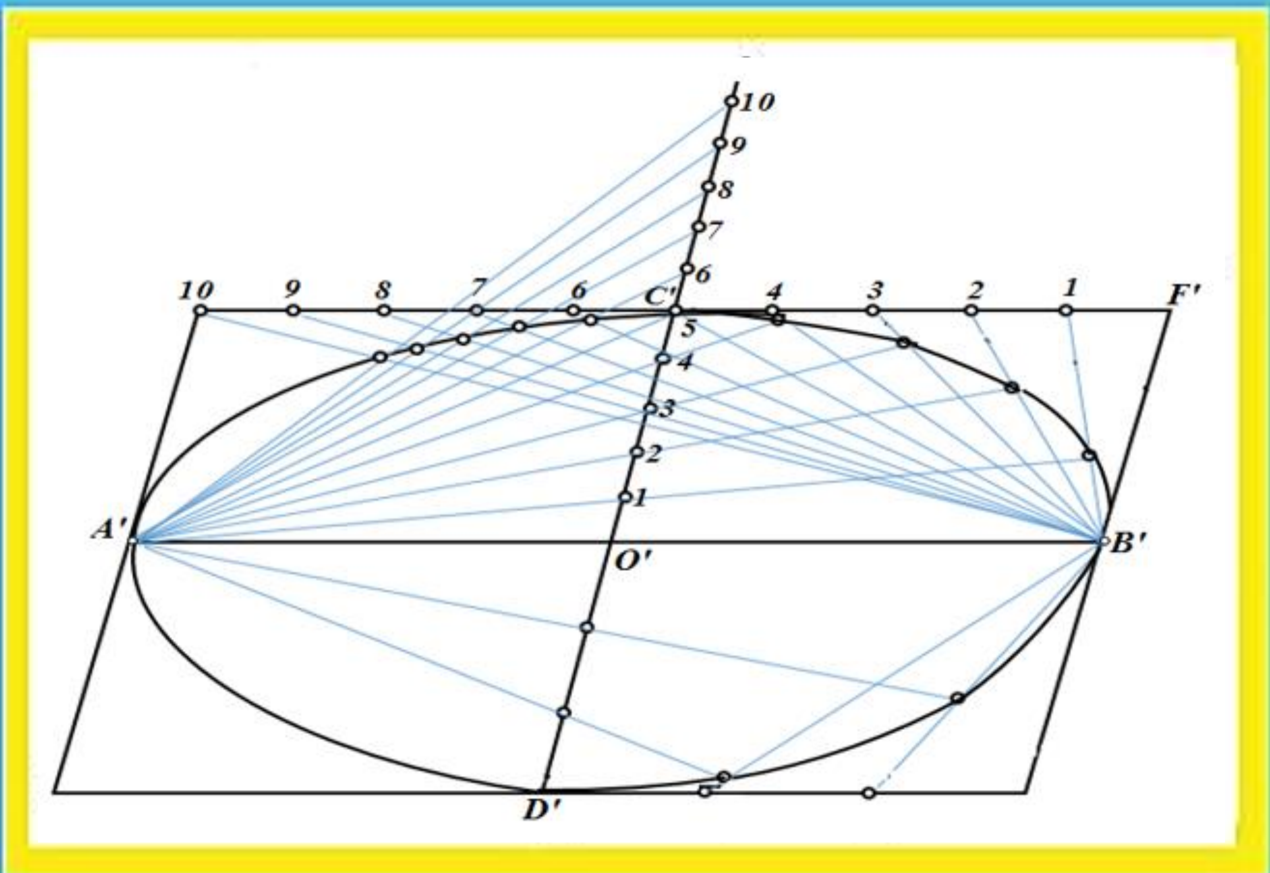
DAVLETOV D.E.

GEOMETRIYA



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

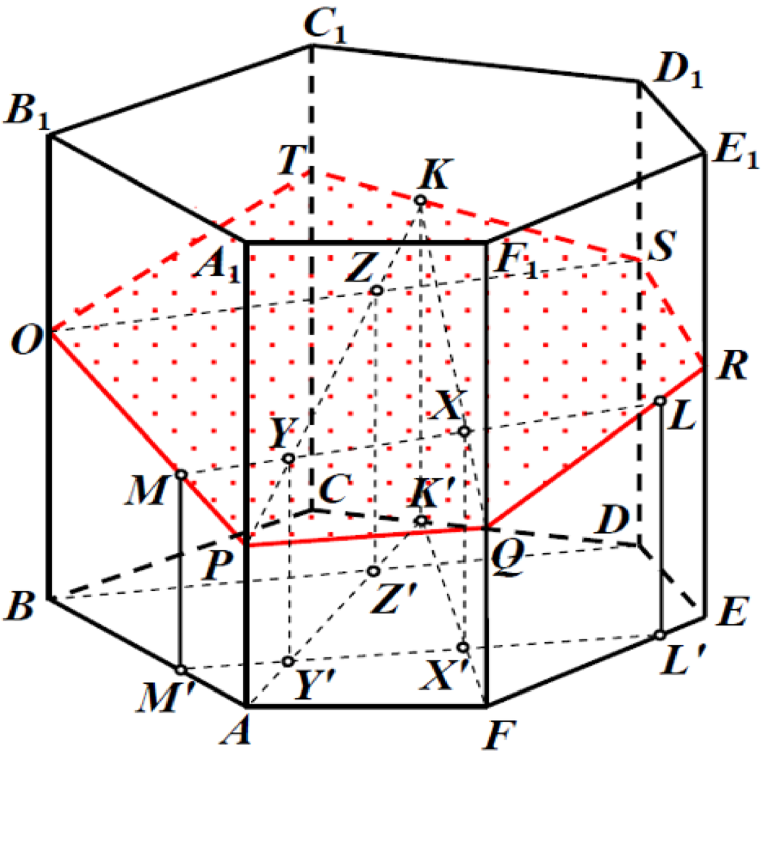
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

RENESSANS TA’LIM UNIVERSITETI

DAVLETOV D.E.

GEOMETRIYA

Tasvirlash usullari



Toshkent 2024

"UDK:514(075)
KBK:22.15
D 14

D.E. Davletov

Geometriya: O‘quv qo‘llanma – Toshkent: INNOVATSIYA-ZIYO", 2024. – 102 b.

Ushbu o‘quv qo‘llanma 60110600-Matematika va informatika ta’lim yo‘nalishi "Geometriya" fani dasturi asosida tayyorlangan bo‘lib, undan matematika va informatika, matematika, mexanika ta’lim yo‘nalishida tahsil olayotgan talabalar foydalanishlari mumkin.

O‘quv qo‘llanmada parallel proyeksiyalash orqali yassi va fazoviy figuralarnimng tasvirlarini yasash usullari, aksonometriya, kesimlar yasash, Monj metodiga doir ma’lumotlar to‘la bayon etilgan bo‘lib har bir tushuncha bo‘yicha masalalar yechish namunalari berilib talabalar mustaqil shug‘ullanishlari uchun masalalar keltirilgan.

В учебном пособии подробно изложены методы построения плоских и пространственных изображений фигур путем параллельного проецирования, аксонометрия, построение сечений, метод Монжа, даны примеры решения задач по каждому понятию, представлены задачи для самостоятельной работы учащихся.

The textbook describes in detail the methods of constructing flat and spatial images of figures by parallel projection, axonometry, cross-section construction, the Monge method, gives examples of solving problems for each concept, presents tasks for independent work of students.

Taqrizchilar:

T.F.Jurayev
Nizomiy nomidagi TDPU Umumiy matematika kafedrasi professori, fizika matematika fanlari doktori
G‘.G‘.Yunusov
Renessans ta`lim universiteti "Matematika va tabiiy fanlar" kafedrasi mudiri, dotsent

O‘zbekiston Respublikasi oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil 1-avgustdagi 277-sonli buyrug‘iga asosan nashr etishga ruxsat berildi.

ISBN 978-9910-680-55-7

KIRISH

Turli xil chizmalar, diagrammalar, grafikalarsiz zamonaviy insonning hayotini tasavvur qilishning iloji yo'q. Rasm va chizmalar ba'zan jonli yoki bosma nashrdan ko'ra ko'proq ma'lumot berishi mumkin. Bundan tashqari grafik va tasvirlardagi ma’lumotlarni tili xalqaro til hisoblanadi. Shunday qilib masalan, to'g'ri bajarilgan biror obekt chizmasi texnik jihatdan bilimdon odam uchun tushunarli, u qaysi tilda gapirmasin.

Fazoviy shakllarni tasvirlash zarurati odamlarda qadimgi davrlarda paydo bo'lgan. Qadimki insonlarning g'or devorlaridagi rasmlarni esga oladigan bo‘lsak, unda qadimgi odam o'z qabiladoshlariga muvaffaqiyatli ov va ovdagi xavf-hatar haqida g‘or devorlaridagi chizmalari orqali ma’lumot berishga harakat qilgan. Birinchi chizmalarning paydo bo'lishi istehkomlar, shahar binolari qurilishi bilan bog'liq. Tarixdan ma’lumki Misr piramidalari va ibodatxonalari, qadimgi Yunoniston va Rimning eng katta inshootlarini qurishda dastlab to'liq chizmalari yaratilib, shu asosida qurilish ishlari olib borilgan. Birinchi chizmalar kelajakda qurilish olib borilishi kerak bo'lgan joyning o‘zida amalga oshirilgan, keyin ular loydan yasalgan taxtalarda, papiruslarda, so‘ngra qog'ozda bajarilgan. Shu bilan birga chizmalarni bajarish qoidalari shakllantirildi, chizmalarni yasash asboblari yaratildi va takomillashtirildi.

Fazoviy figuralarni tekislikda tasvirlash usullari haqidagi fanning asoslarini qadimgi yunon olimlari: Esxil, Demokrit, Evklid, Vitruviy, Ptolemeylar qo‘ygan. Atrofdagi voqelik tasvirlarini vizual idrok etishga yaqin holda tasvirlash usullari bo‘yich dastlabki qadamni uyg‘onish davri olimlari, me’morlari va rassomlari tomonidan amalga oshirildi. Italiyalik rassom va olim Leonardo da Vinchi bunday tasvirlar nazariyasining yaratilishi va rivojlanishiga katta hissa qo‘shgan. Nemis matematigi, o‘ymakori va rassomi Albrext Dyurerning bu yo‘nalishdagi xizmatlarini alohida ta’kidlash lozim. Keyinchalik tasvirlash usullari fanining shakllanishi va rivojlanishida fransuz geometri va muhandisi Gaspar Monjning xizmatlari katta bo‘ldi.

Geometriyada fazodagi figuralarning geometrik xossalarini o‘rganishda bevosita figuralarning o‘zlaridan emas, balki ularning tekislikdagi tasvirlaridan foydalaniladi. Geometriya o‘qitishda o‘rganiladigan materialni ravshanligi va uni turli tasvirlash vositalari bilan konkretlashtirish katta ahamiyatga egadir. Yassi figuralarni aniq qilib tekislikda tasvirlashimiz qiyinchilik tug‘dirmaydi, ammo fazoviy figuralarni tekislikda tasvirlash ancha murakkabdir.

Agar tasvirlanadigan figuraning modelini yasashni e’tiborga olmasak, kundalik tajribada fazoviy figuralarni tekislikka tasvirlashga to‘g‘ri keladi. Tasvirlanishi kerak bo‘lgan figurani original (asli), originalini tekislikda ifoda qiluvchi tekis figurani esa tasvir deb ataylik. Originalni bilgan holda uni tasvirini topish qoidalar to‘plami tasvirlash usullari deyiladi.

Fazoviy figuralarni tasvirlash metodlari juda ko‘pdir. Masalan, markaziy proyeksiyalash, parallel proyeksiyalash, aksonometriya, stereografik proyeksiyalash va h.k.

Ushbu o‘quv qo‘llanmada parallel proyeksiyalash orqali yassi va fazoviy figuralarning tasvirlarini yasash usullari, aksonometriya, kesimlar yasash, Monj metodiga doir ma’lumotlar to‘la bayon etilgan bo‘lib har bir tushuncha bo‘yicha masalalar yechish namunalari berilib talabalar mustaqil shug‘ullanishlari uchun masalalar keltirilgan.

I BOB. TASVIRLASHNING XOSSALARI

1.1§ MARKAZIY, PARALLEL PROYEKSIYALASH VA ULARNING XOSSALARI

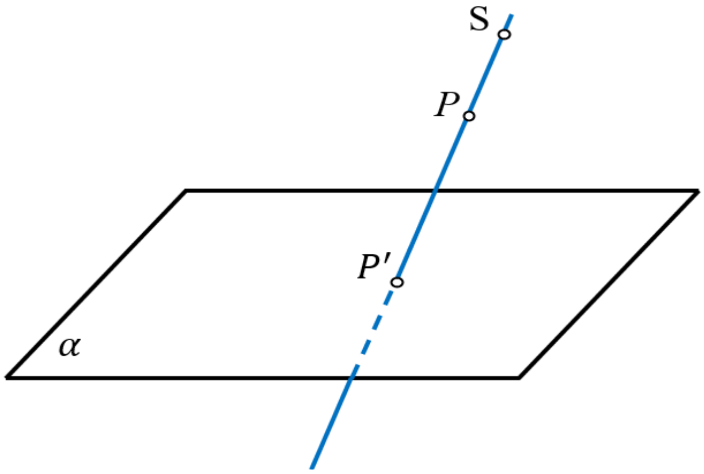
Reja:

1. Markaziy proyeksiyalash va uning xossalari.
2. Parallel proyeksiyalash va uning xossalari.

Fazoviy figuralarni tekislikda tasvirlash masalasi qadimgi davrlardan beri turli matematiklar tomonidan ko‘rib chiqilgan. Ushbu muammoni hal qilish me'morlar, rassomlar, muhandislar uchun amaliy jihatdan juda zarurdir. Stereometriyani o‘rgatishda matematika o‘qituvchisi fazoviy jismlarni tekislikda tasvirlaydi va bunda bir qator muammolarga duch keladi. Bunday muammoni hal qilishning eng oson usuli uch o‘lchamli Evklid fazosini tekislikka parallel ravishda proyeksiyalash bilan bog‘liq. Parallel proyeksiyalash yordamida fazoviy jismlarni tasvirlash usuli oddiy, ammo barcha masalalar uchun har doim ham qulay emas. Masalan, uning yordami bilan rasmda fazoviy jismlarning badiiy tasvirini olish mumkin emas, rassomlar markaziy proyeksiyalash deb ataladigan proyeksiyalashdan foydalanib, tasvirlashning ancha murakkab usullarini qo‘llaydilar.

Dastlab markaziy proyeksiyalash tushunchasi bilan tanishamiz.

Fazoda biror α tekislik va unda yotmaydigan S nuqta berilgan bo‘lsin. Fazodagi ixtiyoriy P nuqtani olib S bilan tutashtiramiz. Hosil bo‘lgan SP to‘g‘ri



1-chizma

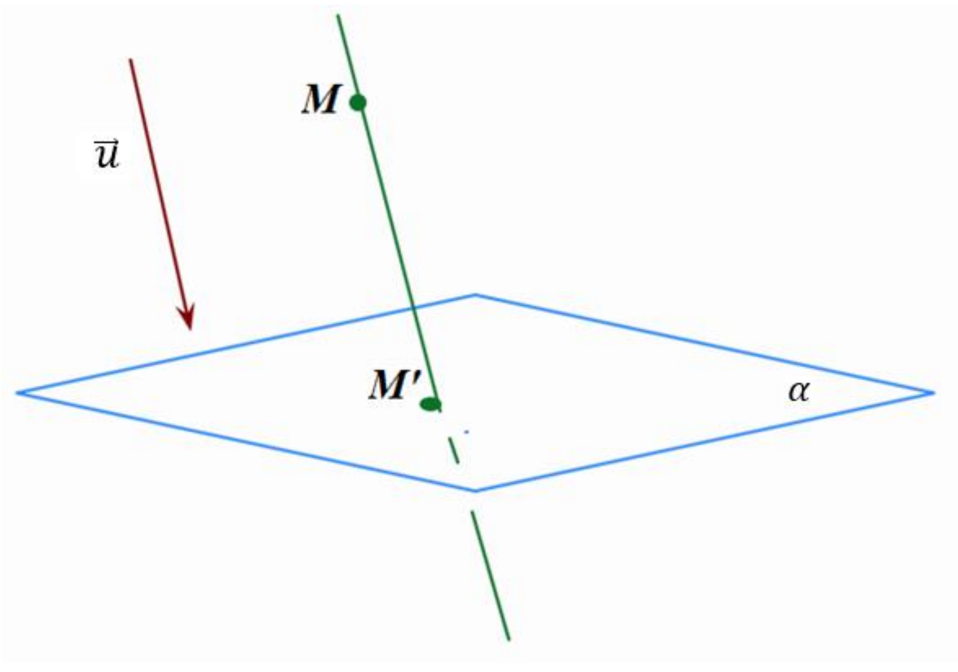
chiziqni α tekislik bilan kesishguncha davom ettiramiz va ularning kesishgan nuqtasini P' orqali belgilaymiz. Bu P' nuqtaga P nuqtaning α tekislikdagi *markaziy proyeksiyasi*, S nuqtani *proyeksiyalar markazi*, SP to‘g‘ri chiziqni *proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziq*, α tekislikni *proyeksiyalar tekisligi* deyiladi.

Korsatilgan usul bilan biror G figuraning α tekislikdagi G' proyeksiyasini yasaganimizdan keyin uni o‘xshash almashtirib G fuguraning *tasviri* G_0 ni hosil qilamiz. Ba’zi hollarda o‘xshash almashtirishni bajarishga zarurat tug‘ilmaydi. Bunda figura proyeksiyasining ko‘rinishi albatta proyeksiyalar tekisligining proyeksiyalar yo‘nalishiga nisbatan qanday joylashganiga bog‘liq bo‘ladi.

Endi yassi va fazoviy figuralarni tekislikdagi tasvirlarini yasashda keng qo‘llaniladigan proyeksiyalashlardan biri - parallel proyeksiyalash usuli bilan tanishamiz.

Biror α tekislik va unga parallel bo‘lmagan $\vec{u}$ vektorni qaraymiz.

Ta’rif. M nuqtaning α tekislikka $\vec{u}$ vektor yo‘nalishidagi parallel proyeksiyasi deb M nuqtadan o‘tib $\vec{u}$ vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning α tekislik bilan kesishishidan hosil bo‘lgan M' nuqtaga aytiladi.



2-chizma

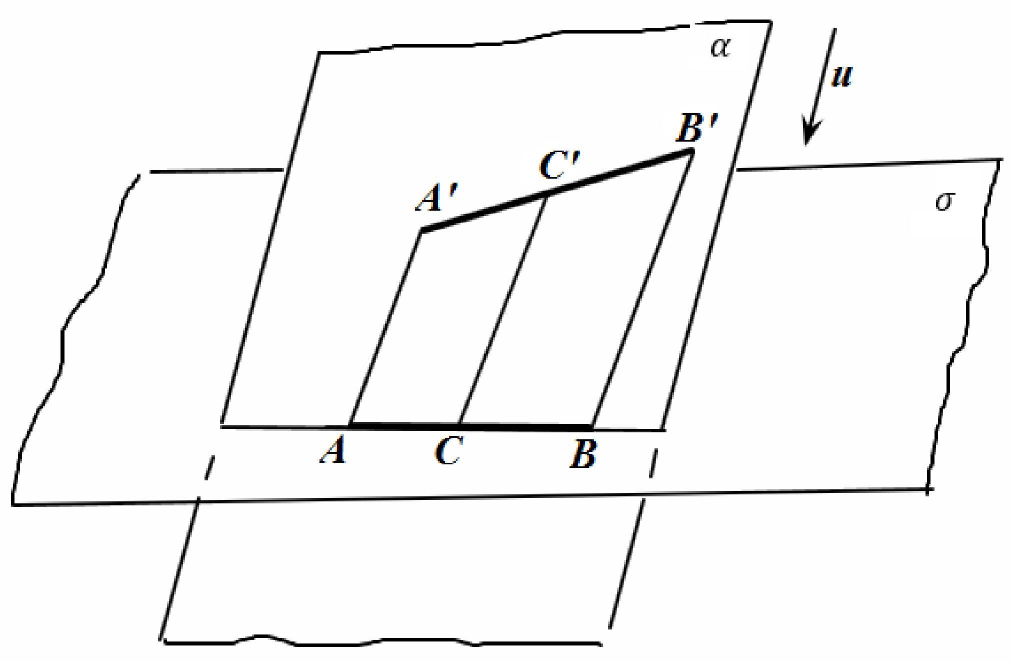
Parallel proyeksiyalashning asosiy xossalarini qarab chiqamiz.

1^0. ***Nuqtaning proyeksiyasi nuqta bo'ladi.***

Isbot. Proyeksiyalanuvchi M nuqtadan o'tuvchi MM' nur α telislikka parallel bo'lmagani uchun uni bitta M' nuqtada kesadi.

2^0. ***To'g'ri chiziqning parallel proyeksiyalashdagi tasviri to'g'ri chiziq bo'ladi.***

Isbot. Proyeksiyalovchi nurlarning yo'nalishi u to'g'ri chiziqqa parallel bo'lib proyeksiyalanuvchi $A'B'$ to'g'ri chiziq va u to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmasin. $A'B'$ to'g'ri chiziqda ixtiyoriy nuqtani, masalan A' nuqtani olib bu



3-chizma

nuqtadan u to'g'ri chiziqqa parallel $A'A$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz (A nuqta $A'A$ to'g'ri chiziqning σ tekislikdagi izi). $A'A$ va $A'B'$ to'g'ri chiziqlar orqali α tekislik o'tkazamiz. Bu tekislik proyeksiyalovchi nurlarga parallel bo'lib σ tekislikni AB to'g'ri chiziq bo'yicha kesadi. AB to'g'ri chiziq $A'B'$ to'g'ri chiziqning σ tekislikdagi proyeksiyasi bo'ladi.

Haqiqatan ham, agar α tekislikda $A'B'$ to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy C' nuqtasidan proyeksiyalovchi nurlarga parallel $C'C$ to‘g‘ri chiziq o‘tkazsak u holda σ tekislik va $C'C$ to‘g‘ri chiziqning kesishgan C nuqtasi C' nuqtaning σ tekislikdagi proyeksiyasi bo‘ladi. Fazoda C' nuqtadan berilgan yo‘nalishga parallel qilib faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligi uchun C nuqta yagonadir. Bunda α tekislikni proyeksiyalovchi tekislik deyiladi.

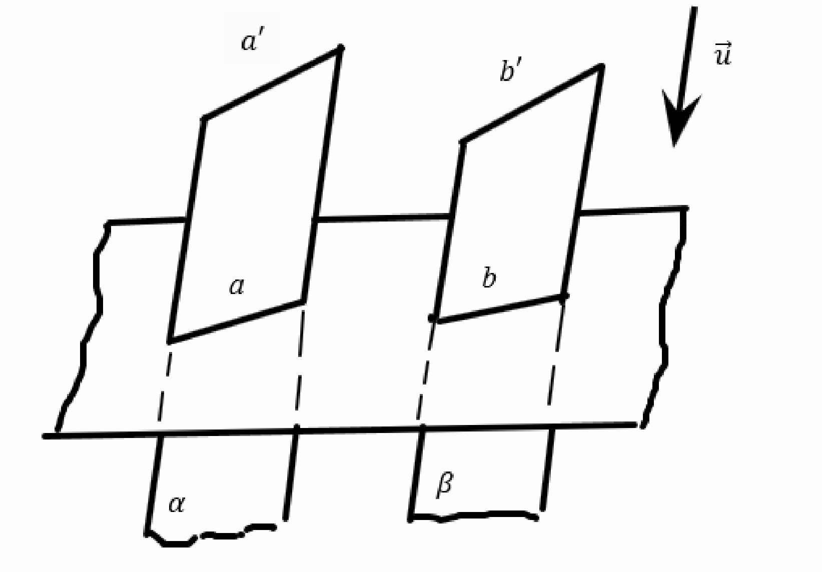
Agar proyeksiyalanuvchi $A'B'$ to‘g‘ri chiziq va u to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa bu to‘gri chiziqning σ tekislikdagi proyeksiyasi nuqtadan iborat bo‘ladi.

3^0. Proyeksiyalanuvchi $A'B'$ to‘g‘ri chiziq kesmalarining $A'C'$: $C'B'$ nisbati bu kesmalarning AB to‘g‘ri chiziqdagi proyeksiyalarining AC: CB nisbatiga teng. (*Kesmalarning oddiy nisbati parallel proyeksiyalashda invariyantdir)*

Isbot. $A'B'$ to‘g‘ri chiziq va uning proyeksiyasi AB to‘g‘ri chiziq bitta tekislikda yotadi. Bu to‘g‘ri chiziqlar kesishib biron burchak hosil qilsin. Hosil bo‘l‘gan burchak $A'B'$ va AB tomonlarini AA', BB', CC' parallel to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishib proporsional kesmalar hosil qiladi, yani $A'C'$: $C'B' = AC$: CB. $A'B'$ va AB to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lganda bu munosabat bajarilishi ravshan.

4^0. Parallel to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari ham parallel bo‘ladi.

Isbot. a'va b' parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari bo‘lgan a va b to‘g‘ri chiziqlarning parallel bo‘lishini ko‘rsatamiz. a' va b' to‘g‘ri chiziqlarni proyeksiyalovchi α va β tekisliklar o‘zaro parallel bo‘lgani uchun bu tekisliklarning proyeksiyalar tekisligi bilan kesishishidan hosil bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar ham parallel bo‘ladi.



4-chizma

5^0. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlardagi kesmalar nisbati bu kesmalar proyeksiyalari nisbatiga teng.

Isbot. $A'B'$ va $C'D'$ kesmalar parallel bo‘lsin. U holda 4-xossaga ko‘ra ularning proyeksiyalari ham parallel bo‘ladi. Endi $A'B'$: $C'D' = AD$: CD ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun B' va D' nuqtalarni tutashtiramiz va A' nuqtadan $B'D'$ to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqning $C'D'$ kesma bilan kesishgan nuqtasi E' bo‘lsin. $B'D'$ va $A'E'$ kesmalar *BD* va *AE* parallel kesmalarga proyeksiyalanadi. 3-xossaga ko‘ra $E'D'$: $C'D' = ED$: CD, ammo *ABDE* – parallelogramm bo‘lgani uchun $E'D'$= $A'B'$, *ED* = *AB* va 4-xossaga ko‘ra *AE* ∥ *BD*. Demak $A'B'$: $C'D' = AD$: CD .

Quyidagi xossalarni talabalarga mustaqil isbotlashga qoldiramiz.

6^0. Agar proyeksiyalanayotgan kesma proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lsa uning proyeksiyasi o‘ziga parallel va teng bo‘ladi.

7^0. Agar proyeksiyalanayotgan burchak yotgan tekislik proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lsa uning proyeksiyasi o‘ziga teng bo‘ladi.

Mustahkamlash ushun savol va topshiriqlar

1. Parallel proyeksiyalash usuli bilan yassi figuralarning tasvirlarini yasashda qanday talablar qo‘yiladi?
2. Parallel proyeksiyalashda qanday xossalar saqlanmaydi?
3. Qanday proyeksiyalash ortogonal proyeksiyalash deyiladi?
4. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtaning parallel proyeksiyasi qanday bo‘lishi mumkin?
5. Kesmani ichki ravishda bo‘layotgan nuqtaning parallel proyeksiyasi har doim ichki ravishda bo‘ladigan nuqta bo‘ladimi?
6. Proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqning proyeksiyasi qanday figura bo‘lishi mumkin?
7. Uchburchakning parallel proyeksiyasi berilgan. Uchburchak medianasi tasvirini yasang?
8. Kvadrat parallelogrammning parallel proyeksiyasi bo‘lishi mumkinmi?
9. Parallel proyeksiyalashda kvadratning proyeksiyasi kesmadan iborat bo‘lishi mumkinmi, asoslang?
10. Uchburchakning parallel proyeksiyasi berilgan bo‘lsa uning bissektrisasi tasvirini yasang.

1.2§ IKKI TEKISLIKNING PERSPEKTIV – AFFIN MOSLIGI

Reja:

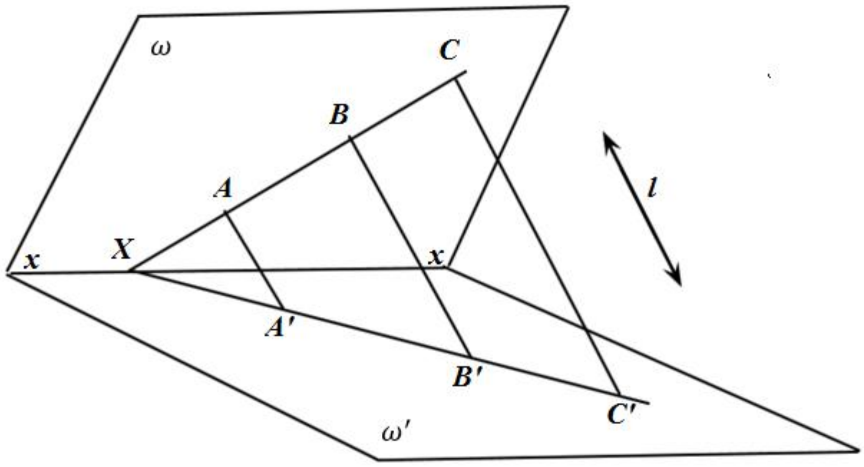
1. Ikki tekislikning perspektiv - affin mosligi va uning xossalari.

2. Perspektiv affin almashtirish va uning xossalari.

3. Affin almashtirishda ikkita mos figuralar orasidagi munosabatlar.

Faraz qilaylik , ω va ω′ tekisliklar *xx* to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishsin.

Har ikki tekislik bilan kesishuvchi biror *l* to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. ω tekislikda ixtiyoriy *A* nuqtani *ω′* tekislikka bu nuqtadan *l* to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazib proyeksiyalaymiz. Aytaylik, proyeksiyalanayotgan to‘g‘ri chiziq ω` tekislikni *A′* nuqtada kesib o‘tadi. *A′* nuqtani *A* nuqtaning ω′ tekislikdagi proyeksiyasi deb qarash mumkin. Bunday proyeksiya *parallel* *proyeksiya* deyiladi va l to‘g‘ri chiziqning berilshi bilan aniqlanadi. Yasashga ko‘ra o‘z navbatida A nuqtani A' nuqtaning ω tekislikdagi



5-chizma.

proyeksiyasi deb qarash mumkin. Bu holatda parallel proyeksiya ω va ω′ tekisliklarga nisbatan bir qiymatli moslikni ifodalaydi. Ushbu moslik birinchi tekislikning har bir nuqtasiga ikkinchi tekislikning aniq bitta nuqtasini mos qoyadi va aksincha. Bundan biz ω va ω′ tekisliklarda o‘zaro mos juftliklarga ega bo‘lamiz. Bu moslik o‘zaro bir qiymatli moslik bo‘lib, unda birinchi tekislikning har bir nuqtasiga ikkinchi tekislikdan yagona nuqta mos keladi va aksincha.

ω va ω′ tekisliklarning parallel proyeksiyalash orqali o‘rnatilgan bu *mosligi perspektiv - affin akslantirish* yoki *jinsdosh moslik* deyiladi.

ω tekislikni ω′ tekislikka parallel proyeksiyalash orqali ω tekislikni ω′ tekislikka perspektiv-affin akslantirishni (moslikni) bajargan bo‘lamiz.

Bundan keyin yuqoridagi tasdiqlarni hisobga olgan holda tekisliklarning perspektiv-affin mosligi yoki bir tekislikning ikkinchi tekislikka akslantirish haqida so‘z yuritamiz.

Endi tekisliklarning perspektiv-affin mosligi xossalarini o‘rganamiz.

Avval bu moslikda qo‘zg‘almas nuqtalar (ikkilangan) haqida, ya’ni o‘zining mos nuqtalari bilan ustma ust tushuvchi nuqtalarni o‘rganamiz. Har bir ikkilanuvchi nuqtalar berilgan tekislikda ham va ikkinchi tekislikda ham yotsa, u holda bu nuqtalar ω va ω′ tekisliklarning kesishish chizig‘i *xx* da yotadi.

Boshqa tomondan xx to‘g‘ri chiziqning har bir nuqtasi ikkilangan (qo‘zg‘almas) nuqtalar va bu to‘g‘ri chiziq o‘z -o‘ziga mos tushadi. xx to‘g‘ri chiziq moslikning o‘qi deyiladi. Demak moslik o‘qini ikkilangan nuqtalarning geometrik o‘rni sifatida aniqlash mumkin.

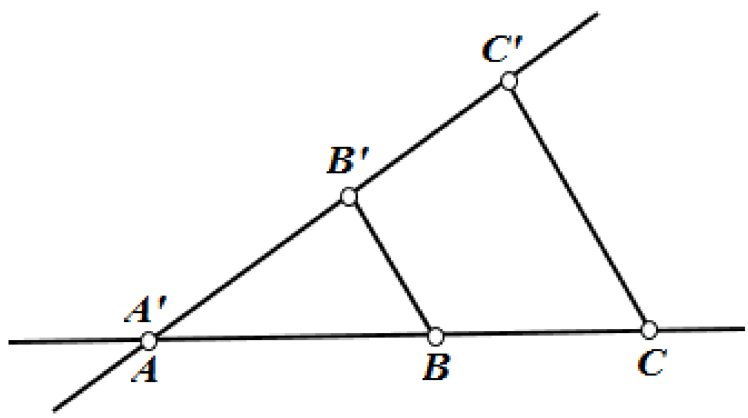
Endi ω tekislikdagi biror AB to‘g‘ri chiziqni qaraymiz (5-chizma). Bu to‘g‘ri chiziqning ω' tekislikdagi parallel proyeksiyasi $A'B'$ to‘g‘ri chizig‘idir. Ikkala to‘g‘ri chiziqlar yoki xx o‘qida kesishadi yoki xx to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi.

Bunday holatda bir tekislikdagi to‘g‘ri chiziqqa ikkinchi tekislikdagi biror to‘g‘ri chiziq mos tushadi. Perspektiv - affin moslikning ushbu xossasi *kollinearlik* deyiladi.

Parallel proyeksiya ta’rifiga ko‘ra to‘g‘ri chiziqda yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o‘rni doimo shu to‘g‘ri chiziqqa mos to‘g‘ri chiziqning nuqtalariga proyeksiyalanadi. Shuning uchun bir tekislikdagi to‘g‘ri chiziq va nuqtalar o‘zi bilan o‘zaro tegishlilik xossasini ham ikkinchi tekislikdagi mos to‘g‘ri chiziq va nuqtalardagi o‘zaro bir qiymatlilikka o‘tkazadi. Parallel proyeksiyaning ta’rifiga ko‘ra bir to‘g‘ri chiziqda yotgan nuqtalar shu to‘g‘ri chiziqqa mos to‘g‘ri chiziqning mos nuqtalariga o‘tadi. Shuning uchun bir tekislikdagi nuqta va to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro tegishlilik xossasi ikkinchi bir tekislikdagi mos elementlarning o‘zaro tegishliligini ifodalaydi.

Perspektiv - affin moslikning keyingi xossasi bu bir to‘g‘ri chiziqdagi uch nuqtaning oddiy nisbati deb deb ataladi.

Bir to‘g‘ri chiziqda yotuvchi A, B va C nuqtalarni qaraymiz (6-chizma).



6-chizma.

Uch nuqtaning oddiy nisbati quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC}$$

Bu formuladagi A va B nuqtalar asosiy nuqtalar, C nuqta esa bo‘luvchi nuqta deyiladi. *(ABC)* uch nuqtaning oddiy nisbati o‘zi bilan birga uchta kesma nisbatini ham ifodalaydi. Berilgan bir to‘g‘ri chiziqdagi uchta nuqtaning oddiy nisbati (*ABC*) va ikkinchi to‘g‘ri chiziqda asosiy nuqtalar juftligi A' va B' ni boshqa bir holatda bo‘luvchi C' nuqta bir qiymatli aniqlanadi .

Birinchi to‘g‘ri chiziqni shunday joylashtiramizki, bunda A nuqta A' nuqta bilan ustma - ust tushsin , u holda $CC' \parallel BB'$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazib C' nuqtani hosil qilamiz.

Endi perspektiv-affin moslikning xossalarini o‘rganishda davom etamiz va 5-chizmaga qaraymiz. Bu chizmadan ko‘rinib turibdiki, ω tekislikning A, B va C nuqtalariga ω' tekislikning A', B' va C' nuqtalar mos keladi. Proyeksiyalovchi AA', BB', CC' to‘g‘ri chiziqlar parallelligidan quyidagi munosabatga ega bo‘lamiz:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} \quad \text{yoki} \quad (ABC) = (A'B'C') .$$

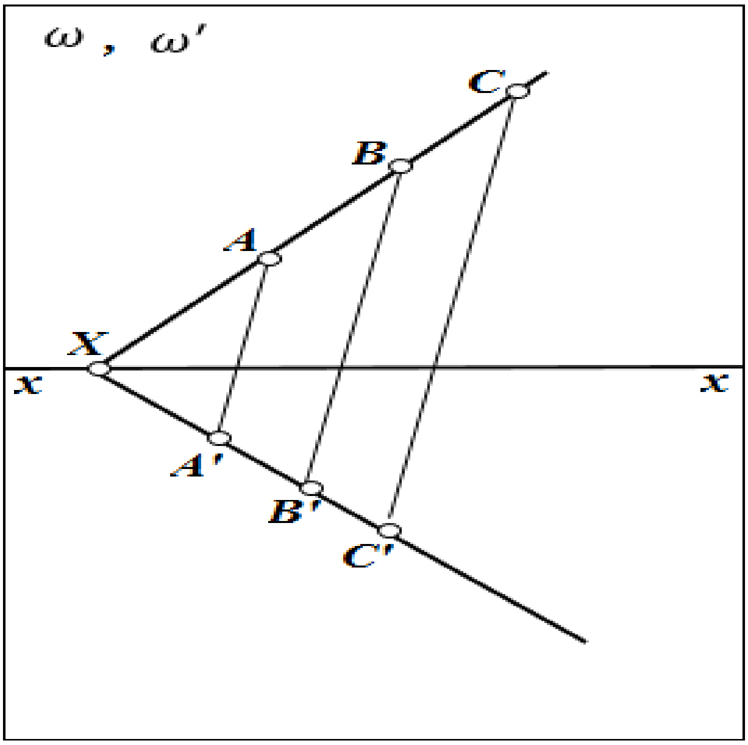
Bundan perspektiv- affin moslikda bir tekislikdagi to‘g‘ri chiziqda yotadigan uch nuqtaning oddiy nisbati ikkinchi tekislikdagi to‘g‘ri chiziqda yotadigan uch nuqtaning oddiy nisbatiga teng degan xulosaga kelamiz.

Perspektiv-affin almashtirishning xossalarini o‘rganishda davom etishdan avval ω va ω′ tekisliklarning fazodagi mumkin bo‘lgan joylashuvi haqida to‘xtalamiz.

Yuqorida biz tekisliklarda parallel proyeksiyalash orqali perspektiv-affin moslikni o‘rnatish maqsadida ustma-ust tushmaydigan yoki *xx* to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishuvchi tekisliklarni qaragan edik. Biz ko‘rib chiqqan perspektiv-affin moslikni parallel proyeksiyalash orqali o‘rnatish maqsadida hozircha bu tekisliklar (ω va ω′) ustma-ust tushmaydi hamda ular *xx* to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi deb faraz qilaylik.

Bu munosabat o‘rnatilgandan so‘ng berilgan tekislikdan ixtiyoriy bittasini *xx* o‘q atrofida burish orqali ikkala tekislikni ustma ust tushadigan holatga keltirish mumkin. Shuningdek bunda ikkala tekisliklarning barcha geometrik tasvirlari hech qanday o‘zgarishsiz qoladi. Yuqorida o‘rnatilgan perspektiv-affin moslikni tekisliklardan ixtiyoriy bittasini burib ikkinchisiga birlashtirganda ham buzilmaydi, moslik saqlanadi.

Mos nuqtalarni birlashtiruvchi AA', BB' va CC' to‘g‘ri chiziqlar tekisliklarni har qanday burish holatida ham, tekisliklarning ustma ust tushgan vaziyatida ham parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘lib qo‘laveradi, parallelligini saqlaydi. Bu xossa yuqoridagi kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziqlar (juftligini) bilan aniqlanuvchi (AB va $A'B'$) bir tekislikda yotishidan kelib chiqadi va $(ABX)=(A'B'X)$ bo‘lgani uchun burchak tomonlaridan proporsional kesmalar ajratadi. Ikkita ω va ω` tekisliklar ustma ust tushganda



7-chizma

proyeksiyalovchi AA', BB', ... to‘g‘ri chiziqlar ω va ω' tekisliklarning ustma ust tushishidan hosil bo‘lgan tekislikda yotadi (7-chizma).

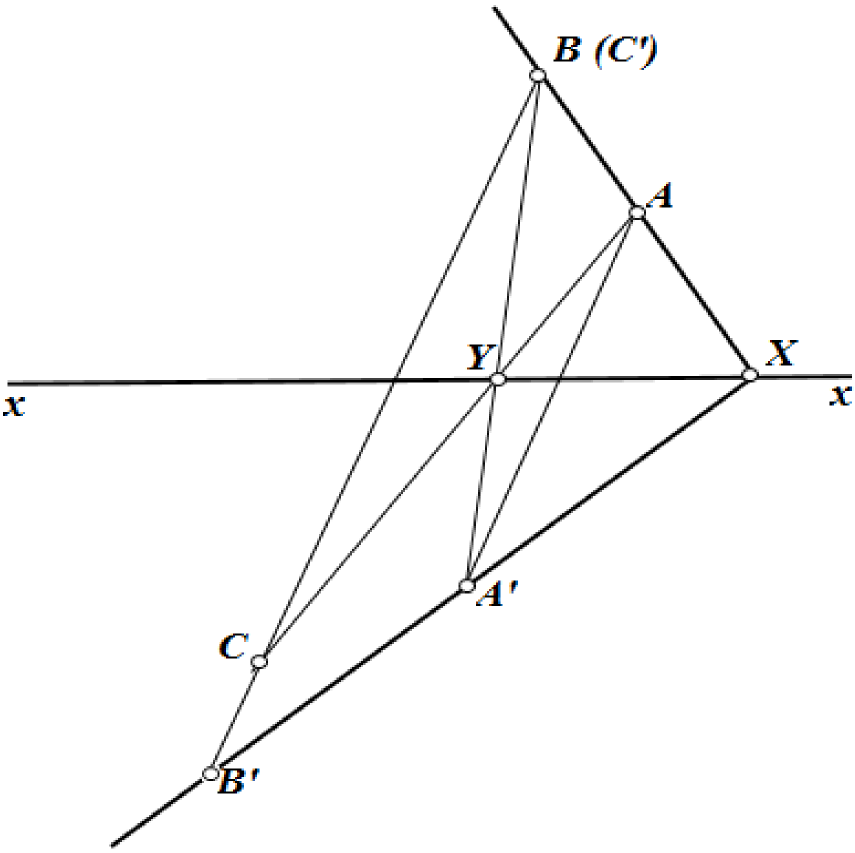
Endi tekislikni o‘zini-o‘ziga almashtirishda avvalgi boshlang‘ich tekislikni ω bilan, almashtirishdan so‘ng hosil bo‘lgan tekislikni ω' bilan belgilaymiz .

Tekisliklar birlashtirilgandan so‘ng *xx* to‘g‘ri chiziq kesishish to‘g‘ri chizig‘i bo‘lib qolmaydi, lekin qo‘zg‘almas nuqtalarning geometrik o‘rni sifatida qoladi. Bunday perspektiv-affin akslantirishni *perspektiv-affin almashtirish* deyiladi.

Teorema. Tekislikni o‘zini – o‘ziga perspektiv-affin almashtirish bir juft mos nuqtalar va almashtirish o‘qi *xx* orqali to‘la aniqlanadi.

Isbot. Aytaylik, perspektiv-affin almashtirishning *xx* o‘qi va o‘zaro mos nuqtalar juftligi A, A' berilgan bo‘lsin(4-chizma).

Tekislikning ixtiyoriy B nuqtasiga mos yagona B' nuqta yasash mumkinligini ko‘rsatamiz. Buning uchun dastlab AB to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. X nuqta uning xx o‘qi bilan keshish nuqtasi bo‘lsin.



8-chizma

X nuqta shu o‘qqa tegishli bo‘lganidan u o‘z-o‘ziga o‘tuvchi nuqta bo‘ladi, bundan AX to‘g‘ri chiziqqa $A'X$ to‘g‘ri chiziq mos keladi. Nihoyat, B' nuqta $A'X$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lishi kerak va proyeksiyalovchi BB' to‘g‘ri chiziq AA' to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Bu izlanayotgan B' nuqtani yasashga imkon yaratadi. Shunday qilib, berilganlar yechim uchun yetarli va B' nuqta yagona yechimdir.

Yuqoridagi usulda perspektiv affin moslik o‘rnatildi deyish mumkin, chunki ko‘rsatilgan yasashlar ziddiyatga olib kelmaydi.

Haqiqatan ham, agar 8-chizmada xx bo‘ylab buksak tekisliklar ikki yoqli burchak hosil qiladi va proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlar AA' to‘g‘ri chiziqqa parallelligicha qoladi. Demak biz hosil qilgan nuqtani parallel proyeksiyalash natijasi deb qarash mumkin.

Perspektiv-affin moslikni o‘rganishda biz quyidagi ikki xossaga tayanamiz: 1) kollineayarlik, 2) uchta nuqtaning oddiy nisbatini saqlanishi.

Perspektiv-affin almashtirishda bu xossalar to‘g‘ri chiziq tushunchasi va to‘g‘ri chiziqdagi uch nuqtaning oddiy nisbatining invariantligini ifodalaydi.

Perspektiv-affin moslikning 2-xossasidagi uch nuqtaning oddiy nisbatining tengligini ko‘rishimizdan avval, kollineatsiyaning aniqlanganligiga ishonch hosil qilishimiz kerak. Buning o‘rniga oldindan kollineatsiya munosabatini o‘rnatilgan deb faraz qilmay turib, 2-xossani o‘rnatilgan deyishimiz mumkin edi. Ammo bu holatda 1-xossa (kollinetsiya mavjudligi) 2-xossaning natijasi bo‘lib qolar edi. Buni quyidagicha ifoda qilish qilish mumkin:

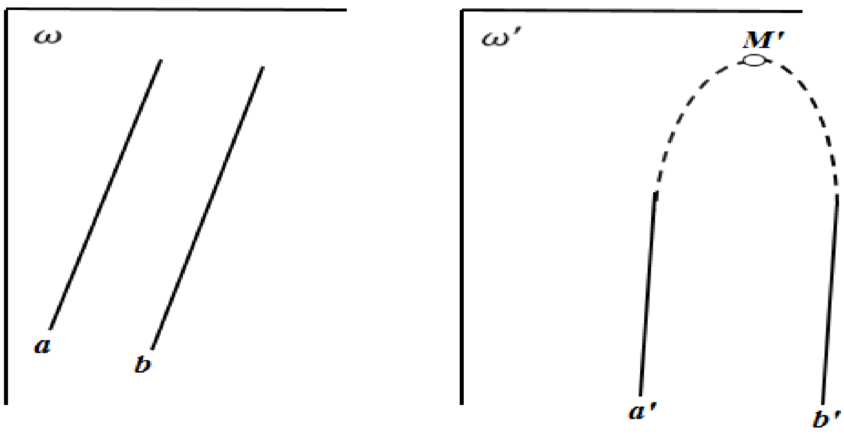
Agar A, B va C nuqtalar birinchi tekislikdagi to‘g‘ri chiziq nuqtalari va A', B' va C' nuqtalar ikkinchi tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning mos nuqtalari bo‘lsa, u holda:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

bo‘ladi.

Bu proporsiyadan quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$\frac{AB + BC}{BC} = \frac{A'B' + B'C'}{B'C'}$$



8-chizma

A, B, C nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalar ekanidan tenglikning chap qismi $\frac{AB}{BC}$ ga teng. Boshqa tomondan yuqoridagi xossaga ko‘ra:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} \ .$$

Shunday qilib :

$$\frac{A'B'+B'C'}{B'C'} = \frac{A'C'}{B'C'} \, .$$

Bundan $A'B'+B'C'=A'C'$, ya’ni A', B', C' nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalardir.

Perspektiv-affin almashtirishda yuqorida sanalgan ikki xossa invariantlik tushunchasi va uch nuqtaning oddiy nisbati tushunchalarini ifodalaydi. Bu xossalardan perspektiv-affin almashtirishdagi boshqa invarintlarni keltirib chiqarish mumkin. Dastlab to‘g‘ri chiziqlar parallelligini invariantligini ko‘rsatamiz.

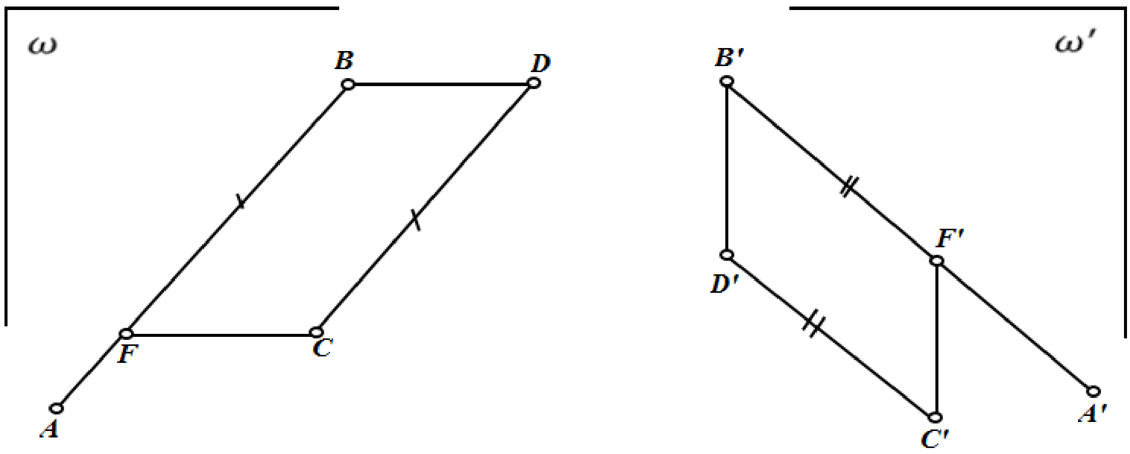
Faraz qilaylik, ω tekislikda a va b to‘g‘ri chiziqlar va ω' tekislikda bu to‘g‘ri chiziqlarga mos a' va b' to‘g‘ri chiziqlar mavjud bo‘lsin. Aytaylik, $a \parallel b$ bo‘lsin (a to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziqqa parallel). Endi $a' \parallel b'$ ni isbotlaymiz.

Isbotni teskarisidan faraz qilish orqali bajaramiz. Ya'ni a' to'g'ri chiziq b' to'g'ri chiziqqa parallel bo'lmasin ($a' \nparallel b'$) ya'ni kesishadi, kesishish nuqtasini M' deb bilan belgilaymiz (8-chizma).

ω va ω′ tekisliklarning bir qiymatli aniqlanganligidan M nuqtaga mos yagona $M' \in \omega'$ nuqta mavjud. M nuqta a to'g'ri chiziqqa ham, b to'g'ri chiziqqa ham tegishli. Demak, M nuqta a va b to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi. Ya'ni shartga ko'ra $a \parallel b$ (a to'g'ri chiziq b to'g'ri chiziqqa parallel). U holda a va b to'g'ri chiziqlar kesishadi degan farazimiz ziddiyatga uchraydi. Demak,
$a' \parallel b'$.

Bundan perspektiv-affin almashtirishda to'g'ri chiziqlarning parallelligi invariant xossa ekanligi kelib chiqadi. Endi ikkita kesmaning parallelligi munosabatiga o'tamiz.

Aytaylik, ω tekislikda o'zaro parallel bo'lgan AB va CD kesmalar mavjud bo'lsin. ω′ tekislikda bu kesmalarga mos $A'B'$ va $C'D'$ parallel to'g'ri chiziqlar mavjud (9-chizma).



9-chizma.

B nuqtani D nuqta bilan birlashtiramiz va C nuqta orqali DB ga parallel CF ni o'tkazamiz: $CF \parallel DB$. CF to'g'ri chiziq ω′ tekislikda $C'F'$ ($C'F' \parallel D'B'$) to'g'ri chiziqqa mos keladi (parallellikning invariantligiga ko'ra) va F nuqtaga F' nuqta mos keladi.

Uch nuqtaning oddiy nisbati invariantligidan quyidagini yoza olamiz:

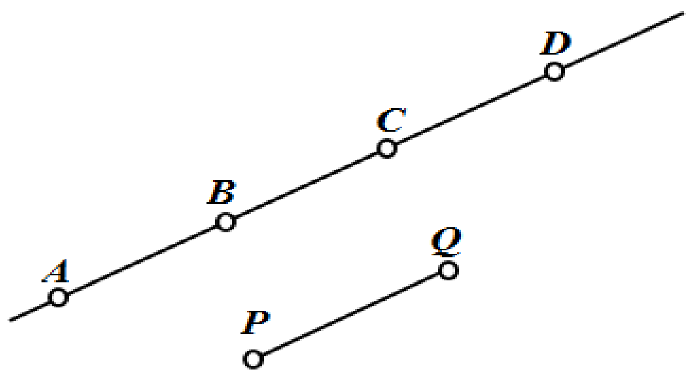
$$\frac{AB}{CD} = \frac{AB}{FB} = (AFB) = (A'F'B') = \frac{A'B'}{F'B'} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Bundan quyidagi :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{F'B'}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu esa perspektiv-affin moslikda ikkita parallel kesmalar nisbati invariant ekanini ko‘rsatadi.

Agar AB va CD kesmalar bir to‘g‘ri chiziqda yotsa, u holda perspektiv-affin moslikda ularning nisbati ham invariant bo‘ladi (10-chizma).



10-chizma.

Aytaylik, PQ kesma AB parallel to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy kesma bo‘lsin.
U holda:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{PQ}{CD} = \frac{A'B'}{P'Q'} \times \frac{P'Q'}{C'D'} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Endi mos figuralarning xossalarini o‘rganishga o‘tamiz.

Lemma. Ikkita mos (A, A') nuqtalardan moslik o‘qigacha bo‘lgan masofa o‘zgarmas kattalik bo‘lib bu nuqtalarning qanday tanlanishiga bo‘gliq emas.

Isbot. Faraz qilaylik, A va B nuqtalarga A' va B' nuqtalar o‘zaro mos nuqtalar bo‘ladi (11-chizma). Bu nuqtalardan xx o‘qiga perpendikulyarlar tushirib o‘qqacha bo‘lgan masofani hosil qilamiz. Perpendikulyarlarning yo‘nalishi qanday bo‘lmasin masofani doim musbat deb qaraymiz. Quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AX}{BX}; \qquad \frac{A'A_1'}{B'B_1'} = \frac{A'X'}{B'X'}.$$

Ammo chizmadan ko‘rinib turibdiki: $\frac{AX}{BX} = \frac{A\prime X\prime}{B\prime X\prime}$

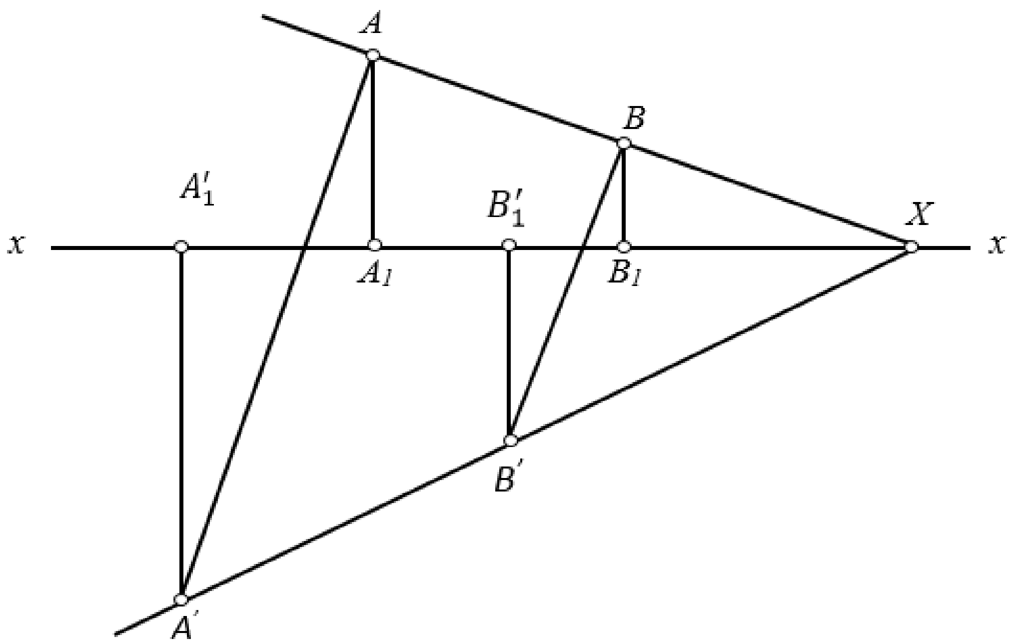
Bundan :

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A'A_1'}{B'B_1'}$$

yoki

$$\frac{AA_1}{A'A_1'} = \frac{BB_1}{B'B_1'} = k = const.$$

Hosil bo‘lgan tenglik yuqoridagi lemmani isbotlaydi.



11-chizma.

Mos nuqtalar orasidagi masofa doimiysini k bilan belgilaylik.

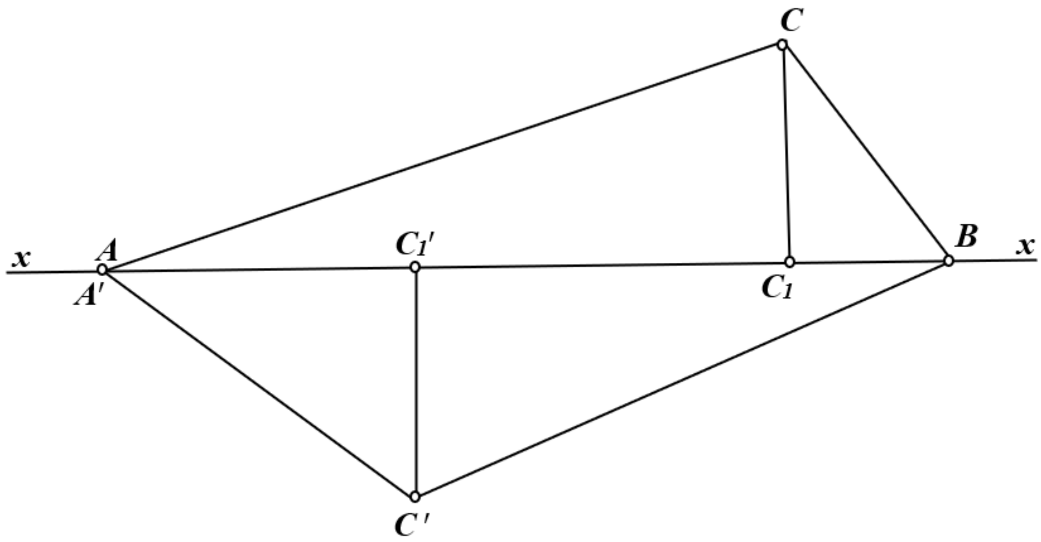
Teorema. Ikkita mos uchburchaklar yuzalarining nisbati o‘zgarmas va u k ga teng.

Teoremaning isboti quyidagi uchta holatga ajratib ko‘rib chiqamiz:

1.Uchburchaklar xx o‘qida yotuvchi umumiy tomonga ega bo‘lsin.

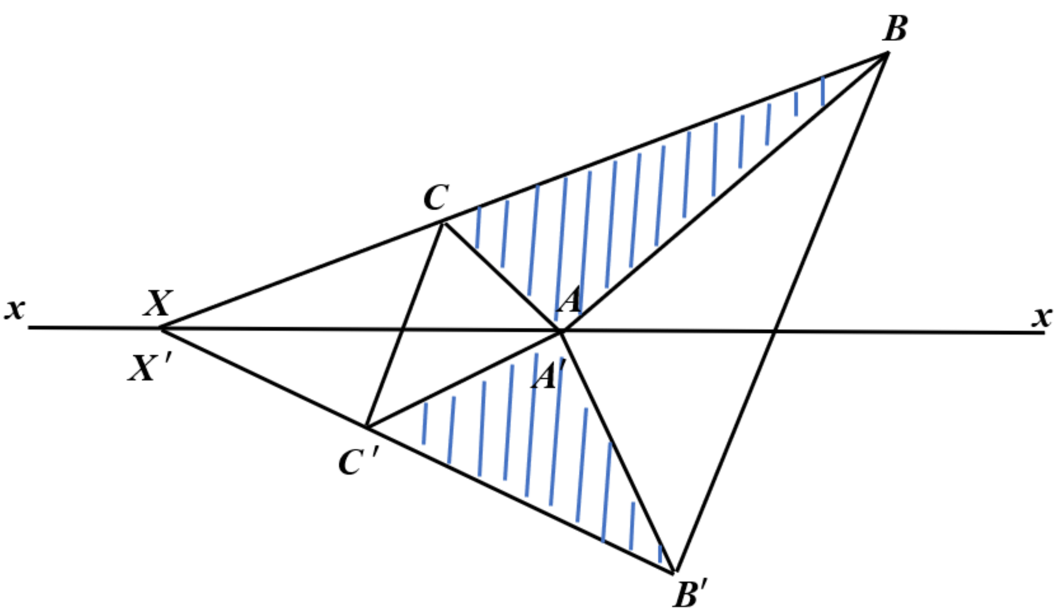
Bunday uchburchaklar 12-chizmada ko‘rsatilgan . Uchburchak yuzalarining nisbati:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB \cdot CC_1}{A'B' \cdot C'C'_1} = \frac{CC_1}{C'C'_1} = k$$



12-chizma

2. Uchburchaklar xx o‘qida yotuvchi umumiy uchga ega bo‘lsin. Bunday uchburchaklar 13-chizmada ko‘rsatilgan . xx o‘qda uchburchaklarning mos tomonlari BC va $B'C'$ aytaylik X nuqtada kesishadi.



13-chizma

Yuqoridagilarga ko‘ra quyidagini yoza olamiz:

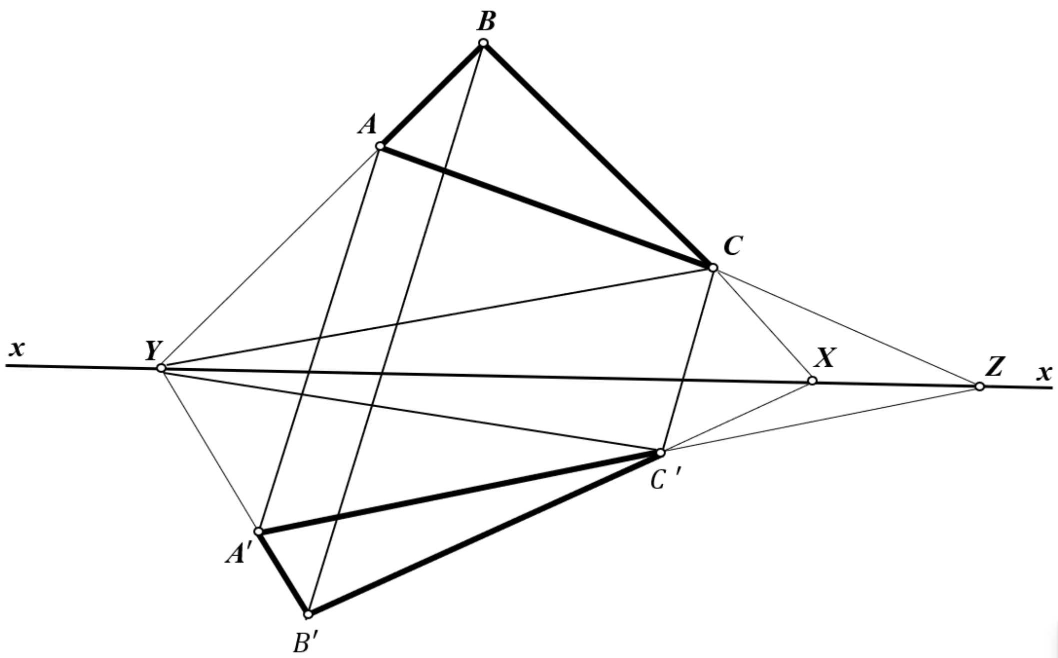
$$\frac{S_{ABX}}{S_{A'B'X}} = k, \quad \frac{S_{ACX}}{S_{A'C'X}} = k$$

Lekin $S_{ABC} = S_{ABX} - S_{ACX}$ ($S_{A'B'C'} = S_{A'B'X} - S_{A'C'X}$), shuning uchun

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k$$

3. Ikkita mos uchburchaklarning umumiy holi.

Aytaylik, 14-chizmada ikkita mos uchburchaklarga egamiz. Ulardan ixtiyoriy bittasini, ΔABC ni qaraylik.



14-chizma

Bu uchburchak yuzini quyidagicha aniqlash mumkin:

$$S_{ABC} = S_{YXC} - S_{YBA} - S_{YBX}$$

O‘ng tomondagi uchburchaklar yuqorida qaralgan ikki holatga tushadi. Bundan:

$$S_{ABC} = k \cdot S_{YXC'} - k \cdot S_{YB'A'} - k \cdot S_{YB'X}$$

Yoki

$$S_{ABC} = k \cdot (S_{YXC'} - S_{YB'A'} - S_{YB'X}) = k \cdot S_{A'B'C'}$$

Bundan esa :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k = const.$$

Yuqoridagi isbotlangan o'zaro mos uchburchaklarning yuzalari haqidagi teoremani mos ko'pburchaklar uchun ham umumlashtirish mumkin. Haqiqatan ham ko'pburchakni bir nechta uchburchaklarga ajratish mumkin bo'lib bu uchburchaklar yuzalarining yig'indisi ko'pburchakning yuzasiga teng bo'ladi. Mos ko'pburchak uchun ham shunga o'xshash uchburchaklarga ajratish mumkin. Agar mos ko'pburchaklar yuzalarini S va S' orqali, mos uchburchaklar yuzalarini Q va Q_i orqali belgilasak ko'pburchaklar yuzalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$S = \sum Q_i\ , \quad S' = \sum Q_i'$$

Bundan tashqari uchburchak yuzalari uchun $Q_i = k \cdot Q_i'$ tenglik o'rinli.

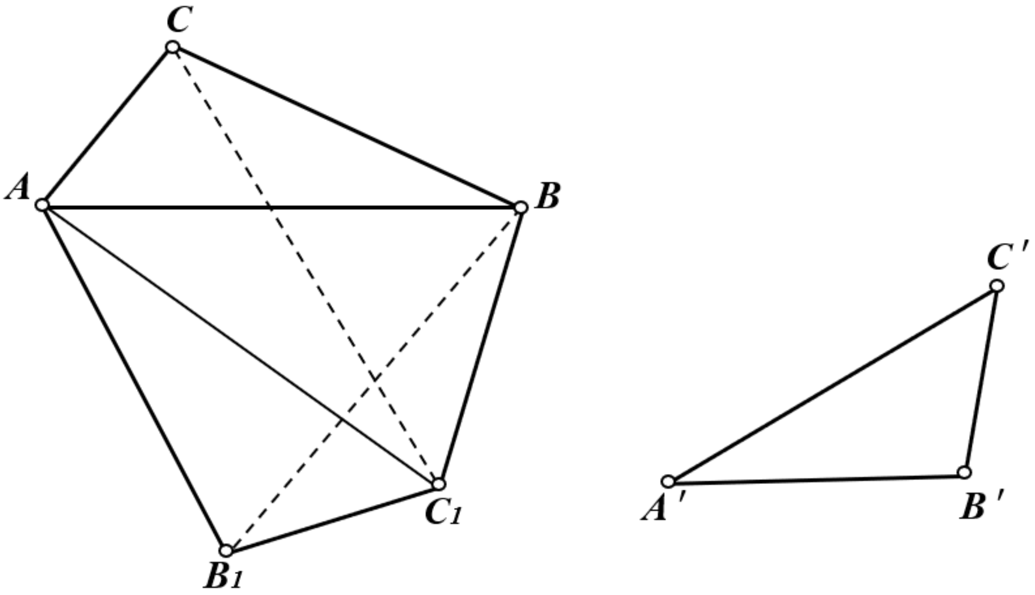
Demak

$$S = \sum Q_i = \sum k \cdot Q_i' = k \cdot \sum Q_i' = k \cdot S'.$$

Bundan $\frac{S}{S'} = k.$

Kollinearlik va uch nuqtaning oddiy nisbatini saqlovchi ω tekislikni ω′ tekislikka ixtiyoriy o'zaro bir qiymatli almashtirish *affin almashtirish* deyiladi.

1- Teorema. ω tekislikni ikki marta parallel proyeksiyalash (perspektiv- affin almashtirish) ω tekislikni ω′ tekislikka shunday o'tkazadiki, bunda birinchi tekislikda ixtiyoriy berilgan *ABC* uchburchak ixtiyoriy berilgan $A'B'C'$ uchburchakka kongurient bo'lgan ikkinchi uchburchakka mos keladi (15-chizma).



15-chizma

Isbot. Aytaylik, ω tekislikda ABC uchburchak berilgan bo‘lsin. Tekislikni shunday ikki marta parallel proyeksiyalash kerakki, bunda ABC uchburchak ixtiyoriy berilgan $A'B'C'$ uchburchakka kongurient bo‘lgan uchburchakka o‘tishi kerak (15-chizma).

Ixtiyoriy yo‘nalishda AC_1 to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va unda $AC_1=A'C'$ kesmani joylashtiramiz. AC_1 kesmada $A'B'C'$ uchburchakka kongurient bo‘lgan AB_1C_1 uchburchak yasaymiz. Perspektiv-affin moslikning o‘qi sifatida AB to‘g‘ri chiziqni va o‘zaro mos nuqtalar sifatida C, C_1 nuqtalarni qabul qilgan holda ABC uchburchakni ABC_1 uchburchakka o‘tkazuvchi **P** perspektiv -affin moslikni aniqlaymiz.

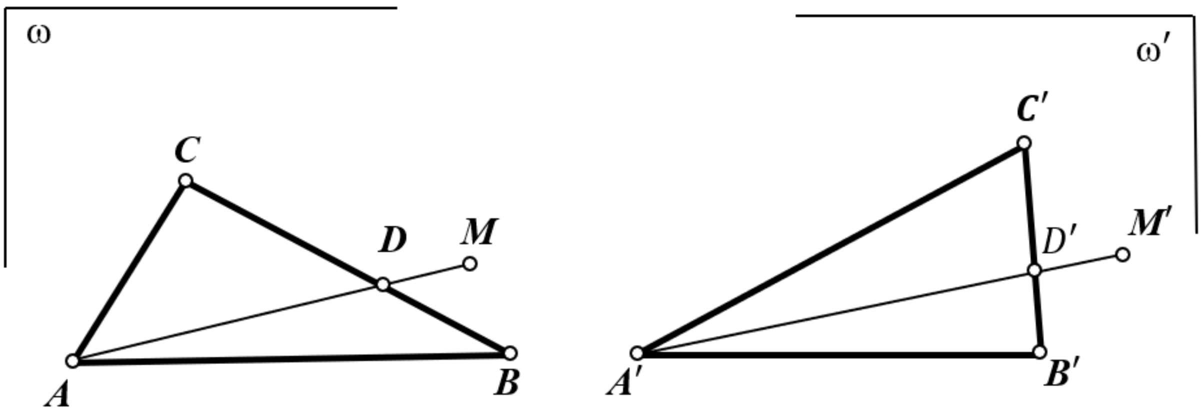
Xuddi shunday moslik o‘qi AC_1 bo‘lgan va o‘zaro mos nuqtalari B, B' nuqtalar bo‘lgan **P′** perspektiv-affin moslik ABC_1 uchburchakni AB_1C_1 uchburchakka o‘tkazadi. Shunday qilib, ω tekislikda **P** almashtirish, so‘ngra **P′** almashtirishni bajarib ω′ tekislikka kelamiz. Bunda ABC uchburchak berilgan $A'B'C'$ uchburchakka kongurient bo‘lgan yangi AB_1C_1 uchburchakka o‘tadi. Isbotlandi .

Natija. Ixtiyoriy berilgan ikkita uchburchaklarning har biri ikkinchisiga perspektiv - affin moslikda bo‘ladi.

Yuqorida ko‘rsatilganidek, berilgan uchburchakni ikkinchi bir uchburchakka o‘tkazuvchi **A=P ∘ P′** affin almashtirish mavjud.

Endi quyidagi teoremani isbotlaymiz.

2-Teorema. ω (birinchi) tekislikdagi ΔABC uchburchakni ω′ (ikkinchi) tekislikdagi $\Delta A'B'C'$ uchburchakka o‘tkazuvchi yagona affin almashtirish mavjud. (16-chizma).



16-chizma

Isbot. Faraz qilaylik, **A** affin almashtirish ABC uchburchakni $A'B'C'$ uchburchakka o‘tkazadi. Birinchi tekislikdan ixtiyoriy M nuqtani tanlaymiz. AM to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz va uning BC to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasini D bilan belgilaymiz.

U holda uch nuqtaning oddiy nisbatining saqlanishidan quyidagiga egamiz:

$$(BCD)=(B'C'D').$$

Shunday qilib, D nuqtaga mos D' nuqta $B'C'$ to‘g‘ri chiziqda bir qiymatli aniqlanadi. Bu tenglikdan:

$$(ADM)=(A'D'M')$$

tenglikka ega bo‘lib, AD to‘g‘ri chiziqqa mos $A'D'$ to‘g‘ri chiziqda M' nuqta ham bir qiymatli aniqlanish kelib chiqadi. Demak, ABC uchburchakni $A'B'C'$ uchburchakka o‘tkazuvchi bir tekislikning ikkinchi tekislikka affin almashtirishida mos nuqtalar yagona ko‘rinishda aniqlanadi.

Natija. Ikkita tekisliklar orasida affin almashtirish ikkita mos uchburchaklarning berilishi bilan to‘liq aniqlanadi.

Endi biz umumiy affin almashtirishni bir necha perspektiv-affin almashtirishlar zanjiri ko‘rinishida ifodalash mumkinmi degan savolga javob beraylik.

Aytaylik, ω tekislikni ω′ tekislikka o‘tkazuvchi bir nechta affin almashtirishlarni **A** bilan belgilangan bo‘lsin. ω tekislikda ixtiyoriy ABC uchburchakni olamiz va **A** uni ω′ tekislikdagi $A'B'C'$ uchburchakka o‘tkazsin. U holda 1-teoremaga asosan ABC uchburchakni $A'B'C'$ uchburchakka o‘tkazuvchi $\mathbf{A}^* = \mathbf{P} \circ \mathbf{P}'$ affin almashtirish mavjud. Boshqa tomondan 2-teoremaga asosan bu almashtirish yagona, ya`ni:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$$

Bundan,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \circ \mathbf{P}'.$$

Bu natijani quyidagicha xulosalash mumkin:

Har qanday affin almashtirish ikkita perspektiv- affin almashtirish(yoki parallel proyeksiyalash) ning ko‘paytmasi hisoblanadi.

Mustahkamlash ushun savol va topshiriqlar

1. Perspektiv - affin moslik qanday o‘rnatiladi?
2. Kollinear moslik deganda nimani tushunasiz?
3. Uchta nuqtaning oddiy nisbati qachon musbat (manfiy) bo‘ladi?
4. Perspektiv - affin moslikda uchta nuqtaning oddiy nisbatini saqlanishini isbotlang?
5. Perspektiv-affin almashtirish deb qanday akslantirishga aytiladi?
6. Perspektiv-affin almashtirishni to‘la aniqlash uchun qanday elementlar berilishi kerk?
7. Ixtiyoriy berilgan ikkita uchburchaklarning har biri biri ikinchisiga perspektiv - affin moslikda bo‘lishini ko‘rsating.

1.3§ JINSDOSH FIGURALAR.

Reja:

1.Ellips va aylananing jinsdoshligi.

2. Qo‘shma diametrlariga ko‘ra ellipsni yasash

3. Pespektiv –affin moslikning bosh yo‘nalishlari

ω va ω' tekisliklar nuqtalari orasida affin moslik o‘rnatilgan bo‘lsin. Agar ω tekislikda biror γ egri chiziqni nuqtalarning geometrik o‘rni sifatida qarasak u holda unga ω' tekislikda shu nuqtalarga mos nuqtalarning γ' geometrik o‘rni mos keladi. Yani ω tekislikni ω' tekislikka affin almashtirish γ egri chiziqni unga mos γ' egri chiziqqa o‘tkazadi.

Biz aylanaga affin - mos bo‘lgan egri chiziqni o‘rganamiz.

Ta’rif. Affin almashtirishda aylanaga mos keluvchi figurani ellips deb ataymiz.

Ellipsni aylananing affin obrazi sifatida o‘rganish quyidagi tasdiqqa asoslanadi:

Aylanani ellipsga o‘tkazuvchi affin almashtirishga nusbatan invariant bo‘lgan affin xossalar (aylananing) ellipsning ham xossalari bo‘lishi kerak.

Bu tasdiqni qo‘llash aylananing affin xossalarini aniqlash va ularni ellipsga o‘tkazishni nazarda tutadi.

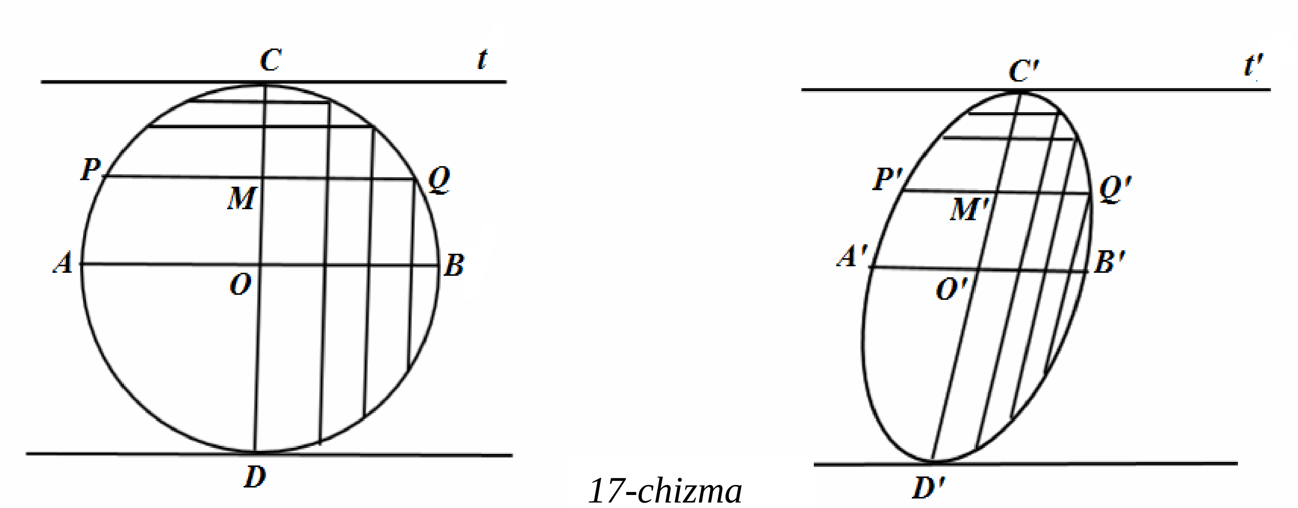
Aylananing markazini undan o‘tuvchi vatarlar teng ikkiga bo‘linuvchu nuqta sifatida aniqlaymiz. Bu xossa affin xossa bo‘la oladi va uni ellipsga o‘tkazish mumkin. Demak ellips markazli egri chiziq, ya’ni shunday ellipsni markazi deb ataluvchu shunday nuqta borki bu nuqtadan o‘tuvchi barcha vatarlari shu nuqtada teng ikkiga bo‘linadi. Bu vatarlarni ellipsning *diametrlari* deyiladi.

Ma’lumki aylananing ixtiyoriy ikkita o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan diametrlarining har biri ikkinchisiga parallel bo‘lgan vatarni teng ikki qismga ajratadi.

Bu xossa affin xossa hisoblanadi chunki u parallellik va kesmani teng ikkiga bo‘lish (uchta nuqtaning oddiy nisbati) munosabatlariga tayanadi. Bu xossaga ega bo‘lgan diametrlarni *qo‘shma diametrlar* deyiladi. Aylananing qo‘shma (o‘zaro perpendikulyar) diametrlari ellipsning qo‘shma diametrlariga o‘tadi ammo perpendikulyarlik xossasi saqlanmaydi (affin xossa emas). Demak ellipsning biror diametriga parallel bo‘lgan vatarlari o‘rtalarining geometrik o‘rni bu diametrga qo‘shma diametrdan iborat bo‘ladi.

Demak qo‘shma diametrni quyidagicha yasash mumkin:

$A'B'$ diametrga qo‘shma diametrni yasash uchun bu diametrga parallel bo‘lgan ixtiyoriy $P'Q'$ varatni o‘tkazamiz va uni o‘rta nuqtasi M' ni topamiz. M' nuqtani ellips markazi O' bilan tutashtiruvchi to‘gri chiziq izlangan qo‘shma diametr bo‘ladi (17-chizmada $C'D'$). Agar aylananing markazidan o‘tuvchi bosh



17-chizma

yo‘nalishlar juftini qarasak unga ikkinchi tekislikda shunday bosh yo‘nalishlar mos keladiki ular ellipsning markazidan o‘tadi.

Aylananing har qanday o‘zaro perpendikulyar diametrlari jufti bir biriga qo‘shma diametrlar juftligini hosil qilgani uchun ellipsning markazidagi ularga mos bosh yo‘nalishlar ham o‘zaro qo‘shma diametrlarni hosil qiladi. Demak ellipsda uning o‘qlari deb nomlanuvchi o‘zaro perpendikulyar va qo‘shma diametrlari mavjud.

Biz oldingi paragrafda ko‘rib chiqqan affin almashtirishning hususiy holida O va O' nuqtalardan o‘tuvchi cheksiz ko‘p bosh yo‘nalishlar mavjud edi. Ixtiyoriy affin almashtirish **A=P·H** formula yordamida aniqlangani uchun bosh yo‘nalishlarning mavjud bo‘lishi masalasi **P** perspektiv – affin almashtirishga bog‘liq bo‘lib qoladi. Cheksiz ko‘p bosh yo‘nalishlarga ega bo‘lgan almashtirish berilganda bu almashtirish o‘qli simmetriyadan iborat bo‘ladi. Bu o‘qli simmetriya aylanani aylanaga o‘tkazadi. **H** gomotetiya figuraning shaklini o‘zgatirmagani uchun bu affin almashtirishida aylanaga ega bo‘lamiz. Bu aylanada ihtiyoriy ikkita perpendikulyar bo‘lgan diametrlari qo‘shma diametrlar bo‘ladi, yani o‘qlari juftini hosil qiladi. Demak ellipsning hususiy holi sifatida aylana cheksiz ko‘p o‘qlar juftliklariga ega.

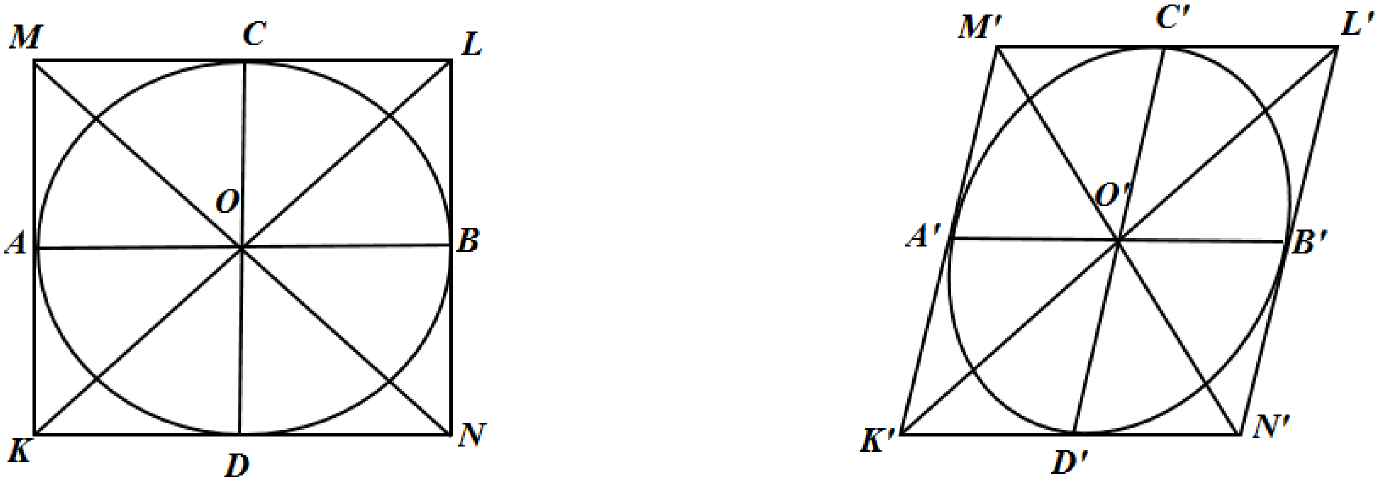
Endi aylanaga uning C nuqtasida o‘tkazilgan urinmani ko‘rib chiqamiz (17-chizma). Bu urinma aylananing *AB* dimetriga parallel bo‘lgani uchun aylanaga o‘tkazilgan urinmaning quyidagi affin xossasiga ega bo‘lamiz:

Aylana CD diametrining C nuqtasidan o‘tkazilgan t urinma CD diametrga qo‘shma bo‘lgan AB diametrga parallel bo‘ladi.

Bu affin xossani ellipsga tatbiq qilsak ellipsga o‘tkazilgan t' urinmani yasashning quyidagi usuliga ega bo‘lamiz:

Agar C' nuqta ellipsning urinmasi o‘tadigan nuqtasi bo‘lsa u holda $C'D'$ diametrni o‘tkazib va unga qo‘shma bo‘lgan $A'B'$ diametrni yasaymiz. C' nuqtadan o‘tib $A'B'$ ga parallel bo‘lgan t' to‘g‘ri chiziq ellipsning izlangan urinmasidir.

Faraz qilaylik aylanaga $KNLM$ tashqi kvadrat chizilgan bo‘lsin. U holda bu kvadratning o‘rta chiziqlari va diagonallari ikkita juft AB, CD va KL, MN qo‘shma



18-chizma

diamertlari bo‘ladi. $KNLM$ kvadratga ellipsga tashqi chizilgan $K'N'L'M'$ parallelogramm mos keladi.

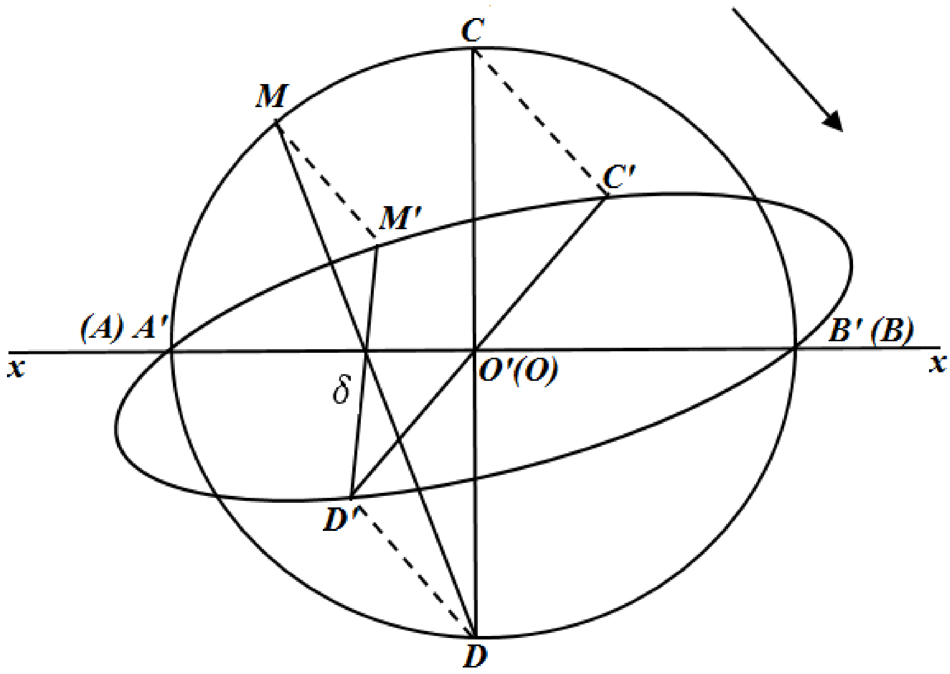
Parallelogrammning $A'B'$, $C'D'$ o‘rta chiziqlari va $K'L'$, $M'N'$ diagonallari ellipsning qo‘shma diamertlari juftlari bo‘ladi. Bu xossadan ellipsni aylananing parallel proyeksiyasi sifatida yasashda foydalaniladi.

Endi ellips va aylananing affin mosligiga asoslangan yasashni ko‘rib chiqamiz.

1. *Ikkita qo‘shma diametrlari bo‘yicha aniqlangan ellips.*

Ixtiyoriy uzunlikdagi ikkita kesma va $A'B'$, $C'D'$ bosh yo‘nalishlar O' nuqtada kesishsin. Bu ikkita kesmani har doim ular orqali aniqlanuvchi ellipsning qo‘shma diametrlari sifatida aniqlash mumkinligini isbotlaymiz.

Buning uchun kesmalardan birini, masalan $A'B'$ ni jinsdosh aylananing diametri sifatida olib *A,B,C,D* nuqtalardan (*A* va *B* nuqtalar mos ravishda A', B' nuqtalar bilan, aylananing *AB* diametri esa ellipsning $A'B'$ diametri bilan ustma ust tushadi) o‘tuvchi aylanani yasaymiz.



19-chizma

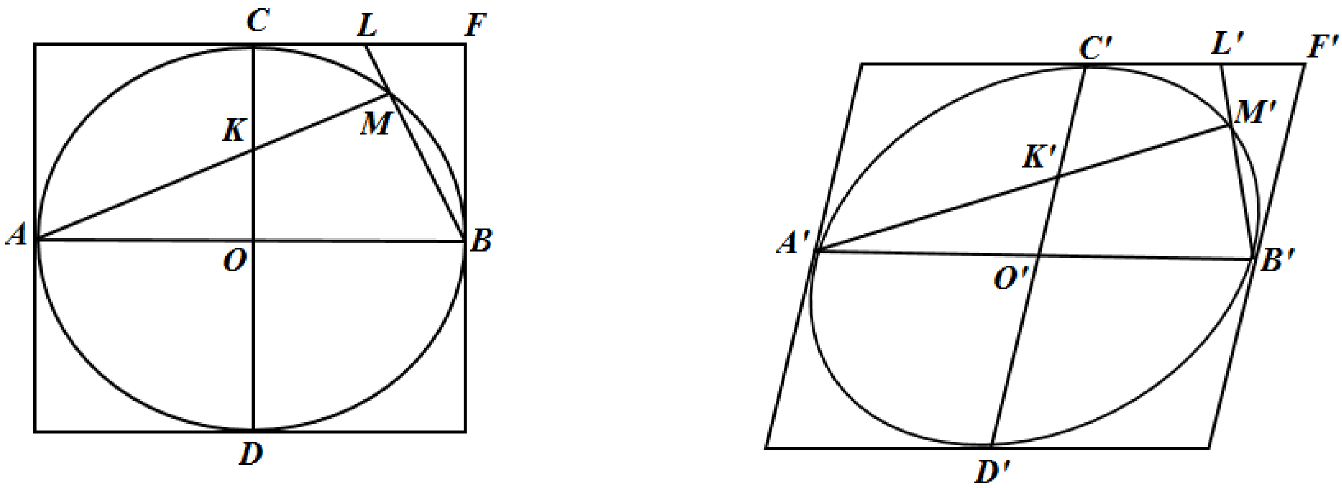
CD diametr *AB* ga perpendikulyar bo‘lsin. Endi jinsdoshlik o‘qi *AB* to‘g‘ri chiziq bo‘lib, aylananing *C* nuqtasiga ellipsning C' nuqtasini mos qo‘yuvchi perspektiv affin moslikda *A,B,C,D* nuqtalardan o‘tuvchi aylanaga qaysi ellips mos kelishini topamiz.

Aylananing *AB* diametri *xx* o‘qda yotgani uchun o‘z o‘ziga mos keladi. $CD \perp AB$ bo‘lgani uchun $A'B'$ va $C'D'$ lar ellipsning qo‘shma dimetrlari bo‘lib aylananing *CD* diametriga ellipsning $C'D'$diametri mos keladi.

Shunday qilib biz $A'B'$ va $C'D'$ kesmalar qo‘shma dimetrlari bo‘ladigan ellips mavjudligini isbotladik. Jinsdosh aylananing biror *M* nuqtasi orqali ellipsning M' nuqtasini yasash quyidagicha bajariladi: *DM* to‘gri chiziqqa $D'M'$ to‘g‘ri chiziq mos keladi, demak M' nuqta $D'\delta$ to‘g‘ri chiziqda yotadi va bu to‘gri chiziqning proyeksiyalash yo‘nalishi MM' ning kesishgan nuqtasi sifatida topiladi.

2. *Qo‘shma dimetrlar jufti bo‘yicha ellips nuqtalarini yasash.*

O markazli (A,B,C,D nuqtalardan o‘tuvchi) aylanaga tomonlari mos ravishda aylananing AB va CD dimetrlariga parallel bo‘lgan kvadrat tashqi chizamiz.(20-chizma). Aylanada biror M nuqtani belgilab uni diametrlardan birining A va B uchlari bilan tutashtiramiz. AM to‘g‘ri chiziq CD diametrni K nuqtada, BM to‘g‘ri chiziq esa kvadratning tomonini L nuqtada kessin. To‘g‘ri burchakli AOK va BFL



20-chizma

uchburchaklar teng bo‘ladi (mos katetlari $AO=BF$ va bu katetlarga yopishgan o‘tkir burchaklari teng $\angle OAK = \angle FBL$, chunki bu burchaklarning mos tomonlari o‘zaro perpendikulyar). Bundan, $OK=FK$ va CO-$OK=CF$-FL, yoki $CK=CL$. Ammo agar kesmalar juft jufti bilan teng bo‘lsa u holda ularning nisbatlari ham teng bo‘ladi: $\frac{CK}{KO} = \frac{CL}{LF}$.

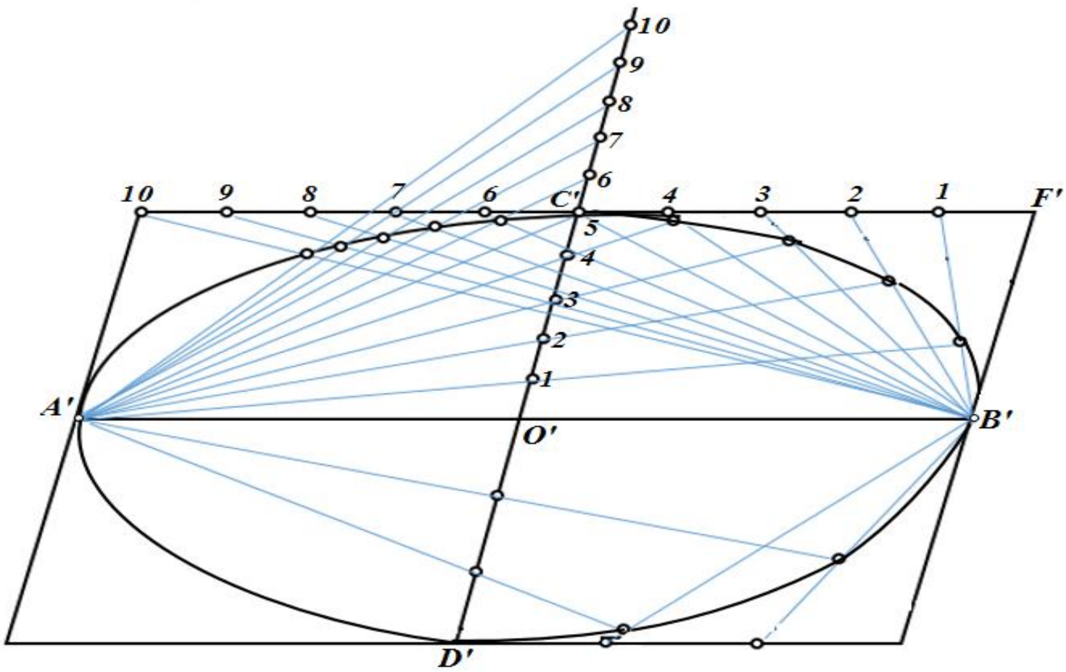
Demak aylana diametridagi uchta nuqtaning (CKO) oddiy nisbati unga tashqi chizilgan kvadratning tomonidagi uchta nuqtaning (CLF) oddiy nisbatiga teng.

Affin almashtirishda bir to‘g‘ri chiziqdagi uchta nuqtaning oddiy nisbati o‘zgarmaydi. Shuning uchun aylanaga jinsdosh ellips uchun ham huddi shunday munosabatga ega bo‘lishimiz kerak. Aylananing diametrlariga ellipsning $A'B'$, $C'D'$ qo‘shma diametrlari jufti mos keladi. Aylanaga tashqi chizilgan kvadratga esa tomonlari diametrlariga parallel bo‘lgan parallelogramm mos keladi. Agar $C'O'$ va $C'F'$ kesmalarda jinsdosh aylananing K va L nuqtalariga mos bo‘lgan K' va L' nuqtalarni belgilasak u holda:

$$\frac{C'K'}{K'O'} = \frac{CK}{KO} \quad \text{va} \quad \frac{C'L'}{L'F'} = \frac{CL}{LF}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Demak $\frac{C'K'}{K'O'} = \frac{C'L'}{L'F'}$. Bu munosabatlardan L' nuqta $C'F'$ kesmani qanday nisbatda bo‘lsa K' nuqta $C'O'$ kesmani shunday nisbatda bo‘lishi kelib chiqadi. Faraz qilaylik biz $B'L'$ to‘g‘ri chiziqni ixtiyoriy o‘tkazdik va unda ellipsga tegishli nuqtani yasamoqchimiz. Buning uchun $C'O'$kesmada $\frac{C'K'}{K'O'} = \frac{C'L'}{L'F'}$ shartni qanoatlantiruvchi K' nuqtani topish va uni A' nuqta bilan tutashtirish yetari. U holda $A'K'$ to‘g‘ri chiziq $B'L'$ to‘g‘ri chiziq bilan izlanayotgan M'nuqtada kesishadi.

Yuqoridagilarga asosan ellips nuqtalarini yasash quyidagicha bajariladi: $A'B'$ va $C'D'$ qo‘shma diametrlar berilgan bo‘lsin. $O'C'$ va $F'C'$ kesmalarni bir hil sondagi teng kesmalarga ajratamiz va bo‘linish nuqtalarini *1,2,3,…* raqamlar bilan belgilaymiz. Bunda bo‘linish nuqtalari $O'C'$ kesmada O' dan C' ga qarab, $F'C'$ kesmada esa F'dan C' ga yo‘nalishda raqamlanadi. Chizmaga e’tibor beradigan



21-chizma

bo‘lsak, agar $O'C'$ kesmadagi K' nuqtaga aytaylik *2* raqami mos kelsa u holda $\frac{C'K'}{K'O'} = \frac{C'L'}{L'F'}$ tenglik o‘rinli bo‘lishi uchun $F'C'$ kesmadagi L' nuqtaga ham shunday raqam mos kelishi kerak. Demak $O'C'$ va $F'C'$ to‘g‘ri chiziqlarda bir sondagi teng bo‘laklar hosil qilindi. Ellips nuqtalarini yasash uchun A' nuqtani O′C′ ning *1,2,3,…* nuqtalari bilan, B' nuqtani esa $F'C'$ ning *1,2,3,…* nuqtalari bilan tutashtiramiz. U holda mos to‘g‘ri chiziqlarning, masalan $A'1$ va $B'1$, $A'2$ va $B'2$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtalari ellipsga tegishli bo‘ladi.

Shunday qilib quyidagi xulosaga kelamiz:

Kesishgan nuqtasi O' har birining o‘rtasi bo‘lgan ixtiyoriy uzunlik va yo‘nalishdagi $A'B'$, $C'D'$ kesmalar yagona ellipsni aniqlaydiki, bu ellips uchun bu kesmalar qo‘shma diametrlar bo‘ladi.

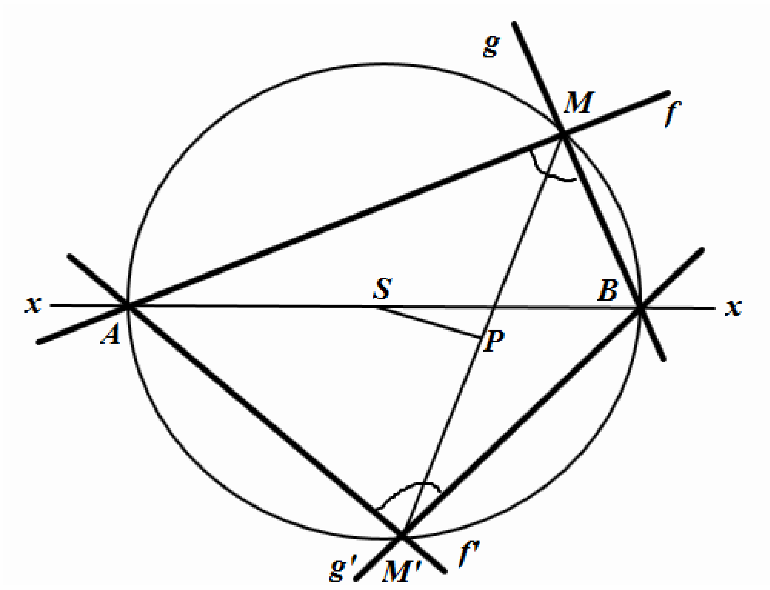
Boshqa tomondan har bir ellips cheksiz ko‘p qo‘shma diametrlar juftlariga ega bo‘lgani uchun uni doim yuqorida ko‘rsatilgan yasashlar yordamida aniqlash mumkin. Agar ω' tekislikda ko‘rsatilgan yasashlar yordamida aniqlangan biror ellipsni ω_1' tekislikka parallel proyeksiyalasak bu tekislikda oldingi ellipsga jinsdosh bo‘lgan va ellipsni hosil qilamiz. Bunda dastlabki ellipsning $A'B'$ va $C'D'$ qo‘shma diametrlari ikkinchi ellipsning $A_1'B_1'$ va $C_1'D_1'$ qo‘shma diametrlariga proyeksiyaladi.

Demak:

1) *Ellipsning biror tekislikka parallel proyeksiyasi yana ellipsdan iborat bo‘ladi.*
2) *Elliptik silindrning tekislik bilan ixtiyoriy (yasovchisiga parallel bo‘lmagan) kesimi ellipsdan iborat bo‘ladi.*

Pespektiv –affin moslikning bosh yo‘nalishlari

Faraz qilaylik ω tekislikdagi f va g to‘g‘ri chiziqlarga ω' tekislikdagi f' va g' to‘gri chiziqlar mos kelsin. Ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak affin moslikning invarianti emas, shuning uchun bitta tekislikdagi perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarga ikkinchi tekislikdagi perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar mos kelishi mumkin. Endi tekislikdagi shunday o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarni topish masalasini qoyamizki unga affin mos bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar ham perpendikulyar bolsin. Masalani dastlab perspektiv moslikda ko‘rib chiqamiz.



22-chizma

Endi $f \perp g$ va $f' \perp g'$ bo‘lsin. A nuqta $f \; va \; f'$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi. B nuqta esa g va g' to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo‘lsin Bu nuqtalar moslik o‘qi xx da yotsin. M to‘g‘ri burchagiga M' to‘g‘ri burchak mos kelsin. Bundan AB kesmani diametr qilib yasalgan aylana M va M' nuqtalardan o‘tishi kelib chiqadi. Uning markazi xx o‘qida va MM' vatarga perpendikulyar PS to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun bu S markazni oson yasash mumkin. Demak masalaning bunday tahlili uning yechish usulini ochib berdi. Ikkita tekislikning perspektiv affin mosligi xx moslik o‘qi va bir juft mos M va M' nuqtalari bilan berilgan bolsin. M nuqta orqali shunday f va g o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazish talab qilinadiki ularga mos bolgan f' va g' to‘g‘ri chiziqlar ham perpendikulyar bo‘lsin. Endi bu to‘g‘ri chiziqlarni yasash masalasini ko‘rib chiqamiz. MM' to‘g‘ri chiziqni yasaymiz va MM' kesma ortasi P nuqtadan unga perpendikulyar PS to‘g‘ri chiziq otkazamiz. Bu otkazilgan to‘g‘ri chiziqning xx moslik o‘qi bilan kesishgan nuqtasi izlanayotgan aylananing markazi boladi. S markazli va $SM = SM'$ radiusli aylana chizamiz. Bu aylananing xx o‘qi bilan kesishgan nuqtalari A va B ni topamiz. U holda AM va BM to‘g‘ri chiziqlar izlangan to‘g‘ri chiziqlar bo‘ladi. Haqiqatan ham $\angle AMB$ diametrga tiralgan burchak bo‘lgani uchun AM va BM to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘ladi, huddi shunday AM' va BM' to‘g‘ri chiziqlar ham perpendikulyardir. Ko‘rib chiqilgan masala bitta yechimga ega, chunki S nuqta ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasi. Agar $MM' \perp xx$ bo‘lib P nuqta xx o‘qida yotsa PS perpendikulyar xx o‘qi bilan ustma ust tushadi va S nuqta aniq bitta bo‘lmay qoladi.

Agar M nuqtada kesishuvchi f va g to‘g‘ri chiziqlar masala yechimi bo‘lsa u holda bu to‘g‘ri chizilarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar juftliklari ham masala yechimi bo‘ladi. Haqiqatan ham bu parallellik perspektiv - affin moslikning invariyanti ekanligidan kelib chiqadi.

Yuqoridagi usulda topilgan yo‘nalishlar bosh yo‘nalishlar deyiladi. Demak tekisliklarning perspektiv – affin mosligida ikkita o‘zaro mos bosh yo‘nalishlar juftliklari mavjud bo‘lib o‘qli simmetriyada esa cheksiz ko‘p bosh yo‘nalishlar bo‘ldi.

Endi ixtiyoriy $\boldsymbol{A}$ affin almshtirishida bosh yo‘nalishlarni topish masalasini ko‘rib chiqamiz.

Ma’lumki ixtiyoriy affin alamashtirishini **P –** perspektiv – affin alamshtirish va **H** gomotetiyani ko‘paytmasi sifatida ifodalash mumkin: **A= P · H**.

Shunday qilib ω tekislikni ω' tekislikka o‘tkazuvchi **A** affin almashtirishni ω tekislikni ω_1 tekislikka o‘tkazuvchi **P** perspektiv – affin alamshtirish va ω_1 tekislikni ω' tekislikka o‘tkazuvchi **H** gomotetiya yordamida hosil qilish mumkin.

ω va ω_1 tekisliklarda **P** almashtirishga mos bo‘lgan bir juft bosh yo‘nalishlar juftlari mavjud bo‘lib ularni mos ravishda f , g va f_1, g_1 orqali belgilaylik. **H** gomotetiya ω_1 tekislikni ω' tekislikka o‘tkazgani uchun f_1, g_1 to‘g‘ri chiziqlar f', g' to‘g‘ri chiziqlarga akslanadi.

Gomotetiyada burchak kattaligi saqlangani uchun f_1, g_1 perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarga f', g' perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar mos keladi.

Demak **A** affin almashtirish ω tekislikdagi f ,g perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar juftligini ω' tekislikdagi f', g' perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar juftiga o‘tkazadi. Bundan ikkita tekislikning ixtiyoriy affin mosligida ikkita o‘zaro mos bo‘lgan bosh yo‘nalishlar juftliklari mavjud ekanligi kelib chiqadi.

Mustahkamlash ushun savol va topshiriqlar

1. Affin almashtirishda aylanaga qanday figura mos keladi?
2. Aylananing affin xossalariga qanday xossalar kiradi?
3. Perspektiv affin moslikda aylananing obrazi qanday yasaladi?
4. Aylananing ikkita perpendikulyar diametrlarini qanday xossalari bor?
5. Qanday diametrlarni qo‘shma diametrlar deyiladi?
6. Qo‘shma diametrni qanday yasash mumkin?
7. Bosh yo‘nalishlar deb qanday yo‘nalishlarga aytiladi?
8. Qo‘shma dimetrlar jufti bo‘yicha ellips nuqtalarini qanday yasaladi?
9. Bosh yo‘nalishlarni aniqlovchi to‘g‘ri chiziqlar qanday yasaladi?
10. Affin almashtirishda bosh yo‘nalishlar qanday topiladi?
11. Perspektiv – affin almashtirish va gomotetiyani ko‘paytmasi qanday almashtirishni ifodalaydi?
12. Gomotetiyada qanday xossalar saqlanadi?

II BOB. TASVIRLARNI YASASH USULLARI

2.1§ PARALLEL PROYEKSIYALASH USULI BILAN YASSI FIGURALARNING TASVIRINI YASASH

Reja:

1. Parallel proyeksiyalash usuli bilan yassi figuralarning tasvirini yasashda foydalaniladigan teoremalar.
2. Parallel proyeksiyalash usuli bilan yassi figuralarning tasvirini yasashga masalalar.

Parallel proyeksiyalash usuli bilan yassi figuralarning tasvirini yasashda biror π tekislikni tanlab uni proyeksiyalar tekisligi deb ataymiz. So‘ngra proyeksiyalar tekisligini kesuvchi l to‘g‘ri chiziqni tanlaymaiz va berilgan F_0 figurani π tekislikka l to‘g‘ri chiziqqa parallel qilib proyeksiyalaymiz. Hosil qilingan yassi F' figurani (F_0 figuraning proyeksiyasi) yoki unga o‘xshash bo‘lgan ixtiyoriy F figurani F_0 figuraning π tekislikdagi tasviri deyiladi.

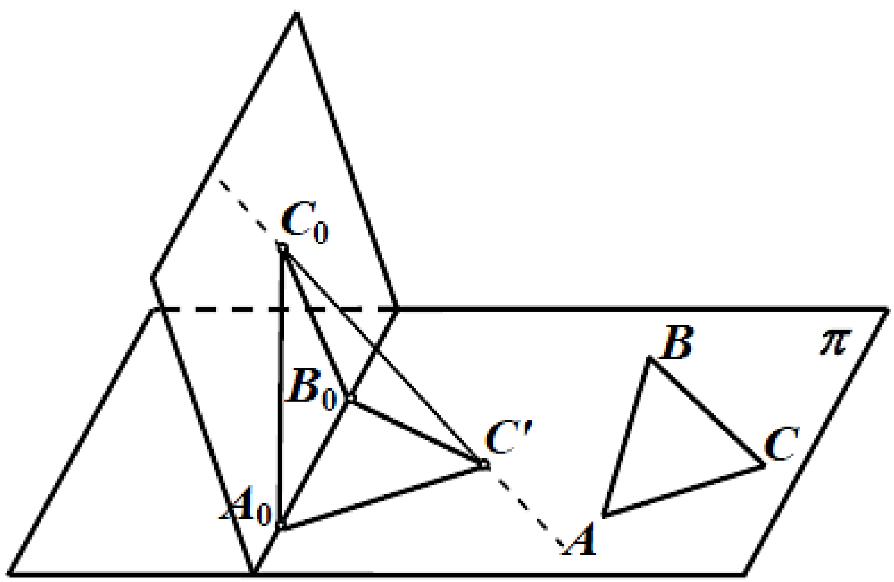
O‘z o‘zidan savol tug‘iladi nega figuraning tasviri sifatida nafaqat uning proyeksiyasini, balki proyeksiyasiga o‘xshash bo‘lgan ixtiyoriy figurani qabul qilamiz? Figura proyeksiyasining qanday o‘zgarishi proyeksiyalar yo‘nalishining proyeksiyalar tekisligiga nisbatan qanday joylashishiga, original figura joylashgan tekislik va proyeksiyalat tekisligini o‘zaro qanday joylashishiga bog‘liqdir. Shunga ko‘ra figura proyeksiyasi juda katta yoki judayam kichik o‘lchamda bolishi mumkin va u bilan ishlashda ancha qiyinchiliklarga olib keladi. Shu sababli proyeksiya ustida o‘xshash almashtirish bajarib kerakli o‘lchamdagi figura tasviri hosil qilinadi.

Parallel proyeksiyalash usuli bilan yassi figuralarning tasvirini yasashda quyidagi ikkita teoremalardan foydalaniladi.

1-teorema. *Har qanday uchburchakning parallel proyeksiyasi oldindan berilgan ixtiyoriy uchburchakka o‘xshash bo‘ladi.*

Isbot. $A_0B_0C_0$ - ixtiyoriy uchburchak bo‘lsin. Proyeksiyalar tekisligi π ni shunday tanlaymizki uchburchakning A_0B_0 tomoni unga tegishli bo‘lib C_0 uchi tegishli bo‘lmasin. π tekislikda ixtiyoriy ABC uchburchakni olamiz va uni $A_0B_0C_0$ uchburchakning tasviri sifatida qabul qilish mumkinligini ko‘rsatamiz.

π tekislikda A_0B_0 kesma bir tomoni bo‘lgan va ABC uchburchakka o‘xshash A_0B_0C' uchburchakni yasaymiz. A_0B_0C' uchburchak $A_0B_0C_0$ uchburchakning π tekislikdagi C_0C' to‘g‘ri chiziqqa parallel proyeksiyasi bo‘ladi. Shuning uchun A_0B_0C' uchburchak va demak unga o‘xshash ABC uchburchak ham $A_0B_0C_0$

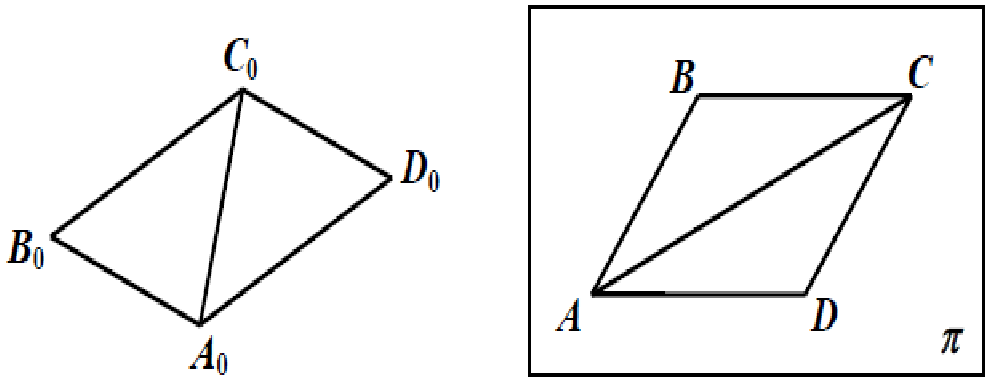


23-chizma

uchburchakning tasviri bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

Natija. *Parallelogrammning (xususan, to‘g‘ri to‘rtburchak, kvadrat va rombning) parallel proyeksiyalashdagi tasviri parallelogramm bo‘ladi.*

Haqiqatan ham $A_0B_0C_0D_0$ – berilgan parallelogramm, A_0C_0 –uning diagonali va $ABCD$ esa π tasvir tekisligidagi ixtiyoriy parallelogramm bo‘lsin.

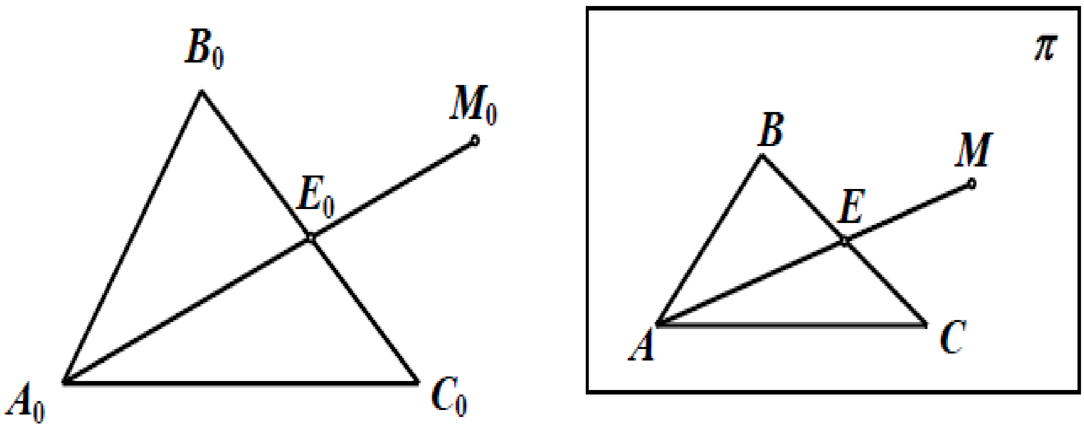


24-chizma

1- teoremaga ko‘ra ABC uchburchakni $A_0B_0C_0$ uchburchakning tasviri sifatida qabul qilish mumkin. Parallel proyeksiyalashda va o‘xshash almashtirishda parallel to‘g‘ri chiziqlar yana parallel to‘g‘ri chiziqlarga tasvirlangani uchun $ABCD$ parallelogramm $A_0B_0C_0D_0$ parallelogrammning tasviri bo‘ladi.

2-teorema. *Parallel proyeksiyalashda $A_0B_0C_0$ uchburchakning proyeksiyasi berilgan bo‘lsa bu uchburchak yotgan tekislikning ixtiyoriy nuqtasining tasviri bir qiymatli aniqlanadi.*

Isbot. ABC uchburchak $A_0B_0C_0$ uchburchakning tasviri va M_0 nuqta $A_0B_0C_0$ tekislikdagi ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. Agar M_0 nuqta va $A_0B_0C_0$ uchburchakning



25-chizma

uchi orqali to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazsak bu to‘g‘ri chiziqlardan kamida bittasi tanlangan uchiga qarama qarshi bo‘lgan tomonini kesib o‘tadi. Aniqlik uchun A_0M_0 to‘g‘ri chiziq B_0C_0 tomonni E_0 nuqtada kesib o‘tsin.

Parallel proyeksiyalashda va o‘xshash almashtirishda uchta nuqtaning oddiy nisbati saqlangani uchun E_0 nuqtaning tasviri E ni yasash mumkin. E nuqta BC kesmani qanday nisbatda bo‘lsa E_0 nuqta B_0C_0 kesmani shunday nisbatda bo‘ladi:

$$\frac{B_0E_0}{E_0C_0} = \frac{BE}{EC}\,.$$

Bunda agar E_0 nuqta B_0 va C_0 nuqtalar orasida yotsa u holda E nuqta B va C nuqtalar orasida yotadi, agar E_0 nuqta B_0C_0 kesma tashqarisida yotsa E nuqta ham BC kesma tashqarisida yotadi.

M nuqta AE to‘g‘ri chiziqda yotishi kerak, uning vaziyati esa $\frac{A_0M_0}{M_0E_0} = \frac{AM}{ME}$ nisbatdan aniqlanadi. Topilgan ikkita nisbatdan M nuqtani bir qiymatli aniqlash mumkin.

Natija. *ABCD va $A_1B_1C_1D_1$ to‘rtburchaklarning diagonallari kesishgan nuqtalari mos ravishda E, E_1 bo‘lsin. Agar E, E_1 nuqtalar mos ravishda to‘rtburchaklarning diagonallarini bir xil nisbatda bo‘lsa u holda bu to‘rtburchaklardan har birini ikkinchisining tasviri deb qabul qilish mumkin.*

Isbot qilingan teoremalarga asosan yassi figuralarning tasvirlarini yasash uchun tabiiy F_0 figuraga tegishli bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan *bazis nuqtalar* deb ataluvchi uchta nuqtani olib ularni proyeksiyalar tekisligiga (yoki rasm tekisligiga) parallel proyeksiyalanadi. So‘ngra bu nuqtalardan hosil bo‘lgan figurani o‘xshash almashtirib (zarurat bo‘lganda) proyeksiyalar tekisligidagi (yoki rasm tekisligigagi) bazis nuqtalarni hosil qilamiz. Bazis nuqtalar orqali hosil qilingan uchburchakka bazis uchburchak deyiladi.

Shunday qilib, parallel proyeksiyalashda yassi figuralarning tasvirlarini yasashni quyidagi bosqichlarda bajarishimiz mumkin:

1. Berilgan figura hayolan tasavvur qilinadi yoki hech qanday o‘zgarishsiz chizib qo‘yilib uning tasvirini yasash uchun yetarli bo‘lgan va parallel proyeksiyalashda o‘zgarmaydigan xossalar ajratiladi.
2. Berilgan figuradan bazis uchburchak ajratilib ixtiyoriy uchburchakka tasvirlanadi.
3. Figuraning qolgan elementlari parallel proyeksiyalashning xossalariga asosan yasaladi.

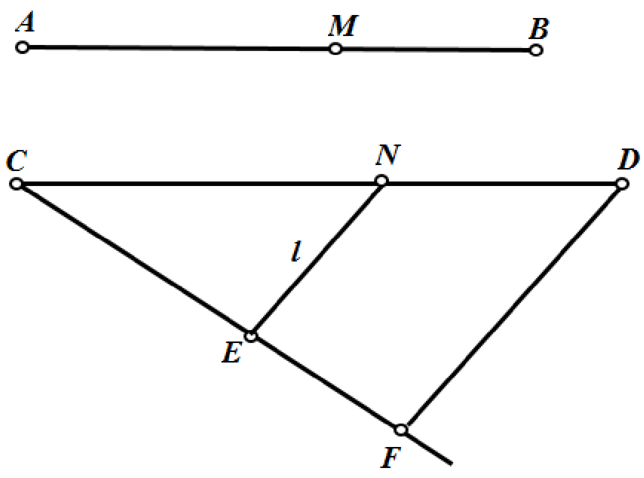
Yassi figuralarning tasvirlarini yasashga doir masalalar.

Dastlab yordamchi masalani ko‘rib chiqamiz.

1-masala. *AB* va *CD* kesmalar berilgan bo‘lib *M* nuqta *AB* kesmaga tegishli. *M* nuqta *AB* kesmani qanday nisbatda bo‘layotgan bo‘lsa *CD* kesmani ham shunday nisbatda bo‘luvchi *N* nuqtani yasang.

Yechish. *AB* va *CD* – berilgan kesmalar va *M* nuqta *AB* da yotsin. *CD* kesmada $\frac{CN}{ND}=\frac{AM}{MB}$ shartni qanoatlantiradigan *N* nuqtani yasash kerak.

Uchi *C* nuqtada bo‘lgan ixtiyoriy nur yasaymiz. Bu nurning bir tomonida *CE=AM* va *CF=AB* kesmalarni, ikkinchi tomonida *CD* kesmaga teng kesmani qo‘yamiz.

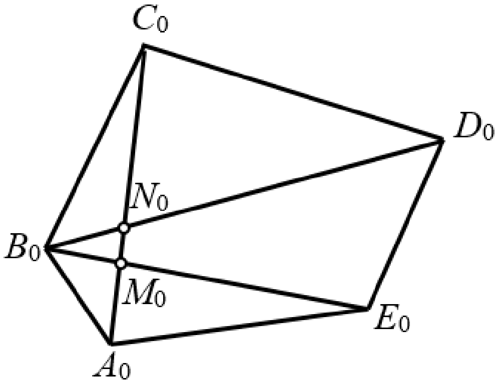


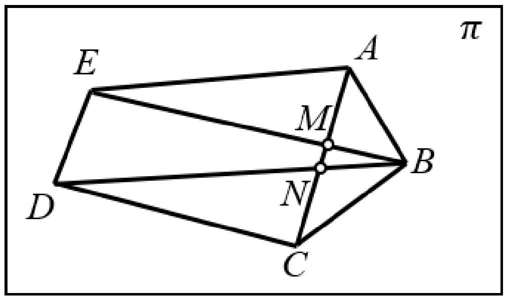
F va *D* nuqtalarni tutashtiramiz va *E* nuqtadan *FD* to‘g‘ri chiziqaa parallel *l* to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. *l* to‘g‘ri chiziq *CD* kesmani izlangan *N* nuqtada kesib o‘tadi.

Haqiqatan ham *CFD* va *CEN* uchburchaklar gomotetik bo‘lgani uchun $\frac{CN}{CD}=\frac{CE}{CF}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bundan $\frac{CN}{CD-DN}=\frac{CE}{CF-CE}$ yoki $\frac{CN}{ND}=\frac{AM}{MB}$.

2-masala. Qavariq $A_0B_0C_0D_0E_0$ beshburchakning parallel proyeksiyalashdagi tasvirini yasang.

Yechish. $A_0B_0C_0$ uchburchakning tasviri ixtiyoriy *ABC* uchburchak bo‘ladi. $A_0B_0C_0D_0E_0$ beshburchakda A_0D_0, B_0D_0 va B_0E_0 diagonallarini o‘tkazamiz. $A_0C_0\cap B_0D_0=N_0$ va $A_0C_0\cap B_0E_0=M_0$.

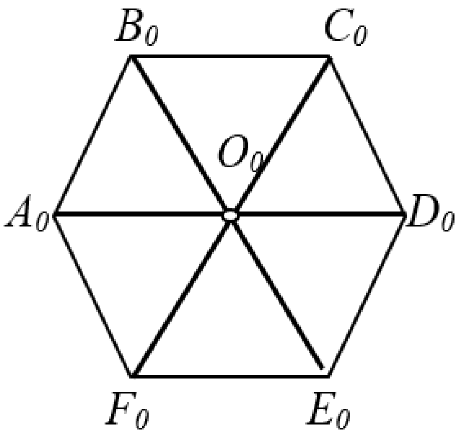


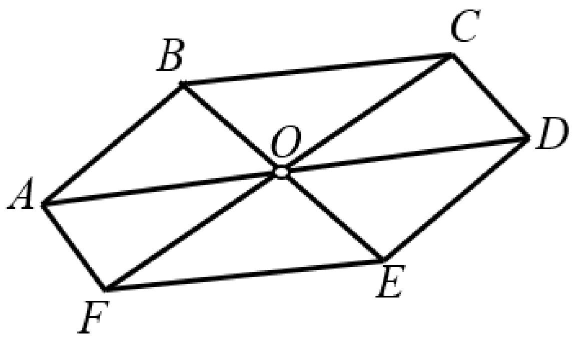


AC kesmada 1-masalada ko‘rsatilgan usul bilan $\frac{AN}{NC}=\frac{A_0N_0}{N_0C_0}$, $\frac{AM}{MC}=\frac{A_0M_0}{M_0C_0}$ shartlarni qanoatlantiradigan *N* va *M* nuqtalarni yasaymiz. So‘ngra *BN* va *BM* nurlarni o‘tkazib *BN* nurda *D* nuqtani, *BM* nurda esa *E* nuqtani $\frac{BN}{ND}=\frac{B_0N_0}{N_0D_0}$ va $\frac{BM}{ME}=\frac{B_0M_0}{M_0E}$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladigan qilib yasaymiz. *A* va *E, E* va *D, D* va *C* nuqtalarni tutashtiramiz. Hosil qilingan *ABCDE* beshburchak $A_0B_0C_0D_0E_0$ beshburchakning tasviri bo‘ladi.

3-masala. Muntazam oltiburchak tasvirini yasang.

Yechish. $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ muntazam oltiburchakning markazi O_0 nuqta uning A_0D_0, B_0E_0 va C_0F_0 diagonallarining o‘rta nuqtasi bo‘ladi. $A_0B_0C_0O_0$ to‘rtburchak esa rombdir. Bu rombning tasviri sifatida ixtiyoriy *ABCO* parallelogrammni olishimiz mimkin. *ABCO* parallelogrammning *O* uchi nasviri yasalayotgan *ABCDEF* oltiburchak *AD*, *BE* va *CF* diagonallarining o‘rtasi bo‘ladi. Shularga asosan oltiburchak tasviri yasaladi.





26-chizma

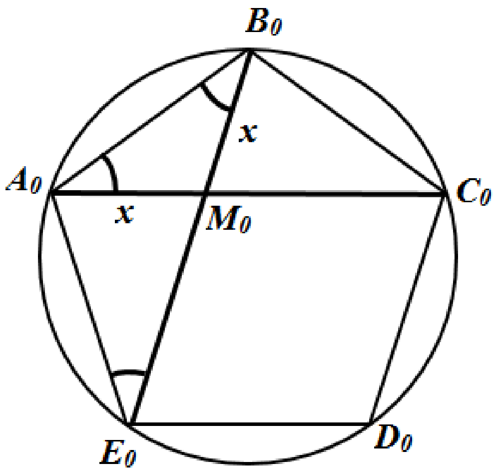
Izoh. Yassi figuralarning tasvirlarini yasaganda tabiiy (original) figurani yasab qo‘ymasa ham bo‘ladi. Biz yasash usulini tushuntirish uchun tabiiy (original) figurani ham yasab qo‘ydik.

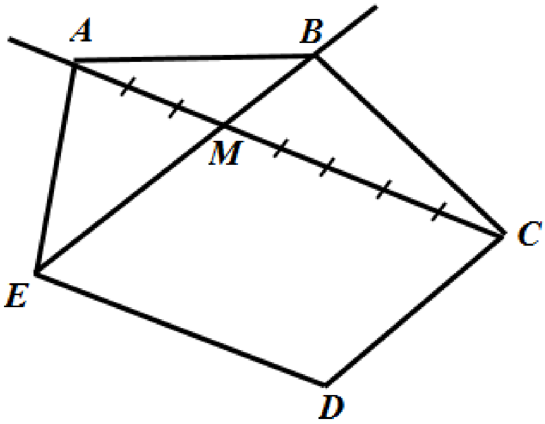
4-masala. Muntazam beshburchak tasvirini yasang.

Yechish. Yasashni 2- masalada ko‘rsatilgan usulda ham bajarish mumkin. Biz nisbatan oddiy va amalda ko‘p qo‘llaniladigan usulni ko‘rsatamiz.

$A_0B_0C_0D_0E_0$ beshburchakka tashqi chizilhan aylanani qaraymiz. Bu aylanaga ichki chizilgan $A_0B_0E_0$, $B_0A_0C_0$ va $A_0E_0B_0$ burchaklar teng yoylarga tiralgani uchun o‘zaro teng. Shuning uchun $B_0A_0E_0$, $A_0M_0B_0$ uchburchaklar teng yonli va o‘xshash bo‘ladi, bunda $M_0 = A_0C_0 \cap B_0E_0$. Beshburchak muntazam bo‘lgani uchun uning A_0C_0 , B_0E_0 diagonallari mos ravishda D_0E_0 , C_0D_0 tomonlariga paralleldir. Bundan

$C_0D_0E_0M_0$ to‘rtburchak romb ekanligi kelib chiqadi. Beshburchak tomoni a ga, $A_0M_0B_0$ uchburchak tomoni esa x ga teng bo‘lsin. U holda $B_0A_0E_0$ $A_0M_0B_0$





27-chizma

uchburchaklar o‘xshash.

Bundan $x > 0$ eganligini e’tiborga olsak $x = \frac{-a+a\sqrt{5}}{2}$. Shunday qilib $\frac{AM}{MC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Beshburchakning diagonallari kesishish nuqtasida bo‘linish nisbati ma’lum bo‘lgandan keyin muntazam beshburchak tasvirini aniq yasashni quyidagi ketma ketlikda bajarsa bo‘ladi:

1) $C_0D_0E_0M_0$ rombning tasviri bo‘ladigan $CDEM$ parallelogramm yasaymiz;
2) Parallelogrammning MC tomonini teng beshta bolakka bo‘lamiz;
3) MC kesmani M uchi tomonda davom qildirib va yuqoridagi teng bo‘laklardan uchtasini qo‘yib A_0 nuqtaning tasviri A nuqtani yasaymiz;
4) B_0 nuqtaning tasviri – B nuqtani yasaymiz (oldingi rejada ko‘rsatilgan usul bilan)
5) AB, BC va AE kesmalarni yasaymiz.

Mustahkamlash ushun savol va topshiriqlar

1. Figuraning proyeksiyalar tekisligidagi tasviri parallel proyeksiyalashda qanday hosil qilinadi?

2. Figura proyeksiyasining o‘zgarishi nimalarga bog‘liq?
3. Parallel proyeksiyalash usuli bilan yassi figuralarning tasvirini yasashdagi 1-teorema
4. Parallel proyeksiyalash usuli bilan yassi figuralarning tasvirini yasashdagi 2-teorema
5. To‘g‘ri to‘rtburchakning parallel proyeksiyalashdagi tasviri qanday figuralar bo‘lishi mumkin (asoslang)?
6. Kvadratning parallel proyeksiyalashdagi tasviri qanday figuralar bo‘lishi mumkin (asoslang)?
7. Qaysi holda bir to‘rtburchakni ikkinchisining tasviri deb qarash mumkin?
8. Parallel proyeksiyalashdagi bazis uchburchak nima?
9. Parallel proyeksiyalashda yassi figuralarning tasvirlarini yasashni qanday bosqichlarda amalga oshiriladi?

2.2§ AKSONOMETRIYA

Reja:

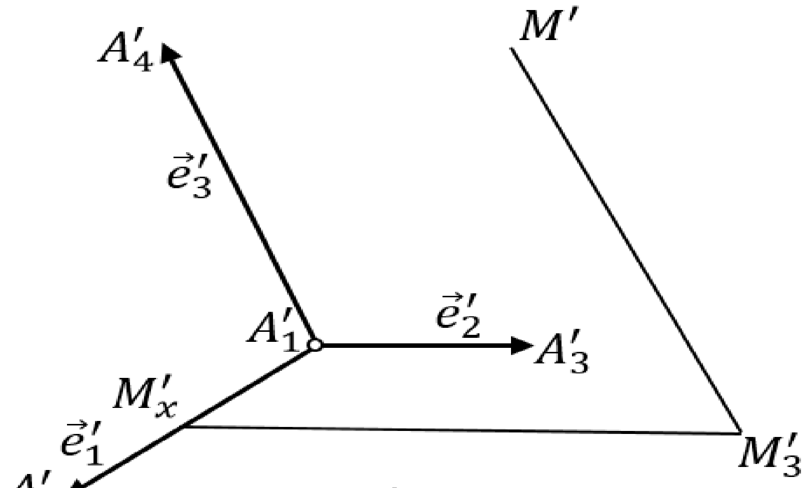
1. Koordinat siniq chizig‘i va uning tasviri
2. Nuqtaning ikkinchi proyeksiyasi
3. Aksonometrik proyeksiyalash usuli
4. Aksonometrik proyeksiyalarning turlari

Ma’lumki fazoda affin reper deganda ixtiyoriy nokomplanar bo‘lgan nuqtalarning tartiblangan to‘rtligi tushuniladi. Fazodagi har bir $R' = (A_1', A_2', A_3', A_4')$ reperga A_1', $\overrightarrow{e_1}'=\overrightarrow{A_1'A_2'}$, $\vec{e}_2' = \overrightarrow{A_1'A_3'}$, $\vec{e}_3' = \overrightarrow{A_1'A_4'}$ - affin koordinatalar sistemasi mos keladi va aksincha. Reperni tekislikda tasvirlaganimizda reperning nuqtalari biror to‘liq to‘rtburchakning uchlariga tasvirlanadigan qilib proyeksiyalash yo‘nalishi tanlangan deb faraz qilamiz.

Fazoda biror $R' = (A_1', A_2', A_3', A_4')$ reper berilgan bo‘lsin. R' reperga nisbatan M' *(x,y,z)* koordinatalarga ega bo‘lgan M' nuqtani qaraymiz. U holda affin koordinatalar sistemasining aniqlanishiga ko‘ra

$$\overrightarrow{A_1'M'} = x\vec{e}_1' + y\vec{e}_2' + z\vec{e}_3' \qquad (1)$$

tenglik bajariladi. M' nuqtadan $\vec{e}_3' = \overrightarrow{A_1'A_4'}$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziq



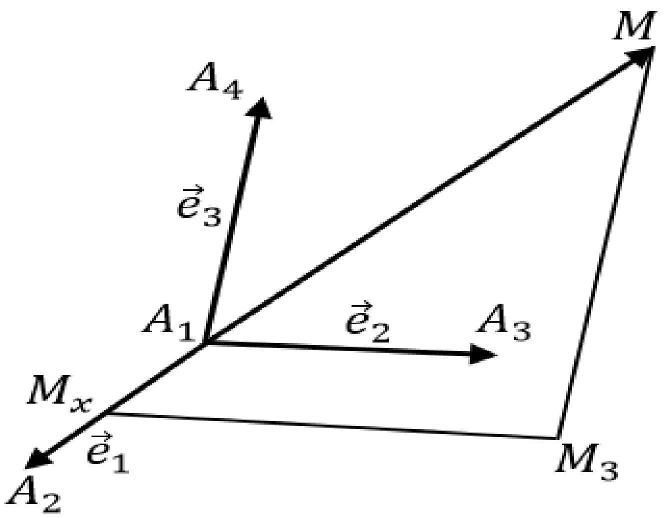
28-chizma

o‘tkazamiz va uning $A_1'A_2'A_3'$ tekislik bilan kesishgan nuqtasini M_3' orqali belgilaymiz. So‘g‘ra M_3' nuqtadan $\vec{e}_2' = \overrightarrow{A_1'A_3'}$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazib, bu to‘g‘ri chiziqning $A_1'A_2'$ koordinat to‘g‘ri chizig‘i bilan kesishgan nuqtasini M_x' bilan belgilaymiz. Hosil qilingan, uchlari M', M_3', M_x' nuqtalarda bo‘lgan kesmalardan tuzilgan shaklni *koordinat siniq chizig‘i* deymiz. Demak $\overrightarrow{A_1'M'} = \overrightarrow{A_1'M_x'} + \overrightarrow{M_x'M_3'} + \overrightarrow{M_3'M'}$ tenglik o‘rinli bo‘lib $\overrightarrow{A_1'M_x'}$, $\overrightarrow{M_x'M_3'}$, $\overrightarrow{M_3'M'}$ vektorlar koordinat vektorlariga parallel bo‘ladi. Bundan

$$\overrightarrow{A_1'M_x'} = x\vec{e}_1', \overrightarrow{M_x'M_3'} = y\vec{e}_2', \overrightarrow{M_3'M'} = z\vec{e}_3'. \quad (2)$$

Shunday qilib agar koordinat siniq chizig‘ining yo‘naltiruvchi vektorlari berilgan bo‘lsa nuqtaning koordinatalari (2) munosabatdan, nuqtaning fazodagi vaziyati esa (1) tenglikdan aniqlanadi.

Endi koordinatalar sistemasini koordinata siniq chizig‘i bilan birgalikda biror α tekislikka *l* yo‘nalishda parallel proyeksiyalaymiz. $R=(A_1, A_2, A_3, A_4)$ berilgan reperning parallel proyeksiyalashdagi tasviri bo‘sin, M, M_3 va M_x nuqtalar mos ravishda M', M_3', M_x' nuqtalarning tasvirlari bo‘lsin. Endi $\vec{e}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{A_1A_3}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{A_1A_4}$ belgilashlar kiritamiz. Parallel proyeksiyalashda to‘g‘ri chiziqlarning parallelligi saqlangani uchun $M'M_3'M_x'$ koordinat siniq chizig‘i tasvir tekisligida MM_3M_x siniq chiziqqa tasvirlanadi, hamda vektorlar $\overrightarrow{A_1M_x}$, $\overrightarrow{M_xM_3}$, $\overrightarrow{M_3M}$ mos ravishda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarga parallel



29-chizma

bo‘ladi. Bundan tashqari parallel proyeksiyalashda parallel to‘g‘ri chiziqlarda yoki bitta to‘g‘ri chiziqda yotuvchi kesmalar nisbati, hamda vektorlarning bir xil yo‘nalganligi va qarama qarshi yo‘nalganlik xossalari saqlangani uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli:

$$\overrightarrow{A_1M_x} = x\vec{e}_1,\ \ \overrightarrow{M_xM_3} = y\vec{e}_2,\ \ \overrightarrow{M_3M} = z\vec{e}_3. \qquad (3)$$

Vektorlarni qo‘shish qoyidasiga ko‘ra $\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{A_1M_x} + \overrightarrow{M_xM_3} + \overrightarrow{M_3M}$ yoki

$$\overrightarrow{A_1M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (4)$$

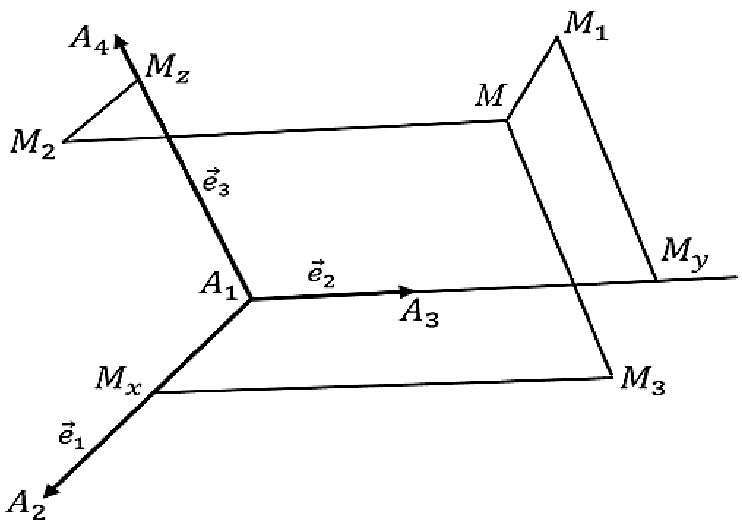
tenglikka ega bo‘lamiz.

Demak, agar fazoda nuqtaning R' reperga nisbatan koordinatalari va tasvir tekisligida uning uchlarining tasvirlari ma’lum bo‘lsa u holda (3) formulalarga ko‘ra $\overrightarrow{A_1M_x}$, $\overrightarrow{M_xM_3}$, $\overrightarrow{M_3M}$ vektorlarni yasay olamiz va bu vektorlarni qo‘shib M nuqtaning tasvir tekisligidagi vaziyatini aniqlaymiz.

Endi teskari masalani ko‘rib chiqamiz. Fazoda $R' = (A_1', A_2', A_3', A_4')$ reper berilgan bo‘lsin. Tasvir tekisligida bu reper uchlarining tasvirlari A_1, A_2, A_3 va A_4 nuqtalar hamda M' nuqtaning tasviri M nuqta berilgan bo‘lsin. M' nuqtani yasash talab qilinadi. M' nuqtani yasash masalasi bu nuqtaning R' reperga nisbatan koordinatalarini topish bilan teng kuchli. Berilgan ma’lumotlar M' nuqtani yasash uchun yetarli emas. Chunki parallel proyeksiyalash fazoni tekislikka akslantiruvchi o‘zaro bir qiymatli akslantirish bo‘lmaydi. M nuqta fazodagi cheksiz ko‘p nuqtalarning tasviri bo‘ladi. Bundan tashqari M' nuqtani koordinatalarini aniqlash uchun (4) tenglikdan foydalanamiz, ya’ni $\overrightarrow{A_1M}$ vektorni $\vec{e}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{A_1A_3}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{A_1A_4}$ vektorlar orqali yoyilmasini yozish kerak. Ammo bu yoyilmaning koeffitsiyentlarini bir qiymatli aniqlab bo‘lmaydi, chunki $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar komplanar, ya’ni ular chiziqli bog‘liq. M' nuqtani yasash uchun qo‘shimcha ma’lumotlar zarur.

M' nuqtadan o‘tib $A_1'\vec{e}_3'$ koordinatalar o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning $A_1'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ koordinata tekisligi bilan kesishgan nuqtasi M_3' orqali uning tasvir tekisligidagi obrazini esa M_3 bilan belgilaganmiz. M_3 nuqtani M' nuqtaning ikkinchi proyeksiyasi deyiladi. M_3' nuqta M' nuqtadan o‘tib $A_1'\vec{e}_3'$ koordinatalar o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘gani uchun uning ikkinchi proyeksiyasi M nuqtadan o‘tib $A_1\vec{e}_3$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan tasvir tekisligiga tegishli. Xususan M_3 nuqta M nuqta bilan ustma ust tushishi mumkin. Bu holatda M_3' fazoda $A_1'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ koordinata tekisligida yotadi. Demak, agar nuqtaning tasviri M va uning ikkinchi proyeksiyasi M_3 berilgan bo‘lsa M_3' nuqtaning koordinatalarini topish masalasi yagona yechimga ega. Haqiqatan ham $\overrightarrow{M_3'M'} = z\vec{e}_3'$ bo‘lgani uchun $\overrightarrow{M_3M} = z\vec{e}_3$ bo‘lib bundan M' nuqtaning uchunchi z koordinatasi topiladi. M_3 nuqta orqali $A_1\vec{e}_2$ koordinatalar o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq o‘tkazib uning $A_1\vec{e}_1$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi M_x nuqtani topamiz. Shunday qilib biz $M'M_3'M_x'$ koordinat siniq chizig‘ining tasvirini yasadik. M' nuqtaning dastlabki ikkita x va y koordinatalari $\overrightarrow{A_1M_x} = x\vec{e}_1$, $\overrightarrow{M_xM_3} = y\vec{e}_2$ tengliklardan topiladi.

M' nuqtaning koordinatalarini uning tasviridan foydalanib aniqlashda biz bu nuqtaning $A_1'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ koordinatalar tekisligidagi M_3' proyeksiyasidan foydalandik. Bu masalani M' nuqtaning mos ravishda $A_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ va $A_1'\vec{e}_1'\vec{e}_3'$ koordinatalar tekisliklaridagi M_1' va M_2' proyeksiyalaridan foydalanib ham hal qilish mumkin. 29–chizmada MM_3M_x , MM_1M_y va MM_2M_z koordinat siniq chiziqlari tasvirlangan. M_1' va M_2' nuqtalarning M_1 va M_2 tasvirlarini ham M'



30-chizma

nuqtaning ukkinchi proyeksiyalari deyiladi. Bunda indeks ikkinchi proyeksiya tegishli bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan koordinata o‘qining raqami bilan bir xil.

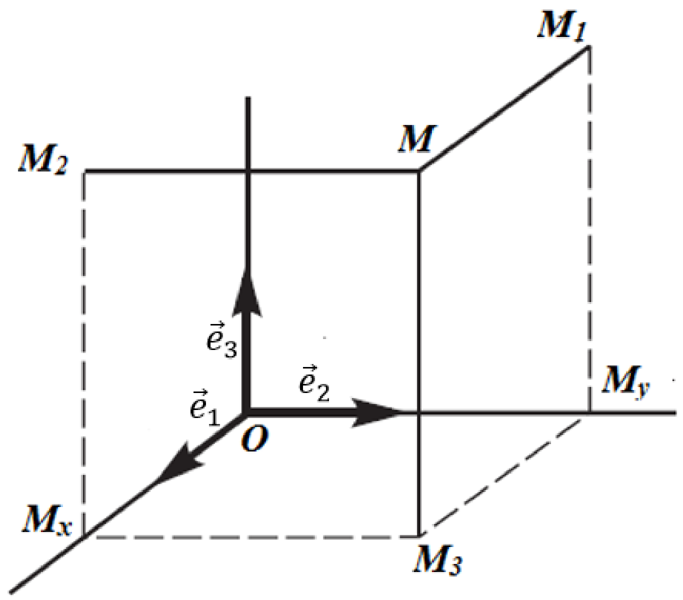
Yuqoridagi biz ko‘rib chiqqan fazoda figura proyeksiyasini figura nuqtalarining koordinatalaridan foydalanib yasashni *aksonometriya* yoki *aksonometrik proyeksiyalash usuli* deyiladi. Aksonometriya so‘zi “o‘qlar bo‘yicha o‘lchash” degan ma’noni bildiradi. A_1A_2, A_1A_3 va A_1A_4 kesmalar aksonometrik birliklar, ularning uzunliklari esa o‘zgarish koeffisiyentlari deyiladi.

Aksonometrik proyeksiyalarning quyidagi turlari mavjud:

1. *Trimetrik proyeksiya.* Bunda barcha o‘zgarish koeffisiyentlari turlicha: $A_1A_2 \neq A_1A_3, A_1A_2 \neq A_2A_3$ va $A_1A_3 \neq A_2A_3$
2. *Dimetrik proyeksiya.* Ikkita o‘zgarish koeffisiyentlari o‘zaro teng bo‘lib uchinchisi ularga teng emas. Agar birinchi o‘zgarish koeffisiyenti ikkinchi va uchinchi koeffisiyentlarning yarmiga teng bo‘lib, koordinat to‘g‘ri chiziqlari orasidagi burchaklar $\angle A_3A_1A_4=90^0$, $\angle A_2A_1A_3=\angle A_2A_1A_4=135^0$ bo‘lsa bu proyeksiya xona proyeksiyasi deyiladi.
3. *Izometrik proyeksiya.* Barcha o‘zgarish koeffisiyentlari teng: $A_1A_2=A_1A_3=A_1A_4$. Agar yana qo‘shimcha ravishda koordinata o‘qlari orasidagi burchaklar $\angle A_3A_1A_4=90^0$, $\angle A_2A_1A_4 = \angle A_2A_1A_4=135^0$ bo‘lsa kavaleri proyeksiyasi deyiladi.

Endi aksonometrik proyeksiyalash usuli bilan yechiladigan masalalarni ko‘rib chiqamiz. Aksonometrik usulda masala yechishda tekislikda biror reperning tasviri berilgan deb hisoblaymiz. Nuqtaning tasviri va ikkinchi proyeksiyasi uning fazodagi vaziyatini to‘liq aniqlagani uchun tasvir tekisligida nuqtaning tasviri va uning ikkinchi proyeksiyalaridan biri berilgan bo‘lsa nuqtani berilgan hisoblaymiz. Berilgan nuqtalarni (A, A_3) yoki (M, M_1) va h.k. kabi belgilaymiz. Agar to‘g‘ri chiziqqa tegishli ikkita nuqtasi berilgan bo‘lsa, tekislikni esa bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtasi berilgan bo‘lsa berilgan deb hisoblaymiz.

Agar nuqtaning tasviri bilan bir qatorda uning ikkinchi proyeksiyalaridan biri berilgan bo‘lsa nuqtani berilgan deymiz. Nuqtaning qaysi koordinata



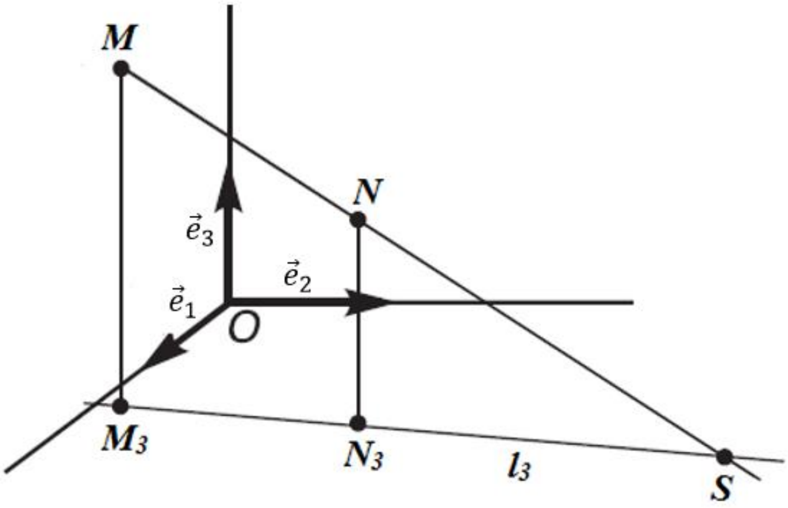
31-chizma

tekisligidagi ikkinchi proyeksiyasini berilganini farqi yoq, qolgan koordinata tekisliklaridagi ikkinchi proyeksiyalarini topish mumkin. Masalan (M, M_3) nuqta $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ tekislikdagi ikkinchi proyeksiyasi M_3 berilgan bo‘lsa koordinat siniq chizig‘ining M_x va M_y uchlarini aniqlash yetarli. M_2 ikkinchi proyeksiya M nuqtadan o‘tib $\vec{e}_2$ vektorga parallel to‘lgan to‘g‘ri chiziq va M_x nuqtadan o‘tib $\vec{e}_3$ vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasi sifatida aniqaladi. Xuddi shuningdek M_1 ikkinchi proyeksiyani xam yasash mumkin.

To‘g‘ri chiziqning koordinata tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning bu tekislikdagi *izi* deyiladi.

1-masala. To‘g‘ri chiziq o‘zining ikkita (M, M_3) va (N, N_3) nuqtalari bilan berilgan bo‘lsin. Uning $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinata tekisligidagi izini yasang.

Yechish. $l_3 = M_3N_3$ to‘g‘ri chiziqni qaraymiz. Bu to‘g‘ri chiziq $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinata tekisligida yotgani uchun MN to‘g‘ri chiziqning barcha ikkinchi proyeksiyalari bu to‘g‘ri chiziqda yotadi. Shuning uchun MN to‘g‘ri chiziqning



32-chizma

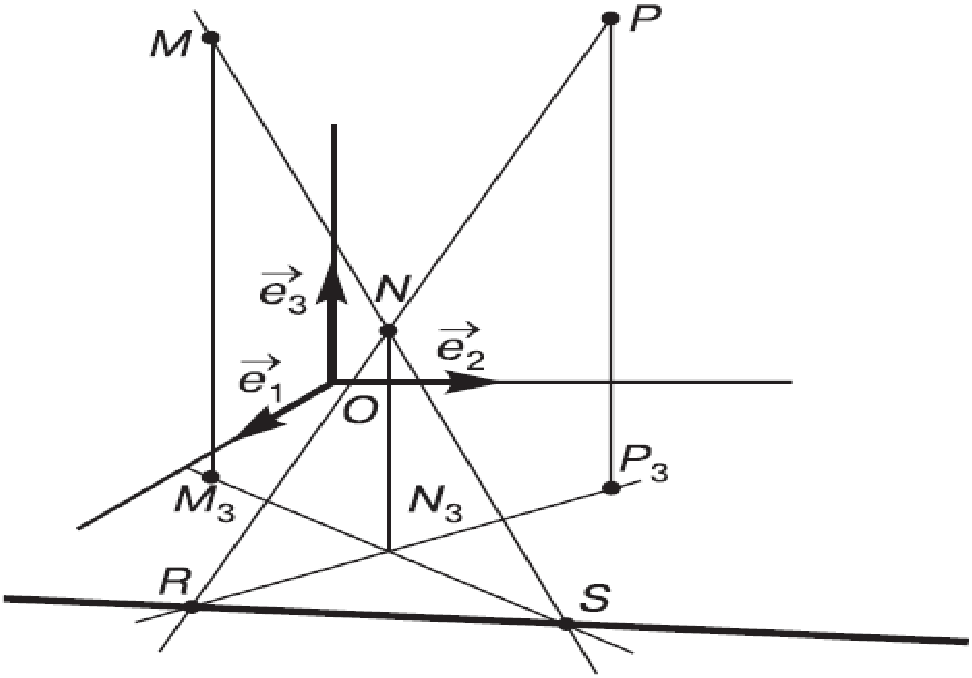
koordinata tekisligi bilan kesishgan *S* nuqtasi M_3N_3 to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘ladi. Demak *MN* va l_3 to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi bilan ustma ust tushadi.

$l_3= M_3N_3$ to‘g‘ri chiziqni *MN* to‘g‘ri chiziqning $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinata tekisligidagi ikkinchi proyeksiyasi deyiladi. Qolgan koordinata tekisligidagi ikkinchi proyeksiyalari ham shunday topiladi. Ravshanki agar tasviri va biror ikkinchi proyeksiyasi berilgan bo‘lsa to‘g‘ri chiziq aniqlangan xisoblanadi.

Tekislikning koordinata tekisligi bilan kesishgan to‘g‘ri chizig‘ining tasviriga uning tekislikning izi deyiladi.

2-masala. Tekislik o‘zining uchta (M, M_3), (N, N_3) va (P, P_3) nuqtalari orqali berilgan. Bu tekislikning $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinata tekisligidagi izini toping.

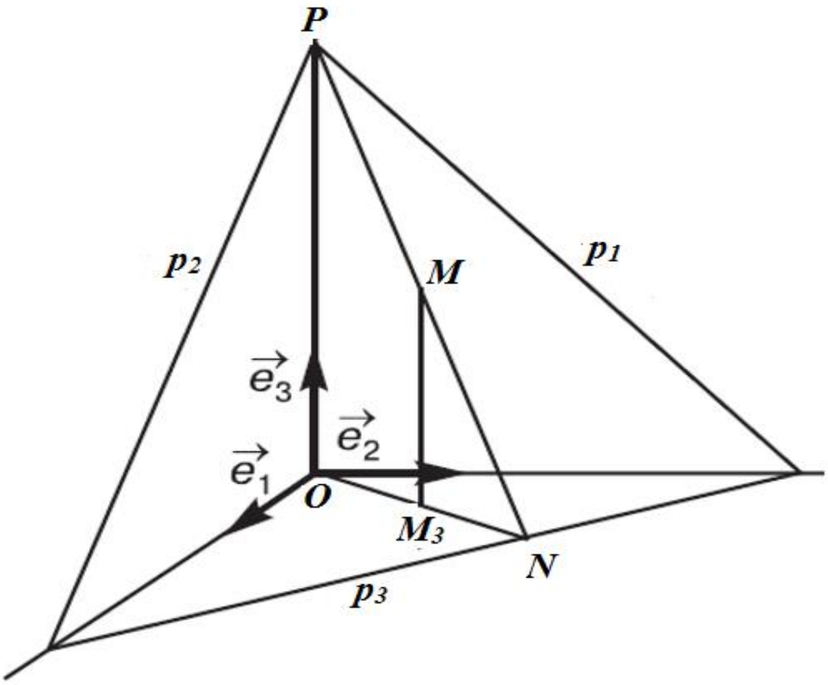
Yechish. 1- masalada ko‘rsatilgan usul bilan (M,M_3), (N, N_3) va (N, N_3), (P, P_3) to‘g‘ri chiziqlarnig izlarini aniqlaymiz. (M,M_3), (N, N_3) to‘gri chiziqlarning *S* – izi *MN* va M_3N_3 to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi bilan, (N, N_3), (P, P_3) to‘g‘ri chiziqlarning *R* izi esa *PN* va P_3N_3 to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi bilan ustma ust tushadi. *S* va *R* nuqtalarning obrazlari bir vaqtda berilgan tekislikka va $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ tekislikka tegishli bo‘lgani uchun *SR* to‘g‘ri chiziq izlangan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.



33-chizma

3- masala. π tekislik koordinat tekisliklaridagi p_1, p_2 va p_3 izlari bilan berilgan va *M* nuqta bu tekislikka tegishli. *M* nuqtaning ikkinchi proyeksiyasi M_3 ni yasang.

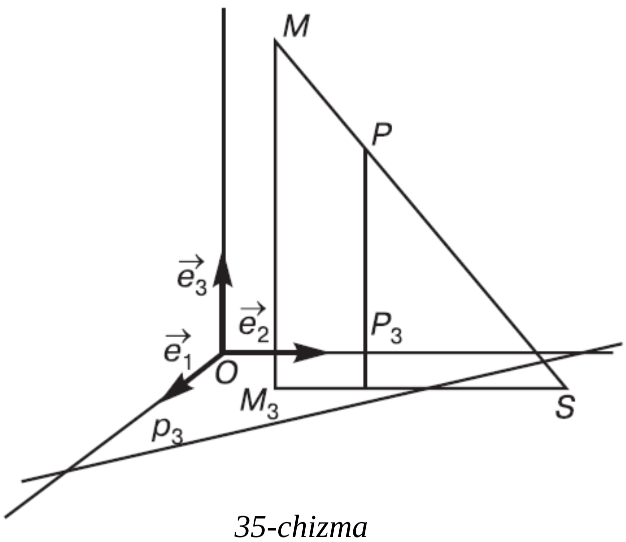
Yechish. π tekislikning $O\vec{e}_3$ koordinata o‘qi bilan kesishgan nuqtasi *P* nuqtani qaraymiz. *P* nuqta bu o‘qqa va p_2, p_3 izlarga tegishli bo‘ladi. *PM* to‘g‘ri chiziq π tekislikka tegishli. *N* nuqta bu to‘g‘ri chiziq va p_3 izning kesishgan nuqtasi bo‘lsin. *O* nuqta *P* nuqtaning $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinata tekisligidagi ikkinchi proyeksiyasi ekanligi va *N* nuqtaning ikkinchi proyeksiyasi o‘zi bilan ustma ust tushgani uchun *ON* to‘g‘ri chiziq *PN* to‘g‘ri chiziqning $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ tekisligidagi ikkinchi proyeksiyasi bo‘ladi. Endi izlangan nuqtani yasash uchun *M* nuqta orqali $O\vec{e}_3$ koordinata o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqning *ON* to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi izlangan M_3 nuqtani beradi.



34-chizma

4-masala. *(M, M₃)* nuqta va $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinata tekisligidagi izi p_3 to‘g‘ri chiziq, hamda *(P, P₃)* nuqtasi orqali aniqlangan tekislik berilgan. Berilgan nuqtani shu tekislikka tegishli yoki tegishli emasligini aniqlang.

Yechish. Agar *MP* to‘g‘ri chiziq berilgan tekislikka tegishli bo‘lsa va faqat shu holdagina berilgan nuqta tekislikka tegishli bo‘ladi. Demak MP to‘g‘ri



35-chizma

chiziqning izi berilgan tekislikninag p_3 izida yotishi kerak. 35–chizmada S nuqta MP to‘g‘ri chiziqning izi sifatida yasalgan. S nuqta MP va M_3P_3 to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi bilan ustma ust tushadi.

Bu berilgan holatda S nuqta p_3 to‘g‘ri chiziqqa tegishli emas, shuning uchun (M, M_3) nuqta berilgan tekislikka tegishli emas.

Mustahkamlash ushun savol va topshiriqlar

1. Fazoda affin reperi deganda nimani tushunasiz?
2. Koordinat siniq chizig‘i nima?
3. Nuqtaning fazodagi vaziyati qanday aniqlanadi?
4. Nuqtaning tasvir tekisligidagi vaziyati qanday parametrlarga bog‘liq?
5. Nuqtaning ikkinchi proyeksiyasi deganda nimani tushunasiz?
6. Aksonometrik proyeksiyalash usulini mohiyatini tushuntiring?
7. Aksonometriya so‘zini ma’nosi nima?
8. O‘zgarish koeffisiyentlari nima?
9. Trimetrik proyeksiya nima?
10. Dimetrik proyeksiya nima?
11. Izometrik proyeksiya nima?

2.3§ POLKE - SHVARTS TEOREMASI

Reja:

1. To‘liq to‘rt uchlik
2. Polke – Shvarts teoremasi
3. Fazo nuqtalarini tasvirlash

Bu teoremani ilk bor nemis olimi Karl Polke kashf etgan, so‘ngra uning shogirdi G. Shvars umumlashtirib uning sodda isbotini bergan. Shu sababli bu teoremani Polke – Shvarts teoremasi deb yuritadilar. K.Polkening ta’biricha:

tekislikda bir nuqtadan chiqqan har qanday uchta to ‘g‘ri chiziq kesmasini fazoda bir-biriga perpendikular bo‘lgan o‘zaro teng kesmalarning parallel proyeksiyalari deb qabul qilish mumkin. Demak, tekislikda bir nuqtadan chiqqan uchta ixtiyoriy nurlarni (bir - biri bilan ustma-ust tushmagan) aksonometriya o‘qlari deb qabul qilish mumkin. Shunday qilib, aksonometriyaning asosiy teoremasidan quyidagicha xulosaga kelinadi: aksonometrik proyeksiyani yasashda aksonometriya o‘qlari va masshtablari ixtiyoriy olinishi m um kin ekan. 1864-yilda nemis geometri G. Shvars bu teoremani uinumlashtirdi: *tekislikda yotgan har qanday to‘liq to‘rtburchakni (diagonallari bilan berilgan to‘rtburchak) ixtiyoriy olingan tetraedrga o‘xshash tetraedrning parallel proyeksiyasi deb qabul qilish mumkin*

Ta’rif. Har uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan to‘rtta nuqtalar va bu nuqtalarning har ikkitasi orqali o‘tuvchi oltita to‘g‘ri chiziqdan iborat figura to‘liq to‘rt uchlik (yoki to‘liq to‘rt burchak) deyiladi.

1-Teorema (Polke - Shvarts teoremasi). Har qanday to‘liq to‘rtburchakni ixtiyoriy tetraedrga o‘xshash tetraedrning parallel proyeksiyasi deb qarash mumkin.

Isbot. $A'B'C'D'$ tetraedr (tabiiy) va *ABCD* ixtiryoriy to‘liq to‘rtburchak berilgan. *E* - *ABCD* ixtiryoriy to‘liq to‘rtburchakning diagonallari kesishgan nuqtasi. $A'B'C'D'$ tetraedrning qarama qarshi qirralarida mos ravishda E_1' va E_2' nuqtalarni

$$\frac{A'E_1'}{E_1'C'} = \frac{AE}{EC}\,, \quad \frac{B'E_2'}{E_2'D'} = \frac{BE}{ED}$$

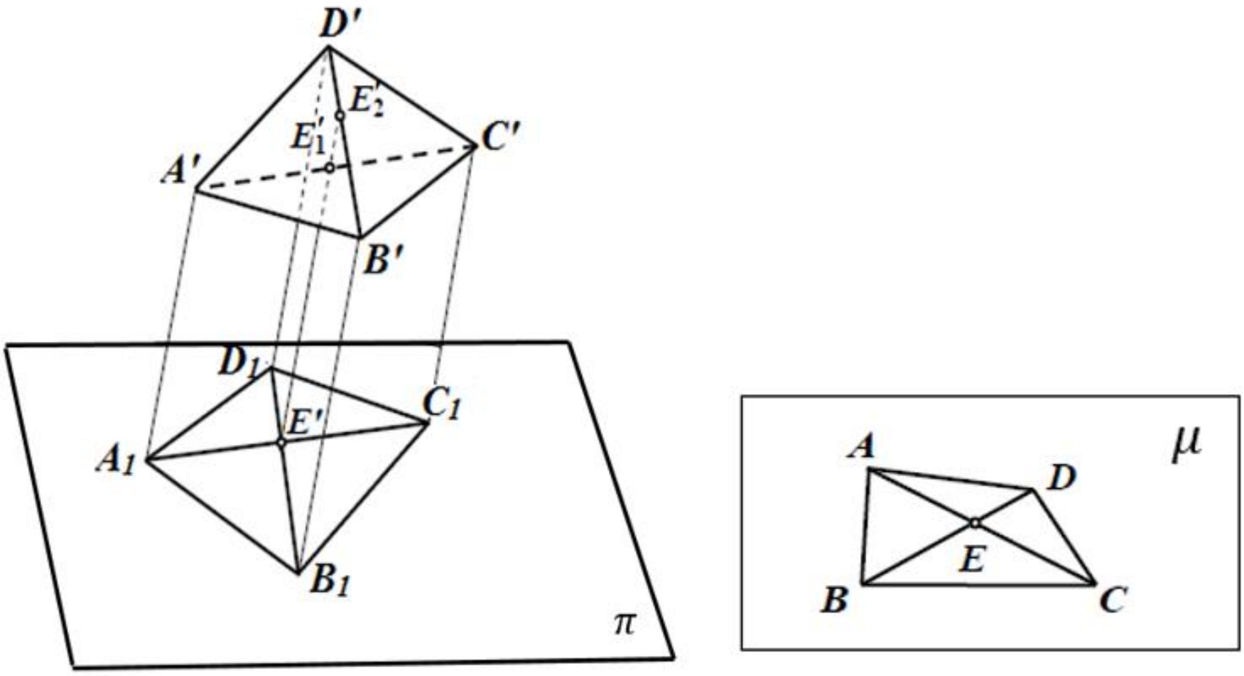
shartni qanoatlantiradigan qilib olamiz.

Parallel proyeksiyalash yo‘nalishini $E_1'E_2'$ to‘g‘ri chiziqqa parallel qilib tanlaymiz. $E_1'E_2'$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lmagan biror π tekislikni olamiz va unga $A'B'C'D'$ tetraedrni parallel proyeksiyalaymiz. Uning proyeksiyasi $A_1B_1C_1D_1$ to‘liq to‘rtburchak bo‘ladi, diagonallari kesishgan nuqtasi $E\,'$ bir vaqtning o‘zida E_1' va E_2' nuqtalarning obrazi bo‘ladi. Parallel proyeksiyalashda uchta nuqtaning oddiy nisbati saqlangani uchun

$$\frac{A'E_1'}{E_1'C'} = \frac{A_1E'}{E'C_1} = \frac{AE}{EC}\,, \quad \frac{B'E_2'}{E_2'D'} = \frac{B_1E'}{E'D_1} = \frac{BE}{ED}$$

munosabatlar o‘rinli.

Demak $A_1B_1C_1D_1$ to‘liq to‘rtburchak tetraedrning proyeksiyasi bo‘ladi.



36-chizma

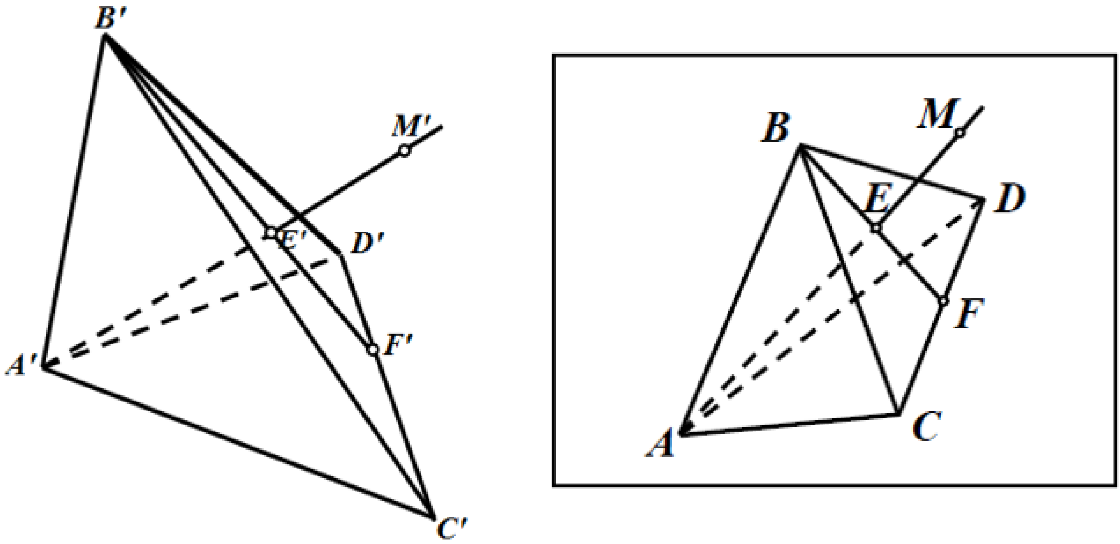
ABCD to‘liq to‘rtburchak 2.1-paragarafdagi 2- teoremaning natijasi shartlarini qanoatalantiradi. Shuning uchun *ABCD* to‘liq to‘rtburchak $A_1B_1C_1D_1$ to‘liq to‘rtburchakning, demak $A'B'C'D'$ tetraedrning ham tasviri bo‘la oladi. Teorema isbotlandi.

Polke –Shvars teoremasida aytilgan to‘rtburchak qavariq bo‘lishi shart emas.

2-Teorema. Agar $A'B'C'D'$ tetraedrning tasviri berilgan bo‘lsa u holda fozodagi ixtiyoriy nuqtaning tasvirini yasash mumkin.

Isbot. *ABCD* - to‘rtburchak $A'B'C'D'$ tetraedrning ham tasviri va M' fazoning ixtiryoriy nuqtasi bo‘lsin. Agar M' nuqta va $A'B'C'D'$ tetraedrning uchlari orqali to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazsak u holda bu to‘g‘ri chiziqlardan kamida bittasi uchiga qarama qarshi yog‘i tekisligini kesib o‘tadi.

Masalan, $A'M'$ to‘g‘ri chiziq $B'C'D'$ tekislikni E' nuqtada kesib o‘tsin. U holda $B'C'D'$ uchburchak uchlaridan va E' nuqtadan o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqlardan kamida bittasi bu uchburchak tomoni yotgan to‘gri chiziqni kesadi. Aytaylik, $B'E'$ to‘g‘ri chiziq $C'D'$ to‘g‘ri chiziqni F' nuqtada kesib o‘tsin.



37-chizma

Parallel proyeksiyalashda va o‘xshash almashtirishda bitta to‘g‘ri chiziqda yotuvchi uchta nuqtaning oddiy nisbati saqlangani uchun E' nuqtaning tasviri E nuqtani yasash mumkin. Haqiqatan ham, agar F' nuqta $C'D'$ kesmani $(C'D', F')$ nisbatda bo‘lsa u holda F nuqta CD kesmani shunday nisbatda bo‘ladi, ya’ni $(CD, F) = (C'D', F')$. Xuddi shunday E' nuqta $B'F'$ kesmani $(B'F', E')$ nisbatda bo‘lsa u holda E nuqta BF kesmani shunday nisbatda bo‘ladi, ya’ni $(BF, E) = (B'F', E')$. M nuqta AE to‘g‘ri chiziqda yotishi kerak va bu nuqtaning bu to‘g‘ri chiziqdagi vaziyati $(AE, M) = (A'E', M')$ munosabat orqali aniqlanadi. Topilgan uchta tengliklardan M nuqta bir qiymatli yasaladi. Teorema isbotlandi.

Mustahkamlash ushun savol va topshiriqlar

1. Qanday to‘rtburchakka to‘liq to‘rtburchak deyiladi?
2. Parallel proyeksiyalashda to‘liq to‘rtburchakning tasviri qanday figura bo‘ladi?
3. Polke - Shvars teoremasining mohiyati nimadan iborat?
4. Fazoviy figuralarni tasvirini yasash ketma ketligini keltiring.

5. Polke - Shvars teoremasidan foydalanib kubning tasvirini yasang.
6. Beshburchakli kesik piramida tasvirini yasang.

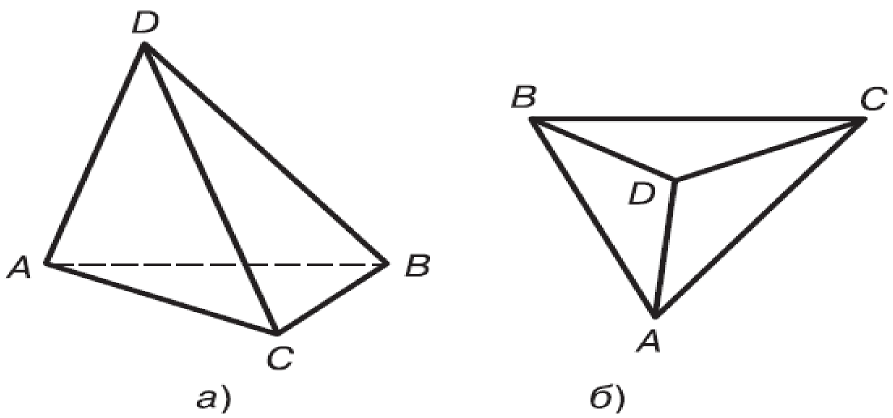
2.4§ PARALLEL PROYEKSIYALASH USULI BILAN KO‘PYOQLARNING TASVIRLARINI YASASH.

Reja:

1. Tetraedrning tasvirini yasash.
2. Parallelolipiped tasvirini yasash.
3. n – burchakli prizma tasvirini yasash.
4. n – burchakli piramida tasvirini yasash.

Tetraedrning tasvirini yasash.

Polke – Shvars teoremasiga ko‘ra har qanday to‘liq to‘rtburchakni ixtiyoriy tetraedrga o‘xshash tetraedrning parallel proyeksiyasi deb qarash mumkin. Tetraedrning yoqlari uchburchaklarga tasvirlanadi. 38–chizmada tetraedrning tasviri berilgan. E’tibor bersak 38- *a* chizmada tetraedr qavariq *ABCD* to‘rtburchak bilan *38- b* chizmada esa qavariq bo‘lmagan *ABCD* to‘rtburchak

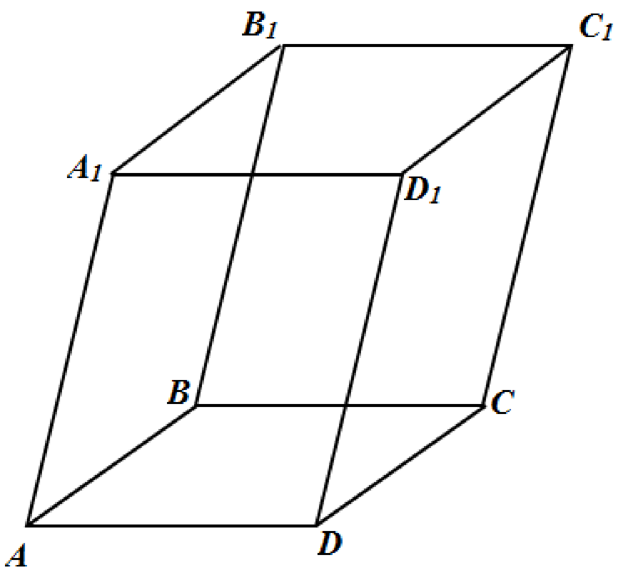


38-chizma

orqali tasvirlangan. Ikkala holatdayam *DC* va *AB* lar to‘rtburchakning diagonallari bo‘ladi.

Parallelolipiped tasvirini yasash.

Ma’lumki barcha parallelopipedlarning yoqlari parallelogrammlardan iborat bo‘ladi. Shuning uchun parallel proyeksiyalashning xossalaridan parallelopipedlarning yoqlari parallelogrammlarga tasvirlanadi. Bu tasdiq kub, to‘g‘ri burchaki parallelopipedlar uchun ham o‘rinli. Parallelopiped tasvirini yasash uchun uning bitta tekislikda yotmagan to‘rtta uchining (masalan A, B, D *va* A_1) tasvirining berilishi yetarli. Polke – Shvars teoremasiga ko‘ra bu nuqtalar tasvir tekisligidagi biror to‘rtburchakning uchlari bo‘ladi. Parallelopipedning qolgan uchlarini koordinatalari mos parallelogrammlarning uchlari sifatida yasaladi.

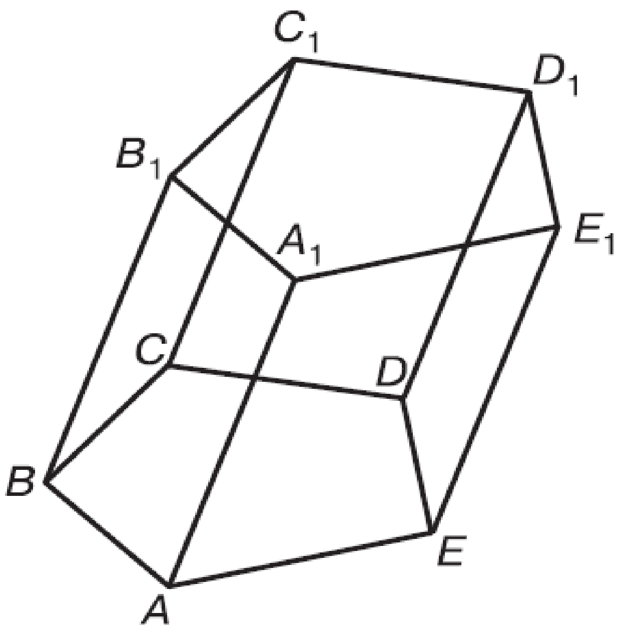


39-chizma

n – burchakli prizma tasvirini yasash.

n – burchakli prizmaning asoslari ikkita teng *n*-burchaklardan iborat bo‘lib yon yoqlari esa parallelogrammlardan. Misol sifatida besh burchakli $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ prizmani tasvirini yasashni qaraymiz. A, B, E va A_1 uchlari

Polke-Shvars teoremasiga ko‘ra biror to‘rtburchakning uchlariga tasvirlanadi. Prizma asosi *ABCDE* beshburchak o‘ziga affin ekvivalent bo‘lgan bechburchakka tasvirlanadi. Bu tasvirni yasashni 2.1- paragrafda ko‘rsatganmiz. Yon yoqlari parallelogrammlardan iborat bo‘lgani uchun ularning tasvirlari ham parallelogramm bo‘ladi. Bundan prizmaning yuqori asosi uchlari tasvirlarini yasash usuli ma’lum bo‘ladi. Prizmaning $A_1B_1C_1D_1E_1$ yuqori asosini tasvirini hosil qilish uchun pastki *ABCDE* asosining tasvirini $\overrightarrow{AA_1}$ vektor bo‘yicha parallel ko‘chiramiz.

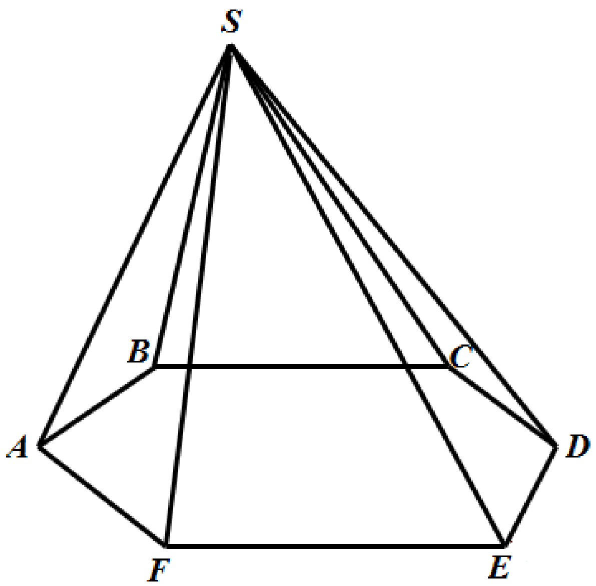


40-chizma

n – burchakli piramida tasvirini yasash.

n – burchakli piramidaning asosi *n*-burchakdan iborat, yon yoqlari esa uchburchaklardan iborat. Misol sifatida oltiburchakli *ABCDEF* piramidani tasvirini yasashni qaraymiz. Piramidaning *S, A, B, F* uchlari tekislikda ixtiyoriy to‘rtburchakning uchlariga tasvirlanadi. Oltiburchakning qolgan uchlarini tasvirlari

2.1-paragrafda keltirilgan n – burchaklarni yasash usulida yasaladi. Piramidaning yon yoqlari uchburchaklar bilan tasvirlanadi.



41-chizma

2.5§ PARALLEL PROYEKSIYALASH USULI BILAN SILINDR, KONUS VA SHARNING TASVIRLARINI YASASH

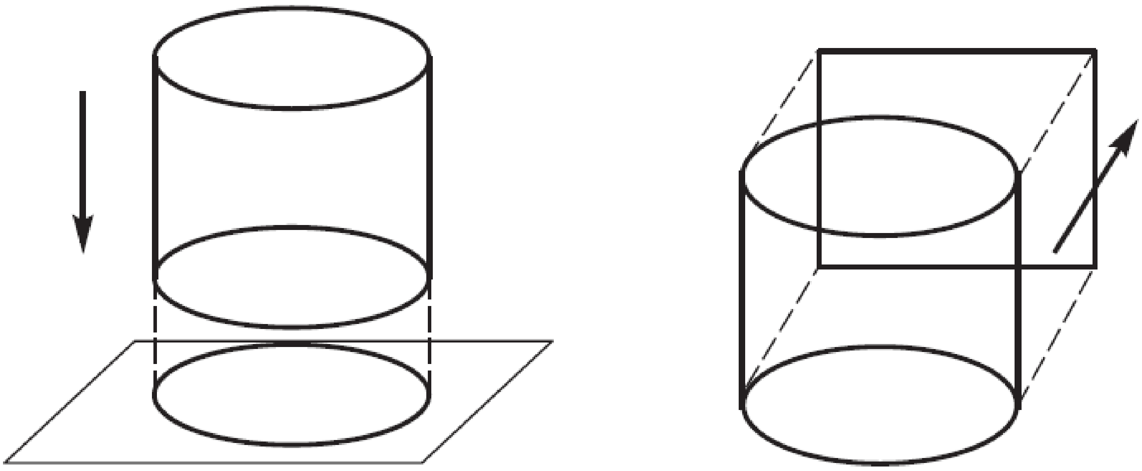
Reja:

1. Silindrning tasvirini yasash.
2. Konusning tasvirini yasash.
3. Sferaning tasviri yasash.

Silindrning tasvirini yasash.

Biz silindr deganda umumiy o‘rta ta’lim maktablari geometriya fanida o‘rganiladigan aylanma silindrni ya’ni to‘g‘ri to‘rtburchakni uning biror tomoni atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan fazoviy jismni tushunamiz. Tasvir tekisligi va parallel proyeksiyalash yo‘nalishining o‘zaro vaziyatiga bog‘liq holda silindrning tasviri ellips yoki parallelogramm bo‘lishi mumkin. Birinchi holat proyeksiyalash yo‘nalishi silidrning yasovchisiga parallel bo‘lgandi, ikkinchi holat esa asos tekisligiga parallel bo‘lganda yuz beradi.

Hususan, silindrning tasviri yoki aylana yoki to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘ladi. Yuqorida ko‘rilgan tasvirlar ko‘rgazmali emas va ulardan foydalanishga noqulay.

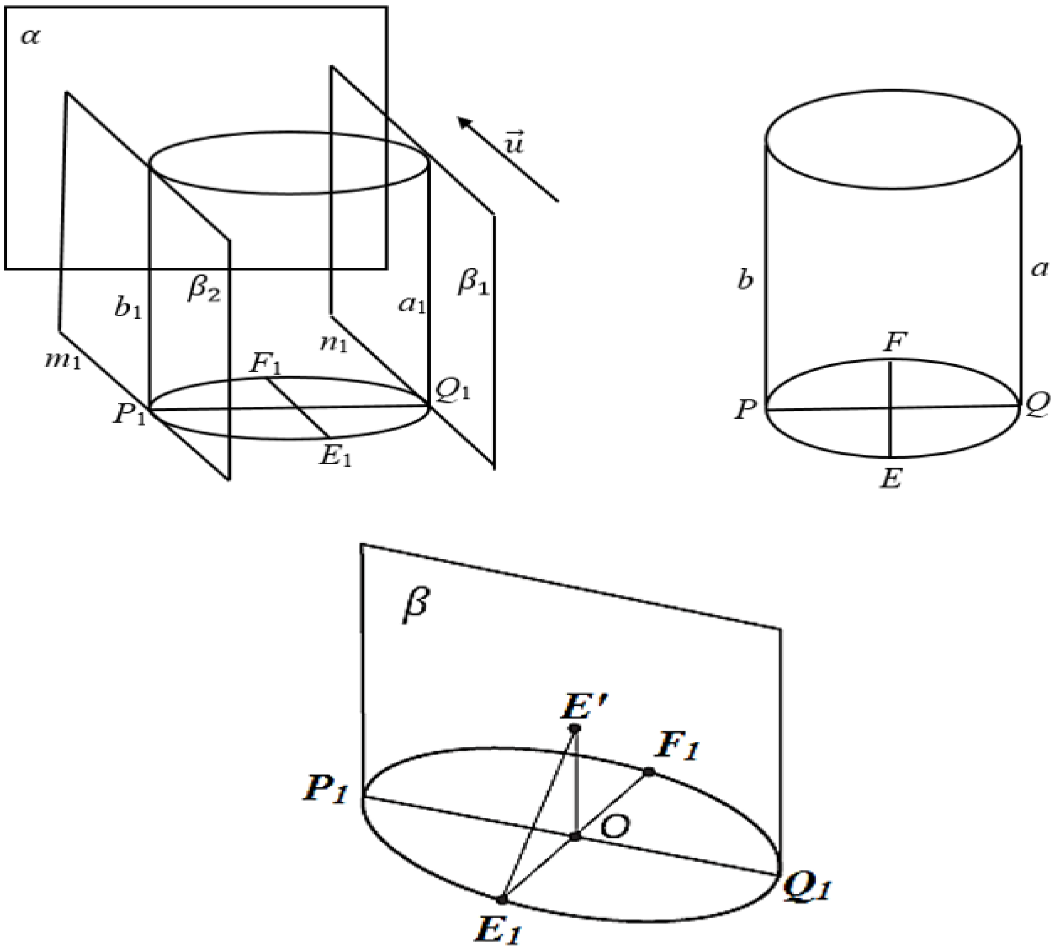


42-chizma

Shuning tasvir ko‘rgazmali bo‘lishi uchun fazoda tasvir tekisligini silindning yasovchisiga parallel, proyeksiyalash yo‘nalishi esa silindning o‘qi orqali o‘tuvchi tekislikka parallel va tasvir tekisligiga perpendikulyar qilib olingan deb faraz qilamiz. Bunda proyeksiyalash yo‘nalishi asos tekisligiga yoki yasovchisiga parallel emas. Fazoda silindr va tasvir tekisligi α berilgan bo‘lsin. Silindrning yon sirtiga urinuvchi va tasvir tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan β_1 va β_2 tekisliklarni qaraymiz. $\vec{u}$ vektor orqali aniqlangan proyeksiyalash yo‘nalishiga bu tekisliklar parallel bo‘ladi. β_1 va β_2 tekisliklar silindr yon sirtiga a_1 va b_1 yasovchilar bo‘yicha urinsin. Urinma tekisliklar va silindr asosi tekisligini kesishgan to‘g‘ri chiziqlarini n_1 va m_1 orqali, Q_1 va P_1 orqali mos ravishda n_1 va m_1 to‘g‘ri chiziqlarning pastki asos aylanasiga urinish nuqtalarini belgilaymiz. a_1 va b_1 yasovchilar kontur yasovchilari deyiladi. Q_1 va P_1 nuqtalar aylana diametrining uchlari bo‘lib, Q_1P_1 kesma tasvir tekisligiga parallel. E_1F_1 – pastki asos aylanasining

Q_1P_1 ga perpendikulyar diametri bo‘lsin. Papallel proyeksiyalashda silindr asoslari aylanalari ellipslarga tasvirlanadi. U holda ravshanki aylananing Q_1P_1 va E_1F_1 diametrlari ellipsning bosh diametrlari sifatida tasvirlanadi. β_1 va β_2 tekisliklar proyeksiyalash yo‘nalishiga parellel bo‘lgani uchun ularning tasvir tekisligidagi tasvirlari to‘g‘ri chiziqlar bo‘ladi. n_1 to‘g‘ri chiziq va a_1 kontur yasovchisi yotgan to‘g‘ri chiziqlar tasvir tekisligida bitta to‘g‘ri chiziqqa proyeksiyaladi. Huddi shuningdek b_1 kontur yasovchisi va m_1 to‘g‘ri chiziqning obrazlari ustma ust tushadi. a_1 va b_1 larning tasvirlarini a va b orqali belgilaymiz. n_1 va m_1 lar asos aylanasiga urinma bo‘lgani uchun a va b lar pastki asos tasvirining urinmalari bo‘ladi. Bu kesmalar yuqori asosi tasviriga ham urinmadir. Shunday qilib kontur yasovchilarining tasvirlari sinindr pastki va yuqori asoslarining tasvirlari bo‘lgan ellipslarini uchlarida urinadi.

Tasvir yetarli darajada ko‘rgazmali bo‘lishi uchun $\vec{u}$ – proyeksiyalash yo‘nalishini aniqlovchi vektorni shunday tanlash kerakki PQ diametr EF



43-chizma

diametrdan ikki marta katta bo‘lsin. Bu shart bajarilishi uchun proyeksiyalash yo‘nalishi qanday bo‘lishi kerakligini aniqlaymiz. Proyeksiyalar tekisligini pastki asosining markazi O nuqtadan o‘tguncha parallel ko‘chirib β tekislikni hosil qilamiz.

Bunda Q_1P_1 va E_1F_1 – asos aylanasining perpendikulyar diametrlari. E_1 nuqtani β tekislikka proyeksiyalab E' nuqtani hosil qilamiz. Ravshanki α tekislikka parallel proyeksiyalashda Q_1 va E' nuqtalar asos aylanasining obrazi bo‘lgan ellipsning uchlari bilan ustma ust tushadi. Parallel proyeksiyalashda nuqtalar orasidagi masofalar saqlangani uchun OE' va OQ_1 kesmalar tasvir tekisligidagi OE va OQ kesmalarga teng. Endi $OQ_1>OE'$ (1) tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan shartlarni aniqlaymiz. OE_1 va OQ_1 kesmalar silindr asosi aylanasining radiusi bilan ustma ust tushadi. Shuning uchun (1) tengsizlik $OE_1> OE'$ tengsizlikka teng kuchli. $OE'E_1$ uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lgani uchun $OE_1> OE'$ tengsizlik faqat proyeksiyalash yo‘nalishi va asos tekisligi orasidagi burchak 45^0 dan kichik bo‘lganda bajariladi.

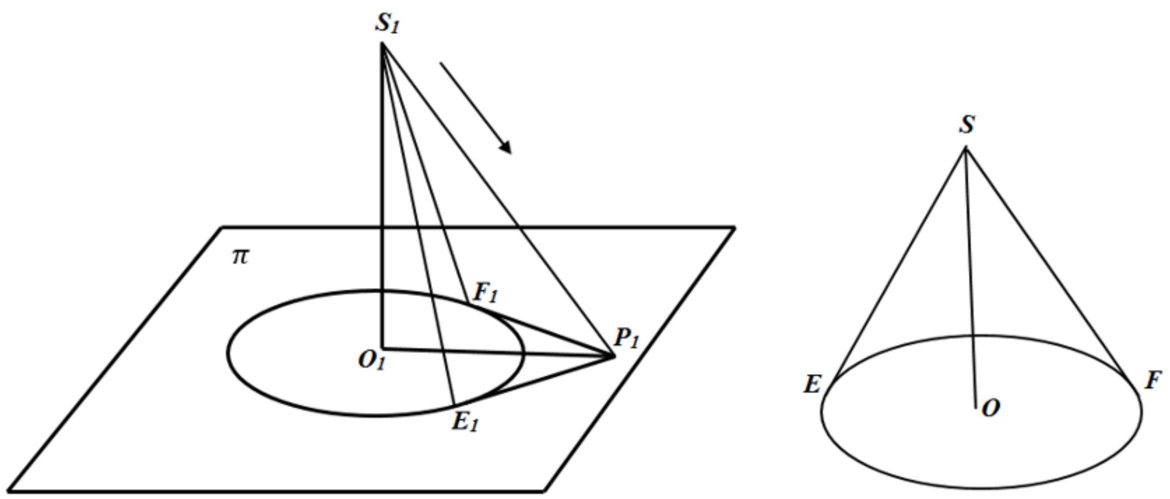
Konusning tasvirini yasash.

Biz konus deganda umumiy o‘rta ta’lim maktablari geometriya fanida o‘rganiladigan to‘g‘ri aylanma konusni ya’ni to‘g‘ri burchakli uchburchakni uning biror kateti atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan fazoviy jismni tushunamiz. Ravshanki konusning tasviri proyeksiyalash yo‘nalishiga va proyeksiyalar tekisligining vaziyatiga bog‘liq. Agar proyeksiyalash yo‘nalishi konus asos tekisligiga parallel bo‘lsa konusning tasviri uchburchakdan iborat bo‘ladi. Agar proyeksiyalar tekisligi konus asosi tekisligiga parallel bo‘lsa tasvirda ellips, ortogonal proyeksiyalashda esa aylana hosil bo‘ladi. Konusning tasviri ko‘rgazmali bo‘lishi uchun tasvir tekisligini konusning o‘qiga parallel, proyeksiyalash yo‘nalishini esa konus o‘qidan o‘tuvchi tekislikka parallel va tasvir tekisligiga perpendikulyar qilib olamiz. Bunda proyeksiyalash yo‘nalishi konus asosiga yoki yasovchisiga parallel emas.

Fazoda konus berilgan bo‘lsin. Proyeksiyalash yo‘nalishi va proyeksiyalar tekisligini yuqorida ko‘rsatilganday qilib tanlaymiz. Proyeksiyalash yo‘nalishi asos tekisligiga parellel bo‘lmagani uchun proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlar asos tekisligini kesib o‘tadi. Dastlab konusni asos tekisligiga proyeksiyalaymiz, so‘ngra hosil bo‘lgan yassi figurani tasvir tekisligiga proyeksiyalab berilgan konusning proyeksiyasini hosil qilamiz.

Konus uchi S_1 nuqtaning uning asosi yotgan π tekislikdagi proyeksiyasi P_1 bo‘lsin. P_1 nuqtadan konus asosi aylanasiga P_1E_1 va P_1F_1 urinmalar o‘tkazamiz. Konusning π tekislikdagi proyeksiyasi P_1E_1 , P_1F_1 kesmalar va asos aylanasining E_1F_1 yoyi bilan chegaralangan figura bo‘ladi. S_1E_1 va S_1F_1 yasovchilarni konusning kontur yasovchilari deyiladi.

π tekislikda hosil bo‘lgan figurani tasvir tekisligiga parallel proyeksiyalaganimizda asos aylanasi ellipsga tasvirlanadi. S_1E_1 va P_1E_1 kesmalar



44-chizma

proyeksiyalash yo‘nalishiga parallel bo‘lgan tekislikda yotgani uchun ular bitta SE kesma bilan tasvirlanadi. Shuningdek S_1F_1 va P_1F_1 kesmalarning tasvirlari ham ustma ust tushadi, ularning tasvirini SF orqali belgilaymiz. Konus asosi yotgan π tekislikdagi P_1E_1, P_1F_1 kesmalar asos aylanasiga urinma bo‘lgani uchun bu kesmalarning va kontur yasovchilarining tasvirlari asos aylanasining tasviri bo‘lgan ellipsga *S* (konus uchuning tasviri) nuqtadan o‘tkasilgan urinmalar bo‘ladi. Shunday qilib kontur yasovchilarining tasvirlariga konus asosini tasvirlovchi ellipsning yarim o‘qlarining oxirlari tegishli bo‘lmaydi, kontur yasovchilar ellipsga urinmalar bo‘ladi.

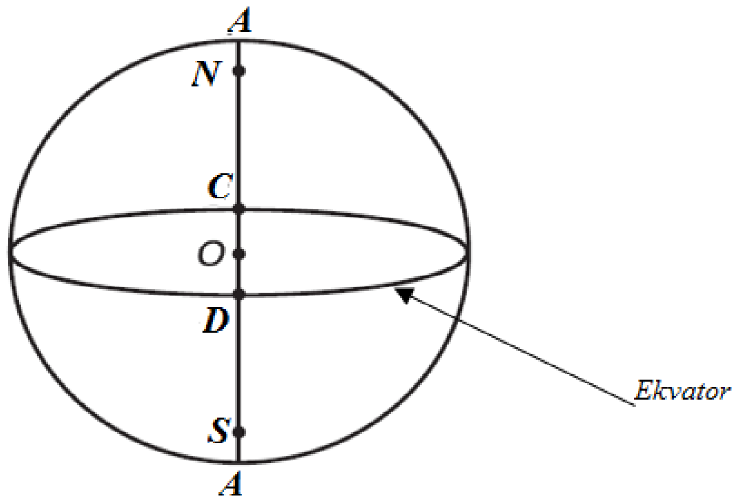
Konus tasviri yetarlicha ko‘rgazmali chiqishi uchun proyeksiyalash yo‘nalishi va asos tekisligi orasidagi burchak 45^0 dan kichik boishi kerak (isboti silindr holidagidek ko‘rsatiladi).

Sferaning tasviri yasash.

Fazoda *S* sfera berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik proyeksiyalash yo‘nalishi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lmasin. Sferaning har bir nuqtasidan proyeksiyalash yo‘nalishiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazsak aylanma silindrik sirt bilan chegaralangan fazoviy jism hosil bo‘ladi. Sirtning yasovchilari proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lmagani uchun ularning kesishmasida ellips hosil bo‘ladi. Shuning uchun bu holatda tasvirda ellipsga ega bo‘lamiz. Ravshanki bunday tasvir sfera uchun ko‘rgazmali bo‘lmaydi. Proyeksiyalash yo‘nalishi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lsa tasvirda aylana hosil bo‘ladi va tasvirda ko‘rgazmalilik ta’minlandi. Biz sferani tasvirlashda faqat ortogonal proyeksiyalashdan foydalanamiz.

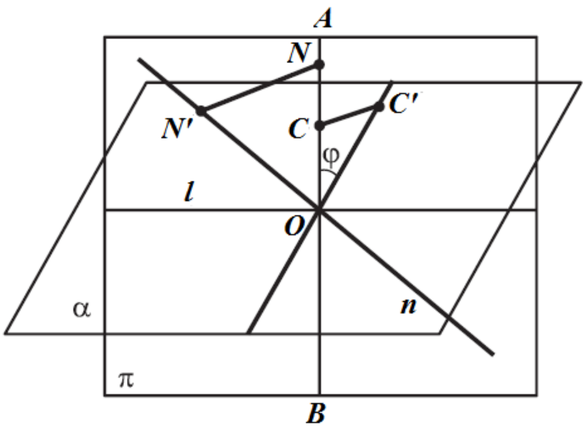
Ortogonal proyeksiyalashda sferaning tasviri aylana bo‘ladi. Sferaning markazidan o‘tib proyeksiyalash yo‘nalishigayam proyeksiyalar tekisligiga ham parallel bo‘lmagan tekislikni qaraymiz. Bu tekislik sferani aylana (sferani eng katta aylanasi) bo‘yicha kesadi va bu aylanani ekvator deyiladi. Sferani tasvirlashda ko‘rgazmali bo‘lishi uchun ekvator ham tasvirlanadi va u gorizontal holatda bo‘lishi kerak.

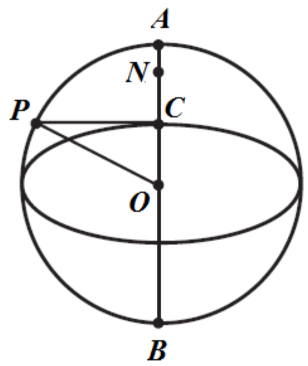
Sferaning markazidan ekvator tekisligiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq sferani mos ravishda sferaning shimoliy va janubiy qutblari deyiladigan ikkita nuqtada kesadi.



45-chizma

Sfera va uning biror ekvatorini tasviri berilgan bo‘lsin. Ekvatorning tasviri ellips bo‘lgani uchun ekvatorga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq bu ellipsning *CD* kichik yarim o‘qini o‘z ichida saqlaydi. Shuning uchun qutblarning *N* va *C* tasvirlari *CD* to‘g‘ri chiziqqa tegishli. Ravshanki bu nuqtalar *CD* to‘g‘ri chiziqning kontur aylanasi bilan kesishgan *A* va *B* nuqtalar bilan ustma ust tushmaydi. *ON* va *OC* (*O*-sfera markazi) kesmalar ularni yasashni osonlashtiradigan ajoyib xossaga ega. π - tasvir tekisligini sferaning markazidan o‘tadi deb olamiz. Ekvator yotgan tekislikni α orqali belgilaymiz. π va α tekisliklar *l* to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishsin, α tekislikning OC' to‘g‘ri chizig‘i sfera markazidan o‘tadi va *l* ga perpendikulyar, C'–





46-chizma

uning sfera bilan kesishgan nuqtasi, *AB* – sferaning π tekislikka tegishli va *l* ga perpendikulyar bo‘lgan diametri.

n- sferaning markazidan o‘tib ekvator tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘lsin. *n* to‘g‘ri chiziqning sfera bilan kesishish nuqtasini N' orqali belgilaymiz. Demak, N' nuqta ekvatorning qutbi bo‘ladi. OC', *OA* va ON' to‘g‘ri chiziqlar *l* ga perpendikulyar bo‘lgan bitta tekislikga tegishli bo‘ladi. C' va N' nuqtalarni π tekislikga proyeksiyalab *C* va *N* nuqtalarni hosil qilamiz. *C* va *N* nuqtalar *AB* diametrga tegishli bo‘ladi. C' nuqtadan o‘tuvchi ekvator dimetrining π tasvir tekisligidagi obrazi – ellipsning kichik yarim o‘qining uchi *C* nuqta bo‘ladi. π va α tekisliklar orasidagi burchakni φ orqali belgilaymiz. Yuqoridagilarga asosan $\varphi = \angle COC'$. COC' uchburchak to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘ladi, $\angle COC' = \frac{\pi}{2}$. Agar sfera radiusini r desak, u holda $OC' = r$ va $OC = r\cos\varphi$. N' qutbning π tasvir tekisligidagi proyeksiyasi *N* nuqtani qaraymiz. *ON* to‘g‘ri chiziq α tekislikka perpendikulyar bo‘lgani uchun $\angle NON' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. $\angle NN'O = \frac{\pi}{2}$ bo‘lgani uchun NON' - to‘g‘ri burchakli uchburchakdir va ON' = r bo‘ladi va shuning uchun $ON = ON'\cos\angle NON' = r\sin\varphi$. Endi sferaning tasvir tekisligidagi proyeksiyasini qaraymiz. Sfera ekvatorining proyeksiyasi bo‘lgan ellipsga C nuqtadan urinma o‘tkazamiz. Bu urinmaning kontur aylanasi bilan kesishgan nuqtasini *P* orqali belgilaymiz. *OCP* uchburchak to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘lib uning *OP* gipotenuzasi sferaning r radiusi bilan ustma ust tushadi.

$OC = r\cos\varphi$ dan $CN = r\sin\varphi$ bo‘ladi. Demak *ON*=*CP* tenglikka ega bo‘lamiz. Shunday qilib ekvatorning qutbini yasash uchun *AB* to‘g‘ri chiziqda aylananing *O* markazidan ekvatorning tasviri bo‘lgan ellipsga *CP* urinma kesmani qo‘yish yetarli ekan. Xuddi shunga o‘xhshash holda ikkinchi qutbning tasviri yasaladi.

Mustahkamlash ushun savol va topshiriqlar

1. Qanday holatlarda silindrning tasviri ellipsdan, qanday holatlarda parallelogrammdan iborat bo‘ladi?

2. Silindr tasviri ko‘rgazmali bo‘lishi uchun proyeksiyalash yo‘nalishini qanday tanlash kerak?
3. Qanday holatda konusning tasviri uchburchakdan iborat bo‘ladi?
4. Qanday holatda konusning tasviri ellips yoki aylanadan iborat bo‘ladi?
5. Sferani qanday proyeksiyalashda aylana hosil bo‘ladi?
6. Sferaning ekvatori nima va u qanday tasvirlanadi?
7. Sferaning shimoliy va janubiy qutblari tasvirlanadi?

2.6§ POZITSION MASALA. TO‘LA VA TO‘LA BO‘LMAGAN TASVIRLAR.

Reja:

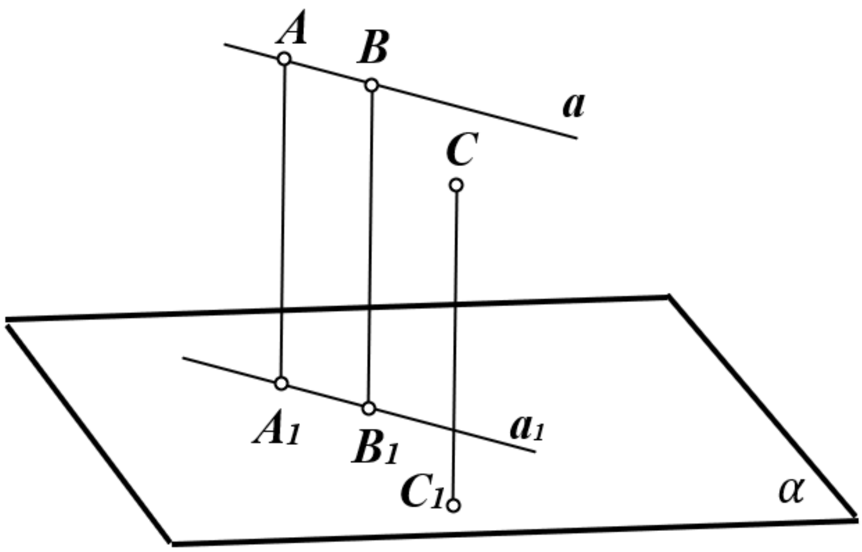
1. Pozitsion masala
2. To‘liq va noto‘liq tasvirlar
3. To‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishgan nuqtasini yasash
4. Ikkita tekislikning kesishgan to‘g‘ri chizig‘ini yasash
5. Fazoda ikkita kesishgan nuqtasini yasash

Fazoda birorta α' tekislikni ajratib, uni asosiy tekislik deb ataymiz. Biror yo‘nalishni tanlab olib, $A', B', C', \ldots$ fazo nuqtalarini α' tekislikka parallel proyeksiyalab, α' tekislikda $A_1', B_1', C_1', \ldots$ nuqtalarni hosil qilamiz. Bu proyeksiyalash ichki proyeksiyalash deb ataladi (ichki proyeksiyalash markaziy proyeksiyalash ham bo‘lishi mumkin).

Keyin rasm (tasvir) tekisligi deb ataluvchi tekislik olib, $A', B', C', \ldots$ proyeksiyalarini, $A'A_1', B'B_1', C'C_1', \ldots$ proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlarni biror yo‘nalish bo‘yicha biror tekislikka parallel proyeksiyalaymiz.

Natijada, rasm tekisligida 47-chizmada ko‘rsatilganidek tasvirlarga ega bo‘lamiz. Bu yerda α tekislik α' tekislikning, $A, B, C, \ldots$ nuqtalar $A', B', C', \ldots$ nuqtalarning,

$A_1, B_1, C_1, \ldots$ nuqtalar $A'_1, B'_1, C'_1, \ldots$ nuqtalarning, $AA_1, BB_1, CC_1, \ldots$ to‘g‘ri chiziqlar proyeksiyalovchi $A'A'_1, B'B'_1, C'C'_1, \ldots$ to‘g‘ri chiziqlarning tasvirlaridir.



47-chizma

$A_1, B_1, C_1, \ldots$ nuqtalarning $A, B, C, \ldots$ nuqtalarning ikkinchi proyeksiyalari (tasvirlari) deb aytiladi, ba’zi hollarda $A_1, B_1, C_1, \ldots$ nuqtalarni $A, B, C, \ldots$ nuqtalarning asoslari deb ham aytiladi.

Agar fazodagi birorta A' nuqtaning rasm tekisligidagi tasviri A va uning ikkinchi proyeksiyasi A_1 berilsa, nuqta rasm tekisligida berilgan deb aytiladi va $A(A_1)$ ko‘rinishda yoziladi.

Fazoda ikkita nuqtasi bilan aniqlangan $A'B' = a'$ to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin.

Agar rasm tekisligida $A(A)$ va $B(B)$ $(AB = a,\ A_1B_1 = a_1)$ lar berilgan bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq rasm tekisligida berilgan deb aytiladi va $a(a_1)$ ko‘rinishda yoziladi.

Fazodagi $F'_1,\ F'_2$ figuralarning rasm tekisligida $F_1,\ F_2$ tasvirlari berilgan bo‘lsin. $F'_1,\ F'_2$ figuralarning kesishish nuqtasining tasvirlarini yasash masalasi *pozitsion masala* deyiladi.

Har qanday pozision masala quyidagi uchta asosiy masalalarni hal qilishga keltiriladi:

1) *Berilgan ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni yasash;*
2) *Tekislik va to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasini yasash;*
3) *Ikkita tekislikning kesishgan to‘g‘ri chizig‘ini yasash.*

Agar figuraning har bir nuqtasi rasm tekisligida berilgan bo‘lsa, u holda bu figura tasvirini *to‘liq tasvir* deyiladi. Aks holda *noto‘liq tasvir* deyiladi.

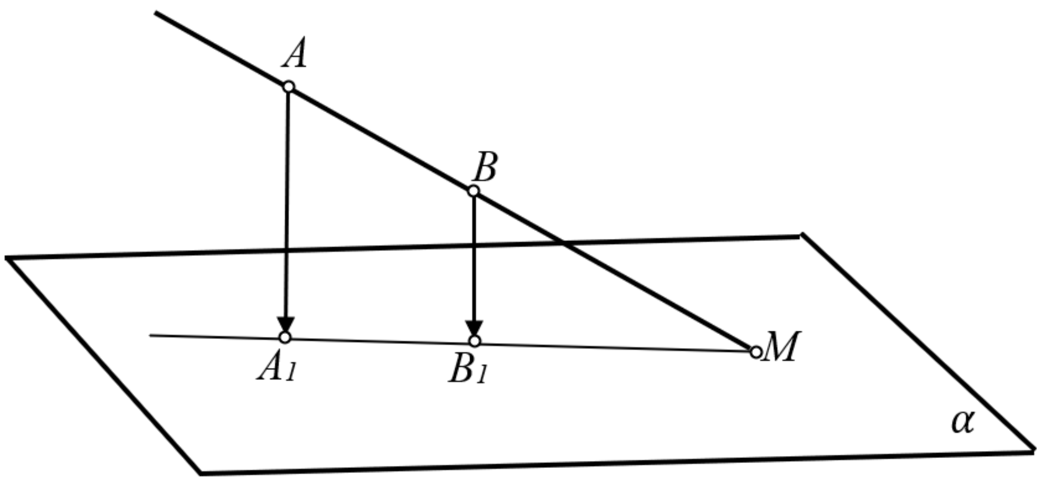
To‘liq tasvir ta’rifidan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1) yassi figuralarning tasviri hamma vaqt to‘liq;
2) agar tasvirning hamma elementlari aniqlangan bo‘lsa, tasvir to‘liq bo‘ladi;
3) to‘liq tasvirning ixtiyoriy ikki tekisligini asosiy tekisliklar deb olish mumkin.

Endi to‘liq tasvirlarda ba’zi pozision masalalarni yechishni ko‘rib chiqamiz.

1-masala. AB to‘g‘ri chiziqning α tekislik bilan kesishgan nuqtasini yasang.

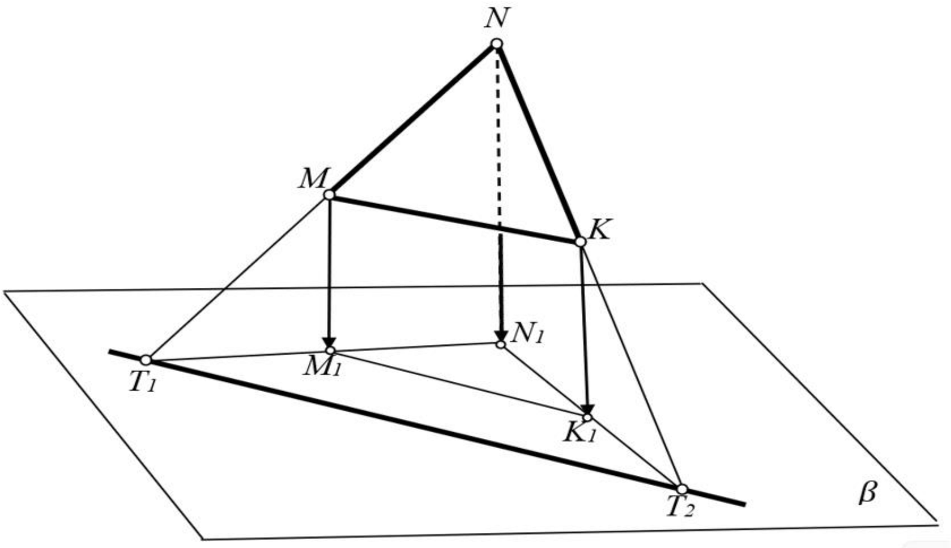
Yasash. AB to‘g‘ri chiziqni α tekislikka ortogonal proyeksiyalaymiz (A va B nuqtalarning proyeksiyalari A_1 va B_1 nuqtalar) va AB to‘g‘ri chiziq bilan uning A_1B_1 proyeksiyasi kesishgan M nuqta izlangan nuqta bo‘ladi (48-chizma).



48-chizma

2-masala. *MNK* tekislikning β tekislikdagi izini, ya'ni kesishgan to'g'ri chizig'ini yasang.

Yasash. *MNK* tekislikning β tekislik bilan kesishgan to'g'ri chizig'ini topish uchun 1-masalada ko'rsatilgan usulda *NM* va *NK* to'g'ri chiziqlarning β tekislik bilan

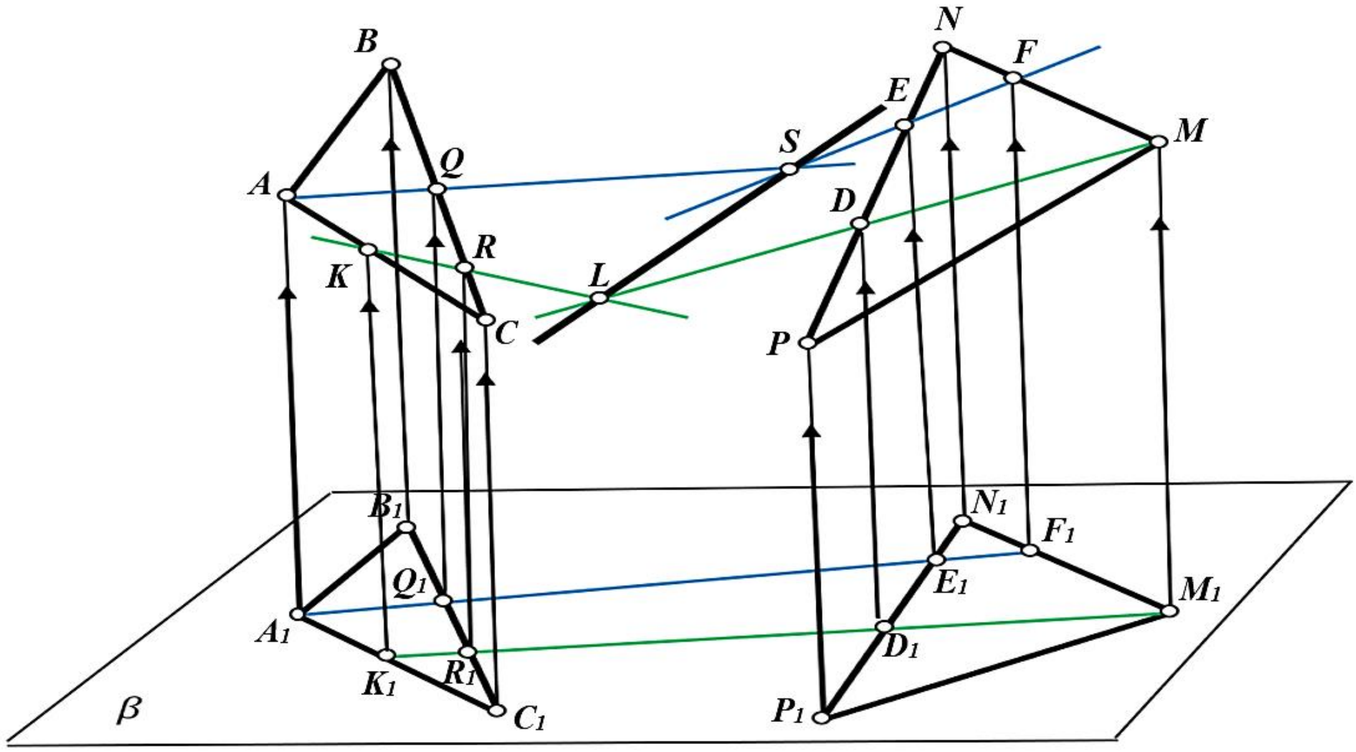


49-chizma

kesishgan nuqtalari T_1 (*NM* to'g'ri chiziqniki) va T_2 (*NK* to'g'ri chiziqniki) nuqtalar topib, izlangan T_1T_2 to'g'ri chiziqni yasaymiz (49-chizma).

3-masala. ABC va MNP tekisliklarning kesishgan chizig'ini yasang.

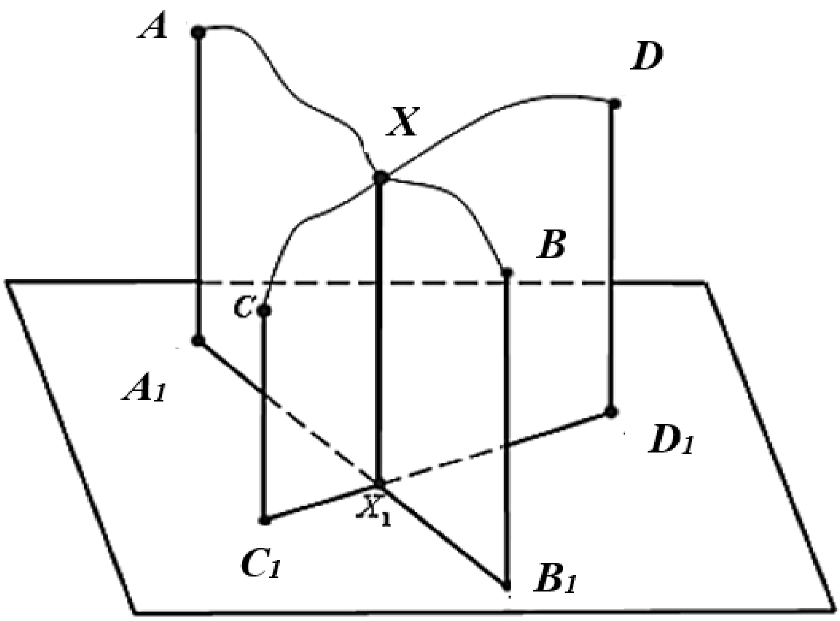
Ikkita tekisliklarning kesishgan to'g'ri chizig'ini yasash uchun bu umumiy to'g'ri chiziqqa tegishli ikkita nuqtani yasash yetarli. A, B, C va M, N, P nuqtalarning biror β tekislikdagi proyeksiyalari A_1, B_1, C_1 va M_1, N_1, P_1 bo'lsin. A_1 nuqta orqali B_1C_1, N_1P_1, M_1N_1 to'g'ri chiziqlarni mos ravishda Q_1, E_1, F_1 nuqtalarda kesadigan to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Bu nuqtalar mos ravishda BC, NP, MN to'g'ri chiziqlarda yotuvchi Q, E, F nuqtalarning asoslaridir. AQ va FE to'g'ri chiziqlar S nuqtada kesishadi (chunki u to'g'ri chiziqlar AA_1 va FF_1 to'g'ri chiziqlar yordamida aniqlangan tekislikda yotadi). S nuqta ABC va MNP tekisliklarning har ikkalasida yotadi. Shunga o'xshash M_1 nuqta orqali P_1N_1, B_1C_1 va A_1C_1 to'g'ri chiziqlarni mos ravishda D_1, R_1, K_1 nuqtalarda kesadigan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu nuqtalar mos ravishda PN, BC, AC to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi D, R, K nuqtalarning asoslaridir. MD va KR to‘g‘ri chiziqlar L nuqtada kesishadi. SL to‘g‘ri chiziq izlangan to‘g‘ri chiziqdir (50-chizma).



50-chizma

4-masala. Ikkita proyeksiyalovchi tekisliklarning kesishish chizig‘ini yasang.

Yasash. Tasvir tekisligida proyeksiyalovchi tekisliklardan biri proyeksiyalovchi AA_1 va BB_1 to‘g‘ri chiziqlar bilan, ikkinchisi esa CC_1 va DD_1 proyeksiyalovchi tog‘ri chiziqlar bilan aniqlangan bo‘lsin. Bu tekisliklarning A_1B_1 va C_1D_1 izlari X_1 nuqtada kesishsin. Bu nuqtadan proyeksiyalovchi XX_1 to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq berilgan tekisliklarning kesishgan nuqtasi bo‘ladi. Haqiqatan ham bu to‘g‘ri chiziq proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziq bo‘lganu uchu u AA_1 to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi. Demak bu tog‘ri chiziqlar bitta AA_1BB_1 tekislikda yotadi. Huddi shu sababdan ham CC_1DD_1 tekislikdayam yotadi. Shuning uchun XX_1 to‘g‘ri chiziq proyeksiyalovchi tekisliklarning izlangan kesishish to‘gri chizig‘i bo‘ladi.



51-chizma

Shunday qilib barcha pozision masalalar bir qiymatli yechiladi. Rasm tekisligida fazoviy figura elementlarining tasviri va ikkinchi proyeksiyasining (asosining) berilishi sharti yetarli shart bo‘lib qolmasdan, zaruriy shart ham ekanligini ko‘rish qiyin emas.

Mustahkamlash ushun savol va topshiriqlar

1. Pozitsion masala nima?
2. Qachon to‘g‘ri chiziq rasm tekisligida berilgan deb aytiladi?
3. Pozision masalalar qanday uchta asosiy masalalarni hal qilishga yo‘naltirilgan?
4. To‘liq tasvir va noto‘liq tasvir ta’riflarini keltiring.
5. To‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishgan nuqtasi qanday yasaladi?
6. Ikkita tekislikning kesishgan to‘g‘ri chizig‘ini yasang?
7. Fazoda ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasi qanday yasaladi?

2.7§ QAVARIQ KO‘PYOQLARNING KESIMLARINI YASASH

Reja:

1. Parallel to‘g‘ri chiziq va tekislikning xossalaridan foydalanib kesimlar yasash.
2. Kesim yasashning izlar usuli.
3. Kesim yasashning ichki proyeksiyalash usuli

Agar tekislikning ikkala tomonida ham berilgan ko‘pyoqqa tegishli nuqtalar mavjud bo‘lsa bu tekislik ko‘pyoq uchun kesuvchi tekislik deyiladi.

Ko‘pyoqning kesimi deb tomonlari kesuvchi tekislikning ko‘pyoq yoqlaridan ajratgan kesmalardan iborat bo‘lgan ko‘pburchakka aytiladi.

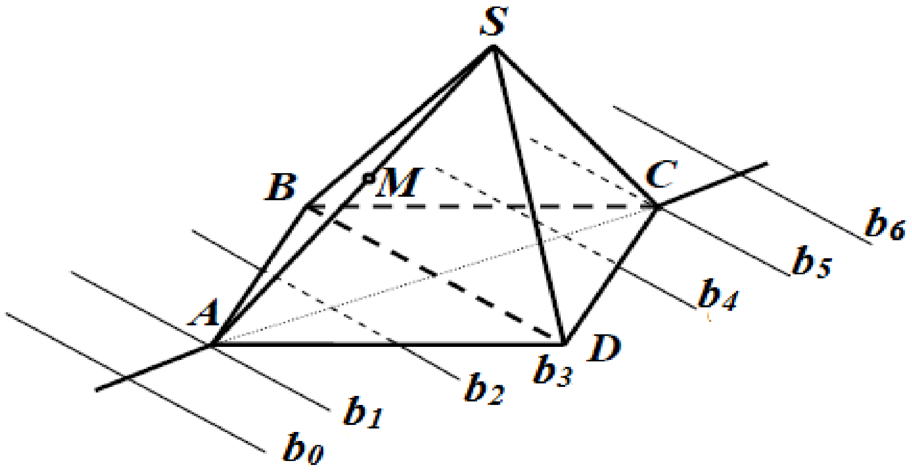
Ko‘pyoqlarning kesimlarini yasashning bir qancha usullari mavjud bo‘lib, biz ba’zilarini ko‘rib chiqamiz.

Parallel to‘g‘ri chiziq va tekislikning xossalaridan foydalanib kesimlar yasash.

Bu usuldan parallelopipedlarning tekislik bilan kesimlarini yasashda foydalaniladi va asosan parallel tekisliklarni uchinchi tekislik bilan kesishishi haqidagi teoremadan foydalaniladi. Ya’ni kesuvchi tekislik parallelopipedning qarama qarshi yoqlarini parallel to‘g‘ri chiziqlar kesmalari bo‘yicha kesadi. Quyida biz to‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik alomatidan foydalanib kesim yasash masalasini ko‘rib chiqamiz.

1-masala. $SABCD$ to‘rtburchakli piramidaning asosi parallellogrammdan iborat. Piramidaning AS yon qirrasida yotuvchi K nuqtadan o‘tib BD diagonaliga parallel bo‘lgan tekislik bilan kesimini yasang.

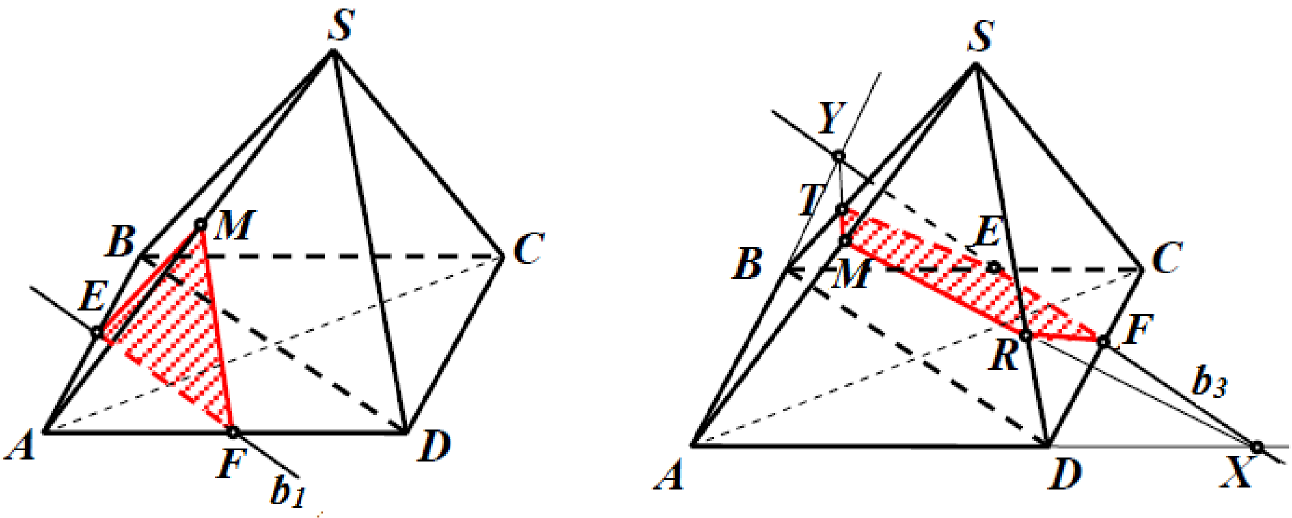
Yechish. Piramida asosi yotgan tekislikda BD diagonalga parallel bo‘lgan b to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. b to‘g‘ri chiziq va K nuqta orqali yagona α



52-chizma

tekislik o‘tadi. Yasashga ko‘ra $BD \parallel b$ bo‘lib, to‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik alomatiga ko‘ra $BD \parallel \alpha$. Shuning uchun α izlangan tekislik bo‘ladi. Piramida asosi yotgan tekislikda *BD* diagonalga parallel bo‘lgan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lgani uchun masala shartini qanoatlantiruvhci tekisliklar ham cheksizdir. To‘rtburchakli piramida beshta yoqqa ega bo‘lgani uchun uni α tekislik kesimida, uchburchak, to‘rtburchak va beshburchaklar hosil bo‘lishi mumkin.

53-chizmada b_1 to‘g‘ri chiziq piramida asosining *AD, AB* tomonlarini mos ravishda *E, F* nuqtalarda kesib *M* nuqta bilan *BSD* tekislikka nisbatan bitta yarim fazoda yotadi. Bu holatda kesim *EMF* uchburchakdan iborat bo‘ladi.



53-chizma

Yuqoridagi o‘ng tomondagi chizmada b_3 to‘g‘ri chiziq va M nuqta BSD tekislikka nisbatan turli yarim fazolarda yotgan vaziyat tasvirlangan bo‘lib bunda b_3 to‘g‘ri chiziq DC, BC tomonlarni mos ravishda E, F nuqtalarda kesadi. AD va b_3 to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasini X orqali belgilaymiz. AD to‘g‘ri chiziq ASD yoq tekisligida yotgani uchun X nuqta ham bu tekislikka tegishli bo‘ladi. Shuningdek X nuqta b_3 to‘g‘ri chiziqqa ham tegishli. Shuning uchun MX to‘g‘ri chiziq kesuvchi tekislik va ASD yoq tekisligining kesishish to‘g‘ri chizig‘i bo‘ladi. Bundan $R = SD \cap MX$ nuqtani topamiz. Xuddi shunga o‘xshash $Y = AB \cap b_3$ nuqtadan foydalanib izlanayotgan kesimning $T \in BS$ uchi yasaladi. Biz ko‘rib chiqqan holatda kesuvchi tekislik piramidaning barcha qirralarini kesadi.

b to‘g‘ri chiziq va piramida asosidagi parallelogramning o‘zaro joylashuvidagi qolgan holatlarni mustaqil ko‘rib chiqing.

Endi kesimlar yasashning maxsus usullarini ko‘rib chiqamiz.

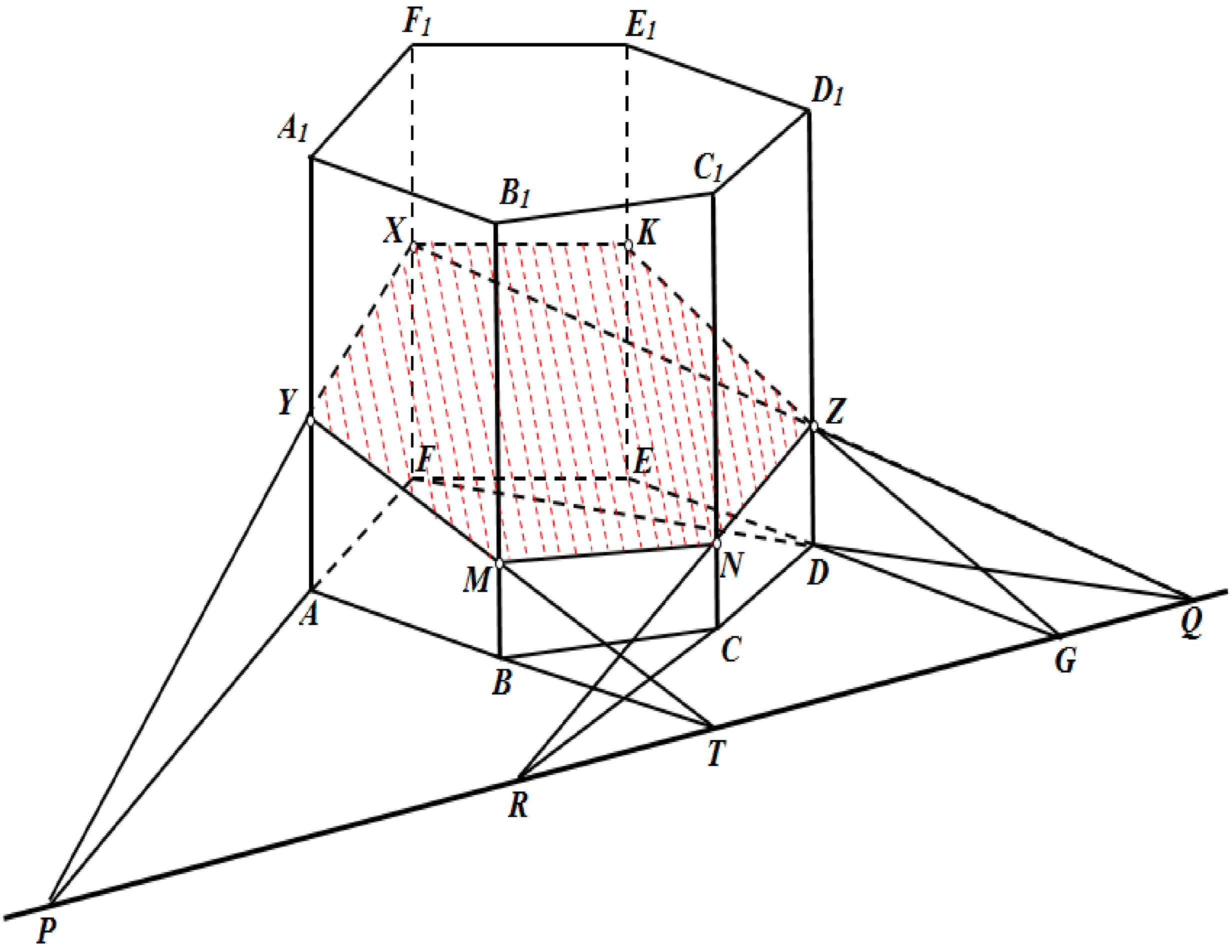
Kesim yasashning izlar usuli.

Kesuvchi tekislikning ko‘pyoq yog‘i yotgan tekislik bilan kesishish to‘g‘ri chizig‘i *kesuvchi tekislikning bu yoq tekisligidagi izi deyiladi*.

Ko‘pyoqlarning tekislik bilan kesimlarini izlar usuli bilan yasaganda dastlab kesuvchi tekislikning uning yoqlaridagi izlari yasaladi. Prizma va kesik piramidalarda kesim yasaganda kesuvchi tekislikning pastki asosdagi izidan, piramidada esa asosidagi izidan foydalaniladi.

2-masala. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ oltiburchakli prizma tasviri berilgan. Prizmaning uchta yon FF_1, AA_1 va DD_1 qirralariga mos ravishda tegishli bo‘lgan uchta ixtiyoriy ravishda olingan X, Y va Z nuqtalardan o‘tuvchi tekislik bilan kesimini yasang.

Yechish. X, Y va Z nuqtalarni mos ravishda prizmaning FF_1, AA_1 va DD_1 qirralarida belgilaymiz. Dastlab kesuvchi tekislikning prizmaning pastdagi asosi yotgan tekislik bilan kesishish to‘g‘ri chizig‘ini, yani kesuvchi tekislikning izini yasaymiz. Buning uchun $XY \cap FA = P$ (*XY va FA to‘g‘ri chiziqlar bitta tekislikda* *yotadi)* va $XZ \cap FD = Q$ (*XZ va FD to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi)* nuqtalarni yasab, so'ngra PQ to'g'ri chiziq - kesuvchi tekislikning izini yasaymiz. Ravshanki kesuvchi tekislikda yotuvchi to'g'ri chiziqlar asosiy tekislikni PQ to'g'ri chiziq bo'ylab kesadi. AA_1B_1B yoqda yotuvchi AB to'g'ri chiziq PQ izni biror T nuqtada kesadi, shuning uchun YT to'g'ri chiziq bir vaqtda ham kesim tekisligida ham AA_1B_1B yoq tekisligida yotadi. Endi $M = YT \cap BB_1$ nuqtani yasaymiz. YM kesma kesimda hosil bo'ladigan ko'pburchak tomoni bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash holda quyidagi yasashlarni bajaramiz: $CD \cap PQ = R$, $N = ZR \cap CC_1$ va



54-chizma

$G = ED \cap PQ$, $K = GZ \cap EE_1$. So'ngra MN, NZ, ZK, KX kesmalarni yasaymiz, bu kesmalar kesimda hosil bo'lgan ko'pburchakning tomonlari bo'ladi. Demak prizma bilan tekislikning kesimida *XYMNZK* oltiburchak hosil bo'ladi.

Kesimda qanday shakl hosil bo'lishi nuqtalarning qirralarda joylashish holatlariga bog'liq bo'ladi.

3-masala. $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ beshburchakli prizma tasviri berilgan. Prizmaning uchta yon yoqlarida ixtiyoriy ravishda olingan L, M va N nuqtalardan o'tuvchi tekislik bilan kesimini yasang.

Yechish. Asosiy tekislik sifatida prizmaning $ABCDE$ pastki asosidan o'tuvchi tekislikni olamiz. Kesim tekisligining asosiy tekislik bilan kesishgan izini topish uchun dastlab kesuvchi tekislikka tegishli bo'lgan LM va MN to'g'ri chiziqlarning asosiy tekislikdagi *izlarini* topamiz. Buning uchun LM va MN to'g'ri chiziqlar orqali prizmaning qirrasiga parallel tekisliklar o'tkazib bu tekisliklarning pastdagi asos tomonlari bilan kesishgan L_1, M_1 va N_1 nuqtalarni topamiz $(LL_1 \| MM_1 \| NN_1 \| AA_1)$. LM va MN to'g'ri chiziqlarning asosiy tekislikdagi *izlari* oson topiladi: $Q = LM \cap L_1M_1$ va $P = MN \cap M_1N_1$.

So'ngra PQ to'g'ri chiziqni, yani kesuvchi tekislikning asosiy tekislikdagi izini topamiz. Kesuvchi tekislikning prizma qirralari bilan kesishgan nuqtalarini yasashni quyidagi ketma ketlikda bajaramiz:

1. $G = AB \cap PQ$ – PQ to'g'ri chiziqning AA_1B_1B yoq tekisligi bilan kesishgan nuqtasi;

2. $Y = GL \cap AA_1$ – kesuvchi tekislikning AA_1 qirra bilan kesishgan nuqtasi;

3. $Z = GL \cap BB_1$- kesuvchi tekislikning BB_1 qirra bilan kesishgan nuqtasi;

4. $K = DC \cap PQ$ nuqtani yasaymiz;

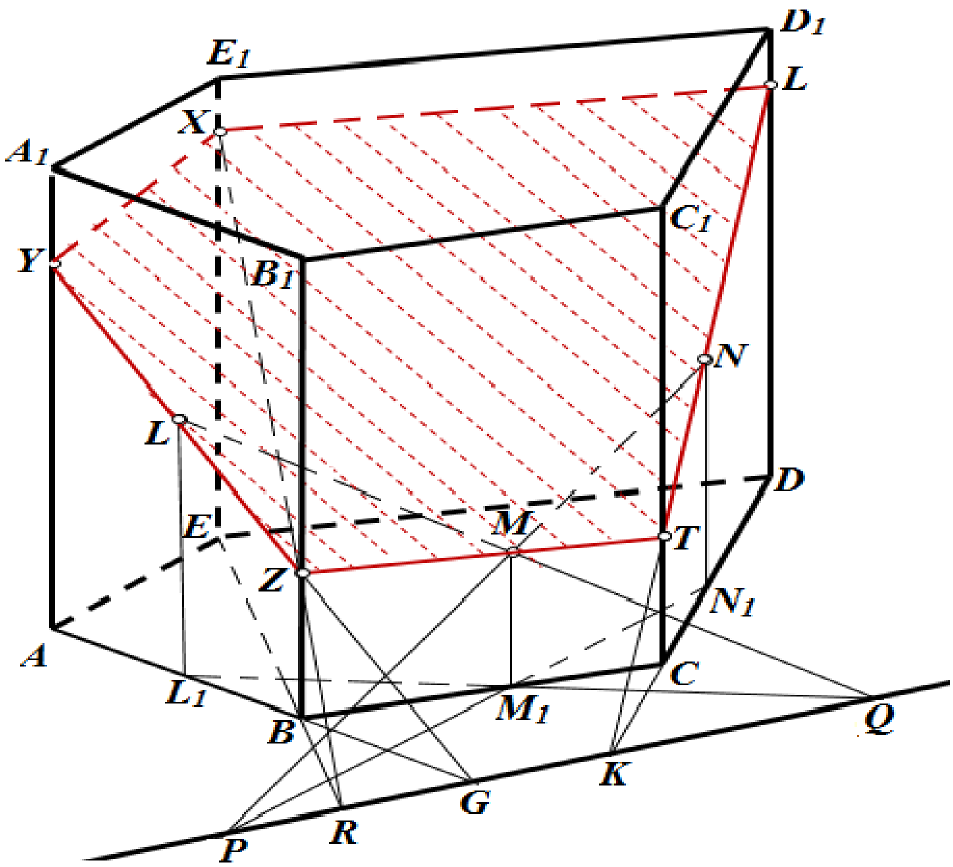
5. $T = KN \cap CC_1$- kesuvchi tekislikning CC_1 qirra bilan kesishgan nuqtasi;

6. $L = KN \cap DD_1$- kesuvchi tekislikning DD_1 qirra bilan kesishgan nuqtasi;

7. $R = EB \cap PQ$ nuqtani yasaymiz;

8. $X = RZ \cap EE_1$ - kesuvchi tekislikning EE_1 qirra bilan kesishgan nuqtasi;

9. *XY*, *ZT*, *LX* kesmalarni yasaymiz



55-chizma

Demak izlangan kesim *XYZTL* – beshburchak hosil bo‘ldi.

4-masala. *SABCDEF* oltiburchakli piramidaning tasviri berilgan. Uning *SAF* yog‘ida *X* nuqta, *SC* va *SD* qurralarida mos ravishda *Y* va *Z* nuqtalar berilgan. Shu nuqtalardan o‘tuvchi tekislikning piramida bilan kesishimini yasang.

Yechish. *X*, *Y* va *Z* nuqtalarni *S* markazdan ichki markaziy proyeksiyalaymiz. Bu nuqtalarning piramida asosidagi proyeksiyalari mos ravishda X_1, *C* va *D* nuqtalar bo‘ladi. SCD tekislikda yotuvchi YZ va CD to‘g‘ri chiziqlar umumiy holda biror P nuqtada kesishadi va bu nuqta kesuvchi tekislikda yotadi. Boshqa tomondan P nuqta piramida asosi yotgan tekislikka ham tegishli bo‘ladi. Demak P nuqta kesuvchi tekislikning asos tekisligidagi *iziga* tegishli bo‘ladi. Endi SX_1C tekislikda yotuvchi XY va X_1C to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi Q nuqtani topamiz. Bu nuqta ham kesuvchi tekislikning asos tekisligidagi *iziga* tegishli bo‘ladi. P va Q nuqtalar yasalgandan keyin kesuvchi tekislikning asos tekisligi bilan kesishgan izi bo‘lgan PQ to‘g‘ri chiziqni yasaymiz.

Endi kesuvchi tekislikning piramida qirralari bilan kesishgan nuqtalarini yasash quyidagi ketma ketlikda olib boriladi:

1. $T = CE \cap PQ$ – PQ to‘g‘ri chiziqning SCE yoq tekisligi bilan kesishgan nuqtasi;

2. $K = TY \cap SE$ – kesuvchi tekislikning SE qirra bilan kesishgan nuqtasi;

3. $G = EB \cap PQ$ – kesuvchi tekislikning SBE yoq tekisligi bilan kesishgan nuqtasi;

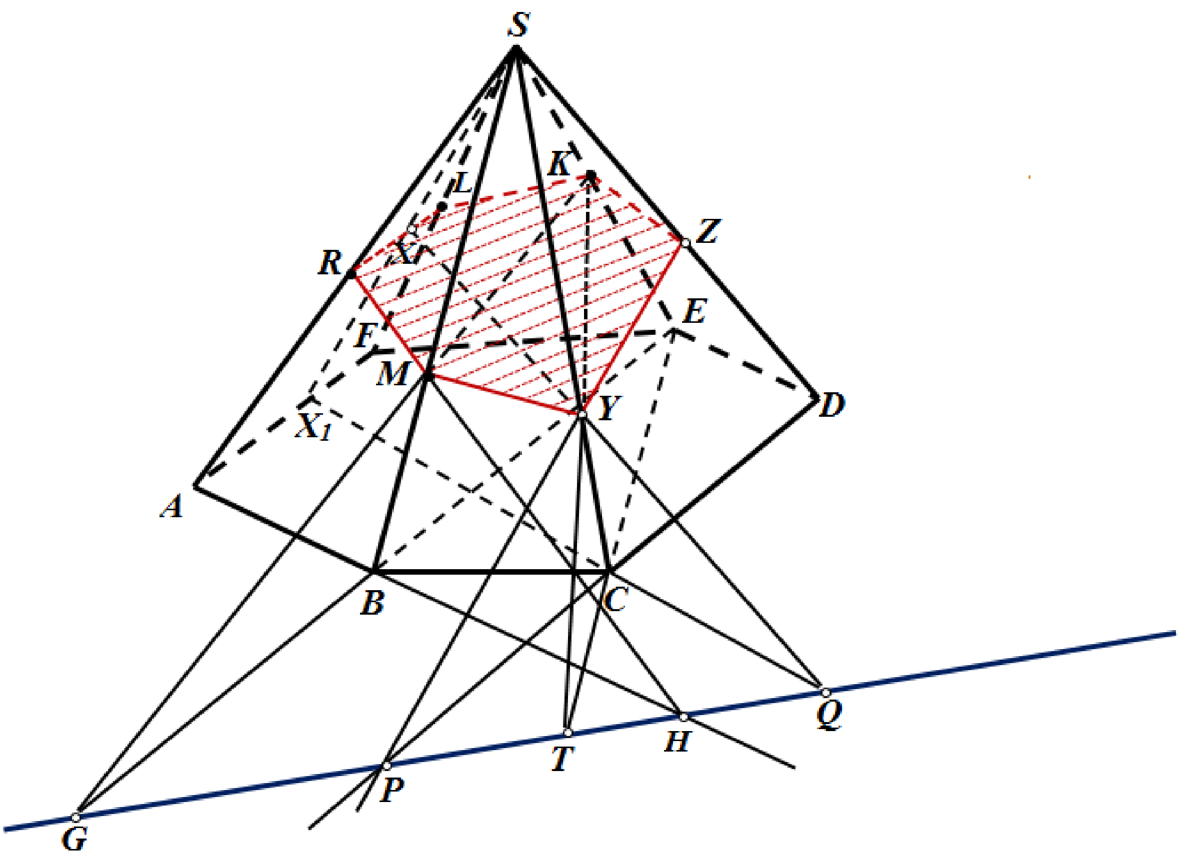
4. $M = KG \cap SB$ – kesuvchi tekislikning SB qirra bilan kesishgan nuqtasi;

5. $H = AB \cap PQ$ – kesuvchi tekislikning SAB yoq tekisligi bilan kesishgan nuqtasi;

6. $R = HM \cap SA$ – kesuvchi tekislikning SA qirra bilan kesishgan nuqtasi;

7. $L = RX \cap SF$ – kesuvchi tekislikning SF qirra bilan kesishgan nuqtasi;

8. KL, KZ, MY kesmalarni yasaymiz.



56-chizma

Demak kesimda *KLRMYZ* – oltiburchak hosil bo‘ldi.

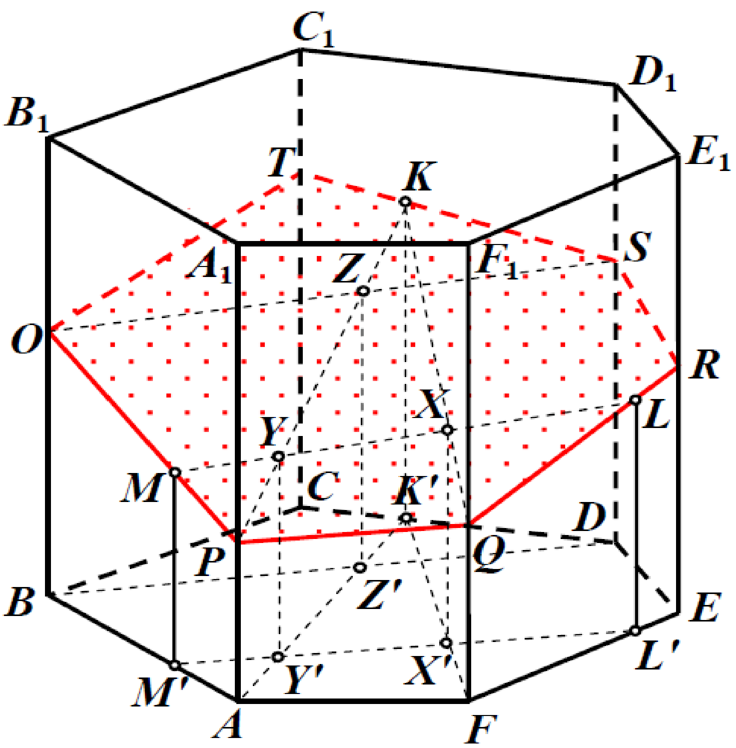
Kesim yasashning ichki proyeksiyalash usuli

Ichki proyeksiyalash usuli asosida izlanayotgan kesim nuqtalarini ularning ikkinchi proyeksiyalari yordamida topish yotadi. Biz yuqorida ko‘rib chiqqan izlar usulidan foydalanganimizda kesuvchi tekislikning izi berilgan figuradan uzoqda joylashgan holatlar yoki xususan asosdagi ko‘pburchak tomonlarini o‘z ichiga oluvchi to‘g‘ri chiziqlar kesuvchi tekislik izi bilan chizmadan tashqarida kesishadigan holatlar ham bo‘ladi. Bunday vaziyatlarda ichki proyeksiyalash usulidan foydalanish qulay. Ichki proyeksiyalash usulining mohiyatini quyidagi masalalarda ko‘rib chiqamiz.

5-masala. Oltiburchakli prizma va har ikkitasi o‘zaro qo‘shni bo‘lmagan uchta yon yog‘ida yoruvchi uchta nuqtaning tasviri berilgan. Bu uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik bilan prizmaning kesimini yasang.

Yechish. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ oltiburchakning ABB_1A_1, EFF_1E_1, CDD_1C_1 yoqlarida mos ravishda M, L, K nuqtalar berilgan. M, L, K nuqtalarning ikkinchi proyeksiyalari - M', L', K' nuqtalar bo‘lsin.

Kesuvchi tekislikning FF_1 qirra bilan kesishgan nuqtasini topamiz. Buning uchun ichki proyeksiyalash yordamida $X' = M'L' \cap K'F$ nuqta uchun kesim tekisligida yotuvchi asosiy proyeksiyasi X ni topamiz. Izlanayotgan X nuqta_X' nuqta orqali o‘tib prizma qirrasiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kesim tekisligida yotuvchi ML to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasi sifatida yasaladi. X nuqtadan foydalanib $Q = KX \cap FF_1$ nuqtani yasaymiz. QL to‘g‘ri chiziqning EE_1 qirra bilan kesishgan nuqtasi sifatida R nuqtani va kesimning tomoni QR kesmani yasaymiz. Xuddi shunga o‘xshash $Y' = M'L' \cap K'A$ nuqtadan foydlanib Y nuqtani, KY to‘g‘ri chiziq va AA_1 qirraning kesishgan nuqtasi – P nuqtani yasaymiz. So‘ngra kesimning PQ va PO tomonlarini yasaladi.



57-chizma

Kesim tekisligining prizma qirralari bilan qolgan kesishgan nuqtalarini yasash quyidagi ketma ketlikda bajariladi:

1. $Z' = AK' \cap BD$ nuqtani yasaymiz;

2. Z $(Z \in PK)$ nuqtani topamiz;

3. OZ to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz;

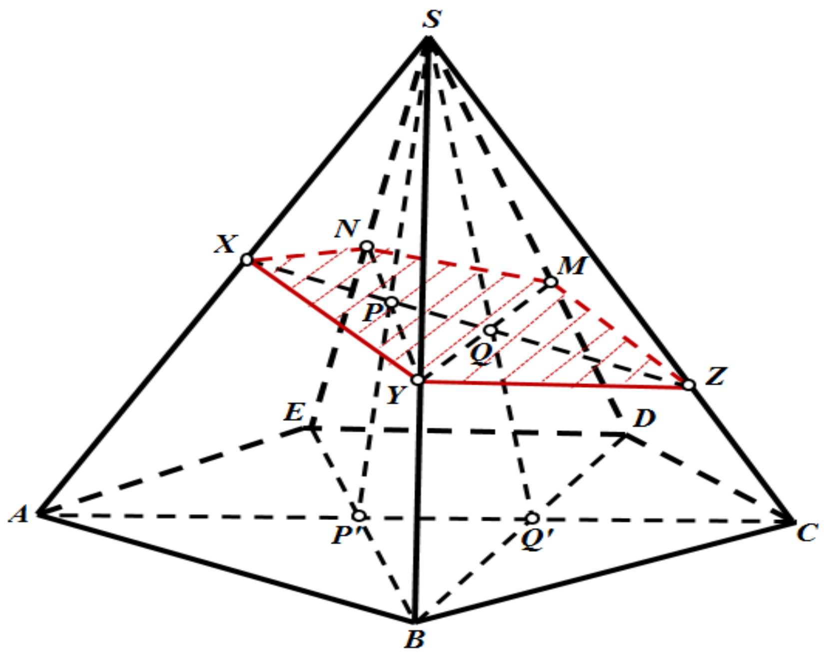
4. $OZ \cap DD_1 = S$ nuqtani yasaymiz;

5. Kesimning *SR*, *ST* va *TO* tomonlarini yasaymiz.

   Yasalgan nuqtalarni tutashtirib kesim – *OPQRST* beshburchakni hosil qilamiz.

6-masala. *SABCDE* beshburchakli piramidaning tasviri berilgan. Yon qirralarida olingan uchta *X,Y* va *Z* nuqtalardan o‘tuvchi tekislik bilan kesimini yasang.

Yechish. *X, Y* va *Z* nuqtalarning ikkinchi proyeksiyalarini *S* nuqtadan ichki markaziy proyeksiyalab topamiz. Bu nuqtalar mos ravishda *A,B* va *C* nuqtalar



58-chizma

bo‘ladi. Kesimning *XY*, *YZ* tomonlarini bevosita yasaymiz. Dastlab $P' = BE \cap AC$ va $Q' = BD \cap AC$ nuqtalarni topamiz. Ichki proyeksiyalash yordamida P' va Q' nuqtalarning kesim tekisligida yotuvchi asosiy proyeksiyalari P va Q nuqtalarni topamiz: $P= SP' \cap XZ,\ Q' = SQ' \cap XZ$. Endi kesim tekisligini piramidaning *SD* va SE qirralari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz. Buning uchun *YP* to‘g‘ri chiziq o‘tkazib uning SE qirra bilan kesishgan nuqtasi *N* nuqtani, *YQ* to‘g‘ri chiziq o‘tkazib uning SD qirra bilan kesishgan nuqtasi *M* nuqtani topamiz. So‘ngra *XN*, *NM* va *MZ* kesmalarni yasaymiz.

Izlangan kesim - *XYZMN* beshburchakdan iborat.

Kesim yasashning kombinatsiyalashgan(aralash) usuli

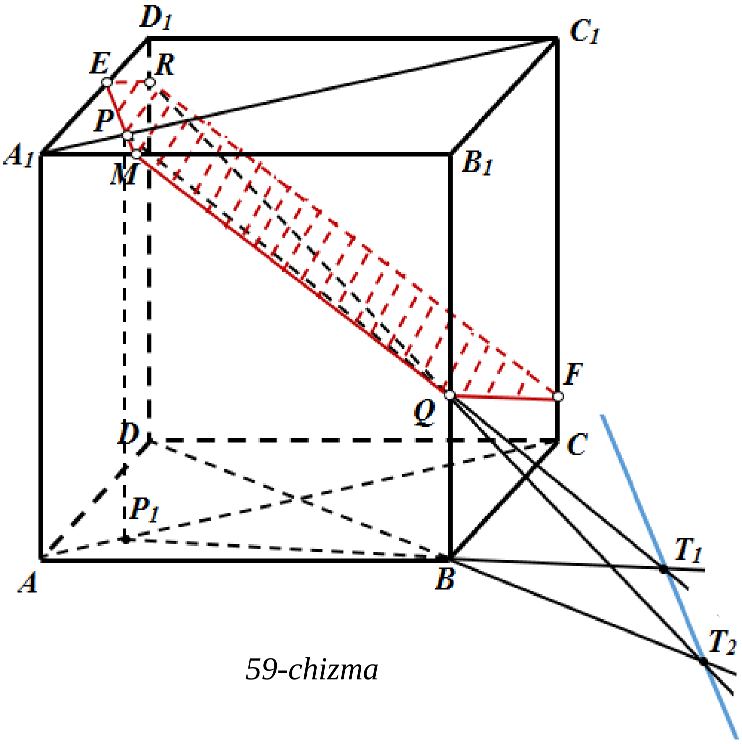
Kombinatsiyalashgan usulda kesimlar yasaganda yasashning bir qismida parallel to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning xossalaridan foydalanish usulidan, bir qismi izlar yoki ichki proyeksiyalash usullaridan foydalaniladi. Bu usullar birlashmasidan aksariyat hollarda parallel yoqlarga ega bo‘lgan ko‘pyoqlarda kesimlar yasashda foydalaniladi va bunda parallel tekisliklarni uchunchi tekislik bilan kesishishi haqidagi teoremadan foydalaniladi.

7-masala. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelopipedning A_1C_1 diagonalidagi *P*, BB_1 qirrasidagi *Q*, DD_1 qirrasidagi *R* nuqtalardan o‘tuvchi tekislik bilan kesimini yasang.

Yechish. *a*) *Masalani izlar usuli va to‘g‘ri chiziq, tekisliklarning parallelligi haqidagi teoremalardan foydalanib yechamiz.*

Dastlab kesuvchi tekislikning asos tekisligi bilan kesishish izini yasaymiz. Buning uchun $T_1 = PQ \cap P_1B$, bunda $PP_1 \| AA_1$, $P_1 \in AC$ va $T_2 = RQ \cap BD$ nuqtalarni yasaymiz. Endi T_1T_2 to‘g‘ri chiziqni, ya’ni kesuvchi tekislikning izini yasaymiz. *P* nuqta $A_1B_1C_1$ tekislikda yotgani uchun kesuvchi tekisligi $A_1B_1C_1$ yoqni *P* nuqtadan o‘tib T_1T_2 izga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi. Bu to‘g‘ri chiziq A_1B_1 va A_1D_1 qirralarni mos ravishda *M* va *E* nuqtalarda kessin. U holda kesuvchi tekislik ADD_1A_1 yoq tekisligini *ER* to‘g‘ri chiziq bo‘ylab, ABB_1A_1

yoq tekisligini QM to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesadi. BCC_1 tekislik ADD_1A_1 yoq tekisligiga parallel bo‘lgani uchun kesuvchi tekislik BCC_1B_1 yoq tekisligini ER ga parallel bo‘lgan QF to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesadi. $ERFQM$ – beshburchak izlangan

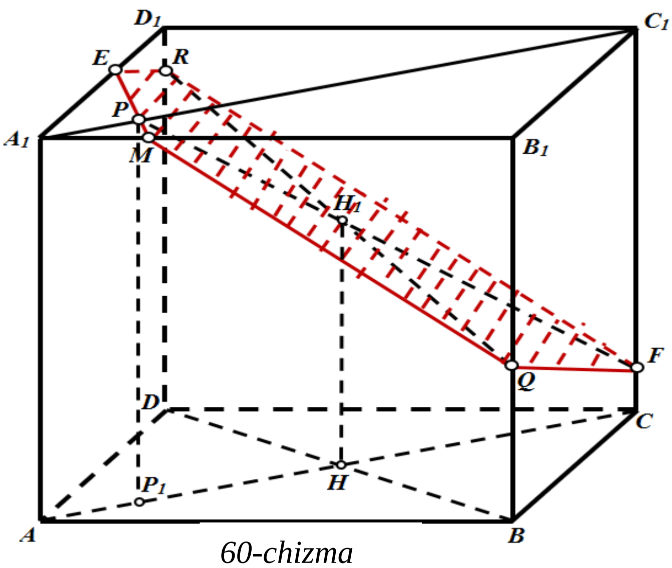


59-chizma

kesim bo‘ladi. (F nuqtani $RF \| MQ$ o‘tkazib yasash mumkin.

b) *Masalani ichki proyeksiyalash usuli va to‘g‘ri chiziq, tekisliklarning parallelligi haqidagi teoremalardan foydalanib yechamiz.*

H – AC va BD diagonallarning kesishgan nuqtasi bo‘lsin. H nuqtadan parallelopiped qirrasiga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazib bu to‘g‘ri chiziqning RQ bilan kesishgan nuqtasini H_1 orqali belgilaymiz. So‘ngra $F = PH_1 \cap CC_1$ nuqtani yasaymiz. F- kesuvchi



60-chizma

tekislikning CC_1 qirra bilan kesishgan nuqtasi. Kesuvchi tekislik CC_1D_1D yoq tekisligini RF to‘g‘ri chiziq bo‘ylab, BCC_1B_1 yoq tekisligini QF to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesadi. ABB_1 tekislik CDD_1 tekislikka parallel bo‘lgani uchun kesuvchi tekislik ABB_1A_1 yoqni FR to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan QM ($M \in A_1B_1$) to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesadi. MP va A_1D_1 to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi - E nuqta kesuvchi tekislikning A_1D_1 qirra bilan kesishgan nuqtasi bo‘ladi.

ERFQM – beshburchak izlangna kesim bo‘ladi.

Mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Ko‘pyoq va tekislikning kesimi deganda nimani tushunasiz?
2. Kesimlar yasashning qanday usullari mavjud?
3. Kesimlar yasashda izlar usulining mohiyati qanday?
4. Kubning kesimida muntazam oltiburchak hosil bo‘lishi uchun qirralarida nuqtalarni qanday tanlash kerak?
5. Parallel to‘g‘ri chiziq va tekislikning xossalaridan foydalanib kesimlar yasashda qanday xossalaridan foydalaniladi?
6. Kesim yasashning ichki proyeksiyalash usuli
7. Kesim yasashning kombinatsiyalashgan(aralash) usuli

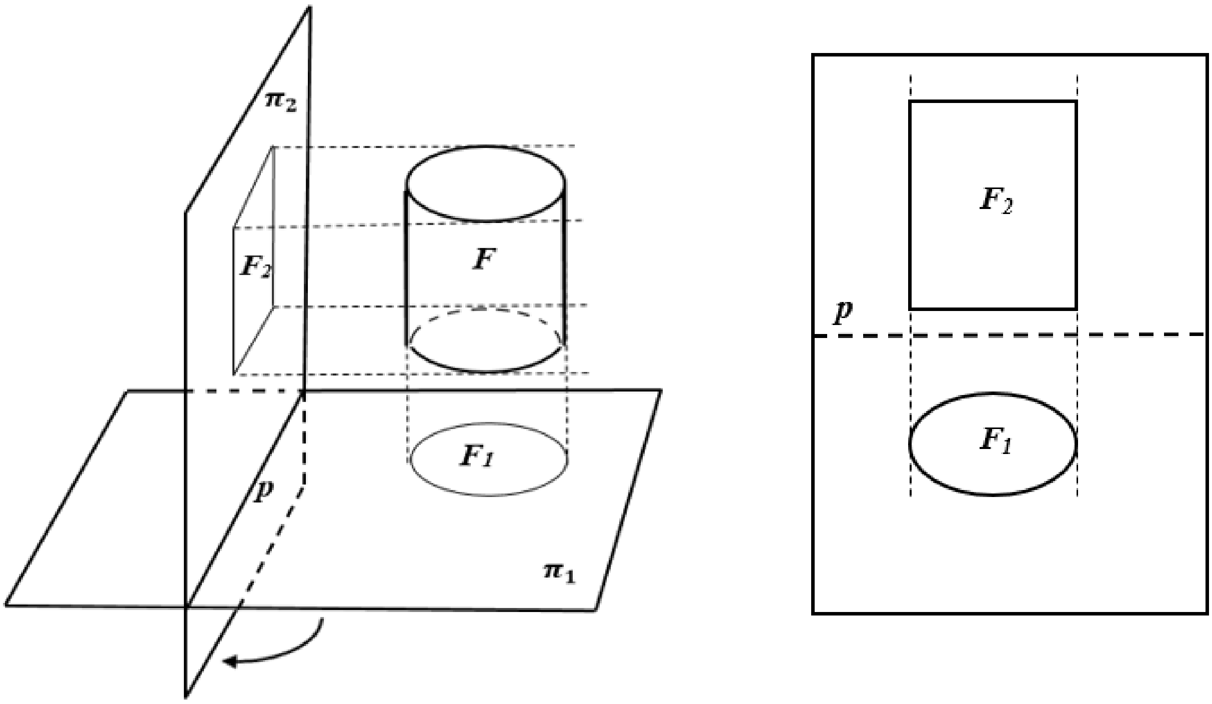
2.8§ MONJ USULI

Reja:

1. Nuqtani epyurdagi tasvirini yasash
2. To‘g‘ri chiziqning epyurdagi tasvirini yasash
3. Tekislikning epyurdagi tasvirini yasash

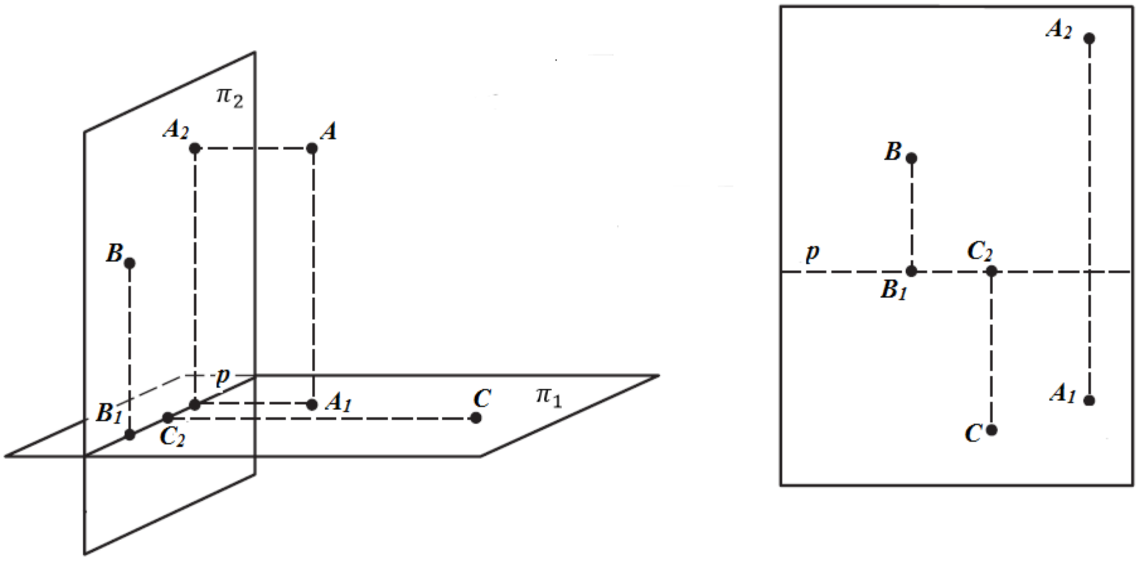
Fazoviy figuralarning bitta proyeksiyasi uning fazodagi vaziyatini va o‘lchamlari to‘g‘risida aniq ma’lumot bera olmaydi. Parallel proyeksiyalash yordamida chizmada fazoviy figuralarning tasvirini yasash usuli dastlab fransuz matematigi Gaspar Monj (1746—1818) tomonidan 1779 yilda ishlab chiqilgan bo‘lib 1799 yilda nashr qilingan.

Fazoda o'zaro perpendikulyar π_1 va π_2 tekisliklar berilgan bo'lib, ular p to'g'ri chiziq bo'ylab kesishsin. Bu tekisliklar proyeksiyalar tekisliklari, p – proyeksiyalar o'qi deyiladi. π_1 tekislikni gorizontal tekislik, π_2 tekislikni vertikal tekislik deyiladi. Fazoda biror F figurani olib uni gorizontal va vertikal tekisliklarga ortogonal proyeksiyalaymiz. F figuraning mos ravishda gorizontal va vertikal proyeksiyalari bo'lgan F_1 va F_2 figuralarni hosil qilamiz.



61-chizma

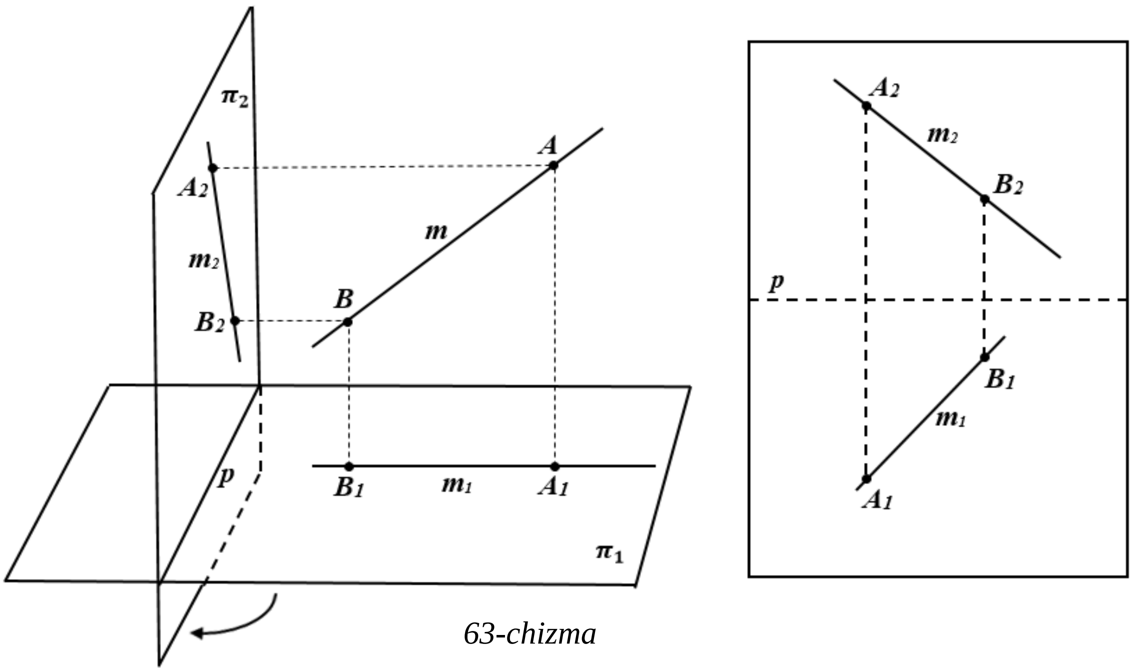
Endi gorizontal π_1 tekislikni vertikal π_2 tekislik bilan ustma ust tushguncha 90^0 ga buramiz. 61-chizmada tasvirlangan shakl hosil bo'ladi, uni epyur deyiladi. Epyurda har doim proyeksiyalar o'qi tasvirlanadi. Monj usuli fazoviy figurani shakli va o'lchamlarini uning epyurdagi proyeksiyalaridan foydalaninb aniqlash imkonini beradi. Agar *A* nuqtaning gorizontal tekislikdagi A_1 va vertikal



62-chizma

tekislikdagi A_2 proyeksiyalari $A(A_1, A_2)$ berilgan bo'lsa *A* nuqtani epyurda berilgan deb hisoblaymiz. Fazoda berilgan *A* nuqtaning gorizontal va vertikal proyeksiyalari A_1 va A_2 larni qaraymiz. AA_1A_2 tekislik *p* proyeksiyalar o'qiga perpendikulyar bo'lgani uchun epyurda A_1, A_2 nuqtalarning proyeksiyalari proyeksiyalar o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqda yotadi. Agar *B* nuqta vertikal π_2 tekislikka tegishli bo'lsa uning vertikal B_2 proyeksiyasi o'zi bilan ustma ust tushadi, gorizontal proyeksiyasi B_1 esa proyeksiyalar o'qi *p* da yotadi. Agar *C* nuqta vertikal π_1 tekislikka tegishli bo'lsa uning gorizontal C_1 proyeksiyasi o'zi bilan ustma ust tushadi vertikal proyeksiyasi C_2 esa proyeksiyalar o'qi *p* da yotadi. Bu xossalardan nuqtaning vertikal yoki gorizontal tekislikka tegishli ekanligini aniqlashda qo'llaniladi.

Fazoda biror m to‘g‘ri chiziqni olib uni gorizontal va vertikal tekisliklarga proyeksiyalaymiz. Hosil bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarni berilgan to‘g‘ri chiziqning

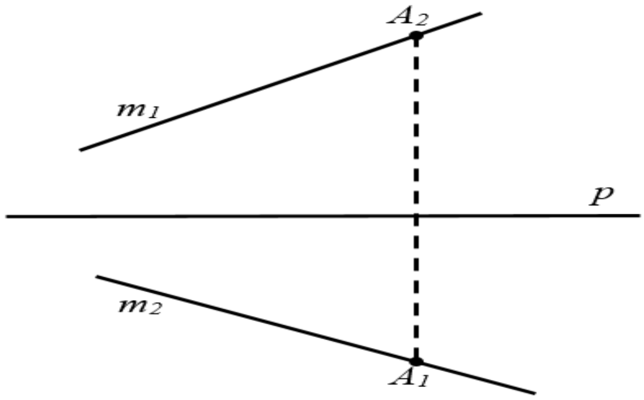


63-chizma

gorizontal va vertikal proyeksiyalari deyiladi. m to‘g‘ri chiziqni gorizontal va vertikal proyeksiyalarini mos ravishda m_1, m_2 orqali belgilaymiz. Agar m to‘g‘ri chiziqning ikkita nuqtasi berilgan bo‘lsa biz m to‘g‘ri chiziqni epyurda berilgan deymiz. Berilgan ikkita nuqtaning proyeksiyalari orqali to‘g‘ri chiziqning gorizontal va vertikal proyeksiyalarini aniqlash mumkin. Haqiqatan ham m to‘g‘ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi m_1 to‘g‘ri chiziq A_1, B_1 nuqtalardan, vertikal proyeksiyasi m_2 to‘g‘ri chiziq esa A_2, B_2 nuqtalardan o‘tadi. Demak to‘g‘ri chiziqni uning ikkita nuqtasi yoki $m(m_1,m_2)$ proyeksiyalari yordamida berish mumkin.

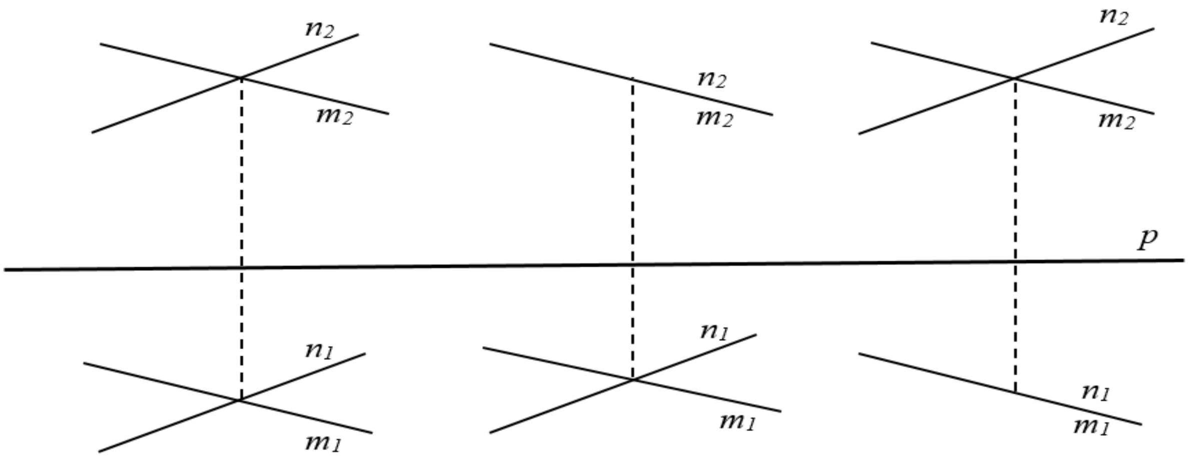
1-masala. $A(A_1,A_2)$ nuqta $m(m_1,m_2)$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli. Agar M_1 nuqta berilgan bo‘lsa M_2 nuqtani yasang.

Yechish. Shartga ko‘ra A nuqta m to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun $A_1 \in m_1$ va $A_2 \in m_2$. A_1 va A_2 nuqtalar proyeksiyalar to‘g‘ri chizig‘i p ga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lgani uchun A_2 nuqta - m_2 to‘g‘ri chiziq va A_1 nuqtadan o‘tib p ga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasidir. Izlangan nuqta yasaldi.

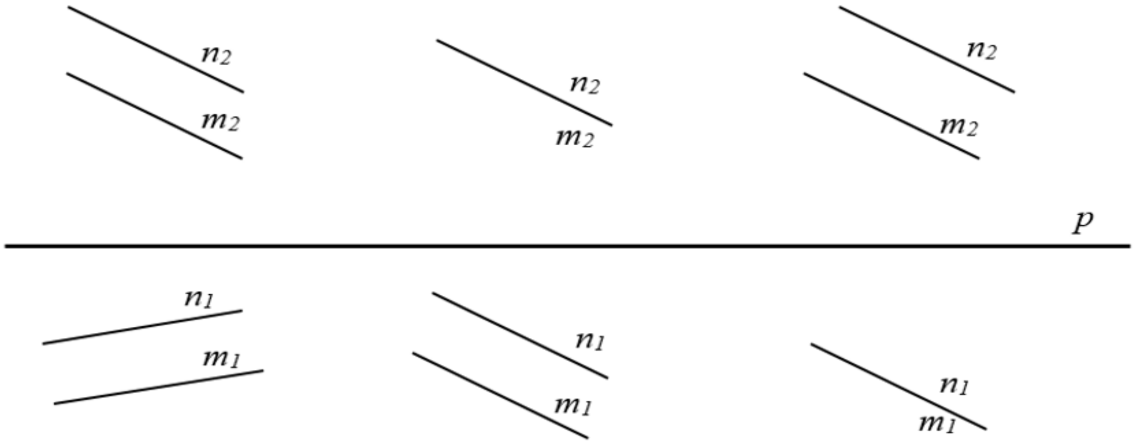


64-chizma

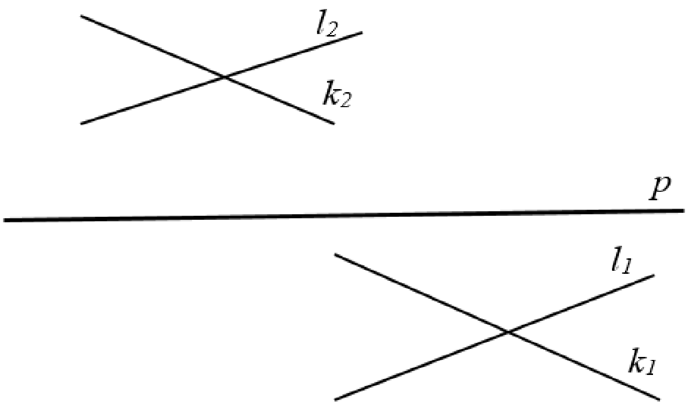
Endi epyurda o‘zlarining proyeksiyalari bilan berilgan (m_1,m_2) va (n_1,n_2) to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro vaziyatlarini ko‘rib chiqamiz. Bu to‘g‘ri chiziqlardan bittasini proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyar emas deb faraz qilamiz. Bu to‘g‘ri chiziqlar faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lganda va faqat shu holdagina kesishadi. Yani quyidagi chizmada ko‘rsatilgan holatlardan kesishadi:



(m_1,m_2) va *(n_1,n_2)* to‘g‘ri chiziqlar quyidagi chizmada ko‘rsatilgan holatlarda parallel bo‘ladi:



Quyidagi chizmada tasvirlangan *(l_1,l_2)* va *(k_1,k_2)* to‘g‘ri chiziqlar ayqash bo‘ladi:

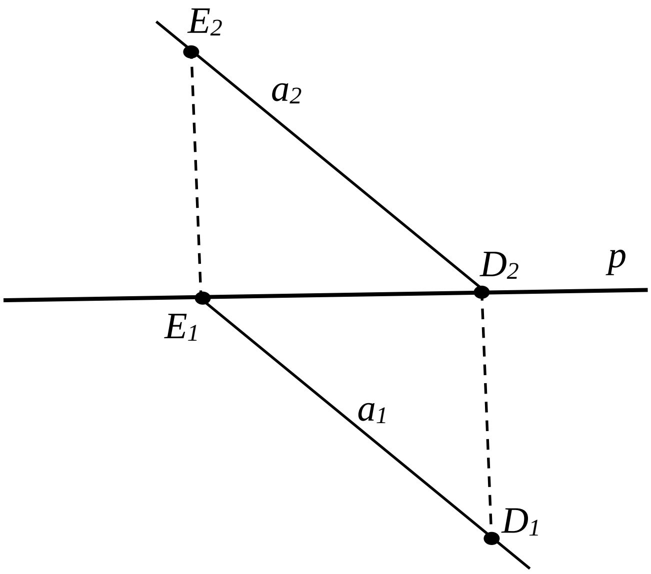


65-chizma

2-masala. Berilgan *$a(a_1,a_2)$* to‘g‘ri chiziqning epyurdagi gorizontal va vertikal izlarini aniqlang.

Yechish. *$D(D_1,D_2)$* nuqtaning *$a(a_1,a_2)$* to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lishi uchun $D_1 \in a_1$, $D_2 \in a_2$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir. Bu nuqtaning *$a(a_1,a_2)$* to‘g‘ri chiziqning gorizontal izi bo‘lishi uchun uning gorizontal tekislikka tegishli bo‘lishi, yani uning vertikal proyeksiyasi *D_2* proyeksiyalar o‘qi *p* da yotishi zarur va yetarlidir. Bundan - *$a(a_1,a_2)$* to‘g‘ri chiziqning gorizontal izini topish uchun *a_2*

to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalar o‘qi p bilan kesishgan nuqtasi D_2 ni topish, so‘ngra a_1 to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalar o‘qi p ga perpendikulyar va D_2 nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi D_1 ni topish kerak. Topilgan $D(D_1,D_2)$ nuqta $a(a_1,a_2)$ to‘g‘ri chiziqning izlangan gorizontal izi bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash a to‘g‘ri chiziqning vertikal izi $E(E_1,E_2)$ nuqta topiladi.



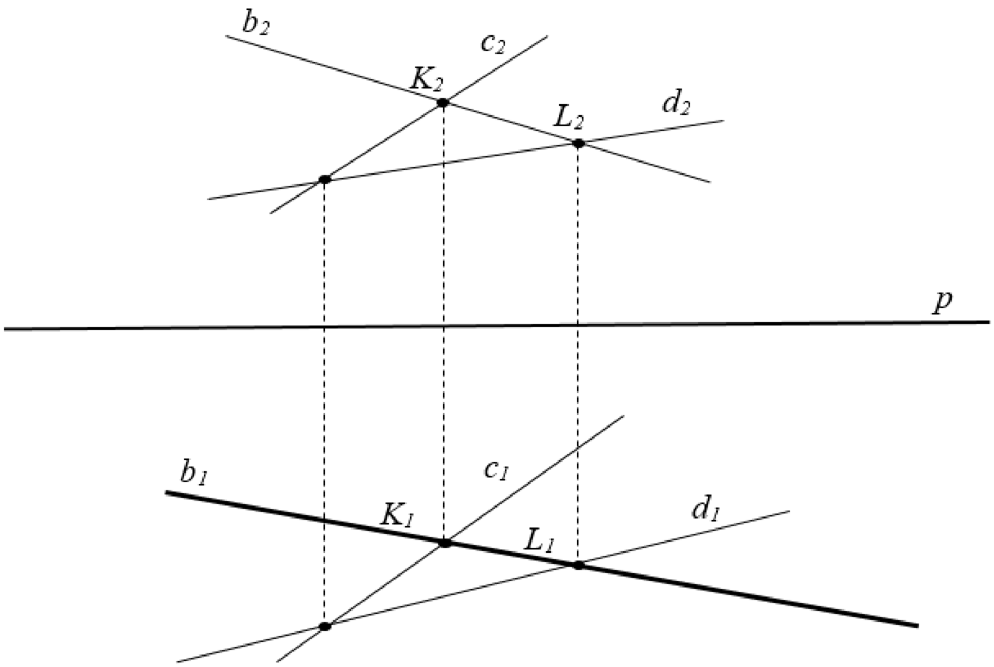
66-chizma

3-masala. (b_1,b_2) to‘g‘ri chiziq kesishuvchi (c_1,c_2) va (d_1,d_2) to‘g‘ri chiziqlar bilan aniqlangan tekislikda yotadi. Berilgan b_2 proyeksiyaga ko‘ra b_1 proyekisiyasini yasang.

Yechish. (b_1,b_2) to‘g‘ri chiziq (c_1,c_2) va (d_1,d_2) to‘g‘ri chiziqlarni mos ravishda (K_1,K_2) va (L_1, L_2) nuqtalarda kessin. Dastlab bu nuqtalarning proyeksiyalarini topamiz. Shartga ko‘ra (b_1,b_2) to‘g‘ri chiziqning b_2 proyeksiyasi berilgani uchun K_2 va L_2 nuqtalar bevosita topiladi. K_1 va L_1 nuqtalarni topish quyidagi ketma ketlikda olib boriladi: K_2 nuqtadan o‘tib proyeksiyalar o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning c_1 to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi sifatida K_1 nuqta, L_2 nuqtadan o‘tib proyeksiyalar o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning d_1 to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi sifatida L_1 nuqta yasaladi. K_1 L_1 to‘g‘ri chiziq izlangan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Agar K_2 va L_2

nuqtalardan bittasi, masalan L_2 mavjud bo‘lmasa u holda b_1 to‘g‘ri chiziq K_1 nuqtadan o‘tib d_1 ga parallel to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

Tekislik bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtasi bilan, ikkita kesishuvchi yoki parallel to‘g‘ri chiziqlari bilan yoki to‘g‘ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali aniqlanishi mumkin. Albatta bu usullardan qaysi biri bilan tekislik aniqlanadigan bo‘lsa aniqlovchi elementlarning epyurdagi proyeksiyalari

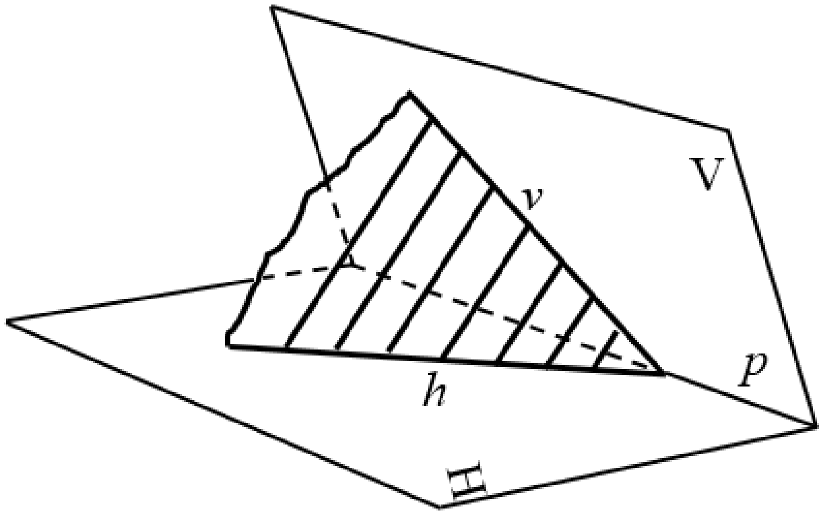


67-chizma

berilishi kerak. Tekislikning gorizontal va vertikal tekisliklar bilan kesishish to‘g‘ri chiziqlarini shu tekislikning gorizontal va vertikal izlari deyiladi. Agar tekislik proyeksiyalar o‘qini kesib o‘tsa tekislikning gorizontal va vertikal izlari proyeksiyalar o‘qida kesishadi, aks holda ular parallel yoki proyeksiyalar o‘qi bilan ustma ust tushadi. Proyeksiyalar tekisliklaridan biriga parallel bo‘lgan tekislik faqat bitta izga ega bo‘ladi.

Agar tekislik o‘zining uchta $A(A_1,A_2)$, $B(B_1,B_2)$, $C(C_1,C_2)$ nuqtalari bilan berilgan bo‘lsa 3-masalada ko‘rsatilgan usul bilan uning gorizontal h va vertikal v

izlarini yasash mumkin. Buning uchun AB va CB to‘g‘ri chiziqlarning gorizontal izlari M va N larni topish kerak. Izlanayotgan h to‘g‘ri chiziq MN to‘g‘ri chiziq



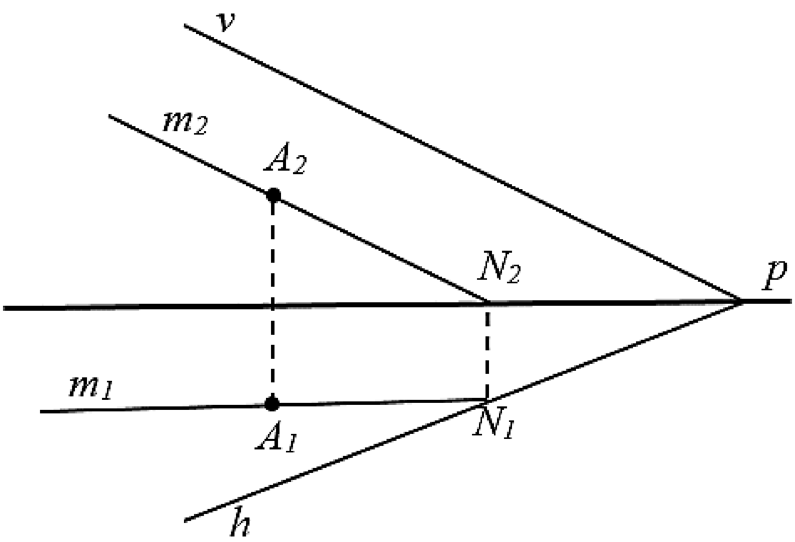
68-chizma

bilan ustma ust tushadi. Xuddi shuningdek ABC tekislikning v vertikal izi KL to‘g‘ri ciziq bilan ustma ust tushadi, bunda K va L nuqtalar AB va CB to‘g‘ri chiziqlarning vetikal izlari. Demak tekislikni uning gorizontal va vertikal izlari yordamida berish mumkin.

4- masala. (A_1, A_2) nuqta o‘zining (h, v) izlari bilan aniqlangan tekislikka tegishli. Berilgan M_1 nuqtaga ko‘ra M_2 nuqtani yasang.

Yechish. Berilgan tekislikda (A_1, A_2) nuqtadan V vertikal tekislikka parallel (m_1, m_2) to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqning gorizontal m_1

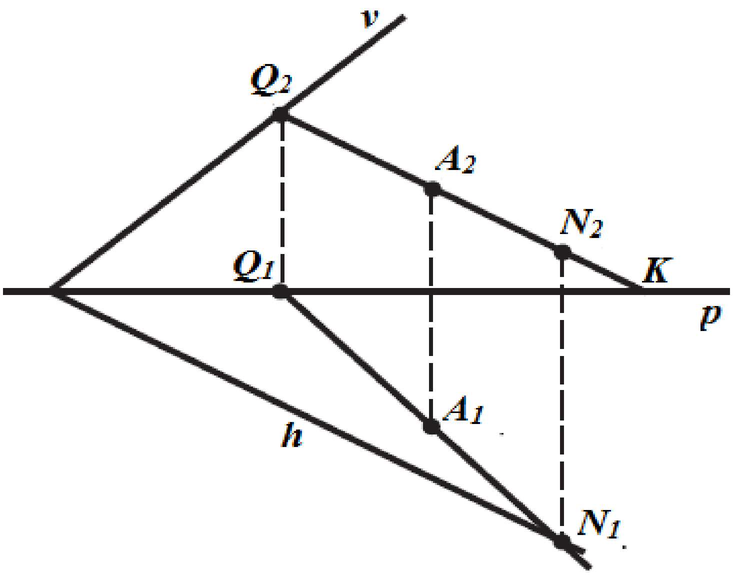
proyeksiyasi proyeksiyalar to‘g‘ri chizig‘i p ga parallel bo‘ladi. $N_1 = m_1 \cap h$ nuqta bu to‘g‘ri chiziqning izi, N_2 esa uning ortogonal proyeksiyasi bo‘lsin. m_2 to‘g‘ri chiziq N_2 nuqtadan o‘tib v ga parallel bo‘ladi. Shuning uchun A_2 nuqta p proyeksiyalar o‘qiga perpendikulyar bo‘lib M_1 nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq va m_2 to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasi bo‘ladi (69-chizma).



69-chizma

5-masala. Tekislik o‘zining gorizontal va vertikal izlari bilan berilgan. Berilgan $A(a_1,a_2)$ nuqtaning tekislikka tegishli yoki tegishli emasligini aniqlang.

Yechish. Berilgan tekislikning gorizontal va vertikal izlari mos ravishda *h*, *v* bo‘lsin. Tekislikning vertikal izi *v* da biror *Q* nuqtani olamiz. U holda bu



70-chizma

nuqtaning Q_2 vertikal proyeksiyasi Q nuqta bilan ustma ust tushadi. Q nuqtaning gorizontal proyeksiyasi Q_1 nuqta proyeksiyalar o‘qi *p* da yotadi. QA to‘g‘ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi Q_1A_1 to‘g‘ri chiziq bilan, vertikal proyeksiyasi esa Q_2A_2 bilan ustma ust tushadi. $N_1 - h$ va Q_1A_1 to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi, K nuqta esa p proyeksiyalar o‘qining Q_2A_2 to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi. A nuqtaning tekislikka tegishli bo‘lishi uchun QA to‘g‘ri chiziqning tekislikka tegishli bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bu esa N_1 nuqtaning gorizontal proyeksiya h ga tegishli ekanini, yani gorizontal tekislikda yotishini bildiradi. Shuning uchun uning vertikal proyeksiyasi proyeksiyalar o‘qi p da yotishi kerak. Boshqa tomondan N nuqtaning vertikal proyeksiyasi N_2 nuqta Q_2A_2 to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘ladi. Demak A nuqta tekislikka tegishli bolishi uchun N_2 va K nuqtalarning ustma ust tushishi zarur va yetarlidir.

Mustahkamlash uchun savol va topshiriqlar

1. Ortogonal proyeksiyalash deganda qanday proyeksiyalashni tushunasiz?
2. Biror figuraning gorizontal va ortogonal proyeksiyalari qanday hosil qilinadi?
3. Epyur nima?
4. Qaysi holatda nuqtani epyurda berilgan deb hisoblaymiz?
5. Qaysi holatda gorizontal nuqtaning proyeksiyasi o‘zi bilan ustma ust tushadi?
6. Berilgan ikkita nuqtasining proyeksiyalari orqali to‘g‘ri chiziqning gorizontal va vertikal proyeksiyalarini qanday aniqlaymiz?
7. To‘g‘ri chiziqning gorizontal izi qanday yasaladi?
8. Nuqtaning epyurdagi tasviri qanday yasaladi?
9. To‘g‘ri chiziqning epyurdagi tasviri qanday yasaladi?
10. Tekislikning epyurdagi tasviri qanday yasaladi?

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YHATI

1. Атанасян С. Л. Методы изображений.—М.: МГПУ, 2010.
2. Атанасян С. Л. Проективная геометрия.—М.: МГПУ, 2010.
3. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Ч. 2.—М.: Просвещение, 1987.
4. Горшкова Л. С, Сергеечев М. В. Методы изображений: Учебное пособие Пенза, 2006.-109 с.
5. Дадажонов Н.Д., Юнусметов Р., Абдуллаев Т. Геометрия. 1 ва 2-қисм.- Тошкент. “Ўқитувчи” 1996 й.
6. Никулина, Е. В. Теория изображений: учебное пособие, Ярославль, ЯрГУ, 2012. – 104 с.
7. Разумова О. В., Садыкова Е. Р. Геометрические построения в пространстве. Казань. ун-т, 2014.-71с
8. Игнатьев Ю. Г., Агафонов А. А. Проективная геометрия и методы изображения. Учебное пособие. – Казань. ун-т, 2014.-179с.
9. Александров А.Д., Цветков Н.Ю, Геометрия, М. Наука, 1990, с.672.
10. Yodgorov J., Chizma geometriya, - “ Buxoro” , Buxoro, 2000.

MUNDARIJA

DAVLETOV D.E.

GEOMETRIYA

O‘quv qo‘llanma

Toshkent - "INNOVATSIYA-ZIYO" – 2024.

Muharrir: *Xolsaidov F.B.*
Musahhih: *Niyozova A.*
Texnik muharrir: *Tashatov F.*

Bosishga 28.10.2024.da ruxsat etildi.
Bichimi 60x90. “Cambria” garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 6. Nashr bosma tabog‘i 6. Adadi 300 nusxa.

“METODIST NASHRIYOTI” MCHJ matbaa bo‘limida chop etildi.
Manzil: Toshkent shahri, Shota Rustaveli 2-vagon tor ko‘chasi, 1-uy.

+99893 552-11-21

ISBN 978-9910-680-55-7