Учебный комплекс ЭФ

Высшая математика для экономистов

Учебник

3-е издание

ЮНИТИ
UNITY

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Производная сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, то $y' = f'(u) \cdot u'$

$c' = 0; \quad x' = 1$

$(u + v)' = u' + v'; \quad (cu)' = cu'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

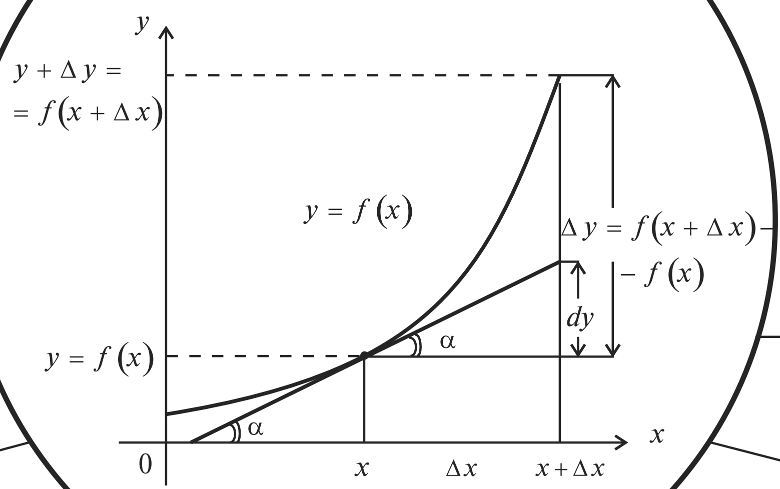
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2};$

$\left(e^x\right)' = e^x; \quad \left(a^x\right)' = a^x \ln a$

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}; \quad \left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Производная

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}; \; y' = \operatorname{tg} \alpha$



Дифференциал

$dy = f'(x)\,\Delta x; \; dx = \Delta x$

Уравнение касательной

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Для дифференцируемой функции

$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Свойство инвариантности дифференциала

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, то $dy = f'(u)\,du$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

ЗОЛОТОЙ ФОНД РОССИЙСКИХ УЧЕБНИКОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Под редакцией профессора ***Н.Ш. Кремера***

Третье издание

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве ***учебника*** *для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям*

Рекомендовано Учебно-методическим центром «Профессиональный учебник» в качестве ***учебника*** *для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям*

ЮНИТИ
UNITY

Москва • 2012

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
В93

Всероссийский заочный финансово-экономический институт
Ректор акад. *А.Н. Романов*
Председатель Научно-методического совета проф. *Д.М. Дайитбегов*

Коллектив авторов:
проф. Н.Ш. Кремер (предисловие, введение, гл. 2—7, 9, 13, 14, 16),
доц. Б.А. Путко (гл. 8, 15), доц. И.М. Тришин (гл. 10—12),
доц. М.Н. Фридман (гл. 1)

Рецензенты:
кафедра математики Финансовой Академии при Правительстве РФ
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Солодовников)
и д-р физ.-мат. наук, проф. *В.З. Партон*

Главный редактор издательства *Н.Д. Эриашвили*,
кандидат юридических наук, доктор экономических наук, профессор,
лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники

В93 **Высшая** математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н.Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. — 3-е изд. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — 479 с. — (Серия «Золотой фонд российских учебников»)
I. Кремер, Наум Шевелевич.

ISBN 978-5-238-00991-9
Агентство CIP РГБ

Эта книга — не только *учебник*, но и краткое *руководство к решению задач* по основам высшей математики. Излагаемые в достаточно краткой форме с необходимыми обоснованиями основные положения учебного материала сопровождаются большим количеством задач, приводимых с решениями и для самостоятельной работы. Там, где это возможно, раскрывается экономический смысл математических понятий, приводятся простейшие приложения высшей математики в экономике (балансовые модели, предельный анализ, эластичность функций, производственные функции, модели динамики и т.п.).

Для студентов и аспирантов экономических вузов, экономистов и лиц, занимающихся самообразованием.

ББК 22.1я73

ISBN 978-5-238-00991-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время ощущается острая нехватка учебников и учебных пособий по математическим дисциплинам, в частности по основам высшей математики. Особенно болезненно это отражается на студентах, обучающихся в вузе без отрыва от производства, для многих из которых учебник является основным источником учебной информации. Именно этим студентам в первую очередь адресована настоящая книга.

Учебник написан в соответствии с требованиями государственных общеобразовательных стандартов в области математики для специалистов с высшим образованием по экономическим специальностям. Он соответствует Примерной программе дисциплины «Математика», утвержденной Минобразованием РФ, и включает следующие разделы: «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии», «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения», «Ряды», «Функции нескольких переменных».

При написании курса высшей математики для экономических вузов авторы руководствовались *принципом повышения уровня фундаментальной математической подготовки студентов с усилением ее прикладной экономической направленности.* При введении основных понятий отдавалось предпочтение классическому подходу: так, например, понятие непрерывности функции рассматривается после понятия предела, определенный интеграл определяется как предел интегральной суммы и т.п. Всюду, где это возможно, даются геометрический и экономический смысл математических понятий (например, производной, интеграла и т.д.), приводятся математические формулировки ряда экономических законов (закона убывающей доходности, принципа убывающей предельной полезности, условия оптимальности выпуска продукции), рассматриваются простейшие приложения высшей математики в экономике (балансовые модели, предельный анализ, эластичность функции, производственные функции, модели экономической динамики и т.п.). Такие приложения рассчитаны на уровень подготовки студентов 1 курса и почти не требуют дополнительной (экономической) информации.

Известно, что новый учебный материал усваивается студентами (особенно имеющими значительный перерыв и пробелы в довузовской математической подготовке) значительно легче, если он сопровождается достаточно большим числом иллюстрирующих его примеров. Поэтому авторами сделана попытка соединить в одной книге учебник и краткое руководство к решению задач.

Такое построение книги потребовало сделать и изложение теоретического материала более кратким, отказаться без существенного ущерба от малозначащих, громоздких или повторяющихся по своим идеям доказательств утверждений, отличающихся от ранее проведенных лишь техническими деталями. Вместе с тем авторы стремились к более тщательной проработке ведущих понятий и доказательств положений курса. Для лучшего усвоения учебного материала приводятся учебные алгоритмы (схемы) решения определенного круга задач.

Задачи с решениями (в том числе с экономическим содержанием) рассматриваются на протяжении всего изложения учебного материала. Более сложные, комплексные, а также дополнительные задачи с решениями приводятся в большинстве глав в последнем (или предпоследнем) параграфе «Решение задач». А задачи для самостоятельной работы даются в конце каждой главы в рубрике «Упражнения» (нумерация задач единая — начинается в основном тексте главы и продолжается в этой рубрике). Ответы задач приведены в конце книги.

Во втором издании включена новая глава «Комплексные числа», что, в частности, позволило более полно изложить раздел «Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения». В главу «Функции нескольких переменных» дополнительно включен параграф «Условный экстремум». Изложенный в нем метод множителей Лагранжа имеет важное значение в решении оптимизационных задач. Существенно расширен учебный материал глав 5, 7, 12, 15, касающийся простейших приложений высшей математики в экономике, в частности, рассмотрены элементы предельного анализа и модели экономической динамики.

В третьем издании исправлены замеченные опечатки и неточности.

Авторы выражают большую благодарность профессорам А.С. Солодовникову и В.З. Партону за рецензирование рукописи, а также студентке ВЗФЭИ М.Л. Лифшиц за помощь в выявлении опечаток первого издания.

В книге знаком □ обозначается начало доказательства теоремы, знаком ■ — ее окончание; знаком ▷ — начало условия задачи, знаком ▶ — окончание ее решения.

ВВЕДЕНИЕ

Математика *— наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.* В неразрывной связи с запросами науки и техники запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется, так что приведенное определение необходимо понимать в самом общем смысле.

Академик А.Н. Колмогоров выделяет четыре периода развития математики[1]: зарождения математики, элементарной математики, математики переменных величин, современной математики.

Понимание самостоятельного положения математики как особой науки стало возможным после накопления достаточно большого фактического материала и возникло впервые в Древней Греции в VI—V вв. до нашей эры. Это было началом *периода элементарной математики.*

В течение этого периода математические исследования имеют дело лишь с достаточно ограниченным запасом основных понятий, возникших в связи с самыми простыми запросами хозяйственной жизни. Вместе с тем уже происходит качественное совершенствование математики как науки. Из арифметики постепенно вырастает теория чисел. Создается алгебра как буквенное исчисление. А созданная древними греками система изложения элементарной геометрии — геометрии Евклида — на два тысячелетия вперед сделалась образцом дедуктивного построения математической теории.

В XVII в. запросы естествознания и техники привели к созданию методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразование геометрических фигур. С употребления переменных величин в аналитической геометрии и создания дифференциального и интегрального исчисления начинается *период математики переменных величин.*

На первый план выдвигается понятие функции, играющее в дальнейшем такую же роль основного и самостоятельного предмета изучения, как ранее понятие величины и числа. Изучение функции приводит к основным понятиям математического анализа: пределу, производной, дифференциалу, интегралу. Создание аналитической геометрии позволило существенно расширить предмет изучения геометрии благодаря найденному универсальному способу перевода вопросов геометрии на язык алгебры и анализа — методу координат

---

[1] *Колмогоров А. Н.* Математика // Математический энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1988.

Р. Декарта. С другой стороны, открылась возможность геометрической интерпретации алгебраических и аналитических фактов.

Дальнейшее развитие математики привело в начале XIX в. к постановке задачи изучения возможных типов количественных отношений и пространственных форм с достаточно общей точки зрения. Связь математики и естествознания, оставаясь по существу не менее тесной, приобретает теперь все более сложные формы. Новые теории возникают не только в результате запросов естествознания и техники, но также и вследствие внутренней потребности самой математики. Замечательным примером такой теории является «воображаемая» геометрия Н. Лобачевского. Развитие подобного рода исследований в математике XIX—XX вв. позволяет отнести ее к *периоду современной математики*.

Потребности развития самой математики, «математизация» различных областей науки, проникновение математических методов во многие сферы практической деятельности, прогресс вычислительной техники привели к появлению ряда новых математических дисциплин, например исследование операций, теория игр, математическая экономика и др.

В основе построения математической теории лежит *аксиоматический метод*, при котором в фундамент теории кладутся некоторые исходные положения, называемые *аксиомами* теории, а все остальные предложения теории получаются как логические следствия аксиом. Примером применения аксиоматического подхода является евклидовая геометрия, в которой четко проведена идея получения основного содержания геометрической теории чисто дедуктивным путем из небольшого числа аксиом, истинность которых представлялась наглядно очевидной.

Основным методом в математических исследованиях являются *математические доказательства — строгие логические рассуждения*. В силу объективной необходимости, указывает чл.-корр. РАН Л.Д. Кудрявцев[1], *логические рассуждения* (которые по своей природе, если они правильные, являются и строгими) *представляют метод математики, без них математика немыслима*. Следует отметить, что математическое мышление не сводится лишь к логическим рассуждениям. Для правильной постановки задачи, для оценки ее данных, для выделения существенных из них и для выбора способа ее решения необходима еще *математическая интуиция*, позволяющая предвидеть нужный результат прежде, чем он будет получен, наметить путь исследования с помощью правдоподобных рассуждений. Но *справедливость рассматриваемого факта доказывается* не проверкой ее на ряде примеров, не проведением ряда экспериментов (что само по

---

[1] *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и ее преподавание. — М.: Наука, 1985.

себе играет большую роль в математических исследованиях), а *чисто логическим путем, по законам формальной логики.*

Сказанное, естественно, не означает, что в предлагаемом курсе высшей математики мы должны использовать только «строгие» доказательства, сводя все к аксиомам. Такой задачи авторы не ставили потому, что это не только невозможно в рамках вузовского курса (а тем более краткого курса в экономическом вузе), но часто и нецелесообразно с методической точки зрения, так как в процессе изучения дисциплины в ограниченные сроки необходимо уделять большое внимание разъяснению математических понятий (в том числе и на интуитивном уровне), их геометрическому, физическому и экономическому смыслу, решению практических задач.

В математике изучаются *математические модели.* Это могут быть как непосредственно математические модели реальных явлений, так и объекты (структуры) для изучения этих моделей. Одна и та же математическая модель может описывать свойства далеких друг от друга по своему конкретному содержанию реальных явлений. Так, одно и то же дифференциальное уравнение может описывать процессы роста населения и распада радиоактивного вещества. *Для математики важна не природа рассматриваемых объектов, а существующие между ними отношения.*

В математике используются два вида умозаключений: *дедукция и индукция*, позволяющие сделать выводы соответственно на основании общих знаний для конкретного случая и наоборот — на основании частных случаев об общих суждениях. *Принцип математической индукции* гласит, что утверждение $A(n)$, зависящее от натурального параметра n, считается доказанным, если доказано $A(1)$ и для любого натурального числа n из предположения, что верно $A(n)$, доказано, что верно также $A(n + 1)$.

При формулировке математических утверждений часто используются *необходимые и достаточные условия.* Пусть рассматривается какое-либо утверждение (положение) B в связи с некоторым утверждением (условием) A. Если из B следует A, т. е. $B \Rightarrow A$, то A называется *необходимым условием* для B, если же из A следует B, т. е. $A \Rightarrow B$, то A называется *достаточным условием* для B. Например, делимость числа на 2 — необходимое условие его делимости на 6 (делимость на 6 $\Rightarrow$ делимость на 2), а, скажем, делимость числа на 12 — достаточное условие его делимости на 6 (делимость на 12 $\Rightarrow$ делимость на 6). Если одновременно верны утверждения $B \Rightarrow A$ и $A \Rightarrow B$, т.е. $A \Leftrightarrow B$, то A называется *необходимым и достаточным условием* для B. Например, для делимости числа на 6 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и 3, ибо «делимость на 2 и 3 $\Leftrightarrow$ делимость на 6».

Таким образом, необходимые условия — те, без которых рассматриваемое утверждение заведомо не может быть верным, а достаточные условия — те, при выполнении которых это утверждение заведомо верно. Выражение «необходимо и достаточно», можно заменить равносильными выражениями «тогда и только тогда», «если и только если», «в том и только в том случае». Необходимые и достаточные условия обладают в математике большой познавательной ценностью.

Математика играет важную роль в естественно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Математика является не только *мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки,* но также и *элементом общей культуры.* Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного экономиста.

Основы высшей математики были разработаны в трудах выдающихся ученых: математика и механика Древней Греции *Архимеда* (287—212 гг. до нашей эры); французского философа и математика *Р. Декарта* (1596—1650); английского физика и математика *И. Ньютона* (1643—1727); немецкого философа, математика и физика *Г. Лейбница* (1646—1716); математика, механика и физика *Л. Эйлера* (1707—1783); французского математика и механика *Ж. Лагранжа* (1736—1813); немецкого математика *К. Гаусса* (1777—1855); французского математика *О. Коши* (1789—1857) и многих других крупнейших ученых.

Большой вклад в развитие математики внесли выдающиеся русские математики — *Н.И. Лобачевский* (1792—1856), М.В. *Остроградский* (1801—1861), *П.Л. Чебышев* (1821—1894), *А.А. Марков* (1856—1922), *А.М. Ляпунов* (1857—1918) и др.

Современная российская математическая школа занимает передовое место в мировой математической науке благодаря трудам знаменитых математиков: А.Д. Александрова, П.С. Александрова, В.И. Арнольда, С.Н. Бернштейна, Н.Н. Боголюбова, И.Н. Векуа, И.М. Виноградова, В.М. Глушкова, Л.В. Канторовича, М.В. Келдыша, А.Н. Колмогорова, М.А. Лаврентьева, Ю.В. Линника, А.И. Мальцева, П.С. Новикова, Ю.В. Прохорова, В.И. Смирнова, С.Л. Соболева, А.Н. Тихонова и многих других.

Раздел Первый

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Глава 1

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Основные сведения о матрицах

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики — *матричная алгебра* — имеют чрезвычайно важное значение для экономистов. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное — компактной матричной форме.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C, ..., а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i — номер строки, j — номер столбца.

Например, матрица

$$\underset{m \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.1)}$$

или, в сокращенной записи, $A = (a_{ij})$; $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Например,

$$\underset{2 \times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы: [ ], $\|\ \|$.

Две матрицы A и B одного размера называются *равными,* если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, таблица распределения ресурсов по отдельным отраслям экономики (усл. ед.)

Ресурсы	Отрасли экономики	
	промышленность	сельское хозяйство
Электроэнергия	5,3	4,1
Трудовые ресурсы	2,8	2,1
Водные ресурсы	4,8	5,1

может быть записана в компактной форме в виде матрицы распределения ресурсов по отраслям:

$$\underset{3\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 5{,}3 & 4{,}1 \\ 2{,}8 & 2{,}1 \\ 4{,}8 & 5{,}1 \end{pmatrix}.$$

В этой записи, например, матричный элемент $a_{11} = 5{,}3$ показывает, сколько электроэнергии потребляет промышленность, а элемент $a_{22} = 2{,}1$ — сколько трудовых ресурсов потребляет сельское хозяйство.

Виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей* (*вектором*)*-строкой*, а из одного столбца — *матрицей* (*вектором*)*-столбцом:* $A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ — матрица-строка;

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец.}$$

Матрица называется *квадратной* n-го порядка, если число ее строк равно числу столбцов и равно n.

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки ($i = j$), называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}.

Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется *диагональной.* Например,

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$ — диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется *единичной* матрицей n-го порядка, она обозначается буквой E.

Например, $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ — единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется *нулевой*, или *нуль-матрицей,* если все ее элементы равны нулю:

$$\underset{m\times n}{\mathbf{0}}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

1.2. Операции над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые − специфические.

1. Умножение матрицы на число. *Произведением матрицы A на число* λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda\, a_{ij}$ для $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Например, если $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, то $5A=\begin{pmatrix}10 & 20\\ 15 & 10\end{pmatrix}$.

С л е д с т в и е. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix}20 & 12 & 6\\ 52 & 2 & 0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}10 & 6 & 3\\ 26 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0 \cdot A = \mathbf{0}$.

2. Сложение матриц. *Суммой двух матриц A и B* одинакового размера $m\times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix},\ C=A+B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 4\\ 3 & 10 & 7\end{pmatrix}.$$

В частном случае $A + \mathbf{0} = A$.

3. Вычитание матриц. *Разность двух матриц* одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

4. Умножение матриц. *Умножение матрицы A на матрицу B* определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй[1]. Тогда *произведением матриц* $\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj},\quad i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n.$$

▷ **Пример 1.1.** Вычислить произведение матриц $A\cdot B$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $\underset{2\times 3}{A}\cdot\underset{3\times 3}{B}=\underset{2\times 3}{C}$.

2. Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

$$C=\begin{pmatrix}1(-1)+0\cdot 5+2(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1\\ 3(-1)+1\cdot 5+0(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 1\end{pmatrix}.$$

Получаем $C=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix}$. ▶

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами (что следует из определений этих операций):

1) $A + B = B + A$.
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3) $(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
4) $A(B + C) = AB + AC$.
5) $(A + B)C = AC + BC$.
6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
7) $A(BC) = (AB)C$.

---

[1] В этом случае матрица A называется *согласованной* с матрицей B.

Однако имеются и специфические свойства матриц. Так, операция умножения матриц имеет некоторые отличия от умножения чисел:

а) Если произведение матриц AB существует, то после перестановки сомножителей местами произведения матриц BA может и не существовать. Действительно, в примере **1.1** получили произведение матриц $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 3}$, а произведения $B_{3\times 3}\cdot A_{2\times 3}$ не существует, так как число столбцов первой матрицы не совпадает с числом строк второй матрицы.

б) Если даже произведения AB и BA существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.

▷ **Пример 1.2.** Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$;

$$B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}=D_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$ т.е. $AB\neq BA$. ▶

в) В случае, когда оба произведения AB и BA существуют и оба — матрицы одинакового размера (это возможно только при умножении квадратных матриц A и B одного порядка), *коммутативный* (*переместительный*) *закон умножения, вообще говоря, не выполняется,* т.е. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

▷ **Пример 1.3.** Найти произведения матриц AB и BA, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. $AB=\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}$; т.е. $AB\neq BA$. ▶

В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы A n-го порядка на единичную матрицу E того же порядка, причем это произведение равно A:

$$AE=EA=A.$$

$$A_{n\times n}\cdot E_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 9 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}=A.$$

$$E_{n\times n}\cdot A_{n\times n}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 9 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}=A.$$

■

Таким образом, единичная матрица играет при умножении матриц ту же роль, что и число 1 при умножении чисел.

г) Произведение двух ненулевых матриц может равняться нулевой матрице, т.е. из того, что $A\cdot B=\mathbf{0}$, не следует, что $A=\mathbf{0}$ или $B=\mathbf{0}$. Например,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\neq\mathbf{0};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq\mathbf{0},\text{ но }AB=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

5. Возведение в степень. *Целой положительной степенью* $A^m\,(m>1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е.

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots A}_{m\text{ раз}}.$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

По определению полагают $A^0=E,\ A^1=A.$ Нетрудно показать, что $A^m\cdot A^k=A^{m+k},\ \left(A^m\right)^k=A^{mk}.$

▷ **Пример 1.4.** Найти A^2, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$

Р е ш е н и е. $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}.$

Обращаем внимание на то, что из равенства $A^m=\mathbf{0}$ еще не следует, что матрица $A=\mathbf{0}$. ▶

6. Транспонирование матрицы — переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' называется *транспонированной* относительно матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1.2)}$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица A' имеет размер $n \times m$.

Например, $A_{2\times3}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $A'_{3\times2}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например, A^{T}.

Свойства операции транспонирования:

1) $(A')' = A$. 3) $(A+B)' = A' + B'$.

2) $(\lambda A)' = \lambda A'$. 4) $(AB)' = B'A'$.

Рекомендуем читателю доказать их самостоятельно.

Рассмотренные выше операции над матрицами позволяют упростить решения некоторых экономических задач.

► **Пример 1.5.** Предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1, P_2, P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, где каждый элемент $a_{ij} (i=1, 2, 3;\ j=1, 2)$ показывает, сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C=(100\ \ 80\ 130)$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) — матрицей-столбцом $B=\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Р е ш е н и е. Затраты 1-го сырья составляют $S_1 = 2\cdot100 + 5\cdot80 + 1\cdot130 = 730$ ед. и 2-го — $S_2 = 3\cdot100 + 2\cdot80 + 4\cdot130 = 980$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение $S = C \cdot A = (\ 100\ \ 80\ \ 130)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (730\quad 980).$

Тогда общая стоимость сырья $Q = 730 \cdot 30 + 980 \cdot 50 = 70900$ ден. ед. может быть записана в матричном виде $Q = S \cdot B = (CA)B = (70900)$. Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т.е. матрицу $R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$, а затем общую стоимость сырья

$$Q = CR = C \cdot (AB) = (100\ \ 80\ \ 130)\begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (70900). \ \blacktriangleright$$

На данном примере мы убедились в выполнении свойства 7 (см. с. 13) — ассоциативного закона произведения матриц: $(CA)B = C(AB)$.

1.3. Определители квадратных матриц

Необходимость введения определителя — числа, характеризующего квадратную матрицу A, — тесно связана с решением систем линейных уравнений (см. гл. 2). Определитель матрицы A обозначается $|A|$ или Δ.

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или *определителем первого порядка*, называется элемент a_{11}:

$\Delta_1 = |A| = a_{11}$. Например, пусть $A = (3)$, тогда $\Delta_1 = |A| = 3$.

Определителем матрицы второго порядка $A = \left(a_{ij}\right)$, или *определителем второго порядка*, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются *членами определителя* второго порядка. Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$, или *определителем третьего порядка,* называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad \textbf{(1.4)}$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу (1.4), легко запомнить, пользуясь схемой (рис. 1.1), которая называется *правилом треугольников* или *правилом Сарруса.*

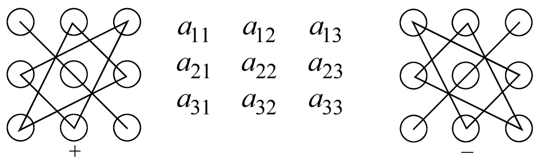


Рис. 1.1

▷ **Пример 1.6.** Вычислить определитель третьего порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. $\Delta = +1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 -$

$-1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$. ▶

Для того чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потребуются некоторые дополнительные понятия.

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Из общего числа n^2 элементов этой матрицы выберем набор, содержащий n элементов, таким образом, чтобы в него входило по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Например, набор элементов $(a_{11}a_{22}\ldots a_{nn})$ или $(a_{n1}a_{n-1,2}\ldots a_{1n})$ соответственно главной и побочной диагоналей матрицы.

Любой такой набор можно упорядочить, записав сначала элемент из 1-й строки, затем из 2-й и т.д., т.е.

$$(a_{1j_1},\ a_{2j_2},\ \ldots,\ a_{nj_n}). \qquad \textbf{(1.5)}$$

Номера столбцов $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ образуют при этом *перестановку* J из n чисел: 1, 2, …, n. Всего существует $n!$[1] различных перестановок из n натуральных чисел.

Введем понятие *беспорядка*, или *инверсии*, в перестановке J. Это наличие пары чисел, в которой бóльшее число предшествует меньшему. Например, в перестановке из трех чисел $J = (2;$ $1;\ 3)$ имеется одна инверсия (2; 1), а в перестановке $J = (3;\ 2;\ 1)$ — три: (3; 2), (3; 1), (2; 1). Обозначим через $r(J)$ количество инверсий в перестановке J.

Возвращаясь к наборам (1.5) из элементов матрицы A, мы можем каждому такому набору поставить в соответствие произведение его элементов:

$$a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n} \qquad \textbf{(1.6)}$$

и число $r(J)$, равное количеству инверсий в перестановке $J =$ $= (j_1;\ j_2;\ \ldots;\ j_n)$ из номеров соответствующих столбцов.

Определение. ***Определителем*** *квадратной* ***матрицы n-го порядка, или определителем n-го порядка,*** *называется число*[2], *равное алгебраической сумме $n!$ членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем знак каждого члена определяется как* $(-1)^{r(J)}$, *где* $r(J)$ *— число инверсий в перестановке J из номеров столбцов элементов матрицы, если при этом номера строк записаны в порядке возрастания:*

---

[1] См. сноску на с. 158.

[2] Еще раз обращаем внимание на то, что определитель — это число, характеризующее квадратную матрицу, и его не следует путать с матрицей — таблицей чисел.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} = \sum_{(J)} (-1)^{r(J)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}, \quad \textbf{(1.7)}$$

где сумма берется по всем перестановкам J. Проверим, например, что при $n = 3$ мы получаем введенный ранее определитель третьего порядка (1.4):

$$\Delta_3 = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + \\ + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32},$$

т.е. то же число, что и по формуле (1.4).

Заметим, что с ростом n резко увеличивается число членов определителя ($n!$), поэтому даже для $n = 4$ использование формулы (1.7) весьма трудоемко (получим 24 слагаемых!).

На практике при вычислении определителей высоких порядков используют другие формулы. Для их рассмотрения необходимо ввести новые понятия.

Пусть дана квадратная матрица A n-го порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы $(n - 1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров $(n - 1)$-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad \textbf{(1.8)}$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ — четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i + j)$ — нечетное число.

Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}; A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

▷ **Пример 1.7.** Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы (из примера **1.6**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \; A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \; A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \; A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \; A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3. \blacktriangleright$$

Важное значение для вычисления определителей имеет следующая теорема.

Теорема Лапласа[1]**.** *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки* (*столбца*) *на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is} \qquad \textbf{(1.9)}$$

(разложение по элементам i-й строки; $i = 1, 2, ..., n$);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj} \qquad \textbf{(1.10)}$$

(разложение по элементам j-го столбца; $j = 1, 2, ... , n$).

□ Убедимся в справедливости теоремы Лапласа на примере определителя матрицы третьего порядка. Разложим его вначале по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

---

[1] Точнее данная теорема является частным случаем теоремы Лапласа.

После преобразований (представляем их сделать читателю) нетрудно убедиться в том, что полученное выражение совпадает с определением (1.4). Аналогичный результат получаем разложением определителя матрицы по любой строке или столбцу. ■

▷ **Пример 1.8.** Вычислить определитель треугольной матрицы[1]:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Раскладывая по первому столбцу, получаем:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

$$= 5\cdot(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 5\cdot(-1)\cdot 3\cdot 1 + 0 = -15. \quad ▶$$

На частном примере мы убедились в том, что *определитель треугольной* (*и, очевидно, диагональной*) *матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Значение теоремы Лапласа состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению более простых определителей $(n-1)$-го порядка.

1.4. Свойства определителей

1. *Если какая-либо строка* (*столбец*) *матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен 0.*

2. *Если все элементы какой-либо строки* (*столбца*) *матрицы умножить на число* λ*, то ее определитель умножится на это число* λ.

□ Пусть определитель исходной матрицы равен Δ. Для определенности первую строку матрицы умножим на λ, получим новый определитель Δ', который разложим по элементам первой строки:

---

[1] Квадратная матрица называется *треугольной,* если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}A_{11} + \lambda a_{12}A_{12} + \ldots + \lambda a_{1n}A_{1n} =$$

$$= \lambda(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}) = \lambda\Delta. \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. За знак определителя можно выносить общий множитель элементов любой строки или столбца в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех ее элементов.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$

$= 2\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, но

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. *При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется:* $|A'| = |A|$.

4. *При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.*

□ Предположим вначале, что переставлены две соседние строки матрицы: i и $i+1$. Разложим определитель исходной матрицы Δ по элементам i-й строки, а определитель новой матрицы (с переставленными строками) Δ' — по элементам (i+1)-й строки. Разложения будут отличаться только знаком, так как в формуле (1.9) для Δ' каждое алгебраическое дополнение будет иметь противоположный знак (множители $(-1)^{i+j}$ сменятся на множители $(-1)^{i+1+j}$, поэтому $\Delta' = -\Delta$.

Если переставить не соседние строки, а, скажем, i-ю и (i + k)-ю, то такую перестановку можно представить как последовательное смещение i-й строки на k строк вниз (при этом каждый раз знак определителя меняется), а (i + k)-й строки на (k − 1) вверх, что тоже сопровождается (k − 1) изменением знака, т.е. знак поменяется нечетное число (2k − 1) раз: $\Delta' = -\Delta$.

Доказательство для столбцов аналогично. ■

5. *Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки* (*столбца*)*, то ее определитель равен 0.*

□ Действительно, переставим эти строки (столбцы). С одной стороны, определитель не изменится, но, с другой стороны, по свойству 4 поменяет знак, т.е. $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$. ■

6. *Если элементы двух строк* (*столбцов*) *матрицы пропорциональны, то ее определитель равен 0.*

□ Пусть для определенности пропорциональны первая и вторая строки. Тогда, вынося коэффициент пропорциональности λ, получаем по свойству 2: $\Delta' = \lambda \cdot \Delta$, где Δ имеет две одинаковые строки и по свойству 5 равен 0. ■

7. *Сумма произведений элементов какой-либо строки* (*столбца*) *матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки* (*столбца*) *этой матрицы равна 0, т.е.*

$$\sum_{S=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0\text{, } \textit{при } i \neq j\ . \qquad \mathbf{(1.11)}$$

□ Рассмотрим квадратную матрицу A и вспомогательную матрицу $\overline{A}$, полученную из матрицы A заменой j-й строки на i-ю:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

т.е. матрица $\overline{A}$ имеет две одинаковые строки, поэтому согласно свойству 5 ее определитель равен 0. Вычисляя его разложением по элементам j-й строки, получаем:

$$\left|\overline{A}\right| = \sum_{S=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0 \ \ (i \neq j). \ ■$$

З а м е ч а н и е. Объединяя результат теоремы Лапласа и свойство 7, получаем:

$$\sum_{S=1}^{n} a_{is} A_{js} = \begin{cases} |A| & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases} \qquad \mathbf{(1.12)}$$

8. *Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки* (*столбца*) *матрицы прибавить элементы другой* *строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.*

□ Пусть для определенности к элементам i-й строки матрицы прибавим элементы j-й строки, умноженные на λ $(i \neq j)$. Тогда первая строка матрицы имеет вид: $[(a_{i1} + \lambda a_{j1})(a_{i2} + \lambda a_{j2}) \ldots (a_{in} + \lambda a_{jn})]$. Определитель полученной матрицы вычислим разложением по элементам i-й строки:

$$\Delta' = (a_{i1} + \lambda a_{j1})A_{i1} + (a_{i2} + \lambda a_{j2})\ A_{i2} + \ldots + (a_{in} + \lambda a_{jn})A_{in},$$

где A_{is} — алгебраические дополнения элементов i-й строки исходной матрицы $(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ i \neq j)$. Раскроем скобки и получим после преобразования:

$$\Delta' = \sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{is} + \lambda \sum_{s=1}^{n} a_{js} A_{is}. \quad (i \neq j).$$

Используя формулу (1.12), получаем, что первая сумма равна определителю исходной матрицы, а вторая — 0, т.е. $\Delta' = \Delta$. ■

9. *Сумма произведений произвольных чисел b_1, b_2, ..., b_n на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа* $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Свойство вытекает непосредственно из теоремы Лапласа.

10. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:* $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$; A и B — матрицы n-го порядка.

Замечание. Из свойства 10 следует, что даже если $AB \neq BA$, то $|AB| = |BA|$.

Перечисленные свойства определителей позволяют существенно упростить их вычисление, особенно для определителей высоких порядков. При вычислении определителей целесообразно так преобразовать исходную матрицу с помощью свойств 1—9, чтобы преобразованная матрица имела строку (или столбец), содержащую как можно больше нулей, а потом найти определитель разложением по этой строке (столбцу).

▷ **Пример 1.9.** Вычислить определитель четвертого порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в 0. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (−4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$|A|=\begin{vmatrix}4&6&-2&4\\1&2&-3&1\\4&-2&1&0\\6&4&4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12&2&-2&4\\13&-4&-3&1\\0&0&1&0\\-10&12&4&6\end{vmatrix}=1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}12&2&4\\13&-4&1\\-10&12&6\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью теоремы Лапласа, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элементы 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (−13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A|=\begin{vmatrix}12&2&4\\13&-4&1\\-10&12&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-40&18&4\\0&0&1\\-88&36&6\end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A|=1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-40&18\\-88&36\end{vmatrix}=(-1)(-8)\cdot 18\cdot\begin{vmatrix}5&1\\11&2\end{vmatrix}=-144.$$ ►

1.5. Обратная матрица

Для каждого числа $a\neq 0$ существует обратное число a^{-1} такое, что произведение $a\cdot a^{-1}=1$. Для квадратных матриц тоже вводится аналогичное понятие.

Определение. *Матрица A^{-1} называется* ***обратной по отношению к квадратной матрице*** *A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:*

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E. \qquad \textbf{(1.13)}$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если $a \neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования числа a^{-1}, то для существования матрицы A^{-1} таким условием является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то такая квадратная матрица называется *невырожденной,* или *неособенной;* в противном случае (при $|A| = 0$) — *вырожденной,* или *особенной.*

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). *Обратная матрица* A^{-1} *существует* (*и единственна*) *тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.*

□ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть матрица A имеет обратную A^{-1}, т.е $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$. По свойству 10 определителей имеем $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$, т.е. $|A| \neq 0$ и $|A^{-1}| \neq 0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $|A| \neq 0$. Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка $\tilde{A}$, называемую *присоединенной*[1], элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы A', транспонированной к A: $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Тогда элементы произведения матриц $\tilde{A} \cdot A = B$ определяются по правилу умножения матриц:

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \tilde{a}_{is} a_{sj} = \sum_{s=1}^{n} A_{si} \cdot a_{sj} = \begin{cases} |A| & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \text{ (см. формулу 1.12).}$$

Поэтому матрица B является диагональной, элементы ее главной диагонали равны определителю исходной матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & |A| \end{pmatrix}.$$

Аналогично доказывается, что произведение A на $\tilde{A}$ равно той же матрице B: $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = B$. Отсюда следует, что если в качестве обратной матрицы взять матрицу

[1] В литературе присоединенную матрицу называют также *взаимной,* или *союзной.*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} \quad (|A| \neq 0), \qquad \textbf{(1.14)}$$

то произведения $A^{-1} \cdot A$ и $A \cdot A^{-1}$ равны единичной матрице E n-го порядка: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot B = E.$

Докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что существуют еще матрицы X и Y такие, что $X \neq A^{-1}$ и $Y \neq A^{-1}$, где матрица A^{-1} получена по формуле (1.14), и выполняются равенства: $AX = E$ и $YA = E$. Тогда, умножая на A^{-1} слева первое из них, получаем: $A^{-1}AX = A^{-1}E$, откуда $EX = A^{-1}E$, т.е. $X = A^{-1}$. Аналогично, умножая второе равенство на A^{-1} справа, получаем $Y = A^{-1}$. Единственность доказана. ■

Алгоритм вычисления обратной матрицы: 1^0. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A − вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A − невырожденная и обратная матрица существует.

2^0. Находим матрицу A', транспонированную к A.

3^0. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij} = A_{ji} (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n; j = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$ и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}$ $(i = {}$ $= 1,\ 2,\ \dots,\ n; \quad j = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$.

4^0. Вычисляем обратную матрицу по формуле (1.14).

5^0. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ (п. 5^0 не обязателен).

▷ **Пример 1.10.** Найти матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1^0. Определитель матрицы $|A| = 5 \neq 0$ (см. пример **1.6**), т.е. матрица A — невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2^0. Находим матрицу A', транспонированную к A:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3^0. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$, учитывая, что $A'_{ij} = A_{ji}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (см. пример **1.6**).

4^0. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

5^0. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам:

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ (рекомендуем в этом убедиться самому читателю). ▶

Для невырожденных матриц выполняются следующие свойства:

1. $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$; **3.** $\left(A^m\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^m$; **5.** $\left(A^{-1}\right)' = \left(A'\right)^{-1}$.

2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$; **4.** $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

1.6. Ранг матрицы

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

В матрице A размера $m \times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные *подматрицы* k-го порядка, где $k \le \min(m;\ n)$. Определители таких подматриц называются *минорами k-го порядка матрицы A.*

Например, из матрицы $A_{3\times4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Определение. ***Рангом*** *матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.*

Ранг матрицы A обозначается rang *A, или r* (*A*).

Из определения следует: а) *ранг матрицы* $A_{m\times n}$ *не превосходит меньшего из ее размеров, т.е.* $r(A)\le \min(m;\ n)$;

б) $r(A)=0$ *тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е.* $A=\mathbf{0}$;

в) *для квадратной матрицы n-го порядка* $r(A) = n$ *тогда и только тогда, когда матрица* A *— невырожденная.*

▷ **Пример 1.11.** Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -8 & 0\\ 2 & 0 & -4 & 0\\ 3 & 0 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Матрица A имеет четвертый порядок, поэтому $r(A)\le 4$. Однако $|A|=0$, так как матрица A содержит нулевой столбец, поэтому $r(A)\le 3$. Все подматрицы третьего порядка тоже содержат нулевой столбец и поэтому имеют нулевые определители, значит $r(A)\le 2$. Все подматрицы второго порядка либо имеют нулевой столбец (второй или четвертый), либо имеют пропорциональные столбцы (первый и третий), поэтому тоже имеют нулевые определители; таким образом $r(A)\le 1$. Поскольку матрица A содержит ненулевые элементы, т.е. невырожденные подматрицы первого порядка, то $r(A) = 1$. ▶

▷ **Пример 1.12.** Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Для матрицы $A_{3\times 4}$ $r(A)\le \min(3;\ 4) = 3$.

Проверим, равен ли ранг 3-м, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т.е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A)\le 2$. Так как существует ненулевой минор второго порядка, например, $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7\ne 0$, то $r(A) = 2$. ▶

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы.

Назовем ***элементарными преобразованиями*** матрицы следующие:

1) *Отбрасывание нулевой строки* (*столбца*).

2) *Умножение всех элементов строки* (*столбца*) *матрицы на число, не равное нулю.*

3) *Изменение порядка строк* (*столбцов*) *матрицы.*

4) *Прибавление к каждому элементу одной строки* (*столбца*) *соответствующих элементов другой строки* (*столбца*)*, умноженных на любое число.*

5) *Транспонирование матрицы.*

Теорема. *Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.*

□ При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т.е. ее ранг не изменяется. ■

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Матрица A называется *ступенчатой,* если она имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(1.15)}$$

где $a_{ii} \neq 0,\ \ i=1, 2, \ldots, r;\ \ r \leq k$.

З а м е ч а н и е. Условие $r \leq k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор r-го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Покажем на примере *алгоритм вычисления ранга матрицы* с помощью элементарных преобразований.

▷ **Пример 1.13.** Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1^0. Если $a_{11}=0$, то при перестановке строк или столбцов добиваемся того, что $a_{11}\neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы (см. ниже).

2^0. Если $a_{11}\neq 0$, то умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11}=0$, $-a_{31}/a_{11}=2$, $-a_{41}/a_{11}=1$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й[1], 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю[2]:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3^0. Если в полученной матрице $a_{22}\neq 0$ (у нас $a_{22}=-1\neq 0$), то умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно, на $-a_{32}/a_{22}=-3$, $-a_{42}/a_{22}=-3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например,

---

[1] В данном примере $a_{21}=0$, поэтому вторая строка не меняется.

[2] Знак ~ означает равенство рангов матриц.

$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$ Поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и данной матрицы равен 2. ▶

Для рангов матриц справедливы следующие соотношения:

1) $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$, 2) $r(A+B) \geq \left| r(A) - r(B) \right|$,

3) $r(AB) \leq \min\left\{ r(A); r(B) \right\}$, 4) $r(A'A) = r(A)$,

5) $r(AB) = r(A)$, если B — квадратная матрица и $|B| \neq 0$,

6) $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$, где n − число столбцов матрицы A или строк матрицы B.

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) ее строк или столбцов[1].

В матрице A обозначим ее строки следующим образом:

$e_1 = (a_{11}\, a_{12} ... a_{1n})$, $e_2 = (a_{21} a_{22} ... a_{2n})$,

$e_m = (a_{m1} a_{m2} ... a_{mn})$.

Две строки матрицы называются *равными*, если равны их соответствующие элементы: $e_k = e_s$, если $a_{kj} = a_{sj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Арифметические операции над строками матрицы (умножение строки на число, сложение строк) вводятся как операции, проводимые поэлементно:

$$\lambda_{e_k} = (\lambda a_{k_1} \lambda a_{k_2} ... \lambda a_{k_n});$$

$$e_k + e_s = [(a_{k1} + a_{s1})(a_{k2} + a_{s2}) ... (a_{kn} + a_{sn})].$$

Строка *е* называется *линейной комбинацией* строк $e_1, e_2, \ldots, e_s$ матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа:

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_s e_s, \qquad \textbf{(1.16)}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — любые числа.

Строки матрицы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

[1] В дальнейшем материал излагается для строк матрицы, для столбцов матрицы изложение аналогично.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m = \mathbf{0}, \qquad \textbf{(1.17)}$$

где $\mathbf{0}$ = (0 0...0).

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

□ Действительно, пусть для определенности в формуле (1.17) $\lambda_m \neq 0$, тогда

$$e_m = \left(-\lambda_1/\lambda_m\right)e_1 + \left(-\lambda_2/\lambda_m\right)e_2 + \ldots + \left(-\lambda_{m-1}/\lambda_m\right)e_{m-1}, \text{ или}$$

$$e_m = \tilde{\lambda}_1 e_1 + \tilde{\lambda}_2 e_2 + \ldots + \tilde{\lambda}_{m-1} e_{m-1}, \qquad \textbf{(1.18)}$$

где $\tilde{\lambda}_i = (\lambda_i / \lambda_m)$; i = 1, 2, ..., m−1.

Таким образом, строка e_m является линейной комбинацией остальных строк. ■

Если линейная комбинация строк (1.17) равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты λ_i равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то строки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются *линейно независимыми.*

Теорема о ранге матрицы. *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все остальные ее строки* (*столбцы*).

□ Пусть матрица A размера $m \times n$ имеет ранг r $\left(r \leq \min(m;n)\right)$. Это означает, что существует отличный от нуля минор r-го порядка. Всякий ненулевой минор r-го порядка будем называть *базисным минором.* Пусть для определенности это минор

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда строки матрицы $e_1, e_2, \ldots, e_r$ линейно независимы. Действительно, предположим противное, т.е. одна из этих строк, например e_r, является линейной комбинацией остальных:

$$e_r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{r-1} e_{r-1}.$$

Вычтем из элементов r-й строки элементы 1-й строки, умноженные на λ_1, элементы 2-й строки, умноженные на λ_2, и т.д., наконец, элементы (r−1)-й строки, умноженные на λ_{r-1}. На основании свойства 8 (см. § 1.4) при таких преобразованиях матрицы ее определитель Δ не изменится, но так как теперь r-я строка будет состоять из одних нулей, то $\Delta = 0$ — противоречие, и наше предположение о том, что строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ матрицы линейно зависимы, неверно.

Строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ назовем *базисными*.

Покажем, что любые $(r+1)$ строк матрицы линейно зависимы, т.е. любая строка выражается через базисные.

Рассмотрим минор $(r+1)$-го порядка, который получается при дополнении рассматриваемого минора элементами еще одной строки i и столбца j:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Этот минор равен нулю, так как ранг матрицы равен r, поэтому любой минор более высокого порядка равен нулю.

Раскладывая его по элементам последнего (добавленного) столбца, получаем $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}A_{ij} = 0$, где последнее алгебраическое дополнение A_{ij} совпадает с базисным минором Δ и поэтому отлично от нуля, т.е. $A_{ij} \neq 0$.

Разделив последнее равенство на A_{ij}, можем выразить элемент a_{ij} как линейную комбинацию:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{r} \lambda_s a_{sj}\,, \qquad \textbf{(1.19)}$$

где $\lambda_s = a_{sj} / A_{ij}$.

Фиксируем значение i ($i > r$) и получаем, что для любого j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ элементы i-й строки e_i линейно выражаются через элементы строк $e_1, e_2, \ldots, e_r$, т.е. i-я строка есть линейная комбинация базисных: $e_i = \sum\limits_{s=1}^{r} \lambda_s e_{sj}$. ■

Теорема о ранге матрицы играет принципиальную роль в матричном анализе, в частности при исследовании систем линейных уравнений.

УПРАЖНЕНИЯ

1.14. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&4\end{pmatrix}$. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей $B=\begin{pmatrix}10&15\end{pmatrix}$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100 единиц продукции первого вида, 200 единиц продукции второго вида и 150 единиц продукции третьего вида?

1.15. Вычислить матрицу $D=(AB)'-C^2$, где

$$A=\begin{pmatrix}3&4&2\\1&0&5\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\\0&5\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}.$$

1.16. Найти произведение матриц ABC, где

$$A=\begin{pmatrix}4&3\\7&5\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-28&93\\38&-126\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}.$$

1.17. Вычислить матрицу $D=ABC-3E$, где

$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&0&2\\4&5&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $C=(2\quad 0\quad 5)$; E — единичная матрица.

1.18. Вычислить A^3, если $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\3&-1&2\\2&-1&0\end{pmatrix}$.

Вычислить определители:

1.19. $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-3&1\\4&-1&-5\end{vmatrix}$. **1.20.** $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$. **1.21.** $\begin{vmatrix}0&6&3&5&1\\-3&2&4&1&0\\5&1&4&3&2\\-3&8&7&6&1\\1&0&3&4&0\end{vmatrix}$.

1.22. Определить, имеет ли матрица A обратную, и если имеет, то вычислить ее:

$$A=\begin{pmatrix}4&-8&-5\\-4&7&-1\\-3&5&1\end{pmatrix}.$$

1.23. Вычислить матрицу $B = 11 \cdot (A^{-1})' + A'$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.24. При каких значениях матрица A не имеет обратной

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти ранги матриц:

1.25. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

1.26. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

1.27. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1.28. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1.29. Определить максимальное число линейно независимых строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Глава 2

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

К системам линейных уравнений приводит множество прикладных, в том числе и экономических задач.

2.1. Основные понятия и определения

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид[1]:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad \textbf{(2.1)}$$

где $a_{ij}, b_i \left(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$ — произвольные числа, называемые соответственно *коэффициентами при переменных* и *свободными членами* уравнений.

В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \left(i = 1, 2, \ldots, m\right). \qquad \textbf{(2.2)}$$

Решением системы (2.1) называется такая совокупность n чисел $\left(x_1 = k_1,\ x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n\right)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. Например, система уравнений

[1] В линейной алгебре обычно обозначают переменные одной буквой с соответствующими индексами, т.е. x_1, x_2, x_3, ..., вместо принятых в школе обозначений $x,\ y,\ z,\ \ldots$, которые в данном случае не очень удобны.

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ — совместная и определенная, так как имеет единственное решение (10; 0); система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ — несовместная; а система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ — совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а точнее бесконечное множество решений ($x_1 = c$, $x_2 = 10 - 2c$), где c — любое число.

Две системы уравнений называются *равносильными*, или *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений. С помощью элементарных преобразований системы уравнений, рассмотренных в гл. 1 применительно к матрицам (например, умножение обеих частей уравнений на числа, не равные нулю; сложение уравнений системы), получается система (2.1), равносильная данной.

Запишем систему (2.1) в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A — *матрица коэффициентов при переменных,* или *матрица системы*, X — *матрица-столбец переменных; B — матрица-столбец свободных членов.*

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, то их произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

есть матрица-столбец. Элементами полученной матрицы являются левые части системы (2.1). На основании определения равенства матриц систему (2.1) можно записать в виде:

$$AX = B. \tag{2.3}$$

2.2. Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера

Пусть число уравнений системы (2.1) равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является *квадратной*, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется *определителем системы*.

Рассмотрим решение **системы двух уравнений** с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \qquad \textbf{(2.4)}$$

в которой хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля.

Для решения этой системы исключим переменную x_2, умножив первое уравнение на a_{22}, второе — на $(-a_{12})$ и сложив их. Затем исключим переменную x_1, умножив первое уравнение на $(-a_{21})$, второе — на a_{11} и также сложив их. В результате получим систему:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_2. \end{cases} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Выражение в скобках есть определитель системы

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Обозначив

$$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

система (2.5) примет вид:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1; \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2. \end{cases} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Из полученной системы следует, что если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система (2.4) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Если $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ (или $\Delta_2 \neq 0$), то система (2.4) несовместная, так как в этом случае приводится к виду: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 = \Delta_1; \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_2. \end{cases}$

Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система (2.4) неопределенная и имеет бесконечное множество решений, так как в этом случае приводится к виду: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0; \\ 0 \cdot x_2 = 0. \end{cases}$

Для получения решения системы (2.1) при $m = n$ **в общем виде** предположим, что квадратная матрица системы $A_{n \times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0.$ В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая *слева* обе части матричного равенства (2.3) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$ Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Теорема Крамера. *Пусть* Δ *— определитель матрицы системы A, а* Δ_j *— определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если* $\Delta \neq 0$*, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad \textbf{(2.8)}$$

Формулы (2.8) получили название *формул Крамера.*

□ В соответствии с (1.14) обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A},$ где $\tilde{A}$ — матрица, присоединенная к матрице A. Так как элементы матрицы $\tilde{A}$ есть алгебраические дополнения элементов матрицы A', транспонированной к *A,* то запишем равенство (2.7) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $|A|=\Delta$, получим после умножения матриц

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\ldots+b_nA_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\ldots+b_nA_{nn} \end{pmatrix},$$ откуда следует, что для

любого $j (j=1, 2, \ldots, n)$

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{1j}+ \quad b_2A_{2j}+ \quad \ldots \quad +b_nA_{nj}\right).$$

На основании свойства 9 определителей (см. § 1.4) $b_1A_{1j}+$ $+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}=\Delta_j$, где Δ_j — определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j-го столбца ($j=1, 2, \ldots, n$) столбцом свободных членов. Следовательно, $x_j=\dfrac{\Delta_j}{\Delta}$. ■

Заметим, что фактически формулы Крамера были получены нами в частном случае при решении системы (2.4) $n=2$ уравнений с двумя переменными.

► **Пример 2.1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Р е ш е н и е. а) Обозначим

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система имеет вид: $AX=B$. Найдем определитель $|A|=5$ (см. пример **1.10**). Так как $|A|\neq 0$, то матрица A — невырожденная, и существует обратная матрица A^{-1}. Матрицу A^{-1} находим по алгоритму, приведенному в § 1.5. Получим (см. пример **1.10**):

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$ Теперь по формуле (**2.7**)

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 11\\ 8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 1\end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

б) Найдем определитель системы $\Delta=|A|=5$ (см. п. а). Так как $\Delta\neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 11 & 1 & 1\\ 8 & 1 & 2\end{vmatrix}=20;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 11 & 1\\ 1 & 8 & 2\end{vmatrix}=10;\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}=5$$

(рекомендуем читателю вычислить самостоятельно).

Теперь по формулам Крамера (2.8)

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{5}=4;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{10}{5}=2;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{5}{5}=1,$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

В конце решения системы (любым способом) рекомендуем сделать проверку, подставив найденные значения в уравнения системы, и убедиться в том, что они обращаются в верные равенства. ▶

Существенным недостатком решения систем *n* линейных уравнений с *n* переменными по формулам Крамера и методом обратной матрицы является их большая трудоемкость, связанная с вычислением определителей и нахождением обратной матрицы. Поэтому эти методы представляют скорее теоретический интерес и на практике не могут быть использованы для решения реальных экономических задач, сводящихся часто к системам с большим числом уравнений и переменных.

2.3. Метод Гаусса

Рассмотрим решение системы (2.1) m линейных уравнений с n переменными в общем виде.

Метод Гаусса — метод последовательного исключения переменных — заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (2.1) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, чтобы $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, ..., m-му уравнению системы (2.1), исключим переменную x_1 из всех последующих уравнений, начиная со второго. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases} \tag{2.9}$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$).

Умножая второе уравнение на подходящие числа $\left(-a_{32}^{(1)} \Big/ a_{22}^{(1)},\right.$ $\left. a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}\right)$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, ..., m-му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных x_3, x_4, ..., x_{r-1}, после $(r-1)$-го шага получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \qquad \textbf{(2.10)}$$

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$. *Если хотя бы одно из чисел* $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ *не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система* (2.1) *несовместна.*

Таким образом, для любой *совместной системы числа* $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ *в системе* (2.10) *равны нулю.* В этом случае последние $m-r$ уравнений в системе (2.10) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (2.1). Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (2.10) равно числу переменных, т.е. $r = n$ (в этом случае система (2.10) имеет треугольный вид); б) $r < n$ (в этом случае система (2.10) имеет ступенчатый вид).

Переход системы (2.1) к равносильной ей системе (2.10) называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (2.10) — *обратным ходом.*

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \qquad \textbf{(2.11)}$$

называемую *расширенной матрицей системы* (2.1), ибо в нее, кроме матрицы системы A, дополнительно включен столбец свободных членов.

▷ **Пример 2.2.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, то умножая первую строку матрицы на числа (−2), (−3), (−2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй. Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, то умножая вторую строку на $\left(-7/4\right)$ и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{117}{16} & \dfrac{117}{8} \end{array}\right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на 13,5/8 = 27/16, и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3. Получим (см. последнюю матрицу) систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \quad 2x_2 + \quad 3x_3 - \quad 2x_4 = \quad 6, \\ \quad -4x_2 - \quad 10x_3 + \quad 8x_4 = \quad -14, \\ \quad\quad -8x_3 + \quad x_4 = \quad 6, \\ \quad\quad\quad -\dfrac{117}{16}x_4 = \dfrac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \dfrac{6 - x_4}{-8} = \dfrac{6+2}{-8} = -1$; из второго $x_2 = \dfrac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \dfrac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$ и из первого уравнения $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + 2(-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы (1; 2; −1; 2). ▶

▷ **Пример 2.3.** Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \quad 2x_2 - \quad x_3 = \quad 7, \\ 2x_1 - \quad 3x_2 + \quad x_3 = \quad 3, \\ 4x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 = \quad 16. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво — оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна. ▶

2.4. Система *m* линейных уравнений с *n* переменными

Ранее было установлено, что ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (см. § 1.6). Поэтому, если строки расширенной матрицы A_1, т.е. уравнения системы (2.1), линейно независимы, то ранг матрицы A_1 равен числу ее уравнений, т.е. $r = m$, если — линейно зависимы, то $r < m$.

Вопрос о разрешимости системы (2.1) в общем виде рассматривается в следующей теореме.

Теорема Кронекера—Капелли. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.*

□ Не проводя строгого доказательства теоремы, поясним его. В процессе преобразования системы уравнений (2.1) к виду (2.10), т.е. элементарных преобразований матрицы системы A и расширенной матрицы A_1, ранги этих матриц не изменяются. Ранее (см. § 2.3) было установлено, что система (2.10) совместна тогда и только тогда, когда все свободные члены $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ равны нулю. В этом случае, как нетрудно проверить, ранг матрицы и ранг расширенной матрицы системы (2.10), так же как и данной системы (2.1), совпадают (оба равны r). ■

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы.

1. *Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т.е.* $r = n$, *то система* (2.1) *имеет единственное решение.*

2. *Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т.е.* $r < n$, *то система* (2.1) *неопределенная и имеет бесконечное множество решений.*

Результаты исследования системы (2.1) приведем в виде схемы (рис. 2.1):

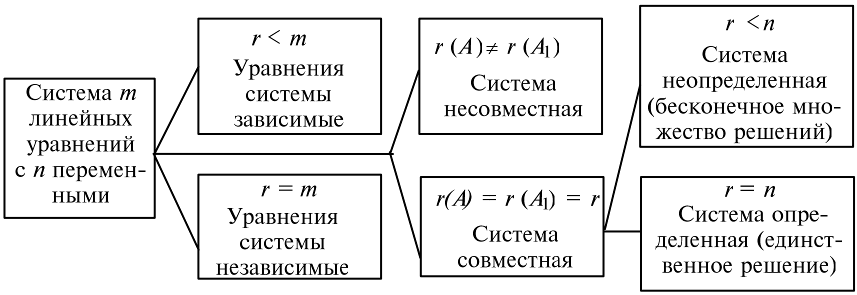


Рис. 2.1

Пусть $r < n$. r переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются *основными* (или *базисными*), если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. базисный минор) отличен от нуля. Остальные $n - r$ называются *неосновными* (или *свободными*).

Решение системы (2.1), в котором все $n - r$ неосновных переменных равны нулю, называется *базисным*.

Так как каждому разбиению переменных на основные и неосновные соответствует одно базисное решение, а число способов разбиения не превосходит числа сочетаний[1] C_n^r, то и базисных решений имеется не более C_n^r. Таким образом, *совместная система* m *линейных уравнений с* n *переменными* ($m < n$) *имеет бесконечное множество решений, среди которых базисных решений конечное число, не превосходящее* C_n^r, *где* $r \le m$.

Приведенная на рис. 2.1 схема не означает, что для решения системы (2.1) в общем случае необходимо вычислять отдельно, а затем сравнивать ранги матрицы системы A и расширенной матрицы A_1. Достаточно сразу применить метод Гаусса.

Достоинства метода Гаусса по сравнению с другими (в частности, приведенными в § 2.2):

- значительно менее трудоемкий;
- позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти ее решения (единственное или бесконечное множество);
- дает возможность найти максимальное число линейно независимых уравнений — ранг матрицы системы.

▷ **Пример 2.4.** Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений берем в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения, у которого коэффициент при x_1 равен 1):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim$$

---

[1] *Сочетаниями из n элементов по r* называются комбинации (соединения) из n элементов по r, отличающиеся только составом элементов. Число C_n^r вычисляется по формуле: $C_n^r = \dfrac{n(n-1)...(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot r}$.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -2 & 3 & -6\\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -2 & 3 & -6\\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17\end{array}\right),$$ т.е. ранг матрицы системы $r=2$.

Оставляем в левой части переменные x_1, x_2, которые берем за основные (определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля, т.е. $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -5\end{vmatrix} \neq 0$). Остальные неосновные переменные x_3, x_4 переносим в правые части уравнений. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 + \quad 2x_2 = \quad -6 + \quad 2x_3 - \quad 3x_4, \\ \qquad -5x_2 = \quad 17 - \quad 5x_3 + \quad 7x_4, \end{cases}$$

откуда

$$x_2 = \frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4 \quad \text{и}$$

$$x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4.$$

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы $\left(x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\ x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\ x_3 = c_1;\ x_4 = c_2\right)$. ▶

▷ **Пример 2.5.** Найти все базисные решения системы, приведенной в примере **2.4**.

Р е ш е н и е. Ранг матрицы системы $r=2$ (это следует из примера **2.4**), следовательно, одно из уравнений системы, например, третье, можно отбросить.

Общее число групп основных переменных не более чем[1] $C_n^r = C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$, поэтому возможны следующие группы основных переменных: x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_2, x_4; x_3, x_4.

Выясним, могут ли переменные x_1, x_2 быть основными. Так как определитель матрицы из коэффициентов при этих пере-

---

[1] См. сноску на с. 49.

менных, т.е. базисный минор $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, то x_1, x_2 могут быть основными переменными. Рассуждая аналогично, найдем, что из всех возможных групп основных переменных только переменные x_2, x_3 не могут быть основными, ибо $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

Найдем первое базисное решение, взяв в качестве основных переменных x_1, x_2, а в качестве неосновных — переменные x_3, x_4. Приравняв неосновные переменные нулю, т.е. $x_3 = x_4 = 0$, получим систему уравнений в виде: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -6 \end{cases}$, откуда $x_1 = \frac{4}{5}$; $x_2 = -\frac{17}{5}$, т.е. первое базисное решение (4/5; −17/5; 0; 0).

Если взять за основные переменные x_1, x_3 и приравнять нулю соответствующие неосновные переменные x_2, x_4, т.е. $x_2 = x_4 = 0$, то получим второе базисное решение (4/5; 0; 17/5; 0). Аналогично находятся и остальные базисные решения (9/7; 0; 0; −17/7), (0; −9; 0; 4) и (0; 0; 9; 4). ▶

2.5. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Система m линейных уравнений с n переменными называется системой линейных *однородных* уравнений, если все их свободные члены равны нулю. Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (или тривиальное) решение (0, 0, ..., 0).

Если в системе (2.12) $m = n$, а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение, как это следует из теоремы и формул Крамера. Ненулевые решения, следовательно, возможны лишь для таких систем линейных однородных уравнений, в которых число уравнений меньше числа переменных или при их равенстве, когда определитель системы равен нулю.

Иначе: *система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных, т.е. при* $r(A) < n$.

Обозначим решение системы (2.12) $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n$ в виде строки $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами:

1. *Если строка* $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ *— решение системы* (2.12), то и строка $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \ldots, \lambda k_n)$ *— также решение этой системы.*

2. *Если строки* $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ и $e_2 = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ *— решения системы* (2.12)*, то при любых* c_1 и c_2 *их линейная комбинация* $c_1e_1 + c_2e_2 = (c_1k_1 + c_2l_1, c_1k_2 + c_2l_2, \ldots, c_1k_n + c_2l_n)$ *— также решение данной системы.*

Убедиться в справедливости указанных свойств решений системы линейных однородных уравнений можно непосредственной подстановкой их в уравнения системы.

Из сформулированных свойств следует, что *всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы*. Поэтому представляет интерес найти такие линейно независимые решения системы (2.12), через которые линейно выражались бы все остальные ее решения.

Определение. *Система линейно независимых решений* $e_1, e_2, \ldots, e_k$ *называется* ***фундаментальной****, если каждое решение системы* (2.12) *является линейной комбинацией решений* $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Теорема. *Если ранг r матрицы коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений* (2.12) *меньше числа переменных* n*, то всякая фундаментальная система решений системы* (2.12) *состоит из* $n - r$ *решений.*

Поэтому *общее решение* системы (2.12) линейных однородных уравнений имеет вид:

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ke_k, \qquad \textbf{(2.13)}$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — любая фундаментальная система решений, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные числа и $k = n - r$.

Можно показать, что *общее решение системы m линейных уравнений с n переменными* (2.1) *равно сумме общего решения соответствующей ей системы однородных линейных уравнений* (2.12) *и произвольного частного решения этой системы* (2.1).

2.6. Решение задач

▷ **Пример 2.6.** Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 0 & 4 & 8\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 0 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Решить уравнения: а) $AX=B$; б) $XA=C$.

Р е ш е н и е. а) Для невырожденной матрицы A решение уравнения находится по той же формуле (2.7) $X=A^{-1}B$, но здесь необходимо учесть, что X не является матрицей-столбцом (как это было в § 2.1), а имеет размер (2×3), ибо $A^{-1}_{2\times 2}B_{2\times 3}=X_{2\times 3}$.

Найдем обратную матрицу A^{-1} согласно алгоритму, приведенному в § 1.5:

$|A|=3\cdot 1-1\cdot 2=1$; так как $|A|\neq 0$, то A^{-1} существует. Матрица A', транспонированная к A, имеет вид $A'=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, а матрица $\tilde{A}$ из алгебраических дополнений элементов матрицы A' есть $\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Теперь $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ и матрица переменных

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 0 & 4 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6 & -9\\ -1 & 10 & 17\end{pmatrix}.$$

б) Полагая матрицу A невырожденной, умножим обе части уравнения $XA=C$ *справа* на обратную матрицу A^{-1}: $(XA)A^{-1}=CA^{-1}$.

Так как $(XA)A^{-1}=X\left(AA^{-1}\right)=XE=X$, то $X=CA^{-1}$ и размер матрицы переменных (4×2), так как $C_{4\times 2}\times A^{-1}_{2\times 2}=X_{4\times 2}$. Следовательно,

$$X=\begin{pmatrix}4&7\\0&1\\2&3\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&13\\-1&3\\-1&5\\-1&6\end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

$\triangleright$ **Пример 2.7.** Решить уравнение

$$\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}6&8\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\-2&0\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Обозначив $A=\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&8\\2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&4\\-2&0\end{pmatrix}$, представим уравнение в виде $AXB=C$. Умножим обе части уравнения *слева* на обратную матрицу A^{-1} и *справа* на обратную матрицу B^{-1}, учитывая, что A и B — невырожденные матрицы: $|A|=1\neq 0$, $|B|=-10\neq 0$.

Получим $A^{-1}(AXB)B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$. Учитывая, что

$A^{-1}(AXB)B^{-1}=(A^{-1}A)(XB)B^{-1}=E(XB)B^{-1}=(XB)B^{-1}=$
$=X(BB^{-1})=XE=X$, получим $X=A^{-1}CB^{-1}$.

Теперь найдем $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}1&-8\\-2&6\end{pmatrix}$.

Поэтому

$$X=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&4\\-2&0\end{pmatrix}\left[-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&-8\\-2&6\end{pmatrix}\right]=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}11&4\\-13&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-8\\-2&6\end{pmatrix}=$$
$$=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&-64\\5&80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,3&-6,4\\0,5&8,0\end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

$\triangleright$ **Пример 2.8.** Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трех видов: сапог, кроссовок и ботинок; при этом используется сырье трех типов: S_1, S_2, S_3. Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объем расхода сырья на 1 день заданы таблицей:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну пару, усл. ед.			Расход сырья на 1 день, усл. ед.
	Сапоги	Кроссовки	Ботинки	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида обуви.

Р е ш е н и е. Пусть ежедневно фабрика выпускает x_1 пар сапог, x_2 пар кроссовок и x_3 пар ботинок. Тогда в соответствии с расходом сырья каждого вида имеем систему:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600. \end{cases}$$

Решая систему любым способом, находим (200; 300; 200), т.е. фабрика выпускает 200 пар сапог, 300 — кроссовок и 200 пар ботинок. ▶

▷ **Пример 2.9.** С двух заводов поставляются автомобили для двух автохозяйств, потребности которых соответственно 200 и 300 машин. Первый завод выпустил 350 машин, а второй — 150 машин. Известны затраты на перевозку машин с завода в каждое автохозяйство (см. таблицу).

Завод	Затраты на перевозку в автохозяйство, ден. ед.	
	1	2
1	15	20
2	8	25

Минимальные затраты на перевозку равны 7950 ден. ед. Найти оптимальный план перевозок машин.

Р е ш е н и е. Пусть x_{ij} — количество машин, поставляемых с i-го завода j-му автохозяйству $(i, j = 1, 2)$. Получаем систему

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 350, \\ x_{21} + x_{22} = 150, \\ x_{11} + x_{21} = 200, \\ x_{12} + x_{22} = 300, \\ 15x_{11} + 20x_{12} + 8x_{21} + 25x_{22} = 7950. \end{cases}$$

Решаем систему, например, методом Гаусса. (Рекомендуем сделать это читателю самостоятельно.) Найдем $x_{11} = 50$, $x_{12} = 300$, $x_{21} = 150$, $x_{22} = 0$ (обращаем внимание на то, что ранг матрицы системы $r = 4$, т.е. $r = n$, и система имеет единственное решение). ▶

2.7. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ)

Цель балансового анализа — ответить на вопрос, возникающий в макроэкономике и связанный с эффективностью ведения многоотраслевого хозяйства: каким должен быть объем производства каждой из n отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли? При этом каждая отрасль выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой — как потребитель продукции и своей, и произведенной другими отраслями.

Связь между отраслями, как правило, отражается в таблицах межотраслевого баланса, а математическая модель, позволяющая их анализировать, разработана в 1936 г. американским экономистом В. Леонтьевым.

Предположим, что рассматривается n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год).

Введем следующие обозначения: x_i — общий (валовой) объем продукции i-й отрасли $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

x_{ij} — объем продукции i-й отрасли, потребляемой j-й отраслью в процессе производства $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$;

y_i — объем конечного продукта i-й отрасли для непроизводственного потребления.

Так как валовой объем продукции любой i-й отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.14}$$

Уравнения (2.14) называются *соотношениями баланса.* Будем рассматривать *стоимостный межотраслевой баланс*, когда все величины, входящие в (2.14), имеют стоимостное выражение.

Введем *коэффициенты прямых затрат*

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad \left(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right), \qquad \textbf{(2.15)}$$

показывающие затраты продукции *i*-й отрасли на производство единицы продукции *j*-й отрасли.

Можно полагать, что в некотором промежутке времени коэффициенты a_{ij} будут постоянными и зависящими от сложившейся технологии производства. Это означает *линейную* зависимость материальных затрат от валового выпуска, т.е.

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \quad \left(i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right), \qquad \textbf{(2.16)}$$

вследствие чего построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название *линейной*.

Теперь соотношения баланса (2.14) примут вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \left(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right). \qquad \textbf{(2.17)}$$

Обозначим $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$,

где X — *вектор*[1] *валового выпуска,* Y — *вектор конечного продукта,* A — *матрица прямых затрат (технологическая или структурная матрица).*

Тогда систему (2.14) можно записать в матричном виде:

$$X = AX + Y. \qquad \textbf{(2.18)}$$

***Основная задача межотраслевого баланса** состоит в отыскании такого вектора валового выпуска* X, *который при известной матрице прямых затрат* A *обеспечивает заданный вектор конечного продукта* Y.

Перепишем уравнение (2.18) в виде:

$$\left(E - A\right) X = Y. \qquad \textbf{(2.19)}$$

---

[1] Строгое определение вектора дано в гл. 3.

Если матрица $(E-A)$ невырожденная, т.е. $|E-A| \neq 0$, то по формуле (2.7)

$$X=(E-A)^{-1} Y=SY. \qquad \textbf{(2.20)}$$

Матрица $S=(E-A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат.*

Чтобы выяснить экономический смысл элементов матрицы $S=(s_{ij})$, будем задаваться единичными векторами конечного продукта[1] $Y_1=(1, 0, \ldots, 0)', Y_2=(0, 1, \ldots, 0)', Y_n=(0, 0, \ldots, 1)'$. Тогда по формуле (2.20) соответствующие векторы валового выпуска будут

$$X_1=(s_{11}, s_{21}, \ldots, s_{n1})',\ X_2=(s_{12}, s_{22}, \ldots, s_{n2})', \ldots,$$

$$X_n=(s_{1n}, s_{2n}, \ldots, s_{nn})'.$$

Следовательно, каждый элемент s_{ij} матрицы S есть величина валового выпуска продукции *i*-й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта *j*-й отрасли $y_j=1\ (j=1, 2, \ldots, n)$.

В соответствии с экономическим смыслом задачи значения x_i должны быть неотрицательны при неотрицательных значениях $y_i \geq 0$ и $a_{ij} \geq 0$, где $i, j=1, 2, \ldots, n$.

Матрица $A \geq 0$ называется *продуктивной,* если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$ уравнения (2.19). В этом случае и модель Леонтьева называется *продуктивной.*

Существует несколько критериев продуктивности матрицы A. Один из них говорит о том, что матрица A продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы, т.е. матрица A продуктивна, если $a_{ij} \geq 0$ для любых $i, j=1, 2, \ldots, n$ и $\max\limits_{j=1,2,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, и существует номер *j* такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

---

[1] Используем для краткости знак транспонирования матрицы — «штрих».

▷ **Пример 2.10.** В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		энергетика	машино-строение		
Производство	Энергетика	7	21	72	100
	Машино-строение	12	15	123	150

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроительной сохранится на прежнем уровне.

Р е ш е н и е. Имеем

$x_1 = 100,\ x_2 = 150,\ x_{11} = 7,\ x_{12} = 21,\ x_{21} = 12,\ x_{22} = 15;\ y_1 = 72,\ y_2 = 123.$

По формуле (2.15) находим коэффициенты прямых затрат:

$a_{11} = 0,07,\ a_{12} = 0,14,\ a_{21} = 0,12,\ a_{22} = 0,10$, т.е матрица прямых затрат $A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}$ имеет неотрицательные элементы и удовлетворяет критерию продуктивности:

$\max\{0,07 + 0,12;\ 0,14 + 0,10\} = \max\{0,19;\ 0,24\} = 0,24 < 1.$

Поэтому для любого вектора конечного продукта Y можно найти необходимый объем валового выпуска X по формуле (2.20):

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Найдем матрицу полных затрат $S = (E - A)^{-1}$:

$E - A = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,90 \end{pmatrix}$. Так как $|E - A| = 0,8202 \neq 0$, по формуле (1.14)

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,8202}\begin{pmatrix} 0,90 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

По условию вектор конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$. Тогда по формуле (2.17) получаем вектор валового выпуска:

$$X = \frac{1}{0,8202}\begin{pmatrix} 0,90 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix},$$

т.е. валовой выпуск в энергетической отрасли надо увеличить до 179,0 усл. ед., а в машиностроительной — до 160,5 усл. ед. ▶

УПРАЖНЕНИЯ

Решить системы уравнения методом обратной матрицы и по формулам Крамера:

2.11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

Решить системы уравнений методом Гаусса:

2.15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

Решить матричные уравнения:

2.21. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$ **2.22.** $X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

2.23. $AXB = C$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Найти базисные решения системы уравнений:

2.24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18, \\ -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

2.28. Имеются три банка, каждый из которых начисляет вкладчику определенный годовой процент (свой для каждого банка). В начале года 1/3 вклада размером 6000 ден.ед. вложили в банк 1, 1/2 вклада — в банк 2 и оставшуюся часть — в банк 3 и к концу года сумма этих вкладов возросла до 7250 ден. ед. Если бы первоначально 1/6 вклада положили в банк 1, 2/3 — в банк 2 и 1/6 вклада – в банк 3, то к концу года сумма вкладов составила бы 7200 ден. ед.; если бы 1/2 вклада положили в банк 1, 1/6 — в банк 2 и 1/3 вклада – в банк 3, то сумма вкладов в конце года составила бы вновь 7250 ден. ед. Какой процент выплачивает каждый банк?

2.29. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2		
Производство	1	100	160	240	500
	2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли должен увеличиться в 2 раза, а второй отрасли — на 20%.

Глава 3

ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

3.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Обобщим некоторые сведения о векторах, известные в основном из школьного курса геометрии.

Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B (который можно перемещать параллельно самому себе (рис. 3.1)).

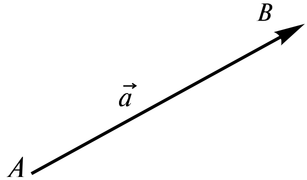


Рис. 3.1

Векторы могут обозначаться как двумя прописными буквами, так и одной строчной с чертой или стрелкой, либо выделяться жирным шрифтом, например:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB},\ \overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} \text{ или } \overline{a} = \overline{AB}.$$

Длиной (или *модулем*) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка AB, изображающего вектор.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Если начало и конец вектора совпадают, например $\overrightarrow{AA}$, то такой вектор называют *нулевым* и обозначают $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$. Длина нулевого вектора равна нулю: $\left|\overrightarrow{0}\right| = 0$. Так как направление нулевого вектора произвольно, то считают, что он коллинеарен любому вектору.

Произведением вектора $\overrightarrow{a}$ *на число* λ называется вектор $\overrightarrow{b} = \lambda\,\overrightarrow{a}$, имеющий длину $\left|\overrightarrow{b}\right| = |\lambda|\left|\overrightarrow{a}\right|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$ (рис. 3.2).

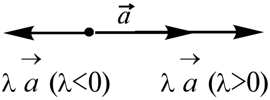


Рис. 3.2

Противоположным вектором $-\vec{a}$ называется произведение вектора $\vec{a}$ на число (-1), т.е. $-\vec{a} = (-1)\,\vec{a}$.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 3.3) (*правило треугольника*).

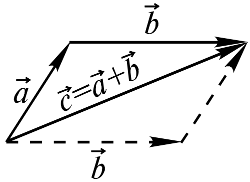


Рис. 3.3

Очевидно, что вектор $\vec{c}$ в этом случае представляет диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.3) (*правило параллелограмма*).

Аналогично определяется сумма нескольких векторов. Так, например, сумма четырех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 3.4а) есть вектор

$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d},$$

начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{d}$ (*правило многоугольника*) (рис. 3.4 б).

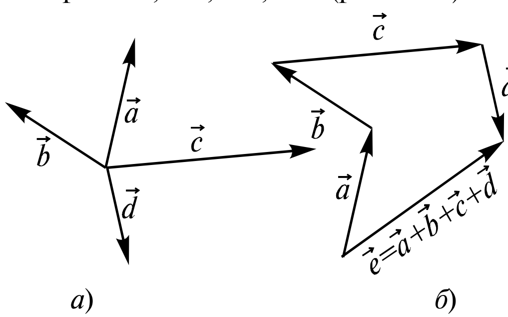
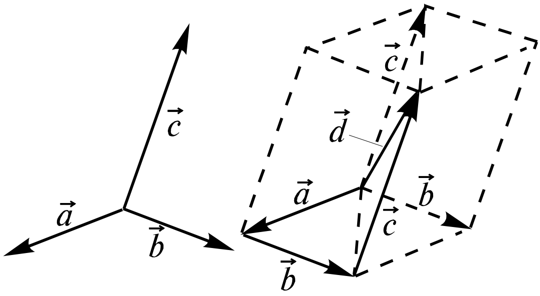


Рис. 3.4

Нетрудно убедиться, что вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, определяемый таким образом, представляет диагональ параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, не лежащих в одной плоскости или в параллельных плоскостях (*правило параллелепипеда*) (рис. 3.5).



а) *б*)

Рис. 3.5

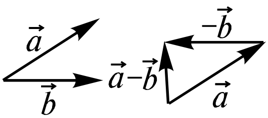


Рис. 3.6

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, противоположного $\vec{b}$ (рис. 3.6).

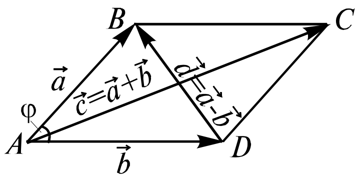


Рис. 3.7

Легко убедиться в том, что в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}=\vec{AB}$ и $\vec{b}=\vec{AD}$, одна диагональ — вектор — представляет сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а другая диагональ — вектор $\vec{d}=\vec{DB}$ — их разность (рис. 3.7).

Перенесем вектор $\vec{a}$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с началом координат. *Координатами вектора* $\vec{a}$ называются координаты его конечной точки.

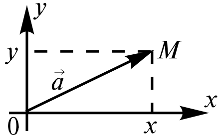


Рис. 3.8

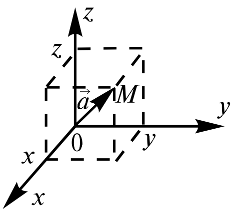


Рис. 3.9

Так, координатами вектора $\vec{a}=\vec{OM}$ на плоскости Oxy являются два числа x и y ($\vec{a}=(x,y)$ — рис. 3.8.), а в пространстве $Oxyz$ — три числа x,y и z ($\vec{a}=(x,y,z)$ — рис. 3.9).

В соответствии с определениями, приведенными выше, нетрудно показать, что суммой и разностью векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ являются соответственно векторы

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

а произведение вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ на число λ есть вектор $\vec{b} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

На рис. 3.8 и 3.9 видно, что длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$|\vec{a}| = |\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

или

$$|\vec{a}| = |\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \qquad \mathbf{(3.1)}$$

Определение. ***Скалярным произведением*** $(\vec{a}, \vec{b})$ *двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла* φ *между ними:*

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Выразим скалярное произведение через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Из треугольника ABD (рис. 3.7), сторонами которого являются векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$, по теореме косинусов следует, что

$|d^2| = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, откуда

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2\right). \qquad \mathbf{(3.2)}$$

Учитывая формулу длины вектора (3.1) найдем

$$\left|\vec{a}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad \left|\vec{b}\right|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$\left|\vec{d}\right|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ и после преобразования выражения (3.2) получим

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_1, \qquad \textbf{(3.3)}$$

т.е. *скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.*

Заметим, что при $\vec{a} = \vec{b}$ угол $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ и

$$(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \qquad \textbf{(3.4)}$$

т.е. *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

В частности, расстояние d между двумя точками плоскости $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ можно рассматривать как длину вектора $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Поэтому

$$d = \sqrt{\left|\vec{AB}\right|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad \textbf{(3.5)}$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad \textbf{(3.6)}$$

▷ **Пример 3.1.** Даны векторы $\vec{a} = (2;\ -1;\ -2)$ и $\vec{b} = (8;\ -4;\ 0)$.

Найти: а) векторы $\vec{c} = 2\vec{a}$ и $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$; б) длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$; в) скалярный квадрат вектора $\vec{d}$; г) скалярное произведение векторов ($\vec{c}$, $\vec{d}$); д) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

Р е ш е н и е. а) По определению $\vec{c} = 2\vec{a} = (4; -2; -4)$; $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (6; -3; 2)$.

б) По формуле (3.1) найдем длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6, \quad \left|\vec{d}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

в) По формуле (3.4) скалярный квадрат равен квадрату модуля вектора, т.е. $(\vec{d}, \vec{d}) = \vec{d}^{\,2} = \left|\vec{d}\right|^2 = 7^2 = 49.$

г) По формуле (3.3) скалярное произведение

$$(\vec{c}, \vec{d}) = 4 \cdot 6 + (-2)(-3) + (-4) \cdot 2 = 22.$$

д) По формуле (3.6) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$ определяется равенством:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{c}, \vec{d})}{\left|\vec{c}\right|\left|\vec{d}\right|} = \frac{22}{6 \cdot 7} \approx 0,52, \text{ откуда}$$

$\varphi = \arccos 0,52 \approx 58^\circ$. ▶

3.2. *n*-мерный вектор и векторное пространство

Множества всех плоских или пространственных векторов, рассмотренных выше, в которых определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, являются простейшими примерами векторных пространств. Ниже обобщается понятие вектора и дается определение векторного пространства.

Определение. ***n*-мерным вектором** *называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, где* x_i *— i-я компонента вектора* $\boldsymbol{x}$[1].

Понятие *n*-мерного вектора широко используется в экономике, например некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а соответствующие цены — вектором $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Два n-мерных вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты, т.е. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, если $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Суммой двух векторов одинаковой размерности *n* называется вектор $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, компоненты которого равны сумме соответст-

---

[1] Компоненты *n*-мерного вектора удобнее обозначать одной буквой, но с разными индексами (в отличие от двух и трехмерных векторов, компоненты которых мы обозначали выше разными буквами), а сам вектор — той же буквой (без номеров и стрелки), выделенной жирным шрифтом.

вующих компонент слагаемых векторов, т.е. $z_i = x_i + y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Произведением вектора ***x*** *на действительное число* λ называется вектор $\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{x}$, компоненты u_i которого равны произведению λ на соответствующие компоненты вектора x, т.е. $u_i = \lambda x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Линейные операции над любыми векторами удовлетворяют следующим свойствам:

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ — коммутативное (переместительное) свойство суммы:

2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$— ассоциативное (сочетательное) свойство суммы;

3. $\alpha(\beta \boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$ — ассоциативное относительно числового множителя свойство;

4. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ — дистрибутивное (распределительное) относительно суммы векторов свойство;

5. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$ — дистрибутивное относительно суммы числовых множителей свойство;

6. Существует нулевой вектор $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ такой, что $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$ (особая роль нулевого вектора);

7. Для любого вектора $\boldsymbol{x}$ существует противоположный вектор $(-\boldsymbol{x})$ такой, что $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$;

8. $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$ (особая роль числового множителя 1).

Определение. *Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным выше восьми свойствам (рассматриваемым как аксиомы), называется* ***векторным пространством****.*

Следует отметить, что под $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ можно рассматривать не только векторы, но и элементы (объекты) любой природы. В этом случае соответствующее множество элементов называется *линейным пространством.*

Линейным пространством является, например, множество всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа n. Легко убедиться, что если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — многочлены степени не выше n, то они будут обладать свойствами 1—8. Заметим для сравнения, что, например, множество всех многочленов степени, точно равной натуральному числу n, не является линейным пространством, так как в нем не определена операция сложения элементов, ибо сумма двух многочленов может оказаться многочленом степени ниже n. А множество многочленов степени не выше n, но с положительными коэффициентами также не является линейным пространством, поскольку в этом множестве не определена операция умножения элемента на число: такие многочлены нельзя умножать на отрицательные числа.

Из определения векторного (линейного) пространства, в частности из аксиом 1—8, вытекает существование единственного нулевого вектора, равного произведению произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ на действительное число 0 и существование для каждого вектора $\boldsymbol{x}$ единственного противоположного вектора $(-\boldsymbol{x})$, равного произведению этого вектора на действительное число (-1).

3.3. Размерность и базис векторного пространства

Понятия линейной комбинации, линейной зависимости и независимости векторов вводятся аналогично тому, как это было сделано в § 1.6 для строк матрицы.

Определение. *Вектор* $\boldsymbol{a}_m$ *называется* ***линейной комбинацией векторов*** $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_{m-1}$ *векторного пространства* $\boldsymbol{R}$, *если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа:*

$$a_m = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_{m-1} \boldsymbol{a}_{m-1}, \tag{3.7}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ — какие угодно действительные числа.

Определение. *Векторы* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_m$ *векторного пространства* $\boldsymbol{R}$ *называются* ***линейно зависимыми***, *если существуют такие числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, *не равные одновременно нулю, что*

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}\,. \tag{3.8}$$

В противном случае векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_m$ называются ***линейно независимыми.***

Из приведенных выше определений следует, что векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_m$ линейно независимы, если равенство (3.8) справедливо лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, и линейно зависимы, если это равенство выполняется, когда хотя бы одно из чисел $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ отлично от нуля.

Можно показать (аналогично § 1.6), что *если векторы* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m$ *линейно зависимы, то по крайней мере один из них линейно выражается через остальные.* Верно и обратное утверждение о том, что *если один из векторов выражается линейно через остальные, то все эти векторы в совокупности линейно зависимы.*

Примером линейно независимых векторов являются два неколлинеарных, т.е. не параллельных одной прямой, вектора $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ на плоскости. Действительно, условие (3.8) $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$ будет выполняться лишь в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ибо если, например, $\lambda_2 \neq 0$, то $\boldsymbol{a}_2 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\boldsymbol{a}_1$ и векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны. Однако любые три вектора плоскости линейно зависимы.

Отметим некоторые свойства векторов линейного пространства.

1. *Если среди векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m$ *имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.* В самом деле, если, например, $\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{0}$, то равенство (3.8) справедливо при $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

2. *Если часть векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m$ *являются линейно зависимыми, то и все эти векторы — линейно зависимые.* Действительно, если, например, векторы $\boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m$ линейно зависимы, то справедливо равенство $\lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + ... + \lambda_m \boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}$, в котором не все числа равны нулю. Но тогда с теми же числами $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и $\lambda_1 = 0$ будет справедливо равенство (3.8).

▷ **Пример 3.2.** Выяснить, являются ли векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1, 3, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 1, 2)$ и $\boldsymbol{a}_3 = (3, -1, 1, 1)$ линейно зависимыми.

Р е ш е н и е. Составим векторное равенство $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$. Записывая $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ в виде вектор-столбцов, получим

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Задача свелась таким образом к решению системы:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса (см. § 2.3), приведем ее к виду:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

откуда найдем бесконечное множество ее решений ($\lambda_1 = c$, $\lambda_2 = -2c$, $\lambda_3 = c$), где c — произвольное действительное число.

Итак, для данных векторов условие (3.8) выполняется не только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (а, например, при $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1$ ($c = 1$); при $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = 2$ ($c = 2$) и т.д.), следовательно, эти векторы — линейно зависимые. ▶

Определение. *Линейное пространство* $\boldsymbol{R}$ *называется* ***n-мерным,*** *если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые из* $(n+1)$ *векторов уже являются зависимыми.* Другими словами, ***размерность пространства*** *— это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.* Число n называется размерностью пространства $\boldsymbol{R}$ и обозначается $\dim(\boldsymbol{R})$.

Определение. *Совокупность n линейно независимых векторов n-мерного пространства* $\boldsymbol{R}$ *называется* ***базисом.***

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Каждый вектор* $\boldsymbol{x}$ линейного пространства R *можно представить и притом единственным способом в виде линейной комбинации векторов базиса.*

□ Пусть векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ образуют произвольный базис n-мерного пространства R. Так как любые из $(n+1)$ векторов n-мерного пространства R зависимы, то будут зависимы, в частности, векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и рассматриваемый вектор $\boldsymbol{x}$. Тогда существуют такие не равные одновременно нулю числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$, что

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n+\lambda x=\mathbf{0}.$$

При этом $\lambda\neq 0$, ибо в противном случае, если $\lambda=0$ и хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ было бы отлично от нуля, то векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ были бы линейно зависимы. Следовательно,

$$\boldsymbol{x}=-\frac{\lambda_1}{\lambda}\boldsymbol{e}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\boldsymbol{e}_2-\ldots-\frac{\lambda_n}{\lambda}\boldsymbol{e}_n \text{ или}$$

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n, \tag{3.9}$$

где $\boldsymbol{x}_i=-\dfrac{\lambda_i}{\lambda}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Это выражение $\boldsymbol{x}$ через $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ единственное, так как если допустить какое-либо другое выражение, например,

$$\boldsymbol{x}=y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+y_n\boldsymbol{e}_n,$$

то, вычитая из него почленно (3.9), получим

$$(y_1-x_1)\boldsymbol{e}_1+(y_2-x_2)\boldsymbol{e}_2+\ldots+(y_n-x_n)\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0},$$

откуда из условия линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ следует, что

$$y_1-x_1=y_2-x_2=\ldots=y_n-x_n=0$$

или

$$y_1=x_1,\ y_2=x_2, \ldots y_n=x_n. \ \blacksquare$$

Равенство (3.9) называется *разложением вектора* $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *координатами вектора* $\boldsymbol{x}$ относительно этого базиса. В силу единственности разложения (3.9) каждый вектор однозначно может быть определен координатами в некотором базисе.

Очевидно, что нулевой вектор имеет все нулевые координаты, а вектор, противоположный данному, — противоположные по знаку координаты.

Важное значение имеет следующая теорема.

Теорема. *Если* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *— система линейно независимых векторов пространства* $\boldsymbol{R}$ *и любой вектор* $\boldsymbol{a}$ *линейно выражается через* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, *то пространство* $\boldsymbol{R}$ *является n-мерным, а векторы* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *— его базисом.*

□ Возьмем произвольные m векторов пространства $\boldsymbol{R}$, где $m>n$. По условию каждый из них можно линейно выразить через $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = \alpha_{11}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\boldsymbol{e}_n, \\ \boldsymbol{a}_2 = \alpha_{21}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\boldsymbol{e}_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \boldsymbol{a}_m = \alpha_{m1}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{m2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_{mn}\boldsymbol{e}_n. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу $A = (\alpha_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Ранг этой матрицы не превосходит $n: r(A) < \min\{m, n\} = n$, следовательно, среди ее строк не более n линейно независимых. Так как $m > n$, то m строк этой матрицы, а значит, и m векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависимы. Таким образом, пространство **R** n-мерно и $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — его базис. ■

▷ **Пример 3.3.** В базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ заданы векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1;\ -1;\ 1)$ и $\boldsymbol{a}_3 = (-3;\ 5;\ -6)$. Показать, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ образуют базис.

Р е ш е н и е. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ образуют базис, если они линейно независимы. Составим векторное равенство: $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$. Решая его аналогично примеру **3.2**, можно убедиться в единственном нулевом его решении: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, т.е. векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ образуют систему линейно независимых векторов и, следовательно, составляют базис. ▶

3.4. Переход к новому базису

Пусть в пространстве R имеются два базиса: старый $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и новый $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \ldots, \boldsymbol{e}_n^*$. Каждый из векторов нового базиса можно выразить в виде линейной комбинации векторов старого базиса:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1^* = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n, \\ \boldsymbol{e}_2^* = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \boldsymbol{e}_n^* = a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n. \end{cases} \qquad \mathbf{(3.10)}$$

Полученная система означает, что переход от старого базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к новому $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \ldots, \boldsymbol{e}_n^*$ задается *матрицей перехода* a_{11} и т.д.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем коэффициенты разложения новых базисных векторов по старому базису образуют с т о л б ц ы этой матрицы.

Матрица A – неособенная, так как в противном случае ее столбцы (а следовательно, и базисные векторы) оказались бы линейно зависимыми. Обратный переход от нового базиса $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \ldots, \boldsymbol{e}_n^*$ к старому базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ осуществляется с помощью обратной матрицы A^{-1}.

Найдем зависимость между координатами вектора в разных базисах. Пусть рассматриваемый вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно старого базиса и координаты $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ относительно нового базиса, т.е.

$$x = x_1^*\boldsymbol{e}_1^* + x_2^*\boldsymbol{e}_2^* + \ldots + x_n^*\boldsymbol{e}_n^* = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n. \qquad \textbf{(3.11)}$$

Подставив значения $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \ldots, \boldsymbol{e}_n^*$ из системы (3.10) в левую часть равенства (3.11), получим после преобразований:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* + \ldots + a_{n1}x_n^*, \\ x_2 = a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* + \ldots + a_{n2}x_n^*, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x_n = a_{1n}x_1^* + a_{2n}x_n^* + \ldots + a_{nn}x_n^*, \end{cases}$$

т.е. в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^* \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^* \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(3.12)}$$

▷ **Пример 3.4.** По условию примера **3.3** вектор $\boldsymbol{b} = (4; -4; 5)$, заданный в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, выразить в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Р е ш е н и е. Выразим связь между базисами:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{a}_3 = -3\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 - 6\boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.\ \text{Вычисляем}\ A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{(см. § 1.5).}$$

Теперь по (3.12) $\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$,

т.е. новые координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ есть 0,5; 2 и −0,5 и вектор $\boldsymbol{b}$ может быть представлен в виде:

$\boldsymbol{b} = 0,5\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 - 0,5\boldsymbol{a}_3$. ▶

3.5. Евклидово пространство

Выше мы определили линейное (векторное) пространство, в котором можно складывать векторы и умножать их на числа, ввели понятие размерности и базиса, а теперь в данном пространстве введем *метрику,* т.е. способ измерять длины и углы. Это можно, например, сделать, если ввести понятие *скалярного произведения.*

Определение. ***Скалярным произведением*** *двух векторов* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *называется число*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i . \qquad \textbf{(3.13)}$$

Скалярное произведение имеет экономический смысл. Если $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *есть вектор объемов различных товаров, а* $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *вектор их цен, то скалярное произведение* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *выражает суммарную стоимость этих товаров.*

Скалярное произведение имеет следующие свойства:

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ — коммутативное свойство;

2. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ — дистрибутивное свойство;

3. $(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — для любого действительного числа;

4. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$, если $\boldsymbol{x}$ — ненулевой вектор; $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, если $\boldsymbol{x}$ — нулевой вектор.

Определение. *Линейное* (*векторное*) *пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее указанным четырем свойствам* (*рассматриваемым как аксиомы*)*, называется* ***евклидовым пространством****.*

Длиной* (*нормой*)** *вектора* ***x *в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата:*

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\ . \qquad \textbf{(3.14)}$$

Имеют место следующие свойства длины вектора:

1. $|x| = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$;

2. $|\lambda\boldsymbol{x}| = |\lambda||\boldsymbol{x}|$, где λ — действительное число;

3. $|(x, y)| \le |x||y|$ **(3.15)**

(неравенство Коши—Буняковского);

4. $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ (неравенство треугольника).

Угол φ между двумя векторами x и y определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}, \qquad \textbf{(3.16)}$$

где $0 \le \varphi < \pi$.

Такое определение вполне корректно, так как согласно неравенству Коши—Буняковского (3.15) $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \le |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$, т.е. $\cos\varphi \le 1$.

Два вектора называются *ортогональными,* если их скалярное произведение равно нулю. Очевидно, что нулевой вектор ортогонален любому другому вектору. Из определения следует, что если два ненулевых вектора ортогональны, то угол между ними равен $\pi/2$ (ибо $\cos\pi/2 = 0$).

Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ n-мерного евклидова пространства образуют *ортогональный базис*, если эти векторы попарно ортогональны, и *ортонормированный базис*, если эти векторы попарно ортогональны и норма каждого из них равна единице, т.е. если $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \mathbf{0}$ при $i \ne j$ и $|\boldsymbol{e}_i| = 1$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для установления корректности приведенного определения необходимо убедиться в том, что входящие в него векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ образуют один из базисов рассматриваемого n-мерного пространства R (т.е. R^n). Для этого достаточно показать, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы, т.е. равенство

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.17)}$$

справедливо лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Действительно, умножая скалярно равенство (3.17) на любой вектор $\boldsymbol{e}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, получим

$$\lambda_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i) + \lambda_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_i) + \ldots + \lambda_n(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i) = \mathbf{0},$$

откуда, учитывая, что $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) \neq 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, вытекает, что $\lambda_i = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Сформулируем теперь (без доказательства) *основную теорему.*

Теорема. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Примером ортонормированного базиса является система n единичных векторов $\boldsymbol{e}_i$, у которых i-я компонента равна единице, а остальные компоненты равны нулю: $\boldsymbol{e}_1 = (1,\ 0,\ ...,\ 0)'$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,\ 1,\ ...,\ 0)'$, ..., $\boldsymbol{e}_n = (0,\ 0,\ ...,\ 1)'$.

3.6. Линейные операторы

Одно из фундаментальных понятий матричной алгебры — понятие *линейного оператора.*

Рассмотрим два линейных пространства: R^n размерности n и R^m размерности m.

Определение. *Если задан закон (правило), по которому каждому вектору **x** пространства R^n ставится в соответствие единственный вектор **y** пространства R^m, то говорят, что задан **оператор (преобразование, отображение)** $\tilde{A}(x)$, действующий из R^n* в R^m, и записывают $\boldsymbol{y} = \tilde{A}(\boldsymbol{x})$.

Оператор (преобразование) называется *линейным,* если для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пространства R^n и любого числа λ выполнются соотношения:

1. $\tilde{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \tilde{A}(\boldsymbol{x}) + \tilde{A}(\boldsymbol{y})$ — свойство аддитивности оператора;

2. $\tilde{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\tilde{A}(\boldsymbol{x})$ — свойство однородности оператора.

Вектор $\boldsymbol{y} = \tilde{A}(\boldsymbol{x})$ называется *образом вектора* $\boldsymbol{x}$, а сам вектор $\boldsymbol{x}$ — *прообразом вектора* $\boldsymbol{y}$.

Если пространства R^n и R^m совпадают, то оператор $\tilde{A}$ отображает пространство R^n в себя. Именно такие операторы мы будем рассматривать в дальнейшем.

Выберем в пространстве R^n базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и, учитывая (3.9), запишем разложение произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ по данному базису:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

В силу линейности оператора $\tilde{A}$ получаем

$$\tilde{A}(\boldsymbol{x}) = x_1\tilde{A}(\boldsymbol{e}_1) + x_2\tilde{A}(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_n\tilde{A}(\boldsymbol{e}_n).$$

Поскольку $\tilde{A}(\boldsymbol{e}_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) — также вектор из R^n, то его можно разложить по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Пусть

$$\tilde{A}(\boldsymbol{e}_i) = a_{1i}\boldsymbol{e}_1 + a_{2i}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{ni}\boldsymbol{e}_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad \textbf{(3.18)}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\boldsymbol{x}) &= x_1(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n) + x_2(a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n) + \ldots + \\ &+ x_n(a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\boldsymbol{e}_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\boldsymbol{e}_2 + \ldots (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)\boldsymbol{e}_n. \qquad \textbf{(3.19)}\end{aligned}$$

С другой стороны, вектор $\boldsymbol{y} = \tilde{A}(\boldsymbol{x})$, имеющий в том же базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$, можно записать так:

$$\tilde{A}(\boldsymbol{x}) = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n. \qquad \textbf{(3.20)}$$

Ввиду единственности разложения вектора по базису равны правые части равенства (3.19) и (3.20), откуда

$$\begin{cases} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n, \\ y_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Матрица $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ называется *матрицей оператора* $\tilde{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а ранг $\boldsymbol{r}$ матрицы A — *рангом оператора* $\tilde{A}$.

Таким образом, *каждому линейному оператору соответствует матрица в данном базисе*. Справедливо и обратное: *всякой матрице n-го порядка соответствует линейный оператор n-мерного пространства.*

Связь между вектором $\boldsymbol{x}$ и его образом $\boldsymbol{y} = \tilde{A}(\boldsymbol{x})$ можно выразить в матричной форме уравнением

$$Y = AX\,, \qquad \textbf{(3.21)}$$

где A — матрица линейного оператора, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ — матрицы-столбцы из координат векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

▷ **Пример 3.5.** Пусть в пространстве R^3 линейный оператор $\tilde{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти образ $\boldsymbol{y} = \tilde{A}(\boldsymbol{x})$ вектора $\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

Р е ш е н и е. По формуле (3.21) имеем

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $y = 10e_1 - 13e_2 - 18e_3$. ▶

Определим действия над линейными операторами.

Суммой двух линейных операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется оператор $(\tilde{A} + \tilde{B})$, определяемый равенством: $(\tilde{A} + \tilde{B})(\boldsymbol{x}) = \tilde{A}(\boldsymbol{x}) + \tilde{B}(\boldsymbol{x})$.

Произведением линейного оператора $\tilde{A}$ *на число* λ называется оператор $\lambda\tilde{A}$, определяемый равенством $(\lambda\tilde{A})(\boldsymbol{x}) = \lambda(\tilde{A}(\boldsymbol{x}))$.

Произведением линейных операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется оператор $\tilde{A}\tilde{B}$, определяемый равенством: $(\tilde{A}\tilde{B})(\boldsymbol{x}) = \tilde{A}(\tilde{B}(\boldsymbol{x}))$.

Можно убедиться в том, что операторы $(\tilde{A} + \tilde{B})$, $\lambda\tilde{A}$, $\tilde{A}\tilde{B}$, полученные в результате этих действий, удовлетворяют отмеченным выше свойствам аддитивности и однородности, т.е. являются линейными.

Определим *нулевой оператор* $\tilde{O}$, переводящий все векторы пространства R^n в нулевые векторы $\tilde{O}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, и *тождественный оператор* $\tilde{E}$, действующий по правилу: $\tilde{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Зависимость между матрицами одного и того же оператора в разных базисах выражается теоремой.

Теорема. *Матрицы A и A^* линейного оператора $\tilde{A}$ в базисах $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \ldots, \boldsymbol{e}_n^*$ связаны соотношением*

$$A^* = C^{-1}AC\ , \tag{3.22}$$

где C — матрица перехода от старого базиса к новому[1].

□ При воздействии линейного оператора $\tilde{A}$ вектор $\boldsymbol{x}$ пространства R^n переводится в вектор $\boldsymbol{y}$ этого пространства, т.е. справедливо равенство (3.21) (в старом базисе) и равенство

$$\boldsymbol{y}^* = A^*\boldsymbol{x} \tag{3.23}$$

(в новом базисе). Так как C — матрица перехода от старого базиса к новому, то в соответствии с (3.12)

$$\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x}^*\ , \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{y}^*\ . \tag{3.25}$$

Умножим равенство (3.24) слева на матрицу A, получим $A\boldsymbol{x} = AC\boldsymbol{x}^*$ или с учетом (3.21) $\boldsymbol{y} = AC\boldsymbol{x}^*$. Заменив левую часть полученного выражения в соответствии с (3.25), имеем: $C\boldsymbol{y}^* = AC\boldsymbol{x}^*$ или $\boldsymbol{y}^* = C^{-1}AC\boldsymbol{x}^*$. Сравнивая найденное выражение с (3.23), мы получим доказываемую формулу (3.22). ■

▷ **Пример 3.6.** В базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ оператор (преобразование) $\tilde{A}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\tilde{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1^* = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2^* = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$.

Р е ш е н и е. Матрица перехода здесь $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, а обратная к ней матрица $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, по (3.22)

$$A^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$ ▶

---

[1] Квадратные матрицы одного порядка A и A^* называются *подобными,* если для них найдется такая невырожденная матрица C такого же порядка, что верно равенство (3.22). Следовательно, матрицы линейного оператора в разных базисах при $|C| \neq 0$ являются подобными.

3.7. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Определение. *Вектор* $\boldsymbol{x} \neq 0$ *называется* ***собственным вектором*** *линейного оператора* $\tilde{A}$, *если найдется такое число* λ, *что*

$$\tilde{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}. \qquad \textbf{(3.26)}$$

Число λ *называется* ***собственным значением*** *оператора* $\tilde{A}$ (*матрицы* A), *соответствующим вектору* $\boldsymbol{x}$.

Из определения следует, что собственный вектор под действием линейного оператора $\tilde{A}$ переходит в вектор, коллинеарный самому себе, т.е. просто умножается на некоторое число. В то же время несобственные векторы преобразуются более сложным образом. В связи с этим понятие собственного вектора является очень полезным и удобным при изучении многих вопросов матричной алгебры и ее приложений.

Равенство (3.26) можно записать в матричной форме:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \qquad \textbf{(3.27)}$$

где вектор $\boldsymbol{x}$ представлен в виде вектора-столбца, или в развернутом виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Перепишем систему так, чтобы в правых частях были нули:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

или в матричном виде

$$(A - \quad E)\ \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Полученная однородная система всегда имеет нулевое решение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Для существования ненулевого решения (см. § 2.5) необходимо и достаточно, чтобы определитель системы

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,. \qquad \mathbf{(3.28)}$$

Определитель $|A-\lambda E|$ является многочленом n-й степени относительно λ. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом оператора* $\tilde{A}$ или матрицы A, а уравнение (3.28) — *характеристическим уравнением оператора* $\tilde{A}$ или матрицы A.

Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса. В самом деле, преобразуем характеристический многочлен $|A^*-\lambda E|$, полученный в новом базисе $\boldsymbol{e}_1^*,\ \boldsymbol{e}_2^*,\ \dots,\ \boldsymbol{e}_n^*$, если известна матрица C перехода от старого базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ к новому. С учетом (3.22) получим

$$|A^*-\lambda E| = |C^{-1}AC-\lambda E| = |C^{-1}AC-\lambda C^{-1}EC| = |C^{-1}(A-\lambda E)C|.$$

Учитывая, что определитель произведения квадратных матриц одинакового порядка равен произведению определителей этих матриц (см. §1.4), получим

$$|A^*-\lambda E| = |C^{-1}||A-\lambda E||C| = |C^{-1}C||A-\lambda E| = |A-\lambda E|, \text{ т.е.}$$

$|A^*-\lambda E| = |A-\lambda E|$ независимо от выбора базиса.

▷ **Пример 3.7.** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2-2\lambda-35=0$,

откуда собственные значения линейного оператора $\tilde{A}$ $\lambda_1=-5$, $\lambda_2=7$.

Находим собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(1)}=(x_1,\ x_2)$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=-5$. Для этого решаем матричное уравнение

$$(A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда находим $\boldsymbol{x}_2 = -1{,}5\boldsymbol{x}_2$. Положив $\boldsymbol{x}_1 = c$, получим, что векторы $\boldsymbol{x}^{(1)} = (c; -1{,}5c)$ при любом $c \neq 0$ являются собственными векторами линейного оператора $\tilde{A}$ с собственным значением $\lambda_1 = -5$.

Аналогично можно убедиться в том, что векторы $\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(\frac{2}{3}c_1;\ c_1\right)$ при любом $c_1 \neq 0$ являются собственными векторами линейного оператора $\tilde{A}$ с собственным значением $\lambda_2 = 7$. ▶

Наиболее простой вид принимает матрица A линейного оператора $\tilde{A}$, имеющего n линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ с собственными значениями, соответственно равными $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$. Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ примем за базисные. Тогда $\tilde{A}(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) или с учетом (3.18)

$$\tilde{A}(\boldsymbol{e}_i) = a_{1i}\boldsymbol{e}_1 + a_{2i}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{ii}\boldsymbol{e}_i + \ldots + a_{ni}\boldsymbol{e}_n = \lambda_i \boldsymbol{e}_i,$$

откуда $a_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $a_{ii} = \lambda_i$, если $i = j$. Таким образом, *матрица оператора $\tilde{A}$ в базисе, состоящем из его собственных векторов, является диагональной* и имеет вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Верно и обратное: *если матрица A линейного оператора $\tilde{A}$ в некотором базисе является диагональной, то все векторы этого базиса — собственные векторы оператора $\tilde{A}$.*

Можно доказать, что если *линейный оператор имеет n попарно различных собственных значений, то отвечающие им собственные векторы линейно независимы, и матрица этого оператора в соответствующем базисе имеет диагональный вид.*

▷ **Пример 3.8.** Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ линейного оператора $\tilde{A}$ к диагональному виду.

Р е ш е н и е. В примере **3.7** были найдены собственные значения матрицы $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 7$ и соответствующие им собственные векторы $\boldsymbol{x}^{(1)} = (c; -1{,}5c)$ и $\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(\frac{2}{3}c_1; c_1\right)$. Так как координаты векторов $\boldsymbol{x}^{(1)}$ и $\boldsymbol{x}^{(2)}$ не пропорциональны, то векторы $\boldsymbol{x}^{(1)}$ и $\boldsymbol{x}^{(2)}$ линейно независимы. Поэтому в базисе, состоящем из любых пар собственных векторов $\boldsymbol{x}^{(1)} = (c; -1{,}5c)$ и $\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(\frac{2}{3}c'; c'\right)$ (т.е. при любых $c \neq 0$, $c_1 \neq 0$, например при $c = 2$, $c_1 = 6$ из векторов $\boldsymbol{x}^{(1)} = (2; -3)$ и $\boldsymbol{x}^{(2)} = (4; 6)$ и т.д.), матрица A будет иметь диагональный вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ или } A^* = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Это легко проверить, взяв, например, в качестве нового базиса линейно независимые собственные векторы $\boldsymbol{x}^{(1)} = (2; -3)$ и $\boldsymbol{x}^{(2)} = (4; 6)$. Действительно, матрица C перехода от старого базиса к новому в этом случае будет иметь вид $C = \boldsymbol{x}^{(1)},\ \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Тогда в соответствии с (3.22) матрица A в новом базисе $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$ примет вид:

$$A^* = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

или после вычислений (которые мы опускаем) $A^* = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, т.е. получим ту же диагональную матрицу, элементы которой по главной диагонали равны собственным значениям матрицы A. ▶

3.8. Квадратичные формы

При решении различных прикладных задач часто приходится исследовать квадратичные формы.

Определение. ***Квадратичной формой*** $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *от* n *переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\,. \qquad \textbf{(3.29)}$$

Предполагаем, что коэффициенты квадратичной формы a_{ij} — действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$. Матрица $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), составленная из этих коэффициентов, называется *матрицей квадратичной формы*[1].

В матричной записи квадратичная форма имеет вид:

$$L = X'AX, \qquad \textbf{(3.30)}$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ — матрица-столбец переменных.

В самом деле :

$$L = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} \Sigma a_{1j}x_j \\ \Sigma a_{2j}x_j \\ \ldots \\ \Sigma a_{nj}x_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_2x_j + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_nx_j =$$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ и эквивалентность формул (3.29) и (3.30) установлена[2].

▷ **Пример 3.9.** Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 - 3x_3^2$. Записать ее в матричном виде.

Р е ш е н и е. Найдем матрицу квадратичной формы. Ее диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных, т.е. 4, 1, −3, а другие элементы — половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы. Поэтому

$$L = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Выясним, как изменяется квадратичная форма при невырожденном линейном преобразовании переменных.

---

[1] Матрица, у которой все элементы $a_{ij} = a_{ji}$, называется *симметрической.*

[2] Выше под знаком $\sum$ понимается $\sum\limits_{i=1}^{n}$.

Пусть матрицы-столбцы переменных $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ и $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ связаны линейным соотношением $X=CY$, где $C=(c_{ij})$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ есть некоторая невырожденная матрица n-го порядка. Тогда квадратичная форма[1]

$L=X'AX=(CY)'A(CY)=(Y'C')A(CY)=Y'(C'AC)Y.$

Итак, *при невырожденном линейном преобразовании* $X=CY$ *матрица квадратичной формы принимает вид:*

$$A^*=C'AC\,. \qquad \textbf{(3.31)}$$

▷ **Пример 3.10.** Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2)=2x_1^2+$ $+4x_1x_2-3x_2^2$. Найти квадратичную форму $L(y_1, y_2)$, полученную из данной линейным преобразованием $x_1=2y_1-3y_2$, $x_2=y_1+y_2$.

Р е ш е н и е. Матрица данной квадратичной формы $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, а матрица линейного преобразования $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, по (3.31) матрица искомой квадратичной формы

$$A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix},$$

а квадратичная форма имеет вид $L(y_1, y_2)=13y_1^2-34y_1y_2+3y_2^2$. ▶

Следует отметить, что при некоторых удачно выбранных линейных преобразованиях вид квадратичной формы можно существенно упростить.

Квадратичная форма $L=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ называется *канонической* (или имеет *канонический вид*), если все ее коэффициенты $a_{ij}=0$ при $i\neq j$:

$$L=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2\,,$$

а ее матрица является диагональной.

Справедлива следующая теорема.

---

[1] Транспонирование произведения матриц проводим по формуле $(CY)'=Y'C'$ (см. свойство на с. 16).

Теорема. *Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.*

▷ **Пример 3.11.** Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Р е ш е н и е. Вначале выделим полный квадрат при переменной x_1, коэффициент при квадрате которой отличен от нуля:

$$L = \left[x_1^2 - 2x_1\left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right) + \left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right)^2 \right] - \left(\frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)\right)^2 +$$

$$+ 2x_2x_3 + x_3^2 = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 6x_2x_3 - 4x_3^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 =$$

$$= \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2.$$

Теперь выделяем полный квадрат при переменной x_2, коэффициент при которой отличен от нуля:

$$L = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2 - \frac{32}{9}x_2x_3 + \frac{256}{81}x_3^2\right) +$$

$$+ \frac{9}{4}\cdot\frac{256}{81}x_3^2 - 3x_3^2 = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2 - \frac{16}{9}x_3\right)^2 + \frac{37}{9}x_3^2.$$

Итак, невырожденное линейное преобразование

$$y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3, \quad y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3, \quad y_3 = x_3$$

приводит данную квадратичную форму к каноническому виду

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2. \blacktriangleright$$

Канонический вид квадратичной формы не является однозначно определенным, так как одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими способами. Однако полученные различными способами канонические формы обладают рядом общих свойств. Одно из этих свойств сформулируем в виде теоремы.

Теорема (закон инерции квадратичных форм). *Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к этому виду.*

Например, квадратичную форму L в примере **3.10** можно было привести к виду

$$L_2(y_1, y_2, y_3) = \frac{37}{4} y_1^2 + y_1^2 - y_3^2,$$

применив невырожденное линейное преобразование

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = 2x_1 + x_2 + x_3, \quad y_3 = \frac{7}{2} x_1 + x_2 .$$

Как видим, число положительных и отрицательных коэффициентов (соответственно два и один) сохранилось.

Следует отметить, что *ранг матрицы квадратичной формы,* называемый рангом квадратичной формы, *равен числу отличных от нуля коэффициентов канонической формы и не меняется при линейных преобразованиях.*

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно (отрицательно) определенной,* если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля,

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \ (L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0).$$

Так, например, квадратичная форма $L_1 = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2$ является положительно определенной, а форма $L_2 = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ — отрицательно определенной.

Теорема. *Для того чтобы квадратичная форма $L = X'AX$ была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i матрицы A были положительны (отрицательны).*

В ряде случаев для установления знакоопределенности квадратичной формы удобнее бывает применить *критерий Сильвестра.*

Теорема. *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны, т.е* $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0,$ где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Следует отметить, что для отрицательно определенных квадратичных форм знаки главных миноров чередуются, начиная со знака «минус» для минора первого порядка.

▷ **Пример 3.12**. Доказать, что квадратичная форма $L = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ является положительно определенной.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Матрица A квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Для матрицы A характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \text{ или } \lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0.$$

Решая уравнение, найдем $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 4$. Так как корни характеристического уравнения матрицы A положительны, то на основании приведенной теоремы квадратичная форма L — положительно определенная.

Второй способ. Так как главные миноры матрицы A

$$|a_{11}| = 13, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 56$$

положительны, то по критерию Сильвестра данная квадратичная форма L положительно определенная. ▶

3.9. Линейная модель обмена

В качестве примера математической модели экономического процесса, приводящейся к понятию собственного вектора и собственного значения матрицы, рассмотрим *линейную модель обмена* (*модель международной торговли*).

Пусть имеется n стран $S_1, S_2, \dots, S_n$, национальный доход каждой из которых равен соответственно $x_1, x_2, \dots, x_n$. Обозначим коэффициентами a_{ij} долю национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i. Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.32}$$

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

которая получила название *структурной матрицы торговли*. В соответствии с (3.32) сумма элементов любого столбца матрицы A равна 1.

Для любой страны S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выручка от внутренней и внешней торговли составит:

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Для сбалансированной торговли необходима бездефицитность торговли каждой страны S_i, т.е. выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше ее национального дохода:

$$p_i \ge x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если считать, что $p_i > x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & > & x_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & > & x_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & > & x_n. \end{cases} \tag{3.33}$$

Сложив все неравенства системы (3.33), получим после группировки $x_1(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}) + \ldots +$ $+x_n(a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn}) > x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Учитывая (3.32), выражения в скобках равны единице, и мы приходим к противоречивому неравенству

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n > x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Таким образом, неравенство $p_i > x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ невозможно, и условие $p_i \ge x_i$ принимает вид $p_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. (С экономической точки зрения это понятно, так как все страны не могут одновременно получать прибыль.)

Вводя вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ национальных доходов стран, получим матричное уравнение

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \qquad \textbf{(3.34)}$$

В котором вектор $\boldsymbol{x}$ записан в виде вектор-столбца, т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$.

▷ **Пример 3.13.** Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.

Р е ш е н и е. Находим собственный вектор $\boldsymbol{x}$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, решив уравнение $(A - E)x = \mathbf{0}$ или систему

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

методом Гаусса. Найдем $x_1 = (3/2)c$, $x_2 = 2c$, $x_3 = c$, т.е. $\boldsymbol{x} = \left(\frac{3}{2}c;\ 2c;\ c\right)$.

Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $\boldsymbol{x} = \left(\frac{3}{2}c;\ 2c;\ c\right)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран 3/2 : 2 : 1 или 3 : 4 : 2. ▶

УПРАЖНЕНИЯ

3.14. Вычислить $(\vec{a} - \vec{b})^2$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 135°$.

3.15. Построить параллелограмм на векторах $\vec{OA} = (1;\ 1;\ 0)$ и $\vec{OB} = (0;\ -3;\ 1)$ и определить диагонали параллелограмма $\vec{OC}$ и $\vec{AB}$ и их длины.

3.16. Даны векторы $\vec{a}=(4;\ -2;\ 4)$ и $\vec{b}=(4;-2;-4)$. Найти угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$, если $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{d}=2\vec{a}+\vec{b}$.

3.17. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(2;\ 1;\ 0)$ и $\vec{b}=(0;\ -2;\ 1)$.

Выяснить, являются ли векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ линейно зависимыми:

3.18. $\boldsymbol{a}_1=(2;\ -1;\ 3)$, $\boldsymbol{a}_2=(1;\ 4;\ -1)$, $\boldsymbol{a}_3=(0;\ -9;5)$.

3.19. $\boldsymbol{a}_1=(1;\ 2;\ 0)$, $\boldsymbol{a}_2=(3;\ -1;\ 1)$, $\boldsymbol{a}_3=(0;\ 1;\ 1)$.

3.20. Показать, что векторы $\boldsymbol{a}=(1;\ 2;\ 0)$, $\boldsymbol{b}=(3;\ -1;\ 1)$, $\boldsymbol{c}=(0;1;1)$, заданные в базисе $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$, сами образуют базис.

3.21. Даны векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3$, где $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — базис линейного пространства. Доказать, что векторы ***a*, *b* , *c*** образуют базис. Найти координаты вектора $\boldsymbol{d}=$ $=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ в базисе ***a*, *b*, *c***.

3.22. Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5$ образуют ортонормированный базис. Найти скалярное произведение и длины векторов $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_5$, $\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4+2\boldsymbol{e}_5$.

3.23. Найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1$.

3.24. Линейный оператор $\tilde{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ задан матрицей $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Найти образ $\boldsymbol{y}=\tilde{A}(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.

3.25. Линейный оператор $\tilde{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ задан матрицей $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти $\boldsymbol{y}=\tilde{A}(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$.

3.26. В базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ оператор $\tilde{A}$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\tilde{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1^*=\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2^*=2\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$.

Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных матрицами:

3.27. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. **3.28.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Привести к диагональному виду матрицы линейного оператора:

3.29. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **3.30.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3.31. Квадратичную форму $L=2x_1^2+3x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+10x_2x_3$ записать в матричном виде.

3.32. Найти матрицу квадратичной формы

$$L(x_1,\, x_2,\, x_3)=(x_1,\, x_2,\, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

3.33. Дана квадратичная форма $L(x_1,\, x_2)=3x_1^2-x_2^2+4x_1x_2$. Найти квадратичную форму, полученную из данной линейным преобразованием $x_1=2y_1-y_2$, $x_2=y_1+y_2$.

Исследовать на знакоопределенность квадратичные формы:

3.34. $x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$.

3.35. $-2x_2^2-x_1^2-x_1x_3+2x_2x_3-2x_3^2$.

3.36. Найти соотношение цен трех товаров, если наборы этих товаров $\boldsymbol{x}_1$ = (6; 2; 4), $\boldsymbol{x}_2$ = (1; 8; 9), $\boldsymbol{x}_3$ = (3; 5; 9) имеют одинаковую стоимость.

Глава 4

УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

4.1. Уравнение линии на плоскости

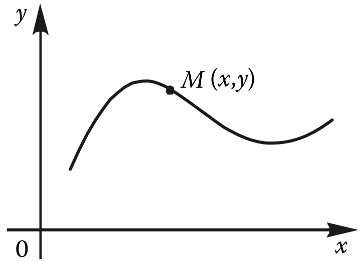


Рис. 4.1

Уравнение линии является важнейшим понятием аналитической геометрии.

Пусть мы имеем на плоскости некоторую линию (кривую) (рис. 4.1). Координаты x и y точки, лежащей на этой линии, не могут быть произвольными, они должны быть определенным образом связаны. Такая связь аналитически записывается в виде некоторого уравнения.

Определение. ***Уравнением линии (кривой) на плоскости*** *Oxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.*

В общем случае уравнение линии может быть записано в виде $F(x, y) = 0$ или (если это возможно) $y = f(x)$, где $F(x, y)$ и $y = f(x)$ — некоторые функции (функции будут рассмотрены в гл. 5).

Если точка $M(x, y)$ передвигается по линии, то ее координаты, изменяясь, удовлетворяют уравнению этой линии. Поэтому координаты $M(x, y)$ называются *текущими* координатами (от слова «текут», меняются).

▷ **Пример 4.1.** Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(-4; 2)$ и $B(-2; -6)$.

Р е ш е н и е. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле (3.5):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Если $M(x, y)$ — произвольная точка искомой линии, то согласно условию имеем $AM = BM$ (рис. 4.2) или, учитывая (3.5),

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+6)^2}\,.$$

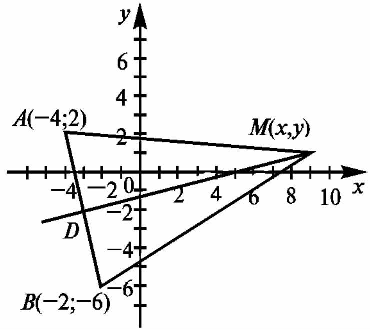


Рис. 4.2

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим после преобразований уравнение $x - 4y - 5 = 0$ или $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

Очевидно, это уравнение прямой MD — перпендикуляра, восставленного из середины отрезка AB (см. рис. 4.2). ▶

Любую линию в принципе можно выразить соответствующим уравнением (хотя на практике это не всегда просто сделать). Однако не всякое уравнение определяет на плоскости некоторую линию.

Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет только одну точку (0; 0), а уравнение $x^2 + y^2 + 7 = 0$ не определяет никакого множества точек, ибо левая часть уравнения не может равняться нулю.

Чтобы убедиться, лежит ли точка $M(a, b)$ на данной линии $F(x, y) = 0$, надо проверить, удовлетворяют ли координаты этой точки уравнению $F(x, y) = 0$.

4.2. Уравнение прямой

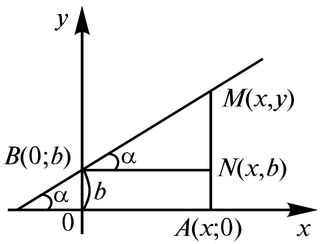


Рис. 4.3

Пусть прямая пересекает ось Oy в точке $B(0; b)$ и образует с осью Ox угол α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) (см. рис. 4.3).

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y)$. Тогда тангенс угла α наклона прямой найдем из прямоугольного треугольника MBN:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y-b}{x}. \qquad \textbf{(4.1)}$$

Введем *угловой коэффициент* прямой $k = \operatorname{tg} \alpha$; получим

$$k = \frac{y-b}{x}$$

и

$$y = kx + b. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Можно показать, что формула (4.2) остается справедливой и для случая $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Итак, мы доказали, что координаты каждой точки прямой удовлетворяют уравнению (4.2). Нетрудно показать, что координаты любой точки, не лежащей на прямой, не удовлетворяют уравнению (4.2).

Уравнение (4.2) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Рассмотрим частные случаи уравнения (4.2).

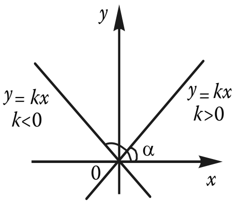


Рис. 4.4

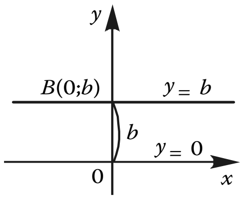


Рис. 4.5

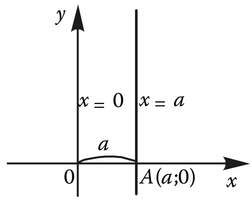


Рис. 4.6

1. Если $b = 0$, то получаем $y = kx$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей при $k = \text{tg}\,\alpha > 0$ острый угол α с осью Ox, а при $k = \text{tg}\,\alpha < 0$ — тупой угол (см. рис. 4.4). В частности, уравнение биссектрисы I и III координатных углов имеет вид $y = x$ (так как $k = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$), а уравнение биссектрисы II и IV координатных углов $y = -x$ ($k = \text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = -1$).

2. Если $\alpha = 0$, то $k = \text{tg}\,0 = 0$, и уравнение прямой, параллельной оси Ox, имеет вид $y = b$, а самой оси Ox – вид $y = 0$ (см. рис. 4.5).

3. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то прямая перпендикулярна оси Ox (см. рис. 4.6) и $k = \text{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует, т.е. вертикальная прямая не имеет углового коэффициента. Предположим, что эта прямая отсекает на оси Ox отрезок, равный a. Очевидно, что уравнение такой прямой $x = a$ (так как абсцисса любой точки прямой равна a), а уравнение оси Oy есть $x = 0$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Пусть прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$ и образует с осью Ox угол $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ (рис. 4.7).

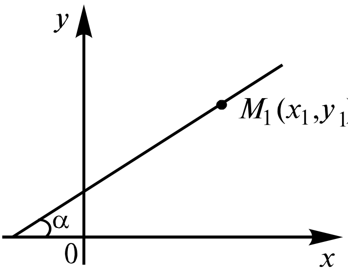


Рис. 4.7

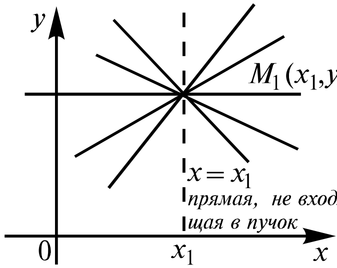


Рис. 4.8

Так как точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению (4.2), т.е.

$$y_1 = kx_1 + b. \qquad \textbf{(4.3)}$$

Вычитая равенство (4.3) из равенства (4.2), получим уравнение искомой прямой

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad \textbf{(4.4)}$$

Уравнение пучка прямых. Если в уравнении (4.4) k — произвольное число, то это уравнение определяет *пучок прямых,* проходящих через точку $M_1(x_1, y_1)$, кроме прямой, параллельной оси Oy и не имеющей углового коэффициента (рис. 4.8).

▷ **Пример 4.2.** 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (3;−2): а) под углом 135° к оси Ox; б) параллельно оси Oy. 2. Найти уравнение пучка прямых.

Р е ш е н и е. 1. а) угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg} 135° = -1$.

Уравнение прямой, проходящей через точку A (3; −2) (см. рис. 4.9), по формуле (4.4) имеет вид $y + 2 = -1(x - 3)$ или $y = -x + 1$.

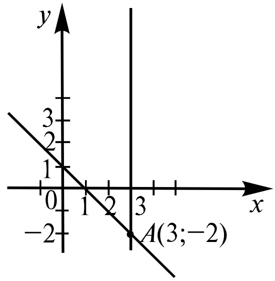


Рис. 4.9

б) Уравнение прямой, параллельной оси Oy, $x = 3$.

2. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку A (3; −2), имеет вид $y + 2 = k(x - 3)$. ▶

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

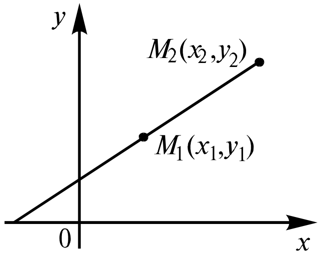


Рис. 4.10

Для составления уравнения прямой $M_1 M_2$ (рис. 4.10) запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку M_1:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Так как точка $M_2(x_2, y_2)$ лежит на данной прямой, то чтобы выделить ее из пучка, подставим координаты точки M_2 в уравнение пучка $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ и найдем угловой коэффициент прямой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Теперь уравнение искомой прямой примет вид

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad \textbf{(4.6)}$$

▷ **Пример 4.3.** Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-5; 4)$ и $B(3; -2)$.

Р е ш е н и е. По уравнению (4.6): $\dfrac{y-4}{-2-4} = \dfrac{x+5}{3+5}$, откуда после преобразований $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}$. ▶

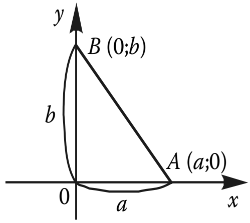


Рис. 4.11

Уравнение прямой в отрезках. Найдем уравнение прямой по заданным отрезкам $a \neq 0$ и $b \neq 0$, отсекаемым на осях координат. Используя (4.6), уравнение прямой, проходящей через точки $A(a; 0)$ и $B(0; b)$ (рис. 4.11), примет вид $\dfrac{y-0}{b-0} = \dfrac{x-a}{0-a}$ или после преобразований

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad \textbf{(4.7)}$$

Уравнение (4.7) называется *уравнением прямой в отрезках.*

▷ **Пример 4.4.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (2; −1), если эта прямая отсекает от положительной полуоси Oy отрезок, вдвое больший, чем на положительной полуоси Ox (рис. 4.12).

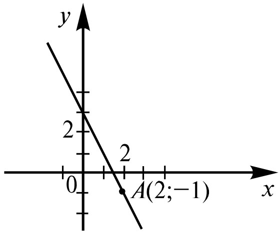


Рис. 4.12

Р е ш е н и е. По условию $b = 2a$ ($a > 0$, $b > 0$). Подставляя это выражение в уравнение (4.7), получим $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{2a} = 1$. Так как точка A (2; −1) лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению, т.е. $\dfrac{2}{a} - \dfrac{1}{2a} = 1$, откуда $a = 1{,}5$.

Итак, уравнение искомой прямой имеет вид $\dfrac{x}{1{,}5} + \dfrac{y}{3} = 1$ или $y = -2x + 3$. ▶

Общее уравнение прямой и его исследование. Рассмотрим уравнение первой степени с двумя переменными в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \qquad \textbf{(4.8)}$$

в котором коэффициенты A и B не равны одновременно нулю, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$.

1. Пусть $B \neq 0$. Тогда уравнение (4.8) можно записать в виде $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$.

Обозначим $k = -A/B$, $b = -C/B$. Если $A \neq 0$, $C \neq 0$, то получим $y = kx + b$ (уравнение прямой с угловым коэффициентом); если $A \neq 0$, $C = 0$, то $y = kx$ (уравнение прямой, проходящей через начало координат); если $A = 0$, $C \neq 0$, то $y = b$ (уравнение прямой, параллельной оси Oy); если $A = 0$, $C = 0$, то $y = 0$ (уравнение оси Ox).

2. Пусть $B = 0$, $A \neq 0$. Тогда уравнение (4.8) примет вид $x = -\dfrac{C}{A}$. Обозначим $a = -C/A$. Если $C \neq 0$, то получим $x = a$ (уравнение прямой, параллельной оси Oy); если $C = 0$, то $x = 0$ (уравнение оси Oy).

Таким образом, *при любых значениях коэффициентов A, B* (*не равных одновременно нулю*) *и C уравнение* (*4.8*) *есть уравнение некоторой прямой линии на плоскости Oxy.*

Уравнение (4.8) называется *общим уравнением прямой.* Заметим, что в отличие от уравнения пучка прямых (4.4) общее уравнение (4.8) включает и уравнение любой вертикальной прямой, параллельной оси *Oy.*

4.3. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой

Угол между двумя прямыми. Пусть заданы две прямые

$y = k_1 x + b_1$ (1),

$y = k_2 x + b_2$ (2)

и требуется определить угол φ между ними.

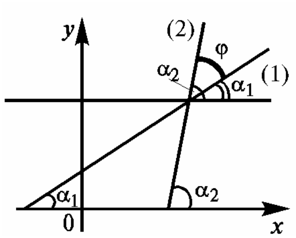


Рис. 4.13

Из рис. 4.13 видно, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, причем $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$,

$\alpha_1 \neq \pi/2$, $\alpha_2 \neq \pi/2$.

Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \qquad \textbf{(4.9)}$$

где стрелка означает, что угол φ получается поворотом прямой (1) к прямой (2) против часовой стрелки.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Если прямые $y = k_1 x + b_1$ (1) и $y = k_2 x + b_2$ (2) параллельны, то угол $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$, откуда из формулы (4.9) $k_1 = k_2$. И наоборот, если $k_1 = k_2$, то по формуле (4.9) $\operatorname{tg}\varphi = 0$ и $\varphi = 0$. Таким образом, *равенство угловых коэффициентов является необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых.*

Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = \pi/2$, при этом $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}(\pi/2) = 0$ или $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \dfrac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$, откуда $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$

или $k_1 k_2 = -1$. Справедливо также и обратное утверждение. Таким образом, *для перпендикулярности прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были обратны по величине и противоположны по знаку.*

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ (1) и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ (2), то учитывая, что их угловые коэффициенты $k_1 = -A_1/B_1$ и $k_2 = -A_2/B_2$, условие параллельности прямых $k_1 = k_2$ примет вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Следовательно, *условием параллельности прямых, заданных общими уравнениями, является пропорциональность коэффициентов при переменных.*

Условие перпендикулярности прямых $k_1 k_2 = -1$ в этом случае примет вид $\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$ или $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$, т.е. *условием перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями, является равенство нулю суммы произведений коэффициентов при переменных x и y.*

▷ **Пример 4.5.** Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку A (2; 1), одна из которых параллельна прямой $3x - 2y + 2 = 0$, а другая перпендикулярна той же прямой.

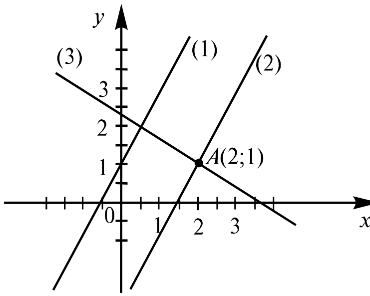


Рис. 4.14

Р е ш е н и е. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку A (2; 1), имеет вид $y - 1 = k(x-2)$. Из этого пучка надо выделить две прямые (2) и (3) — параллельную и перпендикулярную данной (рис. 4.14). Угловой коэффициент прямой (1) $k_1 = 3/2$ (так как уравнение прямой (1) можно представить в виде $y = \frac{3}{2}x + 1$). По условию параллельности угловой коэффициент прямой (2) $k_2 = k_1 = 3/2$ и ее уравнение имеет вид $y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2)$ или $3x - 2y - 4 = 0$. По условию перпендикулярности угловой коэффициент прямой (3) $k_3 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{2}{3}$ и уравнение этой прямой $y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2)$ или $2x + 3y - 7 = 0$.

Задачу можно решить и другим способом. Прямая $Ax + By + C = 0$ будет параллельна прямой $3x - 2y + 2 = 0$, если ее коэффициенты при x и y пропорциональны, т.е. $\frac{A}{3} = \frac{B}{-2}$. Взяв $A = 3$, $B = -2$ (при коэффициенте пропорциональности, равном 1), получим уравнение $3x - 2y + C = 0$. Коэффициент C найдем с учетом того, что координаты точки A (2; 1), лежащей на прямой, должны удовлетворять ее уравнению, т.е. $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + C = 0$, откуда $C = 4$ и уравнение прямой (2) $3x - 2y - 4 = 0$.

Уравнение прямой, перпендикулярной данной $3x - 2y + 2 = 0$, будет иметь вид: $2x + 3y + C = 0$ (ибо в этом случае сумма произведений коэффициентов при переменных x и y равна нулю, т.е. $3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 0$). Теперь подставляя координаты точки A (2; 1) в уравнение прямой, получим $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + C = 0$, откуда $C = -7$ и уравнение прямой (3) $2x - 3y - 7 = 0$. ▶

Точка пересечения прямых. Пусть даны две прямые $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Очевидно, координаты их точки пересечения должны удовлетворять уравнению каждой прямой, т.е. они могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Если прямые не параллельны, т.е. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то решение системы дает единственную точку пересечения прямых.

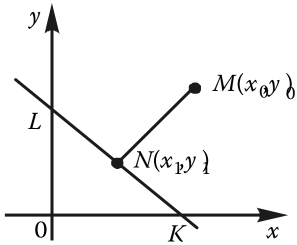


Рис. 4.15

Расстояние от точки до прямой. Пусть даны точка $M(x_0, y_0)$ и прямая $Ax + By + C = 0$. Под расстоянием от точки M до прямой KL понимается длина перпендикуляра $d = MN$, опущенного из точки M на прямую KL (рис. 4.15). Для определения расстояния d необходимо: а) составить уравнение прямой MN, перпендикулярной данной и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$; б) найти точку $N(x_1, y_1)$ пересечения прямых, решив систему уравнений этих прямых; в) по формуле (3.5) определить расстояние между двумя точками, т.е. найти $d = MN$. В результате преобразований получим

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \textbf{(4.10)}$$

(доказательство формулы (4.10) опускаем).

▷ **Пример 4.6.** Найти расстояние между параллельными прямыми

$3x + 4y - 24 = 0$ и $3x + 4y + 6 = 0$.

Р е ш е н и е. Возьмем на одной из прямых, например прямой $3x + 4y - 24 = 0$, произвольную точку A (0; 6) (рис. 4.16). Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки A до прямой $3x + 4y + 6 = 0$:

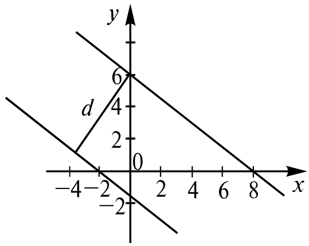


Рис. 4.16

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6. \blacktriangleright$$

4.4. Окружность и эллипс

Изучение *кривых второго порядка,* описываемых уравнениями второй степени с двумя переменными, начнем с окружности.

Пусть дана окружность радиуса R с центром $O'(x_0, y_0)$ (рис. 4.17). Найдем ее уравнение. Для произвольной точки M (x, y) окружности выполняется равенство $OM = R$. Используя формулу (3.5) расстояния между двумя точками, получим $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$ или после возведения в квадрат (двух положительных частей уравнения) получим равносильное уравнение

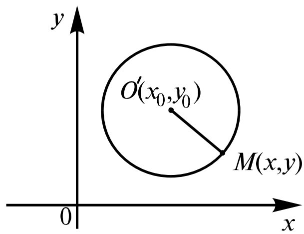


Рис. 4.17

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad \textbf{(4.11)}$$

Итак, координаты каждой точки окружности M (x, y) удовлетворяют уравнению (4.11). Нетрудно показать, что координаты любой точки, не лежащей на окружности, этому уравнению не удовлетворяют.

Уравнение (4.11) называется *нормальным уравнением* ***окружности.*** В частности, уравнение окружности с центром в начале координат ($x_0 = y_0 = 0$) имеет вид

$$x^2+\ y^2=\ R^2\,. \qquad \textbf{(4.12)}$$

Рассмотрим уравнение второй степени с двумя переменными в общем виде

$$A\,x^2+Bxy+C\,y^2+Dx+Ey+\ F=0, \qquad \textbf{(4.13)}$$

в котором A, B и C не равны нулю одновременно, т.е. $A^2\ +\ B^2\ + +C^2\ \neq 0$. Выясним, при каких условиях это уравнение является уравнением окружности. С этой целью представим уравнение (4.11) в виде

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2=0. \qquad \textbf{(4.14)}$$

Чтобы уравнения (4.13) и (4.14) представляли одну и ту же линию, коэффициент B должен равняться нулю, т.е. $B=0$, а все остальные коэффициенты — пропорциональны, в частности $\dfrac{A}{1}=\dfrac{C}{1}$, откуда $A\ =\ C\neq 0$ (ибо $A^2+B^2+C^2\neq 0$, а $B\ =0$). Тогда получим уравнение

$$A\,x^2+A\,y^2+Dx+Ey+\ F=0, \qquad \textbf{(4.15)}$$

называемое *общим уравнением окружности.*

Поделив обе части уравнения на $A\neq 0$ и дополнив члены, содержащие x и y, до полного квадрата, получим

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}\,. \qquad \textbf{(4.16)}$$

Сравнивая уравнение (4.16) с уравнением окружности (4.11), можно сделать вывод, что уравнение (4.13) есть уравнение действительной окружности, если 1) $A\ =\ C$; 2) $B\ =0$; 3) $D^2+\ E^2- -4AF\ >\ 0$. При выполнении этих условий центр окружности (4.13) расположен в точке $O\left(-\dfrac{D}{2A};-\dfrac{E}{2A}\right)$, а ее радиус $R\ = =\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2|A|}$.

▷ **Пример 4.7.** Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + 16y - 9 = 0.$$

Р е ш е н и е. Дополнив члены, содержащие y, до полного квадрата, получим

$x^2 + (y^2 + 16y + 64) - 64 - 9 = 0$, или

$x^2 + (y+8)^2 = 73$, т.е. центр окружности в точке $O\,(0;\ -8)$, а ее радиус $R = \sqrt{73}$. ▶

Рассмотрим уравнение кривой второго порядка (4.13), в котором по-прежнему будем полагать $B = 0$. Перепишем уравнение в виде

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

или

$$A\,(x - x_0)^2 + C\,(y - y_0)^2 = \delta,$$

где

$$x_0 = -\frac{D}{2A};\ y_0 = -\frac{E}{2C};\ \delta = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F.$$

Будем предполагать для простоты исследования, что центр кривой находится в начале координат, т.е. $x_0 = y_0 = 0$. Тогда уравнение кривой примет вид

$$Ax^2 + Cy^2 = \delta. \qquad \textbf{(4.17)}$$

Кривая второго порядка (4.17) называется ***эллипсом*** (точнее *кривой эллиптического типа*), если коэффициенты A и C имеют одинаковые знаки.

Для определенности будем полагать, что $A > 0$, $C > 0$ (в противном случае обе части уравнения можно умножить на (-1).

Возможны три случая:

а) $\delta > 0$; б) $\delta = 0$; в) $\delta < 0$.

Очевидно, что в третьем случае (при $\delta < 0$) кривая (4.17) не имеет действительных точек, а во втором случае (при $\delta = 0$) кривая (4.17) представляет собой одну точку $O\,(0;\ 0)$. Поэтому остановимся на первом случае ($\delta > 0$).

Получаемое при этом уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(4.18)}$$

называется *каноническим уравнением эллипса* с полуосями $a = \sqrt{\frac{\delta}{A}}$ и $b = \sqrt{\frac{\delta}{C}}$ (рис. 4.18). При $a = b$ уравнение (4.18) представляет частный случай — уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

Точки $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$, где[1]

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}\,, \tag{4.19}$$

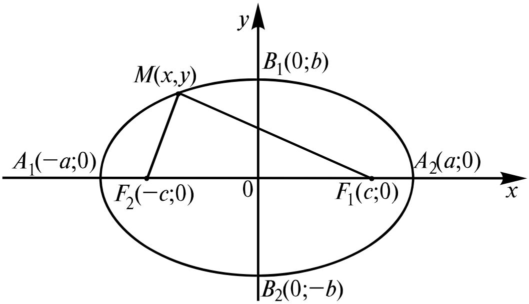


Рис. 4.18

называются *фокусами* эллипса, а отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{4.20}$$

его *эксцентриситетом*. Эксцентриситет характеризует форму эллипса. Очевидно, что $0 \le \varepsilon \le 1$, причем для окружности $\varepsilon = 0$.

Точки $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0)$, $B_1(0;\ b)$, $B_2(0;\ -b)$ называются *вершинами* эллипса.

Найдем сумму расстояний от любой точки эллипса $M\ (x,\ y)$ до ее фокусов, используя формулу (3.5):

$$d = F_2M + MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

С учетом (4.18) — (4.20)

$$F_2M = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + (a^2 - b^2) + (b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2)} =$$

$$= \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{(\frac{c}{a}x + a)^2} = a + \varepsilon x.$$

---

[1] Полагаем $a \ge b$ (этого всегда можно добиться путем надлежащего выбора осей Ox и Oy).

Аналогично можно получить, что $MF_1 = a - \varepsilon x$. В результате $d = F_2M + MF_1 = (a + \varepsilon x) + (a - \varepsilon x) = 2a$, т.е. *для любой точки эллипса сумма расстояний этой точки до фокусов есть величина постоянная, равная* $2a$. Это *характеристическое свойство эллипса* часто принимается за определение эллипса.

▷ **Пример 4.8.** Определить вид и расположение кривой

$$x^2 + 2y^2 - 4x + 16y = 0. \quad \textbf{(4.21)}$$

Р е ш е н и е. Так как $A = 1$ и $C = 2$ — числа одного знака, то данное уравнение кривой — эллиптического типа. Дополняя члены, содержащие x и y, до полного квадрата, получим $(x-2)^2 + 2(y+4)^2 = 36$ или

$$\frac{(x-2)^2}{6^2} + \frac{(y+4)^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1.$$

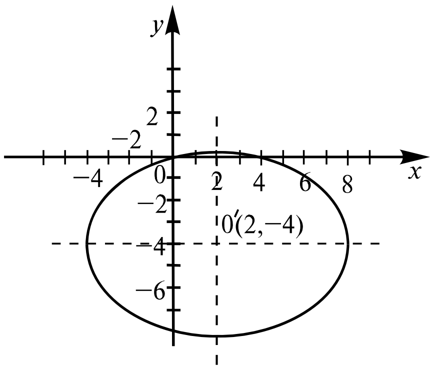


Рис. 4.19

Следовательно, кривая (4.21) представляет эллипс с полуосями $a = 6$ и $b = 3\sqrt{2}$, центр которого находится в точке $O'(2; -4)$ (рис. 4.19). ▶

4.5. Гипербола и парабола

Кривая второго порядка (4.17) называется ***гиперболой*** (точнее *кривой гиперболического типа*), если коэффициенты A и C имеют противоположные знаки, т.е. $AC < 0$.

Пусть для определенности $A > 0$, $C < 0$. Возможны три случая: 1) $\delta > 0$; 2) $\delta = 0$; 3) $\delta < 0$.

В первом случае (при $\delta > 0$) имеем гиперболу, каноническое уравнение которой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \textbf{(4.22)}$$

где $a = \sqrt{\dfrac{\delta}{A}}$ — действительная полуось; $b = \sqrt{\dfrac{\delta}{-C}}$ — мнимая полуось (рис. 4.20).

Фокусы гиперболы — точки $F_1(c;\ 0)$ и $F_2(-c;\ 0)$, где $c = \sqrt{a^2+b^2}$, а ее эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ принимает любые значения, бо́льшие 1. Вершины гиперболы — точки $A_1(a;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0)$.

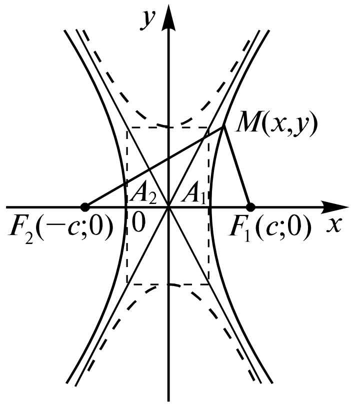


Рис. 4.20

Можно показать (аналогично тому, как мы поступали при исследовании эллипса), что *для любой точки гиперболы абсолютная величина разности ее расстояний до фокусов есть величина постоянная, равная* $2a$: $d = |F_2M - MF_1| = 2a$. Это *характеристическое свойство гиперболы* часто принимается за определение гиперболы.

Перепишем уравнение гиперболы (4.21) в виде

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,. \qquad \mathbf{(4.23)}$$

При достаточно больших x $\sqrt{x^2-a^2} \approx \sqrt{x^2} = x$ и уравнение (4.23) примет вид $y \approx \pm\dfrac{b}{a}x$, т.е. при $x \to \infty$ ветви гиперболы как угодно близко подходят к прямым $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, называемым *асимптотами гиперболы*.

Для равносторонней гиперболы ($a = b$) $x^2 - y^2 = a^2$ асимптоты $y = \pm x$ взаимно перпендикулярны и представляют биссектрисы координатных углов.

Во втором случае (при $\delta = 0$) уравнение кривой (4.17) примет вид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, т.е. получаем пару пересекающихся прямых

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ и } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

В третьем случае (при $\delta < 0$) получим гиперболу $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

с полуосями $a = \sqrt{\dfrac{\delta}{-A}}$ и $b = \sqrt{\dfrac{\delta}{C}}$, называемую *сопряженной* с гиперболой (4.22) (на рис. 4.20 она изображена пунктиром).

▷ **Пример 4.9.** Написать уравнение гиперболы с асимптотами $y = \pm\dfrac{3}{4}x$, проходящими через точку (6; 3/2). Найти расстояние между ее вершинами.

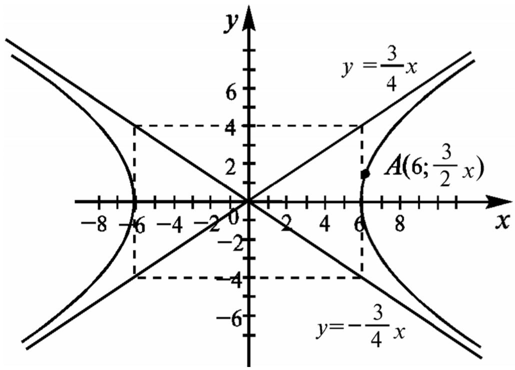


Рис. 4.21

Р е ш е н и е. Так как точка (6; 3/2) лежит на гиперболе, то ее координаты должны удовлетворять уравнению (4.22) $\dfrac{36}{a^2} - \dfrac{9}{4b^2} = 1$. Кроме того, $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4}$, так как асимптоты гиперболы $y = \pm\dfrac{3}{4}x$. Решая полученную систему двух уравнений, найдем $a = 4\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$, т.е. уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{32} - \dfrac{y^2}{18} = 1$ (рис. 4.21). Расстояние между вершинами гиперболы равно $2a = 8\sqrt{2}$. ▶

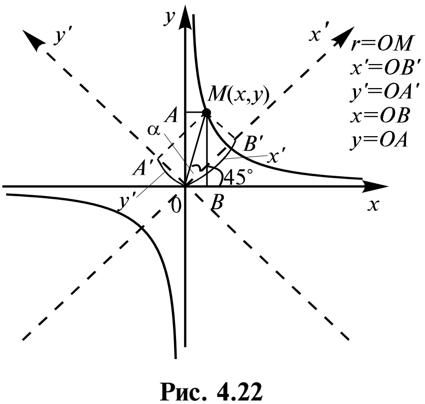


Рис. 4.22

Рассмотрим **обратную пропорциональную зависимость**, задаваемую уравнением $y = \dfrac{m}{x}$ или

$$xy = m. \qquad \textbf{(4.24)}$$

Выбрав в качестве новых осей Ox' и Oy' биссектрисы координатных углов (рис. 4.22), представим уравнение (4.24) через новые координаты x' и y'. Пусть $OM = r$, тогда

$$x = r\cos(45°+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\cos\alpha - r\sin\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = r\sin(45°+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\cos\alpha + r\sin\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

так как из $\Delta\ OMB'$ $r\cos\alpha = x'$, $r\sin\alpha = y'$.

Теперь уравнение (4.24) в новой системе координат $Ox'y'$ примет вид $x'^2 - y'^2 = 2m$, т.е. *график обратной пропорциональной зависимости есть равносторонняя гипербола с асимптотами — осями координат*.

При $m > 0$ ветви гиперболы расположены в I и III квадрантах, при $m < 0$ — во II и IV квадрантах. Нетрудно установить, что координаты любой вершины гиперболы равны (по абсолютной величине), т.е. $|x| = |y| = \sqrt{|m|}$, а их знаки определяются в зависимости от квадранта, в котором расположена каждая вершина.

Рассмотрим график **дробно-линейной функции**

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad \textbf{(4.25)}$$

где $c \neq 0$, $bc - ad \neq 0$.

Преобразуя (4.25), получим

$$y = \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left[\left(x+\frac{d}{c}\right)+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right]}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)/c^2}{x+\frac{d}{c}}.$$

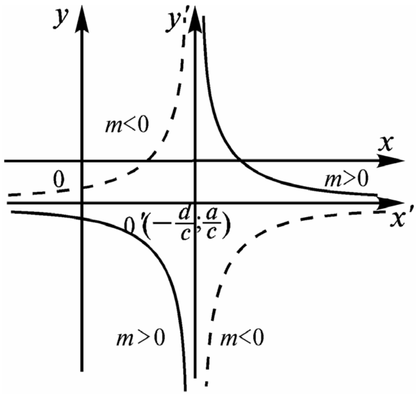


Рис. 4.23

Введем новые координаты

$$x + \frac{d}{c} = x', \; y - \frac{a}{c} = y'.$$

Обозначим $m = (bc - ad)/c^2$. Тогда в новой системе координат $Ox'y'$, полученной параллельным переносом осей координат, с новым центром в точке $O'\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ (см. рис. 4.23) уравнение примет вид $y' = \frac{m}{x'}$ или $x'y' = m$.

Итак, *график дробно-линейной функции* (4.25) *есть равносторонняя гипербола с асимптотами* $x = -\dfrac{d}{c}$; $y = \dfrac{a}{c}$, *параллельными осям координат.*

▷ **Пример 4.10.** Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот гиперболы $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение, выделив целую часть дробно-линейной функции:

$$y = \frac{-2(x+1)+5}{x+1} = -2 + \frac{5}{x+1}$$

или $y + 2 = \dfrac{5}{x+1}$, откуда

$$(x+1)\ (y + 2) = 5.$$

Полагая $x + 1 = x'$, $y + 2 = y'$, получим $x'y' = 5$, т.е. заданное уравнение есть уравнение равносторонней гиперболы с центром $O'(-1;-2)$ и асимптотами $x + 1 = 0$, $y + 2 = 0$ (рис. 4.24). Так как $m = 5 > 0$, то гипербола располагается в I и III квадрантах, а новые координаты ее вершин $(\pm\sqrt{5};\ \pm\sqrt{5})$. Переходя к старым координатам по формулам $x = x' - 1$, $y = y' - 2$, найдем старые координаты вершин гиперболы $A\,(-\sqrt{5}-1;\ -\sqrt{5}-2)$, $B\,(\sqrt{5}-1;\ \sqrt{5}-2)$. ▶

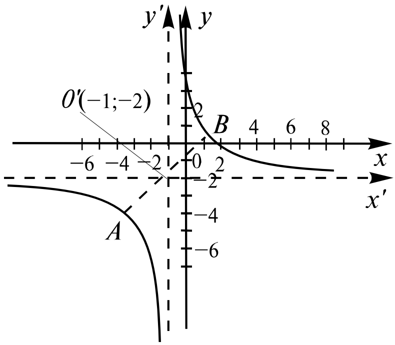


Рис. 4.24

Пусть в уравнении кривой второго порядка (4.13) $B = 0$, а также один из коэффициентов A или C равен нулю; для определенности $A = 0$, $C \neq 0$, т.е.

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad \textbf{(4.26)}$$

Пусть также $D \neq 0$ (в противном случае мы имели бы пару параллельных горизонтальных прямых $y = y_1$ и $y = y_2$, где y_1 и y_2 — корни уравнения $Cy^2 + Ey + F = 0$ или отсутствие каких-либо линий и точек вообще). Дополним члены, содержащие y, до полного квадрата

$$C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-Dx-F+\frac{E^2}{4C}.$$

Полагая $x_0=-\frac{F}{D}+\frac{E^2}{4DC}$, $y_0=-\frac{E}{2C}$, $2p=-\frac{D}{C}$, получим

$$(y-y_0)^2=2p\,(x-x_0). \tag{4.27}$$

Кривая (4.27) называется ***параболой***, а точка $O'(x_0, y_0)$ — *вершиной* параболы, p — *параметром* параболы. При $p>0$ ветви параболы направлены вправо, при $p<0$ — влево (рис. 4.25). Прямая $y=y_0$ является осью симметрии параболы.

Если вершина параболы находится в начале координат, то уравнение (4.27) принимает вид

$$y^2=2px. \tag{4.28}$$

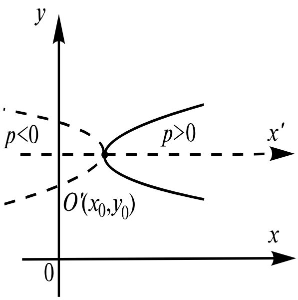


Рис. 4.25

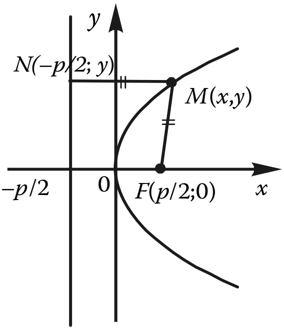


Рис. 4.26

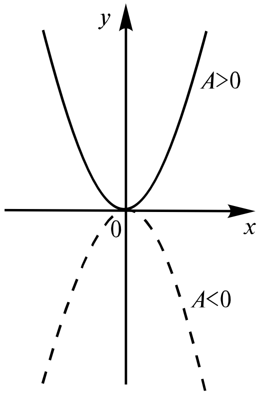


Рис. 4.27

Точка $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ называется *фокусом* параболы, а прямая $x=-\frac{p}{2}$ — ее *директрисой*.

Для произвольной точки M $(x,\ y)$ параболы расстояние до фокуса по формуле (3.5) равно

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

(так как $x + \frac{p}{2} \geq 0$). С другой стороны, расстояние до директрисы $MN = x + \frac{p}{2}$ (рис. 4.26).

Таким образом, *парабола представляет множество всех точек плоскости, равноотстоящих от данной точки* (*фокуса*) *и от данной прямой* (*директрисы*). Это *характеристическое свойство параболы* часто принимается за определение параболы.

Если в уравнении (4.28) поменять местами x и y, то получим $x^2 = 2py$ — уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси ординат. Это уравнение обычно записывают в виде $y = Ax^2$, где $A = \frac{1}{2p}$. При $A > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $A < 0$ — вниз (рис. 4.27).

Рассмотрим **квадратный трехчлен** $y = Ax^2 + Bx + C$ $(A \neq 0)$.

Отсюда $y = A(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A})$. Дополнив выражение, стоящее в скобках, до полного квадрата, получим

$$y = A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right] = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}. \qquad \textbf{(4.29)}$$

Обозначив $x + \frac{B}{2A} = x'$, $y - \frac{4AC - B^2}{4A} = y'$, в новой системе координат $O'x'y'$ с центром $O'(-\frac{B}{2A}, \frac{4AC - B^2}{4A})$ уравнение (4.29) примет вид $y' = Ax'^2$.

Таким образом, график квадратного трехчлена $y = Ax^2 + Bx + C$ есть парабола с вершиной в точке $O'(-\frac{B}{2A}, \frac{4AC - B^2}{4A})$ и осью симметрии $x = -\frac{B}{2A}$, параллельной оси Oy.

▷ **Пример 4.11.** Построить кривую $y = -3x^2 + 10x - 3$.

Р е ш е н и е. Выносля коэффициент при x^2 и дополняя правую часть уравнения до полного квадрата, получим

$$y = -3\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right) = -3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + 1 - \frac{25}{9}\right] = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}$$

или $y - \dfrac{16}{3} = -3\left(x - \dfrac{5}{3}\right)^2$. Полагая

$$x - \frac{5}{3} = x', \quad y - \frac{16}{3} = y',$$

получим

$$y' = -3x'^2.$$

Таким образом, заданная кривая есть парабола с вершиной в точке $O'\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{16}{3}\right)$ и осью симметрии $O'y'$, параллельной оси Oy (рис. 4.28). ▶

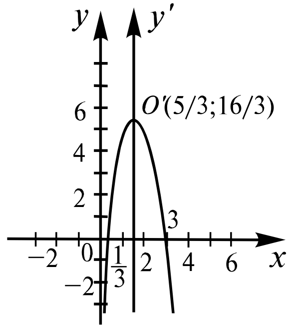


Рис. 4.28

4.6. Решение задач

▷ **Пример 4.12.** Даны уравнения сторон треугольника $3x - 4y + 24 = 0$ (AB), $4x + 3y + 32 = 0$ (BC), $2x - y - 4 = 0$(AC). Составить уравнение высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины B, и найти их длины.

Р е ш е н и е. 1. Найдем координаты вершин треугольника, решив соответствующие системы уравнений сторон. Так, координаты вершины B определим из системы уравнений прямых AB и BC:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 24 = 0, \\ 4x + 3y + 32 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = -8$, $y = 0$, т.е. $B(-8; 0)$.

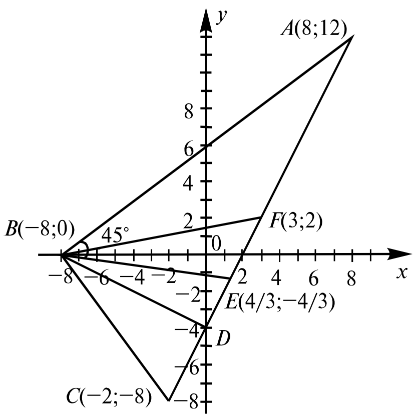


Рис. 4.29

Аналогично находим координаты вершин A и C, решив системы уравнений прямых AB и AC, AC и BC: $A(8; 12)$, $C(-2; -8)$ (рис. 4.29).

2. Пучок прямых, проходящих через точку B (−8; 0), по формуле (4.4) имеет вид:

$$y = k\,(x + 8). \qquad \textbf{(4.30)}$$

Из уравнения прямой AC следует, что ее угловой коэффициент $k_{AC} = 2$. На основании условия перпендикулярности двух прямых $k_{BD} = \dfrac{-1}{k_{AC}} = -\dfrac{1}{2}$. Уравнение высоты BD примет вид $y = -\dfrac{1}{2}(x + 8)$ или $x + 2y + 8 = 0$.

3. Из школьного курса математики известно, что координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат его концов, т.е.

$$x_F = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_F = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Поэтому $x_F = \dfrac{8 + (-2)}{2} = 3$, $y_F = \dfrac{12 + (-8)}{2} = 2$, т.е. F (3; 2).

По формуле (4.5) угловой коэффициент

$$k_{BF} = \frac{y_F - y_B}{x_F - x_B} = \frac{2 - 0}{3 - (-8)} = \frac{2}{11}.$$

Подставляя $k = \dfrac{2}{11}$ в формулу (4.30), получим уравнение медианы BF:

$$y = \frac{2}{11}(x + 8) \text{ или } 2x - 11y + 16 = 0$$

(уравнение BF можно было получить и по формуле (4.6) как уравнение прямой, проходящей через две точки: B (−8; 0) и F (3; 2)).

4. Из уравнений прямых $3x - 4y + 24 = 0$ (AB) и $4x + 3y + 32 = 0$ (BC) следует, что они перпендикулярны, так как их угловые коэффициенты $k_{AB} = \dfrac{3}{4}$ и $k_{BC} = -\dfrac{4}{3}$ обратны по величине и противоположны по знаку. Поэтому биссектриса BE образует с каждой из этих сторон угол 45°. По формуле (4.9)

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{k_{AB} - k_{BE}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BE}} = \frac{\frac{3}{4} - k_{BE}}{1 + \frac{3}{4} k_{BE}} = 1,$$

откуда $k_{BE} = -\frac{1}{7}$. Теперь по формуле (4.30) получим уравнение биссектрисы BE

$$y = -\frac{1}{7}(x + 8) \text{ или } x + 7y + 8 = 0.$$

(Если «не заметить», что $AB \perp BC$, то угловой коэффициент биссектрисы k_{BE} можно найти из равенства $\operatorname{tg}\angle CBE = \operatorname{tg}\angle EBA$, т.е.

$$\frac{k_{AB} - k_{BE}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BE}} = \frac{k_{BE} - k_{BC}}{1 + k_{BE} \cdot k_{BC}} \text{ или } \frac{\frac{3}{4} - k_{BE}}{1 + \frac{3}{4} k_{BE}} = \frac{k_{BE} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3} k_{BE}}.$$

Решая уравнение, найдем два корня $(k_{BE})_1 = -\frac{1}{7}$ и $(k_{BE})_2 = 7$, из которых чертежу задачи удовлетворяет первый корень.)

5. Длину медианы BF найдем по формуле (3.5) расстояния между двумя точками $A\,(-8;\,0)$ и $F\,(3;\,2)$:

$$d_{BF} = \sqrt{(3+8)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11{,}2.$$

6. Для нахождения длины биссектрисы BE найдем вначале координаты ее точки пересечения E со стороной AC, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + 7y + 8 = 0. \end{cases}, \text{ откуда } x = \frac{4}{3};\ y = -\frac{4}{3}, \text{ т.е. } E\left(\frac{4}{3};\ -\frac{4}{3}\right).$$

Теперь по формуле (3.5)

$$d_{BE} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} + 8\right)^2 + \left(-\frac{4}{3} - 0\right)^2} = \frac{20\sqrt{2}}{3} \approx 9{,}4.$$

7. Длину высоты BD можно было найти аналогично тому, как находили длину биссектрисы. Но проще это сделать по формуле (4.10) расстояния от точки $B\,(-8;\,0)$ до прямой $2x - y - 4 = 0$ (AC):

$$d_{BD} = \frac{|2(-8) + (-1) \cdot 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}9. \ ▶$$

▷ **Пример 4.13.** Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через центр гиперболы $y = \dfrac{4x-4}{2x+1}$ и вершину параболы $y=-x^2+2x-\dfrac{1}{3}$. Составить уравнение окружности, касающейся гиперболы в ее вершинах.

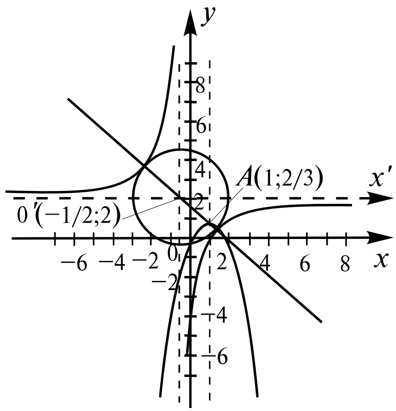


Рис. 4.30

Р е ш е н и е. 1. В уравнении гиперболы выделим целую часть; получим

$$y = \frac{4(x-1)}{2(x+\frac{1}{2})} = \frac{4(x+\frac{1}{2})-6}{2(x+\frac{1}{2})} = 2-$$

$-\dfrac{3}{x+\dfrac{1}{2}}$, откуда $y-2=-\dfrac{3}{x+\dfrac{1}{2}}$

или $(x+\dfrac{1}{2})(y-2)=-3$.

Полагая $x+\dfrac{1}{2}=x'$, $y-2=y'$, получим в новой системе координат $O'x'y'$ с центром $O'(-\dfrac{1}{2};\ 2)$ гиперболу $x'y'=-3$, ветви которой расположены во II и IV квадрантах (рис. 4.30).

2. Выделив полный квадрат, представим уравнение параболы в виде

$$y = -x^2+2x-\frac{1}{3} = -(x-1)^2-\frac{1}{3}+1 = -(x-1)^2+\frac{2}{3},$$

откуда следует, что вершина параболы находится в точке $A\ (1;\ \dfrac{2}{3})$, а ветви ее направлены вниз.

3. Составляем уравнение прямой $O'A$ по формуле (4.5)

$$\frac{y-2}{\frac{2}{3}-2} = \frac{x+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \text{ или } 8x+9y-14=0.$$

4. Находим расстояние от точки O (0; 0) до прямой $8x + 9y -$ $- 14 = 0$ по формуле (4.10)

$$d = \frac{|8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 - 14|}{\sqrt{8^2 + 9^2}} = \frac{14}{\sqrt{145}} \approx 1{,}2.$$

5. Очевидно, что центр искомой окружности должен совпасть с центром гиперболы $O'(-\frac{1}{2}; 2)$ и иметь радиус R, равный расстоянию от точки O' до любой из вершин гиперболы. Для гиперболы $x'y' = m$ координаты любой вершины (по абсолютной величине) $|x'| = |y'| = \sqrt{|m|}$, поэтому расстояние ее от нового начала координат (0; 0) по формуле (3.5) равно $\sqrt{2|m|}$. Следовательно, $R = \sqrt{2|m|} = \sqrt{2|-3|} = \sqrt{6}$. Итак, уравнение искомой окружности по формуле (4.11) есть $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 = 6$. ▶

4.7. Понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве

Общее уравнение плоскости. Пусть плоскость Q проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$ (рис. 4.31).

Этими условиями определяется единственная плоскость в пространстве $Oxyz$. Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости Q. Возьмем в плоскости Q произвольную точку $M(x, y, z)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ будет перпендикулярен вектору $\vec{n} = (A, B, C)$. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю, т.е. $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$.

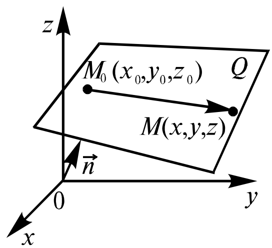


Рис. 4.31

Полученное уравнение представим в координатной форме:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad \textbf{(4.31)}$$

Уравнение (4.31) представляет *уравнение плоскости*, перпендикулярной данному вектору $\vec{n}_1 = (A,\ B,\ C)$ и проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Уравнение плоскости, записанное в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \textbf{(4.32)}$$

(где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$), называется *общим уравнением плоскости.*

Можно доказать, что *всякое уравнение первой степени с тремя переменными есть уравнение плоскости.*

Если $D = 0$, то уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат. Другие частные случаи определяются расположением нормального вектора $\vec{n}_1 = (A,\ B,\ C)$. Так, например, если $A = 0$, то уравнение $By + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox; если $A = D = 0$, то уравнение $By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через ось Ox; если $A = B = 0$, то уравнение $Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости Oxy; если $A = B = D = 0$, то уравнение $Cz = 0$ (или $z = 0$) определяет координатную плоскость Oxy.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей определяются условиями коллинеарности и перпендикулярности нормальных векторов $\vec{n}_1 = (A_1,\ B_1, C_1)$ и $\vec{n}_1 = (A_2,\ B_2,\ C_2)$.

Условием параллельности двух плоскостей является пропорциональность коэффициентов при одноименных переменных

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

а условием их перпендикулярности

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей, т.е. как множество точек, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Если прямая параллельна вектору $\vec{s} = (m, n, p)$ (называемому *направляющим вектором*) и проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 4.32), то ее уравнения могут быть получены из условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_2, z - z_1)$ (где $M(x, y, z)$ — произвольная точка прямой) и $\vec{s} = (m, n, p)$:

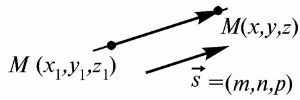


Рис. 4.32

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями прямой линии в пространстве.*

УПРАЖНЕНИЯ

4.14. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от оси Oy и точки $F(4; 0)$.

4.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$: а) параллельно оси Ox; б) параллельно оси Oy; в) составляющей с осью Ox угол 45°.

4.16. Составить уравнение прямой, проходящей через точки: а) $A(3; 1)$ и $B(5; 4)$; б) $A(3; 1)$ и $C(3; 5)$; в) $A(3; 1)$ и $D(-4; 1)$.

4.17. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.

4.18. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2x - 3y + 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ параллельно и перпендикулярно прямой $y = x + 1$.

4.19. Найти длину и уравнение высоты BD в треугольнике с вершинами $A(-3; 0)$, $B(2; 5)$; $C(3; 2)$.

4.20. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4; 3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 3 кв. ед.

4.21. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ и $C(4; 0)$. Найти уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и длину медианы AE.

4.22. В треугольнике ABC даны уравнения: стороны AB $3x + 2y - 12 = 0$, высоты BM $x + 2y - 4 = 0$, высоты AM $4x + y - 6 = 0$, где M — точка пересечения высот. Найти уравнения сторон AC, BC и высоты CM.

4.23. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y = x - 2$ и $x - 5y + 6 = 0$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.

4.24. Составить уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2 + y^2 = 5$ и $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 31 = 0$. Найти отношение радиусов окружностей.

4.25. Ординаты всех точек окружности $x^2 + y^2 = 36$ сокращены втрое. Написать уравнение полученной новой кривой.

4.26. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $M_1(4;\ 4\sqrt{5}/3)$ и $M_2(0;\ 4)$. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

4.27. Для гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$ найти действительную и мнимую полуоси; координаты фокусов; эксцентриситет; уравнения асимптот.

4.28. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы — в вершинах эллипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

4.29. Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот гиперболы $y = \dfrac{4-5x}{x-1}$.

4.30. Составить уравнение параболы, проходящей через точки: а) (0; 0) и (−1; −3) симметрично относительно оси Ox; б) (0; 0) и (2; −4) симметрично относительно оси Oy.

4.31. Найти уравнения параболы и ее директрисы, если известно, что парабола имеет вершину в начале координат и симметрична относительно оси Ox и что точка пересечения прямых $y = x$ и $x + y - 2 = 0$ лежит на параболе.

4.32. Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через центр гиперболы $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, и вершину параболы $y = -2x^2 + 5x - 2$.

Раздел Второй

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Глава 5

ФУНКЦИЯ

5.1. Понятие множества

Понятие множества принадлежит к числу первичных, не определяемых через более простые.

Под *множеством* понимается совокупность (собрание, набор) некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются *элементами*, или *точками*, этого множества.

Примерами множеств являются: множество студентов данного вуза, множество предприятий некоторой отрасли, множество натуральных чисел и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а их элементы — строчными. Если a есть элемент множества A, то используется запись $a \in A$. Если b не является элементом множества A, то пишут $b \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Например, множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$ есть пустое множество.

Если множество B состоит из части элементов множества A или совпадает с ним, то множество B называется *подмножеством* множества A и обозначается $B \subset A$.

Если, например, A — множество всех студентов вуза, а B — множество студентов-первокурсников этого вуза, то B есть подмножество A, т.е. $B \subset A$.

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е. $C = A \bigcup B$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество D, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных множеств A и B, т.е. $D = A \bigcap B$.

Разностью множеств A и B называется множество E, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т.е. $E = A \setminus B$.

▷ **Пример 5.1.** Даны множества $A = \{1; 3; 6; 8\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$.

Найти объединение, пересечение и разность множеств A и B.

Р е ш е н и е. Очевидно, что объединение двух данных множеств — $A \bigcup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$, их пересечение $A \bigcap B = \{6; 8\}$, а разность $A \backslash B = \{1; 3\}$. ▶

Дополнением множества $A \subset B$ называется множество A^c, состоящее из всех элементов множества B, не принадлежащих A.

Множества, элементами которых являются действительные числа, называются *числовыми*. Из школьного курса алгебры известны множества: R — действительных чисел, Q — рациональных, I — иррациональных, Z — целых, N — натуральных чисел. Очевидно, что $N \subset Z \subset Q \subset R$, $I \subset R$ и $R = Q \bigcup I$.

Геометрически множество действительных чисел R изображается точками *числовой прямой* (или *числовой оси*) (рис. 5.1), т.е. прямой, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.

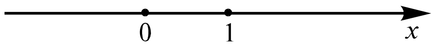


Рис. 5.1

Между множеством действительных чисел и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке прямой — определенное действительное число. Поэтому часто вместо «число x» говорят «точка x».

Множество X, элементы которого удовлетворяют: неравенству $a \le x \le b$, называется *отрезком* (или *сегментом*) $[a; b]$; неравенству $a < x < b$ — *интервалом* $(a; b)$; неравенствам $a \le x < b$ или $a < x \le b$, называются *полуинтервалами* соответственно $[a; b)$ и $(a; b]$. Наряду с этим рассматриваются бесконечные интервалы и полуинтервалы $(-\infty; a)$, $(b; +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty; a]$ и $[b; +\infty)$. В дальнейшем все указанные множества мы объединяем термином *промежуток X*.

5.2. Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки

Определение. ***Абсолютной величиной*** (или ***модулем***) *действительного числа x называется само число x, если x неотрицательно, и противоположное число −x, если x отрицательно:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

Очевидно, по определению, что $|x| \ge 0$.

▷ **Пример 5.2.** Найти $\left|x-|x|\right|$.

Р е ш е н и е. Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и $\left|x-|x|\right| = |x-x| = |0| = 0$.

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $\left|x-|x|\right| = |x-(-x)| = |2x| = -2x$.

Отметим свойства абсолютных величин:

$|x + y| \leq |x| + |y|$, $\qquad |xy| = |x||y|$,

$|x - y| \geq |x| - |y|$, $\qquad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

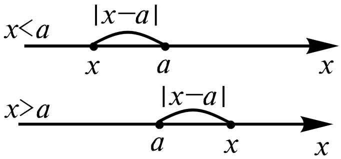


Рис. 5.2

Абсолютная величина разности двух чисел $|x - a|$ означает расстояние между точками x и a числовой прямой как для случая $x < a$, так и для $x > a$ (см. рис. 5.2).

Поэтому, например, решениями неравенства $|x - a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$) будут точки x интервала $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ (рис. 5.3), удовлетворяющие неравенству $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

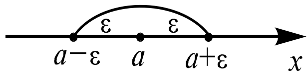


Рис. 5.3

Всякий интервал, содержащий точку a, называется *окрестностью точки a*.

Интервал $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, т.е. множество точек x таких, что $|x - a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$), называется *ε-окрестностью точки a*.

5.3. Понятие функции. Основные свойства функций

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение. Например, отношение длины окружности к ее диаметру есть постоянная величина, равная числу π.

Если величина сохраняет постоянное значение лишь в условиях данного процесса, то в этом случае она называется *параметром.*

Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения. Например, при равномерном движении $S = vt$, где путь S и время t — переменные величины, а v — параметр.

Перейдем к понятию функции.

Определение. *Если каждому элементу x множества X ($x \in X$) ставится в соответствие вполне определенный элемент y множества Y ($y \in Y$), то говорят, что на множестве X задана* ***функция*** $y = f(x)$.

При этом x называется *независимой переменной* (или *аргументом*), y — *зависимой переменной*, а буква f обозначает закон соответствия.

Множество X называется *областью определения* (или *существования*) функции, а множество Y — *областью значений* функции.

Если множество X специально не оговорено, то под областью определения функции подразумевается область допустимых значений независимой переменной x, т.е. множество таких значений x, при которых функция $y = f(x)$ вообще имеет смысл.

Например, область определения функции $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$ есть полуинтервал $(-\infty; 10]$, так как $10 - x \geq 0$; если же переменная x обозначает, предположим, время, то при естественном дополнительном условии $x \geq 0$ областью определения функции будет отрезок $[0; 10]$.

Способы задания функций. Существует несколько способов задания функции.

а) *Аналитический способ*, если функция задана формулой вида $y = f(x)$. Этот способ наиболее часто встречается на практике. Так, функция $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$, рассматриваемая выше, задана аналитически.

Не следует смешивать функцию с ее аналитическим выражением. Так, например, *одна* функция

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x < 0, \\ x + 3, & \text{если} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

имеет *два* аналитических выражения: x^2 (при $x < 0$) и $x + 3$ (при $x \geq 0$).

б) *Табличный способ* состоит в том, что функция задается таблицей, содержащей значения аргумента x и соответствующие значения функции $f(x)$, например таблица логарифмов.

в) *Графический способ* состоит в изображении графика функции — множества точек (x, y) плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента x, а ординаты — соответствующие им значения функции $y = f(x)$.

г) *Словесный способ*, если функция описывается правилом ее составления, например *функция Дирихле*: $f(x) = 1$, если x — рационально; $f(x) = 0$, если x — иррационально.

Рассмотрим основные свойства функций.

1. Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений x из области определения $f(-x) = f(x)$ и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$ называется функцией *общего вида*.

Например, функция $y = x^2$ является четной (так как $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ и $f(-x) = f(x)$, а функция $y = x^3$ — нечетной (так как $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ и $f(-x) = -f(x)$.

В то же время, например, функция $y = x^2 + x^3$ является функцией общего вида, так как $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3$ и $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (см., например, график функции $y = x^2$ на рис. 5.6), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см., например, график функции $y = x^3$ на рис. 5.5)

2. Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$. Тогда функция возрастает на промежутке X, если $f(x_2) > f(x_1)$, и убывает, если $f(x_2) < f(x_1)$ (см. рис. 5.4).

Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными*[1] функциями.

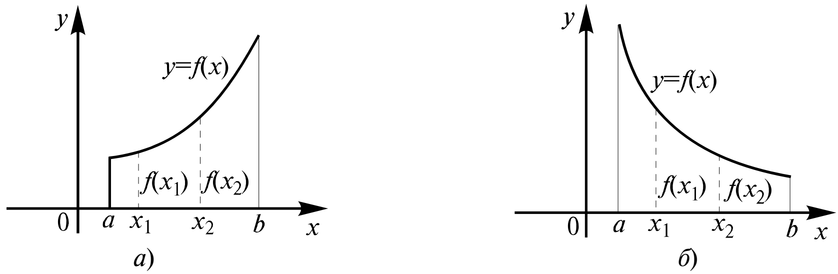


Рис. 5.4

Так, например, функция $y = x^2$ (см. рис. 5.6) при $x \in (-\infty; 0]$ убывает и при $x \in [0; \infty)$ возрастает.

3. Ограниченность. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$. В противном случае функция называется *неограниченной.*

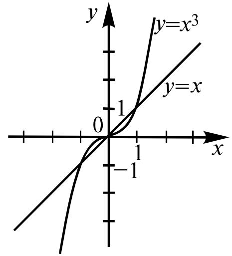
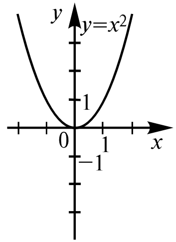
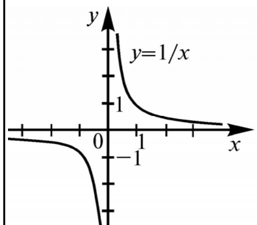
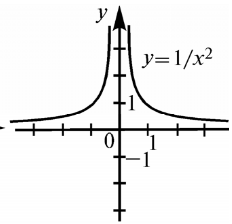
Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, ибо $|\sin x| \leq 1$ для любого $x \in R$.

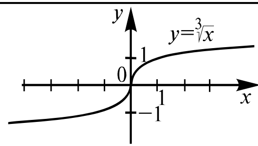
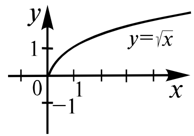
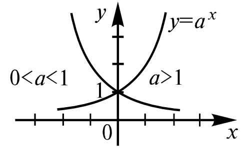
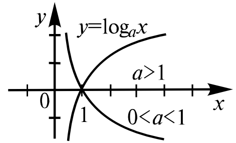
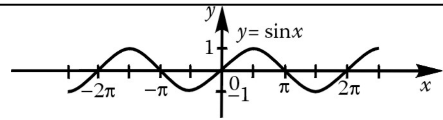
[1] Если говорить точнее, то *строго монотонными*; к монотонным функциям, наряду с возрастающими и убывающими, относятся неубывающие и невозрастающие функции, т.е. такие, для которых при $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_2 > x_1$, соответственно $f(x_2) \geq f(x_1)$ или $f(x_2) \leq f(x_1)$.

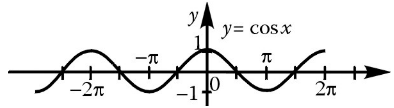
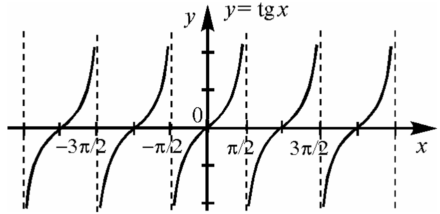
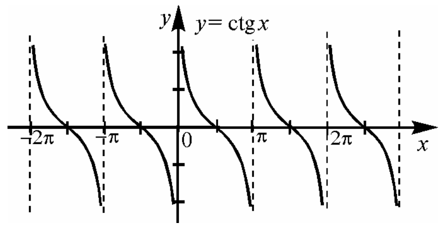
5.4. Основные элементарные функции

В таблице приводятся наиболее важные свойства и графики основных элементарных функций.

Таблица

№ п/п	Обозначение функции	Область определения X	Область значений Y	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	Графики функций
1	2	3	4	5	6	7	8
				1. *Степенная функция*			
1	$y = x^n$ $n \in N$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно; $[0; +\infty)$, если n — четно	нечетная, если n — нечетно; четная, если n — четно	возрастает на $(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно; убывает на $(-\infty, 0]$, возрастает на $(0, +\infty)$, если n — четно	непериодическая	**Рис. 5.5** **Рис. 5.6**
2	$y = x^{-n}$ $n \in N$	$(-\infty, 0) \cup \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup \cup (0, +\infty)$, если n — нечетно; $[0; +\infty)$, если n — четно	нечетная, если n — нечетно; четная, если n — четно	убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, +\infty)$, если n — нечетно; возрастает на $(-\infty; 0)$ и убывает на $(0, +\infty)$, если n — четно	непериодическая	**Рис. 5.7** **Рис. 5.8**

1	2	3	4	5	6	7	8
3	$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$ $n > 1$	$(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно; $[0; +\infty)$, если n — четно	$(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно; $[0; +\infty)$, если n — четно	нечетная, если n — нечетно; общего вида, если n — четно	возрастает на $(-\infty; +\infty)$, если n — нечетно; возрастает на $[0; +\infty)$, если n — четно	непериодическая	 **Рис. 5.9**  **Рис. 5.10**
			2. *Показательная функция*				
4	$y = a^x$ $(a > 0,$ $a \neq 1)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0; +\infty)$	общего вида	возрастает на $(-\infty; +\infty)$, если $a > 1$; убывает на $(-\infty; +\infty)$, если $0 < a < 1$	непериодическая	 **Рис. 5.11**
			3. *Логарифмическая функция*				
5	$y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	общего вида	возрастает на $(0; +\infty)$, если $a > 1$; убывает на $(0; +\infty)$, если $0 < a < 1$	непериодическая	 **Рис. 5.12**
			4. *Тригонометрические функции*				
6	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1; 1]$	нечетная	возрастает на $[-\pi/2+2\pi n, \pi/2+2\pi n]$; убывает на $[\pi/2+2\pi n, 3\pi/2+2\pi n]$, $n \in Z$	Период $T = 2\pi$	 **Рис. 5.13**

1	2	3	4	5	6	7	8
7	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1; 1]$	четная	возрастает на $[-\pi+2\pi n, 2\pi n]$, убывает на $[2\pi n, \pi+2\pi n]$ $n\in Z$	Период $T=2\pi$	 **Рис. 5.14**
8	$y = \mathrm{tg}\, x$	$(-\pi/2 + \pi n, \pi/2+\pi n)$; $n \in Z$	$(-\infty, +\infty)$	нечетная	возрастает на $(-\pi/2+\pi n, \pi/2+\pi n)$; $n\in Z$	Период $T=\pi$	 **Рис. 5.15**
9	$y = \mathrm{ctg}\, x$	$(\pi n, \pi+\pi n)$; $N \in Z$	$(-\infty, +\infty)$	нечетная	убывает на $(\pi n, \pi+\pi n)$; $n\in Z$	Период $T = \pi$	 **Рис. 5.16**

5. *Обратные тригонометрические функции*

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$

4. Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции $f(x + T) = f(x)$.

Например, функция $y = \sin x$ имеет период[1] $T = 2\pi$, так как для любых x $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

5.5. Элементарные функции. Классификация функций. Преобразование графиков

Функция называется *явной*, если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной; например, функция $y = x^2 + 5x + 1$.

Функция y аргумента x называется *неявной*, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, функция y ($y \geq 0$), заданная уравнением $x^3 + y^2 - x = 0$. (Заметим, что последнее уравнение задает две функции, $y = \sqrt{x - x^3}$ при $y \geq 0$ и $y = -\sqrt{x - x^3}$ при $y < 0$.)

Обратная функция. Пусть $y = f(x)$ есть функция от независимой переменной x, определенной на множестве X с областью значений Y. Поставим в соответствие каждому $y \in Y$ *единственное* значение $x \in X$, при котором $f(x) = y$. Тогда полученная функция $x = \varphi(y)$, определенная на множестве Y с областью значений X, называется *обратной*.

Так как традиционно независимую переменную обозначают через x, а функцию через y, то функция, обратная к функции $y = f(x)$, примет вид $y = \varphi(x)$. Обратную функцию $y = \varphi(x)$ обозначают также в виде $y = f^{-1}(x)$ (аналогично с обозначением обратной величины). Например, для функции $y = a^x$ обратной будет функция $x = \log_a y$ или (в обычных обозначениях зависимой и независимой переменных) $y = \log_a x$.

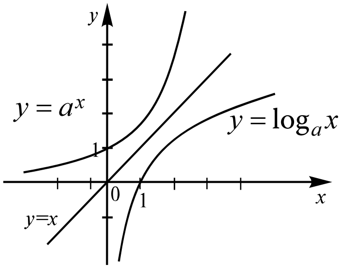


Рис. 5.17

Можно доказать, что *для любой строго монотонной функции* $y = \varphi(x)$ *существует обратная функция.*

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (на рис. 5.17 показаны графики взаимно обратных функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ при $a > 1$).

---

[1] Под термином «период» подразумевается *наименьший положительный* период функции, равный 2π; любой период функции $y = \sin x$, как известно, равен $2\pi n$, где $n \in Z$.

Сложная функция. Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной u, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная u в свою очередь является функцией $u = \varphi(x)$ от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y = f[\varphi(x)]$ называется *сложной* функцией (или *композицией* функций, *суперпозицией* функций, *функцией от функции*).

Например, $y = \lg \sin x$ — сложная функция, так как ее можно представить в виде $y = \lg u$, где $u = \sin x$.

Понятие элементарной функции. Из основных функций новые функции могут быть получены двумя способами при помощи: а) алгебраических действий; б) операций образования сложной функции.

Определение. *Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются* ***элементарными.***

Например, функция

$$y = \frac{\sqrt{x}\sin^2 x}{\sqrt[3]{x} + 5^{2x^3}} + \sqrt{\lg^3 x - 1}$$

является элементарной, так как здесь число операций сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции ($\sin^2 x$, 5^{2x^3}, $\lg^3 x$, $\sqrt{\lg^3 x - 1}$) конечно.

Примерами неэлементарных функций являются функция $y = [x]$ — целая часть x (см. рис. 6.9), функция Дирихле (с. 127).

Классификация функций. Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Алгебраической называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий. К числу алгебраических функций относятся:

- *целая рациональная функция* (*многочлен* или *полином*): $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$;
- *дробно-рациональная функция* — отношение двух многочленов;
- *иррациональная функция* (если в составе операций над аргументом имеется извлечение корня).

Всякая неалгебраическая функция называется *трансцендентной.* К числу трансцендентных функций относятся функции: показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические.

Преобразование графиков. В разделе III «Дифференциальное исчисление» будет показано, как проводить исследование функций и построение их графиков с помощью производной. Вместе с тем актуальными остаются приемы построения графиков функций с помощью преобразования графиков основных элементарных функций.

Пусть задан график функции $y = f(x)$.

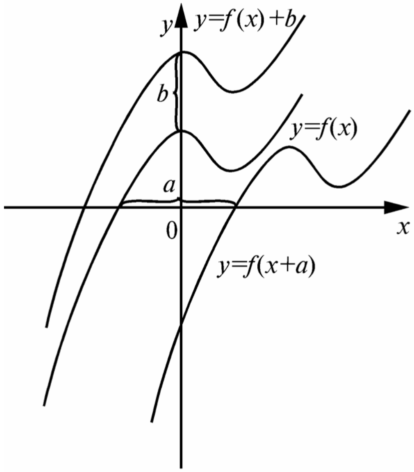


Рис. 5.18

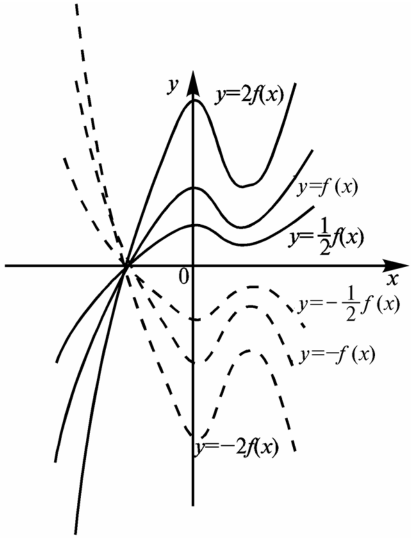


Рис. 5.19

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. График функции $y = f(x + a)$ есть график $y = f(x)$, сдвинутый (при $a > 0$ влево, при $a < 0$ вправо) на $|a|$ единиц параллельно оси Ox (рис. 5.18).

2. График функции $y = f(x) + b$ есть график $y = f(x)$, сдвинутый (при $b > 0$ вверх, при $b < 0$ – вниз) на $|b|$ единиц параллельно оси Oy (см. рис. 5.18).

3. График функции $y = mf(x)$ $(m \neq 0)$ есть график $y = f(x)$, растянутый (при $m > 1$) в m раз или сжатый (при $0 < m < 1$) вдоль оси $0y$ (см. рис. 5.19). При $-\infty < m < 0$ график функции $y = mf(x)$ есть зеркальное отображение графика $y = -mf(x)$ от оси Ox.

4. График функции $y = f(kx)$ $(k \neq 0)$ есть график $y = f(x)$, сжатый (при $k>1$) в k раз или растянутый (при $0 < k < 1$) вдоль оси Ox (см. рис. 5.20). При $-\infty < k < 0$ график функции

$y = f(kx)$ есть зеркальное отображение графика $y = f(-kx)$ от оси Oy.

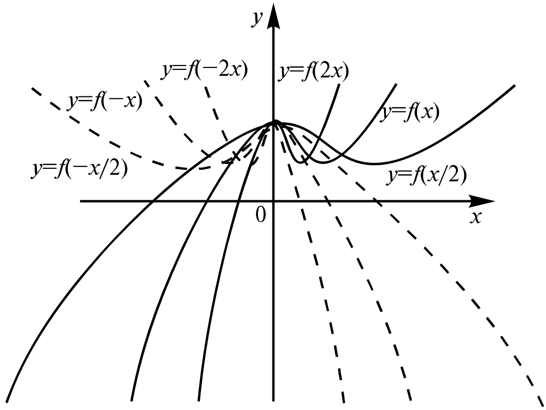


Рис. 5.20

▷ **Пример 5.3.** Построить график функции $y = -3\cos 2x$.

Р е ш е н и е. Строим график функции $y = -3\cos 2x$ следующим образом (рис. 5.21).

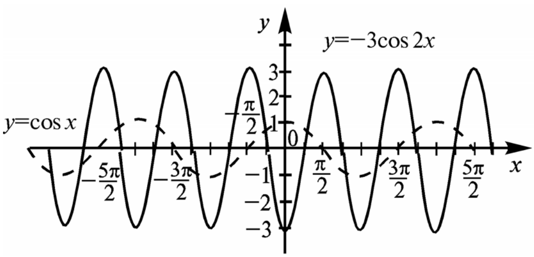


Рис. 5.21

1. Строим график $y = \cos x$.

2. $y = \cos x \to$ сжатие графика в 2 раза вдоль оси $Ox \to y = = \cos 2x$.

3. $y = \cos 2x \to$ зеркальное отражение графика от оси $Ox \to y = -\cos 2x$.

4. $y = -\cos 2x \to$ растяжение графика в 3 раза вдоль оси $Oy \to y = -3\cos 2x$. ▶

5.6. Применение функций в экономике. Интерполирование функций

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

Наряду с линейными, используются нелинейные функции, такие, как дробно-рациональные, степенные (квадратичная, кубическая и т.д.), показательные (экспоненциальные), логарифмические и другие функции. Периодичность, колеблемость ряда экономических процессов позволяет также использовать тригонометрические функции.

Наиболее часто используются в экономике следующие функции:

1. *Функция полезности* (*функция предпочтений*) — в широком смысле зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

2. *Производственная функция* — зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.

3. *Функция выпуска* (частный вид производственной функции) — зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов.

4. *Функция издержек* (частный вид производственной функции) — зависимость издержек производства от объема продукции.

5. *Функции спроса, потребления и предложения* — зависимость объема спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т.п.).

Учитывая, что экономические явления и процессы обусловливаются действием различных факторов, для их исследований широко используются *функции нескольких переменных.* Среди этих функций выделяются *мультипликативные* функции, позволяющие представить зависимую переменную в виде произведения факторных переменных, обращающего его в нуль при отсутствии действия хотя бы одного фактора.

Используются также *сепарабельные* функции, которые дают возможность выделить влияние различных факторных переменных на зависимую переменную, и в частности, *аддитивные* функции, представляющие одну и ту же зависимую переменную как при суммарном, но раздельном воздействии нескольких факторов, так и при одновременном их воздействии.

Функции нескольких переменных рассмотрены в гл. 15.

Если действием побочных факторов можно пренебречь или удается зафиксировать эти факторы на определенных уровнях, то влияние одного главного фактора изучается с помощью функции одной переменной, рассматриваемой в данной и последующих главах. Приведем примеры.

1. Исследуя зависимости спроса на различные товары от дохода

$$y=\frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1}\ (x>a_1)\,,\ y=\frac{b_2(x-a_2)}{x-c_2}\ (x>a_2)\,,\ y=\frac{b_3x(x-a_3)}{x-c_3}\ (x>a_3)$$

(*функции Л. Торнквиста*), мы можем установить уровни доходов $a_1, a_2, a_3,$ при которых начинается приобретение тех или иных товаров и уровни (точки) насыщения b_1, b_2 для групп товаров первой и второй необходимости (см. рис. 5.22).

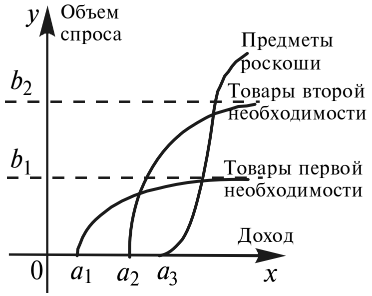


Рис. 5.22

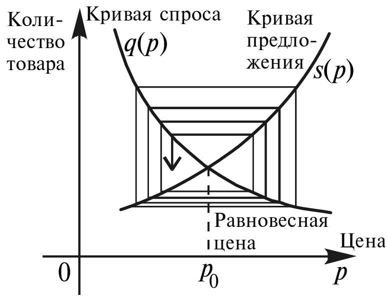


Рис. 5.23

2. Рассматривая в одной системе координат кривые спроса и предложения, можно установить равновесную (рыночную) цену данного товара в процессе формирования цен в условиях конкурентного рынка (*паутинообразная модель*) (см. рис. 5.23).

3. Изучая в теории потребительского спроса *кривые безразличия* (линии, вдоль которых полезность двух благ x и y одна и та же), например, задаваемые в виде $xy = U$, и *линию бюджетного ограничения* $p_x x + p_y y = I$ при ценах благ p_x и p_y и доходе потребителя I, мы можем установить оптимальные количества благ x_0 и y_0, имеющих максимальную полезность U_0 (см. рис. 5.24).

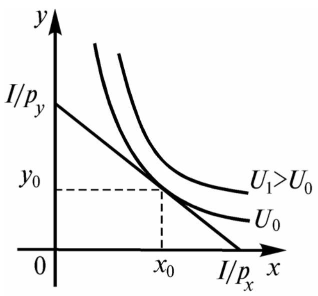


Рис. 5.24

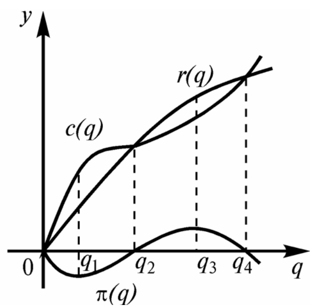


Рис. 5.25

4. Рассматривая *функции издержек (полных затрат)* $c(q)$ и *дохода* фирмы $r(q)$, мы можем установить зависимость *прибыли* $\pi(q) = c(q) - r(q)$ от объема производства q (см. рис. 5.25) и выявить уровни объема производства, при которых производство продукции убыточно ($0 < q < q_2$) и приносит прибыль ($q_2 < q < q_4$), дает максимальный убыток ($q = q_1$) и максимальную прибыль ($q = q_3$), и найти размеры этих убытков или прибыли.

Очевидно, что перечень подобных примеров применения функций в экономической теории и практике можно было бы продолжить (о них, в частности, пойдет речь в последующих главах учебника).

Остановимся еще на одном важном аспекте использования функций в экономике — **применении таблиц** функций, которые позволяют сделать возможными различные расчеты, исключить или упростить громоздкие вычисления.

При вычислениях с помощью таблиц мы часто сталкиваемся с ситуацией, когда аргумент функции задан с большей точностью, чем позволяет таблица. В этом случае мы должны прибегнуть к *интерполированию* (*интерполяции*) — приближенному нахождению неизвестных значений функций по известным ее значениям в заданных точках.

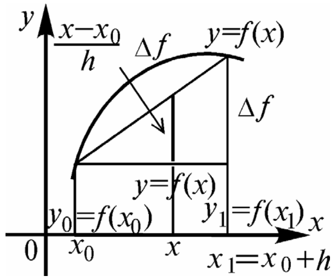


Рис. 5.26

Наиболее простым является *линейное интерполирование*, при котором допускается, что приращение функции пропорционально приращению аргумента. Если заданное значение x лежит между приведенными в таблице значениями x_0 и $x_1 = x_0 + h$, которым соответствуют значения функции $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$, то считают, что (рис. 5.26)

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f. \qquad \textbf{(5.1)}$$

Величины $\frac{x - x_0}{h}\Delta f$ называются *интерполяционными поправками*. Эти величины вычисляются с помощью таблицы или приводятся в дополнении к таблице.

Если по заданным значениям функции необходимо найти приближенное значение аргумента, то необходимо произвести *обратное интерполирование*.

▷ **Пример 5.4.** Функция $y = f(x)$ задана таблицей:

x	2	2,04	2,08
y	2,42	2,88	3,38

а) Используя линейное интерполирование, найти $f(2{,}008)$.

б) Чему равен x, если $f(x) = 3{,}1$?

Р е ш е н и е: а) Имеем $x_0 = 2$; $f(x_0) = 2{,}42$; $x_1 = 2{,}04$; $f(x_1) = 2{,}88$; $h = x_1 - x_0 = 2{,}04 - 2{,}0 = 0{,}04$; $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = 2{,}88 - 2{,}42 = 0{,}46$.

Теперь по интерполяционной формуле (5.1) получим

$$y = f(2{,}008) \approx 2{,}42 + \frac{2{,}008 - 2{,}0}{0{,}04} \cdot 0{,}46 = 2{,}512.$$

б) Обратное интерполирование можно провести по той же формуле, в которой поменять местами переменные x и y:

$$\varphi(y) = \varphi(y_0) + \frac{y - y_0}{h} \Delta\varphi, \qquad \textbf{(5.2)}$$

где $x = \varphi(y)$ — неизвестное значение обратной функции.

Имеем $y_0 = 2{,}88$; $\varphi(y_0) = 2{,}04$; $y_1 = 3{,}38$; $\varphi(y_1) = 2{,}08$; $h = y_1 - y_0 = 3{,}38 - 2{,}88 = 0{,}50$; $\Delta\varphi = \varphi(y_1) - \varphi(y_0) = 2{,}08 - 2{,}04 = 0{,}04$.

Теперь по интерполяционной формуле (5.2) получим

$$x = \varphi(3{,}1) \approx 2{,}04 + \frac{3{,}1 - 2{,}88}{0{,}5} \cdot 0{,}04 = 2{,}0576 \approx 2{,}058. \ \blacktriangleright$$

В ряде случаев точность нахождения неизвестных значений с помощью линейного интерполирования оказывается недостаточной и используются другие методы интерполирования, например *квадратичное интерполирование.*

5.7. Решение задач

▷ **Пример 5.5.** Найти область определения функций

а) $y = \sqrt{x} - \lg(2x-3)$; б) $y = \log_3 \sin x + \sqrt{4 - x^2}$;

в) $y = \arccos \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Р е ш е н и е. а) Область определения функции X найдем из системы неравенств $\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x - 3 > 0, \end{cases}$ откуда $x > 3/2$ или $X = (3/2; +\infty)$.

б) Имеем систему $\begin{cases} \sin x > 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{cases}$. Решая первое неравенство, получим $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$; решая второе, найдем $x^2 \leq 4$, откуда $|x| \leq 2$ и $-2 \leq x \leq 2$. С помощью числовой оси (рис. 5.27) находим решение системы неравенств: $0 < x \leq 2$, т.е. область определения функции $X = (0; 2]$.

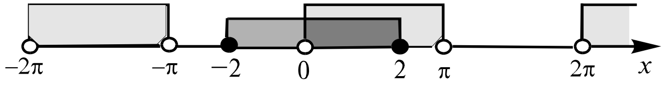


Рис. 5.27

в) Область определения найдем из неравенства $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \le 1$, откуда $-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1$. Так как при любом x $1+x^2 > 0$, то перейдем к равносильному неравенству $-1-x^2 \le 2x \le 1+x^2$, откуда

$$\begin{cases} 2x \ge -1-x^2, \\ 2x \le 1+x^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (1+x)^2 \ge 0, \\ (1-x)^2 \ge 0. \end{cases}$$

Очевидно, что полученные неравенства справедливы при любом x, т.е. область определения функции $X = (-\infty; +\infty)$. ▶

▷ **Пример 5.6.** Найти область значений функции:

а) $y = \sin x + \cos x$; б) $y = \frac{6x}{1+x^2}$.

Р е ш е н и е. а) Преобразуем функцию

$$y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Так как синус любого угла по абсолютной величине не превосходит 1, т.е. $\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1$, то $\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}$, $|y| \le \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$. Итак, область значений функции $Y = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

б) Область значений может быть найдена с помощью производной, рассматриваемой в разделе III. Но можно поступить иначе: найти обратную функцию $x = \varphi(y)$, ее область определения Y, которая совпадает с областью значений Y данной функции.

Выразим x через y. Получим обратную функцию $x = \varphi(y)$, заданную неявно квадратным уравнением $x^2 y - 6x + y = 0$. Очевидно, область определения этой функции найдется из условия, чтобы дискриминант квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$ был неотрицателен, т.е. $6^2 - 4y^2 \ge 0$ или $y^2 \le 9$, $|y| \le 3$ и $-3 \le y \le 3$.

Итак, область значений данной функции $Y = [-3; 3]$. ▶

▷ **Пример 5.7.** Выяснить четность (нечетность) функций:

а) $y = x - \operatorname{ctg}^3 x$; б) $y = x\frac{2^x+1}{2^x-1}$; в) $y = (x-1)^2 \sin^2 x$.

Р е ш е н и е: а) $f(-x) = -x - \operatorname{ctg}^3(-x) = -x + \operatorname{ctg}^3 x$.

Так как $f(-x) = -f(x)$, то данная функция нечетная;

б) $f(-x) = (-x)\dfrac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1} = x\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$ (после преобразований).

Так как $f(-x) = f(x)$, то данная функция четная.

в) $f(-x) = (-x-1)^2 \sin^2(-x) = (x+1)^2 \sin^2 x$.

Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то данная функция общего вида, т.е. ни четная, ни нечетная. ▶

УПРАЖНЕНИЯ

Найти область определения функций:

5.8. $y = \sqrt{x} + \lg(2x-5)$.

5.9. $y = \dfrac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt[3]{x+2}$.

5.10. $y = \arcsin(2x^2 + x)$.

Найти область значений функций:

5.11. $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

5.12. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Выяснить четность (нечетность) функций:

5.13. $y = x^3 \sin x$.

5.14. $y = x - x^3 + 5x^5$.

5.15. $y = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$.

5.16. $y = x^2 + \sin x$.

Найти наименьший период функций:

5.17. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

5.18. $y = \cos^2\dfrac{x}{2}$.

Построить графики функций:

5.19. а) $y = -2x^2$; б) $y = -2(x+3)^2$; в) $y = -2(x+3)^2 + 1$; г) $y = -2x^2 + 5x - 2$.

5.20. а) $y = \dfrac{3}{x}$; б) $y = -\dfrac{3}{x}$; в) $y = \dfrac{3}{x-1}$; г) $y = \dfrac{3}{x-1} - 2$; д) $y = \dfrac{4x-3}{x-1}$.

5.21. а) $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x)$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-2x)$; в) $y = \log_{\frac{1}{2}}(3-2x)^2$.

5.22. а) $y = \sin 2x$; б) $y = -3\sin 2x$; в) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; г) $y = \sin x + \cos x$.

Глава 6

ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

6.1. Предел числовой последовательности

Определение. *Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вполне определенное число* a_n *, то говорят, что задана* ***числовая последовательность*** $\{a_n\}$:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ .$$

Другими словами, *числовая последовательность — это функция натурального аргумента:* $a_n = f(n)$.

Числа a_1, a_2, …, a_n называются *членами* последовательности, а число a_n — *общим* или *n-м членом* данной последовательности.

Примеры числовых последовательностей[1]:

2, 4, 6, 8, …, 2*n*, … (монотонная, неограниченная),

1, 0, 1, 0, … (немонотонная, ограниченная),

$$0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \ldots,\ \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right),\ \ldots \qquad \textbf{(6.1)}$$

(немонотонная, ограниченная).

Рассмотрим числовую последовательность (6.1). Изобразим ее члены точками числовой оси (рис. 6.1).

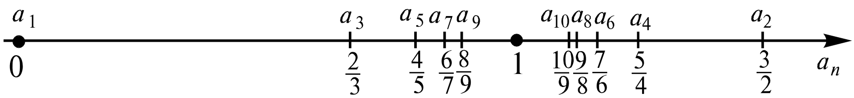


Рис. 6.1

Можно заметить, что члены последовательности a_n с ростом *n* как угодно близко приближаются к 1. При этом абсолютная величина разности $|a_n - 1|$ становится все меньше и меньше. Действительно:

$$|a_1 - 1| = 1,\ |a_2 - 1| = \frac{1}{2},\ |a_3 - 1| = \frac{1}{3},\ |a_4 - 1| = \frac{1}{4},\ \ldots,\ |a_n - 1| = \frac{1}{n},\ \ldots\ ,$$

---

[1] Определение монотонной и ограниченной функции рассмотрено в гл. 5.

т.е. с ростом n $|a_n - 1|$ будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа.

Определение. *Число A называется* ***пределом числовой последовательности*** $\{a_n\}$, *если для любого даже сколь угодно малого положительного числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такой номер N (зависящий от* ε, $N = N(\varepsilon)$), *что для всех членов последовательности с номерами* $n > N$ *верно неравенство*

$$|a_n - A| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ или $a_n \to A$ при $n\to\infty$. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся*.

Используя логические символы: *квантор общности* $\forall$ (вместо слова «для любого») и *квантор существования* $\exists$ (вместо слова «найдется»), символ равносильности $\Leftrightarrow$, определение предела можно записать в виде

$$(A = \lim_{n\to\infty} a_n) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists N = N(\varepsilon))(\forall n>N)\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Смысл определения предела числовой последовательности состоит в том, что для достаточно больших n члены последовательности $\{a_n\}$ как угодно мало отличаются от числа A (по абсолютной величине меньше, чем на число ε, каким бы малым оно ни было).

▷ **Пример 6.1.** Доказать, что для последовательности (6.1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Р е ш е н и е. Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда неравенство (6.2) $|a_n - 1| < 0{,}1$ или $\left|\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 1\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$ выполняется при $n > 10$. Аналогично для $\varepsilon = 0{,}01$ $|a_n - 1| < 0{,}01$ при $n > 100$.

Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство (6.2) $|a_n - 1| < \varepsilon$ или $\frac{1}{n} < \varepsilon$ выполняется при $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Итак, при любом $\varepsilon>0$ существует такой номер $N = \frac{1}{\varepsilon}$ (или равный целой части $\frac{1}{\varepsilon}$), что для всех $n > N$ (при $\varepsilon = 0{,}1$ для $n > 10$, при $\varepsilon = 0{,}01$ для $n > 100$ и т.д.) выполняется неравенство $|a_n - 1| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. ▶

Выясним геометрический смысл предела числовой последовательности.

Расположим члены последовательности a_1, a_2, …, a_n, … , на числовой прямой. Неравенство (6.2) $|a_n - A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, соответствующему попаданию членов последовательности a_n в ε-окрестность точки A (рис. 6.2).

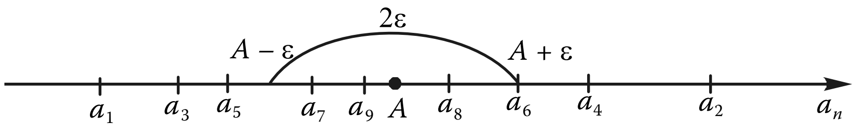


Рис. 6.2

Итак, *число A есть предел числовой последовательности* $\{a_n\}$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется номер N, начиная с которого (при $n > N$) все члены последовательности будут заключены в ε-окрестности точки A, какой бы узкой она ни была.* Вне этой ε-окрестности может быть лишь конечное число членов данной последовательности.

6.2. Предел функции в бесконечности и в точке

Предел функции в бесконечности. С понятием предела числовой последовательности $a_n = f(n)$ тесно связано понятие предела функции $y = f(x)$ в бесконечности. Если в первом случае переменная n, возрастая, принимает лишь целые значения, то во втором случае переменная x, изменяясь, принимает любые значения.

Определение. *Число A называется пределом **функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности**, если для любого даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $S > 0$ (зависящее от ε; $S = S(\varepsilon)$), что для всех x, таких, что $|x| > S$, верно неравенство:*

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{6.3}$$

Этот предел функции обозначается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

С помощью логических символов определение имеет вид:

$$\left(A = \lim_{x\to\infty} f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists S = S(\varepsilon) > 0)(\forall x : |x| > S)\,|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Смысл определения остается тем же, что для предела числовой последовательности: при достаточно больших по модулю значениях x значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A (по абсолютной величине).

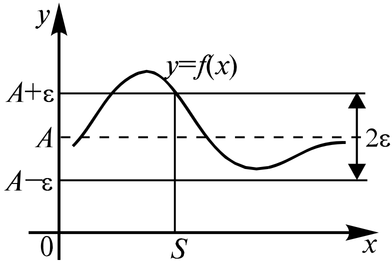


Рис. 6.3

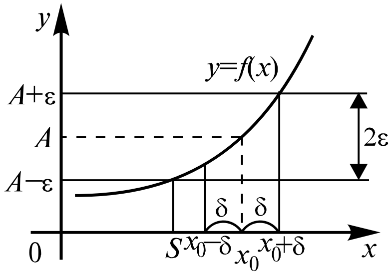


Рис. 6.4

Выясним геометрический смысл предела функции $y = f(x)$ в бесконечности. Неравенство (6.3) $|f(x)-A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, соответствующему расположению части графика в полосе шириной 2ε (см. рис. 6.3).

Итак, *число A есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $S > 0$, что для всех x, таких, что $|x| > S$, соответствующие ординаты графика функции $f(x)$ будут заключены в полосе $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$*, какой бы узкой эта полоса ни была.

▷ **Пример 6.2.** Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{x} = 5.$$

Решение. Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство (6.3) $\left|\frac{5x+1}{x}-5\right| < \varepsilon$ или $\frac{1}{|x|} < \varepsilon$ выполняется при $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $S = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, что для всех x, таких, что $|x| > S$, будет верно неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$, где $f(x) = \frac{5x+1}{x}$; а это и означает, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$. ▶

Замечание. Приведенное выше определение предела при $x \to \infty$ предполагает неограниченное возрастание независимой переменной x по абсолютной величине. В то же время можно сформулировать понятие предела при стремлении x к бесконечности о п р е д е л е н н о г о з н а к а, т.е. при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. В первом случае основное неравенство (6.3) должно выполняться для всех x, таких, что $x > S$, а во втором — для всех x, таких, что $x < -S$.

Предел функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение. *Число A называется* ***пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0*** (или ***в точке x_0***)*, если для любого даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию*

$$|x - x_0| < \delta, \tag{6.4}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{6.5}$$

Этот предел функции обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

С помощью логических символов определение имеет вид:

$$\left(A = \lim_{x \to x_0} f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta\ )$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Смысл определения предела функции $f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что для всех значений x, достаточно близких к x_0, значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A (по абсолютной величине).

Рассмотрим г е о м е т р и ч е с к и й с м ы с л предела функции в точке. Как отмечалось выше, неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, соответствующему расположению части графика в полосе шириной 2ε (см. рис. 6.4). Аналогично неравенство $|x - x_0| < \delta$ равносильно двойному неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, соответствующему попаданию точек x в δ-окрестность точки x_0.

Число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности соответствующие ординаты графика функции $f(x)$ будут заключены в полосе $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$, какой бы узкой эта полоса ни была.

▷ **Пример 6.3.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$.

Р е ш е н и е. Пусть $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда неравенство (6.5) $|(2x+3)-5|< 0{,}1$ будет выполняться при $|x-1|< 0{,}05$. Аналогично при $\varepsilon = 0{,}01$ то же неравенство (6.5) будет верно при $|x-1|< 0{,}005$.

Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство (6.5) $|(2x+3)-5|<\varepsilon$ будет выполняться при $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Итак, при любом $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ (для $\varepsilon = 0{,}1$ $\delta = 0{,}05$; для $\varepsilon = 0{,}01$ $\delta = 0{,}005$ и т.д.), что для всех $x \neq 1$ и удовлетворяющих условию $|x-1|<\delta$ верно неравенство $|f(x)-5|<\varepsilon$, где $f(x) = 2x+3$; а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$. ▶

З а м е ч а н и е 1. Определение предела не требует существования функции в самой точке x_0, ибо рассматривает значения $x\neq x_0$ в некоторой окрестности точки x_0. Другими словами, рассматривая $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, мы предполагаем, что x стремится к x_0, но не достигает значения x_0. Поэтому наличие или отсутствие предела при $x\to x_0$ определяется поведением функции в окрестности точки x_0, но не связано со значением функции (или его отсутствием) в самой точке x_0.

З а м е ч а н и е 2. Если при стремлении x к x_0 переменная x принимает лишь значения, меньшие x_0, или наоборот, лишь значения, бо́льшие x_0, и при этом функция $f(x)$ стремится к некоторому числу A, то говорят об *односторонних пределах* функции $f(x)$ соответственно *слева* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и *справа* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$. Очевидно, что определение этих пределов будет аналогично рассмотренному выше при $x\to x_0$, если вместо значений x, удовлетворяющих условию (6.4), при которых верно неравенство (6.5), рассматривать значения x такие, что $x_0-\delta < x < x_0$ при $x\to x_0-0$ (слева), или значения x такие, что $x_0 < x < x_0+\delta$ при $x\to x_0+0$ (справа).

Разумеется, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

6.3. Бесконечно малые величины

Определение. *Функция* $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой величиной при*** $\boldsymbol{x \to x_0}$, или ***при*** $\boldsymbol{x \to \infty}$, *если ее предел равен нулю:*

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \alpha(x) = 0.$$

Зная определение предела функции при $x \to x_0$ и при $x \to \infty$, можно дать развернутое определение бесконечно малой величины:

Функция $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой величиной при*** $\boldsymbol{x \to x_0}$, *если для любого даже сколь угодно малого положительного числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое положительное число* $\delta > 0$ *(зависящее от* ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$*), что для всех* x*, не равных* x_0 *и удовлетворяющих условию*

$$|x - x_0| < \delta, \qquad \textbf{(6.6)}$$

будет верно неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon. \qquad \textbf{(6.7)}$$

С помощью логических символов приведем это определение к виду:

$$\begin{pmatrix} \alpha(x) \text{ – бесконечно} \\ \text{малая при } x \to x_0 \\ \text{или } \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta) |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Аналогично можно сформулировать определение бесконечно малой при $x \to \infty$, если основное неравенство (6.7) рассматривать для достаточно больших x. Приводим его в краткой форме:

$$\begin{pmatrix} \alpha(x) \text{ – бесконечно} \\ \text{малая при } x \to \infty \\ \text{или } \lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists S = S(\varepsilon) > 0)(\forall x : |x| > S) \; |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Например, функции $y = \cos x$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$ и $y = \dfrac{3}{2x - 7}$ при $x \to \infty$ есть бесконечно малые величины, ибо их пределы равны нулю.

Не следует путать бесконечно малую *переменную* величину $\alpha(x)$ с очень малым, но постоянным числом $\varepsilon > 0$, ибо по мере приближения значений x к x_0 (при $x \to x_0$) или по мере увеличения по модулю значений x (при $x \to \infty$) функция $\alpha(x)$ в соответствии с (6.7) окажется меньше этого числа ε (по абсолютной величине).

Связь бесконечно малых величин с пределами функций. Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ предел, равный A, то ее можно представить в виде суммы этого числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$*, т.е.

$$f(x) = A + \alpha(x). \qquad \textbf{(6.8)}$$

□ Докажем теорему для случая $x \to x_0$[1]. По условию $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ будет верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, или, обозначив $\alpha(x) = f(x) - A$, справедливо неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Это и означает, что $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$. ■

Верна и обратная теорема:

Теорема. *Если функцию $f(x)$ можно представить как сумму числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то число A есть предел этой функции при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$*, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A$.

□ По условию $f(x) = A + \alpha(x)$. Пусть, например, $x \to x_0$.

Так как функция $\alpha(x) = f(x) - A$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ верно неравенство $|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon$.

Это и означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. ■

Свойства бесконечно малых величин:

1. *Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.*

2. *Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию* (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую) *есть величина бесконечно малая.*

---

[1] Здесь и далее доказательство основных свойств бесконечно малых и бесконечно больших величин, пределов функций проводим для случая $x \to x_0$, рассматривая поведение функции в некоторой окрестности точки x_0, т.е. для $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$. Доказательство тех же утверждений для случая $x \to \infty$ полностью идентично, если рассматривать поведение функции при достаточно больших (по модулю) значениях x, т.е. при $|x| > S$ (где $S > 0$) или при $x \in (-\infty; -S) \cup (S; +\infty)$.

3. *Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.*

□ В качестве примера докажем свойство 1 для двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$. Покажем, что функция $(\alpha(x) + \beta(x))$ также является бесконечно малой при $x \to x_0$.

По условию $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые при $x \to x_0$. Это означает, что для любого $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ найдутся такие числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условиям

$$|x - x_0| < \delta_1 \tag{6.9}$$

и

$$|x - x_0| < \delta_2 \tag{6.10}$$

выполняются соответственно неравенства

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.11}$$

и

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.12}$$

Если взять в качестве числа δ минимальное из чисел δ_1 и δ_2, т.е. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то неравенству $|x - x_0| < \delta$ будут удовлетворять решения обоих неравенств (6.9) и (6.10), а следовательно, одновременно будут верны неравенства (6.11) и (6.12). Складывая почленно неравенства (6.11) и (6.12), получим, что

$$|\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Используя свойство абсолютных величин (см. § 5.2), т.е. $|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)|$, придем к более сильному неравенству

$$|\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon. \tag{6.13}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ верно неравенство (6.13). А это и означает, что функция $\alpha(x) + \beta(x)$ есть величина бесконечно малая. ■

Пусть, например, $\alpha(x) = 5x - 10$, $\beta(x) = \lg(x - 1)$ есть бесконечно малые величины при $x \to 2$ (ибо $\lim\limits_{x \to 2} \alpha(x) = 0$,

$\lim\limits_{x \to 2} \beta(x) = 0$), функция $f(x) = \sin x$ есть функция, ограниченная при $x \to 2$ (точнее функция $f(x) = \sin x$ ограничена в любом промежутке, а не только в окрестности точки $x = 2$, ибо всегда $|\sin x| \le 1$). А функция $\varphi(x) = x^2 - 5$ при $x \to 2$ имеет предел (-1), не равный нулю. Тогда функции $\alpha(x) \pm \beta(x) = 5x - 10 \pm \lg(x - 1)$ (по свойству 1), $\alpha(x)f(x) = (5x - 10)\sin x$, $6\alpha(x) = 30x - 60$, $\alpha(x)\beta(x) = (5x - 10)\lg(x - 1)$ (по свойству 2), $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{5x-10}{x^2-5}$ (по свойству 3) есть величины бесконечно малые при $x \to 2$.

З а м е ч а н и е. Свойство 3 не рассматривает предел отношения двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ из-за его неопределенности. Этот предел $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ может быть равен: нулю; числу $A \ne 0$; символу ∞. В этом случае бесконечно малая $\alpha(x)$ называется соответственно: бесконечно малой *более высокого порядка малости,* чем $\beta(x)$; *одного порядка малости; более низкого порядка малости*, чем $\beta(x)$. В частности, если $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0 (x \to \infty)$ называются *эквивалентными:* в этом случае пишут $\alpha(x) \approx \beta(x)$. Тот факт, что $\alpha(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, записывается так: $\alpha(x) = 0(\beta(x))$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ (читается «$\alpha(x)$ есть о малое от $\beta(x)$» при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$.

6.4. Бесконечно большие величины

Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***бесконечно большой величиной при $x \to x_0$***, *если для любого даже сколь угодно большого положительного числа $M > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от M, $\delta = \delta(M)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство*

$$|f(x)| > M.$$

Запись того, что функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, следующая: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Это же определение можно записать в виде:

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ – бесконечно} \\ \text{большая при } x \to x_0 \\ \text{или } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \quad (\forall M>0)(\exists \delta = \delta(M)>0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta) \quad |f(x)| > M.$$

Если в приведенном определении $f(x) > M$ (или $f(x) < -M$), то пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$).

Аналогично можно было определить понятие *бесконечно большой величины при* $x \to \infty$. Приведем его в краткой форме:

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ – бесконечно} \\ \text{большая при } x \to \infty \\ \text{или } \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \quad (\forall M > 0)(\exists S = S(M)>0)(\forall x : |x| > S) \quad |f(x)| > M.$$

Так, например, функции $y = \operatorname{tg} x$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$, $y = \sqrt{5x-7}$ при $x \to \infty$ являются бесконечно большими.

Не следует путать бесконечно большую *переменную* величину $f(x)$ с очень большим, но постоянным числом $M > 0$, ибо по мере приближения значений x к x_0 (при $x \to x_0$) или по мере увеличения по модулю x (при $x \to \infty$) в соответствии с определением функция $f(x)$ превзойдет это число M (по абсолютной величине).

З а м е ч а н и е. В § 5.3 было дано определение ограниченной функции на некотором промежутке X. Следует иметь в виду, что бесконечно большая величина есть функция неограниченная при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$. В то же время *неограниченная функция не обязательно бесконечно большая*. Например, функция $y = x \sin x$ является неограниченной (ее значения могут быть как угодно большими), но не бесконечно большой при $x \to \infty$, так как с ростом x функция все время колеблется, переходя от положительных к отрицательным значениям (и наоборот) и обращаясь в нуль при сколь угодно больших значениях x.

Отметим **свойства бесконечно больших величин**:

1. *Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.*

2. *Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.*

3. *Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, имеющую предел, есть величина бесконечно большая.*

Например, если функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ есть бесконечно большая величина при $x \to \frac{\pi}{2}$ (ибо $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$), функция $\varphi(x) = 4x - 3$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ имеет предел $(2\pi - 3)$, отличный от нуля, а функция $\psi(x) = \sin x$ — ограниченная функция, то функции $f(x)\varphi(x) = (4x - 3) \operatorname{tg} x$ (по свойству 1), $f(x) + \psi(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$ (по свойству 2), $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\operatorname{tg} x}{4x-3}$ (по свойству 3) являются бесконечно большими величинами при $x \to \frac{\pi}{2}$.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами. Теорема. *Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то функция $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$. И обратно, если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то функция $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ есть величина бесконечно малая при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$.*

□ Докажем первое утверждение для случая $x \to x_0$, т.е. если $\alpha(x)$ — бесконечно малая, то $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая при $x \to x_0$.

По условию $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ будет верно неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Последнее неравенство (в предположении, что в некоторой окрестности точки x_0 при $x \neq x_0$ $\alpha(x) \neq 0$) равносильно следующему $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$ или $|f(x)| > M$, где $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ и $M = \frac{1}{\varepsilon}$. А это и означает, что при $x \to x_0$ функция $f(x)$ является бесконечно большой.

Доказательство второго утверждения аналогично. ■

Например, если функции $y = \cos x$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$ и $y = \dfrac{3}{2x-7}$ при $x \to \infty$ есть величины бесконечно малые, то функции $y = \dfrac{1}{\cos x}$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{2x-7}{3}$ при $x \to \infty$ есть величины бесконечно большие. И наоборот, если функции $y = \operatorname{tg} x$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$, $y = \sqrt{5x-7}$ при $x \to \infty$ есть величины бесконечно большие, то функции $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$ и $y = \dfrac{1}{\sqrt{5x-7}}$ при $x \to \infty$ есть величины бесконечно малые.

6.5. Основные теоремы о пределах. Признаки существования предела

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции, для которых существуют пределы при $x \to x_0$ (или при $x \to \infty$): $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) = B$. Сформулируем основные теоремы о пределах.

1. *Функция не может иметь более одного предела.*

□ Предположим противное, т.е. что функция $f(x)$ имеет два предела A и D, $A \neq D$. Тогда на основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций в соответствии с формулой (6.8) $f(x) = A + \alpha(x)$, $f(x) = D + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$. Вычитая почленно эти равенства, получим $0 = A - D + (\alpha(x) - \beta(x))$, откуда $\alpha(x) - \beta(x) = D - A$. Это равенство невозможно, так как на основании свойства 1 бесконечно малых $\alpha(x) - \beta(x)$ есть величина бесконечно малая. Следовательно, предположение о существовании второго предела неверно. ■

2. *Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, т.е.*

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \left[f(x) + \varphi(x) \right] = A + B.$$

3. *Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е.*

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \left[f(x) \varphi(x) \right] = AB.$$

В частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 (\infty)} (cf(x)) = cA.$$

4. *Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций* (при условии, что предел делителя не равен нулю), т.е.

$$\lim_{x \to x_0 (\infty)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

5. *Если* $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$, *то предел сложной функции*

$$\lim_{x \to x_0} f\left[\varphi(x)\right] = A.$$

6. *Если в некоторой окрестности точки* x_0 (*или при достаточно больших* x) $f(x) < \varphi(x)$, *то*

$$\lim_{x \to x_0 (\infty)} f(x) \leq \lim_{x \to x_0 (\infty)} \varphi(x).$$

□ Докажем в качестве примера теорему 2. По условию $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} \varphi(x) = B$, следовательно, на основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций в соответствии с (6.8) $f(x) = A + \alpha(x)$, $\varphi(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые величины при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$. Перемножая почленно оба равенства, получим

$$f(x)\varphi(x) = AB + \underbrace{B\alpha(x) + A\beta(x) + \alpha(x)\beta(x)}_{\gamma(x)}.$$

На основании свойств бесконечно малых последние три слагаемые представляют величину, бесконечно малую $\gamma(x)$ при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$. Итак, функция $f(x)\varphi(x)$ представляет сумму постоянного числа AB и бесконечно малой $\gamma(x)$. На основании обратной теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} f(x)\varphi(x) = AB$. ■

З а м е ч а н и е. В теоремах о пределах предполагается существование пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, из чего следуют заключения о значениях пределов суммы, произведения или частного функций. Но необходимо учитывать, что из существования предела суммы, произведения или частного функций еще не следует, что существуют пределы самих слагаемых, сомножителей или делимого и делителя.

Например, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 1 = 1$, но отсюда еще не следует существование пределов $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x$. И действительно, в данном случае первого из этих пределов не существует.

Признаки существования предела. Для выяснения вопроса о существовании предела использовать определения предела, сформулированные выше, не всегда удобно. Проще это сделать с помощью признаков существования предела.

Теорема 1. *Если числовая последовательность* $\{a_n\}$ *монотонна и ограниченна, то она имеет предел.*

Возможны два случая: а) последовательность неубывающая и ограниченная сверху $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le M$ (см. рис. 6.5а); б) последовательность невозрастающая и ограниченная снизу $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots \ge M$ (см. рис. 6.5б).

Рис. 6.5 иллюстрирует наличие предела A числовой последовательности.

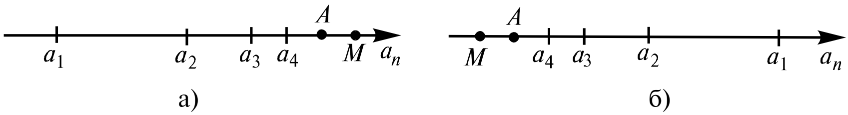


Рис. 6.5

Теорема 2. *Если в некоторой окрестности точки* x_0 (*или при достаточно больших значениях* x) *функция* $f(x)$ *заключена между двумя функциями* $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, *имеющими одинаковый предел* A *при* $x \to x_0$ (*или* $x \to \infty$), *то функция* $f(x)$ *имеет тот же предел* A.

☐ Пусть при $x \to x_0$ $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = A$.

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \ne x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ будут верны одновременно неравенства

$$|\varphi(x) - A| < \varepsilon, \ |\psi(x) - A| < \varepsilon$$

или

$$A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon, \ A - \varepsilon < \psi(x) < A + \varepsilon. \qquad \textbf{(6.14)}$$

Так как по условию функция $f(x)$ заключена между двумя функциями, т.е.

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x),$$

то из неравенств (6.14) следует, что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, т.е.

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

А это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. ■

6.6. Замечательные пределы. Задача о непрерывном начислении процентов

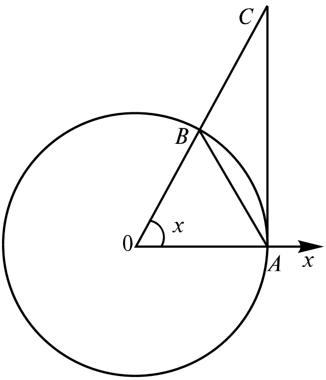


Рис. 6.6

Первым замечательным пределом называется

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad \textbf{(6.15)}$$

□ Для доказательства формулы (6.15) рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O. Пусть OB — подвижный радиус, образующий угол x $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ с осью Ox (см. рис. 6.6). Из геометрических соображений следует, что площадь треугольника AOB меньше площади сектора AOB, которая в свою очередь меньше площади прямоугольного треугольника AOC, т.е.

$$S_{\Delta AOB} < S_{\text{сект. } AOB} < S_{\Delta AOC}.$$

Так как $S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin x = \dfrac{1}{2}R^2\sin x$, $S_{\text{сект. } AOB} = \dfrac{1}{2}R^2 x$, $S_{\Delta AOC} = \dfrac{1}{2}AO\cdot AC = \dfrac{1}{2}AO\cdot(AO\cdot \operatorname{tg} x) = \dfrac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x$, то имеем $\dfrac{1}{2}R^2\sin x < \dfrac{1}{2}R^2 x < \dfrac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x$, откуда, разделив части двойного неравенства на $\dfrac{1}{2}R^2\sin x > 0$, получим $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как функции $\cos x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ четные, то полученные неравенства справедливы и при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Переходя к пределу при

$x \to 0$, получим $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ (обоснование этого факта см. в примере **6.7**). На основании признака существования предела промежуточной функции $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

▷ **Пример 6.4.** Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Р е ш е н и е: а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \frac{3}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$. ▶

Второй замечательный предел. Рассмотрим числовую последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Если вычислять значения членов последовательности, то получим $a_1 = 2{,}0$, $a_2 = 2{,}25$, $a_3 = 2{,}37$, $a_4 = 2{,}441$, $a_5 = 2{,}488$, …, и можно предположить, что последовательность $\{a_n\}$ является *возрастающей*. Действительно, воспользуемся формулой бинома Ньютона[1] (см. § 14.2):

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{1}{n^n}$$

или

$$a_n = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad \textbf{(6.16)}$$

С ростом n увеличиваются как число положительных слагаемых (их в формуле $n+1$), так и величина каждого слагаемого, т.е. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$

Последовательность $\{a_n\}$ является *ограниченной*. Это следует из (6.16), если дать оценку a_n:

[1] Стоящее в знаменателе общего члена произведение n первых чисел натурального ряда называется *факториалом* (обозначается $n!$, читается «эн факториал»): $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n$.

$$a_n < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\ldots n} + \ldots < 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

(полученную после освобождения от скобок, выражения в каждой из которых меньше 1, и замены каждой из дробей большей дробью с двойками в знаменателе:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} < \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{1\cdot 2 \ldots n} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Сумма $\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ представляет сумму S_{n-1} членов геометрической прогрессии с первым членом $a = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Имеем

$$S_{n-1} = \frac{a(q^{n-1} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1.$$

Так как $S_{n-1} < 1$, то $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + 1 = 3.$

Согласно признаку существования предела монотонная и ограниченная последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел.

Определение. ***Числом е (вторым замечательным пределом)*** *называется предел числовой последовательности*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \qquad \textbf{(6.17)}$$

Выше мы фактически установили, что $2 < e < 3$. Более точно $e \approx 2{,}718281\ldots$, т.е. число e — иррациональное число.

Можно показать, что функция $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ (где x в отличие от натурального числа n «пробегает» все значения числовой оси — не только целые) имеет предел, равный числу e:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \qquad \textbf{(6.18)}$$

Полагая $y = \dfrac{1}{x}$, найдем $x = \dfrac{1}{y}$; при $x \to \infty$ $y \to 0$.

В результате получается еще одна запись числа e:

$$e = \lim_{y \to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}}. \qquad \textbf{(6.19)}$$

Число e (*число Эйлера, неперово число*) играет весьма важную роль в математическом анализе. График функции $y = e^x$ (см. рис. 7.8) получил название *экспоненты*. Широко используются логарифмы по основанию e, называемые *натуральными*. Натуральные логарифмы обозначаются символом ln: $\log_e x = \ln x$.

▷ **Пример 6.5.** Найти:

а) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}$; б) $\lim\limits_{y \to 0}(1-3y)^{\frac{2}{y}}$.

Р е ш е н и е.

а) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to \infty}\left[\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x}\cdot 3x} = \lim\limits_{x \to \infty}\left[\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{15} = e^{15}$;

б) $\lim\limits_{y \to 0}(1-3y)^{\frac{2}{y}} = \lim\limits_{y \to 0}\left[(1-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]^{-3y\cdot\frac{2}{y}} = \lim\limits_{y \to 0}\left[(1-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]^{-6} = e^{-6}$. ▶

К числу e приводят решения многих прикладных задач статистики, физики, биологии, химии и др., анализ таких процессов, как рост народонаселения, распад радия, размножение бактерий и т.п.

Рассмотрим **задачу о непрерывном начислении процентов.** Первоначальный вклад в банк составил Q_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно $p\%$ годовых. Необходимо найти размер вклада Q_t через t лет.

При использовании *простых процентов* размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину $\dfrac{p}{100}Q_0$, т.е. $Q_1 = Q_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$, $Q_2 = Q_0\left(1+\dfrac{2p}{100}\right)$, ..., $Q_t\left(1+\dfrac{pt}{100}\right)$. На практике значительно чаще применяются *сложные проценты*. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число $(1+\dfrac{p}{100})$ раз, т.е.

$$Q_1 = Q_0\,(1+\frac{p}{100}),\ Q_2 = Q_0\,(1+\frac{p}{100})^2,\ \ldots,\ Q_t = Q_0\,(1+\frac{p}{100})^t.$$

Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а n раз, то при том же ежегодном приросте $p\%$ процент начисления за $\frac{1}{n}$-ю часть года составит $\frac{p}{n}\%$, а размер вклада за t лет при nt начислениях составит

$$Q_t = Q_0\,(1+\frac{p}{100n})^{nt}. \qquad \textbf{(6.20)}$$

Будем полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие ($n = 2$), ежеквартально ($n = 4$), ежемесячно ($n = 12$), каждый день ($n = 365$), каждый час ($n = 8760$) и т.д., непрерывно ($n \to \infty$). Тогда размер вклада за t лет составит

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right] = Q_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}}$$

или с учетом (6.18) при $x = \frac{100n}{p} \to \infty$

$$Q_t = Q_0\, e^{\frac{pt}{100}}. \qquad \textbf{(6.21)}$$

Формула (6.21) выражает *показательный* (*экспоненциальный*) закон роста (при $p > 0$) или убывания (при $p < 0$). Она может быть использована при непрерывном начислении процентов.

Чтобы почувствовать результаты расчетов в зависимости от способа начисления процентов, в таблице в качестве примера приводятся размеры вкладов Q_t, вычисленные при $Q_0 = 1$ ден. ед., $p = 5\%$, $t = 20$ лет.

	Формула простых процентов	*Формула сложных процентов*					*Формула непрерывного начисления процентов*
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 12$	$n = 365$	
Размер вклада, ден. ед.	2,0000	2,6355	2,6851	2,7015	2,7126	2,7181	2,7182

Как видим, погрешность вычисления суммы вклада по формуле (6.21) непрерывного начисления процентов по сравнению с формулой (6.20) сложных процентов, начисляемых ежегодно ($n = 1$), при одной и той же процентной ставке ($p = 5\%$) оказалась незначительной (около 2,5%).

З а м е ч а н и е. Хотя в практических финансово-кредитных операциях непрерывное начисление процентов применяется крайне редко, оно оказывается весьма эффективным при анализе сложных финансовых проблем, в частности при обосновании и выборе инвестиционных решений.

6.7. Непрерывность функции

Понятие непрерывности функции, так же как и понятие предела, является одним из основных понятий математического анализа.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной в точке*** x_0, *если она удовлетворяет следующим трем условиям:* 1) *определена в точке* x_0 (*т.е. существует* $f(x_0)$); 2) *имеет конечный предел функции при* $x \to x_0$; 3) *этот предел равен значению функции в точке* x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad \textbf{(6.22)}$$

▷ **Пример 6.6.** Исследовать непрерывность в точке $x = 0$ заданных функций:

а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \ge 0, \\ x-1 & \text{при } x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \ne 0, \\ 1 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ г) $y = x^2$.

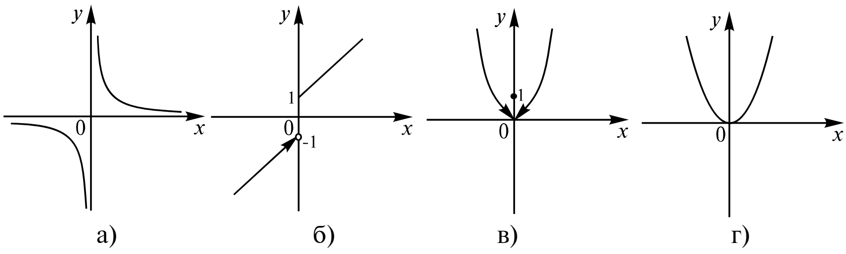


Рис. 6.7

Р е ш е н и е. а) В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ (см. рис. 6.7а) не является непрерывной, так как нарушено первое условие непрерывности — существование $f(0)$.

б) В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ (см. рис. 6.7б) не является непрерывной — первое условие непрерывности выполнено, $f(0)$ существует ($f(0) = 1$), но нарушено второе условие — отсутствует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (точнее говоря, здесь существуют односторонние пределы функции слева $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$ и справа $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$, но общего предела при $x \to 0$ не существует).

в) В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ (см. рис. 6.7в) не является непрерывной — первые два условия непрерывности выполнены — существуют $f(0)$ ($f(0) = 1$) и конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, но нарушено третье основное условие: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

г) В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ (см. рис. 6.7г) непрерывна, так как выполнены все три условия непрерывности — $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. ▶

Определение непрерывности функции (6.22) в точке x_0 может быть записано и так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right), \tag{6.23}$$

т.е. *для непрерывной функции возможна перестановка символов предела и функции.*

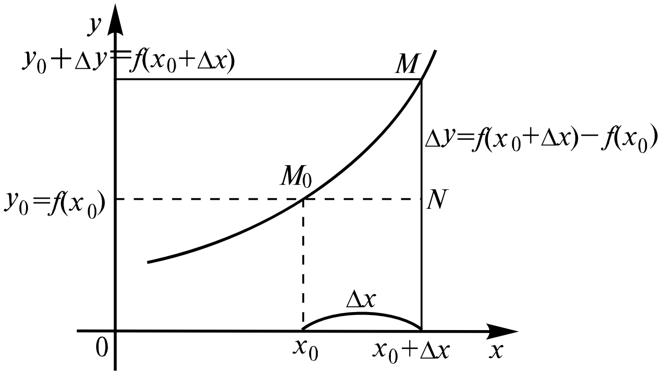


Рис. 6.8

Очевидно, что непрерывность функции в данной точке выражается непрерывностью ее графика при прохождении данной точки (без отрыва карандаша от листа бумаги).

Сформулируем еще одно, второе определение непрерывности.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение Δy, определяемое как разность наращенного и исходного значения функции: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (см. рис. 6.8).

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad \textbf{(6.24)}$$

□ Убедимся в равносильности двух приведенных определений непрерывности. Из первого определения согласно (6.22) при $x = x_0 + \Delta x$ следует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$, так как стремление $x \to x_0$ равносильно условию $\Delta x \to 0$.

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. ■

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если эта функция в данной точке не является непрерывной. Различают точки разрыва: *первого рода* (когда существуют конечные односторонние пределы функции слева и справа при $x \to x_0$, не равные друг другу) и *второго рода* (когда хотя бы один из односторонних пределов слева или справа равен бесконечности или не существует). Так, точка $x_0 = 0$ на рис. 6.7б — точка разрыва первого рода, а на рис. 6.7а — точка разрыва второго рода. К точкам разрыва первого рода относятся также точки *устранимого разрыва,* когда предел функции при $x \to x_0$ существует, но не равен значению функции в этой точке. Так, точка $x_0 = 0$ на рис. 6.7в является точкой устранимого разрыва.

Свойства функций, непрерывных в точке:

1. *Если функции $f(x)$* и *$\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $f(x) + \varphi(x)$, произведение $f(x)\varphi(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (при условии $\varphi(x_0) \neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0.*

Доказательство теоремы следует из определения непрерывности и аналогичных свойств пределов функций.

2. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0* и *$f(x_0) > 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой $f(x) > 0$.*

Доказательство этого свойства основывается на том, что при малых приращениях аргумента $\Delta x \to 0$ в соответствии со вторым определением непрерывности функции (6.24) можно получить как угодно малое приращение функции Δy, так что знак функции $y = f(x)$ в окрестности $(x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x)$ не изменится.

3. *Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство состоит в том, что малому приращению аргумента $\Delta x \to 0$ в силу второго определения непрерывности (6.24) функции $u = \varphi(x)$ соответствует как угодно малое приращение $\Delta u \to 0$, приводящее в свою очередь в силу того же определения непрерывности функции $y = f(u)$ к как угодно малому приращению $\Delta y \to 0$.

Свойство 3 может быть записано в виде

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right], \tag{6.25}$$

т.е. *под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.*

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на промежутке X*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Можно доказать, что *все элементарные функции непрерывны в области их определения.*

▷ **Пример 6.7.** Доказать непрерывность функции $y = \cos x$.

Р е ш е н и е. Найдем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\cos(x + \Delta x) - \cos x) =$

$= 2 \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\dfrac{2x + \Delta x}{2} \sin\dfrac{\Delta x}{2} = 0$, так как $\left|\cos\dfrac{2x + \Delta x}{2}\right| \le 1$, а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \Delta x\right) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, и по второму определению непрерывности (6.24) функция $y = \cos x$ является непрерывной на всей числовой оси. ▶

З а м е ч а н и е. Еще раз подчеркнем, что непрерывность функции в любой точке области определения гарантируется лишь для элементарных функций. Рассмотрим в качестве примера функцию $f(x) = [x]$ (читается «y равно антье x»), где $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x (например, $[2{,}6] = 2$, $[-2{,}6] = -3$). В точке $x = \frac{3}{2}$ функция $f(x) = [x]$ непрерывна, ибо $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, а в точке $x = 1$ эта функция определена — $f(1) = 1$, но терпит разрыв, ибо $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ не существует (точнее существуют неравные между собой конечные пределы функции слева $\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = 0$ и справа $\lim\limits_{x\to1+0} f(x) = 1$) (см. рис. 6.9).

Это связано с тем, что $f(x) = [x]$ не является элементарной функцией, и, хотя и определена на всей числовой прямой, разрывна во всех целых точках.

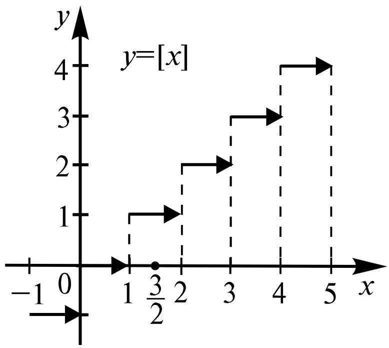


Рис. 6.9

Свойства функций, непрерывных на отрезке:

1. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке* (см. рис. 6.10).

2. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M* **(теорема Вейерштрасса)** (см. рис. 6.11).

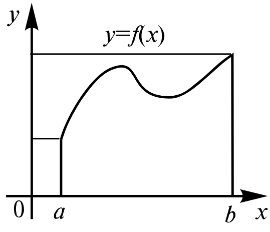


Рис. 6.10

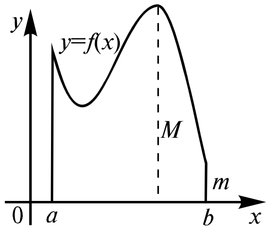


Рис. 6.11

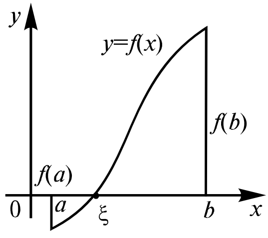


Рис. 6.12

3. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и значения ее на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные зна-*

ки, то внутри отрезка найдется точка $\xi \in (a, b)$, *такая, что* $f(\xi) = 0$ **(теорема Больцано-Коши)** (см. рис. 6.12).

6.8. Решение задач

▷ **Пример 6.8.** Найти: а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x+5}{x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+5}{x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

Р е ш е н и е. а) На основании непрерывности функции в точке $x = 7$ искомый предел равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x+5}{x-5}=\dfrac{3\cdot 7+5}{7-5} = 13$.

б) При $x \to 5$ числитель $(3x + 5)$ стремится к $3{\cdot}5 + 5 = 20$ (т.е. является ограниченной функцией), а знаменатель $(x - 5)$ — к нулю (т.е. является бесконечно малой величиной); очевидно, их отношение есть величина бесконечно большая, т.е. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+5}{x-5} = \infty$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$, ибо отношение ограниченной функции $\sin x$ ($|\sin x| \le 1$) к бесконечно большой величине x (при $x \to \infty$) есть величина бесконечно малая.

г) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x} = 0$, так как произведение бесконечно малой величины x (при $x \to 0$) на ограниченную функцию $\cos\dfrac{1}{x}$ ($\left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \le 1$) есть величина бесконечно малая.

Заметим, что этот предел нельзя вычислять с помощью теоремы о пределе произведения, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ не существует (при $x \to 0$ аргумент косинуса $\dfrac{1}{x}$ изменяется непрерывно вдоль числовой оси до бесконечности, при этом значения $\cos\dfrac{1}{x}$ колеблются от -1 до 1 и от 1 до -1, не стремясь ни к какому числу (пределу). ▶

В рассмотренных примерах предел находился сразу: в виде числа или символа ∞. Но чаще при вычислении пределов мы сталкиваемся с неопределенностями, когда результат нахождения предела неясен: например, в случае отношения двух бесконечно малых функций (условное обозначение $\left[\frac{0}{0}\right]$) или бесконечно больших ($\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$). Кроме отмеченных неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в математическом анализе рассматриваются также неопределенности вида $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $\left[1^{\infty}\right]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$.

$\triangleright$ **Пример 6.9.** Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Р е ш е н и е. а) Для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ разложим числитель на множители и сократим дробь на множитель $(x-1)$: сокращение возможно, так как при $x\to 1$ $(x-1)$ стремится к нулю, но не равен нулю.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{2(x+\frac{1}{2})(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x-1}=\infty.$$

б) Для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное к числителю, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=\frac{1}{8}.$$

в) Для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ удобно предварительно сделать замену $t = \sqrt[6]{x}$ (тогда $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, при $x \to 1$, $t \to 1$), а затем полученные многочлены разложить на множители:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{(t+1)} = \frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

$\triangleright$ **Пример 6.10.** Найти: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{4x^5+3x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_1x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+k_1x+l_1}{a_2x^m+b_2x^{m-1}+\ldots+k_2x+l_2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^9+1}}{x^2+\sqrt{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, где $f(x) = \dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+\sin x}{x-\cos x}$.

Р е ш е н и е. а) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Учитывая, что поведение числителя и знаменателя при $x \to \infty$ определяется членами с наибольшими показателями степеней (соответственно $3x^2$ и $4x^5$), разделим числитель и знаменатель на x^5, т.е. на x с наибольшим показателем степени числителя и знаменателя. Используя теоремы о пределах, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{4x^5+3x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^5}}{4+\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}} = \frac{0+0}{4+0+0} = 0.$$

б) Используя тот же прием, что и в п. а, можно показать, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_1x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+k_1x+l_1}{a_2x^m+b_2x^{m-1}+\ldots+k_2x+l_2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \begin{cases} 0, & \text{если } n<m, \\ a_1/a_2, & \text{если } n=m, \\ \infty, & \text{если } n>m, \end{cases}$$

т.е. *предел отношения двух многочленов* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *равен* 0, *отношению коэффициентов при старших степенях x или* ∞, *если пока-*

затель степени числителя n соответственно меньше, равен или больше показателя степени знаменателя m.

Рекомендуем запомнить это правило.

в) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Здесь выражению в числителе условно можно приписать степень $n = \frac{9}{4}$, а в знаменателе степень $m = 2$; так как $n > m,$ то на основании правила, сформулированного в п. б, искомый предел равен ∞.

Действительно, разделив и числитель и знаменатель на $\sqrt[4]{x^9}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^9+1}}{x^2+\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^9}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}}=\infty.$$

г) При $x\to+\infty$ имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, при этом поведение числителя и знаменателя определяется вторыми слагаемыми, которые возрастают быстрее первых. Разделив числитель и знаменатель на 3^x и используя теоремы о пределах, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=\frac{0+3}{0+1}=3,$$

поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0.$

При $x\to-\infty$ имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, при этом поведение числителя и знаменателя определяется первыми слагаемыми, которые убывают медленнее других. Разделив числитель и знаменатель на 2^x и используя теоремы о пределах, получим

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+3\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^x}=\frac{2+0}{1+0}=2.$$

д) Для раскрытия неопределенности вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ разделим числитель и знаменатель на x, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+\sin x}{x-\cos x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\cos x}{x}}=\frac{4+0}{1-0}=4,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$ (см. пример **6.8 в**). ▶

▷ **Пример 6.11.** Найти:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2}+x)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

Р е ш е н и е. а) Для раскрытия неопределенности вида $[\infty-\infty]$ умножим и разделим выражение в скобках на сопряженное выражение, получим

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

б) При $x\to-\infty$ имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$, ибо квадратный корень из неотрицательного числа всегда неотрицателен. Решение аналогично примеру **6.11а.**

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+2}+x\right]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2}+x)(\sqrt{x^2+2}-x)}{\sqrt{x^2+2}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}-x}=0.$$

Обращаем внимание на то, что при $x\to-\infty$ в знаменателе нет неопределенности, так как он представляет сумму бесконечно больших положительных величин — величину, бесконечно большую.

в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1+x)-2}{1-x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(1-x)(1+x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\left(-\dfrac{1}{1+x}\right)=-\dfrac{1}{2}$. ▶

Простейшие примеры с использованием первого замечательного предела (6.15) были рассмотрены в примере **6.4**. Рассмотрим несколько более сложные задачи.

▷ **Пример 6.12.** Найти: а) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{\sin8x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^6}{\sin^5 x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=[\infty\cdot0]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin y}{y}=1$

(сделали замену $y=\dfrac{1}{x}$; при $x\to\infty$ $y\to0$).

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{\sin8x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin4x}{4x}:\dfrac{\sin8x}{8x}\right)=\dfrac{1}{2}(1:1)=\dfrac{1}{2}$.

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^6}{\sin^5 x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(x\cdot\dfrac{\sin x^6}{x^6}\right):\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^5\right]=(0\cdot1):1^5=0$.

г) При $x\to1$ имеем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$. Сделаем замену $1-x=y$, тогда $x=1-y$ и при $x\to1$ $y\to0$.

Получим

$$\lim_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{y\to0}y\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)=\lim_{y\to0}y\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2}=$$

$$=\lim_{y\to0}\left(\cos\frac{\pi y}{2}:\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{y}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{y\to0}\cos\frac{\pi y}{2}:\left[\frac{\pi}{2}\left(\lim_{y\to0}\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}\right)\right]=$$

$$=1:\left(\frac{\pi}{2}\cdot1\right)=\frac{2}{\pi}.$$

Простейшие примеры с использованием числа e при раскрытии неопределенности вида $\left[1^\infty\right]$ мы уже фактически встречали в примере **6.5.** Прежде чем рассмотреть более сложные задачи, обратим внимание, что нет неопределенности при вычислении пределов типа $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$ (так как выражение в скобках стремится к $\dfrac{1}{2}$, а не к 1) или $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x(x-2)}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}1^x=1$ (так как единица в любой степени равна единице). Поэтому под неопределенностью вида $\left[1^\infty\right]$ понимается функция, основание степени которой стремится к 1 (но не равно тождественно 1), а показатель степени стремится к бесконечности.

▷ **Пример 6.13.** Найти: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x(\ln(1+x)-\ln x)\right]$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{\sin x}{x^2}}$.

Р е ш е н и е: а) Имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{2x-1}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(4x)=\infty$.

Выделим у дроби целую часть $\dfrac{2x-3}{2x-1}=\dfrac{(2x-1)-2}{2x-1}=1-\dfrac{2}{2x-1}$.

Обозначим $y=-\dfrac{2}{2x-1}$; при $x\to\infty$ $y\to 0$, причем $x=-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{2}$.

Теперь, используя определение числа e (6.19), теорему о пределе произведения и свойство (6.25) непрерывности сложной функции, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{4}{y}+2}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{4}{y}}\cdot\lim_{y\to 0}(1+y)^2=$$

$$=\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-4}\cdot 1=e^{-4}.$$

б) Имеем неопределенность вида $[\infty\cdot 0]$. Это отчетливо видно, если с помощью свойств логарифма представить предел в виде

$$\lim_{x\to\infty}\left[x(\ln(1+x)-\ln x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\frac{1+x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=\left[\infty\cdot 0\right]=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

На основании непрерывности логарифмической функции (6.25) перейдем к пределу под символом логарифма, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\ln e=1.$$

в) Имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$, так как $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)=1$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x}\right]=\infty$

(ибо при $x\to 0$ $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$, а $\dfrac{1}{x}\to\infty$). Преобразуя выражение и используя непрерывность степенно-показательной функции, получим

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{\sin x}{x^2}}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2\sin x}{x}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^{2\cdot 1}=e^2.\ \blacktriangleright$$

▷ **Пример 6.14.** Доказать непрерывность функции $y=f(x)$ в точке $x=0$ или установить характер точки разрыва функции в этой точке:

а) $y=\dfrac{\sin x}{x}$; б) $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 1, & \text{если } x=0;\end{cases}$ в) $y=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$;

г) $y=2^{1/x}$.

Р е ш е н и е. а) При $x=0$ функция $f(x)$ не определена, следовательно, она не непрерывна в этой точке. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и соответственно пределы функции слева и справа от точки $x=0$ конечны и равны, т.е. $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, то $x=0$ — точка устранимого разрыва первого рода.

б) По сравнению с п. а функция доопределена в точке $x=0$ так, что $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$, следовательно, данная функция непрерывна в этой точке.

в) При $x = 0$ функция $f(x)$ не определена. Так как пределы функции слева и справа от точки $x = 0$ конечны, т.е.

$\lim\limits_{x\to 0-} = \dfrac{1}{1+2^{1/x}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{1+2^{1/x}} = 0$ (ибо $2^{1/x} \to \infty$ при $x \to 0+$), то в точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода.

г) При $x = 0$ функция $f(x)$ не определена:

$\lim\limits_{x\to 0-} 2^{1/x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} 2^{1/x} = \infty$.

Так как один из односторонних пределов бесконечен, то $x = 0$ есть точка разрыва второго рода. ▶

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать, используя определение предела, что:

6.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+3} = 2$. **6.16.** $\lim\limits_{x\to 5}(3x-4) = 11$. **6.17.** $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3) = 1$.

Найти пределы:

6.18. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{2x-7}{x-8}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to 5}(x-5)\sin\dfrac{1}{x-5}$.

6.20. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{5x-2x^2-2}{2x-1}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

6.22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

6.23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$.

6.24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$.

6.26. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

6.27. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2})$.

6.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

6.29. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-5)\sin\left(\dfrac{1}{x-5}\right)$.

6.30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}/2-\cos x}$.

6.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

6.32. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(2x\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

6.33. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

6.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{5x}$.

6.35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}$.

6.36. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

6.37. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

Какие из данных функций являются непрерывными в точке $x = 1$? В случае нарушения непрерывности установить характер точки разрыва:

6.38. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

6.39. $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{если } x\neq 1,\\ 2, & \text{если } x=1.\end{cases}$

6.40. $y=\dfrac{1}{1+2^{1/(x-1)}}$.

6.41. $y=\dfrac{1}{x-1}$.

6.42. Первоначальный вклад, положенный в банк под 10% годовых, составил 6 млн. руб. Найти размер вклада через 5 лет при начислении процентов: а) ежегодном; б) поквартальном; в) непрерывном.

Раздел Третий

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 7

ПРОИЗВОДНАЯ

7.1. Задачи, приводящиеся к понятию производной

1. Задача о касательной. Пусть на плоскости Oxy дана непрерывная кривая $y = f(x)$ и необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 7.1).

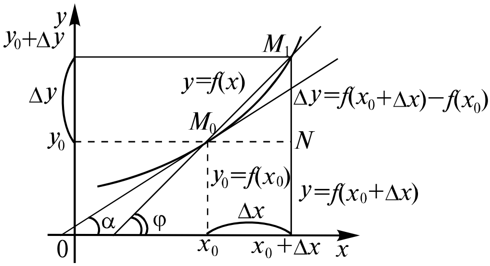


Рис. 7.1

Прежде всего необходимо выяснить, что мы будем понимать под касательной к кривой. Касательную нельзя определить как прямую, имеющую с кривой одну общую точку. В самом деле, прямая (1) на рис. 7.2*а* имеет одну общую точку с кривой (2), но не является касательной к ней. А прямая (3) на рис. 7.2*б*, хотя имеет две общие точки с кривой (4), очевидно, касается ее в точке *A*. Поэтому для определения касательной к кривой должен быть реализован другой подход.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx и перейдем на кривой $y = f(x)$ от точки $M_0(x_0; f(x_0))$ к точке $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Проведем секущую M_0M_1 (см. рис. 7.1).

Под *касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0* естественно понимать предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0, т.е. при $\Delta x \to 0$.

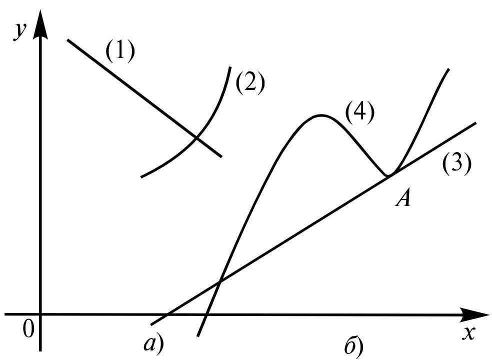


Рис. 7.2

Уравнение прямой, проходящей через точку M_0, в соответствии с (4.4) имеет вид

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$

Угловой коэффициент (или тангенс угла φ наклона) секущей $k_{M_1M_0}$ может быть найден из ΔM_0M_1N: $k_{M_0M_1} = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. рис. 7.1). Тогда угловой коэффициент касательной

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} k_{M_0M_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad \textbf{(7.1)}$$

Оставим на время задачу о касательной и рассмотрим другую задачу.

2. Задача о скорости движения. Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону $s = s(t)$, где s — пройденный путь, t — время, и необходимо найти скорость точки в момент t_0.

К моменту времени t_0 пройденный путь равен $s_0 = s(t_0)$, а к моменту $(t_0 + \Delta t)$ — путь $s_0 + \Delta s = s\,(t_0 + \Delta t)$ (рис. 7.3).

Тогда за промежуток Δt средняя скорость будет $v_{cp} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент t_0. Поэтому под *скоростью точки в момент* t_0 естественно понимать предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0 + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$, т.е.

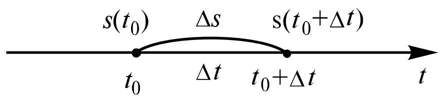


Рис. 7.3

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad \textbf{(7.2)}$$

3. Задача о производительности труда. Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t и необходимо найти производительность труда в момент t_0.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$; тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, что *производительность труда в момент* t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}. \qquad \textbf{(7.3)}$$

Рассматривая три различные по характеру задачи, мы пришли к пределу (7.1)—(7.3) одного вида. Этот предел играет чрезвычайно важную роль в математическом анализе, являясь основным понятием дифференциального исчисления.

7.2. Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. Возьмем точку $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. ***Производной функции*** $y = f(x)$ *называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю* (*если этот предел существует*):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad \textbf{(7.4)}$$

Производная функции имеет несколько обозначений: y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$. Иногда в обозначении производной используется индекс, указывающий, по какой переменной взята производная, например, y'_x.

Нахождение производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функция называется ***дифференцируемой*** *в этой точке.* Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X, называется *дифференцируемой на* этом *промежутке.*

Теперь вернемся к рассмотренным выше задачам.

Из задачи о касательной вытекает ***геометрический смысл производной***: *производная* $f'(x_0)$ *есть* ***угловой коэффициент*** (*тангенс угла наклона*) ***касательной***, *проведенной к кривой* $y = f(x)$ *в точке* x_0, т.е. $k = f'(x_0)$.

Тогда *уравнение касательной* к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 примет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad \textbf{(7.5)}$$

Из задачи о скорости движения следует ***механический смысл производной***: *производная пути по времени* $s'(t_0)$ *есть* ***скорость*** *точки в момент* t_0: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Из задачи о производительности труда следует, что *производная объема произведенной продукции по времени* $u'(t_0)$ *есть производительность труда в момент* t_0.

▷ **Пример 7.1.** График функции $y = f(x)$ есть полуокружность (см. рис. 7.4). Используя геометрический смысл производной, найти значения производной $f'(x)$ в точках $A, B, C, D, E,$ делящих полуокружность на четыре равные части.

Р е ш е н и е. В точках B и D углы наклона касательных к графику составляют соответственно 45° и 135°, поэтому $y'_B = \operatorname{tg} 45° = 1$, $y'_D = \operatorname{tg} 135° = -1$.

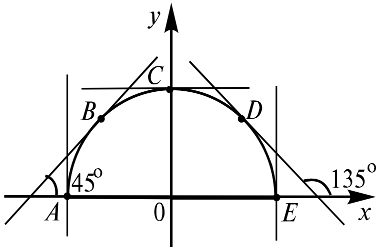


Рис. 7.4

В точке C касательная параллельна оси Ox ($\alpha = 0$), поэтому $y'_C = \operatorname{tg} 0 = 0$. В точках A и E касательные перпендикулярны к оси Ox, $\alpha = 90°$, $\operatorname{tg} 90°$ — не существует, т.е. функция $f(x)$ недифференцируема в этих точках, точнее — производная в этих точках бесконечна: $f'_A = +\infty$, $f'_E = -\infty$ (знаки, стоящие перед символами бесконечности, определяются тем, что в окрестности точки A производная $f'(x)$ положительна (острый угол наклона касательных), а в окрестности точки E — отрицательна (тупой угол наклона). ▶

▷ **Пример 7.2.** Доказать, что функция $y = |x|$ недифференцируема в точке $x = 0$.

Р е ш е н и е. Производная функции (если она существует) равна $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}$.

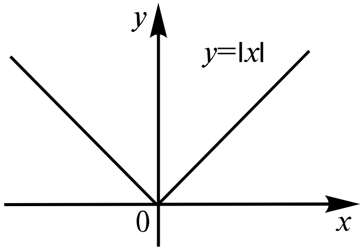


Рис. 7.5

Очевидно, что при $x = 0$ производная не существует, так как отношение $\frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ равно 1 при $\Delta x > 0$ и -1 при $\Delta x < 0$, т.е. не имеет предела при $\Delta x \to 0$ (ни конечного, ни бесконечного). Геометрически это означает отсутствие касательной к кривой в точке $x = 0$ (рис. 7.5). ▶

Зависимость между непрерывностью функции и дифференцируемостью. Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.*

□ По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

где $f'(x_0)$ — постоянная величина, не зависящая от Δx.

Тогда на основании теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций (см. § 6.3) можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \tag{7.6}$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$ или

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x. \tag{7.7}$$

При $\Delta x \to 0$ на основании свойств бесконечно малых устанавливаем, что $\Delta y \to 0$ и, следовательно, по определению (6.24) функция $y = f(x)$ в точке x_0 является непрерывной. ■

Обратная теорема, вообще говоря, неверна, т.е. если функция непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. Так, например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, ибо $\lim\limits_{x \to 0} |x| = |0| = 0$ (рис. 7.5), но, как было доказано в примере **7.2**, недифференцируема в этой точке.

Таким образом, *непрерывность функции — необходимое, но недостаточное условие дифференцируемости функции.*

В математике известны непрерывные функции, недифференцируемые ни в одной точке.

З а м е ч а н и е. Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна. Если функция имеет непрерывную производную на некотором промежутке X, то функция называется *гладкой* на этом промежутке. Если же производная функция допускает конечное число точек разрыва (причем первого рода), то такая функция на данном промежутке называется *кусочно гладкой*.

7.3. Схема вычисления производной. Основные правила дифференцирования

Производная функции $y = f(x)$ может быть найдена по следующей **схеме**:

1°. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и найдем наращенное значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

2°. Находим приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

3°. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

4°. Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т.е. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (если этот предел существует).

▷ **Пример 7.3.** Найти производную функции $y = x^3$.

Р е ш е н и е. 1°. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и найдем наращенное значение функции $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$.

2°. Находим приращение функции $\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + {}$ ${} + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = \Delta x\,(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$.

3°. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$.

4°. Находим предел $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) =$

$= 3x^2$. ▶

Итак, мы получили, что $(x^3)' = 3x^2$. Можно доказать (см. § 7.5), что для любого (не только натурального) n

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad \textbf{(7.8)}$$

Полезно знать частные случаи этой формулы при $n = \dfrac{1}{2}$ и $n = -1$:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \textbf{(7.9)}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \qquad \textbf{(7.10)}$$

▷ **Пример 7.4.** Найти производную функции $y = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$.

Р е ш е н и е. Представим функцию в виде $y = x^2 \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{11}{4}}$.

Теперь по формуле (7.8) $y' = \frac{11}{4} x^{\frac{7}{4}}$. ▶

▷ **Пример 7.5.** Составить уравнение касательной к кривой $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$.

Р е ш е н и е. В соответствии с (7.5) уравнение касательной к кривой $y = f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$ $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. По формуле (7.10) найдем производную $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Ее значение при $x = 1$ $f'(1) = -1$. Значение функции при $x = 1$ $f(1) = 1$.

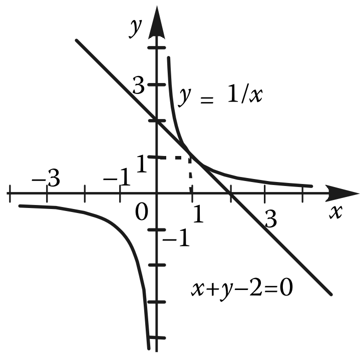


Рис. 7.6

Уравнение касательной $y - 1 = -1(x - 1)$ или $x + y - 2 = 0$ (рис. 7.6). ▶

Правила дифференцирования.

1. *Производная постоянной равна нулю,* т.е.

$$c' = 0.$$

Правило очевидно, так как любое приращение постоянной функции $y = c$ равно нулю.

2. *Производная аргумента равна* 1, т.е.

$$x' = 1.$$

Правило следует из формулы (7.8) при $n = 1$.

В следующих правилах будем полагать, что $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции.

3. *Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме производных этих функций*, т.е.

$$(u + v)' = u' + v'. \qquad \textbf{(7.11)}$$

4. *Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго*, т.е.

$$(uv)' = u'v + uv'. \qquad \textbf{(7.12)}$$

С л е д с т в и е 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*:

$$(cu)' = cu'. \qquad \textbf{(7.13)}$$

С л е д с т в и е 2. *Производная произведения нескольких дифференцируемх функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные*, например:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'. \qquad \textbf{(7.14)}$$

5. *Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \textbf{(7.15)}$$

(при условии, что $v \neq 0$).

□ В качестве примера докажем правило 4, т.е. формулу (7.12). Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции. Найдем производную функции $y = uv$, используя схему, приведенную в начале § 7.3.

1°. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функции u и v получат наращенные значения $u + \Delta u$ и $v + \Delta v$, а функция y — значение $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$.

2°. Найдем приращение функции

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v - uv =$$
$$= \Delta u \cdot v + u \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

3°. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, которое представим в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x.$$

4°. Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, используя теоремы о пределах

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x .$$

На основании определения производной получили, что $y' = u'v + uv' + u'v'\cdot 0$ или $y' = u'v + uv'$. ■

▷ **Пример 7.6.** Найти производную функции $y = f(x)$ и вычислить ее значение в точке $x = 1$:

а) $y = x^3(\sqrt[4]{x}+1)$; б) $y = 15(x^4-1)$; в) $y = \dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}}$.

Р е ш е н и е. а) По формулам (7.12), (7.11) и (7.8)

$$y' =(x^3)'(x^{\frac{1}{4}}+1)+x^3(x^{\frac{1}{4}}+1)'=3x^2(x^{\frac{1}{4}}+1)+x^3(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+0) =$$

$$=x^2(\frac{13}{4}\sqrt[4]{x}+3).$$

Значение производной в точке $x = 1$ есть $y'(1) = 1(\frac{13}{4}\cdot 1+1) =$ $= 4{,}25$.

б) Сначала вынесем постоянный множитель за знак производной:

$y' = 15(x^4-1)'=15\cdot 4x^3=60x^3$; $y'(1) = 60$.

в) По формуле (7.15)

$$y'=\frac{(x^3-1)'\sqrt{x}-(x^3-1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\frac{3x^2\sqrt{x}-(x^3-1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{5x^3+1}{2x\sqrt{x}};$$

$y'(1) = 3$. ▶

7.4. Производная сложной и обратной функций

Пусть переменная y есть функция от переменной u ($y = f(u)$), а переменная u в свою очередь есть функция от независимой переменной x, т.е. задана **сложная** функция $y = f[\varphi(x)]$ (см. § 5.5).

Теорема. *Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ — дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному* *аргументу u, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x*, т.е.

$$y' = f'(u) \cdot u'. \tag{7.16}$$

☐ Дадим независимой переменной x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функции $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$ соответственно получат приращение Δu и Δy.

Предположим, что $\Delta u \neq 0$. Тогда в силу дифференцируемости функции $y = f(u)$ можно записать

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u),$$

где $f'(u)$ — величина, не зависящая от Δu.

На основании теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha(\Delta u),$$

где $\alpha(\Delta u)$ — бесконечно малая при $\Delta u \to 0$, откуда

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u. \tag{7.17}$$

Это равенство будет справедливо и при $\Delta u = 0$, если полагать, что $\alpha(\Delta u = 0) = 0$ (т.е. доопределить таким образом функцию $\alpha(\Delta u)$ при $\Delta u = 0$).

Разделив обе части равенства (7.17) на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{7.18}$$

Так как по условию функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема, то она непрерывна в точке x, следовательно, при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ и $\alpha(\Delta u) \to 0$.

Поэтому, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве (7.18), получим

$$y' = f'(u) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot u'.$$

З а м е ч а н и е. Если ограничиться случаями, что при $\Delta x \neq 0$, $\Delta u \neq 0$, доказательство теоремы можно провести проще исходя из очевидного равенства $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ и переходя в нем к пределу при $\Delta x \to 0$. ■

Правило дифференцирования сложной функции (7.16) может быть записано и в других формах: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Выше мы привели формулы для производной степенной функции $y = x^n$ и ее частных случаев (формулы (7.8) — (7.10)).

С учетом полученного правила дифференцирования сложной функции (7.16) для функции $y = u^n$, где $u = u(x)$, можно записать

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u', \qquad \textbf{(7.19)}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', \qquad \textbf{(7.20)}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'. \qquad \textbf{(7.21)}$$

▷ **Пример 7.7.** Найти производные функций:

а) $y = (\sqrt{x} + 5)^3$; б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$; в) $y = \dfrac{12}{x^2 + x + 1}$.

Р е ш е н и е. а) Функцию можно представить в виде $y = u^3$, где $u = \sqrt{x} + 5$. Поэтому на основании формулы (7.19)

$$y' = 3u^2 \cdot u' = 3(\sqrt{x} + 5)^2 (\sqrt{x} + 5)' = \frac{3(\sqrt{x} + 5)^2}{2\sqrt{x}}.$$

б) Имеем $y = \sqrt[3]{u}$, где $u = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, поэтому по формулам (7.16) и (7.19)

$$y' = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot u' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^2} \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{3(x^2 + 1)\sqrt[3]{(x^2 + 1)(x^2 - 1)^2}}.$$

в) Вынося постоянный множитель 12 за знак производной и используя (7.21), получим

$$y' = 12\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)' = 12\left(-\frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}\right)(x^2 + x + 1)' =$$

$$= \frac{-12(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}. \ ▶$$

Перейдем к рассмотрению производной **обратной** функции.

Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке X. Если переменную y рассматривать как аргумент, а переменную x как функцию, то новая функция $x = \varphi\,(y)$ является обратной к данной (см. § 5.5) и, как можно показать, непрерывной на соответствующем промежутке Y.

Теорема. *Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции*, т.е.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \qquad \textbf{(7.22)}$$

□ По условию функция $y = f\,(x)$ дифференцируема и $y'(x) = f'(x) \neq 0$.

Пусть $\Delta y \neq 0$ — приращение независимой переменной y, Δx — соответствующее приращение обратной функции $x = \varphi(y)$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}. \qquad \textbf{(7.23)}$$

Переходя к пределу в равенстве (7.23) при $\Delta y \to 0$ и учитывая, что в силу непрерывности обратной функции $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x)}, \text{ т.е. } x'_y = \frac{1}{y'_x}. \ \blacksquare$$

Формула (7.22) имеет простой геометрический смысл. Если y'_x выражает тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f\,(x)$ к оси Ox, то x'_y — *тангенс угла* β *наклона той же касательной к оси* Oy, причем $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (если α и β — острые углы) (рис. 7.7) или $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$ (если α и β — тупые углы). Для таких углов $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$ или $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Этому равенству и равносильно условие $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

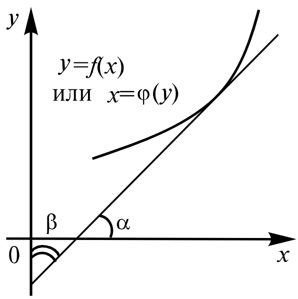


Рис. 7.7

7.5. Производные основных элементарных функций. Понятие о производных высших порядков

Выведем формулы производных основных элементарных функций.

Производная логарифмической функции. а) $y = \ln x$. Воспользуемся схемой нахождения производной, приведенной в § 7.3.

1°. $y+\Delta y = \ln(x + \Delta x)$.

2°. $\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right) = \ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

3°. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

4°. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

Обозначив $\dfrac{\Delta x}{x} = y$, найдем $\Delta x = xy$ и

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{xy}\ln(1+y) = \frac{1}{x}\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

В силу непрерывности логарифмической функции, используя (6.25), меняем местами символы предела и логарифма, а затем используем определение числа e (6.19); получим

$$y' = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right] = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}.$$

Итак,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ и } (\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'.$$

б) $y = \log_a x$. Найдем $y' = \left(\log_a x\right)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' =$

$= \dfrac{1}{x\ln a}$, т.е.

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a} \text{ и } \left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u\ln a}\cdot u'.$$

Производная показательной функции. а) $y = e^x$ (другое обозначение $y = \exp x$). Прологарифмируем обе части равенства по основанию e, получим $\ln y = x$. Дифференцируя обе части по переменной x и учитывая, что $\ln y$ — сложная функция, получим с учетом (7.16) $(\ln y)' = x'$ или $\dfrac{y'}{y} = 1$, откуда $y' = y$, т.е.

$$(e^x)' = e^x \text{ и } (e^u)' = e^u \cdot u'. \qquad \textbf{(7.24)}$$

Заметим, что кривая $y = e^x$ — *экспонента*, обладает отличающим только ее свойством: в каждой точке x ордината кривой $y = e^x$ равна угловому коэффициенту (тангенсу угла наклона) касательной к кривой в этой точке: $e^x = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 7.8).

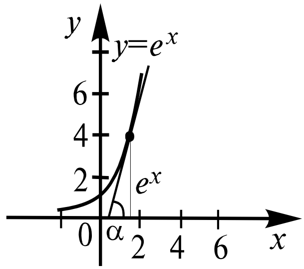


Рис. 7.8

б) $y = a^x$.

$y' = (a^x)' = \left[(e^{\ln a})^x\right]' = (e^{x\ln a})'$ и по правилу дифференцирования сложной функции (7.16)

$y' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x \cdot \ln a$. Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \text{и} \quad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'. \qquad \textbf{(7.25)}$$

Производная степенной функции. Теперь мы можем доказать формулу производной степенной функции $y = x^n$ для любого n. Действительно, $\ln y = n \ln x$. Дифференцируя обе части равенства, получим $\dfrac{1}{y}y' = n \cdot \dfrac{1}{x}$, откуда $y' = ny\dfrac{1}{x} = n x^n \cdot \dfrac{1}{x} = n x^{n-1}$, т.е.

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ и } (u^n)' = nu^{n-1}u'. \qquad \textbf{(7.26)}$$

Производная степенно-показательной функции. $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Найдем $\ln y = \varphi(x) \ln f(x)$. Дифференцируя, получим

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\left[\ln f(x)\right]' = \varphi'(x)\ln f(x) + \frac{\varphi(x) f'(x)}{f(x)}.$$

Учитывая, что $y = f(x)^{\varphi(x)}$, получим после преобразований

$$y' = \varphi(x) f(x)^{\varphi(x)-1} \cdot f'(x) + f(x)^{\varphi(x)} \ln f(x)\varphi'(x), \qquad \textbf{(7.27)}$$

т.е. для того чтобы найти производную степенно-показательной функции, достаточно дифференцировать ее вначале как степенную, а затем как показательную и полученные результаты сложить (напомним, что $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ и $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$).

З а м е ч а н и е. Производная логарифмической функции $(\ln y) = \dfrac{y'}{y}$ называется *логарифмической производной*. Ее удобно использовать для нахождения производных функций, выражения которых существенно упрощаются при логарифмировании. Логарифмическую производную $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$ называют также *относительной скоростью изменения функции* или *темпом изменения функции.*

▷ **Пример 7.8.** Найти производные функций: а) $y = x^x$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}}$.

Р е ш е н и е. а) По формуле (7.27) дифференцируем функцию вначале как степенную, а затем как показательную и полученные результаты складываем: $y' = x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1+\ln x)$.

б) Производную можно найти, используя правила дифференцирования (7.9) — (7.15). Но проще это сделать с помощью логарифмической производной. Действительно,

$\ln y = \dfrac{1}{2}\left[\ln(x+1)+\ln(x^2-2)-\ln(3-x)\right]$. Дифференцируя, находим

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}(x+1)'+\frac{1}{x^2-2}(x^2-2)'-\frac{1}{3-x}(3-x)'\right]$$

или

$$y' = \frac{1}{2}y\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-2}+\frac{1}{3-x}\right).$$

Подставив выражение для y, окончательно получим

$$y' = -\frac{x^3-4x^2-3x+4}{(3-x)\sqrt{(x+1)(x^2-2)(3-x)}}.$$ ►

Производные тригонометрических функций. а) $y = \sin x$.
Воспользуемся схемой нахождения производной (см. § 7.3):
1°. $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$.

2°. $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})$.

3°. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$.

4°. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x$ (учли первый замечательный предел (6.15) и непрерывность функции $\cos x$).

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x \text{ и } (\sin u)' = \cos u\cdot u'. \qquad \textbf{(7.28)}$$

б) $y = \cos x$.

$$(\cos x)' = -\sin x \text{ и } (\cos u)' = -\sin u\cdot u' \qquad \textbf{(7.29)}$$

(доказательство аналогично п. а).

в) $y = \operatorname{tg} x$.

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ т.е.}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ и } (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'. \qquad \textbf{(7.30)}$$

г) $y = \operatorname{ctg} x$.

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};\ (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u' \qquad \textbf{(7.31)}$$

(доказательство аналогично п. в).

д) $y = \arcsin x$, где $-1 \le x \le 1$ и $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

Обратная функция имеет вид $x = \sin y$, причем $x'_y = \cos y \ne 0$, если $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Используем правило дифференцирования обратной функции (7.22)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При $x = \pm 1$ производной не существует.

Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и } (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'. \qquad \textbf{(7.32)}$$

е) $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Вывод формул аналогично п. д — формулы соответствующих производных приведены в таблице.

Таблица производных

№ п/п	Функция y	Производная y'	№ п/п	Функция y	Производная y'
1	c	0	14	e^u	$e^u \cdot u'$
2	x	1	15	a^u	$a^u \ln a \cdot u'$
3	$u+v$	$u'+v'$	16	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
4	uv	$u'v+uv'$	17	$\log_a u$	$\frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
5	uvw	$u'vw+uv'w+$ $+uvw'$	18	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
6	cu	cu'	19	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
7	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	20	$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
8	$\frac{u}{c}$	$\frac{u'}{c}$	21	$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
9	$\frac{c}{v}$	$-\frac{c}{v^2} v'$	22	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10	$f(u)$, $u=\varphi(x)$	$f'(u) \cdot u'$	23	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	u^n	$nu^{n-1}u'$	24	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
12	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	25	$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$			

Производная неявной функции. Выше было рассмотрено дифференцирование явных функций, заданных в виде $y = f(x)$. Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной уравнением $F(x, y) = 0$ (см. § 5.5).

Для нахождения производной функции y, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного уравнения найти производную y'. Фактически этим методом мы пользовались при выводе производных функций $y = e^x$, $y = x^n$, $y = f(x)^{\varphi(x)}$ и в примере **7.8б** после логарифмирования рассматриваемых функций.

▷ **Пример 7.9.** Найти производную функции y, заданной уравнением $x^2 - xy + \ln y = 2$, и вычислить ее значение в точке (2; 1).

Р е ш е н и е. Дифференцируя обе части равенства и учитывая, что y есть функция от x, получим $2x - y - xy' + \dfrac{y'}{y} = 0$, откуда

$$y' = \frac{2xy - y^2}{xy - 1}.$$

Значение производной при $x = 2$, $y = 1$ $y'(2) = 3$. ▶

Производные высших порядков. До сих пор мы рассматривали производную $f'(x)$ от функции $f(x)$, называемую *производной первого порядка*. Но производная $f'(x)$ сама является функцией, которая также может иметь производную.

Производной n-го порядка называется производная от производной $(n - 1)$-го порядка.

Обозначение производных: $f''(x)$ — *второго порядка* (или *вторая производная*), $f'''(x)$ — *третьего порядка* (или *третья производная*).

Для обозначения производных более высокого порядка используются арабские цифры в скобках или римские цифры, например, $f^{(4)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ или $f^{\mathrm{IV}}(x)$ и т.д.

Выясним *механический смысл второй производной*. Выше было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$ (где s — путь, t — время), то $s'(t_0)$ представляет скорость изменения пути в момент t_0. Следовательно, *вторая производная пути по времени* $s''(t_0) = \left[s'(t_0)\right]' = v'(t_0)$ *есть скорость изменения скорости или* ***ускорение*** *точки в момент* t_0.

▷ **Пример 7.10.** Найти производные до n-го порядка включительно от функции $y = \ln x$.

Р е ш е н и е. $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, $y''' = \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)' = \dfrac{2}{x^3}$, $y^{(4)} = -\dfrac{2 \cdot 3}{x^4}$ и т.д. Очевидно, что производная n-го порядка $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. ▶

7.6. Экономический смысл производной. Использование понятия производной в экономике

В § 7.2 было установлено, что производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее *экономический смысл производной.*

Издержки производства y будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции x. Пусть Δx — прирост продукции, тогда Δy — приращение издержек производства и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает **предельные издержки** *производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.*

Предельные издержки зависят от уровня производства (количества выпускаемой продукции) x и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо и т.п.). Аналогичным образом могут быть определены *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и другие предельные величины.

Применение дифференциального исчисления к исследованию экономических объектов и процессов на основе анализа этих предельных величин получило название *предельного анализа.* Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величины), а *процесс*, *изменение экономического объекта.* Таким образом, *производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта* (*процесса*) *по времени или относительно другого исследуемого фактора.* Следует учесть, однако, что экономика не всегда позволяет использовать предельные величины в силу неделимости многих объектов экономических расчетов и прерывности (дискретности) экономических показателей во времени (например, годовых, квартальных, месячных и т.д.). Вместе с тем в ряде случаев можно отвлечься от дискретности показателей и эффективно использовать предельные величины.

Рассмотрим в качестве примера **соотношения между средним и предельным доходом**[1] в условиях монопольного и конкурентного рынков.

---

[1] В экономической литературе п р е д е л ь н ы е величины называют также м а р ж и н а л ь н ы м и. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква M; при записи с р е д н и х величин добавляется буква A (от англ. *average* – средняя). Например, MR – предельный доход, AR – средний доход.

Суммарный доход (выручку) от реализации продукции *r* можно определить как произведение цены единицы продукции *p* на количество продукции *q*, т.е. $r = pq$.

В условиях монополии одна или несколько фирм полностью контролируют предложение определенной продукции, а следовательно, цены на них. При этом, как правило, с увеличением цены спрос на продукцию падает. Будем полагать, что это происходит по прямой, т.е. кривая спроса *p(q)* — есть линейная убывающая функция $p = aq + b$, где $a < 0$, $b > 0$. Тогда суммарный доход от реализованной продукции составит $r = (aq + b)q = aq^2 + bq$ (рис. 7.9). В этом случае средний доход на единицу продукции $r_{\text{ср}} = \frac{r}{q} = aq + b,$ а предельный доход, т.е. дополнительный доход от реализации единицы дополнительной продукции, составит $r'_q = 2aq + b$ (см. рис. 7.9). Следовательно, ***в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению*** (с меньшей скоростью) *среднего дохода.*

В условиях совершенной конкуренции, когда число участников рынка велико, и каждая фирма не способна контролировать уровень цен, устойчивая продажа товаров возможна по преобладающей рыночной цене, например, $p = b$. При этом суммарный доход составит $r = bq$ и соответственно средний доход $r_{\text{ср}} = \frac{r}{q} = b$ и предельный доход $r'_q = b$ (рис. 7.10). Таким образом, *в условиях свободного конкурентного рынка* в отличие от монопольного *средний и предельный доходы совпадают.*

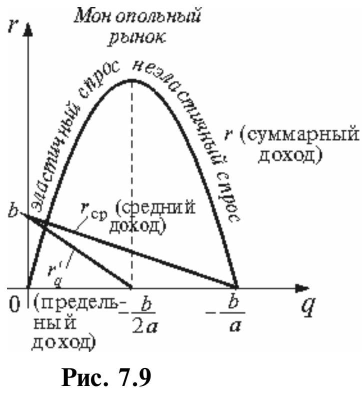


Рис. 7.9

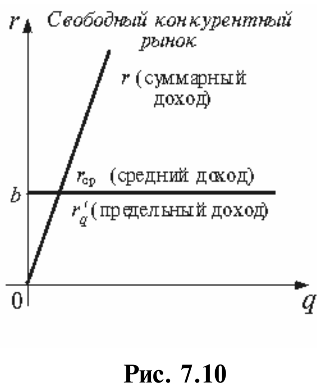


Рис. 7.10

Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие **эластичности функции.**

Определение. ***Эластичностью функции*** $E_x(y)$ *называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при* $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'. \qquad \textbf{(7.33)}$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Выясним геометрический смысл эластичности функции. По определению (7.33)

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\cdot y' = \frac{x}{y}\operatorname{tg}\alpha,$$

где $\operatorname{tg}\alpha$ — тангенс угла наклона касательной в точке $M(x, y)$ (см. рис. 7.11). Учитывая, что из треугольника MBN $MN = x\operatorname{tg}\alpha$, $MC = y$, а из подобия треугольников MBN и AMC $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$, получим $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$, т.е. *эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции до точек ее пересечения с осями Ox* и *Oy.* Если точки пеерсечения касательной к графику функции A и B находятся по одну сторону от точки M, то эластичность $E_x(y)$ положительна (рис. 7.11), если по разные стороны, то $E_x(y)$ отрицательна (рис. 7.12).

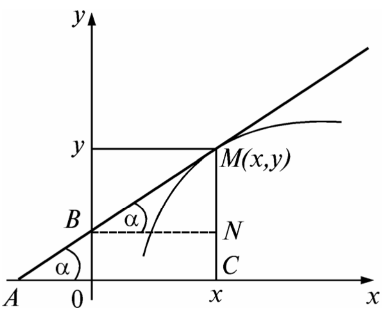


Рис. 7.11

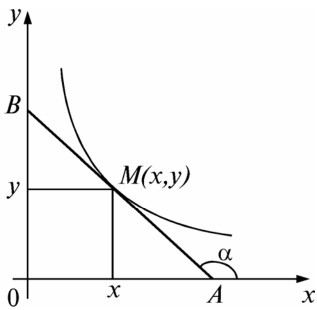


Рис. 7.12

Отметим свойства эластичности функции.

1. *Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции* $T_y = (\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$, т.е.

$$E_x(y) = xT_y. \qquad \textbf{(7.34)}$$

2. *Эластичность произведения* (*частного*) двух *функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций:*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v), \qquad \textbf{(7.35)}$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v). \qquad \textbf{(7.36)}$$

3. *Эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины:*

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \qquad \textbf{(7.37)}$$

Эластичность функций применяется при анализе спроса и потребления. Например, эластичность спроса y относительно цены x (или дохода x) — коэффициент, определяемый по формуле (7.33) и показывающий приближенно, на сколько процентов изменится спрос (объем потребления) при изменении цены (или дохода) на 1%.

Если эластичность спроса (по абсолютной величине) $|E_x(y)| > 1$, то спрос считают *эластичным,* если $|E_x(y)| < 1$ — *неэластичным* относительно цены (или дохода). Если $|E_x(y)| = 1$, то говорят о спросе *с единичной эластичностью.*

Выясним, например, как влияет эластичность спроса относительно цены на суммарный доход $r = pq$ при реализации продукции. Выше мы предполагали, что кривая спроса $p = p(q)$ — линейная функция; теперь будем полагать, что $p = p(q)$ — произвольная функция. Найдем предельный доход

$$r'_q = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p}p'_q\right) = p\left(1 + E_q(p)\right).$$

Учитывая, что в соответствии с формулой (7.37) для эластичности взаимно обратных функций эластичность спроса относительно цены обратна эластичности цены относительно спроса, т.е. $E_q(p) = \dfrac{1}{E_p(q)}$, а также то, что $E_p(q) < 0$, получим при п р о и з в о л ь н о й кривой спроса

$$r'_q = p\left(1 - \frac{1}{\left|E_p(q)\right|}\right). \qquad \textbf{(7.38)}$$

Если спрос неэластичен, т.е. $|E_p(q)| < 1$, то в соответствии с (7.38) предельный доход r'_q отрицателен при любой цене; если спрос эластичен, т.е. $|E_p(q)| > 1$, то предельный доход r'_q положителен. Таким образом, для неэластичного спроса изменения цены и предельного дохода происходят в одном направлении, а для эластичного спроса — в разных. Это означает, что *с возрастанием цены для продукции эластичного спроса суммарный доход от реализации продукции увеличивается, а для товаров неэластичного спроса — уменьшается.* На рис. 7.9 на кривых доходов выделены области эластичного и неэластичного спроса.

▷ **Пример 7.11.** Зависимость между издержками производства y и объемом выпускаемой продукции x выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$ (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

Р е ш е н и е. Функция средних издержек (на единицу продукции) выражается отношением $y_{\text{ср}} = \dfrac{y}{x} = 50 - 0{,}05x^2$; при $x =$ 10 средние издержки (на единицу продукции) равны $y_{\text{ср}}(10) =$ $= 50 - 0{,}05 \cdot 10^2 = 45$ (ден. ед.). Функция предельных издержек выражается производной $y'(x) = 50 - 0{,}15x^2$; при $x = 10$ предельные издержки составят $y'(10) = 50 - 0{,}15 \cdot 10^2 = 35$ (ден. ед.). Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при данном уровне производства (объеме выпускаемой продукции 10 ед.), составляют 35 ден. ед. ▶

▷ **Пример 7.12.** Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией $y = -0{,}5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

Р е ш е н и е. По формуле (7.33) эластичность себестоимости

$$E_x(y) = \frac{-0,5x}{-0,5x+80} = \frac{x}{x-160}.$$

При $x = 60$ $E_{x=60}(y) = -0,6$, т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,6%. ▶

7.7. Решение задач

▷ **Пример 7.13.** Найти производные функций:

а) $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$;

б) $y = 5^{x^3} \ln^2 x$; в) $y = \log_2 \frac{(x-2)^5}{(x+3)^2}$; г) $y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}$;

д) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln\sqrt{x^2+3}$; е) $y = x^{\sin^2 x}$; ж) $e^y + e^{-x} + xy = 0$.

Р е ш е н и е. а) При дифференцировании следует учесть, что первое слагаемое представляет степенную функцию ($y = \sqrt{u}$), ее аргумент — логарифмическую функцию плюс постоянную ($u = \ln x + 1$), а второе слагаемое — логарифмическую функцию ($y = \ln u$, где $u = \sqrt{x} + 1$):

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}}(\ln x + 1)' + \frac{1}{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}+1)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}}\,\frac{1}{x} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x(\ln x+1)}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right).$$

б) Данная функция представляет произведение двух функций 5^{x^3} и $\ln^2 x$, каждая из которых является сложной функцией ($y = 5^u$, где $u = x^3$; $y_1 = u_1^3$, где $u_1 = \ln x$).

Поэтому

$$y' = (5^{x^3})' \ln^2 x + 5^{x^3}(\ln^2 x)' = \left[5^{x^3} \ln 5 (x^3)'\right] \ln^2 x + 5^{x^3}\left[2\ln x (\ln x)'\right] =$$

$$= 5^{x^3} \ln 5 \cdot 3x^2 \ln^2 x + 5^{x^3} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 5^{x^3} \ln x (3\ln 5 \cdot x^2 \ln x + \frac{2}{x}).$$

в) Прежде чем дифференцировать функцию, целесообразно упростить ее выражение, применяя формулы логарифмирования:

$y = 5\log_2(x-2) - 2\log_2(x+3)$. Теперь

$$y' = 5(\log_2(x-2))' - 2(\log_2(x+3))' = \frac{5}{(x-2)\ln 2}(x-2)' -$$

$$-\frac{2}{(x+3)\ln 2}(x+3)' = \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{5}{x-2} - \frac{2}{x+3}\right] = \frac{3x+19}{\ln 2(x-2)(x+3)}.$$

г) По правилу дифференцирования частного двух функций

$$y' = \frac{(\sin^2 x)'\sqrt{\cos 2x} - \sin^2 x(\sqrt{\cos 2x})'}{(\sqrt{\cos 2x})^2}.$$

Учитывая, что $(\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$,

$$(\sqrt{\cos 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(\cos 2x)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)(2x)' = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}},$$

получим после преобразований

$$y' = \frac{\sin 2x\cos^2 x}{\sqrt{\cos^3 2x}}.$$

д) Представим функцию в виде $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln(x^2+3)$.

Теперь $$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)' + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+3}(x^2+3)' =$$

$$= \frac{3}{x^2+3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+3)} = \frac{x+\sqrt{3}}{x^2+3}.$$

е) По правилу дифференцирования степенно-показательной функции (7.27)

$$y' = \sin^2 x\cdot x^{\sin^2 x-1} + x^{\sin^2 x}\ln x(\sin^2 x)'.$$

Учитывая, что $(\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = \sin x\cos x = \sin 2x$, получим после преобразований

$$y' = x^{\sin^2 x}\left(\frac{\sin^2 x}{x} + \ln x\sin 2x\right).$$

ж) При дифференцировании неявно заданной функции учитываем, что y есть функция от x, получим

$$e^y \cdot y' + e^{-x}(-x)' + x'y + xy' = 0 \text{ или}$$

$$e^y \cdot y' - e^{-x} + y + xy' = 0, \text{ откуда } y' = \frac{e^{-x} - y}{x + e^y}. \ ▶$$

▷ **Пример 7.14.** Вычислить значение производной функции $y = f(x)$ при $x = \pi/4$: а) $y = \ln\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}$; б) $y = \ln^4 \sin x$.

Р е ш е н и е. а) Вначале найдем производную функцию, предварительно заметив, что $y = \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{ctg}^2 x)$. Теперь

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}(1+\operatorname{ctg}^2 x) = \frac{1}{2(1+\operatorname{ctg}^2 x)} \cdot 2\operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x)' =$$

$$= \frac{1}{(1+\operatorname{ctg}^2 x)}\operatorname{ctg} x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\operatorname{ctg} x.$$

Решение можно упростить, если вначале преобразовать функцию $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\ln\sin x$.

Находим значение производной при $x = \pi/4$:
$y'(\pi/4) = -\operatorname{ctg}(\pi/4) = -1$.

б) Производная функции $y' = 4(\ln\sin x)^3(\ln\sin x)' =$

$$= 4\ln^3 \sin x \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{4\ln^3 \sin x \cos x}{\sin x} = 4\ln^3 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

Значение производной при $x = \pi/4$

$$y'(\pi/4) = 4\ln^3 \sin(\pi/4) \cdot \operatorname{ctg}(\pi/4) = 4\ln^3(1/\sqrt{2}) \cdot 1 = -0{,}5\ln^3 2. \ ▶$$

▷ **Пример 7.15.** Дана кривая $y = \frac{x^2}{4} - x$. Составить уравнения касательных: а) в точках пересечения ее с прямой $3x + 2y - 4 = 0$; б) параллельной и перпендикулярной этой прямой; в) проходящих через точку (2; 5).

Р е ш е н и е. а) 1. Найдем точки пересечения двух линий, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} - x, \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4, \\ y_2 = 8. \end{cases}$$

2. Найдем производную функции $y' = \frac{1}{2}x - 1$. Значения производной в найденных точках $y'(2) = 0$, $y'(-4) = -3$.

3. Уравнения касательных по формуле (7.5) $y + 1 = 0$ и $y - 8 = -3(x + 4)$ или $3x + y + 4 = 0$ (см. прямые 1 и 2 на рис. 7.13).

б) Угловой коэффициент заданной прямой $k = -\frac{3}{2}$, а прямой, параллельной и перпендикулярной заданной, соответственно $k_3 = k = -\frac{3}{2}$ и $k_4 = -\frac{1}{k} = \frac{2}{3}$. Поэтому точки, в которых касательная к кривой параллельна и перпендикулярна данной прямой, находятся из уравнений $f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 = -\frac{3}{2}$ и $f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 = \frac{2}{3}$, откуда соответственно $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{10}{3}$. Найдем ординаты кривой в полученных точках $f(-1) = \frac{5}{4}$ и $f\left(\frac{10}{3}\right) = -\frac{5}{9}$. Соответствующие уравнения касательных будут: $y - \frac{5}{4} = -\frac{3}{2}(x+1)$ или $6x + 4y + 1 = 0$ и $y + \frac{5}{9} = \frac{2}{3}(x - \frac{10}{3})$ или $6x - 9y - 25 = 0$ (см. прямые 3 и 4 на рис. 7.13).

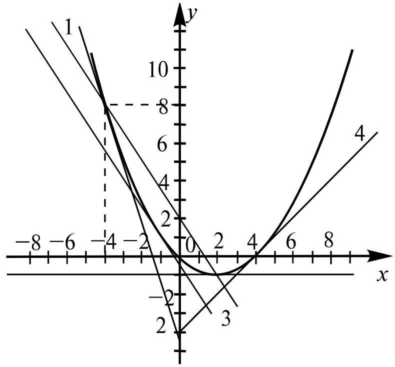


Рис. 7.13

в) Уравнение касательной в точке $M_0\left(x_0, \frac{x_0^2}{4} - x_0\right)$ с угловым коэффициентом $k = f'(x_0) = \frac{1}{2}x_0 - 1$ имеет вид

$$y - \left(\frac{x_0{}^2}{4} - x_0\right) = \frac{1}{2}(x_0 - 1)(x - x_0). \qquad (*)$$

Так как по условию касательная проходит через точку $M_1(2; -5)$ (рис. 7.14), то ее координаты должны удовлетворять уравнению (*), т.е.

$$-5 - \left(\frac{x_0^2}{4} - x_0\right) = \frac{1}{2}(x_0 - 1)(2 - x_0),$$

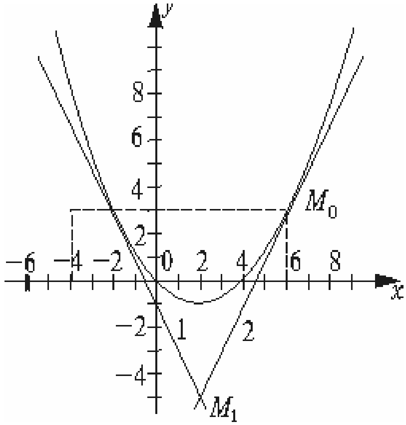


Рис. 7.14

откуда после преобразований получим: $x_0^2 - 4x_0 - 12 = 0$ и $(x_0)_1 = -2$ и $(x_0)_2 = 6$.

Учитывая, что $f(-2) = 3$, $f'(-2) = -2$ и $f(6) = 3$, $f'(6) = 2$, по формуле (7.5) найдем уравнения касательных соответственно $y - 3 = -2\,(x+2)$ и $y - 3 =$ $= 2\,(x - 6)$ или $y = -2x - 1$ и $y = 2x - 9$ (см. прямые 1 и 2 на рис. 7.14). ▶

▷ **Пример 7.16.** Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $s(t) = 4 + 8t - 5t^2$, где высота $s(t)$ измеряется в метрах, а время t — в секундах. Найти: а) скорость тела в начальный момент; б) скорость тела в момент соприкосновения с землей; в) наибольшую высоту подъема тела.

Р е ш е н и е. а) Скорость тела в момент t равна производной $s'(t)$, т.е. $v(t) = s'(t) = 8 - 10t$; в момент $t = 0$ $v(0) = s'(0) = 8$ м/с.

б) В момент соприкосновения с землей $s(t) = 0$, т.е. $4 + 8t - 5t^2 =$ $= 0$, откуда $t_1 = 2$; $t_2 = -0{,}4$ (не подходит по смыслу, ибо $t > 0$). Скорость тела в момент $t = 2$ $v(2) = s'(2) = 8 - 10\cdot 2 = -12$ м/с (минус указывает на то, что скорость тела в момент $t = 2$ противоположна направлению начальной скорости).

в) Наибольшая высота подъема $s_{\text{наиб}}(t)$ будет в момент, когда скорость тела равна 0 и происходит переход от подъема к опусканию тела, т.е. $v(t) = 8 - 10t = 0$, откуда $t = 0{,}8$.

Наибольшая высота подъема $s_{\text{наиб}}(t) = s(0{,}8) = 5 + 8\cdot 0{,}8 -$ $- 5\cdot 0{,}8^2 = 8{,}2$ м. ▶

▷ **Пример 7.17.** Объем продукции u, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t +$ $+ 50$(ед.), $1 \le t \le 8$, где t — рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

Р е ш е н и е. Производительность труда выражается производной

$$z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 \text{ (ед./ч)},$$

а скорость и темп изменения производительности — соответственно производной $z'(t)$ и логарифмической производной $T_z(t) = \left[\ln z(t)\right]'$:

$$z'(t) = -5t + 15 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

$$T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t-6}{t^2 - 6t - 40} \text{ (ед./ч)}.$$

В заданные моменты времени $t_1 = 1$ и $t_2 = 8 - 1 = 7$ соответственно имеем: $z(1) = 112{,}5$ (ед./ч), $z'(1) = 10$ (ед./ч^2), $T_z(1) =$ $= 0{,}09$ (ед./ч) и $z(7) = 82{,}5$ (ед./ч), $z'(7) = -20$ (ед./ч^2), $T_z(7) =$ $= -0{,}24$ (ед./ч).

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $z'(t)$ и $T_z(t)$ с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы. ▶

▷ **Пример 7.18.** Опытным путем установлены функции спроса $q = \frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s = p + 0{,}5$, где q и s — количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p — цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Р е ш е н и е. а) Равновесная цена определяется из условия $q = s$:

$\frac{p+8}{p+2} = p + 0{,}5$, откуда $p = 2$, т.е. равновесная цена равна 2 ден. ед.

б) Найдем эластичности по спросу и предложению по формуле (7.33):

$$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \quad E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для равновесной цены $p = 2$ имеем $E_{p=2}(q) = -0{,}3$; $E_{p=2}(s) = 0{,}8$.

Так как полученные значения эластичностей по абсолютной величине меньше 1, то и спрос и предложение данного товара при равновесной (рыночной) цене неэластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения. Так, при увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.

в) При увеличении цены p на 5% от равновесной спрос уменьшается на $5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5\%$, следовательно, доход возрастает на 3,5%. ▶

▷ **Пример 7.19.** Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна 1?

Р е ш е н и е. Пусть полные затраты предприятия y выражаются функцией $y = f(x)$, где x — объем выпускаемой продукции. Тогда средние затраты $y_{\text{ср}}$ на производство единицы продукции $y_{\text{ср}} = \frac{y}{x}$. Найдем предельные издержки предприятия y'.

По условию $E_x(y) = 1$, т.е. учитывая (7.33), $\frac{x}{y} y' = 1$, откуда $y' = \frac{y}{x}$. Итак, $y' = y_{\text{ср}}$, т.е. предельные издержки равны средним издержкам (заметим, что полученное утверждение справедливо только для линейных функций издержек).

УПРАЖНЕНИЯ

Найти производные функций:

7.20. $y = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^4$. **7.21.** $y = x^4(8\ln^2 x - 4\ln x + 1)$.

7.22. $y=\sqrt[3]{x}(e^{3x}-5)$. **7.23.** $y=\sqrt[4]{1+e^{4x}}+\sqrt{5}$.

7.24. $y=\ln\sqrt[3]{\left(\frac{1-3x}{1+3x}\right)^2}$. **7.25.** $y=\ln\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$.

7.26. $y=3x\ln(1-x^2)$. **7.27.** $y=x^3\ln^2 x$.

7.28. $y=\sqrt[3]{\frac{1-e^{4x}}{e^{4x}}}$. **7.29.** $y=(xe^{2x}+3)^5$.

7.30. $y=(x^2-1)\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. **7.31.** $y=\sin(x^2+2^x)$.

7.32. $y=4e^{\sqrt{\ln x}}(1-\sqrt{\ln x})$. **7.33.** $y=\frac{\ln\cos x}{\cos x}$.

7.34. $y=\cos^2 x+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **7.35.** $y=\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-\ln(\sqrt{1+e^x}+1)$.

7.36. $y=e^x\ln\sin x$. **7.37.** $y=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

7.38. $y=\left(\frac{2}{\cos^4 x}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x$. **7.39.** $y=\frac{\operatorname{arcctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$.

7.40. $y=\sqrt{1-x^2}\arccos x$. **7.41.** $y=\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$.

Найти производные функций и вычислить их значения при $x=x_0$:

7.42. $y=\sqrt{1+\ln^2 x};\ \ x_0=1$. **7.43.** $y=\ln(x+\sqrt{x^2+12});\ \ x_0=2$.

7.44. $y=\sin x\cdot e^{\cos x};\ x_0=\frac{\pi}{2}$. **7.45.** $y=\ln\sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}};\ x_0=0$.

7.46. Составить уравнение касательной к кривой $y=\frac{8}{4+x^2}$:

а) в точке $x = 2$; б) в точке пересечения с осью Oy.

7.47. Дана кривая $y=x^2-2x$. Составить уравнения касательных: а) в точках пересечения ее с прямой $3x + y - 2 = 0$;

б) параллельной и перпендикулярной этой прямой.

в) проходящих через точку $(1; -5)$.

7.48. Составить уравнения общих касательных к кривым $y = x^2$ и $y = -2x^2 + 4x - 4$.

7.49. Тело движется прямолинейно по закону $s(t)=\dfrac{4t+3}{t+4}$, где s измеряется в метрах, а t — в секундах. Найти скорость и ускорение тела в момент $t = 6$.

Найти производные функций, заданных неявно:

7.50. $x^2+xy+y^2=6$. **7.51.** $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

Найти производную n-го порядка функций:

7.52. $y = x^n$. **7.53.** $y = a^x$.

7.54. Объем продукции u (усл. ед.) цеха в течение рабочего дня представляет функцию $u=-t^3-5t^2+75t+425$, где t — время (ч). Найти производительность труда через 2 ч после начала работы.

7.55. Зависимость между издержками производства y (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции x (ед.) выражается функцией $y=10x-0{,}04x^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 5 ед.

7.56. Функции спроса q и предложения s от цены p выражаются соответственно уравнениями $q = 7 - p$ и $s = p + 1$.

Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 5% от равновесной.

Глава 8

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Прежде чем перейти к наиболее важным приложениям производной при исследовании функций и построении их графиков, рассмотрим несколько основных теорем.

8.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. *Если дифференцируемая на промежутке X функция $y = f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.*

□ Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке X и в точке $x_0 \in X$ принимает наименьшее значение (рис. 8.1).

Тогда $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$, если $x_0 + \Delta x \in X$ и, следовательно, величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$ при достаточно малых Δx независимо от знака Δx. Отсюда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ при $\Delta x < 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0+$ (справа) и при $\Delta x \to 0-$ (слева), получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$.

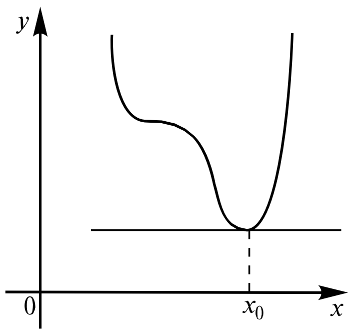


Рис. 8.1

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, следовательно, ее предел при $\Delta x \to 0$ не должен зависеть от способа стремления $\Delta x \to 0$ (справа или слева), т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, откуда следует, что $f'(x_0) = 0$.

Аналогично рассматривается случай, когда функция $f(x)$ принимает в точке x_0 наибольшее значение. ■

Геометрический смысл теоремы Ферма очевиден: *в точке наибольшего или наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка X, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.*

Теорема Ферма может быть использована для доказательства так называемых *теорем о среднем*, к рассмотрению которых мы переходим.

Теорема Ролля. *Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям*:

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2) *дифференцируема на интервале* (a, b);

3) *на концах отрезка принимает равные значения, т.е.* $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, *в которой производная функции равна нулю:* $f'(\xi) = 0$.

□ На основании теоремы Вейерштрасса (см. § 6.7) функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего M и наименьшего m значений. Если оба эти значения достигаются на концах отрезка, то по условию они равны (т.е. $m = M$), а это значит, что функция тождественно постоянна на отрезке $[a, b]$. Тогда производная равна нулю во всех точках этого отрезка. Если же хотя бы одно из этих значений — максимальное или минимальное — достигается внутри отрезка (т.е. $m < M$), то производная в соответствующей точке равна нулю в силу теоремы Ферма. ■

Отметим геометрический смысл теоремы Ролля (см. рис. 8.2): *найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс*; *в этой точке производная и будет равна нулю* (заметим, что на рис. 8.2 таких точек две: ξ_1 и ξ_2).

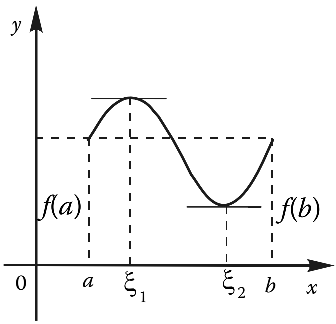
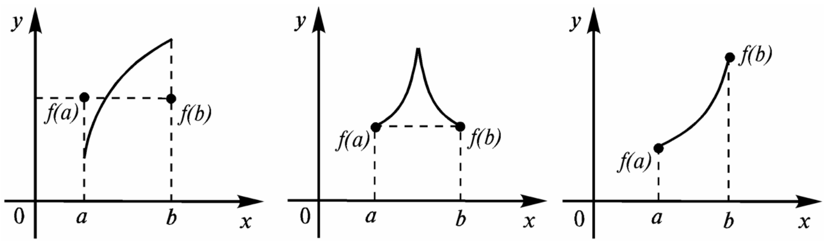


Рис. 8.2

Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можно сформулировать так: *между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль производной.*

Следует отметить, что все условия теоремы Ролля существенны и при невыполнении хотя бы одного из них заключение теоремы может оказаться неверным. Так, для функций, приведенных на рис. 8.3, нарушено только одно условие: на рис. 8.3а — непрерывность на отрезке $[a, b]$, на рис. 8.3б — дифференцируемость на интервале (a, b), на рис. 8.3в — равенство значений $f(a) = f(b)$.

В результате не существует такой точки $\xi \in (a, b)$, в которой $f'(\xi) = 0$.



а) б) в)

Рис. 8.3

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Теорема Лагранжа. *Пусть функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2) *дифференцируема на интервале* (a, b).

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, *в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке*, т.е.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \textbf{(8.1)}$$

□ Введем новую функцию $g(x)$ следующим образом:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля: она непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает на его концах равные значения:

$$g(a) = f(a),$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Следовательно, существует точка $\xi \in (a, b)$, такая, что $g'(\xi) = 0$ или $g'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, откуда $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Заключение (8.1) теоремы Лагранжа может быть записано и в виде:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \qquad \textbf{(8.2)}$$

Выясним механический и геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Приращение $f(b) - f(a)$ — это изменение функции на отрезке $[a, b]$; $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — средняя скорость изменения функции на этом отрезке; значения же производной в точке — это «мгновенная» скорость изменения функции. Таким образом, теорема утверждает: *существует хотя бы одна точка внутри отрезка, такая, что скорость изменения функции в ней равна средней скорости изменения функции на этом отрезке.*

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа приведена на рис. 8.4.

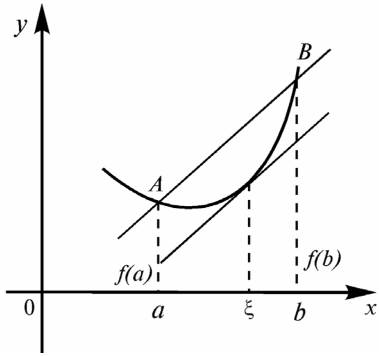


Рис. 8.4

Если перемещать прямую AB параллельно начальному положению, *найдется хотя бы одна точка* $\xi \in (a, b)$, *в которой касательная к графику* $f(x)$ *и хорда* AB, *проведенная через концы дуги* AB, *параллельны* (ибо в соответствии с (4.5) угловой коэффициент секущей $k_{AB} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, а касательной — $k = f'(\xi)$).

Следствие. *Если производная функции* $f(x)$ *равна нулю на некотором промежутке* X, *то функция тождественно постоянна на этом промежутке.*

□ Возьмем на рассматриваемом промежутке X отрезок $[a, x]$. Согласно теореме Лагранжа $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$, где $a < \xi < x$. По условию $f'(\xi) = 0$, следовательно, $f(x) - f(a) = 0$, т.е. $f(x) = f(a) = \text{const}$. ■

8.2. Правило Лопиталя

Теорема. *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.*

Итак, если имеется неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ *или* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, *то*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \textbf{(8.3)}$$

□ Рассмотрим доказательство теоремы для неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \to x_0$.

Для простоты будем предполагать, что функции $f(x)$ и $g(x)$, а также их производные непрерывны в точке x_0, причем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$ $= f(x_0) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = 0$.

В этом случае $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$.

Применяя теорему Лагранжа для функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x, x_0]$, получим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_1)(x - x_0)}{g'(\xi_2)(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)},$$

где $x < \xi_1 < x_0$, $x < \xi_2 < x_0$.

При $x \to x_0$ в силу непрерывности производных $f'(x)$ и $g'(x)$ имеем $f'(\xi_1) \to f'(x_0)$ и $g'(\xi_2) \to g'(x_0)$. Используя теорему о пределе частного двух функций, получаем равенство (8.3). ■

З а м е ч а н и е. Обращаем внимание, что в правой части формулы (8.3) берется *отношение* производных, а не производная отношения.

▷ **Пример 8.1.** Найти:

$$\text{а) } \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}; \text{ б) } \lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{a^x}; \text{ в) } \lim_{x \to \infty} \frac{\log_a x}{x^k}.$$

Р е ш е н и е. а) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

б) Имеем также неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Применим правило Лопиталя k раз, если k — целое, и $[k]+1$ раз, если k — нецелое (где $[k]$ — целая часть числа k):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{kx^{k-1}}{a^x\ln a}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^x\ln^2 a}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{k(k-1)\ldots(k-[k])x^{k-[k]-1}}{a^x\ln^{[k]+1}a}.$$

При каждом применении правила Лопиталя степень числителя будет уменьшаться на единицу и через $[k]+1$ раз станет отрицательной, т.е. числитель обратится в бесконечно малую величину (если k — не целое число; если k — целое, то в постоянную величину). Знаменатель же будет оставаться бесконечно большой величиной. Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^k}=0.$

$$\text{в) }\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(\log_a x)'}{(x^k)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\ln a}}{kx^{k-1}}=\frac{1}{k\ln a}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0. \blacktriangleright$$

Правило Лопиталя дает возможность сравнения бесконечно больших величин: степенная функция x^n — бесконечно большая более высокого порядка, чем логарифмическая $\log_a x$, а показательная a^x — бесконечно большая более высокого порядка, чем степенная x^n; это означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{\log_a x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty$.

▷ **Пример 8.2.** Найти:

$$\text{а) }\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2};\ \text{б) }\lim_{x\to 0}x\ln x.$$

Р е ш е н и е. а)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}.$$

Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ по-прежнему сохраняется. Применим правило Лопиталя еще раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1.$$

б) Имеем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$. Переписывая данное выражение в виде

$\lim\limits_{x\to 0+}(x\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$, получим неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0. \blacktriangleright$$

Правило Лопиталя является эффективным методом раскрытия неопределенностей. Однако применение его не всегда приводит к цели.

$\triangleright$ **Пример 8.3.** Найти:

$$\text{а) }\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}};\ \text{б) }\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}.$$

Р е ш е н и е. а) Если применить правило Лопиталя, то получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

т.е. числитель и знаменатель просто меняются местами; неопределенность же сохраняется. Если применить правило Лопиталя вторично, то функция под знаком предела примет первоначальный вид. Таким образом, применение этого правила в данном случае не позволяет раскрыть неопределенность. В то же время легко установить, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1.$$

б) Если применить правило Лопиталя, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x},$$

то можно сделать ошибочный вывод о том, что предел данной функции не существует, так как не существует $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$.

На самом деле $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=1$,

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ (см. пример **6.8в**). ▶

8.3. Возрастание и убывание функций

Напомним (см. § 5.3), что функция $y=f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ верно неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ $(f(x_2)<f(x_1))$.

Теорема (достаточное условие возрастания функции). *Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка X, то она возрастает на этом промежутке.*

□ Рассмотрим два значения x_1 и x_2 на данном промежутке X. Пусть $x_2>x_1$, $x_1, x_2\in X$. Докажем, что $f(x_2)>f(x_1)$.

Для функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются условия теоремы Лагранжа, поэтому

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \qquad \textbf{(8.4)}$$

где $x_1<\xi<x_2$, т.е. ξ принадлежит промежутку, на котором производная положительна, откуда следует, что $f'(\xi)>0$ и правая часть равенства (8.3) положительна. Отсюда $f(x_2)-f(x_1)>0$ и $f(x_2)>f(x_1)$. ■

Аналогично доказывается другая теорема.

Теорема (достаточное условие убывания функции). *Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка X, то она убывает на этом промежутке.*

Геометрическая интерпретация условия монотонности функции приведена на рис. 8.5.

Если касательные к кривой в некотором промежутке направлены под острыми углами к оси абсцисс (рис. 8.5а), то функция возрастает, если под тупыми (рис. 8.5б), то убывает.

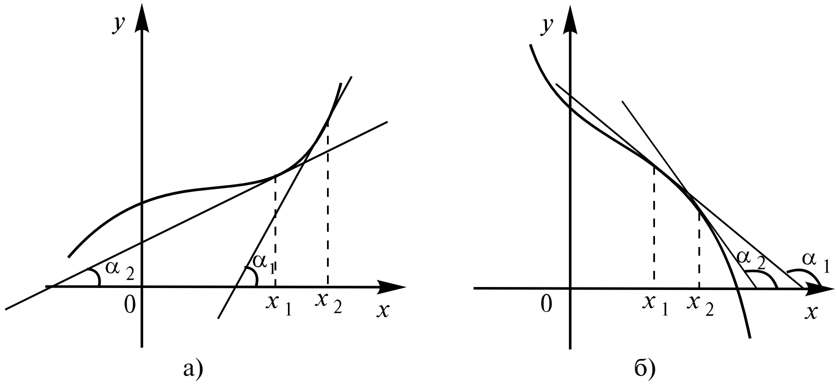


Рис. 8.5

▷ **Пример 8.4.** Найти интервалы монотонности функции $y = x^2 - 4x + 3$.

Р е ш е н и е. Имеем $y' = 2x - 4$. Очевидно $y' > 0$ при $x > 2$ и $y' < 0$ при $x < 2$, т.е. функция убывает на интервале $(-\infty, 2)$ и возрастает на интервале $(2, +\infty)$, где $x_0 = 2$ — абсцисса вершины параболы. ▶

Заметим, что **необходимое** условие монотонности более слабое. *Если функция возрастает* (*убывает*) *на некотором промежутке X, то* можно лишь утверждать, что *производная неотрицательна* (*неположительна*) *на этом промежутке*: $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $x \in X$, т.е. в отдельных точках производная монотонной функции может равняться нулю.

▷ **Пример 8.5.** Найти интервалы монотонности функции $y = x^3$.

Р е ш е н и е. Найдем производную $y' = 3x^2$. Очевидно, что $y' > 0$ при $x \neq 0$. При $x = 0$ производная обращается в нуль. Функция же монотонно возрастает на всей числовой оси (см. рис. 5.5). ▶

8.4. Экстремум функции

В определенном смысле материал этого параграфа наиболее важен для решения задачи исследования функций и построения их графиков. Мы выделим наиболее важные, «узловые», точки функции, нахождение которых во многом определяет структуру графика. Это точки экстремума — максимума и минимума функции.

Определение 1. *Точка* x_0 *называется точкой* ***максимума*** *функции* $f(x)$, *если в некоторой окрестности точки* x_0 *выполняется неравенство* $f(x) \le f(x_0)$ (см. рис. 8.6).

Определение 2. *Точка* x_1 *называется точкой* ***минимума*** *функции* $f(x)$, *если в некоторой окрестности точки* x_1 *выполняется неравенство* $f(x) \ge f(x_1)$ (см. рис. 8.6).

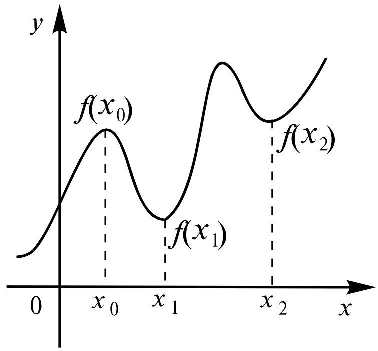


Рис. 8.6

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно *максимумом и минимумом функции*. Максимум и минимум функции объединяются общим названием *экстремума функции*.

Экстремум функции часто называют *локальным экстремумом*, подчеркивая тот факт, что понятие экстремума связано лишь с достаточно малой окрестностью точки x_0. Так что на одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причем может случиться, что минимум в одной точке больше максимума в другой, например на рис. 8.6 $f_{\min}(x_2) > f_{\max}(x_0)$. Наличие максимума (или минимума) в отдельной точке промежутка X вовсе не означает, что в этой точке функция $f(x)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом промежутке (или, как говорят, имеет *глобальный максимум* (*минимум*)).

Важность точек экстремума иллюстрируется следующим примером (см. рис. 8.7).

Предположим, график функции $y = f(x)$ имеет вид, изображенный на рисунке сплошной линией. Допустим, мы строим его по точкам, и на рисунок нанесены точки 1, 3, 5, 7, 9. Тогда скорее всего мы получим кривую, изображенную пунктиром, которая совершенно не похожа на истинный график функции $y = f(x)$.

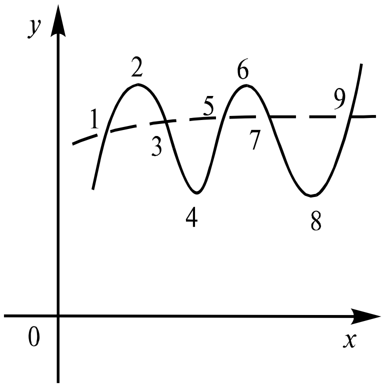


Рис. 8.7

Если же на рисунок нанесены точки 2, 4, 6, 8, то качественная картина графика определена практически однозначно (по крайней мере на промежутке, содержащем эти точки).

Необходимое условие экстремума. Если в точке x_0 дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то в некоторой окрестности этой точки выполнены условия теоремы Ферма (см. § 8.1), и, следовательно, производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$. Но функция может иметь экстремум и в точках, в которых она не дифференцируема. Так, например, функция $y = |x|$ имеет экстремум (минимум) в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней (см. пример **7.2** и рис. 7.5). А функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ также имеет в точке $x = 0$ минимум (рис. 8.8), а производная ее $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ в этой точке бесконечна: $y'(0) = \infty$.

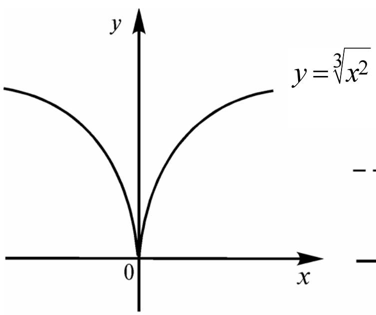


Рис. 8.8

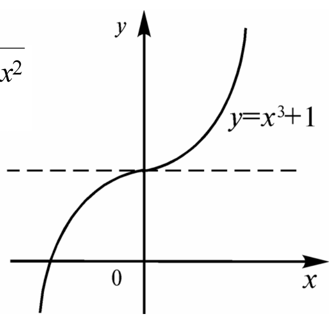


Рис. 8.9

Поэтому необходимое условие экстремума может быть сформулировано следующим образом.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю ($f'(x_0) = 0$) или не существовала.

Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума, т.е. производная равна нулю или не существует, называются *критическими* (или *стационарными*[1]). Обращаем внимание на то, что эти точки должны входить в область определения функции.

Таким образом, если в какой-либо точке имеется экстремум, то эта точка критическая. Очень важно, однако, заметить, что обратное утверждение неверно. *Критическая точка вовсе не обязательно является точкой экстремума.*

▷ **Пример 8.6.** Найти критические точки функции и убедиться в наличии или отсутствии экстремума в этих точках:

$$\text{а) } y = x^2;\ \text{б) } y = x^3 + 1;\ \text{в) } y = \sqrt[3]{x-1}.$$

Р е ш е н и е. а) Производная $y' = 2x$. В точке $x = 0$ $y'(0) = 0$ и действительно в точке $x = 0$ функция $y = x^2$ имеет экстремум (см. рис. 5.6).

б) Функция $y = x^3 + 1$ возрастает на всей числовой оси по свойству степенной функции. Производная $y' = 3x^2$ в точке $x = 0$ равна нулю, т.е. $y'(0) = 0$, но экстремума в точке $x = 0$ нет (см. рис. 8.9).

в) Функция $y = \sqrt[3]{x-1}$ также возрастает на всей числовой оси; производная $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ при $x = 1$ не существует, т.е. $y'(1) = \infty$, но экстремума в этой точке нет (см. рис. 8.10). ▶

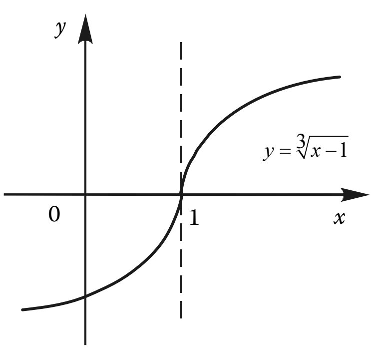


Рис. 8.10

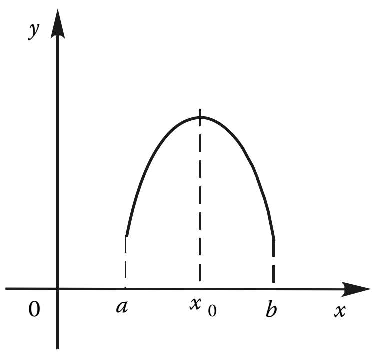


Рис. 8.11

---

[1] Если говорить точнее, то *стационарные* — это точки, в которых производная равна нулю.

Таким образом, для нахождения экстремумов функции требуется дополнительное исследование критических точек. Иными словами, требуется знать достаточное условие экстремума.

Первое достаточное условие экстремума. Теорема. *Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции $y = f(x)$, а если с минуса на плюс, — то точка минимума.*

□ Пусть производная меняет знак с плюса на минус, т.е. в некотором интервале $(a,\ x_0)$ производная положительна ($f'(x) > 0$), а в некотором интервале $(x_0,\ b)$ — отрицательна ($f'(x) < 0$). Тогда в соответствии с достаточным условием монотонности функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a,\ x_0)$ и убывает на интервале $(x_0,\ b)$, (см. рис. 8.11).

По определению возрастающей функции $f(x_0) > f(x)$ при всех $x \in (a,\ x_0)$, а по определению убывающей функции $f(x) < f(x_0)$ при всех $x \in (x_0,\ b)$, т.е. $f(x_0) \geq f(x)$ при всех $x \in (a,\ b)$, следовательно, x_0 — точка максимума функции $y = f(x)$.

Аналогично рассматривается случай, когда производная меняет знак с минуса на плюс. ■

Отметим, что дифференцируемость функции в *самой точке* x_0 не использовалась при доказательстве теоремы. На самом деле она и не требуется — достаточно, чтобы функция была непрерывна в точке x_0.

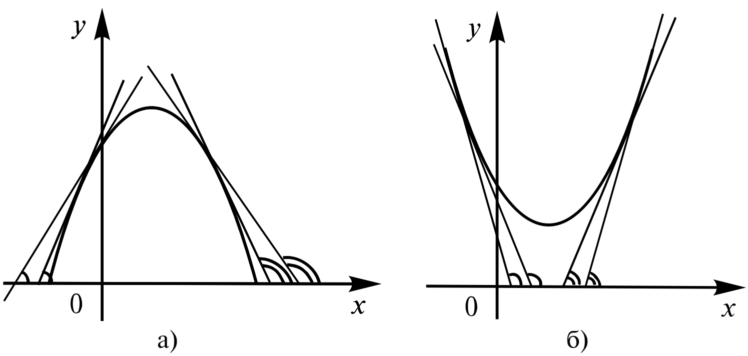


Рис. 8.12

Таким образом, достаточным условием существования экстремума функции $y = f(x)$ в точке x_0 является изменение знака ее производной, т.е. углов наклона касательных к кривой $y = f(x)$:

с острых на тупые (рис. 8.12а) при переходе через точку максимума или с тупых на острые (рис. 8.12б) при переходе через точку минимума. Если изменения знака производной не происходит, то экстремума нет.

Схема исследования функции $y = f(x)$ на экстремум.

1°. Найти производную $y' = f'(x)$.

2°. Найти критические точки функции, в которых производная $f'(x) = 0$ или не существует.

3°. Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции.

4°. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

▷ **Пример 8.7.** Исследовать на экстремум функцию $y = x(x-1)^3$.

Р е ш е н и е. 1°. Производная функции $y' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1)$.

2°. Приравнивая производную к нулю, находим критические точки функции $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = 1$. (Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет — $f'(x)$ определена на всей числовой оси.)

3°. Нанесем критические точки на числовую прямую (рис. 8.13).

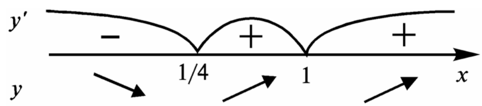


Рис. 8.13

Для определения знака производной слева и справа от критической точки $x = \frac{1}{4}$ выберем, например, значения $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$ и найдем $f'(0) = -1 < 0$ и $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$; следовательно, $f'(x) < 0$ при всех $x < \frac{1}{4}$ и $f'(x) > 0$ на интервале $\left(\frac{1}{4};\ 1\right)$.

Аналогично устанавливаем, что $f'(x) > 0$ и на интервале $(1; +\infty)$.

Согласно достаточному условию $x = \frac{1}{4}$ — точка минимума данной функции. В точке $x = 1$ экстремума нет.

4°. Находим $f_{\min}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)^3=-\frac{27}{256}$. ▶

Второе достаточное условие экстремума. Теорема. *Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0, а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то x_0 есть точка минимума функции $f'(x)$; если $f''(x_0)$ отрицательна, то x_0 — точка максимума.*

□ Пусть $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)>0$. Это значит, что $f''(x)=(f'(x))'>0$ также и в некоторой окрестности точки x_0, т.е. $f'(x)$ возрастает на некотором интервале (a, b), содержащем точку x_0.

Но $f'(x_0)=0$, следовательно, на интервале (a, x_0) $f'(x)<0$, а на интервале (x_0, b) $f'(x)>0$, т.е. $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, т.е. x_0 — точка минимума.

Аналогично рассматривается случай $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$. ■

Схема исследования на экстремум функции $y=f(x)$ с помощью второго достаточного условия в целом аналогична схеме, приведенной выше (совпадают полностью пп. 1°, 2°, 4°). Отличие в п 3°, устанавливающем наличие экстремума: здесь *необходимо найти вторую производную $f''(x)$ и определить ее знак в каждой критической точке.*

▷ **Пример 8.8.** Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются кубической зависимостью $S(x)=ax+\lambda x^3$ $(a<p,\ \lambda>0)$. Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль.

Р е ш е н и е. Обозначим объем выпускаемой продукции x. Составим функцию прибыли $C(x)=px-(ax+\lambda x^3)$, где px — доход от реализуемой продукции.

1°. Находим $C'(x)=(p-a)-3\lambda x^2$.

2°. Находим критические точки: $C'(x)=(p-a)-3\lambda x^2=0$, откуда $x_1=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ (вторую критическую точку $x_2=-\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ не рассматриваем по смыслу задачи).

3°. Находим $C''(x)=-6\lambda x$ и определяем знак второй производной при $x_1=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$:

$C''\left(x_1=\sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}\right) < 0$ (в данном случае $C''(x) < 0$ при любом $x > 0$), следовательно, при $x=\sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$ прибыль $C(x)$ максимальна.

4°. Находим максимум функции (т.е. максимальный размер прибыли)

$$C_{\max}\left(x_1=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right)=\frac{(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}. \blacktriangleright$$

Второе достаточное условие экстремума утверждает, что если в критической точке x_0 $f''(x_0) \neq 0$, то в этой точке имеется экстремум. Обратное утверждение, однако, неверно. Экстремум в критической точке может быть и при равенстве в ней нулю второй производной.

Рассмотрим, например, функцию $y=x^4$. Имеем $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$. В критической точке $x=0$ вторая производная также обращается в нуль. Но $x=0$ — точка экстремума, а именно — минимума. Так что в отличие от первого второе достаточное условие является именно только достаточным, но не необходимым. Поэтому, если в критической точке x_0 $f''(x_0) = 0$, то рекомендуется перейти к первому достаточному условию экстремума.

8.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

При решении прикладных задач, в частности оптимизационных, важное значение имеют задачи на нахождение *наибольшего* и *наименьшего значений* (*глобального максимума* и *глобального минимума*) функции на промежутке X.

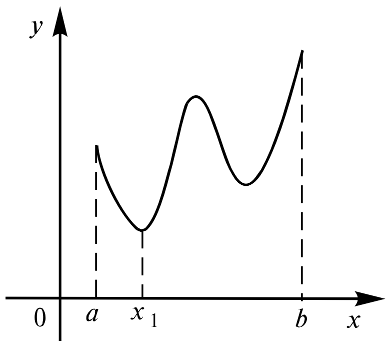


Рис. 8.14

Согласно теореме Вейерштрасса (§ 6.7), если функция $y=f(x)$ непрерывна на о т р е з к е $[a, b]$, то она принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Наибольшее или наименьшее значение функции может достигаться как в точках экстремума, так и в точках на концах отрезка. Так, на рис. 8.14 наибольшее значение функции на конце отрезка $x = b$, а наименьшее — в точке минимума x_1.

Для **отыскания наибольшего и наименьшего значений** на отрезке рекомендуется пользоваться следующей схемой:

1°. Найти производную $f'(x)$.

2°. Найти критические точки функции, в которых $f'(x) = 0$ или не существует.

3°. Найти значения функции в критических точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее $f_{\text{наиб}}$ и наименьшее $f_{\text{наим}}$.

▷ **Пример 8.9.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = (x-2)^2 e^{-x}$ на отрезке $[0; 5]$.

Решение.

1°. $f'(x) = 2(x-2)e^{-x} - (x-2)^2 e^{-x} = -e^{-x}(x-2)(x-4)$.

2°. $f'(x) = 0$, откуда критические точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

3°. Значения функции в критических точках $f(2) = 0$, $f(4) = \dfrac{4}{e^4}$ и на концах отрезка $f(0) = 4$ и $f(5) = \dfrac{9}{e^5}$. Итак, $f_{\text{наиб}} = f(0) = 4$, $f_{\text{наим}} = f(2) = 0$. ▶

Замечание. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале (a, b), то она может не принимать на нем наибольшее и наименьшее значения. В частном случае, *если дифференцируемая функция на интервале* (a, b) *имеет лишь одну точку максимума* (*или одну точку минимума*), *то наибольшее* (*или наименьшее*) *значение функции совпадает с максимумом* (*или минимумом*) *этой функции.* Например, на интервале (1; 2) функция $y = x^2 - 6x + 5$ имеет один минимум $y_{\min} = y(3) = -4$, следовательно, это и есть наименьшее значение функции $y_{\text{наим}} = -4$. Заметим, что наибольшего значения данная функция на указанном интервале не имеет.

8.6. Выпуклость функции. Точки перегиба

Ранее мы подробно изучали точки экстремума, нахождение которых во многом определяет структуру графика функции. Определим теперь другие «узловые» точки функции, которые также следует найти, чтобы качественно построить ее график.

Рассмотрим функцию, график которой изображен на рис. 8.15а.

Эта функция возрастает на всей числовой оси и не имеет экстремумов. Очевидно, однако, ее отличие от функций, изображенных на рис. 8.15б и 8.15в. В точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 график как бы «перегибается». Поэтому такие точки называются точками перегиба, к строгому определению которых мы и переходим.

Прежде всего определим различие поведения функции по разные стороны от точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Определение 1. *Функция $y=f(x)$ называется **выпуклой вниз** на промежутке X, если для любых двух значений x_1, $x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \quad \textbf{(8.5)}$$

Определение 2. *Функция называется **выпуклой вверх**[1] на промежутке X, если для любых двух значений x_1, $x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \quad \textbf{(8.6)}$$

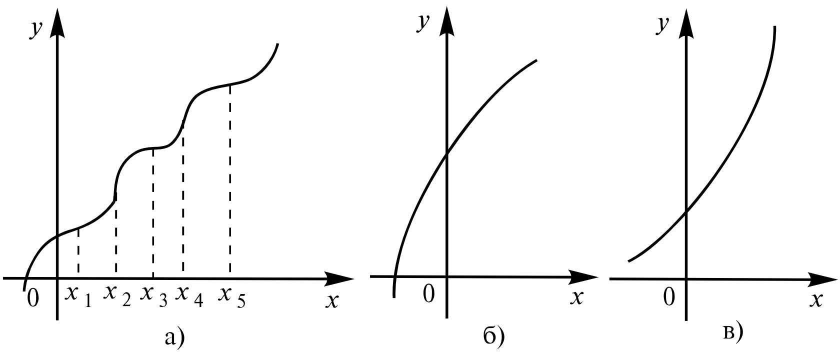
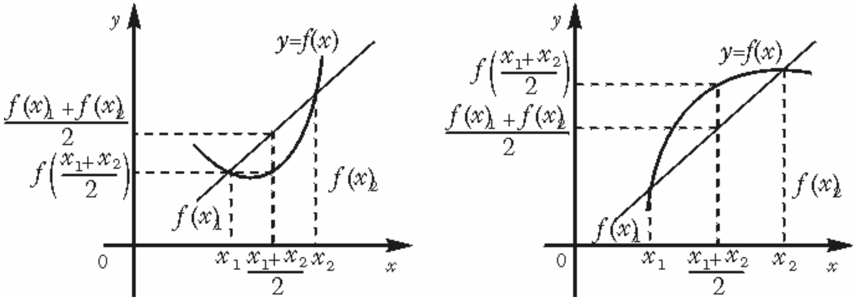


Рис. 8.15

Графики функций, выпуклых вниз и вверх, изображены на рис. 8.16. Очевидно, что если функция выпукла вниз, то отрезок, соединяющий любые две точки графика, целиком лежит над графиком (см. рис. 8.16а), если — выпукла вверх, то весь такой отрезок целиком лежит под графиком функции (см. рис. 8.16б).

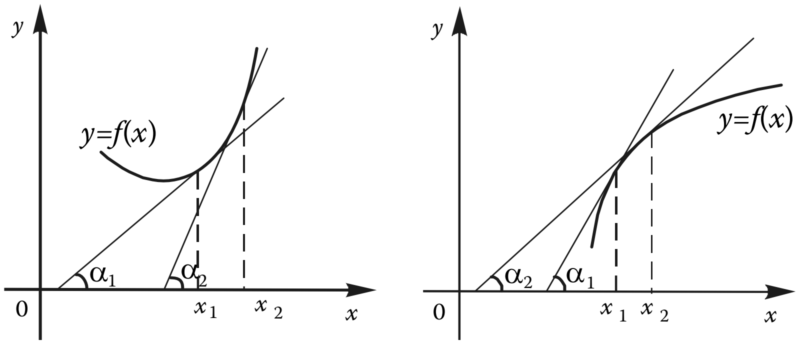
---

[1] Иногда *выпуклой* называют только функцию выпуклую вверх, а функцию выпуклую вниз — *вогнутой*.



а) б)

Рис. 8.16



а) б)

Рис. 8.17

Теорема. *Функция выпукла вниз* (*вверх*) *на промежутке X тогда и только тогда, когда ее первая производная на этом промежутке монотонно возрастает* (*убывает*).

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что если $f'(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, то возрастает (убывает) угол наклона касательных к графику (см. рис. 8.17а, б). Это и означает выпуклость функции вниз (вверх).

Используя условия монотонности, мы можем определить следующее достаточное условие выпуклости функции вниз (вверх).

Теорема. *Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна* (*отрицательна*) *внутри некоторого промежутка X, то функция выпукла вниз* (*вверх*) *на этом промежутке.*

□ Если $f''(x) = (f'(x))' > 0$, $x \in X$, то $f'(x)$ возрастает на промежутке X, следовательно, на основании предыдущей теоремы функция выпукла вниз на промежутке X. Аналогично рассматривается случай $f''(x) < 0$, $x \in X$. ■

Необходимое условие выпуклости слабее: если функция выпукла на промежутке X, то можно утверждать лишь, что $f''(x) \geq 0$ (или $f''(x) \leq 0$), $x \in X$. Например, функция $y = x^4$ выпукла на всей числовой оси, хотя вторая производная $y'' = 12x^2$ не всюду положительна: при $x = 0$ $f''(0) = 0$.

Определение. ***Точкой перегиба*** *графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх.*

Из вышесказанного следует, что точки перегиба — это точки экстремума первой производной. Отсюда вытекают следующие утверждения.

Теорема (необходимое условие перегиба). *Вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю, т.е. $f''(x) = 0$.*

Теорема (достаточное условие перегиба). *Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку x_0 меняет свой знак, то x_0 есть точка перегиба ее графика.*

Нужно иметь в виду следующую геометрическую интерпретацию точек перегиба (см. рис. 8.18).

В окрестности точки x_1 функция выпукла вверх и график ее лежит *ниже* касательной, проведенной в этой точке. В окрестности точки x_2, на которой функция выпукла вниз, картина обратная — график лежит *выше* касательной. В точке же перегиба x_0 касательная разделяет график — он лежит по разные стороны касательной.

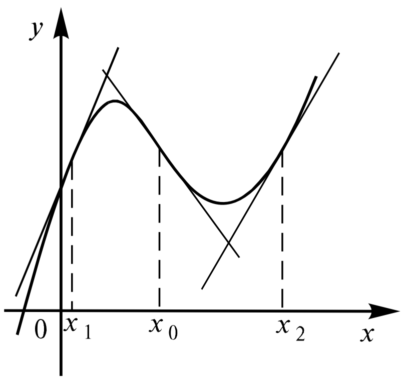


Рис. 8.18

Следует отметить, что *если критическая точка дифференцируемой функции не является точкой экстремума, то она есть точка перегиба.*

Схема исследования функции на выпуклость и точки перегиба:

1°. Найти вторую производную функции $f''(x)$.

2°. Найти точки, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует.

3°. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и наличии точек перегиба.

4°. Найти значения функции в точках перегиба.

▷ **Пример 8.10.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y = x(x-1)^3$.

Р е ш е н и е. 1°. $y' = (x-1)^2(4x-1)$ (см. пример **8.7**).

2°. $y'' = 2(x-1)(4x-1) + (x-1)^2 \cdot 4 = 12\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$.

$y'' = 0$ при $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$ (рис. 8.19).

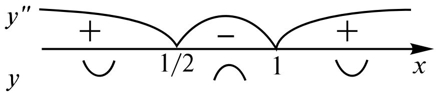


Рис. 8.19

3°. $y'' > 0$ на интервалах $(-\infty, \frac{1}{2})$ и $(1, +\infty)$, следовательно, на этих интервалах функция выпукла вниз; $y' < 0$ на интервале $(\frac{1}{2}, 1)$, следовательно, функция на нем выпукла вверх, а $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$ есть точки перегиба.

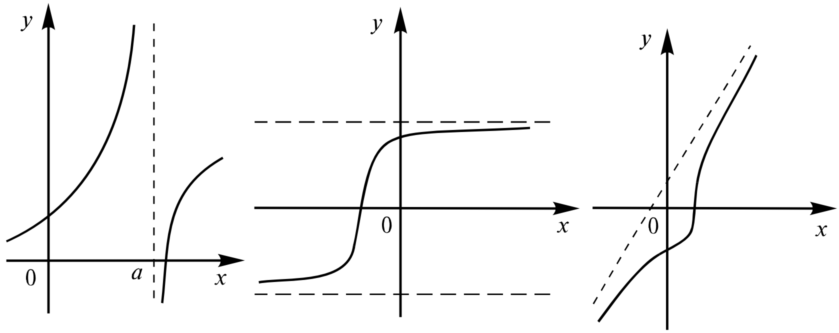
4°. Значения функции в точках перегиба $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{16}$, $f(1) = 0$. ▶

8.7. Асимптоты графика функции

В предыдущих параграфах мы изучали характерные точки функции. Теперь рассмотрим характерные линии. Важнейшими из них являются асимптоты.

Определение. ***Асимптотой графика функции*** $y = f(x)$ *называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки* $(x, f(x))$ *до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.*

На рис. 8.20а изображена *вертикальная* асимптота, на рис. 8.20б — *горизонтальная* асимптота, а на рис. 8.20в — *наклонная*. Очевидно, этими тремя случаями исчерпываются все возможные расположения асимптот.



а) б) в)

Рис. 8.20

Нахождение асимптот графика основано на следующих утверждениях.

Теорема 1. *Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, возможно, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции при $x \to x_0 - 0$ (слева) или при $x \to x_0 + 0$ (справа) равен бесконечности, т.е.* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ *или* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$. *Тогда прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.*

Очевидно, что прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке x_0, так как в этом случае $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Следовательно, *вертикальные асимптоты $x = x_0$ следует искать в точках разрыва функции $y = f(x)$* или *на концах ее области определения (a, b), если a* и *b — конечные числа.*

Теорема 2. *Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существует конечный предел функции* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. *Тогда прямая $y = b$ есть горизонтальная асимптота графика функции $y = f(x)$.*

З а м е ч а н и е. Если конечен только один из пределов $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_{л}$ или $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b_{п}$, то функция имеет лишь *левостороннюю $y = b_{л}$* или *правостороннюю $y = b_{п}$* горизонтальную асимптоту.

В том случае, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, функция может иметь наклонную асимптоту.

Теорема 3. *Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = b$. Тогда прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.*

□ Если $y = kx + b$ — наклонная асимптота, то очевидно, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (kx + b)\right] = 0$ и тем более $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right) = 0$. Поэтому $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Теперь из равенства $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (kx + b)\right] = 0$, учитывая, что k — конечное число, получаем: $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$. ■

Наклонная асимптота, так же как и горизонтальная, может быть правосторонней или левосторонней.

▷ **Пример 8.11.** Найти асимптоты графика дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где $c \neq 0$ и $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Р е ш е н и е. Из области определения выпадает точка $x = -\dfrac{d}{c}$. Найдем пределы функции $f(x)$ при $x \to -\dfrac{d}{c}$.

$\dfrac{ax + b}{cx + d} = \dfrac{ax + b}{c(x + \frac{d}{c})}$. В силу того, что $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ число $-\dfrac{d}{c}$ не является корнем числителя, т.е. при $x \to -\dfrac{d}{c}$ числитель не стремится к нулю. Отсюда $\lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}} \dfrac{ax + b}{cx + d} = \pm\infty$ и прямая $x = -\dfrac{d}{c}$ является вертикальной асимптотой. Далее $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax + b}{cx + d} =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} = \frac{a}{c}.$$

Отсюда следует, что прямая $y=\dfrac{a}{c}$ является горизонтальной асимптотой. (Заметим, что ранее в § 4.5 уравнения асимптот дробно-линейной функции были найдены путем параллельного переноса осей координат в центр ее графика — равносторонней гиперболы.)

Так, например, асимптотами функции $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$ являются прямые $x=-1$, $y=-2$ (график функции приведен на рис. 4.24). ▶

▷ **Пример 8.12.** Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Р е ш е н и е. Очевидно, график функции не имеет ни вертикальных асимптот (нет точек разрыва), ни горизонтальных ($\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+1}=\infty$). Найдем наклонную асимптоту.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2+1}:x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)=0.$$

Таким образом, наклонная асимптота графика функции имеет вид $y=x$. ▶

8.8. Общая схема исследования функций и построения их графиков

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую *схему*:

1°. Найти область определения функции.

2°. Исследовать функцию на четность—нечетность.

3°. Найти вертикальные асимптоты.

4°. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты.

5°. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.

6°. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.

7°. Найти точки пересечения графика с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Заметим, что исследование функции проводится одновременно с построением ее графика.

▷ **Пример 8.13.** Исследовать функцию $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е. 1°. Область определения $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup \cup (1, +\infty)$, т.е. $x \neq \pm 1$.

2°. Функция четная, так как $f(-x) = f(x)$, и ее график симметричен относительно оси ординат.

3°. Вертикальные асимптоты могут пересекать ось абсцисс в точках $x = \pm 1$. Так как пределы функции при $x \to 1-0$ (слева) и при $x \to 1+0$ (справа) бесконечны, т.е.

$\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$, то прямая $x = 1$ есть вертикальная асимптота. В силу симметрии графика $f(x)$ $x = -1$ также вертикальная асимптота.

4°. Поведение функции в бесконечности. Вычислим $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -1$. В силу четности имеем также $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -1$, т.е. прямая $y = -1$ — горизонтальная асимптота.

5°. Экстремумы и интервалы монотонности.

Найдем $y' = \dfrac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$; $y' = 0$ при $x = 0$ и y' не существует при $x = \pm 1$.

Однако критической является только точка $x_1 = 0$ (так как значения $x = \pm 1$ не входят в область определения функции). Поскольку при $x < 0$ $f'(x) < 0$, а при $x > 0$ $f'(x) > 0$ (рис. 8.21), то $x = 0$ — точка минимума и $f_{\min} = f(0) = 1$ — минимум функции. На интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ функция убывает, на интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$ — возрастает.

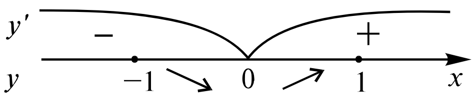


Рис. 8.21

6°. Интервалы выпуклости и точки перегиба.

Найдем

$$y'' = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Очевидно, что $y'' > 0$ на интервале $(-1, 1)$ и функция выпукла вниз на этом интервале. $y'' < 0$ на интервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, и на этих интервалах функция выпукла вверх. Точек перегиба нет.

7°. Точки пересечения с осями. $f(0) = 1$, т.е. точка пересечения с осью ординат $(0, 1)$. Уравнение $f(x) = 0$ решений не имеет, следовательно, график функции не пересекает ось абсцисс.

График функции изображен на рис. 8.22. ▶

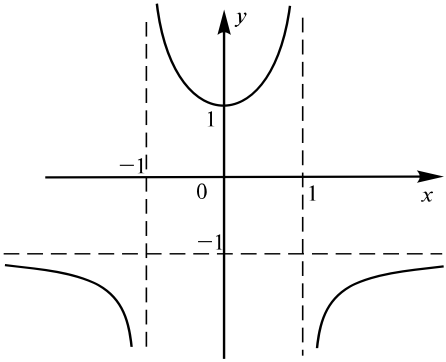


Рис. 8.22

▷ **Пример 8.14.** Исследовать функцию $y = 2xe^{\frac{-x^2}{2}}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е. 1°. Область определения $(-\infty, +\infty)$.

2°. Функция нечетная, так как $f(-x) = -f(x)$ и график ее симметричен относительно начала координат.

3°. Вертикальных асимптот нет, так как функция определена при всех действительных значениях x.

4°. Поведение функции в бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

В силу нечетности функции $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, т.е. прямая $y = 0$ (ось абсцисс) — горизонтальная асимптота.

5°. Экстремумы и интервалы монотонности:

$$y' = 2e^{\frac{-x^2}{2}} + 2xe^{\frac{-x^2}{2}}(-x) = 2e^{\frac{-x^2}{2}}(1 - x^2);$$

$y' = 0$ при $x = \pm 1$, т.е. критические точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Знаки производной изображены на рис. 8.23.

Таким образом, $x = -1$ есть точка минимума; $x = 1$ — точка максимума и

$$f_{\min} = f(-1) = -\frac{2}{\sqrt{e}} \approx -1{,}21,$$

$$f_{\max} = f(1) = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1{,}21.$$

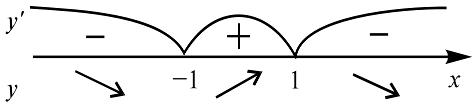


Рис. 8.23

Функция убывает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$ и возрастает на интервале $(-1, 1)$.

6°. Интервалы выпуклости и точки перегиба:

$$y'' = 2e^{\frac{-x^2}{2}}(-x)(1-x^2) + 2e^{\frac{-x^2}{2}} = -2xe^{\frac{-x^2}{2}}(3-x^2);$$

$y'' = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3}$. Знаки второй производной изображены на рис. 8.24.

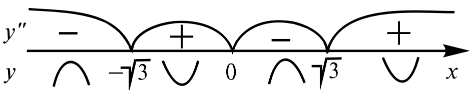


Рис. 8.24

Таким образом, функция выпукла вниз на интервалах $(-\sqrt{3}, 0)$ и $(\sqrt{3}, +\infty)$ и выпукла вверх на интервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$ и $(0, \sqrt{3})$, а $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$ — точки перегиба.

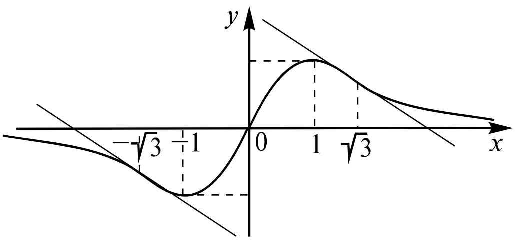


Рис. 8.25

7°. $f(0) = 0$. Уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение $x = 0$, т.е. график функции пересекает оси в начале координат (0; 0).

График функции изображен на рис. 8.25. ▶

8.9. Решение задач

▷ **Пример 8.15.** Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3})$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^x}{1-x}$.

Р е ш е н и е. а) Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Вынося $\sqrt{1+x^2}$, придем к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+x^3}) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+x^2}\left(1-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Далее применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt{1+x^2}}\right)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'}.$$

После преобразования (рекомендуем их провести читателю) получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}} = 0,$$

так как степень старшего члена числителя (единица) ниже степени знаменателя (равного двум).

б) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^x}{1-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x^x)'}{(1-x)'} = \lim_{x\to 1}(x^x)' = \lim_{x\to 1}x^x(1+\ln x) = 1$$

(нахождение производной $(x^x)'$ см. в примере **7.7а**). ▶

▷ **Пример 8.16.** Капитал в 1 млрд. рублей может быть размещен в банке под 50% годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере 100%, а издержки задаются квадратичной зависимостью. Прибыль облагается налогом в p%. При каких значениях p вложение в производство является более эффективным, нежели чистое размещение капитала в банке?

Р е ш е н и е. Пусть x (млрд. рублей) инвестируется в производство, а $1 - x$ — размещается под проценты. Тогда размещенный капитал через год станет равным $(1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right) = \frac{3}{2}-\frac{3}{2}x$, а капитал, вложенный в производство: $x(1 + \frac{100}{100}) = 2x$. Издержки составят $\alpha x^2\ (\alpha > 1)$, т.е. прибыль от вложения в производство $C = 2x - \alpha x^2$. Налоги составят $(2x - \alpha x^2)\frac{p}{100}$, т.е. чистая прибыль окажется равной $\left(1-\frac{p}{100}\right)(2x - \alpha x^2)$.

Общая сумма через год составит:
$A(x) = \frac{3}{2}-\frac{3}{2}x+\left(1-\frac{p}{100}\right)(2x - \alpha x^2) = \frac{3}{2}+\left[2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}\right]x - \alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)x^2$, и требуется найти максимальное значение этой функции на отрезке [0; 1].

Имеем $A'(x) = 2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}-2\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)x$ и

$$A'(x) = 0 \text{ при } x_0 = \frac{2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}}{2\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)}.$$

$A''(x) = -2\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right) < 0$, т.е. согласно второму достаточному условию экстремума x_0 — точка максимума.

Чтобы x_0 принадлежало отрезку [0; 1], необходимо выполнение условия $0 < 2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2} < 2\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)$, откуда $p < 25$.

Таким образом, если $p > 25$, то выгоднее ничего не вкладывать в производство и разместить весь капитал в банк. Если $p < 25$, то можно показать, что при $x = x_0$

$$A(x_0) = \frac{3}{2}+\frac{\left[2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}\right]^2}{4\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)} > \frac{3}{2} = A(0),$$

т.е. вложение в производство является более выгодным, чем чистое размещение под проценты. ▶

▷ **Пример 8.17.** Исследовать функцию $y = \sqrt{1 - \ln^2 x}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е. 1°. Область определения функции задается системой

$$\begin{cases} x > 0, \\ 1 - \ln^2 x \geq 0, \end{cases}$$

решение которой отрезок $\left[\frac{1}{e},\ e\right]$.

2°. Функция общего вида — ни четная, ни нечетная.

3°. Вертикальные асимптоты. Функция непрерывна на всей области определения. Граничными точками области определения являются точки $x = \frac{1}{e}$ и $x = e$:

$$\lim_{x \to e} \sqrt{1 - \ln^2 x} = 0; \quad \lim_{x \to \frac{1}{e}} \sqrt{1 - \ln^2 x} = 0,$$

т.е. вертикальных асимптот нет.

4°. Поведение функции в бесконечности. Так как функция не определена при $x > e$ и $x < \frac{1}{e}$, понятие горизонтальной или наклонной асимптоты для нее не имеет смысла.

5°. Экстремумы и интервалы монотонности.

$$y' = \frac{-2\ln x}{2x\sqrt{1 - \ln^2 x}} = -\frac{\ln x}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}.$$

$y' = 0$ при $x = 1$, т.е. критическая точка $x = 1$. Заметим, что на интервале $(\frac{1}{e},\ e)$ это единственная критическая точка.

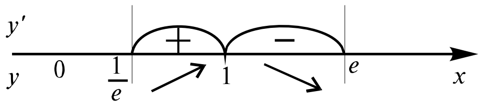


Рис. 8.26

Знаки производной указаны на рис. 8.26.

Таким образом, $x = 1$ — точка максимума функции и $f_{\max} = f(1) = 1$.

6°. Интервалы выпуклости и точки перегиба.

Получим после преобразований (рекомендуется читателю найти самостоятельно)

$$y'' = -\frac{\ln^3 x - \ln x + 1}{x^2(1 - \ln^2 x)^{3/2}}.$$

Очевидно, что при $|\ln x| \le 1$ величина $\ln^3 x - \ln x + 1$ положительна, т.е. $y'' < 0$ при $\frac{1}{e} \le x \le e$ и функция выпукла вверх на всей области определения. Точек перегиба нет.

График функции изображен на рис. 8.27. ▶

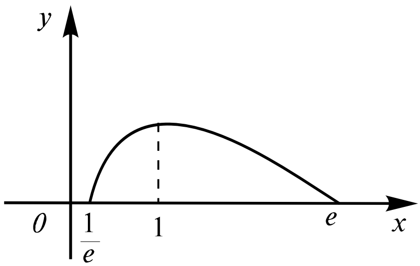


Рис. 8.27

▷ **Пример 8.18.** Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е. 1°. Область определения — $(-\infty, \infty)$.

2°. Функция общего вида (ни четная, ни нечетная), так как $f(-x) \ne \pm f(x)$.

3°. Вертикальных асимптот нет, так как функция определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел.

4°. Поведение функции в бесконечности:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} = \pm\infty.$$

Следовательно, горизонтальных асимптот функция не имеет. Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - x) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - x)(\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + x^2)}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1$$

(так как после упрощения в числителе старший член $-3x^2$, в знаменателе фактически $3x^2$). $y = x - 1$ есть наклонная асимптота.

5°. Экстремумы и интервалы монотонности:

$$y' = \frac{1}{3}(x^3-3x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2-6x) = \frac{x^2-2x}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}} = \frac{x-2}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x-3)^2}},$$

$y' = 0$ при $x = 2$, y' — не существует при $x = 0$; $x = 3$, т.е. критические точки $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.

Знаки производной указаны на рис. 8.28.

Таким образом, $x=0$ — точка максимума и $f_{\max} = f(0) = 0$, $x=2$ — точка минимума и $f_{\min} = f(2) = -\sqrt[3]{4}$, а $x=3$ не является точкой экстремума.

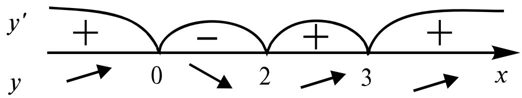


Рис. 8.28

6°. Интервалы выпуклости и точки перегиба. После преобразований получим

$$y'' = -\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}(x-3)^{\frac{5}{3}}},$$

т.е. $y'' = f''(x)$ нигде не обращается в нуль и не существует в точках $x=0$ и $x=3$. Знаки $f''(x)$ указаны на рис. 8.29.

Таким образом, интервалы выпуклости вниз $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ 3)$, интервал выпуклости вверх $(3;\ \infty)$, а $x=3$ — точка перегиба.

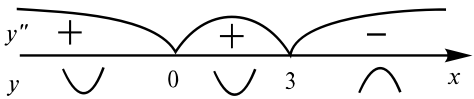


Рис. 8.29

7°. Точки пересечения с осями. $f(0) = 0$, следовательно, ось ординат пересекает график в точке $(0;\ 0)$. Уравнение $f(x) = 0$ имеет два решения $x=0$ и $x=3$. Следовательно, график пересекает ось абсцисс в двух точках $x=0$ и $x=3$.

График функции изображен на рис. 8.30.

Обратим внимание на то, что в точке экстремума $x = 0$ и в точке перегиба $x = 3$ соответственно первая и вторая производные не обращаются в нуль — они не существуют в этих точках. ▶

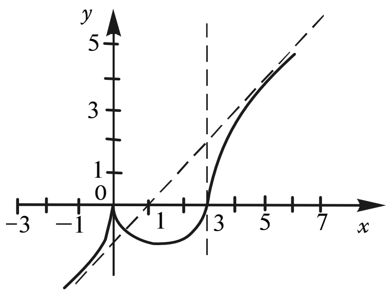


Рис. 8.30

8.10. Приложение производной в экономической теории

Рассмотрим некоторые примеры приложения производной в экономической теории. Как мы увидим, многие, в том числе базовые, законы теории производства и потребления, спроса и предложения оказываются прямыми следствиями математических теорем, сформулированных в настоящей главе.

Вначале рассмотрим *экономическую интерпретацию теоремы Ферма.*

Один из базовых законов теории производства звучит так: *оптимальный для производителя уровень выпуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода.*

То есть уровень выпуска x_0 является оптимальным для производителя, если $MS(x_0) = MD(x_0)$, где MS — предельные издержки, а MD — предельный доход.

Обозначим функцию прибыли за $C(x)$. Тогда $C(x) = D(x) - S(x)$. Очевидно, что оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, т.е. такое значение выпуска x_0, при котором функция $C(x)$ имеет экстремум (максимум). По теореме Ферма в этой точке $C'(x) = 0$. Но $C'(x) = D'(x) - S'(x)$, поэтому $D'(x_0) = S'(x_0)$, т.е. $MD(x_0) = MS(x_0)$.

Другое важное понятие теории производства — это уровень наиболее экономичного производства, при котором средние издержки по производству товара минимальны. Соответствующий экономический закон гласит: *уровень наиболее экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек.*

Получим это утверждение как следствие теоремы Ферма. Средние издержки $AS(x)$ определяются как $\frac{S(x)}{x}$, т.е. издержки по производству товара, деленные на произведенное его количество. Минимум этой величины достигается в критической точке функции $y = AS(x)$, т.е. при условии

$AS'(x) = \frac{S'x - S}{x^2} = 0$, откуда $S' \cdot x - S = 0$ или $S' = \frac{S}{x}$, т.е. $MS(x) = AS(x)$.

Понятие выпуклости функции также находит свою интерпретацию в экономической теории.

Один из наиболее знаменитых экономических законов — закон убывающей доходности — звучит следующим образом: *с увеличением производства дополнительная продукция, полученная* *на каждую новую единицу ресурса (трудового, технологического и т.д.), с некоторого момента убывает.*

Иными словами, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, где Δx — приращение ресурса, а Δy — приращение выпуска продукции, уменьшается при увеличении x. Таким образом, *закон убывающей доходности формулируется так: функция* $y = f(x)$, *выражающая зависимость выпуска продукции от вложенного ресурса, является функцией, выпуклой вверх.*

Другим базисным понятием экономической теории является функция полезности $U = U(x)$, где x — количество товара, а U — полезность. Эта величина очень субъективная для каждого отдельного потребителя, но достаточно объективная для общества в целом. Закон убывающей полезности звучит следующим образом: *с ростом количества товара дополнительная полезность от каждой новой его единицы с некоторого момента убывает.* Очевидно, этот закон можно переформулировать так: *функция полезности является функцией, выпуклой вверх.* В такой постановке закон убывающей полезности служит отправной точкой для математического исследования теории спроса и предложения.

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

8.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-6x}{x^3-x+16}$.

8.20. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$.

8.21. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$.

8.22. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}$.

8.23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{x^2}$.

Применяя правило Лопиталя, вычислить пределы (предварительно преобразовав их к неопределенностям вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$):

8.24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

8.25. $\lim\limits_{x\to\infty}(x\ln x-\sqrt{x+x^2})$.

Найти точки экстремума функций:

8.26. $y = x^3-2x^2-7x+4$.

8.27. $y = \frac{x^3}{1+x^2}$.

8.28. $y = x\ln^2 x$.

8.29. $y = \sqrt{\ln^2 x - 1}$.

8.30. $y = \ln(2 - \cos x)$.

8.31. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

8.32. $y = 3x^2 - 6x$ на отрезке [0; 3].

8.33. $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{\ln x}}$ на промежутке (1; e].

8.34. Требуется выделить прямоугольную площадку земли в 512 м^2, огородить ее забором и разделить загородкой на три равные части параллельно одной из сторон площадки. Каковы должны быть размеры площадки, чтобы на постройку заборов пошло наименьшее количество материала?

8.35. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. При заданном периметре окна найти такие его размеры, чтобы оно пропускало наибольшее количество света.

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

8.36. $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$.

8.37. $y = 2x^2 + \ln x$.

8.38. $y = x^3 - 6x^2$.

8.39. $y = xe^x$.

8.40. $y = e^{-x^2}$.

Найти асимптоты графиков функций:

8.41. $y = \dfrac{3-4x}{2+5x}$.

8.42. $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

8.43. $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

8.44. $y = \dfrac{3x^5}{2+x^4}$.

8.45. $y = \dfrac{2x^3 \ln x}{x^2+1}$.

Исследовать функции и построить их графики:

8.46. $y = x^2 + x$.

8.47. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

8.48. $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

8.49. $y = x^3 - 12x^2 + 36x$.

8.50. $y = x + \dfrac{27}{x^3}$.

8.51. $y = (2+x)e^{-x}$.

8.52. $y = e^{\sqrt[3]{x^2}}$.

8.53. $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

8.54. Расходы a на рекламу влияют на валовой доход $R(a)$ по полученному эмпирически закону $R(a) = R\left(1 + \sqrt[3]{a}\right)$, где R – доход в отсутствие рекламы. При каких значениях R оптимальные расходы на рекламу могут превысить весь доход в отсутствие рекламы?

8.55. Известно, что прогнозная цена акции имеет вид

$$C_{\text{прогн}} = C_0 \frac{gr}{(r_e - r) + gr},$$

где C_0 — начальная цена, r — относительная прибыль корпорации, g — доля прибыли, выделенная на выплату дивидендов, r_e — наиболее эффективная ставка, по которой можно реинвестировать дивиденды. Рассматриваются две акции с начальной ценой, равной единице, и следующими характеристиками: $r_1 = 0{,}2$, $r_2 = 0{,}4$, $g_1 = g_2 = g$. Известно, что $r_e = 0{,}5$. Инвестор продал первую акцию и купил вторую. При каких значениях g эта операция принесет наибольшую ожидаемую прибыль?

Глава 9

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

9.1. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$. Тогда существует конечная производная

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$, откуда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \qquad \textbf{(9.1)}$$

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых: 1) линейного относительно Δx; 2) нелинейного (представляющего бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, ибо (см. замечание в § 6.3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$).

Определение. ***Дифференциалом функции*** *называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной*

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad \textbf{(9.2)}$$

▷ **Пример 9.1.** Найти приращение и дифференциал функции $y = 2x^2 - 3x$ при $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$.

Р е ш е н и е. Приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x)] - (2x^2 - \Delta 3x) = \\ = \Delta x(4x + 2\Delta x - 3).$$

Дифференциал функции $dy = f'(x)\Delta x = (4x - 3)\Delta x$.

При $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$ имеем $\Delta y = 3{,}72$ и $dy = 3{,}70$. Различие между Δy и dy составляет всего 0,02, или 0,5%. ▶

▷ **Пример 9.2.** Найти дифференциал функции $y = x$.

Р е ш е н и е. $dy = dx = x'{\cdot}\Delta x$, откуда

$$dx = \Delta x,$$

т.е. *дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной.* ▶

Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде

$$dy = f'(x)\ dx, \tag{9.3}$$

откуда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Теперь мы видим, что $\dfrac{dy}{dx}$ не просто символическое обозначение производной, а обычная дробь с числителем dy и знаменателем dx**.**

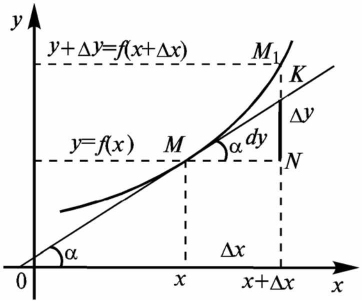


Рис. 9.1

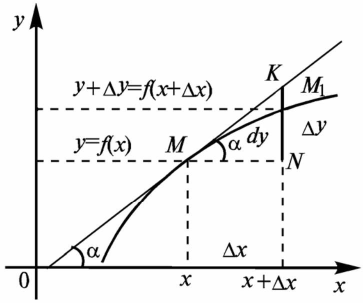


Рис. 9.2

Геометрический смысл дифференциала. Возьмем на графике функции $y = f(x)$ произвольную точку $M(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (см. рис. 9.1)

Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке M, которая образует угол α с положительным направлением оси Ox, т.е. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$. Из прямоугольного треугольника MKN

$$KN = MN{\cdot}\operatorname{tg}\alpha = \Delta x \operatorname{tg}\alpha = f'(x)\Delta x,$$

т.е. в соответствии с (9.2) $dy = KN$.

Таким образом, *дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда x получает приращение Δx.*

Не следует думать, что всегда $dy < \Delta y$. Так, на рис. 9.2 показан случай, когда $dy > \Delta y$.

Свойства дифференциала. Свойства дифференциала в основном аналогичны свойствам производной. Приведем их без доказательства:

1. $dc = 0$.

2. $d(cu) = c\,du$.

3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.

4. $d(uv) = v\,du + u\,dv$.

5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Остановимся теперь на важном свойстве, которым обладает дифференциал функции, но не обладает ее производная.

Инвариантность формы дифференциала. Рассматривая выше $y = f(x)$ как функцию независимой переменной x, мы получили, что $dy = f'(x)dx$. Рассмотрим функцию $y = f(u)$, где аргумент $u = \varphi(x)$ сам является функцией от x, т.е. рассмотрим сложную функцию $y = f[\varphi(x)]$. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ − дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции в соответствии с теоремой, приведенной в § 7.4, равна $y' = f'(u) \cdot u'$.

Тогда дифференциал функции

$$dy = f'(x)\ dx = f'(u) \cdot u' dx = f'(u)\ du,$$

ибо по формуле (9.2) $u'dx = du$. Итак,

$$dy = f'(u)\ du. \tag{9.4}$$

Последнее равенство означает, что формула дифференциала не изменяется, если вместо функции от независимой переменной x рассматривать функцию от зависимой переменной u. Это свойство дифференциала получило название *инвариантности* (т.е. неизменности) *формы* (*или формулы*) *дифференциала*.

Однако в содержании формул (9.3) и (9.4) все же есть различие: в формуле (9.3) дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной, т.е. $dx = \Delta x$, а в формуле (9.4) дифференциал функции du есть лишь линейная часть приращения этой функции Δu и только при малых Δx $du \approx \Delta u$.

9.2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Из изложенного выше следует, что $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, т.е. приращение функции Δy отличается от ее дифференциала dy на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем

$dy = f'(x)\Delta x$. Поэтому при достаточно малых значениях Δx $\Delta y \approx dy$ или $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad \textbf{(9.5)}$$

Чем меньше значение Δx, тем точнее формула (9.5).

Формула (9.5) может оказаться полезной в приближенных вычислениях.

▷ **Пример 9.3.** Вычислить приближенно: а) $\sqrt[4]{16,64}$; б) tg 46°.

Р е ш е н и е. а) Получим вначале приближенную формулу для вычисления корней любой n-й степени. Полагая $f(x) = \sqrt[n]{x}$, найдем $f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$ и в соответствии с (9.5) $\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}\cdot\Delta x}{nx}$ или $\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x}\left(1+\frac{\Delta x}{nx}\right)$. В данном примере

$$\sqrt[4]{x+\Delta x} \approx \sqrt[4]{x}\left(1+\frac{\Delta x}{4x}\right).$$

В качестве x возьмем число, наиболее близкое к 16,64, но чтобы был известен $\sqrt[4]{x}$, при этом Δx должно быть достаточно малым. Очевидно, следует взять $x = 16$, $\Delta x = 0,64$ (но, например, не $x = 9$, $\Delta x = 7,64$!). Итак, $\sqrt[4]{16,64} \approx \sqrt[4]{16}\left(1+\frac{0,64}{4\cdot 16}\right) = 2\cdot 1,01 = 2,02$.

б) Полагая $f(x) = \operatorname{tg} x$, найдем $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ и в соответствии с (9.4) $\operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{\Delta x}{\cos^2 x}$. Учитывая, что $\operatorname{tg} 46° = \operatorname{tg}(45° + 1°) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)$, возьмем $x = \frac{\pi}{4}$ и $\Delta x = \frac{\pi}{180}$. Тогда $\operatorname{tg} 46° = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right) \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\pi}{180} = 1 + \frac{\pi}{90} = 1 + 0,0349 \approx 1,035$. ▶

Используя дифференциал, по формуле (9.5) легко получить формулы, часто используемые на практике при $\alpha < 1$:

$(1\pm\alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$; $\sqrt[n]{1\pm\alpha} \approx 1 \pm \frac{\alpha}{n}$; $\frac{1}{1\pm\alpha} \approx 1 \mp \alpha$, $e^{\alpha} \approx 1 + \alpha$, $\ln(1\pm\alpha) \approx \pm\alpha$; $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ и т.д.

С помощью дифференциала может быть решена задача определения абсолютной и относительной погрешностей функции по заданной погрешности нахождения (измерения) аргумента.

Пусть необходимо вычислить значение данной функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x_1, истинная величина которого неизвестна, а известно лишь его приближенное значение x с абсолютной погрешностью $|\Delta x| = |x - x_1|$. Если вместо истинного значения $f(x_1)$ возьмем величину $f(x)$, то мы допустим ошибку, равную $|f(x) - f(x_1)| = |\Delta y| \approx dy = f'(x)\Delta x$.

При этом относительная погрешность функции $\delta_y = \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ может быть вычислена (при достаточно малых Δx) по формуле:

$$\delta_y = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right| = \left|\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)}\right| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| \text{ или}$$

$$\delta_y = |E_x(y)|\delta_x, \tag{9.6}$$

где $|E_x(y)|$ — эластичность функции (см. § 7.6) (по абсолютной величине); $\delta_x = \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ — относительная погрешность нахождения (измерения) аргумента x.

▷ **Пример 9.4.** Расход бензина y (л) автомобиля на 100 км пути в зависимости от скорости x (км/ч) описывается функцией $y = 18 - 0{,}3x + 0{,}003x^2$. Оценить относительную погрешность вычисления расхода бензина при скорости $x = 90$ км/ч, определенной с точностью до 5%.

Р е ш е н и е. Найдем эластичность функции (по абсолютной величине)

$|E_x(y)| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x(-0{,}3 + 0{,}006x)}{18 - 0{,}3x + 0{,}003x^2}\right|$. При $x = 90$ $|E_{x=90}(y)| = 1{,}41$ и по формуле (9.6) относительная погрешность $\delta_y = 1{,}41 \cdot 5 \approx$ $\approx 7{,}1\%$. ▶

$\triangleright$ **Пример 9.5.** С какой точностью может быть вычислен объем шара, если его радиус измерен с точностью до 2%?

Р е ш е н и е. Объем шара радиуса x равен $f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$. Найдем $f'(x) = 4\pi x^2$, $|E_x(f)| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \frac{x \cdot 4\pi x^2}{\frac{4}{3}\pi x^3} = 3$ и по формуле (9.6) $\delta_y \approx 3\delta_x = 3 \cdot 2 = 6\%$. $\blacktriangleright$

Существенным недостатком применения дифференциала в приближенных вычислениях является невозможность вычисления значений функций с наперед заданной точностью. Этого недостатка лишено использование рядов в приближенных вычислениях (см. § 14.3).

9.3. Понятие о дифференциалах высших порядков

Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ согласно (9.3) $dy = f'(x)dx$, т.е. дифференциал функции есть функция от двух аргументов: x и dx.

Будем полагать, что дифференциал независимой переменной имеет произвольное, но фиксированное значение, не зависящее от x. В этом случае dy есть некоторая функция x, которая также может иметь дифференциал.

Дифференциалом второго порядка (или *вторым дифференциалом*) d^2y функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т.е.

$$d^2y = d(dy). \tag{9.7}$$

Аналогично *дифференциалом n-го порядка* (или *n-м дифференциалом*) d^ny называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции, т.е. $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Найдем выражение для d^2y. По определению $d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx)$. Так как dx не зависит от x, т.е. по отношению к переменной x является постоянной величиной, то множитель dx можно вынести за знак дифференциала, т.е.

$$d^2y = dx \cdot df'(x) = dx \cdot [f'(x)]'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Итак,

$$d^2y = f''(x)\,dx^2, \tag{9.8}$$

где $dx^2 = (dx)^2$, а в общем случае

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n, \tag{9.9}$$

т.е. *дифференциал второго (и вообще n-го) порядка равен произведению производной второго (n-го) порядка на квадрат (n-ю степень) дифференциала независимой переменной.*

Из формул (9.8) и (9.9) следует, что

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

и вообще

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

В заключение отметим, что дифференциалы второго и более высоких порядков не обладают свойством инвариантности формы (или формулы) в отличие от дифференциала первого порядка.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти выражения приращений функций и их дифференциалов и вычислить их значения при заданных x и Δx:

9.6. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$.

9.7. $y = \sqrt{1+x^2}$, $x = 0$, $\Delta x = -0{,}01$.

Используя понятие дифференциала, вычислить:

9.8. $\sqrt[6]{67{,}84}$.

9.9. $\sqrt[5]{255{,}15}$.

9.10. $e^{1{,}03}$.

9.11. $\ln(e + 0{,}272)$.

9.12. $\ln(0{,}1 + \sqrt{0{,}1^2 + 1})$.

9.13. $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{0{,}99}{1{,}01}}$.

9.14. Используя понятие дифференциала, выяснить, с какой точностью должен быть измерен радиус круга, чтобы его площадь можно было определить с точностью до 10%?

9.15. Используя понятие дифференциала, определить, на сколько процентов изменится величина степени $2{,}1^{3{,}1}$ при изменении основания степени на 5%.

Раздел Четвертый

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 10

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала данной функции. Интегральное исчисление решает обратную задачу — нахождение самой функции по ее производной или дифференциалу.

10.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Определение. *Функция $F(x)$ называется* ***первообразной*** *функцией для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке x этого промежутка $F'(x) = f(x)$.*

Например, $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$, так как $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

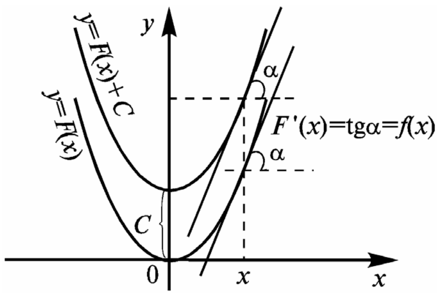


Рис. 10.1

По геометрическому смыслу производной $F'(x)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = F(x)$ в точке с абсциссой x. Геометрически найти первообразную для $f(x)$ — значит найти такую кривую $y = F(x)$, что угловой коэффициент касательной к ней в произвольной точке x равен значению $f(x)$ заданной функции в этой точке (см. рис. 10.1).

Следует отметить, что для заданной функции $f(x)$ ее первообразная определена неоднозначно. Дифференцируя, нетрудно убедиться, что функции $\dfrac{x^3}{3}+1$, $\dfrac{x^3}{3}-5$ и вообще $\dfrac{x^3}{3}+C$, где C — некоторое число, являются первообразными для функции $f(x)=x^2$. Аналогично в общем случае, если $F(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$, то, поскольку $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$, функции вида $F(x) + C$, где C — произвольное число, также являются первообразными для $f(x)$.

Геометрически это означает, что если найдена одна кривая $y = F(x)$, удовлетворяющая условию $F'(x) = \operatorname{tg}\alpha = f(x)$, то, сдвигая ее вдоль оси ординат, мы вновь получаем кривые, удовлетворяющие указанному условию (поскольку такой сдвиг не меняет углового коэффициента касательной в точке с абсциссой x) (см. рис. 10.1).

Остается вопрос, описывает ли выражение вида $F(x) + C$ все первообразные для функции $f(x)$. Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема. *Если* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ — *первообразные для функции* $f(x)$ *на некотором промежутке X, то найдется такое число C, что будет справедливо равенство*

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

□ Поскольку $(F_2(x) - F_1(x))' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$, то, по следствию из теоремы Лагранжа (см. § 8.1), найдется такое число C, что $F_2(x) - F_1(x) = C$ или $F_2(x) = F_1(x) + C$. ■

Из данной теоремы следует, что, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то выражение вида $F(x) + C$, где C — произвольное число, задает **все** возможные первообразные для $f(x)$.

Определение. *Совокупность всех первообразных для функции* $f(x)$ *на промежутке X называется* ***неопределенным интегралом*** *от функции* $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,dx$, где $\int$ — знак интеграла, $f(x)$ — *подынтегральная функция,* $f(x)dx$ — *подынтегральное выражение.* Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad \textbf{(10.1)}$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$, C — произвольная постоянная.

Например, поскольку $\frac{x^3}{3}$ — первообразная для функции $f(x) = x^2$, то $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$

Отметим, что в определении неопределенного интеграла не исключается, что x сама, возможно, является функцией некоторой переменной, однако при проверке правильности нахождения первообразной это несущественно, так как дифференцировать следует лишь по переменной x (по переменной, стоящей в формуле (10.1) под знаком дифференциала).

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется *интегрированием* этой функции.

В гл. 11 будет показано, что достаточным условием интегрируемости функции на промежутке X является непрерывность этой функции на данном промежутке. (Заметим, что для дифференцируемости функции ее непрерывность является лишь необходимым, но недостаточным условием (см. § 7.2).)

10.2. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций

Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла.

1. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

□ Дифференцируя левую и правую часть равенства (10.1), получаем:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x). \blacksquare$$

2. *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению,* т.е.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)dx. \qquad \textbf{(10.2)}$$

□ По определению дифференциала и свойству 1 имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx. \blacksquare$$

3. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого,* т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C, \qquad \textbf{(10.3)}$$

где C — произвольное число.

□ Рассматривая функцию $F(x)$ как первообразную для некоторой функции $f(x)$, можно записать

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

и на основании (10.2) дифференциал неопределенного интеграла $f(x)dx = dF(x)$, откуда $\int dF(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$ ■

Сравнивая между собой свойства 2 и 3, можно сказать, что операции нахождения неопределенного интеграла и дифференциала взаимно обратны (знаки d и $\int$ взаимно уничтожают друг друга, в случае свойства 3, правда, с точностью до постоянного слагаемого).

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*, т.е.

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx\,, \tag{10.4}$$

где α — некоторое число.

□ Найдем производную функции $g(x) = \int \alpha f(x)dx - \alpha \int f(x)dx$:

$$g'(x) = \left(\int \alpha f(x)dx - \alpha \int f(x)dx \right)' = \left(\int \alpha f(x)dx \right)' - \alpha \left(\int f(x)dx \right)' =$$

$= \alpha f(x) - \alpha f(x) = 0$ (см. свойство 1). По следствию из теоремы Лагранжа найдется такое число C, что $g(x) = C$ и значит $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx + C$. Так как сам неопределенный интеграл находится с точностью до постоянного слагаемого, то в окончательной записи свойства 4 постоянную C можно опустить. ■

5. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций,* т.е.

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx\,. \tag{10.5}$$

Доказательство аналогично свойству 4.

Нетрудно видеть, что свойство 5 остается справедливым для любого конечного числа слагаемых.

Перечислим интегралы от элементарных функций, которые в дальнейшем мы будем называть *табличными*:

$$\int 0dx = C, \tag{10.6}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \tag{10.7}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \tag{10.8}$$

для произвольного интервала, не содержащего точки $x = 0$,

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1, \tag{10.9}$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \tag{10.9'}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \tag{10.10}$$

$$\int \cos x\, dx = -\sin x + C, \tag{10.11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ -a < x < a, \ a > 0, \qquad \textbf{(10.12)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \ a \neq 0, \qquad \textbf{(10.13)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \ a \neq 0, \qquad \textbf{(10.14)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C, \ a \neq 0, \qquad \textbf{(10.15)}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

Справедливость приведенных формул проверяется непосредственно дифференцированием (см. определение неопределенного интеграла). Например, формула (10.7) верна, так как производная правой части (10.7) $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$ равна подынтегральной функции левой части (10.7).

Докажем равенство (10.8). Пусть $x > 0$. Тогда $|x| = x$ и $(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $(\ln|x| + C)' = (\ln(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$, т.е. в обоих случаях производная правой части (10.8) равна подынтегральной функции левой части. Аналогично доказываются остальные формулы.

▷ **Пример 10.1.** Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x^4}$; б) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Р е ш е н и е. Во всех трех случаях нам придется воспользоваться одним и тем же табличным интегралом (10.7) от степенной функции, но при разных значениях n.

а) При $n = -4$: $\int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$.

б) При $n = 1/3$: $\int x^{1/3}dx = \dfrac{x^{4/3}}{4/3} + C = -\dfrac{3}{4}x^{4/3} + C$.

в) При $n = -1/2$: $\int x^{-1/2}dx = \dfrac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$. ▶

▷ **Пример 10.2.** Найти интегралы:

а) $\int \dfrac{dx}{3^x}$; б) $\int 2^{3x-1}dx$; в) $\int \dfrac{dx}{9x^2-1}$; г) $\int \dfrac{dx}{4x^2+25}$; д) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Р е ш е н и е. а) Учитывая, что $\dfrac{1}{3^x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ и используя (10.9) при $a = 1/3$, получаем:

$$\int \frac{dx}{3^x} = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{(1/3)^x}{\ln(1/3)} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C.$$

б) Так как $2^{3x-1} = 2^{3x} \cdot 2^{-1} = \dfrac{1}{2}8^x$, то используя (10.4) и (10.9) при $a = 8$, получаем

$$\int 2^{3x-1}dx = \int \frac{1}{2}8^x dx = \frac{1}{2}\int 8^x dx = \frac{1}{2}\frac{8^x}{\ln 8} + C.$$

в) Поскольку $\dfrac{1}{9x^2-1} = \dfrac{1}{9}\,\dfrac{1}{x^2-(1/3)^2}$, то воспользуемся (10.4) и (10.14) при $a = 1/3$:

$$\int \frac{dx}{9x^2-1} = \int \frac{1}{9}\,\frac{dx}{x^2-(1/3)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2-(1/3)^2} =$$

$$= \frac{1}{9}\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1/3}{x+1/3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right| + C.$$

г) Так как $4x^2 + 25 = 4(x^2 + (5/2)^2)$, то используя (10.4) и (10.13) при $a = 5/2$, получаем

$$\int \frac{dx}{4x^2+25} = \int \frac{1}{4}\,\frac{dx}{x^2+(5/2)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+(5/2)^2} = \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5} + C.$$

д) Так как $\sqrt{4x^2+1} = 2\sqrt{x^2+1/4}$, то (см. 10.4) и (10.15) при $a = 1/4$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1/4}} = \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+1/4}\right| + C. \ ▶$$

Метод интегрирования, основанный на применении свойств 4 и 5, называется *методом разложения.*

▷ **Пример 10.3.** Используя метод разложения, найти интегралы:

а) $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{x^2-16}{\sqrt{x}+2}dx$;

в) $\int (\sin(x/2)+\cos(x/2))^2 dx$; г) $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx$.

Р е ш е н и е. Нахождение каждого из интегралов начинается с преобразования подынтегральной функции. В задачах а) и б) воспользуемся соответствующими формулами сокращенного умножения и последующим почленным делением числителя на знаменатель:

а) $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{8x^{3/2}+12x+6x^{1/2}+1}{x^{3/2}}dx =$

$$= \int (8+12x^{-1/2}+6\cdot\frac{1}{x}+x^{-3/2})dx = 8\int dx + 12\int x^{-1/2}dx + 6\int \frac{dx}{x} +$$

$$+\int x^{-3/2}dx = 8x + 24\sqrt{x} + 6\ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

(см. табличные интегралы (10.7) и (10.8)). Обращаем внимание на то, что в конце решения записываем одну общую постоянную C, не выписывая постоянных от интегрирования отдельных слагаемых. В дальнейшем мы будем опускать при записи постоянные от интегрирования отдельных слагаемых до тех пор, пока выражение содержит хотя бы один неопределенный интеграл. В окончательном ответе тогда будет одна постоянная.

б) $\int \frac{x^2-16}{\sqrt{x}+2}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+4)}{\sqrt{x}+2}dx =$

$$= \int (x^{3/2}+4x^{1/2}-2x-8)dx =$$

$$= \int x^{3/2}dx + 4\int x^{1/2}dx - 2\int x dx - 8\int dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} - x^2 - 8x + C.$$

в) Преобразуя подынтегральную функцию, получим

$$\int (\sin(x/2)+\cos(x/2))^2 dx =$$

$$= \int (\sin^2(x/2) + 2\sin(x/2)\cos(x/2) + \cos^2(x/2))dx =$$

$$= \int (1+\sin x)dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$$

(см. табличный интеграл (10.10)).

г) Выделяя из дроби целую часть, получим

$$\frac{x^2}{x^2+4}=\frac{(x^2+4)-4}{x^2+4} = 1-\frac{4}{x^2+4}.$$ Тогда

$$\int\frac{x^2}{x^2+4}dx=\int dx-4\int\frac{dx}{x^2+4} = x - 4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C = x - 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$$

(см. (10.13)). ▶

10.3. Метод замены переменной

Одним из основных методов интегрирования является *метод замены переменной* (или *метод подстановки*), описываемый следующей формулой:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \tag{10.16}$$

где $x = \varphi(t)$ — функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

□ Найдем производные по переменной t от левой и правой частей (10.16):

$$\left(\int f(x)dx\right)_t' = \left(\int f(x)dx\right)_x' x_t' = f(x)\,\varphi'(t),$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)_t' = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

(см. свойство 1 неопределенного интеграла).

Так как $x = \varphi(t)$, то эти производные равны, поэтому по следствию из теоремы Лагранжа левая и правая части (10.16) отличаются на некоторую постоянную. Поскольку сами неопределенные интегралы определены с точностью до неопределенного постоянного слагаемого, то указанную постоянную в окончательной записи можно опустить. ■

Формула (10.16) показывает, что переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену переменной в подынтегральном выражении. Действительно, по определению дифференциала подынтегральные выражения левой и правой частей равенства (10.16) совпадают.

Удачная замена переменной позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному (табличным).

▷ **Пример 10.4.** Найти $\int\frac{dx}{1-2x}$.

Р е ш е н и е. Положим $t = 1 - 2x$. Тогда $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$,

$$dx = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)' dt = -\frac{1}{2}dt \text{ и}$$

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \int \frac{(-1/2)dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$$

(см. (10.4) и табличный интеграл (10.8)). ▶

Следует отметить, что новую переменную можно не выписывать явно (в таких случаях говорят о *преобразовании функции под знаком дифференциала* или *о введении постоянных и переменных под знак дифференциала*).

▷ **Пример 10.5.** Найти $\int \cos(3x+2)dx$.

Р е ш е н и е. Используя свойства дифференциала (см. § 9.1), получаем

$$dx = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x+2).$$

Тогда

$$\int \cos(3x+2)dx = \int \frac{1}{3}\cos(3x+2)d(3x+2) =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)d(3x+2) = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

(см. (10.4) и (10.11)). ▶

В примерах **10.4** и **10.5** для нахождения интегралов была использована линейная подстановка $t = kx + b$, где k и b — некоторые числа $k \neq 0$. В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $F(x)$ некоторая первообразная для функции $f(x)$. Тогда*

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C, \qquad \textbf{(10.17)}$$

где k и b — некоторые числа, $k \neq 0$.

□ Перепишем (10.1) в виде $\int f(kx+b)d(kx+b) = F(kx+b) + C$.

Но $d(kx+b) = (kx+b)'dx = kdx$. Вынося постоянный множитель k за знак интеграла и деля левую и правую части равенства на k, приходим к (10.17). ■

Данная теорема утверждает, что если в (10.1) вместо аргумента x подынтегральной функции $f(x)$ и первообразной $F(x)$ подставить выражение $(kx+b)$, то это приведет к появлению дополнительного множителя $1/k$ перед первообразной.

▷ **Пример 10.6.** Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \sqrt[3]{3-x}\,dx\text{; б) } \int \frac{dx}{4x+3}\text{; в) } \int e^{-2x+7}dx\,.$$

Р е ш е н и е. Искомые интегралы однотипны: каждый из них может быть найден путем применения формулы (10.17) к одному из табличных интегралов.

а) Из (10.7) и (10.17) следует, что

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C\,,\ n \neq -1,\ k \neq 0. \qquad \textbf{(10.18)}$$

Тогда, полагая $n = 1/3$, $k = -1$, $b = 3$, получаем

$$\int \sqrt[3]{3-x}\,dx = -\frac{3}{4}(3-x)^{4/3} + C\,.$$

б) Из (10.8) и (10.17) следует, что

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\ln|kx+b| + C\,,\ k \neq 0. \qquad \textbf{(10.19)}$$

Полагая $k = 4$, $b = 3$, получаем $\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4}\ln|4x+3| + C$.

в) Из (10.9′) и (10.17) следует, что

$$\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}e^{kx+b} + C\,. \qquad \textbf{(10.20)}$$

Полагая в (10.20) $k = -2$, $b = 7$, имеем

$$\int e^{-2x+7}dx = \frac{1}{k}e^{-2x+7} + C\,.$$ ▶

Рассмотрим примеры нахождения интегралов с помощью нелинейных подстановок.

▷ **Пример 10.7.** Найти $\int xe^{-x^2}dx$.

Р е ш е н и е. Положим $t = -x^2$. Продолжение решения может быть аналогично решению примера **10.4**: следует выразить x через t, затем найти выражение для dx. Это позволит реализовать замену переменной в искомом интеграле. Но здесь мы поступим по-другому.

Найдем дифференциал от левой и правой частей формулы $t = -x^2$: $dt = d(-x^2) = (-x^2)'dx$, т.е. $dt = -2x\,dx$. Из полученного равенства удобно выразить $x\,dx$, поскольку это выражение является сомножителем подынтегрального выражения искомого интеграла: $x\,dx = -\frac{1}{2}dt$. Тогда $\int xe^{-x^2}dx = \int\left(-\frac{1}{2}\right)e^t dt$ $=$

$= -\frac{1}{2}\int e^t dt$ $=$ $= -\frac{1}{2}e^t + C =$ $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ (см. (10.9)).

▷ **Пример 10.8.** Найти интегралы:

а) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\frac{xdx}{3-2x^2}$; г) $\int x^2e^{3+5x^3}dx$;

д) $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; е) $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Р е ш е н и е. а) Положим $t = 1 - x^2$. Тогда $dt = d(1-x^2) =$ $= (1-x^2)'\,dx = -2x\,dx$, $x\,dx = -\frac{1}{2}dt$ и, следовательно,

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt = -t^{1/2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

б) Положим $t = \sqrt{x}$. Тогда $dt = d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$ и

$$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int e^t 2dt = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

в) Используя введение переменной под знак дифференциала, получаем $x\ dx = -\frac{1}{4}d(3-2x^2)$. (Неявная замена переменной $t = 3-2x^2$.) Тогда

$$\int\frac{xdx}{3-2x^2} = \int\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2} = -\frac{1}{4}\int\frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2\right| + C.$$

г) Используя введение переменной под знак дифференциала, получаем $x^2dx = \frac{1}{15}d(3+5x^3)$ (Неявная замена переменной $t = 3+5x^3$.) Тогда

$$\int x^2e^{3+5x^3}dx = \int\frac{1}{15}e^{3+5x^3}d(3+5x^3) = \frac{1}{15}\int e^{3+5x^3}d(3+5x^3) = \frac{1}{15}e^{3+5x^3} + C.$$

д) Так как $\frac{dx}{x} = d\ln x$, то

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \int (\ln x)^{1/2} d\ln x = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C.$$

е) Так как $\sin x\, dx = -d\cos x$, то

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{(-1)d\cos x}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = \ln|\cos x| + C. \blacktriangleright$$

Приведенные примеры являются простейшими. Однако даже в тех случаях, когда замена переменной не приводит искомый интеграл к табличному, она часто позволяет упростить подынтегральную функцию и тем облегчить вычисление интеграла.

$\triangleright$ **Пример 10.9.** Найти $\int \frac{x^2+1}{x+2}dx$.

Р е ш е н и е. Положим $t = x + 2$. Тогда $dt = d(x + 2) = dx$. Так как $x = t - 2$, то

$$\int \frac{x^2+1}{x+2}dx = \int \frac{(t-2)^2+1}{t}dt = \int \frac{t^2-4t+5}{t}dt = \int (t - 4 + \frac{5}{t})dt =$$

$$= \int t dt - 4\int dt + 5\int \frac{dt}{t} = \frac{t^2}{2} - 4t + 5\ln|t| + C_1 = \frac{x^2}{2} - 2x + 5\ln|x+2| + C,$$

где $C = C_1 - 6$.

10.4. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции. По свойству дифференциала (см. § 9.1)

$$d(uv) = v\,du + u\,dv$$

или

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Интегрируя левую и правую части последнего равенства и учитывая (10.5) и (10.2), получаем

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad \textbf{(10.21)}$$

Формула (10.21) называется *формулой интегрирования по частям* для неопределенного интеграла. При ее применении фиксируется разбиение подынтегрального выражения искомого интеграла на два сомножителя (u и dv). При переходе к правой части (10.21) первый из них дифференцируется (при нахождении дифференциала: $du = u'dx$), второй интегрируется

($v = \int dv + C$ (см. (10.2)). Возможности применения (10.21) связаны с тем, что дифференцирование может существенно упростить один из сомножителей (при условии, что интегрирование не слишком усложнит другой).

▷ **Пример 10.10.** Найти интегралы:

$$\text{а) } \int xe^{-2x}dx\,;\ \text{б) } \int (2+3x)e^{x/3}dx\,.$$

Р е ш е н и е. а) Так как $x' = 1$, а функция e^{-2x} при интегрировании практически не изменяется (согласно (10.20) появляется лишь постоянный множитель), то данный интеграл можно найти интегрированием по частям, полагая $u = x$, $dv = e^{-2x}\,dx$. Найдем необходимые для записи правой части (10.21) v и du.

Так как $u = x$, то $du = dx$. Согласно (10.3) и (10.20) при $k = -2$, $b = 0$, имеем

$$v = \int dv = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C\,.$$

Теперь, применяя формулу интегрирования по частям (10.21), получаем

$$\int xe^{-2x}dx \ = \ x(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C) - \int(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C)dx\,.$$

Используя метод разложения, убеждаемся, что полученный интеграл — сумма табличного и интеграла, который был определен при нахождении v. Таким образом, окончательно

$$\int xe^{-2x}dx \ = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + Cx + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} - Cx + C_1 =$$

$$= \ -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1\,.$$

З а м е ч а н и е. Анализ полученного решения показывает, что постоянная C, возникшая при нахождении v (по заданному dv), не входит в запись окончательного ответа. Аналогично в общем случае постоянная C, возникающая при нахождении v, исключается в процессе решения. Поэтому в дальнейшем, применяя формулу интегрирования по частям и найдя v, будем полагать $C = 0$, что несколько упрощает запись решения.

б) Пусть $2 + 3x = u$, $e^{x/3}dx = dv$. Тогда

$$du = d\,(2{+}3x) = (2{+}3x)'\,dx = 3dx$$

и

$$v=\int dv=\int e^{x/3}dx=3e^{x/3}$$

(см. (10.20)). Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int(2+3x)e^{x/3}dx=(2+3x)3e^{x/3}-\int 3e^{x/3}3dx=$$

$$=(6+9x)e^{x/3}-9\int e^{x/3}dx = (6+9x)e^{x/3}-9\cdot 3e^{x/3} =$$

$$=(9x-21)e^{x/3}+C. \blacktriangleright$$

$\triangleright$ **Пример 10.11.** Найти интегралы:

а) $\int x\ln x dx$; б) $\int(x^3+1)\ln x dx$.

Р е ш е н и е. а) «Препятствием» к нахождению данного интеграла является присутствие сомножителя $\ln x$ в записи подынтегральной функции. Устранить его в данном случае можно интегрированием по частям, полагая $u=\ln x$. Тогда $dv=x\,dx$. (Существенно, что при интегрировании функции $f(x)=x$ получается функция того же типа (степенная)). Так как $du=d\ln x=\frac{dx}{x}$ и $v=\int dv=\int xdx = \frac{x^2}{2}$ ($C=0$, см. замечания в примере **10.10**), используем формулу интегрирования по частям; получаем

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx =$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

б) Пусть $u=\ln x$, $dv=(x^3+1)dx$. Тогда $du=\frac{dx}{x}$ и $v=\int dv=$ $=\int(x^3+1)dx=\frac{x^4}{4}+x$. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int(x^3+1)\ln x dx=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx-\int dx=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\ln x-\frac{x^4}{16}-x+C. \blacktriangleright$$

В некоторых случаях для нахождения искомого интеграла формулу интегрирования по частям приходится применять более одного раза.

▷ **Пример 10.12.** Найти $\int x^2 \sin x dx$.

Р е ш е н и е. Положим $u = x^2$, $\sin x\, dx = dv$. Тогда $du = dx^2 = 2xdx$ и $v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x$ (см. формулу (10.10)). Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) 2x\, dx =$$
$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx.$$

Возникший интеграл не является табличным, однако видно, что мы на правильном пути: по сравнению с исходным интегралом степень переменной x в подынтегральном выражении уменьшилась на единицу, при этом второй сомножитель $\cos x$ того же типа, что и в исходном интеграле. Повторное применение формулы интегрирования по частям приводит к табличному интегралу. Действительно, положим теперь $u = x$, $\cos x\, dx = dv$. Тогда $du = dx$,

$$v = \int dv = \int \cos x\, dx = \sin x \text{ (см. (10.11)) и}$$

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x\, dx) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C. \blacktriangleright$$

Анализируя разобранные примеры, можно указать следующие типы интегралов, для нахождения которых используется формула интегрирования по частям:

1. $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin mx\, dx$, $\int x^n \cos mx\, dx$.

2. $\int x^k \ln^n x\, dx$, $\int x^k \arcsin x\, dx$, $\int x^k \arccos x\, dx$,

$\int x^k \operatorname{arctg} x\, dx$, $\int x^k \operatorname{arcctg} x\, dx$,

где a, m, k — действительные числа ($k \neq -1$), n — целое положительное число.

Для нахождения интегралов из первой группы формулу интегрирования по частям придется применить n раз (при первом применении полагают $u = x^n$, остальные сомножители подынтегрального выражения задают dv), пока степень n переменной x не станет равной нулю, а сам интеграл — табличным (см. примеры **10.10, 10.12**). Для нахождения интегралов второй группы полагают $x^k dx = dv$ (оставшиеся сомножители подынтегрального выражения задают тогда выражение для u). Отметим, что для нахождения $\int x^k \ln^n x dx$ формулу интегрирования по частям придется применять n раз (при каждом применении степень функции $\ln x$ уменьшается на единицу, пока не станет равной нулю, а сам интеграл — табличным).

На практике метод интегрирования по частям часто комбинируется с другими методами интегрирования.

▷ **Пример 10.13.** Найти $\int \ln^2(2x+3)dx$.

Р е ш е н и е. Выполним сначала замену переменной: положим $t = 2x + 3$.

Тогда $dt = d(2x + 3) = 2dx$ и $dx = \frac{1}{2}dt$. Следовательно,

$$\int \ln^2(2x+3)dx = \int \ln^2 t \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \ln^2 t\, dt .$$

Пусть $\ln^2 t = u$, $dt = dv$. Тогда $du = d\ln^2 t = 2\ln t\ \frac{1}{t}dt$, $v = \int dv = \int dt = t$ и, применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int \ln^2(2x+3)dx = \frac{1}{2}(t\ln^2 t - \int t\cdot 2\ln t\frac{1}{t}\, dt) = \frac{1}{2}t\ln^2 t - \int \ln t\, dt .$$

Полагая в формуле интегрирования по частям $u = \ln t$, $dv = dt$, получаем $\int \ln t dt = t\ln t - t + C$. Окончательно имеем

$$\int \ln^2(2x+3)dx = \frac{1}{2}t\ln^2 t - t\ln t + t + C =$$

$$= \frac{1}{2}(2x+3)\ln^2(2x+3) - (2x+3)\ln(2x+3) + 2x + C. \ ▶$$

10.5. Интегрирование простейших рациональных дробей

Напомним, что многочленом степени n называется выражение вида $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа $a_n \neq 0$, $n \geq 0$. Например, $3 + 2x$ — многочлен первой степени, $-x^4 + 3x + 2$ — многочлен четвертой степени и т.д. Рациональной дробью называется отношение двух многочленов. Например, $\frac{3x+1}{x^2+1}$, $\frac{2+x^2+4x^3}{x+1}$, … — рациональные дроби.

Нас интересуют интегралы от рациональных дробей. В случае, когда степень многочлена знаменателя дроби равна нулю (т.е. в знаменателе стоит число), дробь является многочленом. Интеграл от многочлена находится с использованием метода разложения (см. § 10.2). Далее будем предполагать, что степень знаменателя дроби больше нуля. Примеры таких интегралов встречались нам выше (см., например, табличные интегралы (10.7) при целом отрицательном n, (10.8), (10.13), (10.14)). В этом параграфе мы наметим общий подход к интегрированию рациональных дробей.

Прежде всего отметим, что достаточно рассмотреть лишь правильные дроби, т.е. такие, у которых степень числителя меньше степени знаменателя. В самом деле, если это не так, то, используя алгоритм деления многочленов «углом», известный из школьного курса, мы можем представить исходную дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Например,

$$\frac{x^3-3x+4}{x-2}=x^2+2x+1+\frac{6}{x-2},$$

$$\frac{4x^4-4x+5}{x^2-2x+1}=4x^2+8x+12+\frac{12x-7}{x^2-2x+1}$$

и т.д. Тогда интеграл от исходной дроби сведется (с помощью метода разложения, см. § 10.2) к сумме интегралов от многочлена и правильной дроби.

Если степень знаменателя равна 1, то искомый интеграл имеет вид $\int\frac{dx}{kx+b}$, и для его нахождения достаточно воспользоваться формулой (10.19) (см. пример **10.6б**) или заменой переменной $t = kx + b$ (см. пример **10.4**).

Пусть степень знаменателя равна 2, т.е. искомым является интеграл вида

$$\int\frac{ex+f}{ax^2+bx+c}dx, \tag{10.22}$$

где a, b, c, e, f — действительные числа, $a \neq 0$. Рассмотрим сначала один важный частный случай: интеграл вида

$$\int\frac{ex+f}{ax^2+c}dx, \tag{10.23}$$

а затем укажем, как общий случай свести к данному. Если $c = 0$, то интеграл (10.23) представляет сумму двух табличных интегралов (с точностью до множителей; см. метод разложения). Пусть $c \neq 0$. Тогда для нахождения интеграла (10.23) достаточно найти интегралы

$$\int\frac{dx}{ax^2+c} \tag{10.24}$$

и

$$\int \frac{xdx}{ax^2+c}. \qquad \textbf{(10.25)}$$

Интеграл (10.24) сводится (вынесением множителя) либо к табличному интегралу (10.13), если $ac > 0$, либо к интегралу (10.14), если $ac < 0$ (см. пример **10.2в, г**).

Для нахождения интеграла (10.25) используем замену переменной $t = ax^2 + c$ (подобно тому, как это было сделано в частном случае, см. пример **10.8в**). Тогда $dt = 2ax\,dx$, $x\,dx = \frac{1}{2a}dt$ и

$$\int \frac{xdx}{ax^2+c} = \int \frac{dt}{2at} = \frac{1}{2a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2a}\ln|t| + C_1.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{xdx}{ax^2+c} = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+c\right| + C_1, \qquad \textbf{(10.26)}$$

где $a \neq 0$.

Возвращаясь теперь к интегралу (10.22), заметим, что его можно привести к виду (10.23), если сначала выделить полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции, а затем использовать соответствующую (линейную) замену переменной.

$\triangleright$ **Пример 10.14.** Найти интегралы:

а) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx$; б) $\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3}dx$; в) $\int \frac{8-x}{x^2-4x+13}dx$.

Р е ш е н и е. а) Поскольку $x^2+2x+1=(x+1)^2$, то используем замену переменной $t = x + 1$. Тогда $dt = dx$, $x = t - 1$ и

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{2t-1}{t^2}dt = 2\int \frac{dt}{t} - \int t^{-2}dt = 2\ln|t| + \frac{1}{t} + C =$$

$$= 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

б) Так как $4x^2+4x-3=(2x+1)^2-4$, то положим $t = 2x + 1$. Тогда $x = \frac{1}{2}(t - 1)$, $dx = \frac{1}{2}dt$ и

$$\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3}dx = \int \frac{(1/2)(t-1)+1}{t^2-4}\,\frac{1}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{t+1}{t^2-4}dt = \frac{1}{4}\int \frac{tdt}{t^2-4} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2-4}.$$

Для нахождения первого интеграла воспользуемся формулой (10.26) при $a = 1$, $c = -4$. Второй интеграл — табличный (см. (10.14)).

Теперь имеем $\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3}dx = \frac{1}{8}\ln\left|t^2-4\right| + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C =$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|4x^2+4x-3\right| + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right| + C.$$

в) Так как $x^2-4x+13=(x-2)^2+9$, то положим $t = x - 2$. Тогда $dt = dx$, $x = t + 2$ и $\int \frac{8-x}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{6-t}{t^2+9}dt = 6\int \frac{dt}{t^2+9} - \int \frac{tdt}{t^2+9}$.

Первый из интегралов — табличный (см. (10.13)), для нахождения второго воспользуемся формулой (10.26). Тогда получаем $\int \frac{8-x}{x^2-4x+13}dx = 2 \operatorname{arctg}\frac{t}{3} - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+9\right) + C = 2 \operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} -$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + C. \blacktriangleright$$

Рассмотренный прием интегрирования правильных дробей, знаменатель которых имеет вторую степень (выделение полного квадрата в знаменателе с последующей заменой переменной) имеет существенный недостаток: он не обобщается на случаи, когда степень знаменателя больше двух. Наметим поэтому также другой возможный подход.

Пусть требуется найти $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ (получим другой вывод формулы (10.14)). Представим подынтегральную функцию искомого интеграла в виде:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

Тогда, используя метод разложения и формулу (10.19), получаем:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Аналогично, в общем случае можно доказать, что если подынтегральная $f(x)/g(x)$ — правильная дробь, знаменатель $g(x)$ которой — многочлен степени n, имеющий n попарно различных действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то существует представление подынтегральной функции в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n},$$

где A_1, A_2, ..., A_n — некоторые числа. Тогда исходный интеграл сводится к сумме табличных.

▷ **Пример 10.15.** Найти $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx$.

Р е ш е н и е. Так как $x^3+2x^2-8x = x(x+4)(x+2)$, то

$$\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+4}.$$

Из последнего равенства найдем постоянные A_1, A_2, A_3. Приводя дроби правой части к общему знаменателю, приходим к равенству

$$A_1(x-2)(x+4) + A_2(x+4)x + A_3(x-2)x = x^2-2x+2.$$

Если $x=0$, то имеем $-8A_1 = 2$ и $A_1 = -1/4$. Если $x = 2$, то $12A_2 = 2$ и $A_2 = 1/6$. Если $x = -4$, то $24A_3 = 26$, т.е. $A_3 = \frac{13}{12}$. (Обратим внимание читателя, что прием нахождения постоянных A_1, A_2, … нетрудно обобщить и использовать для доказательства существования указанного разложения в общем случае.)

Тогда

$$\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x} + \frac{13}{12}\int\frac{dx}{x+4} + \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{13}{12}\ln|x+4| + \frac{1}{6}\ln|x-2| + C$$

(см. (10.19)). (Рассмотренный метод интегрирования называется *методом неопределенных коэффициентов*.) ▶

10.6. Интегрирование некоторых видов иррациональностей

Рассмотрим случаи, в которых замена переменной позволяет интегралы от иррациональных функций свести к интегралам от рациональных функций, рассматриваемых в § 10.5 (т.е. рационализировать интеграл).

Обозначим через $R(u, v)$ функцию от переменных u, v и некоторых постоянных, которая построена с использованием лишь четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления).

Например, $R(u, v) = u^2 + 2v^5$, $R(u, v) = \dfrac{u+3v}{2-u^2}$ и т.д.

Рассмотрим интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n]{x})dx$. Такие интегралы рационализируются заменой переменной $t = \sqrt[n]{x}$.

▷ **Пример 10.16.** Найти $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция искомого интеграла записана как функция от радикалов степеней 2 и 3. Так как наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6, то данный интеграл является интегралом типа $\int R(x, \sqrt[6]{x})dx$ и может быть рационализирован посредством замены переменной $\sqrt[6]{x} = t$. Тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt .$$

Положим $t + 1 = z$. Тогда $dz = d(t + 1) = dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{(z-1)^3}{z}dz = 6\int z^2dz - 18\int zdz + 18\int dz - 6\int \frac{dz}{z} =$$

$$= 2z^3 - 9z^2 + 18z - 6\ln|z| + C = 2\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^3 - 9\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2 + 18\left(\sqrt[6]{x}+1\right) + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C ,$$

где $C_1 = C - 11$. ▶

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n]{x})dx$ являются частным случаем интегралов от дробно-линейных иррациональностей, т.е. интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где $ad - cb \neq 0$, которые допускают рационализацию посредством замены переменной $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

▷ **Пример 10.17.** Найти $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{1+x}$.

Р е ш е н и е. Положим $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Тогда $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$dx=-\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}$, $1+x=\frac{2}{1+t^2}$, $\frac{1}{x+1}=\frac{1+t^2}{2}$.

Следовательно,

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{1+x}=\int\frac{t(1+t^2)}{2}\left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right)dt=-2\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=-2\int dt+$$

$$+2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2t+2\operatorname{arctg}t+C=-2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C. \blacktriangleright$$

Рассмотрим интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

В простейших случаях такие интегралы сводятся к табличным (см. (10.12), (10.15)). (Необходимая замена переменной усматривается после выделения полного квадрата в квадратном трехчлене ax^2+bx+c.)

▷ **Пример 10.18.** Найти интегралы:

$$\text{а) } \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}};\ \text{б) } \int\frac{xdx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}.$$

Р е ш е н и е. Учитывая, что $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$, положим $t=x+2$. Эта замена переменной позволяет свести искомый интеграл к табличному (см. (10.15)):

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=$$

$$=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C.$$

б) Так как $8+4x-4x^2=9-(1-2x)^2$, то положим $1-2x=t$.

Тогда $x=\frac{1-t}{2}$, $dx=-\frac{1}{2}dt$ и, следовательно,

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}=-\frac{1}{4}\int\frac{(1-t)}{\sqrt{9-t^2}}dt=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}+\frac{1}{4}\int\frac{tdt}{\sqrt{9-t^2}}.$$

Первый из интегралов данной суммы — табличный (см. (10.12)), второй сводится к табличному интегралу (10.7) заменой $z=9-t^2$:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{8+4x-4x^2}} = -\frac{1}{4}\arcsin\frac{t}{3} - \frac{1}{8}\int z^{-1/2}dz =$$
$$= -\frac{1}{4}\arcsin\frac{1-2x}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{8+4x-4x^2} + C\,. \blacktriangleright$$

В более сложных случаях для нахождения интегралов вида $\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ используются *подстановки Эйлера.*

10.7. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$. Такие интегралы могут быть сведены к интегралам от рациональных функций заменой переменной $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, где $-\pi < x < \pi$.

Действительно,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt\,.$$

$\triangleright$ **Пример 10.19.** Найти $\int \dfrac{dx}{\sin x}$.

Р е ш е н и е. Положим $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда, используя выражения через t для dx и $\sin x$, указанные выше, получаем, что искомый интеграл равен

$$\int \frac{(1+t^2)2dt}{(1+t^2)2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \blacktriangleright$$

Если функция $R(u,\ v)$ обладает свойствами четности или нечетности по переменным u или v, то для рационализации интеграла могут быть использованы также и другие подстановки.

Так, если $R(u,\ v)$ — дробь, числитель и знаменатель которой многочлены по переменным u и v и $R(-u,\ v) = -R(u,\ v)$, то рационализация интеграла $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ достигается заменой переменной $t = \cos x$.

▷ **Пример 10.20.** Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

Р е ш е н и е. В данном случае $R(u, v) = u^3/v^4$, а потому $R(-u, v) = -R(u, v)$. Положим тогда $\cos x = t$, $dt = -\sin x\, dx$. Следовательно, учитывая, что $\sin^2 x = 1 - t^2$, получаем

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{1-t^2}{t^4} dt = -\int t^{-4} dt + \int t^{-2} dt = \frac{t^{-3}}{3} - t^{-1} + C =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \ ▶$$

Если $R(u, -v) = -R(u, v)$, то рационализация интеграла $\int R(\sin x, \cos x) dx$ достигается заменой переменной $t = \sin x$.

▷ **Пример 10.21.** Найти $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Р е ш е н и е. В данном случае $R(u, v) = u^2 v^3$. Положим $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x\, dx$ и, следовательно,

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int t^2 (1 - t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \ ▶$$

Рассмотрим интегралы вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x\, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x\, dx$, где α, β — некоторые действительные числа.

С помощью известных формул для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму такие интегралы сводятся к сумме табличных.

▷ **Пример 10.22.** Найти $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$.

Р е ш е н и е. Так как $\sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$, то

$$\int \sin 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin 8x dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \sin 8x d(8x) - \frac{1}{4} \int \sin 2x d(2x) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C. \ ▶$$

10.8. Решение задач

$\triangleright$ **Пример 10.23.** Найти интегралы:

а) $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx$; б) $\int x^3 e^{x^2} dx$.

Р е ш е н и е. а) Положим $e^x = t$. Тогда $dx = \frac{dt}{t}$ и $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx =$

$= \int \frac{t^3 dt}{(t^2+1)t} = \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = t - \operatorname{arctg} t + C =$

$= e^x - \operatorname{arctg} e^x + C$.

Отметим, что замена переменной $t = e^x$ позволяет рационализировать произвольный интеграл вида $\int R(e^x)dx$.

б) Используя замену переменной, сведем данный интеграл к интегралу, который может быть найден методом интегрирования по частям.

Положим $x^2 = t$. Тогда $\frac{1}{2}dt = xdx$ и $\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^2 e^{x^2} xdx =$

$= \int te^t \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int te^t dt.$

Пусть теперь $t = u$, $e^t dt = dv$. Тогда $du = dt$, $v = \int e^t dt = e^t$ и

$\frac{1}{2}\int te^t dt = \frac{1}{2}\left(te^t - \int te^t dt\right) = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$. $\blacktriangleright$

$\triangleright$ **Пример 10.24.** Найти интегралы:

а) $\int \sqrt{1+x^2}dx$; б) $\int e^x \sin x dx$.

Р е ш е н и е. а) Воспользуемся формулой интегрирования по частям.

Пусть $u = \sqrt{1+x^2}$, $dv = -dx$. Тогда $du = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$v = \int dv = \int dx = x \text{ и } J = \int \sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}\,dx + \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}\,dx + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

Но второе слагаемое в последнем выражении совпадает с искомым интегралом J, т.е. имеем равенство

$$J = x\sqrt{1+x^2} - J + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C,$$

откуда

$$2J = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C,$$

$$J = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C_1,$$

где $C_1 = \frac{1}{2}C$.

Следует отметить, что данный интеграл принадлежит к семейству интегралов вида $\int R(x,\ \sqrt{a^2+x^2})\,dx$, каждый из которых может быть найден с помощью тригонометрической подстановки $x = a \operatorname{tg} t$.

б) Воспользуемся методом интегрирования по частям. Пусть $\sin x = u$, $e^x dx = dv$. Тогда $du = \cos x\, dx$, $v = e^x$,

$$J = \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

Еще раз применим формулу интегрирования по частям, полагая $\cos x = u$, $e^x dx = dv$. Тогда $du = -\sin x\, dx$, $v = e^x$ и

$$J = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx) + C,$$

т.е. $J = e^x \sin x - e^x \cos x - J + C$.

Из последнего равенства (по аналогии с решением примера **10.24а**) получаем

$$2J = e^x(\sin x - \cos x) + C,\ J = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C_1,$$

где $C_1 = \frac{1}{2}C$.

Аналогичный прием используется для нахождения интегралов вида $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, где a и b — некоторые действительные числа. ▶

▷ **Пример 10.25.** Найти: $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}dx$.

Р е ш е н и е. Выполняя деление «углом», имеем

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{array}{rrrr} x^3 - 2x^2 & & & +\ 4 \\ x^3 + 2x^2 & -\ 3x & & \end{array}} & \underline{x^2 + 2x - 3} \\
\underline{-\begin{array}{rrr} -\ 4x^2 & +\ 3x & +\ 4 \\ -\ 4x^2 & -\ 8x & +\ 12 \end{array}} & x - 4 \\
11x - 8 &
\end{array}
$$

или $\frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3} = x - 4 + \frac{11x-8}{x^2+2x-3}$. Тогда

$$\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}dx = \int x dx - 4\int dx + \int \frac{11x-8}{x^2+2x-3}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \int \frac{11x-8}{x^2+2x-3}dx.$$

Так как $x^2+2x-3=(x+1)^2-4$, то для нахождения оставшегося интеграла используем сначала замену переменной $t = x+1$, а затем формулы (10.26) и (10.14) (см. § 10.5). Тогда получаем

$$\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \int \frac{11(t-1)-8}{t^2-4}dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 11\int \frac{tdt}{t^2-4} - 19\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{11}{2}\ln\left|t^2-4\right| - \frac{19}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{11}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right| - \frac{19}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C. \ ▶$$

$\triangleright$ **Пример 10.26.** Найти $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$.

Р е ш е н и е. Положим $x = t^4$ (см. § 10.6). Тогда $dx = 4t^3 dt$ и

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+t}{t^4+t^2} 4t^3 dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt = 4\int \left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= 4\left(\int dt + \int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right).$$

Первый и третий интегралы табличные. Для нахождения второго используем формулу (10.26). Тогда получаем

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx = 4t + 2\ln(t^2+1) - 4\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 4\sqrt[4]{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) - 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C. \blacktriangleright$$

$\triangleright$ **Пример 10.27.** Найти $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx$.

Р е ш е н и е. Известно, что каждый интеграл семейства $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$ может быть найден заменой переменной $x = a \sin t$.

Положим $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t\, dt$ и

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx = \int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t} 2\cos t\, dt = \frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{ctg}^4 t\, dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^4 t\, d\operatorname{ctg} t = -\frac{1}{20}\operatorname{ctg}^5 t + C = -\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5} + C. \blacktriangleright$$

$\triangleright$ **Пример 10.28.** Найти $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg}^2 x} dx$.

Р е ш е н и е. Положим $t = \operatorname{tg} x$. Тогда $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ и

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg}^2 x} dx = \int \frac{tdt}{(1-1/t^2)(1+t^2)} = \int \frac{t^3 dt}{t^4-1} = \int \frac{t^3 dt}{t^4-1} = \frac{1}{4}\int \frac{d(t^4-1)}{t^4-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|t^4-1\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}^4 x - 1\right| + C. \blacktriangleright$$

Отметим, что с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$ может быть рационализирован произвольный интеграл вида $\int R(\operatorname{tg} x)dx$.

10.9. Об интегралах, «неберущихся» в элементарных функциях

Из основных правил дифференцирования следует, что производная произвольной элементарной функции вновь является функцией элементарной. Существенно, что операция нахождения первообразной (неопределенного интеграла) таким свойством не обладает, т.е. существуют элементарные функции, первообразные которых элементарными функциями уже не являются. По этой причине соответствующие неопределенные интегралы называются *«неберущимися»* в элементарных функциях, а сами функции — *неинтегрируемыми в конечном виде.* Например, $\int e^{-x^2}dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ — «неберущиеся», т.е. не существует такой элементарной функции $f(x)$, что $f'(x) = e^{-x^2}$, $f'(x) = \sin x^2$ и т.д.

Все методы интегрирования, рассмотренные в данной главе, применяемые для нахождения интегралов от элементарных функций, вновь приводят к элементарным функциям. Поэтому указанные «неберущиеся» интегралы, по крайней мере, не могут быть найдены с помощью методов данной главы. Однако это не означает, что указанные интегралы не существуют или их невозможно найти (соответствующие методы интегрирования будут рассмотрены в гл. 14).

УПРАЖНЕНИЯ

Используя метод разложения, найти интегралы:

10.29. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

10.30. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx$.

10.31. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$.

10.32. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$.

Используя метод замены переменной, найти интегралы:

10.33. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

10.34. $\int x(2x+5)^{10}dx$.

10.35. $\int \frac{xdx}{1+x^2}$.

10.36. $\int \frac{x^3dx}{x^8-2}$.

10.37. $\int x^2e^{2x^3+1}dx$.

10.38. $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

10.39. $\int \frac{\ln x\ dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

10.40. $\int \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

Используя метод интегрирования по частям, найти интегралы:

10.41. $\int x\cdot 2^{-x}\,dx$.

10.42. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

10.43. $\int x^2e^{3x}dx$.

10.44. $\int \ln^2 x dx$.

10.45. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\ dx$.

10.46. $\int x\cos x\,dx$.

Найти интегралы от рациональных функций:

10.47. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

10.48. $\int \frac{dx}{5x^2-7}$.

10.49. $\int \frac{2x-3}{x^2-4}dx$.

10.50. $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$.

10.51. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$.

10.52. $\int \frac{xdx}{x^2+3x+2}$.

10.53. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$.

10.54. $\int \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Найти интегралы от иррациональных функций:

10.55. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$.

10.56. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

10.57. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$.

10.58. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

10.59. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

10.60. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}$.

10.61. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

10.62. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Найти интегралы:

10.63. $\int \frac{1-3x}{3+2x}dx$.

10.64. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$.

10.65. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

10.66. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

10.67. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$.

10.68. $\int \frac{-2x^4+4x^2-1}{1-x^2}dx$.

10.69. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

10.70. $\int x\ln(3x+2)\,dx$.

Глава 11

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

11.1. Понятие определенного интеграла, его геометрический и экономический смысл

Задача о площади криволинейной трапеции. Пусть на отрезке $[a,\ b]$ задана неотрицательная функция $y=f(x)$. Требуется найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс $y=0$ (рис. 11.1). (Говорят также о площади S под кривой $y=f(x)$ на $[a,\ b]$.)

Наметим общий подход к решению этой задачи. Введем в рассмотрение некоторую ломаную, которая расположена доста-

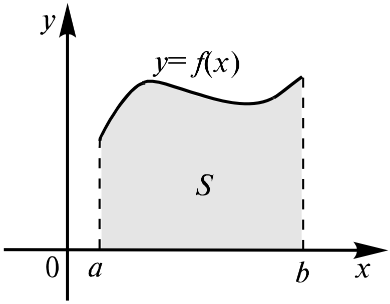


Рис. 11.1

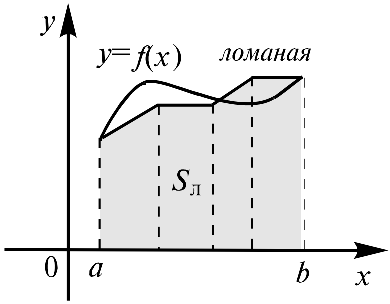


Рис. 11.2

точно близко к кривой $y=f(x)$ на $[a,\ b]$ (рис. 11.2). Фигура под ломаной состоит из трапеций (прямоугольников), и ее площадь $S_л$ (равная сумме площадей этих трапеций) может быть вычислена с использованием известных формул планиметрии. Поскольку ломаная выбрана достаточно близко к кривой $y = f(x)$, то справедливо приближенное равенство $S \approx S_л$. Это равенство оказывается тем более точным, чем ближе расположена ломаная к исходной кривой. Поэтому естественно *за искомую площадь S взять предел площади $S_л$ под ломаной в предположении неограниченного приближения ломаной к заданной кривой.*

Приведенные рассуждения носят качественный характер. Для того чтобы их можно было использовать на практике, необходимо уточнить в них то, что описывалось нестрого: процедура выбора ломаной и последующий предельный переход. В результате мы получим, в частности, понятие определенного интеграла.

Понятие интегральной суммы. Пусть на $[a, b]$ задана функция $y=f(x)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n элементарных отрезков точками x_0, x_1, …, x_n: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения выберем некоторую точку ξ_i и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad \textbf{(11.1)}$$

будем называть *интегральной суммой* для функции $y=f(x)$ на $[a, b]$. Очевидно, что интегральная сумма (11.1) зависит как от способа разбиения отрезка $[a, b]$ точками x_0, x_1, …, x_n, так и от выбора точек ξ_1, ξ_2, …, ξ_n на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Геометрический смысл интегральной суммы. Пусть функция $y=f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$. Отдельное слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ интегральной суммы (11.1) в этом случае равно площади S_i прямоугольника со сторонами $f(\xi_i)$ и Δx_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$ (см. рис. 11.3, где $x_0 - x_1 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$ и т.д.). Другими словами, S_i — это площадь под прямой $y=f(\xi_i)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Поэтому вся интегральная сумма (11.1) равна площади $S_л = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ под ломаной, образованной на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ прямой $y=f(\xi_i)$, параллельной оси абсцисс (рис. 11.3).

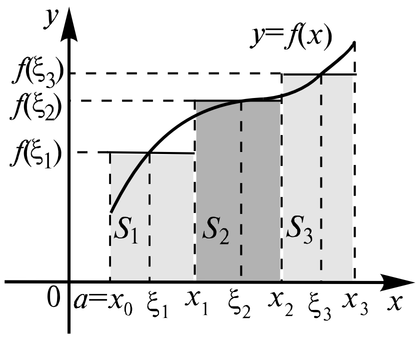


Рис. 11.3

Понятие определенного интеграла. Для избранного разбиения отрезка $[a, b]$ на части обозначим через $\max\limits_i \Delta x_i$ максимальную из длин отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение. *Пусть предел интегральной суммы* (11.1) *при стремлении* $\max\limits_i \Delta x_i$ *к нулю существует, конечен и не зависит от способа выбора точек* $x_1, x_2, \ldots$ и точек ξ_1, ξ_2, … *Тогда этот предел называется* ***определенным интегралом от функции*** $y=f(x)$

на $[a,\ b]$, *обозначается* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *а сама функция* $y = f(x)$ *называется **интегрируемой** на отрезке* $[a,\ b]$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

При этом число a называется *нижним пределом*, число b — его *верхним пределом*; функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением,* а задача о нахождении $\int\limits_a^b f(x)dx$ — *интегрированием функции* $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

Следует заметить, что не имеет значения, какой буквой обозначена переменная интегрирования определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(y)dy = \int\limits_a^b f(t)dt ,$$

поскольку смена обозначений такого рода никак не влияет на поведение интегральной суммы (11.1).

Несмотря на сходство в обозначениях и терминологии, определенный и неопределенный интегралы существенно различные понятия: в то время как $\int f(x)dx$ *представляет семейство функций,* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *есть определенное число.*

Во введенном определении определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ предполагается, что $a < b$. По определению положим

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx . \qquad \textbf{(11.2)}$$

Принимая во внимание (11.2), для нас отныне будет несущественно, какой из пределов интегрирования больше: верхний или нижний.

Полагая в (11.2) $b = a$, получаем $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

или $2\int_a^b f(x)dx = 0$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = 0. \qquad \textbf{(11.3)}$$

Геометрический смысл определенного интеграла. Понятие определенного интеграла введено таким образом, что в случае, когда функция $y = f(x)$ *неотрицательна на отрезке* $[a, b]$, *где* $a < b$, $\int_a^b f(x)dx$ *численно равен площади* S *под кривой* $y = f(x)$ *на* $[a, b]$ (см. рис. 11.1). Действительно, при стремлении $\max\limits_i \Delta x_i$ к нулю ломаная (см. рис. 11.3) неограниченно приближается к исходной кривой и площадь под ломаной переходит в площадь под кривой.

Учитывая сказанное, мы можем указать значения некоторых интегралов, используя известные планиметрические формулы для площадей плоских фигур. Например,

$$\int_0^1 dx = 1,\quad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},\quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} \text{ и т.д.}$$

(Первый из интегралов — площадь квадрата со стороной единичной длины; второй — площадь прямоугольного треугольника, оба катета которого единичной длины; третий — площадь четверти круга единичного радиуса; предлагаем читателю в качестве упражнения выполнить необходимые чертежи самостоятельно.)

Заметим, что равенство (11.3) согласовано с геометрическим смыслом определенного интеграла: в случае, когда отрезок интегрирования стянут в точку, фигура под кривой стягивается в отрезок, площадь которого равна нулю, поскольку это площадь прямоугольника, одна из сторон которого равна нулю.

Экономический смысл интеграла. Пусть функция $z = f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объем продукции u, произведенной за промежуток времени $[0, T]$.

Отметим, что если производительность не изменяется с течением времени ($f(t)$ — постоянная функция), то объем продукции Δu, произведенной за некоторый промежуток времени $[t,\ t+\Delta t]$, задается формулой $\Delta u = f(t)\Delta t$. В общем случае справедливо приближенное равенство $\Delta u = f(\xi)\Delta t$, где $\xi \in [t,\ t+\Delta t]$, которое оказывается тем более точным, чем меньше Δt.

Разобьем отрезок $[0,\ T]$ на промежутки времени точками: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Для величины объема продукции Δu_i, произведенной за промежуток времени $[t_{i-1},\ t_i]$, имеем $\Delta u_i = f(\xi_i)\Delta t_i$, где $\xi_i \in [t_{i-1},\ t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $u \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta u_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$.

При стремлении $\max\limits_{i} \Delta t_i$ к нулю каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$u = \lim_{\max\limits_{i} \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i .$$

Учитывая определение определенного интеграла, окончательно получаем

$$u = \int_0^T f(t)dt ,$$

т.е. если $f(t)$ — *производительность труда в момент* t, то $\int\limits_0^T f(t)dt$ *есть объем выпускаемой продукции за промежуток* $[0,\ T]$.

Сравнение данной задачи с задачей о площади криволинейной трапеции (см. выше) показывает, что *величина и объема продукции, произведенной за промежуток времени* $[0,\ T]$, *численно равна площади под графиком функции* $z = f(t)$, *описывающей изменение производительности труда с течением времени, на промежутке* $[0,\ T]$ *или* $\int\limits_0^T f(t)dt$.

Достаточное условие существования определенного интеграла (интегрируемости функции). Теорема. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,\ b]$, *то она интегрируема на этом отрезке.*

Приведем пример нахождения определенного интеграла на основании определения.

$\triangleright$ **Пример 11.1.** Вычислить $\int\limits_0^1 x^2 dx$.

Р е ш е н и е. Запишем выражение для интегральной суммы, предполагая, что все отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения имеют одинаковую длину Δx_i, равную $1/n$, где n — число отрезков разбиения, причем для каждого из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения точка ξ_i совпадает с правым концом этого отрезка, т.е. $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. (В силу интегрируемости функции $y = x^2$, выбор такого «специального» способа разбиения отрезка интегрирования на части и точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ на отрезках разбиения не повлияет на искомый предел интегральной суммы.) Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 .$$

Известно, что сумма квадратов чисел натурального ряда равна

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

Анализ приведенного примера показывает, что успешное решение поставленной задачи оказалось возможным благодаря тому, что интегральную сумму удалось привести к виду, удобному для нахождения предела. Однако такая возможность существует далеко не всегда, поэтому долгое время задача интегрирования конкретных функций оставалась задачей чрезвычайно сложной. Установление связи между определенным и неопределенным интегралами позволило разработать эффективный метод вычисления определенного интеграла, который будет рассмотрен в § 11.4.

11.2. Свойства определенного интеграла

В данном параграфе мы будем предполагать интегрируемость всех рассматриваемых функций на выделенных отрезках интегрирования.

Рассмотрим сначала свойства определенного интеграла, которые имеют аналоги в случае интеграла неопределенного.

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*, т.е.

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx, \qquad \textbf{(11.4)}$$

где α — некоторое число.

□ Пусть фиксированы разбиение отрезка $[a, b]$ и выбор точек ξ_1, ξ_2, …, ξ_n на каждом из отрезков разбиения. Используя ассоциативный (распределительный) закон умножения чисел, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Перейдем к пределу в левой и правой части последнего равенства при $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$:

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \alpha\, f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

По определению определенного интеграла первый из пределов равен левой части равенства (11.4), последний — правой. ■

2. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций,* т.е.

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \qquad \textbf{(11.5)}$$

Нетрудно видеть, что это свойство остается справедливым для любого числа слагаемых.

Доказательство свойства 2 аналогично свойству 1.

Перейдем теперь к свойствам определенного интеграла, которые не имеют аналогов в случае неопределенного интеграла.

3. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей,* т.е. при любых a, b, c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \qquad \textbf{(11.6)}$$

Рассмотрим геометрический смысл свойства 3. Пусть $a < c < b$ и функция $f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$. Согласно геометрическому свойству определенного интеграла $\int_a^c f(x)dx = S_1$,

$\int_c^b f(x)dx = S_2$ (рис. 11.4), $\int_a^b f(x)dx = S$, где S — площадь под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (площадь всей заштрихованной фигуры на рис. 11.4). Тогда при сделанных предположениях равенство (11.6) утверждает наличие следующего (очевидного) соотношения между площадями: $S = S_1 + S_2$.

Пусть $a < b < c$, и функция $y = f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a, c]$. Применяя равенство (11.2) ко второму интегралу из правой части (11.6), запишем этот интеграл так, чтобы верхний предел был больше нижнего (для остальных интегралов (11.6) верхний предел больше нижнего по предположению):

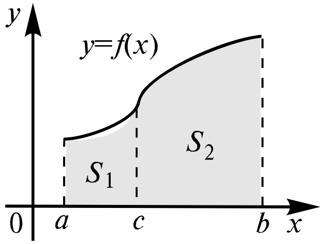


Рис. 11.4

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx. \qquad \textbf{(11.7)}$$

Тогда равенство (11.7) утверждает наличие следующего (очевидного) соотношения между площадями криволинейных трапеций (рис. 11.5): $S_1 = S - S_2$, где S — площадь под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a, c]$.

4. *Если на отрезке* $[a, b]$ $f(x) \le g(x)$*, то и*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx, \qquad \textbf{(11.8)}$$

т.е. обе части неравенства можно почленно интегрировать.

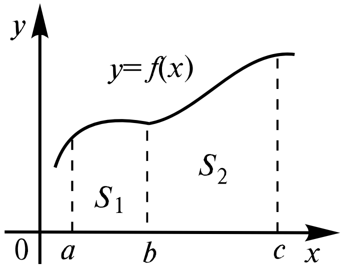


Рис. 11.5

□ Пусть фиксированы разбиение отрезка $[a, b]$ и выбор точек ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n на каждом из отрезков разбиения. Тогда из неравенства $f(x) \le g(x)$ вытекает аналогичное неравенство для интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\max_i \Delta x_i \to 0$, получим (11.8). ■

С л е д с т в и е. *Пусть на отрезке* $[a, b]$, $m \le f(x) \le M$, где m и M — *некоторые числа*. Тогда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \qquad \textbf{(11.9)}$$

□ По свойству 4 имеем

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx\,.$$

Остается заметить, что по свойству 1 и геометрическому смыслу определенного интеграла $\int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m\,(b-a)$ и аналогично $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$. ■

5. Теорема о среднем. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *(где* $a < b$*), то найдется такое значение* $\xi \in [a, b]$, *что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \qquad \textbf{(11.10)}$$

□ По свойству функции, непрерывной на отрезке, для произвольного значения x из $[a, b]$ верно, что $m \le f(x) \le M$, где m и M — наименьшее и наибольшее значения функции на $[a, b]$. Тогда, согласно (11.9), имеем

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M\,.$$

Но функция, непрерывная на отрезке, принимает любое значение, заключенное между ее наименьшим и наибольшим значениями. Поэтому, в частности, найдется такое число $\xi \in [a, b]$, что

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi). \ ■$$

Пусть $f(x) \ge 0$ на $[a, b]$. Тогда теорема о среднем утверждает: *найдется такая точка* ξ *из отрезка* $[a, b]$, *что площадь под кривой* $y = f(x)$ *на* $[a, b]$ *равна площади прямоугольника со сторонами* $f(\xi)$ и $(b-a)$ (см. рис. 11.6 и геометрический смысл

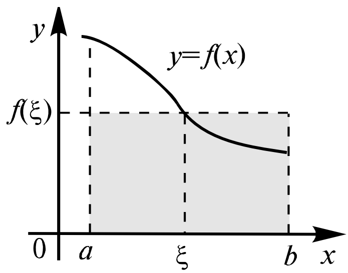


Рис. 11.6

определенного интеграла). Еще одно возможное объяснение геометрического смысла теоремы о среднем см. в § 11.6.

11.3. Определенный интеграл как функция верхнего предела

Ранее, строя новые функции из известных, мы использовали четыре арифметических действия и нахождение функции от функции (см. гл. 5). В данном параграфе мы рассмотрим принципиально иной способ построения новых функций из известных.

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, очевидно, она интегрируема также на произвольном отрезке $[a, x]$, вложенном в $[a, b]$.

Положим по определению

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt, \qquad \textbf{(11.11)}$$

где $x \in [a, b]$, а функция $\Phi(x)$ называется *интегралом с переменным верхним пределом*[1].

Пусть $f(t) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда (см. § 11.1) значение функции $\Phi(x)$ в точке x равно площади $S(x)$ под кривой $y = f(t)$ на отрезке $[a, x]$ (см. рис. 11.7). (В этом состоит геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом.)

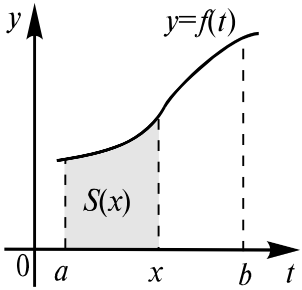


Рис. 11.7

Последнее замечание позволяет, в частности, по-новому посмотреть на некоторые известные функции. Например, (см. § 11.4) $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$, где $x > 1$, поэтому значение функции $\ln x$ в точке x численно равно площади $S(x)$ под гиперболой $y = \frac{1}{t}$ на отрезке $[1, x]$ (см. рис. 11.8).

---

[1] В правую часть определения (11.11) переменная x входит трижды, но смысл этих вхождений не одинаков. Верхний предел интегрирования — это аргумент функции $\Phi(x)$, но переменная в записи подынтегрального выражения является переменной интегрирования, которую (см. § 11.1) можно обозначить другой буквой, например t.

Рассмотрим теперь свойства функции $\Phi(x)$ (интеграла с переменным верхним пределом, см. (11.11)).

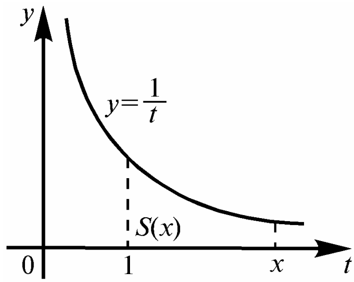


Рис. 11.8

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция $\Phi(x)$ также непрерывна на $[a, b]$.*

□ Пусть Δx таково, что $x + \Delta x$ принадлежит отрезку $[a, b]$. Согласно (11.1) и (11.6), имеем

$$\Phi(x+\Delta x)=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt=$$

$$=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt+\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt=\Phi(x)+\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

По теореме о среднем (см. § 11.2) найдется такое значение $\xi \in [x, x+\Delta x]$, что $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x$ и, следовательно,

$$\Phi(x+\Delta x)=\Phi(x)+f(\xi)\Delta x. \qquad \textbf{(11.12)}$$

Поскольку точка ξ принадлежит, в частности, отрезку $[a, b]$, то $m \le f(\xi) \le M$, где m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a, b]$. (При изменении Δx значение $f(\xi)$, возможно, меняется, но в любом случае мы имеем дело с ограниченной функцией.)

Переходя в (11.12) к пределу при $\Delta x \to 0$ и используя теоремы о пределах, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Phi(x+\Delta x)=\Phi(x)+\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)\Delta x=\Phi(x).$$

Теперь мы докажем, что производная от интеграла с переменным верхним пределом по верхнему пределу равна подынтегральной функции. Более точно справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда в каждой точке x отрезка $[a, b]$ производная функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции $f(x)$, т.е.*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x). \qquad \textbf{(11.13)}$$

□ Воспользуемся равенством (11.12) из доказательства теоремы 1. Тогда

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi), \qquad \textbf{(11.14)}$$

где $\xi \in [x,\ x + \Delta x]$. Переходя в (11.14) к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$ (в силу непрерывности функции $f(x)$), приходим к (11.13). ■

Рассмотрим геометрический смысл доказательства теоремы 2.

Пусть $f(t) \geq 0$ на $[a, b]$. По геометрическому смыслу интеграла с переменным верхним пределом $\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = S_{ABEF} - S_{ABCD} = S_{DCEF}$ (рис. 11.9), т.е. приращение функции $\Phi(x)$ равно приращению площади под кривой $y = f(t)$ при изменении абсциссы от x до $x + \Delta x$. По теореме о среднем найдется такое значение $\xi \in [x,\ x + \Delta x]$, что площадь S_{DCEF} криволинейной трапеции будет равна площади S_{DGHF} прямоугольника со сторонами $f(\xi)$ и Δx. В результате $\Delta\Phi = S_{DGHF} = f(\xi)\Delta x$ и приходим к (11.14). При $\Delta x \to 0$ отрезок $[x,\ x + \Delta x]$ стягивается в точку, и $f(\xi)$ переходит в $f(x)$, а предел левой части (11.14) равен $\Phi'(x)$.

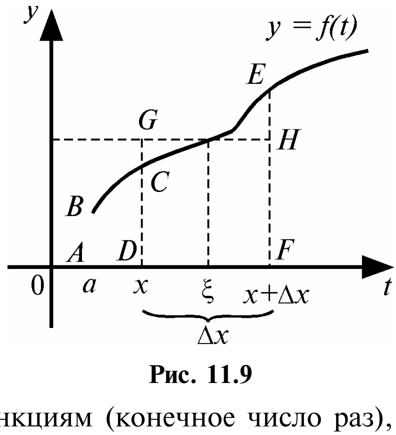


Рис. 11.9

С л е д с т в и е. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то для этой функции существует первообразная на отрезке* $[a, b]$.

Действительно, примером первообразной для $f(x)$ является функция $\Phi(x)$, заданная формулой (11.11).

З а м е ч а н и е. Четыре арифметических действия и нахождение функции от функции, примененные к элементарным функциям (конечное число раз), вновь приводят к функциям элементарным. Что же касается интеграла с переменным верхним пределом (11.11), то здесь элементарность функции $y = f(x)$, вообще говоря, не обеспечивает элементарности функции $\Phi(x)$. Например, функции $\int_0^x e^{-t^2} dt$,

$\int\limits_e^x \frac{dt}{\ln t}$ (и т.п. функции, связанные с неберущимися интегралами, см. § 10.9) неэлементарны, так как они являются первообразными для функций e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, которые не имеют первообразных в классе элементарных функций.

11.4. Формула Ньютона–Лейбница

В этом параграфе, опираясь на свойства интеграла с переменным верхним пределом, мы получим основную формулу интегрального исчисления, традиционно связываемую с именами И. Ньютона и Г.В. Лейбница (см. (11.15)).

Теорема. *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ и $F(x)$ — *любая первообразная для* $f(x)$ на $[a, b]$. *Тогда определенный интеграл от функции* $f(x)$ *на* $[a, b]$ *равен приращению первообразной* $F(x)$ *на этом отрезке, т.е.*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{11.15}$$

□ Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $f(x)$. Но по теореме 2 (см. § 11.3) функция $\Phi(x)$, заданная формулой (11.11), также является первообразной для функции $f(x)$, и по теореме из § 10.1 найдется такое число C, что $F(x) = \Phi(x) + C$.

Тогда для приращения первообразной имеем

$$F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) =$$

$$= \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^a f(x)\,dx$$

(см. определение (11.11) функции $\Phi(x)$). Для завершения доказательства достаточно заметить, что согласно (11.3) $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$. ■

Нахождение определенных интегралов с использованием формулы Ньютона—Лейбница (11.15) осуществляется в два шага: на первом шаге, используя технику нахождения неопределенного интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$; на втором применяется собственно формула Ньютона—Лейбница — находится приращение первообразной, равное искомому интегралу. В связи с этим введем обозначение для приращения первообразной, которое удобно использовать при записи решений. По определению положим

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad \textbf{(11.16)}$$

Следует подчеркнуть, что при применении формулы Ньютона—Лейбница можно использовать л ю б у ю первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, например, имеющую наиболее простой вид при $C = 0$.

▷ **Пример 11.2.** Вычислить: а) $\int\limits_0^1 x^2 dx$; б) $\int\limits_1^2 2^{3x-4} dx$.

Р е ш е н и е. а) Произвольная первообразная для функции $f(x) = x^2$ имеет вид $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Для нахождения интеграла по формуле Ньютона—Лейбница возьмем такую первообразную, у которой $C = 0$ (см. замечание выше). Тогда

$$\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

что совпадает, конечно, с результатом, полученным в примере **11.1.**

б) Первообразную подынтегральной функции найдем, используя формулу (10.9). Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int\limits_1^2 2^{3x-4} dx = \left(\frac{1}{3\ln 2} 2^{3x-4}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(2^{3x-4}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(4 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6\ln 2}. \ ▶$$

При нахождении интеграла из примера **11.2б** было использовано свойство приращения первообразной

$$\left(\alpha F(x)\right)\Big|_a^b = \alpha\left(F(x)\Big|_a^b\right), \qquad \textbf{(11.17)}$$

где α — некоторое число.

Заметим, что введенное ранее определение (11.2) и его следствие (11.3) согласованы с формулой Ньютона–Лейбница. Действительно,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

и

$$\int\limits_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Таким образом, и при применении формулы Ньютона—Лейбница несущественно, какой из пределов интегрирования больше: верхний или нижний.

11.5. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле

При вычислении определенных интегралов с использованием формулы Ньютона—Лейбница предпочтительно жестко не разграничивать этапы решения задачи (нахождение первообразной подынтегральной функции, нахождение приращения первообразной). Такой подход, использующий, в частности, формулы замены переменной и интегрирования по частям для определенного интеграла, обычно позволяет упростить запись решения.

Теорема 1. *Пусть функция* $\varphi(t)$ *имеет непрерывную производную на отрезке* $[\alpha, \beta]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ *и функция* $f(x)$ *непрерывна в каждой точке* x *вида* $x = \varphi(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$.

Тогда справедливо следующее равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad \textbf{(11.18)}$$

Формула (11.18) носит название *формулы замены переменной в определенном интеграле.*

□ Пусть $F(x)$ и $\Phi(t)$ — некоторые первообразные для функций $f(x)$ и $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. В гл. 10 было доказано, что $F(\varphi(t))$ также является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда по следствию из теоремы Лагранжа найдется такое число C, что $\Phi(t) = F(\varphi(t)) + C$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Поэтому

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = (F(\varphi(\beta)) + C) - (F(\varphi(\alpha)) + C) = F(b) - F(a).$$

Но по формуле Ньютона—Лейбница $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ совпадает с правой частью (11.18), а $F(b) - F(a)$ — с левой частью (11.18). ■

Подобно тому, как это было в случае неопределенного интеграла, использование замены переменной позволяет упростить интеграл, приблизив его к табличному (табличным). При этом в отличие от неопределенного интеграла в данном случае нет необходимости возвращаться к исходной переменной интегрирования. Достаточно лишь найти пределы интегрирования α и β по новой переменной t как решение относительно переменной t уравнений $\varphi(t) = a$ и $\varphi(t) = b$. На практике, выполняя замену переменной, часто начинают с того, что указывают выражение $t=\psi(x)$ новой переменной через старую. В этом случае нахождение пределов интегрирования по переменной t упрощается: $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$.

▷ **Пример 11.3.** Вычислить $\int\limits_0^1 x(2-x^2)^5dx$.

Р е ш е н и е. Положим $t=2-x^2$. Тогда $dt=d(2-x^2)=(2-x^2)\,dx=-2x\,dx$ и $x\,dx=-\frac{1}{2}dt$. Если $x=0$, то $t=2-0^2=2$, и если $x=1$, то $t=2-1^2=1$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 x(2-x^2)^5\,dx=\int\limits_2^1 t^5\left(-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}\int\limits_2^1 t^5dt=-\frac{1}{2}\left(\frac{t^6}{6}\Bigg|_2^1\right)=$$

$$=-\frac{1}{12}\left(t^6\Bigg|_2^1\right)=-\frac{1}{12}(1-2^6)=\frac{21}{4}.\ ▶$$

Рассмотрим теперь, как выполняется интегрирование по частям в определенном интеграле.

Теорема 2. *Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке* $[a,\ b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b u\,dv=uv\Bigg|_a^b-\int\limits_a^b vdu\,, \qquad \textbf{(11.19)}$$

где $uv\Bigg|_a^b=u(b)v(b)-u(a)v(a)$.

Формула (11.19) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

□ Поскольку $(uv)'=u'v+uv'$, то функция uv является первообразной для функции $u'v+uv'$.

Тогда по формуле Ньютона—Лейбница и (11.5) получаем:

$$uv\Bigg|_a^b=\int\limits_a^b(u'v+uv')\,dx=\int\limits_a^b vu'dx+\int\limits_a^b uv'dx\,,$$

что равносильно (11.19), поскольку по определению дифференциала $u'(x)\,dx=du$ и $v'(x)\,dx=dv$. ■

▷ **Пример 11.4.** Вычислить $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

Р е ш е н и е. Пусть $u = \ln(1+x)$, $dv = dx$. Тогда $du = d(\ln(1+x)) = (\ln(1+x))'dx = \frac{dx}{1+x}$ и $v = \int dv = \int dx = x$ (см. гл. 10).

Применяя (11.19), получаем

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{dx}{1+x}.$$

Для нахождения полученного интеграла положим $1 + x = t$. Тогда $dx = dt$, $x = t - 1$ и если $x = 0$, то $t = 1$, если $x = 1$, то $t = 2$. Следовательно,

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_1^2 \frac{t-1}{t}dt = \ln 2 - \int_1^2 dt + \int_1^2 \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln 2 - t\Big|_1^2 + \ln|t|\Big|_1^2 = \ln 2 - (2-1) + \ln 2 - \ln 1 = \ln 4 - 1. \blacktriangleright$$

11.6. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур. 1. Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла (см. § 11.1) площадь S под кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ (см. рис. 11.1) численно равна определенному интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

▷ **Пример 11.5.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 4$.

Р е ш е н и е. Из чертежа (см. рис. 11.10) видно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB равна разности двух площадей:

$S = S_{OABC} - S_{OBC}$,

каждая из которых находится по геометрическому смыслу определенного интеграла. Решая систему $\begin{cases} y = 4, \\ x = \sqrt{y} \end{cases}$, получаем, что точка B пересечения прямой $y = 4$ и кривой $x = \sqrt{y}$ имеет координаты (2; 4).

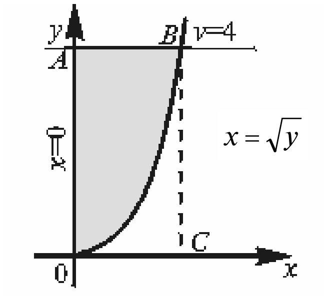


Рис. 11.10

Тогда $S_{OABC} = \int_0^2 4dx = 4\int_0^2 dx = 4x\Big|_0^2 = 8$,

$$S_{OBC} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Окончательно $S = 8 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$ (ед.^{2}).

Отметим, что данная задача может быть также решена другим способом. Сделаем сначала некоторые замечания общего характера.

По определению определенного интеграла

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy = \lim_{\max\limits_i \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta y_i .$$

Это равенство можно понимать так, что при построении интегральной суммы разбиению подвергается отрезок $[c, d]$ оси ординат. Соответственно точки ξ_1, ξ_2, …, ξ_n — это ординаты, фиксированные на каждом из отрезков разбиения. Поэтому, если $x = \varphi(y) \geq 0$ на $[c, d]$, то интеграл $\int_c^d \varphi(y)\,dy$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (см. рис. 11.11). (Другими словами, в данном случае площадь вычисляется посредством проецирования криволинейной трапеции на ось ординат.) Теперь, возвращаясь к задаче нашего примера, можем записать:

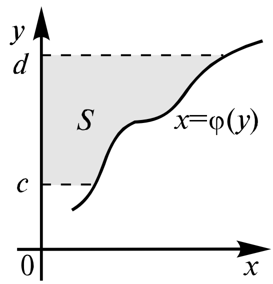


Рис. 11.11

$$S = \int_0^4 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}y^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{2}{3}(4^{3/2} - 0^{3/2}) =$$

$= 16/3$ (ед.^{2}). ▶

2. Пусть функция $y = f(x)$ неположительна и непрерывна на $[a, b]$ (см. рис. 11.12). Выясним, какая связь в этом случае существует между площадью S криволинейной трапеции «над кривой» $y = f(x)$ на $[a, b]$ и интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$.

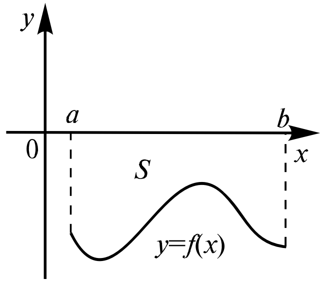


Рис. 11.12

Отражая кривую $y = f(x)$ относительно оси абсцисс, получаем кривую с уравнением $y = -f(x)$. Функция $y = -f(x)$ уже неотрицательна на $[a, b]$, а площадь под этой кривой на $[a, b]$ из соображений симметрии равна площади S (см. рис. 11.13). Тогда

$$S = \int_a^b (-f(x)\,dx), \text{ т.е. } S = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad \mathbf{(11.20)}$$

Таким образом, если функция $y = f(x)$ неположительна на $[a, b]$, то площадь S над кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ отличается знаком от определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

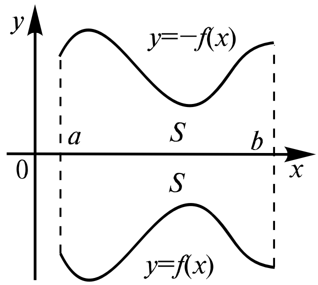


Рис. 11.13

▷ **Пример 11.6.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $y = x - 2$, $y = 0$.

Р е ш е н и е. Из рис. 11.14 видно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB может рассматриваться как площадь над кривой OAB на отрезке $[0; 2]$. Однако указанная кривая (ломаная) не задается одним уравнением. Поэтому для нахождения $S = S_{OAB}$ разобьем криволинейный треугольник OAB на части, проецируя точку A излома на ось абсцисс. Тогда $S = S_{OAC} + S_{ABC}$ (см. рис. 11.14). Абсциссы точек O, A, B задают пределы интегрирования. (Проверку того, что координаты точек O, A, B равны $(0; 0)$, $(1; -1)$ $(2; 0)$, мы оставляем читателю в качестве упражнения.)

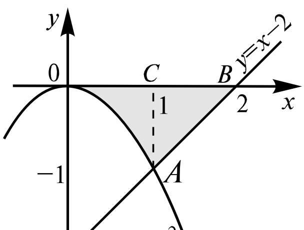


Рис. 11.14

$$S_{OAC}=-\int_0^1(-x^2)\,dx=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3},$$

$$S_{ABC}=-\int_1^2(x-2)\,dx=\left.\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\right|_1^2=\frac{1}{2}.$$

Окончательно $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ (ед.^{2}). ▶

3. Пусть на отрезке $[a,\ b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$ общего вида. Предположим также, что исходный отрезок можно разбить точками на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция $y=f(x)$ будет знакопостоянна или равна нулю. Выясним, какая в данном случае существует связь между определенным интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$ и площадями возникающих криволинейных трапеций. Рассмотрим, например, случай функции, изображенной на рис. 11.15. Площадь заштрихованной фигуры $S = S_1+S_2+S_3$, т.е. равна алгебраической сумме соответствующих определенных интегралов:

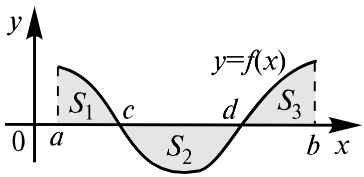


Рис. 11.15

$$S=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx.$$

Сделанные замечания позволяют дать еще одну геометрическую интерпретацию теоремы о среднем (см. § 11.2). Равенство (11.10) можно переписать в виде

$$\int_a^b\big(f(x)-f(\xi)\big)\,dx=0,$$

т.е. теорема о среднем утверждает, что найдется такая точка $\xi\in[a,\ b]$, что после сдвига исходной кривой $y=f(x)$ вдоль оси ординат на величину $f(\xi)$ для полученной кривой $y=f(x)-f(\xi)$ площади частей криволинейной трапеции,

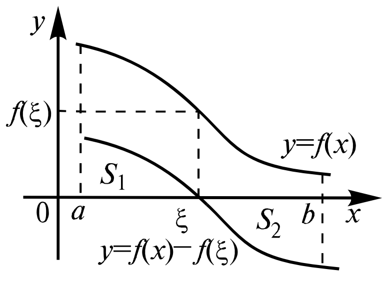


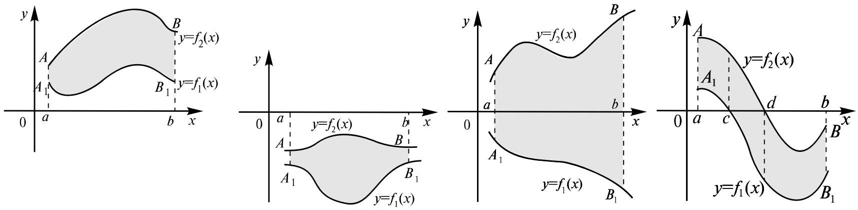
Рис. 11.16

расположенных выше и ниже оси Ox, равны (например, на рис. 11.16 $S_1 = S_2$).

4. Приведем формулу, применение которой часто упрощает решение задач на вычисление площадей плоских фигур.

Теорема. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы непрерывные функции* $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, *такие, что* $f_2(x) \geq f_1(x)$. *Тогда площадь* S *фигуры, заключенной между кривыми* $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$, *на отрезке* $[a, b]$ *вычисляется по формуле*

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad \textbf{(11.21)}$$



а) б) в) г)

Рис. 11.17

Проиллюстрируем теорему графически. Возможны несколько случаев расположения кривых на отрезке $[a, b]$.

1. $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$ (см. рис. 11.17а).

$$S = S_{aABb} - S_{aA_1B_1b} = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx,$$

откуда следует формула (11.21).

2. $0 \geq f_2(x) \geq f_1(x)$ (см. рис. 11.17б).

$$S = S_{aA_1B_1b} - S_{aABb} = -\int_a^b f_1(x)\,dx - \left(-\int_a^b f_2(x)\,dx \right),$$

откуда следует (11.21).

3. $f_2(x) \geq f_1(x)$, $f_2(x) \geq 0$, $f_1(x) \leq 0$ (см. рис. 11.17в).

$$S = S_{aABb} + S_{aA_1B_1b} = \int_a^b f_2(x)\,dx + \left(-\int_a^b f_1(x)\,dx \right),$$

откуда следует (11.21).

4. Общий случай (см. рис. 11.17 г) сводится к частным случаям, рассмотренным выше, если разбить отрезок [*a*, *b*] на отдельные отрезки [*a*, *c*], [*c*, *d*], [*d*, *b*].

▷ **Пример 11.7.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2$, $y = x$ (рис. 11.18).

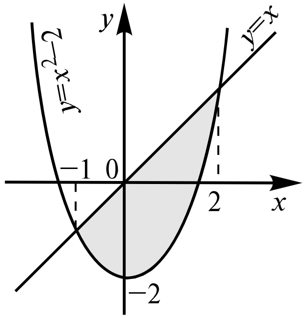


Рис. 11.18

Р е ш е н и е. Найдем координаты точек пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = x$, решив систему этих уравнений: $(-1;\ -1)$ и $(2;\ 2)$. На отрезке $[-1,\ 2]$ $x \geq x^2 - 2$.

Воспользуемся формулой (11.21), полагая $f_2(x) = x,\ f_1(x) = x^2 - 2$.

Абсциссы точек *A* и *B* пересечения наших линий зададут пределы интегрирования:

$$S = \int_{-1}^{2} (x - (x^2 - 2))\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} + 2x\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(4 - (-1)^2) - \frac{1}{3}(2^3 - (-1)^3) + 2(2 - (-1)) = 4{,}5 \text{ (ед.}^2\text{)}. \blacktriangleright$$

Вычисление объемов тел вращения. Пусть на отрезке [*a*, *b*] задана непрерывная знакопостоянная функция $y = f(x)$. Необходимо найти объем V_x тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (см. рис. 11.19).

Для решения задачи применим тот же подход, который был использован выше для нахождения площади криволинейной трапеции. Разобьем отрезок [*a*, *b*] на элементарные отрезки точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ некоторым образом выберем точку ξ_i, где

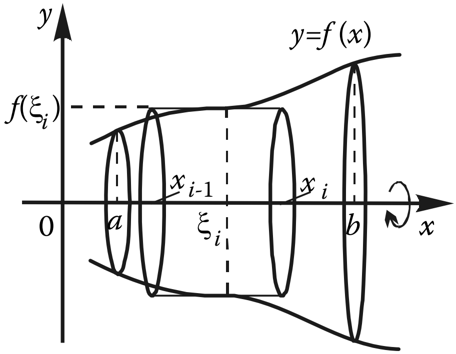


Рис. 11.19

$i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда некоторое приближение для искомого объема даст следующая сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i\ , \qquad \textbf{(11.22)}$$

i-е слагаемое которой ($i = 1, 2, \ldots, n$) — это объем цилиндра с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и радиусом основания $f(\xi_i)$ (см. рис. 11.19). Очевидно, что приближение для искомого объема V_x будет тем лучше, чем меньше длина отрезков разбиения Δx_i, поэтому *за искомый объем* V_x *естественно взять следующий предел*

$$V_x = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i\ , \qquad \textbf{(11.23)}$$

где $\max\limits_i \Delta x_i$ — максимальная из длин отрезков разбиения. Но выражение, стоящее в правой части (11.23), не что иное, как предел интегральной суммы для функции $\varphi(x) = \pi f^2(x)$, поэтому (см. определение определенного интеграла и формулу (11.4)) окончательно получаем

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx\ . \qquad \textbf{(11.24)}$$

▷ **Пример 11.8.** Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ вокруг оси Ox.

Р е ш е н и е. По формуле (11.24) искомый объем (рис. 11.20).

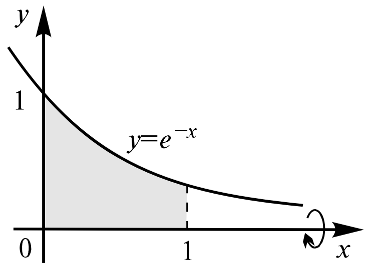


Рис. 11.20

$$V_x = \pi\int_a^b (e^{-x})^2 dx =$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \approx 1{,}36\ (\text{ед.}^3). \ ▶$$

Формально заменяя в формуле (11.24) переменную x на y, получаем формулу для вычисления объема V_y тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси ординат:

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy \qquad \textbf{(11.25)}$$

(на рис. 11.21 вращаемая криволинейная трапеция заштрихована).

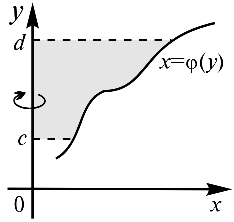


Рис. 11.21

▷ **Пример 11.9.** Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси ординат плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x^3$.

Р е ш е н и е. Проецируя вращаемую фигуру на ось ординат (рис. 11.22), убеждаемся, что искомый V равен разности двух объемов: объема V_{y1}, полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt[3]{y}$, $x = 0$, $y = 1$, и объема V_{y2}, для которого вращаемая фигура ограничена линиями $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 1$. (С учетом предстоящего применения формулы (11.25) уравнения кривых записаны в виде $x = \varphi(y)$, предполагающем переменную y независимой.) Применяя (11.25), получаем:

$$V_{y1} = \pi \int_0^1 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \int_0^1 y^{2/3} dy =$$

$$= \pi \frac{3y^{5/3}}{5}\bigg|_0^1 = \frac{3}{5}\pi,$$

$$V_{y2} = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \pi \frac{y^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

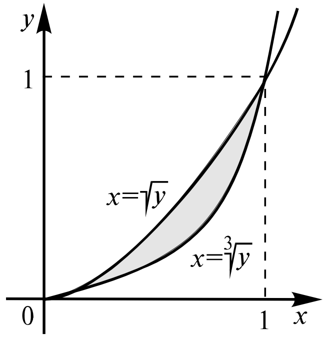


Рис. 11.22

Окончательно

$$V = V_{y1} - V_{y2} = \frac{3}{5}\pi - \frac{1}{2}\pi = 0{,}1\pi \text{ (ед.}^3\text{)}. \ ▶$$

11.7. Несобственные интегралы

В предыдущих параграфах мы рассматривали интегралы от функций, интегрируемых (и, следовательно, ограниченных) на конечных отрезках интегрирования. На практике возникает необходимость обобщения этих понятий на случаи, когда либо один из концов (или оба) отрезка интегрирования удален в бесконечность, либо функция не ограничена на отрезке интегрирования.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Пусть функция $y = f(x)$ определена и интегрируема на произвольном отрезке $[a, t]$, т.е. функция $\Phi(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$ определена для произвольного $t \geq a$.

Определение. ***Несобственным интегралом*** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *от функции* $f(x)$ *на полуинтервале* $[a, +\infty)$ *называется предел функции* $\Phi(t)$ при t*, стремящемся к* $+\infty$, *т.е.*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_a^t f(x)\,dx. \qquad \textbf{(11.26)}$$

Если предел, стоящий в правой части равенства (11.26), существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся* (к данному пределу), в противном случае — *расходящимся.*

По аналогии с теорией числовых рядов (см. гл. 13) при работе с несобственными интегралами обычно выделяют следующие две задачи:

а) исследование вопроса о сходимости заданного несобственного интеграла;

б) вычисление значения интеграла в случае, если последний сходится.

В некоторых случаях решения этих двух задач удается объединить.

Использование несобственных интегралов позволяет придать смысл такому понятию, как *площадь полубесконечной* (*бесконечной*) *фигуры* (см. примеры ниже).

▷ **Пример 11.10.** Вычислить $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$.

Р е ш е н и е. По определению

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_1^t \frac{dx}{x^2}.$$

Для нахождения интеграла, стоящего под знаком предела, воспользуемся формулой Ньютона—Лейбница:

$$\int_1^t x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^t = 1-\frac{1}{t}.$$

Тогда

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1,$$

т.е. искомый несобственный интеграл сходится к 1. Аналогично, используя формулу Ньютона–Лейбница, можно убедиться, что $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^m}$ является сходящимся к $\frac{1}{m-1}$, если $m>1$, и расходящимся, если $m\le 1$. Геометрический смысл этого результата состоит в том, что среди всех кривых вида $y=\frac{1}{x^m}$ гипербола $y=\frac{1}{x}$ является своеобразным «порогом»: те кривые данного вида, которые на $[1;\ +\infty)$ лежат ниже нее, ограничивают полубесконечную фигуру конечной площади; если же кривая лежит выше или совпадает с гиперболой $y=\frac{1}{x}$, то соответствующая фигура имеет бесконечную площадь (см. рис. 11.23).

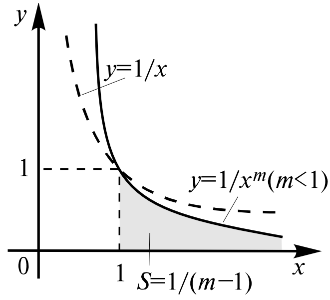


Рис. 11.23

По аналогии с (11.26) определяется *несобственный интеграл на полуинтервале* $(-\infty,\ b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx. \qquad \textbf{(11.27)}$$

Определение сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ аналогично приведенному выше.

Введем понятие несобственного интеграла на интервале $(-\infty,\ +\infty)$. Пусть для некоторого числа a несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся. Тогда положим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx\,, \qquad \textbf{(11.28)}$$

при этом интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *сходящимся.* Если хотя бы один из интегралов, входящих в правую часть (11.28), расходится, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *расходящимся.* (Можно доказать, что введенное определение не зависит от выбора числа *a*.)

▷ **Пример 11.11.** Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

Р е ш е н и е. Исследуем на сходимость интегралы $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ и $\int_{0}^{+\infty} e^x dx$. (В формуле (11.28) мы полагаем $a = 0$.)

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} e^x dx = \lim_{t\to-\infty} (e^0 - e^t) = 1,$$

т.е. первый из интегралов сходится к 1. Но

$\int_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{e} e^x dx = \lim_{t\to+\infty} (e^t - 1) = +\infty$, т.е. $\int_{0}^{+\infty} e^x dx$ расходится и, следовательно, расходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$. ▶

В курсе теории вероятностей встречается несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$, называемый *интегралом Эйлера—Пуассона.*

Доказано, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}\,, \qquad \textbf{(11.29)}$$

другими словами, площадь S под кривой $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ (получившей название *кривой Гаусса*) на интервале $(-\infty, +\infty)$ равна 1 (рис. 11.24).

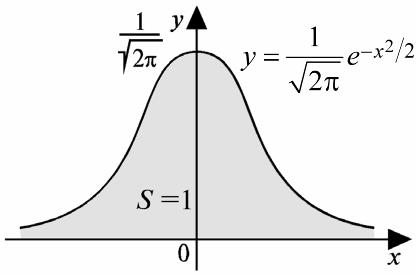


Рис. 11.24

Несобственные интегралы от неограниченных функций. Начнем с рассмотрения важного частного случая: пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, но н е о г р а н и ч е н а на полуинтервале $[a, b)$.

Определение. ***Несобственным интегралом*** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *от функции* $y = f(x)$ *на полуинтервале* $[a, b)$ *называется предел* $\lim\limits_{\delta \to 0+} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$, *где* $\delta > 0$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0+} \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx. \qquad \textbf{(11.30)}$$

Если предел, стоящий в правой части равенства (11.30), существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся,* в противном случае — *расходящимся.*

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла от функции $y = f(x)$ непрерывной, но неограниченной на $(a, b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0+} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx. \qquad \textbf{(11.31)}$$

▷ **Пример 11.12.** Вычислить $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

Р е ш е н и е. По определению $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\delta \to 0+} \int\limits_\delta^1 x^{-1/2}dx$.

По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_\delta^1 x^{-1/2}dx = 2x^{1/2}\Big|_\delta^1 = 2(1 - \sqrt{\delta}).$$

Тогда $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\delta\to 0+} 2(1-\sqrt{\delta}) = 2$,

т.е. полубесконечная фигура, ограниченная осями координат, кривой $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ и прямой $x = 1$, имеет конечную площадь, равную 2 ед^2. (см. рис. 11.25). ▶

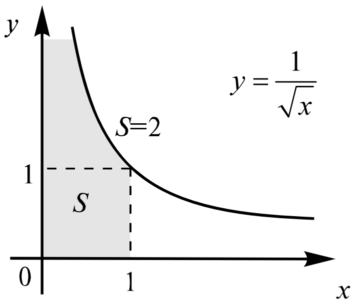


Рис. 11.25

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ не ограничена при $x = c$, где $c \in (a, b)$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ также называется несобственным. В этом случае интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

считается *сходящимся,* если сходятся два несобственных интеграла в правой части равенства. В противном случае $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *расходящимся.* Например, $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ является расходящимся, так как расходятся оба несобственных интеграла в правой части равенства (предлагаем убедиться в этом читателю самостоятельно).

11.8. Приближенное вычисление определенных интегралов

Важным средством вычисления определенных интегралов является формула Ньютона—Лейбница (см. § 11.4). Однако ее применение на практике связано с существенными трудностями, возникающими при нахождении первообразной в случае усложнения подынтегральной функции. Поэтому в приложениях используют так называемые *численные методы*, позволяющие найти приближенное значение искомого интеграла с требуемой точностью. Этот подход оказывается еще более предпочтительным в связи с возрастающими возможностями современной вычислительной техники, реализующей алгоритмы с необходимой скоростью.

В данном параграфе мы рассмотрим одну из приближенных формул вычисления определенного интеграла — формулу трапеций.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Предположим дополнительно, что $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Мы получим приближенное значение искомого интеграла, если вместо площади под кривой возьмем площадь под ломаной, расположенной достаточно близко к исходной кривой (см. также § 11.1). Для построения этой ломаной поступим следующим образом: разобьем отрезок интегрирования на n равных частей длиной $h = \dfrac{b-a}{n}$ и на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$, где $i=1, 2, \ldots, n$; $x_i = x_0 + ih$, заменим участок кривой $y = f(x)$ хордой, стягивающей концевые точки (рис. 11.26).

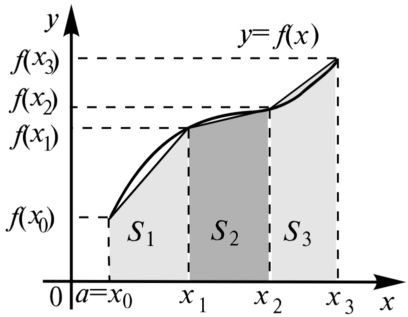


Рис. 11.26

Тогда $\int_a^b f(x)\,dx \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n$,

где $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — площади трапеций (площади под хордами на каждом из отрезков разбиения), на рис. 11.26 эти трапеции заштрихованы. Но

$$S_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}h\,;\ S_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}h\,;\ \ldots;\ S_n = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}h\,.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}h + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}h + \ldots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}h =$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_n)}{2}\right).$$

Вынося множитель h, заметим, что все слагаемые данной суммы, отличные от $f(x_0)/2$ и $f(x_n)/2$, встречаются в ней дважды. Приводя подобные члены и учитывая, что $h = \dfrac{b-a}{n}$, окончательно получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right), \quad \textbf{(11.32)}$$

где $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\,h$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Формула (11.32) носит название *формулы трапеций*. Она получена нами в предположении неотрицательности функции $y = f(x)$, но можно доказать, что этот результат остается справедливым также и в общем случае.

Рассмотрим теперь вопрос об оценке погрешности от применения формулы трапеций (существенно, что без рассмотрения этого вопроса формула (11.32) будет носить лишь качественный характер).

Обозначим через $S(n)$ выражение, стоящее в правой части формулы (11.32). Тогда

$$\Delta = \left|\int_a^b f(x)\,dx - S(n)\right|$$

— абсолютная погрешность от применения формулы трапеций (11.32). Обозначим через M_2 максимальное значение модуля второй производной $f''(x)$ подынтегральной функции $y = f(x)$ на $[a, b]$, т.е. $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|$.

Доказано, что абсолютная погрешность Δ от применения формулы трапеций

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2. \quad \textbf{(11.33)}$$

$\triangleright$ **Пример 11.13.** Вычислить по формуле трапеций при $n = 5$ $\int_1^{1,5} \frac{dx}{x}$. Оценить погрешность.

Р е ш е н и е. Поскольку число n отрезков разбиения равно 5, то длина h отрезков разбиения равна $\frac{b-a}{n} = \frac{1,5-1}{5} = 0,1$ и так как $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, $x_0 = 1$, имеем $x_1 = 1,1$; $x_2 = 1,2$; $x_3 = 1,3$; $x_4 = 1,4$; $x_5 = 1,5$. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x}$, поэтому согласно (11.32) получаем

$$\int_1^{1,5}\frac{dx}{x} \approx 0,1\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1,5}\right)+\frac{1}{1,1}+\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,3}+\frac{1}{1,4}\right)= 0,4059.$$

Перейдем теперь к оценке погрешности. $f''(x) = \left(\left(\frac{1}{x}\right)'\right)' = \frac{2}{x^3}$.

Эта функция монотонно убывает на [1; 1,5], поэтому достигает своего максимального значения в левой концевой точке этого отрезка (т.е. при $x = 1$). Тогда $M_2 = f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$ и согласно (11.33) имеем

$$\Delta \le \frac{0,5^3}{12\cdot 5^2}\cdot 2 = 0,84\cdot 10^{-3}.$$

Заметим, что по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_1^{1,5}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{1,5} = \ln 1,5,$$

и поэтому найденное значение 0,4059 нашего интеграла является также приближением (с указанной точностью) для числа $\ln 1,5$. Таким образом, формула трапеций может оказаться также удобным средством вычисления значений некоторых функций. ▶

11.9. Использование понятия определенного интеграла в экономике

Выше мы отмечали экономический смысл определенного интеграла, выражающего объем произведенной продукции при известной функции производительности труда.

Рассмотрим другие примеры использования интеграла в экономике.

Если в *функции Кобба—Дугласа* (см. гл. 15) считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид $g(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем выпускаемой продукции за T лет составит:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}\,dt. \qquad \textbf{(11.34)}$$

▷ **Пример 11.14.** Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба—Дугласа имеет вид $g(t) = (1+t)\,e^{3t}$.

Р е ш е н и е. По формуле (11.34) объем Q произведенной продукции равен

$$Q = \int_0^4 (1+t)e^{3t}\,dt.$$

Используем метод интегрирования по частям. Пусть $u = t + 1$, $dv = e^{3t}dt$. Тогда $du = dt$, $v = \int e^{3t}dt = \frac{1}{3}e^{3t}$.

Следовательно,

$$Q = (t+1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t}dt = \frac{1}{3}(5e^{12}-1) - \frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{9}(14e^{12}-2) \approx 2{,}53 \cdot 10^5 \text{ (усл. ед.)}$$ ▶

Исследуя *кривую Лоренца* — зависимость процента доходов от процента имеющего их населения (кривую *OBA*, рис. 11.27), мы можем оценить степень неравенства в распределении доходов населения. При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую — биссектрису *OA*, поэтому площадь фигуры *OAB* между биссектрисой *OA* и кривой Лоренца, отнесенная к площади треугольника *OAC (коэффициент Джини)*, характеризует степень неравенства в распределении доходов населения.

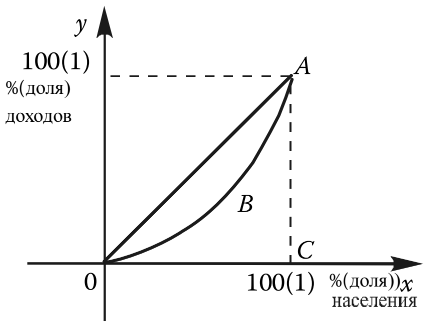


Рис. 11.27

▷ **Пример 11.15.** По данным исследований в распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца *OBA* (рис. 11.27) может быть описана уравнением $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$, где x — доля населения, y — доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

Р е ш е н и е. Очевидно, коэффициент Джини (см. рис. 11.27)

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}\text{, так как } S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.$$

$$S_{OBAC} = \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2})\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Поэтому $k = 1 - 2(1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx) = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - 1$.

С помощью замены, например, $x = \sin t$ можно вычислить $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi/4$. Итак, коэффициент Джини $k = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx$ $\approx 0{,}57$.

Достаточно высокое значение k показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране. ▶

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t (лет) при годовом проценте (процентной ставке) p, называется *дисконтированием*. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть K_t — конечная сумма, полученная за t лет, и K — дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также *современной* суммой. Если проценты простые, то $K_t = K(1 + it)$, где $i = p/100$ — удельная процентная ставка. Тогда $K = K_t/(1 + it)$. В случае сложных процентов $K_t = K(1 + it)^t$ и потому $K = K_t/(1 + i)^t$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной i, процент начисляется непрерывно. Можно показать, что в этом случае дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}\,dt. \qquad \textbf{(11.35)}$$

▷ **Пример 11.16.** Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн руб.

Р е ш е н и е. Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тогда по формуле (11.35) дисконтированная сумма капиталовложений $K = \int_0^3 (10+t)e^{-0,08t}\,dt$.

Интегрируя (аналогично примеру **11.14**), получим $K = 30,5$ млрд руб. Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млн руб. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 млн руб. при той же, начисляемой непрерывно, процентной ставке. ▶

Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x — порядковый номер изделия в партии. Тогда *среднее время* $t_{ср}$, затраченное *на изготовление одного изделия в период освоения* от x_1 до x_2 изделий, вычисляется по теореме о среднем (11.10):

$$t_{ср} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)\,dx\,. \qquad \textbf{(11.36)}$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$, то часто она имеет вид

$$t = ax^{-b}, \qquad \textbf{(11.37)}$$

где a — затраты времени на первое изделие, b — показатель производственного процесса.

▷ **Пример 11.17.** Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ изделий, полагая в формуле (11.37) $a = 600$ (мин), $b = 0,5$.

Р е ш е н и е. Используя формулу (11.36), получаем

$$t_{ср} = \frac{1}{121-100} \int_{100}^{121} 600x^{-1/2}dx = \frac{600}{21} 2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57,2 \text{ (мин)}. \ ▶$$

11.10. Решение задач

▷ **Пример 11.18.** Вычислить:

а) $\int\limits_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$; б) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$; в) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

Р е ш е н и е. а) Воспользуемся заменой переменной: $t=\sqrt{1+3x}$.

Тогда $x = \frac{t^2-1}{3}$ и $dx=\frac{2}{3}t\,dt$. Если $x=0$, то $t=1$ и, если $x=5$, то $t=4$. Выполняя замену, получаем

$$\int\limits_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}} = \frac{2}{9}\int\limits_1^4 (t^2-1)\,dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_1^4 - t\bigg|_1^4\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{64-1}{3} - 4 + 1\right) = 4.$$

Отметим, что полагая $x=\frac{t^2-1}{4}$, можно также считать, что $t \in [-4; -1]$. При этом все условия теоремы 1 из § 11.5 выполнены и, поскольку в этом случае $\sqrt{t^2} = -t$, получаем

$$\int\limits_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}} = \int\limits_{-1}^{-4} \frac{(t^2-1)2t\,dt}{3(-t)3} = \frac{2}{9}\int\limits_{-1}^{-4}(1-t^2)\,dt = \frac{2}{9}\left(t\bigg|_{-1}^{-4} - \frac{t^3}{3}\bigg|_{-1}^{-4}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\left(-4+1-\frac{1}{3}\left((-4)^3-(-1)^3\right)\right) = 4.$$

б) Положим $t=e^x$. Тогда $x=\ln t$, $dx=\frac{dt}{t}$ и если $x=\ln 2$, то $t=2$, и если $x=\ln 3$, то $t=3$. Выполняя замену, получаем

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}} = \int\limits_2^3 \frac{dt}{t(t-t^{-1})} = \int\limits_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

в) Полагая $x=2\sin t$, получаем, что $dx=2\cos t\,dt$ и $x \in [1; \sqrt{3}]$, если (одна из возможностей) $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. Тогда

$$\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{8\sin^3 t+1}{4\sin^2 t}dt = 2\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\sin t\,dt + \frac{1}{4}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dt}{\sin^2 t} =$$

$$= -2\cos t\bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} - \frac{1}{4}\mathrm{ctg}t\bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} = -2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right) = \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1. \blacktriangleright$$

▷ **Пример 11.19.** Вычислить $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой интегрирования по частям (11.19): положим $u = x$, $e^x dx = dv$. Тогда $du = dx$,

$$v = \int dv = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \text{ и}$$

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (-e^{-x})\,dx =$$

$$= -e^{-1} + \int\limits_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{e-2}{e}. \blacktriangleright$$

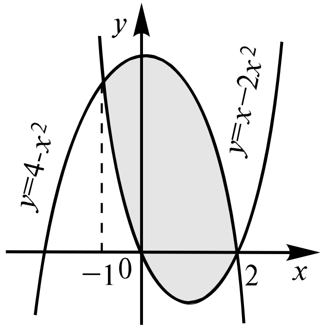


Рис. 11.28

▷ **Пример 11.20.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$ (рис. 11.28).

Р е ш е н и е. Координаты точек пересечения кривых $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$ найдем из системы их уравнений: (−1; 3) и (2; 0). Проецируя фигуру на ось абсцисс (см. пример **11.7**), видим, что искомая площадь — это площадь фигуры, заключенной между кривыми; при этом на отрезке [−1; 2] $f_2(x) = 4 - x^2 \geq f_1(x) = x^2 - 2x$.

Применяя (11.21), получаем

$$S = \int\limits_{-1}^{2}(4 - x^2 - (x^2 - 2x))\,dx = \int\limits_{-1}^{2}(4 - 2x^2 + 2x)\,dx =$$

$$= 4x\Big|_{-1}^{2} - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} + x^2\Big|_{-1}^{2} =$$

$$4(2-(-1)) - \frac{2}{3}(2^3 - (-1)^3) + 2^2 - (-1)^2 =$$

$$= 9(\text{ед.}^2). \blacktriangleright$$

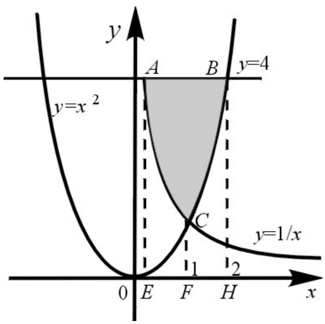


Рис. 11.29

▷ **Пример 11.21.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = 4$ и расположенной в первой четверти (рис. 11.29)

Р е ш е н и е. Решая соответствующие системы уравнений, получаем, что точками пересечения заданных линий являются A (1/4; 1), B (2; 4), C (1; 1) (рис. 11.29). Проецируя точки A, B, C на ось абсцисс (см. замечание в примере **11.7**), видим, что искомая площадь S_{ABC} равна разности между площадью прямоугольника *ABHE* и суммой площадей двух криволинейных трапеций *ACFF* и *CBHF*: $S = S_{ABHE} - \left(S_{ACFE} + S_{CBHF}\right)$. Вычислим:

$$S_{ABHE} = \int\limits_{1/4}^{2} 4dx = 4x \Big|_{1/4}^{2} = 4(2 - 1/4) = 7,$$

$$S_{ACFE} = \int\limits_{1/4}^{1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_{1/4}^{2} = \ln 1 - \ln 1/4 = \ln 4,$$

$$S_{CBHF} = \int\limits_{1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{1}^{2} = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}.$$

Итак, $S = 7 - \left(\ln 4 + \dfrac{7}{3}\right) = \dfrac{14}{3} - \ln 4 \approx 3{,}28$ (ед.^{2}). ▶

▷ **Пример 11.22.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

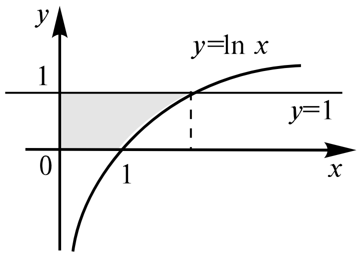


Рис. 11.30

Р е ш е н и е. Для нахождения искомой площади (рис. 11.30) используем проецирование фигуры на ось ординат и соответственно интегрирование по переменной y (см. пример **11.5**). Записывая уравнение $y = \ln x$ в виде $x = f(y)$, получаем $x = e^y$.

Тогда $S = \int\limits_{0}^{1} f(y)\,dy = \int\limits_{0}^{1} e^y dy = e^y \Big|_{0}^{1} = e - 1 \approx 1{,}72$ (ед.^{2}). ▶

Мы предлагаем читателю в качестве упражнения самостоятельно найти также данную площадь, используя проецирование на ось абсцисс.

▷ **Пример 11.23.** Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $x = y^2 - 2$, $y = x$.

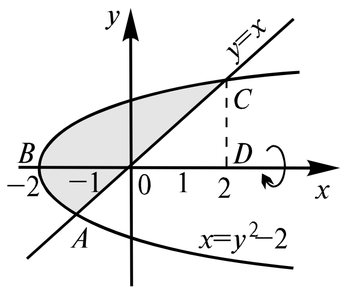


Рис. 11.31

Р е ш е н и е. Выделим на чертеже вращаемую фигуру (рис. 11.31, криволинейный треугольник *ABC*). Заметим, что точно такое же тело вращения получится, если вокруг оси абсцисс вращать криволинейный треугольник OBC. Тогда искомый объем равен разности двух объемов: $V_x = V_{BCD} - V_{OCD}$, где V_{BCD} — объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейного треугольника BCD, аналогично V_{OCD} — объем тела, полученного от вращения треугольника OCD. Записывая уравнения ограничивающих линий в виде $y = f(x)$ и используя (11.24), получаем

$$V_{BCD} = \pi\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{x+2}\right)^2 dx = \pi\int_{-2}^{2}(x+2)\,dx = \pi\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 8\pi,$$

$$V_{OCD} = \pi\int_{0}^{2}x^2dx = \pi\frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{2} = \frac{8}{3}\pi,\quad V_x = 8\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{16\pi}{3}\ (\text{ед.}^3).\ \blacktriangleright$$

▷ **Пример 11.24.** Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$, $y = 0$.

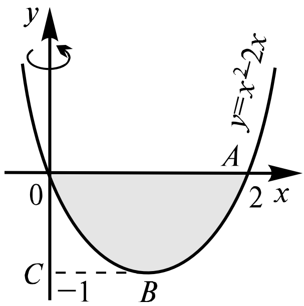


Рис. 11.32

Р е ш е н и е. Из чертежа (рис. 11.32) видно, что искомый объем V_y равен разности двух объемов: $V_y = V_{ABCO} - V_{BCO}$, где V_{ABCO} и V_{BCO} — объемы тел, полученных от вращения вокруг оси ординат плоских фигур $ABCO$ и BCO соответственно. Для нахождения указанных объемов используем формулу (11.25). При этом нам потребуются уравнения кривых OB и AB в виде $x = f(y)$. Записывая уравнение параболы, заданной по условию в виде $x^2 - 2x - y = 0$, решим это квадратное уравнение относительно переменной x, считая переменную y параметром: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+y}$.

Тогда $x = 1 + \sqrt{1+y}$ — уравнение кривой AB и $x = 1 - \sqrt{1+y}$ — уравнение кривой OB. Используя (11.25), получаем

$$V_y = \pi\int_{-1}^{0}(1+\sqrt{1+y})^2dy - \pi\int_{-1}^{0}(1-\sqrt{1+y})^2dy =$$

$$= \pi\int_{-1}^{0}\left((1+\sqrt{1+y})^2 - (1-\sqrt{1+y})^2\right)dy =$$

$$= 4\pi\int_{-1}^{0}\sqrt{1+y}\,dy = \frac{8\pi}{3}(1+y)^{3/2}\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{8\pi}{3}\ (\text{ед.}^3).\ \blacktriangleright$$

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить определенные интегралы:

11.25. $\int\limits_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\, dx$.

11.26. $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\, dy$.

11.27. $\int\limits_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

11.28. $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

11.29. $\int\limits_1^{3/2} \frac{4x+3}{(x-2)^3}\, dx$.

11.30. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

11.31. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx$.

11.32. $\int\limits_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

11.33. $\int\limits_0^1 \ln(1+\sqrt{x})\, dx$.

11.34. $\int\limits_0^{\ln 5} xe^{-x} dx$.

11.35. $\int\limits_1^2 x^2 \ln x\, dx$.

11.36. $\int\limits_0^{\pi} x \sin x\, dx$.

11.37. $\int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{x^2+3x+2}$.

11.38. $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

11.39. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\, dx$.

11.40. $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \sqrt{8-x^2}\, dx$.

11.41. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

11.42. $\int\limits_1^5 \frac{x\, dx}{\sqrt{4x+5}}$.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

11.43. $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, $y = 0$. **11.44.** $y = 1/x$, $y = x$, $x = 2$.

11.45. $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$. **11.46.** $y = x^2$, $y = 1 + \frac{3}{4}x^2$.

11.47. $y = 2/x$, $y = -x/2 - 5/2$.

11.48. $y = x^2 + 2$, $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$.

11.49. $y = -x^2$, $y = 2e^x$, $x = 0$, $x = 1$.

11.50. $y = 4/x^2$, $x = 1$, $y = x - 1$.

11.51. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4-3x}$, $y = 0$. **11.52.** $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.

Найти объемы тел, образованных вращением вокруг осей Ox и Oy фигуры, ограниченной линиями:

11.53. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \geq 0$.

11.54. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

11.55. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

11.56. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

11.57. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$. **11.58.** $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

11.59. $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x} dx$. **11.60.** $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

11.61. $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$. **11.62.** $\int\limits_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

11.63. Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией $z(t) = -0{,}00625\,t^2 + 0{,}05t + 0{,}5$ (ден. ед./ч), где t – время в часах от начала работы, $0 \leq t \leq 8$. Найти функцию
$u = u(t)$, выражающую объем продукции (в стоимостном выражении) и его величину за рабочий день.

11.64. Стоимость перевозки одной тонны груза на один километр (тариф перевозки) задается функцией $f(x) = \frac{10}{x+2}$ (ден. ед./км). Определите затраты на перевозку одной тонны груза на расстояние 20 км.

Глава 12

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

12.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные различных порядков данной функции.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если от нескольких — то *уравнением в частных производных.* Мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения (и по этой причине само слово «обыкновенные» будет опускаться).

Простейший пример дифференциального уравнения дает задача о нахождении первообразной $F(x)$ для заданной функции $f(x)$ (см. гл. 10), поскольку ее можно рассматривать как задачу о нахождении функции $F(x)$, удовлетворяющей уравнению $F'(x) = f(x)$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad \textbf{(12.1)}$$

где G — некоторая функция от $n + 2$ переменных, $n \geq 1$, при этом порядок n старшей производной, входящей в запись уравнения, называется *порядком* дифференциального уравнения. Например, задача о нахождении первообразной приводит к дифференциальному уравнению первого порядка, уравнение

$$x^2(y''')^4 - x(y')^5 + 8 = 0$$

— третьего порядка и т.п.

Дифференциальное уравнение n-го порядка называется *разрешенным относительно старшей производной,* если оно имеет вид

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

где F — некоторая функция от $n + 1$ переменной.

Решением дифференциального уравнения (12.1) называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество. Например, функция $y = \sin x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$, так как $(\sin x)'' + \sin x = 0$ для любых x.

Задача о нахождении решения некоторого дифференциального уравнения называется *задачей интегрирования* данного *дифференциального уравнения*. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

▷ **Пример 12.1.** Решить уравнение $y'' = x$.

Р е ш е н и е. Поскольку $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, то исходное уравнение равносильно следующему равенству дифференциалов: $dy' = xdx$. Выполняя почленное интегрирование, получаем $y' = \dfrac{x^2}{2} + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Вновь записывая производную как отношение двух дифференциалов, приходим к равенству $dy = \left(\dfrac{x^2}{2} + C_1\right)dx$. Интегрируя почленно, окончательно получаем $y = x^3/6 + C_1x + C_2$, где C_2 — произвольная постоянная.

Отметим, что без дополнительных предположений решение данного уравнения принципиально неоднозначно. Другими словами, дифференциальное уравнение задает семейство интегральных кривых на плоскости. Для выделения однозначно определенной интегральной кривой (решения) в нашем случае достаточно указать точку плоскости, через которую проходит искомая интегральная кривая, и направление, в котором она проходит через эту точку. (Дополнительные условия такого рода обычно называют *начальными*, поскольку часто дифференциальные уравнения используются для описания динамических процессов — процессов, проходящих во времени. В этих случаях независимая переменная x обозначает время.) Например, если известно, что $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$, то приходим к решению $y = x^3/6 + 2x + 1$. Аналогично, для выделения однозначно определенного решения дифференциального уравнения n-го порядка следует, вообще говоря, дополнительно задать n начальных условий. ▶

Общим решением дифференциального уравнения (12.1) n-го порядка называется такое его решение

$$y = \varphi(x, C_1, ..., C_n), \qquad \textbf{(12.2)}$$

которое является функцией переменной x и n произвольных независимых постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. (Независимость постоянных означает отсутствие каких-либо соотношений между ними.)

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения при некоторых конкретных числовых значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$.

В примере **12.1** $y = x^3/6 + C_1x + C_2$ — общее решение, $y = x^3/6 + 2x + 1$ — частное решение дифференциального уравнения $y'' = x$.

Чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые заданного семейства (12.2), следует продифференцировать равенство (12.2) n раз, считая, что y — функция независимой переменной x, а затем из полученных равенств и (12.2) исключить $C_1, C_2, \dots, C_n$.

▷ **Пример 12.2.** Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $y = (C_1 + C_2x)e^x$.

Р е ш е н и е. Дифференцируя заданную функцию, находим, что

$$y' = C_2e^x + y,\ y'' = 2C_2e^x + y.$$

Исключая из этих двух равенств постоянную C_2, приходим к уравнению $y'' - 2y' + y = 0$. ▶

К дифференциальным уравнениям приводят ряд задач экономики, физики, биологии, экологии и т.п. Приведем некоторые из них.

▷ **Пример 12.3.** Из статистических данных известно, что для рассматриваемого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно. Найти закон изменения численности населения с течением времени. (Описать протекание демографического процесса.)

Р е ш е н и е. Пусть $y = y(t)$ — число жителей региона в момент времени t. Прирост населения Δy за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время, т.е.

$$\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky,$$

где $k = k_1 - k_2$. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем уравнение

$$y' = ky, \qquad \textbf{(12.3)}$$

представляющее математическую модель демографического процесса.

Решая это уравнение (см. § 12.4 а также пример **12.8**), получаем закон изменения численности населения

$$y = Ce^{kt}, \tag{12.4}$$

где C — постоянная, определяемая начальными условиями (численность населения в начальный момент времени). ▶

▷ **Пример 12.4.** Найти уравнения кривых, в каждой точке которых отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам точкой касания.

Р е ш е н и е. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка кривой указанного типа; $y = kx + b$ — касательная к кривой в точке M; $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ — точки пересечения касательной с осями абсцисс и ординат соответственно (см. рис. 12.1). По условию имеем $AM = BM$ и потому $b = 2y$ или $y - kx = 2y$. Так как угловой коэффициент касательной является производной, т.е. $k = y'$, то приходим к уравнению

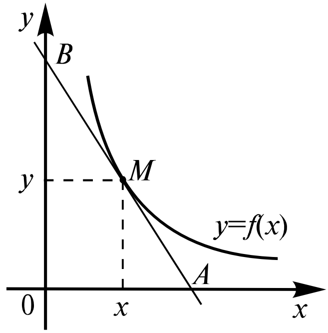


Рис. 12.1

$$y' = -\frac{y}{x}, \tag{12.5}$$

решая которое (см. § 12.5), получаем уравнение обратной пропорциональной зависимости

$$y = C/x, \tag{12.6}$$

где C — некоторое число. ▶

12.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения

Рассмотрим вопросы теории дифференциальных уравнений на примере уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, т.е. таких, которые допускают представление в виде

$$y' = f(x, y), \tag{12.7}$$

где f — некоторая функция двух переменных.

Мы будем обозначать через Γ множество точек плоскости Oxy, на котором функция $f(x, y)$ определена, дополнительно предполагая, что множество Γ является открытым. (Множество точек плоскости называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторую окрестность этой точки.)

Рассмотрим г е о м е т р и ч е с к и й с м ы с л уравнения (12.7). Производная функции y' представляет угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной к кривой $y = y\,(x)$ в точке с абсциссой x. Следовательно, уравнение (12.7) каждой точке $(x,\ y)$ плоскости Oxy задает направление $\operatorname{tg}\alpha = f\,(x,\ \ y)$ касательной к интегральной кривой $y = y\,(x)$, проходящей через эту точку. Говорят также, что уравнение (12.7) задает поле направлений в области $Г$ (см. рис. 12.2).

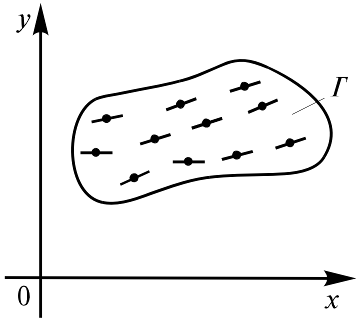


Рис. 12.2

Решить уравнение (12.7) — *значит найти семейство кривых, отвечающих заданному полю направлений.*

Перейдем теперь к теореме существования и единственности решения, играющей важную роль при описании решений дифференциального уравнения. (При формулировке этой теоремы нам потребуются некоторые понятия теории функций нескольких переменных. Необходимые определения можно найти в гл. 15.)

Теорема. *Пусть в дифференциальном уравнении* (12.7) *функция* $f\,(x,\ \ y)$ *и ее частная производная* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны на открытом множестве $Г$ координатной плоскости Oxy. Тогда:*

1. *Для всякой точки* (x_0, y_0) *множества $Г$ найдется решение* $y = y\,(x)$ *уравнения* (12.7), удовлетворяющее начальному условию $y_0 = y\,(\,x_0\,)$;

2. *Если два решения* $y = y_1\,(x)$ и $y = y_2\,(x)$ *уравнения* (12.7) *совпадают хотя бы для одного значения* $x = x_0$, *т.е. если* $y_1\,(\,x_0\,) = y_2\,(\,x_0\,)$, *то эти решения совпадают для всех тех значений переменной x, для которых они определены.*

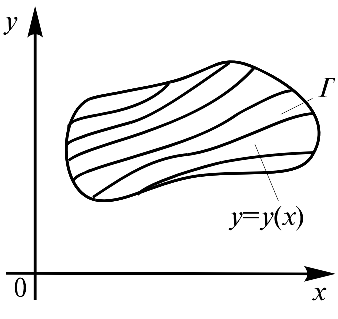


Рис. 12.3

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что *через каждую точку* (x_0, y_0) *множества $Г$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения* (12.7) (см. рис. 12.3).

Теорема устанавливает условия существования и единственности решения *задачи Коши* — задачи отыскания частного решения дифференциального уравнения (12.7), удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$.

▷ **Пример 12.5.** Решить уравнение

$$y' = y. \qquad \textbf{(12.8)}$$

Р е ш е н и е. В данном случае $f(x, y) = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ определены и непрерывны при любых x и y, и, следовательно, условия теоремы выполнены на всей плоскости Oxy.

Непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся в том, что каждая функция вида

$$y = Ce^x, \qquad \textbf{(12.9)}$$

где C — некоторое число, является решением уравнения (12.8). Покажем, что все решения уравнения (12.8) имеют такой вид при некотором значении постоянной C. Пусть $y = y(x)$ — некоторое решение уравнения (12.8), $x = x_0$ — точка, в которой это решение определено, и $y_0 = y(x_0)$. Положим $C = y_0 e^{-x_0}$. Тогда решения $y = y(x)$ и $y = Ce^x = y_0 e^{-x_0} e^x = y_0 e^{x - x_0}$ уравнения (12.8) совпадают при $x = x_0$, а потому согласно п. 2 теоремы совпадают для всех точек. ▶

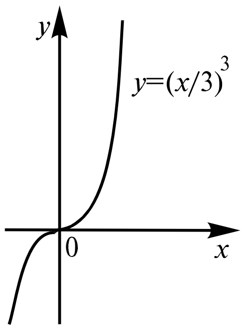


Рис. 12.4

Приведем пример уравнения, для которого не выполняется условие единственности решения, т.е. существует такая точка плоскости Oxy, через которую проходит более одной интегральной кривой. Пусть $y' = y^{2/3}$. Проверяем непосредственно, что $y = 0$ и $y = \left(\dfrac{x}{3}\right)^3$ — решения данного уравнения, проходящие через точку (0; 0) (см. рис. 12.4).

12.3. Элементы качественного анализа дифференциальных уравнений первого порядка

Дифференциальное уравнение (12.7) называется *автономным*, если функция f зависит только от переменной y, т.е. если уравнение имеет вид

$$y' = f(y). \qquad \textbf{(12.10)}$$

(Например, уравнение (12.8) — автономно.)

Уравнения такого типа часто встречаются на практике. Например, если дифференциальное уравнение описывает динамическое действие некоторого закона природы, то естественно предположить, что сам закон не будет изменяться с течением времени, и потому в запись правой части (12.10) время x не входит (см., например, задачу о росте населения в примере **12.3**).

Ниже мы будем предполагать, что для функции $f(y)$ выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решения уравнения (12.10) при произвольном значении переменной y, т.е. положим, что функция $f(y)$ имеет непрерывную производную при любом y (см. § 12.2). Пусть, кроме того, нули функции $f(y)$ (корни уравнения $f(y) = 0$) не имеют предельных точек, т.е. все они отстоят друг от друга не менее, чем на заданную положительную величину.

Будем предполагать, что уравнение (12.10) описывает процесс движения точки по прямой Oy, которая называется также *фазовой прямой* (переменная x обозначает время). В этом случае y' — это скорость движения точки. Согласно (12.10) она зависит только от координаты точки и не зависит от значения текущего момента времени.

Особую роль в проводимом анализе будут играть нули функции $f(y)$. Убедимся в том, что если $f(a) = 0$ и точка в некоторый момент времени имеет координату $y_0 = a$, то с течением времени x она не меняет своего положения на фазовой прямой (оси Oy). (Равно как и во все предшествующие моменты времени она находилась в этой же точке.) Действительно, проверяем подстановкой, что $y = a$ — решение уравнения (12.10). Но решение $y = a = \text{const}$ как раз и описывает точку, не меняющую с течением времени своего положения. Ввиду изложенных причин нули функции $f(y)$ называются также *положениями равновесия* или *стационарными точками*.

Пусть $a,\ b,\ c,\ \ldots$ нули функции $f(y)$. Прямые $y = a$, $y = b$, $y = c$, ... разбивают всю координатную плоскость на полосы, расположенные параллельно оси абсцисс. Рассмотрим особенности интегральных кривых, заполняющих одну из таких полос. Так как функция $f(y)$ непрерывна, то согласно (12.10) производная y' знакопостоянна на произвольном интервале между положениями равновесия. Поэтому все интегральные кривые, лежащие в одной полосе, задаются либо только возрастающими, либо только убывающими функциями.

▷ **Пример 12.6.** Построить семейства интегральных кривых уравнения (12.8).

Р е ш е н и е. В данном случае $f(y) = y$ и единственным нулем этой функции является $y = 0$. В результате вся координатная плоскость разбивается прямой $y = 0$ на две полуплоскости («полосы»). Решения (12.8) описываются функциями вида (12.9). При $C = 0$ получаем решение $y = 0$, отвечающее неподвижной точке. Для всех $C > 0$ имеем семейство монотонно возрастающих функций, для $C < 0$ — монотонно убывающих (см. рис. 12.5).

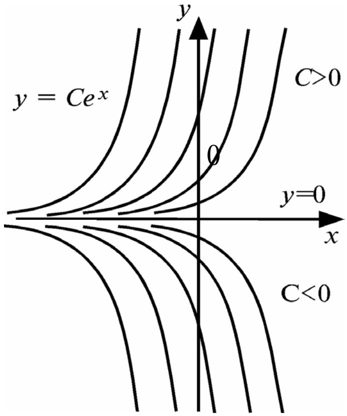


Рис. 12.5

Рассмотрим интегральные кривые, лежащие в выделенной полосе, например кривые $y = Ce^x$, где $C > 0$. Поскольку $Ce^{x-x_0} = C_1e^x$, где $C_1 = Ce^{-x_0} > 0$, то при п а р а л л е л ь н о м п е р е н о с е интегральной кривой вдоль оси абсцисс вновь получается интегральная кривая, причем из т о г о ж е семейства.

Пусть $y = C_1e^x$ и $y = C_2e^x$ — две интегральные кривые указанного семейства и $C_1 > 0$, $C_2 > 0$. Перенося вторую кривую вдоль оси абсцисс на $x_0 = \ln(C_2/C_1)$ единиц, приходим к первой кривой. Действительно, $y = C_2e^{x-x_0} = C_2e^{\ln(C_1/C_2)}e^x = \dfrac{C_2C_1}{C_2}e^x = C_1e^x$. Таким образом, *все интегральные кривые одной полосы получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси абсцисс.*

Отметим также, что *прямая* $y = 0$, *отвечающая неподвижной точке дифференциального уравнения, является горизонтальной асимптотой интегральных кривых этого уравнения.* ▶

Можно доказать, что утверждения, сформулированные при решении примера **12.6**, остаются справедливыми в общем случае.

Описывая движение точки по фазовой прямой, мы полностью сохраним качественную информацию об этом движении, если вместо интегральных кривых изобразим лишь возможные траектории точки с указанием направления движения. Графическое изображение этих траекторий, называемых *фазовыми*, дает *фазовый портрет* автономного уравнения (12.10). Например, фазовый портрет уравнения $y' = y$ (см. пример **12.6**) изображен на рис. 12.6.

В данном случае фазовая прямая распадается на три траектории: интервалы $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$ и положение равновесия $y = 0$.

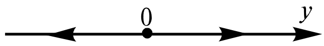


Рис. 12.6

▷ **Пример 12.7.** Найти фазовый портрет уравнения $y' = 1 - y^2$.

Р е ш е н и е. Решая уравнение $1 - y^2 = 0$, получаем положения равновесия: $y = \pm 1$. Траекторий в данном случае будет пять: интервалы $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 1)$, $(1;\ +\infty)$ и точки $y = \pm 1$. Из вида решаемого уравнения следует, что если $y > 1$ или $y < -1$, то $y' < 0$, решение $y = y(x)$ — убывающая функция, и, следовательно, точка движется по фазовой прямой с уменьшением своей координаты (влево).

Если $-1 < y < 1$, то $y' > 0$, и точка движется вправо. Окончательный фазовый портрет изображен на рис. 12.7. ▶

Направления движения точки вблизи ее положения равновесия определяют тип положения равновесия. Например (см. рис. 12.7), находясь в достаточной близости от точки $y = 1$, подвижная точка будет лишь приближаться к точке равновесия $y = 1$.

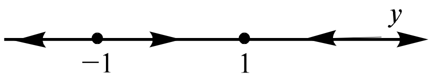


Рис. 12.7

Такие положения равновесия называются *устойчивыми.* Наоборот, находясь в достаточной близости от точки $y = -1$, подвижная точка будет лишь удаляться от положения равновесия $y = -1$. Такие положения равновесия называются *неустойчивыми.*

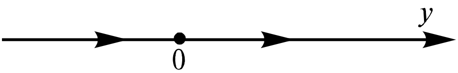


Рис. 12.8

Возможен также третий тип точек равновесия — так называемые точки *полуустойчивого равновесия.* (Например, точка $y = 0$ уравнения $y' = y^2$ (см. рис. 12.8) или точка $y = 0$ уравнения $y' = y^4 - y^2$ (см. рис. 12.9).

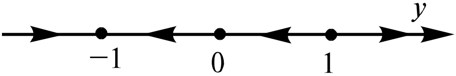


Рис. 12.9

12.4. Неполные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение (12.7) первого порядка называется *неполным*, если функция f явно зависит либо только от x, либо только от y. Рассмотрим решения таких уравнений.

1. Уравнение $y' = f(x)$ или $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$. Перепишем уравнение в виде $dy = f(x)\,dx$, откуда его решение $y = \int f(x)\,dx$.

2. Уравнение

$$y' = f(y). \qquad \textbf{(12.11)}$$

Его решение удобно искать в виде $x = x(y)$, т.е. считать, что переменная y обозначает независимую переменную, а переменная x — функцию. (Поскольку $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то уравнение (12.7) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

и, ввиду инвариантности формы дифференциала, считать переменные x и y равноправными.) В этом случае из (12.11) получаем $\dfrac{dy}{f(y)} = dx$ и

$$x = \int \frac{dy}{f(y)}. \qquad \textbf{(12.12)}$$

▷ **Пример 12.8.** Решить уравнение (12.8):

$$y' = y.$$

Р е ш е н и е. Найдем решение в виде $x = x(y)$. Полагая, что $y \neq 0$ из (12.8) и (12.12), получаем $x = \displaystyle\int \frac{dy}{y}$ и

$$X = \ln|y| + C_1, \qquad \textbf{(12.13)}$$

откуда $|y| = e^{-C_1}e^{x}$ и $y = \pm e^{-C_1}e^{x}$. Полагая, что произвольная постоянная $C = \pm e^{-C_1}$, получим $y = Ce^{x}$. (Заметим, что полученное общее решение уравнения при $C = 0$ дает частное решение $y = 0$, «потерянное» в процессе преобразований.) ▶

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \qquad \textbf{(12.14)}$$

или в виде

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0, \qquad \textbf{(12.15)}$$

где $f(x)$, $M(x)$, $P(x)$ — некоторые функции переменной x; $g(y)$, $N(y)$, $Q(y)$ — функции переменной y.

Для решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной x окажутся в одной части равенства, а переменной y — в другой. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства. Например, из (12.14) следует, что $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$ и $\int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$.

Выполняя интегрирование, приходим к решению уравнения (12.14).

▷ **Пример 12.9.** Решить уравнение $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$.

Р е ш е н и е. Разделив левую и правую части уравнения на выражение $x\sqrt{y^2+1}$ (при $x \neq 0$), приходим к равенству $\frac{dx}{x} = \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}}$. Интегрируя, получим

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}} \qquad \textbf{(12.16)}$$

или

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C_1 \qquad \textbf{(12.17)}$$

(так как интеграл в левой части (12.16) табличный, а интеграл в правой части может быть найден, например, заменой $\sqrt{y^2+1} = t$, $y^2+1 = t^2$, $2y\,dy = 2t\,dt$ и $\int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}} = \int\frac{t\,dt}{t} = \int dt =$ $= t + C_1 = \sqrt{y^2+1} + C_1$).

Решение (12.17) перепишем в виде $x = \pm e^{C_1} e^{\sqrt{y^2+1}}$ или $x = Ce^{\sqrt{y^2+1}}$, где $C = \pm e^{C_1}$. ▶

Уравнения вида

$$y' = f(ax + by), \tag{12.18}$$

где a и b — некоторые числа, приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$ (или $z = ax + by + c$, где c — некоторое число).

▷ **Пример 12.10.** Решить уравнение

$$(x + 2y)y' = 1. \tag{12.19}$$

Р е ш е н и е. Положим $z = x + 2y$. Тогда $z' = 1 + 2y'$, откуда $y' = \frac{1}{2}(z'-1)$ и исходное уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{2}z(z' - 1) = 1,$$

который допускает разделение переменных. Действительно, выражая из последнего равенства z', получаем

$$z' = \frac{z+2}{z}$$

и, следовательно,

$$\frac{z\,dz}{z+2} = dx.$$

Выполним почленное интегрирование данного равенства:

$$\int dx = \int \frac{z\,dz}{z+2} \text{ или } x = z - 2\ln|z+2| + C_1$$

(ибо $\int \frac{z\,dz}{z+2} = \int\left(1 - \frac{2}{z+2}\right)dz = \int dz - 2\int \frac{dz}{z+2} = z - 2\ln|z+2| + C_1$).

Возвращаясь к первоначальным переменным, получаем

$$x = x + 2y - 2\ln|x + 2y + 2| + C_1$$

или

$$y - \ln|x + 2y + 2| = C, \tag{12.20}$$

где $C = -\frac{1}{2}C_1$.

Предлагаем читателю в качестве упражнения убедиться, что неявные функции (12.20) действительно удовлетворяют исходному уравнению (12.19). ▶

12.5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если оно может быть представлено в виде

$$y' = g\,(y/x), \tag{12.21}$$

где g — некоторая функция (одной переменной).

Например, уравнение $y' = \dfrac{y}{x} \cos \ln \dfrac{y}{x}$ — однородное.

Понятие однородного дифференциального уравнения связано с однородными функциями. Функция $y = f(x, y)$ называется *однородной степени* k (по переменным x и y), если для произвольного числа α выполняется равенство

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x, y). \tag{12.22}$$

▷ **Пример 12.11.** Выяснить, являются ли однородными следующие функции:

а) $f(x, y) = x^2 - xy$; б) $f(x, y) = \dfrac{2x + 3y}{x - y}$; в) $f(x, y) = xy + 1$.

Р е ш е н и е. а) Так как $f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)^2 - (\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2(x^2 - xy) = \alpha^2 f(x, y)$, то данная функция однородная степени 2.

б) Так как $f(\alpha x, \alpha y) = \dfrac{2(\alpha x) + 3(\alpha y)}{\alpha x - \alpha y} = \dfrac{2x + 3y}{x - y} = \alpha^0 f(x, y)$, то данная функция однородная степени 0.

в) Так как $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 xy + 1 \neq \alpha^k (xy + 1)$ ни для какого k, то данная функция неоднородная. ▶

Если функция $f(x, y)$ однородная степени 0, то уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{12.23}$$

может быть сведено к однородному. Действительно, положим $\alpha = 1/x$. Тогда в силу (12.22) при $k = 0$ $f(x, y) = f\left(\dfrac{1}{x} \cdot x, \dfrac{1}{x} \cdot y\right) = f(1, y/x)$. Полагая, что $g\,(y/x) = f(1, y/x)$, приводим уравнение (12.23) к виду (12.21).

Из доказанного вытекает, что если дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0, \qquad \textbf{(12.24)}$$

где функции $M(x,\ y)$ и $N(x,\ y)$ являются однородными степени k, то это уравнение может быть сведено к однородному, так как из (12.24) получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

а функция, стоящая в правой части последнего равенства, однородная степени 0.

Рассмотрим теперь способ решения дифференциального уравнения (12.21). Убедимся, что введение в рассмотрение вспомогательной функции z от переменной x (замена переменной) $z = y/x$ позволяет свести это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, так как $y = zx$, то $y\,' = z'x + z$, поэтому уравнение (12.21) приобретает следующий вид

$$z\,'x + z = g\ (z),$$

откуда получим, что

$$\frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x}. \qquad \textbf{(12.25)}$$

▷ **Пример 12.12.** Решить уравнение

$$y\,' = \frac{x + 2y}{x}. \qquad \textbf{(12.26)}$$

Р е ш е н и е. Так как $\dfrac{x+2y}{x} = 1 + 2y/x$, то уравнение (12.26) имеет вид (12.21) при $g(y/x) = 1 + 2y/x$. Положим $z = y/x$. Тогда $g\ (z) - z = 1 + 2z - z = 1 + z$ и, согласно (12.25), имеем

$$\frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя почленно последнее равенство, получаем

$$\ln|\ 1 + z\ | = \ln|\ x\ | + C_1,$$

откуда $|1 + z| = e^{C_1}\,|x|$ или $1 + z = Cx$, где $C = \pm e^{C_1}$. Возвращаясь к первоначальным переменным, получим $1 + \dfrac{y}{x} = Cx$, откуда $y = (Cx - 1)\ x$. ▶

12.6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно имеет вид

$$y' + f(x)y = g(x), \qquad \textbf{(12.27)}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые (непрерывные) функции переменной x. В случае, когда функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Рассмотрим один из возможных способов решения уравнения (12.27): будем искать решение в виде $y = u(x)v(x)$ (тем самым искомыми становятся функции $u(x)$ и $v(x)$, одна из которых может быть выбрана произвольно, а другая — должна определяться из уравнения (12.27).

Так как $y' = u'v + uv'$, то из (12.27) следует $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$ или

$$vu' + u(v' + f(x)v) = g(x). \qquad \textbf{(12.28)}$$

Найдем сначала какое-либо частное решение $v = v(x)$ уравнения

$$v' + f(x)v = 0. \qquad \textbf{(12.29)}$$

Тогда (см. (12.28)) функция $u = u(x)$ — решение уравнения

$$vu' = g(x). \qquad \textbf{(12.30)}$$

Тем самым решение исходного уравнения (12.27) сводится к решению двух уравнений с разделяющимися переменными (см. (12.29) и (12.30)).

▷ **Пример 12.13.** Решить уравнение

$$xy' - 2y = 2x^4. \qquad \textbf{(12.31)}$$

Р е ш е н и е. Разделив левую и правую части (12.31) на x, приходим к линейному неоднородному уравнению:

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3.$$

Пусть $y = uv$, т.е. $y' = u'v + uv'$, тогда уравнение (12.31) примет вид $u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3$ или

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = 2x^3. \qquad \textbf{(12.32)}$$

Положим $v' - \frac{2}{x}v = 0$ или $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v$, откуда $\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, найдем какое-либо частное решение этого уравнения, например, при $C = 0$ $\ln|v| = 2\ln|x|$ и $v = x^2$. При $v = x^2$ равенство (12.32) обратится в уравнение $u'x^2 = 2x^3$, или $\frac{du}{dx} = 2x$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем $u = x^2 + C$. Тогда окончательно имеем $y = uv = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2$. ▶

12.7. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения второго порядка может быть сведено к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка (тогда говорят, что данное дифференциальное уравнение *допускает понижение порядка*).

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' = f(x),$$

то оно решается последовательным интегрированием (см. пример **12.1**).

Если в запись уравнения не входит искомая функция $y(x)$, т.е. оно имеет вид

$$G(x, y', y'') = 0,$$

то такое уравнение можно решить, найдя сначала вспомогательную функцию $z = y'$.

▷ **Пример 12.14.** Решить уравнение $xy'' + y' = 0$.

Р е ш е н и е. Положим $z = y'$. Тогда $y'' = z'$ и исходное уравнение принимает вид $xz' + z = 0$.

Откуда $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$. Интегрируя, приходим к решению $z = C_1/x$. Возвращаясь к первоначальной функции, получаем уравнение $y' = C_1/x$, или $dy = \frac{C_1dx}{x}$, решая которое, окончательно имеем $y = C_1 \ln|x| + C_2$. ▶

Если в уравнение не входит переменная x, т.е. оно имеет вид

$$G(y,\ y',\ y'') = 0,$$

то порядок уравнения можно понизить, если за независимую переменную взять y, а за неизвестную функцию — $z = z(y) = y'$.

▷ **Пример 12.15.** Решить уравнение $2yy'' = (y')^2 + 1$.

Р е ш е н и е. Положим $z = z(y) = y'$. Тогда $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'z$, и исходное уравнение принимает вид

$$2yzz' = z^2 + 1.$$

Данное уравнение — с разделяющимися переменными: $\frac{2zdz}{z^2+1} = \frac{dy}{y}$ или $\frac{d(z^2+1)}{z^2+1} = \frac{dy}{y}$. Выполняя интегрирование, получаем $\ln(z^2+1) = \ln|y| + C$ или, полагая $C = \ln C_1$, $z = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Так как $z = y'$, то приходим к следующему уравнению относительно функции $y(x)$

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1y-1}} = dx.$$

Выполняя интегрирование, получаем $\pm\sqrt{C_1y-1} = \frac{C_1}{2}(x + C_2)$ или

$$C_1y - 1 = \frac{C_1^2}{4}(x + C_2)^2. ▶$$

12.8. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x), \qquad \textbf{(12.33)}$$

где p, q — некоторые действительные числа, $r(x)$ — некоторая функция. Если $r(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad \textbf{(12.34)}$$

называется *однородным*; в противном случае при $r(x) \not\equiv 0$ уравнение (12.33) называется *неоднородным*.

Можно доказать, что существует единственное решение уравнения (12.33), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = z_1$, $y'(x_0) = z_2$, где x_0, z_1, z_2 — некоторые (действительные) числа.

Рассмотрим сначала **решение линейного однородного уравнения** (12.34) с постоянными коэффициентами.

Напомним, что линейной комбинацией функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ с коэффициентами C_1 и C_2 называется выражение вида $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. Если линейная комбинация функций $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ равна нулевой функции только тогда, когда коэффициенты C_1 и C_2 равны нулю, то функции y_1 и y_2 называются *линейно независимыми*, в противном случае — *линейно зависимыми*.

▷ **Пример 12.16.** Убедиться в линейной независимости следующих функций:

а) $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$; б) $e^{\lambda x}$ и $xe^{\lambda x}$; в) $e^{\alpha x}\sin\beta x$ и $e^{\alpha x}\cos\beta x$, где $\beta \neq 0$.

Р е ш е н и е. а) Если $C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} \equiv 0$, то $C_1 \equiv -C_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}$, но так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то функция, стоящая в правой части последнего равенства, является постоянной, только если $C_2 = 0$ и, следовательно, $C_1 = 0$.

б) Тождественное равенство $C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x} \equiv 0$ возможно, только если функция $C_1 + C_2x$ является нулевой, откуда следует $C_1 = C_2 = 0$.

в) Предположим, что $C_1e^{\alpha x}\sin\beta x + C_2e^{\alpha x}\cos\beta x \equiv 0$.

Тогда $C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x \equiv 0$. Если хотя бы один из коэффициентов C_1 или C_2 отличен от нуля, то нетрудно подобрать такое значение переменной x, что функция в левой части последнего равенства отлична от нуля (например, $x = 0$ или $x = \frac{\pi}{2\beta}$).

Поскольку это невозможно, то $C_1 = C_2 = 0$. ▶

Говоря о решениях уравнения (12.34), отметим прежде всего, что они обладают, как говорят, структурой линейного пространства: если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (12.34), то их линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \qquad \textbf{(12.35)}$$

где C_1 и C_2 — некоторые числа, также является решением этого уравнения. Действительно, подставляя функцию (12.35) в (12.34), получаем

$$y'' + py' + qy = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$
$$= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Другими словами, формула (12.35) задает способ построения новых решений уравнения (12.34) из уже имеющихся. Возникает вопрос: сколько и какие решения уравнения (12.34) следует задать, чтобы с их помощью можно было описать все решения этого уравнения? Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — *линейно независимые частные решения уравнения* (12.34)*, то общее решение этого уравнения является линейной комбинацией этих частных решений, т.е. имеет вид* (12.35) *для некоторых действительных чисел* C_1 *и* C_2.

Итак, чтобы найти общее решение уравнения (12.34), надо знать два его частных решения y_1 и y_2.

Будем искать решение уравнения (12.34) в форме

$$y = e^{\lambda x}, \qquad \textbf{(12.36)}$$

где λ — некоторое (действительное) число (если такое существует). Так как $(e^{\lambda x})'' + p(e^{\lambda x})' + qe^{\lambda x} = (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x}$, то функция (12.36) является решением уравнения (12.34), если число λ есть корень уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad \textbf{(12.37)}$$

которое называется *характеристическим уравнением* исходного уравнения (12.34).

Описание решений уравнения (12.34) зависит от того, имеет ли соответствующее характеристическое уравнение (12.37) два различных корня, один корень или не имеет действительных корней. Справедлива теорема.

Теорема 2. 1. *Пусть характеристическое уравнение* (12.37) *уравнения* (12.34) *имеет действительные корни* λ_1 и λ_2, *причем* $\lambda_1 \neq \lambda_2$. *Тогда общее решение уравнения* (12.34) *имеет вид*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad \textbf{(12.38)}$$

где C_1 и C_2 *— некоторые числа.*

2. *Если характеристическое уравнение* (12.37) *имеет один корень* λ (*кратности* 2), *то общее решение уравнения* (12.34) *имеет вид*

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \qquad \textbf{(12.39)}$$

где C_1 и C_2 *— некоторые числа.*

3. *Если характеристическое уравнение* (12.37) *не имеет действительных корней, то общее решение уравнения* (12.34) *имеет вид*

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \qquad \textbf{(12.40)}$$

где $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{q - p^2/4}$, C_1, C_2 *— некоторые числа.*

□ Принимая во внимание теорему 1 и результаты, полученные в примере **12.16,** для доказательства достаточно проверить, что функции, линейные комбинации которых рассматриваются в п. а, б, в, действительно являются решениями уравнения (12.34) при сделанных предположениях. В случае функций $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ из п. а и функции $e^{\lambda x}$ из п. б справедливость этого утверждения вытекает из замечания о функциях вида (12.36) (см. выше). Проверку остальных случаев мы оставляем читателю в качестве упражнения. ■

▷ **Пример 12.17.** Найти частное решение следующих уравнений при указанных начальных условиях:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$;

б) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

в) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Р е ш е н и е. а) Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, находим его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тогда общее решение данного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Найдем такие значения постоянных C_1 и C_2, при которых выполняются заданные начальные условия. Так как $y(0) = C_1 + C_2$ и $y'(0) = C_1 + 2C_2$, то постоянные C_1 и C_2 находим, решая систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 + 2C_2 = 4. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 2, C_2 = 1$.

По теореме о существовании и единственности решения уравнения вида (12.33) найденное частное решение $y = 2e^x + e^{2x}$ — искомое.

б) Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Согласно п. 2 теоремы 2 общее решение дифференциального уравнения (12.34) имеет вид $y = (C_1 + C_2 x)e^x$. Так как $y(0) = 1$, то $C_1 = 1$ и, поскольку $y' = y + C_2 e^x$ и $y'(0) = 0$, то $C_2 = -1$. Таким образом, окончательно получаем частное решение

$$y = (1 - x)e^x.$$

в) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ не имеет действительных корней. В этом случае согласно п. 3 теоремы 2 общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x \quad (\alpha = \beta = 1).$$

Так как $y(0) = 1$, то $C_2 = 1$. Найдем $y' = (C_1 - C_2)e^x \sin x + (C_1 + C_2)e^x \cos x$. Учитывая, что $y'(0) = 1$, получим $C_1 = 0$. Таким образом, приходим к частному решению $y = e^x \cos x$. ▶

Перейдем теперь к **решению линейного неоднородного уравнения** (12.33) с постоянными коэффициентами.

Это уравнение может быть, в частности, решено *методом вариации произвольных постоянных*, который состоит в следующем. Сначала находится общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ однородного уравнения (12.34), имеющего ту же левую часть, что и исходное неоднородное уравнение (12.33). Затем решение уравнения (12.33) находится в виде $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, т.е. предполагается, что постоянные C_1 и C_2 являются функциями независимой переменной x. При этом функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ могут быть найдены как решения системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 & + & C_2' y_2 & = & 0, \\ C_1' y_1' & + & C_2' y_2' & = & r. \end{cases} \qquad \textbf{(12.41)}$$

▷ **Пример 12.18.** Решить уравнение

$$y'' - 3\,y' + 2y = e^x. \qquad \textbf{(12.42)}$$

Р е ш е н и е. Решая соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 3\,y' + 2y = 0. \qquad \textbf{(12.43)}$$

(см. пример **12.17 а**), находим

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Полагая теперь, что C_1 и C_2 — функции переменной x, найдем первые производные этих функций, решая систему (12.41)

$$\begin{cases} C_1' e^x & + C_2' e^{2x} & = 0, \\ C_1' e^x & + C_2' 2e^{2x} & = e^x. \end{cases}$$

Найдем $C_1' = -1$, $C_2' = e^{-x}$. Полученные дифференциальные уравнения — с разделяющимися переменными. Решая эти уравнения, получаем $C_1 = -x + C_3$, $C_2 = -e^{-x} + C_4$, где C_3, C_4 — некоторые постоянные. Таким образом, окончательно решение уравнения имеет вид

$$y = (-x + C_3)\,e^x + (-e^{-x} + C_4)\,e^{2x} =$$

$$= C_3\,e^x + C_4\,e^{2x} + (-x - 1)\,e^x. \ ▶$$

Обратим внимание на структуру полученного решения. Первые два слагаемых — это общее решение однородного уравнения (12.43), соответствующего исходному дифференциальному уравнению (12.42). Последнее слагаемое, как нетрудно убедиться непосредственным вычислением, — частное решение исходного уравнения (12.42). Аналогичное утверждение справедливо и в общем случае, т.е. справедлива теорема.

Теорема 3. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения* (12.33) *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* (12.34) *и частного решения исходного неоднородного уравнения* (12.33).

Следует отметить, что метод вариации произвольных постоянных достаточно сложен, поэтому в ряде случаев целесообразно использовать другие методы решения, основанные на теореме 3. Сначала, как и при методе вариации произвольных постоянных, находится общее решение однородного дифференциального уравнения (12.34), а затем отыскивается частное решение неоднородного уравнения (12.33). При этом вид частного решения устанавливается по виду правой части уравнения (12.33), и задача сводится к отысканию коэффициентов этого частного решения.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть правая часть уравнения (12.33) является многочленом степени m, т.е. имеет вид

$$r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + \alpha_m x^m,$$

где a_0, $a_1, ...,$ a_{m} — действительные числа и $a_m \neq 0$. Тогда частное решение уравнения (12.33) следует искать в виде

$$u(x) = (C_0 + C_1x + ... + C_mx^m)\, x^s,$$

т.е. в виде произведения многочлена той же степени m на x^s, где $s = 0$, если $q \neq 0$ (см. (12.37)), $s = 1$, если $q = 0$ и $p \neq 0$ и $s = 2$, если $q = p = 0$. (Другими словами, показатель степени s равен к р а т н о с т и значения $x = 0$ как корня характеристического многочлена (12.37).)

▷ **Пример 12.19.** Найти частное решение уравнения

$$y'' - 3y' = 1 + 6x. \qquad \textbf{(12.44)}$$

Р е ш е н и е. По сформулированному правилу частное решение уравнения (12.44) следует искать в виде

$$u(x) = (C_0 + C_1x)\, x. \qquad \textbf{(12.45)}$$

Найдем значения параметров C_0 и C_1 в данном выражении для $u(x)$. Дифференцируя (12.45), получаем

$$u'(x) = C_0 + 2C_1x, \quad u''(x) = 2C_1.$$

Так как $u(x)$ — решение уравнения (12.44), то значения C_0 и C_1 должны быть такими, что равенство $u'' - 3u' = 1 + 6x$, т.е.

$$2C_1 - 3\,(C_0 + 2C_1x) = 1 + 6x$$

или

$$(2C_1 - 3C_0) - 6C_1x = 1 + 6x, \qquad \textbf{(12.46)}$$

будет удовлетворяться тождественно, т.е. при всех x.

Поэтому уравнение (12.46) равносильно системе

$$\begin{cases} 2C_1 - 3C_0 = 1, \\ \quad -6C_1 = 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $C_0 = C_1 = -1$, т.е. искомое частное решение уравнения (12.44)

$$u(x) = -x - x^2. \quad \blacktriangleright$$

2. Пусть правая часть уравнения (12.33) имеет вид

$$r(x) = Ae^{\alpha x},$$

где α и A — некоторые действительные числа.

Тогда частное решение уравнения (12.33) следует искать в виде

$$u(x) = C_0 x^s e^{\alpha x}, \qquad \textbf{(12.47)}$$

где показатель степени s равен кратности значения $x = \alpha$ как корня характеристического многочлена (12.37).

$\triangleright$ **Пример 12.20.** Найти частные решения уравнений:

а) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$; б) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$;

в) $y'' - 2y' + y = 6e^x$.

Р е ш е н и е. а) В данном случае $\alpha = 3$ и поскольку такого значения нет среди корней ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$) характеристического уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, то $s = 0$. Таким образом, частное решение уравнения (а) будем искать в виде $u = C_0 e^{3x}$.

Тогда $u' = 3C_0 e^{3x}$, $u'' = 9C_0 e^{3x}$.

Подставляя выражения u'', u', u в уравнение (а), приходим к равенству

$$9C_0 e^{3x} - 9C_0 e^{3x} + 2C_0 e^{3x} = 2e^{3x}$$

или

$$2C_0 e^{3x} = 2e^{3x},$$

которое должно удовлетворяться тождественно. Поэтому $C_0 = 1$ и искомое частное решение $u = e^{3x}$.

б) Здесь $\alpha = 2$ и это значение совпадает с одним из двух различных корней ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$) соответствующего характеристического уравнения. Поэтому $s = 1$, и частное решение уравнения (б) будем искать в виде $u = C_0 x e^{2x}$.

Подставляя выражения u и ее производных в уравнение (б), получим (после преобразований) $u = xe^{2x}$.

в) В данном случае $\alpha = 1$. Одновременно корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ уравнения (в) являются $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (т.е. значение $\lambda = 1$ является корнем кратности 2). Поэтому $s = 2$, и частное решение уравнения (в) следует искать в виде $u = C_0 x^2 e^{2x}$.

Представляя выражение для u и ее производных в уравнение (в), получим после преобразований $u = 3x^2e^x$. ▶

3. Пусть правая часть уравнения (12.33) имеет вид

$$r(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x,$$

где a, b, β — некоторые действительные числа и $\beta \neq 0$.

Тогда частное решение уравнения (12.33) следует искать в виде:

$$u(x) = x^s(C_0\cos\beta x + C_1\sin\beta x),$$

где $s = 1$, если одновременно выполнены условия $p = 0$ (см. 12.37), $q > 0$, $\beta = \sqrt{q}$, и $s = 0$ в остальных случаях. (Условия случая $s = 1$ равносильны требованию, чтобы значение β в выражении $r(x)$ было таково, что комплексное число[1] $i\beta$ было одним из корней характеристического уравнения (12.33).)

▷ **Пример 12.21.** Найти частное решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x. \qquad \textbf{(12.48)}$$

Р е ш е н и е. По сформулированному правилу частное решение в данном случае следует искать в виде

$$u = C_0\cos x + C_1\sin x.$$

Найдем $u' = -C_0\sin x + C_1\cos x$, $u'' = -C_0\cos x - C_1\sin x$.

Подставляя выражения u'', u', u в уравнение (12.48), приходим к равенству

$$(-3C_1 + C_0)\cos x + (-C_1 + 3C_0 + 2C_1)\sin x = \sin x,$$

которое должно удовлетворяться тождественно.

Учитывая, что $\sin x \equiv 0\cdot\cos x + 1\cdot\sin x$, получим систему:

$$\begin{cases} -3C_1 + C_0 = 0 \\ C_1 + 3C_0 = 1, \end{cases}$$

откуда $C_0 = 0{,}3$, $C_1 = 0{,}1$ и, следовательно, искомое выражение имеет вид $u = 0{,}3\cos x + 0{,}1\sin x$.

Рассмотренные случаи различных выражений правой части уравнения (12.33) являются частными случаями функции вида

$$r(x) = e^{\alpha x}(f(x)\cos\beta x + g(x)\sin\beta x), \qquad \textbf{(12.49)}$$

где $f(x)$, $g(x)$ — многочлены (с действительными коэффициентами);

α, β — некоторые (действительные) числа.

---

[1] Комплексные числа рассмотрены в гл. 16.

Можно доказать, что частное решение уравнения (12.33) с правой частью (12.49) следует искать в виде

$$u = x^s e^{\alpha x}(v(x)\cos\beta x + w(x)\sin\beta x), \qquad \textbf{(12.50)}$$

где s равно кратности корня $\alpha + i\beta$ характеристического многочлена (12.37); $v(x)$, $w(x)$ — многочлены, степень которых равна наибольшей из степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ в выражении (12.49). Коэффициенты многочленов $v(x)$ и $w(x)$ находятся из системы линейных уравнений, получаемой после подстановки решения (12.50) и его производных в уравнение (12.33).

З а м е ч а н и е. Если правая часть $r(x)$ уравнения (12.33) является суммой некоторых функций, т.е.

$$r(x) = r_1(x) + r_2(x) + ... + r_k(x),$$

то для нахождения частного решения такого уравнения достаточно сложить частные решения $u_i(x)$ уравнений

$$y'' + py' + qy = r_i(x), \text{ где } i = 1, 2, ..., k, \text{ т.е.}$$
$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_k(x).$$

▷ **Пример 12.22.** Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x} + e^{2x} + \sin x. \qquad \textbf{(12.51)}$$

Р е ш е н и е. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Получим (см. пример **12.18**) $\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Учитывая замечание (см. выше), частное решение u дифференциального уравнения (12.51) будет равно сумме частных решений уравнений

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}, \quad y'' - 3y' + 2y = e^{2x}, \; y'' - 3y' + 2y = \sin x,$$

найденных в примерах **12.20** (а, б), **12.21,** т.е.

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) = e^{3x} + xe^{2x} + 0{,}3\cos x + 0{,}1\sin x.$$

На основании теоремы 3 общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y = \tilde{y} + u = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{3x} + xe^{2x} + 0{,}3\cos x + 0{,}1\sin x. \blacktriangleright$$

12.9. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике

Дифференциальные уравнения находят достаточно широкое применение в моделях экономической динамики, в которых отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени.

Рассмотрим некоторые (простейшие) задачи макроэкономической динамики.

Задача 1. Пусть $y(t)$ — объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени t. Будем полагать, что вся производимая отраслью продукция реализуется по некоторой фиксированной цене p, т.е. выполнено условие ненасыщаемости рынка. Тогда доход к моменту времени t составит $Y(t) = py(t)$.

Обозначим через $I(t)$ величину инвестиций, направляемых на расширение производства. В модели естественного роста полагают, что скорость выпуска продукции (акселерация) пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$y'(t) = lI(t). \qquad \textbf{(12.52)}$$

(Здесь мы пренебрегаем временем между окончанием производства продукции и ее реализацией, т.е. считаем, что инвестиционный лаг равен нулю.)

Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получим

$$I(t) = mY(t) = mpy(t), \qquad \textbf{(12.53)}$$

где коэффициент пропорциональности m (так называемая норма инвестиций) — постоянная величина, $0 < m < 1$.

Подставляя последнее выражение (12.53) для $I(t)$ в (12.52), приходим к уравнению

$$y' = ky, \qquad \textbf{(12.54)}$$

где $k = mpl$.

Полученное дифференциальное уравнение — с разделяющимися переменными (см. § 12.4). Решая его, приходим к функции $y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$, где $y_0 = y(t_0)$.

Заметим, что уравнение (12.54) описывает также рост народонаселения (демографический процесс, см. § 12.1), динамику роста цен при постоянной инфляции, процесс радиоактивного распада и др.

На практике условие насыщаемости рынка может быть принято только для достаточно узкого временного интервала. В общем случае кривая спроса, т.е. зависимость цены p реализованной продукции от ее объема y является убывающей функцией $p = p(y)$ (с увеличением объема произведенной продукции ее цена падает в результате насыщения рынка). Поэтому модель роста в условиях конкурентного рынка примет вид

$$y' = mlp(y)\,y, \qquad \textbf{(12.55)}$$

оставаясь по-прежнему уравнением с разделяющимися переменными.

Так как все сомножители в правой части уравнения (12.55) положительны, то $y' > 0$, и это уравнение описывает возрастающую функцию $y\,(t)$. При исследовании функции $y\,(t)$ на выпуклость естественно используется понятие эластичности функции. Действительно, из (12.55) следует, что

$$y'' = mly'\left(\frac{dp}{dy}y + p\right).$$

Напомним, что эластичность спроса (относительно цены) определяется формулой $E_p(y) = \dfrac{p}{y}\dfrac{dy}{dp}$ (см. § 7.6). Тогда выражение для y'' можно записать в виде

$$y'' = mly'p\left(\frac{1}{E_p(y)} + 1\right)$$

и условие $y'' = 0$ равносильно равенству $E_p(y) = -1$.

Таким образом, если спрос эластичен, т.е. $|E_p(y)| > 1$ или $E_p(y) < -1$, то $y'' > 0$ и функция $y\,(t)$ выпукла вниз; в случае, если спрос не эластичен, т.е. $|E_p(y)| < 1$, или $-1 < E_p(y) < 1$, то $y'' < 0$ и функция $y\,(t)$ выпукла вверх.

▷ **Пример 12.23.** Найти выражение для объема реализованной продукции $y = y\,(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задается уравнением $p(y) = 2 - y$, норма акселерации $1/l = 2$, норма инвестиций $m = 0{,}5$, $y(0) = 0{,}5$.

Р е ш е н и е. Уравнение (12.55) в этом случае принимает вид

$$y' = (2 - y)y$$

или

$$\frac{dy}{(2-y)y} = dt\,.$$

Выполняя почленное интегрирование, получаем

$$\ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = -2t + C_1$$

или

$$\frac{y-2}{y} = Ce^{-2t}, \qquad \textbf{(12.56)}$$

где $C = \pm e^{C_1}$.

Учитывая, что $y(0) = 0{,}5$, получаем, что $C = -3$. Выражая теперь y из (12.56), окончательно имеем

$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}.$$

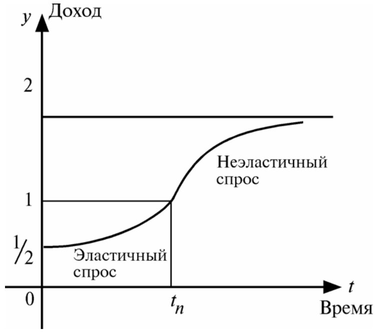


Рис. 12.10

График данной функции схематично изображен на рис. 12.10. В данном случае эластичность спроса задается функцией $E_p(y) = \dfrac{y-2}{y}$ и условие $E_p(y) = \dfrac{p}{y}\dfrac{dy}{dp} = \dfrac{y-2}{y}$, определяющее положение точки перегиба на кривой, дает $y = 1$.

Кривая, изображенная на рис. 12.10, называется *логистической*. Подобные кривые описывают процесс распространения информации (рекламы), динамику эпидемий, процесс размножения бактерий в ограниченной среде и др. ▶

Задача 2. Доход $Y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью, является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$, т.е.

$$Y(t) = I(t) + C(t). \qquad \textbf{(12.57)}$$

Как и ранее в модели естественного роста, будем предполагать, что скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$bY'(t) = I(t), \qquad \textbf{(12.58)}$$

где b — коэффициент капиталоемкости прироста дохода (что равносильно (12.52) при постоянной цене на продукцию p и $l = 1/(pb)$).

Рассмотрим поведение функции дохода $Y(t)$ в зависимости от функции $C(t)$.

Пусть $C(t)$ представляет фиксированную часть получаемого дохода: $C(t) = (1 - m)Y(t)$, где m — норма инвестиций (см. задачу 1). Тогда из (12.57) и (12.58) получаем

$$Y' = \frac{m}{b}Y, \qquad \textbf{(12.59)}$$

что равносильно уравнению (12.54) при $p = \text{const}$.

В ряде случаев вид функции потребления $C(t)$ бывает известен (из некоторых дополнительных соображений).

▷ **Пример 12.24.** Найти функцию дохода $Y = Y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C = 2t$; коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = 1/2$, $Y(0) = 2$.

Р е ш е н и е. Из соотношений (12.57) и (12.58) имеем уравнение

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t,$$

т.е. функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Для его решения воспользуемся методом, описанным в § 12.6: будем искать решение в виде $Y(t) = u(t)\,v(t)$.

Тогда имеем $u(t) = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C$, $v(t) = e^{2t}$. Значение постоянной C находим из начальных условий: поскольку $Y(0) = u(0)\,v(0) = 2$, то $C = 1$. Окончательно имеем $Y(t) = 2t + e^{2t} + 1$. ▶

УПРАЖНЕНИЯ

Составить дифференциальные уравнения семейств кривых:

12.25. $y = Cx^2$. **12.26.** $y^2 = 2Cx$.

12.27. $x^3 = C(x^2 - y^2)$. **12.28.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

12.29. $xy' - y = y^3$. **12.30.** $y - xy' = 1 + x^2y'$.

12.31. $xyy' = 1 - x^2$. **12.32.** $xy\,dx + (x + 1)\,dy = 0$.

12.33. $\sqrt{y^2 + 1}\,dx = xy\,dy$. **12.34.** $2x^2yy' + y^2 = 2$.

12.35. $yy' + x = 1$. **12.36.** $y' = 10^{x+y}$.

Решить уравнения, используя замену переменной:

12.37. $y' - y = 2x - 3$. **12.38.** $(2x - y)dx + (4x - 2y + 3)\,dy = 0$.

Решить однородные дифференциальные уравнения:

12.39. $y' = \dfrac{y}{x} - 1$. **12.40.** $(x - y)y\,dx - x^2dy = 0$.

12.41. $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$. **12.42.** $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$.

12.43. $y\,dy + (x - 2y)dx = 0$. **12.44.** $y = x(y' - \sqrt[x]{e^y})$.

Решить линейные уравнения первого порядка:

12.45. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x.$ **12.46.** $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3.$

12.47. $y^2 dx - (2xy + 3)\, dy = 0.$ **12.48.** $y' - y = e^x.$

Решить уравнения, используя понижение порядка:

12.49. $y''' = e^{2x}.$ **12.50.** $x(y'' + 1) + y' = 0.$

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

12.51. $yy'' = (y')^2 - (y')^3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

12.52. $2y(y')^3 + y'' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -3.$

Решить линейные однородные уравнения:

12.53. $y'' - 5y' + 6y = 0.$ **12.54.** $y'' + 2y' + y = 0.$

12.55. $y' - y = 3y''.$ **12.56.** $y'' + 4y' + 13y = 0.$

Решить линейные уравнения:

12.57. $y'' - 4y' + 4y = x^2.$ **12.58.** $y'' + 2y' + y = e^{2x}.$

12.59. $y'' - 8y' + 7y = 14.$ **12.60.** $y'' - y = e^x.$

Найти решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

12.61. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(2) = 1,\ y'(2) = -2.$

12.62. $y'' + y = 4e^x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -3.$

12.63. $y'' - 2y' = 2e^x,\ y(1) = -1,\ y'(1) = 0.$

12.64. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x},\ y(0) = y'(0) = 0.$

12.65. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% первоначального количества?

Указание. Использовать закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству вещества, имеющегося в рассматриваемый момент.

12.66. Найти выражение объема реализованной продукции $y = y(t)$ и его значение при $t = 2$, если известно, что кривая спроса имеет вид $p(y) = 3 - 2y$, норма акселерации $1/l = 1{,}5$, норма инвестиций $m = 0{,}6$, $y(0) = 1$.

Раздел Пятый

РЯДЫ

Глава 13

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

При решении ряда математических задач, в том числе и в приложениях математики в экономике, приходится рассматривать суммы, составленные из бесконечного множества слагаемых. Из теории действительных чисел известно лишь, что означает сумма любого конечного числа чисел. Задача суммирования бесконечного множества слагаемых решается в теории рядов.

13.1. Основные понятия. Сходимость ряда

Определение. ***Числовым рядом*** *называется бесконечная последовательность чисел* $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ *соединенных знаком сложения:*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad \textbf{(13.1)}$$

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называются *членами* ряда, а член u_n — *общим* или *n-м членом ряда*.

Ряд (13.1) считается заданным, если известен его общий член $u_n = f(n)$ $(n = 1, 2, \dots)$, т.е. задана функция $f(n)$ натурального аргумента. Например, ряд с общим членом $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)}$ имеет вид

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2} - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 4} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)} + \dots \, .$$

Более сложной является обратная задача: по нескольким первым членам ряда написать общий член. Эта задача имеет бесконечно много решений, но иногда удается найти самое естественное решение.

▷ **Пример 13.1.** Найти в простейшей форме общий член ряда:

а) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{6}{13} + \dots$; б) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{8}{10} + \dfrac{15}{17} - \dfrac{24}{26} + \dots$.

Р е ш е н и е. Нетрудно убедиться, что для ряда а) общий член $u_n = \dfrac{2n}{4n+1}$, а для ряда б) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\left[(n+1)^2 - 1\right]}{(n+1)^2 + 1}$. ▶

Рассмотрим суммы конечного числа членов ряда:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \ \ldots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Сумма n первых членов ряда S_n называется *n-й частичной суммой ряда.*

Определение. *Ряд называется* ***сходящимся,*** *если существует конечный предел последовательности его частичных сумм*, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \qquad \textbf{(13.2)}$$

Число S называется ***суммой*** ряда. В этом смысле можно записать

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S. \qquad \textbf{(13.3)}$$

Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется *расходящимся.*

▷ **Пример 13.2.** Исследовать сходимость *геометрического ряда*, т.е. ряда, составленного из членов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}. \qquad \textbf{(13.4)}$$

Р е ш е н и е. Необходимо установить, при каких значениях знаменателя прогрессии q ряд (13.4) сходится и при каких — расходится.

Из школьного курса алгебры известно, что сумма n первых членов геометрической прогрессии, т.е. n-я частичная сумма ряда при $q \neq 1$ равна

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}. \qquad \textbf{(13.5)}$$

Возможно несколько случаев:

1) если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}\right) = \frac{a}{1-q}$, т.е. ряд сходится и его сумма $S = \frac{a}{1-q}$;

2) если $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и ряд расходится;

3) если $q = 1$, то ряд (13.4) примет вид $a + a + \ldots + a + \ldots$, его n-я частичная сумма $S_n = \underbrace{a + a + ... + a}_{n \text{ раз}} = na$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$, т.е. ряд расходится;

4) если $q = -1$, то ряд (13.4) примет вид $a - a + a - a + {}$ $+ \ldots + (-1)^{n-1} a + \ldots$ и $S_n = 0$ при n четном и $S_n = a$ — при n нечетном, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, и ряд расходится.

Таким образом, *геометрический ряд сходится к сумме* $S = \frac{a}{1-q}$ *при* $|q|<1$ *и расходится при* $|q| \geq 1$. ▶

▷ **Пример 13.3.** Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \,. \qquad \textbf{(13.6)}$$

Р е ш е н и е. n-я частичная сумма ряда

$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. Учитывая, что $\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$,

$\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, … , $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, т.е. сумма ряда $S = 1$. ▶

Свойства сходящихся рядов. 1. *Если ряд* $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ *сходится и имеет сумму S, то и ряд* $\lambda u_1 + \lambda u_2 + \ldots + \lambda u_n + \ldots$ (полученный умножением данного ряда на число λ) *также сходится и имеет сумму* λS.

2. *Если ряды* $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ *и* $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ *сходятся и их суммы соответственно равны* S_1 *и* S_2, *то и ряд* $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots$ (представляющий сумму данных рядов) *также сходится, и его сумма равна* $S_1 + S_2$.

Свойства 1 и 2 непосредственно вытекают из свойств пределов числовых последовательностей.

3. *Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.*

□ Пусть в сходящемся ряде (13.1) отброшены *n* членов (в принципе можно отбрасывать члены с любыми номерами, лишь бы их было конечное число). Покажем, что полученный ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots, \qquad \textbf{(13.7)}$$

имеющий частичную сумму $\sigma_m = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}$, также сходится.

Очевидно, что $S_{n+m} = S_n + \sigma_m$. Отсюда следует, что при фиксированном *n* конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{n+m}$ существует тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_m$. А это и означает, что ряд (13.7) сходится. ■

Ряд (13.7), полученный из данного отбрасыванием его первых *n* членов, называется *n-м остатком ряда.*

Если сумму *n*-го остатка ряда обозначить через r_n, т.е.

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots = \lim_{m\to\infty} \sigma_m, \qquad \textbf{(13.8)}$$

то сумму ряда (13.1) можно представить в виде

$$S = S_n + r_n. \qquad \textbf{(13.9)}$$

В результате мы подошли к свойству 4.

4. *Для того чтобы ряд (13.1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы при* $n \to \infty$ *остаток ряда стремился к нулю, т.е. чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Это свойство вытекает из теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций (см. § 6.3).

Установить сходимость (расходимость) ряда путем определения S_n и вычисления $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (как это сделано в примерах **13.2**, **13.3**) возможно далеко не всегда из-за принципиальных трудностей при нахождении S_n (суммировании n членов ряда). Проще это можно сделать на основании *признаков сходимости,* к изучению которых мы переходим.

13.2. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд

Теорема (необходимый признак сходимости). *Если ряд сходится, то предел его общего члена u_n при $n \to \infty$ равен нулю, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

□ Выразим n-й член ряда через сумму его n и $(n-1)$ членов, т.е. $u_n = S_n - S_{n-1}$. Так как ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad ■$$

▷ **Пример 13.4.** Проверить выполнение необходимого признака для ряда (13.6).

Р е ш е н и е. Выше было доказано (см. пример **13.3**), что ряд (13.6) сходится, и действительно $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 0,$ т.е. необходимый признак сходимости выполняется. ▶

С л е д с т в и е. *Если предел общего члена ряда (13.1) при $n \to \infty$ не равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0,$ то ряд расходится.*

□ Предположим противное, т.е. ряд (13.1) сходится. Но в этом случае из приведенной выше теоремы следует $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ что противоречит условию, заданному в следствии, т.е. ряд (13.1) расходится. ■

▷ **Пример 13.5.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{5n-7}$.

Р е ш е н и е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+3}{5n-7} = \frac{4}{5} \neq 0$, т.е. необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится. ▶

З а м е ч а н и е. Следует подчеркнуть, что *рассмотренная теорема выражает лишь необходимый, но недостаточный признак сходимости ряда. Если* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, *то из этого еще не следует, что ряд сходится.*

В качестве примера рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots , \qquad \textbf{(13.10)}$$

называемый *гармоническим.*

Необходимый признак сходимости выполнен:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Докажем, что, несмотря на это, гармонический ряд расходится.

□ Вначале получим вспомогательное неравенство. С этой целью запишем сумму первых $2n$ и n членов ряда:

$$S_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n},$$

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Найдем разность

$$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Заменяя в сумме каждое слагаемое наименьшим, равным $\frac{1}{2n}$, придем к вспомогательному неравенству

$$S_{2n}-S_n > \underbrace{\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ раз}} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \text{ или } S_{2n}-S_n > \frac{1}{2}.$$

Предположим противное, т.е. что гармонический ряд сходится, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ и, переходя к пределу в неравенстве (см. § 6.5), получим, что $S - S \ge \frac{1}{2}$ или $0 \ge \frac{1}{2}$.

Мы пришли к противоречию, следовательно, наше предположение о сходимости гармонического ряда неверно, т.е. гармонический ряд расходится. ■

В следующих двух параграфах рассмотрим *достаточные* признаки сходимости.

13.3. Ряды с положительными членами

Теорема (признак сравнения). *Пусть даны два ряда с положительными членами:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ (2), *причем члены первого ряда не превосходят членов второго, т.е. при любом n*

$$u_n \le v_n. \tag{13.11}$$

Тогда: а) если сходится ряд 2, то сходится и ряд 1; б) если расходится ряд 1, то расходится и ряд 2.

□ а) Пусть частичные суммы рядов 1 и 2 соответственно равны s_n и S_n. По условию ряд 2 сходится, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $S_n \le S_n \le S$, S, так как члены ряда 2 положительны. Рассмотрим последовательность частичных сумм s_n ряда 1. Эта последовательность является: возрастающей (так как с ростом *n* увеличивается сумма *n* положительных слагаемых) и ограниченной (так как $s_n \le S_n$ в силу условия (13.11), т.е. $s_n \le S_n \le S$).

Следовательно, на основании признака существования предела (см. § 6.5) последовательность s_n имеет предел, т.е. ряд 1 сходится.

б) Применим метод доказательства от противного. Предположим, что ряд 2 сходится. Тогда согласно первой части теоремы сходится и ряд 1, что противоречит предположению; т.е. ряд 2 расходится. ■

З а м е ч а н и е. Так как сходимость ряда не изменяется при отбрасывании конечного числа членов ряда, то условие (13.11) не обязательно должно выполняться с первых членов рядов и только для членов с одинаковыми номерами n. Достаточно, чтобы оно выполнялось, начиная с некоторого номера $n=k$, или чтобы имело место неравенство $u_n \leq v_{m+n}$, где m — некоторое целое число.

▷ **Пример 13.6.** Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}+\ldots .$$

Р е ш е н и е. Сравним данный ряд со сходящимся геометрическим рядом $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots$ (его знаменатель $q=\frac{1}{3}<1$).

Так как члены данного ряда, начиная со второго, меньше членов сходящегося геометрического ряда $\left(\frac{1}{2\cdot 3}<\frac{1}{3},\ \ \frac{1}{3\cdot 3^2}<\frac{1}{3^2}\right.$ и вообще $\left.\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}<\frac{1}{3^{n-1}}\right)$, то на основании признака сравнения ряд сходится. ▶

▷ **Пример 13.7.** Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}+\ldots .$$

Р е ш е н и е. Сравним данный ряд с гармоническим $1+\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, мысленно отбросив его первый член, равный 1 (что, естественно, не повлияет на расходимость ряда). Так как $\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}>\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}>\frac{1}{3}$, и вообще $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}>\frac{1}{n}$ (ибо $\sqrt{2\cdot 1}<2=\sqrt{2^2}$, $\sqrt{3\cdot 2}<3=\sqrt{3^2}, \ldots \sqrt{n(n-1)}<n=\sqrt{n^2}$), т.е. члены данного ряда больше членов расходящегося гармонического ряда, то на основании признака сравнения ряд расходится. ▶

Отметим «*эталонные*» ряды, часто используемые для сравнения:

1) *геометрический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ — сходится при $|q|<1$, расходится при $|q|\geq 1$;

2) *гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится;

3) *обобщенный гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots \qquad \textbf{(13.12)}$$

сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$ (доказательство см. в примере **13.10**; здесь же отметим, что при $\alpha < 1$ расходимость ряда (13.12) следует из признака сравнения, так как в этом случае члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ больше соответствующих членов гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, а в частном случае при $\alpha = 2$ сходимость ряда (13.12) может быть доказана сравнением этого ряда со сходящимся (13.6)).

Нестандартность применения признака сравнения заключается в том, что надо не только подобрать соответствующий «эталонный» ряд, но и доказать неравенство (13.11), для чего часто требуется преобразование рядов (например, отбрасывание или приписывание конечного числа членов, умножение на определенные числа и т.п.). В ряде случаев более простым оказывается предельный признак сравнения.

Теорема (предельный признак сравнения). *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – *ряды с положительными членами и существует конечный предел отношения их общих членов* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$, *то ряды одновременно сходятся либо расходятся.*

□ Так как $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, то по определению предела числовой последовательности (см. § 6.1) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{u_n}{v_n} - k\right| < \varepsilon$ или $\left|u_n - kv_n\right| < \varepsilon v_n$, откуда $(k-\varepsilon)v_n < u_n < (k+\varepsilon)v_n$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(k+\varepsilon)v_n$, и в силу признака сравнения будет сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; аналогично, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(k-\varepsilon)v_n$ и сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Таким образом, из сходимости одного ряда следует сходимость другого. Утверждение теоремы о расходимости рядов доказывается аналогично. ■

▷ **Пример 13.8.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{n^3}$.

Р е ш е н и е. Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (выбор такого ряда для сравнения может подсказать то, что при больших n $\frac{2n^2+5}{n^3} \approx \frac{2}{n}$). Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{n^3} : \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2} = 2 \neq 0$, то данный ряд, так же как и гармонический, расходится. ▶

Весьма удобным на практике является признак Даламбера.

Теорема (признак Даламбера). *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *с положительными членами существует предел отношения* $(n+1)$*-го члена к* n*-му члену* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *Тогда, если* $l < 1$, *то ряд сходится; если* $l > 1$, *то ряд расходится; если* $l = 1$, *то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.*

□ Из определения предела последовательности следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon$ или $l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$.

1) Пусть $l < 1$. Выберем ε настолько малым, что число $q = l + \varepsilon < 1$, т.е. $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$ или $u_{n+1} < qu_n$.

Последнее неравенство будет выполняться для всех $n > N$, т.е. для $n = N+1,\ N+2, \ldots$: $u_{N+2} < qu_{N+1}$, $u_{N+3} < qu_{N+2} < q^2 u_{N+1}$, … , $u_{N+k} < qu_{N+k-1} < \ldots < q^{k-1} u_{N+1}$.

Получили, что члены ряда $u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots + u_{N+k} + \ldots$ меньше соответствующих членов геометрического ряда $qu_{N+1} + q^2 u_{N+1} + \ldots + q^{k-1} u_{N+1} + \ldots$, сходящегося при $q < 1$. Следовательно, на основании признака сравнения этот ряд сходится, а значит, сходится и рассматриваемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, отличающийся от полученного на первые $(n+1)$ членов.

2) Пусть $l > 1$. Возьмем ε настолько малым, что $l - \varepsilon > 1$. Тогда из условия $\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \varepsilon$ следует, что $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Это означает, что члены ряда возрастают, начиная с номера $N+1$, поэтому предел общего члена ряда не равен нулю, т.е. не выполнен необходимый признак сходимости, и ряд расходится. ■

▷ **Пример 13.9.** Исследовать сходимость рядов:

$$\text{а) } \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots \ ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Р е ш е н и е. а) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$, то по признаку Даламбера ряд сходится.

б) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n n!}{n^n}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3n!(n+1)n^n}{(n+1)^n (n+1)3^n \cdot n!} = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1,$$ то

по признаку Даламбера ряд расходится. ▶

Замечание 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, то ряд расходится.

Замечание 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l = 1$, то, как отмечалось выше, признак Даламбера ответа о сходимости ряда не дает, и рекомендуется перейти к другим признакам сходимости.

Теорема (интегральный признак сходимости). *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *члены которого положительны и не возрастают, т.е.* $u_1 \ge u_2 \ge \ldots \ge u_n \ge \ldots$, *а функция* $f(x)$, *определенная при* $x \ge 1$, *непрерывная и невозрастающая и*

$$f(1) = u_1,\ f(2) = u_2,\ \ldots,\ f(n) = u_n,\ \ldots . \qquad \textbf{(13.13)}$$

Тогда для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл* $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

☐ Рассмотрим ряд

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)dx + \ldots . \qquad \textbf{(13.14)}$$

Его n-й частичной суммой будет

$$S_n = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx. \qquad \textbf{(13.15)}$$

Сходимость ряда (13.14) означает существование предела последовательности его частичных сумм (13.15), т.е. сходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$, поскольку

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^{n+1} f(x)dx = \int\limits_1^{\infty} f(x)dx.$ В силу монотонности функции $f(x)$ на любом отрезке $[n,\ n+1]$ $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$ или, учитывая (13.13),

$$u_n \geq f(x) \geq u_{n+1}. \qquad \textbf{(13.16)}$$

Интегрируя (13.16) на отрезке $[n,\ n+1]$, получим

$$\int\limits_n^{n+1} u_n dx \geq \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \geq \int\limits_n^{n+1} u_{n+1}dx,$$

откуда

$$u_n \geq \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \geq u_{n+1}. \qquad \textbf{(13.17)}$$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то по признаку сравнения рядов в силу первого неравенства (13.17) должен сходиться ряд (13.14), а значит, и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$. Обратно, если сходится $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$, т.е. ряд (13.14), то согласно тому же признаку сравнения на основании второго неравенства (13.17) будет сходиться ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+1} = u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$, а следовательно, и данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$. ■

▷ **Пример 13.10.** Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Р е ш е н и е. Пусть $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$. Функция $f(x)$ при $x>0$ (а значит, и при $x\geq 1$) положительная и невозрастающая (точнее убывающая). Поэтому сходимость ряда равносильна сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$. Имеем $I=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Если $\alpha=1$, то $I=\lim\limits_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln|b|-\ln 1\right)=\infty$.

Если $\alpha\neq 1$, то

$$I=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^b\right)=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-\alpha}-1\right)=\begin{cases}1/(\alpha-1) & \text{при } \alpha>1;\\ \infty & \text{при } \alpha<1.\end{cases}$$

Итак, данный ряд сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leq 1$. ▶

13.4. Ряды с членами произвольного знака

Знакочередующиеся ряды. Под *знакочередующимся* рядом понимается ряд, в котором члены попеременно то положительны, то отрицательны: $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots$, где $u_n>0$.

Теорема (признак Лейбница). *Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине* $u_1>u_2>\ \ldots\ >u_n>\ \ldots$ *и предел его общего члена при* $n\to\infty$ *равен нулю, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, *то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена:* $S\leq u_1$.

□ Рассмотрим последовательность частичных сумм четного числа членов при $n=2m$:

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ \ldots\ +(u_{2m-1}-u_{2m}).$$

Эта последовательность возрастающая (так как с ростом $n=2m$ увеличивается число положительных слагаемых в скобках) и ограниченная (это видно из того, что S_{2m} можно представить в виде

$$S_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ \ldots\ -(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m},$$

откуда следует, что $S_{2m}<u_1$). На основании признака существования предела (см. § 6.5) последовательность S_{2m} имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S$.

Попутно заметим, что, переходя к пределу в неравенстве $S_{2m} < u_1$ при $m \to \infty$, получим, что $S \le u_1$.

Теперь рассмотрим последовательность частичных сумм нечетного числа членов при $n = 2m+1$. Очевидно, что $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$; поэтому, учитывая необходимый признак сходимости ряда, $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} + \lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$.

Итак, при любом n (четном или нечетном) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд сходится. Рис. 13.1 иллюстрирует сходимость S_n к числу S слева при четном n и справа при нечетном n. ■

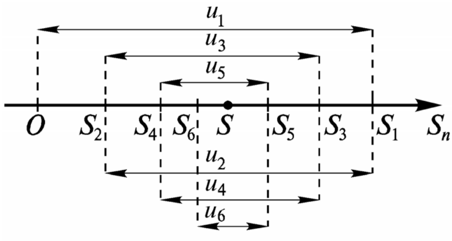


Рис. 13.1

Из рис. 13.1 вытекает еще одна *оценка* для суммы S сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница: при любом m

$$S_{2m} \le S \le S_{2m+1}.$$

▷ **Пример 13.11.** Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots .$$

Р е ш е н и е. Так как члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \ldots > \frac{1}{n^2} > \ldots$, и предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, то по признаку Лейбница ряд сходится. ▶

З а м е ч а н и е. В теореме Лейбница существенно не только условие $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, но и условие $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$. Так, например, для ряда $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$ второе условие нарушено и, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, ряд расходится. Это видно, если данный ряд представить (после попарного сложения его членов) в виде

$$2+1+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2}{n-1}+\ldots=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\ldots\right),$$

т.е. «удвоенного» гармонического ряда.

С л е д с т в и е. *Погрешность при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена.*

□ По формуле (13.9) сумму сходящегося ряда можно представить как сумму n членов ряда и суммы n-го остатка ряда, т.е. $S=S_n+r_n$. Полагая приближенно $S \approx S_n$, мы допускаем погрешность, равную r_n. Так как при четном n n-й остаток знакочередующегося ряда $u_{n+1}-u_{n+2}+\ldots$ представляет ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, то его сумма r_n не превосходит первого члена u_{n+1}, т.е. $r_n \le u_{n+1}$. Так как при нечетном n для n-го остатка ряда $-u_{n+1}+u_{n+2}-\ldots$ его сумма $r_n<0$, то, очевидно, что при любом n

$$|r_n| \le u_{n+1}. \blacksquare \tag{13.18}$$

▷ **Пример 13.12.** Какое число членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

Р е ш е н и е. По условию $|r_n|<0{,}001$. Учитывая следствие теоремы Лейбница (13.18), запишем более сильное неравенство $|u_{n+1}| \le 0{,}001$ или $\frac{1}{(n+1)^2} \le 0{,}001$, откуда $(n+1)^2 \ge 1000$ и $n \ge \sqrt{1000}-1$, или $n \ge 30{,}6$, т.е. необходимо взять не менее 31 члена ряда. ▶

Знакопеременные ряды. Пусть $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ *знакопеременный* ряд (13.1), в котором любой его член u_n может быть как положительным, так и отрицательным.

Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). *Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда* (13.1)

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \tag{13.19}$$

сходится, то сходится и данный ряд.

□ Обозначим S_n^+ и S_n^- суммы абсолютных величин членов данного ряда (13.1), входящих в него со знаком «плюс» и «минус».

Тогда частичная сумма данного ряда $S_{n_1} = S_n^+ - S_n^-$, а ряда, составленного из абсолютных величин его членов, — $S_{n_2} = S_n^+ + S_n^-$. По условию ряд (13.19) сходится, следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n_2} = S$.

Последовательности S_n^+ и S_n^- являются возрастающими (так как с увеличением n увеличиваются S_n^+ и S_n^-) и ограниченными ($S_n^+ \le S$, $S_n^- \le S$), значит, существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^+$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^-$, и соответственно предел частичной суммы данного ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n_1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^+ - \lim\limits_{n\to\infty} S_n^-$, т.е. ряд (13.1) сходится. ■

Следует отметить, что обратное утверждение неверно. Ряд (13.19) может расходиться, а ряд (13.1) сходиться. Например, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$ сходится по признаку Лейбница, а ряд из абсолютных величин его членов $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ (гармонический ряд) расходится.

Поэтому введем следующие определения.

Определение 1. *Ряд называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.*

Определение 2. *Ряд называется* ***условно сходящимся****, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.*

Таким образом, рассмотренный выше ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ — абсолютно сходящийся, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ — условно сходящийся.

Грубо говоря, различие между абсолютно сходящимися и условно сходящимися рядами заключается в следующем: абсолютно сходящиеся ряды сходятся в основном в силу того, что их члены быстро убывают, а условно сходящиеся — в результате того, что положительные и отрицательные слагаемые уничтожают друг друга.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов существенно отличаются. Абсолютно сходящиеся ряды по своим свойствам напоминают конечные суммы, их можно складывать, перемножать, переставлять местами члены ряда.

Условно сходящиеся ряды такими свойствами не обладают. Возьмем, например, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$. Переставим члены местами и сгруппируем их следующим образом:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots .$$

Перепишем ряд в виде:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right),$$

т.е. от перестановки членов ряда сумма его уменьшилась в 2 раза.

Можно показать (*теорема Римана*), что от перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

13.5. Решение задач

▷ **Пример 13.13.** Найти сумму ряда $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\ldots$, доказав его сходимость.

Р е ш е н и е. Очевидно, что общий член ряда $u_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Представим сумму n членов ряда в виде

$$S_n=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$=\frac{4-1}{1\cdot 4}+\frac{9-4}{4\cdot 9}+\frac{16-9}{9\cdot 16}+\ldots+\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Так как при $n\to\infty$ последовательность S_n имеет конечный предел, то ряд сходится, и его сумма

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1. \quad ▶$$

$\triangleright$ **Пример 13.14.** Исследовать сходимость ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{\ln n + 2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n};$$

$$\text{г) } \frac{4}{2} + \frac{4\cdot 7}{2\cdot 6} + \frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10} + \ldots\ ; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Р е ш е н и е. а) Проверим выполнение необходимого признака сходимости, найдя предел общего члена:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{\ln n + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Для вычисления предела отношения двух бесконечно больших функций натурального аргумента правило Лопиталя непосредственно применять нельзя, ибо для таких функций не определено понятие производной. Поэтому применяя *теорему о «погружении» дискретного аргумента* (n) *в непрерывный* (x)[1], получим

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{x\to\infty} \frac{\lg x}{\ln x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\lg x)'}{(\ln x + 2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\ln 10}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\ln 10} \neq 0,$$

следовательно, ряд расходится.

б) Очевидно, что задан ряд с положительными членами, так как $\sin\frac{\pi}{2^n} > 0,$ ибо аргумент синуса $0 < \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2}$ при любом n. Так как члены данного ряда меньше членов сходящегося геометрического ряда со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1,$ т.е. $\sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$ (ибо при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\sin x < x$), то данный ряд сходится.

в) Представим общий член ряда в виде

$u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$. Применим предельный признак сравнения, сравнив данный ряд со сходящимся «эталон-

---

[1] Согласно этой теореме, *если* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *существует и равен A (A может равняться нулю или бесконечности), то* $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ *также существует и равен A.*

ным» рядом (13.12) при $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Так как предел отношения общих членов двух рядов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} : \frac{1}{n^{3/2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} = \dfrac{1}{2}$ есть конечное число, не равное нулю, то данный ряд, так же как и «эталонный», сходится.

г) Применим признак Даламбера, заметив, что общий член ряда u_n имеет вид $u_n = \dfrac{4\cdot 7\cdot 10\ldots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-2)}$.

Тогда $u_{n+1} = \dfrac{4\cdot 7\cdot 10\ldots(3n+1)(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-2)(4n+2)}$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+4}{4n+2} = \dfrac{3}{4} < 1$, т.е. данный ряд сходится.

д) Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} : \frac{1}{\ln(n+1)} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = 1,$$

т.е. вопрос о сходимости ряда остается открытым. Проверим выполнение необходимого признака (с этого можно было начать исследование): $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0$, т.е. необходимый признак выполнен, но вопрос о сходимости ряда по-прежнему не решен.

Применим признак сравнения в более простой предельной форме. Сравним данный ряд, например, с гармоническим.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\ln(n+1)} : \dfrac{1}{n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln(n+1)} = \infty$, т.е. ответа о сходимости ряда нет. Аналогичная картина ($\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \infty$) наблюдается и при использовании других «эталонных» рядов (см. § 13.3)[1]. Применим, наконец, признак сравнения в обычной форме. Сравним данный ряд с тем же гармоническим рядом, у которого отброшен первый член: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\ldots$. Так как члены рассматриваемого ряда больше членов расходящегося гармонического ряда ($\frac{1}{\ln 2}>\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\ln 3}>\frac{1}{3}$ и вообще $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{(n+1)}$, что вытекает из очевидного неравенства $\ln x<x$), то данный ряд расходится. ▶

▷ **Пример 13.15.** Исследовать сходимость ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^7}{7n^6+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{2n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos\frac{\pi n}{3}}{n^2+1}$.

Р е ш е н и е. а) Предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n^7}{7n^6+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\frac{7}{n}+\frac{3}{n^7}}=\infty$, так как знаменатель дроби стремится к нулю, а числитель колеблется, принимая значения 1 (при четном n) и -1 (при нечетном n). Следовательно, необходимый признак сходимости не выполнен, и ряд расходится.

б) Так как члены знакочередующегося ряда, начиная со второго, убывают по абсолютной величине —

$$\frac{\ln 2}{3}>\frac{\ln 3}{5}>\ldots>\frac{\ln n}{2n-1}>\ldots$$

и предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1}=0$ (это можно установить, например, с помощью правила Лопиталя), то по признаку Лейб-

[1] Следует отметить, что для исследования сходимости данного ряда неприменим и интегральный признак сходимости, так как исследование сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\ln(x+1)}$ затруднительно из-за того, что первообразная подынтегральной функции не является элементарной функцией (т.е. соответствующий неопределенный интеграл является «неберущимся»).

ница ряд сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n-1}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится, так как его члены больше членов расходящегося гармонического ряда, умноженного на $\frac{1}{2}$: $\frac{\ln n}{2n-1}>\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$. Следовательно, данный ряд условно сходящийся.

в) Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, так как его члены меньше членов сходящегося ряда (13.12) при $\alpha=2>1$: $\left|\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi n}{3}}{n^2+1}\right|\le\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$, следовательно, данный ряд сходится и притом абсолютно. ▶

УПРАЖНЕНИЯ

Написать в простейшей форме общий член ряда:

13.16. $\frac{4}{3}+\frac{7}{4}+\frac{10}{5}+\frac{13}{6}+\ldots$. **13.17.** $\frac{3}{5}+\frac{8}{10}+\frac{15}{17}+\frac{24}{26}+\ldots$.

Найти сумму ряда, доказав, что он сходится:

13.18. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots$. **13.19.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Исследовать сходимость ряда, применив необходимый признак сходимости:

13.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+6}{100n-1}$. **13.21.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3}-25}{\sqrt{n}+50}$.

Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения:

13.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$. **13.23.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

13.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2}$. **13.25.** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\ldots$.

13.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n}{n^3+5n-5}$. **13.27.** $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера:

13.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$. **13.29.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$.

13.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$. **13.31.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Лейбница:

13.32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+2}$. **13.33.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}$.

Найти (с точностью до 0,01) сумму ряда:

13.34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n)^2}$. **13.35.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

Исследовать сходимость ряда (для сходящегося ряда с членами произвольного знака установить, сходится он абсолютно или условно):

13.36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+4}$. **13.37.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

13.38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{n^3-n+3}$. **13.39.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n+5}$.

13.40. $\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\ldots$. **13.41.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi n}{3}}{2\sqrt{n^3+1}}$.

13.42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(-1)^{n+1}}{4^n}$.

13.43. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}+4\operatorname{tg}\frac{\pi}{32}+\ldots$.

13.44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{8^n}$. **13.45.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 10^n}{n^n+2}$.

Глава 14

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

До сих пор мы рассматривали ряды, членами которых были числа, т.е. числовые ряды. Теперь перейдем к рассмотрению рядов, членами которых являются функции, в частности степенные функции

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots . \qquad \textbf{(14.1)}$$

Такие ряды называются *степенными*, а числа c_0, c_1, …, c_n — *коэффициентами* степенного ряда.

14.1. Область сходимости степенного ряда

Совокупность тех значений x, при которых степенной ряд (14.1) сходится, называется *областью сходимости степенного ряда.*

▷ **Пример 14.1.** Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots .$$

Р е ш е н и е. Данный ряд можно рассматривать как геометрический ряд со знаменателем $q = x$, который сходится при $|q| = |x| < 1$. Отсюда $-1 < x < 1$, т.е. областью сходимости является интервал $(-1; 1)$. ▶

Структура области сходимости степенного ряда устанавливается с помощью теоремы Абеля.

Теорема Абеля. 1) *Если степенной ряд сходится при значении* $x = x_0 \neq 0$ (*отличном от нуля*), *то он сходится и, притом абсолютно, при всех значениях* x *таких, что* $|x| < |x_0|$. 2) *Если степенной ряд расходится при* $x = x_1$, *то он расходится при всех значениях* x *таких, что* $|x| > |x_1|$.

□ 1) По условию ряд (14.1) сходится при $x = x_0 \neq 0$, следовательно, выполняется необходимый признак сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0$. Отсюда следует, что последовательность $\left|C_n x_0^n\right|$

ограничена, т.е. существует такое число $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство

$$\left|c_n x_0^n\right| < M. \qquad \textbf{(14.2)}$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (14.1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|c_n x_0^n\right|$, который представим в виде

$$\left|c_0\right| + \left|c_1 x_0\right|\left|\frac{x}{x_0}\right| + \ldots + \left|c_n x_0^n\right|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots\ . \qquad \textbf{(14.3)}$$

Члены ряда (14.3) согласно неравенству (14.2) меньше соответствующих членов ряда

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots,$$

представляющего геометрический ряд, который сходится, когда его знаменатель $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, т.е. $|x| < |x_0|$, следовательно, на основании признака сравнения ряд (14.1) сходится.

2) По условию ряд (14.1) расходится при $x = x_1$. Покажем, что он расходится для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$. Предположим противное, т.е. при $|x| > |x_1|$ ряд (14.1) сходится. Тогда по доказанному выше он должен сходиться и в точке x_1 (ибо $|x_1| < |x|$), что противоречит условию. Таким образом, для всех x таких, что $|x| > |x_1|$, ряд (14.1) расходится. ■

Из теоремы Абеля (см. рис. 14.1) следует, что существует такое число $R \geq 0$, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ — расходится.

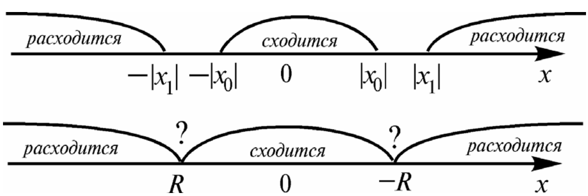


Рис. 14.1

Число R получило название *радиуса сходимости*, а интервал $(-R;\ R)$ — *интервала сходимости* степенного ряда. На концах интервала сходимости, т.е. при $x = -R$ и $x = R$, ряд может как сходиться, так и расходиться (см. рис. 14.1).

Найдем выражение радиуса сходимости степенного ряда (14.1) через его коэффициенты. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|c_0|+|c_1x|+|c_2x^2|+\ldots+|c_nx^n|+\ldots, \qquad \mathbf{(14.4)}$$

в котором все коэффициенты c_n, по крайней мере начиная с некоторого номера n, отличны от нуля. По признаку Даламбера ряд (14.4) сходится, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_nx^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

будет меньше 1, т.е.

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|<1 \text{ или } |x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Если этот предел существует, то он и является радиусом сходимости ряда (14.1), т.е.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \qquad \mathbf{(14.5)}$$

З а м е ч а н и е. Следует отметить, что у некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ($R=0$), у других охватывает всю ось Ox ($R=\infty$).

▷ **Пример 14.2.** Найти область сходимости степенного ряда

$$1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\ldots+\frac{2^nx^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}+\ldots.$$

Р е ш е н и е. Найдем радиус сходимости ряда по формуле (14.5)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}:\frac{2^{n+1}}{\left[2(n+1)+1\right]^2\sqrt{3^{n+1}}}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

т.е. интервал сходимости ряда $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Теперь выясним поведение ряда на концах интервала сходимости. На левом конце при $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ данный степенной ряд принимает вид $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \ldots$; этот ряд сходится по признаку Лейбница. На правом конце при $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем ряд $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots$, представляющий обобщенный гармонический ряд (13.12) при $\alpha = 2$, у которого все члены с четными номерами равны нулю. Так как $\alpha = 2 > 1$, то этот ряд сходится.

Следует отметить, что сходимость ряда на левом конце интервала сходимости при $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ могла быть установлена с помощью достаточного признака сходимости знакопеременного ряда (см. § 13.4), так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, сходится.

Итак, область сходимости данного ряда $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. ▶

З а м е ч а н и е. При исследовании сходимости на концах интервала сходимости для получающегося ряда с положительными членами применять признак Даламбера не имеет смысла, так как в этом случае всегда будем получать $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l = 1$ с нерешенным вопросом о сходимости ряда; в этом случае рекомендуется рассматривать другие признаки сходимости (например, признак сравнения, необходимый признак и т.д.).

▷ **Пример 14.3.** Найти области сходимости степенных рядов:

а) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$; б) $1 + x + 2^2 x^2 + \ldots + n^n x^n + \ldots$.

Р е ш е н и е. а) Радиус сходимости ряда по (14.5)
$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$, т.е. область сходимости ряда $(-\infty;\ +\infty)$.

б) Задачу можно решать аналогично предыдущим. Решение упрощается, если заметить, что при $x\neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^n x^n\neq 0$, т.е. необходимый признак сходимости не выполняется, и ряд расходится.

Итак, область сходимости ряда состоит из одной точки $x=0$. ▶

▷ **Пример 14.4.** Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^{n^2}=1+3x+3^4x^4+3^9x^9+\ldots$$

Р е ш е н и е. Найти радиус сходимости по формуле (14.5) в данном случае не представляется возможным, так как коэффициенты ряда c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8, c_{10} и т.д. равны нулю. Поэтому непосредственно применим признак Даламбера. Данный ряд будет абсолютно сходиться, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$, и расходиться, если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$. Поэтому найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x)^{(n+1)^2}}{(3x)^{n^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}|3x|^{2n+1}=\begin{cases}\infty, \text{ если } |3x|>1;\\ 0, \text{ если } |3x|<1.\end{cases}$$

Следовательно, ряд сходится при $-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$ или на интервале $\left(-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{3}\right)$.

Исследуем сходимость на концах интервала сходимости: при $x=-\dfrac{1}{3}$ ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n^2}=1-1+1-1+\ldots$, а при $x=\dfrac{1}{3}$ — вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n^2}=1+1+1+\ldots$, т.е. оба ряда расходятся, так как не выполняется необходимый признак сходимости.

Итак, область сходимости ряда $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. ►

Свойства степенных рядов. Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда, т.е. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. В подобных курсах математического анализа доказывается, что степенные ряды по своим свойствам напоминают конечные суммы (многочлены): *на любом отрезке* $[a, b]$, *целиком принадлежащем интервалу сходимости* $(-R; R)$, *функция* $f(x)$ *является непрерывной*, а следовательно, *степенной ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c_0\,dx + \int_a^b c_1 x\,dx + \ldots + \int_a^b c_n x^n\,dx + \ldots\ .$$

Кроме того, *в интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать:*

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots\ .$$

При этом после интегрирования или дифференцирования полученные ряды имеют тот же радиус сходимости R.

14.2. Ряд Маклорена

Предположим, что функция $f(x)$, определенная и n раз дифференцируемая в окрестности точки $x = 0$, может быть представлена в виде суммы степенного ряда или, другими словами, может быть разложена в степенной ряд

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots + c_n x^n + \ldots\ .$$

Выразим коэффициенты ряда через $f(x)$. Найдем производные функции $f(x)$, почленно дифференцируя ряд n раз:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + 4\cdot 3\cdot c_4 x^2 + \ldots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \ldots,$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4 x + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3} + \ldots,$$

....

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 2c_n + \ldots$$

Полагая в полученных равенствах $x = 0$, получим $f(0) = c_0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot c_2 = 2!c_2$, $f'''(0) = 3 \cdot 2c_3 = 3!c_3$, ..., $f^{(n)}(0) = n!c_n$, откуда

$$c_0 = f(0),\ c_1 = f'(0),\ c_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ c_3 = \frac{f'''(0)}{3!},\ \ldots,\ \ c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставляя значения коэффициентов c_0, c_1, c_2, c_3, …, c_n, получим ряд

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \quad \mathbf{(14.6)}$$

называемый *рядом Маклорена.*

Следует отметить, что не все функции могут быть разложены в ряд Маклорена. Может оказаться, что ряд Маклорена, составленный формально для функции $f(x)$, является расходящимся либо сходящимся не к функции $f(x)$.

Так же как и для числовых рядов, сумму $f(x)$ ряда Маклорена можно представить в виде (13.9)

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x),$$

где $S_n(x)$ — *n-я частичная сумма* ряда; $r_n(x)$ — *n-й остаток* ряда.

Тогда на основании свойства 4 сходящихся рядов (см. §13.1) можно сформулировать теорему.

Теорема. *Для того чтобы ряд Маклорена сходился к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$ остаток ряда стремился к нулю, т.е.*

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0 \quad \mathbf{(14.7)}$$

для всех значений x из интервала сходимости ряда.

Можно доказать, что *если функция $f(x)$ разложима в ряд Маклорена, то это разложение единственное.*

З а м е ч а н и е. Ряд Маклорена является частным случаем *ряда Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

при $x_0 = 0$.

Ряд Тейлора тесно связан с *формулой Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

$\xi \in (x_0, x)$ (или $\xi \in (x, x_0)$), записанный в *форме Лагранжа*.

Очевидно, что при выполнении условия (14.7) *остаток* $r_n(x)$ *ряда Тейлора равен остаточному члену* $R_n(x)$ *формулы Тейлора*.

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

1. $y = e^x$.

Имеем $f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$;

$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

По формуле (13.6)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \,. \qquad \textbf{(14.8)}$$

Область сходимости ряда $(-\infty; \infty)$ (см. пример **14.3а**).

2. $y = \sin x$.

Имеем $f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = \sin x$, откуда $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 0$; $f'''(0) = -1$; $f^{(4)}(0) = 0$ и т.д.

Очевидно, что производные четного порядка $f^{(2n)}(0) = 0$, а нечетного порядка $f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. По формуле (14.6)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \,. \qquad \textbf{(14.9)}$$

Область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$.

3. $y = \cos x$. Рассматривая аналогично, получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \,. \qquad \textbf{(14.10)}$$

Область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$.

4. $y = (1+x)^m$, где m — любое действительное число.

Имеем $f(x) = (1+x)^m$, $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$, $f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-2}$, …, $f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)\times$ $\times(1+x)^{m-n}$.

При $x = 0$ $f(0) = 1$, $f'(0) = m$, $f''(0) = m(m-1)$, $f'''(0) = m(m-1)\times$ $\times(m-2)$, …, $f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1)$. По формуле (14.6)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad \textbf{(14.11)}$$

Интервал сходимости ряда $(-1;\ 1)$ (на концах интервала при $x = \pm 1$ сходимость ряда зависит от конкретных значений m).

Ряд (14.11) называется *биномиальным*. Если m — целое положительное число, то биномиальный ряд представляет формулу *бинома Ньютона*, так как при $n = m + 1$ $m - n + 1 = 0$, n-й член ряда и все последующие равны нулю, т.е. ряд обрывается, и вместо бесконечного разложения получается конечная сумма.

5. $y = \ln(1 + x)$.

Получить разложение для этой функции можно проще, не вычисляя непосредственно коэффициенты ряда (14.6) с помощью производных.

Рассмотрим геометрический ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \qquad \textbf{(14.12)}$$

со знаменателем $q = -x$, который сходится при $|q| = |-x| < 1$, т.е. при $-1 < x < 1$, к функции $f(x) = \dfrac{a}{1-q} = \dfrac{1}{1+x}$.

Интегрируя почленно равенство (14.12) в интервале $(0; x)$, где $|x| < 1$, с учетом того, что $\int\limits_0^x \dfrac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\Big|_0^x = \ln(1+x)$, получим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots \qquad \textbf{(14.13)}$$

Область сходимости ряда (после выяснения сходимости на концах интервала сходимости) есть (−1; 1].

Можно доказать, что ряды, приведенные в формулах (14.8) — (14.13), сходятся к функциям, для которых они составлены.

При разложении более сложных функций используют непосредственно формулу (14.6) либо таблицу простейших разложений (14.8) — (14.13).

▷ **Пример 14.5.** Разложить в ряд функции: а) $y=\dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2}$;

б) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Р е ш е н и е. а) Так как по (14.8) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$,

то, заменяя x на $(-x^2)$, получим

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+\ldots,$$

$$1-e^{-x^2}=x^2-\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n!}+\ldots$$

и, наконец,

$$\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{(1)^{n+1}x^{2n-2}}{n!}+\ldots\ .$$

Область сходимости ряда $(-\infty;\ +\infty)$.

б) В разложении $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots$ заменим x на $(-x)$; получим

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots\ .$$

Теперь

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots)-(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots)=$$

$$=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots). \qquad \textbf{(14.14)}$$

Область сходимости ряда (−1; 1). ▶

14.3. Применение рядов в приближенных вычислениях

Степенные ряды имеют самые разнообразные приложения. С их помощью вычисляют с заданной степенью точности значения функций, определенных интегралов, которые являются «неберущимися» или слишком сложными для вычислений, интегрируются дифференциальные уравнения.

▷ **Пример 14.6.** Вычислить приближенно с точностью до 0,0001:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^3}}$; б) $\ln 0{,}8$; в) $\sqrt[5]{36}$; г) $\sin 20°$; д) $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\, e^{-x} dx$.

Р е ш е н и е. а) Для вычисления $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^3}} = e^{-\frac{3}{5}}$ запишем ряд (14.8) при $x = -\dfrac{3}{5}$, принадлежащем области сходимости $(-\infty; +\infty)$:

$$e^{-\frac{3}{5}} = 1 - \frac{3}{5} + \frac{3^2}{5^2 \cdot 2!} - \frac{3^3}{5^3 \cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^n}{5^n \cdot n!} + \ldots =$$

$$= 1 - 0{,}6 + 0{,}18 - 0{,}036 + 0{,}0054 - 0{,}000648 + 0{,}0000648 - \ldots .$$

Взяв первые шесть членов разложения, на основании следствия из теоремы Лейбница (см. § 13.4) для сходящегося знакочередующегося ряда мы допустим погрешность $|r_n|$, не превышающую первого отброшенного члена (по абсолютной величине), т.е.

$$|r_n| \le 0{,}0000648 < 0{,}0001.$$

Итак, $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^3}} \approx 1 - 0{,}6 + 0{,}18 - 0{,}036 + 0{,}0054 - 0{,}000648 = 0{,}548752 \approx$ $\approx 0{,}5488$.

б) Для вычисления $\ln 0{,}8$ запишем ряд (14.13) при $x = -0{,}2$, входящем в область сходимости ряда $(-1;\ 1]$:

$$\ln 0{,}8 = -0{,}2 - \frac{0{,}2^2}{2} - \frac{0{,}2^3}{3} - \ldots - \frac{0{,}2^n}{n} - \ldots = -(0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}00266 + 0{,}0004 + \ldots).$$

Если в качестве $\ln 0{,}8$ взять первые четыре члена, мы допустим погрешность

$$|\, r_n \,| = \frac{0{,}2^5}{5} + \frac{0{,}2^6}{6} + \ldots + \frac{0{,}2^n}{n} + \ldots < \frac{0{,}2^5}{5} + \frac{0{,}2^6}{5} + \ldots + \frac{0{,}2^n}{5} + \ldots =$$

$$= \frac{0{,}2^5}{5}\left(1 + 0{,}2 + \ldots + 0{,}2^{n-5} + \ldots\right) = \frac{0{,}2^5}{5} \cdot \frac{1}{(1 - 0{,}2)} = 0{,}00008 < 0{,}0001.$$

(Мы учли, что сумма сходящегося геометрического ряда в скобках равна $\frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-0{,}2}$.) Итак,

$$\ln 0{,}8 \approx -(0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}00266 + 0{,}0004) = -0{,}22306 \approx -0{,}2231.$$

Следует отметить, что для вычисления логарифмов более удобным является ряд (14.14), который сходится быстрее ряда (14.13). Действительно, пусть $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln 0{,}8$, тогда $x = -\frac{1}{9}$ и согласно (14.14)

$$\ln 0{,}8 = 2\left(-\frac{1}{9} - \frac{1}{9^3 \cdot 3} - \ldots - \frac{(-1)^{2n-1}}{9^{2n-1}(2n-1)} + \ldots\right) = -(0{,}22222 + 0{,}00091 + 0{,}000007 + \ldots),$$

т.е. для вычисления $\ln 0{,}8$ с точностью до 0,0001 потребуется всего два члена. С помощью ряда (14.14) можно вычислять логарифмы любых чисел, в то время как с помощью ряда (14.13) — лишь логарифмы чисел, расположенных на промежутке $(0;\ 2]$.

в) Представим $\sqrt[5]{36}$ в виде $\sqrt[5]{36} = \sqrt[5]{32+4} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Так как $x = \dfrac{1}{8}$ входит в область сходимости степенного ряда $(-1;\ 1)$, то при $x = \dfrac{1}{8}$, $m = \dfrac{1}{5}$, учитывая (14.11), получим

$$\sqrt[5]{36} = 2(1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{5}-n+1\right)}{n!}\cdot\frac{1}{8^n} + \ldots =$$
$$= 2 + 0{,}05 - 0{,}0025 + 0{,}000188 - 0{,}000016 + \ldots \approx 2{,}0477.$$

(Для обеспечения данной точности расчета необходимо взять 4 члена, так как по следствию из признака Лейбница для сходящегося знакочередующегося ряда погрешность $|\,r_n\,| \le 0{,}000016 < < 0{,}0001$.)

г) Для вычисления $\sin 20° = \sin\dfrac{\pi}{9}$ запишем ряд (14.9) при $x = \dfrac{\pi}{9}$, принадлежащем области сходимости $(-\infty;\ +\infty)$:

$$\sin\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n-1} + \ldots =$$

$$= 0{,}34907 - 0{,}00709 + 0{,}00004 - \ldots .$$

(Необходимо взять два члена, так как при этом погрешность $|\,r_n\,| \le 0{,}00004 < 0{,}0001$). Итак, $\sin 20° = 0{,}34907 - 0{,}00709 \approx 0{,}3420$.

д) «Точное» интегрирование здесь невозможно, так как интеграл «неберущийся». Заменив x на $(-x)$ в разложении (14.8), получим $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \ldots + \dfrac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots$.

Умножая полученный ряд на $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x}e^{-x} = x^{1/2}e^{-x} = x^{1/2} - x^{3/2} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1/2}}{n!} + \ldots$$

и почленно интегрируя в интервале (0; 1), принадлежащем интервалу сходимости ряда ($-\infty$; $+\infty$), получим

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{1/2}dx - \int_0^1 x^{3/2}dx + \ldots + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1/2}}{n!}dx + \ldots =$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^1 + \ldots + \frac{1}{\left(n+\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{x^{n+3/2}}{n!}\Big|_0^1 + \ldots = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n+3)n!} + \ldots =$$

$= 0{,}66667 - 0{,}40000 + 0{,}14286 - 0{,}03704 + 0{,}00758 - 0{,}00128 + 0{,}00018 - \ldots \approx 0{,}37897 \approx 0{,}3790$. Оценка погрешности вычисления производится так же, как в примерах а), в) и г). ▶

14.4. Решение задач

▷ **Пример 14.7.** Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n. \qquad \textbf{(14.15)}$$

Р е ш е н и е. Радиус сходимости ряда (14.15), заданного по степеням $(x - a) = (x - (-1))$, находится по той же формуле (14.5);

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n + (-2)^n}{n} : \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n + (-2)^n}{3\cdot 3^n - 2(-2)^n} \cdot \frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+(-2/3)^n}{3-2(-2/3)^n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1+0}{3-2\cdot 0}\cdot 1 = \frac{1}{3},$$

т.е. $R = 1/3$. Интервал сходимости ряда (14.15) определяется из условия $-R < x - a < R$ или $a - R < x < a + R$. В данном примере интервал сходимости ряда есть $-1 - 1/3 < x < -1 + 1/3$ или $(-4/3; -2/3)$.

Исследуем сходимость ряда (14.15) на концах этого интервала. При $x = -4/3$ ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

т.е. представляет сумму двух рядов. Первый, знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, сходится (условно) (см. § 13.4), а второй ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ исследуем на сходимость с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}:\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

т.е. ряд сходится, а следовательно, сходится и ряд (14.15) при $x = -4/3$.

При $x = -2/3$ ряд (14.15) имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

Первый из полученных рядов — гармонический — расходится, а второй — сходится на основании признака абсолютной сходимости, так как выше было показано, что ряд из абсолютных величин его членов сходится. Следовательно, ряд (14.15) при $x = -2/3$ расходится. (Установить расходимость этого ряда с положительными членами $\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\frac{1}{3^n} > 0$ при любом $n \in N$ можно было и с помощью признака сравнения, так как его члены при $n > 1$ превосходят члены расходящегося гармонического ряда, умноженные на 1/3:

$$\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}>\frac{1}{3n}.)$$

Итак, область сходимости степенного ряда (14.15) $[-4/3; -2/3)$. ▶

▷ **Пример 14.8.** Разложить в ряд Маклорена функцию $y=\sin^2 x$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Применим метод непосредственного разложения по формуле (14.6).

Вначале найдем производные до n-го порядка и вычислим их значения при $x = 0$:

$f(x) = \sin^2 x$; $f'(x) = 2\sin x\cos x=\sin 2x$; $f''(x) = 2\cos 2x$;
$f'''(x) = -2^2\sin 2x$; $f^{(4)}(x)=-2^3\cos 2x$; $f^{(5)}(x)=2^4\sin 2x$ и т.д.

При $x = 0$ значения функции $f(x)$ и ее производных:

$f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = 2$; $f'''(0) = 0$; $f^{(4)}(0)=-2^3$; $f^{(5)}(0)=0$

и т.д.

Теперь по формуле (14.6) запишем ряд

$$\sin^2 x = 0 + 0 + \frac{2}{2!}x^2+0-\frac{2^3}{4!}x^4+0+\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots$$

или

$$\sin^2 x=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots\ . \qquad \mathbf{(14.16)}$$

Второй способ. Учитывая, что $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, используем готовое разложение (14.10) для функции $\cos x$ (в котором вместо x берем $2x$), умножаем обе части полученного равенства на $\left(-\frac{1}{2}\right)$, а затем прибавляем к ним $\frac{1}{2}$. Получим

$$-\frac{1}{2}\cos 2x=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\quad \text{и}$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}+\ldots$$

или

$$\sin^2 x=x^2-\frac{1}{3}x^4+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

т.е. то же разложение (14.16).

Третий способ. Разложение функции $y=\sin^2 x$ может быть осуществлено с помощью правила перемножения рядов. *Если в некоторой окрестности точки* $x = 0$ *имеют место разложения*

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$
$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots,$$

то произведение функций разлагается в той же окрестности в степенной ряд

$$f(x)\ \varphi(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots+$$
$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)x^n+\ldots\ .$$

В частности, при $f(x) = \varphi(x)$ получаем следующее *правило возведения в квадрат степенного ряда:*

$$f^2(x)=a_0^2+2a_0a_1x+(2a_0a_2+a_1^2)x^2+$$
$$+(2a_0a_3+2a_1a_2)x^3+(2a_0a_4+2a_1a_3+a_2^2)x^4+\ldots\ . \quad \textbf{(14.17)}$$

Для функции $f(x) = \sin x$, имеющей разложение в ряд (14.9), т.е.

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5}x^5 + 0 - \frac{1}{7}x^7+\ldots,$$

находим по формуле (14.17)

$$\sin^2 x=0^2+2\cdot 0\cdot 1x+(2\cdot 0\cdot 0+1^2)x^2+\left(2\cdot 0\left(-\frac{1}{3!}\right)+2\cdot 1\cdot 0\right)x^3+$$
$$+\left(2\cdot 0\cdot 0+2\cdot 1\left(-\frac{1}{3!}\right)+0^2\right)x^4+\ldots=x^2-\frac{1}{3}x^4+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

т.е. получили то же разложение (14.16).

Область сходимости ряда, как нетрудно убедиться, есть $(-\infty; +\infty)$. ▶

▷ **Пример 14.9.** Вычислить с точностью до 0,0001 $\int\limits_0^1 \sqrt{x}e^x dx$.

Р е ш е н и е. Выражение данного интеграла в виде числового ряда находится аналогично примеру **14.6д**:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x}e^x dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7 \cdot 2!} + \frac{2}{9 \cdot 3!} + \ldots + \frac{2}{(2n+3)n!} + \ldots \quad \textbf{(14.18)}$$

Но в отличие от примера **14.6д**, вычисление интеграла свелось не к нахождению суммы сходящегося знакочередующегося ряда, при вычислении которой погрешность оценивается с помощью следствия из теоремы Лейбница, а к определению суммы ряда с положительными членами с неизвестной оценкой погрешности.

Поступим следующим образом. Предположим, что для оценки суммы ряда мы взяли n членов (вместе с первым при $n = 0$). Тогда погрешность вычисления суммы ряда будет определяться остатком ряда

$$r_n = \frac{2}{(2n+3)n!} + \frac{2}{(2n+5)(n+1)!} + \frac{2}{(2n+7)(n+2)!} + \ldots$$

Так как $2n + 5 > 2n + 3$, $2n + 7 > 2n + 3$, … и

$(n + 1)! = n!(n + 1) > n!n$, $(n + 2)! = n!(n + 1)(n + 2) > n!\,n^2$, …, то

$$r_n < \frac{2}{(2n+3)n!} + \frac{2}{(2n+3)n!n} + \frac{2}{(2n+3)n!n^2} + \ldots = \frac{2}{(2n+3)n!} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots\right) = \frac{2}{(2n+3)n!} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{(2n+3)(n-1)!(n-1)},$$

ибо выражение в круглых скобках представляет сумму сходящегося геометрического ряда (13.5) при $a = 1$, $q = \frac{1}{n}$.

При $n = 7$

$$r_n < \frac{2}{17(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)\cdot6} \approx 0{,}00003 < 0{,}0001.$$

(Легко вычислить, что при любых $n < 7$ $r_n > 0{,}0001$.)

Итак, для обеспечения данной в условии точности вычисления интеграла необходимо взять первые 7 членов:

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^x dx \approx 0{,}66667 + 0{,}40000 + 0{,}14286 + 0{,}03704 + 0{,}00758 +$$

$$+ 0{,}00128 + 0{,}00018 = 1{,}25561 \approx 1{,}2556. \blacktriangleright$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти область сходимости степенных рядов:

14.10. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$.

14.11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n x^{2n}$.

14.12. $1 + 2!x + 3!x^2 + 4!x^3 + \ldots$.

14.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$.

14.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

14.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

Разложить в степенной ряд по степеням x функции:

14.16. $y = \frac{e^x - 1}{x}$.

14.17. $y = x \ln(1 + x^2)$.

14.18. $y = \cos^2 x$.

14.19. $y = \frac{x + \ln(1 - x)}{x^2}$.

Вычислить приближенно с точностью до 0,0001:

14.20. $\frac{1}{\sqrt[60]{e^7}}$.

14.21. ln 1,1.

14.22. sin 0,4.

14.23. $\sqrt[3]{130}$.

14.24. $\ln 3$.

14.25. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$.

Вычислить приближенно, взяв первые два члена разложения в ряд подынтегральной функции, и оценить допущенные при этом погрешности:

14.26. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

14.27. $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$.

Раздел Шестой

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 15

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В предыдущих главах мы изучали функции одной переменной. Однако многим явлениям, в том числе экономическим, присуща многофакторная зависимость. Исследование таких зависимостей потребовало совершенствования математического аппарата, в частности введения понятия функции нескольких переменных.

15.1. Основные понятия

Определение. *Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений* $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *из некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной величины z. Тогда говорят, что задана* ***функция нескольких переменных*** $z = f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$.

Например, формула $z = \pi x_1^2 x_2$ задает объем цилиндра z как функцию двух переменных: x_1 (радиуса основания) и x_2 (высоты).

Переменные $x_1,\ \ldots, x_n$ называются *независимыми переменными* или *аргументами, z — зависимой переменной*, а символ f означает *закон соответствия*. Множество X называется *областью определения функции*. Очевидно, это подмножество n-мерного пространства.

▷ **Пример 15.1.** Найти область определения функции:

$$\text{а) } z = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\ ;\ \text{б) } z = \frac{1}{x_1 x_2}.$$

Р е ш е н и е. а) Область определения задается условием: $1 - x_1^2 - x_2^2 \ge 0$ или $x_1^2 + x_2^2 \le 1$, т.е. представляет собой единичный круг с центром в начале координат.

б) Имеем $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, т.е. область определения — это плоскость Ox_1x_2 за исключением координатных прямых Ox_1 и Ox_2. ▶

Рассмотрим некоторые примеры функций нескольких переменных.

1. Функция $z = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b$, где a_1, …, a_n, b — постоянные числа, называется *линейной*. Ее можно рассматривать как сумму n линейных функций от переменных x_1, …, x_n.

2. Функция $z = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$ (b_{ij} — постоянные числа) называется *квадратической*. В отличие от предыдущего примера квадратическая функция не является сепарабельной, т.е. не раскладывается в сумму функций одной переменной.

3. В § 5.6 была определена *функция полезности* — одно из базовых понятий экономической теории. Многомерный ее аналог — это функция $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, выражающая полезность от n приобретенных товаров. Чаще всего встречаются следующие ее виды:

а) $z = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i)$, где $a_i > 0$, $x_i > c_i \geq 0$ — *логарифмическая функция*;

б) $z = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i}(x_i - c_i)^{1-b_i}$. Здесь $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$; $x_i > c_i \geq 0$. Такая функция называется *функцией постоянной эластичности*.

4. Также на случай n переменных обобщается понятие *производственной функции* (см. § 5.6), выражающей результат производственной деятельности от обусловивших его факторов x_1, x_2, …, x_n. Приведем здесь наиболее часто встречающиеся виды производственных функций (z — величина общественного продукта, x_1 — затраты труда, x_2 — объем производственных фондов), полагая для простоты $n = 2$:

а) *функция Кобба—Дугласа*

$$z = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2};$$

б) *функция с постоянной эластичностью замещения:*

$$z = e_0\left[e_1x_1^{-\beta} + e_2x_2^{-\beta}\right]^{-\frac{h}{\beta}}.$$

В настоящей главе мы будем вести изложение в основном для функций двух переменных ($n = 2$), при этом практически все понятия и теоремы, сформулированные для $n = 2$, легко переносятся и на случай $n > 2$. Однако рассмотрение случая двух переменных позволяет использовать наглядную геометрическую иллюстрацию основных понятий настоящей главы.

Функцию двух переменных будем обозначать в дальнейшем $z = f(x, y)$. Тогда ее область определения X есть подмножество координатной плоскости Oxy.

Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0) \in X$ называется круг, содержащий точку M_0 (см. рис. 15.1).

Очевидно, круг на плоскости есть двумерный аналог интервала на прямой.

При изучении функций нескольких переменных во многом используется уже разработанный в предыдущих главах математический аппарат. А именно: любой функции $z = f(x, y)$ можно поставить в соответствие пару функций одной переменной: при фиксированном значении $x = x_0$ функцию $z = f(x_0, y)$ и при фиксированном значении $y = y_0$ функцию $z = f(x, y_0)$.

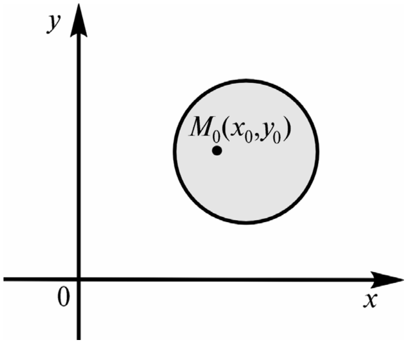


Рис. 15.1

Следует иметь в виду, что хотя функции $z = f(x, y_0)$ и $z = f(x_0, y)$ имеют одно и то же «происхождение», вид их может существенно различаться. Рассмотрим, например, функцию $z = K_0\left(1 + \frac{x}{100}\right)^y$, выражающую величину вклада через y лет при ставке $x\%$. Очевидно, что это функция степенная по x и показательная по y.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства (x, y, z), аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональным соотношением $z = f(x, y)$.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$, вообще говоря, *представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве*[1].

Для построения графика функции $z = f(x, y)$ полезно рассматривать функции одной переменной $z = f(x, y_0)$ и $z = f(x_0, y)$, представляющие с е ч е н и я графика $z = f(x, y)$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz, т.е. плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$.

▷ **Пример 15.2.** Построить график функции $z = x^2 + y^2 - 2y$.

Р е ш е н и е. Сечения поверхности $z = x^2 + y^2 - 2y = x^2 + (y-1)^2 - 1$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oyz и Oxz, представляют параболы (например, при $x = 0$ $z = (y-1)^2 - 1$, при $y = 1$ $z = x^2 - 1$ и т.д.). В сечении поверхности координатной плоскостью Oxy, т.е. плоскостью $z = 0$, получается окружность $x^2 + (y-1)^2 = 1$. График функции представляет поверхность, называемую *параболоидом* (см. рис. 15.2). ▶

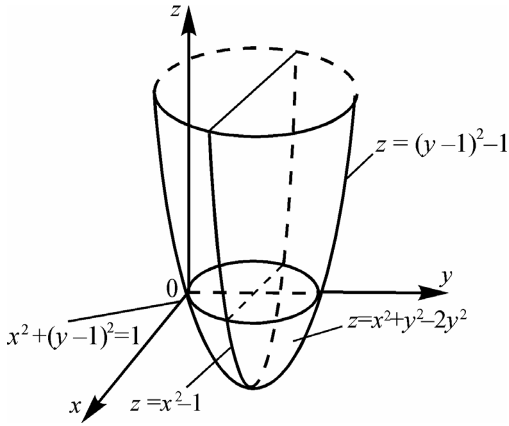


Рис. 15.2

Как видно, график функции двух переменных — значительно более сложный объект, чем график функции одной переменной. Как правило, построение поверхности оказывается довольно

---

[1] Формально график можно определить и для $n > 2$. В этом случае он называется *гиперповерхностью в* $(n+1)$*-мерном пространстве*. О таком графике можно говорить только абстрактно — изобразить его на рисунке не представляется возможным.

трудной задачей. В то же время поверхность в пространстве обладает гораздо меньшей наглядностью, чем линия на плоскости. Поэтому в случае двух переменных для изучения поведения функции желательно использовать другие, более наглядные инструменты. Важнейшим из них являются линии уровня.

Определение. ***Линией уровня*** *функции двух переменных* $z = f(x, y)$ *называется множество точек на плоскости, таких, что во всех этих точках значение функции одно и то же и равно* C.

Число C в этом случае называется *уровнем.*

На рис. 15.3 изображены линии уровня, соответствующие значениям $C = 1$ и $C = 2$. Как видно, линия уровня L_1 состоит из двух непересекающихся кривых. Линия L_2 — самопересекающаяся кривая.

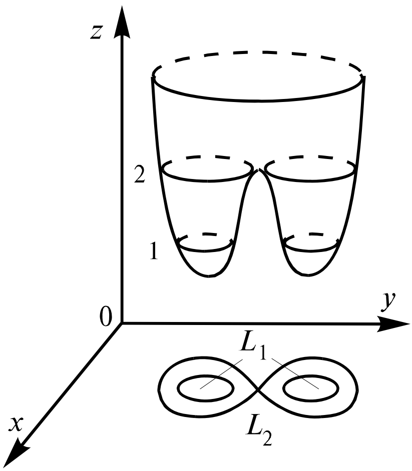


Рис. 15.3

Многие примеры линий уровня хорошо известны и привычны. Например, параллели и меридианы на глобусе — это линии уровня функций широты и долготы. Синоптики публикуют карты с изображением изотерм — линий уровня температуры. В § 15.10 мы рассмотрим примеры использования линий уровня функций нескольких переменных в экономическом анализе. Построение линий уровня оказывается существенно более легкой задачей, чем построение графиков самих функций.

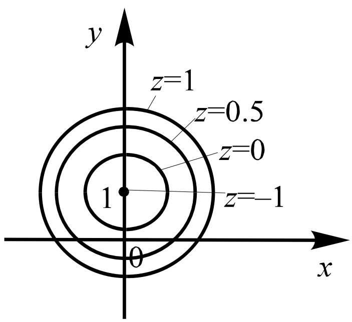


Рис. 15.4

▷ **Пример 15.3.** Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2 - 2y$.

Р е ш е н и е. Линия уровня $z = C$ — это кривая на плоскости Oxy, задаваемая уравнением $x^2 + y^2 - 2y = C$ или $x^2 + (y-1)^2 = C + 1$. Это уравнение окружности с центром в точке (0; 1) и радиусом $\sqrt{C+1}$ (рис. 15.4).

Точка (0; 1) — это вырожденная линия уровня, соответствующая минимальному значению функции $z = -1$, достигаемому в точке (0; 1). Линии уровня — концентрические окружности, радиус которых увеличивается с ростом $z = C$, причем расстояния между линиями с одинаковым шагом уровня уменьшаются по мере удаления от центра. Линии уровня позволяют представить график данной функции, который был ранее построен на рис. 15.2. ▶

15.2. Предел и непрерывность

Бóльшая часть понятий математического анализа, определенных ранее для функций одной переменной, может быть перенесена на случай двух переменных.

Определение. *Число A называется* ***пределом функции*** $z = f(x, y)$ ***при*** $x \to x_0$ ***и*** $y \to y_0$ **(или в *точке*** (x_0, y_0)**)**, *если для любого даже сколь угодно малого положительного числа* $\varepsilon > 0$ *найдется положительное число* $\delta > 0$ (*зависящее от* ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), *такое, что для всех точек* (x, y), *отстоящих от точки* (x_0, y_0) *на расстояние* ρ, *меньшее, чем* δ[1] (*т.е. при* $0 < \rho < \delta$), *выполняется неравенство*

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Обозначается предел так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

▷ **Пример 15.4.** Найти предел

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Р е ш е н и е. Обозначим $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$. Условие $x \to 0$, $y \to 0$ равносильно тому, что $\rho \to 0$. Запишем предел в виде

[1] Напомним, что по формуле (3.5) расстояние между точками (x_0, y_0) и (x, y) на плоскости имеет вид $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\ln(1-\rho^2)}{\rho} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\rho\to 0} \frac{(\ln(1-\rho^2))'}{\rho'} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{1}{1-\rho^2}(-2\rho)}{1} = 0. \ \blacktriangleright$$

Как правило, вычисление пределов функций двух переменных оказывается существенно более трудной задачей по сравнению со случаем одной переменной. Причина заключается в том, что на прямой существуют всего два направления, по которым аргумент может стремиться к предельной точке — а именно, справа и слева (см. § 6.2). На плоскости же таких направлений — бесконечное множество, и пределы функции по разным направлениям могут не совпадать.

$\triangleright$ **Пример 15.5.** Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не существует.

Р е ш е н и е. Будем приближаться к точке (0; 0) по прямым $y = kx$.

Если $y = kx$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x(kx)}{x^2+(kx)^2} = \dfrac{2k}{1+k^2}$.

Получили, что значение предела зависит от углового коэффициента прямой. Но так как предел функции не должен зависеть от способа приближения точки $(x;\ y)$ к точке (0; 0) (например, по прямой $y = 2x$ или $y = 5x$), то рассматриваемый предел не существует. $\blacktriangleright$

Определение. *Функция* $z = f(x,\ y)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $(x_0,\ y_0)$, *если она*: 1) *определена в точке* $(x_0,\ y_0)$; 2) *имеет конечный предел при* $x \to x_0$ и $y \to y_0$; 3) *этот предел равен значению функции в точке* $(x_0,\ y_0)$, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Геометрический смысл непрерывности очевиден: график в точке $(x_0,\ y_0)$ представляет собой сплошную, нерасслаивающуюся поверхность.

15.3. Частные производные

Дадим аргументу x приращение Δx, аргументу y — приращение Δy. Тогда функция z получит наращенное значение $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$. Величина $\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$ называется *полным приращением функции* в точке $(x;\ y)$. Если задать только приращение аргумента x или только приращение аргумента y, то полученные приращения функции соответственно $\Delta_x z = f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)$ и $\Delta_y z = f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$ называются *частными*.

Полное приращение функции, вообще говоря, не равно сумме частных, т.е.

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

▷ **Пример 15.6.** Найти частные и полное приращения функции $z = xy$.

Решение. $\Delta_x z = (x+\Delta x)y - xy = y\Delta x$; $\Delta_y z = x(y+\Delta y) - xy = x\Delta y$. $\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$.

Получили, что

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z\,.$$

Определение. ***Частной производной функции нескольких переменных*** *по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).*

Обозначается частная производная так: z'_x, z'_y или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, или $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$.

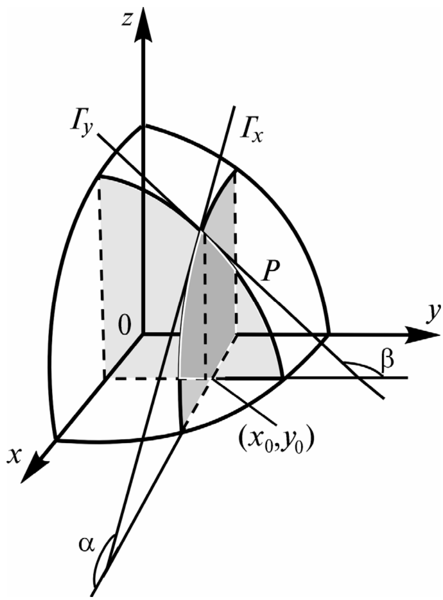


Рис. 15.5

Таким образом, для функции $z = f(x, y)$ по определению

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \qquad \textbf{(15.1)}$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \qquad \textbf{(15.2)}$$

Геометрический смысл частных производных функции $z = f(x, y)$ в точке $(x_0, \ y_0)$ показан на рис. 15.5.

Пусть график функции $z = f(x, y)$ представляет некоторую поверхность *P*. Тогда при $y = y_0$ мы получаем кривую Γ_x — сечение этой поверхности соответствующей плоскостью.

В этом случае производная z'_x выражает угловой коэффициент касательной к кривой Γ_x, в заданной точке (x_0, y_0), т.е. $z'_x(x_0, \ y_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α угол наклона касательной к оси *Ox*. Аналогично $z'_y(x_0, \ y_0) = \operatorname{tg}\beta$.

Из определения частных производных (15.1), (15.2) следует, что *для нахождения производной* $z'_x(x, y)$ *надо считать постоянной переменную y, а для нахождения* $z'_y(x, y)$ — *переменную x*. При этом сохраняются известные из гл. 7 правила дифференцирования.

▷ **Пример 15.7.** Найти частные производные функций:

а) $z = x \ln y + \dfrac{y}{x}$; б) $z = x^y$.

Р е ш е н и е. а) Чтобы найти частную производную по x, считаем y постоянной величиной. Таким образом, $z'_x = \ln y + y\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \ln y - \dfrac{y}{x^2}$. Аналогично, дифференцируя по y, считаем x постоянной величиной, т.е. $z'_y = x(\ln y)' + \dfrac{1}{x} \cdot y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x}$.

б) При фиксированном y имеем степенную функцию от x. Таким образом, $z'_x = yx^{y-1}$. При фиксированном x функция является показательной относительно y и $z'_y = x^y \ln x$. ▶

▷ **Пример 15.8.** Поток пассажиров z выражается функцией $z = \dfrac{x^2}{y}$, где x — число жителей, y — расстояние между городами. Найти частные производные и пояснить их смысл.

Р е ш е н и е. Производная $z'_x = \dfrac{2x}{y}$ показывает, что при одном и том же расстоянии между городами увеличение потока пассажиров пропорционально удвоенному числу жителей. Производная $z'_y = -\dfrac{x^2}{y^2}$ показывает, что при одной и той же численности жителей увеличение потока пассажиров обратно пропорционально квадрату расстояния между городами. ▶

15.4. Дифференциал функции

В § 9.1 дифференциал функции $y = f(x)$ определялся как главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции, равная произведению $f'(x)\Delta x$.

Обобщая определение дифференциала функции на случай двух независимых переменных, приходим к следующему определению.

Определение. ***Дифференциалом функции*** *называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных*, т.е.

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y. \qquad \textbf{(15.3)}$$

Учитывая, что для функций $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ согласно (15.3) $df = dx = \Delta x$; $dg = dy = \Delta y$, формулу дифференциала (15.3) можно записать в виде

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \qquad \textbf{(15.4)}$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy .$$

Определение. *Функция $z = f(x, y)$ называется* ***дифференцируемой*** *в точке (x, y), если ее полное приращение может быть представлено в виде*

$$\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y, \qquad \textbf{(15.5)}$$

где dz — дифференциал функции, $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ — *бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.*

Таким образом, *дифференциал функции двух переменных,* как и в случае одной переменной, *представляет главную, линейную относительно приращений* Δx и Δy, *часть полного приращения функции.*

Можно показать, что если полное приращение функции Δz представляет геометрически приращение аппликаты поверхности $z = f(x, y)$, то *дифференциал функции dz есть приращение аппликаты касательной плоскости к поверхности* $z = f(x, y)$ *в данной точке, когда переменные x* и *y получают приращения* Δx и Δy (см. рис. 15.6).

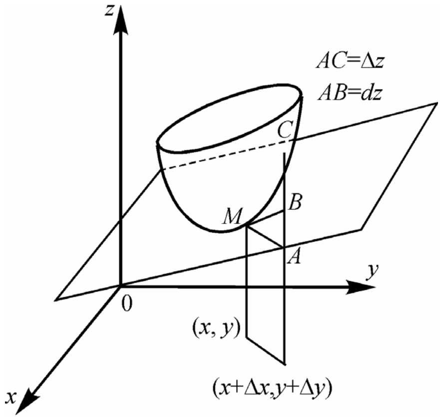


Рис. 15.6

Следует отметить, что для функции одной переменной $y = f(x)$ существование конечной производной $f'(x)$ и представление приращения функции в виде (9.1), т.е. $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x$, являются равнозначными утверждениями, и любое из них могло быть взято за определение дифференцируемости функции[1].

Для функции нескольких переменных дело обстоит иначе: *существование частных производных является лишь необходимым, но недостаточным условием дифференцируемости функции.*

Следующая теорема выражает *достаточное* условие дифференцируемости функции двух переменных.

Теорема. *Если частные производные функции* $z'_x(x, y)$ *и* $z'_y(x, y)$ *существуют в окрестности точки* (x, y) *и непрерывны в самой точке* (x, y), *то функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в этой точке.*

15.5. Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, l — некоторое направление, задаваемое еди-

[1] Напомним, что в гл. 7 за определение дифференцируемости функции $y = f(x)$ было взято первое утверждение — существование производной.

ничным вектором $\vec{e} = (\cos\alpha;\ \cos\beta)$, где $|\vec{e}| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, ибо $\alpha + \beta = \pi/2$ (или $3\pi/2$); $\cos\alpha$, $\cos\beta$ — косинусы углов, образуемых вектором $\vec{e}$ с осями координат и называемые *направляющими косинусами*.

При перемещении в данном направлении l точки $M(x, y)$ в точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ функция z получит приращение $\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, называемое *приращением функции z в данном направлении l* (рис. 15.7).

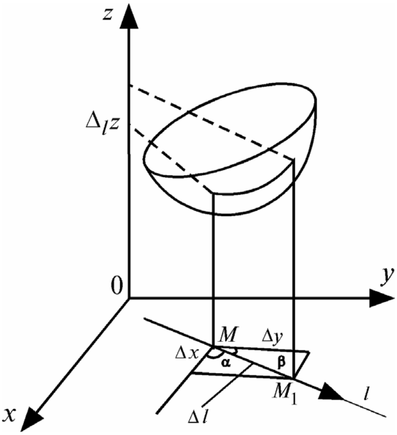


Рис. 15.7

Если $MM_1 = \Delta l$, то, очевидно, что $\Delta x = \Delta l \cos\alpha$; $\Delta y = \Delta l \cos\beta$, следовательно, $\Delta_l z = f(x + \Delta l\cos\alpha;\ y + \Delta l\cos\beta) - f(x, y)$.

Определение. ***Производной*** z'_l ***по направлению*** *l функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl при стремлении последней к нулю*, т.е.

$$z'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}. \qquad \textbf{(15.6)}$$

Производная z'_l характеризует *скорость изменения функции в направлении l*.

Очевидно, что рассмотренные ранее частные производные z'_x и z'_y представляют производные по направлениям, параллельным соответственно осям Ox и Oy.

Нетрудно показать, что

$$z'_l = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta. \qquad \textbf{(15.7)}$$

Рассмотрим понятие градиента функции $z = f(x, y)$.

Определение. ***Градиентом*** ∇z ***функции*** *$z = f(x, y)$ называется вектор с координатами* (z'_x, z'_y).

Рассмотрим скалярное произведение (см. § 3.1) вектора $\nabla z = (z'_x, z'_y)$ и единичного вектора $\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta)$. Получим

$$(\nabla z, \vec{e}) = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta. \quad \textbf{(15.8)}$$

Сравнивая равенства (15.7) и (15.8), получим, что $z'_l = (\nabla z, \vec{e})$, т.е. *производная по направлению есть скалярное произведение градиента* ∇z *и единичного вектора, задающего направление* l.

Известно (см. § 3.1), что скалярное произведение двух векторов максимально, если они одинаково направлены. Следовательно, *градиент функции* ∇z *в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.*

Зная градиент функции в каждой точке, можно по крайней мере локально строить линии уровня функции. А именно, имеет место теорема.

Теорема. *Пусть задана дифференцируемая функция* $z = f(x, y)$ *и пусть в точке* $M(x_0, y_0)$ *величина градиента отлична от нуля. Тогда градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку.*

□ Линия уровня L_c задается уравнением $f(x, y) = C$ (где $C = f(x_0, y_0)$). Предположим, что это уравнение можно разрешить относительно y, т.е. $y = g(x)$ на L_c (если это невозможно, то следует разрешить уравнение относительно x и повторить все рассуждения с точностью до обозначений).

Таким образом, касательный вектор имеет координаты $(1, g'(x))$. Умножив его компоненты на dx, получим, что вектор $(dx, g'(x)dx)$, т.е. (dx, dy), касателен к линии уровня L_c (см. рис. 15.8).

Между тем на линии уровня $f(x, y) = \text{const}$, т.е. $df|_{L_c} = 0$, откуда $z'_x dx + z'_y dy = 0$ на L_c. Но $z'_x dx + z'_y dy$ — скалярное произведение вектора градиента (z'_x, z'_y) и вектора (dx, dy), касательного к L_c, т.е. рассматриваемые векторы перпендикулярны. ■

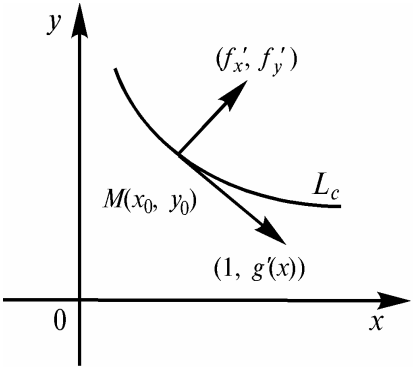


Рис. 15.8

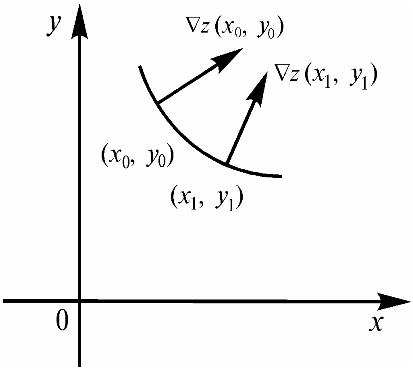


Рис. 15.9

Таким образом, линии уровня можно построить следующим образом (см. рис. 15.9). Предположим, мы начинаем с точки (x_0, y_0). Построим градиент в этой точке. Задаем направление, перпендикулярное градиенту. Оно позволяет построить малую часть линии уровня. Далее рассмотрим близкую точку (x_1, y_1) и построим градиент в ней.

Продолжая этот процесс, можно (с определенной погрешностью) построить линии уровня.

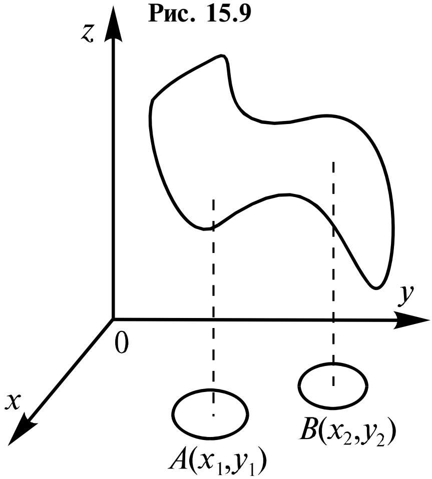


Рис. 15.10

15.6. Экстремум функции нескольких переменных

Как и в случае одной переменной, функция $z = f(x, y)$ имеет узловые, определяющие структуру графика точки. В первую очередь это точки экстремума.

Определение. *Точка $M(x_0, y_0)$ называется* ***точкой максимума (минимума)*** *функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M, такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

$$(f(x_0, y_0) \le f(x, y)).$$

На рис. 15.10 точка $A(x_1, y_1)$ — есть точка минимума, а точка $B(x_2, y_2)$ — точка максимума.

Обращаем внимание на *локальный* характер экстремума (максимума и минимума) функции, так как речь идет о максимальном и минимальном значении лишь в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0).

Сформулируем *необходимое* условие экстремума — многомерный аналог теоремы Ферма.

Теорема. *Пусть точка (x_0, y_0) — есть точка экстремума дифференцируемой функции $z = f(x, y)$. Тогда частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ в этой точке равны нулю.*

□ Пусть точка $M(x_0, y_0)$ — точка максимума. Зафиксируем одну из переменных, например y, полагая $y = y_0$. Тогда получим функцию одной переменной $z_1 = f(x, y_0)$, которая, очевидно, будет иметь максимум при $x = x_0$. Согласно теореме Ферма $z'_1(x_0) = f'_x(x, y_0) = 0$. Аналогично можно доказать, что и $f'_y(x_0, y_0) = 0$. ■

Точки, в которых выполнены необходимые условия экстремума функции $z = f(x, y)$, т.е. частные производные z'_x и z'_y равны нулю, называются *критическими* или *стационарными*.

Необходимое условие экстремума можно переформулировать также следующим образом: *в точке минимума или максимума дифференцируемой функции градиент равен нулю.* Можно доказать и более общее утверждение — *в точке экстремума обращаются в нуль производные функции по всем направлениям.*

Равенство частных производных нулю выражает лишь необходимое, но недостаточное условие экстремума функции нескольких переменных.

На рис. 15.11 изображена так называемая *седловая точка* $M(x_0, y_0)$. Частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ равны нулю, но, очевидно, никакого экстремума в точке $M(x_0, y_0)$ нет.

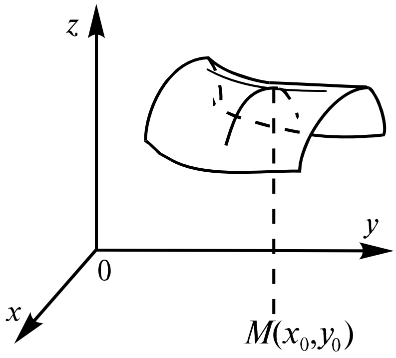


Рис. 15.11

Такие седловые точки являются двумерными аналогами точек перегиба функций одной переменной. Задача заключается в том, чтобы отделить их от точек экстремума. Иными словами, требуется знать *достаточное* условие экстремума.

Прежде чем это сделать, введем понятия частных производных второго порядка.

Если частные производные $z'_x = f'_x(x, y)$ и $z'_y = f'_y(x, y)$ сами являются дифференцируемыми функциями, то можно найти также и их частные производные, которые называются *частными производными второго порядка.*

Вычислив частные производные функции $z'_x = f'_x(x, y)$, получим $z''_{xx} = f''_{xx}(x, y)$ и $z''_{yx} = f''_{yx}(x, y)$. Аналогично можно определить две частные производные функции $z'_y = f'_y(x, y)$, которые обозначаются $z''_{yy} = f''_{yy}(x, y)$ и $z''_{xy} = f''_{xy}(x, y)$.

Можно доказать, что *если частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0), то в этой точке $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

Теперь мы можем сформулировать достаточное условие экстремума.

Теорема (достаточное условие экстремума функции двух переменных). *Пусть функция $z = f(x, y)$:* а) *определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$;*

б) *имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка* $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$; $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)=B$; $f''_{yy}(x_0,y_0)=C$. *Тогда, если* $\Delta=AC-B^2>0$, *то в точке* (x_0,y_0) *функция* $z=f(x, y)$ *имеет экстремум, причем если* $A<0$ — *максимум, если* $A>0$ — *минимум. В случае* $\Delta=AC-B^2<0$, *функция* $z=f(x, y)$ *экстремума не имеет. Если* $\Delta=AC-B^2=0$, *то вопрос о наличии экстремума остается открытым.*

Исследование функции двух переменных на экстремум рекомендуется проводить по следующей **схеме:**

1°. Найти частные производные функции z'_x и z'_y.

2°. Решить систему уравнений $z'_x=0$, $z'_y=0$ и найти критические точки функции.

3°. Найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов.

4°. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

▷ **Пример 15.9.** Найти экстремумы функции

$$z=\frac{2(x+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Р е ш е н и е. 1°. Находим частные производные

$$z'_x=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},\quad z'_y=\frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

2°. Критические точки функции находим из системы уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0,\\[2mm] \dfrac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2} = 0,\end{cases}$$

имеющей четыре решения (1; 1), (1; −1), (−1; 1) и (−1; −1).

3°. Находим частные производные второго порядка:

$z''_{xx}=\dfrac{4x\left(x^2-3\right)}{(1+x^2)^2}$; $z''_{xy}=z''_{yx}=0$; $z''_{yy}=\dfrac{4y\left(y^2-3\right)}{(1+y^2)^2}$, вычисляем их значения в каждой критической точке и проверяем в ней выполнение достаточного условия экстремума.

Например, в точке (1; 1) $A=z''(1;\ 1)=-1$; $B=0$; $C=-1$. Так как $\Delta=AC-B^2=(-1)^2-0=1>0$ и $A=-1<0$, то точка (1; 1) есть точка максимума.

Аналогично устанавливаем, что (−1; −1) — точка минимума, а в точках (1; −1) и (−1; 1), в которых $\Delta=AC-B^2<0$, — экстремума нет. Эти точки являются седловыми.

4°. Находим экстремумы функции $z_{\max}=z(1;\ 1)=2$, $z_{\min}=$ $=z(-1;\ -1)=-2$.

15.7. Наибольшее и наименьшее значения функции

При нахождении *наибольшего и наименьшего значений* (т.е. *глобального максимума и минимума*) функции нескольких переменных, непрерывной на некотором замкнутом[1] множестве, следует иметь в виду, что эти значения достигаются или в точках экстремума, или на границе множества.

▷ **Пример 15.10.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}$ на круге радиуса 1 с центром в начале координат.

Р е ш е н и е. 1. Найдем частные производные функции

$$z'_x=-\frac{2x}{(1+x^2)^2};\ z'_y=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

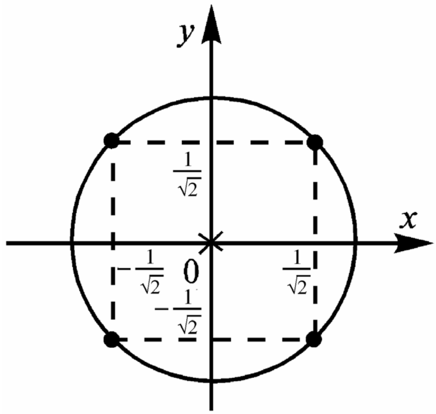
2. Найдем критические точки функции из системы $z'_x=0$, $z'_y=0$, откуда $x=0$, $y=0$; т.е. имеется одна критическая точка (0; 0).

[1] Множество называется *замкнутым,* если оно включает все свои *граничные* (*предельные*) точки, т.е. точки, окрестности которых содержат точки как принадлежащие множеству, так и не принадлежащие ему.

3. Найдем критические точки функции на границе области — окружности, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Подставляя $y^2 = 1 - x^2$ в функцию $z = z(x, y)$, получим функцию одной переменной $z = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2-x^2} = \frac{3}{2+x^2-x^4}$, причем $x \in [-1; 1]$.

Найдя производную $z' = \frac{2x(2x^2-1)}{(2+x^2-x^4)^2}$ и приравнивая ее к нулю, получим критические точки на границе области: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Найдем значения функции $z = f(x, y)$ в критических точках внутри области $z = (0; 0) = 2$ и на ее границе $z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3}$, а также на концах отрезка $[-1; 1]$ на границе области $z(-1) = = z(1) = \frac{3}{2}$ и выбираем среди них наибольшее и наименьшее.



х — точка наибольшего значения,
• — точка наименьшего значения

Рис. 15.12

Итак, $z_{\text{наиб}} = z(0, 0) = 2$ и

$$z_{\text{наим}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3}$$ (рис. 15.12). ▶

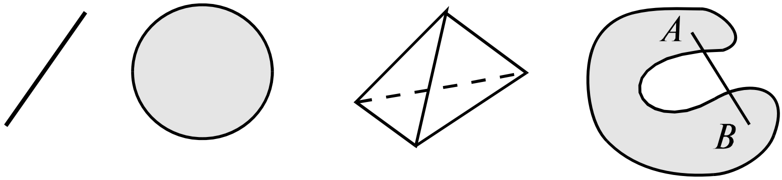
В заключение параграфа рассмотрим класс выпуклых функций, для которых задача нахождения экстремальных значений существенно упрощается.

Определим сначала множества, на которых задается этот класс функций.

Определение. *Подмножество D n-мерного пространства называется* ***выпуклым,*** *если для любых двух точек A и B, принадлежа-*

щих D, отрезок, соединяющий эти точки, также целиком принадлежит D.

Например, множества, изображенные на рис. 15.13а, — выпуклые, а множество на рис. 15.13б — невыпуклое.



а) б)

Рис. 15.13

Простыми и наиболее естественными примерами выпуклых множеств являются само пространство, а также его положительный сектор, заданный условиями $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Определение. *Функция $z = f(x, y)$, заданная на выпуклом множестве D, называется **выпуклой вниз**, если для любых двух точек* (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)}{2},$$

*и **выпуклой вверх**, если*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \geq$$

$$\geq \frac{f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)}{2}.$$

График функции, выпуклой вниз, изображен на рис. 15.14.

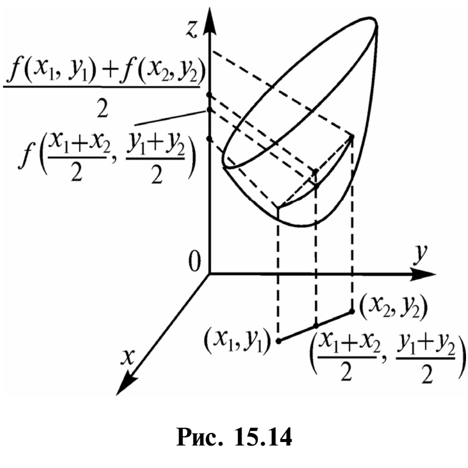


Рис. 15.14

Очевидно, выпуклая функция не может иметь седловых точек, подобных изображенной на рис. 15.11. Это значит, что для *выпуклой функции равенство ее частных производных нулю является не только необходимым, но и достаточным условием экстремума.* Более того, *экстремум выпуклой функции является глобальным*, т.е. *наименьшим значением* в случае *функции, выпуклой вниз, и наибольшим* — в случае *функции, выпуклой вверх.*

Задача нахождения максимумов и минимумов функций многих переменных значительно сложнее аналогичной задачи для функций одной переменной. Даже в самых простых случаях чисто технические проблемы могут вызвать значительные трудности. Задаче нахождения подобных экстремумов посвящен специальный раздел математики — *вариационное исчисление.* В последние десятилетия бурное развитие переживает комплексная научная дисциплина — *исследование операций*, посвященная поиску оптимальных решений в различных, в том числе и экономических, задачах, в которых исследуемая (*целевая*) функция нескольких переменных принимает наибольшее или наименьшее значение.

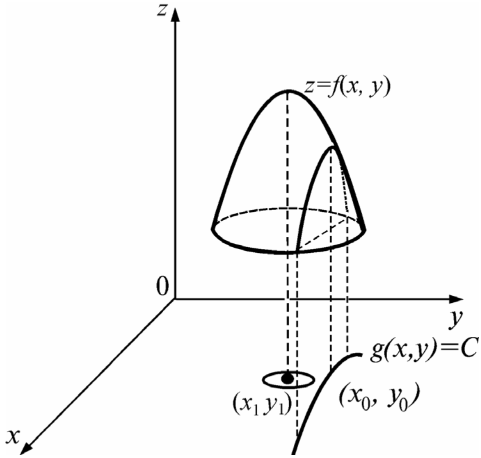


Рис. 15.15

15.8. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу, специфическую для функций нескольких переменных, когда ее экстремум ищется не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющем некоторому условию.

Пусть рассматривается функция $z = f(x, y)$, аргументы x и y которой удовлетворяют условию $g(x, y) = C$, называемому *уравнением связи.*

Определение. *Точка* (x_o, y_o) *называется точкой* ***условного максимума (минимума)****, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек* (x, y) *из этой окрестности, удовлетворяющих условию* $g(x, y) = C$*, выполняется неравенство*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \ (f(x_0, y_0) \leq f(x, y)).$$

На рис. 15.15 изображена точка условного максимума (x_0, y_0). Очевидно, что она не является точкой безусловного экстремума функции $z = f(x, y)$ (на рис. 15.15 это точка (x_1, y_1)).

Наиболее простым способом нахождения условного экстремума функции двух переменных является сведение задачи к отысканию экстремума функции одной переменной. Допустим уравнение связи $g(x, y) = C$ удалось разрешить относительно одной из переменных, например выразить y через x: $y = \varphi(x)$. Подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получим $z = f(x, y) = f(x, \varphi(x))$, т.е. функцию о д н о й переменной. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z = f(x, y)$.

▷ **Пример 15.11**. Найти точки максимума и минимума функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$.

Р е ш е н и е . Выразим из уравнения $3x + 2y = 11$ переменную y через переменную x и подставим полученное выражение $y = \frac{11-3x}{2}$ в функцию z. Получим $z = x^2 + 2\left(\frac{11-3x}{2}\right)^2$ или $z = \frac{11}{2}\left(x^2 - 6x + 11\right)$. Эта функция имеет единственный минимум при $x_0 = 3$. Соответствующее значение функции $y_0 = \frac{11-3x_0}{2} = 1$. Таким образом, (3; 1) — точка условного экстремума (минимума). ▶

В рассмотренном примере уравнение связи $g(x, y) = C$ оказалось линейным, поэтому его легко удалось разрешить относительно одной из переменных. Однако в более сложных случаях сделать это не удается.

Для отыскания условного экстремума в общем случае используется *метод множителей Лагранжа.*

Рассмотрим функцию трех переменных $L(x, y, \lambda) = f(x, y) +$ $+ \lambda(g(x, y) - C)$.

Эта функция называется *функцией Лагранжа,* а λ — *множителем Лагранжа.* Верна следующая теорема.

Теорема. *Если точка* (x_0, y_0) *является точкой условного экстремума функции* $z = f(x, y)$ *при условии* $g(x, y) = C$, *то существует значение* λ_0 *такое, что точка* (x_0, y_0, λ_0) *является точкой экстремума функции* $L(x, y, \lambda)$.

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $g(x, y) = C$ требуется найти решение системы

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0, \\ L'_y = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0, \\ L'_\lambda = g(x,y) - C = 0. \end{cases}$$

Последнее из этих уравнений совпадает с уравнением связи. Первые два уравнения системы можно переписать в виде

$$\text{grad}\, f = -\lambda\, \text{grad}\, g,$$

т.е. в *точке условного экстремума градиенты функций* $f(x, y)$ и $g(x, y)$ *коллинеарны.*

На рис. 15.16 показан геометрический смысл условий Лагранжа. Линия $g(x, y) = C$ пунктирная, линии уровня $g(x, y) = Q$ функции $z = f(x, y)$ сплошные.

Из рис. 15.16 следует, что *в точке условного экстремума линия уровня функции* $z = f(x, y)$ *касается линии* $g(x, y) = C$.

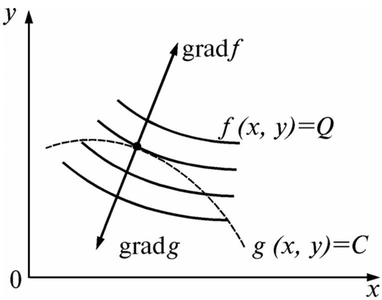


Рис. 15.16

▷ **Пример 15.12.** Найти точки экстремума функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$, используя метод множителей Лагранжа.

Р е ш е н и е. Составляем функцию Лагранжа $L = x^2 + 2y^2 + \lambda(3x + 2y - 11)$. Приравнивая к нулю ее частные производные, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3\lambda = 0, \\ 4y + 2\lambda = 0, \\ 3x + 2y - 11 = 0. \end{cases}$$

Ее единственное решение ($x = 3$, $y = 1$, $\lambda = -2$). Таким образом, точкой условного экстремума может быть только точка (3; 1). Нетрудно убедиться в том, что в этой точке функция $z = f(x, y)$ имеет условный минимум. ▶

В случае, если число переменных более двух, может рассматриваться и несколько уравнений связи. Соответственно в этом случае будет и несколько множителей Лагранжа.

Мы не рассматриваем здесь достаточные условия условного экстремума. Отметим только, что во многих задачах критическая точка функции Лагранжа оказывается единственной и соответствует не только локальному, но и глобальному условному минимуму или максимуму.

Задача нахождения условного экстремума используется при решении таких экономических задач, как нахождение оптимального распределения ресурсов, выбор оптимального портфеля ценных бумаг и др. (подробнее см. § 15.11).

15.9. Понятие об эмпирических формулах. Метод наименьших квадратов

На практике мы часто сталкиваемся с задачей о сглаживании экспериментальных зависимостей.

Пусть зависимость между двумя переменными x и y выражается в виде таблицы, полученной опытным путем. Это могут быть результаты опыта или наблюдений, статистической обработки материала и т.п.

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Требуется наилучшим образом сгладить экспериментальную зависимость между переменными x и y, т.е. по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x, исключив при этом случайные отклонения, связанные с неизбежными погрешностями измерений или статистических наблюдений. Такую сглаженную зависимость стремятся представить в виде формулы $y = f(x)$.

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, получили название *эмпирических формул.*

Задача нахождения эмпирических формул разбивается на два этапа. На первом этапе нужно установить **вид зависимости** $y = f(x)$, т.е. решить, является ли она линейной, квадратичной, логарифмической или какой-либо другой.

Предположим, например, что результаты экспериментальных исследований нанесены на плоскость (паре чисел $(x_i,\ y_i)$ соответствует точка с такими же координатами). Разумеется, существует множество кривых, проходящих через эти точки (см. рис. 15.17).

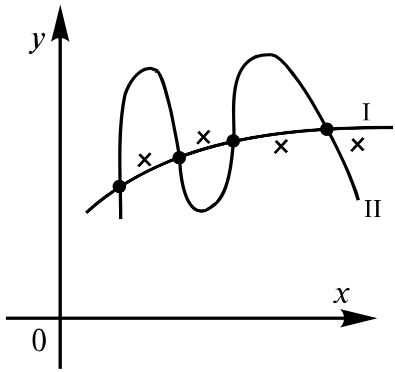


Рис. 15.17

Для продвижения к цели обычно предполагают, что кривая истинной зависимости — это наиболее «гладкая» кривая, согласованная с эмпирическими данными. Так, в случае, изображенном на рис. 15.17, исследователь несомненно предпочтет кривую I кривой II.

Для проверки правильности вывода проводятся дополнительные исследования, т.е. производится еще ряд одновременных измерений величин x и y. Дополнительные точки наносятся на плоскость. Если они оказываются достаточно близкими к выбранной кривой (на рис. 15.17 дополнительные точки изображены крестиками), то можно считать, что вид кривой установлен. В противном случае кривую надо скорректировать и вновь провести дополнительные измерения.

Кроме того, для выбора функции $y = f(x)$ привлекаются дополнительные соображения, как правило, не математического характера (теоретические предпосылки, опыт предшествующих исследований и т.п.).

Предположим, первый этап завершен — вид функции $y = f(x)$ установлен. Тогда переходят ко второму этапу — **определению неизвестных параметров этой функции.**

Согласно наиболее распространенному и теоретически обоснованному методу наименьших квадратов в качестве неизвестных параметров функции $f(x)$ выбирают такие значения, чтобы сумма квадратов *невязок* δ_i, или отклонений «*теоретических*» *значений* $f(x_i)$, найденных по эмпирической формуле $y = f(x)$, от соответствующих *опытных значений* y_i, т.е.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \qquad \textbf{(15.9)}$$

была минимальной (рис. 15.18).

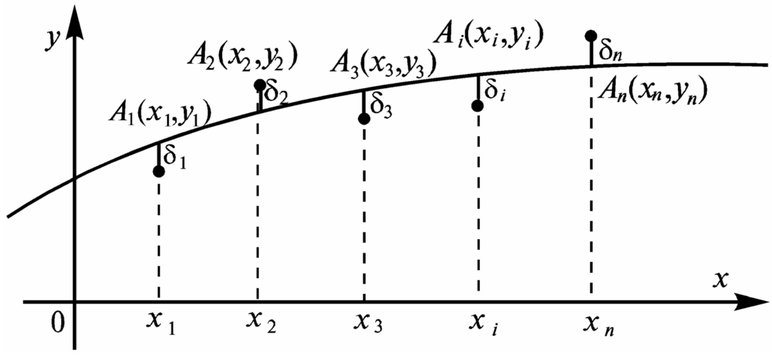


Рис. 15.18

Следует отметить, что в качестве величины отклонения S эмпирических точек (x_i, y_i) от точек сглаживающей экспериментальную зависимость кривой $y = f(x)$ в принципе можно было взять обычную сумму невязок $\sum_{i=1}^{n}\delta_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)$ или сумму их абсолютных величин $\sum_{i=1}^{n}|\delta_i| = \sum_{i=1}^{n}|(f(x_i) - y_i)|$. Но делать это нецелесообразно, так как в первом случае $\sum_{i=1}^{n}\delta_i$ может быть малой или даже равняться нулю при значительном разбросе эмпирических точек, так как положительные отклонения δ_i компенсируются отрицательными.

Во втором случае функция $\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|$ лишена этого недостатка, но имеет другой — она не является дифференцируемой, что существенно затрудняет решение задачи.

Пусть в качестве функции $y = f(x)$ взята *линейная функция* $y = ax + b$ и задача сводится к отысканию таких значений параметров a и b, при которых функция (15.9)

$$S = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$$

принимает наименьшее значение. Заметим, что функция $S = S(a, b)$ есть функция двух *переменных* a и b до тех пор, пока мы не нашли, а затем зафиксировали их «наилучшие» (в смысле метода наименьших квадратов) значения, а x_i, y_i — *постоянные* числа, найденные экспериментально.

Таким образом, для нахождения прямой, наилучшим образом согласованной с опытными данными, достаточно решить систему

$$\begin{cases} S'_a = 0, \\ S'_b = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

После алгебраических преобразований эта система принимает вид:

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \quad \textbf{(15.10)}$$

Система (15.10) называется *системой нормальных уравнений.*

Эта система имеет единственное решение, так как ее определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \neq 0 \quad \textbf{(15.11)}$$

(а точнее $|A| > 0$, что можно доказать методом математической индукции при $n \geq 2$).

Убедимся, что найденные из системы (15.10) значения дают минимум функции $S = S(a, b)$. Найдем частные производные

$$S''_{aa} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = A\,;\; S''_{ab} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i = B\,;\; S''_{bb} = 2n = C\,.$$

Выражение $\Delta = AB - C^2 = 4\,(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2) > 0$ в силу изложенного выше и $A = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$, следовательно, согласно достаточному условию функция имеет единственную точку минимума, определяемую из системы нормальных уравнений

(15.10). Заметим, что в этой точке функция $S = S(a, b)$ имеет не просто локальный минимум, но наименьшее значение (глобальный минимум).

▷ **Пример 15.13.** Имеются следующие данные о цене на нефть x (ден. ед.) и индексе акций нефтяных компаний y (усл. ед.).

x	17,28	17,05	18,30	18,80	19,20	18,50
y	537	534	550	555	560	552

Предполагая, что между переменными x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу вида $y = ax + b$, используя метод наименьших квадратов.

Р е ш е н и е. Найдем необходимые для расчетов суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Промежуточные вычисления оформим в виде вспомогательной таблицы.

x_i	y_i	$x_i\ y_i$	x_i^2
17,28	537	9 279,36	298,5984
17,05	534	9 104,70	290,7025
18,30	550	10 065,00	334,8900
18,80	555	10 434,00	353,4400
19,20	560	10 752,00	368,6400
18,50	552	10 212,00	342,2500
Σ 109,13	3288	59 847,06	1988,5209

Система нормальных уравнений (15.10) имеет вид

$$\begin{cases} 1988{,}5209a + 109{,}13b = 59847{,}06, \\ 109{,}13a + 6b = 3288. \end{cases}$$

Ее решение $a = 12{,}078$, $b = 328{,}32$ дает искомую зависимость: $y = 12{,}078x + 328{,}32$. Таким образом, с увеличением цены нефти на 1 ден. ед. индекс акций нефтяных компаний в среднем растет на 12,08 ед. ▶

15.10. Понятие двойного интеграла

В настоящем параграфе мы затронем некоторые вопросы, связанные с интегрированием функций нескольких переменных. В отличие от случая одной переменной здесь не удается ввести простого понятия первообразной и неопределенного интеграла. В то же время определенный интеграл вводится аналогично: интегрирование рассматривается как «суммирование бесконечного числа бесконечно малых величин».

Вначале определим двумерный аналог интегральной суммы (см. § 11.1).

Пусть рассматривается множество D на плоскости Oxy (для простоты будем считать его выпуклым). Построим покрывающую это множество решетку (см. рис. 15.19).

На рис. 15.19 штриховкой обозначена часть множества D, не покрытая полными клетками решетки. Очевидно, площадь этой части уменьшается по мере того, как увеличивается число клеток разбиения, т.е. уменьшаются размеры клеток (опять же для простоты будем считать, что все клетки имеют одинаковые размеры). Занумеруем клетки решетки индексами i, j ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$), где i — номер клетки по горизонтали (считая слева направо), а j — номер клетки по вертикали (считая снизу вверх). Пусть Δx_i и Δy_j — соответственно длина горизонтальной и вертикальной стороны клетки Δ_{ij}. Тогда при $\Delta x_i \to 0$ и $\Delta y_j \to 0$ площадь заштрихованной части множества D стремится к нулю и, несколько пренебрегая строгостью, можно сделать утверждение: $D_{\text{клет}} \to D$, где $D_{\text{клет}}$ — это часть множества D, покрытая целыми клетками решетки.

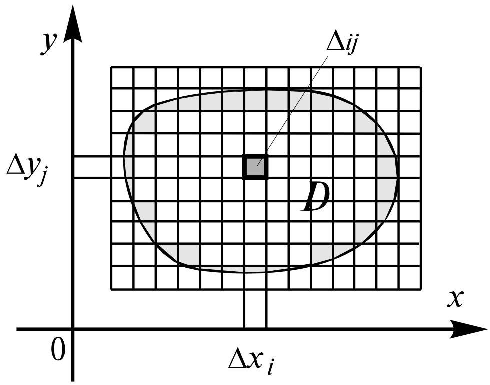


Рис. 15.19

В каждой клетке Δ_{ij} выберем произвольную точку $(\xi_i; \eta_j)$. *Интегральной суммой функции* $z = f(x, y)$ на множестве D называется сумма $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j$.

Обозначим через d — *диаметр клетки*, т.е. наибольший линейный размер ее (в данном случае $d = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}$ — длина диагонали клетки).

Определение. *Функция $z = f(x, y)$ называется* ***интегрируемой на множестве D****, если существует конечный предел I интегральной суммы этой функции на D при условии $d \to 0$. Само значение предела I называется* ***двойным интегралом функции*** *$z = f(x, y)$* ***на множестве D****.*

Обозначается двойной интеграл следующим образом:

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

З а м е ч а н и е. Указанный предел I интегральной суммы не должен зависеть ни от способа разбиения множества D на элементарные ячейки (лишь для простоты в качестве таких ячеек мы использовали прямоугольные клетки), ни от выбора точек $(\xi_i;\ \eta_j)$ в каждой ячейке.

Таким образом, по определению

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\, dx\, dy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\ \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j\,.$$

Отметим г е о м е т р и ч е с к и й с м ы с л двойного интеграла. Если функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в области D, то *двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ представляет собой объем прямого цилиндрического тела (цилиндроида), построенного на области D как на основании и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$. Если $f(x, y) \equiv 1$ для всех $(x, y) \in D$, то $\iint\limits_D dx\, dy$ численно равен площади области D.*

Интегрирование функции двух переменных значительно более трудная задача по сравнению с аналогичной задачей для одной переменной. Однако в некоторых случаях можно получить завершенный результат. Рассмотрим один из таких важнейших случаев.

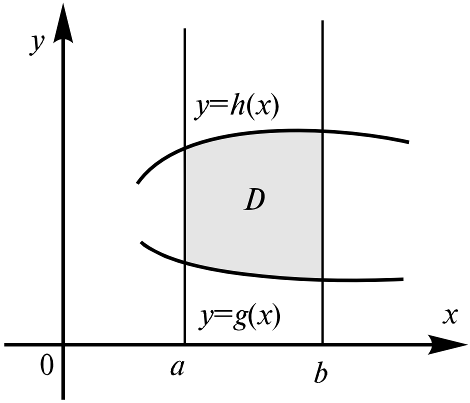


Рис. 15.20

Множество D на плоскости Oxy называется *элементарным относительно оси* Ox, если его граница состоит из графиков двух непрерывных функций $g(x)$ и $h(x)$, определенных на некотором отрезке $[a, b]$ и таких, что $g(x) \le h(x)$, и из отрезков прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 15.20).

Двойной интеграл может быть вычислен с помощью теоремы, представляющей двумерный аналог формулы Ньютона—Лейбница.

Теорема. *Если функция* $z = f(x, y)$ *непрерывна на элементарном множестве* D, *то*

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \qquad \textbf{(15.12)}$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (15.12), называется *повторным интегралом* и обычно записывается в виде

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dy.$$

▷ **Пример 15.14.** Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x + y^3)\,dx\,dy$, где D — круговой сектор, изображенный на рис. 15.21.

Р е ш е н и е. Множество D является элементарным. Здесь $a = 0$, $b = 1$, $g(x) \equiv 0$ $h(x) = +\sqrt{1-x^2}$. Таким образом, искомый интеграл принимает вид:

$$\iint\limits_D (x + y^3)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (x + y^3)\,dy = \int\limits_0^1 \left(\left(xy + \frac{y^4}{4}\right) \Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$=\int_0^1\left(x\sqrt{1-x^2}+\frac{(1-x^2)^2}{4}\right)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2)+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^1(1-2x^2+x^4)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1+\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{7}{15}.\ ▶$$

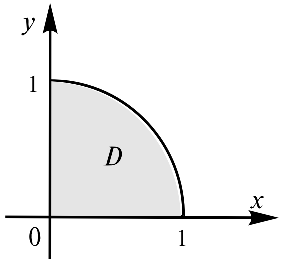


Рис. 15.21

Двойные и повторные интегралы находят свое применение в теории вероятностей, вариационном исчислении и многих других разделах математики, имеющих непосредственные экономические приложения.

15.11. Функции нескольких переменных в экономической теории

Рассмотрим некоторые приложения функций нескольких переменных в экономической теории.

Значительная часть экономических механизмов иллюстрируется на рисунках, изображающих линии уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$. Например, линии уровня производственной функции называются *изоквантами*.

Пусть x и y — два различных фактора производства, а функция $z = f(x, y)$ характеризует выпуск продукции, который позволяют значения факторов x и y. На рис. 15.22 линии уровня $f(x, y) = Q$ изображены сплошными линиями, а штриховкой выделена так называемая *экономическая область*, которая характеризуется тем, что высекаемые ею части изо-

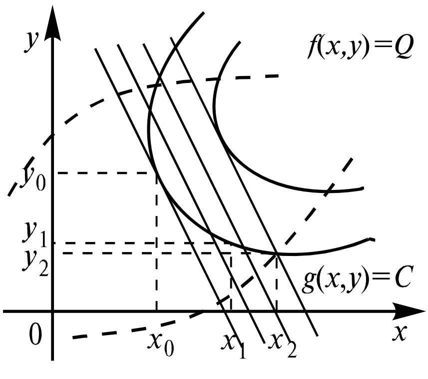


Рис. 15.22

квант представляют собой графики убывающих функций, т.е. увеличение количества одного фактора позволяет уменьшить количество другого, не меняя размера выпуска. Иными словами, *экономическая область — это множество значений факторов, допускающих замещение одного из них другим*. Очевидно, что все «разумные» значения x и y принадлежат экономической области.

Изокванты позволяют геометрически иллюстрировать решение **задачи об оптимальном распределении ресурсов.** Пусть $z = g(x, y)$ — функция издержек, характеризующая затраты, необходимые для обеспечения значений ресурсов x и y (часто можно считать, что функция издержек линейная: $g(x, y) = p_x x + p_y y$, где p_x и p_y — «цены» факторов x и y). Линии уровня этой функции также изображены на рис. 15.20. Комбинации линий уровня функции $f(x)$ и $g(x)$ позволяют делать выводы о предпочтительности того или иного значения факторов x и y. Очевидно, например, что пара значений (x_1, y_1) более предпочтительна, чем пара (x_2, y_2), так как обеспечивает тот же выпуск, но с меньшими затратами. Оптимальными же значениями факторов будут значения (x_0, y_0) — координаты точки касания линии уровня функции выпуска и функции издержек.

Линии уровня **функции полезности** (они называются *кривыми безразличия*) (см. § 5.6) также позволяют рассматривать вопросы замещения одного товара другим и иллюстрировать решение задачи об оптимальном потреблении (потребительского выбора) (см. рис. 15.23).

Линия уровня затрат на приобретение товаров x, y изображены на рис. 15.23 пунктиром. Оптимальное потребление обеспечивается значениями (x_0, y_0) — координатами точки касания кривой безразличия и линии уровня затрат. В этой точке заданная полезность достигается наиболее экономичным образом.

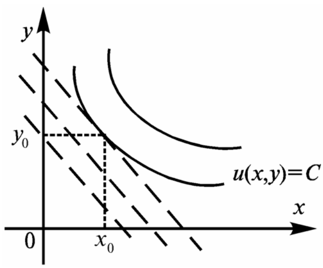


Рис. 15.23

Другой пример кривых безразличия возникает в **теории инвестиций**.

Портфель ценных бумаг (под портфелем мы здесь будем понимать совокупность определенных ценных бумаг в определенных количествах) характеризуется двумя основными параметрами — ожидаемой доходностью r и риском σ (точное определение этих величин здесь не может быть приведено, так как оно использует понятия теории вероятностей и математической статистики). Каждому портфелю можно поставить в соответствие точку на координатной плоскости (σ, r), и тогда множество всех возможных портфелей представляет некоторую область D (см. рис. 15.24).

Очевидно, что при равных доходностях инвестор предпочтет портфель с меньшим риском. Таким образом, кривые безразличия — линии уровня функции предпочтения $U = U(\sigma, r)$ — выпуклы вниз. Точка T, в которой линия безразличия касается области D, соответствует наиболее предпочтительному для данного инвестора портфелю. Соответствующая теория была предложена американским экономистом Харри Марковицем в 1952 г. и с тех пор получила широкое развитие в теории инвестиций.

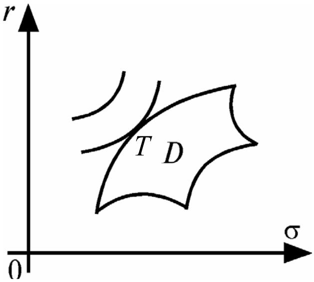


Рис. 15.24

Понятие частной производной также находит применение в экономической теории. В § 7.6 было введено понятие **эластичности функции** одной переменной $E_x(y)$. Аналогично можно ввести понятие *частной эластичности функции* нескольких переменных $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно переменной x_i:

$$E_{x_i}(z) = \lim_{\Delta x_i \to 0}\left(\frac{\Delta_{x_i} z}{z} : \frac{\Delta x_i}{x_i}\right) = \frac{x_i}{z} \cdot z'_{x_i}.$$

Так, например, в производственной функции Кобба—Дугласа (см. § 15.1) $z = b_0 x^{b_1} y^{b_2}$, как нетрудно убедиться, $E_x(z) = b_1$, $E_y(z) = b_2$, т.е. показатели b_1 и b_2 приближенно показывают, на сколько процентов изменится выпуск продукции при изменении только затрат труда x или только объема производственных фондов y на 1%.

Рассмотрим частные производные u'_x, u'_y — функции полезности. Они называются *предельными полезностями* и обозначаются Mu_x, Mu_y. Если измерять количество товара в стоимостном выражении, то предельные полезности можно рассматривать как функции спроса на соответствующий товар. Найдем предельные полезности для функции постоянной эластичности

$$u(x, y) = \frac{a_1}{1-b_1}x^{1-b_1} + \frac{a_2}{1-b_2}y^{1-b_2}.$$

Имеем $Mu_x = a_1 x^{-b_1}$, $Mu_y = a_2 x^{-b_2}$, т.е. функции спроса с ростом стоимости каждого товара являются убывающими, а параметры b_1 и b_2 представляют частные эластичности спроса на эти товары.

Если рассматривать спрос q как функцию нескольких переменных, например двух – цены товара p и доходов потребителей r, т.е. $q = f(p, r)$, то можно говорить о *частных эластичностях спроса от цены* $E_p(q) = \frac{p}{q}q'_p$ и *спроса от доходов* $E_r(q) = \frac{r}{q}q'_r$. Например, можно установить, что $E_r(q) > 0$ для качественных товаров и $E_r(q) < 0$ для низкосортных, так как с ростом доходов спрос на качественные товары увеличивается, а на низкосортные – уменьшается.

Если при исследовании спроса на данный товар рассматривать влияние другого, *альтернативного* товара ценой p_1, т.е. рассматривать спрос как функцию трех переменных $q = f(p, p_1, r)$, то можно ввести *перекрестный коэффициент эластичности спроса,* определяемый по формуле $E_{p_1}(q) = \frac{p_1}{q}q'_{p_1}$ и показывающий приближенно процентное изменение спроса на данный товар при изменении цены альтернативного товара на 1%. Очевидно, что для взаимозаменяемых товаров $E_{p_1}(q) > 0$, так как увеличение цены одного товара приводит к увеличению спроса на другой. В то же время для взаимодополняющих товаров $Ep_1(q) < 0$, ибо в этом случае рост цены любого товара приводит к снижению спроса.

Рассмотрим еще один коэффициент эластичности, характеризующий производственную функцию нескольких переменных и имеющий важное значение для экономической теории.

Пусть $z = f(x, y)$ — производственная функция и $MP(x) = f'_x(x, y)$, $MP(y) = f'_y(x, y)$ — предельные продукты, соответствующие затратам ресурсов x и y. *Коэффициентом эластичности замещения* называется величина

$$\sigma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta \ln \frac{x}{y}}{\Delta \ln \frac{MP(x)}{MP(y)}} = -\frac{d \ln \frac{x}{y}}{d \ln \frac{MP(x)}{MP(y)}}.$$

Так как при малых приращениях аргумента Δt имеет место приближенное равенство $\Delta \ln t = \frac{\Delta t}{t}$, приращение логарифма переменной величины можно рассматривать как относительное приращение самой величины. Таким образом, ***величина, обратная коэффициенту эластичности замещения, показывает приближенно, на сколько процентов изменится отношение предельных продуктов MP(x)/MP(y) при изменении отношения затрат ресурсов (x/y) на 1%.***

В § 15.1 приведена производственная функция с постоянной эластичностью замещения. В общем случае коэффициент эластичности замещения есть функция от двух переменных. Рассмотрим ее выражение в точках изокванты. Так как вдоль изокванты значение функции $z = f(x, y)$ постоянно, то полный дифференциал этой функции $dz = f'_x dx + f'_y dy$ вдоль изокванты равен нулю, т. е. $MP(x)dx + MP(y)dy = 0$. Отсюда имеем $-\frac{dy}{dx} = \frac{MP(x)}{MP(y)}$, т.е. при сохранении объема выпуска z величина $\left(-\frac{dy}{dx}\right)$, называемая *предельной нормой замещения ресурса x ресурсом y*, равна отношению их предельных продуктов. С учетом последнего равенства можно записать, что $\frac{1}{\sigma_{xy}} = \frac{d \ln\left(-\frac{dy}{dx}\right)}{d \ln \frac{y}{x}}$.

Очевидно, что $\frac{dy}{dx}$ — тангенс угла α наклона касательной к изокванте в точке $M(x, y)$, $\frac{y}{x}$ — тангенс угла наклона радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки $M\ (x, y)$ (см. рис. 15.25).

Таким образом, величина $\frac{1}{\sigma_{xy}}$ *характеризует относительное изменение угла наклона касательной к изокванте при изменениии угла наклона ее радиуса вектора, т.е. кривизну изокванты.*

Если рассматривать $\operatorname{tg}\alpha$ как функцию $\operatorname{tg}\theta$, то $\frac{1}{\sigma_{xy}}$ есть коэффициент эластичности в обычном смысле (см. § 7.6).

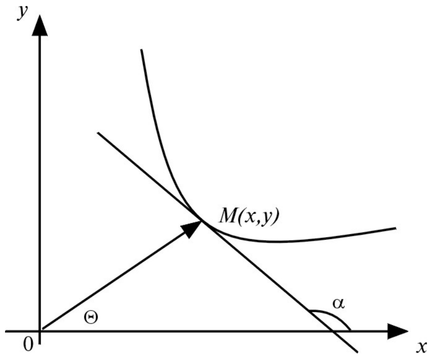


Рис. 15.25

Понятие **выпуклости функции** также играет существенную роль в понимании важнейших экономических законов. Многомерные аналоги примеров, рассмотренных в § 8.10, позволяют математически сформулировать законы убывающей доходности и убывающей предельной полезности.

15.12. Решение задач

▷ **Пример 15.15.** Определить оптимальное распределение ресурсов для функции выпуска $z = b_0 x y^{\frac{3}{2}}$, если затраты на факторы x и y — линейны и задаются ценами $p_1 = 1$, $p_2 = 2$.

Р е ш е н и е. В точке (x_0, y_0), задающей оптимальное распределение ресурсов x и y, линия уровня функции издержек $z = x + 2y$ касается изокванты $b_0 x y^{\frac{3}{2}} = C$ (см. § 15.11). На экономической области изокванта есть часть графика функции $y = \left(\frac{C}{b_0 x}\right)^{\frac{2}{3}}$. Линия уровня функции издержек — это прямые $x + 2y = A$, угловой коэффициент которых $k = -\frac{1}{2}$.

Таким образом, условие касания имеет вид

$$\left[\left(\frac{C}{b_0 x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]'_{x_0} = -\frac{1}{2},$$ откуда $x_0 = \dfrac{4^{\frac{3}{5}} C^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{3}{5}} b_0^{\frac{2}{5}}}$ и соответственно

$$y_0 = \frac{3^{\frac{2}{5}} C^{\frac{2}{5}}}{4^{\frac{2}{5}} b_0^{\frac{2}{5}}}.$$

Таким образом, факторы x, y следует распределить в отношении 4 : 3. ▶

▷ **Пример 15.16.** Результаты десяти одновременных измерений величин x и y сведены в следующую таблицу:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1,61	3,05	5,50	8,96	13,42	19,00	25,20	33,78	41,96	51,62

Предполагая, что зависимость величины y от величины x имеет вид $y = ax^2 + b$, найти значения параметров a и b этой зависимости, используя метод наименьших квадратов.

Р е ш е н и е. Величина S, определенная равенством (15.10), имеет вид

$$S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + b - y_i)^2.$$

Имеем $S'_a = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + b - y_i)x_i^2$, $S'_b = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + b - y_i)$.

Приравнивая частные производные S'_a и S'_b к нулю, критические точки функции S определяем как решение системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4\right) a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad \textbf{(15.13)}$$

Вычислив при $n = 10$ необходимые суммы $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 385$,

$\sum_{i=1}^{10} x_i^4 = 25\,333$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 204{,}1$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 y_i = 13\ 183{,}65$,

получим систему нормальных уравнений в виде:

$$\begin{cases} 25\,333a + 385b = 13\,183{,}65, \\ 385a + \ 10b = 204{,}1, \end{cases}$$

откуда $a = 0{,}5067$, $b = 0{,}905$, т.е. $y = 0{,}5067x + 0{,}902$. ►

УПРАЖНЕНИЯ

Найти уравнения и выполнить построение линий уровня функций:

15.17. $z = \frac{2}{y} - x - \frac{1}{x}$.

15.18. $z = \frac{x^2(1+y)}{1-y}$.

15.19. $z = \frac{xy}{\ln x}$.

15.20. $z = \frac{(1+\ln x)y}{x}$.

15.21. $z = x - e^x y$.

15.22. $z = x^2 + \ln y - \ln x$.

Найти частные производные функций:

15.23. $z = x^3y^2 - 2xy^3$.

15.24. $z = \ln(x^2 + 2y^3)$.

15.25. $z = (1+x^2)^y$.

15.26. $z = (x - \frac{1}{y})e^{-x^2 y}$.

15.27. $z = \ln\frac{x + \sqrt{y^2+1}}{y + \sqrt{x^2+1}}$.

15.28. $z = \ln^x y$.

Найти критические точки функций и проверить в них выполнение достаточного условия экстремума:

15.29. $z = (y-x)^2 + (y+2)^2$.

15.30. $z = x^2 + y^2 + \frac{(x+2y-16)^2}{5}$.

15.31. $z = 2xy - 4x - 2y$.

15.32. $z = x - e^x y$.

15.33. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^3$ на полукруге единичного радиуса с центром в начале координат и расположенном в правой полуплоскости.

15.34. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x + \sqrt{y}$ на треугольнике с вершинами в точках (0; 0), (0; 1) и (1; 0).

15.35. В плоскости треугольника с вершинами A (0; 1), B (3; 4), C (5; 2) найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника является наименьшей.

Исследовать функции на выпуклость:

15.36. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$. **15.37.** $z = x^2 - y^2$.

15.38. $z = \ln(1 + x^2 + y^4)$.

15.39. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу $y = ax + b$ для функции, заданной следующей таблицей:

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y	0,7	1,7	1,6	3,1	3,6	4,6

Изобразить на графике эмпирические значения и прямую.

15.40. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу $y = ax + b$ для функции, заданной следующей таблицей:

x	−0,2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	3,2	2,9	1,8	1,6	1,2	0,7

Изобразить графически таблично заданную и соответствующую линейную функции. По формуле $y = ax + b$ вычислить значение переменной y при $x = 0{,}1$.

15.41. Функция полезности для инвестора задается квадратичной зависимостью $u(r, \sigma) = r - \lambda\sigma - \mu\sigma^2$ (где r — ожидаемая доходность портфеля, а σ — риск), а граница области D (см. рис. 15.23) есть прямая $r = a + b\sigma$. Определить наиболее предпочтительный для данного инвестора уровень риска.

15.42. Курс ценной бумаги изменялся два раза: на r_1 процентов и на r_2 процентов. Выразить общий рост курса ценной бумаги через две характеристики: $\bar{r} = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ — среднюю доходность и $\sigma=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(r_1-\overline{r})^2+(r_2-\overline{r})^2\right]}$, характеризующую разброс значений изменения курса. Имеются ли у полученной функции критические точки? Расширить область определения функции на всю координатную плоскость $(\overline{r}, \sigma)$. Найти критические точки в этом случае и определить их характер.

15.43. Найти коэффициент эластичности замещения для производственной функции Кобба—Дугласа.

Глава 16

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексные числа возникают в связи с задачей решения квадратных уравнений. Так, оставаясь в множестве действительных чисел, невозможно решить квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля.

Комплексные числа необходимы в различных приложениях математики. В частности, теория функций комплексной переменной является действенным инструментом при использовании математических методов в различных областях науки.

16.1. Арифметические операции над комплексными числами. Комплексная плоскость

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, i — мнимая единица.

Число x называется *действительной частью* числа z и обозначается $\mathrm{Re}(z)$ (от франц. *reele* — «действительный»), а число y — мнимой частью числа z и обозначается $\mathrm{Im}(z)$ (от франц. *imaginaire* — «мнимый»), т.е. $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

Действительное число x является частным случаем комплексного $z = x + iy$ при $y = 0$. Комплексные числа вида $z = x + iy$, не являющиеся действительными, т.е. при $y \neq 0$, называются *мнимыми,* а при $x = 0$ $y \neq 0$, т.е. числа вида $z = iy$ — *чисто мнимыми*.

Числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$ называются *сопряженными.*

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными,* если равны их действительные и мнимые части, т.е. $z_1 = z_2$, если $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$. В частности, $z = 0$, если $\mathrm{Re}(z) = 0$ и $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Арифметические операции на множестве комплексных чисел определяются следующим образом.

1. Сложение (вычитание) комплексных чисел

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2). \qquad \textbf{(16.1)}$$

2. У м н о ж е н и е комплексных чисел

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \qquad \textbf{(16.2)}$$

В частности,

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1,$$

т.е. *мнимая единица есть число, квадрат которого равен* -1.

3. Д е л е н и е двух комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2{}^2 + y_2{}^2} \; (z_2 \neq 0). \qquad \textbf{(16.3)}$$

Нетрудно убедиться в том, что все арифметические операции (16.1)−(16.3) над комплексными числами определяются естественным образом из правил сложения и умножения многочленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, если считать $i^2 = -1$. Например, произведение комплексных чисел (16.2) есть

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

▷ **Пример 16.1.** Даны комплексные числа $z_1 = 12 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$. Найти $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2.

Р е ш е н и е. $z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = 15 + i$,

$$z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = 9 + 9i.$$

$$z_1 z_2 = (12 + 5i)(3 - 4i) = 36 + 15i - 48i - 20i^2 = 56 - 33i$$

(учли, что $i^2 = -1$).

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{12 + 5i}{3 - 4i}$. Умножая числитель и знаменатель на сопряженное делителю комплексное число $3 + 4i$, получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(12 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{36 + 15i + 48i + 20_i^2}{9 - 16_i^2} =$$

$$= \frac{16 + 63i}{25} = 0{,}64 + 2{,}52i. \; ▶$$

Если для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел служат т о ч к и к о о р д и н а т н о й п л о с к о с т и *Oxy*.

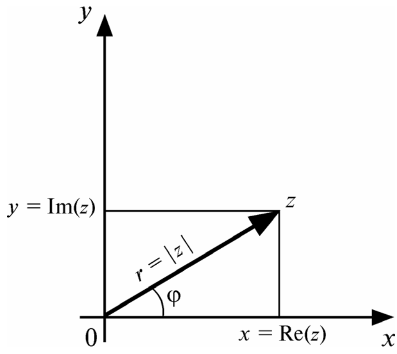


Рис. 16.1

Плоскость называется *комплексной,* если каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка плоскости $z(x, y)$, причем это соответствие взаимно однозначное (рис. 16.1).

Оси Ox и Oy, на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, называются соответственно *действительной и мнимой осями.*

16.2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

С каждой точкой $z\,(x,\ y)$ комплексной плоскости связан *радиус-вектор* этой точки $\overrightarrow{Oz}$, длина которого r называется *модулем комплексного числа* z и обозначается $|z|$ (см. рис. 16.1):

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad \textbf{(16.4)}$$

Угол φ, образованный радиусом-вектором $\overrightarrow{Oz}$ с осью Ox, называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Из значений $\varphi = \operatorname{Arg} z$ выделяется г л а в н о е значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \le \pi$. Например, $\arg 5 = 0$, $\arg(-3i) = -\pi/2$, $\arg(1 - i) = -\pi/4$.

Очевидно (см. рис. 16.1), что

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi. \qquad \textbf{(16.5)}$$

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно представить как

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad \textbf{(16.6)}$$

Представление комплексного числа в виде (16.6), где $r = |z| \geq 0$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$, называется *тригонометрической формой комплексного числа.*

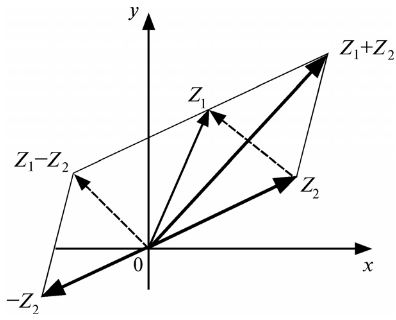


Рис. 16.2

Сформулируем некоторые свойства арифметических операций над комплексными числами.

1. *При сложении (вычитании) комплексных чисел их радиусы-векторы складываются (вычитаются) по правилу параллелограмма.*

На рис. 16.2 показаны радиусы-векторы комплексных чисел z_1 и z_2, их суммы $z_1 + z_2$ и разности $z_1 - z_2$.

2. *Модуль произведения (частного) двух комплексных чисел равен произведению (частному) модулей этих чисел, а его аргумент — сумме (разности) аргументов этих чисел,* т.е.

если $z = z_1 z_2$, то $|z| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$,

$$\operatorname{Arg} z = \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2; \qquad \textbf{(16.7)}$$

если $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$, то $|z| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $(r_2 = |z_2| \neq 0)$,

$$\operatorname{Arg} z = \varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \qquad \textbf{(16.8)}$$

Геометрически умножение числа z_1 на z_2 означает изменение длины радиуса-вектора r_1 (или r_2) в r_2 (или r_1) раз и его поворот вокруг точки O против часовой стрелки на угол φ_2 (или φ_1).

▷ **Пример 16.2.** Комплексные числа $z_1 = -1+i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ представить в тригонометрической форме и найти $z_1 z_2$ и z_1/z_2.

Р е ш е н и е. По формуле (16.4) найдем модуль комплексного числа z_1: $r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, а из соотношений (16.5) $\cos\varphi = -1/\sqrt{2}$, $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$ получим аргумент числа z_1 (берем его главное значение): $\varphi_1 = \arg z_1 = 3\pi/4$, т.е. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Аналогично $r_2 = |z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1} = 2$, $\cos\varphi_2 = \sqrt{3}/2$, $\sin\varphi_2 = 1/2$, т.е. $\varphi_2 = \arg z_2 = \pi/6$ и $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Теперь по формулам (16.7) и (16.8)

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}\cdot 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right] =$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right). \blacktriangleright$$

Так как в соответствии с формулами (16.7) и (16.8) при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, легко получить формулу возведения комплексного числа в натуральную степень n, известную как *формула Муавра:*

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad \textbf{(16.9)}$$

▷ **Пример 16.3.** Найти $(-1+i)^{20}$.

Решение. В примере **16.2** мы получили, что $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому по формуле Муавра (16.9)

$$(-1+i)^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{20} =$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left[\cos\left(20\cdot\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$
$$= 1024\left(\cos 15\pi + i\sin 15\pi\right) = 1024(-1 + 0i) = -1024. \blacktriangleright$$

Обратимся к извлечению корня из комплексного числа.

Пусть

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Тогда, используя определение корня и формулу Муавра (16.9), получим

$$z = \left[\rho(\cos\psi + i\sin\psi)\right]^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

или

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Отсюда следует, что

$$\rho^n = r \ \text{ и } \ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ где } k \in Z.$$

Итак, $\rho = \sqrt[n]{r}$ и $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k \in Z$, т.е.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad \textbf{(16.10)}$$

где $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

При $k = n$, $n + 1$, ... значения корня уже будут повторяться.

Таким образом, *корень n-й степени из комплексного числа (не равного нулю) имеет n различных значений.*

▷ **Пример 16.4.** Найти $\sqrt[3]{-1+i}$.

Р е ш е н и е. В примере **16.2** было получено $z = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$. По формуле (16.10)

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3}\right), \ k = 0, 1, 2,$$

откуда получаем три значения корня

$$z_1 = \left(\sqrt[3]{-1+i}\right)_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2 = \left(\sqrt[3]{-1+i}\right)_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$z_3 = \left(\sqrt[3]{-1+i}\right)_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

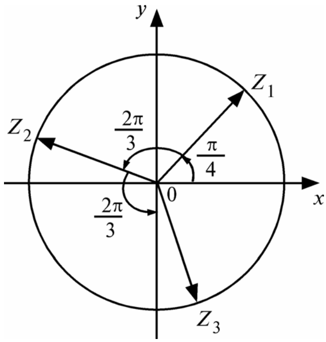


Рис. 16.3

На комплексной плоскости найденные значения корня представляют равноотстоящие друг от друга точки z_1, z_2, z_3, расположенные на окружности радиуса $\sqrt[6]{2}$ (рис. 16.3). ▶

Связь между тригонометрическими и показательными функциями выражается *формулой Эйлера*[1].

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad \textbf{(16.11)}$$

Отсюда следует *показательная форма комплексного числа:*

$$z = re^{i\varphi} \qquad \textbf{(16.12)}$$

где $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

В заключение отметим, что в показательной форме, так же как и в тригонометрической, легко проводить операции умножения, деления, возведения в степень, извлечение корня из комплексных чисел.

УПРАЖНЕНИЯ

16.5. Даны комплексные числа $z_1 = 5 - 12i$, $z_2 = -6 + 8i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2.

16.6. Комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$ представить в тригонометрической форме и найти $z_1 z_2$, и z_1/z_2.

16.7. Найти $z = \dfrac{(1+i)^{100}}{\left(\sqrt{3} - i\right)^{50}}$.

16.8. Найти все значения $\sqrt[4]{-1}$.

[1] В приводимом здесь частном случае формулы Эйлера φ — действительное число.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Высшая* математика. Общий курс / Под ред. А.И. Яблонского. — Минск: Высшая школа, 1993.

2. *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. — М.: Наука, 1985.

3. *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы анализа экономики. − М.: ДИС, 1997.

4. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1978.

5. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: В 2 ч. − М.: Наука, 1971. − Ч. 1; 1993. − Ч. 2.

6. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория: Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1975.

7. *Исследование* операций в экономике / Под ред. Н.Ш. Кремера. − М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.

8. *Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И.* Курс высшей математики для экономических вузов. — М.: Высшая школа, 1982. — Ч. 1 и 2.

9. *Карасев А.И., Калихман И.Л., Кремер Н.Ш.* Матричная алгебра. — М.: ВЗФЭИ, 1987.

10. *Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И.* Математические методы и модели в планировании. — М.: Экономика, 1987.

11. *Колесников А.Н.* Краткий курс математики для экономистов. − М.: Инфра-М, 1997.

12. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. — М.: Наука, 1985.

13. *Лопатников Л.И.* Краткий экономико-математический словарь. — М.: Наука, 1987.

14. *Мантуров О.В., Матвеев Н.М.* Курс высшей математики. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. — М.: Высшая школа, 1986.

15. *Мордкович А.Г., Солодовников А.С.* Математический анализ. — М.: Высшая школа, 1990.

16. *Руководство* к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики / Под ред. А.И. Карасева и Н.Ш. Кремера. — М.: Экономическое образование, 1989.

17. *Самуэльсон П.* Экономика: Пер. с англ. — М.: НПО Алгон, ВНИИСИ, 1992.

18. *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В.* Математика в экономике. − М.: Финансы и статистика, 1998. — Ч. 1.

19. *Шарп У., Гордон Дж. А., Бейли Д.* Инвестиции: Пер. с англ. − М.: Инфра-М. 1997.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

ГЛАВА 1

1.14. 28 000. **1.15.** $\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}$. **1.16.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **1.17.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \\ 34 & 0 & 82 \end{pmatrix}$.

1.18. $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. **1.19.** 40. **1.20.** 160. **1.21.** 0.

1.22. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & 17 & -43 \\ -7 & 11 & -24 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. **1.23.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -6 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. **1.24.** $\{-8; 1\}$. **1.25.** 2.

1.26. 2. **1.27.** 3. **1.28.** 4. **1.29.** 2.

ГЛАВА 2

2.11. (1; 2; 3). **2.12.** (1; −2; 0). **2.13.** (−2; 1; −1). **2.14.** (3; 0; −2). **2.15.** (1; 1; 1). **2.16.** (1; −1; 2; 0). **2.17.** (1; 1; 1). **2.18.** Несовместна. **2.19.** (14*c*; 21*c*; *c*; *c*), где *c* — любое число.

2.20. $(-c_1 + \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2};\ \ c_1 - 2c_2 + 2;\ c_1;\ c_2)$, где $c_1; c_2$ — любые числа. **2.21.** $X = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \\ 15 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. **2.22.** $X = \begin{pmatrix} -6 & 26 \\ 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

2.23. $X = \begin{pmatrix} -40 & -50 & 43 \\ 29 & 36 & -31 \end{pmatrix}$. **2.24.** (−3/5; 14/5; 0), (19; 0; 14), (0; 19/7; 3/7). **2.25.** (−5/2; 7/2; 0; 0), (−5/2; 0; −7/2; 0), (−3/4; 0; 0; 7/8), (0; −3/2; 0; 5/4), (0; 0; 3/2; 5/4). **2.26.** (1; −1; 2; 0), (1; 0; 2; −1). **2.27.** (4; −4; 1; 0), (4; 0; 1; 2). **2.28.** 25%, 20%, 15%. **2.29.** $X = (945,6;\ 691,2)'$.

ГЛАВА 3

3.14. 40. **3.15.** $\overrightarrow{OC} = (1;\ -2;\ 1)$, $\overrightarrow{AB} = (-1;\ -4;\ 1)$; $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{6}$, $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$. **3.16.** $\varphi = \arccos(19/21) \approx 25°$. **3.17.** 90°. **3.18.** Да. **3.19.** Нет. **3.21.** $\boldsymbol{d} = (2;\ -2;\ 1)$. **3.22.** $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = -4$, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{6}$; $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{15}$. **3.23.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **3.24.** $6e_1 - 19e_2$. **3.25.** $-4e_1 + 7e_2 + 7e_3$.

3.26. $\begin{pmatrix} -3 & 14 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$. **3.27.** $(4c;\ -c)$, $\lambda_1 = 1$; $(c_1;\ -c_1)$, $\lambda_2 = -2$, где $c \neq 0$, $c_1 \neq 0$. **3.28.** $(-2c;\ c;\ c)$, $\lambda_1 = 1$; $(0;\ c_1;\ c_1)$, $\lambda_2 = 3$; $(6c_2;\ -7c_2;\ 5c_2)$, $\lambda_3 = -3$, где $c \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. **3.29.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. **3.30.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3.31. $L = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. **3.32.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2{,}5 \\ 1 & 4 & 0{,}5 \\ 2{,}5 & 0{,}5 & -1 \end{pmatrix}$.

3.33. $L = (y_1, y_2) = 19y_1 - 2y_2^2 - 10y_1y_2$. **3.34.** Положительно определенная. **3.35.** Отрицательно определенная. **3.36.** 15 : 10 : 6.

ГЛАВА 4

4.14. $y^2 = 8(x-2)$. **4.15.** а) $y = 3$; б) $x = 2$; в) $y = x + 1$. **4.16.** а) $3x - 2y - 7 = 0$; б) $x = 3$; в) $y = 1$. **4.17.** $A\ (2;\ -1)$, $B\ (-1;\ 3)$, $C\ (2;\ 4)$. **4.18.** $x - y = 0$; $x + y - 2 = 0$. **4.19.** $\sqrt{10}$; $3x + y - 11 = 0$. **4.20.** $x/2 - y/3 = 1$ или $-x/4 + 2y/3 = 1$. **4.21.** AE: $2x - 5y + 4 = 0$; AD: $x - 2y + 2 = 0$; $\sqrt{29}$. **4.22.** AC: $2x - y + 6 = 0$; BC: $x - 4y - 4 = 0$; $CM = 2x - 3y + 2 = 0$. **4.23.** $x - y + 2 = 0$; $x - 5y - 6 = 0$; $x + y = 0$, $x - 2y = 0$. **4.24.** $2x - y = 0$; $\sqrt{5}/6$. **4.25.** $x^2/36 + y^2/4 = 1$. **4.26.** $a = 6$, $b = 4$; $F_1(2\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(-2\sqrt{5};\ 0)$; $\varepsilon = \sqrt{5}/3$. **4.27.** $a = 2$, $b = \sqrt{3}$; $F_1(-\sqrt{7};\ 0)$, $F_2(\sqrt{7};\ 0)$; $\varepsilon = \sqrt{7}/2$; $y = \pm(\sqrt{3}/2)x$. **4.28.** $x^2/16 - y^2/9 = 1$. **4.29.** $(1;\ -5)$, $(0;\ -4)$ и $(2;\ -6)$, $x = 1$, $y = -5$. **4.30.** $y^2 = -9x$; $x^2 = -y$. **4.31.** $y^2 = x$, $x = -1/4$. **4.32.** $1/\sqrt{5}$.

ГЛАВА 5

5.8. $X = (2{,}5;\ +\infty)$. **5.9.** $X = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1)$. **5.10.** $X = [-1;\ 0{,}5]$. **5.11.** $Y = [-2;\ 2]$. **5.12.** $Y = [-0{,}5;\ 0{,}5]$. **5.13.** Четная. **5.14.** Нечетная. **5.15.** Нечетная. **5.16.** Общего вида. **5.17.** $T = \pi$. **5.18.** $T = 2\pi$.

ГЛАВА 6

6.18. ∞. **6.19.** 0. **6.20.** 1,5. **6.21.** 4. **6.22.** 3. **6.23.** -1. **6.24.** -1. **6.25.** -1. **6.26.** 0,5. **6.27.** 0. **6.28.** 8. **6.29.** 1. **6.30.** 2. **6.31.** 8. **6.32.** -2. **6.33.** e^2. **6.34.** 1. **6.35.** ∞. **6.36.** $1/\sqrt{e}$. **6.37.** $\sqrt{e}$. **6.38.** $x = 1$ — точка устранимого разрыва первого рода. **6.39.** Непрерывна. **6.40.** $x = 1$ — точка разрыва первого рода. **6.41.** $x = 1$ — точка разрыва второго рода. **6.42.** а) 9,663 млн руб.; б) 9,832 млн руб.; в) 9,892 млн руб.

ГЛАВА 7

7.20. $\dfrac{16x(x^2-1)^3}{(x^2+1)^5}$. **7.21.** $32x^3\ln^2 x$. **7.22.** $\dfrac{e^{3x}(9x+1)-5}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

7.23. $\dfrac{e^{4x}}{\sqrt[4]{(1+e^{4x})^3}}$. **7.24.** $\dfrac{4}{9x^2-1}$. **7.25.** $\dfrac{2x^4-3x^2-1}{x(x^4-1)}$.

7.26. $3\left(\ln(1-x^2)-\dfrac{2x^2}{1-x^2}\right)$. **7.27.** $x^2\ln x(3\ln x+2)$.

7.28. $\dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(1-e^{4x})^2e^{4x}}}$. **7.29.** $5e^{2x}(xe^{2x}+3)^4(2x+1)$.

7.30. $x\ln\dfrac{1-x}{1+x}+1$. **7.31.** $(2x+2^x\ln 2)\cos(x^2+2^x)$. **7.32.** $-2e^{\sqrt{\ln x}}$.

7.33. $\dfrac{\sin x(\ln\cos x-1)}{\cos^2 x}$. **7.34.** $\dfrac{1-\sin x\cdot\sin 2x}{\sin x}$. **7.35.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

7.36. $e^x(\operatorname{ctg}x+\ln\sin x)$. **7.37.** $\dfrac{1}{\sin^3 x}$. **7.38.** $\dfrac{8-3\cos^4 x}{\cos^5 x}$.

7.39. $-\dfrac{1+x\operatorname{arcctg}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **7.40.** $-\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\right)$.

7.41. $\dfrac{x-a}{x^2+a^2}$. **7.42.** $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$; 0. **7.43.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+12}}$; 0,25.

7.44. $e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$; −1. **7.45.** $\dfrac{1}{2\cos 2x}$; 0,5. **7.46.** а) $x + 2y - 4 = 0$; б) $y = 2$. **7.47.** а) $y + 1 = 0$, $6x + y + 4 = 0$; б) $12x + 4y + 1 = 0$, $12x - 36y - 49 = 0$; в) $4x - y - 9 = 0$, $4x + y + 1 = 0$. **7.48.** $4x - y - 4 = 0$, $12x + 9y + 4 = 0$. **7.49.** 0,13 м/с; −0,026 м/с^2.

7.50. $-\dfrac{2x+y}{x+2y}$. **7.51.** $-\dfrac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$. **7.52.** n! **7.53.** $a^x(\ln a)^n$.

7.54. 43 ед./ч. **7.55.** 9 ден. ед.; 7 ден. ед. **7.56.** а) 3 ден. ед.; б) $E_p(q) = 0{,}75$; $E_p(s) = 0{,}75$; в) +1,25%.

ГЛАВА 8

8.19. 1. **8.20.** −4. **8.21.** 4/7. **8.22.** 3. **8.23.** 0. **8.24.** 1/2. **8.25.** ∞. **8.26.** $y_{\max}(-1) = 12$, $y_{\min}(7/3)=304/27$. **8.27.** Экстремумов нет. **8.28.** $y_{\max}(e^{-2}) = 4/e^2$, $y_{\min}(1) = 0$. **8.29.** Экстремумов нет. **8.30.** $y_{\max}\left[(2k+1)\pi\right] = \ln 3$, $y_{\min}(2k\pi) = 0$. **8.31.** $y_{\min}(1) = e$. **8.32.** $y_{\text{наиб.}}(3) = 9$, $y_{\text{наим.}}(1) = -3$. **8.33.** $y_{\text{наиб.}}$ не существует; $y_{\text{наим.}}=\sqrt{1+e}$. **8.34.** 16 м и 32 м. **8.35.** $r = h = p/(4 + \pi)$, где r — радиус полукруга, h — высота прямоугольника. **8.36.** Точка перегиба (1/2; 29/2); кривая выпукла вверх на (−∞; 1/2), выпукла вниз на (1/2; +∞). **8.37.** Точка перегиба (1/2; 1/2 − ln2); кривая выпукла вверх на (0; 1/2), выпукла вниз на (1/2; +∞). **8.38.** Точка перегиба (2; −16); кривая выпукла вверх на (−∞; 2), выпукла вниз на (2; +∞). **8.39.** Точка перегиба $(-2; -2e^{-2})$; кривая выпукла вверх на (−∞; −2), выпукла вниз на (−2; +∞). **8.40.** Точки перегиба $(-1/\sqrt{2};\ e^{-1/2})$ и $(1/\sqrt{2};\ e^{-1/2})$; кривая выпукла вверх на $(-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$ и выпукла вниз на $(-\infty; -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2};\ +\infty)$. **8.41.** $x = -2/5$; $y = -4/5$. **8.42.** $y = -1$. **8.43.** $x = 1$, $x = -1$, $y = -1$. **8.44.** $y = 3x$. **8.45.** Асимптот нет. **8.46.** $y_{\min}(-1/2) = -1/4$, функция убывает на (−∞; −1/2), возрастает на (−1/2; +∞), выпукла вниз на (−∞; +∞). **8.47.** Асимптота

$x = 0$; $y_{\min}(-1) = 2$, $y_{\min}(1) = 2$, функция убывает на $(-\infty; -1)$ и на $(0; 1)$, возрастает на $(-1; 0)$ и на $(1; +\infty)$. Выпукла вниз на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Точек перегиба нет. **8.48.** Асимптоты $x = -1$, $y = x - 5$; $y_{\max}(-5) = -27/2$, функция возрастает на $(-\infty; -5)$ и на $(-1; +\infty)$, убывает на $(-5; -1)$. Выпукла вверх на $(-\infty; -1)$ и на $(-1; 1)$, выпукла вниз на $(1; +\infty)$. Точка перегиба $(1; 0)$. **8.49.** $y_{\max}(2) = 32$, $y_{\min}(6) = 0$, функция возрастает на $(-\infty; 2)$ и на $(6; +\infty)$, убывает на $(2; 6)$. Выпукла вверх на $(-\infty; 4)$, выпукла вниз на $(4; +\infty)$. Точка перегиба $(4; 16)$. **8.50.** Асимптоты $x = 0$, $y = x$; $y_{\min}(3) = 4$, $y_{\max}(-3) = -4$, функция возрастает на $(-\infty; -3)$ и на $(3; +\infty)$, убывает на $(-3; 0)$ и $(0; 3)$. Выпукла вверх на $(-\infty; 0)$, выпукла вниз на $(0; +\infty)$. Точек перегиба нет. **8.51.** Правосторонняя асимптота $y = 0$; $y_{\max}(-1) = e$, функция возрастает на $(-\infty; -1)$, убывает на $(-1; +\infty)$. Выпукла вверх на $(-\infty; 0)$, выпукла вниз на $(0; +\infty)$. Точка перегиба $(0; 2)$. **8.52.** $y_{\min}(0) = 1$, функция убывает на $(-\infty; 0)$, возрастает на $(0; +\infty)$. Выпукла вниз на $(-\infty; -\sqrt{2}/4)$ и на $(\sqrt{2}/4; +\infty)$, выпукла вверх на $(-\sqrt{2}/4; -\sqrt{2}/4)$. Точки перегиба $(-\sqrt{2}/4; \sqrt{e})$ и $(\sqrt{2}/4; \sqrt{e})$. **8.53.** Асимптота $x = 1$; $y_{\min}(e) = e$, функция убывает на $(0; 1)$ и $(1; e)$, возрастает на $(e, +\infty)$. Выпукла вверх на $(0; 1)$ и выпукла вниз на $(1; +\infty)$. Точка перегиба $(e^2, e/2)$. **8.54.** $R > 27$. **8.55.** $g = \sqrt{6}/4 \approx 0{,}61$.

ГЛАВА 9

9.6. $\Delta y = \Delta x\left[3(x^2 + (x-1)\Delta x - (2x-1)) + \Delta x^2\right]$; $dy = 3(x-1)^2\Delta x$; при $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$ $\Delta y = 0{,}030301$, $dy = 0{,}03$.

9.7. $\Delta y = \sqrt{1 + (x + \Delta x)^2} - \sqrt{1 + x^2}$; $dy = x\,\Delta x/\sqrt{1 + x^2}$; при $x = 0$, $\Delta x = -0{,}01$ $\Delta y = 0{,}00005$, $dy = 0$. **9.8.** 2,02. **9.9.** 3.03. **9.10.** $1{,}03e \approx 2{,}8$. **9.11.** $1 + 0{,}272/e \approx 1{,}1$. **9.12.** 0,1. **9.13.** $\pi/4 - 0{,}005 \approx 0{,}78$. **9.14.** 5%. **9.15.** 15,5%.

10.29. $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}\,x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

10.30. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)+C$. **10.31.** $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$.

10.32. $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **10.33.** $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C$.

10.34. $\frac{1}{4}\left(\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right)+C$. **10.35.** $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

10.36. $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$. **10.37.** $\frac{1}{6}e^{2x^3+1}+C$.

10.38. $\ln(2+e^x)+C$. **10.39.** $\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}+C$.

10.40. $\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})+C$. **10.41.** $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}+C$.

10.42. $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$. **10.43.** $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+C$.

10.44. $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$. **10.45.** $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$.

10.46. $x\sin x+\cos x+C$. **10.47.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$.

10.48. $\frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}\,x}{\sqrt{7}+\sqrt{5}x}\right|+C$. **10.49.** $\ln|x^2-4|-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{2-x}{2+x}\right|+C$.

10.50. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$. **10.51.** $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$.

10.52. $\frac{1}{2}\ln\frac{(x^2+3x+2)(x+2)^3}{(x+1)^3}+C$. **10.53.** $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C$.

10.54. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C$. **10.55.** $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}+C$.

10.56. $2\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})+C$. **10.57.** $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$.

10.58. $\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$.

10.59. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$.

10.60. $2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$. **10.61.** $x-2\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)^2+C$.

10.62. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$. **10.63.** $-\frac{3}{2}x+\frac{11}{4}\ln|3+2x|+C$.

10.64. $2\sqrt{x}+\frac{\ln^2 x}{2}+C$. **10.65.** $\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$.

10.66. $2\sin\sqrt{x}+C$. **10.67.** $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$.

10.68. $\frac{2}{3}x^3-2x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

10.69. $x+4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C$.

10.70. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{9}\right)\ln(3x+2)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}+C$.

ГЛАВА 11

11.25. $33\frac{1}{3}$. **11.26.** 7/4. **11.27.** −2/3. **11.28.** ln 2. **11.29.** −12,5.
11.30. ln3/2. **11.31.** 1/3. **11.32.** $6-3\pi/2+6\operatorname{arctg}2$. **11.33.** 1/2.
11.34. (4 − ln5)/5. **11.35.** (8/3) ln 2 − 7/9. **11.36.** π. **11.37.** ln (9/8).
11.38. ln (4/3). **11.39.** 2ln 2 − 1. **11.40.** $\pi/6+1-\sqrt{3}/2$.**11.41.** 2 − ln 2. **11.42.** 17/6. **11.43.** 7/6 (ед.^{2}). **11.44.** $3/2-\ln 2$ (ед.^{2}). **11.45.** 9/2 (ед.^{2}). **11.46.** 8/3 (ед.^{2}). **11.47.** (15 − 16 ln 2)/4 (ед.^{2}). **11.48.** 5/3 (ед.^{2}). **11.49.** ($6e$ − 5)/3 (ед.^{2}). **11.50.** 3/2 (ед.^{2}). **11.51.** 8/9 (ед.^{2}). **11.52.** 1 (ед.^{2}). **11.53.** 256π/15; 8π (ед.^{3}). **11.54.** $\pi(e^2-1)/2$; 2π (ед.^{3}).
11.55. 178π/15; 21π/2 (ед.^{3}). **11.56.** 6π/7; 3π/5(ед.^{3}). **11.57.** 1/2.
11.58. 1/ln2. **11.59.** 1/2. **11.60.** 3/2. **11.61.** Расходится.
11.62. $6\sqrt[3]{2}$. **11.63.** 4,53 ден. ед. **11.64.** 23,98 ден. ед.

12.25. $xy' - 2y = 0$. **12.26.** $y - 2xy' = 0$. **12.27.** $3y^2 - x^2 = 2xyy'$.

12.28. $y'' - y' - 2y = 0$. **12.29.** $x = \dfrac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$. **12.30.** $y = 1 + \dfrac{Cx}{1+x}$.

12.31. $x^2 + y^2 = \ln(Cx^2)$. **12.32.** $y = C(x+1)e^{-x}$.

12.33. $\ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}$, $x = 0$. **12.34.** $y^2 - 2 = Ce^{1/x}$.

12.35. $y^2 + x^2 - 2x = C$. **12.36.** $y = -\lg(C - 10^x)$.

12.37. $2x + y - 1 = Ce^x$. **12.38.** $5x + 10y + C = 3\ln|10x - 5y + 6|$.

12.39. $y = x\ln\dfrac{c}{x}$. **12.40.** $x = Ce^{x/y}$; $y = 0$; **12.41.** $(x-C)^2 - y^2 = C^2$.

12.42. $\sqrt{x/y} + \ln|y| = C$, $y = 0$. **12.43.** $x = (y - x)\ln C(y - x)$, $y = x$.

12.44. $e^{-y/x} + \ln Cx$. **12.45.** $y = Cx + x^2$. **12.46.** $y = \dfrac{1}{6}x^4 + C/x^2$.

12.47. $x = Cy^2 - 1/y$. **12.48.** $y = (x + C)e^x$.

12.49. $y = e^{2x}/8 + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **12.50.** $y = C_1\ln|x| - \dfrac{x^2}{4} + C_2$.

12.51. $y - \dfrac{1}{2}\ln|y| = x + 1$. **12.52.** $y^3 - y = 3x$.

12.53. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. **12.54.** $y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$.

12.55. $y = e^{x/6}(C_1\cos\dfrac{\sqrt{11}}{6}x + C_2\sin\dfrac{\sqrt{11}}{6}x)$.

12.56. $y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

12.57. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \dfrac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$.

12.58. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \dfrac{1}{9}e^{2x}$. **12.59.** $y = C_1e^x + C_2e^{7x} + 2$.

12.60. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{2}xe^x$. **12.61.** $y = (7-3x)e^{x-2}$.

12.62. $y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x$. **12.63.** $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$.

12.64. $y = e^{-x}(x - \sin x)$. **12.65.** Оставшееся количество вещества $x(t) = x(0)e^{-t/20}$; $x(t) = 0{,}01x(0)$ при $t = 60/\lg 2 \approx 200$ дней.

12.66. $y = 3e^{1{,}2t}/(1 + 2e^{1{,}2t})$; $y(2) \approx 1{,}43$.

ГЛАВА 13

13.16. $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$. **13.17.** $u_n = \dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}$. **13.18.** 0,75. **13.19.** 1/3. **13.20.** Расходится. **13.21.** Расходится. **13.22.** Сходится. **13.23.** Расходится. **13.24.** Расходится. **13.25.** Сходится. **13.26.** Расходится. **13.27.** Сходится. **13.28.** Сходится. **13.29.** Расходится. **13.30.** Сходится. **13.31.** Расходится. **13.32.** Сходится условно. **13.33.** Сходится абсолютно. **13.34.** 0,09. **13.35.** 0,63. **13.36.** Сходится абсолютно. **13.37.** Сходится. **13.38.** Расходится. **13.39.** Расходится. **13.40.** Сходится. **13.41.** Сходится абсолютно. **13.42.** Сходится абсолютно. **13.43.** Сходится. **13.44.** Расходится. **13.45.** Сходится абсолютно.

ГЛАВА 14

14.10. $[-1;\ 1)$. **14.11.** $(-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$. **14.12.** $\{0\}$.

14.13. $(-\sqrt{2}/3;\ \sqrt{2}/3)$. **14.14.** [3; 5]. **14.15.** $(-4;\ 4)$. **14.16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}/n!$

14.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n+1}/n$. **14.18.** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n}/(2n)!$.

14.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}x^{n-2}/n$. **14.20.** 0,8899. **14.21.** 0,0953. **14.22.** 0,3894. **14.23.** 5,0658. **14.24.** 1,0986. **14.25.** 0,7635. **14.26.** 0,5031; $\delta = 0{,}00008$. **14.27.** 0,24479; $\delta = 0{,}000005$.

ГЛАВА 15

15.17. $y = 2x/(x^2+Cx+1)$. **15.18.** $y = (C-x^2)/(C+x^2)$.

15.19. $y = C(\ln x)/x$. **15.20.** $y = Cx/(1+\ln x)$. **15.21.** $y = (x-C)\,e^{-x}$.

15.22. $y = xe^{C-x^2}$. **15.23.** $z'_x = 3x^2y^2-2y^3$, $z'_y = 2x^3y-6xy^2$.

15.24. $z'_x = 2x/(x^2+2y^3)$, $z'_y = 6y^2/(x^2+2y^3)$.

15.25. $z'_x = 2xy(1+x^2)^y/(1+x^2)$, $z'_y = (1+x^2)^y \ln(1+x^2)$.

15.26. $z'_x = e^{-x^2y}(1-2x^2y+2x)$, $z'_y = e^{-x^2y}(x^2/y - x^3 + 1/y^2)$.

15.27. $z'_x = \dfrac{y\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{y^2+1} + 1}{\left(x+\sqrt{y^2+1}\right)(y\sqrt{x^2+1}+x^2+1)}$,

$z'_y = \dfrac{y\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{y^2+1} - 1}{(y+\sqrt{x^2+1})(x\sqrt{y^2+1}+y^2+1)}$. **15.28.** $z'_x = (\ln^x y)\ln\ln y$,

$z'_y = x\ln^{x-1} y/y$. **15.29.** (−2; −2) — точка минимума. **15.30.** (8/5; 16/5) — точка минимума. **15.31.** Критическая точка (1; 2), достаточное условие экстремума не выполняется. **15.32.** Критических точек нет. **15.33.** $z_{\text{наиб.}} = 1$ в точках (0; 1) и (1; 0), $z_{\text{наим.}} = -1$ в точке (0; −1). **15.34.** $z_{\text{наиб.}} = 5/4$ в точке (3/4; 1/4), $z_{\text{наим.}} = 0$ в точке (0; 0). **15.35.** (8/3; 7/3). **15.36.** Функция выпукла вверх.
15.37. Функция невыпукла. **15.38.** Функция выпукла вниз.
15.39. $y = 1{,}525x - 0{,}12$. **15.40.** $y = -2{,}186x + 2{,}92$; $y(0{,}1) = 2{,}7014$.
15.41. $\sigma = (b - \lambda)/2$. **15.42.** $z = 2\overline{r} + 2\overline{r}^2 - \sigma^2/2$. Критическая точка (−1; 0) − седловая. **15.43.** 1.

ГЛАВА 16

16.5. $-1-4i$; $11-20i$; $66+112i$; $-1{,}26+0{,}32i$. **16.6.** $\left(2\sqrt{2}\right)\left(\cos\left(11\pi/12\right)+\right.$ $\left.+\, i\sin\left(11\pi/12\right)\right)$; $\left(1/\sqrt{2}\right)\left(\cos\left(7\pi/12\right)+i\sin\left(7\pi/12\right)\right)$.

16.7. $-1/2+\left(\sqrt{3}/2\right)i$. **16.8.** $\left(1/\sqrt{2}\right)(1+i)$;

$\left(1/\sqrt{2}\right)(-1+i)$; $\left(1/\sqrt{2}\right)(-1-i)$; $\left(1/\sqrt{2}\right)(1-i)$.

Алфавитно-предметный указатель

Абсолютная величина 125, 126
Аксиома 6
Аксиоматический метод 6
Алгебраическое дополнение 20
Антье 166
Аргумент 126, 402
— комплексного числа 440, 445
Асимптота 230—233
— вертикальная 231, 232
— горизонтальная 231, 232
— наклонная 231—233
Асимптоты гиперболы 109
Ассоциативный закон умножения матриц 17

Базис 72
Базисное решение 48, 50, 51
Базисные строки 35
Базисный минор 35
Балансовый анализ 56—60
— —, вектор валового выпуска 57
— —,— конечного продукта 57
— —, коэффициенты прямых затрат 57
— —, матрица полных затрат 58
— —, — прямых затрат 57
— —, основная задача 58
— —, продуктивная модель 58
— —, соотношения баланса 57
— —, стоимостный межотраслевой баланс 57
Бесконечно большая величина 151, 153, 154
— — — при $x \to x_0$, $x \to \infty$ 151, 152
Бесконечно большие величины, свойства 152, 153
— — —, связь с бесконечно малыми 153, 154
Бесконечно малая величина 148, 149
— — — более высокого порядка 151
— — — — низкого порядка 151
— — — одного порядка 151
— — — при $x \to x_0$, $x \to \infty$ 148
Бесконечно малые величины, свойства 149—151
— — —, связь с бесконечно большими 153, 154
— — — эквивалентные 151
Беспорядок 19
Биномиальный ряд 389
Бином Ньютона 389

Вариационное исчисление 422
Вектор 63
— нулевой 63, 69, 71
— n-мерный 68
— противоположный 64
— столбец 11
— строка 11
Векторное пространство 69
Величина постоянная 126
— переменная 126
Вершина параболы 113
Вершины гиперболы 109
— эллипса 107

Вклад ученых в развитие математики 8
Вогнутая функция 227
Возведение в степень комплексного числа 447
— — — матрицы 15
— ряда в квадрат 397
Возрастание функций, достаточное условие 217
— —, необходимое условие 218
Возрастающая функция 128
Вторая производная 195
Второй дифференциал 251
Второй замечательный предел 158—159
Выпуклая функция 227
— вниз функция 227, 228, 421
— вверх функция 227, 228, 421
Выпуклое множество 420
Выпуклость функции, достаточное условие 228
— —, необходимое условие 228
— —, схема исследования 229

Геометрия Евклида 5
— Лобачевского 6
Гипербола 108—112
—, каноническое уравнение 108
— равносторонняя 111
— сопряженная 110
—, характеристическое свойство 109
Гиперповерхность 405
Глобальный максимум 225, 419, 421
— минимум 225, 419, 421
Градиент 413, 414
График функции одной переменной 127
— — двух переменных 405

Двойной интеграл 430—433
— —, геометрический смысл 431
Дедукция 7
Деление двух комплексных чисел 444
Диагональ матрицы главная 11, 19
— — побочная 19
Диаметр клетки 431
Директриса параболы 113
Дисконтирование 318
Дифференциал 246—248
— второго порядка 251
—, геометрический смысл 247
—, инвариантность формы 248
— *n*-го порядка 252
— независимой переменной 246
—, оценка погрешности 250
—, применение в приближенных вычислениях 248, 249
—, свойства 248
— функции двух переменных 411
— — — —, геометрический смысл 412
Дифференциальное исчисление 177—253, 402—429
Дифференциальное уравнение 326—355
— — автономное 331
— — второго порядка 341—351
— — — —, допускающее понижение порядка 341, 342
— — — — линейное 342—351
— — — — — неоднородное 343, 346—351
— — — — — однородное 343—346
— — в частных производных 326
— — неполное 335, 336
— — первого порядка 329—342
— — — —, геометрический смысл 330
— — — — линейное 340, 341

— — — — однородное 338, 339
— — — — с разделяющимися переменными 336, 337
— —, общее решение 327
— — обыкновенное 326
— —, разрешенное относительно старшей производной 326
— —, решение 326, 327
Дифференцирование 180
—, основные правила 184
—, таблица производных 194
Дифференцируемая функция 180—182
Длина вектора 63, 66, 67, 77
— —, свойства 77
Дополнение множества 125
Достаточное условие 7, 8

Евклидово пространство 76—78
ε-окрестность точки 126

Зависимость между координатами вектора в разных базисах 75
— — непрерывностью и дифференцируемостью функции 182, 183
Задача интегрирования дифференциального уравнения 327
— сглаживания экспериментальных зависимостей 425—429
Задачи Коши 331
Задача о касательной 178—179
— — непрерывном начислении процентов 160—162
— — скорости движения 179
— — площади криволинейной трапеции 285, 286
— — производительности труда 179, 180
— об изменении численности населения 328, 329
— — оптимальном распределении ресурсов 434
— — — потреблении 434
— потребительского выбора 434

Извлечение корня из комплексного числа 447—449
Изокванта 433, 434, 437
Инверсия 19
Индукция 7
Интеграл. *См. соот. названия*
Интегральная кривая 327
Интегральная сумма 286
— —, геометрический смысл 286
Интегральное исчисление 254—326, 430—433
Интегрирование 256
— методом разложения 260, 261
— — введения переменных под знак дифференциала 262
— — замены переменной 261—265, 269, 276, 277, 281, 299, 300
— некоторых видов иррациональностей 273—276
— по частям 265—268, 278, 279, 300, 301, 321
— простейших рациональных дробей 269—273
— тригонометрических функций 276—277
Интегрируемость функции, достаточное условие 289
Интегрируемая функция 287
Интервал 125
— бесконечный 125
— сходимости 382
Интерполирование 138, 139
— квадратичное 139
— линейное 138, 139
— обратное 138
Интерполяционная формула 138

Интерполяционные поправки 138
Исследование операций 422
Исследование функций и построение графиков, схема 233—236, 239—241

Касательная 179, 180
Квадратичная форма 85—88
— —, канонический вид 88
— —, матричный вид 86
— — положительно определенная 89
— — — —, необходимое и достаточное условие 89, 90
— — отрицательно определенная 89
— — — —, необходимое и достаточное условие 89, 90
Квадратный трехчлен 114, 115
Квантор общности 143
— существования 143
Коллинеарные векторы 63
Комплексная плоскость 445
— —, действительная ось 445
— —, мнимая ось 445
Комплексные числа 443—449
— —, алгебраическая форма 443
— —, показательная форма 449
— —, свойства арифметических операций 446
— — сопряженные 443
— —, тригонометрическая форма 445
Композиция функций 133
Координаты вектора 65, 73
— текущие 95
— точки 95
Коэффициент Джини 317
Коэффициенты степенного ряда 381
Кривая Гаусса 312
— Лоренца 317
Кривые безразличия 137, 434
— второго порядка 104
Критерий продуктивности матрицы 58, 59
— Сильвестра 89, 90
Критическая точка 221, 416

Линейная модель обмена (международной торговли) 90—92
Линейная комбинация векторов 70
— — строк матрицы 33
— — функций 343
Линейное отображение 78
—преобразование 78
— пространство 69, 70
Линейно зависимые векторы 70, 72
— — строки 33, 34
— — функции 343
Линейно независимые векторы 70
— — строки 34
— — функции 343
Линейный оператор 78—80
Линия бюджетного ограничения 137
Линия уровня 406, 407, 433
Логические рассуждения 6
Логистическая кривая 354
Локальный экстремум 219, 416
Максимальное число базисных решений 49
Максимум функции 219, 415
Маржинальная величина 196
Математика 5
—, периоды развития 5, 6
Математическая индукция 7
— интуиция 6
— модель 7
— — демографического процесса 328, 329
Математические доказательства 6

Матрица 10
— взаимная 27
— единичная 12
— диагональная 11, 22
— квадратная 11
— квадратичной формы 86
— невырожденная (неособенная) 27
— нулевая 12
— обратная 26
— —, алгоритм вычисления 28, 29
— —, необходимое и достаточное условие существования 27, 28
— оператора 79
— перехода к новому базису 74
— присоединенная 27
— продуктивная 58, 59
— симметрическая 86
— системы 39
— — расширенная 46
— согласованная 13
— союзная 27
— столбец 11
— — переменных 39
— — свободных членов 39
— ступенчатая 31
— строка 11
— транспонированная 16
— треугольная 22
Матричная алгебра 10
Метод
— вариации произвольных постоянных 346, 347
— Гаусса 44—47, 49
— —, условие несовместимости системы 45
— —, преимущества 49
— координат Декарта 6
— математики 6
— множителей Лагранжа 422−424
— наименьших квадратов 425—429, 439, 440
— обратной матрицы 41, 42, 43, 53, 54
Минимум функции 219, 415
Минор элемента матрицы 20
— k-го порядка 29
Мнимая единица 444
Мнимые числа 443
Многочлен 133
Множество 124
— действительных чисел 125
— замкнутое 419
— иррациональных чисел 125
— натуральных чисел 125
— открытое 330
— пустое 124
— целых чисел 125
— числовое 125
— элементарное 432
Множитель Лагранжа 423
Модель
— естественного роста 352
— Леонтьева 56—59
— обмена (международной торговли) 90—92
— —, структурная матрица торговли 91
— —, уравнение сбалансированной торговли 92
— роста в условиях конкурентного рынка 352, 353
— экономической динамики 351—355
Модуль вектора 63
— комплексного числа 445
— числа 125
Монотонная функция 128

Наибольшее значение 226, 419

Наименьшее значение 226, 419
Наибольшее и наименьшее значения 226, 227
— — — —, схема нахождения 226
— — — — на интервале 226
— — — — на отрезке 225, 226
— — — — функции двух переменных 419, 420
Направленный отрезок 63
Направляющие косинусы 413
Направляющий вектор прямой 121
Натуральные логарифмы 160
n-я частичная сумма ряда 358
Невозрастающая функция 128
Невязка 426
Независимость характеристического многочлена оператора от выбора базиса 83
Необходимое условие 7, 8
— и достаточное условие 7, 8
Неограниченная функция 152, 312
Неопределенный интеграл 254–285
— —, «неберущиеся» интегралы 282
— —, свойства 256, 257
— —, таблица основных интегралов 257, 258
См. также Интегрирование
Неперово число 160
Непрерывность функции в точке 163–167
— —, свойства 164, 165
— — на отрезке 167, 168
— — на промежутке 166
— — двух переменных 408
Неравенство Коши—Бунявского 77
— треугольника 77
Несобственный интеграл 308–313
— —, геометрический смысл 310
— — от неограниченной функции 312, 313
— — с бесконечными пределами 309–312
— — сходящийся 309
— — расходящийся 309
Неубывающая функция 128
n-мерное линейное пространство 72
n-мерный вектор 68
— —, компоненты 68
Нечетная функция 127, 129—131
Неэлементарная функция 132, 296, 297
Норма вектора 77
Нормальный вектор плоскости 119
n-й остаток ряда 361, 373
— член последовательности 142
— член ряда 358

Область значений функции 127, 129—131
— определения функции 127, 129—131
Образ вектора 79
Обратная пропорциональная
зависимость 110
— функция 132, 140
Общее уравнение прямой 100, 101
— — —, исследование 100, 101
Общий член последовательности 142
— — ряда 358
Объединение множеств 124
Однородная функция 338
Окрестность точки 126, 404
Окружность, нормальное уравнение 104, 105
Ограниченная функция 128
Относительная скорость изменения функции 192
Оператор 78
— линейный 78

— нулевой 80
— тождественный 80
Определенный интеграл 285–287
— —, верхний предел 287
— —, вычисление площадей плоских фигур 301–306, 321–323
— —, объемов тел вращения 306–308, 322, 323
— — в экономике 316–319
— — — —, вычисление дисконтируемой суммы 318
— —, вычисление коэффициента Джини 317
— — — объема продукции 316, 317
— — — среднего времени 319
— —, геометрический смысл 288
— —, достаточное условие существования 289
— — как функция верхнего предела 294–297
— —, нижний предел 287
— — приближенное вычисление по формуле трапеций 313–315
— —, приближенное вычисление с помощью рядов 391, 394–395
— —, свойства 290–294
— —, экономический смысл 288, 289
Определитель матрицы 17–27
— — диагональной 22
— — второго порядка 17
— — n-го порядка 20
— —, свойства 22—26
— — первого порядка 17
— — третьего порядка 18
— — треугольной 22
— произведения двух квадратных матриц 25
— системы 40
Ортогональные векторы 77
Ортогональный базис 77
Ортонормированный базис 77
Отрезок 125

Параметр 126
— параболы 113
Парабола, каноническое уравнение 113
—, характеристическое свойство 114
Параболоид 405
Паутинообразная модель 137
Первый замечательный предел 158, 159
Первообразная 254, 255
Переменная зависимая 126
— независимая 126
Переменные базисные 48
— неосновные 48
— основные 48
— свободные 48
Пересечение множеств 124
Перестановка 19
Переход к новому базису 74—76
Период 128
Периодическая функция 128
Период математики переменных величин 5
— современной математики 6
— элементарной математики 5
Повторный интеграл 432
Показательный закон роста 161
Подматрица 29
Подмножество 124
Подобные матрицы 81
Подынтегральная функция 255, 287
Подынтегральное выражение 255, 287
Поле направлений 330
Полуинтервал 124

— бесконечный 124
Полином 133
Полуось гиперболы действительная 109
— — мнимая 109
— эллипса 107
Правило Лопиталя 215—218
— многоугольника 64
— параллелепипеда 64
— параллелограмма 64
— Сарруса 17, 18
— треугольника 64
— треугольников 17, 18
Предел 143—146, 155—161, 167—175
— функции в бесконечности 145, 147
— — —, геометрический смысл 146
— — при $x \to -\infty$, при $x \to +\infty$ 147
— — в точке 147—149
— — — —, геометрический смысл 147, 148
— — двух переменных 407, 408
— — односторонний слева при $x \to x_0$ 148
— — — справа при $x \to x_0 + 0$ 148
— числовой последовательности 143−145
— — —, геометрический смысл 145
Пределы, раскрытие неопределенностей 168—175, 236—237
Предельная величина 196
— производительность 196
— норма замещения ресурса 437, 438
— выручка 196
— полезность 196, 435
Предельные издержки 196, 242, 243
Предельный анализ 196
— доход 196, 197, 240, 241
— продукт 196
Преобразование 78
— графиков 134, 135
Признаки существования предела 157, 158
Признак сходимости 362
— — Даламбера 367−369, 377
— — знакопеременного ряда 373, 374
— — интегральный 369−371
— — Лейбница 371−373, 378
— — —, оценка остатка знакочередующегося ряда 373
— — необходимый 362, 363, 376, 378
— — — и достаточный 361, 362
— — сравнения 364−365, 376, 379
— — — предельный 364, 365, 375
Произведение вектора на число 63, 69
— линейного оператора на число 80
— линейных операторов 80
— матриц 12—14
— матрицы на число 11, 12
Производная 181—207
— второго порядка 196
— — —, механический смысл 196
— в экономике 196−201, 205, 207
— — —, закон убывающей доходности 242, 243
— — —, — — полезности 243
— — —, условие оптимальности выпуска продукции 242
— — — , — наиболее экономичного производства 242
— третьего, *n*-го порядка 196
—, геометрический смысл 181
— логарифмическая 191, 192
— логарифмической функции 190
—, механический смысл 181

— неявной функции 194
— обратной функции 187—190
— по направлению 413
— показательной функции 190, 191
— сложной функции 186–188
— степенной функции 183, 184, 191, 192
— степенно-показательной функции 191
—, схема вычисления 183
— тригонометрических функций 192, 193
—, экономический смысл 182, 197
См. также Дифференцирование
Производственная функция 136, 403, 433, 434
Промежуток 125
Прообраз вектора 79
Проценты простые 160
— сложные 160, 161

Равенство векторов 68
— комплексных чисел 443
— матриц 10
— множеств 124
— столбцов (строк) 33
Равновесная цена 137, 206, 207
Равносильные системы уравнений 39
Радиус-вектор 438
— — комплексного числа 442
Разность векторов 65
— множеств 124
Размер матрицы 10
Размерность пространства 72—74
Разложение вектора по базису 73
— в ряд Маклорена функций 386–388, 393, 394
Ранг матрицы 29—31, 33, 34
— квадратичной формы 89
— оператора 79
Расстояние между двумя точками плоскости 67, 95, 117, 407
— от точки до прямой 103, 104
Ряд Маклорена 386–390
— — для функции e^x 388
— — — — $\sin x$ 388
— — — — $\cos x$ 388
— — — — $\ln(1+x)$ 389
— Тейлора 387
Ряды — *см. соотв. названия*

Свойства векторов линейного пространства 69, 71
— линейных операций над матрицами 13
— — — — векторами 69
Сегмент 125
Седловая точка 417
Символ равносильности 7, 143
Система двух линейных уравнений 38
— — — —, исследование 40, 41
— линейных уравнений 38, 39, 40, 48
— — — в матричной форме 39, 41—43
— — —, запись с помощью знаков суммирования 38
— — —, исследование 48, 49
— — —, коэффициенты при переменных 38
— — — неопределенная 38
— — — несовместная 38
— — — определенная 38
— — —, решение 38
— — —, свободные члены 38
— — — совместная 38
— — —, структура общего решения 52, 53

Система линейных однородных уравнений 51, 52
— — — —, исследование 51, 52
— — — —, общее решение 52
— — — —, свойства решений 52
— нормальных уравнений 428, 439
Скалярное произведение векторов 66, 76
— — —, свойства 76
— — —, экономический смысл 76
Скалярный квадрат вектора 67
Сложение векторов 64
— комплексных чисел 443
— матриц 12
Сложная функция 133
Собственный вектор линейного оператора (матрицы) 84
Собственное значение линейного оператора (матрицы) 82, 83
Сочетания, число сочетаний из *n* по *m* 49
Способы задания функции 127
Средние издержки 207, 242
Средний доход 197
Стационарная точка 221, 416
Степенной ряд 381—399
— — биномиальный 389
— —, интервал сходимости 382
— —, необходимое и достаточное условие сходимости 387
— —, область сходимости 381—386
— — , применение в приближенных вычислениях 391—394, 398, 399
— —, радиус сходимости 382—383
— —, свойства 386
Строго монотонная функция 128
Сумма векторов 64, 69
— линейных операторов 80
— матриц 12, 13
— ряда 358, 359, 375
Суперпозиция функций 133
Сходимость ряда 358
— —, свойства 361, 362

Темп изменения функции 190
Теорема Абеля 381, 382
— Больцано—Коши 167
— Вейерштрасса 166
— Крамера 41, 42
— Кронекера—Капелли 48
— Лагранжа 212, 213
— Лапласа 21, 22
— Римана 375
— Ролля 211, 212
— Ферма 210, 211
— —, экономический смысл 242
— о единственности представления вектора линейного пространства 72, 73
— — зависимости между матрицами оператора в разных базисах 81
— — законе инерции квадратичных форм 89
— — матрице оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов 84, 85
— — множестве первообразных 255
— — неизменности ранга матрицы при элементарных преобразованиях 31
— — перпендикулярности градиента линии уровня 414
— — погружении дискретного аргумента в непрерывный 376
— — приведении квадратичной формы к каноническому виду 88
— — — производной интеграла по верхнему пределу 295—297
— обратной функции 187, 188

— — — сложной функции 186, 187
— — размерности и базисе
пространства 73, 74
— — ранге матрицы 34, 35
— — связи бесконечно малых с
пределами функций 149
— — среднем 293, 294, 304, 305
— — существовании в n-мерном пространстве ортонормированного базиса 78
— — числе решений любой фундаментальной системы решений 52
— существования и единственности решения 329, 330
Теоремы об общем решении дифференциального уравнения второго порядка 347, 348
— о пределах 154—156
Точка граничная 419
— максимума 219
— минимума 219
— множества 124
— перегиба 229, 230
— — , достаточное условие 229
— —, необходимое условие 229
— пересечения прямых 103
— предельная 419
— разрыва 164
— — второго рода 164
— — первого рода 164
— устранимого разрыва 164
Транспонирование матриц 15, 16

Убывание функций, достаточное
условие 217
— —, необходимое условие 218
Убывающая функция 128
Угловой коэффициент 96
Угол между векторами 67, 68
— — двумя прямыми 101
Умножение матриц 13
— —, его особенности 14, 15
— матрицы на число 12
— комплексных чисел 444
— рядов 397
Уравнение касательной 181, 184, 203—205
— линии 95
— плоскости общее 120
— —, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору 120
— прямой в отрезках 99
— —, проходящей через данную точку в данном направлении 98
— — — — две данные точки 99
— — с угловым коэффициентом 97
— пучка прямых 98
— связи 422
Уравнения прямой в пространстве 120, 121
— — — — канонические 121
Условие параллельности плоскостей 120
— — прямых 101, 102
— перпендикулярности прямых 101, 102
— — плоскостей 120
Условный максимум 422
— минимум 422
— экстремум 422—425

Фазовая прямая 332
Фазовый портрет 334
Фокус параболы 113
Фокусы гиперболы 109
— эллипса 107
Фундаментальная система решений 52
Формула Муавра 447

— Ньютона—Лейбница 297
— сложных процентов 161
— Тейлора 388
— —, остаточный член в форме Лагранжа 388
— трапеций 315
— Эйлера 449
Формулы Крамера 40, 41, 43
Функция 126, 127
— алгебраическая 133
—, аналитический способ задания 127
— аддитивная 136
— выпуска 136
— гладкая 183
—, графический способ задания 127
— двух переменных 402—425
— — —, полное приращение 409
— — —, частное приращение 409
— Дирихле 127
— дробно-линейная 111
— издержек 136
— иррациональная 134
— Кобба—Дугласа 403, 435
— кусочно-гладкая 183
— Лагранжа 423
— логарифмическая 130, 403
— мультипликативная 136
— нескольких переменных 136, 402—425
— — — квадратическая 403
— — — линейная 403
— — — постоянной эластичности 403
— — — с постоянной эластичностью замещения 404
— неявная 132
— нечетная, четная 127, 140, 141
— показательная 130
— полезности 136, 403, 434
— полных затрат 136
— потребления 136
— предпочтений 136
— производственная 136, 403, 404, 433
— предложения 136
— рациональная 132
— сепарабельная 136
—, словесный способ задания 127
— спроса 136
— степенная 129
—, табличный способ задания 127
— трансцендентная 134
— целая рациональная 133
— явная 132
Функции Торнквиста 137
— обратные тригонометрические 131
— тригонометрические 130, 131

Характеристический многочлен линейного оператора (матрицы) 83
Характеристическое уравнение дифференциального уравнения второго порядка 344—346
— — оператора (матрицы) 83

Целая часть числа 166

Частная производная 409, 410
— — второго порядка 417
— —, геометрический смысл 409, 410
Четная функция 127, 129—131
Численный метод вычисления определенного интеграла 313
Числовая ось (прямая) 125
— последовательность 142
— — сходящаяся 143

— — расходящаяся 143
Число e 160, 161
Число Эйлера 160
Числовой ряд 358–380
— — абсолютно сходящийся 374, 379
— — гармонический 363, 364
— — геометрический 359, 360
— — знакопеременный 373–375
— — знакочередующийся 371–373
— — обобщенный гармонический 366
— — расходящийся 359
— —, свойства сходящихся рядов 361
— — сходящийся 359
— — с положительными членами 364–371
— — условно сходящийся 374, 379
Чисто мнимые числа 443

Эквивалентные системы уравнений 39
Экономическая область 429
Экспонента 161, 192
Экспоненциальный закон роста 161
Экстремум функции 219–225
— —, второе достаточное условие 224
— — двух переменных 415–419
— — — —, достаточное условие 417, 418
— — — —, необходимое условие 416, 417
— —, схема исследования 418
— —, необходимое условие 220–221
— —, первое достаточное условие 222, 223
— —, схема исследования 223
— — условный 417–420
Эксцентриситет гиперболы 109
— эллипса 107
Эластичности коэффициент замещения 437, 438
— — перекрестный 436, 437
Эластичность функции 198—200
— —, свойства 199
— — частная 435, 436
Элементарная функция 133
Эллипс 106, 107
—, каноническое уравнение 106, 107
—, характеристическое свойство 107
Эмпирическая формула 425

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

ВВЕДЕНИЕ 5

Раздел I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ 9

Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 10
1.1. Основные сведения о матрицах 10
1.2. Операции над матрицами 12
1.3. Определители квадратных матриц 17
1.4. Свойства определителей 22
1.5. Обратная матрица 26
1.6. Ранг матрицы 29
Упражнения 36

Глава 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 38
2.1. Основные понятия и определения 38
2.2. Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера 40
2.3. Метод Гаусса 44
2.4. Система m линейных уравнений с n переменными 47
2.5. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений 51
2.6. Решение задач 53
2.7. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ) 56
Упражнения 60

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА 63
3.1. Векторы на плоскости и в пространстве 63
3.2. n-мерный вектор и векторное пространство 68
3.3. Размерность и базис векторного пространства 70
3.4. Переход к новому базису 74
3.5. Евклидово пространство 76

3.6. Линейные операторы 78
3.7. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора 82
3.8. Квадратичные формы 85
3.9. Линейная модель обмена 90
Упражнения 92

Глава 4. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ 95
4.1. Уравнение линии на плоскости 95
4.2. Уравнение прямой 96
4.3. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой 101
4.4. Окружность и эллипс 104
4.5. Гипербола и парабола 108
4.6. Решение задач 115
4.7. Понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве 119
Упражнения 121

Раздел II. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ 123
Глава 5. ФУНКЦИЯ 124
5.1. Понятие множества 124
5.2. Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки 125
5.3. Понятие функции. Основные свойства функций 126
5.4. Основные элементарные функции 129
5.5. Элементарные функции. Классификация функций. Преобразование графиков 132
5.6. Применение функций в экономике. Интерполирование функций 135
5.7. Решение задач 139
Упражнения 141

Глава 6. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ 142
6.1. Предел числовой последовательности 142
6.2. Предел функции в бесконечности и в точке 144
6.3. Бесконечно малые величины 148
6.4. Бесконечно большие величины 151
6.5. Основные теоремы о пределах. Признаки существования предела 154

6.6. Замечательные пределы. Задача о непрерывном начислении процентов 157
6.7. Непрерывность функции 162
6.8. Решение задач 167
Упражнения 175

Раздел III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ 177
Глава 7. ПРОИЗВОДНАЯ 178
7.1. Задачи, приводящиеся к понятию производной 178
7.2. Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции 180
7.3. Схема вычисления производной. Основные правила дифференцирования 183
7.4. Производная сложной и обратной функций 186
7.5. Производные основных элементарных функций. Понятие о производных высших порядков 190
7.6. Экономический смысл производной. Использование понятия производной в экономике 196
7.7. Решение задач 201
Упражнения 207

Глава 8. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ 210
8.1. Основные теоремы дифференциального исчисления 210
8.2. Правило Лопиталя 214
8.3. Возрастание и убывание функций 217
8.4. Экстремум функции 219
8.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке 225
8.6. Выпуклость функции. Точки перегиба 226
8.7. Асимптоты графика функции 230
8.8. Общая схема исследования функций и построения их графиков 233
8.9. Решение задач 236
8.10. Приложение производной в экономической теории 242
Упражнения 243

Глава 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ 246
9.1. Понятие дифференциала функции 246
9.2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях 248
9.3. Понятие о дифференциалах высших порядков 251
Упражнения 252

Раздел IV. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ **253**

Глава 10. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ **254**
10.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл 254
10.2. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций 256
10.3. Метод замены переменной 261
10.4. Метод интегрирования по частям 265
10.5. Интегрирование простейших рациональных дробей 269
10.6. Интегрирование некоторых видов иррациональностей 273
10.7. Интегрирование тригонометрических функций 276
10.8. Решение задач 278
10.9. Об интегралах, «неберущихся» в элементарных функциях 282
Упражнения 282

Глава 11. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ **285**
11.1. Понятие определенного интеграла, его геометрический и экономический смысл 285
11.2. Свойства определенного интеграла 290
11.3. Определенный интеграл как функция верхнего предела 294
11.4. Формула Ньютона–Лейбница 297
11.5. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле 299
11.6. Геометрические приложения определенного интеграла 301
11.7. Несобственные интегралы 308
11.8. Приближенное вычисление определенных интегралов 313
11.9. Использование понятия определенного интеграла в экономике 316
11.10. Решение задач 320
Упражнения 324
Глава 12. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ **326**
12.1. Основные понятия 326

12.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения 329
12.3. Элементы качественного анализа дифференциальных уравнений первого порядка 331
12.4. Неполные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными 335
12.5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка 338
12.6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 340

12.7. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка 341
12.8. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 342
12.9. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике 351
Упражнения 355

Раздел V. РЯДЫ 357

Глава 13. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ 358
13.1. Основные понятия. Сходимость ряда 358
13.2. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд 362
13.3. Ряды с положительными членами 364
13.4. Ряды с членами произвольного знака 371
13.5. Решение задач 375
Упражнения 379

Глава 14. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ 381
14.1. Область сходимости степенного ряда 381
14.2. Ряд Маклорена 386
14.3. Применение рядов в приближенных вычислениях 391
14.4. Решение задач 394
Упражнения 399
Раздел VI. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 401
Глава 15. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ 402
15.1. Основные понятия 402

15.2. Предел и непрерывность 407
15.3. Частные производные 409
15.4. Дифференциал функции 411
15.5. Производная по направлению. Градиент 412
15.6. Экстремум функции нескольких переменных 415
15.7. Наибольшее и наименьшее значения функции 419
15.8. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа 422
15.9. Понятие об эмпирических формулах. Метод наименьших квадратов 425
15.10. Понятие двойного интеграла 430
15.11. Функции нескольких переменных в экономической теории 433
15.12. Решение задач 438
Упражнения 440

Приложение 443

Глава 16. Комплексные числа 443

16.1. Арифметические операции над комплексными числами. Комплексная плоскость 443
16.2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа 445
Упражнения 449

Литература 450

Ответы к упражнениям 451

Алфавитно-предметный указатель 461

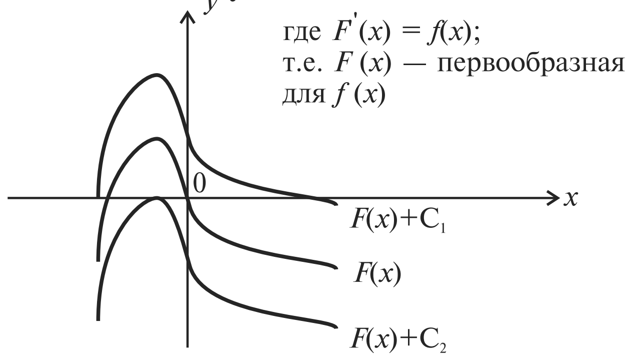
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Определения интегралов

Неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\ ,$$

где $F'(x) = f(x)$;
т.е. $F(x)$ — первообразная для $f(x)$



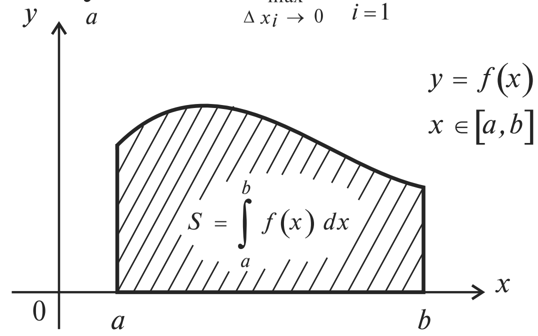
$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx;\quad \int dF(x) = F(x) + C$$

Формула НЬЮТОНА —ЛЕЙБНИЦА

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$



$y = f(x) \geq 0,$
$x \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;\quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Табличные интегралы

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$