть вычислено, так как в этом случае давление жидкости на единицу площади пластинки изменяется с глубиной погружения. При решении задачи будем учитывать закон Паскаля, т. е. то, что давление жидкости передается во все стороны одинаково. Для решения задачи разобьем пластинку на n частей (малых горизонтальных полосок) прямыми, параллельными свободной поверхности жидкости (т. е. параллельно оси Oy) и проходящими через точки: $x_0 = a$, x_1, $x_г, \ldots, x_{n-1}, x_n = b (x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n)$, $x_i = a + \dfrac{b-a}{n} i, i = 0, 1, \ldots, n.$

Выделим одну из полосок — i-ю (на рисунке она заштрихована), находящуюся на глубине x_i. Для достаточно узкой полоски давление во всех ее частях можно считать приближенно одинаковым, а саму полоску можно принять за прямоугольник с высотой Δx и основанием, равным нижнему основанию полоски. Легко видеть, что основание прямоугольника зависит от глубины погружения полоски, т. е. будет функцией абсциссы x. Обозначим эту функцию $f(x)$, x Є [a; b]. Таким образом, силу давления на полоску можно вычислить по формуле (*), т. е. имеем: $\gamma \cdot f(x_i)\Delta x \cdot x_i$.

Просуммировав силы давления жидкости на все полоски, найдем некоторое приближение силы давления жидкости на всю пластинку:

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma f(x_i)\Delta x \cdot x_i .$$

Точное значение силы давления жидкости на пластинку определяется по формуле

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma f(x_i)\Delta x \cdot x_i .$$

Следовательно, если учащиеся знакомы с понятием интеграла, сила давления жидкости на пластинку вычисляется по формуле

$$F = \gamma \int_a^b x f(x) dx.$$

Далее, если еще не было введено понятие (определенного) интеграла, следует переходить к рассмотрению этого понятия следующим образом. Итак, нами рассмотрены задачи (геометрическая и физические), решение которых производилось с помощью одной и той же последовательности действий (одним и тем же методом), приводящей к построению некоторой суммы и нахождению предела этой суммы. Так как указанный метод применяется к решению большого числа математических и прикладных задач, то, естественно изучить его, абстрагируясь от конкретного содержания задач. Сущность этого метода состоит в следующем:

1) Пусть на отрезке *[a, b]* задана произвольная однозначная ограниченная функция *f (x).* Отрезок *[a, b]* разбивается на *n* частей

$[a_{i-1}, a_i]$ $(i = 1, 2,..., n)$ одинаковой длины $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = a_i - a_{i-1}$,

точками $a_0 = a$, a_1 a_2, ..., a_{n-1}, $a_n = b$ причем $a_0 < a_1 < a_г < \ldots \ldots < a_{n-1} < a_n$.

На каждом из отрезков разбиения $[a_{i-1}, a_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ выбирается произвольная точка x_i и для каждого отрезка разбиения составляется произведение значения функции *f(x)* в выбранной точке x_i на длину соответствующего отрезка $[a_{i-1}, a_i]$, т. е. произведение вида $f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = f(x_i)\,\Delta x$.

Берется сумма всех таких произведений: $s_n(a;b) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, называемая *интегральной суммой* функции *f (x)* на отрезке *[a, b].*

4) Находится предел интегральных сумм s_n *(a; b),* т. е.

$$I = \lim_{n\to\infty} s_n(a;b) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Рассматриваемый предел, если он существует, носит название определенного интеграла и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

После всего сказанного можно формулировать определение интеграла как некоторого предела интегральных сумм.

Вопросы для самоконтроля.

1. Какие методы интегрирования Вы знаете? Какие из них изучаются в средней школе? В чем состоит сущность каждого из методов?

2 Что называется определенным интегралом? Как объяснить учащимся различие между понятиями определенного и неопределенного интегралов?

Какие свойства определенного интеграла изучаются в школе?

2.10. Логические основы курса геометрии. Методические особенности изучения геометрических понятий, аксиом, теорем

План

1. Цели изучения геометрии.
2. Роль аксиом в построении школьного курса геометрии.
3. Методика ознакомления учащихся с аксиомами.
4. О введении первых понятий.

1. Цели изучения геометрии

Одна из главных задач обучения геометрии состоит в *усвоении* учащимися ее *теоретических основ* и *овладении навыками применения их на практике.* Не менее важна и задача *развития логического мышления учащихся,* способности к доказательным, аргументированным рассуждениям, последовательному, точному и ясному выражению мыслей. При изучении школьного курса геометрии решается и целый ряд других задач обучения: *развитие пространственного представления и воображения учащихся, геометрического "видения" окружающего мира* и т. д.

Актуальными для школьного курса геометрии являются задачи повышения научной ценности содержания этого курса, доступности учебного материала, усиления роли содержательных геометрических задач, устранения перегрузки учащихся и др.

Авторы учебников по-разному расставляют акценты при формулировании целей обучения геометрии, выделяют ведущие цели. Своеобразно решаются такие задачи в учебном пособии А. В. Погорелова. Это пособие характеризуется, *во-первых,* более высоким уровнем строгости изложения теоретического материала, особенно в начале курса. Здесь приводится полный список аксиом, необходимые определения и теоремы, доказательства. Строгость изложения рассматривается как естественное средство развития логического мышления учащихся, выработки у них навыков полноценной логической аргументации. Педагогически обоснованная мера строгости изложения еще не вполне определена, о чем свидетельствуют изменения, появляющиеся в различных изданиях учебного пособия А.В. Погорелова. *Во-вторых*, в пособии усилена роль задач в обучении. Достигается это двумя способами: за счет более рационального и компактного изложения теоретического материала и повышения удельного веса содержательных задач. Опыт работы учителей показывает, что на решение задач (при обучении по пособию отводится около 50 % учебного времени, что больше, чем при обучении по предшествующему пособию. В пособии почти нет задач на разучивание определений, подведение к теоремам и т. д. *В-третьих*, рациональное изложение теоретического материала во многом обеспечивается применением методов не только синтетической, но и аналитической геометрии. Например, в данном пособии впервые в отечественном школьном учебнике при изложении векторной алгебры применен метод координат, что позволило значительно упростить эту тему. Уже в девятилетней школе учащимся сообщается достаточно полный объем сведений из векторной алгебры, включающих и понятие скалярного произведения двух векторов. Содержание пособия, равно как и его изложение, в основном традиционно. В этом смысле прослеживается большая преемственность с учебником А. П. Киселева, долгое время успешно применявшимся в отечественной школе. В пособии отсутствует теоретико-множественный подход (хотя говорится, что геометрические фигуры "состоят из точек"). Если сравнить учебное пособие А. В. Погорелова с пособием А.П. Киселева, то можно отметить, что в пособии А. В. Погорелова геометрические преобразования не используются в качестве математического аппарата доказательства теорем и решения задач, а изучаются здесь в виде отдельной, сравнительно небольшой темы.

Компактное изложение теоретической части курса достигается также за счет сокращения методического аппарата, усиления конспективности, однако излишняя сухость изложения затрудняет использование пособия при самостоятельной работе учащихся. Учащиеся могут пользоваться им главным образом после объяснений учителя на уроке. Вместе с этим здесь имеются определенные элементы методического аппарата: образцы решения задач, вопросы для повторения и др.

2. Роль аксиом в построении школьного курса геометрии

Одна из целей включения аксиом в школьный учебник - сформировать базу для построения доказательств. Удачно подобранная система аксиом призвана обеспечить рациональное и простое построение всего курса. На наш взгляд, аксиомы должны быть ориентированы как на изложение традиционно-синтетической, так и аналитической частей учебного курса.

Необходимо иметь в виду, что в качестве аксиом обычно выбираются уже известные из пропедевтического курса факты или факты, близкие к наглядным представлениям учащихся, их жизненному опыту. При этом новым для учащихся является главным образом не содержание аксиом, а предельно точный математический язык, на котором они формулируются. Приведение аксиом в начале курса означает систематизацию ранее известных знаний и дополнение их новыми знаниями. В начале курса происходит активное усвоение учащимися математической терминологии, необходимой для изучения всего курса.

Дидактические формы приведения аксиом в учебнике могут быть различными. Не следует стремиться к формальному стилю их изложения. Пример неформального введения аксиом дает учебник геометрии А. П. Киселева. В этом учебнике в начале курса приводится немало аксиом, но явно выделяются и нумеруются только те из них, которые систематически используются в дальнейшем изложении.

В пособии А. В. Погорелова приводятся аксиомы принадлежности, порядка, измерения отрезков и углов, откладывания отрезков и углов, существования треугольника, равного данному, параллельности. Наличие аксиом измерения максимально упростило чрезвычайно трудный в математическом отношении вопрос о введении меры для отрезков и углов. Аксиомы откладывания отрезков и углов позволили строго доказать признаки равенства треугольников, что редко встречается в школьном учебнике. Предпринята попытка усилить роль аксиом порядка при изложении курса геометрии. Заметим, что целесообразность этого новшества признается не всеми. Тщательное обоснование предложений порядка в доказательствах, например, теоремы о сумме углов треугольника и теоремы

Фалеса усложнило их и обострило проблему доступности изложения. В последнем издании указанного пособия имеют место определенные ограничения сферы применения этих аксиом.

3. Методика ознакомления учащихся с аксиомами

Прежде всего выясним вопрос: "На использование какой методики ознакомления учащихся с аксиомами ориентируют существующие пособия?" В пособии А. В. Погорелова применен своеобразный *методический подход*. Вначале слова "аксиома", "теорема", "доказательство" даже не употребляются, вместо них говорят: "основное свойство", "свойство", "объяснение". Вместо выражений "скажите определение" или "сформулируйте определение" используются выражения "какая фигура называется:" или "что такое:" Термины "аксиома", "теорема", "доказательство" вводятся и разъясняются в конце § 1 пособия лишь после того, как учащиеся приобретут некоторый опыт применения аксиом в доказательствах. В результате осуществляется неформальное и ненавязчивое введение аксиом, а разъяснение их роли становится более конкретным и убедительным. Дайте учащимся задание прочитать эти предложения. Поставьте вопросы, отвечая на которые, они воспроизводили бы эти формулировки. Как можно сформулировать такие вопросы, используя термины "основное свойство", "свойство", "что такое:", "какая фигура называется:"? Реализуйте при этом следующую методическую схему введения аксиом: 1) ввести аксиому на наглядной основе; 2) сформулировать аксиому; 3) выполнить логический анализ формулировки аксиом; 4) провести математический диктант.

4. О введении первых понятий

Необходимо иметь в виду, что некоторые математические понятия являются *неопределяемыми* (в школьном курсе список неопределяемых понятий обычно избыточный). В пособии такими понятиями являются: "точка", "прямая", "точка принадлежит прямой", "точка *B* лежит между точками *A* и С", "полуплоскость", "длина отрезка", "мера угла", "отложить отрезок (угол) заданной меры". Свойства неопределяемых понятий описываются аксиомами. Все остальные понятия - *определяемые.* Примерами таких понятий являются: "отрезок", "полупрямая", "угол", "развернутый угол", "луч проходит между сторонами угла", "треугольник", "угол треугольника", "равные треугольники", "параллельные прямые" и др.

Остановимся на *некоторых особенностях определений* в данной теме.

Убедитесь в следующем: 1) отрезок определяется таким образом, что концы ему не принадлежат; в связи с этим нельзя использовать обозначение отрезка с помощью квадратных скобок: [AB]; 2) полупрямая определяется таким образом, что ее начальная точка ей не принадлежит; 3) угол определяется так, что вершина угла не принадлежит ему; 4) вершины треугольника (по определению) принадлежат ему.

Мы не рекомендуем обращать внимание учащихся на отмеченные выше тонкости. Знать о них должен прежде всего учитель. Это поможет ему избежать некорректной математической речи и символических обозначений.

Одним из центральных понятий для всего курса геометрии является понятие равных треугольников. В учебнике А. П. Киселева равенство треугольников определяется с помощью наложения. В пособии под редакцией А. Н. Колмогорова сразу вводится общее понятие равенства фигур (с помощью перемещения). Можно утверждать, что определение равенства треугольников, приводимое в пособии А. В. Погорелова , для школьной практики является новым. Это определение таково: "Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются равными, если у них $<A=<A_1$, $<B=<B_1$, $<C=<C_1$, $AB= A_1B_1$, $BC= B_1C_1$, $AC=A_1C_1$". Как видно из этого определения, речь идет о равенстве не просто каких-либо двух треугольников, а треугольников, между которыми установлено соответствие: $A\to A$, $B\to B$, $C\to C$. По этой причине, например, равенство $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ может выполняться, но для "тех же" треугольников равенство $\Delta ABC=\Delta B_1A_1C_1$ может оказаться несправедливым.

Вопросы для самоконтроля.

1. Каковы цели и задачи изучения геометрии в средней школе?
2. Какую пропедевтическую работу необходимо проводить с учащимися до изучения систематического курса геометрии?
3. Каково основное содержание школьного курса планиметрии, стереометрии?
4. В чем суть аксиоматического построения геометрии?
5. Какие понятия являются неопределяемыми в школьном курсе геометрии? Приведите различные варианты систем неопределяемых понятий в разных учебниках геометрии.
6. Какие виды определений геометрических понятий Вам известны. Приведите примеры.
7. Чем правдоподобные рассуждения отличаются от строгих математических доказательств?
8. Какие методы доказательств Вы знаете? Как часто они встречаются в практике обучения?
9. В чем суть метода доказательства от противного?
10. Какие элементы включает в себя обучение доказательству?
11. Каковы этапы работы над аксиомой, над теоремой?
12. Какие виды теорем Вы знаете? Какова логическая связь между ними? Какие виды теорем изучаются в школьном курсе геометрии?
13. Какова роль примеров и контрпримеров при изучении геометрии?

2.11. Методика изучения теорем

План

1. Подведение к теореме.
2. Формулировка теоремы, ее анализ
3. Доказательство теоремы
4. Применение теоремы.

Методика изучения теорем широко рассматривается в методической литературе. При разработке методики необходимо первоначально уточнить цель данного урока, а затем описать подробно методику изучения указанной теоремы. Можно воспользоваться следующим планом.

1. Подведение к теореме. Здесь следует предложить вопросы, задачи или какие-то задания, которые позволят учащимся осознать необходимость изучения данной теоремы, а также помогут ее сформулировать.

При введении теорем, как и при введении понятий, используются два метода: конкретно-индуктивный и абстрактно-дедуктивный (эти методы широко применяются и лежат в основе методических схем изучения многих теорем). В первом случае теорема в готовом виде не сообщается, проводится специальная работа по "подведению" учащихся к теореме, обнаружению соответствующей математической закономерности. Итогом этой работы является формулирование изучаемой теоремы.

Абстрактно-дедуктивный метод введения теоремы начинается с того, что учитель сам формулирует эту теорему, а затем проводится работа по уточнению смысла данной теоремы, ее условия и заключения и т.д.

2. Формулировка теоремы, ее анализ. В курсе математики формулируются и доказываются теоремы, имеющие различный вид: в одних теоремах из одного условия вытекает одно заключение, в других - из одного условия вытекает несколько заключений, в третьих - из нескольких условий вытекает одно заключение и т. д. Но в любом случае теорема состоит из трех частей:

а) разъяснительная часть, в которой описывается множество М объектов, о которых идет речь в этой теореме;

б) условие теоремы, то есть некоторый предикат А(х), заданный на множестве М;

в) заключение теоремы - некоторый предикат, заданный на том же множестве М. В символах математической логики теорема может быть записана следующим образом: $(\forall \square xM)\ (A(x) => B(x))$.

Нужно выделить все эти части в рассматриваемой теореме и сформулировать ее в виде "Если ..., то ..." (в случае, если она сформулирована в другом виде). Установить, какое дано утверждение - простое или сложное. Если теорема имеет сложное строение, то разбить ее на простые теоремы и сформулировать каждую в указанном виде.

1. Чертеж (рисунок), краткая запись теоремы. Сделать чертеж к теореме и записать, что дано и что требуется доказать.

2. Идея и план доказательства. Здесь необходимо указать метод доказательства теоремы (например, метод доказательства от противного) или основную, главную мысль (теорема, свойство), на которой основано доказательство теоремы. Далее записать план доказательства теоремы (можно дать его в таблице).

3. Осуществление плана. По данному выше плану провести доказательство теоремы.

Доказательством называют конечную последовательность предложений данной теории, каждое из которых либо является аксиомой, либо выводится из одного или нескольких предыдущих предложений этой последовательности по правилам логического вывода. После этого теорема определяется как предложение, которое является последним в каком-либо доказательстве. С любой теоремой связаны еще три теоремы: прямая, обратная, противоположная и обратная к противоположной (повторить). Структура доказательства как логическая конструкция состоит из таких компонентов: тезис, аргументы, демонстрация.

Тезис - доказываемое утверждение.

Аргументы (основания доказательства) - используемые в доказательстве уже известные утверждения, из которых необходимо следует истинность доказываемого тезиса.

Демонстрация - последовательность расположения аргументов и выводов, образующих цепь умозаключений.

Умозаключение - рассуждение, в ходе которого из одного или нескольких суждений (называемых посылками умозаключения), выводится новое суждение (называемое заключением или следствием), логически вытекающее из посылок.

Итак, каждое доказательство можно представить в виде цепочки рассуждений или конечной последовательности предложений. Различают два вида доказательств: прямое и косвенное. Прямые доказательства, в свою очередь, делятся на синтетические и аналитические. Методические особенности этих доказательств различны. Исходным моментом синтетического доказательства является условие теоремы. На основе предыдущих предложений и законов логики условие теоремы постепенно преобразуют до тех пор, пока не приходят к заключению. К достоинствам синтетического метода относятся: исчерпывающая полнота, сжатость, краткость (обычно он применяется при изложении уже разработанных математических теорий, известных доказательств или доказательств, отыскание которых не вызывает у учащихся затруднения). Синтетический метод в методическом отношении имеет и свои недостатки. Остается неясным, как можно обнаружить такое доказательство, почему в рассуждениях поступают так, а не иначе; дополнительные построения никак не аргументируются; учащиеся, слушая или читая доказательство, воспринимают его пассивно, соглашаются с истинностью каждого умозаключения и не представляют, в каком направлении должны протекать дальнейшие рассуждения. Этот способ мало способствует самостоятельному открытию доказательства; идея, план рассуждений остаются скрытыми от учащихся.

Компенсировать отмеченные недостатки синтетического метода помогают следующие методические приемы.

Прием формулирования общего замысла (идеи) доказательства (о чем говорилось выше).

Прием мотивировки дополнительных построений.

Прием приведения плана доказательства.

Прием проведения доказательства с опорой на краткую его запись.

Прием составления блок-схемы доказательства.

Прием составления таблицы с двумя параллельными колонками: "Утверждение" и "На основании" (или "Обоснование") и т.д.

При аналитическом методе доказательства мысль движется от заключения теоремы к ее условию. Разновидностями аналитического метода являются восходящий и нисходящий анализы (повторить).

К косвенным доказательствам относятся:

а) "метод от противного" (истинность доказываемого тезиса устанавливается посредством опровержения противоречащего ему суждения);

б) разделительный метод (тезис рассматривается как один из возможных вариантов предположений, когда все предположения отвергаются, кроме одного).

3. Закрепление доказательства теоремы.

4. Применение теоремы.

2.12. Изучение векторов в курсе математики

План
1. Различные подходы к определению понятия вектора.
2. Содержание темы в школьном курсе математики и некоторые особенности ее изучения.

В школе понятие вектора вводится в восьмом классе. На изучение данной темы предусмотрено 8 часов.

1. Различные подходы к определению понятия вектора

Одним из фундаментальных понятий современной математики является вектор. Эволюция понятия вектора осуществлялась благодаря широкому использованию этого понятия в различных областях математики, механики и в технике. Работы К. Весселя, Ж. Аргана и К.Ф. Гаусса по теории комплексных чисел установили связь между арифметическими операциями над комплексными числами и геометрическими операциями над векторами в двухмерном пространстве □ плоскости.

В середине прошлого столетия в работах В. Гамильтона, Ф. Мебиуса понятие вектора нашло широкое применение при изучении свойств трехмерного и многомерного пространств.

Конец прошлого и начало текущего столетия ознаменовались широким развитием векторного исчисления и его приложений. Были созданы векторная алгебра и векторный анализ, теория поля. Эти теории были использованы при построении специальной и общей теорий относительности, которые играют исключительно важную роль в физике.

В соответствии с требованиями программы по математике для средней школы понятие вектора стало одним из ведущих понятий школьного курса геометрии, так как уже на первых уроках физики в IX классе изложение материала ведется с широким привлечением векторного аппарата. В физике при помощи векторов изображаются различные направления величин: сила, скорость, ускорение, перемещение материальной точки и т. п. При этом часто векторные величины называют векторами. Иногда такая направленная величина оказывается существенно связанной с определенной точкой (точкой ее приложения) или прямой.

Но в математике обычно имеют дело с так называемым свободным вектором (вектором, не связанным ни с какой прямой и ни с какой фиксированной точкой). Следует отметить, что в математике вектор рассматривается как элемент векторного пространства, но в школьном курсе математики понятие "векторное пространство" не изучается. Поэтому и выделяют различные подходы к введению вектора. Каждый из этих подходов имеет свои достоинства и недостатки. И фактически ни один из них не является идеальным и логически безупречным.

Так, в пособии под редакцией Колмогорова А. Н. дается такое *определение*: "В геометрии параллельные переносы имеют и другое название - их называют векторами". Данное определение основано на рассуждениях, что вектор - это объект, характеризуемый направлением и длиной. Однако, как известно, теми же самыми признаками характеризуется и параллельный перенос. Поэтому представляется наиболее естественным всякий параллельный перенос называть вектором.

Новое определение вектора не связано с понятием *направленного отрезка*. Под вектором понимают либо множество упорядоченных пар точек, задающих некоторый параллельный перенос, либо сам этот перенос. Рассмотрим множество всех пар точек плоскости. Для элементов рассматриваемого множества введем следующее отношение: пары (A, B) и (C, D), если [AB)[CD) и $|AB| = |CD|$. Это те пары точек, которые задают один и тот же параллельный перенос. Эквивалентными между собой будем считать и пары, у которых первая точка совпадает со второй. Легко проверить, что такое отношение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Данное отношение эквивалентности разбивает множество пар точек плоскости на непересекающиеся подмножества (классы), элементами которых являются эквивалентные пары. Каждое из таких подмножеств можно назвать вектором. Заметим, что при данной трактовке вектора направленный отрезок AB выступает как удобное наглядное изображение вектора.

Однако в статье А. Д. Александрова "Понятие вектора в физике и геометрии" (Математика в школе. - 1985. - № 5) говорится о том, что неправильно определять вектор как направленный отрезок.

В этой же статье в качестве наиболее удачного предлагается такое определение вектора: "Вектором в геометрии называется направленный отрезок, рассматриваемый с точностью до выбора его начала, т.е. равные друг другу направленные отрезки считаются представителями или изображениями одного и того же вектора. Данный вектор - это любой из таких отрезков". Однако в учебнике А.Д.Александрова это определение в явном виде не сформулировано.

"Направленный отрезок называется вектором" - так определяется данное понятие в пособии А.В. Погорелова. В настоящее время этот учебник остается ведущим, поэтому больше внимания следует уделять изложению данной темы в этом пособии.

Отличительной чертой изложения векторов здесь является широкое использование координатного метода. При этом широко применяются свойства параллельного переноса, который сам вводится с использованием координат. С помощью параллельного переноса вводятся такие понятия, как "одинаково направленные векторы", "равенство векторов".

У этого подхода к введению векторов есть достоинства и недостатки. К достоинствам можно отнести отсутствие трудностей, связанных с введением операций над векторами и законов векторной алгебры. К недостаткам следует отнести то, что геометрический смысл этих операций отодвигается на второй план, а приложения векторов в физике и в геометрии практически не рассматриваются. Эти недостатки частично устранены в учебнике Л.С. Атанасяна и др. "Геометрия 7-9 кл.", где сначала изложена декартова система координат, затем тема "Векторы" (вектор и операции над векторами рассматриваются с геометрической точки зрения, уделяется внимание их приложениям) и только потом идет векторная алгебра.

2. Содержание темы в школьном курсе математики и некоторые особенности ее изучения

<u>Операции над векторами.</u>

Операции над векторами, которые изучаются в средней школе, следующие:

- сложение векторов (вычитание);
- умножение на число;
- скалярное произведение векторов.

Чаще всего эти операции вводятся в геометрической форме (Л.С. Атанасян).

Отличительной чертой учебного пособия по геометрии А.В. Погорелова является то, что все операции над векторами вводятся в координатной форме. (Фактический материал см. по соответствующим учебникам).

Важным для приложений векторов является тот факт, что любой вектор $\vec{a}(a_1, a_2)$ допускает разложение в виде $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - единичные векторы, имеющие направления положительных координатных полуосей, их называют координатными векторами, или ортами.

В этой теме обязательно доказательство теоремы о скалярном произведении векторов (доказательство знать), поскольку ряд важных следствий из этой теоремы, а также свойства скалярного произведения позволяют применять векторы к доказательству теорем и решению задач.

<u>Применение векторов при доказательстве теорем.</u>

С помощью векторов могут быть доказаны следующие теоремы:

- средняя линия треугольника параллельна его третьей стороне и равна ее половине;
- сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон;
- диагонали ромба взаимно перпендикулярны;
- диагонали в прямоугольнике имеют равные длины; и т. д. (одну доказать).

<u>Методика решения геометрических задач с помощью векторов.</u>

Введенный в среднюю школу векторный аппарат дает новый метод для решения геометрических задач. По значимости его можно сравнить с методом составления уравнений.

Так как этот метод является новым для учащихся, необходимо:

a) заинтересовать учащихся, показав им эффективность его использования на специально подобранных задачах;

b) обучать учащихся некоторым эвристикам (системе определенных правил, помогающих найти ключ к решению задачи), которые помогут создать у них навык в его применении;

c) обучать учащихся этому методу достаточно на простых задачах, не отвлекая внимание на трудности чисто геометрического содержания.

Следует иметь в виду, что векторный метод не является универсальным, к решению некоторых задач он не применим или малоэффективен.

Можно выделить следующие эвристики.

Что требуется доказать (на геометрическом языке)	Что достаточно доказать (на векторном языке)
1) a□□∥b	$\overline{AB} = k\overline{CD}$, где AB∈a, CD∈b, k - число.
2) Точки A, B и C ∈ прямой a	a) установить справедливость одного из следующих равенств: $\overline{AB} = k\overline{BC}$ или $\overline{AC} = k\overline{AB}$; b) доказать равенство $\overline{QC} = p\overline{OA} + q\overline{QB}$, где p+q=1, Q - произвольная точка; c) доказать равенство $\alpha\overline{QA} + \beta\overline{QB} + \gamma\overline{QC} = 0$, где α+β+γ=0 и Q - произвольная точка.
3) Точка C ∈ отрезку AB, где AC:AB=m : n	$\overline{AC} = \frac{m}{n}\overline{CB}$ или $\overline{QC} = \frac{n}{m+n}\overline{QA} + \frac{m}{m+n}\overline{QB}$ для некоторой точки Q.
4) a┴b	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$, где A,B ∈ a, C,D ∈ b.
5) Вычислить длину отрезка	a) выбрать два неколлинеарных (или 3 некомпланарных) базисных вектора, у которых известны длины и углы между ними; b) разложить по ним вектор, длина которого вычисляется; c) найти скалярный квадрат этого вектора, используя формулу $\vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2$.
6) Вычислить величину угла.	1) выбрать два неколлинеарных (или 3 некомпланарных) базисных вектора, у которых известны длины и углы между ними; 2) выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам; 3) вычислить cos α $(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$.

В учебнике геометрии автора А.А.Рахимкариева «Геометрия. 8 класс» теме векторы уделено восемь тем, на каждую тему выделяется по одному часу.

Представлены следующие вопросы:

1. Понятие о векторе.
2. Сумма и разность векторов.
3. Умножение вектора на число.
4. Применение векторов к решению задач.

5. Координаты вектора.
6. Действия над векторами, заданными своими координатами.
7. Скалярное произведение векторов.
8. Геометрический и физический смысл векторов.

В начале рассмотрения данной темы определяются скалярная величина, затем векторная величина. Векторной величиной называется величина определяемая числом и направлением.

2.13. Методика изучения геометрических величин в курсе математики

План

1. Требования программы к содержанию темы "Геометрические величины".
2. Величина и ее измерение.
3. Методические особенности изучения геометрических величин.

1. Требования программы к содержанию темы "Геометрические величины"

Изучение геометрических величин (длин, площадей, объемов) - одна из важнейших тем школьного курса геометрии, имеющая прикладной характер. Необходимость измерения геометрических и физических величин часто появляется в задачах, возникающих в различных областях.

Базисная программа по математике следующим образом определяет содержание темы по классам.

В <u>II - IV классах</u>: примеры величин (длина, площадь, время, масса, стоимость); единицы их измерения; примеры зависимости между величинами (путем, скоростью и временем; площадью и длинами сторон прямоугольника и т. п.).

В <u>V - VI классах</u>: примеры величин (длина, площадь, объем, градусная мера угла); единицы измерения длин, площадей, объемов и углов; масштаб; площадь прямоугольника; площадь прямоугольного треугольника; объем прямоугольного параллелепипеда; формулы длины окружности и площади круга.

В <u>VII - IX классах</u>: понятие о площади (9 класс); основные свойства площади; площадь прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции; отношение площадей подобных фигур; площадь круга и его частей; решение задач на вычисление неизвестных длин, углов и площадей.

В <u>X - XI классах, академических лицеях и профессиональных колледжах</u>: понятие об объеме; основные свойства объема; объемы многоугольников: прямоугольного параллелепипеда, призмы, пирамиды; объемы тел вращения: цилиндра, конуса, шара; площадь боковой и полной поверхностей цилиндра и конуса; площадь сферы.

Программа предъявляет следующие требования к подготовке учащихся в области геометрических величин.

Учащиеся II - IV классов должны научиться измерять простейшие величины и выполнять над ними соответствующие действия. Программа рекомендует основное внимание сосредоточить на выработке прочных навыков измерения величин, на овладение наиболее распространенными на практике единицами измерения величин.

Учащимся V - VI классов необходимо приобрести навыки измерения геометрических величин, научиться решать простейшие задачи на нахождение длин, площадей и объемов.

Учащиеся VII - IX классов должны приобрести навыки измерения и вычисления длин, углов и площадей, применяемые для решения разнообразных геометрических и практических задач. Учащиеся должны решать также несложные задачи на нахождение величин, не сводящиеся к непосредственному применению одной формулы или теоремы.

Учащиеся академических лицеев и профессиональных колледжей должны уметь решать задачи на нахождение длин, углов, площадей и объемов (в том числе задачи с практическим содержанием). При этом требуется не только умение довести решение до численного результата, но и умение перевести практическую задачу на язык геометрии и решить ее, приведя достаточно полное обоснование. Решать задачи на нахождение площадей поверхности тел.

2.Величина и ее измерение. Величина - одно из основных понятий математики, возникшее в древности и подвергшееся в процессе развития математики ряду обобщений.

Общее понятие величины - непосредственное обобщение конкретных величин (длины, площади, объема, массы и т. д.), свойства которых сформулированы еще в "Началах" Евклида.

Впоследствии эта величина получила название положительной скалярной величины, чтобы отличить ее от более общих понятий величины (векторной и др.). И говоря далее о величинах, будем иметь в виду *скалярную, аддитивную, непрерывную положительную величину*.

Интуитивно мы представляем себе, что величина может быть больше или меньше, две однородные величины могут складываться, величину можно делить на любое натуральное число, ее можно измерить, причем под измерением обычно понимают сравнение данной величины с другой того же рода, принятой за единицу измерения. Однако сформулировать в математических терминах ответ на вопрос, что такое величина, - совсем не просто. Школьное обучение этого не дает. Мы в школе имеем дело с конкретными величинами, изучение которых хорошо иллюстрирует общее понятие величины при соответственной постановке обучения.

Для правильной постановки обучения конкретным геометрическим величинам учитель должен иметь представление об одном из возможных построений теории величины.

Приведем схему построения такой теории, полученную путем математизации эмпирически устанавливаемых свойств конкретных величин (А. Н. Колмогоров).

Рассмотрим бесконечное множество B с введенным в нем отношением < (меньше) и операцией + (сложение), т. е. (B,<,+), которое назовем системой однородных величин (или системой величин, или родом величин). Элементы a, b, c, : или a_1, a_2, : множества B назовем однородными величинами или величинами одного рода.

Система величин (B,<,+) характеризуется следующими свойствами, которые могут быть приняты за *исходные предложения (аксиомы) теории величин*:

1) $\forall$ a, b (a,b или a=b или b< a) (причем имеет место только одно из трех соотношений).

2) $\forall$ a, b, c (a< b и b< c $\Rightarrow$a< c) (транзитивность отношения "меньше", а также "больше", которое может быть определено через "меньше", a>b$\Leftrightarrow$b< a).

3) $\forall$a, b $\exists$! c (a+b=c) (замкнутость B относительно сложения).

4) $\forall$a, b (a+b=b+a) (коммутативность сложения).

5) $\forall$ a, b, c (a+(b+c)=(a+b)+c) (ассоциативность сложения).

6) $\forall$ a, b (a+b>a) (монотонность сложения).

7) $\forall$ a, b a>b $\Rightarrow\exists$!c (b+c=a)) (возможность вычитания a-b=c).

8) $\forall$ a, $\forall$ n$\in$N $\exists$b (nb=a) (возможность деления величины на натуральное число: a:n=b).

9) $\forall$a, b $\exists$n$\in$N (a< nb) (аксиома Архимеда).

10) пусть даны две последовательности величин из B: $a_1<a_2<...<...$; $...<...<b_2<b_1$, причем для любой величины c при достаточно большом номере n $b_n-a_n<c$, т. е. члены последовательностей (a_n) и (b_n) неограниченно приближаются друг к другу. В таком случае существует единственная величина x$\in$B, которая больше всех a_n и меньше всех b_n, т. е. $\forall$c $\exists$n$\in$N ($b_n-a_n<$ c)$\Rightarrow\exists$! x$\in$B $\forall$n$\in$N ($a_n<x<b_n$) (аксиома непрерывности).

Свойства 1 - 10 полностью определяют понятие системы положительных скалярных величин.

Если какую-нибудь величину *e*$\in$B принять за единицу измерения, то всякая величина системы B однозначно представлена в виде **a=αe**, где α – положительное действительное число ($\alpha\in R^+$) – **мера** величины a при единице измерения *e* . Меру *a* при единице измерения *e* обозначим через m(a), т. е. если a=αe, то α=m(a).

Мера обладает следующими **свойствами**:

а) m – функция в области определения B и области значения R^+, т. е. m отображает B на R^+;

б) a< b$\Rightarrow$m(a)< m(b) (монотонность меры);

в) m(a+b)=m(a)+m(b) (аддитивность меры);

г) $m(e)=1$ (мера единицы измерения равна 1).

Перечисленные свойства полностью характеризуют меру *m*. Существует единственная функция $B \to R^{+}$, обладающая этими свойствами, а именно мера $m(a)$ величины *a* при единице измерения *e*. Если заменить *e* на *e'*, то получится новая мера $m'(a)=\alpha'$, причем, т. к. $m(a)=\alpha$, связь между двумя мерами выразится так: $m'(a)=\alpha^{-1}m(a)$.

Перечисленные свойства общего понятия величины и меры величины находят применение (в явном или неявном виде) при изучении конкретных геометрических величин (длины, площади и объема) в школе.

3. Методические особенности изучения геометрических величин

Измерение геометрических величин изучается в школьном курсе дважды, на двух различных уровнях.

На первом, чисто экспериментальном, уровне в начальных классах учатся измерять длины отрезков, площади простейших плоских фигур и объемы простейших пространственных тел. На этом уровне не дается определений длины, площади и объема.

Цель состоит в том, чтобы создать у учащихся ясные интуитивные понятия.

Рассмотрим некоторые вопросы методики изучения геометрических величин на втором уровне.

Можно ли строго эту теорию построить в школьном курсе? Разные точки зрения, много трудностей, много логических пробелов.

Вопрос об измерении геометрических величин является одним из наиболее трудных как в теоретическом, так и в методическом отношениях. Трудность эта связана с тем, что в учебной литературе и в процессе изложения темы на уроках очень четко определяются основные объекты измерений — длина, площадь, объем, и вместе с тем совсем не дается определение общего понятия величины.

Например, в учебнике А.П. Киселева площадью называется "величина части плоскости, заключенной внутри многоугольника или какой-нибудь другой плоской замкнутой фигуры". А далее мы читаем: "Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту". Далее, правда, есть разъяснение, что это краткая формулировка и надо понимать "число, выражающее площадь прямоугольника в квадратных единицах и т. д.". В сознании учащихся остается только первая формулировка.

Аналогично у А.П. Киселева обстоит дело и с определением понятия объема. Объем определяется как величина части пространства, занимаемой геометрическим телом, а дальше - теорема $V=abc$ (V — объем прямоугольного параллелепипеда).

Наряду с этим обращает на себя внимание тот разнобой, который имеет место при отыскании числа, выражающего объемы различных тел.

Именно поэтому "школьная теория" измерения геометрических величин должна строиться таким образом, чтобы четко вырисовывалась общая схема. Это относится к определениям понятий "длина", "площадь", "объем". Раскрытие связей по общей схеме способствует более глубокому пониманию и прочности знаний.

Каждое из трех понятий определяется как вещественное число, удовлетворяющее условиям (а - г), которые характеризуют общее понятие меры множества.

Можно наметить следующую схему теории измерения длин отрезков:

1) определение длины отрезка как вещественного числа, удовлетворяющего условиям (свойствам меры а - г);

2) описание процедуры измерения отрезков;

3) установление существования и единственности длины отрезка при данном выборе единицы измерения с использованием аксиомы Архимеда;

4) установление существования отрезка, длина которого при данном выборе единицы измерения равна любому, наперед заданному положительному числу с использованием аксиомы Кантора, геометрического эквивалента аксиомы непрерывности.

Разъяснение учащимся старших классов сущности аксиомы Кантора (обычно не рассматривается в школьном курсе) не представляет особых трудностей. Это можно сделать именно в связи с установлением свойства 4.

Случай, когда наперед заданное число - рациональное, не требует применения аксиомы Кантора и выполняется с помощью элементарного построения.

Но вот когда число иррациональное (например, x=2,31311311131111:), то при разъяснении приходим к аксиоме Кантора:

Если на прямой дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, :, A_nB_n, : такая, что, во-первых, каждый отрезок лежит внутри предыдущего; во-вторых, нет отрезка, лежащего внутри всех отрезков этой последовательности, то существует точка, лежащая внутри всех отрезков этой последовательности. Единственность этой точки непосредственно следует из аксиомы. И таким образом, строим отрезок x.

Теория измерения площадей и объемов в некоторой части аналогичны. Подчеркивание этой аналогии в процессе обучения - эффективное средство формирования понятия о методике построения этих теорий.

Аналогия заключается в выборе единицы измерения (квадрат со стороной 1 - куб с ребром 1), а также в последовательности и способе доказательств предложений.

Однако это не распространяется на всю теорию. Например, нельзя проводить аналогию в вопросах о равновеликости и равносоставленности площадей и объемов , хотя определения этих понятий вводятся аналогично. Но, если всякие равновеликие многоугольники равносоставлены, то этого нельзя сказать о равновеликих многоугольниках (подробно можно рассмотреть на факультативе).

"Два многоугольника (многогранника), которые можно разложить на одинаковое число попарно конгруэнтных многоугольников (многогранников), называются равносоставленными".

2.14. Четырехугольники

План
1. Последовательность их изучения многоугольников
2. Четырехугольники – методика изучения

1. **Последовательность их изучения многоугольников**. В современной классификации изучения многоугольников принята такая последовательность их изучения: выпуклый многоугольник, четырехугольник, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Изучение трапеции стоит обособленно, без логики родо-видового подчинения построения понятий.

В основу классификации объектов изучения принято наращивание количества параллельности сторон четырехугольника. Принята такая последовательность изучения: выпуклый многоугольник, четырехугольник, трапеция (одна пара параллельных сторон), параллелограмм (две пары параллельных сторон), ромб (стороны равны), прямоугольник (углы равны), квадрат (стороны и углы равны). Здесь сохраняется логика родо-видового подчинения понятий. Этим достигнуто:

а) более логичное изучение темы «Четырехугольник»;

б) на этом примере перед учащимися раскрывается стремление к логически экономичному построению математики (на это следует обращать внимание при изучении!);

в) выявляется существенное дидактическое положение. Объекты с более ограниченными свойствами сохраняют свойства объектов с менее ограничительными свойствами и поэтому при изучении увеличивается частота повторяемости свойств, что способствует более прочному их усвоению;

г) раскрывается теория средней линии;

Подбор задачного материала с учетом уровней развития геометрических умений учащихся имеют свои особенности.

Например задачи на среднюю линию трапеции можно дать следующим образом.

Основания трапеции равны 7 см и 5 см. Найти среднюю линию трапеции.

Средняя линия трапеции равна 14 см. Одно основание трапеции больше другого на 2 см. Найти основания трапеции.

Основания трапеции относятся как 3:4, средняя линия равна 21 см. Найти основания.

Разность оснований трапеций, которые относятся как 7:3 равна 3,2 см. Найти среднюю линию трапеции.

Средняя линия трапеции равная 8 см, делит диагональ на отрезки разность которых 2 см. Найти основания трапеции.

В трапеции одно основание больше другого на 8 см и средняя линия равна 14 см, а одна из боковых сторон равна 16 см. На сколько еще надо продолжить боковую сторону, чтобы они встретились с продолжением другой стороны?

В школьном курсе геометрии целесообразно использовать и конструктивные определения, например: "Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки".

Хотя эти определения более громоздки, чем определения через род и видовое отличие, они позволяют учащимся представить процесс построения объекта, что в значительной мере облегчает процесс усвоения понятий. Не следует абсолютизировать роль какого-либо одного типа определения. Главным критерием правильности выбора того или иного типа определения является лучшее усвоение школьниками вводимого понятия. Более того, в некоторых случаях можно ограничиться описанием понятия, не вводя его сложного по своей логической структуре формального определения, что оправдано с методической точки зрения в младших классах.

Сознательное осмысление учащимися логической структуры определения понятий, ознакомление их с наиболее распространенным видом определений - через род и видовые отличия лучше всего, как показал наш опыт, проводить на материале темы "Четырехугольник" в VIII классе.

Здесь же создаются благоприятные условия для работы по устранению различных ошибок, допускаемых учащимися, таких как указание не ближайшего родового понятия, отсутствие родового понятия, указание не всех требуемых видовых признаков, указание лишних видовых признаков и т.д.

Усвоение учащимися математических понятий происходит более осознанно, если формирование понятий сочетать с работой по разъяснению происхождения математических терминов и символов в историко-генетической плане.

Осуществление такой связи, в свою очередь, создает благоприятные условия для проявления интереса учащихся к предмету и позволяет внести элементы историзма в процесс обучения математике, т.к. экскурсы в историю терминов, активизируют учебно-познавательную деятельность учащихся, способствует яркости и выразительности изложения материала. Рассказ учителя об открытиях, о творчестве великих математиков позволяет учащимся уловить динамику и логический ход развития научной мысли, стать как свидетелем и участником открытий. Рассматривая математику в ее историческом развитии, знакомясь с ее прошлым, настоящим и будущим, учащиеся осознают значение математики, ее место в системе наук и практической деятельности, вклад отечественных ученых в ее развитие.

Умелое использование историко-генетического материала при обучении геометрии позволяет увидеть связь абстрактных понятий с реальной действительностью.

2.Четырехугольники – методика их изучения. Приведем пример разработки урока по теме «Четырехугольники».

Цель урока: ознакомить учащихся с понятием «четырехугольник», рассмотреть его элементы и виды, рассказать учащимся о классификации четырехугольников.

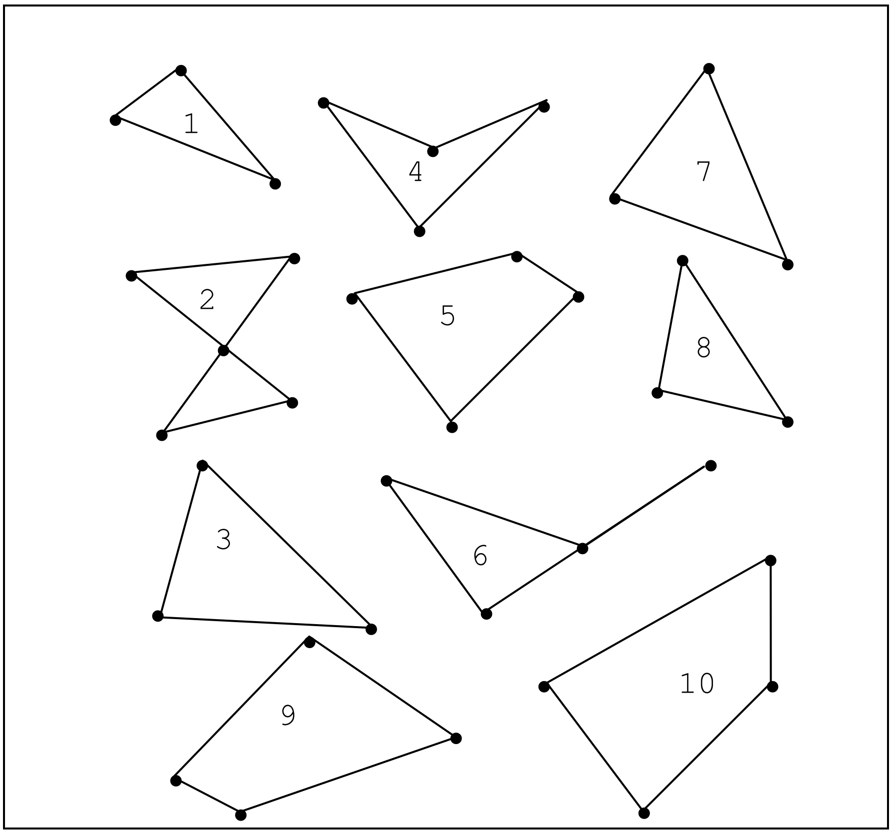
Оборудование: таблицы, плакаты, магнитофон.

Ход урока:

1. Объяснение нового материала «Четырехугольник и его элементы».

На доске вывешен плакат, на котором изображены фигуры (плакат 1).

Плакат 1



Учитель: Ребята, как вы думаете, какие из данных фигур являются четырехугольниками?

Ребята: Фигуры 4, 5, 9, и 10 являются четырехугольниками.

Учитель: Верно. Но вы не назвали фигуры 2, 6, 7. Ведь они тоже состоят из четырех последовательно соединенных отрезков и точек. Почему вы не считаете их четырехугольниками?

Ребята: У фигур 6 и 7 три точки расположены на одной прямой.

Учитель: Действительно, если взять любые три точки, лежащие на одной прямой, и одну не лежащую на ней точку, соединить последовательно их отрезками, то получится фигура, но не четырехугольник, т. е. у четырехугольника никакие три точки не должны лежать на одной прямой. (см. рис. а).

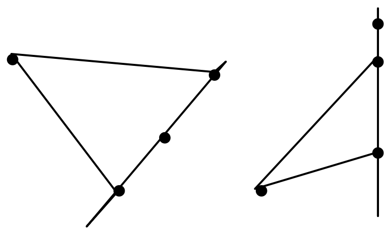


Рис а

Посмотрите, а у фигуры 2, никакие три точки не лежат на одной прямой, но ее нельзя назвать четырехугольником. Почему?

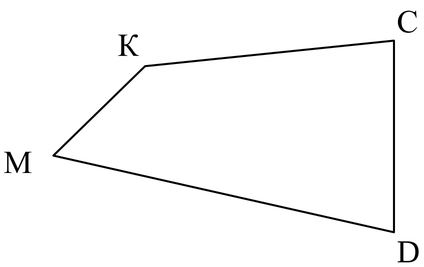
Ребята: Неправильно, соединены отрезками точки.

Учитель: Как следовало бы соединить отрезками точки, чтобы фигура 2 являлась четырехугольником?

Ребята: Последовательно, т. е. так, чтобы соединяющие эти точки отрезки не пересекались.

Учитель: Правильно. Значит, четырехугольником называется фигура, состоящая из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки, как и у треугольника, называются вершинами треугольника, а соединяющие их отрезки - сторонами четырехугольника. Четырехугольник обозначается его вершинами. Например, здесь изображен четырехугольник МКСД (см. рис. б).

Вершины четырехугольника называются соседними, если они являются концами одной из его сторон. Вершины, не являющиеся соседними, называются противолежащими.



Посмотрите на рисунки 1 и 2, изображенных на плакате. Назовите соседние вершины и противолежащие вершины четырехугольников.

Учитель: Углом четырехугольника ABCD (рис. в) при вершине A называется угол, образованный полупрямыми AB и AD. В четырехугольнике четыре угла, от чего и произошло название четырехугольник. На рисунках 3 и 4 отмечены углы четырехугольников. Углы при соседних вершинах называются соседними углами а углы при противолежащих вершинах - противолежащими углами.

Посмотрите на рисунки 5 и 8 и назовите противолежащие углы и соседние углы.

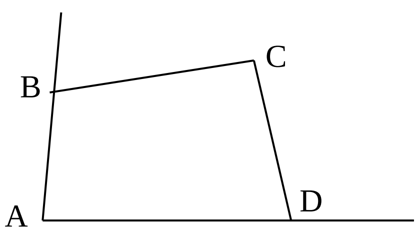
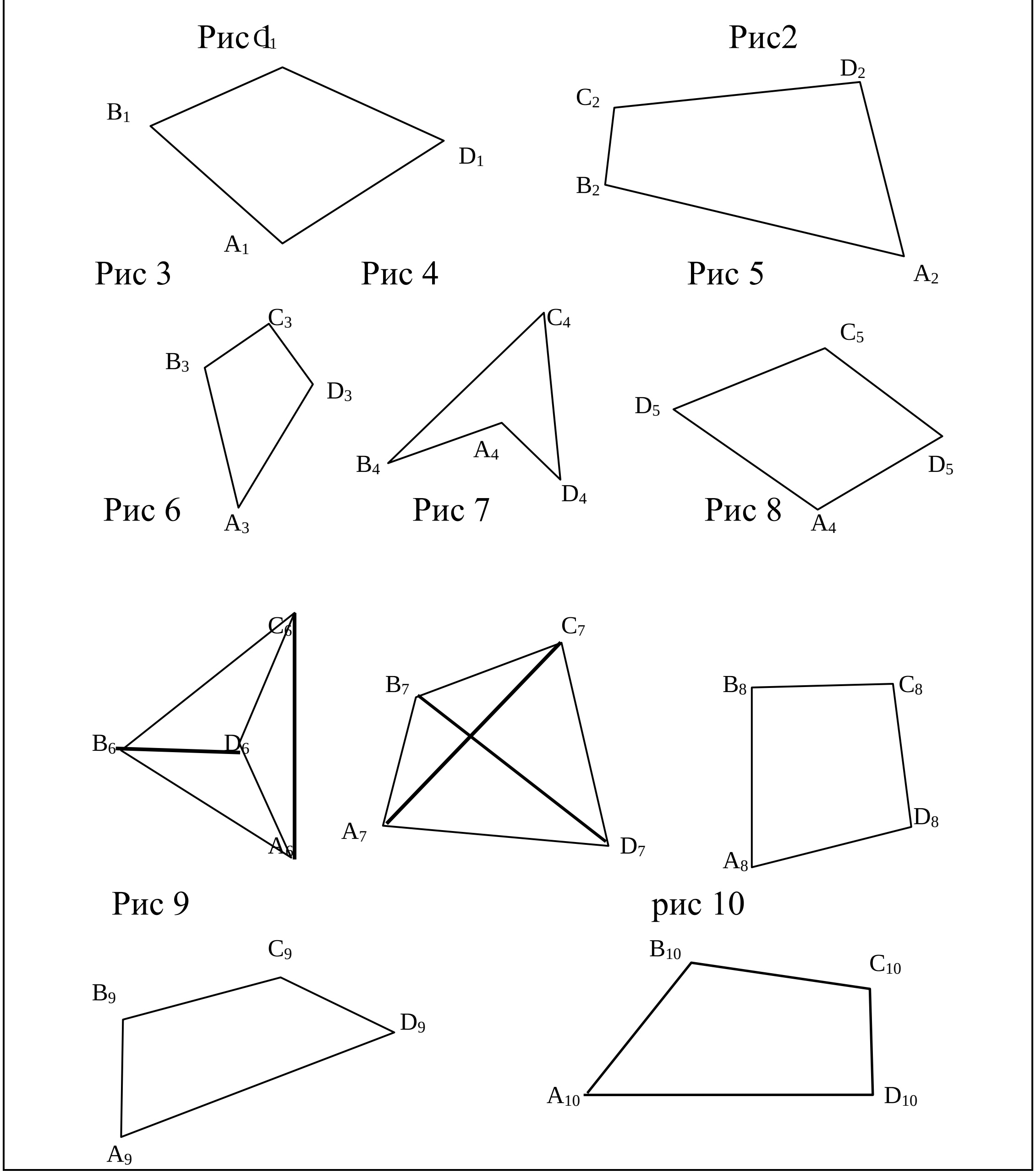


Рис. в

Плакат 2

Элементы четырехугольника



Учитель: Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются диагоналями. Сколько можно провести диагоналей в четырехугольнике?

Ребята: Две.

Учитель: По рисункам 6 и 7 назовите диагонали.

Ребята, посмотрите на рисунок 9. Стороны четырехугольника, исходящие из одной вершины, называются соседними сторонами. Назовите их.

На рисунке 10, как вы заметили, отмечены одним цветом какие стороны четырехугольника?

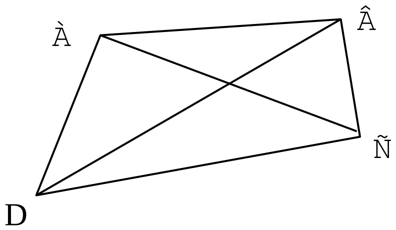
Ребята: Противолежащие.

Учитель: Да, это противолежащие стороны четырехугольника. Они не имеют общих точек. Как вы думаете, имеет ли противолежащие вершины и стороны треугольник?

Ребята: В треугольнике их нет.

Учащиеся в тетрадях, учитель на доске оформляют первую часть объясняемого материала в виде краткого конспекта.

ABCD – четырехугольник.



A, B, C, D – вершины четырехугольника.

AB, BC, CD, DA – стороны четырехугольника.

A и B, B и C, C и D, D и A – соседние вершины четырехугольника.

A и C, B и D – противолежащие вершины.

$\angle$A, $\angle$B, $\angle$C, $\angle$D – углы четырехугольника.

$\angle$A и $\angle$B, $\angle$B и $\angle$C, $\angle$C и $\angle$D, $\angle$D и $\angle$A – его соседние углы;

$\angle$ B и $\angle$ D, $\angle$ A и $\angle$ C – противолежащие углы.

AC и BD – диагонали четырехугольников.

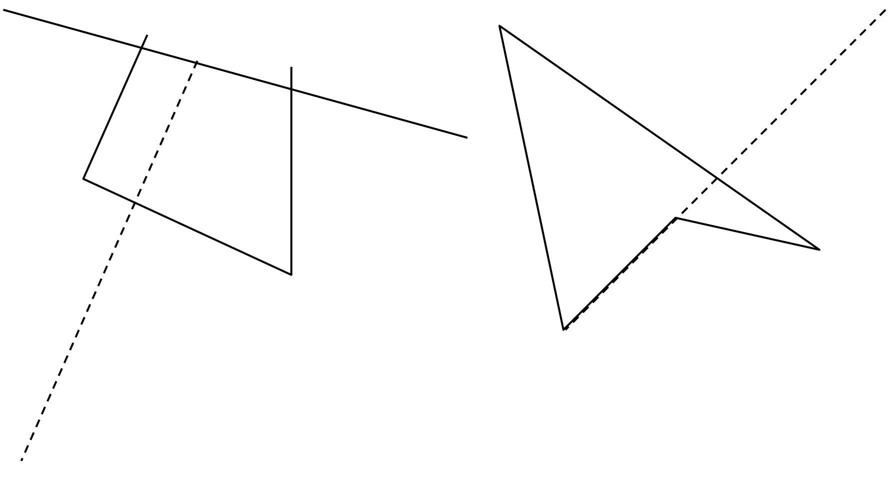
AB и BC, BC и CD, CD и DA, DA и AB – соседние стороны;

AB и DC, AD и BC – противолежащие стороны.

«Выпуклые и невыпуклые четырехугольники».

Учитель: Ребята, четырехугольники делятся на две группы: выпуклые и невыпуклые (см. рис. 3 и 4). (плакат 2).

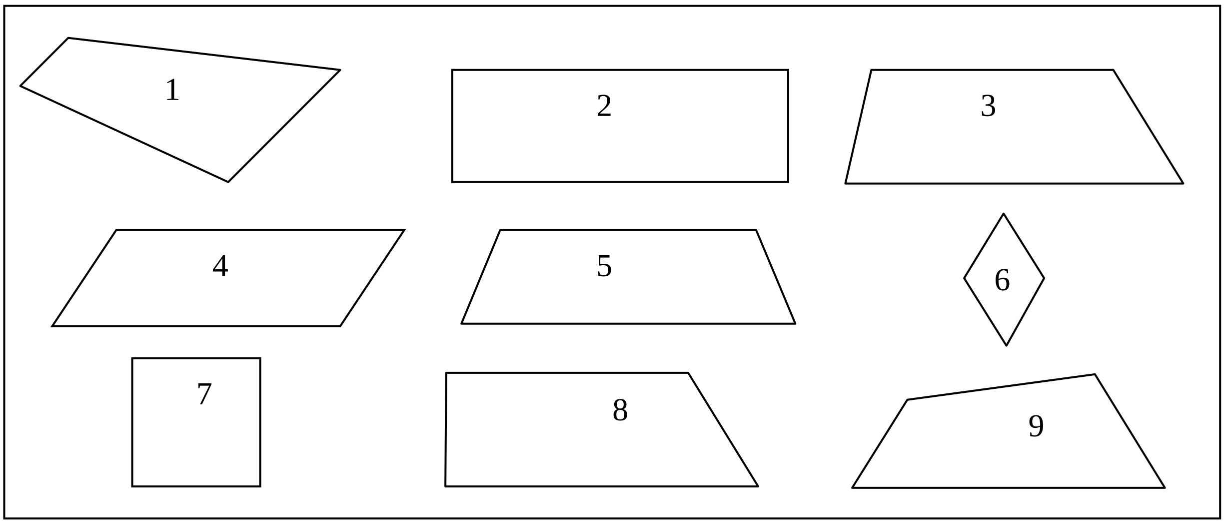
Четырехугольник называется выпуклым, если он расположен в одной полуплоскости относительно, содержащей любую его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей плоскости. Остальные четырехугольники называются невыпуклыми. Можно заметить, что у невыпуклых четырехугольников имеется угол больше развернутого.



Мы будем изучать только выпуклые четырехугольники. (Ребята чертят в тетрадях выпуклый и невыпуклый четырехугольники).

«Классификация четырехугольников».

Изложение материала проводится в виде сказки. Учителем заранее заготовлены различные виды выпуклых четырехугольников, которые прикрепляются к доске.

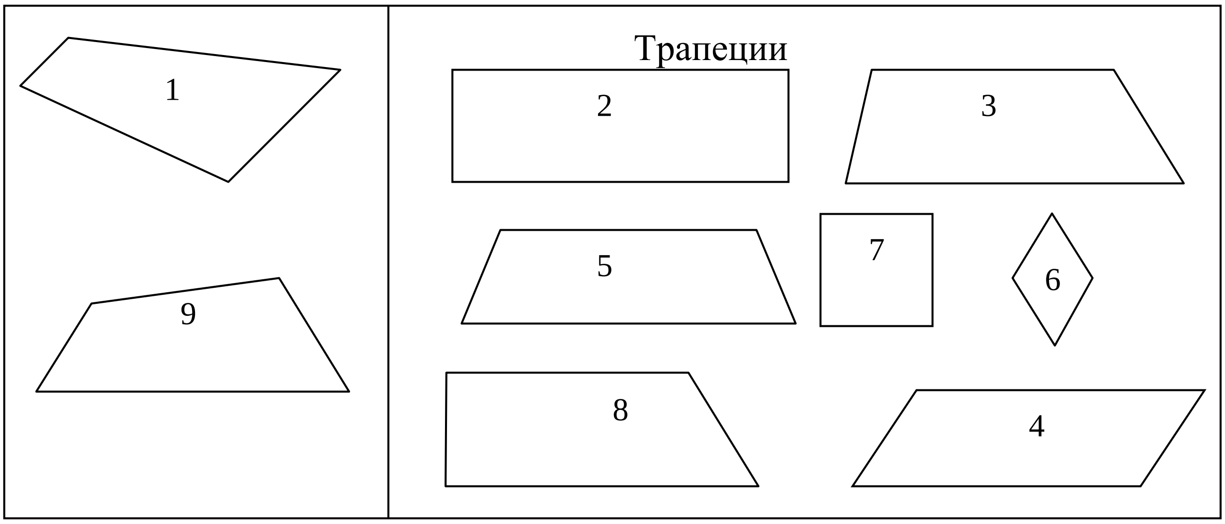


Учитель: Ребята, сейчас я расскажу вам интересную сказку о том, как жили четырехугольники и что произошло с ними.

По ходу рассказа сказки учитель передвигает четырехугольники в соответствии с тем как они классифицируются.

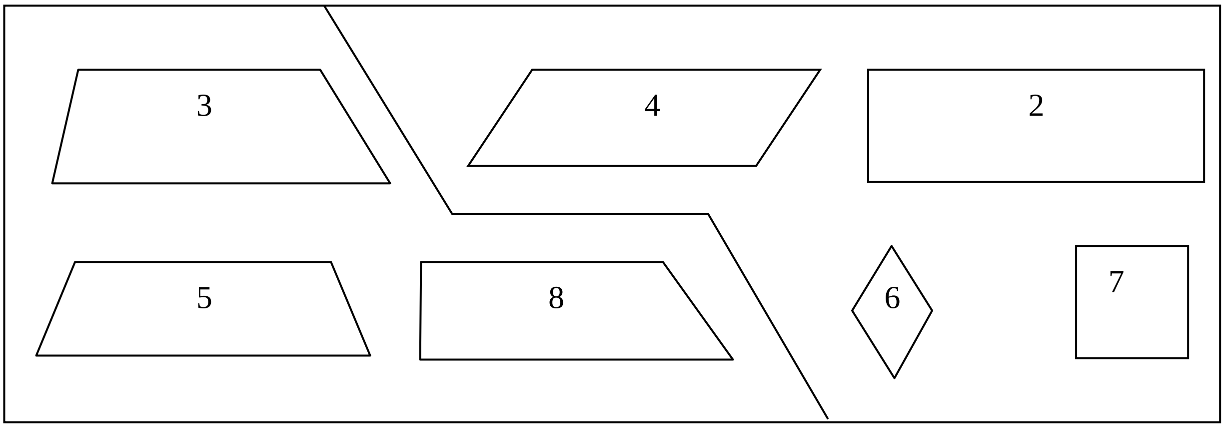
Учитель: В некотором ханстве, называемой Геометрией, жили-были Четырехугольники.

Жили они мирно и дружно, ходили друг к другу в гости. Однажды на смотре красоты выяснилось, что среди них есть Четырехугольники, имеющие параллельные стороны. Стали они страшно задаваться, хвастаться своими свойствами. Решили они называть себя Трапециями и отделяться от всех.



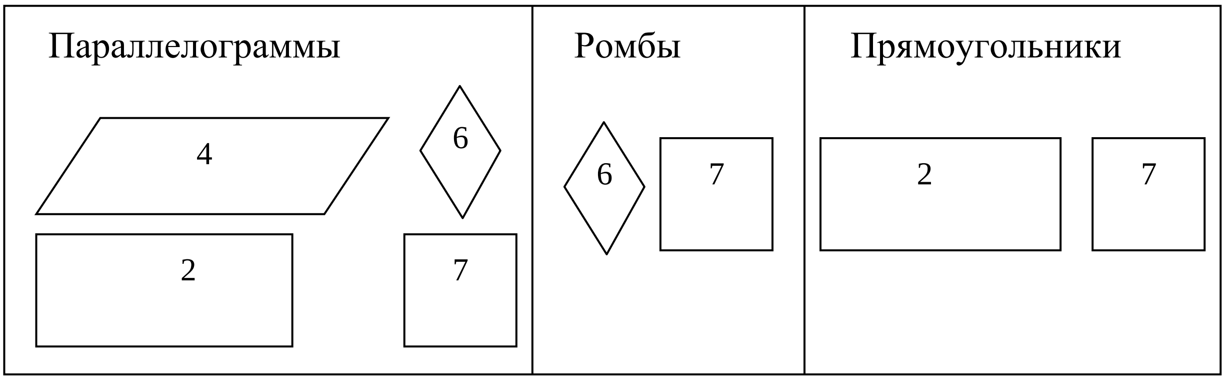
Но позже оказалось, что среди Трапеций есть такие, у которых и другие две противолежащие стороны параллельны. Какой это было честью для них, Они отделились и назвали себя Параллелограммами. И стали они восхвалять себя, гордиться своими свойствами и утерли нос Трапециям.

Параллелограммы сказали им: «Подумаешь, у вас одна пара параллельных сторон, а у нас их две, да и свойства у нас больше ваших, мы не хотим жить с вами». И выделились Параллелограммы в отдельное общество. И стали они жить отдельно.



Наступило в ханстве долгожданный мир.

Но вот в пятницу, когда все отдыхали, стали Параллелограммы присматриваться друг к другу. И вдруг оказалось, что у одних все стороны равны, а у других – все углы равны, а третьи – только с двумя парами параллельных сторон. И опять начались ссоры. Каждая из названных групп гордились своими свойствами. И решили они разделиться. Одни остались Параллелограммами, другие назвались Ромбами, а третьи – Прямоугольниками. Казалось бы все уладилось, ведь все разделились по родственным признакам. Во всех обществах только и говорили, что какие они похожие между собой. Пока однажды не заметили Ромбы, что среди них есть Четырехуголь-



ники с равными углами. «Уходите к своим», - приказали Ромбы. Но их и Прямоугольники не приняли. Увидев, что среди них есть четырехугольники с равными сторонами, они страшно возмутились и предложили им удалиться. Так и пришлось им жить отдельно и называться Квадратами. Вот так и образовались новые ханства, которые стали называться ханствами Четырехугольников, Трапеций, Параллелограммов, Ромбов, Прямоугольников, Квадратов, т.е. произошла классификация четырехугольников и в геометрическом ханстве навсегда воцарился мир.

Итак, мы познакомились с классификацией четырехугольников. Ее можно представить в виде схемы, указанной на следующей таблице. Вывешивается на доске таблица 1.

Учитель: Вы видите, ребята, что ближайшими «родственниками» квадрата являются ромб и прямоугольник, у которых, в свою очередь, ближайшими «родственниками» являются параллелограммы и т.д. Мы в дальнейшем будем подробно изучать все эти четырехугольники и их свойства.

II. Закрепление нового материала.

а) Вывешивается на доске таблица 2.

Фронтальный опрос учащихся

1) Ребята, назовите по таблице четырехугольники.

2) Какая фигура называется четырехугольником?

3) Какие вершины четырехугольника называются соседними, какие – противолежащими?

4) Что такое угол четырехугольника? Какие углы в четырехугольнике называются соседними? Противолежащими?

5) Какие стороны четырехугольника называются соседними, какие – противолежащими?

6) Какой отрезок называется диагональю четырехугольника?

7) На какие группы и виды делятся четырехугольники?

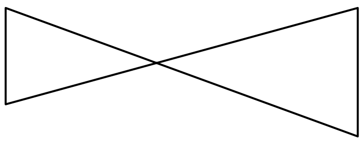
б) Проверка усвоения материала с помощью математического диктанта, записанного на магнитофон.

Учащиеся отвечают на вопросы теста (тесты написаны на листках и розданы) и на вопросы под рисунком («да» или «нет»).

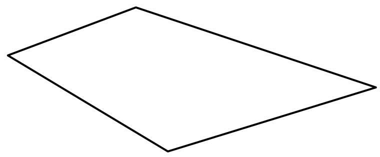
Тест:

1. Можно ли назвать данную фигуру четырехугольником?

а)



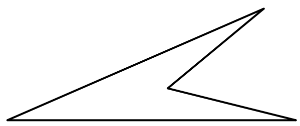
б)



2. Является ли выпуклым четырехугольник?

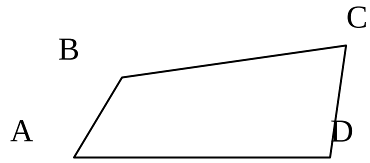
а)

б)



3. Являются ли стороны AB и CD четырехугольника ABCD:

а) соседними, б) противолежащими?



III. Подведение итогов урока.

Итак, ребята, сегодня мы с вами познакомились с понятием "четырехугольник", рассмотрели его виды, узнали об их классификации. Мы подробно изучили соседние и противолежащие вершины, углы и стороны четырехугольника.

2.15. Методика изучений площадей плоских фигур

План

1. О понятии площади плоской фигуры.
2. Использование интеграла при нахождении площадей фигур.

1. О понятии площади плоской фигуры. Среди различных систем величин, изучаемых в школе на различных этапах обучения, учащиеся уже в начальной школе знакомятся с понятием площади плоской фигуры. Разумеется, на первых этапах обучения речь идет об интуитивном представлении, о площади, а не о строгом математическом обосновании этого понятия или аксиоматическом его введении. Первоначально у учащихся представление о площади плоской фигуры связывается с подсчетом числа единичных квадратов (т. е. квадратов, длины сторон которых равны линейной единице измерения) или долей таких квадратов, которые можно разметить на данной фигуре. Изучение площади в школе начинается с рассмотрения площади прямоугольника. Сначала изучается случай, когда стороны прямоугольника соизмеримы с линейной единицей измерения, т. е. числовые значения длин сторон, выражаются положительными рациональными числами при одной и той же выбранной линейной единице измерения.

Программа курса геометрии предусматривает знакомство учащихся с вычислением площади любой плоской фигуры с помощью палетки. Использованием палетки позволяет сделать не только доступным для учащихся изучение вопроса об измерении площади любой плоской фигуры, но и помогает им правильно понять идею измерения площади, состоящую в подсчете числа квадратов, которые укладываются на этой фигуре.

Знакомство с палеткой полезно начать с практической работы по измерению площадей фигур, указанных на географической карте:

I вариант *II вариант*

Площадь Каспийского моря Площадь Аральского моря

III вариант *IV вариант*

Площадь Азовского моря Площадь Черного моря

Можно рекомендовать следующий порядок работы:

1. Наложить палетку на географическую карту так, чтобы она полностью покрывала контур, ограничивающий заданную фигуру.

2. Подсчитать отдельно число квадратных единиц и их долей внутри контура криволинейной фигуры.

Вычислить площадь заданного участка поверхности земли, используя масштаб карты.

Предложить учащимся дома сравнить найденное значение площади заданного участка поверхности земли со значением площади поверхности этого участка, взятом из справочника (оценить абсолютную погрешность вычисления).

Сравнивая свойства площади со свойствами таких величин, как расстояние, угол, можно получить убеждение в том, что, как и всякие величины:

а) площади можно складывать между собой и умножать на положительные числа;

б) за единицу измерения площадей можно выбрать некоторую площадь, поэтому $S = K \cdot U$, где S — площадь фигуры; K — числовое значение площади S; U — единичная площадь.

Вернувшись к результатам практической работы с палеткой, можно поставить учащимся вопросы:

1. Площадь, какой фигуры принималась за единичную площадь?

2. Каким оказалось числовое значение площади в задаче каждого варианта (до перерасчета с помощью масштаба)?

Чтобы научиться находить площади различных неперекрывающихся многоугольников, принимаются без доказательства два свойства площади:

1. Конгруэнтные многоугольники имеют равные площади.

2. Если многоугольник составляется из неперекрывающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Остается вспомнить, где в только что проведенной практической работе использовались эти свойства площади, и отметить, что многоугольники, имеющие равные площади, называют равновеликими.

С помощью этих свойств можно вывести (обосновать) известную формулу площади прямоугольника.

Наблюдая по таблицам за тем, как изменяется площадь прямоугольника с изменением его сторон (или одной стороны), учащиеся приходят к выводу о том, что площадь прямоугольника зависит от длины его сторон. Затем формула $S = a \cdot b$, где a и b — соответственно длины сторон прямоугольника, выводится для целых a и b, для остальных же случаев ее справедливость пока принимается на веру.

Необходимо обеспечить полную ясность у учащихся в том, что в этой формуле произведение, $a \cdot b$ не есть «настоящее» произведение величины a на величину b, Дело в том, что однородные величины можно складывать между собой, умножать на положительное число, т. е. в результате этих операций опять получается величина того же рода. Операция умножения величин вообще не определена. Однако, рассматривая прямоугольник, длины сторон которого есть соответственно $a = me$ и $b = ne$, где e — линейная единица измерения, получаем, что его площадь равна $m \cdot n$ квадратов, длины сторон которых равны e. Так как все эти квадраты конгруэнтны и, следовательно, имеют одну и ту же площадь e^2 то площадь прямоугольника $S = mne^2$ (*). С другой стороны, вычисляя по обычным правилам алгебры произведение a и b, получим: $a \bullet b = (me) \cdot (ne) = (mn)\ e^2$ (**). Сравнивая формулы (*) и (**), приходим к выводу: целесообразно условиться, что длины a и b можно «умножать» друг на друга, получая при этом площадь прямоугольника, длины сторон которого равны величинам a и b.

Из формулы (*) следует, что если задан прямоугольник, длины сторон которого измерены одной и той же единицей измерения e, то его площадь есть величина, числовое значение которой при единице измерения e^2 (т. е. квадрат, длина стороны которого равна е) равно произведению числовых значений длин его сторон. Следовательно, при косвенном способе измерения площади прямоугольника (а именно так делается на практике) достаточно измерить длины его сторон одной и той же единицей измерения e, т. е. найти величины me и ne, а затем за площадь такого прямоугольника принять величину mne^2, где число mn есть произведение числовых значений длин его сторон и e^2 — квадратная единица измерения (т. е. квадрат, длина стороны которого равна e).

Например, рассматривается прямоугольник, длина одной стороны которого равна 2 см, а длина другой — 5 см. В этом случае при выбранной линейной единице измерения (один сантиметр) числовые, значения, длин сторон соответственно равны 2 и 5. Площадь такого прямоугольника равна 10 $см^2$, а числовое значение площади равно 10 при выбранной квадратной единице измерения в один квадратный сантиметр.

Учащиеся не должны допускать следующей ошибки: площадь прямоугольника, длины сторон которого 2см и 3дм, равна 2 • 3 =6 (неизвестно каких единиц). Они должны правильно пользоваться указанной формулой для нахождения площади. А именно, выразив длины сторон в одинаковых линейных единицах измерения, т. е. 2см и 30см, затем найти площадь прямоугольника по формуле S = 2 * 30 = 60 (кв. см).

После того как вопрос о площади прямоугольника решен, рассмотрение вопроса о площади треугольника, параллелограмма и многоугольника не вызывает у учащихся затруднений. Так как вопрос о площадях некоторых видов многоугольников, рассматриваемых в школьном курсе математики, решается традиционно, он хорошо изложен в школьных учебниках и освещен в методической литературе, то мы не ставили своей целью рассматривать этот вопрос в данном пособии. Укажем лишь на то, что при рассмотрении этого вопроса у учащихся должна быть достигнута полная ясность в трактовке понятий «конгруэнтность», «равновеликость» и «равносоставленность» фигур и их взаимосвязи друг с другом.

Аксиоматическое введение понятия площади в учебном пособии по курсу «Алгебра и начала анализа» сейчас не рассматривается, хотя ранее рассматривалось в этом курсе, некоторые же свойства площади рассматриваются и используются в курсе «Геометрия» (VII класс). Так же как это имело место при косвенном измерении площади прямоугольника для общего случая произвольной плоской фигуры, косвенное измерение ее площади можно производить следующим образом: выбрав линейную единицу измерения (например, сантиметр), выражают площадь плоской фигуры *а* числом $K(\sigma)$ соответствующих квадратных единиц измерения e^2 (например, при выбранной линейной единице измерения — сантиметр единицей измерения площади будет квадратный сантиметр). Таким образом, задача о введении понятия площади плоской фигуры будет решена, если мы при выбранной линейной единице измерения *е* сможем каждой плоской фигуре *а* (из рассматриваемого допустимого множества фигур) поставить в соответствие величину $S(\sigma) = K(\sigma)\, e^2$, которую будем называть площадью фигуры а, так что выполняются следующие свойства:

Числовое значение площади каждой фигуры σ — неотрицательное число, т. е. $K(\sigma) \geq 0$ (условие неотрицательности).

Конгруэнтные фигуры имеют равные площади (свойство инвариантности).

Если фигура σ является объединением двух фигур σ_1 и σ_2 не имеющих общих внутренних точек, площадь которых соответственно $S(\sigma_1)$ и $S(\sigma_2)$, то $S(\sigma) = S(\sigma_1) + S(\sigma_2)$ (свойство аддитивности).

Существует фигура σ_0, числовое значение площади которой равно единице (т. е. $K(\sigma_0) = 1$), называемая квадратной единицей измерения (условие нормированности).

Если фигура σ_1 содержится в фигуре σ_2, то $S(\sigma_1) \leq S(\sigma_2)$ (свойство монотонности).

Плоская фигура, имеющая площадь, носит название *квадрируемой.* Желательно, чтобы учащиеся понимали, какие фигуры надо относить к классам квадрируемых фигур, и имели представление о том, что не все фигуры квадрируемы. Так, например, наиболее простым классом квадрируемых фигур являются многоугольники, а также фигуры, составленные из многоугольников.

2. Использование интеграла при нахождении площадей фигур.

Перед ознакомлением учащихся с идеей применения методов интегрального исчисления для вычисления площадей целесообразно провести беседу примерно следующего содержания.

Пока мы изучали площади таких фигур, которые могут быть представлены в виде объединения конечного числа непересекающихся, треугольников, получение новых формул для вычисления площадей не вызывало каких-либо принципиальных затруднений — формуле оказывались лишь более или менее громоздкими. Однако, как только мы захотим вычислить площади фигур, ограниченных криволинейными контурами, или тем более фигур, расположенных на неплоских поверхностях, возникают трудности особого рода.

Прежде всего, оказывается, что известное нам представление о площади, а также определение понятия площади (учитель, конечно, повторит его)

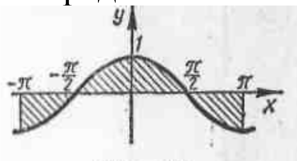


Рис. 109.

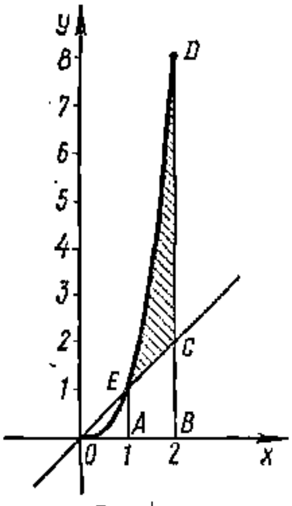


Рис. 1

в новой ситуации оказываются неприменимыми. Действительно, мы не можем покрыть поверхность сферы конечным множеством квадратов, мы не можем заполнить конечным числом квадратов круг и т. д. Более того, не умея определить понятие площади, мы не можем и поставить задачу ее измерения — теряет смысл сама идея сравнения, так как, грубо говоря, нельзя сравнивать прямое с кривым. Значит, придется как-то по-новому ввести понятие площади, причем определить так, чтобы новое определение не противоречило ни старому, ни нашим житейским представлениям о площадях. Путь к этому определению лежит через понятие предела.

Уже само по себе понятие предела не так уж просто и надо полагать, что применение этого понятия к задаче о площадях тоже будет не слишком простым, но мы вправе ожидать, что после преодоления этих трудностей мы получим общий метод и единый метод вычисления площадей.

С чего же начать? Естественнее всего рассмотреть сначала такую плоскую фигуру, лишь часть границ которой будет иметь криволинейный контур, а остальные окажутся отрезками. Особую роль при этом будет играть фигура, которую принято называть криволинейной трапецией.

Дальнейшее изложение вопроса уже не представляет серьезных трудностей. После изучения площади криволинейной трапеции переходят к рассмотрению общего случая вычисления площадей плоских фигур, площадь которых есть алгебраическая сумма площадей нескольких криволинейных трапеций.

Последнее закрепляется при рассмотрении с учащимися соответствующих примеров.

П р и м е р 1 . Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^3$, $x = 2$ (рис. 1).

Р е ш е н и е. Площадь данной фигуры можно найти как разность площадей криволинейных трапеций *ABDE* и *ABCE*. Следовательно,

$$S = \left(\int_1^2 (x^3 - x)dx\right)(кв.ед.) = \left(\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2\right)(кв.ед.) = 2\frac{1}{4}(кв.ед).$$

П р и м ер 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью *Ox* и линиями $y = \cos x$, $x = -\pi$, $x = \pi$ (рис. 2).

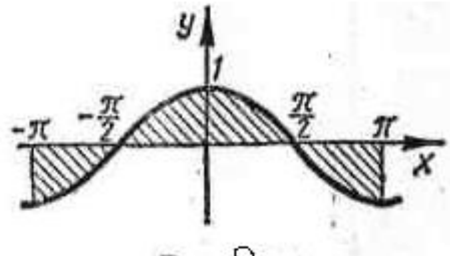


Рис. 2

Р е ш е н и е. Найдем нули функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$: $x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{2}$; расположим их в порядке возрастания: $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Площадь данной фигуры вычисляется следующим образом:

$$S = 2\left(\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx\right|\right) = 2\left(\left|[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|\right) = 4(\textit{кв.ед.})$$

На изучение темы «Площади» в учебнике геометрии А.А.Рахимкариева «Геометрия. 8 класс» отводится десять часов.

По завершению изучения темы представлены тесты, соответствующие требования государственных стандартов.

В данном учебнике понятие площади вводится посредством следующих свойств:

1. Равные треугольники имеют равные площади.
2. Если многоугольник состоит из многоугольников не имеющих общих внутренних точек, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
3. Площадь квадрата, имеющего сторону длиной 1, равна 1.

В начале дается определение и формула вычисления квадрата, затем доказывается, что площадь прямоугольника равна произведению длины на ширину и т.д.

Далее рассматривается задача практического характера, что несомненно вызывает интерес у учащихся.

2.16. Методика изучения темы "Преобразования фигур"

План

1.Различные подходы.

2.Методика изучения преобразований фигур на плоскости.

1.Различные подходы. Геометрические преобразования - сравнительно новая тема школьного курса. Они делают его содержание более современным, идейно значимым. По Ф.Клейну, *предмет геометрии* определяется как теория инвариантов некоторой группы геометрических преобразований, причем каждой такой группе соответствует своя геометрия.

Возможны *два методических подхода* к изучению геометрических преобразований: 1) материал представлен в виде отдельной темы; 2) материал распределен по всему курсу геометрии и служит основой для его изложения.

Теория геометрических преобразований может быть построена традиционно-синтетическим, аналитическим, векторным методами. Известны специальные системы аксиом, описывающие понятия этой теории (Е. Виллерса, В. Швана, Ф.Бахмана и др.). Существуют различные методические разработки школьного курса геометрии с использованием идеи геометрических преобразований (А. Р. Кулишера, А. И. Фетисова, В. Г. Болтянского, А. Н. Колмогорова и др.). Эти разработки отличаются друг от друга "масштабами" применения геометрических преобразований при изложении теоретического материала и решении задач. Имеются различия в определении последовательности изучения общих вопросов (понятия движения и преобразования подобия, их свойства) и отдельных видов преобразований (осевой симметрии, параллельного переноса и др.). Одни авторы начинают изложение сведений о геометрических преобразованиях с общих вопросов, другие заключают ими. В некоторых работах различные виды движений вводятся независимо друг от друга, в других - как композиции осевых симметрий.

Одним из первых инициаторов внедрения идеи геометрических преобразований в школьный курс был Ф. Клейн. При таком подходе понятие функции "распространяется" на курс геометрии, что позволяет усилить связи между геометрией и алгеброй (началами математического анализа). С. помощью геометрических преобразований в школьный курс вводятся некоторые теоретико-групповые понятия (композиция преобразований, обратное преобразование, тождественное преобразование и др.).

2. Методика изучения преобразований фигур на плоскости.

Тема "Преобразования фигур" является второй в курсе геометрии VIII класса («Геометрия.8 класс. А.А.Рахимкариев) и содержит следующие вопросы: примеры преобразования фигур, движение, равенство фигур, преобразование подобия, подобие фигур. В курсе стереометрии (в "эскизном" порядке) в теме "Декартовы координаты и векторы в пространстве" изучаются аналогичные преобразования для случая пространства. Уровень доказательности и полноты изложения в курсе планиметрии достаточно высок.

Каковы особенности изложения данной темы в учебниках? Рассмотрение их начнем с введения понятий.

Рассмотрим теперь, как определяются отдельные геометрические преобразования. Определения их, как правило, являются генетическими.

Понятие преобразования симметрии относительно точки определяется через понятие точек, симметричных относительно центра. Определение последнего таково: "Пусть *O* - фиксированная точка и *X* - произвольная точка плоскости. Отложим на продолжении отрезка *OX* за точку *O* отрезок *OX'*, равный *OX*. Точка *X'* называется симметричной точке *X* относительно точки *O*. Точка, симметричная точке *O*, есть сама эта точка".

Заучивать это определение не нужно. Полезно подчеркнуть учащимся особенность этого определения: в нем указывается способ построения симметричных точек. В этих целях полезно поставить вопрос: "Как построить точку *X'*, симметричную точке *X* относительно точки *O*?" Отвечая на поставленный вопрос, учащиеся укажут, что для построения точки *X'* необходимо выполнить следующее: 1) построить отрезок *XO; 2)* продолжить отрезок *XO* за точку *O*; 3) на продолжении отрезка *XO* отложить отрезок *OX'* = *OX*. Полученная точка *X'* - искомая.

В соответствии с изложенными особенностями текста учебного пособия предложим следующую *методическую схему введения определения точек, симметричных относительно центра:* 1) одновременно выполнить построения и проговорить определение (задание для учителя); 2) поставить вопрос: "Как построить точку *X'*, симметричную точке *X* относительно центра *O*?"; 3) одновременно выполнить построения и проговорить определение (задание для ученика).

Остановимся на некоторых методических особенностях доказательств, изучаемых в теме "Преобразования фигур". Эта тема характеризуется выборочным применением традиционно-синтетического и координатного методов. Обратимся, например, к следующим теоремам:

"Преобразование симметрии относительно точки является движением", "Преобразование симметрии относительно прямой является движением". Первая из них доказывается с помощью признака равенства треугольников, вторая - с помощью системы координат. "Выборочное" применение математических методов существенно рационализирует изложение данной темы. Отметим, что эта плодотворная идея не нашла еще систематического воплощения при изложении всех тем школьного курса геометрии.

Приведем *методическую схему* доказательств с применением системы координат: 1) построить рисунок; 2) расположить систему координат удобным образом; 3) указать координаты точек; 4) записать условие и заключение задачи на координатном языке; 5) перейти от условия задачи к ее заключению.

Отдельно следует остановиться на доказательствах свойств движений и преобразования подобия. Необходимо учесть, что рассуждения, проводимые в этих доказательствах, являются для учащихся новыми, непривычными. Уже первым доказательствам в данной теме присущи черты метода геометрических преобразований. Новизна материала накладывает определенный отпечаток на выбор методов обучения. Изучение центральной в этой теме теоремы: "При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения" - целесообразно провести репродуктивным методом.

В заключение данной темы рассматриваются признаки подобия треугольников, которые имеют достаточно широкие приложения к решению задач. Отметим, что наибольшее количество задач приходится именно на параграф "Подобие фигур".

В учебном пособии Погорелова А.В.»Геометрия 7-11» применен интересный прием: приводится единое доказательство для всех трех признаков подобия треугольников. Это не только экономит изложение, но и более четко выявляет общий замысел доказательства, его идею. Важно, что доказательства всех трех признаков проводятся на одном чертеже. *Методическая схема изучения доказательств трех признаков подобия треугольников* такова: 1) выполнить чертеж, краткую запись теоремы (сразу для трех признаков); 2) изложить доказательство первого признака; 3) изложить доказательство второго признака; 4) изложить доказательство третьего признака; 5) закрепить доказательство путем изучения текста учебника. В основе этой схемы лежит различное использование параллельного и последовательного изложений учебного материала: в пп. 1, 5 применяется параллельное, в пп. 2-4 - последовательное изложение. Обратимся к задаче на построение, решаемой методом геометрических преобразований: "Постройте равносторонний треугольник, у которого одна вершина задана, а две другие лежат на данных прямых". Эта задача решена в параграфе "Движение". Ее решение основано на применении поворота прямой вокруг точки. Для этого необходимо знать, что при повороте прямая переходит в прямую, но это свойство устанавливается только в следующем параграфе "Свойства движений". Возникает определенная *методическая проблема*: "Как быть?" Конечно, проще данную задачу перенести в следующий параграф и решить ее после того, как будет доказано указанное свойство. Можно предложить другое, более интересное и поучительное решение этой проблемы: 1) рассмотреть решение данной задачи в параграфе "Движение", где она приводится в пособии [31]; 2) обратить внимание учащихся на то, что при решении данной задачи использовалось свойство поворота (при повороте прямая переходит в прямую), которое еще не доказывалось; осуществить тем самым мотивацию изучения этого свойства (что является немаловажным психологическим аспектом); 3) сообщить, что данное свойство будет доказано не для отдельного вида движений (поворота), а сразу для всех видов движений; 4) перейти к изучению параграфа "Свойства движений".

2.17. Методика изучения первых разделов стереометрии. Методика изучения аксиом стереометрии

Построение системы аксиом стереометрии часто осуществляется с помощью следующих действий:

1) переформулируются аксиомы планиметрии для пространства;

1) добавляются новые "специфические" аксиомы стереометрии.

Первое действие выполняется с помощью принятия аксиомы: "В каждой плоскости пространства выполнимы все аксиомы планиметрии". Второе действие обычно состоит в формулировании нескольких аксиом принадлежности для пространства.

При изучении аксиом важно, чтобы учащиеся поняли абстрактный характер геометрических понятий, увидели процесс абстрагирования в действии, научились замечать его в жизни. Очень важно сформировать у них правильное представление о логике построения учебного материала и роли аксиом.

При изучении аксиом целесообразно показать, что многие из них появились в результате наблюдения и абстрагирования различных видов практической деятельности людей. Например, при ознакомлении учащихся с аксиомой прямой линии: "Через две различные точки пространства проходит, и притом только одна, прямая" - можно рассказать об имевшем место способе распиловки бревна на доски вручную. Намечая линию распиливания, натягивают между двумя точками на концах бревна шнур, натертый древесным углем, а затем, оттягивая его, как тетиву лука, отпускают. При этом от удара на поверхности бревна образуется угольный след - часть прямой линии, проходящей через данные точки (отметины на концах бревна).

Предложим следующую методическую схему изучения аксиом стереометрии*:*

1) разъяснить абстрактный характер геометрических понятий;

2) разъяснить сущность аксиом и их роль в построении геометрии, сформулировать аксиомы;

3) проиллюстрировать аксиомы на моделях (использовать стереометрический ящик, "геометрию" классной комнаты);

4) закрепить аксиомы путем логического анализа их формулировок;

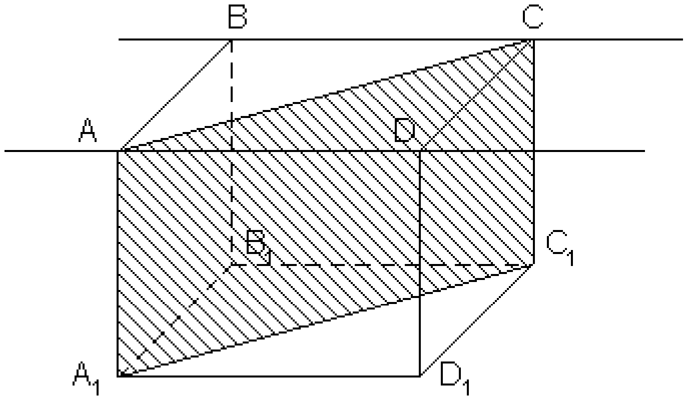
5) закрепить аксиомы в процессе их применения к выводу первых следствий геометрии принадлежности в пространстве, к решению задач.

2.18. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

План
1. Параллельность прямых в пространстве; скрещивающиеся прямые.
2. Параллельность прямой и плоскости.
3. Параллельность плоскостей в пространстве.
4. Параллельная проекция и ее свойство; изображение пространственных фигур на плоскости.

1. Параллельность прямых в пространстве

Взаимные положения двух прямых на плоскости известны ученикам VII класса. Остается их только рассмотреть на конкретных пространственных фигурах и дать определение скрещивающихся прямых. Введение скрещивающихся прямых прежде всего расширяет кругозор и пространственные представления учащихся. Учащиеся начинают понимать значение слов "принадлежность одной плоскости".



Повторив определение двух параллельных и двух пересекающихся прямых, следует обратить внимание на то, что через пару параллельных или пересекающихся прямых можно провести плоскость, и притом только одну. Затем предполагается выяснить, каковы взаимные расположения пар ребер, принадлежащих одной грани куба, любого прямоугольного параллелепипеда. Параллельность противоположных ребер одной грани обосновывается тем, что грань - прямоугольник. Делаем вывод, что ребра - отрезки прямой, предлагаем указать взаимные положения прямых, которым принадлежат пересекающиеся или параллельные ребра многогранника. С этой целью прикладываем к соответствующим ребрам палочки значительно большей длины; констатируем, что две прямые в пространстве могут быть тоже параллельны или пересекаться. Создаем с помощью двух палочек модели двух параллельных, двух пересекающихся прямых. В качестве упражнения на закрепление можно предложить указать взаимные положения ребер на каркасной модели куба.

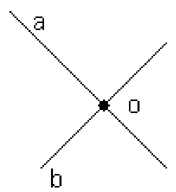
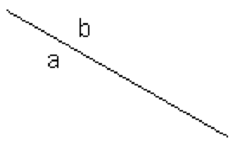
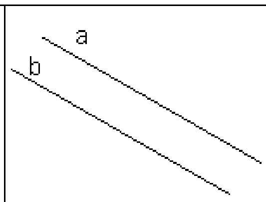
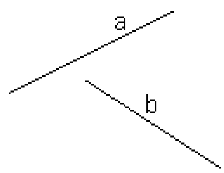
Чтобы подтвердить, что эти ребра параллельны, складываем в модели куба пластинку и убеждаемся, что они лежат в одной плоскости. Параллельность же ребер следует из того, что противоположные стороны четырехугольника попарно равны.

Далее предлагается выяснить взаимное расположение ребер, прикладывая пластинку к этим ребрам, устанавливаем, что через них нельзя провести плоскость (если плоскость проходит через указанное ребро, то она пересекает ребро или его продолжение и наоборот). Значит, эти ребра не параллельны и не пересекаются. Такие ребра называются скрещивающимися. Но определение скрещивающихся ребер (прямых) можно дать по-другому: два ребра (две прямые), через которые нельзя провести плоскость, называются скрещивающимися.

Определение двух скрещивающихся прямых как таких прямых, через которые нельзя провести плоскость, следует предпочесть определению их как прямых, которые не параллельны и не пересекаются. Как мы видим, этим определением удобно пользоваться на практике: когда нужно узнать, являются ли два ребра скрещивающимися, прикладываем к ним пластинку и выясняем, можно ли через них провести плоскость.

После упражнений в нахождении скрещивающихся ребер различных многогранников создаем модель двух скрещивающихся прямых и вводим определение.

В заключение следует перечислить всевозможные взаимные положения двух прямых в пространстве. Рекомендуется сделать такую таблицу.

Взаимное расположение прямых в пространстве			
 Прямые а и b имеют только одну общую точку: а и b пересекаются.	 Все точки прямых а и b общие: а и b совпадают.	 Прямые а и b не имеют общих точек: а и b параллельны (a‖b).	 Прямые а и b не имеют общих точек: а и b скрещивающиеся (a ÷ b).
а и b лежат в одной плоскости			а и b не лежат в одной плоскости

Особое внимание следует уделить признаку скрещивающихся прямых, который лежит в основе их построения. Перед формулировкой признака надо еще раз проиллюстрировать скрещивающиеся прямые, используя каркасные модели многогранников, подметить такую их особенность: одна прямая из этих двух пересекает плоскость, в которой лежит другая прямая, в точке, не принадлежащей ей. На основании этого выполняется рисунок, дается формулировка теоремы-признака скрещивающихся прямых, а затем проводится ее доказательство. Доказательство признака должен сначала рассказать сам учитель, а затем попросить учащихся повторить его. При доказательстве признака важно заострить внимание учащихся на вопросе:

что значит: две прямые не являются скрещивающимися? Ответить на этот вопрос поможет схема: в этом случае прямые или пересекаются, или параллельны.

Эти два случая в доказательстве следует рассмотреть отдельно. Случай скрещивающихся прямых новый для учащихся, наиболее трудный среди остальных случаев, часто встречающийся при решении задач на многогранники, поэтому при закреплении ему надо уделить особое внимание. В задачах на закрепление должны быть рассмотрены всевозможные скрещивающиеся прямые, которым принадлежат ребра многогранников.

С учащимися надо решить задачи на построение прямой, скрещивающейся с данной прямой и проходящей через данную точку; прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку пространства.

Но возникает обратная проблема, проблема распознавания: как же определить, параллельны ли две рассматриваемые прямые? Учителя предпочитают *такой подход*, установив транзитивность параллельности в пространстве, они получают признак: если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

Доказательство свойства транзитивности параллельных прямых в пространстве представляет определённые трудности для учащихся, а потому нуждается в специальной подготовке их к его восприятию. С этой целью необходимо рассмотреть решение задачи, которая является элементом доказательства свойства транзитивности параллельных прямых в пространстве и используется дважды в процессе доказательства.

<u>Задача</u>. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Прямая m, лежащая в плоскости α, пересекает плоскость β. Доказать, что точка пересечения прямой m с плоскостью β принадлежит прямой a.

2. Параллельность прямой и плоскости

Важным обобщением (расширением) понятия параллельности является параллельность прямой и плоскости. Данный раздел следует начать с беседы о возможном числе общих точек у прямой и плоскости. Для беседы можно предложить ряд вопросов:

- могут ли прямая и плоскость иметь 2,3,4 и т.д. общих точек? (могут);
- что можно сказать о таких прямой и плоскости? (прямая лежит в плоскости);
- в каком случае прямая и плоскость будут иметь только одну общую точку? (только когда эта прямая пересекает данную плоскость);
-прямая и плоскость называются ________________, если они не имеют общих точек? (параллельные).

По результатам беседы можно составить таблицу взаимного расположения прямой и плоскости (уже составляли в предыдущей теме).

Если прямую, лежащую в плоскости, считать параллельной плоскости, то в схеме о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве будут два случая: прямая и плоскость параллельны; прямая и плоскость пересекаются.

Пользуясь таблицей, учащиеся самостоятельно могут сделать вывод, что по определению не всегда можно судить о том, что данная прямая и данная плоскость параллельны, поскольку прямая и плоскость безграничны.

Встаёт вопрос: нельзя ли о параллельности прямой и плоскости судить по параллельности двух прямых? Естественно, одна из таких прямых есть данная прямая, а другая должна принадлежать данной плоскости.

Так появляется теорема, носящая имя признака параллельности прямой и плоскости, доказательство которой ведётся методом от противного.

3. Параллельность плоскостей

Дальнейшим шагом является изучение параллельности плоскостей. Эта проблема имеет огромное практическое значение. Укажем хотя бы на необходимость обеспечения горизонтальности пола в помещении, на целесообразность параллельности стенок кузова автомашины, стенок вагона, граней ящика и т. п.

Есть два варианта, как начать изучение этого раздела. Первый состоит в том, что аналогично параллельности прямой и плоскости рассматриваем возможное число общих точек у двух плоскостей (опираясь на соответствующую аксиому).

Две различные плоскости не могут иметь только одну общую точку, ибо на основании известной аксиомы они будут иметь общую прямую, проходящую через эту точку. В этом случае говорят, что две плоскости пересекаются по прямой. По той же причине две плоскости не могут иметь две общие точки.

Если три точки не лежат на одной прямой и являются общими для двух плоскостей, то на основании соответствующей теоремы (или следствия из нее) плоскости совпадают. Совпадение двух плоскостей не рассматривается в дальнейшем как не представляющее интереса и в таблице отражено не будет; если точки принадлежат одной прямой, то плоскости пересекаются по прямой.

Аналогично выясняется, что две различные плоскости не могут иметь конечного числа общих точек: они или пересекаются, или совпадают. В том и в другом случае число общих точек бесконечно. Опять можно построить таблицу.

Второй вариант состоит в использовании модели каркасного куба или любого прямоугольного параллелепипеда. Напомнив ученикам, что грань многогранника - многоугольник, т.е. часть плоскости, прикладываем пластинку значительно больших размеров и таким образом создаем модель той плоскости, частью которой является данная грань. Рассматриваем эту модель отдельно. Напоминаем ученикам, что всякую плоскость, как и прямую, мы воображаем бесконечной.

Прикладываем пластинки к двум параллельным граням многогранника и предлагаем мысленно продолжить их. Делаем вывод, что плоскости, в которых лежат эти грани, не имеют общих точек. Показываем с помощью двух параллельных пластинок две параллельные плоскости отдельно от модели многогранника. Даем определение параллельных плоскостей. Приводим примеры параллельных плоскостей.

Аналогично вводится определение пересекающихся плоскостей.

Далее рассматриваются грани многогранника, не имеющие общих точек. Прикладывая пластинки к различным парам таких граней, устанавливаем, что их плоскости параллельны или пересекаются по прямой.

Иллюстрацией последнего случая могут служить две боковые грани призмы с трапецией в основании, проходящие через боковые стороны трапеции.

В заключение можно сделать общий вывод о возможных положениях двух плоскостей в пространстве.

Судить о параллельности двух плоскостей, пользуясь определением, не всегда возможно, так как плоскость - фигура безграничная. О параллельности двух плоскостей судят по параллельности прямых, связанных с этими плоскостями. Признак параллельности можно сформулировать, опираясь на параллельность прямой и плоскости: две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости. (Знать доказательство).

В порядке закрепления признака параллельности плоскостей следует решить ряд задач на построение.

Задача 1. Через точку вне данной плоскости провести плоскость, параллельную данной плоскости.

Задача 2. Через данную прямую провести плоскость, параллельную данной плоскости.

Задача 3. Через каждую из двух скрещивающихся прямых провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.

4. Параллельная проекция и ее свойства

В тему "Параллельность в пространстве" включен раздел о параллельной проекции и ее свойствах, которые носят сугубо практический характер и являются весьма благодатным материалом для развития пространственных представлений учащихся.

В процессе изучения этого раздела на основе определения и свойств параллельной проекции необходимо научить учащихся:

1) изображать пространственные фигуры на плоскости;

2) решать задачи на построение сечений многогранников. Задачи на построение сечений многогранников плоскостью следует разбить на группы:

1) задачи на построение сечения многогранника плоскостью, след которой на плоскости основания многогранника;

2) задачи на построение следа секущей плоскости на основании многогранника; задачи на построение сечения многогранника плоскостью, след которой на плоскости основания многогранника не задан.

2.19. Методика изучения перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве

План

1. Перпендикулярность прямых в пространстве.
2. Перпендикулярность прямой и плоскости.
3. Перпендикулярность плоскостей.

В процессе изучения каждой из частей, указанных в плане, следует исходить из общей схемы взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, с которой учащиеся познакомились в начале курса стереометрии при изучении параллельности в пространстве. Это дает возможность случай перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве вписать в общую схему взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, связать перпендикулярность в пространстве с аксиоматикой стереометрии, планомерно осуществить повторение при изучении нового материала.

Эта тема имеет большой прикладной характер, а поэтому при ее изучении особое внимание следует уделить решению задач; в задачах и при изучении нового материала надо использовать многогранники, призмы и пирамиды, так как с ними ученики часто встречаются в повседневной жизни и с целью подготовки учащихся к изучению соответствующего раздела в курсе стереометрии 11 класса. Особо выделить задачи, решаемые с помощью векторного аппарата, а также задачи, решаемые по готовому чертежу устно.

1. Перпендикулярность прямых в пространстве

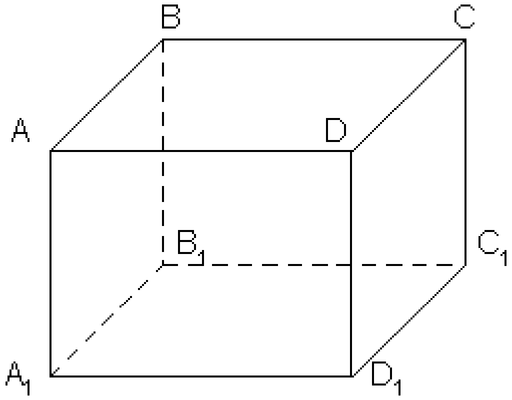
Этот раздел, по сути дела, рассматривается как повторение пройденного ранее. Повторение нужно вести по следующему плану:

- определение взаимно перпендикулярных прямых;
- пересекающиеся и скрещивающиеся взаимно перпендикулярные прямые;
- иллюстрация их на моделях многогранников и в окружающей действительности.

При повторении важно подчеркнуть, что в пространстве взаимно перпендикулярные прямые могут не иметь общих точек.

Эту работу на повторение можно провести, используя модель куба: предложить учащимся указать взаимные положения ребер $АА_1$ и $СС_1$; АВ и ВС; АВ и $ДД_1$. Через каждую пару ребер можно провести плоскость (приложить листок бумаги, например). Далее предлагается выяснить взаимные расположения ребер АВ и ДД1. Прикладывая листочек или пластинку к этим ребрам, устанавливаем, что через них нельзя провести плоскость (если плоскость проходит через АВ, то пересекает ли она ребро $ДД_1$ или его продолжение), значит, эти ребра не параллельны и не пересекаются. Два ребра, через которые нельзя провести плоскость, называем скрещивающимися.

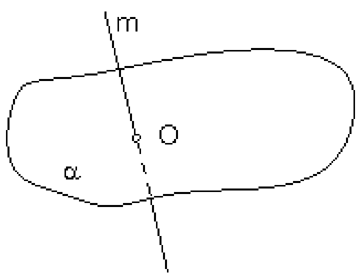
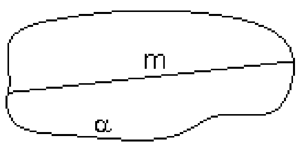
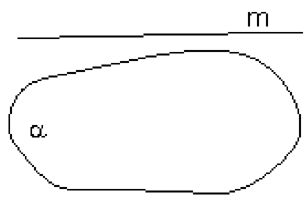
Определение двух скрещивающихся прямых как таких прямых, через которые нельзя провести плоскость, следует предпочесть определению их как прямых, которые не параллельны и не пересекаются. Как мы видели, этим определением удобно пользоваться на практике: когда нужно узнать, являются ли два ребра скрещивающимися, прикладываем к ним пластинку и выясняем, можно ли через них провести плоскость.



После упражнений в нахождении скрещивающихся ребер различных многогранников создаем модель двух скрещивающихся прямых и вводим определение.

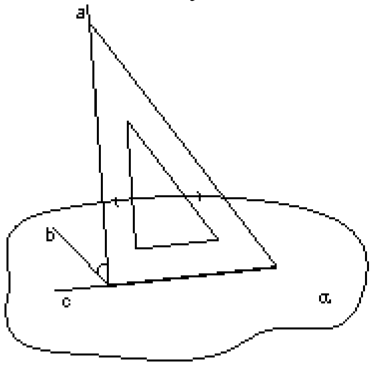
2. Перпендикулярность прямой и плоскости

Изучение целесообразно начать с повторения о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве, используя таблицу.

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве		
		

Вопрос: в каком случае прямая и плоскость могут быть перпендикулярны? (Только когда пересекаются).

При введении определения перпендикулярных прямой и плоскости важную роль играет применение моделей. Особенно важна демонстрация контрпримеров: если рассмотреть модель прямой *а*, которая не перпендикулярна хотя бы одной прямой *в*, то такая модель не вызывает у учащихся наглядных представлений о перпендикулярности прямой *а* и плоскости, что существенно для верного понимания определения.



В учебной литературе по стереометрии приняты *различные определения перпендикулярности прямой и плоскости*: "Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости" (Л.С. Атанасян).

"Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной к этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости" (А.Д. Александров, А.В. Погорелов).

Для школьного курса геометрии весьма целесообразно в определении перпендикулярности прямой и плоскости включить требование их пересечения. Поэтому "второе" определение доступнее для учащихся, соответствует уровню развития их пространственного представления. Второе определение дает полный объем изучаемого материала.

Если учащиеся достаточно подготовлены всей предыдущей работой, имеют хорошо развитое пространственное представление, то вполне можно вводить "первое" определение, дополнив его требованием, что рассматриваемые прямая и плоскость пересекаются: "Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости".

Такое определение, безусловно, облегчит доказательство некоторых теорем.

Далее с использованием проблемного метода показываем, что определение недостаточно, чтобы судить о перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку прямых, принадлежащих плоскости, бесчисленное множество. В итоге этой работы формулируется теорема, которая получила название признака перпендикулярности прямой и плоскости, ее доказательство проводится в классе учителем и сопровождается продуманными решениями.

Доказательство этой теоремы в различных учебных пособиях различное: в большинстве пособий, в том числе и в учебнике А.В. Погорелова, доказательство проводится с помощи рассмотрения цепочки равных треугольников (формулировки и доказательства теоремы знать).

Здесь же вводится понятие перпендикуляра одновременно с понятием наклонной к плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости лежит в основе построения прямой, перпендикулярной данной плоскости, и плоскости, перпендикулярной данной прямой.

При изучении данной темы нельзя забывать, что она является основой для решения задач на доказательство и на вычисление в теме "Многогранники".

Изучение перпендикулярности прямой и плоскости следует связать с повторением темы "Параллельность в пространстве", чтобы показать взаимосвязь двух тем.

В условии теорем, характеризующих эту взаимосвязь, фигурируют тройки объектов: две прямые и плоскость, две плоскости и прямая. Теоремы рассматриваются попарно.

Эти две теоремы можно получить из двух предыдущих, заменяя в их формулировке двух прямых двумя плоскостями, а плоскости - прямой.

После доказательства теорем вводится понятие прямоугольной (ортогональной) проекции прямой на плоскости.

На основе перпендикулярности прямой и плоскости вводятся такие понятия, как "расстояния от точки до плоскости", "общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых", "угол между наклонной и плоскостью", а также доказывается теорема о трех перпендикулярах, имеющая общее значение для дальнейшего изучения курса стереометрии, в частности для изучения многогранников. При доказательстве этой теоремы учащиеся должны понимать, о каких трех перпендикулярах идет речь, а поэтому их следует выделить на рисунке разными цветами. (Знать доказательство).

Расстояние от точки до плоскости можно вводить, исходя из понятия расстояния между двумя фигурами, а можно его определить как расстояние от точки до основания перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Задачи на отыскание расстояния от точки до плоскости необходимо связать с многогранниками.

3. Перпендикулярность плоскостей

Раздел о перпендикулярности плоскостей в пространстве целесообразно начать с повторения о взаимном расположении двух плоскостей. Обратимся опять к каркасной модели куба. Напомнив ученикам, что грань куба многогранник, то есть часть плоскости, прикладываем к ней пластину значительно больших размеров и, таким образом, создаем модель той плоскости, частью которой является данная грань. Рассматриваем эту модель отдельно. Вспоминаем, что всякую плоскость, как и прямую линию, мы воображаем бесконечной.

Прикладываем пластинки к двум параллельным граням многогранника и предлагаем мысленно продолжить их. Подтверждаем уже известный факт, что плоскости, в которых лежат эти грани, не имеют общих точек, т.е. параллельны. Вспоминаем определение и примеры параллельных плоскостей. Аналогично повторяем понятие пересекающихся плоскостей. Именно на модели куба удобно показать, что перпендикулярные плоскости являются пересекающимися. Это требование включается в определение перпендикулярных плоскостей.

По аналогии с перпендикулярностью прямых о перпендикулярности двух плоскостей судят по углу между ними. С этой целью вводится понятие двугранного угла, которое закрепляется при рассмотрении моделей куба, параллелепипеда, призмы. Полезно продемонстрировать с помощью двух пластинок модель двугранного угла и виды двугранных углов.

В процессе изучения раздела о перпендикулярных плоскостях с учащимися отрабатываются следующие вопросы:

а) определение перпендикулярных плоскостей (знать различные определения);

б) признак перпендикулярности плоскостей (знать доказательство);

в) построение перпендикулярных плоскостей;

г) решение задач с использованием определения и признака перпендикулярности плоскостей.

Эти вопросы должны быть центральными в процессе контроля знаний учащихся.

2.20. Многогранники

Многогранником называется фигура, состоящая из конечного числа плоских многоугольников (называемых гранями многогранника), расположенных в пространстве так, что:

1)Любая сторона каждой из этих граней является стороной ещё одной и только одной грани (*называемой смежной с первой гранью*);

2) Для любых двух граней A и B можно указать такую цепочку граней A_1, A_2, …, A_n, что грань A смежна с A_1, грань A_1 смежна с A_2, …., грань A_n смежна с B;

3) Если грани A и B имеют общую вершину S, то выбор граней A_1, A_2, …, A_n, о которых говориться в предыдущем пункте, можно осуществить так, чтобы все они имели ту же вершину S_1.

Стороны и вершины граней многогранника называются соответственно *рёбрами и вершинами* этого многогранника.

Простейшими примерами многогранников могут служить призмы и пирамиды. Многогранник называется n-угольной пирамидой, если он имеет одной своей гранью (основанием) какой-либо n-угольник, а остальными гранями- треугольники с общей вершиной, не лежащей на плоскости основания. Треугольная пирамида называется также *тетраэдром.*

Многогранник называется простым, если:

Все его грани являются простыми многоугольниками;

Никакие его несмежные грани не имеют общих точек (внутренних или граничных), за исключением, быть может, одной общей вершины;

Две смежные грани имеют только одно общее ребро и не имеют других общих точек.

Многогранник называется *выпуклым*, если все его вершины, не принадлежащие произвольной грани этого многогранника, расположены по одну сторону от плоскости этой грани.

Рассмотрим произвольный правильный многогранник *М*, у которого В вершин, Р ребер и Г граней. По теореме Эйлера для этого многогранника выполняется равенство: В - Р + Г = 2. (1)

Пусть каждая грань данного многогранника содержит m ребер (сторон), и в каждой вершине сходятся n ребер. Очевидно,

$m \geq 3,\ n \geq 3.$ (2)

Так как у многогранника В вершин, и каждой из которых сходятся n ребер, то получаем $n\cdot \hat{A}$ ребер. Но любое ребро соединяет две вершины многогранника, поэтому в произведение $n\cdot \hat{A}$ каждое ребро войдет дважды. Значит у многогранника имеется $\frac{n\cdot B}{2}$ различных ребер. Тогда

$$\frac{n\cdot B}{2} = \text{Р} \Rightarrow \text{В} = \frac{2P}{n}. \qquad (3)$$

Далее, в каждой грани многогранника М содержится m ребер, а число граней равно Г. Так как каждое ребро принадлежит двум смежным граням, то число различных ребер многогранника равно $\frac{m\cdot \tilde{A}}{2}$. Тогда

$$\frac{m\cdot \tilde{A}}{2} = \text{Р} \Rightarrow \text{Г} = \frac{2P}{m}. \ (4)$$

Из (1), (3), (4) получаем $\frac{2P}{n}$ - Р + $\frac{2P}{m}$ = 2, откуда

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{P} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Таким образом, имеем

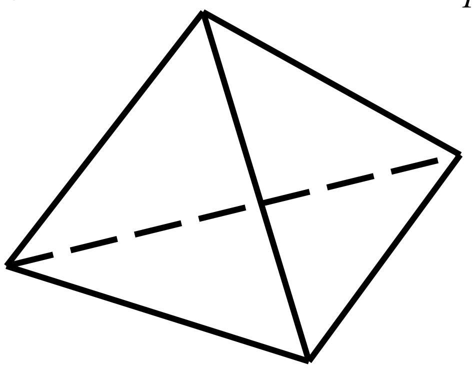
$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2} \\ m\geq 3, n\geq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{2}-\frac{1}{m} \geq \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \Rightarrow 3\leq n<6;$$

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{2}-\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \Rightarrow 3\leq m<6.$$

Из неравенств $3\leq m<6$ и $3\leq n<6$ следует, что гранями правильного многогранника могут быть либо правильные треугольники, либо правильные четырехугольники, либо правильные пятиугольники. Причем в случаях m = n = 4; m = 4, n = 5; m = 5, n = 4; m = n = 5 приходим к противоречию с условием $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}>\frac{1}{2}$. Поэтому остаются возможными пять случаев: 1) m = n = 3; 2) m = 4, n = 3; 3) m = 3, n = 4; 4) m = 5, n = 3; 5) m = 3, n = 5.

Рассмотрим каждый из этих случаев, используя соотношения (5), (4) и (3).

1) m = n = 3 (каждая грань многогранника – правильный треугольник. Это – известный нам *правильный тетраэдр* («*тетраэдр*» означает

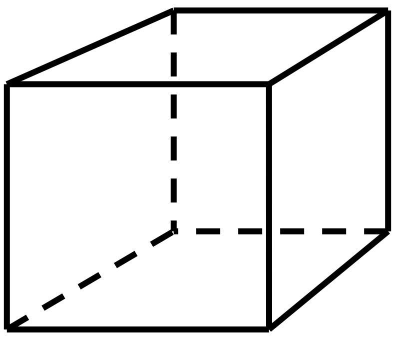


четырехгранник).

2) m = 4, n = 3 (каждая грань квадрат, и в каждой вершине сходятся три ребра). Имеем

$\frac{1}{P}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\Rightarrow$ Р = 12; В = $\frac{2\cdot 12}{3}=$ 8; Г = $\frac{2\cdot 12}{4}=$ 6.

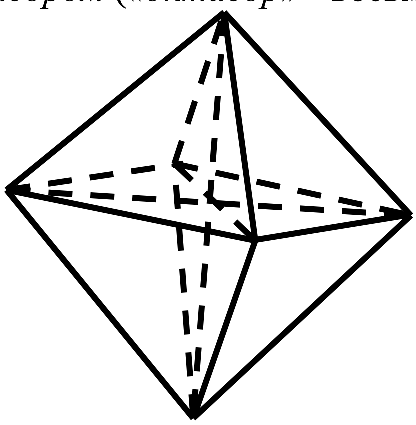
Получаем правильный шестигранник, у которого каждая грань – квадрат. Этот многогранник называется *правильным гексаэдром* и является кубом («*гексаэдр»* - шестигранник), любой параллелепипед – гексаэдр.



3) m = 3, n = 4 (каждая грань – правильный треугольник, в каждой вершине сходятся четыре ребра). Имеем

$\frac{1}{P}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\Rightarrow$ Р = 12; В = $\frac{2\cdot 12}{4}=$6; Г = $\frac{2\cdot 12}{3}=$8.

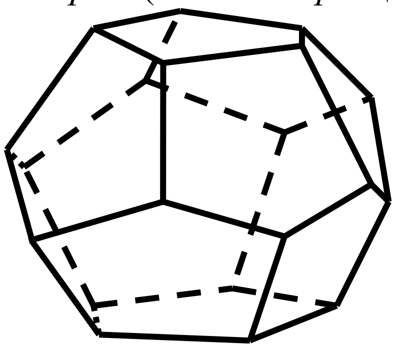
Получаем правильный восьмигранник, у которого каждая грань – правильный треугольник. Этот многогранник называется *правильным октаэдром* (*«октаэдр»* - восьмигранник).



4) m = 5, n = 3 (каждая грань – правильный пятиугольник, в каждой вершине сходятся три ребра). Имеем:

$\frac{1}{P}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30}\Rightarrow$ Р = 30; В = $\frac{2\cdot 30}{3}$ = 20; Г = $\frac{2\cdot 30}{5}$ = 12.

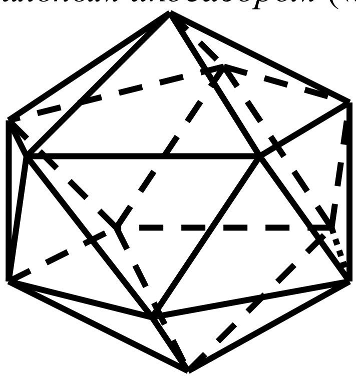
Получаем правильный двенадцатигранник, у которого каждая грань – правильный пятиугольник. Этот многогранник называется *правильным додекаэдром* («*додекаэдр*» - двенадцатигранник).



5) m = 3,n = 5 (каждая грань – правильный треугольник, в каждой вершине сходятся пять ребер). Имеем

$\frac{1}{P}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30}\Rightarrow$ Р = 30; В = $\frac{2\cdot 30}{5}$ =12; Г = $\frac{2\cdot 30}{3}$ = 20.

Получаем правильный двадцатигранник. Этот многогранник называется *правильным икосаэдром* («*икосаэдр*» - двадцатигранник).



Таким образом, мы получили следующую теорему.

Теорема. Существует пять различных (с точностью до подобия) типов правильных многогранников: правильный тетраэдр, правильный гексаэдр (куб), правильный октаэдр, правильный додекаэдр и правильный икосаэдр.

К этому заключению можно прийти несколько иначе.

Действительно, если грань правильного многогранника – правильный треугольник, и в одной вершине сходятся *k* ребер, т.е. все плоский углы выпуклого *k*-гранного угла равны $60°$, то $60°\cdot k<360°$. Следовательно, натуральное число *k* может принимать значения: 3;4;5. при этом Г = $\frac{\hat{A}\cdot k}{3}$,

Р = $\frac{B\cdot k}{2}$. На основании теоремы Эйлера имеем: В+$\frac{\hat{A}\cdot k}{3}$-$\frac{B\cdot k}{2}$= 2

или

В $\cdot$(6 – k) = 12. Тогда

при k = 3 получаем: В = 4, Г = 4 , Р = 6 (правильный тетраэдр);\

при k = 4 получаем: В = 6, Г = 8, Р = 12 (правильный октаэдр);

при k = 5 получаем: В = 12, Г = 20, Р = 30 (правильный икосаэдр).

Если грань правильного многогранника – правильный четырехугольник, то $90° \cdot k < 360°$. Этому условию соответствует единственное натуральное число k = 3. Тогда: Г = $\frac{\hat{A} \cdot k}{4}$, Р= $\frac{B \cdot k}{2}$; В + $\frac{\hat{A} \cdot k}{4}$ - $\frac{B \cdot k}{2}$ = 2 или $B \cdot (4 - k) = 8$. Значит, В = 8, Г = 6, Р = 12 – мы получаем куб (правильный гексаэдр).

Если гранью правильного многогранника является правильный пятиугольник, то $108° \cdot k < 360°$. Этому условию соответствует тоже только

k = 3 и Г = $\frac{B \cdot k}{5}$; Р = $\frac{B \cdot k}{2}$. Аналогично предыдущим вычислениям получаем: $B \cdot (10 - 3k) = 20$ и В = 20, Г = 12, Р = 30 (правильный додекаэдр).

Начиная с правильных шестиугольников, предположительно являющихся гранями правильного многогранника, плоские углы становятся не меньше $120°$, и уже k = 3 их сумма становится не менее $360°$, что невозможно. Следовательно, существует всего пять видов правильных многогранников.

У каждого из правильных многогранников, помимо уже указанных, нас чаще всего будут интересовать:

1. Величина его двугранного угла при ребре (при длине ребра a).
2. Площадь его полной поверхности (при длине ребра a).
3. Его объем (при длине ребра a).
4. Радиус описанной около него сферы (при длине ребра a).
5. Радиус вписанной в него сферы (при длине ребра a).
6. Радиус сферы, касающихся всех его ребер (при длине ребра a).

Наиболее просто решается вопрос о вычислении площади полной поверхности правильного многогранника; она равна Г$\cdot S_г$, где Г – количество граней правильного многогранника, а $S_Г$ - площадь одной грани.

Напомним, sin $18°$ = $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, что дает нам возможность записать в радикалах: ctg $36° = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$. Учитывая это составляем таблицы:

а) для площади грани правильного многогранника

Вид грани	Длина стороны	Длина апофемы грани	Площадь грани
Правильный треугольник	a	$0{,}5 \cdot a \cdot ctg\frac{180°}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3a}{2}0{,}5actg60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Квадрат	a	$0{,}5a$	a^2
Правильный пятиугольник	a	$0{,}5actg\frac{180°}{5} = \frac{a}{2}ctg36°$	$\frac{5a}{2}0{,}5ctg36° = \frac{a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$

б) для площади полной поверхности правильного многогранника

Вид многогранника	Вид граней	Количество граней	Площадь полной поверхности
Правильный тетраэдр	Правильный треугольник	4	$4\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$
Правильный октаэдр	Правильный треугольник	8	$8\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$
Правильный икосаэдр	Правильный треугольник	20	$20\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5a^2\sqrt{3}$
Правильный гексаэдр (куб)	Квадрат	6	$6a^2$
Правильный додекаэдр	Правильный пятиугольник	12	$12\dfrac{a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

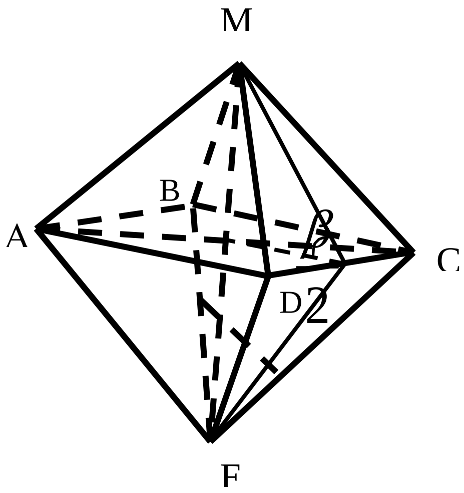
Теперь перейдем к вычислению величины двугранного угла β правильного многогранника при его ребре. Для правильного тетраэдра и куба вы легко найдете величину этого угла.

В правильном додекаэдре все плоские углы его граней равны $108°$, поэтому, применив теорему косинусов для трехгранных углов к любому трехгранному углу данного додекаэдра при его вершине, получим: $\cos 108° = \tilde{n}os^2 108° + \sin^2 108° \cos\beta$,

откуда

$$\cos\beta = \frac{\cos 108°}{1+\cos 108°} = \frac{-\sin 18°}{1-\sin 18°} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}{1-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}} = -\frac{-1+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5};$$

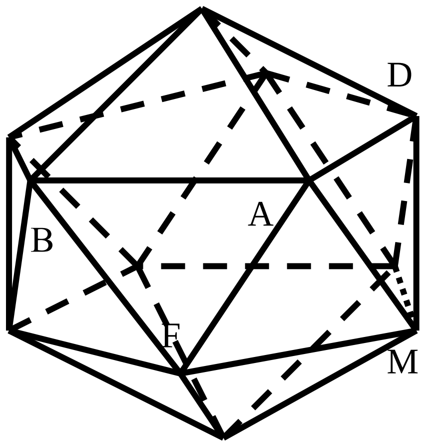
$$\beta = \pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}.$$



На изображенном правильном октаэдре ABCDMF вы можете убедиться, что двугранный угол β при ребре октаэдра равен $2\text{arctg}\sqrt{2} \div \beta = 2arctg\sqrt{2}$.

Для нахождения величины двугранного угла φ при ребре правильного икосаэдра можно рассмотреть трехгранный угол ABCD при вершине A: его плоские углы BAC и CAD равный $60°$, а третий плоский угол BAD, против которого лежит двугранный угол B(AC)D = φ, равен $108°$ (BCDMF – правильный пятиугольник). По теореме косинусов для трехгранного угла ABCD имеем:

$\cos 108 = \cos^2 60° + \sin^2 60° \cos\varphi$. Учитывая, что $\cos 108° = -\sin 18° = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, получаем $-\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. Таким образом, двугранный угол φ при ребре икосаэдра равен $\pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{3} : \varphi = \pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.



Итак, получаем следующую таблицу величин двугранных углов при ребрах правильных многогранников.

Вид многогранника	Величина двугранного угла при ребре
Правильный тетраэдр	$\arccos\frac{1}{3}$
Правильный октаэдр	$2arctg\sqrt{2} = \pi - \arccos\frac{1}{3}$
Правильный гексаэдр (куб)	$90°$
Правильный додекаэдр	$\pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$
Правильный икосаэдр	$\pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$

Прежде чем находить объем того или иного правильного многогранника, сначала проведем рассуждения о том, как можно найти объем правильных многогранников в общем виде.

Попытайтесь сначала доказать, что если центр каждой грани любого правильного многогранника провести прямую, перпендикулярную плоскости этой грани, то все проведенные прямые пересекутся в некоторой одной точке *O*, удаленной от всех граней данного многогранника на одно и тоже расстояние, которое обозначим r. Точка *O* окажется центром сферы, вписанной в данный многогранник, а *r* – ее радиусом. Соединив полученную точку *O* со всеми вершинами данного многогранника, мы разобьем его на Г равных между собой пирамид (Г—число граней правильного многогранника): основаниями образованных пирамид равны *r*. Тогда объем данного многогранника равен сумме объемов всех этих пирамид.

Так как многогранник правильный, то его объем V можно найти по формуле:

$$V = \frac{1}{3} r S_{\text{ïîëí .ïîâåðõ .}} \qquad (1)$$

Остается найти длину радиуса r. Для этого, соединив точку O с серединой K ребра многогранника, попробуйте убедиться, что наклонная KO к грани многогранника, содержащей ребро, составляет с плоскостью этой грани угол, равный половине величины β двугранного угла при этом ребре многогранника; проекция же наклонной KO на плоскость этой грани принадлежит ее апофеме и равна радиусу вписанной в нее окружности. Тогда

$$r = r_{\text{âïèñ .îêð .}} \cdot tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{S_{\text{ãðàíè}} \cdot tg\,\frac{\beta}{2}}{p}, \qquad (2)$$

где p—полупериметр грани. Тогда из (1) и (2) получаем общую для всех правильных многогранников формулу вычисления их объемов:

$$V = \frac{\tilde{A} \cdot S^2_{\text{ãðàíè}} \cdot tg\,\frac{\beta}{2}}{3 \cdot p}.$$

Эта формула совершенно не нужна для нахождения объемов куба, правильных тетраэдра и октаэдра, но позволяет довольно легко находить объемы правильных икосаэдра и додекаэдра.

Вид многогранника	Объем многогранника
Правильный тетраэдр	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Правильный октаэдр	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Куб	a^3
Правильный икосаэдр	$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$
Правильный додекаэдр	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$

2.21. Методика использования интеграла при нахождении объема фигур

План

1. О понятии объема фигуры.
2. Использование интеграла при вычислении объема фигур по площадям его поперечных параллельных сечений.

3. Нахождение объема фигур вращения.

1. О понятии объема фигуры

Понятие объема фигуры вводится аналогично понятию площади плоской фигуры. Первоначальное представление об объеме фигуры связывается у учащихся с подсчетом числа кубиков, длина ребра которых равна линейной единице измерения (а затем и ее долей), заполняющих эту фигуру. Такое представление об объеме фигуры позволяет рассмотреть в школьном курсе геометрии вопрос об объеме прямоугольного параллелепипеда, вывести формулу для его нахождения. Далее изучается объем различных многогранников: сначала рассматривается объем призмы, затем объем пирамиды, далее объемы других многогранников и фигур вращения. Принципиальные трудности, возникающие при изучении объемов, носят тот же характер, что и при изучении площадей, но имеют определенную специфику. Так, если при измерении площадей непосредственное сравнение площади конкретной фигуры с единицей площади вызывало затруднения, но все же было возможным (палетка!), то для измерения объемов сравнение с единичным кубом практически вообще невозможно, ему на смену всегда приходит измерение косвенное. В то же время такой момент, как необходимость ввести новое определение понятия объема для фигур вращения, уже не вызывает у учащихся недоумения, так как этот новый подход уже применялся при вычислении площадей. Несколько неожиданным для учащихся оказывается лишь необходимость применения предельного перехода к доказательству теоремы об объеме пирамиды — на первый взгляд кажется, что эту теорему можно доказать по аналогии с теоремой о площади треугольника, т. е. разбив их части призму, основание: которой; конгруэнтно основанию пирамиды. Однако, как это следует из теоремы Дена — Кагана, такое доказательство невозможно в принципе. Учащимся следует сообщить, что необходимость специального определения понятия объема для пирамиды и соответственно необходимость применения интегральных методов вызваны тем, что, оказывается, равновеликие многогранники далеко не всегда являются одновременно и равносоставленными и этот факт можно строго доказать.

2. **Использование интеграла при вычислении объема фигур по площадям его поперечных параллельных сечений**.

Покажем, как Можно использовать интеграл для нахождения объема фигуры, если известны площади ее поперечных сечений.

Следует начинать о теоретического обоснования метода

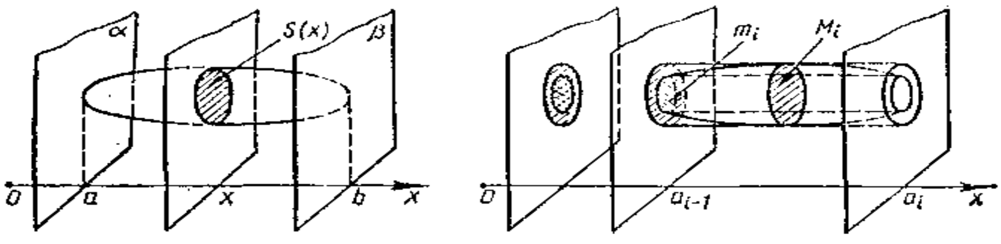


Рис. 1 Рис. 2

Рассмотрим фигуру *D*, ограниченную двумя опорными плоскостями α и β, проведенными перпендикулярно оси *Ox* через точки $x = a$ и $x = b$ (рис. 1). Пусть фигура *D* обладает следующими свойствами:

1) Любое поперечное сечение фигуры *D* плоскостью, перпендикулярной оси *Ox,* есть квадрируемая фигура σ, числовое значение площади которой равно значению функции *S(x),* определенной и непрерывной на отрезке

$[a, b]$.

2) Ортогональные проекции любой пары поперечных сечений фигуры *D* плоскостями, перпендикулярными оси *Ox,* на опорные плоскости целиком содержатся одна в другой. Тогда фигура *D* кубируема, и ее объем можно вычислить по формуле

$$V = \left(\int_a^b S(x)dx \right) (кв.ед.) \qquad (*)$$

Доказательство.

Разобьем отрезок *[a, b]* точками $a = a_0, a_1, ..., a_n = b$ ($a_0 < a_1 < ... < a_n$ на *n* частей $[a_{i-1}, a_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$, одинаковой длины

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = a_i - a_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Через точки деления a_i $(i = 1, 2, ..., n — 1)$ проведем плоскости, перпендикулярные оси *Ox.* В результате указанной операции фигура *D* разобьется на *n* «слоев». Функция *S (x)* непрерывна на отрезке *[a, b],* поэтому она непрерывна и на каждой его части $[a_{i-1}, a_i]$ $(i =,1, 2,:..., n)$. По известной теореме функция, непрерывная на отрезке, достигает на этом отрезке своего экстремума; обозначим через m_i наименьшее значение, а через M_i наибольшее значение функции *S* (*x*) на отрезке $[a_{i-1}, a_i]$.

В силу свойства все сечения *i*-го «слоя», если их спроектировать на опорную плоскость, будут содержать сечение, значение площади которого равно числу m_i и содержаться в сечении, значение площади которого равно числу M_i.

Построим далее на этих наибольшем и наименьшем сечениях (как основаниях) цилиндры с образующими, параллельными оси *Ox,* и высотами, числовое значение которых равно Δx_i (рис.2) и числовые значения объемов которых равны $M_i \Delta x_i$ и $m_i \Delta x_i$. Отметим, что «больший» цилиндр содержит

i-й «слой», т. е. описан около него, а «меньший» содержится в i -м «слое», т. е. вписан в него.

Произведя указанные построения над каждым из отрезков $[a_{i-1}, a_i]$ (i = 1, 2, ..., n), получим две фигуры: фигуру, описанную около данной фигуры D, значение объема которой $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, и фигуру, вписанную в данную фигуру D, значение объема которой $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b S(x)dx.$$

Получили, что существуют последовательности описанных и вписанных для фигуры D кубируемых фигур, последовательности объемов которых имеют общий предел.

Из сказанного следует, что тело D кубируема и ее объем можно вычислять по формуле $V = \left(\int_a^b S(x)dx\right)(кв.ед.)$

В курсе геометрии (X класс) рассмотренный метод можно применять для вычисления объема пирамиды, конуса и шара. В качестве иллюстрации рассмотрим использование данного метода для вычисления объема пирамиды.

Требуется вычислить объем пирамиды, высота которой равна H и площадь основания равна Q.

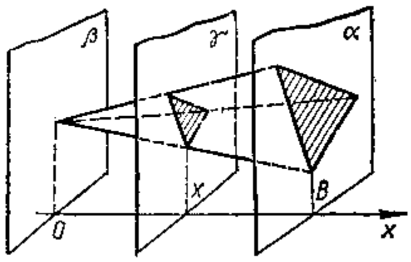


Рис. 3

Р е ш е н и е. Пусть α — плоскость, в которой лежит основание пирамиды. Проведем через вершину пирамиды плоскость β, параллельную плоскости α (рис. 3). Ось Ox выберем так, чтобы она была перпендикулярна плоскостям α и β. Точку пересечения плоскости β с осью Ox примем за начало координат, тогда абсцисса вершины равна нулю. В этом случае абсцисса точки B пересечения плоскости , α с осью Ox равна H.

Рассмотрим поперечное сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной оси Ox и отстоящей от вершины на расстояние x. Площадь этого сечения обозначим через S (x). Как известно, в пирамиде площадь основания и площадь сечения, параллельного основанию, относятся как квадраты их расстояний от вершины, поэтому

$$\frac{S(x)}{Q} = \frac{x^2}{H^2}, \qquad \text{т.е.} \qquad S(x) = x^2\frac{Q}{H^2}.$$

Для вычисления объема пирамиды применим формулу (*)

$$V = \int_0^H x^2 \frac{Q}{H^2} dx = \frac{Q}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} QH.$$

Рассмотрим теперь доказательство, приведенное в учебном пособии по геометрии [3.53] при выводе формулы объема пирамиды. Отметим наиболее существенные методические особенности такого доказательства.

Учитель должен иметь в виду, что подобные доказательства встретятся в дальнейшем неоднократно. Следовательно, данное доказательство является базовым, его основные идеи необходимо усвоить достаточно прочно. Иначе говоря, при объяснении нового материала следует особое внимание уделить наиболее общим, принципиально важным моментам, специально обратив на них внимание учащихся.

Первый шаг в доказательстве теоремы есть выяснение того факта, что и площадь параллельного сечения, находящегося на расстоянии *x* от вершины пирамиды, и объем отсеченной части пирамиды есть функции расстояния. Следует обратить внимание учащихся на своеобразный выбор направления оси абсцисс (совпадает с высотой) и проверить, что действительно каждому значению *x* Є *[OH]* соответствуют определенные значения *S (x)* и *V (x),* т. е. убедиться, что установленные соответствия есть функции. Этот шаг нетруден и должен быть выполнен при активном участии класса.

Следующий шаг — установление границ объема ΔV усеченной пирамиды, заключенной между сечением с площадью *S (x)* и новым сечением с площадью *S* $(x + \Delta x)$. Этот шаг тоже вполне доступен, но выполняет его сам учитель, стремясь обеспечить достаточно отчетливые наглядные представления.

Из свойств гомотетии далее следует, что $\frac{Q}{S(x)} = \frac{H^2}{x^2}$. Успех этой части доказательства целиком зависит от того, как учитель сумел организовать повторение соответствующего материала.

Теперь начинается наиболее ответственная и в то же время наиболее трудная часть доказательства. Формально дело обстоит так. Из непрерывности функции *S (x)* следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} S(x + \Delta x) = S(x)$. Отсюда и из неравенства $S(x) < \frac{\Delta V}{\Delta x} < S(x + \Delta x)$ вытекает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = S(x)$,

т. е. $V'(x) = S(x)$. Иначе говоря, функция *V (x)* есть первообразная для функции *S (x).* Остается перейти к интегрированию — учащиеся вполне могут это сделать самостоятельно. Но нужно быть уверенным, что они хорошо понимают равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} S(x + \Delta x) = S(x)$ как аналитическую запись непрерывности, хорошо знают определение производной и владеют понятием первообразной, т. е. что учащиеся могут в двух-трех строчках доказательства синтезировать несколько различных фактов и идей анализа. Известную негативную роль здесь играет и то, что в процессе последнего (аналитического) этапа доказательства «исчезает» геометрия, замаскированная, как говорил французский математик Л. Карно, «иероглифами анализа». Учитель должен понимать, что эти трудности носят объективный характер и преодоление их потребует продолжительной кропотливой работы над каждой деталью доказательства.

3. Нахождение объема фигур вращения

В курсе математики X класса применение определенного интеграла облегчит вывод формул объемов фигур вращения. Напомним теоретическое обоснование метода.

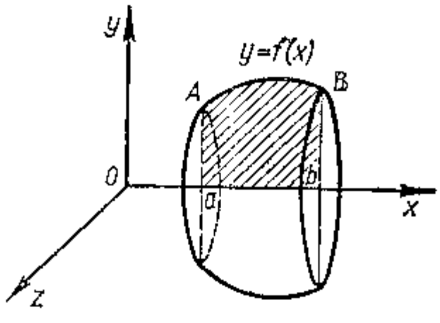


Рис. 4

Рассмотрим в плоскости *xOy* криволинейную трапецию *aABb,* ограниченную отрезком *[a, b]* оси *Ox,* прямыми *x = a* и *x = b,* графиком функции *y = f(x),* где *f* (*x*) — однозначная, неотрицательная, непрерывная на отрезке *[a, Ь]* функция. Если криволинейную трапецию *aABb* вращать вокруг оси *Ox,* то образуется фигура вращения (рис. 4), объем которой вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx(кв.ед.)$$

Доказательство. Фигура вращения удовлетворяет всем условиям, которые предъявляются к фигуре с допустимыми поперечными параллельными сечениями. Поэтому для нахождения объема фигуры вращения применена формула

$$V = \int_a^b S(x)dx(кв.ед.)$$

Так как сечение фигуры вращения плоскостью, перпендикулярной оси *OX* и проходящей через любую точку *x Є [a, Ь],* есть круг радиуса *R=f{x),* то площадь такого сечения равна: *Q (x)* = *π f*^{2} *(x)* (кв. ед.). Таким образом, имеем:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx(кв.ед.)$$

Рассмотренный метод в курсе геометрии применяется при решении таких, например, задач.

Задача 1. Вычислить объем шарового слоя шара радиуса *R,* изображенного на рисунке 5.

Решение. Данный шаровой слой можно рассматривать как фигуру вращения, полученную при вращении криволинейной трапеции *aABb* вокруг оси *Ox.* Поэтому для вычисления ее объема применима формула

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx(кв.ед.),$$

где $f^2(x) = y^2 = R^2 - x^2$.

Следовательно,

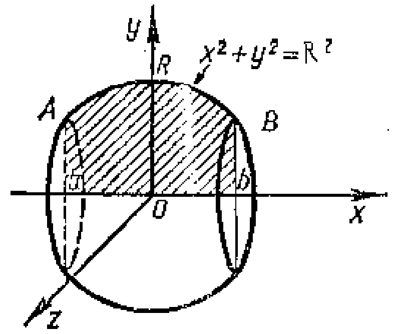


Рис. 5

$$V = \pi\int_a^b (R^2 - x)dx = \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_a^b = \pi\left[R^2(a-b) - \frac{b^3 - a^3}{3}\right](кв.ед.)$$

В частности, при $a = -R$ и $b = R$ шаровой слой есть шар, поэтому из данной формулы при $a = -R$ и $b = R$ получим формулу для вычисления объема шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$ (куб. ед.).

З а д а ч а 2. Найти объем прямого кругового конуса с высотой, равной h, и радиусом основания r.

Р е ш е н и е. Рассматривая данный конус как фигуру, полученную вращением треугольника с вершинами в точках (0, 0), (h, 0) и (h, r) вокруг оси Ox, получим, что ее объем вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx(куб.ед.), \quad \text{где} \quad f(x) = y = \frac{xr}{h}, a = 0, b = h.$$

Следовательно

$$V = \pi\int_a^b \frac{r^2}{h^2}x^2dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h(куб.ед.)$$

2.22. Методика изучения геометрических построений

План

1. Пропедевтика геометрических построений.
2. Геометрические построения в курсе планиметрии.
3. Геометрические построения в курсе стереометрии.

1. Пропедевтика геометрических построений

В V-VI классах геометрические построения выполняются с помощью *расширенного набора чертежных инструментов.* На основании геометрических построений учащиеся знакомятся со многими геометрическими понятиями и фактами. Теоретические сведения при этом усваиваются на основе практических действий, в более конкретной и материализованной форме.

2. Геометрические построения в курсе планиметрии

Схема решения задачи на построение включает в себя следующие этапы: анализ, построение, доказательство, исследование.

Дидактическая цель анализа - найти решение задачи. В логическом плане анализ представляет собой вывод следствий из допущения о существовании фигуры с заданными в условии задачи свойствами (см. анализ Евклида). Иначе говоря, при анализе устанавливаются необходимые условия существования фигуры. Вывод необходимых условий продолжается до тех пор, пока не будут получены такие условия, которые позволяют построить искомую фигуру.

Краткая характеристика процесса решения задачи на построение, конечно, не дает представления о всем многообразии этого процесса, но из нее уже видно, что задачи на построение обладают ценными образовательными, обучающими и развивающими функциями.

Содержание геометрических построений в VII классе таково: понятие о задаче на построение; построение треугольника с данными сторонами; построение угла, равного данному; построение биссектрисы угла; деление отрезка пополам; построение прямой, перпендикулярной к данной.

Одна из особенностей решения задач на построение в VII классе состоит в том, что проведение этапа исследования решения задачи не является обязательным. Такая установка объясняется тем, что исследование решения задачи на построение нередко является намного более трудной задачей, чем те, которые решаются в ходе предыдущих этапов. Кроме того, исследование предполагает знание определенных теоретических сведений (неравенство треугольника, условия различных взаимных положений двух окружностей и т. д.), которые в VII классе не всегда изучаются.

В VII классе при решении задач на построение рекомендуется использовать *неполную схему, состоящую из трех этапов:* 1) анализ; 2) построение; 3) доказательство. (В последующих классах учащихся полезно ознакомить с примерами решения задач на построение по полной схеме.) Отличительная особенность геометрических построений в систематическом курсе состоит также в том, что они выполняются с помощью более ограниченного набора чертежных инструментов: при этих построениях используется только линейка и циркуль.

Наиболее ответственным этапом в решении задачи на построение является анализ. Большинство задач на построение - это задачи на построение треугольника либо сводящиеся к построению треугольника. *Методическая схема проведения анализа при решении задачи на построение треугольника* такова: 1) выполнить чертеж-набросок искомого треугольника; 2) выяснить, какими свойствами обладает каждая из его вершин; 3) определить, каким образом установленным свойством можно воспользоваться для построения треугольника.

3. Геометрические построения в курсе стереометрии

Задачи на построение в стереометрии бывают двух видов: 1) *воображаемые (условные) построения;* 2) *построения на проекционном чертеже.*

Специфика задач на построение в пространстве состоит в том, что не существует чертежных инструментов, позволяющих чертить геометрические фигуры непосредственно в пространстве. Пространственные фигуры изображаются плоским рисунком, а значит, такой рисунок во многом является условным: линейные и угловые размеры на нем искажаются, прямой угол, например, может быть изображен острым или тупым и т. д. Воображаемые (условные) построения проводятся мысленно. Рисунок, которым их сопровождают, носит исключительно иллюстративный характер. Отмеченные особенности стереометрических чертежей вызывают определенные затруднения учащихся в их понимании и выполнении. Приведите пример задач каждого вида.

Вопросы для самоконтроля.

1. Какие геометрические построения рассматриваются в V-VI классах, VII-IX классах, X-XI классах?
2. Какие основные задачи на построение рассматриваются в курсе планиметрии?
3. Какова схема решения задач на построение?
4. Какие методы решения задач на построение рассматриваются в курсе геометрии средней школы? В чем суть каждого метода?
5. Каковы особенности решения задач на построение в пространстве?
6. Какими основными умениями и навыками геометрических построений должны владеть учащиеся?
7. Каковы особенности построения сечений многогранников:

а) методом следов;

б) методом диагональных сечений.

8. Каким должен быть стереометрический чертеж?

2.23.Методика изучения элементов тригонометрии

План

1. Различные подходы. Первый этап в изучении элементов тригонометрии.
2. Косинус, синус и тангенс углов от 0° до 180°
3. Тригонометрические функции действительного аргумента

1. Различные подходы. Первый этап в изучении элементов тригонометрии.

В математике тригонометрические функции часто определяются аналитическим путем: с помощью степенных рядов, как решения дифференциального уравнения, как интегральные представления. Тригонометрические функции могут быть определены геометрическими средствами. Такие определения ввиду их большей доступности и наглядности используются в школьном курсе математики. Существуют различные варианты изложения элементов тригонометрии в школьном курсе математики. Они основаны на применении системы координат, векторов, геометрических преобразований.

Традиционная методическая схема изучения тригонометрических функций такова: 1) вначале определяются тригонометрические функции для острого угла прямоугольного треугольника; 2) затем введенные понятия обобщаются для углов от 0° до 180°; 3) тригонометрические функции определяются для произвольных угловых величин и действительных чисел. В методической литературе используется и более краткая методическая схема, которая начинается сразу с п. 2.

В пособии Погорелова А.В. «Геометрия. 7-11» используется приведенная выше схема. Ее первые два этапа реализуются в курсе планиметрии, третий - в курсе алгебры и начал математического анализа. Геометрический характер определений тригонометрических функций объясняет тот факт, что они составляют единственный вид функций, который начинают изучать не в курсе алгебры, а в курсе геометрии.

Для геометрии же важен не "общефункциональный взгляд" на тригонометрические функции (область определения, область значений, периодичность, четность и т. д.), а их прикладная сторона (решение прямоугольных треугольников, применение некоторых тригонометрических тождеств, теорем косинусов и синусов, решение произвольных треугольников и т. д.). По этой причине в пособии Погорелова А.В. «Геометрия. 7-11» нет даже термина "тригонометрические функции"; вместо него употребляются слова: "косинус угла", "синус угла", "тангенс угла".

Определенные трудности в изучении элементов тригонометрии порождает следующая теорема:

"Косинус угла зависит только от градусной меры угла". В чем заключается смысл данной теоремы? Зачем она нужна? Необходимость изучения данной теоремы можно разъяснить учащимся следующим образом. Пусть требуется на основании определения найти cos 37°. Предположим, что это задание выполняют отдельно друг от друга несколько человек. Чтобы найти cos 37°, они построят прямоугольный треугольник (каждый свой) с углом в 37°, измерят прилежащий катет и гипотенузу, найдут отношение прилежащего катета к гипотенузе. Полученное число и будет являться cos 37°. Есть ли гарантия, что каждый ученик получит один и тот же ответ? Этот вопрос возникает по той причине, что каждый ученик строит свой прямоугольный треугольник, получает свои значения длин прилежащего катета и гипотенузы. Так, может быть, и искомое отношение у каждого ученика будет какое-то свое? Понятно, что если бы значение cos 37° при переходе от одного прямоугольного треугольника к другому изменялось, то ценность такого понятия в математике была бы невелика. Изучаемая теорема является ответом на поставленные вопросы. Она утверждает, что косинус острого угла зависит не от выбора прямоугольного треугольника, а только от меры угла.

2. Косинус, синус и тангенс углов от 0° до 180°.

Определения косинуса, синуса и тангенса углов от 0° до 180° являются генетическими. В этих определениях указываются построения и вычисления, позволяющие найти значение тригонометрической функции. В пособии Погорелова А.В. «Геометрия. 7-11» говорится следующее: "До сих пор значения синуса, косинуса и тангенса были определены только для острых углов. Теперь мы определим их для любого угла от 0° до 180°. Возьмем окружность на плоскости *xy* с центром в начале координат и радиусом *R*. Пусть α - острый угол, который образует радиус *OA* с положительной полуосью *x*. Пусть *x* и *y* - координаты точки *A*. Значения sinα, cosα и tgα для острого угла α выражаются через координаты точки *A*. Именно:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R},\ \sin\alpha = \frac{y}{R},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Определим теперь значения sinα, cosα и tgα этими формулами для любого угла α. (Для tg α угол α=90° исключается)."

3. Тригонометрические функции действительного аргумента.

В курсе алгебры и начал анализа осуществляется последний, заключительный этап изучения тригонометрических функций. В него входят:
1) закрепление представлений учащихся о радианной мере угла; отработка навыков перехода от градусной меры к радианной и наоборот;
2) формирование представлений об углах с градусной мерой, большей 360°; формирование представлений об углах с положительной и отрицательной градусными мерами; перевод этих градусных мер в радианы (положительные и отрицательные действительные числа);
3) описание тригонометрических функций на языке радианной меры угла;
4) утверждение функциональной точки зрения на cos α, sin α и tg α (трактовка cos α, sin α и tg α как функций действительного аргумента, установление области определения, области значений, построение графика функции, установление промежутков монотонности, знакопостоянства и т. д.);
5) повторение известных и ознакомление с новыми тригонометрическими тождествами, ключом к которым является тождество cos (α +β) = cos α cos β - sin α sin β (формула косинуса суммы двух аргументов);
6) применение тригонометрических тождеств в тождественных преобразованиях и при решении задач по стереометрии.

2.24. Простейшие дифференциальные уравнения в курсе «алгебры и начала анализа» академических лицеев

План

1. О месте темы в курсе математики академических лицеях.
2. О понятии дифференциального уравнения.
3. Об изучении в школе дифференциального уравнения показательного (экспоненциального) роста.
4. О рассмотрении дифференциального уравнения гармонических колебаний в курсе математики академических лицеях.

1. О месте темы в курсе математики академических лицеях.

Программа по математике предусматривает рассмотрение в курсе «Алгебра и начала анализа» простейших дифференциальных уравнений, которым отведено 10 часов.

В теме «Дифференциальные уравнения» предполагается ознакомление учащихся с дифференциальным уравнением показательного роста $y' = ky$, рассмотрение различных задач из многих областей науки (физики, химии, биологии, экономики, социологии и т. п.), решение которых сводится к этому уравнению.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний $y'' = -k^2y$ рассматривается в теме «Тригонометрические функции». Здесь также предполагается рассмотрение задач из механики, физики, электротехники и других инженерных наук, решение которых приводится к этому уравнению.

2. О понятии дифференциального уравнения.

Прежде чем вводить понятие дифференциального уравнения, учащимся сообщается о том, что в различных областях науки и техники, а также в экономике часто рассматриваются задачи, решение которых сводится к одному или нескольким уравнениям, содержащим, кроме переменных, искомых функций, еще и производные этих искомых функций. Говорится, что такие уравнения называются дифференциальными. Отмечается, что раздел «Дифференциальные уравнения» курса математического анализа является дальнейшим углублением методов дифференциального и интегрального исчислений. Если в дифференциальном исчислении по данной функции находится ее производная, а в интегральном исчислении по производной находят функцию, являющуюся первообразной для этой производной, то при изучении теории и практическом решении дифференциальных уравнений не даны ни функция, ни ее производная, а задано.уравнение (или несколько уравнений), которое связывает их. С учащимися вспоминается, что понимается под решением алгебраического уравнения. Затем по аналогии вводится понятие решения дифференциального уравнения как функции, которая это уравнение обращает в верное равенство. После этого с учащимися полезно рассмотреть несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

З а д а ч а 1. Найти плоскую кривую, которая в каждой своей точке имеет касательную, образующую с положительным направлением оси абсцисс угол, тангенс которого равен удвоенной абсциссе точки касания.

Р е ш е н и е .

Пусть $y = f(x)$ есть уравнение искомой кривой в плоскости XOY (рис. 1).

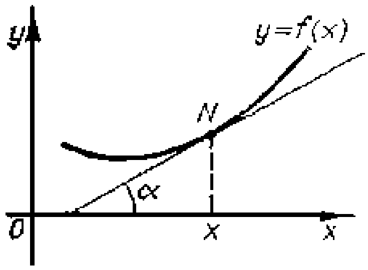


Рис. 1

По условию задачи в каждой точке $N(x, f(x))$ существует касательная, образующая с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен удвоенной абсциссе точки касания, т. е. $tg\,\alpha = 2x$. Используя геометрическое истолкование производной, получим:

$$f'(x) = 2x \qquad (1)$$

или $y' = 2x$ (1′). Полученное уравнение — дифференциальное уравнение, так как оно содержит производную искомой функции. Из уравнения (1′) (или 1) видно, что производная искомой функции y равна $2x$, т. е. сама искомая функция y есть первообразная функция от функции $2x$. Нам известно, что множество всех первообразных данной функции есть неопределенный интеграл от этой функции, поэтому имеем:

$$y = \int 2x\,dx \,(2') \qquad \text{или} \qquad y = x^2 + C, (2)$$

где C — произвольная постоянная. Итак, решением дифференциального уравнения (1') (или 1) является функция $y = x^2 + C$, где C — произвольная постоянная, т. е. данное уравнение имеет бесконечное множество решений, отличающихся на константу. Таким образом, условиям задачи удовлетворяет не одна кривая, а бесконечное множество кривых — семейство парабол (рис. 2). Для того чтобы решение задачи было единственным, надо в условии задачи задавать еще точку, через которую проходит искомая кривая. Действительно, пусть ищется кривая, проходящая через точку

(x_0, y_0) (или (x_0, $f(x_0)$)), тогда, подставив координаты этой точки в решение (2), получим: $y_0 = x_0^2 + C$, т.е. $C = y_0 - x_0^2$.

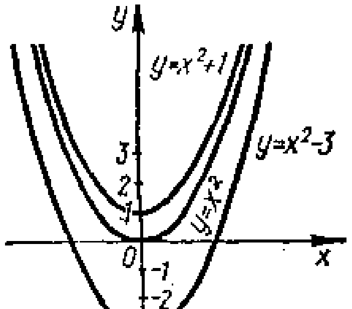


Рис.2

Следовательно, решением данной задачи, т. е. искомой кривой, проходящей, через точку (x_0, y_0), является кривая, уравнение которой имеет вид:

$$y = x^2 + y_0 - x_0^2.$$

В частности, если кривая проходит через точку, координаты которой есть $x_0 = y_0 = 0$, то решением задачи является парабола $y = x^2$, а при $x_0 = 1$ и $y_0 = 2$ решением является парабола $y = x^2 + 1$ или при $x_0 = 2$ и $y_0 = 1$ решением задачи является парабола

$$y = x^2 - 3 \text{ (рис. 2).}$$

З а д а ч а 2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью ϑ_0. Определить закон движения тела, если его положение в начальный момент

t = 0 есть s_0, предполагая, что тело движется только под влиянием силы тяжести.

Р е ш е н и е.

Как известно из курса физики, под влиянием силы тяжести, тело движется с постоянным ускорением, равным g. Мы знаем, что ускорение движения материальной точки выражается производной второго порядка от пути s по времени f , поэтому дифференциальное уравнение в данном случае имеет вид:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -gm,$$

или, после сокращения на массу m,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g. \quad (3)$$

Согласно определению второй производной $s'' = (s')' = \vartheta' = -g$, поэтому, рассуждая так же, как и при решении первой задачи, будем иметь, что функция $\vartheta = s'$ есть первообразная по отношению к функции (- g), т. е.

$$\vartheta = s' = \int(-g)dt = -gt + C_1, \quad \text{или} \quad \vartheta = s' = \int(-g)d = -dt + C_1, \quad (4)$$

Из последнего равенства следует, что s есть первообразная функции

(- $gt + C_1$), поэтому

$$s = \int(-gt + C_1)dt = -g\int\ tdt + C_1\int dt = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Итак, решением дифференциального уравнения является функция

$$s = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2, \quad (5)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Таким образом, решение содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2.

По условию задачи в начальный момент времени t= 0 тело находилось на высоте s_0, поэтому из формулы (5) имеем:

$$s(0) = s_0 = -\frac{g\cdot 0}{2} + C_1\cdot 0 + C_2,$$

т.е. $C_2 = \vartheta_0.$ (6)

С другой стороны, в начальный момент времени t = 0 тело имело начальную скорость ϑ_0, поэтому из формулы (4) следует:

$$\vartheta_0 = -g\cdot 0 + C_1,$$

т. е. $C_1 = \vartheta_0$ (7)

Итак, подставив значения C_1 и C_2 из равенств (6) и (7) в формулу (5), получим решение поставленной задачи:

$$s = -\frac{gt^2}{2} + \vartheta_0 t + s_0.$$

Из рассмотренных примеров видна специфика решения дифференциальных уравнений. Их решением является бесконечное множество функций, из которых заданием начальных условий получаются решения.

После этого вводятся понятия порядка дифференциального уравнения, общего и частного решения. Указывается, что *порядком дифференциального уравнения* называется наивысший из порядков входящих в него производных. Например, рассмотренное выше уравнение (1) есть уравнение первого порядка, а уравнение (3) — уравнение второго порядка. Отмечается, что решение дифференциального уравнения первого порядка, содержащее произвольную постоянную C и такое, что при различных значениях С из него могут быть получены все решения этого дифференциального уравнения, носит название *общего решения* этого уравнения. Мы видели, что решение (2) уравнения (1) содержало одну произвольную константу, поэтому оно является общим решением этого уравнения. В случае дифференциального уравнения второго порядка общее решение должно содержать две произвольные константы. Так, например, решением рассмотренного выше уравнения (3) является решение (5), которое содержит две произвольные константы, поэтому это общее решение уравнения (5). И, наконец, следует остановиться на понятии частного решения дифференциального уравнения. Указывается, что решение дифференциального уравнения первого порядка, получаемое из общего решения этого уравнения, при определенных значениях произвольной константы C называется *частным решением* уравнения. Объясняют учащимся, что для получения частного решения уравнения первого порядка из общего надо задать начальные условия, т. е. потребовать, чтобы искомая функция $y(x)$ при некотором значении аргумента $x = = x_0$ принимала заданное значение $y(x_0) = y_0$. Последнее можно проиллюстрировать на примере решения задачи 1. Так, для нахождения из общего решения $y= x^2+ C$ частных решений $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 3$ были заданы соответственно начальные условия: $x_0 = y_0 = 0$; $x_0 = 1$ и $y_0 =2$; $x_0 = 2$ и $y_0 =1$. Таким образом, частным решениям $y = x^2$, $y = x^2+1$, $y = x^2— 3$ соответствовало задание определенных значений константы С, а именно произвольная константа C соответственно принимала значения 0,1 и —3.

После этого отмечается, что если рассматривается уравнение, порядок которого равен двум, то для получения частного решения из общего следует задать определенные значения двух входящих в него произвольных констант, что также достигается заданием начальных условий. А именно для уравнения второго порядка задание начальных условий состоит в том, что при некотором значении аргумента $x = x_0$ задается значение искомой функции $y(x)$ в этой точке, т. е. $y(x_0) = y_0$, а также значение ее производной, т. е. $y'(x_0)=y_1$.

Например, в задаче 2 были заданы следующие начальные условия: для момента времени $t = 0$ задавалось начальное положение $s(0) = s_0$ (т. е. высота тела в начальный момент времени) и начальная скорость

$\vartheta(0) = s'(0) = \vartheta_0$. Это позволило из общего решения $s = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$ найти интересующее нас частное решение $s = -\frac{gt^2}{2} + \vartheta_0 t + s_0$, являющееся решением рассматриваемой задачи

3. **Об изучении в школе дифференциального уравнения показательного (экспоненциального) роста**.

Изучение дифференциального уравнения показательного роста (оно имеет вид: $y' =$ —ky) в школе можно начинать с рассмотрения различных задач из физики, техники, биологии и т. д., решение которых приводится к этому уравнению. Уже потом следует доказать, что всякое решение этого уравнения есть функция вида $y(x) = C \cdot e^{-kx}$, где C — произвольная константа, а заканчивая изучение этого вопроса, необходимо вновь рассмотреть решения прикладных и технических задач, приводящих к составлению и решению дифференциального уравнения показательного роста. Так, например, сделано в учебном пособии [3.10]. Здесь сначала рассматривается задача об установлении закона распада радия и показывается, что ее решение сводится к решению некоторого дифференциального уравнения вида $m'(t) = -km(t)$, $k > 0$. Затем приводится решение этого уравнения в виде $m(t) = C \cdot e^{-kt}$ (то, что данная функция является решением, устанавливается непосредственной проверкой), дается понятие о начальных условиях дифференциального уравнения, устанавливается, что рассматриваемое уравнение не имеет иных решений. Далее делается указание на то, что при исследовании многих физических, экономических и биологических явлений приходится решать задачи, сводящиеся к дифференциальному уравнению вида $u'(t) = -ku(t)$. Позднее рассматриваются задачи об охлаждении тела в окружающей среде, об измерении высоты с помощью барометра, о росте населения.

В заключение отметим, что, конечно, в курсе математики академических лицеев не следует рассматривать общую теорию решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида $y'(x)+f(x)y(x)=g(x)$ (уравнение показательного роста $y'(x) = -ky(x)$, где k — константа, есть частный случай этого уравнения, а именно линейное

однородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами). Однако, используя понятие первообразной, следует получить общее решение этого уравнения $y'(x) = ky(x)$ в виде $y(x)= Ce^{-kx}$, где C — произвольная постоянная.

4. О рассмотрении дифференциального уравнения гармонических колебаний в курсе математики академических лицеях.

Другое дифференциальное уравнение, которое рассматривается в академических лицеях, есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний $y'' = -k^2y$. Это уравнение — уравнение второго порядка.

Этот вопрос изложен следующим образом: сначала рассматриваются задачи, решение которых сводится к этому уравнению, а затем делается указание на то, что все решения этого уравнения исчерпываются функциями вида $y\ (x) = A \sin (kx + \theta)$, где A и θ — произвольные константы.

Изложение этого вопроса полезно провести в виде лекции, в ходе которой следует рассказать учащимся об огромной роли, которую играют дифференциальные и интегральные уравнения I в современной физике и технике.

2.25. Необходимые и достаточные условия в курсе математики и методика их изучения

План

1. Определение понятий "необходимый признак", "достаточный признак", "необходимый и достаточный признаки" и примеры их использования в курсе математики.

2. Методические особенности изучения необходимых и достаточных условий в средней школе.

1. Определение понятий "необходимый признак", "достаточный признак", "необходимый и достаточный признаки" и примеры их использования в курсе математики

Если P и Q - некоторые свойства или условия, то теоремы в математике чаще всего формируются в виде предложения "Если есть P, то есть Q".

Такая структура математических предложений использует понятия "необходимый признак", "достаточный признак", "необходимый и достаточный признаки".

Этим понятиям надо дать определение.

Пусть P и Q означают некоторые свойства или условия. Выражение "P есть достаточный признак Q" означает, что из P следует Q. При этом Q называют необходимым признаком P.

Иначе говоря, необходимым признаком P называется любое следствие Q, которое может быть получено из P. Достаточным признаком Q называется любое условие P, из которого Q следует.

Утверждение "Из P следует Q" равносильно утверждению "Если P, то Q" и можно записать в виде $P \Rightarrow Q$. Эта запись означает: P - достаточный признак Q, Q - необходимый признак P.

Если утверждение $P \Rightarrow Q$ назвать прямой теоремой, то утверждение $Q \Rightarrow P$ - обратная теорема.

Таким образом, оба признака, и необходимый, и достаточный, являются теоремами, причем если один из них назвать прямой теоремой, то другой признак является обратной теоремой. Значит, понятия необходимого и достаточного признаков полностью совпадают с понятиями прямой и обратной теорем.

Если P=>Q истинно, а Q=>P ложно, то говорят, что Q является необходимым, но недостаточным признаком P. При этом P является достаточным, но не необходимым признаком Q.

Пример. Теорема. Если каждое слагаемое кратно 7, то их сумма кратна 7.

P - "каждое слагаемое кратно 7", Q - "их сумма кратна 7". Проверим утверждение: P=>Q и Q=>P.

Легко доказать, что утверждение P=>Q истинно, а Q=>P ложно (например, 21=15+6).

Указанную теорему можно прочитать так: чтобы каждое слагаемое было кратно 7, необходимо, чтобы их сумма была кратна 7.

Или: чтобы сумма нескольких слагаемых была кратна 7, достаточно, чтобы каждое из них было кратно 7.

Итак, получаем, что делимость суммы на 7 есть необходимый признак делимости каждого слагаемого на 7, а делимость каждого слагаемого на 7 есть достаточный признак делимости суммы на 7.

Если прямая и обратная теоремы верны, т. е. если выполняются оба утверждения P=>Q и Q=>P, то Q является необходимым и достаточным признаком P. В этом случае P также является необходимым и достаточным условием Q. Тогда утверждение P=>Q и Q=>P можно записать так: P=>Q. Данный факт обозначает, что верны обе теоремы - прямая и обратная. Тогда, чтобы утверждать, что Q является необходимым и достаточным признаком P, надо доказать 2 теоремы:

1) P=>Q - необходимость; 2) Q=>P - достаточность.

Часто в формулировках теорем выражение "необходимо и достаточно" заменяется одним из следующих равнозначных ему, т. е. имеющих тот же смысл выражений: "тогда и только тогда", "все те и только те", "в том и только том случае".

Однако многие учителя не уделяют должного внимания этому вопросу. Это может привести ученика к мысли о его несущественности. Между тем даже беглый взгляд на программу показывает, что она буквально пронизана необходимыми и достаточными признаками, сформулированными в виде пар теорем, прямой и обратной. Укажем ряд таких теорем.

I. Геометрия.

а) "Прямая, перпендикулярная радиусу окружности и проходящая через его конец, является касательной к этой окружности".

Обратная теорема: "Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проходящему через точку касания".

Обе теоремы верны, и можно сформулировать достаточные и необходимые условия того, чтобы прямая была касательной к окружности.

Аналогичная ситуация с теоремами: "Если два центральных угла окружности равны, то равны и соответствующие им дуги" и "Если две дуги окружности равны, то равны и соответствующие им центральные углы".

б) "Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 2π" - прямая теорема, а ей обратная: "Если в четырехугольнике сумма двух противоположных углов равна 2π, то около этого четырехугольника можно описать окружность".

Учащимся здесь не сразу видно, что эти теоремы взаимно обратные. Для понимания этого полезно первую теорему сформулировать в виде: "Если :, то :".

в) "Необходимым и достаточным условием коллинеарности ненулевого вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ является существование такого числа, которое удовлетворяет условию: $\vec{b} = x\vec{a}$ ".

г) "Для того, чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость".

д) "Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения".

II. Алгебра.

а) "Числа a, b, c и d, где b≠c, d≠0, составляют пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда ad=bc".

б) "Возрастающей является та и только та последовательность, каждый член которой, начиная со второго, больше предыдущего".

в) "Ограниченность последовательности является необходимым условием сходимости".

г) "Для того, чтобы функция была постоянной на интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная равнялась нулю на этом интервале" (основное свойство первообразной).

2.Методические особенности изучения необходимых и достаточных условий

Подготовительная работа начинается еще в VII классе. Совершенно ясно, что для изложения рассматриваемого вопроса необходимо познакомить ребят с конструкцией P═>Q, а следовательно, научить умению находить условия и заключения, строить предложения P═>Q и Q═>P, читать любую теорему в виде "Если ..., то ...".

На первом этапе, когда мы знакомим учащихся с формой условного предложения "Если ..., то ...", уместно пояснить, что высказывание от слова "если" до слова "то" - какое-то утверждение. Высказывание после слова "то" тоже какое-то утверждение.

Первое из этих утверждений обозначим через P, а второе - через Q. Тогда всякую теорему можно прочитать в виде: "Если P, то Q" - прямая теорема (обозначают P═>Q); "Если Q, то P" - обратная теорема (обозначают Q═>P).

Значит, для построения обратной теоремы надо данную теорему записать в виде "Если ..., то ...", т. е. $P \Rightarrow Q$, найти P и Q и затем построить $Q \Rightarrow P$.

И далее следуют теоремы, на примере которых учитель показывает, как построить обратную теорему.

Пример. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему. ($P \Rightarrow Q$).

P - точка равноудалена от концов отрезка.

Q - точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку.

Построим $Q \Rightarrow P$ (если Q, то P).

Если точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, то она равноудалена от его концов.

Значит, полезно, изучая всякую новую теорему, предлагать ученикам формулировать теорему в виде "Если ..., то ..." и строить теорему $Q \Rightarrow P$.

Главная трудность на этом этапе в том, что не каждая теорема сформулирована в виде "Если ..., то ...". Основное здесь - отыскать P и Q, затем сформулировать в виде $P \Rightarrow Q$.

Полезно указывать учащимся на оценку истинности обратной теоремы, приведя в качестве примера хотя бы теорему о равенстве вертикальных углов.

Но не всякая теорема удобна для работы в этом плане, т. е. не следует злоупотреблять такими вопросами.

Термины "достаточно" и "необходимо" в жизни мы употребляем часто, причем не всегда верно. Для выяснения правильности понимания этих терминов учащимся можно дать задание с пропусками.

1. Чтобы попасть в Большой театр. . . поехать в Москву.

2. Чтобы асфальт был мокрый . . . пойти дождю.

В математике же для безошибочного чтения теорем с использованием вышеупомянутых слов надо познакомиться со следующей схемой.

1) В тексте теоремы выделить P и Q (условие и заключение).

2) Теорему сформулировать в виде $P \Rightarrow Q$ (если она так не сформулирована).

3) Установить истинность (ложность) предложения $P \Rightarrow Q$.

4) Сформировать вид $Q \Rightarrow P$.

5) Если $P \Rightarrow Q$ истинно и $Q \Rightarrow P$ истинно, то : .

Затем можно выполнить несколько упражнений.

Пример 1. Проверим, верно ли следующее высказывание: "Чтобы углы были смежными, достаточно, чтобы две их стороны были дополнительными полупрямыми".

Пусть P - "углы смежные";

Q - "две стороны углов - дополнительные полупрямые".

Допустим, данное предложение истинно. Тогда наше предложение записанное в виде "Чтобы было P, достаточно Q", истинно.

Смотрим схему: такое предложение есть в п. 4, значит строим Q==>P: "Если две стороны углов - дополнительные полупрямые, то эти углы смежные" - ложно, т. е. допущение неверно. Поэтому исходное высказывание ложно.

Пример 2. "Чтобы четырехугольник был параллелограммом, достаточно, чтобы его диагонали делились в точке их пересечения пополам".

Пусть P - "четырехугольник, параллелограмм",

Q - "диагонали четырехугольника делятся в точке их пересечения пополам".

Допущенное предложение верно, значит, верно и данное предложение, записанное в виде ("Чтобы было P, достаточно Q" - истинно) <==> (Q==>P).

Строим Q==>P и проверяем его истинность: "Если диагонали четырехугольника делятся в точке их пересечения пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм" - истинно, т. е. допущение верно, а значит, данное предложение истинно.

Для *самостоятельной работы* предлагаются упражнения.

1. Назовите несколько достаточных условий равенства треугольников.

2. Сформулируйте условие, достаточное для того, чтобы точка была равноудалена от сторон угла.

3. Назовите какое-нибудь условие, достаточное для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом.

2.26. Методика обучения элементам теории вероятностей и математической статистики в профессиональных колледжах и академических лицеях

План

1. Необходимость введения теории вероятностей и математической статистики в программу средней школы и академических лицеев.
2. Обучение элементам теории вероятностей в зарубежных школах.
3. Методика обучения элементам теории вероятностей и математической статистики.

1.Необходимость введения теории вероятностей и математической статистики в программу средней школы и академических лицеев.

Начиная с 50-х годов была развернута большая работа по внедрению в школу теории вероятностей и статистики. В публикациях не только доказывалась возможность этого изучения, но и делался отбор материалов и исследовались методические пути его осуществления.

Неоднократно вырабатывались проекты программы изучения теории вероятностей и статистики в школе. На сегодня этот вопрос решён следующим образом. В школьном курсе математики в 6 классе 8 часов уделено вопросам изучения элементов теории вероятностей, комбинаторики.

В академических лицеях 12 часов уделено вопросам изучения теории вероятностей и математической статистики.

В исследованиях Гасинской И.М., Маневича Д.В. решаются следующие задачи:

Выявление и обоснование объема теоретико-вероятностого материала, который целесообразно изучать в школе не только в основном курсе, но при раннем изучении элементов теории вероятностей (для 5-8 классов) даётся поурочное расположение этого материала.

Разработка методического варианта изучения этого материала на базе методических идей А.Н.Колмогорова и Б.В.Гнеденко.

Экспериментальная проверка рекомендаций.

Пропедевтика некоторых современных понятий математики в связи с изучением теории вероятностей.

2.Обучение элементам теории вероятностей в зарубежных школах.

Рассмотрим как решается вопрос в зарубежных странах.

В английской педагогической литературе предлагается изучение в школе следующих вопросов статистики:

Графическое представление числовых данных, различные виды диаграмм, гистограммы.

Приближенные вычисления, связанные с различными рода изменениями.

Различные виды средних, среднее арифметическое, медиана.

Вычисление дисперсии, ранга, квартилей.

Элементы выборочных исследований.

Французские школы с 1956 года начали включать в программу по математике элементы статистики. Например для классов с техническим уклоном включены такие вопросы.

Графики в арифметическом и логарифмическом масштабах, многоугольник и кривая частоты, коммулятивная кривая.

Характеристические элементы статистического ряда. Типичные величины, медианы, средние, мода, оценки дисперсии. Интервалы изменения, квартили и другие вопросы статистики.

Заслуживает внимание решение проблемы обучения теории вероятностей и статистики в школах Японии.

Построение обучения соответствует подходу Д.Брунера: учащийся сразу же вооружается нужными в данном классе знаниями, на которых строится дальнейшее обучение.

Рассмотрим ход обучения по классам. Младшая средняя школа (7-8 годя обучения).

Первый класс. Отводится 8 часов. Предусмотрено изучение следующих вопросов:

Собирание и систематизация данных в соответственными целями; понимание смысла таблицы распределения частот; построение гистограмм;

кривые распределения частот, типы распределений; кумулятивные частоты, таблицы и графики.

Репрезентативные значения. Смысл репрезентативности; смысл среднего значения, нахождение среднего значения при помощи таблицы распределения частот; смысл моды, медианы, их нахождение; умение правильно использовать среднее значение, моду, медиану в соответствии с особенностями каждой из этих репрезентативных величин.

Во втором классе на изучение в основном теории вероятностей отводится 15 часов. Перед учителем ставятся такие задачи:

Привить учащимся умение подсчета числа случаев, при которых наступает то или иное событие.

Изучить при помощи простых подходов смысл перестановок и сочетаний, научить детей находить их число.

Раскрыть смысл вероятности, научить находить ее в простых случаях.

Раскрыть смысл ожидаемой величины.

Раскрыть смысл статистической вероятности.

Третий класс — 11 часов. Цель — обучить:

Пониманию смысла способов нахождения и практического применения нормированного отклонения (понятие рассеяния).

При помощи простых примеров — основам выборочного метода.

Смыслу корреляции как закону соответствия между двумя величинами, построению корреляционной таблицы и корреляционной диаграммы.

М е т о д и ч е с к и е о с о б е н н о с т и , которых придерживаются при обучении, таковы.

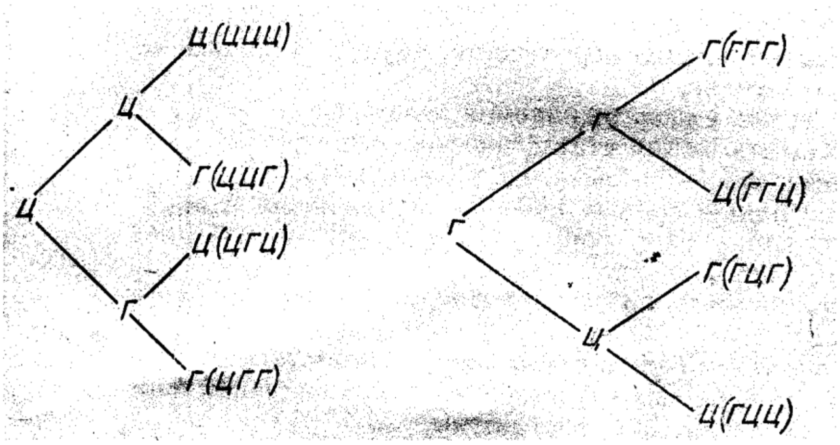
Изучаются все понятия по возможности наиболее простыми методами с помощью простых задач. Во избежание дополнительных сложностей используется наиболее простая символика.

Формальный подход к изучению понятий отсутствует. Школьники учатся сознательно рассматривать понятия, задачи, сознательно оценивают вероятности, встречающиеся в повседневной жизни. Обучаются тому, что слепое применение, например, статистических принципов приводит к заблуждению: маловероятные события практически невозможны, но не всегда их следует отбрасывать, так как это может привести к ложным выводам. У учащихся воспитывается недоверие к совпадениям. Изложение материала сопровождается множеством задач, по возможности взятых из жизни. На одних и тех же задачах объясняются различные понятия (это встречается в учебниках). Следовательно, задачи могут повторяться. Все это связано со стремлением уменьшить трудности восприятия материала.

Приведем некоторые примеры объяснений понятий, которые даются в учебниках.

К о м б и н а т о р и к а. Подсчет случаев осуществляется при помощи простых задач. Вводят понятие дерева. Рассматривается, скажем, такое упражнение. Монету подбрасывают трижды. Сколько будет возможностей выпадения монеты гербом или цифрой вверх?

Для решения выписываются все возможные случаи.



Учащиеся видят, что всего возможно 8 случаев. Им сообщается, что такие рисунки называются деревьями.

Рассматриваются такие упражнения:

— из 8 книг можно купить 3. Сколько имеется вариантов выбора?

— назвать все возможные подмножества множеств *а, в, с;*

— если произведение трех чисел *а, в, с* есть положительное число, то каковы все возможные случаи знаков чисел *а, в, с*?

— на плоскости 5 точек. Если никакие 3 точки из этих 5 не лежат на одной прямой, то сколько можно провести прямых, проходящих через 2 точки? Сколько можно построить треугольников, если три точки из этих 5 брать за их вершины?

Все это готовит ввод понятия классической вероятности.

Статистическая вероятность вводится эмпирически. Для этого производится эксперимент: подбрасывается перо, игральная кость, вытаскиваются из коробки черные и белые фишки. Составляются таблицы частот и относительных частот, строятся графики относительных частот. Поясняется, что такое вероятность. Здесь же учащиеся убеждаются, что вероятность p удовлетворяет неравенствам $0 \le p \le 1$, а сумма вероятностей равна 1.

Математическое ожидание, вводится при помощи задачи о лотерее (отыскивание стоимости лотерейного билета). Далее рассматриваются практически важные с точки зрения учащегося задачи:

— при хорошей погоде прибыль магазина равна 6000 иен, а при плохой – 4000. Если вероятность хорошей погоды 3/4, то каково математическое ожидание прибыли?

— машина при работе дает 10% брака. Каждое доброкачественное изделие дает прибыль 50 иен. Бракованное изделие дает убыток в 200 иен. Каково приблизительно математическое ожидание прибыли из одного изделия?

Опыт обучения учащихся японских школ основам теории вероятности и статистике может быть использован и в наших школах и академических лицеях.

3.Методика обучения элементам теории вероятностей и математической статистики.

1. Основания

Две схемы изложения

Возможны различные модели методики обучения теории вероятностей. В учебной литературе четко обозначились в основном две схемы: одна — неаксиоматическая, а другая — аксиоматическая.

Неаксиоматическая схема изложения основ теории вероятностей начинается с понятий событий, их классификации, действий над ними.

Вводятся понятия полной группы событий, равновозможности, благоприятствующих событий, а затем даются определения классической вероятности, статистической и геометрической вероятностей; излагаются понятия условной вероятности, теоремы умножения и сложения вероятностей, формулы полной вероятности и формул Байеса. В дальнейшем даются схемы Бернулли, ассимптотические теоремы Лапласа, излагаются случайные величины и их распределения, числовые характеристики, закон больших чисел, предельные теоремы, вопросы приложений и т. д. Такой круг вопросов в неаксиоматической модели изложения основ теории вероятностей традиционен. Некоторые вариации их последовательности и содержания не меняют общую картину.

Аксиоматическое изложение основ теории вероятностей началось в сущности с работы А. Н. Колмогорова[1] и идет по следующей схеме.

Понятие случайного события идентифицируется с понятием множества. Для этого вводится понятие пространства Ω элементарных событий ω как множества всех возможных результатов некоторого испытания. Рассматриваются его подмножества. Они интерпретируются как случайные события. Строится алгебра множеств, в которой устанавливается полное соответствие с алгеброй событий. В дальнейшем вводятся аксиомы, приписывающие событиям вероятности. Аксиомы содержат в себе все свойства вероятностей. Далее рассматриваются конструктивные приемы отыскания первоначальных вероятностей — классическое, статистическое, геометрическое определения вероятностей. Они связывают теоретическую модель с практическим содержанием вероятности. Последующее изложение в элементарной теории вероятностей идет примерно по схеме неаксиоматической теории. В более серьезных курсах используется интеграл Лебега, который интерпретируется как математическое ожидание случайной величины, и т. д.

Выбор схемы изложения и модели обучения теории вероятностей зависит от общего уровня знаний учащихся, от целей обучения.

Уровни обучения

Обучение теории вероятностей и статистике в школе условно можно проводить на трех уровнях: четвертый, пятый, шестой классы; седьмой, восьмой классы; девятый, десятый классы.

[1] Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука. 1974.

Естественно, каждый уровень требует своей собственной программы и предъявляет свои требования к выбору методической модели обучения.

Скажем, на низшей ступени изучения теории вероятностей и статистики должны превалировать приемы, опирающиеся на наблюдение и оценку реальных явлений окружающего нас мира, они должны быть естественными. Исходя из этих соображений должен быть отобран соответствующий материал и разработана методика его изучения.

На самой высокой ступени, скажем, в 9 — 10 классах, можно проводить изложение, пользуясь понятиями производной и интеграла.

Пути обучения

Изучать теорию вероятностей и статистику можно следующим образом: при изучении непосредственно самих математических дисциплин, при помощи межпредметных связей, т. е. с использованием других учебных предметов, и, наконец, в виде самостоятельной дисциплины или отдельной главы курса математики.

Обучение может проводиться и комплексно, т. е. одновременно как при помощи внутрипредметных и межпредметных связей, так и самостоятельно. Выбор способа обучения подразумевает и соответствующие методические приемы обучения.

Оптимальный вариант обучения зависит от многих параметров: от объема материала, от характера аудитории, ее подготовленности, наличия учебных пособий, даже от вкуса преподавателя и т. д.

Но преподаватель всегда должен иметь в виду, что в силу необычности, новизны материала урок следует продумать до «мелочей», обращая особое внимание на активизацию всех учащихся. Следует добиваться понимания материала всеми. Сосредоточение на самых существенных идеях должно лежать в основе обучения.

Теоретико-вероятностные рассуждения сопровождаются примерами, экспериментами и могут быть громоздкими. Поэтому рассуждения должны заканчиваться четким выделением цели занятия, формулировок, определений главного, а само обучение должно сопровождаться тщательно продуманными смысловыми ударениями. Психолого-педагогические особенности теории вероятностей должны лежать в основе построения методической модели обучения. Например, из этих особенностей вытекает, что учащиеся при изучении теории вероятностей не должны перегружаться. Это облегчит в обстановке ее необычности восприятие науки, а неполная информация может быть, при необходимости, восполнена в будущем.

Ниже будет рассмотрен метод А.П.Колмогорова изучения основных понятий теории вероятностей.

Методика А. *Н. Колмогорова (классическая вероятность)*[2]

А. Н. Колмогоров предлагает вводить понятие вероятности, опираясь на комбинаторику. Изучение вероятности следует начать непосредственно с

[2] Колмогоров А. *Н.* Введение в теорию вероятностей и комбинаторику//Математика в школе. 1968. № 2.

комбинаторных подсчетов числа случаев, благоприятствующих тому или иному событию. Такого рода задачи могут быть интересными по содержанию. Они служат хорошей психологической подготовкой к самому введению понятия вероятности.

В соответствии с этой установкой А. Н. Колмогоров предлагает такую программу изучения теории вероятностей в школе.

1. Начала комбинаторики и вычисление вероятностей при помощи подсчета числа благоприятствующих случаев — 10 часов.

2, Операции над событиями, теорема сложения вероятностей, условные вероятности и независимость — 5 часов.

3. Независимые повторные испытания с постоянной вероятностью, теорема Бернулли (без доказательств), заключительная беседа о, законе больших чисел и его роли в различных областях науки и практической деятельности — 3 часа.

Первоначально предлагается рассмотреть понятие перестановки. На простейших примерах с перестановкой букв выясняется сущность понятия и устанавливается формула подсчета числа перестановок. Скажем, две буквы А и Б можно расположить одну за другой двумя способами: АБ, БА, а буквы А, Б, В уже шестью: АБВ, АВБ, ..., ВБА. В дальнейшем подсчет быстро усложняется, но он производится по формуле $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$. Это проверяется на примерах. Формула легко доказывается методом математической индукции.

В дальнейшем вводится понятие вероятности. Рассматривается пример с семью буквами разрезной азбуки А, А, Б, Б, К, У, Ш, Их помещают в мешок и наудачу вынимают, располагая одну за другой в порядке выема. В результате получается, скажем, слово *бабушка.* Задается вопрос: «В какой мере такой факт надо считать удивительным?» Начинаются поиски ответа на этот вопрос. Буквы нумеруются. Устанавливается, что их можно расположить по порядку *7! =5040* способами. Лишь в четырех случаях из них получается слово *бабушка.* Отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу случаев в подобных задачах называют вероятностью события. В нашем случае вероятность появления слова бабушка есть

$$P = \frac{4}{5040} = \frac{1}{1260}$$

Затем рассматривается пример с буквами А, А, М, М. Подсчитывается вероятность получения слова мама.

В дальнейшем вводится понятие равновозможности при помощи примера, связанного с игральным кубиком, и уточняется понятие вероятности: вероятностью называется отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу равновозможных.

При помощи анализа броуновского движения и задачи о блуждании на плоскости показывается, что вероятности приходится вычислять не только при решении шуточных задач.

Рассматривается также блуждание по прямой. Выясняется сущность треугольника Паскаля, предлагается оригинальный вывод формулы подсчета числа сочетаний.

Элементарный метод введения классической вероятности

Опишем еще один, как нам кажется, простой метод введения понятия вероятности. Учитель приносит на урок один или несколько прозрачных сосудов, в которые помещаются красные и белые шары. Пусть в сосуде находится шесть шаров. Учитель говорит: «Мы имеем всего 6 возможностей вынуть шар. Изменим состав шаров. Пусть в сосуде 1 красный и 5 белых шаров. Тогда при случайном выборе шаря имеется одна возможность извлечь красный шар и 5 — белый, т. е. имеется 1/6 всех возможностей вынуть красный и 5/6 вынуть белый шар. Если в сосуде 2 красных шара, то вынуть красный шар 2/6 всех возможностей. Продолжаем такие рассуждения до завершающего случая: если в сосуде 6 красных шаров, то вынуть красный шар — 6/6 всех возможностей, т. е, в этом случае необходимо извлекается только красный шар.

Таблица результатов извлечений такова:

Количество шаров	Из них красных	Какая часть всех возможностей извлечь красный шар
6	0	$\frac{0}{6}=0$
6	1	$\frac{1}{6}$
6	2	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
6	3	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
6	4	$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
6	5	$\frac{5}{6}$
6	6	$\frac{6}{6}=1$

Анализируя полученные результаты, приходим к выводу, что отношение количества красных шаров ко всему количеству шаров будет характеризовать возможность успеха в выеме красного шара. Чем больше красных шаров в сосуде, тем больше возможностей вынуть красный шар, что характеризуется большей дробью. Такие дроби называют вероятностями выема красного шара.

Опыт показывает, что вероятность следует понимать так. Если в сосуде, скажем, 3 красных шара и 3 белых, то при случайном многократном выеме шара с возвращением и последующим перемешиванием примерно 3/6=1/2 всех вынутых шаров будут красными. Это значит, что если производится 100 выемов, то в 50 случаях будет выем красного шара.

Полученное представление о вероятности следует проиллюстрировать дополнительными примерами. Рассматривается подбрасывание монеты. Сколько возможностей приходится на появление герба при подбрасывании монеты? Имеется одна возможность из двух. Следовательно, вероятность появления герба равна 1/2. Этому же равна вероятность появления цифры.

Аналогично может быть рассмотрено испытание с подбрасыванием кубика. Так формируется представление о вероятности. Однако для полной подготовки учащихся к правильному восприятию общего определения вероятности события им следует усвоить представления о равновозможности и о результатах испытания, благоприятствующих данному событию. Эти понятия могут быть объяснены с помощью рассмотренных примеров. Выем любого шара из сосуда равновозможен. Если монета и кубик строго симметричны и однородны, то появления герба или цифры на монете равнозначны, как и появление числа очков на кубике.

Понятие о результатах испытания, благоприятствующих событию А, может быть введено определением: каждый результат испытания, при котором осуществляется данное событие, называется благоприятствующим событию.

Определение поясняется на рассмотренных моделях. Если в сосуде, скажем, 5 красных и 1 белый шар, то событию А — выему красного шара благоприятствуют пять исходов испытания из шести; при подбрасывании кубика событию 8 — появлению четной цифры — благоприятствуют три результата подбрасывания кости— появление двойки ω_2, появление четверки ω_4, появление шестерки ω_6.

Прежде чем дать определение вероятности, концентрируются все рассуждения. Вывешивается плакат, на котором изображена схема рассуждений и их связей или показывается соответствующий рисунок на экране дисплея, На плакате дано и само определение. К нему могут прийти сами учащиеся, воспользовавшись указаниями преподавателей.

Литература

1. Каримов И.А. Гармонично развитое поколение – основа прогресса Узбекистана - Т. Шарк, 1998
2. Узбекистон Республикасининг Конуни «Кадрлар тайорлашнинг миллий дастури тугрисида» Олий таълис меъёрий хужжатлар туплам. Т. Шарк нашриёти, 2001.
3. Математика укитиш методикаси (намунавий укув дастур). Д.Юнусова Д.И., Эшпулатов Н.О., 2004.
4. Абдухамидов А.И., Касимов Н.А., Носиров И.М., Хусанов Ж.Х. «алгебра ва мат.ан.асослари» 1,2 кисм, Т., «Укитувчи», 2005.
5. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия для 10-11 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. М.: Просвещение, 1992.
6. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. Пробный учебник для 9-10 классов средней школы. М.: Просвещение, 1985.
7. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и основы анализа. учебник для 10-11 классов. Т..: Укитувчи, 1994.
8. Алимов Ш.А., О.Р.Хоммухамедов, М.А.Мирзаахмедов «Алгебра. 8 класс», Т. Укитувчи, 2006.
9. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия 7-9: Учебник для 7-9 кл. средней школы. - М.: Просвещение, 1993.
10. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г. Геометрия 10-11: Учебник для 10-11 кл. средней шк. - М.: Просвещение, 1993.
11. Бакирова А.Ю. «Дифференцированное обучении (методические рекомендации)», ТГПУ, 2005.
12. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 кл. средней школы. - М.: Просвещение, 1993.
13. Беденко Н.К., Денищева Л.Р. Уроки по алгебре и началам анализа (в средних профтехучилищах). - М.: Высшая школа, 1988.
14. Волович М.Б. Математика без перегрузок. - М.: Педагогика, 1991. - 144 с.
15. Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе: Сб. статей / Сост. Е.Г. Глаголева, О.С. Ивашев-Мусатов. - М.: Просвещение, 1981.
16. Гайбуллаев Н., Ортикбоев Ф., «Геометрия», Т., «Укитувчи» 2001.
17. Градштейн И. С. Прямая и обратная теоремы. - М.: Наука, 1973. - 128 с.
18. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. - М.: Просвещение, 1990. - 224 с. (Б-ка учителя математики).
19. Гусев В.А. Методика преподавания курса "Геометрия 6 - 9". Часть 1. - М.: Авангард, 1995. - 100 с.
20. Гусев В.А. Методика преподавания курса "Геометрия 6 - 9". Часть 3. - М.: Авангард, 1995. - 137 с.

21. Далингер В.А. Обучение учащихся доказательству теорем: Учебное пособие. - Омск, 1990. - 128 с.
22. Дубинчук Е.С., Слепкань З.И. Обучение геометрии в профтехучилищах. Вопросы методики. - М.: Высшая школа, 1989. - 128 с.
23. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике. - М.: Просвещение, 1990. - 127 с.
24. Зотов Ю.Б. Организация современного урока. М., 1984, с. 10, 19
25. Ивашев-Мусатов О.С. Начала математического анализа. - М.: Наука, 1973.
26. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / Под ред. А.Н. Колмогорова. - М.: Просвещение, 1985.
27. Колягин Ю.М. «Методика преподавания математики в средней школе (Частная методика)», М., Просвещение, 1977.
28. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов / Под ред. Е.И. Лященко. - М.: Просвещение, 1988. - 222 с.
29. Маневич Д.В. «Теория вероятности и статистика в школьном образовании», метод.пособие, Т., Укитувчи, 1989.
30. Математики укитиш методикаси (марузалар топлам), Толаганов Т., ТГПУ.
31. Метельский Н.В. Дидактика математики. - Минск.: Изд-во БГУ, 1982. - 254 с.
32. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, В.Я. Саннинский, Г.Л. Луканкин. - М.: Просвещение, 1980. - 386 с.
33. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / Сост. В.И. Мишин. М.: Просвещение, 1987.
34. Методика преподавания математики: Общая методика / Сост. Р.С.Черкасов, А.А. Столяр. - М.: Просвещение, 1985. - 336 с.
35. Окунев А.А. Спасибо за урок, дети! - М.: Просвещение, 1988. - 128с.
36. Пидкасистый П.И., Портнов М.Л. Искусство преподавания. Первая книга учителя. - М.: Изд-во "Российское педагогическое агентство", 1998. - 184 с.
37. Погорелов А.В. Геометрия: Учебник для 7-11 кл. средней школы. - М.: Просвещение, 1990. - 383 с.
38. Пойа Д. Как решать задачу. - М.: Учпедгиз, 1961. - 269с.
39. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. - М.: Нау-ка,1975. - 462 с.
40. Пойа Д. Математическое открытие. - М.: Наука, 1970. - 452 с.
41. Рахимкариев А.А. «Геометрия. 8 класс», 2006.

42. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе. - Минск.: Высшая школа, 1990. - 267 с.
43. Сайдалиева Ф.Х. «Методика развития геометрических умений и навыков учащихся общеобразовательных школ», Т., 2007.
44. Сайфуллаева Х.М. «Геометрия», учебник для академических лицеев и профессиональных колледжей, Т., Укитувчи, 2005.
45. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: Учебное пособие. - М.: Народное образование, 1998. - 256 с.
46. Столяр А.А. Педагогика математики. - Минск.: Высшая школа, 1974. - 190 с.
47. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: Пособие для учителей, методистов педагогических высших учебных заведений. - М.: Флинта, 1998. - 224 с.
48. Шварцбурд С.И., Ивашев-Мусатов О.С. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для средн. проф.техн. училищ. - М.: Высшая школа, 1977.
49. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1986. - 256 с.

Оглавление