ÓZBEKİSTAN RESPUBLİKASI JOQARI HÁM ORTA ARNAWLI BİLİMLENDİRİW MİNİSTRLİGİ

BERDAQ ATINDAǴI QARAQALPAQ MÁMLEKETLİK UNİVERSİTETİ

Omarov A, Qurbanbaev Ó.O, Qılıshbaeva G.Q

MATEMATIKALIQ FIZIKA TEŃLEMELERI BOYINSHA MISALLAR HÁM MÁSELELER

Oqıwlıq qollanba

2017

Annotaciya

Oqıwlıq qollanba Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, fizika matematika fakul`tetiniń studentleri ushın matematikalıq fizika teńlemeleri kursı boyınsha avtorlar tárepinen alıp barılǵan lekciya hám ámeliy sabaqlardıń tiykarında jazılǵan hám universitetler ushın házirgi hárekettegi oqıw dástúrine sáykes keledi. Bunda matematikalıq fizika teńlemeleri kursınıń barlıq tiykarǵı bólimleri kiritilgen.

Oqıwlıq qollanba dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń klassifikaciyası haqqındaǵı máseleler, hár qıylı tiptegi ekinshi tártipli teńlemeler ushın máselelerdiń qoyılıwı, sonday-aq olardı sheshiwdiń tiykarǵı usılları qarastırılǵan.

Annotatsiya

O`quv qo`llanma Berdoq nomidagi Qoraqolpaq davlat universiteti, fizika matematika fakul`tetining talabalari uchun matematik fizika tenglamalari kursi bo`yicha mualliflar tomonidan o`qub kelinayotgan ma`ruzalar va amaliy darslar asosida tayorlangan va universitetlar uchun hozirgi o`quv namunaviy dasturga mos keladi. Bunda matematik fizika tenglamalari kursining barcha asosiy qismlari kiritilgan.

O`quv qo`llanmada xususiy hosilali diffeentsial tenglamalarning klassifikatsiyasiga oid masalalar, har xil tiptagi ikkinchi tortibli tenglamalar uchun masalalarning qo`yilishi, shuningdek ularni echishning asosiy usullari keltirilgan.

Аннотация

Учебное пособие составлена на основе материалов используемых авторами при проведений лекционных и практических занятии по курсу уравнения математической физики для студентов физико-математического факультета Каракалпакского госуниверситета им. Бердаха и соответствует действующей учебной программе для университетов. Включены все основные разделы курса уравнения математической физики.

Рассмотрены задачи о классификации уравнения в частных производных, постановка задач различных типов для уравнения второго порядка, а также основные методы их решения.

Summary

The manual is made on the basis of the materials used by authors carrying out lecture and practical class in a course of the equation of mathematical physics for students of physical and mathematical faculty of Karakalpak State University named after Berdakh and corresponds to the operating training program for the universities. All main sections of a course of the equation of mathematical physics are included.

Tasks about classification of a partial equation, statement of problems of various types for a second-order equation and also the main methods of their decision are considered.

Pikir bildiriwshiler:

Allanazarov J. – Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı «Informatikanı oqıtıw metodikası» kafedrası baslıǵı, fizika-matematika ilimleri kandidatı, docent.

Mustafaeva R. – Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti «Ámeliy matematika» kafedrası, fizika-matematika ilimleri kandidatı, docent.

SO`Z BASI

Oqıw quralı matematikalıq fizika kursı boyınsha máselelerdi sheshiw usıllarına bağıshlanǵan. Kitaptıń maqseti studentlerge olardıń matematikalıq pikirlewlerin, dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdi sheshiwdiń ámeliy kónlikpelerin qáliplestiriwde járdem beriwden ibarat.

Oqıwlıq qollanbada dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerden ibarat matematikalıq fizikanıń tiykarǵı teńlemelerin úyreniw máseleleri qarastırılǵan. Qollanba altı bap kóleminde jazılǵan bolıp, birinshi babında dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler haqqında tiykarǵı túsinikler, olardıń klassifikaciyası, kanonikalıq túrleri hám sheshimi haqqında maǵlıwmatlar keltirilgen.

Oqıwlıq qollanbanıń ekinshi, úshinshi hám tórtinshi baplarında matematikalıq fizikanıń teńlemelerin óz ishine qamtıytuǵın sáykes giperbolalıq, parabolalıq hám elliptikalıq tiptegi teńlemeler hám bul teńlemeler tiykarındaǵı mısal hám máseleler berilgen.

Qollanbanıń besinshi babında elliptikalıq tiptegi teńlemeler ushın shegaralıq máselelerdi sheshiwdiń potenciallar hám Grin funkciyası usılları, al altınshı babında dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdi sheshiwdiń integrallıq túrlendiriwler usılı keltirilgen.

Qollanba matematikalıq fizikanıń teńlemelerine arnalǵan mısallar hám máseleler jıynaǵınan turadı hám ol universitetlerdiń matematika, ámeliy matematika hám informatika sonday-aq fizika tálim baǵdarları studentleri ushın «Matematikalıq fizika teńlemeleri» pánin úyreniwde úlken járdem beredi.

Qollanbanıń mazmunı matematikalıq fizika teńlemeleri kursı boyınsha oqıw baǵdarlamasına tolıq sáykes keledi.

Qollanbanıń qol jazbasın oqıp, ózleriniń pikirlerin bergen fizika matematika ilimleri kandidatları O.Nurjanov, J.Allanazarov, Q.Elgondiev hám R.Mustafaevalarǵa avtorlar óz minnetdarshılıǵın bildiredi.

I-BAP. DARA TUWINDILI DIFFERENCIALLIQ TEŃLEMELER. KLASSIFIKACIYASI HÁM KANONIKALIQ TÚRLERI

Tayanısh sózler: dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler, dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń tártibi, dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń sheshimi, sızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler, kvazisızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler, ekinshi tártipli eki ǵárezsiz ózgeriwshili sızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń tipleri hám kanonikalıq kórinisleri, ekinshi tártipli kóp ǵárezsiz ózgeriwshili sızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń tipleri hám kanonikalıq kórinisleri, xarakteristikalıq teńlemeler.

Tiykarǵı túsinikler hám belgilewler

Dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler – ǵárezsiz ózgeriwshi argumentleriniń sanı ekige teń yamasa onnan artıq bolǵan

$$F\left(x_1, x_2..., x_n, \frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, ..., \frac{du}{dx_n}, ..., \frac{d^k u}{dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} ... dx_n^{k_n}}\right) = 0$$

túrindegi differenciallıq teńlemeler, bul jerde $u = u\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$.

Dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń tártibi – teńlemedegi izleniwshi funkciyadan alınǵan tuwındılardıń eń joqarǵı tártibi.

Sızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler – belgisiz funkciyaǵa hám onıń dara tuwındılarına qarata sızıqlı bolǵan dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler.

Kvazisızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler –belgisiz funkciyadan alınǵan eń joqarǵı tártipli tuwındıǵa qarata sızıqlı bolǵan dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler.

Ekinshi tártipli eki ǵárezsiz ózgeriwshili sızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń tipleri – ulıwma kórinisi

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y,)u = f(x, y)$$

túrine iye bolǵan teńlemeler, eger $B^2 - AC > 0$ *bolsa, bul teńleme giperbolalıq tipke; eger* $B^2 - AC = 0$ *bolsa, bul teńleme parabolalıq tipke; eger* $B^2 - AC < 0$ *bolsa, bul teńleme elliptikalıq tipke jatadı.*

Matematikalıq fizika teńlemeleri – dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń bir bólegi bolıp, onıń ulıwma kórinisi

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

túrine iy boladı, bul jerde $a_{ij} = a_{ji},\ b_i,\ c,\ f$ *ler* $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 2)$ *argumentlerdiń berilgen funkciyaları. Bunday teńlemelerdiń sheshimleriniń qásiyetleri* $|a_{ik} - \lambda| = 0$ *xarakteristikalıq teńlemeniń koren`leriniń belgisi menen tıǵız baylanıslı. Eger hámme koren`leriniń belgisi birdey bolsa, onda teńleme elliptikalıq tiptegi teńleme dep ataladı, eger bir koreniniń belgisi qalǵan koren`leriniń belgisi menen birdey bolsa, onda teńleme giperbolalıq tiptegi teńleme dep ataladı, eger bir koreni nol`ge teń bolıp, qalǵan koren`leriniń belgisi birdey bolsa, onda teńleme parabolalıq tiptegi teńleme dep ataladı.*

Bizge málim bir erikli ózgeriwshige ǵárezli bolǵan belgisiz funkciyaǵa hámde onıń tuwındılarına baylanıslı differenciallıq teńlemeler ápiwayı differenciallıq teńlemeler dep ataladı. Ilim hám texnikanıń kópshilik máseleleri, ulıwma tábiyatta bolatuǵın barlıq qubılıslar kóp ǵárezsiz ózgeriwshili belgisiz funkciyaǵa hám onıń dara tuwındılarına baylanıslı differnciallıq teńlemeni, yaǵnıy dara tuwındılı differenciallıq teńlemeni sheshiwge alıp kelinedi.

Dara tuwındılı differenciallıq teńlemeniń ulıwma kórinisi tómendegishe boladı:

$$F\left(x_1, x_2 ..., x_n, \frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, ..., \frac{du}{dx_n}, ..., \frac{d^k u}{dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} ... dx_n^{k_n}}\right) = 0, \qquad (1)$$

bul jerde F F barlıq argumentlerdiń úzliksiz funkciyası, $u = u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ belgisiz funkciya bolıp, $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ erikli ózgeriwshiler, $k_1 + k_2 + \ldots k_n = k.$

Teńlemede qatnasatuǵın dara tuwındınıń eń úlken tártibine usı teńlemeniń tártibi dep ataladı.

Bul bapta fizikanıń eń áhmiyetli máselelerinen kelip shıǵatuǵın hám matematikalıq fizikanıń tiykarǵı teńlemeleri dep atalatuǵın ekinshi tártipli dara tuwındılı sızıqlı differenciallıq teńlemelerdi úyrenemiz. Eger teńleme belgisiz funkciyaǵa hám onıń dara tuwındılarına qarata sızıqlı bolsa, onda bunday teńlemeler sızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler dep ataladı. Mısalı

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$

$$+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y,)u=f(x,y)$$

teńlemesi $u(x,y)$ belgisiz funkciyaǵa qarata ekinshi tártipli sızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńleme bolıp tabıladı. Egerde $f(x,y)\equiv 0$ bolsa, onda teńleme sızıqlı birtekli dep, al keri jaǵdayda sızıqlı birtekli emes dep ataladı.

Eger teńleme, belgisiz funkciyadan alınǵan eń joqarǵı tártipli tuwındıǵa qarata sızıqlı bolsa, onda bunday teńlemeler kvazisızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler dep ataladı. Mısalı

$$A\left(x,y,u\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$

$$+C\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

teńlemesi ekinshi tártipli eki ǵárezsiz ózgeriwshili kvazisızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemeniń ulıwma kórinisi bolıp tabıladı.

Dara tuwındılı (1) differenciallıq teńlemeniń sheshimi dep sonıńday, $u=u(x_1,x_2,\dots x_n)$ funkciyaǵa aytamız, bul funkciyanıń ózin hám onıń barlıq dara tuwındıların teńlemedegi orınlarına qoyǵanda bul teńleme birdeylikke aylansa.

Biz joqarıda aytıp ótkendey tábiyatta júz beretuǵın qubılıslar dara tuwındılı differenciallıq teńlemeni úyreniwge alıp kelinedi.

1).Hár túrli tolqın taralıwları hám terbelis penen baylanıslı bolǵan qubılıslardı úyreniwde tómendegi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\Delta u$$

tolqın teńlemesine iye bolamız, bul jerde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplas operatorı, a qaralıp atırǵan ortalıqtaǵı tolqınnıń taralıw tezligi.

2) Birtekli izotrop denede (oblastta) jıllılıqtıń taralıw nızamı, sonıńday diffuziya qubılısları

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta u$$

túrindegi jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi menen anıqlanadı.

3). Eger deneniń ishinde jıllılıq deregi bolmasa yamasa joqarıdaǵı qubılıslar t waqıtqa baylanıslı bolmasa, onda $\Delta u = 0$ Laplas teńlemesi payda boladı.

Joqarıdaǵı teńlemeler matematikalıq fizikanıń tiykarǵı teńlemeleri dep ataladı hám olardıń hár qaysısı sheksiz kóp sandaǵı dara sheshimlerge iye boladı. Bazı-bir anıq fizikalıq máseleni sheshiw waqtında usı sheshimlerdiń ishinen usı máseleniń fizikalıq mazmunınan kelip shıǵıp, qoyılǵan qosımsha shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimdi tabıw talap etiledi. Bul qosımsha shártler shegaralıq yamasa baslanǵısh shártler dep ataladı.

Hár qanday teńleme ushın qoyılǵan másele tómendegi úsh shártti qanaatlandırıwı kerek:

1) sheshim bar bolıwı kerek;

2) sheshim birden-bir bolıwı kerek;

3) sheshim ornıqlı bolıwı kerek, yaǵnıy máselede berilgenlerdiń kishkene ózgeriwi sheshimniń hám kishkene ózgeriwin támiyinlew kerek. Mine usı úsh shártti qanaatlandıratuǵın máselege korrekt qoyılǵan másele dep ataladı.

§1. Ekinshi tártipli eki ǵárezsiz ózgeriwshili dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń tipleri hám kanonikalıq kórinisleri

Meyli eki ózgeriwshili ekinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń klassifikaciyası hámde olardıń kanonikalıq túri haqqındaǵı máseleni qarastırayıq. Usı maqsette bas aǵzaǵa qarata sızıqlı bolǵan

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1}$$

teńlemeni qarastırayıq, bul jerde a_{11}, a_{12}, a_{22} koefficientler ulıwma alǵanda x hám y tiń berilgen funkciyaları. (1) teńlemede keri almastırıwǵa iye bolǵan sonıńday

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y) \tag{2}$$

belgilew jasayıq, nátiyjede (1) teńleme jańa ξ hám η ózgeriwshilerge qarata ápiwayı kóriniske iye bolsın. Usı maqsette tómendegi tuwındılardı esaplaymız:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Tuwındılardıń bul mánislerin (1) teńlemedegi orınlarına qoyıp

$$\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\bar{a}_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\bar{a}_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\bar{F}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0 \tag{4}$$

teńlemeni alamız, bul jerde

$$\overline{a_{11}}=a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2;$$

$$\overline{a_{12}}=a_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\overline{a_{22}}=a_{11}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

al $\bar{F}$ bolsa, ekinshi tártipli tuwındılarǵa ǵárezli emes.

Meyli $z=\varphi(x,y)$ funkciyası

$$a_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 z_x^2+2a_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0 \tag{5}$$

teńlemesiniń dara sheshimi bolsın dep uyǵarayıq. Eger $\xi=\varphi(x,y)$ dep alsaq, onda $\bar{a}_{11}=0$ boladı. Demek (2) túrindegi jańa ózgeriwshilerdi tańlaw (5) teńlemeniń sheshimine baylanıslı.

Lemma. Eger $z=\varphi(x,y)$ funkciyası (5) teńlemeniń dara sheshimi bolsa, onda

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0 \tag{6}$$

differenciallıq teńlemeniń ulıwma integralı $\varphi(x,y)=C$ boladı hám kerisinshe, eger $\varphi(x,y)=C$ (6) teńlemeniń ulıwma integralı bolsa, $z=\varphi(x,y)$ funkciyası (5) teńlemeniń dara sheshimi boladı. (6) teńleme (1) teńlemeniń xarakteristikalıq teńlemesi dep, al xarakteristikalıq teńlemeniń integrallıq iymeklikleri bolsa (1) teńlemeniń xarakteristikaları dep ataladı.

1.1. Giperbolalıq tiptegi teńlemeler. Eger (6) teńlemeniń ulıwma integralı $\varphi(x,y)=C$ bolsa hám $\xi=\varphi(x,y)$ dep tańlap alsaq, (4) teńlemedegi $u_{\xi\xi}$ dıń koefficienti $\bar{a}_{11}$ di nol`ge aylandırǵan bolamız. Sonıńday, eger $\psi(x,y)=C$ (6) teńlemeniń $\varphi(x,y)$ ǵa baylanıslı bolmaǵan basqa ulıwma integralı bolsa hám $\eta=\psi(x,y)$ dep alsaq, (4) teńlemede $\bar{a}_{22}=0$ boladı.

Bizge belgili, (6) teńleme tómendegi eki

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{\delta}}{a_{11}}\,, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{\delta}}{a_{11}} \tag{7}$$

teńlemege ajıraladı, bul jerde $\delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$. Koren` belgisi astındaǵı δ nıń belgisi (1) teńlemeniń tipin anıqlaydı, yaǵnıy (1) teńleme $\delta>0$ ushın $M(x,y)$ tochkada giperbolalıq tipke jatadı dep aytıladı.

Giperbolalıq tiptegi teńlemelerde $\delta>0$ bolǵanı ushın (7) teńlemelerdiń oń tárepleri haqıykıy hám hár qıylı bolıp, olardıń ulıwma integralları $\varphi(x,y)=C$

hám $\psi(x,y)=C$ haqıyqıy hám hár qıylı xarakteristikalar toparın anıqlaydı. Onda $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ almastırıwdan soń (4) den

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

teńlemeni alamız, bul jerde $\Phi=-\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}$. Bul giperbolalıq tipdegi teńlemelerdiń kanonikalıq túri bolıp tabıladı.

Mısal 1. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ x\neq 0,\ y\neq 0$ teńlemesiniń tipin ayırıń hám onı kanonikalıq túrge alıp keliń.

Sheshiliwi. Teńlemepde $a_{11}=y^2$, $a_{12}=0$ hám $a_{22}=-y^2$ bolǵanlıqtan

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=x^2y^2>0$$

bolıp, teńleme giperbolalıq tipke jatadı.

Endi berilgen teńlemeni kanonikalıq túrge alıp kelemiz. Onıń ushın dáslep

$$x^2dy^2-y^2dx^2=0$$

xarakteristikalıq teńlemesin jazıp alamız. Bul xarakteristikalıq teńleme ózgeriwshileri ajıralatuǵın eki

$$xdy-ydx=0,\ xdy+ydx=0$$

teńlemelerge ajıraladı. Bul teńlemelerdi integrallap

$$xy=C_1,\ \frac{y}{x}=C_2$$

túrindegi ulıwma integallarǵa iye bolamız. Bunnan $y=\frac{C_1}{x}$ giperbolalar semeystvosı hám $y=C_2x$ tuwrıları berilgen teńlemeniń xarakteristikaları bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı.

Ulıwma teoriyaǵa muwapıq

$$\xi=xy,\ \eta=\frac{y}{x}$$

formulası boyınsha jańadan belgilew kiritemiz hám teńlemedegi x hám y boyınsha alınǵan dara tuwındılardı ξ hám η boyınsha boyınsha alınǵan tuwındılar menen almastıramız:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=$$

$$=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}=$$

$$=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Tabılǵan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ hám $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ lardıń mánislerin teńlemedegi orınlarına qoyıp, bir qatar ápiwaylastırıwlar jasasaq

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2xy}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

yamasa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

túrindegi berilgen teńlemeniń kanonikalıq teńlemesine iye bolamız.

1.2. Parabolalıq tiptegi teńlemeler. Parabolalıq tiptegi teńlemede $\delta=0$ bolıp, (7) teńlemeler ústpe-úst túsedi hám (6) teńlemeniń ulıwma integralı $\varphi(x,y)=C$ boladı. Bul jaǵdayda $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ dep alamız, bunda $\eta=\eta(x,y)$ erikli túrde tańlap alınǵan funkciya. Usınday saylap alınǵan ózgeriwshiler ushın $\bar{a}_{11}=0$ boladı, yaǵnıy

$$\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=0.$$

Al $a_{12}^2=a_{11}a_{22}$ yamasa $a_{12}=\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{22}}$ bolǵanlıqtan, sońǵı teńlikti

$$\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=\left(\sqrt{a_{11}}\xi_x+\sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2=0$$

túrinde jazıwǵa boladı. Bul teńlik bizge $\bar{a}_{12}=0$ bolatuǵınlıǵın kórsetiwge járdem beredi. Haqıyqatında da

$$\overline{a_{12}}=a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=$$

$$=a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=$$

$$=\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial y}\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=0$$

Nátiyjede (4) teńleme

$$\bar{a}_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\bar{F}=0$$

kóriniske iye boladı. Sońǵı teńliktiń eki jaǵın $\bar{a}_{22}$ bólip

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

túrindegi teńlemege iye bolamız, bul jerde $\Phi=-\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}$. Bul sońǵı teńleme berilgen (1) teńlemeniń kanonikalıq forması bolıp tabıladı. Eger bul teńlemeniń oń tárepinde $\frac{\partial u}{\partial\xi}$ qatnaspasa, bul kanonikalıq teńleme ξ parametrge baylanıslı bolǵan ápiwayı differenciallıq teńleme boladı.

Mısal 2. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ x\neq 0$ teńlemesiniń tipin ayırıń hám onı kanonikalıq túrge alıp keliń.

Sheshiliwi. Teńlemepde $a_{11}=x^2,\ a_{12}=xy$ hám $a_{22}=y^2$ bolǵanlıqtan

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=x^2y^2-x^2y^2=0$$

bolıp, teńleme parabolalıq tipke jatadı.

Endi berilgen teńlemeni kanonikalıq túrge alıp kelemiz. Onıń ushın dáslep

$$x^2dy^2 - 2xydxdy + y^2dx^2 = 0$$

xarakteristikalıq teńlemesin jazıp alamız. Bul xarakteristikalıq teńlemeni

$$(xdy - ydx)^2 = 0$$

túrinde jazıwǵa boladı. Bunnan

$$xdy - ydx = 0$$

bolıp, bunı integrallasaq giperbolalar semeystvosı bolıp tabılatuǵın xarakteristikalardıń bir

$$\frac{y}{x} = C$$

semeystvosına iye bolamız.

Qolaylılıq ushın $\eta = y$ dep tańlap alıp

$$\xi = \frac{y}{x};\ \eta = y$$

formulası boyınsha jańa ózgeriwshilerdi kiritemiz hám teńlemedegi x, y boyınsha alınǵan dara tuwındılardı ξ hám η boyınsha boyınsha alınǵan dara tuwındılar menen almastıramız:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Tabılǵan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ hám $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ lardıń mánislerin teńlemedegi orınlarına qoyıp

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

túrindegi berilgen teńlemeniń kanonikalıq túrine iye bolamız.

1.3. Elliptikalıq tiptegi teńlemeler. Elliptikalıq tipdegi teńlemelerde $\delta < 0$ bolıp (7) degi teńlemelerdiń oń tárepleri kompleks ańlatpalar boladı. Meyli

$\varphi(x,y)=C$ (7) teńlemeniń kompleks integralı bolsın dep uyǵarayıq. Onda $\varphi(x,y)$ ke túyinles bolǵan $\varphi*(x,y)$ funkciya ushın $\varphi*(x,y)=C$ ańlatpa (7) ge túyinles bolǵan teńlemeniń ulıwma integralı boladı. Bul jaǵdayda $\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\varphi^*(x,y)$ járdeminde kompleks ózgeriwshilerge ótemiz. Nátiyjede teńleme giperbolalıq tipdegi teńleme sıyaqlı kanonikalıq kóriniske iye boladı. Kompleks ózgeriwshilerden qutılıw ushın $\xi=\alpha+i\beta,\ \eta=\alpha-i\beta$ yamasa $\alpha=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi^*),\ \beta=\frac{1}{2i}(\varphi-\varphi^*)$ almastırıw jasap, jańa α hám β ózgeriwshilerdi kiritemiz. Sonda

$$\bar{a}_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\bar{a}_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\bar{a}_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=\bar{a}_{11}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+2\bar{a}_{12}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\bar{a}_{22}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2-$$

$$-\bar{a}_{11}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2-2\bar{a}_{12}\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}-\bar{a}_{22}\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+2i[\bar{a}_{11}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\bar{a}_{12}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)+$$

$$+\bar{a}_{22}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y}]=0$$

teńligi orınlı bolıp, bunnan $\bar{a}_{11}=\bar{a}_{22}$ hám $\bar{a}_{12}=0$ boladı. Nátiyjede (4) den elliptikalıq tipdegi teńlemelerdiń kanonikalıq túri payda boladı

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=\Phi\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right),\qquad \Phi=-\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}$$

Mısal 3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ teńlemesiniń tipin ayırıń hám onı kanonikalıq túrge alıp keliń.

Sheshiliwi. Teńlemede $a_{11}=1;\ a_{12}=-2$ hám $a_{22}=5$ bolǵanlıqtan

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=4-5=-1<0$$

bolıp, teńleme elliptikalıq tipke jatadı.

Endi berilgen teńlemeni kanonikalıq túrge alıp kelemiz. Onıń ushın dáslep

$$dy^2+4dxdy+5dx^2=0$$

yamasa

$$y'=-2+i;\ \ y'=-2-i$$

xarakteristikalıq teńlemesiniń

$$y=(-2+i)x+C_1;\quad y=(-2-i)x+C_2$$

túrindegi eki ulıwma integralın anıqlaymız. Bul jerde

$$\varphi=y-(-2+i)x;\quad \varphi*=y-(-2-i)x$$

bolǵanlıqtan

$$\alpha=\frac{\varphi+\varphi*}{2}=y+2x;\quad \alpha=\frac{\varphi-\varphi*}{2i}=-x$$

bolıp, jańa belgilewlerge

$$\xi=\alpha+i\beta=y+2x-ix,\quad \eta=\alpha-i\beta=y+2x+ix$$

formulası menen ótemiz hám $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ tuwındıların esaplap, berilgen teńlemedegi orınlarına qoysaq

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

túrindegi berilgen teńlemeniń kanonikalıq teńlemesine iye bolamız.

1.4. Turaqlı koefficientli sızıqlı differenciallıq teńlemeler. Eger (1) teńleme

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f(x,y) \qquad (8)$$

túrine iye bolıp, $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ lar turaqlı sanlar bolsa, onda bunday teńlemelerdi qarastırıw óz aldına qızıǵıwshılıq tuwdıradı. (8) teńleme ushın xarakteristikalıq teńlemede turaqlı koefficientli bolıp, teńlemeniń xarakteristikaları

$$y=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x+C_1$$

hám

$$y=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x+C_2$$

boladı. Jańa ózgeriwshilerge ótkennen keyin (8) teńlemeniń kanonikalıq teńlemesi tómendegilerdiń birewine teń bolıp qaladı.

Eger (8) teńleme giperbolalıq tipke jatsa, yaǵnıy $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ bolsa, onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + b_1\frac{\partial u}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = f_1(\xi,\eta)$$

yamasa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = f_1(\xi,\eta);$$

eger (8) teńleme parabolalıq tipke jatsa, yaǵnıy $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ bolsa, onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = f_1(\xi,\eta);$$

eger (8) teńleme elliptikalıq tipke jatsa, yaǵnıy $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ bolsa, onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = f_1(\xi,\eta).$$

Eger jańadan belgisiz $\vartheta(\xi,\eta)$ funkciyasın

$$u(\xi,\eta) = \vartheta(\xi,\eta)\cdot e^{\lambda\xi+\mu\eta}$$

formulası boyınsha kiritsek, onda (8) teńlemeniń kanonikalıq teńlemesin bunnan bılay jáne ápiwaylastırıwǵa boladı.

Mısal 4. Turaqlı koefficientli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

teńlemeni kanonikalıq túrge alıp keliń hám bul kanonikalıq teńlemeni jánede ápiwaylastırıń.

Sheshiliwi. Teńlemede $a_{11} = 1;\ a_{12} = 2$ hám $a_{22} = 5$ bolǵanlıqtan

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 - 5 = -1 < 0$$

bolıp, teńleme elliptikalıq tipke jatadı.

Endi berilgen teńlemeni kanonikalıq túrge alıp kelemiz. Onıń ushın dáslep

$$dy^2 - 4dxdy + 5dx^2 = 0$$

xarakteristikalıq teńlemesiniń

$$C_1 = 2x - y + xi;\ C_2 = 2x - y - xi$$

túrindegi eki ulıwma integralın anıqlap, keyinshelik

$$\xi = 2x - y, \quad \eta = x$$

belgilewin kiritemiz. Onda teńleme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial u}{\partial \xi} - 2\frac{\partial u}{\partial \eta} + u = 0$$

túrindegi kanonikalıq kóriniske iye boladı.

Endi

$$u(\xi,\eta) = \vartheta(\xi,\eta) \cdot e^{\lambda\xi + \mu\eta}$$

belgilew kiritip, onı sońǵı kanonikalıq teńlemege qollansaq $\vartheta(\xi,\eta)$ ǵa qarata

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} + 2(\lambda - 1)\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + 2(\mu - 1)\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} + (\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda - 2\mu + 1)\vartheta = 0$$

túrindegi teńlemege iye bolamız.

Eger bul sońǵı teńlemeden $\xi = \eta = 1$ dep alsaq, onda ol

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} - \vartheta = 0$$

túrine iye bolıp, kanonikalıq teńlemeniń jánede ápiwayılasqan kórinisine iye bolamız.

§2. Kóp ǵárezsiz ózgeriwshili ekinshi tártipli dara tuwındılı sızıqlı differenciallıq teńlemelerdiń klassifikaciyası

2.1. Kóp ǵárezsiz ózgeriwshili differenciallıq teńlemelerdiń tipleri hám kanonikalıq kórinisleri. Matematikalıq fizika teńlemeleri menen tanısıwdıń dáslepki etapları ekinshi tártipli sızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdi úyreniwden, bunday teńlemelerdi kanonikalıq kórinisi dep atalatuǵın múmkin bolǵanınsha ápiwayı kóriniske keltiriw jolları menen tanısqan maqul boladı.

Haqıyqıy $a_{ij}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $(i, j = 1, 2, ..., n)$ koefficientli ekinshi tártipli kvazisızıqlı

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (1)$$

kórinistegi dara tuwındılı differenciallıq teńleme kanonikalıq kóriniste boladı, egerde teńlemeniń a_{ij} koefficientleri ushın

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \ i \neq j, \\ 0, \pm 1, \ i = j \end{cases}$$

orınlı bolsa. Kanonikalıq kóriniste jazılǵan teńlemeler tómendegi múmkin bolǵan tiplerdiń birine jatadı:

1. Giperbolalıq tip: $\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} - \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Phi = 0, \quad 0 < r < n.$

Bul jerde ekinshi tártipli tuwındılar teńlemege hár qıylı belgiler menen kiredi hám olardıń ulıwma sanı burınǵı n ge teń boladı.

2. Parabolalıq tip: $\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} - \sum_{i=r+1}^{s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Phi = 0, \ 0 < r < s < n.$

Bul jaǵdayda ekinshi tártipli tuwındılardıń bazı bir bólegi teńlemede qatnaspaydı.

3. Elliptikalıq tip: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Phi = 0.$

Bul jaǵdayda n sandaǵı ekinshi tártipli tuwındılar teńlemege tolıq qatnasadı.

Ǵárezsiz ózgeriwshilerdi $y_k = y_k(x)$ túrindegi belgilew arqalı erikli koefficientli (1) túrindegi teńlemeni erikli $x = x_0$ tochkada kanonikalıq kóriniske keltiriwge boladı, bul jerde $det\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right| \neq 0.$

(1) degi tuwındılardı $\tilde{u}$ jańa funkciyasınan y_k jańa ózgeriwshiler boyınsha alınǵan tuwındılar menen ańlatıp, túrlendirilgen

$$\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{kl} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \tilde{\Phi} = 0$$

teńlemege iye bolamız. Jańa $\tilde{a}_{kl}(y)$ koefficientler burınǵı $a_{ij}(x)$ koefficientler arqalı

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{\mathrm{i}, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \tag{2}$$

formulası arqalı ańlatıladı.

Teńlemeniń koefficientlerin túrlendiriw nızamı, sızıqlı algebradan belgili bolǵan ózgeriwshilerdi sızıqlı almastırıw arqalı kvadratlıq formanıń koefficientlerin túrlendiriw nızamı menen birdey boladı. Haqıyqatında da, eger

$$K(p,p)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j$$

kvadratlıq forması hám burıńǵı p_i ózgeriwshilerdi jańa q_k ózgeriwshilerge ótkeretuǵın ayrıqsha bolmaǵan

$$p_i=\sum_{k=1}^{n} s_{ik} q_k, \quad det\left|S\right|\neq 0$$

S sızıqlı túrlendiriw berilgen bolsa, onda jańa kvadratlıq forma

$$K(q,q)=\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{kl} q_k q_l$$

kóriniske iye boladı, bul jerde

$$\tilde{a}_{kl}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_{ik} s_{jl}\,.$$

Bunı (2) menen salıstırsaq

$$s_{ik}=\left.\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|_{x=x_0}$$

boladı.

Sızıqlı algebradan málim, kvadratlıq formanı kanonikalıq kóriniske alıp keliwshi S sızıqlı túrlendiriwdi Lagranj metodı menen yamasa tolıq kvadratqa alıp keliw usılı menen, sonday-aq matricanı úshmúyeshlik kóriniske alıp keliwshi Yakobi usıllarınıń biri menen hámme waqıt tabıwǵa boladı.

2.2. Kóp ǵárezsiz ózgeriwshili turaqlı koefficientli sızıqlı differenciallıq teńlemelerdiń kanonokalıq kórinisleri. Eger (1) teńlemedegi koefficientler turaqlı bolsa, onda S matricası járdeminde ózgeriwshilerdi sızıqlı almastırıwdıń

$$y_k=\sum_{i=1}^{n} s_{ik} x_i$$

formulası (1) teńlemeni kanonikalıq kóriniske barlıq $x\in R^n$ lar ushın alıp keledi.

Mısal 1. $4u_{xx}+2u_{yy}-6u_{zz}+6u_{xy}+10u_{xz}+4u_{yz}+2u=0$ teńlemesiniń tipin ayırıń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemege sáykes onıń kvadratlıq forması

$$K(p,p)=4p_1^2+2p_2^2-6p_3^2+6p_1p_2+10p_1p_3+4p_2p_3$$

túrine iye bolıp, onı Lagranj usılına muwapıq tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$K(p,p)=\frac{1}{4}\left(4p_1+3p_2+5p_3\right)^2-\frac{1}{4}\left(p_2+7p_3\right)^2.$$

Bunnan eger

$$q_1=\frac{1}{2}\left(4p_1+3p_2+5p_3\right)=\xi_1,\quad q_2=\frac{1}{2}\left(p_2+7p_3\right),\ q_3=p_3$$

dep alıp

$$p_1=\frac{1}{2}q_1-\frac{3}{2}q_2+4q_3,\quad p_2=2q_2-7q_3,\ p_3=q_3$$

túrlendiriwin jasasaq

$$K(q,q)=q_1^2-q_2^2$$

túrindegi berilgen teńlemege sáykes kvadratlıq formanıń kanonikalıq kórinisine iye bolamız. Bul bolsa, anıqlamaǵa muwapıq berilgen teńlemeniń parabolalıq tipke jatatuǵınlıǵın kórsetedi.

Mısal 2. $u_{xx}-4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yy}+u_{zz}-2xyu_x+3xu=0$ teńlemesiniń tipin ayırıń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemege sáykes kvadratlıq forma

$$K(p,p)=p_1^2-4p_1p_2+2p_1p_3+4p_2^2+p_3^2=$$

$$=(p_1-2p_2+p_3)^2+(p_2+p_3)^2-(p_2-p_3)^2$$

bolıp, joqarıdaǵıday

$$q_1=p_1-2p_2+p_3,\quad q_2=p_2+p_3,\ q_3=p_2-p_3$$

belgilew jasap, soń

$$p_1=q_1+\frac{1}{2}q_2+\frac{3}{2}q_3,\quad p_2=\frac{1}{2}\left(q_2+q_3\right),\ p_3=\frac{1}{2}\left(q_2-q_3\right)$$

túrlendiriwin jasasaq

$$K(q,q) = q_1^2 + q_2^2 - q_3^2$$

túrindegi berilgen teńlemege sáykes kvadratlıq formanıń kanonikalıq kórinisine iye bolamız. Bul bolsa berilgen teńlemeniń giperbolalıq tipke jatatuǵınlıǵın kórsetedi.

Mısal 3. $u_{xy} - u_{xz} = 0$ teńlemesin kanonikalıq túrge alıp keliń hám tipin ayırıń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemege sáykes onıń

$$K(p,p) = p_1 p_2 - p_1 p_3$$

kvadratlıq formasın jazıp alamız hám Lagranj usılın qollanamız. Bul usıldıń maǵanası sonnan ibarat bolıp, ol kvadratlıq formanı izbe-iz tolıq kvadratqa alıp keledi. Biziń jaǵdayda $K(p,p)$ da kvadrat qatnaspaǵan. Bul jaǵdayda p_1 hám p_2 niń ornına jańa s_1 hám s_2 ózgeriwshilerin kiritemiz:

$$\begin{cases} s_1 = \dfrac{1}{2}(p_1 + p_2), \\ s_1 = \dfrac{1}{2}(p_1 - p_2). \end{cases}$$

Bunnan

$$\begin{cases} p_1 = s_1 + s_2, \\ p_2 = s_1 - s_2. \end{cases}$$

Onda

$$K(p,p) = p_1 p_2 - p_1 p_3 = s_1^2 - s_2^2 - (s_1 + s_2) p_3 = \left(s_1 - \frac{1}{2} p_3 \right)^2 -$$

$$-\left(s_2 + \frac{1}{2} p_3 \right)^2 = \frac{1}{4}(p_1 + p_2 - p_3)^2 - \frac{1}{4}(p_1 - p_2 - p_3)^2$$

bolıp, kvadratlıq formanıń jańa ózgeriwshilerin kiritsek

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{2}(p_1 + p_2 - p_3), \\ q_2 = \dfrac{1}{2}(p_1 - p_2 + p_3), \\ q_3 = p_3, \end{cases}$$

onda kvadratlıq formanıń kanonikalıq kórinisi

$$K(q,q)=q_1^2-q_2^2$$

bolıp, q_3 ózgeriwshini $det|S|\neq 0$ shártin qanaatlandıratuǵınday etip erikli túrde saylap alıwǵa boladı.

$$\begin{cases} p_1=q_1+q_2, \\ p_2=q_1-q_2+q_3, \\ p_3=q_3 \end{cases}$$

bolǵanlıqtan

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bolıp, sáykes ózgeriwshilerdi sızıqlı almastırıw

$$\xi=x+y,\ \eta=x-y,\ \gamma=y+z$$

túrinde ámelge asırıladı.

Endi teńlemedegi tuwındılardı jańa ózgeriwshiler menen almastıramız:

$$u_x=\tilde{u}_\xi+\tilde{u}_\eta,$$
$$u_{xz}=\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\xi},$$
$$u_{xy}=\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\xi\gamma}-\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_{\eta\gamma}$$

hám bulardı berilgen teńlemedegi orınlarına qoyıp, berilgen teńlemeniń kanonikalıq formasına iye bolamız

$$\tilde{u}_{\xi\xi}-\tilde{u}_{\eta\eta}=0.$$

Solay etip berilgen teńleme parabolalıq tipke jatadı eken.

Mısal 4. $u_{xy}-u_{xz}-u_{yz}=0$ teńlemesin kanonikalıq túrge alıp keliń hám tipin ayırıń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemege sáykes onıń kvadratlıq formasın jazıp, keyinshelik Lagranj usılın qollanamız

$$K(p,p)=p_1p_2-p_1p_3-p_2p_3=$$
$$=\frac{1}{4}\left(p_1+p_2-2p_3\right)^2-\frac{1}{4}\left(p_1-p_2\right)^2-p_3^2.$$

Eger

$$q_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2 - 2p_3), \quad q_2 = \frac{1}{2}(p_1 - p_2), \; q_3 = p_3$$

belgilewden soń

$$\begin{cases} p_1 = q_1 - q_2 + q_3, \\ p_2 = q_1 + q_2 + q_3, \\ p_3 = q_3 \end{cases}$$

túrlendiriw jasasaq

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bolıp, sáykes ózgeriwshilerdi sızıqlı almastırıw

$$\xi = x + y, \;\; \eta = -x + y, \;\; \gamma = x + y + z$$

túrinde ámelge asırıladı. Endi teńlemedegi tuwındılardı jańa ózgeriwshiler menen almastıramız:

$$u_{xy} = \tilde{u}_{\xi\xi} - \tilde{u}_{\eta\eta} + \tilde{u}_{\gamma\gamma} + 2\tilde{u}_{\xi\gamma},$$

$$u_{xz} = \tilde{u}_{\xi\xi} - \tilde{u}_{\eta\gamma} + \tilde{u}_{\gamma\gamma},$$

$$u_{yz} = \tilde{u}_{\xi\gamma} + \tilde{u}_{\eta\gamma} + \tilde{u}_{\gamma\gamma}.$$

Bulardı berilgen teńlemedegi orınlarına qoyıp, berilgen teńlemeniń

$$\tilde{u}_{\xi\xi} - \tilde{u}_{\eta\eta} - \tilde{u}_{\gamma\gamma} = 0$$

kanonikalıq formasına iye bolamız. Demek berilgen teńleme giperbolalıq tipke jatadı eken.

Eskertiw. Berilgen teńlemeniń tipin onıń koefficientlerinen dúzilgen matrica boyınsha hám ámelge asırıwǵa boladı. Meyli (1) teńlemeniń koefficientlerin $a_{ij} = a_{ji}$ bolatuǵınday etip simmetriyalı kóriniste jazıp alayıq. Onda bul teńlemeni klassifikaciyalaw, onıń bas aǵzalarınıń koefficientlerinen dúzilgen matricanıń menshikli mánisleriniń qásiyetlerine baylanıslı boladı. Bizge belgili

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrica simmetriyalı bolǵanı ushın onıń menshikli mánisleri haqıyqıy boladı. Meyli (1) teńlemeniń koefficientleri anıqlanǵan bazı-bir $M\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ tochkanı fiksirleyik hám bul tochkada A matricası α sandaǵı oń, β sandaǵı teris hám γ sandaǵı nol` bolǵan xarakteristikalıq sanlarǵa iye bolsın dep uyǵarayıq, bul jerde $\alpha+\beta+\gamma=n$. Onda bul teńlemeni usı tochkada (α,β,γ) tipke jatadı dep aytıwǵa boladı.

Eger A matricasınıń elementleri turaqlı sanlardan ibarat bolsa, onda teńleme pútin keńislikte bir tipke tiyisli boladı. Eger teńlemeniń barlıq aǵzalarınıń belgilerin ózgertsek, onda α hám β sanlarınıń ornı almasadı, yaǵnıy (α,β,γ) hám $(\beta,\alpha,\ \gamma)$ tipler birdey boladı.

Tómendegi mısallardı qarastırayıq.

1). $u_{tt}-a^2\,\Delta u = f\left(x,y,t\right)$, bul jerde $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Bul teńlemeniń bas aǵzalarınıń koefficientlerinen dúzilgen matrica

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$$

bolıp, onıń xarakteristikalıq sanları $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=\lambda_3=-a^2$. Bunnan kórinip turǵanınday, membrananıń terbelis teńlemesi pútin keńislikte $(2,1,0)$ tipke tiyisli.

2). Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi dep atalatuǵın $u_t-\Delta u = f(x,y,z,t)$ teńlemesiniń $(3,0,1)$ tipke tiyisli ekenligin kórsetiwge boladı, sebebi onıń xarakteristikalıq sanları $\lambda=0,\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-1.$

3). $\left(I+y^2\right)u_{xx}-2xyu_{xy}+\left(I+x^2\right)u_{yy}=0$ teńleme ushın

$$A=\begin{pmatrix} 1+y^2 & -xy \\ -xy & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

bolıp, onıń xarakteristikalıq sanları $\lambda_1=1+x^2+y^2,\ \lambda_2=1$ bolǵanlıqtan berilgen teńleme pútin keńislikte $(2,0,0)$ tipke tiyisli boladı.

Solay etip tómendegi úsh jaǵdayǵa iye bolamız:

1) egerde berilgen tochkada A matricasınıń xarakteristikalıq sanlarınıń hámmesi nol`den ózgeshe bolıp, olar birdey belgige iye bolsa, (1) teńleme usı tochkada elliptikalıq tipke jatadı.

2) egerde berilgen tochkada A matricasınıń xarakteristikalıq sanlarınıń birewi nol`ge teń bolıp, qalǵanları nol`den ózgeshe hám birdey belgige iye bolsa, onda (1) teńleme usı tochkada parabolalıq tipke jatadı.

3) egerde berilgen tochkada A matricasınıń xarakteristikalıq sanlarınıń hámmesi nol`den ózgeshe bolıp, olardan birewi qalǵanları menen qarama-qarsı belgige iye bolsa, onda (1) teńleme usı tochkada giperbolalıq tipke jatadı. Basqasha aytqanda tómendegi úsh jaǵday orınlı:

$(n,0,0)=(0,n,0)$ - elliptikalıq tip;

$(n-1,0,1)=(0,n-1,1)$ - parabolalıq tip;

$(n-1,1,0)=(1,n-1,0)$ -giperbolalıq tip.

Joqarıda keltirilgen tiplerden basqasha kórinistegi tipler ul`tragiperbolalıq tip dep ataladı, mısalı

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}=0$$

teńlemesi ul`tragiperbolalıq tiptegi teńleme boladı.

§3. Dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń ulıwma integralı

Bizge málim, n tártipli ádettegi differenciallıq teńlemeler ushın ayrıqsha sheshimlerden basqa barlıq sheshimler jıyındısı ǵárezsiz ózgeriwshi xtıń hám sonıń menen birge n sandaǵı $C_1, C_2,...,C_n$ erikli turaqlılardıń funkciyası menen kórsetiledi. Kerisinshe, $n$parametrden ǵárezli bolǵan qálegen $u=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ funkciyalar semeystvosı ushın $C_1,C_2,...,C_n$ parametrlerin

$$\begin{cases} u'=\varphi'(x,C_1,C_2,...,C_n), \\ u''=\varphi''(x,C_1,C_2,...,C_n), \\ ...., \\ u^{(n)}=\varphi^{(n)}(x,C_1,C_2,...,C_n) \end{cases}$$

sistemasınan izbe-iz joǵaltıw arqalı alınatuǵın $u=\varphi$ funkciyası sheshim bolatuǵın n tártipli differenciallıq teńleme bar boladı.

Dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın bunday maǵlıwmatlar quramalıraq boladı. Bul jaǵdayda da ulıwma sheshim dep atalatuǵın, yaǵnıy bazı-bir erikli elementlerin fiksirley otırıp, ulıwma sheshimnen basqa qálegen dara sheshimin alıwǵa bolatuǵın sheshimler jıyındısın izlewge boladı. Dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın bunday erikli elementler endi erikli turaqlılar bolmaydı, al erikli funkciyalar boladı hám bunday erikli funkciyalar sanı differenciallıq teńlemeniń tártibine teń boladı. Sonıń menen birge bunday erikli funkciyalardıń argumentleri sanı u sheshimniń argumentler sanınan bir birlikke az boladı.

Meyli bazı-bir dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń ulıwma integralın anıqlaw máselesin qarastırayıq. Sonı aytıp ótken maqul, bul soraw dara tuwındılı differenciallıq teńlemeni kanonikalıq kóriniske túrlendiriw menen tıǵız baylanıslı.

Mısal 1. Meyli $u=u(x,y)$. Bul funkciya ushın

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

differenciallıq teńlemesi $u(x,y)$ funkciyasınıń y ke ǵárezsiz ekenligin ańlatadı,yaǵnıy $u=u(x)$, bul jerde $u(x)$ erikli funkciya.

Mısal 2. $u=u(x,y)$ funkciyası ushın

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$

differenciallıq teńlemesi $u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)$ túrindegi ulıwma sheshimge iye boladı, bul jerde $\varphi(x)$ hám $\psi(y)$ erikli differenciallanıwshı funkciyalar.

Mısal 3. Meyli $u=u(x,y)$. Tómendegi

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

differenciallıq teńlemeni qarastırayıq. Bul teńlemeniń ulıwma integralıń tabıw ushın

$$x+y=\xi,\quad x-y=\eta$$

túrindegi ózgeriwshilerge almastırıw jasaymız. Sonda

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

bolıp, berilgen teńleme jańa ózgeriwshilerge qarata

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

túrindegi teńlemege aylanadı. Bunnan $u=f(\xi)$ bolıp, burıńgı ózgeriwshilerge qaytıp ótsek $u=f(x+y)$ túrindegi berilgen teńlemeniń ulıwma sheshimine iye bolamız, bul jerde f erikli differenciallanıwshı funkciya.

Mısal 4. Meyli $u=u(x,y)$. Tómendegi

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

differenciallıq teńlemeni qarastırayıq. Bul teńlemeni integrallaw ushın

$$\frac{y}{x}=\xi,\quad y=\eta$$

túrindegi ózgeriwshilerge almastırıw jasaymız. Sonda

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{y}{x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 0=-\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{y}{x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{1}{x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

bolıp, berilgen teńleme jańa ózgeriwshilerge qarata

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

túrindegi teńlemege aylanadı. Bunnan $u=f(\xi)$ bolıp, burıńgı ózgeriwshilerge qaytıp ótsek $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$ túrindegi berilgen teńlemeniń ulıwma sheshimine iye bolamız, bul jerde f erikli differenciallanıwshı funkciya.

Mısal 5. Meyli $u = u(x, y)$. Tómendegi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

differenciallıq teńlemeni qarastırayıq. Bul teńlemeni integrallaw ushın

$$x + y = \xi, \;\; x - y = \eta$$

túrindegi ózgeriwshilerge almastırıw jasaymız. Sonda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

bolıp, bunı berilgen teńlemedegi orınlarına qoysaq, teńleme

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

kóriniske iye boladı. Bunnan $u = f(\xi) + g(\eta)$ bolıp, burınǵı ózgeriwshilerge qaytıp ótsek berilgen teńlemeniń

$$u = f(x + y) + g(x - y)$$

túrindegi ulıwma sheshimine iye bolamız, bul jerde f hám g lar erikli eki ret differenciallanıwshı funkciyalar.

Mısal 6. Meyli $u = u(x, y)$. Tómendegi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

differenciallıq teńlemeni qarastırayıq. Bul teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$u = f(x + iy) + g(x - iy)$$

túrine iye boladı, bul jerde f hám g lar erikli eki ret differenciallanıwshı funkciyalar.

Matematikalıq fizikanıń ayırım máselelerin sheshiw barısında ulıwma integraldı qollanıw jaqsı nátiyje beredi. Mısal ushın, aytayıq bazı-bir process bir ólshemli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

tolqın teńlemesi menen súwretlensin. Eger ózgeriwshilerdi $\vartheta t = y$ túrinde almastırsaq, onda berilgen teńleme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

túrine iye bolıp, bunıń ulıwma integralı

$$u = f(x+y)+g(x-y)$$

boladı. Joqarıdağı belgilewdi esapqa alsaq, onda berilgen teńlemeniń ulıwma integralı

$$u = f(x+at)+g(x-at)$$

boladı. Bul jerde $f(x+at)$ forması usı f funkciyası menen anıqlanatuǵın hám koordinata basınan shep tárepke a tezlik penen taralatuǵın tegis tolqın. Bunday tolqın keri tolqın dep ataladı. Al $g(x-at)$ funkciyası bolsa koordinata basınan oń tárepke a tezlik penen taralatuǵın tegis tolqın bolıp, bul tolqınlar tuwrı tolqın dep ataladı. Solay etip, qarastırılıp atırǵan process eki tolqınnıń qosındısınan payda bolatuǵın tolqındı súwretlewshi process bolıp esaplanadı.

Meyli múyeshlik koordinataǵa ǵárezsiz

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

teńlemesi menen súwretlenetuǵın processti qarastırayıq. Bul teńleme radiallıq terbelis dep atalatuǵın sferalıq koordinatada jazılǵan úsh

ólshemli tolqın teńlemesi bolıp esaplanadı. Eger $u=\dfrac{\vartheta}{r}$ belgilew jasasaq, onda

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r}=r\frac{\partial \vartheta}{\partial r}-\vartheta,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\vartheta,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}$$

bolıp, nátiyjede berilgen teńleme

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=0$$

túrine iye boladı. Bunnan

$$\vartheta=f(r+at)+g(r-at)$$

yamasa

$$u=\frac{1}{r}f(x+at)+\frac{1}{r}g(x-at)$$

kelip shıǵadı. Bul ulıwma integraldıń birinshi qosılıwshısı sheksizlikten koordinata basına qaray a tezlik penen taralıwshı sferalıq tolqındı súwretleydi (keri tolqın), al ekinshi qosılıwshı koordinata basınan sheksizlikke qaray a tezlik penen taralıwshı sferalıq tolqındı súwretleydi (tuwrı tolqın). Solay etip, bul jaǵdayda da berilgen teńlemeniń ulıwma sheshimi eki tuwrı hám keri tolqınlardıń qosındısınan ibarat boladı.

Qosımsha sorawlar

1. Dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler dep qanday teńlemelerge aytıladı?
2. Teńlemeniń ulıwma kórinisi qanday boladı?
3. Teńlemeniń tártibi dep nege aytıladı?
4. Matematikalıq fizikanıń teńlemeleri dep qanday teńlemelerge aytıladı?
5. Eki ǵárezsiz ózgeriwshige iye ekinshi tártipli sızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler dep qanday teńlemelerge aytıladı?
6. Eki ǵárezsiz ózgeriwshige iye ekinshi tártipli kvazisızıqlı dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler dep qanday teńlemelerge aytıladı?
7. Qanday máselelerge korrekt qoyılǵan máseleler dep aytıladı?
8.Teńlemeniń bas koefficientleri dep qanday koefficientlerge aytıladı hám bul koefficientler boyınsha onıń tipi qalay anıqlanadı?
9.Teńlemeniń xarakteristikalıq teńlemesi dep qanday teńlemege aytıladı?
10. Xarakteristikalıq teńlemeniń integralları boyınsha alınǵan, berilgen teńlemeniń giperbolalıq, parabolalıq hám elliptikalıq tiptegi kanonikalıq kórinisleri qanday boladı?
11.Kóp ǵárezsiz ózgeriwshige iye ekinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler dep qanday teńlemelerge aytıladı?

12. Bunday teńlemeniń ulıwma kórinisi qanday boladı?
13. Onıń bas aǵzalarınıń koefficientleri dep nege aytıladı?
14. Bul teńleme qay waqıtta simmetriyalı dep ataladı?
15. Teńleme qay waqıtta (α,β,γ) tipke jatadı dep esaplanadı?
16. Teńleme qay waqıtta giperbolalıq, parabolalıq hám elliptikalıq tipke jatadı?
17. Ádettegi differenciallıq teńlemeler menen dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń ulıwma sheshimleri arasında qanday parıq bar?

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar

I. Tómendegi turaqlı koefficientli teńlemelerdiń tipin anıqlań hám kanonikalıq túrge alıp keliń

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}+6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+13\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

6) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

7) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

8) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+5\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

9) $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

10) $7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+3u=0;$

11) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

12) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u+3xy=0;$

13) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

14) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}-15\frac{\partial u}{\partial y}+27x=0;$

15) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\frac{\partial u}{\partial x}+9\frac{\partial u}{\partial y}-9u=0;$

16) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-32u=0.$

II. Tómendegi turaqlı koefficientli teńlemelerdi kanonikalıq túrge alıp kelip, keyinshelik jáne ápiwaylastırıń

1) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+16\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+24\frac{\partial u}{\partial x}+32\frac{\partial u}{\partial y}+64u=0;$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

3) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}+4u=0;$

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

6) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

7) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u+x=0;$

8) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}-10u+4x=0;$

9) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\frac{\partial u}{\partial x}-7\frac{\partial u}{\partial y}+8u=0;$

10) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}-10u+4x=0;$

11) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

12) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

13) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-u+y=0;$

14) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u+x=0;$

15) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}+u=0;$

16) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-u+y=0;$

17) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+16\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+24\frac{\partial u}{\partial x}+32\frac{\partial u}{\partial y}+64u=0;$

18) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+12\frac{\partial u}{\partial y}+27u=0;$

19) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}+4u=0.$

III. Tómendegi ózgeriwshi koefficientli teńlemelerdiń tipin ayırıń hám kanonikalıq túrge alıp keliń

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(\cos^2 x-\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

3) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

4) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sqrt{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}-\sqrt{y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

5) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$

6) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\frac{\partial u}{\partial x}=0;$

7) $xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}y\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ x\geq 0,\ y>0;$

8) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-ctgx\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0;$

9) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$

10) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ x\geq 0;$

11) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$

12) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y(1+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

13) $xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x^2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y^2\frac{\partial u}{\partial x}=0;$

14) $(1+x^2)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2x(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0;$

15) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0;$

16) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(x-1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

IV. Tómendegi kóp ǵárezsiz ózgeriwshili teńlemelerdiń tipin anıqlań hám kanonikalıq túrge alıp keliń

1) $u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+6u_{zz}=0;$

2) $4u_{xx}-4u_{xy}-2u_{yz}+u_y+u_z=0;$

3) $u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+2u_{zz}=0;$

4) $u_{xy}-u_{xt}+u_{zz}-2u_{zt}+2u_{tt}=0;$

5) $u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}-4u_{yz}+2u_{yt}+u_{zz}=0;$

6) $u_{xx}+2u_{xz}-2u_{xt}+u_{yy}+2u_{yz}+2u_{yt}+2u_{zz}+2u_{tt}=0;$

7) $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}+u_x+u_y=0;$

8) $u_{xx}-4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yy}+u_{zz}=0;$

9) $3u_{yy}-2u_{xy}-2u_{yz}+4u=0;$

10) $u_{xx}+4u_{yy}+u_{zz}+4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yz}+2u=0;$

11) $2u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+2u_{xy}+2u_x+u_y+u_z+4u=0;$

12) $2u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-2u_{xy}+2u_x-u_y+u_z+u=0;$

13) $3u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-2u_{xy}+2u_{xz}+2u_x+2u_y+2u_z=0;$

14) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-2u_{xy}+2u_{xz}-2u_{yz}+2u_x-u_z+u=0.$

V. Tómendegi teńlemelerdiń sheshimin tabıń

1) $16u_{xx}+16u_{xy}+3u_{yy}=0;$

2) $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+u_x-u_y=0;$

3) $u_{xx}=a^2u_{yy};$

4) $u_{xy}+au_x=0;$

5) $3u_{xx}-5u_{xy}-2u_{yy}+3u_x+u_y=2;$

6) $u_{xy}+au_x+bu_y+abu=0;$

7) $u_{xy}-2u_x-3u_y+6u=2e^{x+y};$

8) $u_{xx}+2au_{xy}+a^2u_{yy}+u_x+au_y=0;$

9) $u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}=0;$

10) $u_{xx}+5u_{xy}+4u_{yy}=0;$

11) $yu_{xx}+(x-y)u_{xy}-xu_{yy}=0;$

12) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0;$

13) $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}-2xu_x=0;$

14) $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0;$

15) $u_{xx}+5u_{xy}+4u_{yy}=0;$

16) $u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}+3u_x+6u_y=0;$

17) $x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\sqrt{xy}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}-\sqrt{y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=0;$

18) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\cos^2x\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-ctgx\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0;$

19) $x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları

I. 1. Giperbolalıq tip, $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=0$. **2.** Parabolalıq tip, $\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+3\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$, bul jerde $\xi=2x-y,\ \ \eta=x$. **3.** Elliptikalıq tip, $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=0$, bul jerde $\xi=-3x-y,\ \ \eta=2x$. **4.** Parabolalıq tip, $\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+3\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$, bul jerde $\xi=x+y,\ \ \eta=3x-y$. **5.** Elliptikalıq tip, $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$, bul jerde $\xi=2x-y,\ \ \eta=x$. **6.** Giperbolalıq tip, $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{16}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$, bul jerde $\xi=x-y,\ \ \eta=3x+y$. **7.** Elliptikalıq tip, $\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$, bul jerde $\xi=x,\ \ \eta=3x+y$. **8.** Parabolalıq tip, $\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+7\frac{\partial u}{\partial\xi}+5\frac{\partial u}{\partial\eta}+u=0$, bul jerde $\xi=x+y,\ \ \eta=y$. **9.** Parabolalıq tip, $\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$, bul jerde $\xi=x-2y,\ \ \eta=x$. **10.** Giperbolalıq tip, $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{64}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}+3u\right)=0$, bul jerde $\xi=x+7y,\ \ \eta=y-x$.

11. Parabolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{4}\left(5\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0$, bul jerde $\xi=2x+y,\quad \eta=y$.

12. Elliptikalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{9}u+\left(\xi+\frac{1}{3}\eta\right)\eta=0$, bul jerde $\xi=y-x,\quad \eta=3x$.

13. Elliptikalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial u}{\partial \xi}-2\frac{\partial u}{\partial \eta}+u=0$, bul jerde $\xi=2x-y,\quad \eta=x$.

14. Giperbolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}-2\frac{\partial u}{\partial \eta}+\xi+\eta=0$, bul jerde $\xi=2x-y, \eta=x+y$.

15. Parabolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+18\frac{\partial u}{\partial \xi}+9\frac{\partial u}{\partial \eta}-9u=0$, bul jerde $\xi=x+y, \eta=2x$.

16. Elliptikalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-8u=0$, bul jerde $\xi=y-x,\quad \eta=2x$.

II. 1. $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2}+2\vartheta=0$, bul jerde $\xi=y,\quad \eta=4x-2y$, $u=e^{-\xi-\eta}\vartheta(\xi,\eta)$.

2. $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{3}{8}\vartheta=0$, bul jerde $\xi=y+(\sqrt{3}-2)x, \eta=y-(\sqrt{3}+2)x$, $u=e^{-\frac{1}{12}(3+5\sqrt{3})\xi-\frac{1}{12}(3-5\sqrt{3})\eta}\vartheta(\xi,\eta)$ **3.** $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2}=0$, bul jerde $\xi=y-\frac{1}{2}x,\ \eta=\frac{1}{2}x$, $u=e^{-(\xi+\eta)}\vartheta(\xi,\eta)$. **4.** $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}=0$, bul jerde $\xi=y-x,\quad \eta=y+x$, $u=e^{\frac{1}{32}(15\xi+8\eta)}\vartheta(\xi,\eta)$. **5.** $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{1}{36}\vartheta=0$, bul jerde $\xi=y+(\sqrt{3}-2)x$, $\eta=y-(\sqrt{3}+2)x$, $u=e^{\frac{1}{6}(1-\sqrt{3})\xi+\frac{1}{6}(1+\sqrt{3})\eta}\vartheta(\xi,\eta)$.

6. $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2}-\vartheta=0$, bul jerde $\xi=2x-y,\quad \eta=x$, $u=e^{\xi+\eta}\vartheta(\xi,\eta)$. **7.** $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{1}{2}\vartheta+\frac{\eta}{2}e^{\frac{\xi}{2}}=0$, bul jerde $\xi=2x+y, \eta=x$, $u=e^{-\frac{1}{2}\xi}\vartheta(\xi,\eta)$.

8. $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi \partial \eta}+5\vartheta-4\xi e^{\xi+2\eta}=0$, bul jerde $\xi=x, \eta=x-y$, $u=e^{-\xi-2\eta}\vartheta(\xi,\eta)$.

9. $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi \partial \eta}+99\vartheta=0$, bul jerde $\xi=x-y, \eta=y$, $u=e^{7\xi-13\eta}\vartheta(\xi,\eta)$.

10. $\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\partial\eta}+9\vartheta+4(\xi-\eta)e^{\xi+\eta}=0$, bul jerde $\xi=y-x,\ \eta=y$, $u=e^{-\xi-\eta}\vartheta(\xi,\eta)$.

11. $\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2}-\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\xi}=0$, bul jerde $\xi=3x+y,\ \eta=x,\ u=e^{\frac{1}{4}(-\xi+2\eta)}\vartheta(\xi,\eta)$.

12. $\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2}-\dfrac{15}{2}\vartheta=0$, bul jerde $\xi=2x+y,\quad \eta=x$, $u=e^{\frac{5}{2}\xi+\frac{3}{2}\eta}\vartheta(\xi,\eta)$.

13. $\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\partial\eta}-\vartheta+\xi e^{\eta}=0$, bul jerde $\xi=y,\eta=x-3y$, $u=e^{-\eta}\vartheta(\xi,\eta)$.

14. $\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{1}{2}\vartheta+\dfrac{\eta}{2}e^{\xi/2}=0$, bul jerde $\xi=y+2x,\eta=x,\ u=e^{-\xi/2}\vartheta(\xi,\eta)$.

15. $\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2}-\dfrac{3}{2}\vartheta=0$, bul jerde $\xi=2y-x,\quad \eta=x$, $u=e^{-\xi-\eta}\vartheta(\xi,\eta)$.

16. $\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\partial\eta}-\vartheta+\xi e^{\eta}=0$, bul jerde $\xi=y,\eta=x-3y$, $u=e^{-\eta}\vartheta(\xi,\eta)$.

17. $\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2}-2\vartheta=0$, bul jerde $\xi=y,\quad \eta=4x-2y$, $u=e^{-\xi-\eta}\vartheta(\xi,\eta)$.

18. $\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2}-2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\xi}=0$, bul jerde $\xi=x+y,\eta=x+y$, $u=e^{\frac{1}{32}(15\xi+8\eta)}\vartheta(\xi,\eta)$.

19. $\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2}+\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\xi}=0$, bul jerde $\xi=2x-y,\eta=x+y$, $u=e^{\xi-2\eta}\vartheta(\xi,\eta)$.

III. 1. Barlıq jerde giperbolalıq tipke jatadı, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{\eta-\xi}{32}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$, bul jerde $\xi=2x+\sin x+y,\quad \eta=2x-\sin x-y$

2. $x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k\in Z$ tochkalardan basqa barlıq jerde giperbolalıq tipke jatadı, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{\eta-\xi}{2(\eta-\xi)^2-8}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$, bul jerde $\xi=y+\sin x+\cos x$, $\eta=y-\sin x+\cos x$ **3.** Barlıq jerde elliptikalıq tipke jatadı, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\dfrac{1}{\xi-\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{1}{2\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0$, bul jerde $\xi=x^2-y^2,\quad \eta=x^2$.

4. Parabolalıq tip, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$, bul jerde $\xi=\sqrt{y}-\sqrt{x},\quad \eta=x$.

5. Parabolalıq tip, $y\neq 0$ ushın $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{2\xi}{\xi-\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$, bul jerde $\xi=x^2+y^2,\quad \eta=x$; al $y=0$ ushın $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; al $x=0$ ushın $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.

6. $x\neq 0,\ y\neq 0$ ushın giperbolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\xi+2\eta}{(\xi^2-\eta^2)}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\eta}{2(\xi^2-\eta^2)}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$. Al $x=0$ yamasa $y=0$ ushın parabolalıq tip. **7.** $x>0,\ y>0$ ushın elliptikalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$. Al $x=0$ yamasa $y=0$ ushın parabolalıq tip. **8.** Giperbolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

9. $x\neq 0$ ushın giperbolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$. Al $x=0$ ushın parabolalıq tip. **10.** $x\neq 0$ ushın elliptikalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$. Al $x=0$ ushın parabolalıq tip. **11.** Parabolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$, bul jerde $\xi=\frac{y}{x},\quad \eta=y$. **12.** Giperbolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$, bul jerde $\xi=x+arctgy,\quad \eta=x-arctgy$. **13.** $x\neq 0$ ushın parabolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{2\eta^2}{\xi-\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$, bul jerde $\xi=x^2+y^2,\quad \eta=x$.**14.** Elliptikalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$, bul jerde $\xi=y,\quad \eta=arctgx$. **15.** $x=0$ ushın parabolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$; $x\neq 0$ ushın giperbolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$, bul jerde $\xi=x^2+y,\quad \eta=y$.**16.** $x=0$ ushın parabolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $x>0$ ushın giperbolalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$, bul jerde $\xi=y-x+2\sqrt{x},\quad \eta=y-x-2\sqrt{x}$; $x<0$ ushın elliptikalıq tip, $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$, bul jerde $\xi=y-x,\quad \eta=2\sqrt{-x}$;

IV. 1. $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_{\gamma\gamma}=0,$ bul jerde $\xi=x,\ \eta=y-x,\ \gamma=x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z;$ elliptikalıq tip.

2. $\tilde{u}_{\xi\xi}-\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_{\gamma\gamma}+\tilde{u}_{\eta}=0,$ bul jerde $\xi=\frac{1}{2}x,\ \eta=\frac{1}{2}x+y,\ \gamma=-\frac{1}{2}x-y+z;$ giperbolalıq tip.

3. $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}=0,$ bul jerde $\xi=x,\ \eta=y-x,\ \gamma=2x-y+z;$ parabolalıq tip.

4. $\tilde{u}_{\xi\xi}-\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_{\gamma\gamma}+\tilde{u}_{\tau\tau}=0,$ bul jerde $\xi=x+y,\ \eta=-x+y,\ \gamma=z,\ \tau=y+z+t;$ giperbolalıq tip.

5. $\tilde{u}_{\xi\xi}-\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_{\gamma\gamma}=0,$ bul jerde $\xi=x,\ \eta=-x+y,\ \gamma=2x-y+z,\ \tau=x+z+t;$ parabolalıq tip.

6. $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}=0,$ bul jerde $\xi=x,\ \eta=y,\ \gamma=-x-y+z,\ \tau=x-y+z;$ parabolalıq tip

7. $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_{\gamma\gamma}+\tilde{u}_{\xi}=0,$ bul jerde $\xi=x,\ \eta=-x+y,\ \gamma=2x-2y+z;$ elliptikalıq tip.

8. $\tilde{u}_{\xi\xi}-\tilde{u}_{\eta\eta}-\tilde{u}_{\gamma\gamma}=0,$ bul jerde $\xi=x+\frac{1}{2}y-z,\ \eta=-\frac{1}{2}y,\ \gamma=z;$ giperbolalıq tip.

9. $\tilde{u}_{\xi\xi}-\tilde{u}_{\eta\eta}+4\tilde{u}=0,$ bul jerde $\xi=y+z,\ \eta=-y-2z,\ \gamma=x-z;$ parabolalıq tip.

10. $\tilde{u}_{\xi\xi}+2\tilde{u}=0,$ bul jerde $\xi=x,\ \eta=-2x+y,\ \gamma=-x+z;$ parabolalıq tip.

11. $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_{\gamma\gamma}+\tilde{u}_{\xi}+\tilde{u}_{\eta}+\tilde{u}_{\gamma}+4\tilde{u}=0,$ bul jerde $\xi=x-y,\ \eta=y,\ \gamma=z;$ elliptikalıq tip.

12. $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_{\gamma\gamma}+\tilde{u}_{\xi}+\tilde{u}_{\eta}+\tilde{u}_{\gamma}+\tilde{u}=0,$ bul jerde $\xi=x+y,\ \eta=-y,\ \gamma=z;$ elliptikalıq tip.

13. $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_{\gamma\gamma}+2\tilde{u}_{\xi}-2\tilde{u}_{\eta}+2\tilde{u}_{\gamma}=0,$ bul jerde $\xi=x+y-z,\ \eta=-y,\ \gamma=z;$ elliptikalıq tip.

14. $\tilde{u}_{\xi\xi}+2\tilde{u}_{\xi}+2\tilde{u}_{\eta}-3\tilde{u}_{\gamma}+\tilde{u}=0,$ bul jerde $\xi=x,\ \eta=x+y,\ \gamma=-x+z;$ parabolalıq tip.

V. 1. $u(x,y)=\varphi(x-4y)+\psi(3x-4y)$; **2.** $u(x,y)=\varphi(x+y)+e^{-x}\psi(x+y)$;

3. $u(x,y)=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)$; **4.** $u(x,y)=\varphi(y)+e^{-ay}\psi(x)$;

5. $u(x,y)=x-y+\varphi(x-3y)+e^{\frac{x-3y}{7}}\psi(2x+y)$; **6.** $u(x,y)=[\varphi(x)+\psi(y)]e^{-bx-ay}$;

7. $u(x,y)=e^{x+y}+[\varphi(x)+\psi(y)]e^{3x+2y}$; **8.** $u(x,y)=\varphi(y-ax)+e^{-x}\psi(y-ax)$;

9. $u(x,y)=\varphi(x-y)+\psi(3x+y)$; **10.** $u(x,y)=\varphi(y-x)+\psi(y-4x)$;

11. $u(x,y)=\varphi(x+y)+(x-y)\psi(x^2-y^2),\ (x\neq -y)$;

12. $u(x,y)=\varphi(xy)+\sqrt{|xy|}\,\psi\left(\dfrac{x}{y}\right),\ (x\neq 0, y\neq 0)$;

13. $u(x,y)=\varphi(xy)+|xy|^{3/4}\psi\left(\dfrac{x}{y}\right),\ (x\neq 0, y\neq 0)$

14. $u(x,y)=x\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)+\psi\left(\dfrac{x}{y}\right),\ (x\neq 0, y\neq 0)$;

15. $u(x,y)=\varphi(4x-y)+\psi(x-y),$ bul jerde $\varphi(\vartheta)$ hám $\psi(\vartheta)$ funkciyaları eki ret differenciallanıwshı erikli funkciyalar. **Kórsetpe.** $\xi=4x-y,\quad \eta=x-y$ belgilew jasap, berilgen teńlemeniń $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ kanonikalıq túrine iye bolamız. Bul teńlemeni integrallasaq $u(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$ bolıp, ξ hám η nıń mánislerin orınlarına qoysaq izlenip atırǵan sheshimge iye bolamız. **16.** $u(x,y)=\varphi(2x-y)+\psi(2x-y)\mathrm{e}^{-3x},$ bul jerde $\varphi(\vartheta)$ hám $\psi(\vartheta)$ funkciyaları eki ret differenciallanıwshı erikli funkciyalar. **17.** $u(x,y)=x\varphi(\sqrt{y}-\sqrt{x})+\psi(\sqrt{y}-\sqrt{x}),$ bul jerde $\varphi(\vartheta)$ hám $\psi(\vartheta)$ funkciyaları eki ret differenciallanıwshı erikli funkciyalar. **18.** $u(x,y)=\varphi(y-x+\cos x)+\psi(y-x-\cos x),$ bul jerde $\varphi(\vartheta)$ hám $\psi(\vartheta)$ funkciyaları eki ret differenciallanıwshı erikli funkciyalar. **19.** $u(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)y+\psi\left(\dfrac{y}{x}\right),$ bul jerde $\varphi(\vartheta)$ hám $\psi(\vartheta)$ funkciyaları eki ret differenciallanıwshı erikli funkciyalar.

II-BAP. GIPERBOLALIQ TIPTEGI TEŃLEMELER

Tayanısh sózler: giperbolalıq tiptegi teńlemeler, tardıń terbelis teńlemesi, membrananıń terbelis teńlemesi, tuwrımúyeshli membrana, dóńgelek membrana, tolqın teńlemesi, baslanǵısh shártler, shegaralıq shártler, Koshi máselesi, Dalamber sheshimi, Dalamber formulası, Dyuamel principi, Fur`e usılı, Steklov teoreması, Bessel teńlemesi, Bessel funkciyaları.

Tiykarǵı túsinikler hám belgilewler

Giperbolalıq tiptegi teńlemeler –

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f$$

kórinistegi teńlemeler, bul jerde $|a_{ik}-\lambda|=0$ *xarakteristikalıq teńlemesiniń bir koreniniń belgisi qalǵan korenleriniń belgisi menen birdey.*

Tardıń terbelis teńlemesi – $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t).$

Membrananıńń terbelis teńlemesi – $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t).$

Dalamber sheshimi – $u(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at).$

Dalamber formulası – tardıń erkin terbelis teńlemesi ushın

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds,$$

al tardıń májbúriy terbelis teńlemesi ushın

$$u=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\sigma)d\sigma+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\sigma,\tau)d\sigma,$$

bul jerde $\varphi(x)$ *tardıń dáslepki forması,* $\psi(x)$ *tardıń dáslepki tezligi.*

Dyuamel principi – eger $v(x,t,\tau)$ *funkciyası*

$$v_{tt}-Lv=0,\quad v\big|_{t=\tau}=0,\quad v_t\big|_{t=\tau}=f(x,\tau),\ \ t>\tau$$

ma`selesiniń sheshimi bolsa, onda

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t,\tau)d\tau$$

funkciyası birtekli baslanǵısh sha`rtke iye, birtekli emes

$$u_{tt}-Lu=f(x,t),\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=0,\quad t>0$$

ma`seleniń sheshimi boladı.

Tábiyatta ushıraytuǵın derlik barlıq terbeliske baylanıslı qubılıslar ekinshi tártipli giperbolalıq tiptegi teńlemeler menen anıqlanadı. Bul bapta tiykarınan sızıqlı giperbolalıq tiptegi teńlemeler, bunday teńlemeler menen baylanıslı máseleler hám bunday máselelerdi sheshiw usılları úyreniledi.

Matematikalıq fizika máseleleriniń ápiwayı mısallarınıń biri bolǵan tardıń kishkene terbelis teńlemesi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

1715 jılı B. Teylor tárepinen alınıp, 1715-1747 jılları J.L.Dalamber hám L.Eyler tárepinen úyrenilgen, bunda $u(x,t)$ funkciyası tardıń x tochkasınıń t waqıttaǵı teń salmaqlıq awhalınan awısıw shaması. Bunda waqıt hám aralıqtı ólshew masshtabı, tar boylap signaldıń taralıw tezligi birge teń bolatuǵınday etip saylap alınǵan.

Terbeliwshi tardıń háreketin anıqlaw ushın tardıń barlıq tochkalarındaǵı dáslepki awhaldı hám dáslepki tezlikti, sonday-aq tardıń ushlarındaǵı háreket nızamları málim bolıwı kerek. Eger tar tańlap alınǵan birlikte l uzınlıqqa iye bolsa hám koordinata bası onıń ushlarınıń birewinde bolsa, onda terbeliwshi tardıń formasın anıqlaw haqqındaǵı másele tómendegishe qoyıladı: $D = \{x,t;\, 0 < x < l,\, t > 0\}$ oblastında eki ret differenciallanıwshı hám D oblastta (1) teńlemeni hám

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = \varphi(x),\ \lim_{t\to+0} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \psi(x),\ 0 < x < l, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to+0} u(x,t) = \mu_1(t), \quad \lim_{x\to l-0} u(x,t) = \mu_2(t)$$

shártlerin qanaatlandırıwshı funkciyanı tabıń.

$\varphi(x)$ funkciyası tardıń x tochkasınıń $t=0$ baslanǵısh waqıt momentindegi teń salmaqlıq awhalınan awısıw shamasın, al $\psi(x)$ funkciyası tardıń x tochkasınıń $t=0$ baslanǵısh waqıt momentindegi tezligin ańlatıp, $\mu_1(t)$ hám $\mu_2(t)$ funkciyaları tar ushlarınıń qozǵalıs nızamların beredi.

(1) teńleme ulıwma aytqanda D oblasttıń shegarasında berilgen $u(x,t)$ funkciyasınıń D oblast ishindegi taralıw nızamın beredi.

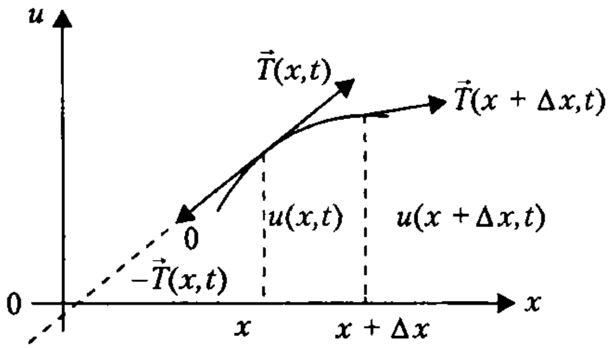
§1. Tardıń terbelis teńlemesi, baslanǵısh hám shegaralıq shártlerdiń qoyılıwı. Membrananıń terbelis teńlemesi

1.1. Birtekli tardıń terbelis teńlemesi. Tar–bul eki tochkada bekitilgen, iymeyiw waqtında qarsılıqqa iye bolmaǵan jińishke sabaq. Teń salmaqlıq awhalı Ox kósheri menen betlesetuǵın bul tardı teń salmaqlıq awhalınan awıstırsaq, onda tar (x,u) tegisliginde kóldeneń terbelis jasaydı. Teń salmaqlıq awhalınan, tardıń x tochkasınıń t waqıttaǵı awısıwın $u(x,t)$ dep belgilesek, onda bul funkciya t waqıttaǵı tardıń formasın súwretlewshi grafikti beredi.

Bul paragrafta qaralatuǵın máselelerdiń biri tardıń qálegen t waqıttaǵı awhalın anıqlaw, yaǵnıy $u(x,t)$ funkciyasınıń anıq kórinisin tabıwdan ibarat. Usı maqsette, tardıń kishkene terbelisi waqtında $u(x,t)$ funkciyasınıń bazı-bir sızıqlı, dara tuwındılı differenciallıq teńlemeni qanaatlandıratuǵınlıǵın kórsetemiz. Tardıń kishkene terbelisin qarastırıw menen sheklene otırıp, $tg\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ menen salıstırǵanda joqarı tártiptegi kishkene shamalardı taslap ketiwge boladı. Onda tardıń qálegen (a,b) bóleginiń uzınlıǵı terbelis waqtında ózgermeydi:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx b - a \cdot$$

Tar iymeyiw waqtında qarsılıqqa iye bolmaǵanlıǵı sebepli onıń t waqıttaǵı x tochkasındaǵı $\vec{T}(x,t)$ serippelilik kúshi tardıń usı tochkasına júrgizilgen urınba boylap baǵıtlanǵan boladı hám Guk nızamına sáykes bul kúshtiń $\left|\vec{T}(x,t)\right|$ shaması x hám t ǵa ǵárezsiz boladı: $\left|\vec{T}(x,t)\right| = T_0$.



Tardıń erikli x tochkasına t waqıtta tásir etiwshi, (x,u) tegisliginde x kósherine perpendikulyar bağıtlanğan sırtqı kúshtiń tığızdığın $F(x,t)$ dep, al tardıń x tochkasındağı sızıqlı tığızlığın $\rho(x)$ dep belgilesek, onda $\rho(x)\Delta x$ shama menen tardıń $(x, x+\Delta x)$ bóleginiń massasın beredi.

Endi tardıń terbelis teńlemesin dúzemiz. Onıń $(x, x+\Delta x)$ bólegine, qosındısı N`yuton nızamına muwapıq massanıń tezleniwge kóbeymesine teń bolğan $\vec{T}(x+\Delta x,t)$ hám $-\vec{T}(x,t)$ serippelilik kúshleri menen sırtqı kúsh tásir etedi:

$$T_0 \sin\alpha\Big|_{x+\Delta x} - T_0 \sin\alpha\Big|_{x} + F(x,t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Shama menen

$$\sin\alpha(x) = \frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

bolğanlığı ushın joqarıdağı teńlikten

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u(x+\Delta x,t}{\partial x} - \frac{u(x,t}{\partial x}\right) + F(x,t)$$

bolıp, bunnan $\Delta x \to 0$ shegin alsaq

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$$

boladı. Bul teńleme tardıń kóldeneń terbelis teńlemesi bolıp tabıladı. $F(x,t)=0$ ushın tardıń terbelisi erkin dep, al $F(x,t)\neq 0$ ushın májbúriy dep ataladı. Eger $\rho(x)$ tığızlıq turaqlı, yağnıy $\rho(x)=\rho$ bolsa, onda tardıń terbelis teńlemesi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (1)$$

túrine iye boladı, bul jerde $f = \dfrac{F}{\rho}$, $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$. (1) teńleme kópshilik waqıtları bir ólshemli tolqın teńlemesi depte ataladı. Bul teńleme hám onıń ulıwma sheshimi birinshi ret J.L.Dalamber tárepinen 1743 jılı úyrenilgen.

(1) teńleme sheksiz kóp sandaģı dara sheshimlerge iye bolıp, bul teńlemeniń bir ózi tardıń háreketin tolıq anıqlawǵa jetkiliksiz boladı. Sonıń ushın bul teńlemege máseleniń fizikalıq maǵanasınan kelip shıǵatuǵın bir qatar qosımsha shártlerdi qoyıwǵa tuwra keledi. Tochka dinamikasınan málim bolǵanınday, tochka háreketin anıqlaw ushın onıń baslanǵısh awhalın hám baslanǵısh tezligin biliwimiz kerek. Tardıń terbelis teńlemesi ushın baslanǵısh $t = 0$ waqıt momentinde tardıń barlıq tochkalarınıń awhalı hám tezligi

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ u_t(x,0) = \varphi_1(x)$$

túrinde beriledi. Bul shártler tardıń terbelis teńlemesi ushın baslanǵısh shártler dep ataladı.

Tardıń terbelisi onıń ushlarına, yaǵnıy $x = 0$ hám $x = l$ ushlarındaǵı jaǵdaylarǵa hám baylanıslı boladı. Eger tar eki ushınan qattı bekitilgen bolsa, onda bul qosımsha sha`rtler

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0$$

túrinde beriledi. Bul sha`rt qarastırılıp atırǵan $0 \le x \le l$ aralıqtıń ushlarına ta`sir etetuǵın bolǵanlıqtan, bul shártler shegaralıq sha`rtler dep ataladı.

Eger tardıń ushları $t \ge 0$ ushın sa`ykes $\psi(t)$ ha`m $\theta(t)$ nızamlar boyınsha terbeletuǵın etip jalǵansa, onda bul shártler

$$u(0,t) = \psi(t), \quad u(l,t) = \theta(t)$$

túrinde beriledi. Bunday shegaralıq sha`rtler birinshi túr shegaralıq sha`rtler dep ataladı.

Eger tardıń ushlarına vertikal baǵıtta ta`sir etiwshi $Tu_x(0,t)$ ha`m $Tu_x(l,t)$ kúshler berilse, onda shegaralıq sha`rtler

$$u_x(x,t)=\psi(t), \quad u_x(l,t)=\theta(t)$$

túrinde beriledi.

Eger vertikal ta`sir etiwshi kúshtiń shaması nol`ge teń bolsa, aytayıq tardıń ushları vertikal awhalda súykelissiz qozǵalatuǵın kol`colarǵa bekitilgen bolsa, onda shegaralıq sha`rtler

$$u_x(0,t)=0, \quad u_x(l,t)=0$$

túrinde beriledi. Bunday shegaralıq sha`rtler ekinshi túr shegaralıq sha`rtler dep ataladı. Bul jaǵdayda da ma`sele aldıngı ma`sele sıyaqlı qoyıladı, tek shegaralıq sha`rtler ekinshi túr shegaralıq sha`rtler menen almasadı.

Eger tardıń ushları kol`coǵa, kol`co bolsa prujinaǵa bekitilse, bunday halda prujinalar tardıń ushlarınıń qozǵalısına proporcional bolǵan vertikal kúshlerdi payda etedi. Bul halda shegaralıq sha`rtler

$$u_x(0,t)=\frac{h}{T}u(0,t), \; u_x(l,t)=-\frac{h}{T}u(l,t)$$

túrinde beriledi. Eger tardıń eki ushındaǵı prujinalar sa`ykes túrde $\theta_1(t)$ hám $\theta_2(t)$ nızam boyınsha ha`reketlenetuǵın bolsa, onda shegaralıq sha`rtler

$$u_x(0,t)=\frac{h}{T}\left[u(0,t)-\theta_1(t)\right], \; u_x(l,t)=-\frac{h}{T}\left[u(l,t)-\theta_2(t)\right]$$

túrine iye boladı. Bunday shártler úshinshi túr shegaralıq sha`rtler bolıp tabıladı.

1.2. Membrananıń erkin terbelis teńlemesi. Membrana – bul iymeyiw waqtında qarsılıqqa iye bolmaǵan juqa hám tegis plenka. Membrananıń kishi kóldeneń terbelis teńlemesi tardıń terbelis teńlemesi sıyaqlı alınadı:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}\right)+F\left(x,t\right), \; x=(x_1,x_2).$$

Eger tıǵızlıq ρ turaqlı bolsa, onda membrananıń terbelis teńlemesi

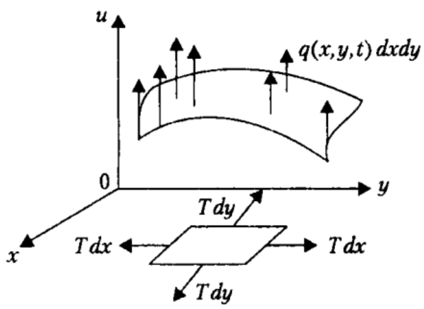
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}\right)+f\left(x,t\right), \; a^2=\frac{T_0}{\rho}, \; f=\frac{F}{\rho}.$$

túrine iye bolıp, bul teńleme eki ólshemli tolqın teńlemesi dep ataladı.

Endi joqarıdağı membrananıń terbelis teńlemesin keltirip shığarıw máselesine toqtayıq. Usı maqsette orın awısıwı Oxy tegisliginde jatırǵan membrana tegisligine perpendikulyar bolǵan, membrananıń kishkene kóldeneń terbelisin qarastırayıq. Meyli $u=u(x,y,t)$, membrananıń (x,y) tochkasınıń t waqıttağı membrana tegisliginen orın awısıw shaması bolsın. Terbelis shamasınıń kishi bolıwınan

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 << 1, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 << 1$$

shártiniń orınlanıwı kelip shığadı.



Meyli $N(x,y,u)$ tochkası ishki tochka bolatuǵınday etip membrananıń bazı-bir elementin alayıq. Membrananıń bul elementine $\vec{T}$ serippelilik kúshinen basqa membrana tegisligine perpendikulyar bağıtlanǵan sırtqı $q(x,y,t)$ kúshi tásir etedi. Sırtqı kúshlerdiń teń tásir etiwshisi $q(x,y,t)dxdy$ boladı. Al serippelilik kúshlerdiń teń tásir etiwshisi

$$\left[Tdy\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\frac{dx}{2}} - Tdy\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}}\right] + \left[Tdx\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y+\frac{dy}{2}} - Tdx\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y-\frac{dy}{2}}\right] =$$

$$= Tdy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx + Tdx\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dy = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy\,.$$

Meyli $\rho(x,y)$ arqalı membrananıń betlik tığızlığın belgileyik. Onda qarastırılıp atırǵan membrana elementiniń massası $\rho(x,y)dxdy$ boladı. Onda N`yuton nızamına muwapıq

$$\rho(x,y)dxdy\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy+q(x,y,t)dxdy$$

bolıp, bunnan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t),\quad a=\sqrt{\frac{T}{\rho}},\ f(x,y,t)=\frac{q(x,y,t)}{T}.$$

Bul jerde a tezlik ólshemi bolıp, ol terbelistiń taralıw tezligin xarakterleydi. Dara jaǵdayda $q(x,y,t)=0$ bolsa, onda biz membrananıń erkin terbelis teńlemesine iye bolamız:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Membrananıń terbelis teńlemesi ushın baslanǵısh hám shegaralıq shártler fizikalıq maǵanası boyınsha tardıń terbelis teńlemesi ushın qoyılǵan sıyaqlı bolıp qoyıladı.

§2. Matematikalıq fizika ma`seleleriniń korrektli qoyılıwı. Adamar mısalı

Meyli dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler ushın shegaralıq ma`sele berilgen bolsın dep uyǵarayıq. Bul ma`sele tanıs qandayda bir usıl menen sheship baslanadı. Biraq ma`sele sheshimge iye bolmay qalıwı múmkin. Sonıń ushın da`slep qoyılǵan ma`seleniń sheshimge iye bolıwın anıqlap alıwǵa tuwra keledi. Meyli ma`sele sheshimge iye bolsın ha`m bul sheshim qandayda bir usıl menen sheshile baslasın. Biraq ma`sele bir emes, eki yamasa onnanda kóp sheshimge iye bolıp qalıwı múmkin. Bunday ma`seleni tuwrı qoyılǵan ma`sele dep aytıwǵa bolmaydı. Bunday jaǵdayda berilgen parametrlerdi qaytadan kórip shıǵıp, ma`seleniń qoyılıw sha`rtlerin ózgertiw kerek. Bul payda bolǵan mashqalalardıń ha`mmesi derlik sheshimniń bar bolıwı ha`m birden-birligi haqqındaǵı teorema ja`rdeminde a`melge asadı.

Meyli qoyılǵan ma`sele, sheshimniń bar bolıwı ha`m birden-birligi haqqındaǵı teoremanıń sha`rtlerin qanaatlandırsın. Sonda da biz ha`mme waqıt anıq sheshimdi ala bermeymiz. Sebebi ondaǵı fizikalıq shamalardı alıw waqtında bazı-bir da`lliktegi qa`telik ketken bolıwı múmkin, yaǵnıy teńleme ha`m qosımsha

sha`rtler bazı-bir anıqlıqta alınǵan bolıwı múmkin. Usı sebepli sheshimde bizdi qanaatlandırmaytuǵın anıqlıqtaǵı qa`telik ketiwi múmkin. Eger berilgen ma`selede parametrlerdiń azǵantay ózgeriwine sheshimnińde azǵantay ózgeriwi sa`ykes kelse, onda berilgen shegaralıq ma`seleniń sheshimi ornıqlı dep ataladı. Solay etip, shegaralıq ma`sele tuwrı qoyılǵan bolıwı ushın:

1) sheshim bar bolıwı kerek;

2) sheshim birden-bir bolıwı kerek;

3) sheshim ornıqlı bolıwı kerek.

Eger bul sha`rtlerdiń ha`mmesi orınlansa, onda shegaralıq ma`sele tuwrı qoyılǵan yamasa korrektli qoyılǵan dep ataladı. Ma`seleniń korrektli emes qoyılıwı sebepleriniń biri qosımsha sha`rtlerdiń anıq emes qoyılıwında boladı.

Adamar mısalı. Meyli elliptikalıq tiptegi teńlemeler ushın Koshi ma`selesiniń korrektli emes ekenligin kórseteyik. Aytayıq $u = u(x, y)$ funkciyası $y > 0$ yarım tekisliginde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplas teńlemesiniń berilgen $u(x,0) = \varphi(x),\ u_y(x,0) = \psi(x)$ sha`rtlerin qanaatlandıratuǵın sheshimi bolsın. Onda

$$\vartheta(x,y) = u(x,y) + \frac{sinnx \cdot shny}{n^2}$$

funkciyası ha`m Laplas teńlemesiniń sheshimi boladı. Haqıyqatında da

$$\vartheta_{xx} + \vartheta_{yy} \equiv \left(u_{xx} - \sin nx \cdot shny\right) + \left(u_{yy} + \sin nx \cdot shny\right) \equiv 0$$

hám

$$\vartheta(x,0) = \varphi(x),\ \vartheta_y(x,0) = \psi(x) + \frac{\sin nx}{n}.$$

Endi $u(x,y)$ hám $\vartheta(x, y)$ sheshimler ushın baslanǵısh sha`rtlerdiń ayırmasın bahalaymız

$$\left|\vartheta - u\right|_{y=0} = 0, \qquad \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{n}.$$

Solay etip úlken n ler ushın u hám ϑ sheshimleriniń baslanǵısh ma`nisleri bir-birine jaqın, al sheshimlerdiń ayırması bolsa

$$|\vartheta - u| = \left|\frac{\sin nx \cdot shny}{n^2}\right|$$

$x \neq 0,\ y > 0$ ushın úlken bolıp ketiwi múmkin, sebebi $n \to \infty$ da

$$\frac{shny}{n^2} = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^2} \to \infty.$$

Solay etip sheshim ornıqlı emes, demek Laplas teńlemesi ushın Koshi ma`selesi korrektli emes.

§3. Giperbolalıq tiptegi teńlemeler ushın Koshi máselesi

3.1.Ushlarınan shegaralanbaǵan birtekli tardıń erkin terbelis teńlemesi ushın Koshi máselesin sheshiwdiń Dalamber usılı. Meyli sheksiz uzınlıqqa iye (praktikalıq esaplaw waqtında onı shekli uzınlıqqa iye, biraq tardıń terbelis processindegi ta`siri ushlarına jetip barmaydı dep esaplawǵa boladı) bir tekli tardıń erkin terbelis teńlemesin qarastırayıq. Bul ma`sele

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

túrindegi Koshi ma`selesine alıp kelinedi, bul jerde $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ berilgen funkciyalar: $\varphi(x)$ tardıń da`slepki forması, $\psi(x)$ bolsa tardıń da`slepki tezligi bolıp esaplanadı.

(1),(2) Koshi ma`selesin sheshiw ushın da`slep onıń ulıwma sheshimin tawıp alamız ha`m keyinshelik baslanǵısh sha`rtlerdi paydalanıp, ulıwma sheshimdegi eki erikli funkciyalardı joq etemiz.

(1) teńlemeniń ulıwma sheshimin tabıw ushın, onıń

$$a^2 (dt)^2 - (dx)^2 = 0$$

xarakteristikalıq teńlemesin paydalanıp, teńlemeni kanonikalıq túrge keltiremiz. Xarakteristikalıq teńlemeni

$$a\,dt - dx = 0,\;\; a\,dt + dx = 0$$

túrindegi eki teńlemege ajıratıp, bulardı integrallaw arqalı $x - at = C_1$ hám $x + at = C_2$ túrindegi eki xarakteristikalar semeystvasına iye bolamız.

Endi berilgen teńlemeni a`piwaylastırıw ushın

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

túrindegi jańa belgilew jasaymız. Bul jańa belgilew ja`rdeminde teńleme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

túrindegi kanonikalıq túrge iye boladı. Bul teńleme ushın ulıwma sheshim

$$u(x,t) = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$$

bolıp esaplanadı, bul jerde θ_1 hám θ_2 erikli funkciyalar. Burıńǵı ózgeriwshilerge qaytıp ócek

$$u(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \tag{3}$$

boladı. Bul sheshim (1) teńlemeni qanaatlandırıwı ushın erikli θ_1 hám θ_2 funkciyaları eki ret úzliksiz tuwındılarǵa iye bolıwı kerek.

(3) sheshim tardıń terbelis teńlemesiniń Dalamber sheshimi dep ataladı.

Endi Dalamber sheshiminiń fizikalıq interpretaciyasına toqtayıq. (3) sheshim (1) teńlemeniń eki sheshimnniń superpoziciyasınan ibarat ulıwma sheshimi. Meyli $u_1 = \theta_1(x - at)$ hám $u_2 = \theta_2(x + at)$ sheshimlerdiń hár birine ayrıqsha toqtap, dáslep $u_1 = \theta_1(x - at)$ sheshimnniń fizikalıq interpretaciyasın qarastırayıq. Usı maqsette $x = x_0$ tochkanı fiksirleymiz. Meyli usı tochkadan Ox kósheriniń ońta`repine qarap $t = 0$ baslanǵısh waqıt momentinen baslap ta`jiriybe ótkeriwshi a tezlik penen júrgen bolsın. Aradan t_1 waqıt ótkennen soń bul ta`jiriybe ótkeriwshi abcissası $x_1 = x_0 + at$ bolǵan tochkada boladı. Usı waqıtta tar tolqınınıń teń salmaqlıq awhalınan awısıwı $u_1 = \theta_1(x_1 - at_1)$ boladı. $x_1 - at_1 = x_0$ bolǵanlıqtan bul awısıw $t = 0$ waqıt momentindegi $\theta_1(x_0)$ awısıw menen birdey boladı, yaǵnıy

$$\theta_1(x_1 - at) = \theta_1(x_0)$$

Bul teńlik boyınsha ta`jiriybe ótkeriwshi oń ta`repke qarap a tezlik penen júrgende tolqında usı ta`jiriybe ótkeriwshi menen birdey $a$ tezlik penen oń ta`repke qarap jıljıytuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Bul jaǵday, yaǵnıy $u_1 = \theta_1(x_1 - at_1)$ funkciyası menen anıqlanatuǵın jaǵday, tuwrı tolqınnıń taralıwı dep ataladı. Usınday jol menen $u_2 = \theta_2(x + at)$ sheshimdi qarastırsaq, onda tolqınnıń shep ta`repke qarap $a$ tezlik penen jıljıytuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Bul jaǵday keri tolqınnıń taralıwı dep ataladı. Solay etip (3) ulıwma sheshim eki tuwrı ha`m keri tolqınlardıń qosındısınan ibarat boladı.

Endi Koshi ma`selesin sheshiwge kirisemiz. Baslanǵısh sha`rtlerdiń birinshisinen

$$u(x,0) = \theta_1(x) + \theta_2(x) = f(x)$$

boladı. Ekinshisin paydalanıw ushın (3) den t boyınsha tuwındı alamız

$$u_t(x,t) = -a\theta_1'(x - at) + a\theta_2'(x + at)$$

hám $t = 0$ ushın bunnan

$$u_t(x,0) = -a\theta_1'(x) + a\theta_2'(x) = \varphi(x)$$

teńligine iye bolıp, bul sońǵı teńlikti 0 den x qa shekem integrallasaq:

$$-a\left[\theta_1(x) - \theta_1(0)\right] + a\left[\theta_2(x) - \theta_2(0)\right] = \int_0^x \varphi(s)\,ds$$

yamasa

$$-a\theta_1(x) + a\theta_2(x) = \int_0^x \varphi(s)\,ds + aC,$$

bul jerde $C = \theta_2(0) - \theta_1(0)$. Solay etip erikli θ_1 ha`m θ_2 funkciyaların anıqlawdıń

$$\begin{cases} \theta_1(x) + \theta_2(x) = f(x), \\ -\theta_1(x) + \theta_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \varphi(s)\,ds + C \end{cases}$$

sistemasına iye bolamız. Bul sistemanı sheshsek:

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi(s)\,ds - \frac{C}{2},$$

$$\theta_2(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi(s)ds+\frac{C}{2}$$

yamasa

$$\theta_1(x-at)=\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi(s)ds-\frac{C}{2},$$

$$\theta_2(x+at)=\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\varphi(s)ds+\frac{C}{2}.$$

Bul ekewin (3) ge qoysaq

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(s)ds \tag{4}$$

bolıp, bul (4) formula (1),(2) Koshi ma`selesin sheshiwdiń Dalamber formulası dep ataladı.

(1),(2) Koshi ma`selesi korrektli qoyılǵan. Haqıyqatında da (4) formula boyınsha alınǵan sheshim birden-bir. Eger basqasha jol menen kórsetetuǵın bolsaq, onda erikli $\varepsilon>0$ sanı ushın sonday $\delta>0$ sanın kórsetiw múmkin, na`tiyjede $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyaların

$$|\varphi(x)-\overline{\varphi}(x)|<\delta,\quad |\psi(x)-\overline{\psi}(x)|<\delta$$

bolatuǵınday etip $\overline{\varphi}(x)$ hám $\overline{\psi}(x)$ funkciyaları menen almastırsaq, onda da`slepki $u(x,t)$ ha`m jańa $\overline{u}(x,t)$ sheshimler arasındaǵı ayırma absolyut shaması boyınsha shekli waqıt aralıǵında ε nan kishi boladı.

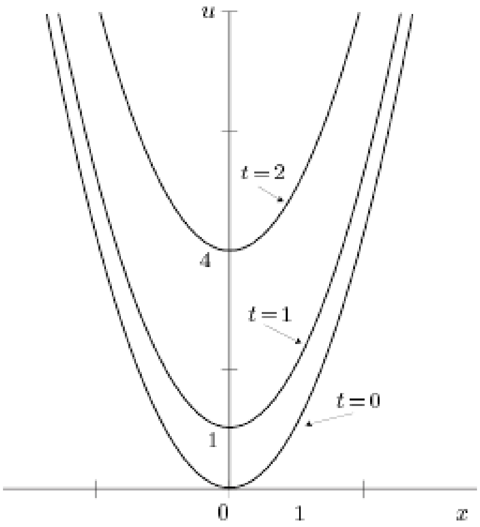
Mısal 1. Tómendegi Koshi máselesin sheshiń:

$$u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=0.$$

Sheshiliwi. Bul jerde $a=1,\ \varphi(x)=x^2,\ \psi(x)=0$, demek (4) formula boyınsha

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[(x+t)^2+(x-t)^2]=x^2+t^2.$$

Bul parabolalar semeystvosı. Tardıń $t=0,1,2$ waqıtlardağı awhalı tómende sızılmada berilgen. Sızılmadan kórinip turǵanınday parabolanıń tóbesi waqıttıń ótiwi menen qozǵaladı.



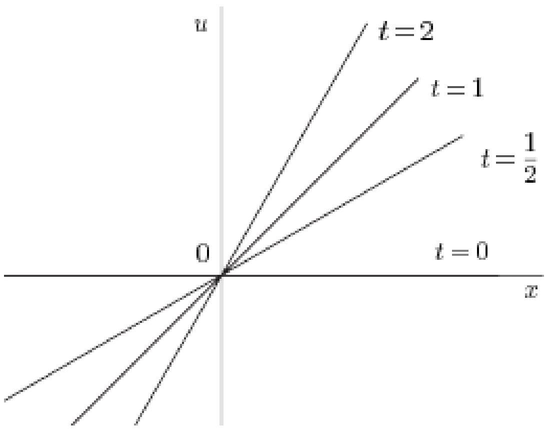
Mısal 2. Tómendegi Koshi máselesin sheshiń:

$$u_{tt}=4u_{xx},\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=x.$$

Sheshiliwi. Bul jerde $a=2,\ \varphi(x)=0,\ \psi(x)=x$, demek (4) formula boyınsha

$$u(x,t)=\frac{1}{8}[(x+2t)^2+(x-2t)^2]=xt\ .$$

Bul t parametrge ǵárezli tuwrılar semeystvosı. Waqıttıń bazı-bir momentlerindegi tardıń awhalı tómende sızılmada berilgen. Sızılmadan kórinip turǵanınday tar qattı denege uqsap waqıttıń ótiwi menen koordinata basında aylanadı.



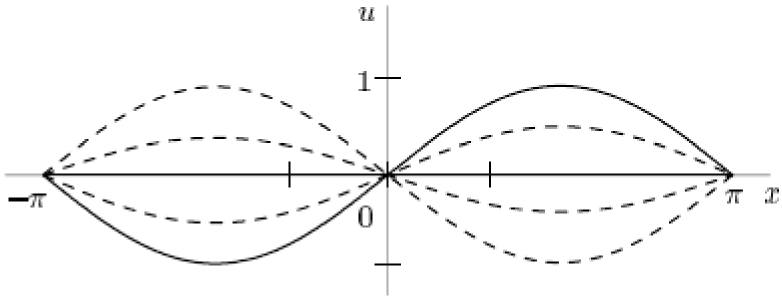
Mısal 3. Tómendegi Koshi máselesin sheshiń:

$$u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=0.$$

Sheshiliwi. Bul jerde $a=1,\ \varphi(x)=\sin x,\ \psi(x)=0$, demek (4) formula boyınsha

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x+t)+\sin(x-t)]=\sin x\cos t\,.$$

Waqıttıń ayırım momentlerinde tardıń bazı-bir bóleginiń awhalı tómende sızılmada berilgen.



Mısal 4. Tómendegi Koshi máselesin sheshiń:

$$u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=\cos x.$$

Sheshiliwi. Bul jerde $a=1,\ \varphi(x)=\sin x,\ \psi(x)=\cos x$, demek (4) formula boyınsha

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x+t)+\sin(x-t)]+\frac{1}{2}[\sin(x+t)-\sin(x-t)]=\sin(x+t)\,.$$

Argument $x+t$, funkciyanıń Ox kósheri boylap soldan ońǵa qarap jıljıytuǵınlıǵın ańlatadı. Demek, tar Ox kósheri boylap júgiriwshi tolqın sıyaqlı qozǵaladı.

3.2.Ushlarınan shegaralanbaǵan birtekli tardıń májbúriy terbelis teńlemesi ushın Koshi máselesin sheshiwdiń Dalamber usılı. Meyli, qarastırılıp atırǵan sheksiz uzınlıqtaǵı birtekli tarǵa tıǵızlıǵı $f(x,t)$ ǵa teń bolǵan sırtqı kúshler ta`sir etetuǵın bolsın. Onda bul tardıń terbelis nızamı

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \tag{5}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{6}$$

túrindegi Koshi ma`selesin sheshiw arqalı anıqlanadı. Sheshimdi $u = v + w$ qosındı túrinde izleymiz. Bunı (5), (6) ǵa qoyıp, hám v funkciyasın

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},\ v(x,0) = \varphi(x), \quad v_t(x,0) = \psi(x) \tag{7}$$

túrindegi birtekli emes baslanǵısh sha`rtke iye birtekli teńlemeniń, al w funkciyasın bolsa

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x,t), \quad w(x,0) = 0,\ w_t(x,0) = 0 \tag{8}$$

túrindegi birtekli shegaralıq sha`rtke iye birtekli emes ma`seleniń sheshimi bolatuǵınday etip saylap alamız. Bul sońǵı (8) ma`seleni sheshiw ushın Dyuamel principi dep atalatuǵın principti paydalanamız.

Dyuamel principi. Eger $v(x,t,\tau)$ funkciyası birtekli emes baslanǵısh sha`rtke iye birtekli teńlemeniń, yaǵnıy

$$v_{tt} - Lv = 0, \quad v\big|_{t=\tau} = 0, \quad v_t\big|_{t=\tau} = f(x,\tau), \ t > \tau$$

ma`seleniń sheshimi bolsa, onda

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)d\tau \tag{9}$$

funkciyası birtekli baslanǵısh sha`rtke iye birtekli emes teńlemeniń, yaǵnıy

$$u_{tt} - Lu = f(x,t), \quad u\big|_{t=0} = 0, \ u_t\big|_{t=0} = 0, \quad t > 0 \tag{10}$$

ma`seleniń sheshimi boladı.

**Da`lillew.** (9) nı differenciallap ha`m $v\big|_{t=\tau} = 0,\ v_t\big|_{t=\tau} = f(x,\tau)$ sha`rtin paydalansaq:

$$u_t = v(x,t,\tau)\Big|_{\tau=t} + \int_0^t v_t(x,t,\tau)d\tau = \int_0^t v_t(x,t,\tau)d\tau$$

$$u_{tt} = v_t\Big|_{\tau=t} + \int_0^t v_{tt}(x,t,\tau)d\tau = f(x,t) + \int_0^t v_{tt}(x,t,\tau)d\tau$$

$$Lu = \int_0^t Lv(x,t,\tau)d\tau$$

Bunı (10) ǵa qoyıp, teoremanıń orınlı ekenliginine iseniwge boladı.

Endi usı Dyuamel principin paydalanıp (8) birtekli emes ma`seleni sheshemiz. Onıń ushın da`slep ja`rdemshi Koshi ma`selesi bolǵan

$$z_{tt} = a^2 z_{xx}, \qquad z\Big|_{t=\tau} = 0, \;\; z_t\Big|_{t=\tau} = f(x,\tau), \qquad t > \tau \tag{11}$$

túrindegi ma`seleni qarastıramız. Tazadan $t_1 = t - \tau$ belgilew jasaw arqalı (11) ni

$$z_{t_1 t_1} = a^2 z_{xx}, \quad z\Big|_{t_1=0} = 0, \;\; z_{t_1}\Big|_{t_1=0} = f(x,\tau), \quad t_1 > 0$$

túrine alıp kelemiz. Bul ma`seleniń sheshimi Dalamber formulası boyınsha

$$z = \frac{1}{2a}\int_{x-at_1}^{x+at_1} f(\sigma,\tau)d\tau$$

túrine iye boladı. Aldıńǵı t ózgeriwshige qaytıp ócek, onda (11) niń sheshimi

$$z(x,t,\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\sigma,\tau)d\,\tau$$

bolıp, Dyuamel principin boyınsha (8) niń sheshimi

$$w(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\sigma,\tau)d\,\sigma$$

boladı. (7) niń sheshimi Dalamber formulası boyınsha

$$v = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+at}\psi(\tau)d\tau$$

bolǵanı ushın, berilgen (5),(6) ma`seleniń sheshimi

$$u = v + w = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\sigma,\tau)d\sigma$$

boladı.

Mısal 5. Tómendegi Koshi máselesin sheshiń

$$u_{tt} = u_{xx} + x\sin t, \;\; -\infty < x < +\infty, \; t > 0,$$

$$u(x,0) = \sin x, \;\; u_t(x,0) = \cos x, \;\; -\infty < x < +\infty$$

Sheshiliwi. Bul jerde $a = 1, \; f(x,t) = x\sin t, \; \varphi(x) = \sin x, \; \psi(x) = \cos x$, demek (8) formula boyınsha

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x+t)+\sin(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\cos\xi d\xi+\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\xi\sin\tau d\xi=$$

$$=\sin(x+t)+x\int_0^t(t-\tau)\sin\tau d\tau=\sin(x+t)+x(t-\sin t).$$

**3.3. Bir ushınan qattı bekitilgen, al ekinshi ushınan shegaralanbaǵan birtekli tardıń erkin terbelis teńlemesi ushın Koshi ma`selesin sheshiwdiń dawam ettiriw usılı.** Meyli bir ushınan qattı bekitilgen bir tekli tardıń ekinshi ushı shegaralanbaǵan bolsın. Aytayıq tardıń da`slepki forması $\varphi(x)$, da`slepki tezligi $\psi(x)$ funkciyaları menen anıqlansın. Bul jaǵdayda qarastırıp atırǵan tardıń erkin terbelis nızamı

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad (x>0,\ t>0), \tag{12}$$

$$u(0,t)=0, \tag{13}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{14}$$

túrindegi aralas ma`seleni sheshiw arqalı anıqlanadı. Bul ma`seleni sheshiw barısında (12)-(14) Koshi ma`selesin sheshiwdiń Dalamber formulasına tiykarlanǵan sheshim ushın, orınlı bolatuǵın tómendegi lemmanı keltirip ótemiz.

LEMMA. Eger baslanǵısh sha`rtlerdegi $\varphi(x)$ ha`m $\psi(x)$ funkciyaları taq funkciyalar bolsa, yaǵnıy $\psi(-x)=-\psi(x)$ ha`m $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ sha`rtlerin qanaatlantırsa, onda Dalamber formulası boyınsha anıqlanatuǵın sheshim $u(0,t)=0$ sha`rtin qanaatlantıradı.

Da`lillew. Haqıyqatında da, $\psi(x)$ funkciyasınıń da`slepki funkciyasın $\bar{\psi}(x)$ dep belgilesek, onda Dalamber formulasınan

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2\grave{a}}\left[\bar{\psi}(x+at)-\bar{\psi}(x-at)\right]$$

bolıp, bunnan

$$u(0,t)=\frac{\varphi(at)+\varphi(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\bar{\psi}(at)-\bar{\psi}(-at)\right]=\frac{\varphi(at)-\varphi(at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\left[\bar{\psi}(at)-\bar{\psi}(at)\right]=0+0=0$$

boladı, sebebi taq funkciyanıń integralı jup funkciya boladı. Usı lemmaǵa tiykarlanıp $\varphi(x)$ ha`m $\psi(x)$ funkciyaların $x=0$ tochkaǵa qarata taq kóriniste dawam etemiz:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0,\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}, \quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geq 0,\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}$$

Onda $\Phi(x)$ ha`m $\Psi(x)$ funkciyaları taq funkciyalar bolıp

$$u(x,t)=\frac{\Phi\left(x+at\right)+\Phi\left(x-at\right)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi\left(s\right)ds$$

sheshimi $u(0,t)=0$ sha`rtin qanaatlandıradı. Bul sońǵı sheshimdi tarqatıp jazsaq,onda (12)-(14) aralas ma`seleniń sheshimi

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds, \ x-at\geq 0, \ (\dfrac{x}{a}\geq t),\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds, \ \ x-at<0, \ \ (\dfrac{x}{a}<t)\end{cases}$$

kóriniske iye boladı.

**3.4. Bir ushınan bos bekitilgen, al ekinshi ushınan shegaralanbaǵan birtekli tardıń erkin terbelis teńlemesi ushın Koshi ma`selesin sheshiwdiń dawam ettiriw usılı.** Meyli bir ushınan bos bekitilgen bir tekli tardıń ekinshi ushı shegaralanbaǵan bolsın. Aytayıq, tardıń bos bekitilgen ushı $\mu(t)$ nızamı boyınsha terbeletuǵın bolsın ha`m tardıń da`slepki forması $\varphi(x)$, da`slepki tezligi $\psi(x)$ funkciyaları menen anıqlansın. Bul jaǵdayda qarastırılıp atırǵan tardıń erkin terbelis nızamı

$$u_{tt}=a^2u_{xx,} \ \ (x>0, \ \ t>0), \tag{15}$$

$$u(0,t)=\mu(t) \tag{16}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \ \ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{17}$$

túrindegi aralas ma`seleni sheshiw arqalı anıqlanadı. Sheshimdi eki funkciyanıń qosındısı bolǵan

$$u(x,t)=\vartheta(x,t)+\omega(x,t) \tag{18}$$

túrinde izleymiz. $\vartheta(x,t)$ funkciyasın $(x\geq 0,\ t\geq 0)$

$$\vartheta_{tt}=a^2\vartheta_{xx,},\ \ \vartheta(0,t)=0,\quad \vartheta(x,0)=\varphi(x),\ \vartheta_t(x,0)=\psi(x) \tag{19}$$

aralas ma`seleniń sheshimi, al $\omega(x,t)$ funkciyasın $(x\geq 0,\ t\geq 0)$

$$\omega_{tt}=a^2\omega_{xx},,\ \ \omega(0,t)=\mu(t),\ \omega(x,0)=0,\ \omega_t(x,0)=0 \tag{20}$$

aralas ma`seleniń sheshimi bolatuǵınday etip saylap alamız.

(19) nıń sheshimi dawam ettiriw usılı ja`rdeminde Dalamber formulası boyınsha

$$\vartheta(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds,\ x-at\geq 0,\quad (\dfrac{x}{a}\geq t)\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds,\quad x-at<0,\quad (\dfrac{x}{a}<t)\end{cases} \tag{21}$$

kóriniske iye boladı. (20) nıń sheshimin tómendegishe tabamız.Ulıwma sheshim tek ońtolqınnan ibarat (tar $x=0$ de shegaralanǵan, sonlıqtan tolqın oń ta`repke qarap *a* tezlik penen ha`reketlenedi) bolǵanlıqtan

$$\omega(x,t)=g(x-at)$$

bolıp, bunı shegaralıq sha`rtke aparıp qoysaq

$$\omega(0,t)=g(-at)=\mu(t),$$

bunnan

$$\omega(x,t)=g(x-at)=\mu\left(\frac{x-at}{-a}\right)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right),$$

al $\mu(t)$ funkciyası $t\geq 0$ ushın anıqlanǵanlıqtan, $\mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right)$ funkciyası $x-at\leq 0$ ushın anıqlanadı. Onda $\mu(t)$ funkciyasın

$$\mu(t)=\begin{cases}\mu(t),\quad t\geq 0,\\ 0,\qquad t<0\end{cases} \tag{22}$$

túrinde $t<0$ ushın $\mu(t)=0$ bolatuǵınday etip dawam etemiz. Onda $\omega(x,t)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)$ funkciyası argumenttiń barlıq ma`nisleri ushın anıqlanǵan boladı ha`m (22) túrindegi kórinisinen

$$\omega(x,0)=\mu\left(-\frac{x}{a}\right)=0,\ \omega_t(x,0)=\mu'\left(-\frac{x}{a}\right)=0$$

bolıp, (20) baslanǵısh sha`rtlerdi qanaaǵatlandıradı. Solay etip

$$\omega(x,t)=\begin{cases}\mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & \tilde{o}-\grave{a}t\le 0,\\ 0, & \tilde{o}-\grave{a}t>0\end{cases} \tag{23}$$

bolıp, (21) menen (23) ni (18) ge qoysaq , onda (15)-(17) niń sheshimi

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds, & x-at\ge 0\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds, & x-at<0\end{cases}$$

boladı.

**3.5. Bir ushındaǵı vertikal baǵıtta ta`sir etiwshi kúshtiń shaması nol`ge teń, al ekinshi ushınan shegaralanbaǵan birtekli tardıń erkin terbelis teńlemesi ushın Koshi ma`selesin sheshiwdiń dawam ettiriw usılı.** Meyli bizge bir ushınan shegaralanǵan, al ekinshi ushınan shegaralanbaǵan bir tekli tar berigen bolsın. Aytayıq, tardıń shegaralanǵan ushındaǵı vertikal baǵıttaǵı ta`sir etiwshi kúshtiń shaması (mısal ushın súykelis kúshiniń shaması) nol`ge teń bolsın. Meyli tardıń da`slepki forması $\varphi(x)$, al da`slepki tezligi $\psi(x)$ funkciyaları menen anıqlansın. Bul jaǵdayda tardıń terbelis nızamı

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ \ (x>0,\ \ t>0), \tag{24}$$

$$u_x(0,t)=0, \tag{24}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{26}$$

túrindegi aralas ma`seleni sheshiw arqalı anıqlanadı. Bul ma`seleni sheshiw barısında (24)-(26) Koshi ma`selesin sheshiwdiń Dalamber formulasına tiykarlanǵan sheshim ushın, orınlı bolatuǵın tómendegi lemmanı keltirip ótemiz.

LEMMA. Eger baslanǵısh sha`rtlerdegi $\varphi(x)$ ha`m $\psi(x)$ funkciyaları jup funkciyalar bolsa, yaǵnıy $\psi(-x)=\psi(x)$ ha`m $\varphi(-x)=\varphi(x)$ sha`rtlerin qanaatlantırsa, onda Dalamber formulası boyınsha anıqlanatuǵın sheshim $u_x(0,t)=0$ sha`rtin qanaatlantıradı.

Da`lillew. Haqıyqatında da Dalamber formulasınan

$$u_x(x,t)=\frac{\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)}{2}+\frac{1}{2\grave{a}}\left[\overline{\psi}'(x+at)-\overline{\psi}'(x-at)\right]$$

bolıp, bunnan

$$u_x(0,t)=\frac{\varphi'(at)+\varphi'(-at)}{2}+\frac{1}{2\grave{a}}\left[\overline{\psi}'(at)-\overline{\psi}'(-at)\right]=0+0=0,$$

sebebi jup funkciyanıń tuwındısı taq funkciya boladı, al taq funkciyanıń integralı jup funkciya boladı, sonlıqtan $\varphi'(-at)=-\varphi'(at)$.

Usı lemmaǵa tiykarlanıp $\varphi(x)$ ha`m $\psi(x)$ funkciyaların $x=0$ tochkaǵa qarata jup kóriniste dawam etemiz:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\ge 0,\\ \varphi(-x), & x<0,\end{cases} \quad , \quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\ge 0,\\ \psi(-x), & x<0.\end{cases}$$

Onda $\Phi(x)$ ha`m $\Psi(x)$ funkciyaları jup funkciyalar bolıp

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(s)ds$$

sheshimi $u_x(0,t)=0$ sha`rtin qanaatlandıradı. Bul sońǵı sheshimdi tarqatıp jazsaq, onda (24)-(26) aralas ma`seleniń sheshimi

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds, & x-at\ge 0,\ \left(\dfrac{x}{a}\ge t\right),\\[2ex] \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left[\displaystyle\int_{0}^{x+at}\psi(s)ds+\int_{0}^{at-x}\psi(s)ds\right], & x-at<0,\ \left(\dfrac{x}{a}<t\right)\end{cases}$$

túrine iye boladı.

§4. Giperbolalıq tiptegi teńlemeler ushın ulıwma qoyılǵan Koshi hám Gursa máseleleri

4.1.Giperbolalıq tiptegi teńlemeler ushın ulıwma qoyılǵan Koshi máselesi. Meyli

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+d(x,y)u_x+e(x,y)u_y+f(x,y)u=F(x,y) \qquad (1)$$

teńlemesi ha`m

$$u\big|_{\Gamma}=u_0(x,y),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\Gamma}=u_1(x,y) \qquad (2)$$

sha`rtleri berilgen bolsın. Bul jerde (1) teńleme bazı-bir D oblastta giperbolalıq tipte bolsın dep uyǵaramız. Al $u_0(x,y)$ hám $u_1(x,y)$ funkciyaları D oblastta jatıwshı G sızıq ústinde berilgen funkciyalar, l bolsa G sızıqta berilgen vektor.

(1) teńlemeniń (2) sha`rtlerdi qanaatlandırıwshı sheshimin tabıw ma`selesi (1) teńleme ushın qoyılǵan Koshi ma`selesi dep ataladı.

Eger G sızıq óziniń hesh bir nuqtasında (1) teńlemeniń xarakteristikaları menen urınıwǵa iye bolmasa ha`m $l$ vektor $G$ sızıqtıń urınmbası menen hesh bir nuqtada ústpe-úst túspese, ha`m de teńlemeniń koefficientleri, $u_0(x,y)$ hám $u_1(x,y)$ funkciyaları jeterli da`rejede tegis bolsa, onda $G$ sızıqtıń ushlarınan ótiwshi xarakteristikalar menen shegaralanǵan $D$ oblastta (1) teńlemeniń (2) sha`rtlerdi qanaatlandırıwshı sheshimi bar boladı ha`m ol birden-bir boladı.

Mısal 1. Tómendegi

$$u_{xy}=0, \qquad (3)$$

$$u\big|_{y=\tilde{o}^2}=0,\ \ u_y\big|_{y=x^2}=\sqrt{|x|},\ \ |x|<1 \qquad (4)$$

Koshi ma`selesin sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$u(x,y)=f(x)+g(y) \qquad (5)$$

kóriniste bolıp, (4) niń birinshi sha`rti boyınsha $f(x)+g(x^2)=0$ hám

(5) den y boyınsha tuwındı alıp, (4) niń ekinshi sha`rti boyınsha

$$u_y=g'(y),\quad u_y\big|_{y=x^2}=g'(x^2)=\sqrt{|x|}$$

dep jazıwǵa boladı. Eger $x^2 = z$ belgilewin jasasaq, onda $|x| = \sqrt{z}$ bolıp, na`tiyjede

$$g'(z) = z^{\frac{1}{4}}, \quad g(z) = \frac{4}{5} z^{\frac{5}{4}} + C$$

boladı, bunnan

$$g(x^2) = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} + const, \quad f(x) = -\frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} - const$$

teńligi orınlı boladı. Solay etip (3),(4) Koshi ma`selesiniń sheshimi

$$u(x,y) = \frac{4}{5}\left(y^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{5}{2}} \right), \quad 0 < y < 1, \ |x| < 1$$

túrine iye boladı.

Mısal 2. Tómendegi

$$u_{xx} + 5u_{xy} - 6u_{yy} = 0, \tag{6}$$

$$u\big|_{y=6x} = \varphi(x), \quad u_y\big|_{y=6x} = \psi(x) \tag{7}$$

Koshi máselesi sheshimge iye bolatuǵın $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyalarına mısallar keltiriń.

Sheshiliwi. (6) teńlemeniń xarakteristikalıq teńlemesi

$$y'^2 - 5y' - 6 = 0$$

bolıp, bul teńlemeniń ulıwma integralı $y + x = c_1$, $y - 6x = c_2$ bolǵanlıqtan (6) teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$u(x,y) = f(x+y) + g(y-6x)$$

boladı, bul jerde $f(\xi), g(\eta) \in c^2(R)$. Bul ulıwma sheshimdi (7) ge qoysaq

$$\begin{cases} u\big|_{y=6x} = f(7x) + g(0) = \varphi(x), \\ u_y\big|_{y=6x} = f'(7x) + g'(0) = \psi(x). \end{cases} \tag{8}$$

Bul sistema sheshimge iye bolıwı ushın $\varphi'(x) = 7\psi(x) + \cos t$ teńliginiń orınlanıwı zárúr bolıp, bul sistemadan tek $f(\xi)$ funkciyanı anıqlawǵa boladı, al $g(\eta)$ funkciyanı bolsa anıqlap bolmaydı.

Eger, dara jaǵdayda $\varphi(x)=7x^2,\ \psi(x)=2x$ dep alsaq (6),(7) Koshi máselesi

$$u(x,y)=\frac{1}{7}(x+y)^2+g(y-6x)$$

túrindegi sheshimge iye boladı, bul jerde $g(\eta)\in c^2(R)$ erikli funkciya bolıp, $g(0)=g'(0)=0$ shártin qanaatlandıradı. Bul sheshim birden-bir emes, sebebi $g(\eta)$ erikli funkciya.

Eger $\varphi(x)=x^2,\ \psi(x)=2x$ dep alsaq (8) sistema sheshimge iye bolmaydı, demek (6),(7) Koshi máselesi sheshimge iye bolmaydı.

Mısal 3. Tómendegi

$$u_{xx}-u_{yy}+2u_x+2u_y=0, \tag{9}$$

$$u\big|_{y=0}=x,\ u_y\big|_{y=0}=0,\ |x|<\infty \tag{10}$$

Koshi ma`selesin sheshiń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$u(x,y)=e^{y-x}\left[f(y-x)+g(y+x)\right]$$

bolıp, (10) shártti paydalansaq

$$\begin{cases} u\big|_{y=0}=e^{-x}\left[f(-x)+g(x)\right]=x, \\ u_y\big|_{y=0}=e^{-x}\left[f(-x)+g(x)\right]+e^{-x}\left[-f'(-x)+g'(x)\right]=0 \end{cases}$$

boladı. Bunnan

$$\begin{cases} -f'(-x)+g'(x)=-xe^x, \\ f(-x)-g(x)=xe^x-e^x+2c \end{cases}$$

bolıp, $f(z)=-ze^{-z}-\frac{1}{2}e^{-z}+c$ hám $g(x)=\frac{1}{2}e^x-c$ bolǵanlıqtan

$f(y-x)=(x-y)e^{-(y-x)}-\frac{1}{2}e^{-(y-x)}+c$ hám $g(y+x)=\frac{1}{2}e^{y+x}-c$ boladı. Solay etip sheshim

$$u(x,y)=x-y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2y},\quad -\infty<x,y<\infty$$

boladı.

4.2. Giperbolalıq tiptegi teńlemeler ushın ulıwma qoyılǵan Gursa máselesi. Meyli (1) teńlemeni qarastırayıq.

$$x = const,\ \ y = const \tag{11}$$

sızıqları (1) teńlemeniń xarakteristikaları bolıp tabıladı.

(1) teńlemeniń

$$u\big|_{x=0} = \varphi(y), \quad u\big|_{y=0} = \psi(x) \tag{12}$$

shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesi Gursa máselesi dep ataladı. Eger berilgen teńlemeniń koefficientleri jeterli dárejede tegis bolıp $\varphi(y)$, $\psi(x)$ funkciyaları differenciallanıwshı funkciyalar bolsa hám $\varphi(y_0) = \psi(x_0)$ teńligi orınlansa, onda (1),(12) Gursa máselesi birden-bir sheshimge iye boladı.

Mısal 4. Tómendegi

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0, \tag{13}$$

$$u\big|_{y=x} = \varphi(x),\ \ u\big|_{y=5x} = \psi(x),\ \ \varphi(0) = \psi(0) \tag{14}$$

Gursa máselesin sheshiń.

Sheshiliwi. (13) teńlemeniń xarakteristikaları

$$y - 5x = c_1,\ \ y - x = c_2$$

bolǵanlıǵı sebepli

$$\xi = y - x,\ \ \eta = y - 5x \tag{15}$$

belgilewler jasasaq, (13) teńleme

$$u_{\xi\eta} = 0$$

túrindegi kanonikalıq kóriniske iye boladı. Bul teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

boladı. Onda (15) ge muwapıq berilgen teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$u(x,y) = f(y - x) + g(y - 5x) \tag{16}$$

bolıp, (14) shárt boyınsha

$$\begin{cases} f(0) + g(-4x) = \varphi(x), \\ f(4x) + g(0) = \psi(x) \end{cases}$$

yamasa

$$\begin{cases} g(-4x) = \varphi(x) - f(0), \\ f(4x) = \psi(x) - g(0) \end{cases}$$

boladı. Eger $-4x = z,\ 4x = t$ dep alsaq

$$\begin{cases} g(z) = \varphi\left(-\frac{1}{4}z\right) - f(0), \\ f(t) = \psi\left(\frac{1}{4}t\right) - g(0) \end{cases}.$$

bolıp, bunnan

$$\begin{cases} g(y-5x) = \varphi\left(-\frac{1}{4}(y-5x)\right) - f(0), \\ f(y-x) = \psi\left(\frac{1}{4}(y-x)\right) - g(0) \end{cases}$$

teńligi kelip shıǵadı. Bulardı (16) ǵa qoyıp, berilgen Gursa máselesiniń

$$u(x,y) = \varphi\left(-\frac{1}{4}(y-5x)\right) + \psi\left(\frac{1}{4}(y-x)\right) - \varphi(0)$$

túrindegi sheshimine iye bolamız.

Mısal 5. Tómendegi

$$u_{xy} + x^2 y u_x = 0, \quad x > 0, \ \ y > 0, \tag{17}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u_{y=0} = x \tag{18}$$

Gursa máselesin sheshiń.

Sheshiliwi. (17) teńlemeniń ulıwma sheshimin tawıp alamız. Bul teńlemeni $(u_x \cdot e^{\frac{x^2y^2}{2}})_y = 0$ kóriniste jazıp alsaq, onda $u_x(x,y) = f(x) \cdot e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ bolıp, bunnan $u_x(x,0) = f(x)$ teńligi kelip shıǵadı.

$$u_x(x,y) = u_x(x,0) \cdot e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$$

teńliginen

$$u(x,y) = \int_0^x u_x(\xi,0) \cdot e^{\frac{-\xi^2y^2}{2}} d\xi + g(y)$$

$$u(0,y) = g(y)$$

yamasa

$$u(x,y)=\int_0^x u_x(\xi,0)e^{\frac{-\xi^2y^2}{2}}d\xi+u(0,y)=u(\xi,0)e^{-\frac{\xi^2y^2}{2}}\Bigg|_0^x-$$

$$-\int_0^x u(\xi,0)\cdot(-y^2\cdot\xi)\cdot e^{-\frac{\xi^2y^2}{2}}d\xi+0=u(x,0)\cdot e^{-\frac{x^2y^2}{2}}-u(0,0)+$$

$$+\int_0^x \xi^2\cdot y^2\cdot e^{-\frac{\xi^2y^2}{2}}d\xi=x\cdot e^{-\frac{x^2y^2}{2}}-\int_0^x \xi^2y^2\cdot\frac{1}{\xi y^2}d\left(e^{-\frac{\xi^2y^2}{2}}\right)=$$

$$=x\cdot e^{-\frac{x^2y^2}{2}}-\xi\cdot e^{-\frac{\xi^2y^2}{2}}\Bigg|_0^x+\int_0^x e^{-\frac{\xi^2y^2}{2}}d\xi=\int_0^x e^{-\frac{\xi^2y^2}{2}}d\xi$$

bolıp, berilgen Gursa máselesiniń

$$u(x,y)=\int_0^x e^{-\frac{\xi^2y^2}{2}}d\xi$$

túrindegi sheshimi kelip shıǵadı.

Mısal 6. Tómendegi

$$y\cdot u_{xx}+(x-y)u_{xy}-x\cdot u_{yy}-u_x+u_y=0,\ \ 0<y<x,\ \ x>0, \qquad (19)$$

$$u\big|_{y=0}=0,\quad u\big|_{y=x}=4x^4$$

Gursa máselesin sheshiń.

Sheshiliwi. Dáslep (19) teńlemeni kanonikalıq kóriniske keltirip alamız.

$$\Delta=b^2-a\cdot c=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+xy=\frac{x^2+y^2}{2}>0$$

bolǵanlıqtan (19) teńleme giperbolalıq tipke jatıp,

$$y(dy)^2-(x-y)dydx-x(dx)^2=0$$

xarakteristikalıq teńlemesin paydalansaq, onıń $\dfrac{y^2-x^2}{2}=c_1$, $y+x=c_2$ ulıwma integralınan paydalanıp $\xi=\dfrac{y^2-x^2}{2}$, $\eta=y+x$ belgilewlerin kiricek, berilgen teńlemeniń

$$u_{\xi\eta} = 0$$

kanonikalıq teńlemesine hám bul teńlemeniń

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

ulıwma sheshimine iye bolamız. Onda berilgen teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$u(x,y) = f\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right) + g(y + x) \tag{20}$$

boladı. Berilgen baslanǵısh shártti esapqa alsaq

$$\begin{cases} u(x,0) = f\left(\dfrac{x^2}{2}\right) + g(x) = 0, \\ u(x,x) = f(0) + g(2x) = 0 \end{cases}$$

yamasa, bunnan

$$g(2x) = 4x^4 - f(0)$$

bolıp, $2x = z$ belgilewdi paydalansaq

$$g(z) = \frac{1}{4}x^4 - f(0)$$

yamasa

$$f\left(\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{1}{4}x^4 + f(0)$$

boladı. $\dfrac{x^2}{2} = \tau$ dep alsaq $f(\tau) = -\tau^2 + f(0).$

$g(z)$ hám $f(\tau)$ funkciyalardıń mánislerin (20) ǵa qoyıp, berilgen Gursa máselesiniń

$$u(x,y) = xy(x + y^2)$$

túrindegi sheshimine iye bolamız.

§5. Giperbolalıq tiptegi teńlemeler ushın sheshimniń birden-birligi haqqındaǵı teorema

Biz tómende sheshimniń birden-birlik teoremasın da`lilleymiz: eger

$$u(x,t) \in C^2(\overline{D}), \quad \rho(x) \in C(0 \le x < 1), \; k(x) \in C'(0 \le x < l), \; \rho(x) > 0, \; k(x) > 0$$

bolsa, onda

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + F(x,t) \qquad (1)$$

teńlemeni, ha`mde

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_1(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

(2)

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \ge 0$$

baslanǵısh ha`m shegaralıq sha`rtlerdi qanaatlandırıwshı $D = \{0 < x < l,\, t > 0\}$ oblastında birden-bir $u(x,t)$ funkciyanı tabıwǵa boladı.

Bunı da`lillew ushın, qarastırılıp atırǵan ma`seleniń eki $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$ sheshimi bar bolsın dep uyǵaramız ha`m $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ ayırmanı qarastıramız.

Bizge belgili $u(x,t)$ funkciyası

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \qquad (3)$$

birtekli teńlemeni,

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad (4)$$

birtekli baslanǵısh ha`m shegaralıq sha`rtlerdi qanaatlandıradı. Endi $u(x,t) \equiv 0$ bolatuǵınlıǵın kórsetemiz. Usı maqsette energiya integralı dep atalıwshı

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[k(u_x)^2 + \rho(u_t)^2\right]dx$$

funkciyanı qarastıramız ha`m onıń t ǵa baylanıslı emesligin kórsetemiz. $E(t)$ funkciya birtekli bolmaǵan tardıń t waqıttaǵı tolıq energiyasın

ańlatadı. $E(t)$ nı differenciallasaq

$$E'(t) = \int_0^l [ku_x u_{xt} + \rho u_t u_{tt})dx$$

bolıp, oń ta`repindegi birinshi aǵzanı bóleklep integrallasaq

$$\int_0^l k u_x u_{xt}\,dx = \left[k u_x u_t\right]\Big|_0^l - \int_0^l u_t\left(k u_x\right)dx \tag{5}$$

boladı. Bizge belgili

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_t(0,t)=0 \\ u_t(l,t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(k\,u_x u_t\right)\Big|_0^l = 0$$

qatnasınan $E'(t)=\int_0^l u_t\left[\rho u_{tt}-\frac{\partial}{\partial x}(k u_x)\right]dx=0,$ yağnıy $E(t)=const$. Baslanǵısh sha`rtlerge muwapıq

$$E(t)=const=E(0)=\frac{1}{2}\int_0^l \left(k u_x^2+\rho u_t^2\right)\Big|_{t=0}dx=0,$$

sebebi $u(x,0)=u_1(x,0)=0$. Sha`rt boyınsha $k(x)>0,\ \rho(x)>0$, onda $u_x(x,t)\equiv 0,\ u_t(x,t)\equiv 0,\ u_l(x,t)\equiv 0$ yağnıy $u(x,t)=const=C_0$. Óz na`wbetinde (5) ge muwapıq $u(x,t)\equiv 0$. Demek, teorema sha`rtlerin qanaatlandırıwshı $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$ funkciyalar bar bolsa, olar bir birine teń boladı, yağnıy $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$ boladı.

§6. Tardıń terbelis teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı

**6.1.Tardıń birtekli terbelis teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı.** Meyli ushlarınan qattı bekitilgen birtekli tardıń erkin terbelisi haqqındağı ma`seleni qarastırayıq, yağnıy $D=\{0<x<l,\ t>0\}$ ushın

$$u_{tt}=a^2 u_{xx} \tag{1}$$

teńlemeniń

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0 \tag{2}$$

shegaralıq ha`m

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{3}$$

baslanǵısh sha`rtlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw ma`selesin qarastırayıq.

(1) teńlemeniń (2) shegaralıq sha`rtlerin qanaatlandıratuǵın nollik emes sheshimin

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t) \tag{4}$$

kóbeymesi túrinde izleymiz. (4) ni (1) ge qoysaq

$$T''(t)\cdot X(x) = a^2 T(t)\cdot X''(x)$$

yamasa $u(x,t)\neq 0$ bolǵanlıqtan, bunnan

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{5}$$

boladı. Bul teńliktiń shep ta`repi tek $t$ ǵa, oń ta`repi bolsa tek x qa baylanıslı, demek teńlik orınlanıwı ushın onıń oń jaǵıda, shep jaǵıda hám x qa hám t ǵa ǵárezli bolmawı kerek. Demek, (5) teńliktiń eki jaǵıda bir turaqlı sanǵa teń bolıwı kerek. Bul turaqlını sońǵılıqta qolaylı bolıwı ushın λ dep alamız. Solay etip,

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = const.$$

Bunnan

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{7}$$

túrindegi a`dettegi differenciallıq teńlemelerge iye bolamız, bul jerde (2) den

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{8}$$

teńligi kelip shıǵadı. Na`tiyjede tómendegi Shturm-Liuvill ma`selesine kelemiz: λ parametrdiń sonıńday ma`nisleri payda bolsın, bul ma`nisler ushın (7),(8) ma`sele nollik emes sheshimge iye bolsın. $\lambda$ parametriniń bunday ma`nisleri (7),(8) ma`seleniń menshikli ma`nisleri (yamasa xarakteristikalıq sanları) dep ataladı. Olarǵa sa`ykes keliwshi sheshimler bolsa menshikli funkciyaları dep ataladı. λ parametri ushın $\lambda<0,\ \lambda=0,\ \lambda>0$ úsh jaǵdaydı qaraymız.

a) $\lambda < 0$ bolsa, (7), (8) ma`seleniń nollik emes sheshimi joq. Haqıyqattanda, (7) niń ulıwma sheshimi

$$X(x) = \mathrm{c}_1 \cdot \exp(\sqrt{-\lambda} \cdot x) + \mathrm{c}_2 \cdot \exp(-\sqrt{-\lambda} \cdot x)$$

boladı ha`m (8) boyınsha

$$\begin{cases} X(0) = \mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2 = 0, \\ X(l) = \mathrm{c}_1 \left[\exp(l\sqrt{-\lambda}) - \exp(-l\sqrt{-\lambda}) \right] = 0 \end{cases}$$

yamasa

$$\begin{cases} \mathrm{c}_1 = -\mathrm{c}_2, \\ \mathrm{c}_1 \left[\exp(l\sqrt{-\lambda}) - \exp(-l\sqrt{-\lambda}) \right] = 0, \end{cases}$$

bunnan $\exp(l\sqrt{-\lambda}) \neq \exp(-l\sqrt{-\lambda})$ bolıp, $c_1 = 0,\ c_2 = 0$ yaǵnıy $X(x) \equiv 0.$

b) $\lambda = 0$ bolsa, (7) teńlemeniń ulıwma sheshimi $X(x) = c_1 + c_2 x$ bolıp, (8) boyınsha $c_1 = 0,\ c_2 = 0$ boladı, yaǵnıy bunday halda da (7),(8) ma`seleniń nollik emes sheshimi joq.

v) $\lambda > 0$ bolǵanda (7) teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x,$$

bunı (8) sha`rtke qoysaq $X(0) = c_1 = 0,\ X(l) = c_2 \sin l\sqrt{\lambda} = 0.$ $X(x)$ tıń nollik emesliginen $c_2 \neq 0$ bolıwı kerek. Onday bolsa

$$\sin l\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi k}{l},$$

bul jerde k qa`legen pútin san. Demek, (7),(8) ma`sele λ niń

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

ma`nislerinde ǵana nollik emes sheshimlerge iye. Bul menshikli ma`nislerge sa`ykes keliwshi menshikli funkciyalar

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$$

boladı. (6) teńlemeniń $\lambda = \lambda_k$ ma`nislerine sa`ykes keliwshi sheshimleri

$$T_k(t) = a_k cos\frac{\pi ka}{l}t + b_k sin\frac{\pi ka}{l}t$$

boladı, bul jerde a_k hám b_k erikli turaqlılar. Solay etip a_k hám b_k turaqlılar qanday bolmasın

$$u_k(x,t) = X_k(x)\cdot T_k(t) = \left(a_k cos\frac{\pi ka}{l}t + b_k sin\frac{\pi ka}{l}t\right)\cdot \sin\frac{\pi k}{l}x$$

funkciyası (1) teńlemeni ha`m (2) sha`rtlerdi qanaatlandıradı. (1) teńleme sızıqlı ha`m birtekli bolǵanı ushın

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cos\frac{\pi ka}{l}t + b_k sin\frac{\pi ka}{l}t\right)\cdot \sin\frac{\pi k}{l}x \tag{9}$$

qatarıda sheshim boladı. Bunıń ushın (9) qatar x hám t boyınsha eki márte aǵzama-aǵza differenciallanıwshı bolıwı kerek.

Haqıyqattanda da (9) nı (1) ge qoyıp, aǵzama-aǵza differenciallasaq ha`m $u_k(x,t)$ funkciyalarınıń (1) ha`m (2) ni qanaatlandıratuǵınlıǵın esapqa alsaq, bul na`tiyjeniń durıslıǵın kóriwge boladı.

Endi a_k hám b_k koefficientlerdi sonıńday anıqlaymız, (9) funkciya (3) sha`rtlerdi qanaatlandırsın. (9) dan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{l}\left(-a_k \sin\frac{\pi ka}{l}t + b_k \cos\frac{\pi ka}{l}t\right)\cdot \sin\frac{\pi k}{l}x.$$

Bunnan $t = 0$ desek ha`m (3) ni esapqa alsaq

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k}{l}x; \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{l} b_k \sin\frac{\pi k}{l}x$$

ańlatpalarǵa iye bolamız. Bul bolsa $\varphi(x)$ ha`m $\psi(x)$ funkciyalardıń sinuslar boyınsha $(0;l)$ aralıqtaǵı Fur`e qatarına jayılması bolıp, Fur`e koefficientleri

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx; \qquad b_k = \frac{2}{\pi ka}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx \tag{10}$$

formulalar menen esaplanadı.

Demek, egerde $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ funkciyaları $(0;l)$ aralıqta sinuslar boyınsha Fur`e qatarına jayılǵan bolsa (1)-(3) túrindegi birinshi shegaralıq ma`seleniń regulyar sheshimi (9) qatar kórinisinde boladı hám onıń koefficientleri (10) formula menen anıqlanadı. Bunıń ushın

$$\varphi(x)\in C^2(0\le x\le l),\ \psi(x)\in C^1(0\le x\le l),$$

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0,\ \varphi''(0)=\varphi''(l)=0,\ \psi(0)=\psi(l)=0$$

bolıp, $\varphi''(x)$ ha`m $\psi''(x)$ tuwındıları shekli bolıwı kerek.

Mine usı sha`rtler (1)-(3) ma`seleni sheshiwde Fur`e usılın qollanıw ushın jeterli sha`rtler bolıp esaplanadı.

Mısal 1. Tómendegi aralas máseleniń sheshimin tabıń:

$$u_{tt}=4u_{xx};\ \ u(0,t)=u(\pi,t)=0;\ \ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=\sin^3 x.$$

Sheshiliwi. Sheshimdi $u(x,t)=T(t)X(x)$ kóbeymesi túrinde izleymiz. Onda

$$\frac{T''(t)}{4T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

bolıp, Shturm-Liuvill máselesi

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$$

túrine iye boladı. Bul Shturm-Liuvill máselesiniń menshikli mánisleri $\lambda_k=k^2$, al menshikli funkciyaları $X_k(x)=\sin kx$. Endi $\lambda_k=k^2$ tıń hár bir mánisi ushın

$$T_k''(t)+4k^2T_k(t)=0$$

teńlemesiniń $T_k(t)$ sheshimin tabamız. Bul sheshim

$$T_k(t)=A_k\cos 2kt+B_k\sin 2kt$$

kóriniske iye boladı. Onda berilgen máseleniń sheshimi

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[A_k\cos 2kt+B_k\sin 2kt\right]\sin kx$$

túrine iye bolıp, bunnan A_k hám B_k lardı baslańǵısh shártlerden paydalanıp

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\sin kx=\sin x,$$

teńliginen anıqlaymız. $k=1$ ushın $A_1=1$ bolıp, A_k nıń qalǵan mánisleri nol`ge teń boladı.

$$u_t(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}2kB_k\sin kx=\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x,$$

bunnan $k=1$ ushın $B_1=\frac{3}{8}$ hám $k=3$ ushın $B_3=-\frac{1}{24}$ bolıp, B_k nıń qalǵan mánisleri nolge teń boladı.

Solay etip, berilgen aralas máseleniń sheshimi

$$u(x,t)=\left(\cos 2t+\frac{3}{8}\sin 2t\right)\sin x-\frac{1}{24}\sin 6t\sin 3x$$

boladı.

Mısal 2. Tómendegi aralas máseleniń sheshimin tabıń:

$$u_{tt}=9u_{xx};\quad u_x(0,t)=u(4,t)=0;\quad u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=16-x^2.$$

Sheshiliwi. Sheshimdi $u(x,t)=T(t)X(x)$ kóbeymesi túrinde izleymiz. Onda

$$\frac{T''(t)}{4T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

bolıp, Shturm-Liuvill máselesi

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ X'(0)=X(4)=0\end{cases}$$

túrine iye boladı. Bul Shturm-Liuvill máselesiniń menshikli mánisleri

$$\lambda_k=\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{16},$$

al menshikli funkciyaları

$$X_k(x)=\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{4}x.$$

Endi λ_k nıń hár bir mánisi ushın

$$T_k''(t)+\frac{9}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2T_k(t)=0$$

teńlemesiniń $T_k(t)$ sheshimin tabamız. Bul sheshim

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{3}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t + B_k \sin\frac{3}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t$$

kóriniske iye boladı. Onda berilgen máseleniń sheshimi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[A_k \cos\frac{3}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t + B_k \sin\frac{3}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t\right]\cos\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

bolıp, baslanǵısh shártlerdi paydalansaq

$$A_k = 0,\ B_k = \frac{256}{3}\frac{(-1)^k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4}$$

hám sheshim

$$u(x,t) = \frac{256}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4}\sin\frac{3}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi t\cdot\cos\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

boladı.

Mısal 3. Uzınlıǵı l ge teń bolǵan tardıń erkin terbelis nızamın anıqlań, egerde baslanǵısh waqıt momentinde dáslepki awısıwǵa iye bolmaǵan tardıń barlıq tochkalarına ϑ ǵa teń bolǵan tezlik berilgen bolsa. Tardıń ushları qattı bekitilgen.

Sheshiliwi. Qarastırılıp atırǵan tardıń terbelis nızamı

$$u_{tt} = a^2 u_{xx};\ \ u(0,t) = u(l,t) = 0;\ \ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \vartheta$$

aralas máseleniń sheshimi menen anıqlanadı. (9) formula boyınsha bul sheshimniń kórinisi

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cos\frac{\pi ka}{l}t + b_k sin\frac{\pi ka}{l}t\right)\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x$$

túrine iye bolıp, bunnan a_k koefficientlerdiń hámmesi nol`ge teń, yaǵnıy $a_k = 0$ bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Onda izlenip atırǵan sheshim

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sin\frac{\pi ka}{l}t\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x$$

kóriniske iye bolıp, bunnan

$$b_k=\frac{2}{\pi ka}\int_0^l \upsilon \sin\frac{\pi k}{l}xdx=\frac{2l\vartheta}{\pi^2k^2a}(1-\cos\pi k)=\begin{cases}0, & k=2n,\\ \dfrac{4l\vartheta}{\pi^2k^2a}, & k=2n+1.\end{cases}$$

Solay etip berilgen máseleniń sheshimi

$$u(x,t)=\frac{4l\vartheta}{\pi^2a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}sin\frac{(2n+1)\pi a}{l}t\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x$$

boladı.

Mısal 4. Uzınlıǵı l ge teń bolǵan tardıń erkin terbelis nızamın anıqlań, egerde baslanǵısh waqıt momentinde onıń dáslepki awısıwı $f(x)=H\sin\frac{2\pi}{l}x$ iymeklik formasına iye bolıp, keyinshelik dáslepki tezliksiz bosatılıp jiberilgen bolsa. Tardıń ushları qattı bekitilgen.

Sheshiliwi. Qarastırılıp atırǵan tardıń terbelis nızamı

$$u_{tt}=a^2u_{xx};\;\; u(0,t)=u(l,t)=0;\;\; u(x,0)=H\sin\frac{2\pi}{l}x,\; u_t(x,0)=0$$

aralas máseleniń sheshimi menen anıqlanadı. (9) formula boyınsha bul sheshimnniń kórinisi

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_kcos\frac{\pi ka}{l}t+b_ksin\frac{\pi ka}{l}t\right)\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x$$

túrine iye bolıp, tardıń dáslepki tezligi nol`ge teń bolǵanlıqtan $b_k$ koefficientlerdiń hámmesi nol`ge teń boladı, yaǵnıy $b_k=0$. Onda izlenip atırǵan sheshim

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kcos\frac{\pi ka}{l}t\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x$$

kóriniske iye bolıp, bunnan

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l H\sin\frac{2\pi}{l}x\sin\frac{\pi k}{l}xdx$$

hám bul integraldıń mánisi $k\neq 2$ ushın nol`, al $k=2$ ushın

$$a_2=\frac{2H}{l}\int_0^l\sin^2\frac{2\pi}{l}xdx=H$$

boladı. Solay etip berilgen máseleniń sheshimi

$$u(x,t) = H\cos\frac{2\pi a}{l}t \cdot sin\frac{2\pi}{l}x$$

kóriniste anıqlanadı.

**6.2.Tardıń birtekli emes terbelis teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı.** Ushlarınan qattı bekitilgen birtekli tardıń $F(x,t)$ sırtqı kúshiniń ta`siri astında bolıp ótetuǵın ma`jbúriy terbelisi haqqındaǵı ma`seleni, yaǵnıy $\{0 < x < l,\ t > 0\}$ oblastta

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho} \tag{11}$$

teńlemeniń

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{12}$$

baslanǵısh hám birtekli

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{13}$$

shegaralıq sha`rtlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw ma`selesin qarastırayıq.

Bul ma`seleniń sheshimin t nı parametr kórinisinde qarap, x boyınsha jayılǵan

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x \tag{14}$$

Fur`e qatarı kórinisinde izleymiz. $u(x,t)$ nı tabıw ushın $u_k(t)$ funkciyalardı anıqlaw kerek boladı. Sonlıqtan $f(x,t),\ \varphi(x),\ \psi(x)$ funkciyalardı Fur`e qatarına jayıp alamız:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x,$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\frac{\pi k}{l}x,$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin\frac{\pi k}{l}x,$$

bul jerde

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(s,t)\sin\frac{\pi k}{l}s ds,$$

$$\varphi_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\frac{\pi k}{l}s ds,$$

$$\psi_k=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(s)\sin\frac{\pi k}{l}s ds.$$

(14) ni (11) ge qoyıp

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{u_k''(t)+a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 u_k(t)-f_k(t)\right\}\sin\frac{\pi k}{l}x=0$$

yamasa

$$u_k''(t)+\left(\frac{\pi k}{l}a\right)^2 u_k(t)=f_k(t) \tag{15}$$

teńlemege iye bolamız. Baslanǵısh sha`rtler boyınsha

$$u_k(0)=\varphi_k,\ u_k'(0)=\psi_k. \tag{16}$$

$u_k(t)$ funkciyaları (15),(16) birtekli emes Koshi máselesin sheshiw arqalı anıqlanadı. Bunnan tabılǵan $u_k(t)$ nıń mánisin (14) degi ornına qoyıp, berilgen (11)-(13) máseleniń sheshimine iye bolamız.

Mısal 5. Uzınlıǵı l ge teń bolǵan birtekli tarǵa hámme waqıt shaması G awırlıq kúshine teń bolǵan sırtqı kúsh tásir etedi. Eger tardıń dáslepki awısıwı hám dáslepki tezligi nol`ge teń bolıp, ushlarınan qattı bekitilgen bolsa, onda bul tardıń terbelis nızamın anıqlań.

Sheshiliwi. Qoyılǵan máseleniń sheshimin

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-G,$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0;\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0$$

túrindegi aralas máseleni sheshiw arqalı anıqlaymız. Bul máseleniń sheshimi

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x$$

túrinde izlenedi, bul jerde

$$T_k(t)=-\frac{4Gl^2}{\pi^3k^3a^2}\left(1-\cos\frac{\pi ka}{l}t\right).$$

Solay etip, berilgen máseleniń sheshimi

$$u(x,t)=-\frac{4Gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(1-\cos\frac{\pi ka}{l}t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x,$$

bul jerde $k=1,3,5,...,2n-1,...$ túrindegi taq sanlar.

Mısal 6. Tómendegi aralas máseleniń sheshimin tabıń:

$$u_{tt}=4u_{xx}+8\sin x\cos t;\quad u(0,t)=u(\pi,t)=0;\quad u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=\sin^3 x.$$

Sheshiliwi. Sheshimdi eki funkciyanıń $u(x,t)=\vartheta(x,t)+\omega(x,t)$ qosındısı túrinde izleymiz. Bul jerde $\vartheta(x,t)$ funkciyasın

$$\vartheta_{tt}=4\vartheta_{xx};\quad \vartheta(0,t)=\vartheta(\pi,t)=0;\quad \vartheta(x,0)=\sin x,\ \vartheta_t(x,0)=\sin^3 x,$$

al $\omega(x,t)$ funkciyasın

$$\omega_{tt}=4\omega_{xx}+8\sin x\cos t;\quad \omega(0,t)=\omega(\pi,t)=0;\quad \omega(x,0)=0,\ \omega_t(x,0)=0$$

aralas máselelerdiń sheshimi bolatuǵınday etip saylap alamız.

Bizge aldınǵı birtekli máselelerde islengen mısallardan

$$\vartheta(x,t)=\left(\cos 2t+\frac{3}{8}\sin 2t\right)\sin x-\frac{1}{24}\sin 6t\sin 3x$$

ekenligi málim. Biz endi birtekli emes bóleginiń $\omega(x,t)$ sheshimin tabamız. Bul sheshimdi

$$\omega(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(t)\sin kx$$

kóriniste izleymiz, bul jerde $\sin kx$ berilgen máseleniń birtekli bólegi ushın orınlı bolatuǵın Shturm-Liuvill máselesiniń menshikli funkciyaları. $\omega(x,t)$ tıń bul mánisin berilgen birtekli emes teńlemege aparıp qoyıp

$$\left(\omega_1''(t)+4\omega_1(t)-8\cos t\right)\sin x=0$$

teńligine iye bolamız, bul jerde $\omega_k(t),\ k\neq 1$ funkciyalarınıń hámmesi nol`ge teń.

Solay etip nollik baslanǵısh shártlerdi esapqa alǵan jaǵdayda $\omega_1(t)$ funkciyasın anıqlaw, tómendegi Koshi máselesin sheshiwge alıp keledi.

$$\begin{cases} \omega_1''(t) + 4\omega_1(t) = 8\cos t, \\ \omega_1(0) = 0,\ \omega_1'(0) = 0. \end{cases}$$

Bul Koshi máselesiniń sheshimi

$$\omega_1(t) = -\frac{8}{3}\cos 2t + \frac{8}{3}\cos t$$

yamasa

$$\omega(x,t) = \left(-\frac{8}{3}\cos 2t + \frac{8}{3}\cos t \right)\sin x$$

Solay etip, berilgen birtekli emes aralas máseleniń sheshimi

$$u(x,t) = \vartheta(x,t) + \omega(x,t) = \left(\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t \right)\sin x -$$

$$-\frac{1}{24}\sin 6t \sin 3x - \left(\frac{8}{3}\cos 2t - \frac{8}{3}\cos t \right)\sin x$$

boladı.

§7. Fur`e usılınıń ulıwma sxeması. Menshikli mánis hám menshikli funkciyalar. Steklov teoreması

Meyli birtekli bolmaǵan tardıń

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x)u = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

terbelis teńlemesin qarayıq, bul jerde $k(x) > 0,\ \rho(x) > 0,\ q(x) \geq 0$ berilgen úzliksiz funkciyalar. Meyli $\{0 < x < l,\ t > 0\}$ oblastta (1) teńlemeniń

$$\left(\alpha u + \beta u_x \right)_{x=0} = 0;\ \left(\gamma u + \delta u_x \right)\big|_{x=l} = 0,\ \ t \geq 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ 0 \leq x \leq l \tag{3}$$

sha`rtlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabayıq, bul jerde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ turaqlı sanlar bolıp $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Ózgeriwshilerdi ayırıw usılına muwapıq sheshimdi

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{4}$$

túrinde izleymiz. (4) ni (1) ge koyıp, ózgeriwshilerdi ajıracaq

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX(x)}{dx}\right]-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0,\\&T''(t)+\lambda T(t)=0\end{aligned}\right\}$$

teńlemelerine iye bolamız. Na`tiyjede $X(x)$ tı anıqlaw ushın menshikli ma`nisler haqqındağı Shturm-Liuvill ma`selesin payda etemiz: $\lambda$ nıń sonday ma`nislerin tabamız, bul ma`nisler ushın

$$L\big(X(x)\big)+\lambda\rho(x)X(x)=0, \tag{5}$$

$$\alpha X(0)+\beta X'(0)=0, \quad \gamma X(l)+\delta X'(l)=0 \tag{6}$$

ma`sele nollik emes sheshimge iye bolsın. (5) teńlemeniń hám (6) sha`rtlerdiń bir tekliliginen menshikli funkciyalar bir birinen turaqlı kóbeyiwshilerge ajıraladı. Bul turaqlı kóbeyiwshini sonday etip saylaymız, na`tiyjede

$$\int_0^l \rho(x)X_k(x)dx=1 \tag{7}$$

sha`rtler orınlansın. Usınday qa`siyetke iye, yağnıy (7) sha`rtlerdi qanaatlandırıwshı menshikli funkciyalarğa normallasqan funkciyalar klassı dep ataladı.

Endi (5),(6) Shturm-Liuvill ma`selesi ushın menshikli ma`nisler ha`m menshikli funkciyalardıń za`rúrli qa`siyetlerin keltireyik.

1) Ha`r bir menshikli ma`niske tek bir sızıqlı ǵa`rezli bolmaǵan menshikli funkciya sa`ykes keledi.

Haqıyqattanda, meyli λ niń bir ma`nisinde (5),(6) ma`seleniń sızıqlı ǵa`rezsiz bolmaǵan menshikli funkciyaları payda bolsın. Onda (5) teńlemeniń ulıwma sheshimi de bul sha`rtlerdi qanaatlandırıwı za`rúr. Biraq bunday bolıwı múmkin emes. Ha`mme waqıt $X(0), X'(0)$ baslanǵısh sha`rtleri menen (5) teńlemeni sheshiw múmkin emes, ma`selen $X(0)=\alpha$. $X'(0)=\beta$ desek, (6) nıń birinshi sha`rtinen $\alpha^2+\beta^2=0$, demek (6) nıń birinshi sha`rti orınlanbaydı.

2) Ha`r túrli menshikli ma`nislerge sa`ykes menshikli funkciyalar $\rho(x)$ salmaq funkciyası boyınsha ortogonal boladı, yaǵnıy

$$\int_0^l \rho(x)X_1(x)X_2(x)dx = 0. \tag{8}$$

Haqıyqattanda, meyli eki λ_1 hám λ_2 menshikli ma`nislerge sa`ykes keliwshi menshikli funkciyalar $X_1(x)$ hám $X_2(x)$ bolsın. Onda

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX_1(x)}{dx}\right] + \left[\lambda_1\rho(x) - q(x)\right]X_1(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX_2(x)}{dx}\right] + \left[\lambda_2\rho(x) - q(x)\right]X_2(x) = 0.$$

Bul teńlemelerdiń birinshisin $X_2(x)$ ge, al ekinshisin $X_1(x)$ ge kóbeytip, olardı aǵzama-aǵza ayırsaq

$$\frac{d}{dx}\left\{k(x)\left[X_2(x)X_1(x) - X_1(x)X_2(x)\right]\right\} + (\lambda_1 - \lambda_2)\rho(x)X_1(x)X_2(x) = 0.$$

Bul teńlikti 0 den 1 ge shekem integrallasaq, onda (6) ǵa muwapıq

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^l \rho(x)X_1(x)X_2(x)dx = k(x)\left[X_2(x)X_1'(x) - X_1(x)X_2'(x)\right]_{x=0}^{x=l} = 0$$

hám bunnan $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ (8) diń durıslıǵı kelip shıǵadı.

3) Barlıq menshikli ma`nisler haqıyqıy.

Meyli λ kompleks túrindegi menshikli ma`nis ha`m oǵan sa`ykes menshikli funkciya $X(x)$ bolsın. (5) teńlemeniń ha`m (6) sha`rtlerdiń koefficientleri haqıyqıy bolǵanı ushın $\lambda$ ǵa túyinles bolǵan kompleks sanda menshikli ma`nis bolıp, oǵan sa`ykes $X(x)$ qa túyinles $\bar{X}(x)$ funkciyada menshikli funkciya boladı.

Ortogonallıq sha`rtine qaraǵanda

$$\int_0^l \rho(x)X(x)\bar{X}(x)dx = \int_0^l \rho(x)\left|X(x)\right|^2 dx = 0.$$

Bunnan $X(x) = 0$, yaǵnıy λ kompleks san menshikli ma`nis bola almaydı.

4) Sheksiz sandaǵı menshikli ma`nisler payda boladı ha`m

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda < \ldots, \ \lim_{n\to\infty}\lambda_n = +\infty.$$

Meyli λ_k menshikli ma`nisler bolsın. $X_k(x)$ funkciyalar bolsa olarǵa sa`ykes keliwshi menshikli funkciyalar (ortogonal ha`m normallasqan) bolsın. Onda

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)X_k'(x)\right]-q(x)X_k(x)=\lambda_k\,\rho(x)X_k(x).$$

Bul teńliktiń eki ta`repin $X_k(x)$ qa kóbeytip ha`m integrallap, (7) boyınsha

$$\lambda_k=-\int_0^l\left\{\frac{d}{dx}\left[k(x)X_k'(x)\right]-q(x)X_k(x)\right\}X_k(x)dx$$

ańlatpanı alamız. Birinshi aǵzanı bóleklep integrallasaq

$$\lambda_k=\int_0^l\left\{k(x)\left[X_k'(x)\right]^2+q(x)X_k^2(x)\right\}dx-\left[k(x)X_k(x)X_k^1(x)\right]_{x=0}^{x=l}. \qquad (9)$$

Meyli $k(x)>0,\ \rho(x)>0,\ q(x)\geq 0$ sha`rtlerinen basqa

$$\left[k(x)X_k(x)X_k^1(x)\right]_{x=0}^{x=1}\leq 0 \qquad (10)$$

bolsın. Bunday jaǵdayda (9) dan $\lambda_k>0$ ekenligi kelip shıǵadı. (10) sha`rtti $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ koefficientler esabınan jetkeriw múmkin. Ma`selen

$$X'(0)-h_1X(0)=0,\ \ X'(l)+h_2X(l)=0,\ \ \ h_1\geq 0,\ h_2\geq 0$$

shegaralıq sha`rtler ushın (10) teńsizlik orınlanadı.

5) **V.A.Steklov teoreması.** $\forall F(x)\in C^2\left(0\leq x\leq l\right),\ F(0)=F(l)=0$ funkciyası $\{X_n(x)\}$ menshikli funkciyalar boyınsha teń ólshemli ha`m absolyut jıynaqlı bolǵan qatarǵa jayıladı:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\cdot X_n(x)$$

$$F_n=\frac{l}{\|X_n(x)\|^2}\int_0^l F(x)X_n(x)\,\rho(x)dx;\quad \|X_n(x)\|^2=\int_0^l X_n^2(x)\,\rho(x)dx$$

Eger $\{X_n(x)\}$ normallasqan sistema bolsa, onda $\|X_n(x)\|^2=l$. Bul qa`siyettiń da`lilleniwi integral teńlemeler teoriyası menen baylanıslı bolǵanı ushın biz onı keltirmeymiz. Endi

$$T''(t)+a^2\,\lambda T(t)=0$$

teńlemesin sheshemiz.

Onıń $\lambda=\lambda_k$ ma`nisine sa`ykes keletuǵın sheshimi

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t$$

bolıp, ha`r bir

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t\right)X_k(x)$$

funkciyası (1) teńlemeni ha`m (2) sha`rtlerdi qanaatlandıradı. (3) baslanǵısh sha`rtti de qanaatlandırıwı ushın tómendegi qatardı paydalanamız

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t\right)X_k(x). \tag{11}$$

Bul qatar, sonday-aq onı x hám t boyınsha eki ma`rte aǵzama-aǵza differenciallawdan payda bolǵan qatarlar teń ólshemli jıynaqlı bolsa, onda (11) qosındıda, yaǵnıy $u(x,t)$ funkciyasıda (1) teńlemeniń (2) sha`rtlerin qanaatlandırıwshı sheshim boladı.

Endi (11) ni (3) ge qoyıp tómendegi qatarlarǵa iye bolamız

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{l=0} = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\sqrt{\lambda_k}X_k(x). \tag{13}$$

Solay etip, berilgen $\varphi(x), \psi(x)$ funkciyalardı $X_k(x)$ menshikli funkciyalar boyınsha qatarǵa jayıw ma`selesine keldik. Eger (12),(13) qatarlardı teń ólshemli jıynaqlı dep oylap, olardıń eki ta`repin $\rho(x)X_k(x)$ qa kóbeyttip, 0 den l ge shekem integrallasaq A_k hám B_k lardı tómendegishe tabıwǵa boladı:

$$A_k = \int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_k(x)dx, \quad B_k = \frac{l}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^l \rho(x)\psi(x)X_k(x)dx.$$

Tabılǵan bul ańlatpalardı (11) ge qoyıp, (1)-(3) aralas ma`seleniń sheshimine iye bolamız.

Mısal 1. $y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad 0 < x < a,$

$$y(0) = y(a) = 0$$

shegaralıq máseleniń menshikli mánislerin hám menshikli funkciyaların tabıń.

Sheshiliwi. Dáslep berilgen teńlemeniń ulıwma sheshimin tawıp alamız

$$y\left(x\right)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x.$$

Bul ulıwma sheshimdi shegaralıq sha`rtlerge aparıp qoyıp, erikli turaqlılırdı anıqlaymız:

$$y\left(0\right)=C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=0,$$

bunnan $C_1=0,\ C_2\neq 0$ bolıp, ekinshi sha`rtten $y(a)=C_2\cdot\sin\lambda a=0$ yamasa

$$\lambda a=\pi k,\quad (k=1,2,...)$$

kelip shıǵadı. Bunnan $\lambda_k=\dfrac{\pi k}{a},\ k=1,2,...,$ berilgen shegaralıq máseleniń menshikli ma`nisleri, al usı menshikli mánislerge sáykes menshikli funkciyalar

$$y_k(x)=\sin\frac{\pi k}{a}x,\ k=1,2,...,$$

bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı.

Mısal 2. $y''(x)+\lambda y(x)=0,\quad 0<x<a,\quad y(0)=0,\quad y'(a)+y(a)=0$ shegaralıq máseleniń menshikli mánislerin hám menshikli funkciyaların tabıń.

Sheshiliwi. Dáslep berilgen teńlemeniń ulıwma sheshimin tawıp alamız

$$y\left(x\right)=C_1\cdot\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\cdot\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Bul ulıwma sheshimdi shegaralıq sha`rtlerge aparıp qoyıp, erikli turaqlılırdı anıqlaymız:

$$y\left(0\right)=C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=0,\quad C_1=0,\quad C_2\neq 0$$

$$y'\left(a\right)+y\left(a\right)=C_2\sqrt{\lambda}\cdot\cos\sqrt{\lambda}a+C_2\cdot\sin\sqrt{\lambda}a=0,$$

bunnan berilgen shegaralıq máseleniń menshikli ma`nisleri $\lambda_k=\left(\dfrac{\mu_k}{a}\right)^2,\ \left(k=1,2,....\right),$ al usı menshikli mánislerge sáykes menshikli funkciyaları $y_k(x)=\sin\dfrac{\mu_k}{a}x$ bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı, bul jerde $\mu_k$ degenimiz $tg\sqrt{\lambda}a=-\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ teńlemeniń koren`leri.

§8.Tuwrı múyeshli membrananıń terbelis teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı

Meyli ta`repleriniń uzınlıǵı $p$ hám $q$ bolǵan tuwrı múyeshli formadaǵı membrana dógereginen qattı bekitilgen bolsın. Bul membrananıń terbelisi haqqındaǵı ma`sele $\{0 < x < p,\ 0 < y < q,\ t > 0\}$ oblastta

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \tag{1}$$

teńlemeniń

$$u(0,y,t) = 0,\ u(p,y,t) = 0,\ u(x,0,t) = 0,\ u(x,q,t) = 0 \tag{2}$$

shegaralıq hám

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \tag{3}$$

baslanǵısh sha`rtlerin qanaatlandırıwshı sheshimin tabıwdan ibarat. (1) teńlemeniń (2) shegaralıq sha`rtlerin qanaatlandırıwshı sheshimin

$$u(x,y,t) = T(t)\,\vartheta(x,y) \tag{4}$$

kóriniste izleymiz. Bul sheshimdi (1) ge qoyıp

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{\vartheta_{xx} + \vartheta_{yy}}{\vartheta}$$

teńlikti payda etemiz. Bul teńlik orınlı bolıw ushın teńliktiń eki ta`repide turaqlı bir sanǵa teń bolıwı kerek. Bul turaqlını $-\lambda^2$ dep belgilesek, ha`m (2) shegaralıq sha`rtlerdi esapqa alsaq, tómendegi ańlatpalarǵa iye bolamız:

$$T''(t) + (a\lambda)^2 T(t) = 0 \tag{5}$$

$$\vartheta_{xx} + \vartheta_{yy} + \lambda^2\vartheta = 0 \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \vartheta\big|_{x=0} = 0, & \vartheta\big|_{x=p} = 0 \\ \vartheta\big|_{y=0} = 0 & \vartheta\big|_{y=q} = 0 \end{array}\right\}. \tag{7}$$

(6), (7) ma`sele ushın

$$\vartheta(x,y) = X(x)\cdot Y(y) \tag{8}$$

dep alıp, Fur`e usılın qollanamız. (8) ni (6) ǵa qoyıp

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\lambda^2=-\frac{X''(x)}{X(x)}$$

teńlikke iye bolamız. Bunnan tómendegi

$$X''(x)+\lambda_1^2X(x)=0,\quad Y''(y)+\lambda_2^2Y(y)=0 \qquad (9)$$

teńlemelerdi alamız, bul jerde

$$\lambda^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2. \qquad (10)$$

Bizge belgili (9) teńlemelerdiń ulıwma sheshimi

$$\left.\begin{array}{l} X(x)=c_1\cos\lambda_1x+c_2\sin\lambda_1x, \\ Y(y)=c_3\cos\lambda_2y+c_4\sin\lambda_2y \end{array}\right\}$$

bolıp, (7) den kelip shıǵatuǵın

$$\left.\begin{array}{ll} X(0)=0, & X(p)=0, \\ Y(0)=0, & Y(q)=0 \end{array}\right\}$$

shártlerdi esapqa alsaq $c_1=c_3=0$ boladı. Eger $\tilde{n}_2=\tilde{n}_4=1$ dep alsaq

$$X(x)=\sin\lambda_1x,\ Y(y)=\sin\lambda_2y$$

bolıp, óz na`wbetinde joqarıdaǵı shegaralıq shártler boyınsha $\sin\lambda_1p=0,\ \ \sin\lambda_2q=0$ teńliginen λ_1 hám λ_2 ushın

$$\lambda_{1m}=\frac{m\pi}{p},\quad \lambda_{2n}=\frac{n\pi}{q},\quad (m,n=1,2,3,....)$$

mánislerine iye bolamız. Bunnan (10) ǵa muwapıq λ niń sáykes

$$\lambda_{mn}^2=\lambda_{1m}^2+\lambda_{2n}^2=\left(\frac{m^2}{p^2}+\frac{n^2}{q^2}\right)\pi^2 \qquad (11)$$

ma`nislerine iye bolamız. Solay etip, (11) menshikli ma`nislerge (6), (7) ma`seleniń

$$\vartheta_{mn}(x,y)=\sin\frac{m\pi}{p}x\sin\frac{n\pi}{q}y \qquad (12)$$

menshikli funkciyaları sa`ykes keledi. Óz na`wbetinde $\lambda^2=\lambda_{mn}^2$ menshikli ma`nislerdiń ha`r birine sa`ykes keliwshi (5) teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$T_{mn}(t)=A_{mn}\cos a\lambda_{mn}t+B_{mn}\sin a\lambda_{mn}t \qquad (13)$$

boladı. Demek, (4),(12),(13) ge muwapıq, (1) teńlemeniń (2) shegaralıq sha`rtlerdi qanaatlandırıwshı sheshimi

$$u_{\grave{o}\,n}(x,y,t)=\left(A_{\grave{o}\,n}\cos a\lambda_{mn}t+B_{mn}\sin a\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi}{p}x\cdot\sin\frac{n\pi}{q}y$$

kóriniste boladı. Endi tómendegi qos qatardı dúzemiz

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x,y,t). \tag{14}$$

Bul qatar ha`m onnan ha`mme ózgeriwshiler boyınsha alınǵan eki ma`rte aǵzama aǵza differenciallanǵan qatarlar teń ólshemli jıynaqlı bolsa, onda olardıń qosındısı (1) teńlemeni ha`m (2) sha`rtlerdi qanaatlandıradı. (3) baslanǵısh sha`rtlerdi qanaatlandırıwı ushın

$$\varphi(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi}{p}x\,\sin\frac{n\pi}{q}y$$

$$\psi(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}a\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi}{p}x\,\sin\frac{n\pi}{q}y$$

bolıwı za`rúr. Bunnan

$$A_{mn}=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q\varphi(x,y)sin\frac{m\pi}{p}x\cdot sin\frac{n\pi}{q}ydxdy,$$

$$B_{mn}=\frac{4}{pqa\lambda_{mn}}\int_0^p\int_0^q\psi\left(x,y\right)sin\frac{m\pi}{p}x\cdot sin\frac{n\pi}{q}ydxdy$$

koefficientlerin anıqlaymız. Sonda (14) sheshim

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}M_{mn}\sin\frac{m\pi}{p}x\cdot\sin\frac{n\pi}{q}y\sin\left(a\lambda_{mn}t+w_{mn}\right)$$

túrine iye boladı, bul jerde

$$M_{mn}=\sqrt{A_{mn}^2+B_{mn}^2},\quad w_{mn}=arctg\frac{A_{mn}}{B_{mn}}.$$

Mısal 1. Tómendegi aralas máseleni sheshiń.

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy},\quad 0<x,y<\pi,$$

$$u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0,\ \ t\geq 0,$$

$$u(x,y,0)=3\sin x\sin 2y,\;\; u_t(x,y,0)=5\sin 3x\sin 4y.$$

Sheshiliwi. Dáslep berilgen teńlemeni hám shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın $u(x,y,t)=T(t)\vartheta(x,y)$ funkciyanı tabamız. Bul funkciyanı berilgen teńlemege qoyıp

$$\vartheta T''=T\vartheta_{xx}+T\vartheta_{yy}$$

teńligine iye bolamız. Bul teńliktiń eki jaǵın $T\vartheta$ ǵa bólip, soń $-\lambda^2$ qa teńlestirsek

$$\frac{T''}{T}=\frac{\vartheta_{xx}+\vartheta_{yy}}{\vartheta}=-\lambda^2,$$

bunnan $T(t)$ ǵa qarata

$$T''(t)+\left(a\lambda\right)^2T(t)=0$$

teńlemesine hám $\vartheta(x,y)$ ǵa qarata

$$\vartheta_{xx}+\vartheta_{yy}+\lambda^2\vartheta=0,$$

$$\vartheta\Big|_{x=0}=0,\;\; \vartheta\Big|_{x=\pi}=0,\;\; \vartheta\Big|_{y=0}=0,\;\; \vartheta\Big|_{y=\pi}=0$$

shegaralıq máselesine iye bolamız. (11), (12) hám (13) boyınsha

$$\lambda_{mn}^2=\lambda_{1m}^2+\lambda_{2n}^2=\left(\frac{m^2}{\pi^2}+\frac{n^2}{\pi^2}\right)\pi^2=m^2+n^2$$

$$\vartheta_{mn}(x,y)=\sin\frac{m\pi}{\pi}x\,\sin\frac{n\pi}{\pi}y=\sin mx\,\sin ny$$

$$T_{mn}(t)=A_{mn}\cos\sqrt{n^2+m^2}t+B_{mn}\sin\sqrt{n^2+m^2}t$$

bolıp, bunnan

$$u_{\grave{o}\,n}(x,y,t)=\left(A_{mn}\cos\sqrt{n^2+m^2}t+B_{mn}\sin\sqrt{n^2+m^2}t\right)\sin mx\cdot\sin ny.$$

Onda (14) boyınsha

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(A_{mn}\cos\sqrt{n^2+m^2}t+B_{mn}\sin\sqrt{n^2+m^2}t\right)\sin mx\cdot\sin ny$$

bolıp, belgisiz koefficientlerdi baslanǵısh shártlerden anıqlasaq

$$u(x,y,0)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\sin mx\cdot\sin ny=3\sin x\sin 2y,$$

$$u_t(x,y,0)=\sum_{m,n=1}^{\infty}B_{mn}\sqrt{n^2+m^2}\sin mx\cdot\sin ny=5\sin 3x\sin 4y$$

boladı. Bunnan $a_{12}=3;\ a_{mn}=0,\ m\neq 1,\ \ n\neq 2$ hám $b_{34}=1;\ b_{mn}=0,\ m\neq 3,\ \ n\neq 4.$

Solay etip sheshim

$$u(x,y,t)=3\cos\sqrt{5}t\cdot\sin x\sin 2y+\sin 5t\cdot\sin 3x\sin 4y$$

boladı.

Mısal 2. Tómendegi aralas máseleni sheshiń.

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+\cos t\cos x\cos y,\ \ 0<x,y<\pi,$$

$$u_x(0,y,t)=u_x(\pi,y,t)=0,\quad u_y(x,0,t)=u_y(x,\pi,t)=0,\ \ t\geq 0,$$

$$u(x,y,0)=0,\ \ u_t(x,y,0)=0.$$

Sheshiliwi. Sheshimdi

$$u(x,y,t)=\vartheta(t)\cos x\cos y$$

túrinde izleymiz, sebebi sáykes birtekli

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy},\ \ 0<x,y<\pi,$$

$$u_x(0,y,t)=u_x(\pi,y,t)=0,\quad u_y(x,0,t)=u_y(x,\pi,t)=0,\ \ t\geq 0,$$

$$u(x,y,0)=0,\ \ u_t(x,y,0)=0.$$

máseleniń menshikli funkciyaları $\cos nx\cos my,\ \ n,m=0,1,2,...$ boladı. $u(x,y,t)=\vartheta(t)\cos x\cos y$ sheshimdi berilgen teńlemege qoyıp

$$\vartheta''(t)+2\vartheta(t)=\cos t,\ \ t\geq 0,$$

$$\vartheta(0)=\vartheta'(0)=0$$

Koshi máselesine iye bolamız. Bul Koshi máselesiniń sheshimi

$$\vartheta(t)=\cos t-\cos(\sqrt{2}t)$$

bolǵanlıqtan, berilgen máseleniń sheshimi

$$u(x,y,t)=\left(\cos t-\cos(\sqrt{2}t)\right)\cos x\cos y$$

boladı.

§9. Dóńgelek membrananıń terbelis teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı

Meyli dógereginen qattı bekitilgen, orayı koordinata basında jaylasqan, radiusı R ge teń bolǵan birtekli dóńgelek membrananıń erkin terbelisin qarastırayıq. Bul ma`sele

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2} u_{tt} \tag{1}$$

túrindegi tolqın teńlemesin sheshiwge alıp kelinedi. $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$ belgilewin kiritiw arqalı (1) teńlemeni polyar koordinatalar sistemasında

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2} u_{tt} \tag{2}$$

túrinde jazıwǵa boladı. Onda shegaralıq sha`rt

$$u\big|_{r=R} = 0 \tag{3}$$

ha`m baslanǵısh sha`rtler

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(r,\theta), \;\; u_t\big|_{t=0} = \varphi_1(r,\theta) \tag{4}$$

túrine iye boladı.

Meyli a`piwayılıq ushın dóńgelek membrananıń radiallıq terbelisin, yaǵnıy awısıw u tek ǵana r hám t ǵa baylanıslı bolǵan halatın qarastırayıq.

Bunday terbelis ushın baslanǵısh sha`rtler

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(r), \quad u_t\big|_{t=0} = \varphi_1(r) \tag{5}$$

túrine iye boladı, bul jerde $\varphi_0(r)$ hám $\varphi_1(r)$ ler $(0;R)$ intervalında berilgen funkciyalar. Bunday halda u awısıw φ múyeshke baylanıslı bolmaǵanlıǵı ushın (2) teńleme

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{a^2} u_{tt} \tag{6}$$

túrine iye boladı. Solay etip, dóńgelek membrananıń radiallıq terbelisi (6) teńlemeniń (3) shegaralıq sha`rtin ha`m (5) baslanǵısh sha`rtlerin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıwǵa alıp kelinedi.

Sheshimdi ózgeriwshilerdi ayırıw usılına muwapıq

$$u(r,t) = T(x) \cdot X(r) \tag{7}$$

kóbeymesi túrinde izleymiz. Bunı (6) ǵa qoyıp, ózgeriwshilerdi ajıracaq

$$\frac{X''(r) + \frac{1}{r} X'(r)}{X(r)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2$$

bolıp, bunnan tómendegi

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0, \tag{8}$$

$$X'' + \frac{1}{r} X' + \lambda^2 X = 0 \tag{9}$$

teńlemelerge iye bolamız.

(9) teńleme Bessel teńlemesi dep ataladı. Onıń ulıwma sheshimi

$$X(r) = C_1 s_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)$$

túrine iye boladı, bunda C_1 hám C_2 ler erikli turaqlılar, $s_0(\lambda r)$ hám $Y_0(\lambda r)$ Bessel funkciyaları, $s_0(\lambda r)$ birinshi túr nolinshi ta`rtipli, $Y_0(\lambda r)$ bolsa ekinshi túr nolinshi ta`rtipli Bessel funkciyaları dep ataladı. Bul funkciyalardan tek ǵana $s_0(\lambda r)$ funkciyası $r = 0$ ushın shegaralanǵan, $Y_0(\lambda r)$ funkciyası bolsa $r = 0$ ushın sheksizlikke aylanadı. Sonıń ushın $C_2 = 0$ dep alamız, keri halda dóńgelek membrananıń ortası sheksizlikke ketip qaladı. Endi $X(r)$ di (3) shegaralıq sha`rtke qoysaq $C_1 s_0(\lambda R) = 0$ yamasa $s_0(\lambda R) = 0$ boladı, sebebi $C_1 \neq 0$. Endi

$$\lambda R = \mu \tag{10}$$

belgilew kiricek

$$s_0(\mu) = 0 \tag{11}$$

teńligine iye bolamız. Sońǵı (11) teńleme sheksiz kóp oń sheshimlerge iye. Olardı $\mu_1, \mu_2, \ldots$ dep belgileymiz. Onda (10) dan

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}, \quad (n = 1,2,...)$$

boladı. $\lambda = \lambda_n$ ushın (8) teńleme

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{a\,\mu_n t}{R} + b_n \sin\frac{a\,\mu_n t}{R}$$

túrindegi sheshimge iye boladı, bul jerde a_n, b_n ler erikli turaqlılar.

(7) formula boyınsha

$$u_n(r,t) = \left(a_n \cos\frac{a\,\mu_n t}{R} + b_n \sin\frac{a\mu_n t}{R} \right) s_0\left(\frac{\mu_n r}{R} \right)$$

funkciyası (6) teńlemeni ha\`m (3) shegaralıq sha\`rtti qanaatlandıradı.

Endi

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{a\,\mu_n t}{R} + b_n \sin\frac{a\mu_n t}{R} \right) s_0\left(\frac{\mu_n r}{R} \right) \tag{12}$$

qatarın dúzemiz. Bunı (5) baslanǵısh sha\`rtlerge qoysaq

$$\varphi_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s_0\left(\frac{\mu_n r}{R} \right), \quad \varphi_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\mu_n}{R} b_n s_0\left(\frac{\mu_n r}{R} \right)$$

boladı, bul jerde belgisiz koefficientler

$$a_n = \frac{2}{R^2 s_1^2(\mu_n)} \int_0^R r \cdot \varphi_0(r) s_0\left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr,$$

$$b_n = \frac{2}{a\mu_n R \cdot s_1^2(\mu_n)} \int_0^R r \cdot \varphi_1(r) \cdot s_0\left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr$$

formulaları menen anıqlanadı.

Bulardı (12) degi orınlarına qoysaq (3),(5),(6) berilgen ma\`seleniń sheshimine iye bolamız.

Mısal 1. Birtekli dóńgelek membrananıń terbelis teńlemesi ushın tómendegi aralas máseleni sheshiń

$$\begin{gathered} \frac{1}{a^2} u_{tt} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \sin\omega t, \ \ 0 < r < R, \ t > 0, \\ |u(0,t)| < +\infty, \ u(R,t) = 0, \ t \ge 0, \\ u(r,0) = u_t(r,0) = 0, \ 0 \le r \le R. \end{gathered} \tag{13}$$

Sheshiliwi. Sheshimdi eki $u(r,t)=w(r,t)+\vartheta(r,t)$ funkciyanıń qosındısı túrinde izleymiz. Bul jerde $w(r,t)$ funkciyasın

$$\begin{gathered}\frac{1}{a^2}w_{tt}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\sin\omega\, t,\\ \left|w(0,t)\right|<+\infty,\ w(R,t)=0,\end{gathered}\tag{14}$$

al $\vartheta(r,t)$ funkciyasın

$$\begin{gathered}\frac{1}{a^2}\vartheta_{tt}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)+\sin\omega\, t,\\ \left|\vartheta(0,t)\right|<+\infty,\ \vartheta(R,t)=0,\\ \vartheta(r,0)=-w(r,0),\ \vartheta_t(r,0)=-w_t(r,0)\end{gathered}\tag{15}$$

máselesiniń sheshimi bolatuǵınday etip saylap alamız.

Dáslep $w(r,t)$ funkciyasın anıqlayıq. Bul funkciyanı $w(r,t)=A(r)\sin\omega\, t$ kóriniste izlep, $A(r)$ nı anıqlaymız. $w(r,t)=A(r)\sin\omega\, t$ nı (14) ge qoysaq

$$-\frac{1}{a^2}\omega^2 A\sin\omega\, t=\frac{d}{rdr}\left(r\frac{dA}{dr}\right)\sin\omega\, t+\sin\omega\, t$$

bolıp, bunnan

$$r^2A''+rA'+\frac{r^2\omega^2}{a^2}A=-r^2,$$

$$\left|A(0)\right|<+\infty,\ A(R)=0\ .$$

Bul shegaralıq máseleniń sheshimi óz gezeginde $A(r)=A_1(r)+A_2(r)$ kóriniste izlenedi, bul jerde $A_1(r)$ funkciyasın

$$r^2A_1''+rA_1'+\frac{r^2\omega^2}{a^2}A_1=0,\tag{16}$$

$$\left|A_1(0)\right|<+\infty,\ A_1(R)=0$$

nıń sheshimi, al $A_2(r)$ funkciyasın bolsa birtekli emes

$$r^2A_2''+rA_2'+\frac{r^2\omega^2}{a^2}A_2=-r^2,\tag{17}$$

teńlemesiniń bir dara sheshimi bolatuǵınday etip tańlap alamız.

(16) shegaralıq máselesi $x=\frac{\omega\, r}{a}$ belgilewi járdeminde nolinshi tártipli Bessel teńlemesine alıp kelinedi hám $|A_1(0)|<+\infty$ shártin esapqa alsaq, onda (16) shegaralıq máseleniń sheshimi $A_1(r)=CJ_0\left(\frac{\omega\, r}{a}\right)$ funkciyası boladı, bul jerde $J_0(x)$ nolinshi tártipli birinshi túr Bessel funkciyası. Sonıń menen birge (17) niń sheshimi

$$A_2(r)=-\frac{a^2}{\omega^2}.$$

Solay etip

$$A(r)=CJ_0\left(\frac{\omega\, r}{a}\right)-\frac{a^2}{\omega^2}$$

boladı. $A(R)=0$ shárti boyınsha

$$A(R)=CJ_0\left(\frac{\omega\, R}{a}\right)-\frac{a^2}{\omega^2}=0$$

bolıp, bunnan

$$C=\frac{a^2}{\omega^2 J_0\left(\frac{\omega\, R}{a}\right)}$$

yamasa

$$A(r)=\frac{a^2}{\omega^2}\left(\frac{J_0\left(\frac{\omega\, r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}-1\right).$$

Endi $w(r,t)$ funkciyasın anıqlaymız

$$w(r,t)=\frac{a^2}{\omega^2}\left(\frac{J_0\left(\frac{\omega\, r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}-1\right)\sin\omega\, t.$$

Endi

$$\vartheta(r,0)=0,\ \ \vartheta_t(r,0)=-\frac{a^2}{\omega}\left(\frac{J_0\left(\frac{\omega\, r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}-1\right)$$

teńligin esapqa alıp, (15) den $\vartheta(r,t)$ funkciyasın anıqlaymız. $\vartheta(r,t)=B(r)T(t)$ dep alıp, bunı (15) teńlemedegi orınlarına qoyıp, ózgeriwshilerin ajıratamız:

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{d}{Brdr}(rB')=-\lambda\,.$$

Bunnan tómendegi eki teńleme hasıl boladı:

$$r^2B''+rB'+\lambda r^2B=0,$$

$$T''+\lambda a^2T=0.$$

Bul teńlemelerdiń birinshisi $x=\sqrt{\lambda}r$ belgilewi járdeminde nolinshi tártipli Bessel teńlemesine alıp kelinedi hám $|B(0)|<+\infty,\ \ B(R)=0$ shegaralıq shártler esabınan

$$B(r)=CJ_0\left(\frac{\omega_n}{R}r\right),\ \ C=const,$$

sonıń menen birge $\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2,\ n=1,2,...$

Endi $T(t)$ funkciyasın anıqlaymız. λ_n niń mánisin esapqa alsaq, onda $T''+\lambda a^2T=0$ teńlemesinen

$$T_n(t)=C_{1n}\cos\left(\frac{\mu_n}{R}at\right)+C_{2n}\sin\left(\frac{\mu_n}{R}at\right).$$

Solay etip, $\vartheta(r,t)=B(r)T(t)$ funkciyası tómendegishe anıqlanadı:

$$\vartheta(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\cos\left(\frac{\mu_n}{R}at\right)+c_n\sin\left(\frac{\mu_n}{R}at\right)\right)J_0\left(\frac{\omega_n}{R}r\right).$$

Bunnan b_n hám c_n koefficientlerin

$$\vartheta(r,0)=0,\ \ \vartheta_t(r,0)=-\frac{a^2}{\omega}\left(\frac{J_0\left(\frac{\omega\, r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}-1\right)$$

teńligi orınlanatuǵınday etip tańlap alamız. Onda

$$b_n = 0 \text{ yamasa } \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0\left(\frac{\omega_n}{R} r\right) = 0.$$

Endi $\vartheta(r,t)$ funkciyasın t boyınsha differenciallap

$$\vartheta_t(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\mu_n}{R} a \cos\left(\frac{\mu_n}{R} at\right) J_0\left(\frac{\omega_n}{R} r\right)$$

$t = 0$ ushın

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\mu_n}{R} a \cos\left(\frac{\mu_n}{R} at\right) J_0\left(\frac{\omega_n}{R} r\right) = -\frac{a^2}{\omega}\left(\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1\right)$$

teńligine iye bolamız. Bunnan c_n koefficientlerin anıqlaw ushın teńliktiń eki jaǵın $rJ_0\left(\frac{\omega_n}{R} r\right)$ ge kóbeytip, sońınan 0 den R ge shekem integrallaymız:

$$\int_0^l xJ_0\left(\frac{\omega_i}{l} x\right) J_0\left(\frac{\omega_j}{l} x\right) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \dfrac{l^2}{2}\left(J_0'\left(\mu_i\right)\right)^2, & i = j, \end{cases}$$

$$\int_0^x tJ_0\left(t\right) dt = xJ_0\left(x\right),$$

$$\int_0^l xJ_0\left(\frac{\omega_n}{l} x\right) J_0\left(kx\right) dx = \frac{\mu_n J_0'\left(\mu_n\right) J_0\left(kl\right)}{k^2 - \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2}, \quad k \neq \frac{\mu_n}{l}$$

formulaların paydalansaq

$$-\frac{a^2}{\omega}\left[\frac{a^2 R^2 \mu_n J_0'\left(\mu_n\right)}{\omega^2 R^2 - a^2 \mu_n^2} + \frac{R^2 J_0'\left(\mu_n\right)}{\mu_n}\right] = \frac{\mu_n R a c_n}{2}\left(J_0'\left(\mu_n\right)\right)^2.$$

Bunnan c_n di anıqlasaq

$$c_n = -\frac{2a\omega R^3}{J_0'\left(\mu_n\right)(\omega^2 R^2 - a^2 \mu_n^2)\mu_n^2}$$

bolıp, $\vartheta(r,t)$ funkciyası

$$\vartheta(r,t) = -2a\omega R^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\mu_n}{R}at\right) J_0\left(\frac{\omega_n}{R}r\right)}{J_0'\left(\mu_n\right)\mu_n^2(\omega^2 R^2 - a^2\mu_n^2)}$$

túrine iye boladı. Endi $u(r,t) = w(r,t) + \vartheta(r,t)$ teńligi boyınsha $u(r,t)$ ni anıqlasaq

$$u(r,t) = \frac{a^2}{\omega^2}\left(\frac{J_0\left(\frac{\omega\, r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1\right)\sin\omega\, t - 2a\omega R^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\mu_n}{R}at\right) J_0\left(\frac{\omega_n}{R}r\right)}{J_0'\left(\mu_n\right)\mu_n^2(\omega^2 R^2 - a^2\mu_n^2)}$$

boladı.

Qosımsha sorawlar

1. Tardıń erkin terbelis teńlemesi qanday boladı ha`m ol qalay kelip shıǵadı?
2. Tardıń ma`jbúriy terbelis teńlemesi qanday boladı ha`m ol qalay kelip shıǵadı?
3. Membrananıń terbelis teńlemesi qanday ha`m onıń tardıń terbelis teńlemesinen parqı nede?
4. Tardıń ha`m membrananıń terbelis teńlemeleri qanday tiptegi teńlemelerge kiredi?
5. Giperbolalıq tipdegi teńlemeler ushın baslanǵısh ha`m shegaralıq sha`rtler qanday qoyıladı?
6.Matematikalıq fizika teńlemeleri ushın shegaralıq ma`selelerdiń sheshiminiń bar bolıwı qanday waqıtta kerek?
7. Matematikalıq fizika teńlemeleri ushın shegaralıq ma`selelerdiń sheshiminiń birden-birligi qanday waqıtta kerek?
8. Matematikalıq fizika teńlemeleri ushın shegaralıq ma`selelerdiń sheshiminiń ornıqlılıǵı qanday waqıtta kerek?
9. Korrektli ha`m korrektli emes ma`seleler dep qanday ma`selelerge aytıladı?
10.Adamar mısalı dep qanday mısalǵa aytamız?
11. Ushlarınan shegaralanbaǵan tar dep neni túsinemiz?
12. Tardıń erkin terbelis teńlemesiniń ulıwma sheshimin qalay tabamız? 13. Bul sheshim qanday sheshim dep ataladı?
14. Tuwrı ha`m keri tolqınlar dep nege aytıladı?
15. Qanday formulaǵa Dalamber formulası dep ataladı ha`m ol neniń sheshimin beredi?
16. Koshi ma`selesiniń korrektliligin qanday jollar menen anıqlasa boladı?
17. Sheksiz uzınlıqqa iye tardıń ma`jbúriy terbelis teńlemesi ushın Koshi ma`selesi qanday qoyıladı?
18. Sheshim qanday kóriniste izlenedi?

19. Nollik baslanǵısh sha`rtlerge iye birtekli emes teńleme Dyuamel principi ja`rdemi qanday túrdegi ja`rdemshi Koshi ma`selesine alıp kelinedi?
20. Ja`rdemshi Koshi ma`selesiniń sheshimi qanday kóriniske iye?
21. Sheksiz uzınlıqqa iye tardıń ma`jbúriy terbelis teńlemesi ushın Koshi ma`selesiniń sheshimin tabıw formulası qanday?
22. Sheshimnniń birden birligi haqqındaǵı teorema qanday?
23. Energiya integralı dep qanday integralǵa aytamız?
24.Energiya integralı ja`rdeminde teorema qalay da`lillenedi?
25. Fur`e usılı ja`rdeminde sheshim qanday kóriniste izlenedi?
26. Shturm-Liuvill ma`selesi qalay dúziledi?
27. Shturm-Liuvill ma`selesiniń menshikli ma`nisleri ha`m menshikli funkciyaları dep nege aytıladı?
28. Fur`e koefficientleri qanday formulalar ja`rdeminde tabıladı?
29. Menshikli ma`nislerdiń ha`m menshikli funkciyalardıń qanday qa`siyetleri bar?
30. V.A.Steklov teoreması qanday ha`m ol qalay da`lillenedi?
31. Dóńgelek membrananıń terbelis teńlemesi polyar koordinatalar sistemasında qanday jazıladı?
32. Dóńgelek membrananıń radiallıq terbelisi dep qanday terbeliske aytıladı?
33. Bessel teńlemesi dep qanday teńlemege aytamız?

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar

I. Birtekli tardıń erkin terbelis teńlemesi ushın Koshi máselesin sheshiń

1) $u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=-x;$

2) $u_{tt}=a^2u_{xx},\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\cos x;$

3) $u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=4x;$

4) $u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=\cos x,\ u_t(x,0)=0;$

5) $u_{tt}=a^2u_{xx},\ u(x,0)=\dfrac{\sin x}{x},\ u_t(x,0)=0;$

6) $u_{tt}=a^2u_{xx},\ u(x,0)=\dfrac{\sin x}{x},\ u_t(x,0)=\dfrac{x}{1+x^2};$

7) $u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=\dfrac{x}{1+x^2},\ u_t(x,0)=\sin x;$

8) $u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=\dfrac{x}{1+x^2},\ u_t(x,0)=\cos x;$

9) $u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=e^{-x^2},\ u_t(x,0)=\dfrac{x}{1+x^2};$

10) $u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=e^{-x^2},\ u_t(x,0)=\sin 2x;$

II. Birtekli tardıń májbúriy terbelis teńlemesi ushın Koshi máselesin sheshiń

1) $u_{tt}=u_{xx}+e^{-t},\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=\cos x;$

2) $u_{tt}=u_{xx}+6,\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=4x;$

3) $u_{tt}=4u_{xx}+xt,\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=x;$

4) $u_{tt}=u_{xx}+\sin x,\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=0;$

5) $u_{tt}=u_{xx}+e^{x},\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=x+\cos x;$

6) $u_{tt}=9u_{xx}+\sin x,\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=1;$

7) $u_{tt}=a^2u_{xx}+\sin\omega x,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0;$

8) $u_{tt}=a^2u_{xx}+\sin\omega t,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0;$

9) $u_{tt}=25u_{xx}+xt,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0;$

10) $u_{tt}=a^2u_{xx}+e^{x},\ u(x,0)=5,\ u_t(x,0)=x^2;$

11) $u_{tt}=a^2u_{xx}+xe^{t},\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=0;$

III. Bir ushınan shegaralanǵan birtekli tardıń terbelis teńlemesi ushın Koshi máselesin sheshiń

1) $u_{tt}=u_{xx},\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, u(0,t)=5\sin\omega t;$

2) $u_{tt}=a^2u_{xx}+\sin x,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, u(0,t)=0;$

IV. Ulıwma qoyılǵan Koshi hám Gursa máselelerin sheshiń

1) $u_{xy}+yu_x+xu_y+xyu=0,\quad u\big|_{y=3x}=0,\ u_y\big|_{y=3x}=e^{-5x^2},\ \ x<1$

2) $u_{xy}+\dfrac{1}{x+y}(u_x+u_y)=2,\ \ 0<x,y<\infty\qquad u\big|_{y=x}=x^2,\ u_x\big|_{y=x}=1+x$

3) $x^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\qquad u\big|_{y=1}=f(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=F(x)$

4) $u_{xy}=0, |x|<1, |y|<1\ \ u\big|_{y=x^3}=|x|^{\alpha},\ u_y\big|_{y=x^3}=0$ Koshi máselesiniń sheshimi bar hám ol birden-bir bolatuǵın α nıń mánislerin tabıń.

V. Shturm-Liuvill máselesiniń menshikli mánislerin hám menshikli funkciyaların tabıń

1 $y'' = -\lambda^2 y, \;\; y(0) = y(\pi) = 0;$

2) $y'' + \lambda^2 y = 0, \;\; y(0) = y'(\pi) = 0;$

3) $y'' + \lambda^2 y = 0, \;\; y'(0) = y(\pi) = 0;$

4) $y'' + \lambda y = 0, \;\; y'(0) = 0, \; y'(l) + \beta y(l) = 0, \; \beta > 0;$

5) $y'' + \lambda y = 0, \;\; y'(0) = 0, \; y'(l) = 0;$

6) $y'' + \lambda y = 0, \;\; y'(0) = 0, \; y(l) = 0;$

7) $(xy')' + \lambda \dfrac{y}{x} = 0, \;\; y(1) = 0, \; y'(2) = 0;$

8) $(xy')' + \lambda \dfrac{y}{x} = 0, \;\; y(1) = 0, \; y(2) = 0;$

VI. Birtekli teńlemeler ushın aralas máseleni Fur`e usılı járdeminde sheshiń

1) $u_{tt} = u_{xx}; \;\; u(0,t) = u(1,t) = 0; \; u(x,0) = x(x-1), \; u_t(x,0) = 0;$

2) $u_{tt} = a^2 u_{xx}; \;\; u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0; \; u(x,0) = x, \; u_t(x,0) = 1;$

3) $u_{tt} = a^2 u_{xx}; \;\; u_x(0,t) = u(l,t) = 0; \; u(x,0) = \cos\dfrac{\pi x}{2l},$

$u_t(x,0) = \cos\dfrac{3\pi x}{2l} + \cos\dfrac{5\pi x}{2l};$

4) $u_{tt} = a^2 u_{xx}; \;\; u(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0; \; u(x,0) = f(x),$

$u_t(x,0) = q(x), \; h = const;$

5) $u_{tt} = a^2 u_{xx}; \;\; u(0,t) = u(l,t) = 0; \; u(x,0) = 0, \; u_t(x,0) = \sin\dfrac{2\pi}{l}x;$

6) $u_{tt} = u_{xx}; \;\; u(0,t) = e^{-t}, \; u(\pi,t) = t; \; u(x,0) = \sin x \cos x, \; u_t(x,0) = 1;$

7) $u_{tt} = u_{xx}; \;\; u(0,t) = t, \; u(\pi,t) = 1; \; u(x,0) = \sin\dfrac{x}{2}, \; u_t(x,0) = 1;$

8) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x); \;\; u_x(0,t) = \alpha, \; u_x(l,t) = \beta;$

$u(x,0) = \varphi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x);$

9) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8e^t \cos x,$

$u_x(0,t) = 2t, \; u\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = \pi t; \; u(x,0) = \cos x, \; u_t(x,0) = 2x;$

10) $u_{tt} - \dfrac{1}{4}u_{xx} - u_x + 2u_t - 2u - 2e^{-2x-t}\sin x \cos 2x = f(x,t),$

$$u(0,t)=0,\ u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)+2u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=(1+\pi)\sin t,$$
$$u(x,0)=e^{-2x}\sin 3x,\ u_t(x,0)=x,\quad f(x,t)=x(2\cos t-3\sin t)-\sin x;$$

VII. Birtekli emes teńlemeler ushın aralas máseleni Fur`e usılı járdeminde sheshiń

1) $u_{tt}=u_{xx}+\cos t;\ \ u(0,t)=u(\pi,t)=0;\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0;$

2) $u_{tt}=u_{xx}+x;\ \ u(0,t)=u(\pi,t)=0;\ u(x,0)=\sin 2x,\ u_t(x,0)=0;$

3) $u_{tt}-3u_t=u_{xx}+2u_x-3x-2t;\ \ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=\pi t;$
$u(x,0)=e^{-x}\sin x,\ u_t(x,0)=x;$

4) $u_{tt}-7u_t=u_{xx}+2u_x-7x-2t-e^{-x}\sin 3x;\ \ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=\pi t;$
$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=x;$

5) $u_{tt}+2u_t=u_{xx}+8u+2x(1-4t)+\cos 3x;\ \ u_x(0,t)=t,\ u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=\frac{1}{2}\pi t;$
$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=x;$

6) $u_{tt}-2u_t=u_{xx}+4t(\sin x - x);\ \ u(0,t)=3,\ u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=t^2+t;$
$u(x,0)=3,\ u_t(x,0)=x+\sin x;$

7) $u_{tt}=u_{xx}+10u+2\sin 2x\cos x;\ \ u(0,t)=0,\ u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0;$
$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0;$

8) $u_{tt}+2u_t=u_{xx}+4x+8e^t\cos x;\ \ u_x(0,t)=2t,\ u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=\pi t;$
$u(x,0)=\cos x,\ u_t(x,0)=2x;$

9) $u_{tt}=u_{xx}+2b;\ \ u(0,t)=u(l,t)=0;\ u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ b=const;$

10) $u_{tt}=u_{xx}+\cos t;\ \ u(0,t)=u(\pi,t)=0;\ \ u(x,0)=u_t(x,0)=0;$

11) $u_{tt}=a^2u_{xx}+Axe^{-t};\ \ u(0,t)=u(l,t)=0;\ u(x,0)=2\sin\frac{\pi x}{l},\ u_t(x,0)=0;$

12) $u_{tt}=a^2u_{xx}+Ae^{-t}\cos\frac{x}{2};\ \ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0;$
$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=4\sin\frac{3x}{2}\sin x;$

13) $u_{tt}=a^2u_{xx}+Ae^{-t}\cos\frac{x}{2};\ \ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0;$
$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=4\sin\frac{3x}{2}\sin x;$

VIII. Tuwrı múyeshli birtekli membrananıń terbelis teńlemesi ushın aralas máselelerdi Fur`e usılı járdeminde sheshiń

1) $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad u(0,y,t)=u(s,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=u(x,p,t)=0,$

$u(x,y,0)=\sin\frac{\pi}{s}x\sin\frac{\pi}{p}y,\ \ u_t(x,y,0)=0;$

2) $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad u(0,y,t)=u_x(s,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=u_y(x,p,t)=0,$

$u(x,y,0)=Axy,\ \ u_t(x,y,0)=0;$

3) $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\ u(0,y,t)=u(p,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=u(x,p,t)=0,$

$u(x,y,0)=A\sin\frac{\pi}{p}x\sin\frac{\pi}{p}y,\ \ u_t(x,y,0)=0;$

4) $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy},\quad u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0,$

$u(x,y,0)=3\sin x\sin 2y,\ \ u_t(x,y,0)=5\sin 3x\sin 4y;$

5) $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad u(0,y,t)=u(p,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=u(x,q,t)=0,$

$u(x,y,0)=Axy(x-p)(y-q),\ \ u_t(x,y,0)=0;$

6) $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad u(0,y,t)=u(p,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=u(x,q,t)=0,$

$u(x,y,0)=0,\ \ u_t(x,y,0)=5\sin\frac{3\pi}{p}x\sin\frac{5\pi}{q}y;$

7) $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy},\quad u_x(0,y,t)=u(p,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=u(x,q,t)=0,$

$u(x,y,0)=\cos\frac{\pi}{2p}x\sin\frac{\pi}{q}y,\ \ u_t(x,y,0)=0;$

8) $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy},\quad u(0,y,t)=u(p,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=u(x,q,t)=0,$

$u(x,y,0)=\sin\frac{3\pi}{p}x\sin\frac{8\pi}{q}y,\ \ u_t(x,y,0)=0;$

9) $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad u(0,y,t)=u(p,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=u(x,p,t)=0,$

$u(x,y,0)=0,\ \ u_t(x,y,0)=\sin\frac{\pi}{p}x\sin\frac{2\pi}{p}y;$

10) $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad u(0,y,t)=u(p,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=u(x,p,t)=0,$

$u(x,y,0)=\sin\frac{\pi}{p}x\sin\frac{\pi}{p}y,\ \ u_t(x,y,0)=\frac{a}{p};$

11) $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+\mathrm{e}^{-t}x\sin\frac{2\pi}{p}y,\ u(0,y,t)=u(s,y,t)=0,$

$u(x,0,t)=u(x,p,t)=0,\quad u(x,y,0)=0,\ \ u_t(x,y,0)=0;$

IX. Birtekli dóńgelek membrananıń terbelis teńlemesi ushın aralas máseleni sheshiń

1) $\frac{1}{a^2}u_{tt}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ 0<r<R,\ t>0,\quad |u(0,t)|<+\infty,\ u(R,t)=0,\ t\geq 0,$

$u(r,0)=AJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),\ \ u_t(r,0)=0,\ 0\leq r\leq \mathrm{R}.$

2) $\frac{1}{a^2}u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r,\ \ |u(0,t)|<+\infty,\ u(R,t)=0,$

$u(r,0)=A\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right),\ \ u_t(r,0)=0;$ bul jerde A turaqlı san.

3) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r,\ \ |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=\sin^2 t,$

$u(r,0)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{J_0(2r)}{J_0(2)}\right),\ \ u_t(r,0)=0;$

4) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r,\ |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=\cos 2t,\ \ u(r,0)=\frac{J_0(2r)}{J_0(2)},\ \ u_t(r,0)=0;$

5) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r,\ \ |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=t-1,$

$u(r,0)=J_0(\mu_1 r)-1,\ \ u_t(r,0)=1;$ bul jerde μ_1 degenimiz $J_0(\mu)=0$ teńlemeniń oń koreni.

6) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\sin 3t,\ \ |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=1,$

$u(r,0)=1,\ \ u_t(r,0)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{J_0(3r)}{J_0(3)}\right);$ bul jerde μ_1 degenimiz $J_0(\mu)=0$ teńlemeniń oń koreni.

7) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+2\cos 2t,\ \ |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=0,$

$u(r,0)=\frac{1}{2}\left(\frac{J_0(2r)}{J_0(2)}-1\right)+J_0(\mu_1 r),\ \ u_t(r,0)=0;$ bul jerde μ_1 degenimiz $J_0(\mu)=0$ teńlemeniń oń koreni.

8) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-u,\ \ |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=\cos 2t+\sin 3t,$

$u(r,0)=\frac{J_0(r\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})},\ \ u_t(r,0)=\frac{3J_0(2r\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})};$

9) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}u,\quad |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=0,$

$u(r,0)=J_1(r\mu_k)+J_1(r\mu_m),\quad u_t(r,0)=0;$ bul jerde μ_k hám μ_m degenimiz $J_1(\mu)=0$ teńlemeniń hár qıylı oń koren`leri.

10) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}u,\quad |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=0,$

$u(r,0)=J_1(r\mu_k),\quad u_t(r,0)=J_1(r\mu_m);$ bul jerde μ_k hám μ_m degenimiz $J_1(\mu)=0$ teńlemeniń hár qıylı oń koren`leri.

11) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}u+e^tJ_1(\mu_k r),\ |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=0,$

$u(r,0)=J_1(r\mu_k),\quad u_t(r,0)=J_1(r\mu_m);$ bul jerde μ_k degenimiz $J_1(\mu)=0$ teńlemeniń oń koren`leri.

12) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}u,\quad |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=\cos t\sin 2t,$

$u(r,0)=0,\quad u_t(r,0)=\frac{J_1(r)}{J_1(1)}+\frac{3J_1(3r)}{2J_1(3)};$

13) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\frac{4}{r^2}u,\quad |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=0,$

$u(r,0)=J_2(\mu_k r),\quad u_t(r,0)=J_2(\mu_k r);$

14) $u_{tt}=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\frac{4}{r^2}u,\ |u(0,t)|<+\infty,\ u(1,t)=0,$

$u(r,0)=\frac{1}{2}J_2(\mu_k r),\quad u_t(r,0)=\frac{3}{2}J_2(\mu_k r);$

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları

I. 1) $u(x,t)=x(1-t);$ 2) $u(x,t)=\frac{1}{a}\cos x\sin at;$ 3) $u(x,t)=(x+2t)^2;$

4) $u(x,t)=\cos x\cos t;$ 5) $u(x,t)=\frac{x\sin x\cos at-at\cos x\sin at}{x^2-a^2t^2};$

6) $u(x,t)=\frac{x\sin x\cos at-at\cos x\sin at}{x^2-a^2t^2}+\frac{1}{4a}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}$

7) $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{x+t}{1+(x+t)^2}+\frac{x-t}{1+(x-t)^2}\right]+\sin x\sin t;$

8) $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(x+t)^2}+\frac{1}{1+(x-t)^2}\right]+\sin x\cos t;$

9) $u(x,t)=e^{-(x^2+t^2)}ch2xt+\frac{1}{4}\ln\frac{1+(x+t)^2}{1+(x-t)^2};$

10) $u(x,t)=e^{-(x^2+t^2)}ch2xt+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg(x+t)}{tg(x-t)}\right|.$

II. 1) $u(x,t)=t-1+e^{-t}+\sin(x+t);$ 2) $u(x,t)=(x+2t)^2;$

3) $u(x,t)=x^2+xt+4t^2+\frac{1}{6}xt^3;$ 4) $u(x,t)=\sin x;$

5) $u(x,t)=xt+\sin(x+t)-(1-\mathrm{ch}\,t)e^x;$ 6) $u(x,t)=1+t+\frac{1}{9}(1-\cos 3t)\sin x;$

7) $u(x,t)=\frac{1}{a^2\omega^2}(1-\cos a\omega t)\sin\omega x;$ 8) $u(x,t)=\frac{t}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t;$

9) $u(x,t)=\frac{1}{6}xt^3;$ 10) $u(x,t)=5+x^2t+\frac{1}{3}a^2t^3+\frac{1}{2t^2}\left(e^{x+at}+e^{x-at}-2a^x\right);$

11) $u(x,t)=\sin x\cos at+(e^t-1)(xt+x)-xte^t;$

III. 1) $u(x,t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le \frac{x}{2},\\ 5\sin\omega\left(t-\frac{x}{2}\right), & t\ge\frac{x}{2};\end{cases}$ 2) $u(x,t)=\frac{\sin x}{a^2}(1-\cos at);$

IV. 1) $u(x,y)=(y-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ y<3, x<1;$

2) $u(x,y)=xy+x-y,\ 0<x,y<\infty$

3) $u(x,y)=\frac{1}{2}f(x,y)+\frac{y}{2}f\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{xy}}{4}\int_{xy}^{\frac{x}{y}}\frac{f(z)}{\sqrt{z^3}}dz-\frac{\sqrt{xy}}{2}\int_{xy}^{\frac{x}{y}}\frac{F(z)}{\sqrt{z^3}}dz.$

4) $\alpha=0$ yamasa $\alpha\ge 6$

V. 1) $\lambda_k=k,\ y_k(x)=\sin kx,\ k=1,2,...,$

2) $\lambda_k=\frac{1}{2}(2k+1),\ y_k(x)=\sin\frac{1}{2}(2k+1)x,\ k=0,1,...,$

3) $\lambda_k=\frac{1}{2}(2k+1),\ y_k(x)=\cos\frac{1}{2}(2k+1)x,\ k=0,1,...,$

4) menshikli mánisleri $\frac{\sqrt{\lambda_k}}{\beta}=tg\sqrt{\lambda_k}l$ teńlemesiniń oń koren`leri, menshikli funkciyaları $y_k(x)=\sin\sqrt{\lambda_k}x;$

5) $\lambda_k=\left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2,\ y_k(x)=C\cos\dfrac{\pi k}{l}x,\ k=0,1,...,$

6) $\lambda_k=\dfrac{\pi}{l}\left(\dfrac{1}{2}+k\right),\ y_k(x)=C\cos\dfrac{\pi}{l}\left(\dfrac{1}{2}+k\right)x,\ k=0,1,...,$

7) $\lambda_k=\left(\dfrac{\pi(2k+1)}{2\ln 2}\right)^2,\ y_k(x)=C\sin\sqrt{\lambda_k}\ln x,\ k=0,1,...,$

8) $\lambda_k=\left(\dfrac{\pi k}{\ln 2}\right)^2,\ y_k(x)=C\sin\dfrac{\pi k}{\ln 2}\ln x,\ k=1,2,...,$

VI. 1) $u(x,t)=\dfrac{-8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^3}\cos\pi(2k-1)t\cdot\sin\pi(2k-1)x;$

2) $u(x,t)=\dfrac{l}{2}+t-\dfrac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\cos\dfrac{(2k+1)a}{l}\pi t\cdot\cos\dfrac{(2k+1)}{l}\pi x;$

3) $u(x,t)=\cos\dfrac{\pi at}{2l}\cdot\cos\dfrac{\pi x}{2l}+\dfrac{2l}{3\pi a}\sin\dfrac{3\pi at}{2l}\cdot\cos\dfrac{3\pi x}{2l}+\dfrac{2l}{5\pi a}\sin\dfrac{5\pi at}{2l}\cdot\cos\dfrac{5\pi x}{2l};$

4) $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\lambda_k at+B_k\sin\lambda_k at\right)\sin\lambda_k x,$ bul jerde $\lambda_k,\ k=1,2,...,$

$\lambda=-htg\lambda l$ teńlemeniń oń koren\`leri,

$$A_k=\frac{\int_0^l f(x)\sin\lambda_k xdx}{\|\sin\lambda_k x\|^2},\ B_k=\frac{\int_0^l q(x)\sin\lambda_k xdx}{\lambda_k a\|\sin\lambda_k x\|^2},\ \|\sin\lambda_k x\|^2=\frac{l(h^2+\lambda_k^2)+h}{2(h^2+\lambda_k^2)},$$

5) $u(x,t)=\dfrac{l}{2\pi a}\sin\dfrac{2\pi a}{l}t\sin\dfrac{2\pi}{l}x;$

6) $u(x,t)=\left(1-\dfrac{x}{\pi}\right)e^{-t}+\dfrac{xt}{\pi}+\dfrac{1}{2}\cos 2t\sin 2x-$

$-\dfrac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(1+k^2)}[e^{-t}+k^2\cos kt-\left(2k+\dfrac{1}{k}\right)\sin kt]\sin kx;$

7) $u(x,t)=x+t+\cos\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\dfrac{(2k+1)t}{2}\sin\dfrac{(2k+1)x}{2};$

8) $u(x,t)=\dfrac{\beta-\alpha}{2l}x^2+\alpha x+\Phi_0+\mu_0 t+\dfrac{F_0}{2}t^2+\sum_{k=1}^{\infty}\cos\dfrac{\pi kx}{l}\times$

$\times\left\{\left(\dfrac{l}{\pi ka}\right)^2F_k+\left[\Phi_k-\left(\dfrac{l}{\pi ka}\right)^2F_k\right]\cos\dfrac{\pi kat}{l}+\dfrac{l\mu_k}{\pi ka}\sin\dfrac{\pi kat}{l}\right\},$

$\mu_k=\dfrac{\varepsilon_k}{l}\int_0^l\psi(x)\cos\dfrac{\pi kx}{l}dx,\ k=0,1,...,$

$$\Phi_k = \frac{\varepsilon_k}{l}\int_0^l \left[\varphi(x) - \frac{(\beta-\alpha)x^2}{2l} - \alpha x\right]\cos\frac{\pi k x}{l}dx, \quad \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_k = 2,\ k = 1,2,...;$$

9) $u(x,t) = 2xt + (2\mathrm{e}^t - e^{-t} - 3te^{-t})\cos x;$

10) $u(x,t) = x\sin t + e^{-2x-t}\left[\frac{4}{7}(1 - ch\frac{\sqrt{7}t}{2})\sin x + (4 + 2\sin\frac{t}{2} - 3\cos\frac{t}{2})\sin 3x\right];$

VII. 1) $u(x,t) = \frac{2t\sin t\sin x}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos t - \cos kt}{k(1-k^2)}\cdot\sin kx;$

2) $u(x,t) = \sin 2x\cos 2t + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-\cos kt)}{k^3}\cdot\mathrm{sink}\, x;$

3) $u(x,t) = xt + (2e^t - e^{2t})e^{-x}\cdot\sin x;$

4) $u(x,t) = xt + (0{,}1 - \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{15}e^{5t})e^{-x}\cdot\sin 3x;$

5) $u(x,t) = xt + (1 - e^t - te^t)\cdot\cos 3x;$

6) $u(x,t) = 3 + x(t + t^2) + (8 + 4t - 8e^t + 5te^t)\cdot\sin x;$

7) $u(x,t) = \frac{1}{9}(\mathrm{ch}\,3t - 1)\sin x + (\mathrm{ch}\,t - 1)\cdot\sin 3x;$

8) $u(x,t) = 2xt + (2e^t - e^{-t} - 3te^{-t})\cdot\cos x;$

9) $u(x,t) = bx(l-x) + \frac{4bl^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^3}\cos\frac{\pi kt}{l}\sin\frac{\pi kx}{l};$

10) $u(x,t) = \frac{2}{\pi}t\sin t\sin x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\cos t - \cos(2k+1)t)}{\pi(2k+1)k(k+1)}\sin(2k+1)x;$

11) $u(x,t) = 2\cos\frac{\pi at}{l}\sin\frac{\pi x}{l} +$

$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{aAl^3(-1)^{k+1}}{\pi k(l^2 + \pi^2a^2k^2)}\left(e^{-t} - \cos\frac{\pi kat}{l} + \frac{1}{\pi ka}\sin\frac{\pi kat}{l}\right)\sin\frac{\pi k}{l}x;$

12) $u(x,t) = \frac{4A}{4+a^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{at}{2} + \frac{2}{a}\sin\frac{at}{2}\right)\cos\frac{x}{2} +$

$+\frac{4}{a}\sin\frac{at}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{4}{5a}\sin\frac{5at}{2}\cos\frac{5x}{2};$

VIII. *1)* $u(x,y,t) = \cos\frac{\sqrt{s^2+p^2}}{sp}\pi at\cdot\sin\frac{\pi x}{s}\sin\frac{\pi y}{p};$

2) $u(x,y,t) = \sum_{k,n=0}^{\infty}a_{kn}\cos\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{4s^2} + \frac{(2n+1)^2}{4p^2}}\pi at\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2s}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{2p},$

bul jerde $a_{kn}=\dfrac{(-1)^{k+n}64spA}{\pi^4(2k+1)^2(2n+1)^2}$;

3) $u(x,y,t)=A\cos\dfrac{\sqrt{2}}{p}\pi at\cdot\sin\dfrac{\pi x}{p}\sin\dfrac{\pi y}{p}$;

4) $u(x,y,t)=3\cos\sqrt{5}t\cdot\sin x\sin 2y+\sin 5t\sin 3x\sin 4y$;

5) $u(x,y,t)=\dfrac{16Ap^2q^2}{\pi^6}\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{p}\sin\dfrac{(2n+1)\pi y}{q}}{(2k+1)^3(2n+1)^3}\cos\pi a\mu_{kn}t,$

bul jerde $\mu_{kn}=\sqrt{\dfrac{(2k+1)^2}{p^2}+\dfrac{(2n+1)^2}{q^2}}$;

6) $u(x,y,t)=\dfrac{5pq}{a\pi\sqrt{25p^2+9q^2}}\sin\sqrt{\dfrac{9}{p^2}+\dfrac{25}{q^2}}\pi at\cdot\sin\dfrac{3\pi x}{p}\sin\dfrac{5\pi y}{q}$;

7) $u(x,y,t)=\cos\sqrt{\dfrac{1}{4p^2}+\dfrac{1}{q^2}}\pi t\cdot\cos\dfrac{\pi x}{2p}\sin\dfrac{\pi y}{q}$;

8) $u(x,y,t)=\cos\sqrt{\dfrac{9}{p^2}+\dfrac{64}{q^2}}\pi t\cdot\sin\dfrac{3\pi}{p}x\sin\dfrac{8\pi}{q}y$;

9) $u(x,y,t)=\dfrac{p}{\pi a\sqrt{5}}\sin\dfrac{\sqrt{5}}{p}\pi at\cdot\sin\dfrac{\pi x}{p}\sin\dfrac{2\pi y}{p}$;

10) $u(x,y,t)=\left(\cos\dfrac{\sqrt{2}}{p}\pi at+\dfrac{16}{\pi^3\sqrt{2}}\sin\dfrac{\sqrt{2}}{p}\pi at\right)\sin\dfrac{\pi x}{p}\cdot\sin\dfrac{\pi y}{p}+$

$$+\frac{16}{\pi^3}\sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}{p}\pi at}{(2k+1)(2n+1)\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}\cdot\sin\frac{(2k+1)}{p}\pi x\sin\frac{(2n+1)}{p}\pi y;$$

11) $u(x,y,t)=\sin\dfrac{2\pi}{p}y\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\left(e^{-t}-\cos\pi a\omega_k t+\dfrac{1}{\pi a\omega_k}\sin\pi a\omega_k t\right)\sin\dfrac{\pi k}{s}x,$

bul jerde $a_k=\dfrac{(-1)^{k+1}2s}{\pi k(1+a^2\pi^2\omega_k^2)}$, $\omega_k=\sqrt{\dfrac{k^2}{s^2}+\dfrac{4}{p^2}}$;

IX. 1) $u(r,t)=A\cos\dfrac{a\mu_k t}{R}J_0\left(\dfrac{\mu_k r}{R}\right),$

2) $u(r,t)=8A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}\cos\frac{a\mu_k t}{R}$, bul jerde A turaqlı san, al μ_k, $(k=1,2,...)$ bolsa $J_0(\mu)=0$ teńlemeniń oń koren`leri. Juwapta berilgen qatardıń koefficientlerin esaplaw waqtında tómendegi formulalar qollanıladı:

$$\int_0^x \xi J_0(\xi)d\xi = xJ_1(x),\ \int_0^x \xi^3 J_0(\xi)d\xi = 2x^2J_0(x)+(x^3-4x)J_1(x).$$

3) $u(r,t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{J_0(2r)}{J_0(2)}\right)\cos 2t$, 4) $u(r,t)=\frac{J_0(2r)}{J_0(2)}\cos 2t$,

5) $u(r,t)=t-1+J_0(\mu_1 r)\cos\mu_1 t$, 6) $u(r,t)=1+\frac{1}{9}\left(1-\frac{J_0(3r)}{J_0(3)}\right)\sin 3t$,

7) $u(r,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{J_0(2r)}{J_0(2)}-1\right)\cos 2t+J_0(\mu_1 r)\cos\mu_1 t$,

8) $u(r,t)=\frac{J_0(r\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})}\cos 2t+\frac{J_0(2r\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})}\sin 3t$,

9) $u(r,t)=J_1(\mu_k r)\cos\mu_k t+J_1(\mu_m r)\cos\mu_m t$,

10) $u(r,t)=J_1(\mu_k r)\cos\mu_k t+\frac{1}{\mu_m}J_1(\mu_m r)\sin\mu_m t$,

11) $u(r,t)=(1+\mu_k^2)^{-1}(e^t-\cos\mu_k t-\frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k t)J_1(\mu_k r)$,

12) $u(r,t)=\frac{1}{2J_1(1)}J_1(r)\sin t+\frac{1}{2J_1(3)}J_1(3r)\sin 3t$,

13) $u(r,t)=(\cos\mu_k t+\frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k t)J_2(\mu_k r)$,

14) $u(r,t)=(\frac{1}{2}\cos\mu_k t+\frac{3}{2\mu_k}\sin\mu_k t)J_2(\mu_k r)$.

III-BAP. PARABOLALIQ TIPTEGI TEŃLEMELER

Tayanısh sózler: sterjen`, jıllılıq ağımı, jıllılıq muǵdarı, jıllılıq ótkizgishlik koefficienti, jıllılıq almasıwshılıq koefficienti, jıllılıq deregi, jıllılıq dereginiń tıǵızlıǵı, jıllılıqtıń taralıw teńlemesi, baslanǵısh hám shegaralıq shártler, maksimum principi, Fur`e usılı, Fur`e integralı, Puasson integralı, fundamentallıq sheshim, menshikli mánis hám menshikli funkciyalar, Koshi máselesi.

Tiykarǵı túsinikler hám belgilewler

Jıllılıq almasıwshılıq koefficienti – temperaturalar ayırması bir gradusqa parıq bergen waqıtta bir sekund ishinde shegara arqalı aǵıp ótetuǵın jıllılıq kaloriyasın kórsetetuǵın shama.

Jıllılıq ótkizgishlik koefficienti – materialdıń jıllılıqtı ótkeriw uqıplılıǵın kórsetetuǵın shama.

Jıllılıqtıń birtekli taralıw teńlemesi – temperaturanıń ózgeriw tezligi u_t *nı hám berilgen tochka menen oǵan qońsılas tochkalardaǵı temperaturalar ayırmasın ólshew xızmetin atqaratuǵın* u_{xx} *shamalardı baylanıstıratuǵın* $u_t = a^2 u_{xx}$ *túrindegi teńleme.*

Jıllılıqtıń birtekli emes taralıw teńlemesi – $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ *túrindegi teńleme.*

Kesindidegi jıllılıq muǵdarınıń ózgeriwi – shegara arqalı ótetuǵın jıllılıq muǵdarı menen kesindi ishinde bolatuǵın jıllılıq muǵdarınıń qosındısı.

Jıllılıqtıń taralıw teńlemesi ushın baslanǵısh shárt – sterjendegi dáslepki temperaturanı beretuǵın $u(x,0) = \varphi(x)$ *shaması.*

Menshikli mánisler – birtekli $Au = \lambda u$ *teńlemesiniń nollik emes sheshimge iye bolatuǵın* λ *parametriniń mánisleri.*

Menshikli funkciyalar – birtekli $Au = \lambda u$ *teńlemesiniń nollik emes sheshimleri.*

Menshikli funkciyalar metodı – sheshimdi menshikli funkciyalar boyınsha jayılǵan qatar túrinde izlew metodı.

Fur`e metodı – funkciyalardı Fur`e qatarlarına yamasa Fur`e integrallarına jayıw arqalı máselelerdi sheshiw usılı. Mısalı jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın

$$u_t = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < l,\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x)$$

aralas másele Fur`e usılı járdeminde

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{\pi k}{l} x$$

kóriniste izlenedi.

Bul bapta qarastırılatuǵın tiykarǵı másele mazmunı tómende qısqasha bayan etiletuǵın jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin úyreniwden ibarat. Birtekli

$$u_t = u_{xx} \tag{1}$$

teńlemesi birinshi ret J.B.Fur`e tárepinen jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin úyreniw processinde alınadı (onıń «Jıllılıqtıń analitikalıq teoriyası» atlı jumısı 1822 jılı baslılıp shıǵadı, al (1) teńleme 1807 jıllar alınǵan). (1) teńleme birtekli materialdıń tegis qatlamındaǵı temperaturanı, yamasa kóldeneń kesimindegi temperaturası kishkene ózgergen jaǵdayda jińishke sterjendegi temperaturanıń bólistiriliwin ańlatadı. Bul jaǵdayda x sterjendegi tochkanıń koordinatasın, al t waqıttı, $u(x,t)$ bolsa sterjenniń x tochkasındaǵı t waqıttaǵı temperaturanı ańlatadı.

Sterjen` kesindisi boylap $t$ waqıttaǵı temperaturanıń bólistiriliwin anıqlaw, onıń baslanǵısh waqıt momentindegi temperaturasın hám sonday-aq sterjen` ushlarındaǵı temperaturanıń ózgeriw nızamın biliwdi talap etedi. Sonlıqtan qızdırılǵan sterjendegi temperaturanı anıqlaw haqqındaǵı máseleniń tolıq qoyılıwı $D=\{x,t;\, 0<x<l,\, t>0\}$ oblastında eki ret x boyınsha hám bir ret t boyınsha differenciallanıp, bul oblastta (1) teńlemeni hám

$$\lim_{t\to+0} u(x,t)=u_0(x),\ \ 0<x<l, \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to+0} u(x,t)=T_1(t),\quad \lim_{x\to l-0} u(x,t)=T_2(t)$$

shártlerin qanaatlandıratuǵın funkciyanı tabıwdan ibarat.

$u_0(x)$ funkciyası temperaturanıń baslanǵısh waqıt momentindegi bólistiriliwi, $T_1(t)$ hám $T_2(t)$ funkciyaları sterjen` ushlarındaǵı temperaturanıń ózgeriw nızamı bolıp tabıladı. (2) shárt basqasha kóriniste hám beriliwi múmkin. Mısal ushın sterjen` ushları jıllılıq izolyaciyası menen qaplanǵan bolsa, onda bul ushlardaǵı jıllılıq aǵımı nol`ge teń bolıp, (2) degi sońǵı shártler

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,t)=0,\quad \lim_{x\to l-0} u_x(x,t)=0$$

kóriniske iye boladı.

(1) teńleme parabolalıq tipke jatıwshı teńlemelerdiń ápiwayı mısallarınıń biri bolıp tabıladı. Bul tiptegi teńlemeler jıllılıq ótkizgishlik, diffuziya h.t.b. processlerdi súwretleydi.

§1. Parabolalıq tiptegi teńlemelerge alıp kelinetuǵın matematikalıq fizikanıń tiykarǵı teńlemeleri. Baslanǵısh hám shegaralıq shártlerdiń qoyılıwı

Meyli uzınlıǵı l ge teń bolǵan birtekli materialdan tayarlanǵan sterjendi qarastırayıq. Sterjen` qaptal betinen izolyaciyalanǵan bolsın, onda jıllılıq tek $x$ kósheri boylap tarqaladı. Sterjendi júda` jińishke dep esaplaymız, demek sterjenniń kese kesiminiń qa`legen tochkasındaǵı temperatura turaqlı boladı.

Sterjende temperaturanıń taralıw nızamın qarastıramız. Bul nızam t waqıt momentindegi x tochkadaǵı kesimniń temperaturasın ańlatatuǵın $u(x,t)$ funkciya menen beriledi. Endi usı $u(x,t)$ funkciya qanaatlandıratuǵın teńlemeniń ózin tabamız.

Fur`e nızamına muwapıq temperaturası teńsalmaqlıq halda bolmaǵan denede jıllılıq aǵımı payda bolıp, bul aǵım joqarı temperaturaǵa iye orınnan tómen temperaturaǵa iye orınǵa qarap baǵıtlanadı.

Eger sterjenniń $[x, x+\Delta x]$ kesindisin qarastıratuǵın bolsaq, jıllılıq muǵdarınıń saqlanıw nızamı boyınsha tómendegini jazıwǵa boladı:

$[x, x+\Delta x]$ kesindisindegi jıllılıq muǵdarınıń ulıwma ózgeriwi = Kesindiniń shegaraları arqalı ótiwshi barlıq jıllılıq muǵdarı + $[x, x+\Delta x]$ kesindisiniń ishindegi payda bolatuǵın barlıq jıllılıq muǵdarı.

$[x, x+\Delta x]$ kesindisiniń ishindegi qa`legen waqıt momentindegi tolıq jıllılıq muǵdarı tómendegi formula boyınsha esaplanadı:

$[x, x+\Delta x]$ kesindisiniń ishindegi tolıq jıllılıq muǵdarı = $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} c\rho A u(s,t)ds$, bul jerde c materialdıń ózinde jıllılıqtı saqlap turıw uqıplılıǵın kórsetetuǵın materialdıń salıstırmalı jıllılıq sıyımlılıǵı, ρ materialdıń tıǵızlıǵı, A sterjenniń kese kesiminiń maydanı.

Joqarıdaǵı jıllılıqtıń saqlanıw nızamın matematikalıq formada tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} c\rho A u(s,t)ds = c\rho A\int\limits_{x}^{x+\Delta x} u_t(s,t)ds = \tag{1}$$

$$= kA[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] + A\int_x^{x+\Delta x} F(s,t)ds,$$

bul jerde k materialdıń jıllılıqtı ótkeriw uqıplılıǵın kórsetetuǵın, materialdıń jıllılıq ótkizgishlik koefficienti, $F(x,t)$ sırtqı jıllılıq dereginiń quwatlılıǵı.

Endigi ma`sele (1) teńlikti integraldan qutqarıw. Bunıń ushın integrallıq esaplaw kursınan ma`lim ortasha ma`nis haqqındaǵı teoremanı paydalanamız.

Teorema (ortasha ma`nis haqqında). Eger $f(x)$ funkciyası $[a,b]$ kesindisinde úzliksiz bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

teńligi orınlanatuǵn eń keminde bir $\xi \in [a,b]$ tochkası tabıladı.

Bul na`tiyjeni (1) ge qollansaq tómendegi teńlikke iye bolamız:

$$c\rho A u_t(\xi,t)\Delta x = kA[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] + Af(\xi,t)\Delta x,$$

bul jerde $x < \xi < x + \Delta x$. Bunnan

$$u_t(\xi,t) = \frac{k}{c\rho}\cdot\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} + \frac{1}{c\rho}F(\xi,t)$$

teńligi kelip shıǵadı. Eger $\Delta x \to 0$ shegin alsaq, onda

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t) \qquad (2)$$

boladı. Bul jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi bolıp tabıladı, bul jerde $a^2 = k/\rho c,$ al $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{c\rho}$ jıllılıq dereginiń tıǵızlıǵı. Eger sırtqı jıllılıq deregi bolmasa, onda jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi birtekli boladı, yaǵnıy

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

túrine iye boladı.

Eskertiw. Eger sterjen` qaptalınan izolyaciyalanbasa, onda sterjenniń qaptal betinen ha`m jıllılıq almasıw processii bolıp ótip, teńleme

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - \beta u(x,t) + f(x,t)$$

túrine iye boladı.

Eger trubkadaǵı aralaspa ha`mme jerde bir túrde bolsa, onda diffuziya processi $u(x,t)$ funkciyası menen súwretlenedi, ol $x$ tochkadaǵı $t$ waqıtdaǵı koncentraciyanı (aralaspanı) ańlatadı ha`m ol diffuziya teńlemesi dep atalatuǵın

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)=c\frac{\partial u}{\partial t}$$

teńlemesi menen anıqlanadı, bul jerde D diffuziya koefficienti. Eger D turaqlı bolsa, onda diffuziya teńlemesi $u_t = a^2u_{xx}$ túrine iye boladı, bul jerde $a^2 = \frac{D}{c}$.

Sterjendegi qálegen waqıttaǵı temperaturanı anıqlaw ushın da`slep onıń $t=0$ baslanǵısh waqıt momentindegi temperaturasın biliwimiz kerek boladı. Solay etip

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{3}$$

baslanǵısh sha`rt payda boladı. Bul sha`rt sterjendegi jıllılıqtı anıqlawǵa tolıq múmkinshilik bermeydi. Sterjendegi jıllılıqtıń taralıw nızamı onıń ushlarındaǵı temperaturaǵa ha`m ǵa`rezli boladı.

Eger sterjenniń $x=0$ ushındaǵı temperatura $\xi(t)$, ekinshi $x=l$ ushındaǵı temperatura bolsa $\eta(t)$ nızam boyınsha ózgeretuǵın bolsa, onda jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın birinshi túr shegaralıq sha`rt dep atalatuǵın

$$u(0,t)=\xi(t),\ u(l,t)=\eta(t)$$

sha`rtler payda boladı.

Eger sterjenniń ushlarındaǵı temperatura emes, al jıllılıq aǵımı, yaǵnıy $u_x(o,t)$ ha`m $u_x(l,t)$ shamaları berilse, onda shegaralıq sha`rtler

$$u_x(0,t)=\xi(t),\quad u_x(l,t)=\eta(t)$$

túrinde beriledi. Dara jaǵdayda sterjenniń ushları izolyaciyalansa onda jıllılıq aǵımı bolmaydı ha`m shegaralıq sha`rtler $u_x(0,t)=0,\ \ u_x(l,t)=0$ túrine iye boladı. Bunday sha`rtler jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın ekinshi túr shegaralıq sha`rtler dep ataladı.

Eger sterjenniń ushlarında sırtqı ortalıq penen jıllılıq almasıw bolıp ótetuǵın bolsa, onda shegaralıq sha`rt

$$u_x(0,t)=\lambda\big(u(0,t)-g_1(t)\big),\ u_x(l,t)=-\lambda\big(u(l,t)-g_2(t)\big)$$

túrinde beriledi, bul jerde $g_1(t)$ ha`m $g_2(t)$ lar sa`ykes sırtqı ortalıqtıń temperaturaları, $\lambda=\frac{h}{k}$, $k-$sterjenniń jıllılıq ótkiziwshilik koefficienti, $h-$jıllılıq almasıwshılıq koefficienti.

Eger sterjen` eki ushınan shegaralanbasa, onda shegaralıq sha`rtler qoyılmaydı, tek (2) teńleme menen sterjenniń da`slepki temperaturası, yağnıy (3) sha`rt boladı. Bunday (1),(3) ma`sele jıllılıq ótkiziwshilik teńlemesi ushın Koshi ma`selesi dep ataladı.

§2. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın maksimum principi

Meyli $\Omega-\left(x,y,z\right)$ keńisliginiń shekli oblastı bolsın. Q dep (x,y,z,t) keńisliginde ultanı usı Ω oblastı bolatuğın, jasawshısı bolsa Ot kósherine parallel jaylasqan cilindrdi alayıq. Meyli Q_T usı cilindrdiń tómennen $t=0$ tegisligi menen ha`m joqarıdan $t=T,\ \left(T>0\right)$ tegisligi menen shegaralanǵan bólegi bolsın. Tómennen $t=0$ cilindrdiń ultanı ha`m qaptal ta`repinen cilindrdiń qaptal ta`repi menen shegaralanǵan Q_T cilindrdiń bólegin Γ dep belgileyik.

Endi tómendegi ma`seleni qarastırayıq: Q_T cilindrde

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) \tag{1}$$

jıllılıq ótkizgishlik teńlemesiniń

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ \ \left((x,y,z)\in\bar{\Omega}\right) \tag{2}$$

baslanǵısh sha`rtin ha`m

$$u\big|_{S}=\psi\left(P,t\right),\ \left(t\in\left[0,T\right]\right) \tag{3}$$

shegaralıq sha`rtin qanaatlandıratuğın sheshimin tabıń, bul jerde $S-\Omega$ oblastıń shegarası, $P$ bolsa $S$ betiniń tochkası. $\varphi$ ha`m ψ funkciyaları úzliksiz, sonıń menen birge $t=0$ ushın ψ dıń ma`nisleri $\varphi$ diń ma`nisleri menen S betinde birdey boladı.

(1) teńlemeniń (2) ha`m (3) sha`rtlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw ma`selesi jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın birinshi shegaralıq ma`sele dep ataladı.

Teorema. Q_T cilindrdiń ishinde (1) birtekli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesin qanaatlandıratuǵın ha`m sonıń menen birge onıń shegarasına shekem úzliksiz bolǵan $u(x,y,z,t)$ funkciyası óziniń eń úlken ha`m eń kishi ma`nisine $\Gamma$ da erisedi, yaǵnıy eń úlken ha`m eń kishi ma`nisine $t=0$ ushın yamasa Q_T cilindrdiń qaptal betinde erisedi.

Minimum haqqındaǵı teorema $u(x,y,z,t)$ funkciyasınıń belgisin ózgertiw arqalı maksimum haqqındaǵı teoremaǵa alıp kelinedi. Sonıń ushın teoremanı da`lillewdi tek maksimum haqqındaǵı teorema menen juwmaqlaymız.

M arqalı $u(x,y,z,t)$ funkciyasınıń $\overline{Q}_T$ cilindrdegi eń úlken ma`nisin belgileymiz, $m$ arqalı bolsa onıń $\Gamma$ daǵı eń úlken ma`nisin belgileymiz. Meyli sonıńday $u(x,y,z,t)$ sheshim bar bolıp $M>m$ bolsın, yaǵnıy maksimum haqqındaǵı teorema orınlı bolmasın. Meyli bul funkciya M ma`nisine $(x_0,y_0,z_0,t_0)$ tochkada erissin, bul jerde $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ ha`m $0<t_0\le T$. Endi

$$\vartheta(x,y,z,t)=u(x,y,z,t)+\frac{M-m}{6d^2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]$$

funkciyasın qarastıramız, bul jerde $d-\Omega$ oblasttıń diametri. Q_T cilindrdiń qaptal betinde ha`m onıń tómengi ultanında

$$\vartheta(x,y,z,t)\le m+\frac{M-m}{6}=\frac{M}{6}+\frac{5M}{6}<M$$

Biraq $\vartheta(x_0,y_0,z_0,t_0)=M$. Sonıń ushın ϑ funkciyası u funkciyasınday Q_T nıń qaptal betinde de yamasa onıń tómengi ultanında da eń úlken ma`niske erispeydi. Meyli $\vartheta$ funkciyası óziniń eń úlken ma`nisine (x_1,y_1,z_1,t_1) tochkada erissin, bul jerde (x_1,y_1,z_1) tochkası Ω nıń ishki tochkası, ha`m $0<t_1\le T$. Onda bul tochkada $\vartheta_{xx}$, $\vartheta_{yy}$, $\vartheta_{zz}$ ler oń emes ha`m $\vartheta_t\ge 0$ (eger $t_1<T$ bolsa, $\vartheta_t=0$, al $t_1=T$ bolsa,

$\vartheta_t \geq 0$). Onda (x_1, y_1, z_1, t_1) tochkada $\vartheta_t - a^2(\vartheta_{xx} + \vartheta_{yy} + \vartheta_{zz}) \geq 0$ bolıp, ekinshi ta`repten

$$\vartheta_t - a^2(\vartheta_{xx} + \vartheta_{yy} + \vartheta_{zz}) = u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - a^2 \frac{M-m}{d^2} < 0$$

bolıp $\vartheta_t - a^2(\vartheta_{xx} + \vartheta_{yy} + \vartheta_{zz}) \geq 0$ teńsizlikke qarama qarsı keledi ha`m teoremanıń durıslıǵın kórsetedi.

Teoremanıń fizikalıq ma`nisi tómendegishe: jıllılıq, temperatura joqarı jerden temperatura tómen jerge qarap tarqaladı, sonıń ushın eger $t = 0$ waqıtta denedegi maksimal temperatura m_1, shegaradaǵı temperatura m_2 bolıp, $0 \leq t \leq T$ ushın $\max(m_1, m_2) = m_0$ bolsa, onda $0 < t \leq T$ ushın hesh bir tochkada temperatura m_0 dan úlken bolıwı múmkin emes. Bul da`lillengen teoremadan tómendegi na`tiyjeler kelip shıǵadı.

Teorema. (1),(3) birinshi shegaralıq ma`seleniń sheshimi Q_T cilindrde birden bir.

Teorema. (1),(3) birinshi shegaralıq ma`seleniń sheshimi baslanǵısh ha`m shegaralıq sha`rtlerdiń oń ta`repinen úzliksiz ǵa`rezli.

§3. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı

**3.1.Birtekli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı.** Meyli uzınlıǵı $l$ ge teń bolǵan, qaptal betinen izolyaciyalanǵan jińishke sterjenniń ushlarındaǵı temperatura nol`ge, al da`slepki temperaturası bolsa $\varphi(x)$ qa teń bolsın. Onda sterjendegi jıllılıqtıń taralıw nızamı

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \tag{3}$$

túrindegi aralas ma`seleniń sheshimi menen anıqlanadı, bul jerde $\varphi(x)$ funkciyası birinshi ta`rtipli úzliksiz tuwındıǵa iye ha`m $x=0,\ x=l$ ushın nol`ge aylanatuǵın funkciya.

Sheshimdi Fur`e metodı boyınsha

$$u(x,t)=T(t)X(x) \tag{4}$$

kóbeymesi túrinde izleymiz. Bunı (1) ge qoysaq

$$X(x)T'(t)=a^2T(t)X''(x)$$

yamasa

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2$$

boladı. Bunnan tómendegi eki

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\quad T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0$$

teńlemege iye bolamız. (4) ni (3) shegaralıq sha`rtke qoysaq $X(0)=0,\ X(l)=0$ bolıp, $X(x)$ funkciyası ushın

$$X''+\lambda^2X=0,\quad X(0)=0,\ X(l)=0$$

túrindegi Shturm-Liuvill ma`selesine iye bolamız. Bul ma`selesiniń menshikli ma`nisleri ha`m menshikli funkciyaları

$$\lambda_k=\frac{\pi\kappa}{l},\ k=1,2,...,\quad X_k(x)=\sin\frac{\pi k}{l}x$$

bolatuǵınlıǵı bizge málim. Sonday-aq $\lambda=\lambda_k$ nıń bul ma`nislerine $T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0$ teńlemesiniń

$$T_k(t)=A_ke^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2t}$$

sheshimleri tuwra keledi. Solay etip

$$u_k(x,t)=T_k(t)X_k(x)=A_k\cdot e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2t}\sin\frac{\pi k}{l}x$$

sheshimler (1) teńlemeni ha`m (3) shegaralıq sha`rtlerdi qanaatlandıradı.

Endi

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x \qquad (5)$$

qatarın dúzemiz. Bunı (2) baslanǵısh sha`rtke qoysaq

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{\pi k}{l}x=\varphi(x)$$

bolıp, bunnan

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx$$

boladı. A_k nıń bul ma`nislerin (5) degi ornına qoysaq, berilgen (1)- (3) aralas ma`seleniń sheshimine iye bolamız.

Mısal 1. Birtekli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın tómendegi aralas máseleni sheshiń

$$u_t=u_{xx},\quad u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=x(l-x).$$

Sheshiliwi. Sheshimdi $u(x,t)=T(t)X(x)$ kóbeymesi túrinde izleymiz hám bizge málim $X(x)$ qa qarata

$$X''+\lambda^2X=0,\quad X(0)=0,\ X(l)=0$$

Shturm-Liuvill máselesine iye bolamız. Bul máseleniń menshikleri mánisleri hám menshikli funkciyaları sáykes

$$\lambda_k=\frac{\pi k}{l},\quad X(x)=\sin\frac{\pi k}{l}x,\ k=1,2,...$$

Endi $\lambda_k=\dfrac{\pi k}{l}$ nıń hár bir mánisine sáykes

$$T_k'(t)+k^2T(t)=0$$

teńlemesiniń

$$T_k(t)=C_k e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}$$

sheshimlerin anıqlaymız.Solay etip izlenip atırǵan sheshim

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x$$

kóriniske iye boladı. Belgisiz C_k koefficientlerin anıqlaw ushın baslanǵısh shártti paydalanamız

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{\pi k}{l}x=x(l-x),$$

bunnan

$$C_k=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx=2[1-(-1)^k]$$

bolıp, k jup bolsa $C_k=0,$ al k taq san bolsa $C_k=4$ boladı. Solay etip, berilgen máseleniń sheshimi

$$u(x,t)=4\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2(2k+1)^2 t}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)^2}{l}x$$

boladı.

Mısal 2. Birtekli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın tómendegi aralas máseleni sheshiń

$$u_t=u_{xx},\quad u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=u_0,\ u_0-const.$$

Sheshiliwi. Aldıngı mısalǵa uqsas sheshim

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x$$

kóriniske iye boladı, belgisiz C_k koefficientlerin anıqlaw ushın baslanǵısh shártti paydalanamız

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{\pi k}{l}x=u_0,$$

bunnan

$$C_k=\frac{2u_0}{l}\int_0^l\sin\frac{\pi k}{l}xdx=\frac{2u_0}{\pi k}[1-(-1)^k]$$

bolıp, bunnan k jup bolsa $C_k = 0,$ al k taq san bolsa $C_k = \dfrac{4u_0}{\pi(2k+1)}$ bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Solay etip sheshim

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\frac{\pi^2(2k+1)^2}{l^2}t}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)}{l}x$$

túrine iye boladı.

Mısal 3. Birtekli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın tómendegi aralas máseleni sheshiń

$$u_t = 16u_{xx}, \quad u(0,t) = 0,\ u(4,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & 2 < x \le 4. \end{cases}$$

Sheshiliwi. Aldınǵı mısallarǵa uqsas sheshim

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(\pi k)^2 t}\cdot\sin\frac{\pi k}{4}x$$

kóriniske iye boladı hám belgisiz C_k koefficientlerin anıqlaw ushın baslanǵısh shártti paydalanamız

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{\pi k}{l}x = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & 2 < x \le 4. \end{cases}$$

Bunnan

$$C_k = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{2}\sin\frac{\pi k}{4}xdx + \frac{1}{2}\int_2^4 (4-x)\sin\frac{\pi k}{4}xdx =$$

$$= -2\left(\frac{4}{\pi k}\right)\cos\frac{\pi k}{2} + 2\left(\frac{4}{\pi k}\right)^2\sin\frac{\pi k}{2} + \left(\frac{4}{\pi k}\right)^3\left(\cos\frac{\pi k}{2} - 1\right) +$$

$$+2\left(\frac{4}{\pi k}\right)\cos\frac{\pi k}{2} + \left(\frac{4}{\pi k}\right)^2\sin\frac{\pi k}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{4}{\pi k}\right)^2\sin\frac{\pi k}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi k}\right)^3\left(\cos\frac{\pi k}{2} - 1\right),\ n = 1,2,...,$$

C_k nıń bul mánisin joqarıdağı ornına qoyıp, izlenip atırǵan sheshimge iye bolamız:

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(3\sin\frac{\pi k}{2}+\frac{4}{\pi k}\left(\cos\frac{\pi k}{2}-1\right)\right)e^{-(\pi k)^2 t}\cdot\sin\frac{\pi k}{4}x\,.$$

Mısal 4. Birtekli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın tómendegi aralas máseleni sheshiń

$$u_t=u_{xx},\quad u_x(0,t)=0,\ u_x(\pi,t)=0,$$
$$u(x,0)=\cos 2x.$$

Sheshiliwi. Sheshimdi $u(x,t)=T(t)X(x)$ kóbeymesi túrinde izleymiz hám bizge málim $X(x)$ qa qarata

$$X''+\lambda^2 X=0,\quad X'(0)=0,\ X'(\pi)=0$$

Shturm-Liuvill máselesine iye bolamız. Bul máseleniń menshikleri mánisleri hám menshikli funkciyaları sáykes

$$\lambda_k=k,\quad X(x)=\cos kx,\ k=0,1,2,...$$

Endi $\lambda_k=k$ nıń hár bir mánisine sáykes

$$T_k'(t)+k^2T_k(t)=0$$

teńlemesiniń

$$T_k(t)=C_k e^{-\pi^2 t}$$

sheshimine iye bolamız. Sonda berilgen máseleniń sheshimi

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k e^{-\pi^2 t}\cos kx$$

túrine iye boladı, bul jerde C_k belgisiz koefficientler baslanǵısh shártten tómendegishe anıqlanadı:

$$u(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\cos kx=\cos 2x.$$

Bunnan $k=2$ ushın $C_2=2$ bolıp ($k\neq 2$ ushın $C_2=0$ boladı)

$$u(x,t)=e^{-4t}\cos 2x$$

boladı.

3.2. Birtekli emes jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı. Meyli endi bir tekli emes

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{6}$$

jıllılıq ótkizgishlik teńlemesiniń birtekli

$$u(x,0) = 0, \tag{7}$$

$$u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0 \tag{8}$$

baslanǵısh ha`m shegaralıq sha`rtlerin qanaatlandırıwshı sheshimin tabıw ma`selesin qarastırayıq. Sheshimdi

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{\pi k}{l} x \tag{9}$$

Fur`e qatarı túrinde izleymiz, bul jerde $\sin\frac{\pi k}{l} x$ (6) ǵa birtekli bolǵan

$$u_t = a^2 u_{xx}, \; u(0,t) = 0, \; u(l,t) = 0$$

máseleniń menshikli funkciyaları. Bunı (6) ǵa qoymastan aldın $f(x,t)$ funkciyasın $\sin\frac{\pi k}{l} x$ menshikli funkciyalar boyınsha qatarǵa jayıp alamız:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{\pi k}{l} x, \tag{10}$$

bul jerde

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin\frac{\pi k}{l} x \, dx .$$

(9) ha`m (10) lardı (6) ǵa qoysaq

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k' + \left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 T_k - f_k(t) \right] \sin\frac{\pi k}{l} x = 0.$$

Bunnan

$$T_k' + \left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 T_k = f_k(t), \quad k = 1, 2, ... \tag{11}$$

bolıp, $u(x,t)$ ushın baslanǵısh sha`rtti paydalansaq

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)\sin\frac{\pi k}{l}x=0\,.$$

Bunnan

$$T_k(0)=0,\ k=1,2,... \qquad (12)$$

bolıp, (11) teńlemeniń (12) baslanǵısh sha`rtin qanaatlandırıwshı sheshimi

$$T_k=\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau$$

kórinisine iye boladı. Bunı (9) ǵa qoyıp (6)-(8) aralas ma`seleniń

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2(t-\tau)}f_k(\tau)d\tau\right]\sin\frac{\pi k}{l}x$$

túrindegi sheshimine iye bolamız.

Mısal 5. Birtekli emes jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın tómendegi aralas máseleni sheshiń

$$u_t=u_{xx}+\sin t\sin 2x,$$

$$u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,$$

$$u(x,0)=0.$$

Sheshiliwi. Sheshimdi $u(x,t)=\vartheta(t)\sin 2x$ túrinde izleymiz. Bunı berilgen teńlemege qoyıp

$$\vartheta'(t)\sin 2x=-4\vartheta(t)\sin 2x+\sin t\,\sin 2x$$

teńligine iye bolamız. Bunnan

$$\vartheta'(t)+4\vartheta(t)=\sin t,\quad \vartheta(0)=0$$

Koshi máselesine iye bolamız. Bul Koshi máselesiniń sheshimi

$$\vartheta(t)=\frac{1}{17}e^{-4t}-\frac{1}{17}\cos t+\frac{4}{17}\sin t$$

bolǵanı sebepli, berilgen máseleniń sheshimi

$$u(x,t)=\frac{1}{17}\left(e^{-4t}-\cos t+4\sin t\right)\sin 2x$$

boladı.

Mısal 6. Birtekli emes jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın tómendegi aralas máseleni sheshiń

$$u_t = u_{xx} + 4e^t \cos x,$$

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 2\cos x + 3\cos 2x.$$

Sheshiliwi. Sheshimdi eki funkciyanıń $u(x,t) = \vartheta(x,t) + w(x,t)$ qosındısı túrinde izleymiz. Bul jerde $w(x,t)$ funkciyasın

$$w_t = w_{xx},\quad w_x(0,t) = w_x(\pi,t) = 0,$$

$$w(x,0) = 2\cos x + 3\cos 2x,$$

al, $\vartheta(x,t)$ funkciyasın

$$\vartheta_t = \vartheta_{xx} + 4e^t \cos x,$$

$$\vartheta_x(0,t) = \vartheta_x(\pi,t) = 0,$$

$$\vartheta(x,0) = 0,$$

aralas máselelerdiń sheshimi bolatuǵınday etip saylap alamız.

Endi $w(x,t)$ funkciyasın anıqlayıq. Bul funkciyanı ózgeriwshileri ajıralǵan

$$w(x,t) = T(t)X(x)$$

kóbeymesi túrinde izleymiz hám bizge málim $X(x)$ qa qarata

$$X'' + \lambda^2 X = 0,\quad X'(0) = 0,\ X'(\pi) = 0$$

Shturm-Liuvill máselesine iye bolamız. Bul máseleniń menshikleri mánisleri hám menshikli funkciyaları sáykes

$$\lambda_k = k,\quad X(x) = \cos kx,\ k = 0,1,2,...$$

Endi $\lambda_k = k$ nıń hár bir mánisine sáykes

$$T_k'(t) + k^2 T_k(t) = 0$$

teńlemesiniń

$$T_k(t) = C_k e^{-\pi^2 t}$$

sheshimin anıqlaymız. Sonda berilgen máseleniń birtekli bóleginiń sheshimi

$$w(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k e^{-\pi^2 t}\cos kx$$

túrine iye boladı, bul jerde C_k belgisiz koefficientler baslanǵısh shártten tómendegishe anıqlanadı:

$$w(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\cos kx=2\cos x+3\cos 2x.$$

Bunnan $k=1$ ushın $C_1=2$ hám $k=2$ ushın $C_2=3$ bolıp

$$w(x,t)=2e^{-t}\cos x+3e^{-4t}\cos 2x$$

boladı. Endi berilgen máseleniń birtekli emes bóleginen $\vartheta(x,t)$ funkciyasın anıqlaymız. Bul funkciyanı

$$\vartheta(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta_k(t)\cos kx$$

qatar kórinisinde izlep, belgisiz $\vartheta_k(t)$ koefficientlerdi anıqlaw ushın sheshimniń bul kórinisin birtekli emes teńlemedegi orınlarına qoyamız hám $k=1$ ushın

$$\left(\vartheta_1'(t)+\vartheta_1(t)-4e^t\right)\cos x=0$$

teńligine iye bolamız. Bunnan $\vartheta_1(t)$ ǵa qarata

$$\vartheta_1'(t)+\vartheta_1(t)=4e^t,\quad \vartheta_1(0)=0$$

Koshi máselesine iye bolamız. Bul máseleniń sheshimi

$$\vartheta_1(t)=2e^t-2e^{-t}$$

bolıp, bunnan

$$\vartheta(x,t)=(2e^t-2e^{-t})\cos x$$

kelip shıǵadı. Solay etip, berilgen máseleniń sheshimi

$$u(x,t)=\vartheta(x,t)+w(x,t)=(2e^t-2e^{-t})\cos x+2e^{-t}\cos x+3e^{-4t}\cos 2x=$$

$$=2e^t\cos x+3e^{-4t}\cos 2x$$

boladı.

Mısal 7. Birtekli emes jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın tómendegi aralas máseleni sheshiń

$$u_t = 36u_{xx} + \frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{2}x,$$

$$u(0,t) = 0,\ u_x(2,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0.$$

Sheshiliwi. Dáslep berilgen teńlemege sáykes birtekli teńlemeni sheship, berilgen shegaralıq máseleniń

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)x,\quad k = 0,1,2,...$$

menshikli funkciyalar semeystvosın tabamız hám usı funkciyalar sisteması boyınsha $\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{2}x$ funkciyasın $(0;2)$ aralıqta

$$\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{2}x = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2+k-\frac{3}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)x$$

qatarına jayamız.

Berilgen teńlemeniń ońıı jaǵındaǵı funkciyanıń bul kórinisin teńlemedegi ornına qoysaq, teńleme

$$u_t = 36u_{xx} + \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2+k-\frac{3}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)x \tag{13}$$

kóriniske iye boladı. (13) niń sheshimin usı funkciyalardıń ortogonal sisteması boyınsha jayılǵan

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\,\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)x \tag{14}$$

qatarı kóriniste izleymiz hám bunı berilgen teńlemedegi orınlarına qoyıp

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k'(t)\,\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[-36u_k(t)\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)^2 + \frac{1}{10}\cdot\frac{2k+1}{k^2+k-\frac{3}{4}}\right]\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)x$$

teńligine iye bolamız. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$ tıń koefficientlerin salıstıra otırıp $u_k(t)$ ǵa qarata

$$u_k'(t)+36\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)^2 u_k(t)=\frac{1}{10}\cdot\frac{2k+1}{k^2+k-\frac{3}{4}}$$

teńlemesine iye bolamız. Bunnan

$$u_k(t)=\frac{2k+1}{360\left(k^2+k-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)^2}+C_k e^{-36\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)^2 t}$$

bul jerde C_k belgisiz koefficientler baslanǵısh shártten tómendegishe anıqlanadı:

$$u(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(0)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)x=0,$$

bunnan barlıq k lar ushın $u_k(0)=0$ boladı. $u_k(t)$ nıń bul baslanǵısh mánisin esapqa alsaq

$$C_k=-\frac{2k+1}{360\left(k^2+k-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)^2}.$$

Sonlıqtan

$$u_k(t)=\frac{2k+1}{360\left(k^2+k-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)^2}\left(1-e^{-36\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)^2 t}\right)$$

$u_k(t)$ nıń bul mánisin (14) degi ornına qoysaq berilgen máseleniń izlenip atırǵan sheshimi

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{360\left(k^2+k-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)^2}\left(1-e^{-36\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)^2 t}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)x$$

boladı.

Mısal 8. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın tómendegi aralas máseleni sheshiń

$$u_t + 6u = 3u_{xx},$$
$$u(0,t) = 1,\ u(2,t) = 2,$$
$$u(x,0) = x^2 - \frac{3}{2}x + 1.$$

Sheshiliwi. Ózgeriwshilerdi

$$\vartheta(x,t) = u(x,t) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

formulası boyınsha almastırsaq, onda berilgen másele

$$\vartheta_t + 6\vartheta - 3\vartheta_{xx} = -6 - 3x,$$
$$\vartheta(0,t) = 0,\ \vartheta(2,t) = 0,$$
$$\vartheta(x,0) = x^2 - 2x.$$

Alınǵan teńleme birtekli emes. Bul teńlemeni sheshiw ushın dáslep sáykes birtekli teńlemeni birtekli shegaralıq shárti menen birgelikte sheship alamız. $\vartheta(x,t) = T(t)X(x)$ dep uyǵarsaq, bul jerde $X(0) = 0,\ X(2) = 0,$ onda $X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{2}x,\ \ (k = 1,2,...)$.

Endi birtekli emes teńlemeniń sheshimin

$$\vartheta(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k(t) \sin\frac{\pi k}{2}x$$

kóriniste izleymiz. Bunı teńlemedegi hám baslanǵısh shárttegi orınlarına qoyıp $\sin\frac{\pi k}{2}x$ aldındaǵı koefficientlerdi teńlestiriw arqalı $\vartheta_k(t)$ ǵa qarata

$$\vartheta_k'(t) + \left(6 + \frac{3\pi^2 k^2}{4}\right)\vartheta_k(t) = 12(2\cos\pi k - 1),$$

$$\vartheta_k(0) = -\frac{16}{\pi^3 k^3}(1 - \cos\pi k)$$

túrindegi Koshi máselesine iye bolamız. Bunnan $\vartheta_k(t)$ nı anıqlasaq $\vartheta(x,t)$ málim boladı, keyinshelik burınǵı ózgeriwshige qaytıp ócek izlenip atırǵan $u(x,t)$ sheshim anıqlanadı:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{-\frac{16(1-2\cos\pi k)}{\pi k(8+\pi^2k^2)}\left(1-e^{-\frac{3}{4}(8+\pi^2k^2)t}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{16(1-\cos\pi k)}{\pi^3k^3}e^{-\frac{3}{4}(8+\pi^2k^2)t}\right\}\sin\frac{\pi k}{2}x+1+\frac{x}{2}.$$

**3.3. Birtekli plastinkadaǵı jıllılıqtıń taralıw teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı.** Meyli tárepleriniń uzınlıǵı $p$ hám $q$ bolǵan tuwrı múyeshli formadaǵı birtekli plastinka berilgen bolıp, plastinkanıń qaptal táreplerindegi temperatura nol`ge teń bolsın. Eger plastinkanıń (x,y) tochkasındaǵı temperatura $\varphi(x,y)$ ke teń bolsa, onda bul plastinkadaǵı jıllılıqtıń erkin taralıw nızamı $\{0<x<p,\ 0<y<q,\ t>0\}$ oblastta

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}) \tag{15}$$

teńlemesiniń

$$u(0,y,t)=0,\ u(p,y,t)=0,\ u(x,0,t)=0,\ u(x,q,t)=0 \tag{16}$$

shegaralıq hám

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y) \tag{17}$$

baslanǵısh shártlerin qanaatlandırıwshı sheshimi menen anıqlanadı.

Bul sheshim $u(x,y,t)=T(t)\vartheta(x,y)$ yamasa $\vartheta(x,y)=X(x)Y(y)$ dep alınıp

$$u(x,y,t)=T(t)X(x)Y(y) \tag{18}$$

kóriniste izlenedi, bul jerde $X(x), Y(y)$ hám $T(t)$ funkciyaları sáykes

$$X''(x)+\lambda_1^2X(x)=0;\ \ X(0)=X(p)=0,$$

$$Y''(x)+\lambda_2^2Y(x)=0;\ Y(0)=Y(q)=0,$$

shegaralıq máselelerin hám

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0 \tag{19}$$

teńlemesin sheshiw arqalı anıqlanadı, bul jerde $\lambda^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2$.

Bizge málim

$$X_m(x)=\sin\frac{\pi m}{p}x,\quad Y_n(x)=\sin\frac{\pi n}{q}y,$$

sonıń menen birge $\lambda_m=\frac{\pi m}{p},\ \lambda_n=\frac{\pi n}{q}$ hám $\lambda_{mn}^2=\frac{\pi^2m^2}{p^2}+\frac{\pi^2n^2}{q^2}$.

Endi $\lambda_{mn}^2=\frac{\pi^2m^2}{p^2}+\frac{\pi^2n^2}{q^2}$ tıń bul mánislerin (19) ǵa qoysaq

$$T''_{mn}(t)+a^2\left(\frac{\pi^2m^2}{p^2}+\frac{\pi^2n^2}{q^2}\right)T_{mn}(t)=0$$

bolıp, bunnan (19) nıń

$$T_{mn}(t)=C_{mn}e^{-a^2\left(\frac{\pi^2m^2}{p^2}+\frac{\pi^2n^2}{q^2}\right)t}$$

sheshimine iye bolamız.

Bul tabılǵanlardı (18) degi orınlarına qoyıp, (15)-(17) aralas máseleniń

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}C_{mn}e^{-a^2\left(\frac{\pi^2m^2}{p^2}+\frac{\pi^2n^2}{q^2}\right)t}\sin\frac{\pi m}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}y$$

túrindegi sheshimine iye bolamız, bul jerde

$$C_{mn}=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q\varphi(x,y)\sin\frac{\pi m}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}y\,dxdy.$$

Mısal 9. $0\le x\le b_1,\ 0\le y\le b_2$ tuwrı múyeshlikte jıllılıqtıń taralıwı haqqındaǵı máseleni sheshiń:

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}),$$

$$u(x,y,t)\big|_{t=0}=\sin\frac{2\pi}{b_1}x\sin\frac{2\pi}{b_2}y,$$

$$u(x,y,t)\big|_{\tilde{A}}=0,$$

bul jerde $\tilde{A}$ tuwrı múyeshliktiń shegarası.

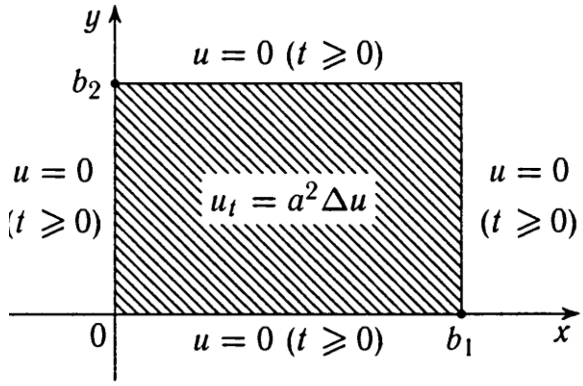
Sheshiliwi. Sheshimdi

$$u(x,y,t)=T(t)\,X(x)Y(y)$$

kóriniste izleymiz. Bizge málim

$$X_m(x)=\sin\frac{\pi m}{b_1}x,\quad Y_n(x)=\sin\frac{\pi n}{b_2}y$$

sonıń menen birge $\lambda_m=\frac{\pi m}{b_1},\ \lambda_n=\frac{\pi n}{b_2}$ hám $\lambda_{mn}^2=\frac{\pi^2 m^2}{b_1^2}+\frac{\pi^2 n^2}{b_2^2}$.



Endi $\lambda_{mn}^2=\frac{\pi^2 m^2}{b_1^2}+\frac{\pi^2 n^2}{b_2^2}$ tıń bul mánislerin $T''(t)+a^2\lambda^2 T(t)=0$

teńlemesine qoysaq

$$T''_{mn}(t)+a^2\left(\frac{\pi^2 m^2}{b_1^2}+\frac{\pi^2 n^2}{b_2^2}\right)T_{mn}(t)=0$$

bolıp, bunnan

$$T_{mn}(t)=C_{mn}e^{-a^2\left(\frac{\pi^2 m^2}{b_1^2}+\frac{\pi^2 n^2}{b_2^2}\right)t}$$

sheshimine iye bolamız. Onda

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}C_{mn}e^{-a^2\left(\frac{\pi^2 m^2}{b_1^2}+\frac{\pi^2 n^2}{b_2^2}\right)t}\sin\frac{\pi m}{b_1}x\,\sin\frac{\pi n}{b_2}y$$

bolıp, baslanǵısh shártti esapqa alsaq

$$u(x,y,0)=\sum_{m,n=1}^{\infty}C_{mn}\sin\frac{\pi m}{b_1}x\,\sin\frac{\pi n}{b_2}y=\sin\frac{2\pi}{b_1}x\sin\frac{2\pi}{b_2}y\,.$$

Bunnan $C_{21}=1,$ al qalǵanları nol`ge teń, yaǵnıy $C_{mn}=0;\ m\neq 2,\neq 1n$. Sonlıqtan sheshim

$$u(x,y,t)=e^{-a^2\left(\frac{4\pi^2}{b_1^2}+\frac{\pi^2}{b_2^2}\right)t}\sin\frac{2\pi}{b_1}x\,\sin\frac{\pi}{b_2}y$$

boladı.

Mısal 10. Qalıńlıǵı joq, juqa $G=\{0<x<1,\, 0<y<1\}$ kvadrat plastinkada jıllılıqtıń baslanǵısh bólistiriliwi $u|_{t=0}=xy(1-x)(1-y)$ kóriniske iye. Eger plastinkanıń táreplerindegi temperaturanıń hámme waqıt nol`ge teń ekenligi málim bolsa, onda onıń erikli tochkasındaǵı $t>0$ waqıt momentindegi temperaturanı anıqlań.

Sheshiliwi. $u(x,y,t)$ temperaturanı anıqlaw ushın

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}),$$

$$u(x,y,t)\big|_{t=0}=xy(1-x)(1-y),$$

$$u(x,y,t)\big|_{\tilde{A}}=0,$$

aralas máseleni sheshiw kerek, bul jerde $\tilde{A}$ plastinkanıń tárepleri.

Aldınǵı mısaldaǵı máselege uqsas sheshim

$$u(x,y,t)=T(t)\,X(x)Y(y)$$

kóriniste izlenedi, bul jerde $X(x)$ hám $Y(y)$ler

$$X_m(x)=\sin\pi mx,\quad Y_n(x)=\sin\pi ny$$

kóriniste anıqlanadı, sonıń menen birge $\lambda_m=\pi m,\ \lambda_n=\pi n$ hám $\lambda_{mn}^2=\pi^2(m^2+n^2)$.

Endi $\lambda_{mn}^2=\pi^2(m^2+n^2)$ tıń bul mánislerin $T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0$ teńlemesine qoysaq

$$T''_{mn}(t)+a^2\pi^2(m^2+n^2)T_{mn}(t)=0$$

bolıp, bunnan

$$T_{mn}(t)=C_{mn}e^{-a^2\pi^2(m^2+n^2)t}$$

sheshimine iye bolamız. Onda

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}C_{mn}e^{-a^2\pi^2(m^2+n^2)t}\sin m\pi x\,\sin n\pi y$$

bolıp, baslanǵısh shártti esapqa alsaq

$$u(x,y,0)=\sum_{m,n=1}^{\infty}C_{mn}\sin m\pi x\,\sin n\pi y=xy(1-x)(1-y)\,.$$

Bunnan

$$C_{mn} = 4\int_0^1 x(1-x)\sin m\pi x dx \cdot \int_0^1 y(1-y)\sin n\pi y dy =$$

$$= 4\cdot\frac{2}{m^3\pi^3}\left(1-(-1)^m\right)\cdot\frac{2}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right).$$

Bunnan m hám n niń jup mánislerinde $C_{mn} = 0$, al taq mánislerinde $C_{mn} = \frac{16}{\pi^6(2m+1)^3(2n+1)^3}$, $m,n = 0,1,2,...$ bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Onda sheshim

$$u(x,y,t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{e^{-a^2\pi^2((2m+1)^2+(2n+1)^2)t}}{(2m+1)^3(2n+1)^3}\sin(2m+1)\pi x \sin(2n+1)\pi y$$

boladı.

Mısal 11. Tómendegi aralas máseleniń sheshimi bolıp tabılatuǵın $u(x,y,t)$ funkciyanı tabıń:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t),$$

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = 0,$$

$$u(0,y,t) = u_x(p,y,t) = 0,$$
$$u(x,0,t) = u(x,q,t) = 0,$$

Sheshiliwi. Sheshimdi

$$u(x,y,t) = T(t)X(x)Y(y)$$

kóriniste izlesek, onda $X(x)$ hám $Y(y)$ ler

$$X''(x) + \lambda_1^2 X(x) = 0,\ X(0) = X'(p) = 0;$$

$$Y''(x) + \lambda_1^2 Y(x) = 0,\ Y(0) = Y(q) = 0$$

shegaralıq máseleni sheshiw arqalı anıqlanadı:

$$X_m(x) = \sin\frac{(2m-1)\pi}{2p}x,\quad Y_n(x) = \sin\frac{n\pi}{q}y;\quad m,n = 1,2,...$$

Endi sheshimdi

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)\sin\frac{(2m-1)\pi}{2p}x \sin\frac{n\pi}{q}y$$

kóriniste izleymiz hám $u_{mn}(t)$ funkciyanı anıqlaw ushın teńlemedegi $f(x,y,t)$ funkciyasın

$$f(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}(t)\sin\frac{(2m-1)\pi}{2p}x\,\sin\frac{n\pi}{q}y$$

túrinde aldıńǵı qatarǵa uqsas qatarǵa jayıp alamız, bul jerde

$$f_{mn}(t)=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q f(x,y,t)\sin\frac{(2m-1)\pi}{2p}x\,\sin\frac{n\pi}{q}ydxdy.$$

Sońǵı eki qos qatardı berilgen teńlemege hám baslanǵısh shártke aparıp qoyıw arqalı $u_{mn}(t)$ ǵa qarata

$$u'_{mn}(t)+(\lambda_{mn}a)^2u_{mn}(t)=f_{mn}(t),\quad u_{mn}(0)=0$$

Koshi máselesine iye bolamız. Bul máseleniń sheshmi

$$u_{mn}(t)=\int_0^t f_{mn}(s)e^{-a^2\lambda_{mn}^2(t-s)}ds$$

bolǵanlıqtan, berilgen aralas máseleniń sheshimi

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\int_0^t f_{mn}(s)e^{-a^2\lambda_{mn}^2(t-s)}ds\right)\sin\frac{(2m-1)\pi}{2p}x\cdot\sin\frac{n\pi}{q}y$$

boladı.

§4. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın Koshi ma`selesi

Meyli, sırtqı jıllılıq deregi bolmaǵan halda sheksiz uzınlıqtaǵı sterjende jıllılıqtıń taralıw nızamın qarastırayıq. Usı maqsette $Q=\{-\infty;\infty\}x\{0<t\le T\}$ oblastında

$$u_t=a^2u_{xx} \tag{1}$$

jıllılıq ótkizgishlik teńlemesiniń

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{2}$$

baslanǵısh sha`rtin qanaatlandıratuǵın, shegaralanǵan sheshimin tabıw ma`selesin qarastırayıq, bul jerde T qa`legen oń san, $\varphi(x)$ bolsa úzliksiz ha`m Q oblastında shegaralanǵan funkciya.

Sheshimdi ózgeriwshilerdi ayırıw usılına muwapıq

$$u(x,t)=T(t)X(x) \tag{3}$$

kóbeymesi túrinde izleymiz. (3) ni (1) ge qoyıp

$$XT'=a^2X''T$$

yamasa bizge málim bolǵan

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$$

teńligine iye bolamız hám $T(t)$ ha`m $X(x)$ funkciyalarına qarata

$$X''+\lambda^2X=0,$$

$$T'+\lambda^2a^2T=0$$

teńlemelerine iye bolamız. Bul teńlemelerdiń ulıwma sheshimi

$$T(t)=e^{-\lambda^2a^2t},\ X(x)=A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x$$

bolıp, bunı (3) ge qoysaq

$$u_\lambda(x,t)=\left(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right)e^{-\lambda^2a^2t}$$

boladı. Bunnan

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_\lambda(x,t)d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\lambda)(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right)e^{-\lambda^2a^2t}d\lambda. \tag{4}$$

Erikli $A(\lambda)$ ha`m $B(\lambda)$ koefficientlerin tabıw ushın (4) ni (2) baslanǵısh sha`rtke qoyamız

$$u(x;0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right)d\lambda=\varphi(x).$$

Bul teńlikti $\varphi(x)$ funkciyasınıń Fur`e integralına jayılması sıpatında qarap $A(\lambda)$ ha`m $B(\lambda)$ koefficientleri ushın

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\cos\lambda y dy,\ B(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\sin\lambda y dy$$

teńliklerine iye bolamız. Bulardı (4) degi orınlarına qoyıp, (1),(2) Koshi ma`selesiniń

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\cos\lambda y dy\right)\cos\lambda x+\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\sin\lambda y dy\right)\sin\lambda x\right\}\cdot e^{-\lambda^2 a^2 t}d\lambda$$

túrindegi sheshimine iye bolamız. y boyınsha integrallardı biriktirip ha`m $\lambda$ menen $y$ tiń integrallaw ta`rtiplerin ózgercek

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)dy\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(y-x)d\lambda$$

boladı. Bizge belgili

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda^2 a^2}\cos\beta\lambda\, d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{\beta^2}{4a^2}}$$

formulanı qollansaq

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(y-x)d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2 t}}$$

bolıp, sheshim

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2 t}}dy=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y,t)\varphi(y)dy \tag{5}$$

boladı. Bul (5) túrindegi sheshim Puasson integralı dep ataladı.

$$G(x,t,y)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2 t}}$$

funkciyası bolsa (x,t) nıń funkciyası sıpatında (1) teńlemeni qanaatlandıradı ha`m ol (1) jıllılıq ótkizgishlik teńlemesiniń fundamentallıq sheshimi dep ataladı. Bul

Eger sheksiz uzınlıqtaǵı sterjenge tıǵızlıǵı $F(x,t)$ ǵa teń bolǵan jıllılıq deregi ta`sir etetuǵın bolsın. Onda $t>0$ ushın bul sterjendegi jıllılıqtıń taralıw nızamı da`slepki temperaturası nol`ge teń bolǵan sterjen` ushın

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad f(x,t)=\frac{F(x,t)}{c\rho}, \tag{6}$$

$$u(x,0)=0 \tag{7}$$

Koshi ma`selesiniń sheshimi menen anıqlanadı. Eger da`slepki temperatura $\varphi(x)$ ǵa teń bolsa, yaǵnıy $u(x,0)=\varphi(x)$ bolsa, onda

$$u(x,t)=w\left(x,t\right)+\varphi(x)$$

belgilew kiritiw arqalı

$$w_t=a^2w_{xx}+f(x,t)-\varphi''(x),\quad w(x,0)=0$$

túrindegi nollik baslanǵısh sha`rtke iye Koshi ma`selesine alıp keliwge boladı.

Dyuamel principin qollanıp

$$v_t=a^2v_{xx},\ t>\tau,\qquad v_{t=\tau}=f\left(x,\tau\right)$$

Koshi ma`selesiniń sheshimin tabamız. Bul birtekli teńleme ushın Koshi ma`selesi, biraq $t=0$ ushın emes, $t=\tau$ ushın. Sonıń ushın t nı $t-\tau$ menen ózgertip, Puasson integralı boyınsha sheshimdi

$$v\left(x,t,\tau\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(y,\tau\right)\frac{1}{2a\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}dy$$

túrinde kórsetemiz. Onda (6),(7) berilgen Koshi ma`selesiniń sheshimi

$$u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f(y,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}dy \tag{8}$$

túrine iye boladı. Eger fundamentallıq sheshimniń

$$G(x,t,y)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}$$

belgilewinen paydalansaq, onda (8) sheshimdi

$$u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t-\tau,y)f(y,\tau)dy$$

túrinde kórsetiwge boladı.

Eger jıllılıq ótkizgishlik teńlemesinde dáslepki temperatura nollik bolmasa, yaǵnıy Koshi máselesi

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),$$

$$u(x,0)=\varphi(x)$$

túrinde berilse, onda sheshim Puasson formulası járdeminde

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t,y)\varphi(y)dy+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t-\tau,y)\,f(y,\tau)dy$$

kóriniste anıqlanadı.

Eger jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi eki ólshemli bolsa, yaǵnıy qarastırılıp atırǵan másele sterjende emes, al plastinkada bolsa, onda Koshi máselesi

$$u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f(x,y,t),$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y)$$

túrinde berilip, bul máseleniń sheshimi

$$u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t-\tau,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta$$

yamasa

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4a^2\pi t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta$$

formulası menen esaplanadı.

Mısal 1. Koshi máselesiniń sheshimin tabıń:

$$u_t=\frac{1}{4}u_{xx},\quad |x|<+\infty,\ t>0,$$

$$u(x,0)=e^{-x^2}\sin x,\quad |x|<+\infty\,.$$

Sheshiliwi. $a=\dfrac{1}{2}$ ushın (5) formulanı qollansaq

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{t}}e^{-y^2}\sin y dy$$

bolıp, bunıń oń jaǵındaǵı integraldı esaplaw ushın dáslep

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{t}-y^2+iy}dy$$

integraldı qarastıramız:

$$\frac{(x-y)^2}{t}+y^2-iy=\left\{\sqrt{\frac{1+t}{t}}y-\frac{2x+it}{2\sqrt{t(t+1)}}\right\}^2+\frac{t^2-4ixt+4x^2t}{4t(1+t)}$$

bolǵanlıqtan

$$s=\sqrt{\frac{1+t}{t}}y-\frac{2x+it}{2\sqrt{t(t+1)}}$$

belgilewin jasasaq

$$I=\sqrt{\frac{t}{1+t}}e^{-\frac{t^2-4ixt+4x^2t}{4t(1+t)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\frac{\pi t}{1+t}}e^{-\frac{t^2-4ixt+4x^2t}{4t(1+t)}}$$

bolıp, bunnan

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}e^{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}}\sin\frac{x}{1+t}$$

túrindegi berilgen máseleniń sheshimine iye bolamız.

Mısal 2. Koshi máselesiniń sheshimin tabıń:

$$u_t=a^2u_{xx}-hu,\quad |x|<+\infty,\ t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad |x|<+\infty,$$

bul jerde $h\geq 0$ bazı-bir turaqlı san.

Sheshiliwi. $u(x,t)=e^{-ht}\vartheta(x,t)$ belgilewin jasasaq, onda

$$u_t(x,t)=-hu+e^{-ht}\vartheta_t(x,t)$$

bolıp, $\vartheta(x,t)$ funkciyasına qarata

$$\vartheta_t=a^2\vartheta_{xx},\quad \vartheta(x,0)=\varphi(x)$$

túrindegi Koshi máselesine iye bolamız. Bul máseleniń sheshimi bizge málim

$$\vartheta(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}dy$$

bolıp, bunnan burıngı ózgeriwshige qaytıp ócek

$$u(x,t)=\frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}dy$$

boladı.

Mısal 3. Koshi máselesiniń sheshimin tabıń:

$$u_t=4u_{xx}+8u_x+3u+e^{-x}\left(1+te^{-t}\right),\quad |x|<+\infty,\ t>0,$$

$$u(x,0)=2e^{-x},\ |x|<+\infty.$$

Sheshiliwi. Dáslep

$$u(x,t)=e^{-(x+t)}\vartheta(x,t)$$

túrindegi belgilew jasap, berilgen Koshi máselesine salıstırǵanda ápiwayılastırılǵan

$$\vartheta_t=4\vartheta_{xx}+t+e^t,\quad |x|<+\infty,\ t>0,$$

$$\vartheta(x,0)=2,\quad |x|<+\infty$$

túrindegi máselesine iye bolamız.

$\vartheta(x,t)$ ǵa qarata qoshi máselesiniń sheshimi Puasson formulası boyınsha

$$\vartheta(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}2\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau+e^\tau}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}}dy$$

boladı. Al

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy=2\sqrt{\pi t},\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}}dy=2\sqrt{\pi(t-\tau)},$$

$$\int_0^t(\tau+e^\tau)d\tau=\frac{1}{2}t^2+e^t-1$$

bolǵanlıqtan

$$\vartheta(x,t)=\frac{1}{2}t^2+e^t+1$$

bolıp, sheshim

$$u(x,t)=e^{-(x+t)}\left(\frac{1}{2}t^2+e^t+1\right)$$

boladı.

Mısal 4. Quwatlılıǵı $f(t)=\sin t$ nızam boyınsha ózgeretuǵın teń ólshewli bólistirilgen jıllılıq deregine iye sheksiz uzınlıqtaǵı birtekli sterjendegi temperaturanıń ózgeriw processin anıqlań. Sterjendegi dáslepki temperatura $\varphi(x)=e^{-x^2}$.

Sheshiliwi. Sterjendegi temperaturanıń ózgeriw processi

$$u_t=a^2u_{xx}+\sin t,\quad |x|<+\infty,\ t>0,$$

$$u(x,0)=e^{-x^2},\ |x|<+\infty$$

nızam boyınsha anıqlanadı. Bul máseleniń sheshimi

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t-\tau,y)\sin\tau\,dy\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t,y)e^{-y^2}dy$$

formulası boyınsha anıqlanadı, bul jerde

$$G(x,t,y)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}$$

funkciyası jıllılıq ótkizgishlik teńlemesiniń fundamentallıq sheshimi. Dáslep

$$I_1=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}-y^2}dy$$

integralın esaplaymız. Al

$$\frac{(y-x)^2}{4a^2t}+y^2=\left[\sqrt{\frac{1+4a^2t}{4a^2t}}y-\frac{x}{\sqrt{4a^2t(1+4a^2t)}}\right]^2+\frac{x^2}{1+4a^2t}$$

bolǵanlıqtan

$$I_1=\frac{e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left[\sqrt{\frac{1+4a^2t}{4a^2t}}y-\frac{x}{\sqrt{4a^2t(1+4a^2t)}}\right]^2}dy=$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\sqrt{\frac{4a^2t}{1+4a^2t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds=\frac{e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}}{\sqrt{1+4a^2t}}$$

boladı, bul jerde

$$s = \sqrt{\frac{1+4a^2t}{4a^2t}}y - \frac{x}{\sqrt{4a^2t(1+4a^2t)}}$$

belgilew kiritilgen.

Endi $s = \dfrac{y-x}{2a\sqrt{t-\tau}}$ dep alıp, ekinshi integraldı esaplaymız:

$$I_2 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\sin\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}}dyd\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \sin\tau d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}ds = 1-\cos t.$$

Solay etip, máseleniń sheshimi

$$u(x,t) = 1-\cos t + \frac{e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}}{\sqrt{1+4a^2t}}$$

boladı.

Mısal 5. $u_t = u_{xx} + u_{yy} + \sin t \sin x \sin y$ teńlemesiniń

$$u(x,y,0) = 1$$

baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Sheshimdi $u(x,y,t) = \vartheta(x,y,t) + \omega(x,y,t)$ qosındısı túrinde izleymiz, bul jerde , aytayıq $\vartheta(x,y,t)$ funkciyasın

$$\vartheta_t = \vartheta_{xx} + \vartheta_{yy} + \sin t \sin x \sin y, \quad \vartheta(x,y,0) = 0,$$

al $\omega(x,y,t)$ funkciyasın bolsa

$$\omega_t = \omega_{xx} + \omega_{yy}, \quad \omega(x,y,0) = 1$$

Koshi máseleleriniń sheshimi bolatuǵınday etip tańlap alamız.

Bul máselelerdiń ekinshisi ushın sheshimnniń $\omega(x,y,t) = 1$ bolatuǵınlıǵı anıq. Al birinshisiniń sheshimin $\vartheta(x,y,t) = \varphi(t)\sin x \sin y$ kóriniste izleymiz. Bunnan belgisiz $\varphi(t)$ funkciyasın anıqlaw ushın $\vartheta(x,y,t) = \varphi(t)\sin x \sin y$ nı $\vartheta_t = \vartheta_{xx} + \vartheta_{yy} + \sin t \sin x \sin y$ teńlemesine qoyamız

$$\varphi'(t)\sin x \sin y = -2\varphi(t)\sin x \sin y + \sin t \sin x \sin y$$

hám bunnan $\varphi(t)$ funkciyasına qarata

$$\varphi'(t)+2\varphi(t)=\sin t, \quad \varphi(0)=0$$

túrindegi Koshi máselesine iye bolamız.

Sońǵı máseleniń sheshimi

$$\varphi(t)=\frac{1}{5}\left(2\sin t-\cos t+e^{-2t}\right)$$

bolǵanlıqtan

$$\vartheta(x,y,t)=\frac{1}{5}\left(2\sin t-\cos t+e^{-2t}\right)\sin x\sin y$$

boladı.

Solay etip izlenip atırǵan sheshim

$$u(x,y,t)=\vartheta(x,y,t)+\omega(x,y,t)=$$

$$=1+\frac{1}{5}\left(2\sin t-\cos t+e^{-2t}\right)\sin x\sin y$$

boladı.

Mısal 6. Tómendegi Koshi máselesin sheshiń

$$u_t=u_{xx}+2t^2, \quad u(x,t)\big|_{t=0}=2$$

Sheshiliwi.

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Puasson formulasın paydalansaq

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}2e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\tau^2}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau.$$

Al

$$I_1=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\begin{bmatrix}\xi-x=2a\sqrt{t}\cdot s\\ d\xi=2a\sqrt{t}\cdot ds\end{bmatrix}=\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}\cdot 2a\sqrt{t}ds=2,$$

$$I_2=\int_0^t 2\tau^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau=\begin{bmatrix}\xi-x=2a\sqrt{t-\tau}s,\\ d\xi=2a\sqrt{t-\tau}ds\end{bmatrix}=$$

$$=\int_0^t \frac{\tau^2 d\tau}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,2a\sqrt{(t-\tau)}ds=2\int_0^t \tau^2 d\tau=\frac{2t^3}{3}$$

bolǵanlıqtan sheshim

$$u(x,t)=I_1+I_2=2\left(1+\frac{t^3}{3}\right)$$

boladı.

Mısal 7. Tómendegi Koshi máselesin sheshiń

$$u_t=u_{xx}+\sin t,\quad u(x,0)=0$$

Sheshiliwi. Puasson formulası boyınsha

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi=\begin{bmatrix}\xi=x-2a\sqrt{t}\cdot s\\ d\xi=-2a\sqrt{t}\cdot ds\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}(-2a)\sqrt{t-\tau}ds=-\int_0^t d\tau=-t$$

Mısal 8. Tómendegi Koshi máselesin sheshiń

$$u_t=u_{xx}+t^2+e^{2t},\ u(x,0)=-4,\quad (-\infty<x<\infty)$$

Sheshiliwi. Puasson formulası boyınsha

$$u(x,t)=\frac{-1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi+\int_0^t \frac{(\tau^2+2\tau)d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi=$$

$$=\frac{-2}{a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}(-2a)\sqrt{t-\tau}ds+\int_0^t \frac{(\tau^2+2\tau)d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,2a\sqrt{t-\tau}dz=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}+\int_0^t\left(\tau^2+e^{2\tau}\right)d\tau=\frac{7}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{1}{2}e^{2t}.$$

§5. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas ma`selelerdi sheshiwdiń Grin funkciyası usılı

**5.1. Birtekli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas ma`selelerdi sheshiwdiń Grin funkciyası usılı.** Meyli uzınlıǵı $l$ ge teń bolǵan, qaptal betinen izolyaciyalanǵan jińishke sterjenniń ushlarındaǵı temperatura nol`ge, al da`slepki temperaturası bolsa $\varphi(x)$ qa teń bolsın. Onda sterjendegi jıllılıqtıń taralıw nızamı

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

$$u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{3}$$

túrindegi aralas ma`seleniń sheshimi menen anıqlanadı, bul jerde $\varphi(x)$ funkciyası birinshi ta`rtipli úzliksiz tuwındıǵa iye ha`m $x=0,\ x=l$ ushın nol`ge aylanatuǵın funkciya.

Sheshim Fur`e metodı boyınsha

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}\cdot \sin\frac{\pi k}{l}x \tag{4}$$

qatarı túrinde anıqlanadı, bul jerde

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}x dx.$$

A_k nıń bul ma`nislerin (4) degi ornına qoysaq, berilgen (1)-(3) aralas ma`seleniń sheshimine iye bolamız.

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(y)\sin\frac{\pi k}{l}y dy\right) e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}\cdot \sin\frac{\pi k}{l}x$$

Integrallaw ta`rtibin ózgercek

$$u(x,t)=\int_0^l \left(\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}\cdot \sin\frac{\pi k}{l}x \sin\frac{\pi k}{l}y\right)\varphi(y)dy.$$

Eger

$$G(x,y,t)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}\cdot \sin\frac{\pi k}{l}x \sin\frac{\pi k}{l}y$$

belgilew kiricek, onda berilgen (1)-(3) aralas ma`seleniń sheshimin

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,y,t)\varphi(y)dy$$

kóriniste jazıwǵa boladı. Bul sheshimdegi $G(x,y,t)$ funkciyası jıllılıq dereginiń jıldırımday waqıtta ta`sir etiwshi funkciyası yamasa jılllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın Grin funkciyası dep ataladı. Grin funkciyasınıń fizikalıq maǵanası tómendegishe: $G(x,y,t)$ funkciyası $t>0$ ushın sterjendegi jıllılıqtıń taralıw nızamın beredi, egerde $t=0$ waqıt momentinde nollik temperaturaǵa iye bolǵan sterjenniń $x=y$ tochkasına jıldırımday waqıt momentinde muǵdarı bir birlikke teń bolǵan jıllılıq muǵdarı berilse.

5.2. Nollik baslanǵısh sha`rtke iye birtekli emes jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas ma`selelerdi sheshiwdiń Grin funkciyası usılı. Meyli endi birtekli emes

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{5}$$

jıllılıq ótkizgishlik teńlemesiniń birtekli

$$u(x,0)=0 \tag{6}$$

$$u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0 \tag{7}$$

baslanǵısh ha`m shegaralıq sha`rtlerin qanaatlandırıwshı sheshimin tabıw ma`selesin qarastırayıq. Sheshimdi

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x \tag{8}$$

qatarı túrinde izleymiz, bul jerde $T_k(0)=0$. Endi $f(x,t)$ funkciyasın $\sin\frac{\pi k}{l}x$ menshikli funkciyalar boyınsha qatarǵa jayıp alıp

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{9}$$

bul jerde

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}x dx,$$

(8) ha`m (9) lardı (5) ge qoysaq

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k' + \left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 T_k - f_k(t)\right]\sin\frac{\pi k}{l}x = 0.$$

Bunnan

$$T_k' + \left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 T_k = f_k(t), \qquad k = 1,2,... \tag{10}$$

$$T_k(0) = 0, \qquad k = 1,2,... \tag{11}$$

túrindegi Koshi ma`selesine iye bolamız. (10) teńlemeniń (11) baslanǵısh sha`rtin qanaatlandırıwshı sheshimi

$$T_k' = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau$$

kórinisine iye boladı. Bunı (8) ge qoyıp (5)-(7) birtekli emes aralas ma`seleniń

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau \right] \sin\frac{\pi k}{l} x$$

túrindegi sheshimine iye bolamız. Integrallaw ta`rtibi menen summa orınların ózgercek ha`m $f_k(t)$ nıń joqarıdaǵı ma`nisin paydalansaq

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin\frac{\pi k}{l} x \sin\frac{\pi k}{l} y \right) f(y,\tau)\, dy$$

bolıp

$$G(x,y,t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin\frac{\pi k}{l} x \sin\frac{\pi k}{l} y$$

teńligin paydalansaq

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x,y,t-\tau) f(y,\tau)\, dy$$

boladı. Sheshimniń bunday kórinistegi jazılıwı tómendegi fizikalıq maǵanaǵa alıp keledi. Egerde $t = \tau$ waqıt momentinde nollik temperaturaǵa iye bolǵan sterjnniń $x = y$ tochkasına jıldırımday waqıt momentinde muǵdarı bir birlikke teń bolǵan jıllılıq muǵdarı berilse, onda $G(x,y,t-\tau)$ funkciyası $t > 0$ ushın sterjendegi jıllılıqtıń taralıw nızamın beredi.

5.3. Birtekli emes jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas ma`selelerdi sheshiwdiń Grin funkciyası usılı. Meyli endi birtekli emes

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{12}$$

jıllılıq ótkizgishlik teńlemesiniń birtekli

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{13}$$

$$u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0 \tag{14}$$

baslanǵısh ha`m shegaralıq sha`rtlerin qanaatlandırıwshı sheshimin tabıw ma`selesin qarastırayıq. Sheshimdi

$$u(x,t) = \vartheta(x,t) + \theta(x,t) \tag{15}$$

qosındı túrinde izleymiz, bul jerde $\vartheta(x,t)$ funkciyası

$$\vartheta_t = a^2 \vartheta_{xx},$$

$$\vartheta(0,t) = 0, \;\; \vartheta(l,t) = 0,$$

$$\vartheta(x,0) = \varphi(x)$$

aralas ma`seleniń sheshimi bolıp, bul sheshim Grin funkciyası ja`rdeminde

$$\vartheta(x,t) = \int_0^l G(x,y,t)\varphi(y)dy$$

kóriniste anıqlanadı, al $\theta(x,t)$ funkciyası bolsa

$$\theta_t = a^2 \theta_{xx} + f(x,t),$$

$$\theta(0,t) = 0, \;\; \theta(l,t) = 0,$$

$$\theta(x,0) = 0$$

aralas ma`seleniń sheshimi bolıp, bul sheshim Grin funkciyası ja`rdeminde

$$\theta(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x,y,t-\tau) f(y,\tau)dy$$

kóriniste anıqlanadı. Bul eki sheshimdi (15) degi orınlarına qoysaq, onda biz izlep atırǵan (12)-(14) aralas ma`seleniń sheshimi

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,y,t)\varphi(y)dy + \int_0^t d\tau \int_0^l G(x,y,t-\tau) f(y,\tau)dy$$

kóriniste anıqlanadı.

Qosımsha sorawlar

1. Parabolalıq tiptegi teńlemeler dep qanday teńlemelerge aytıladı?

2. Parabolalıq tiptegi teńlemeler fizikalıq maǵanası boyınsha qanday qubılıslardı súwretleydi?

3. Birtekli sterjendegi jıllılıqtıń taralıw teńlemesin keltirip shıǵarıń.

4. Jıllılıqtıń taralıw teńlemesi ushın baslanǵısh hám shegaralıq shártler qalay qoyıladı?

5. $u(0,t)=u(l,t)=0$ túrindegi shegaralıq shárt fizikalıq jaqtan neni ańlatadı?

6. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$ túrindegi shegaralıq shárt fizikalıq jaqtan neni ańlatadı?

7. $u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0$ túrindegi shegaralıq shárt fizikalıq jaqtan neni ańlatadı?

8. Jıllılıqtıń taralıw teńlemesi ushın qay waqıtta shegaralıq shártler qoyılmaydı?

9. Jıllılıqtıń taralıw teńlemesi ushın Koshi máselesi qay waqıtta qoyıladı?

10. Jıllılıqtıń taralıw teńlemesi ushın maksimum principi haqqındaǵı teoremanıń fizikalıq maǵanası qanday?

11. Jıllılıqtıń taralıw teńlemesi ushın aralas máseleler dep qanday máselege aytıladı?

12. Birtekli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılınıń ulıwma sxeması qanday?

13. Birtekli emes jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas

máseleler Fur`e usılı járdeminde qalay sheshiledi?

14. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas máselelerge Shturm-Liuvill máselesi qalay qoyıladı?

15. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın Koshi máselesi qalay sheshiledi?

16. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın Koshi máselesi Puasson integralı járdeminde qanday formula menen sheshiledi?

17. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesiniń fundamentallıq sheshimi dep qanday funkciyaǵa aytıladı?

18. Birtekli emes jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın Koshi máselesi Puasson integralı járdeminde qanday formula menen sheshiledi?

19. Eki ólshemli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın Koshi máselesi Puasson integralı járdeminde qanday formula menen sheshiledi?

20. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın Grin funkciyası qalay dúziledi?

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar

I. Birtekli sterjendegi jıllılıqtıń erkin taralıw teńlemesi ushın aralas máselelerdi Fur`e usılı járdeminde sheshiń

1) $u_t = a^2 u_{xx},\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = Ax;$

2) $u_t = a^2 u_{xx},\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x);$

3) $u_t = a^2 u_{xx},\ u_x(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = A(l-x);$

4) $u_t = a^2 u_{xx},\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = U;$

5) $u_t = a^2 u_{xx},\ u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ h > 0;$

6) $u_t = a^2 u_{xx},\ u_x(0,t) - hu(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = U,\ h > 0;$

7) $u_t = a^2 u_{xx},\ u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,\ u(x,0) = U,\ h > 0;$

8) $u_t = a^2 u_{xx},\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = 1 + \cos 3x;$

9) $u_t = a^2 u_{xx},\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = 4\sin\frac{2\pi}{l}x.$

II. Birtekli sterjendegi jıllılıqtıń májbúriy taralıw teńlemesi ushın aralas máselelerdi Fur`e usılı járdeminde sheshiń

1) $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u,\ u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = \varphi(x).$

2) $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u,\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l}.$

3) $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u,\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, u(x,0) = \varphi(x).$

4) $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u,\ u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(l,t) = 0, u(x,0) = U, h > 0.$

5) $u_t = a^2 u_{xx},\ u(0,t) = T, u(l,t) = U,\ u(x,0) = 0.$

6) $u_t = a^2 u_{xx} + f(x),\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = q, u(x,0) = \varphi(x).$

7) $u_t = a^2 u_{xx},\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = q,\ u(x,0) = Ax.$

8) $u_t = a^2 u_{xx},\ u(0,t) = T,\ u_x(l,t) + hu(l,t) = U,\ u(x,0) = 0,\ h > 0.$

9) $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin\dfrac{\pi x}{l},\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = 0.$

10) $u_t = a^2 u_{xx},\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = Ae^{-t},\ u(x,0) = T.$

11) $u_t = a^2 u_{xx},\ u_x(0,t) = At,\ u_x(l,t) = T,\ u(x,0) = 0.$

III. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın qoyılǵan tómendegi aralas ma`selelerdiń sheshimin tabıń

1) $u_t = u_{xx},\quad u_x(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ u(x,0) = x^2 - 1;$

2) $u_{xx} = u_t + u,\quad 0 < x < l,\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = 1;$

3) $u_t = u_{xx} - 4u,\quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = x^2 - \pi x;$

4) $u_t = u_{xx},\ u_x(0,t) = 1,\ u(l,t) = 0,\ u(x,0) = 0;$

5) $u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x,\ u_x(0,t) = u(\frac{\pi}{2},t) = 0,\ u(x,0) = 0;$

6) $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t,\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = t,\ u(x,0) = e^x \sin \pi x;$

7) $u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x,\quad u(0,t) = 0,\ u_x(\frac{\pi}{2},t) = 1,\ u(x,0) = x;$

8) $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x,$

$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 2\pi t,\ u(x,0) = 0;$

9) $u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t,\ u(0,t) = 1 + t,\ u(\pi,t) = 1 + t,$

$u(x,0) = 1 + e^x \sin 2x;$

10) $u_t - u_{xx} - u = xt(2 - t) + 2\cos t,$

$u_x(0,t) = t^2,\ u_x(\pi,\mathrm{t}) = t^2,\ u(x,0) = \cos 2x;$

11) $u_t - u_{xx} - 9u = 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2,\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 2\pi,$

$u(x,0) = x^2 + 2;$

12) $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1 - 3t) - 6x + 2\cos x \cos 2x,\ u_x(0,t) = 1,$

$u(\frac{\pi}{2},t) = t^2 + \frac{\pi}{2},\ u(x,0) = x;$

13) $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1 - 6t) - 2(t + 3x) + \sin 2x,\quad u_x(0,t) = 1,$

$u_x(\pi,t)=2\pi t+1,\ u(x,0)=x;$

14) $u_t=u_{xx}+4u_x+x-4t+1+e^{-2x}\cos^2\pi x,$

$u(0,t)=t,\ u(1,t)=2t,\ u(x,0)=0.$

IV. $T=\{(x,y,t):\ 0<x<p,\ 0<y<q,\ t>0\}$ oblastta tómendegi aralas ma`selelerdiń sheshimin tabıń

1) $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\ \ u(0,y,t)=u(p,y,t)=0,$

$u(x,0,t)=u(x,q,t)=0,\quad u(x,y,0)=xy;$

2) $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad u_x(0,y,t)=u(p,y,t)=0,$

$u(x,0,t)=u(x,q,t)=0,\quad u(x,y,0)=f(x,y);$

3) $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad u_x(p,y,t)+hu(p,y,t)=0,$

$u_y(x,0,t)=u(x,q,t)=0,\quad u(x,y,0)=f(x,y),$

4) $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t),\quad u(0,y,t)=0,\ u_x(p,y,t)=0,$

$u(x,0,t)=u(x,q,t)=0,\ u(x,y,0)=0;$

5) $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy})+A\sin\frac{3\pi x}{2p}\cos\frac{\pi y}{2q},\quad u(0,y,t)=0,\ u_x(p,y,t)=0,$

$u_y(x,0,t)=u(x,q,t)=0,\ u(x,y,0)=B\sin\frac{\pi x}{2p}\cos\frac{3\pi y}{2q};$

6) $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy})+A\sin\frac{\pi x}{p}\cos\frac{\pi y}{2q},\quad u(0,y,t)=u(p,y,t)=0,$

$u_y(x,0,t)=u_y(x,q,t)=0,\ u(x,y,0)=0.$

V. Birtekli sterjendegi jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın qoyılǵan Koshi ma`selesiniń sheshimin tabıń

1) $u_t=16u_{xx},\ u(x,t)|_{t=0}=8;$

2) $u_t=u_{xx}+2t,\ u(x,t)|_{t=0}=1;$

3) $u_t=u_{xx},\ \ u(x,t)|_{t=0}=e^{-x^2};$

4) $u_t=u_{xx}+\sin t,\ u(x,t)|_{t=0}=0;$

5) $u_t=u_{xx},\ u(x,t)|_{t=0}=\sin 2x;$

6) $u_t=u_{xx},\ u(x,t)|_{t=0}=\cos 3x;$

7) $u_t=u_{xx},\ u(x,t)|_{t=0}=chx;$

8) $u_t=u_{xx},\ u(x,t)|_{t=0}=sh2x;$

9) $u_t = u_{xx} + 3t^2, \quad u(x,t)\big|_{t=0} = \sin x;$

10) $u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x, \ u(x,t)\big|_{t=0} = \cos x;$

11) $u_t = u_{xx} + \sin t, \quad u(x,t)\big|_{t=0} = e^{-x^2};$

12) $u_t = u_{xx} + e^{t}\sin x, \ u(x,t)\big|_{t=0} = \sin x;$

13) $4u_t = u_{xx}, \ u(x,t)\big|_{t=0} = e^{2x-x^2};$

14) $u_t = u_{xx}, \ u(x,t)\big|_{t=0} = xe^{-x^2};$

15) $4u_t = u_{xx}, \ u(x,t)\big|_{t=0} = \sin xe^{-x^2}.$

VI. Birtekli plastinkadaǵı jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın qoyılǵan Koshi ma`selesiniń sheshimin tabıń

1) $u_t = u_{xx} + u_{yy}, \ u(x,y,t)\big|_{t=0} = \sin x \sin 2y;$

2) $u_t = u_{xx} + u_{yy}, \ u(x,y,t)\big|_{t=0} = \sin 2x \cos y;$

3) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + t\sin x \cos y, \ u(x,y,t)\big|_{t=0} = xy;$

4) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + xye^{-t}, \ u(x,y,t)\big|_{t=0} = 2x\sin y;$

5) $u_t = 4(u_{xx} + u_{yy}) + xt\sin y, \quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = x\cos y;$

6) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + e^{t}, \quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = \cos x \sin y;$

7) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + \sin t \sin x \sin y, \quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = 1;$

8) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + \cos t, \quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = xye^{-x^2-y^2};$

9) $8u_t = u_{xx} + u_{yy} + 1, \ u(x,y,t)\big|_{t=0} = e^{-(x-y)^2};$

10) $2u_t = u_{xx} + u_{yy}, \ u(x,y,t)\big|_{t=0} = \cos xy.$

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları

I. 1) $u(x,t) = \dfrac{2lA}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}e^{\left(-\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\sin\dfrac{k\pi}{l}x;$

2) $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}x,$ bul jerde

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}xdx;$$

3) $u(x,t)=\dfrac{8Al}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}x;$

4) $u(x,t)=U;$

5) $u(x,t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\dfrac{h^2+\lambda_k^2}{l(h^2+\lambda_k^2)+h}\int_0^1\varphi(\xi)\cos\lambda_k\xi d\xi\right\}e^{-a^2\lambda_k^2 t}\cos\lambda_k x;$

bul jerde $\lambda_k-\lambda tg\lambda l=h$ teńlemeniń oń koren`leri;

6) $u(x,t)=2U\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\dfrac{h-(-1)^k\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k\left[l(h^2+\lambda_k^2)+h\right]}\right\}e^{-a^2\lambda_k^2 t}\Phi_k(x);$ bul jerde λ_k degenimiz

$htg\lambda l=-\lambda$ teńlemeniń oń koren`leri, $\Phi_k(x)=\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x;$

7) $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x);$ bul jerde λ_k degenimiz

$ctg\lambda l=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda}{h}-\dfrac{h}{\lambda}\right)$ teńlemeniń oń koren`leri,

$$a_k=\frac{2U}{l(h^2+\lambda_k^2)+2h}\left(\frac{h}{\lambda_k}+\frac{h^2+\lambda_k^2}{2\lambda_k^2}\sin\lambda_k l\right);$$

8) $u(x,t)=1+e^{-9a^2t}\cos 3x;$ 9) $u(x,t)=4e^{-\left(\frac{2\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\dfrac{2\pi}{l}x.$

II. 1) $u(x,t)=\dfrac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^l\varphi(\xi)\sin\dfrac{k\pi}{l}\xi d\xi\right\}e^{-\left[\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2+\beta\right]t}\sin\dfrac{k\pi}{l}x;$

2) $u(x,t)=e^{-\left[\frac{a^2\pi^2}{4l^2}+\beta\right]t}\sin\dfrac{\pi}{2l}x;$ 3) $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\left[\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2+\beta\right]t}\cos\dfrac{k\pi}{l}x;$

bul jerde $a_0=\dfrac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)dx,\ \ a_k=\dfrac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\dfrac{k\pi}{l}xdx,\ \ k=1,2,3...$

4) $u(x,t)=2hU\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_k\left[l(h^2+\lambda_k^2)+h\right]}e^{-(a^2\lambda_k^2+\beta)t}\Phi_k(x),$ bul jerde λ_k degenimiz

$hctg\lambda l=\lambda$ teńlemeniń oń koren`leri, $\Phi_k(x)=\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x;$

5) $u(x,t)=\dfrac{(U-t)}{l}x+T+\dfrac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\left[(-1)^k U-T\right]e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\sin\dfrac{k\pi}{l}x;$

6) $u(x,t)=\omega(x)+\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\frac{(2k+1)^2a^2\pi^2}{4l^2}t}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}x$, bul jerde

$$\omega(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x\left[\int_0^y f(\xi)d\xi\right]dy+\frac{x}{a^2}\int_0^l f(\xi)d\xi+qx,$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\left[\varphi(x)-\omega(x)\right]\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}xdx;$$

7) $u(x,t)=qx+\dfrac{(A-q)l}{2}-\dfrac{4l(A-q)}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2a^2\pi^2}{l^2}t}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{l}x;$

8) $u(x,t)=\dfrac{U-ht}{1+lh}x+T+2\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{h^2+\lambda_k^2}{\lambda_k[l(h^2+\lambda_k^2)+h]}\left[T-\dfrac{(-1)^kU}{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}\right]e^{-a^2\lambda_k^2t}\sin\lambda_k x,$

bul jerde λ_k degenimiz $htg\lambda l=-\lambda$ teńlemeniń oń koren`leri;

9) $u(x,t)=\dfrac{1}{\beta+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2}\left[1-e^{-\left[\beta+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\right]t}\right]\sin\dfrac{\pi}{l}x;$

10) $u(x,t)=\dfrac{aA}{\cos\frac{l}{a}}e^{-t}\sin\dfrac{x}{a}+\dfrac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\dfrac{T}{\omega_k}+\dfrac{(-1)^kAa^2}{1-a^2\omega_k^2}\right]e^{-a^2\omega_k^2t}\sin\omega_k x,$

bul jerde $\omega_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}$, $\omega_k\neq\dfrac{1}{a}$, $k=0,1,...,$ Kórsetpe. Qoyılǵan ma`seleniń sheshimi tómendegi $u(x,t)=f(x)e^{-t}+\vartheta(x,t)$ kórinisinde izlenedi. Bul jerde $\vartheta(x,t)$ funkciya birtekli tenlemeni ha`m shegaralık sha`rtlerdi qanaatlandırıwshı funkciya.

11) $u(x,t)=-\dfrac{a^2A}{2l}t^2-\left(\dfrac{A}{2l}x^2-Ax+\dfrac{Al}{3}-\dfrac{a^2T}{l}\right)t+\dfrac{T}{2l}x^2-\dfrac{lT}{6}+$

$$+\frac{2l}{a^2\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\left\{Al^2-\left[Al^2+(-1)^kT(ak\pi)^2\right]e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2t}\right\}\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

III.1) $u(x,t)=\dfrac{32}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 t}\cos\dfrac{2n+1}{2}\pi x;$

2) $u(x,t)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)}e^{-\left(\frac{\pi^2(2n+1)^2}{l^2}+1\right)t}\sin\dfrac{2n+1}{l}\pi x;$

3) $u(x,t)=-\dfrac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}e^{-\left((2k+1)^2+4\right)t}\sin(2k+1)x;$

4) $u(x,t)=x-l+\dfrac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda_k^2 t}}{(2k+1)^2}\cos\lambda_k x;\ \lambda_k=\dfrac{\pi(2k+1)}{2l};$

5) $u(x,t)=t\cos x+\dfrac{1}{8}\left(e^{-8t}-1\right)\cos 3x;$ 6) $u(x,t)=xt+\sin\pi x e^{x-t-\pi^2 t};$

7) $u(x,t)=x+t\sin x+\dfrac{1}{8}\left(1-e^{-8t}\right)\sin 3x;$

8) $u(x,t)=tx^2+\dfrac{1}{4}\left(e^{4t}-1\right)+t\cos 2x;$

9) $u(x,t)=t+1+\left(1-e^{-t}\right)e^x\sin x+e^{x-4t}\sin 2x;$

10) $u(x,t)=xt^2+e^t+\sin t-\cos t+e^{-3t}\cos 2x;$

11) $u(x,t)=x^2+2e^{9t}+(2t-\sin 2t)\cos 3x;$

12) $u(x,t)=x+t^2+\dfrac{1}{5}\left(e^{5t}-1\right)\cos x+\dfrac{1}{3}\left(1-e^{-3t}\right)\cos 3x;$

13) $u(x,t)=x^2t+x+\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{C_{2k-1}}{(2k-1)^2-6}\left[1-e^{-6(2k-1)^2 t}\right]\sin(2k-1)x,$

$C_{2k-1}=\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k-3}\right);$

14) $u(x,t)=t(x+1)+e^{-2x}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{C_k}{k^2\pi^2+4}\left[1-e^{-\left(k^2\pi^2+4\right)t}\right]\sin k\pi x,$

$$C_k=\begin{cases}0, & k=2m,\\ \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{2}{2m-1}+\dfrac{1}{2m+1}+\dfrac{1}{2m-3}\right), & k=2m-1.\end{cases}$$

IV. 1) $u(x,y,t)=\sum_{k,n=1}^{\infty} a_{kn}e^{-a^2\omega_{kn}^2 t}\sin\frac{\pi k}{p}x\cdot\sin\frac{\pi n}{s}y,$ bul jerde

$$a_{kn}=\frac{4}{ps}\int_0^p x\sin\frac{\pi k}{p}xdx\int_0^s y\sin\frac{\pi n}{s}ydy=\frac{4(-1)^{n+k}}{nk\pi^2},\ \ \omega_{kn}^2=\frac{k^2\pi^2}{p^2}+\frac{n^2\pi^2}{s^2};$$

2) $u(x,y,t)=\sum_{k,n=1}^{\infty} a_{kn}e^{-a^2\omega_{kn}^2 t}\sin\frac{\pi k}{s}y\cdot\cos\frac{\pi(2n-1)}{2p}x,$

bul jerde

$$a_{kn}=\frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s f(x,y)\sin\frac{\pi k}{s}y\cos\frac{\pi(2n+1)}{2p}xdxdy,\quad \omega_{kn}^2=\frac{k^2\pi^2}{s^2}+\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4p^2};$$

3) $u(x,y,t)=\sum_{k,n=1}^{\infty} a_{kn}e^{-a^2\omega_{kn}^2 t}\sin\mu_k x\cdot\cos\frac{\pi(2n-1)}{2s}y,$ bul jerde

$$a_{kn}=\frac{4\left(h^2+\mu_k^2\right)}{s\left[p\left(h^2+\mu_k^2\right)+h\right]}\int_0^p\int_0^s f(x,y)\sin\mu_k x\cdot\cos\frac{\pi(2n-1)}{2s}ydxdy,$$

$$\omega_{kn}^2=\mu_k^2+\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4s^2},$$

μ_k degenimiz $htgp\mu=-\mu$ teńlemenin oń koren`leri;

4) $u(x,y,t)=\sum_{k,n=1}^{\infty} T_{kn}(t)\sin\frac{\pi ny}{s}\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2p},$ bul jerde

$$T_{kn}(t)=\frac{4}{ps}\int_0^t e^{-a^2\omega_{kn}^2(t-\tau)}d\tau\int_0^p\int_0^s f(\xi,\eta,\tau)\sin\frac{\pi n\eta}{s}\sin\frac{\pi(2k-1)}{2p}\xi d\xi d\eta,$$

$$\omega_{kn}^2=\frac{n^2\pi^2}{s^2}+\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4p^2};$$

5) $$u(x,y,t)=Be^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)t}\sin\frac{\pi x}{2p}\cos\frac{3\pi y}{2s}+\frac{4A}{a^2\pi^2\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)}\times$$

$$\times\left[1-e^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)t}\right]\sin\frac{3\pi x}{2p}\cos\frac{\pi y}{2s};$$

6) $u(x,y,t)=\dfrac{A}{a^2\pi^2\left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{4s^2}\right)-1}[e^{-t}-e^{-a^2\pi^2\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4s^2}\right)t}]\sin\dfrac{\pi x}{p}\sin\dfrac{\pi y}{2s}.$

V. 1) $u(x,t)=8;$ 2) $u(x,t)=t^2+1;$ 3) $u(x,t)=\dfrac{e^{-\frac{x^2}{1+4t}}}{\sqrt{1+4t}};$

4) $u(x,t)=1-\cos t;$ 5) $u(x,t)=e^{-4t}\sin 2x;$ 6) $u(x,t)=e^{-9t}\cos 3x;$

7) $u(x,t)=e^{t}\operatorname{ch}x;$ 8) $u(x,t)=e^{4t}\operatorname{sh}2x;$ 9) $u(x,t)=t^2+e^{-t}\sin x;$

10) $u(x,t)=(1+t)e^{-t}\cos x;$ 11) $u(x,t)=1-\cos t+(1+4t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{1+4t}};$

12) $u(x,t)=cht\sin x;$ 13) $u(x,t)=(1+t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{2x-x^2+t}{1+4t}};$

14) $u(x,t)=x\left(1+4t\right)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{1+4t}};$ 15) $u(x,t)=(1+t)^{-\frac{1}{2}}\sin\dfrac{x}{1+t}e^{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}}.$

VI. 1) $u(x,y,t)=e^{-5t}\sin x\sin 2y;$ 2) $u(x,y,t)=e^{-5t}\sin 2x\cos y;$

3) $u(x,y,t)=xy+\dfrac{1}{2}[t-\dfrac{1}{2}(1-e^{-2t})]\sin x\cos y;$

4) $u(x,y,t)=xy\left(1-e^{-t}\right)+2xe^{-t}\sin y;$ 5) $u(x,y,t)=\left[\dfrac{t}{4}-\dfrac{1}{16}+\dfrac{17}{16}e^{-4t}\right]x\sin y;$

6) $u(x,y,t)=e^{t}-1+e^{-2t}\sin y\cos x;$

7) $u(x,y,t)=1+\dfrac{1}{5}\sin x\sin y\left(2\sin t-\cos t+e^{-2t}\right);$

8) $u(x,y,t)=\sin t+\dfrac{xy}{\left(1+4t\right)^3}e^{-\frac{x^2+y^2}{1+4t}};$ 9) $u(x,y,t)=\dfrac{t}{8}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}e^{-\frac{\left(x-y\right)^2}{1+t}};$

10) $u(x,y,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cos\dfrac{xy}{1+t^2}e^{-\frac{t\left(x^2+y^2\right)}{2(1+t^2)}}.$

IV-BAP. ELLIPTIKALIQ TIPTEGI TEŃLEMELER

Tayanısh sózler: Laplas teńlemesi, Puasson teńlemesi, Eyler teńlemesi, Dirixle máselesi, Neyman máselesi, Shturm-Liuvill máselesi, Garmonikalıq funkciyalar, Grin formulaları, fundamentallıq sheshim, menshikli mánisler, menshikli funkciyalar, Fur`e usılı, Fur`e qatarı,

Tiykarǵı túsinikler hám belgilewler

Laplas teńlemesi $-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$ *teńlemesi* n *ólshemli Laplas teńlemesi dep ataladı.*

Tegisliktegi Laplas teńlemesiniń fundamentallıq sheshimi–$v(x,y)=\ln\frac{1}{r}$, *bul jerde* r *degenimiz tegisliktiń* M *tochkasınan* M_0 *tochkasına shekemgi aralıq*

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\ .$$

Keńisliktegi Laplas teńlemesiniń fundamentallıq sheshimi– $v(x,y,z)=\frac{1}{r}$, *bul jerde* r *degenimiz keńisliktiń* M *tochkasınan* M_0 *tochkasına shekemgi aralıq*

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\ .$$

Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesi – D *oblastta Laplas teńlemesin qanaatlandıratuǵın hám onıń* S *shegarasında*

$$u\big|_S=f(M)$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(M)$ *funkciyasın tabıw máselesi.*

Laplas teńlemesi ushın Neyman máselesi – D *oblastta Laplas teńlemesin qanaatlandıratuǵın hám onıń* S *shegarasında*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=f(M)$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(M)$ *funkciyasın tabıw máselesi.*

Puasson teńlemesi ushın Dirixle máselesi – D *oblastta Puasson teńlemesin qanaatlandıratuǵın hám onıń* S *shegarasında*

$$u\big|_S=f(M)$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(M)$ *funkciyasın tabıw* *máselesi.*

Garmonikalıq funkciyalar – Laplas teńlemesiniń sheshimi bolıp tabılatuǵın funkciya.

Birinshi Grin formulası – Ω bólek-tekis S beti menen shegaralanǵan tuyıq oblastta berilgen úzliksiz hám ekinshi tártipke shekem úzliksiz dara tuwındılarǵa iye $u(M)$ hám $\vartheta(M)$ funkciyaları ushın

$$\iiint_{\Omega} \vartheta \Delta u dV + \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) dV = \iint_{S} \vartheta \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Ekinshi Grin formulası – birinshi Grin formulasın túrlendiriwden payda bolatuǵın

$$\iiint_{\Omega} \left(\vartheta \Delta u - u \Delta \vartheta \right) dV = \iint_{S} \left(\vartheta \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right) ds.$$

Garmonikalıq funkciyanıń integrallıq kórinisi – Grin formulasınan $\vartheta(M) = \dfrac{1}{r}$ *ushın*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) ds.$$

Elliptikalıq tiptegi teńlemeler teoriyası – dara tuwındılı differenciallıq teńlemeler teoriyasınıń eń kúshli rawajlanǵan bólimleriniń biri bolıp tabıladı.

Elliptikalıq tiptegi teńlemeler arasında eń kóp qarastırılatuǵın teńlemeler qatarına Laplas hám Puasson teńlemeleri jatadı. Zaryad bolmaǵan jaǵdayda eki ólshemli oblasttaǵı elektr maydanınıń potencialı

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \ (x, y) \in D \tag{1}$$

Laplas teńlemesin qanaatlandıradı. Bul teńleme 1752 jılları Eyler jumıslarında ushırasıp, sońınan P. Laplas tárepinen 1785 jılları baspadan basıp shıǵarıldı. $\rho(x, y)$ tıǵızlıq penen bólistirilgen

zaryadqa iye oblastta S. Puasson bul teńlemeniń ulıwmalasqan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y), \ \ (x, y) \in D \tag{2}$$

kórinisin aladı.

(2) teńleme Puasson teńlemesi dep ataladı. (1) hám (2) teńlemeler Eyler, Laplas hám Puasson tárepinen qarastırılǵan teńlemelerdiń arasındaǵı eń ápiwayı formaları bolıp, bul teńlemeler elliptikalıq tiptegi teńlemelerdiń mısalları bolıp tabıladı.

Laplas teńlemesine alıp kelinetuǵın ápiwayı máselelerdiń biri oblast shegarasında potencialdıń bólistiriliwi berilgen bolsa, onda eki ólshemli bazı-bir D oblastında elektr maydanınıń potencialın tabıwdan ibarat. Matemaikalıq kóz qarastan qaraǵanda bul másele tómendegishe talqılanadı: x hám y boyınsha eki ret differenciallanıwshı $u(x,y)$ funkciyasın tabıń, egerde bul funkciya D oblastınıń ishinde (1) teńlemeni qanaatlandırıp, shegarasında

$$\lim_{(x,y)\to(\xi,\eta)} u(x,y) = \varphi(\xi,\eta), \ \ (x,y)\in D, \ \ (\xi,\eta)\in\partial D$$

teńligin qanaatlandırsa, bul jerde $\varphi(\xi,\eta)$ funkciyası D oblastınıń ∂D shegarasında berilgen funkciya.

Bazı-bir D oblastında (1) teńlemeni qanaatlandıratuǵın funkciya, usı oblastta garmonikalıq funkciya dep ataladı.

Bunday shegaralıq máselelerdi sheshiwdiń ulıwmalıq metodlarınıń ishindegi eń qollanımlı metodlarınıń biri ózgeriwshilerdi ajıratıw metodı bolıp tabıladı. Bul metod baslanǵısh kórinisinde tardıń kishkene terbelis teńlemesi ushın dara sheshimdi tabıw payıtında Teylor tárepinen qollanılǵan bolsa da, al keń maǵanada J.B.Fur`e tárepinen qollanıladı. Fur`e metodı menen baylanıslı Fur`e qatarı, menshikli mánis, menshikli funkciya túsinikleri matematikalıq fizikanı rawajlandırıwda fundamentallıq mániske iye bolıp qaladı.

§1. Elliptikalıq tiptegi teńlemelerge alıp kelinetuǵın fizikalıq máseleler. Shegaralıq máselelerdiń qoyılıwı

Eger jıllılıq deregi bolmasa, onda úsh ólshemli denede jıllılıqtıń taralıw teńlemesi

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

bolar edi. Meyli, deneniń ishki (x, y, z) tochkasındağı temperatura ornıqlı bolsın, yağnıy waqıttıń ótiwi menen temperatura ózgermeytuğın bolsın. Onda $u_t = 0$ bolıp, joqarıdağı teńleme

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

túrine iye boladı. Bul teńleme úsh ólshemli Laplas teńlemesi dep ataladı hám ol birtekli denedegi jıllılıqtıń ornıqlı taralıw teńlemesi bolıp esaplanadı.

Eger denede jıllılıq deregi bar bolsa, onda Laplas teńlemesi birtekli emes

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$$

túrine iye boladı hám ol Puasson teńlemesi dep ataladı.

Endi Laplas yamasa Puasson teńlemelerin qanaatlandıratuğın $u(x, y, z)$ sheshimin tabıw ushın baslanğısh shárttiń keregi bolmay qaladı, yağnıy shegaralıq shárttiń ózi jeterli boladı.

Laplas teńlemesi ushın tiykarğı shegaralıq máseleler menen tanısayıq. Meyli tegis δ beti ξ_3 keńisligin eki D^+ hám D^- oblastlarğa bólsin. Bul jerde D^+ oblasttıń ishki, D^- bolsa sırtqı bólekleri.

D^+ oblastta Laplas teńlemesin qanaatlandıratuğın hám onıń δ shegarasında

$$u\big|_\delta = f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuğın $u(x)$ funkciyasın tabıw máselesi Laplas teńlemesi ushın ishki Dirixle máselesi dep ataladı.

D^- oblastta Laplas teńlemesin qanaatlandıratuğın hám onıń δ shegarasında (1) shegaralıq shártin qanaatlandıratuğın $u(x)$ funkciyasın tabıw máselesi Laplas teńlemesi ushın sırtqı Dirixle máselesi dep ataladı.

D^+ oblastta Laplas teńlemesin qanaatlandıratuğın δ shegarasında bolsa

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\delta = f(x) \tag{2}$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuğın $u(x)$ funkciyasın tabıw máselesi Laplas teńlemesi ushın ishki Neyman máselesi dep ataladı, bul jerde ν degenimiz δ bettegi sırtqı normal.

D^{-} oblastta Laplas teńlemesin qanaatlandıratuǵın, δ shegarasında bolsa (2) shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(x)$ funkciyasın tabıw máselesi Laplas teńlemesi ushın sırtqı Neyman máselesi dep ataladı.

§2. Garmonikalıq funkciyalar hám olardıń qásiyetleri

2.1. Grin formulaları. Ostrograd formulasınıń tikkeley saldarı bolatuǵın

$$\iiint_{\Omega} \vartheta \Delta u dV + \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) dV = \iint_{S} \vartheta \frac{\partial u}{\partial n} ds \tag{1}$$

teńligin qarastırayıq, bul jerde Ω bólek-tekis S beti menen shegaralanǵan bazı-bir úsh ólshemli keńisliktegi tuyıq oblast`, al $u(M)$ hám $\vartheta(M)$ funkciyaları usı Ω oblastta berilgen úzliksiz hám ekinshi tártipke shekem úzliksiz dara tuwındılarǵa iye funkciyalar.

Eger (1) de u hám ϑ lardıń orınların almastırıp, payda bolǵan ańlatpanı usı (1) den ayırsaq

$$\iiint_{\Omega} (\vartheta \Delta u - u \Delta \vartheta) dV = \iint_{S} \left(\vartheta \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right) ds \tag{2}$$

teńligi hasıl boladı, bul jerde $\vec{n}$ degenimiz S betine júrgizilgen sırtqı normal. Eger dara jaǵdayda $\vartheta(M) \equiv 1$ dep alsaq, onda (2) den

$$\iiint_{\Omega} \Delta u dV = \iint_{S} \frac{\partial u}{\partial n} ds \tag{3}$$

túrindegi onıń dara jaǵdayı payda boladı.

(1) hám (2) formulalar Grin formulaları dep ataladı hám bul formulalar Laplas teńlemesiniń teoriyaların dúziwde sheshiwshi rol` atqaradı. Bul formula járdeminde sheshiletuǵın ayırım mısallardı kórip óteyik. Aytayıq, $u(M)$ funkciyası Ω oblastta Laplas teńlemesin qanaatlandırsın, yaǵnıy $\Delta u = 0$ bolsın. Eger $\vartheta(M) \equiv 1$ dep alsaq, onda (3) den

$$\iint_{S} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \tag{4}$$

teńligi hasıl boladı. Solay etip, Laplas teńlemesin qanaatlandıratuǵın hár qanday funkciya ushın (4) teńlik orınlı boladı.

Meyli Laplas teńlemesi ushın tómendegi Neyman máselesin qarastırayıq:

$$\Delta u = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 1$$

(4) formula járdeminde bul máseleniń sheshimge iye bolmaytuǵınlıǵın jeńil kórsetiwge boladı. Haqıyqatında da (4) formula bul jaǵdayda

$$\iint_S ds = 0$$

kóriniske iye boladı, al bul teńliktiń orınlanıwı múmkin emes, sebebi S betiniń maydanı nol`ge teń bolmaydı.

2.2. Sızıqlı funkciyalar hám olardıń qásiyetleri. Garmonikalıq funkciyalardıń integrallıq kórinisleri. Meyli ápiwayı elementar $u(x) = kx + b$ funkciyasın qarastırayıq. Bul funkciyanıń xarakterli qásiyetleriniń biri, onıń úzliksiz ekinshi tártipli tuwındısı nol`ge aylanadı, yaǵnıy $u''(x) = 0$. Solay etip sızıqlı funkciya bir ólshemli Laplas teńlemesiniń sheshimi bolıp esaplanadı. Sonıń menen birge bul funkciyanıń basqada qásiyetlerin jeńil qabıl etiwge boladı.

a). Sızıqlı funkciya óziniń eń kishi, eń úlken mánislerine $[c;d]$ shekli aralıqtıń ishinde emes, al onıń shegaralarında erisedi $(u(x) \neq const)$.

b). Sızıqlı funkciya $[c;d]$ kesindisiniń ushlarındaǵı mánisleri arqalı bir mánisli anıqlanadı, yaǵnıy, onıń $x = c$ hám $x = d$ tochkadaǵı mánislerin bile tura qálegen $x \in [c;d]$ tochkadaǵı mánisin anıqlawǵa boladı. Haqıyqatında da

$$u(x) = \frac{d-x}{d-c}u(c) + \frac{x-c}{d-c}u(d).$$

b). Sızıqlı funkciyanıń $[c;d]$ kesindisindegi grafiginiń shegaralarına eki baǵıtta sırtqı $\vec{n}$ normalın júrgiziwge boladı. Bul baǵıtlardaǵı birinshi tártipli tuwındılarınıń qosındısı nol`ge teń bolatuǵınlıǵın jeńil túsiniwge boladı.

g). Sızıqlı funkciyanıń qálegen $[c;d]$ kesindisiniń ortasındağı mánisi onıń ushlarındağı mánisleriniń arifmetikalıq ortasına teń, yağnıy $[c;d]$ kesindisiniń ushlarındağı mánisleriniń qosındısınıń yarımına teń boladı:

$$u\left(\frac{c+d}{2}\right)=\frac{u(c)+u(d)}{2}=\frac{1}{d-c}\int_c^d u(x)dx.$$

Bunday qásiyetlerge birtekli Laplas teńlemesiniń sheshimi bolıp esaplanıwshı qálegen funkciyalar erisedi. Biz tómende eki hám úsh ózgeriwshili usınday funkciyalardıń qásiyetlerin úyrenemiz.

Anıqlama. $u(x,y,z)$ funkciyası shekli Ω oblastta úzliksiz differenciallanıwshı bolıp, Laplas teńlemesin qanaatlandırsa, onda ol usı oblastta garmonikalıq funkciya dep ataladı. $u(x,y,z)$ funkciyası sheksiz oblastta garmonikalıq funkciya dep ataladı, eger ol úzliksiz differenciallanıwshı, Laplas teńlemesin qanaatlandırıwshı bolıwı menen birge $M(x,y,z)$ tochkası sheksizlikke umtılǵanda onıń mánisi nol`ge umtılsa.

Mısallar 1). $u(x,y,z)\equiv 1$ funkciyası shekli oblastta garmonikalıq, sheksiz oblastta garmonikalıq emes.

2) $u(x,y)=x^2-y^2$ shekli oblastta garmonikalıq, $u(x,y)=x^2+y^2$ bolsa garmonikalıq emes.

Meyli $M(x,y,z)$ hám $M_0(x_0,y_0,z_0)$ lar úsh ólshemli keńisliktiń eki tochkası bolsın. Olar arasındağı aralıqtı $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ dep belgileymiz. Endi

$$v(M)=v(x,y,z)=\frac{1}{r} \tag{5}$$

funkciyasın qarastıramız, bul jerde M_0 tochkası fikserlengen.

Teorema. (5) formula menen anıqlanıwshı $v(x,y,z)$ funkciyası M_0 tochkası jatpaytuğın qálegen oblastta garmonikalıq funkciya boladı.

Bul teoremanı dálillew ushın $v(M)=\frac{1}{r}$ funkciyasınıń Laplas teńlemesin qanaatlandıratuğınlığın kórsetiw jetkilikli. Ol M tochkasınan M_0 tochkasına shekemgi aralıqtı anıqlawshı r diń funkciyası bolıp, Laplas teńlemesin qanaatlandıradı hám ol Laplas teńlemesiniń fundamentallıq sheshimi dep ataladı.

Máselen úsh ólshemli Laplas teńlemesiniń fundamentallıq sheshimi $v(M)=v(x,y,z)=\frac{1}{r}$, eki ólshemli Laplas teńlemesiniń fundamentallıq sheshimi $v(M)=v(x,y)=\ln\frac{1}{r}$ boladı, bul jerde $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Teorema. Eger $u(x,y,z)$ funkciyası tuyıq Ω oblastta birinshi hám ekinshi tartipli úzliksiz dara tuwındılarǵa iye bolsa, onda

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u(M)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)ds-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_\Omega\frac{1}{r}\Delta u(M)dV \tag{6}$$

formulası orınlı boladı, bul jerde r degenimiz Ω oblasttıń ishki tochkası bolǵan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ dan $M(x,y,z)$ ge shekemgi aralıq, $\vec{n}$ bolsa Ω oblasttıń S betine júrgizilgen sırtqı normal.

Bul formula (2) Grin formulasınan $\vartheta(M)=\frac{1}{r}$ ushın bazı-bir esaplawlardan soń kelip shıǵadı. Bul formula $u(x,y,z)$ funkciyasınıń integrallıq kórinisin beredi. Eger u funkciyası garmonikalıq bolsa, onda $\Delta u=0$ bolıp, (6) formula

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)ds \tag{7}$$

túrine iye boladı.

Teorema. Meyli $u(M_0)\in \mathrm{C}^2\left(\bar{\Omega}\right)$ funkciyası bólek-tegis S shegarasına iye shegaralanǵan Ω oblastta Laplas teńlemesin qanaatlandırsın. Onda bul funkciyanı usı oblasttıń hár qanday ishki $M_0\in\Omega$ tochkalarında (7) formula arqalı kórsetiwge boladı.

Eger u funkciyası eki ózgeriwshili garmonikalıq bolsa hám eki ólshemli Laplas teńlemesiniń $\vartheta = \ln\frac{1}{r}$ fundamentallıq sheshimin paydalansaq, onda (6) formula

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_L \left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n} \right) dl - \frac{1}{2\pi}\iint_D \ln\frac{1}{r}\Delta u ds \tag{8}$$

túrine iye bolıp, bul formula $u(x, y)$ funkciyasınıń integrallıq kórinisin beredi.

Eger u funkciyası eki ózgeriwshili garmonikalıq bolsa (8) formula

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_L \left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n} \right) dl \tag{9}$$

túrine iye boladı.

Egerde u garmonikalıq funkciyanıń hám onıń normal tuwındısınıń bazı-bir tuyıq oblast` shegarasındaǵı mánisleri belgili bolsa, onda (7) hám (9) formulalar usı u funkciyanıń ishki M_0 tochkadaǵı mánisin esaplawǵa múmkinshilik beredi. Sonlıqtan bul formulalar kópshilik payıtları Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesin sheshiw payıtında kóp qollanıladı.

Endi garmonikalıq funkciyalardıń qásiyetlerine toqtayıq:

Oblasttıń shegarasında garmonikalıq funkciyadan normal boyınsha alınǵan tuwındıń integralı nol`ge teń boladı, yaǵnıy

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

Tuyıq Ω oblastta garmonikalıq, al S shegarasında bir-birine teń bolatuǵın eki garmonikalıq funkciya Ω oblasttıń hámme tochkalarında bir-birine teń boladı.

Teorema (orta mánis haqqındaǵı). Meyli $B_R(M_0)$radiusı R ge teń bolǵan, orayı $M_0 \in \Omega$ tochkada bolǵan Ω oblastta tolıǵı menen jatatuǵın shar bolsın hám sonıń menen birge $u(M_0) \in C^2(\overline{\Omega})$ funkciyası Ω oblastta garmonikalıq funkciya bolsın. Onda bul funkciyanıń shar orayındaǵı mánisi usı shardıń S_R sferası boyınsha alınǵan ortasha mánisine teń boladı, yaǵnıy

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R} u(M)dS\,.$$

Teorema. Meyli $u(M_0)\in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ funkciyası bólek-tegis S shegarasına iye shegaralanǵan Ω oblastta Laplas teńlemesin qanaatlandırsın. Onda bul funkciya óziniń eń úlken hám eń kishi mánislerine usı oblasttıń shegarasında erisedi, yaǵnıy $M_1\le u(M_0)\le M_2$, bul jerde

$$M_1=\min_{M\in S} u(M),\quad M_2=\max_{M\in S} u(M).$$

§3. Tuwrı múyeshli oblastta Laplas hám Puasson teńlemeleri ushın shegaralıq máseleler

3.1.Tuwrı múyeshli oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler. Meyli $D=\{(x,y), x\in[0,p], y\in[0,q]\}$ tuwrı múyeshlikte

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{1}$$

Laplas teńlemesiniń

$$u(0,y)=\xi(y),\ u(p,y)=\eta(y), \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u(x,q)=\psi(x) \tag{3}$$

shegaralıq shártin qanaatlantıratuǵın sheshimin tabıw máselesin qarastırıw kerek bolsın. Meyli φ,ψ,ξ,η funkciyaları úzliksiz hám tuwrı múyeshliktiń tóbelerinde olardıń mánisleri bir-birine teń bolsın, yaǵnıy

$$\varphi(0)=\xi(0),\ \varphi(p)=\eta(0),\ \psi(0)=\xi(q),\ \psi(p)=\eta(q)\,.$$

Sheshimdi

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y) \tag{4}$$

qosındısı túrinde izleymiz. (4) ni (1)-(3) lerge qoyıp v funkciyasın

$$\Delta v\equiv v_{xx}+v_{yy}=0, \tag{5}$$

$$v(x,0)=\varphi(x),\ v(x,q)=\psi(x)\,,$$

$$\nu(0,y)=0,\ \nu(p,y)=0$$

máselesiniń, al $w(x,y)$ funkciyasın bolsa

$$\Delta w = w_{xx}+w_{yy}=0, \tag{6}$$

$$w(x,0)=0,\ w(x,0)=0,$$

$$w(0,y)=\xi(y),\ w(p,y)=\eta(y)$$

máselesiniń sheshimi bolatuǵınday etip tańlap alamız. (5) shegaralıq máseleniń sheshimin

$$v(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$$

kóbeymesi túrinde izleymiz hám

$$X''+\lambda^2 X=0, \quad X(0)=X(p)=0 \tag{7}$$

$$Y''-\lambda^2 Y=0 \tag{8}$$

$X(x)$ funkciyası ushın (7) túrindegi Shturm-Liuvill máselesine iye bolamız. Onıń menshikli mánisleri hám menshikli funkciyaları

$$\lambda_k=\frac{\pi k}{p}, \quad X_k(x)=\sin\frac{\pi k}{p}x, \ \ k=1,2,...$$

boladı. (8) niń ulıwma sheshimi

$$Y_k(y)=A_k ch\frac{\pi k}{p}y+B_k sh\frac{\pi k}{p}y$$

bolıp, bulardı (5) degi orınlarına qoyıp, superpoziciya principin qollansaq (5) máseleniń

$$v(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k ch\frac{\pi k}{p}y+B_k sh\frac{\pi k}{p}y\right)sin\frac{\pi k}{p}x \tag{9}$$

túrindegi A_k, B_k parametrlerine baylanıslı sheshimine iye bolamız. (7) shártten

$$v(x,0)=\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k sin\frac{\pi k}{p}x,$$

$$v(x,q)=\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k sh\frac{\pi k}{p}q+B_k sh\frac{\pi k}{p}q\right)sin\frac{\pi k}{p}x$$

bolıp, bunnan

$$A_k = \frac{2}{p}\int_0^p \varphi(x) sin\frac{\pi k}{p} x\,dx,$$

$$B_k ch\frac{\pi k}{p} q + B_k sh\frac{\pi k}{p} q = \frac{2}{p}\int_0^p \varphi(x) sin\frac{\pi k}{p} x\,dx$$

boladı. Bul sistemadan A_k hám B_k lardı anıqlap, olardı (9) dağı orınlarına qoysaq, (5) shegaralıq máseleniń sheshimine iye bolamız. Bul sxemanı (6) shegaralıq másele ushın qaytalasaq, onda $w(x, y)$ tiń

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k ch\frac{\pi k}{q} x + D_k sh\frac{\pi k}{q} x \right) sin\frac{\pi k}{q} y \tag{10}$$

túrindegi mánisine iye bolamız, bul jerde

$$\begin{cases} \tilde{N}_k = \frac{2}{q}\int_0^q \xi(y) sin\frac{\pi k}{q} y dy, \\ C_k ch\frac{\pi k}{q} p + D_k sh\frac{\pi k}{q} p = \frac{2}{q}\int_0^q \eta(y) sin\frac{\pi k}{q} y\,dy. \end{cases}$$

(9) formula járdeminde tabılǵan $v(x, y)$ tıń hám (10) formula járdeminde tabılǵan $w(x, y)$ lerdiń mánislerin (4) degi orınlarına qoyıp, (1)-(3) shegaralıq máseleniń sheshimine iye bolamız.

Mısal 1. $D = \{(x, y) : 0 \le x \le p,\ 0 \le y \le q\}$ tuwrı múyeshliginde temperaturanıń ornıqlı taralıwın anıqlań, egerde oblasttıń shegarasındaǵı temperatura tómendegishe berilgen bolsa:

$$u(x,0) = u(x,q) = 0,\ 0 < x < p, \tag{11}$$

$$u(0, y) = y(q - y),\ u(p, y) = \sin\frac{3\pi y}{q},\ 0 < y < q. \tag{12}$$

Sheshiliwi. Temperaturanıń ornıqlı taralıwın anıqlaw, berilgen shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{13}$$

Laplas teńlemesin sheshiwge alıp kelinedi.

Sheshimdi

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$$

kóbeymesi túrinde izleymiz. Bul sheshimdi teńlemedegi orınlarına qoyıp, ózgeriwshilerin ajıratıp, $Y(y)$ ke qarata menshikli mánisleri hám menshikli funkciyaları sáykes

$$\lambda_k=\frac{\pi k}{q},\ Y_k(y)=\sin\frac{\pi k}{q}y,\ k=1,2,...$$

bolatuǵın

$$Y''(y)+\lambda^2 Y(y)=0,\ \ Y(0)=Y(q)=0$$

Shturm-Liuvill máselesine, al $X(x)$ qa qarata

$$X_k''(x)-\left(\frac{\pi k}{q}\right)^2 X_k(x)=0$$

teńlemesine iye bolamız.

Sońǵı teńlemeniń sheshimi

$$X_k(x)=A_k e^{\frac{\pi k}{q}x}+B_k e^{-\frac{\pi k}{q}x}$$

bolıp, bul tabılǵan $X_k(x)$ hám $Y_k(y)$ lardıń mánislerin sheshimniń $u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$ kórinisindegi orınlarına aparıp qoysaq

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{\pi k}{q}x}+B_k e^{-\frac{\pi k}{q}x}\right)\sin\frac{\pi k}{q}y$$

túrindegi (11) shegaralıq shártti qanaatlandıratuǵın (13) teńlemeniń sheshimine iye bolamız. Bul sheshim (12) shegaralıq shártti qanaatlandırıw ushın

$$u(0,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k+B_k\right)\sin\frac{\pi k}{q}y=y(q-y),$$

$$u(p,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{\pi k}{q}p}+B_k e^{-\frac{\pi k}{q}p}\right)\sin\frac{\pi k}{q}y=\sin\frac{3\pi y}{q}$$

sisteması orınlı bolıwı kerek. Bul sistemadan

$$\begin{cases} A_k+B_k=\alpha_k, \\ A_k e^{\frac{\pi k}{q}p}+B_k e^{-\frac{\pi k}{q}p}=\beta_k \end{cases}$$

sisteması kelip shıǵadı, bul jerde

$$\alpha_k = \frac{2}{q}\int_0^q y(q-y)\sin\frac{\pi k}{q}y dy = \frac{4q^2}{\pi^3 k^3}\left(1-(-1)^k\right),$$

$$b_3 = 1;\ b_k = 0,\ k \neq 3.$$

Sońǵı sistemanı A_k hám B_k larǵa qarata sheshsek

$$A_k = \frac{\beta_k - \alpha_k e^{-\frac{\pi k}{q}p}}{2sh\frac{\pi k}{q}p},\quad B_k = \frac{\alpha_k e^{\frac{\pi k}{q}p} - \beta_k}{2sh\frac{\pi k}{q}p}$$

hám bulardı orınlarına qoysaq, sheshim

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k sh\frac{\pi k}{q}x - \alpha_k sh\frac{\pi k}{q}(x-p)\right)\frac{\sin\frac{\pi k}{q}y}{\sin\frac{\pi k}{q}p}$$

yamasa

$$u(x,y) = \frac{sh\frac{3\pi}{q}x}{sh\frac{\pi k}{q}p}\sin\frac{3\pi}{q}y - \frac{8q^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi k}{q}y}{(2k+1)^3}\frac{\mathrm{sh}\frac{\pi k}{q}(x-p)}{\mathrm{sh}\frac{\pi k}{q}p}$$

kóriniske iye boladı.

Mısal 2. $D = \{(x,y): 0 \le x \le p,\ 0 \le y < \infty\}$ yarım jolaǵındaǵı temperaturanıń ornıqlı taralıwın anıqlań, egerde oblasttıń shegarasındaǵı temperatura tómendegishe berilgen bolsa:

$$u(0,y) = u(p,y) = 0,\ 0 < x < p,$$

$$u(x,0) = \frac{1}{p^2}x(p-x),\quad u(x,\infty) = 0,\ 0 < y < \infty.$$

Sheshiliwi. Temperaturanıń ornıqlı taralıwın anıqlaw, berilgen shegaralıq shártlerdi qanaatlandıratuǵın

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Laplas teńlemesin sheshiwge alıp kelinedi.

Sheshimdi

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$$

kóbeymesi túrinde izleymiz. Bul sheshimdi teńlemedegi orınlarına qoyıp, ózgeriwshilerin ajıratıp, $X(x)$ qa qarata menshikli mánisleri hám menshikli funkciyaları sáykes

$$\lambda_k=\frac{\pi k}{p},\ X_k(x)=\sin\frac{\pi k}{p}x,\ k=1,2,...$$

bolatuǵın $X''+\lambda^2X=0,\ X(0)=X(p)=0$ Shturm-Liuvill máselesine, al $Y(y)$ qa qarata

$$Y_k''(y)-\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2Y_k(y)=0$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńlemeniń sheshimi

$$Y_k(y)=A_ke^{\frac{\pi k}{p}y}+B_ke^{-\frac{\pi k}{p}y}$$

bolıp, bul tabılǵan $X_k(x)$ hám $Y_k(y)$ lardıń mánislerin sheshimnniń $u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$ kórinisindegi orınlarına aparıp qoysaq

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_ke^{\frac{\pi k}{p}y}+B_ke^{-\frac{\pi k}{p}y}\right)\sin\frac{\pi k}{p}x$$

túrindegi berilgen teńlemeniń x boyınsha shegaralıq shártlerin qanaatlandıratuǵın sheshimine iye bolamız. Bul sheshim $y\to\infty$ daǵı shártti qanaatlandırıw ushın $A_k=0,\ k=1,2,...$ bolıwı kerek. Al $y=0$ shegaralıq shártinen

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin\frac{\pi k}{p}x=\frac{1}{p^2}x(p-x)$$

bolıp, bunnan

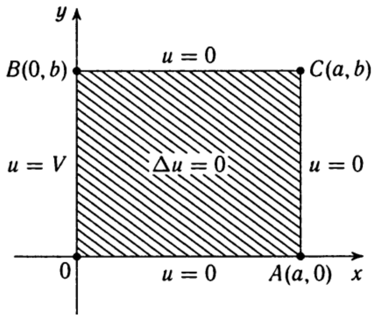
$$B_k=\frac{2}{p^3}\int_0^p x(p-x)\sin\frac{\pi k}{p}xdx=\frac{-8}{\pi^3(2k+1)^3}$$

boladı hám izlenip atırǵan sheshim

$$u(x,y)=\frac{-8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\frac{\pi(2k+1)}{p}y}\sin\frac{\pi(2k+1)}{p}x$$

kóriniske iye boladı.

Mısal 3. Eger OB tárepi boyında potencial V ǵa teń bolıp, al qalǵan úsh tárepi jerge tutastırılǵan bolsa, onda $OACB$ tuwrı múyeshliginde $u(x,y)$ elektr maydanı potencialınıń taralıwın anıqlań. Tuwrı múyeshliktiń ishki oblastı elektr zaryadına iye emes.



Sheshiliwi. Berilgen máseleni sheshiw tuwrı múyeshlikte

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$$u(0,y) = V, \ \ u(a,y) = 0; \ \ \ u(x,0) = 0, \ \ \ u(x,b) = 0$$

túrindegi Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesin sheshiwge alıp kelinedi. Sheshimdi

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

kóbeymesi túrinde izleymiz. Bul sheshimdi teńlemedegi orınlarına qoyıp, ózgeriwshilerin ajıratıp, $Y(y)$ ke qarata menshikli mánisleri hám menshikli funkciyaları sáykes

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{b}, \ Y_k(y) = \sin\frac{\pi k}{b} y, \ k = 1, 2, ...$$

bolatuǵın

$$Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0, \ \ Y(0) = Y(b) = 0$$

Shturm-Liuvill máselesine, al $X(x)$ qa qarata

$$X_k''(x) - \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2 X_k(x) = 0$$

teńlemesine iye bolamız.

Sońǵı teńlemeniń sheshimi

$$X_k(x) = A_k ch\frac{\pi k}{b} x + B_k sh\frac{\pi k}{b} x$$

bolıp, bul tabılǵan $X_k(x)$ hám $Y_k(y)$ lardıń mánislerin sheshimniń $u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$ kórinisindegi orınlarına aparıp qoysaq

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k ch\frac{\pi k}{b}x+B_k sh\frac{\pi k}{b}x\right)\sin\frac{\pi k}{b}y$$

túrindegi berilgen máseleniń A_k hám B_k parametrlerine ǵárezli sheshimine iye bolamız. Bul turaqlılardı anıqlaw ushın sheshimniń sońǵı kórinisin $u(0,y)=V,\ u(a,y)=0$ shegaralıq shártine aparıp qoyamız:

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{\pi k}{b}y=V,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k ch\frac{\pi k}{b}a+B_k sh\frac{\pi k}{b}a\right)\sin\frac{\pi k}{b}y=0$$

Bunnan

$$A_k=\frac{2V}{b}\int_0^b\sin\frac{\pi k}{b}ydy=\begin{cases}0, & k=2n,\\ \dfrac{4V}{\pi k}, & k=2n+1,\end{cases}$$

$$B_k=\begin{cases}0, & k=2n,\\ -\dfrac{4V}{\pi k}\dfrac{ch\frac{\pi k}{b}a}{sh\frac{\pi k}{b}a}, & k=2n+1\end{cases}$$

bolıp, sheshim

$$u(x,y)=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sh\left(\dfrac{(2n+1)(a-x)\pi}{b}\right)}{(2n+1)sh\dfrac{(2n+1)\pi a}{b}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{b}y$$

kóriniske iye boladı.

3.2.Tuwrı múyeshli oblastta Puasson teńlemesi ushın shegaralıq máseleler. Meyli $D=\{(x,y),x\in[0,p],y\in[0,q]\}$ tuwrı múyeshligindegi Puasson teńlemesi ushın

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=f(x,y), \tag{14}$$

$$u(0,y)=\xi(y),\ u(p,y)=\eta(y), \tag{15}$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\ u(x,q)=\psi(x)$$

túrindegi Dirixle máselesin sheshiw máselesin qarastırayıq.

Máseleni birtekli shegaralıq shártke alıp keliw ushın sheshimdi

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y) \tag{16}$$

túrinde izleymiz. (16) nı (14), (15) lerge qoyıp, $v(x,y)$ funkciyasın

$$\Delta v\equiv v_{xx}+v_{yy}=0, \tag{17}$$
$$v(x,0)=\varphi(x),\ v(x,q)=\psi(x),$$
$$v(0,y)=\xi(y),\ v(p,y)=\eta(y)$$

máseleniń sheshimi bolatuǵınday etip tańlap alamız. Sonda $w(x,y)$ funkciyası

$$\Delta w=w_{xx}+w_{yy}=f(x,y), \tag{18}$$
$$w(x,0)=0,\ w(x,0)=0,$$
$$w(0,y)=0,\ w(p,y)=0$$

túrindegi shegaralıq shártleri birtekli bolatuǵın shegaralıq másleniń sheshimi boladı. (17) máseleni aldıńǵı temadaǵı usıl boyınsha sheshemiz. Bizge (18) túrindegi birtekli emes teńlemeniń birtekli shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw jetkilikli. Bul shegaralıq máseleni sheshiwdiń tómendegi usılın qaraymız.

$$\begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=-\lambda^2 w, \\ w(0,y)=w(p,y)=w(x,0)=w(x,q)=0 \end{cases}$$

shegaralıq máseleniń menshikli mánislerin hám menshikli funkciyaların tabamız:

$$\lambda_{mn}^2=\left(\frac{\pi m}{p}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2,\ \ X_{mn}=\sin\frac{\pi m}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}y,\ m,n=1,2,...$$

Endi (18) máseleniń sheshimin

$$w(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{\pi m}{p}x\,\sin\frac{\pi n}{q}y \tag{19}$$

qatar túrinde izleymiz. Bul sheshimdi (18) teńlemege qoyamız hám $f(x,y)$ funkciyasın usı menshikli funkciyalar boyınsha qatarǵa tarqatamız:

$$-\sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\left[\left(\frac{\pi m}{p}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2\right]\sin\frac{\pi m}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}y=\sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}\cdot\sin\frac{\pi m}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}y \quad (20)$$

bul jerde

$$f_{mn}=\frac{4}{pq}\int_0^p dx\int_0^q f(x,y)\sin\frac{\pi m}{p}x\sin\frac{\pi n}{q}ydy.$$

(20) dağı A_{mn} di anıqlasaq

$$A_{mn}=-\frac{1}{\lambda_{mn}^2}f_{mn}$$

boladı. A_{mn} niń bul mánisin (19) dağı ornına qoyıp (18) niń sheshimine iye

Mısal 4. Tuwrı múyeshli birtekli $OACB$ plastinkanıń (3-mısaldağı súwretke qarań) AC hám BC tárepleri izolyaciyalanǵan bolıp, qalǵan eki tárepindegi temperatura nol`ge teń. Eger plastinkada $Q=const$ jıllılıq bólip shıǵarılatuǵın bolsa, onda plastinkadağı jıllılıqtıń ornıqlı taralıw nızamın anıqlań.

Sheshiliwi. Berilgen máseleni sheshiw, aralas tiptegi shegaralıq shártlerge iye bolǵan

$$u_{xx}+u_{yy}=-\frac{Q}{k},$$

$$u(0,y)=0,\ \ u_x(a,y)=0;\quad u(x,0)=0,\ \ u_y(x,b)=0$$

túrindegi Puasson teńlemesi ushın shegaralıq máseleni sheshiwge alıp kelinedi, bul jerde k ishki jıllılıq ótkizgishlik koefficienti. Qarastırılıp atırǵan máseleniń menshikli mánisleri hám menshikli funkciyaların

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\quad X(0)=X'(a)=0$$

Shturm-Liuvill máselesin sheshiw arqalı anıqlaymız:

$$\lambda_n=\frac{\pi(2n+1)}{2a},\ \ X_n(x)=\sin\frac{\pi(2n+1)}{2a}x,\ \ n=0,1,...$$

Endi berilgen máseleniń sheshimin usı menshikli funkciyalar boyınsha jayılǵan

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(y)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2a}x$$

qatar kóriniste izleymiz, bul jerde $u_n(y)$ kelesi waqıtta anıqlanıw kerek bolǵan funkciya. Bul funkciyanı anıqlaw ushın sheshimniń sońǵı kórinisin teńlemege hám y boyınsha qoyılǵan shegaralıq shártlerge aparıp qoyamız:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n''(y)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2a}x-\sum_{n=0}^{\infty} u_n(y)\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4a^2}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2a}x=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{\pi(2n+1)}{2a}x,$$

bul jerde α_n turaqlıları $-\dfrac{Q}{k}$ funkciyasınıń Fur`e koefficientleri

$$\alpha_n=\frac{2}{a}\int_0^a\left(-\frac{Q}{k}\right)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2a}xdx=-\frac{4Q}{\pi k(2n+1)}.$$

Bunnan $u_n(y)$ ke qarata

$$u_n''(y)-\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4a^2}u_n(y)=-\frac{4Q}{\pi k(2n+1)},$$

$$u_n(0)=0,\quad u_n'(b)=0,\ n=0,1,...$$

shegaralıq máselege iye bolamız. Bul máseleniń sheshimi

$$u_n(y)=a_n\,\mathrm{ch}\frac{\pi(2n+1)}{2a}y+b_n\,\mathrm{sh}\frac{\pi(2n+1)}{2a}y+\frac{16Qa^2}{\pi^3k(2n+1)^3},$$

bul jerde

$$a_n=-\frac{16Qa^2}{\pi^3k(2n+1)^3},\quad b_n=\frac{16Qa^2}{\pi^3k(2n+1)^3}\,\mathrm{th}\frac{\pi(2n+1)}{2a}b.$$

Tabılǵan $u_n(y)$ tiń bul mánisin ornına qoyıp

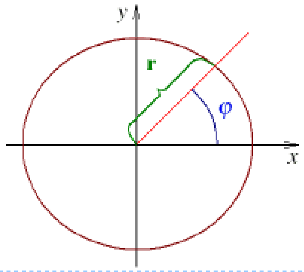
$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(y)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2a}x=$$

$$=\frac{16Qa^2}{\pi^3k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\left(1-\frac{\mathrm{ch}\dfrac{\pi(2n+1)(b-y)}{2a}}{\mathrm{ch}\dfrac{\pi(2n+1)}{2a}b}\right)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2a}x$$

máseleniń izlenip atırǵan sheshimine iye bolamız.

§4. Dóńgelek oblastta Laplas hám Puasson teńlemeleri ushın shegaralıq máseleler

4.1. Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi ishki Dirixle máselesi. Meyli, juqa dóńgelek plastinkanı shegaralawshı sheńberdegi temperatura $f(x,y)$ berilgen jaǵdayda usı plastinkadaǵı jıllılıqtıń bólistiriliwin anıqlaw, yaǵnıy jıllılıqtıń ornıqlı taralıw máselesin sheshiw talap etilsin. Aytayıq, dóńgelek plastinkanıń orayı koordinata basında, radiusı R ge teń bolsın.



Máseleni sheshiw ańsat bolıwı ushın $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ belgilewleri járdeminde polyar koordinatalar sistemasında berilgen

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{r=R} = f(\varphi) \tag{2}$$

túrindegi Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesine iye bolamız. Bul másele dóńgelektegi ishki Dirixle máselesi dep ataladı. Bul máseleni sheshiw ushın, sheshimdi

$$u(r,\varphi) = X(r)\cdot T(\varphi) \tag{3}$$

kóbeymesi túrinde izleymiz. Bunı (1) ge qoyıp ápiwaylastırsaq

$$\frac{1}{X}(r^2X'' + rX') = \frac{T''}{T}$$

teńligine iye bolamız hám onı $-\lambda^2$ qa teńlestirsek tómendegi teńlemelerge iye bolamız:

$$r^2X'' + rX' - \lambda^2X = 0,$$

$$T'' + \lambda^2T = 0. \tag{4}$$

(4) teńlemeniń ulıwma sheshimi bizge belgili

$$T(\varphi)=A\cos\lambda\varphi+B\sin\lambda\varphi$$

boladı. $u(r,\varphi)$ funkciyası 2π periodlı funkciya bolǵanlıǵı ushın $T(\varphi)$ funkciyası hám 2π periodlı funkciya bolıwı kerek, sonıń ushın $\sin\lambda\varphi$ hám $\cos\lambda\varphi$ ler 2π periodlı bolıwı kerek. Bunıń ushın λ sanı pútin san bolıwı kerek. Sonda

$$T_k(\varphi)=A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi,\;\; k=0,1,...$$

boladı. Endi $\lambda^2=k^2$ tı (4) degi ornına qoysaq

$$r^2X''+rX'-k^2X=0 \tag{5}$$

túrindegi Eyler teńlemesine iye bolamız. (5) Eyler teńlemesiniń sheshimin $X(r)=r^s$ túrinde izleymiz. Bunı (5) ge qoysaq hám ápiwaylastırsaq $s(s-1)+s-k^2=0$ yamasa $s^2=k^2$ boladı. Bunnan $s=\pm k$ bolıp, Eyler teńlemesiniń

$$X_k(r)=C_kr^k+D_kr^{-k} \tag{6}$$

túrindegi ulıwma sheshimine iye bolamız. Ishki Dirixle máselesi ushın $D_k=0$ dep alamız, bolmasa $r=0$ tochkada $X_k(r)$ sheksizlikke umtıladı. Ápiwayılıq ushın $C_k=1$ dep alamız hám $X_k(r)=r^k$ túrindegi sheshimge iye bolamız. $X_k(r)$ hám $T_k(\varphi)$ lerdi (3) degi orınlarına qoyıp, summa alsaq

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}r^k\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right) \tag{7}$$

boladı. Bul sheshimnen erikli A_k hám B_k turaqlılardı anıqlaw ushın (7) ni (2) shegaralıq shártke qoyamız. Sonda

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)R^k=f(\varphi)$$

bolıp, bul koefficientleri $f_k^s=A_kR^k,\; f_k^c=B_kR^k$ bolǵan $f(\varphi)$ funkciyasınıń Fur`e qatarı bolıp tabıladı, bunnan

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi,\;\; A_kR^k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi,\;\; B_kR^k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi \tag{8}$$

formulaları boyınsha A_0, A_k hám B_k lardı anıqlap, olardı (7) degi orınlarına qoysaq izlenip atırǵan sheshimge iye bolamız.

Solay etip Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi ishki Dirixle máselesin Fur`e usılı járdeminde sheshiw ushın, dáslep (8) formula járdeminde (2) shegaralıq shártte berilgen $f(\varphi)$ funkciyasınıń Fur`e koefficientlerin esaplaw, keyinshelik olardı (7) degi orınlarına qoyıw kerek.

Mısal 1. Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi ishki Dirixle máselesin sheshiń:

$$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 3,\ u\big|_{r=3} = \varphi^2,\ (0 \le \varphi < 2\pi).$$

Sheshiliwi. Dáslep $f(\varphi) = \varphi^2$ funkciyasın $[0, 2\pi]$ aralıqta berilgen dep esaplap, onıń Fur`e koefficientlerin esaplaymız. $k = 0$ ushın

$$f_0 = A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{4}{3}\pi^2$$

Eger $k = 1, 2, 3, ...,$ bolsa, onda bóleklep integrallaw járdeminde tómendegi koefficientlerdi esaplaymız:

$$f_k^c = A_k 3^k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos k\varphi d\varphi = \frac{4}{k^2},$$

$$f_k^s = B_k 3^k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^2 \sin k\varphi d\varphi = -\frac{4\pi}{k}.$$

Bunnan $A_k = \dfrac{4}{3^k k^2}$, $B_k = -\dfrac{4\pi}{3^k k}$ bolıp, bul tabılǵanlardı (7) degi orınlarına qoysaq, sheshim

$$u(r, \varphi) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{3}\right)^k\left(\frac{1}{k^2}\cos k\varphi - \frac{\pi}{k}\sin k\varphi\right)$$

túrine iye boladı.

Mısal 2. Radiusı R ge teń bolǵan dóńgelekte garmonikalıq bolıp, $u(R, \varphi) = \varphi(2\pi - \varphi)$ shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(r, \varphi)$ funkciyasın tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen shártti matematikalıq tilde jazsaq, onda

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi},\quad 0 \le r < R,\ 0 < \varphi < 2\pi,$$

$$|u(0, \varphi)| < \infty, \qquad u(R, \varphi) = \varphi(2\pi - \varphi)$$

túrinde berilgen dóńgelektegi ishki Dirixle máselesi payda boladı.

Bul máseleniń ulıwma sheshimin

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)$$

túrinde jazıwǵa boladı, bul jerde A_k hám B_k koefficientleri

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(2\pi-\varphi)\cos k\varphi d\varphi,\ k=0,1,2,...,$$

$$B_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(2\pi-\varphi)\sin k\varphi d\varphi,\ k=1,2,...,$$

integralların esaplaw arqalı anıqlanadı.

$$\int_0^{2\pi}\varphi\cos k\varphi d\varphi=\frac{\varphi\sin k\varphi}{k}\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin k\varphi d\varphi=\frac{1}{k^2}\cos k\varphi\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\varphi\sin k\varphi d\varphi=\frac{-\varphi\cos k\varphi}{k}\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos k\varphi d\varphi=-\frac{2\pi}{k}+\frac{1}{k^2}\sin k\varphi\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}=-\frac{2\pi}{k},$$

$$\int_0^{2\pi}\varphi^2\cos k\varphi d\varphi=\frac{\varphi^2\sin k\varphi}{k}\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}-\frac{2}{k}\int_0^{2\pi}\sin k\varphi d\varphi=-\frac{2}{k}\left(-\frac{2\pi}{k}\right)=\frac{4\pi}{k^2},$$

$$\int_0^{2\pi}\varphi^2\sin k\varphi d\varphi=\frac{-\varphi^2\cos k\varphi}{k}\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}+\frac{2}{k}\int_0^{2\pi}\varphi\cos k\varphi d\varphi=-\frac{4\pi^2}{k}+\frac{2}{k}\cdot 0\Bigg|=-\frac{4\pi^2}{k}$$

bolǵanlıǵı sebepli

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(2\pi-\varphi)\cos k\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(2\pi\cdot 0-\frac{4\pi}{k^2}\right)=-\frac{4}{k^2},$$

$$B_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(2\pi-\varphi)\sin k\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\left(2\pi\cdot\left(\frac{2\pi}{k}\right)-\left(\frac{4\pi}{k}\right)\right)=0.$$

Al A_0 óz aldına

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(2\pi-\varphi)d\varphi=\frac{4\pi^2}{3}$$

túrinde tabılıp, izlenip atırǵan sheshim

$$u(r,\varphi)=\frac{2\pi^2}{3}-4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\frac{\cos k\varphi}{k^2}$$

kóriniske iye boladı.

Mısal 3. Radiusı R ge teń bolǵan dóńgelekte garmonikalıq bolıp, $u(R,\varphi)=\varphi\sin\varphi$ shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(r,\varphi)$ funkciyasın tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen shártti matematikalıq tilde jazsaq, bul máselede

$$\Delta u=\frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi},\quad 0\le r<R,\ 0<\varphi<2\pi,$$

$$\left|u(0,\varphi)\right|<\infty,\quad u(R,\varphi)=\varphi\sin\varphi$$

túrinde berilgen dóńgelektegi ishki Dirixle máselesi boladı.

Bul máseleniń ulıwma sheshimin

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)$$

túrinde jazıp, A_k hám B_k koefficientlerin esaplasaq

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\sin\varphi\cos k\varphi\,d\varphi=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{k+1}-\frac{2\pi}{k-1}\right)=\frac{2}{k^2-1}, & k>1;\\ -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{2}=-\frac{1}{2}, & k=1,\end{cases}$$

$$B_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\sin\varphi\sin k\varphi\,d\varphi=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\left(0-0\right)=0, & k>1;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4\pi^2}{2}=\pi, & k=1,\end{cases}$$

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\sin\varphi\,d\varphi=-2$$

bolıp, izlenip atırǵan sheshim

$$u(r,\varphi)=-1-\frac{r}{R}\left(\frac{1}{2}\cos\varphi-\pi\sin\varphi\right)+2\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\frac{\cos k\varphi}{k^2+1}$$

kóriniske iye boladı.

Mısal 4. Birtekli dóńgelek $0 \le \rho \le a,\ 0 \le \varphi \le \alpha$ sektorında $u(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0,$ $u(\rho,\varphi) = A\varphi,\ (A = const)$ shegaralıq shártlerin qanaatlandıratuǵın temperaturanıń ornıqlı taralıw nızamın tabıń.

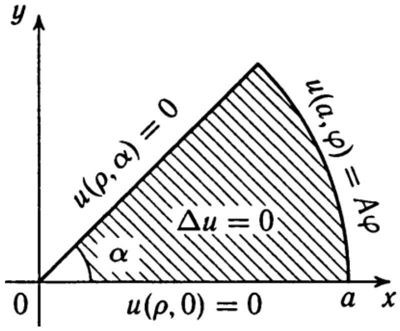
Sheshiliwi. Máseleniń shárti boyınsha berilgen temperaturanıń ornıqlı taralıwın anıqlaw máselesi

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0,\ \ 0 < \rho < a,\ \ 0 < \varphi < \alpha < 2\pi,$$

$$u(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0,\ \ 0 \le \rho \le a,$$

$$u(a,\varphi) = A\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \alpha$$

túrinde berilgen Dirixle máselesin sheshiwge alıp kelinedi.



Sheshimdi $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ kóbeymesi túrinde izlep, ózgeriwshilerin ajıratqannan soń

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda^2 R = 0, \quad \Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0$$

túrindegi eki ádettegi differenciallıq teńlemege iye bolamız.

$$u(\rho,0) = R(\rho)\Phi(0) = 0$$

hám

$$u(\rho,\alpha) = R(\rho)\Phi(\alpha) = 0$$

shártlerinen $\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0$ teńligi kelip shıǵıp, nátiyjede

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0,\ 0 < \varphi < \alpha,$$

$$\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0$$

túrindegi Shturm-Liuvill máselesine iye bolıp, bunnan $\lambda_k = \dfrac{\pi k}{\alpha}$ hám

$\Phi_k(\varphi)=\sin\frac{\pi k}{\alpha}\varphi,\ k=1,2,...,$ túrindegi bul máseleniń menshikli mánisleri menen menshikli funkciyalarına iye bolamız.

Endi $R(\rho)$ funkciyasın $R(\rho)=\rho^{\mu}$ kóriniste izleymiz. Bunı $\rho^2R''+\rho R'-\lambda^2R=0$ teńlemesine qoysaq

$$\mu(\mu-1)+\mu-\left(\frac{\pi k}{\alpha}\right)^2=0$$

teńligine iye bolıp, bunnan μ dıń $\mu=\pm\frac{\pi k}{\alpha}$ mánisi kelip shıǵadı.

$R(\rho)$ funkciyasınıń shegaralanǵan funkciya ekenligin paydalansaq

$R_k(\rho)=\rho^{\frac{\pi k}{\alpha}}$ bolıp, nátiyjede

$$u_k(\rho,\varphi)=\rho^{\frac{\pi k}{\alpha}}\sin\frac{\pi k}{\alpha}\varphi,\ \ k=1,2,...,$$

yamasa, sheshimniń

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\rho^{\frac{\pi k}{\alpha}}\sin\frac{\pi k}{\alpha}\varphi$$

erikli c_k turaqlıları $u(a,\varphi)=A\varphi$ shártinen anıqlanatuǵın kórinisi hasıl boladı.

$$u(a,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k a^{\frac{\pi k}{\alpha}}\sin\frac{\pi k}{\alpha}\varphi=A\varphi$$

teńliginen

$$c_k a^{\frac{\pi k}{\alpha}}=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}A\varphi\sin\frac{\pi k}{\alpha}\varphi d\varphi$$

yamasa

$$c_k=\frac{2A}{\alpha a^{\frac{\pi k}{\alpha}}}\int_0^{\alpha}\varphi\sin\frac{\pi k}{\alpha}\varphi d\varphi=(-1)^{k+1}\frac{2\alpha A}{\pi k}.$$

c_k nıń bul mánisin esapqa alsaq, onda sheshim

$$u(\rho,\varphi)=\frac{2\alpha A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{\frac{\pi k}{\alpha}}\sin\frac{\pi k}{\alpha}\varphi$$

túrine iye boladı.

4.2. Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi sırtqı Dirixle máselesi. Eger dóńgelektegi sırtqı Dirixle máselesin qarastıratuǵın bolsaq, onda (6) dan $C_k = 0$ dep alamız, keri jaǵdayda $r = \infty$ de $X_k(r)$ sheksizlikke umtıladı. Onda ápiwayılıq ushın $D_k = 1$ dep esaplasaq, $X_k(r)$ ge qarata $X_k(r) = r^{-k}$ túrindegi sheshimge iye bolamız. Onda (7) sheshim

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k}\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) \tag{9}$$

túrine iye bolıp, bunı (2) shegaralıq shártke qoysaq

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) R^{-k} = f(\varphi)$$

boladı. Bul koefficientleri $f_k^s = A_k R^{-k}$, $f_k^c = B_k R^{-k}$ bolǵan $f(\varphi)$ funkciyasınıń Fur`e qatarı bolıp tabıladı hám bul koefficientler

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi, \;\; A_k R^{-k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi, \;\; B_k R^{-k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi$$

túrinde anıqlanadı.

Mısal 5. Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi sırtqı Dirixle máselesin sheshiń:

$$\Delta u = 0, \quad r > 3, \;\; u\big|_{r=3} = \varphi^2, \;\; (0 \le \varphi < 2\pi).$$

Sheshiliwi. $f(\varphi) = \varphi^2$ funkciyasın $[0, 2\pi]$ aralıqta berilgen dep esaplap, onıń Fur`e koefficientleri birinshi mısalda esaplanıldı:

$$f_0 = A_0 = \frac{4}{3}\pi^2, \quad A_k 3^{-k} = \frac{4}{k^2}, \quad B_k 3^{-k} = -\frac{4\pi}{k}.$$

Bunnan

$$A_0 = \frac{4}{3}\pi^2, \quad A_k = \frac{4\cdot 3^k}{k^2}, \quad B_k = -\frac{4\pi\cdot 3^k}{k}$$

Belgisiz koefficientlerdiń bul tabılǵan mánislerin (9) daǵı orınlarına qoysaq, sheshim

$$u(r,\varphi) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{r}\right)^k \left(\frac{1}{k^2}\cos k\varphi - \frac{\pi}{k}\sin k\varphi\right)$$

boladı.

Mısal 6. Radiusı R ge teń bolǵan dóńgelek sırtında garmonikalıq bolıp, $u(R,\varphi)=T\sin\frac{\varphi}{2}$ shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(r,\varphi)$ funkciyasın tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen shártti matematikalıq tilde jazsaq, bul máselede

$$\Delta u=\frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi},\quad R<r<+\infty,\ 0<\varphi<2\pi,$$

$$\left|u(+\infty,\varphi)\right|<\infty,\ u(R,\varphi)=T\sin\frac{\varphi}{2}$$

túrinde berilgen dóńgelektegi sırtqı Dirixle máselesi boladı.

Bul máseleniń ulıwma sheshimin

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^k\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)$$

túrinde jazıp, A_k hám B_k koefficientlerin esaplasaq

$$A_k=\frac{T}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\pi}{2}\cos k\varphi\,d\varphi=\frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{(2k+1)\varphi}{2}-\sin\frac{(2k-1)\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{T}{2\pi}\left(\frac{2}{2k+1}\cdot(-2)-\frac{2}{2k-1}\cdot(-2)\right)=\frac{-4T}{(4k^2-1)\pi},$$

$$B_k=\frac{T}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\pi}{2}\sin k\varphi\,d\varphi=\frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{(2k+1)\varphi}{2}-\cos\frac{(2k-1)\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{T}{2\pi}\left(\frac{2}{2k+1}\cdot 0-\frac{2}{2k-1}\cdot 0\right)=0,$$

$$A_0=\frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\pi}{2}d\varphi=-\frac{2T}{\pi}\cdot(-2)=\frac{4T}{\pi}.$$

Belgisiz koefficientlerdiń bul tabılǵan mánislerin (9) daǵı orınlarına qoysaq, sheshim

$$u(r,\varphi)=\frac{2T}{\pi}-\frac{4T}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^k\frac{\cos k\varphi}{4k^2-1}$$

boladı.

Mısal 7. Radiusı R ge teń bolǵan dóńgelek sırtında garmonikalıq bolıp, $u(R,\varphi)=M\cos\varphi+2N\sin^2\varphi$ shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın $u(r,\varphi)$ funkciyasın tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen shártti matematikalıq tilde jazsaq, bul máselede

$$\Delta u=\frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi},\quad R<r<+\infty,\ 0<\varphi<2\pi,$$

$$|u(+\infty,\varphi)|<\infty,$$

$$u(R,\varphi)=M\cos\varphi+2N\sin^2\varphi$$

túrinde berilgen dóńgelektegi sırtqı Dirixle máselesi boladı.

Bul máseleniń ulıwma sheshimin

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^k\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)$$

túrinde jazıp, A_k hám B_k koefficientlerin esaplamastan aldın $f(\varphi)$ funkciyasın

$$f(\varphi)=M\cos\varphi+2N\sin^2\varphi=N+M\cos\varphi-N\cos 2\varphi$$

kóriniste jazıp alamız. Onda

$$A_k=\begin{cases}2N, & k=0;\\ M, & k=1;\\ -N, & k=1;\\ 0, & k=2\end{cases}\quad \text{hám } B_k=0,\ k\in N,$$

bolıp, sheshim

$$u(r,\varphi)=N+M\frac{R}{r}\cos\varphi-N\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos 2\varphi$$

boladı.

4.3. Dóńgelek oblast` ushın Puasson integralları. Bizge málim dóńgelektegi Laplas teńlemesi ushın ishki Direxle máselesiniń sheshimin

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)$$

kóriniste jazıwǵa boladı. Eger erikli A_0, A_k hám B_k, $(k=1,2,...,)$ turaqlılardıń mánislerin beretuǵın ańlatpalardı orınlarına qoysaq

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\left(\cos k\varphi\cos k\alpha+\sin k\varphi\sin k\alpha\right)\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos k(\varphi-\alpha)\right]d\alpha$$

bolıp,

$$\cos k(\varphi-\alpha)=\frac{e^{ik(\varphi-\alpha)}+e^{-ik(\varphi-\alpha)}}{2}$$

teńligin paydalansaq hám $\frac{r}{R}=q<1$ bolǵanlıǵı sebepli payda bolǵan izbe-izliktiń sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progessiya bolatuǵınlıǵın paydalansaq

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos k(\varphi-\alpha)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}q^k[e^{ik(\varphi-\alpha)}+e^{-ik(\varphi-\alpha)}]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(qe^{i(\varphi-\alpha)}\right)^k+\left(qe^{-i(\varphi-\alpha)}\right)^k\right)\right]=\frac{1}{2}\left[1+\frac{qe^{i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{i(\varphi-\alpha)}}+\frac{qe^{-i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{-i(\varphi-\alpha)}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-q^2}{1-2q\cos(\varphi-\alpha)+q^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\alpha)+r^2}$$

boladı, bunnan

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\alpha)+r^2}f(\alpha)d\alpha \tag{10}$$

túrindegi dóńgelek ushın ishki Dirixle máselesiniń sheshimin beretuǵın jańa formulaǵa iye bolamız. Bul formula dóńgelektegi ishki Dirixle máselesi ushın Puasson integralı dep ataladı.

Tap usınday dóńgelektegi sırtqı Dirixle máselesi ushın Puasson integralı

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-R^2}{r^2-2Rr\cos(\varphi-\alpha)+R^2}f(\alpha)d\alpha$$

kóriniske iye boladı.

Eger

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\alpha)+r^2}=\frac{R^2-|z|^2}{\left|Re^{i\alpha}-z\right|^2}=Re\frac{Re^{i\alpha}+z}{Re^{i\alpha}-z}$$

teńligin esapqa alsaq, onda

$$u(r,\varphi)=Re\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{Re^{i\alpha}+z}{Re^{i\alpha}-z}f(\alpha)d\alpha$$

bolıp, $\varsigma=Re^{i\alpha}$ belgilewin jasasaq $d\alpha=d\varsigma/i\varsigma$, bunnan

$$u(z)=Re\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varsigma|=R}f(\varsigma)\frac{\varsigma+zd\varsigma}{\varsigma-z\varsigma},\quad |z|<R$$

túrindegi Puasson integralınıń kompleks formasına iye bolamız.

4.4. Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi Neyman máselesi. Laplas teńlemesi ushın

$$\Delta u=\frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi},\quad 0\le r<R,\ 0<\varphi<2\pi,$$

$$|u(0,\varphi)|<\infty,\quad u_r(R,\varphi)=f(\varphi)$$

túrinde berilgen shegaralıq máseleni qanaatlandıratuǵın shegaralanǵan $u(r,\varphi)$ funkciyasın tabıw máselesi Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi ishki Neyman máselesi bolıp tabıladı.

Bul máseleniń sheshimin anıqlaw ushın dáslep dóńgelektegi ishki Laplas teńlemesiniń

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}r^k\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)$$

sheshimin paydalanamız. Endi bul sheshimnen erikli A_k hám B_k turaqlılardı anıqlaw ushın bul sheshimdi $u_r(R,\varphi)=f(\varphi)$ shegaralıq shártine aparıp qoyamız.

Al $\{1, \cos k\varphi, \sin k\varphi, k\in N\}$ sisteması funkciyalardıń tolıq ortogonal sistemasın dúzetuǵın bolǵanlıqtan $f(\varphi)$ funkciyasın $\varphi\in(0,2\pi)$ aralıqta usı funkciyalar sisteması boyınsha qatarǵa, yaǵnıy Fur`e qatarına jayıwǵa boladı:

$$f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right).$$

Bul qatardı $r=R$ ushın

$$u_r(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}kr^{k-1}\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)$$

qatarı menen salıstırsaq

$$u_r(R,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty} kR^{k-1}\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)=$$

$$=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right)=f(\varphi)$$

bolıp, bunnan $k=0$ ushın $\frac{\alpha_0}{2}=0$ teńligi kelip shıǵadı.

Bul sońǵı teńliktiń orınlanıwınan Laplas teńlemesi ushın Neyman máselesiniń birden-bir sheshimge iye bolmaytuǵınlıǵı kelip shıǵadı (A_0 hám B_0 lardı erikli túrde alıwǵa boladı. Bul sheshimler bir birinen erikli turaqlıǵa ózgeshelenedi). $k\in N$ ushın

$$kR^{k-1}\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)=\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi$$

bolıp, bunnan erikli A_k hám B_k lardıń

$$A_k=\frac{\alpha_k}{kR^{k-1}},\quad B_k=\frac{\beta_k}{kR^{k-1}}$$

mánislerine iye bolamız.

Solay etip, Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi ishki Neyman máselesiniń sheshimi

$$u(r,\varphi)=c+R\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\frac{\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi}{k} \tag{10}$$

kóriniske iye boladı, bul jerde α_k hám β_k lar sáykes

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi,\quad \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi$$

formulalarınan anıqlanadı.

Laplas teńlemesi ushın

$$\Delta u=\frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi},\quad R<r<\infty,\ 0<\varphi<2\pi,$$

$$|u(\infty,\varphi)|<\infty,\qquad u_r(R,\varphi)=f(\varphi)$$

túrinde berilgen shegaralıq máseleni qanaatlandıratuǵın shegaralanǵan $u(r,\varphi)$ funkciyasın tabıw máselesi Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi sırtqı Neyman máselesi bolıp tabıladı.

Bul máseleniń sheshimi

$$u(r,\varphi)=c-R\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{k}\frac{\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi}{k}$$

túrine iye boladı.

Eskertiw. Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi ishki Neyman máselesi (10) túrindegi sheshimge iye bolıwı ushın $\alpha_0=0$ teńligi, yaǵnıy

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi=0$$

teńliginiń orınlanıwı kerek.

Mısal 8. $\Delta u=0,\ 0\le r<R,\ 0\le\varphi<2\pi,$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=\cos^3\varphi,\ 0\le\varphi<2\pi$$

kóriniste berilgen Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi ishki Neyman máselesiniń sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen máseleniń sheshimin izertlemesten aldın eskertiwde berilgen boyınsha onıń sheshimge iye bolıw shártin tekserip kóremiz:

$$\cos^3\varphi=\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos 3\varphi$$

bolǵanlıqtan

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos 3\varphi\,d\varphi=0$$

yaǵnıy dóńgelektegi ishki Neyman máselesi sheshimge iye, sonıń menen birge

$$u_r(R,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi)=\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos 3\varphi$$

bolıp, bunnan $\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\alpha_3 = \frac{1}{4}$ (qalǵan koefficientlerdiń hámmesi nol`ge teń) bolǵanlıqtan, sheshim (10) formula boyınsha

$$u(r,\varphi) = c + R\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k \frac{\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi}{k} =$$

$$= c + \frac{3}{4} r\cos\varphi + \frac{r^3}{12R^2}\cos 3\varphi$$

kóriniske iye boladı.

4.5. Saqıyna tárizli oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler. Meyli $R_1 \le r \le R_2$ saqıynasında Laplas teńlemesin qanaatlandırıwshı, yaǵnıy

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0 \tag{11}$$

teńlemeniń sheshimi bolıp esaplanıwshı $r = R_1$ hám $r = R_2$ ushın

$$u(R_1,\varphi) = g_1(\varphi), \quad u(R_2,\varphi) = g_2(\varphi) \tag{12}$$

shegaralıq shártlerin qanaatlandırıwshı $u(r,\varphi)$ funkciyasın tabıw máselesi berilgen bolsın. Bul másele dóńgelek saqıynadaǵı Dirixle máselesi bolıp esaplanadı.

Sheshimdi Fur`e usılına muwapıq

$$u(r,\varphi) = X(r)\cdot T(\varphi) \tag{13}$$

kóbeymesi túrinde izleymiz. (3) ni (1) Laplas teńlemesine qoyıp

$$r^2 X'' + rX' + \lambda^2 X = 0, \tag{14}$$

$$T'' + \lambda^2 T = 0 \tag{15}$$

túrindegi eki differenciallıq teńlemege iye bolamız. Bul teńlemelerdi $\lambda < 0$ ushın sheshpeymiz, sebebi bunday halda $T(\varphi)$ funkciyası periodlı funkciya bolmay qaladı. $\lambda = 0$ ushın bolsa (14) hám (15) niń sheshimleri sáykes túrde

$$X_0(r) = a_0 + b_0 \ln r, \qquad T_0(\varphi) = c_0 + d_0\varphi$$

hám $\lambda > 0$ ushın

$$X_k(r) = a_k r^k + b_k r^{-k}, \quad T_k(\varphi) = c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi$$

boladı. Bul sheshimlerdi (13) degi orınlarına qoysaq

$$u(r,\varphi)=a_0+b_0\ln r+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k r^k+b_k r^{-k}\right)\cos k\varphi+\left(c_k r^k+d_k r^{-k}\right)\sin k\varphi\right] \quad (16)$$

boladı, bul jerde $T_0(\varphi)$ funkciyası periodlı funkciya bolıwı ushın $d_0=0$ dep alamız hám ápiwayılıq ushın $c_0=1$ dep esaplaymız.

(16) dağı hámme belgisiz koefficientlerdi anıqlaw ushın (16) nı (12) shegaralıq shártke qoyamız. Sonda

$$\begin{cases} a_0+b_0\ln R_1=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(\varphi)d\varphi, \\ a_0+b_0\ln R_2=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_2(\varphi)d\varphi \end{cases}$$

bolıp, bul sistemadan a_0 hám b_0 tabıladı. Sonday-aq

$$\begin{cases} a_k R_1^k+b_k R_1^{-1}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(\varphi)\cos k\varphi d\varphi, \\ a_k R_2^k+b_k R_2^{-1}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_2(\varphi)\cos k\varphi d\varphi \end{cases}$$

bolıp, bul sistemadan a_k hám b_k lar tabıladı hám

$$\begin{cases} \tilde{n}_k R_1^k+d_k R_1^{-1}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_1(\varphi) sink\varphi d\varphi, \\ \tilde{n}_k R_2^k+d_k R_2^{-k}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_2(\varphi) sink\varphi d\varphi. \end{cases}$$

bolıp, bul sistemadan c_k hám d_k lar tabıladı. Tabılǵan bul koefficientlerdi (16) dağı orınlarına qoyıp, (11),(12) dóńgelek saqıynadağı Dirixle máselesiniń sheshimine iye bolamız.

Mısal 9. $\Delta u=0, \quad 1<r<2, \quad 0\le\varphi<2\pi,$

$$u(1,\varphi)=0, \quad u(2,\varphi)=\cos\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi$$

kóriniste berilgen saqıynadağı Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesin sheshiń.

Sheshiliwi. Ulıwma alǵanda berilgen máseleniń sheshimin tabıw ushın a_0 hám b_0, a_k hám b_k, c_k hám d_k lardı anıqlawǵa múmkinshilik beretuǵın joqarıdağı barlıq integrallardı esaplaw, keyinshelik sáykes sistemalardı usı belgisiz koefficientlerge qarata sheshiw kerek. Al qarastırılıp atırǵan mısal jaǵdayında bul integrallardı esaplamay-aq, berilgen teńlemeniń dara sheshimleriniń sızıqlı kombinaciyasın

$$u(r,\varphi) = a_1 r\cos\varphi + b_1 r^{-1}\cos\varphi$$

kóriniste izlep, belgisiz a_1 hám b_1 koefficientlerin anıqlaw ushın, bul sheshimdi berilgen máseleniń shegaralıq shártlerine aparıp qoyamız hám

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 0, \\ 2a_1 + \dfrac{1}{2}b_1 = 1 \end{cases}$$

sistemasına iye bolamız. Bul sistemadan a_1 hám b_1 koefficientlerdiń $a_1 = 2/3,\ b_1 = -2/3$ mánislerine iye bolamız. Solay etip, sheshim

$$u(r,\varphi) = \frac{2}{3}\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\varphi$$

túrine iye boladı.

Mısal 10. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 2,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$u(1,\varphi) = 2,\ \ u(2,\varphi) = 1,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

kóriniste berilgen saqıynadaǵı Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesin sheshiń.

Sheshiliwi. Sheshimdi φ ge ǵárezsiz bolǵan

$$u(r,\varphi) = u(r) = a_0 + b_0 \ln r$$

kóriniste izleymiz. Bunı shegaralıq shártke aparıp qoyıp,

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln 1 = 2, \\ a_0 + b_0 \ln 2 = 1 \end{cases}$$

sistemasına iye bolamız. Bunnan $a_0 = 2,\ b_0 = -\log_2 e$ bolıp, sheshim

$$u(r,\varphi) = u(r) = 2 - \frac{\ln r}{\ln 2}$$

boladı.

Mısal 11. $\Delta u = 0,\ 1 < r < 2,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$

$$u(1,\varphi) = \cos\varphi,\ \ u(2,\varphi) = \sin\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

kóriniste berilgen saqıynadaǵı Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesin sheshiń.

Sheshiliwi. Sheshimniń (16) kórinisindegi barlıq a_0 hám b_0, a_k hám b_k, c_k hám d_k $(k>1)$ lardıń nol`ge teń bolatuǵınlıǵın tekserip kóriwge boladı, al a_1, b_1 hám c_1, d_1 ler

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 1, \\ 2a_1 + \frac{1}{2}b_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + d_1 = 0, \\ 2c_1 + \frac{1}{2}d_1 = 1 \end{cases}$$

sistemalarıń sheshiw arqalı anıqlanadı. Bul sistemalardı sheshsek

$$a_1 = -\frac{1}{3}, \ b_1 = \frac{4}{3}, \ c_1 = \frac{2}{3}, \ d_1 = -\frac{2}{3}$$

bolıp, sheshim

$$u(r,\varphi) = \left(-\frac{1}{3}r + \frac{4}{3r}\right)\cos\varphi + \frac{2}{3}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$$

boladı.

4.6. Puasson teńlemesi ushın dóńgelek hám saqıynadaǵı shegaralıq máseleler. Dirixle yamasa Neyman (yamasa aralas tiptegi) máselelerin sheshiw waqtında $\Delta u = f(x,y)$ Puasson teńlemesiniń qanday-da bir $u_0(x,y)$ dara sheshimin tabıw kerek. Sonda berilgen másele $u(x,y) = u_0(x,y) + \vartheta(x,y)$ belgilew járdeminde $\vartheta(x,y)$ funkciyasına qarata $\Delta\vartheta = 0$ Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleni sheshiwge alıp kelinedi.

Mısal 12. Orayı koordinata basında jaylasqan, radiusı R ge teń bolǵan dóńgelekte

$$u_{xx} + u_{yy} = xy$$

Puasson teńlemesiniń $u(R,\varphi) = 0$ shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen másele polyar koordinatalar sistemasında

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} r^4 \sin 2\varphi, \ \ 0 \le r < R, \ \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(R,\varphi) = 0, \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

kóriniske iye boladı. Bul teńlemeniń dara sheshimi

$$u_0(r,\varphi)=w(r)\sin 2\varphi$$

kóriniste izlenedi. Bul sheshimdi berilgen teńlemege qoyıp

$$r^2w''+rw'-4w=-\frac{1}{2}r^4$$

teńlemesine iye bolamız. Bul teńleme $r=e^t$ belgilewi járdeminde

$$w''-4w=-\frac{1}{2}e^{4t}$$

túrine iye boladı. Bul teńlemeniń bir dara sheshimi $w(t)=-\frac{1}{24}e^{4t}$ bolıp, bunnan $w(r)=-\frac{1}{24}r^4$ boladı. Solay etip, $u_0(r,\varphi)=-\frac{1}{24}r^4\sin 2\varphi$.

Endi $\vartheta(r,\varphi)=u(r,\varphi)-u_0(r,\varphi)$ funkciyasın anıqlaw ushın

$$r^2\vartheta_{rr}+r\vartheta_r+\vartheta_{\varphi\varphi}=0,\ \ 0\le r<R,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$

$$u(R,\varphi)=\frac{1}{24}R^4\sin 2\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$$

túrindegi Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesine iye bolamız. Bul máseleniń sheshimi

$$\vartheta(r,\varphi)=\left(\frac{r}{R}\right)^2\cdot\frac{1}{24}R^4\sin 2\varphi=\frac{1}{24}r^2R^2\sin 2\varphi$$

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{24}r^2(R^2-r^2)\sin 2\varphi$$

kóriniske iye boladı.

Mısal 13. Caqıynada berilgen Puasson teńlemesi ushın aralas shegaralıq máseleni sheshiń

$$\frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=Ar^2\cos 2\varphi,\quad a<r<b,\ \ 0\le\varphi<2\pi,$$

$$u(a,\varphi)=1,\ u_r(b,\varphi)=0,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Sheshiliwi. Berilgen teńlemeniń sheshimi

$$u(r,\varphi)=w(r)+\vartheta(r,\varphi)$$

kóriniste izlenedi. Bul jerde $w(r)$

$$\frac{1}{r}(rw_r)_r = 0, \quad a < r < b, \quad w(a) = 1, \; w'(b) = 0 \tag{17}$$

shegaralıq máseleniń, al $\vartheta(r,\varphi)$

$$\frac{1}{r}(r\vartheta_r)_r + \frac{1}{r^2}\vartheta_{\varphi\varphi} = Ar^2\cos 2\varphi, \quad a < r < b, \; 0 \le \varphi < 2\pi, \tag{18}$$

$$\vartheta(a,\varphi) = 1, \; \vartheta_r(b,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

aralas máseleniń sheshimi.

Bizge málim (17) máseleniń sheshimi $w(r) = 1$, al (18) máseleniń sheshimin $\vartheta(r,\varphi) = R(r)\cos 2\varphi$ kóriniste izleymiz. $\vartheta(r,\varphi)$ nıń bul mánisin (18) ge qoysaq

$$\frac{1}{r}(rR_r)_r\cos 2\varphi - \frac{4}{r^2}R\cos 2\varphi = Ar^2\cos 2\varphi$$

yamasa

$$\frac{1}{r}(rR_r)_r - \frac{4}{r^2}R = Ar^2,$$

$$R(a) = 1, \; R'(b) = 0$$

shegaralıq máselesine iye bolamız. Bul máseledegi teńleme $r = e^t$ belgilewi járdeminde ulıwma sheshimi

$$R(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + \frac{1}{12}Ae^{4t}$$

bolatuǵın turaqlı koefficientli

$$R'' - 4R = Ae^{4t}$$

teńlemesine túrlendiriledi. Demek

$$R(r) = C_1r^2 + \frac{C_2}{r^2} + \frac{A}{12}r^4$$

bolıp, bunnan C_1 hám C_2 lerdi $R(a) = 1, \; R'(b) = 0$ shártlerinen anıqlasaq

$$C_1 = -\frac{A(a^6 + 2b^6)}{12(a^4 + b^4)}, \qquad C_2 = \frac{Aa^4b^4(2b^2 - a^2)}{6(a^4 + b^4)}$$

bolıp, berilgen máseleniń izlenip atırǵan sheshimi

$$u(r,\varphi) = 1 + \left(-\frac{A(a^6 + 2b^6)}{12(a^4 + b^4)}r^2 + \frac{1}{r^2}\frac{Aa^4b^4(2b^2 - a^2)}{6(a^4 + b^4)} + \frac{A}{12}r^4 \right)\cos 2\varphi$$

boladı.

Qosımsha sorawlar

1. Elliptikalıq tiptegi teńlemeler dep qanday teńlemelerge aytıladı?

2. Eki ǵárezsiz ózgeriwshili, ekinshi tártipli dara tuwındılı sızıqlı yamasa kvazisızıqlı differenciallıq teńlemeler ellitiptikalıq tipke jatıw ushın qanday shárt orınlanıwı kerek?

3. Laplas hám Puasson teńlemeleri qalay kelip shıǵadı?

4. Laplas hám Puasson teńlemeleri ushın qanday túrdegi shegaralıq shártlerdi bilesiz?

5. Laplas yamasa Puasson teńlemeleri ushın Dirixle máselesi dep qanday máselege aytıladı?

6. Laplas yamasa Puasson teńlemeleri ushın Neyman máselesi dep qanday máselege aytıladı?

7. Laplas yamasa Puasson teńlemeleri ushın úshinshi túr shegaralıq shárt dep qanday shártke aytıladı?

8. Laplas yamasa Puasson teńlemeleri ushın Dirixle máselesi menen Neyman máselesi arasındaǵı parıq qanday?

9. Laplas teńlemesiniń fundamentallıq sheshimi dep qanday sheshimge aytıladı?

10. Shegaralıq máseleler qanday tiptegi máselelerge qoyıladı?

11. Garmonikalıq funkciyalar dep qanday funkciyalarǵa aytıladı?

12. Garmonikalıq funkciyalardıń qanday qásiyetlerin bilesiz?

13. Garmonikalıq funkciya ushın orta mánis haqqındaǵı teoremaǵa qanday túsinesiz?

14. Garmonikalıq funkciyalardıń ekstremumı haqqındaǵı teoremaǵa qanday túsinesiz?

15. Grin formulaların keltirip shıǵarıń.

16. Puasson teńlemesi ushın Dirixle hám Neyman máseleleri sheshiminiń birden birligin dálilleń.

17. Tuwrı múyeshli oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler Fur`e

usılı járdeminde qalay sheshiledi?

18. Tuwrı múyeshli oblastta Puasson teńlemesi ushın shegaralıq máseleler Fur`e usılı járdeminde qalay sheshiledi?

19. Dóńgelek oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler Fur`e usılı járdeminde qalay sheshiledi?

20. Dóńgelek saqıynada berilgen Laplas teńlemesi ushın shegaralıq máseleler Fur`e usılı járdeminde qalay sheshiledi?

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar

I. $\Delta u = 0$ Laplas teńlemesi ushın $0 < x < p,\ 0 < y < q$ tuwrı múyeshlikte tómendegi shegaralıq shártlerdi qanaatlandırıwshı sheshimdi tabıń

1) $u(0,y) = u(p,y) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u(x,q) = U_0;$

2) $u(0,y) = u_x(p,y) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u(x,q) = f(x);$

3) $u(0,y) = U,\ u(p,y) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u(x,q) = V;$

4) $u(0,y) = U,\ u_x(p,y) = 0,\ u_y(x,0) = T\sin\dfrac{\pi x}{2p},\ u(x,q) = 0;$

5) $u_x(0,y) = u_x(p,y) = 0,\ \ u(x,0) = A,\ u(x,q) = Bx;$

6) $u(0,y) = A,\ u(p,y) = Ay,\ u_y(x,0) = 0,\ u_y(x,q) = 0;$

7) $u(0,y) = 0,\ u_x(p,y) = b,\ u(x,0) = 0,\ u(x,q) = U.$

II. $\Delta u = 0$ Laplas teńlemesi ushın $0 < x < \infty,\ 0 < y < l$ oblastta tómendegi shegaralık shártlerdi qanaatlandırıwshı sheshimdi tabıń

1) $u(x,0) = u(x,l) = 0,\ u(0,y) = y(l-y),\ u(\infty,y) = 0;$

2) $u(x,0) = u_y(x,l) = 0,\ u(0,y) = f(y),\ u(\infty,y) = 0;$

3) $u_y(x,0) = u_y(x,l) + hu(x,l) = 0,\ u(0,y) = f(y),\ u(\infty,y) = 0,\ h > 0;$

4) $u_y(x,0) - hu(x,0) = 0,\ u(x,l) = 0,\ u(0,y) = l - y,\ u(\infty,y) = 0,\ h > 0.$

5) $\Delta u = 0$ Laplas teńlemesi ushın $0 \le x \le l,\ 0 \le y < \infty$ oblastta tómendegi shegaralıq shártlerdi qanaatlandırıwshı sheshimdi tabıń

$$u(0,y) = u(l,y) = 0,\ \ u(x,0) = A\left(1 - \frac{x}{l}\right),\ \ u(x,\infty) = 0.$$

III. $0 \le r < R$ dóńgelekte tómendegi shegaralıq shártlerdi qanaatlandırıwshı garmonikalıq funkciyanı tabıń

1) $u(R,\varphi) = \varphi \sin\varphi;$

2) $u(R,\varphi) = \varphi(2\pi - \varphi);$

3) $u_r(R,\varphi) + hu(R,\varphi) = T + Q\sin\varphi + U\cos 3\varphi;$

4) $u_r(R,\varphi) = A\cos\varphi;$

5) $u_r(R,\varphi) = A\cos 2\varphi;$

6) $u_r(R,\varphi) = \sin^3\varphi.$

IV. $\Delta u = 0$ Laplas teńlemesiniń $0 \le r < R$ dóńgelek sırtında tómendegi shegaralıq shártlerdi qanaatlandırıwshı sheshimin tabıń

1) $u(R,\varphi) = T\sin\dfrac{\varphi}{2};$

2) $u_r(R,\varphi) = \dfrac{1}{2} + \varphi\sin 2\varphi;$

3) $u(R,\varphi) = U\left(\varphi + \varphi\cos\varphi\right).$

V. $1 < r < 2$ saqıynada tómendegi shegaralık shártlerdi qanaatlandırıwshı garmonikalıq funkciyanı tabıń

1) $u(1,\varphi) = u_1, \quad u(2,\varphi) = u_2;$

2) $u(1,\varphi) = 1 + \cos^2\varphi, \quad u(2,\varphi) = \sin^2\varphi.$

VI. $a < r < b$ saqıynada tómendegi shegaralık shártlerdi qanaatlandırıwshı garmonikalıq funkciyanı tabıń

1) $u(a,\varphi) = A, \; u(b,\varphi) = B\sin 2\varphi;$

2) $u(a,\varphi) = 0, \; u(b,\varphi) = \cos\varphi;$

3) $u_r(a,\varphi) = q\cos\varphi, \; u(b,\varphi) = Q + T\sin 2\varphi;$

4) $u_r(a,\varphi) = f_1(\varphi), \; u(b,\varphi) = f_2(\varphi);$

5) $u(a,\varphi) = 0, \; u(b,\varphi) = \sin\varphi + 2\cos^2\varphi;$

6) $u_r(a,\varphi) = 4\sin^3\varphi, \; u(b,\varphi) = 0;$

7) $u(a,\varphi) = 1, \; u_r(b,\varphi) = 2\sin^2\varphi;$

8) $u_r(a,\varphi) = \sin\varphi, \; u_r(b,\varphi) = \cos\varphi.$

VII. $0<r<R,\ 0<\varphi<\alpha$ dóńgelek sektorında tómendegi shegaralıq shártlerdi qanaatlandırıwshı garmonikalıq funkciyanı tabıń

1) $u_\varphi(r,0)=u_\varphi(r,\alpha)=0,\ u(R,\varphi)=U\varphi;$

2) $u_\varphi(r,0)=u(r,\alpha)=0,\quad u(R,\varphi)=f(\varphi);$

3) $u(r,0)=u(r,\alpha)=0,\ u(R,\varphi)=A\varphi;$

4) $u(r,0)=u(r,\alpha)=0,\ u_r(R,\varphi)=Q.$

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları

I. 1) $u(x,y)=\dfrac{4U_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}sh^{-1}\dfrac{\pi(2n+1)}{p}q\cdot\sin\dfrac{\pi(2n+1)}{p}x\cdot sh\dfrac{\pi(2n+1)}{p}y;$

2) $u(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{2p}x\cdot sh\dfrac{\pi(2k+1)}{2p}y,$

$$a_k=\frac{2}{p}sh^{-1}\frac{\pi(2k+1)}{2p}q\int_0^p f(x)\sin\frac{\pi(2k+1)}{2p}xdx;$$

3) $$u(x,y)=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{p}x\cdot sh\frac{(2n+1)\pi}{p}y}{(2n+1)sh\frac{(2n+1)\pi}{p}q}+$$

$$+\frac{4U}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{q}y\cdot sh\frac{(2n+1)\pi}{q}x}{(2n+1)sh\frac{(2n+1)\pi}{q}p};$$

4) $$u(x,y)=U+\frac{2p}{\pi}\left[Tsh\frac{\pi}{2p}y-\left(ch^{-1}\frac{\pi q}{2p}\right)\left(\frac{2U}{p}+Tsh\frac{\pi q}{2p}\right)ch\frac{\pi}{2p}y\right]\sin\frac{\pi}{2p}x-$$

$$-\frac{4U}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ch^{-1}\frac{(2k+1)\pi q}{2p}}{2k+1}ch\frac{(2k+1)\pi}{2p}y\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p}x;$$

5) $u(x,y)=\dfrac{(pB-2A)y}{2q}+A-$

$$-\frac{4pB}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2 sh\frac{(2k+1)\pi q}{p}}\cos\frac{(2k+1)\pi}{p}x\,sh\frac{(2k+1)\pi}{p}y;$$

6) $u(x,y)=A+\dfrac{A(q-2)x}{2p}-$

$$-\frac{4qA}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2 sh\frac{(2k+1)\pi p}{q}}\cos\frac{(2k+1)\pi}{q}y\;sh\frac{(2k+1)\pi}{q}x;$$

7) $u(x,y)=\dfrac{4bq}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2 ch\frac{(2k+1)\pi p}{q}}\sin\frac{(2k+1)\pi}{q}y\cdot sh\frac{(2k+1)\pi}{q}x+$

$$+\frac{4U}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}sh^{-1}\frac{(2k+1)\pi q}{2p}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p}x\cdot sh\frac{(2k+1)\pi}{2p}y.$$

II. 1) $u(x,y)=\dfrac{8l}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\frac{(2k+1)\pi}{l}x}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}y;$

2) $u(x,y)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2l}x}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}y,\ a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(y)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}ydy;$

3) $u(x,y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2\left(h^2+\lambda_k^2\right)}{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h}\int_0^l f(\xi)\cos\lambda_k\xi d\xi\right\}e^{-\lambda_k x}\cos\lambda_k y,$

bul jerde λ_k menshikli sanları $\lambda tg\lambda l=h$ teńlemeniń oń koren`leri;

4) $u(x,y)=2(1+hl)\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\left(h^2+\lambda_k^2\right)l+h\right]\lambda_k}e^{-\lambda_k x}Y_k(y),$

bul jerde $Y_k(y)=\lambda_k\cos\lambda_k y+h\sin\lambda_k y,$ λ_k - menshikli sanları $htg\lambda l=-\lambda$ teńlemeniń oń koren`leri;

5) $u(x,y)=\dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{l}y}\sin\frac{n\pi}{l}x.$

III. 1) $u(r,\varphi)=-1-\dfrac{r}{2R}\cos\varphi+\dfrac{\pi r}{R}\sin\varphi+2\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\left(k^2-1\right)^3}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos k\varphi;$

2) $u(r,\varphi)=\dfrac{2\pi^2}{3}-4\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^k\cos k\varphi;$

3) $u(r,\varphi)=\dfrac{T}{h}+\dfrac{Qr}{1+Rh}\sin\varphi+\dfrac{Ur^3}{R^2\left(3+Rh\right)}\cos 3\varphi;$

4) $u(r,\varphi)=Ar\cos\varphi+C;$ 5) $u(r,\varphi)=\dfrac{A}{2R}r^2\cos 2\varphi+C;$

6) $u(r,\varphi)=\dfrac{1}{4}\left(3r\sin\varphi-\dfrac{r^3}{3R^2}\sin 3\varphi\right)+C.$

IV. 1) $u(r,\varphi)=\dfrac{2T}{\pi}+\dfrac{4T}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{1-4k^2}\left(\dfrac{R}{r}\right)^k\cos k\varphi;$

2) $u(r,\varphi)=C+\dfrac{4R^2}{3r}\cos\varphi+\dfrac{R^3}{4r^2}\cos 2\varphi-\dfrac{\pi R^3}{r^2}\sin 2\varphi+4R\sum\limits_{k=3}^{\infty}\dfrac{1}{4-k^2}\left(\dfrac{R}{r}\right)^k\cos k\varphi;$

3) $u(r,\varphi)=\pi U-\dfrac{RU}{r}\sin\varphi+2U\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{2k^2-1}{k\left(1-k^2\right)}\left(\dfrac{R}{r}\right)^k\sin k\varphi.$

V. 1) $u(r,\varphi)=u_1+\left(u_2-u_1\right)\dfrac{ln r}{ln 2};$ 2) $u(r,\varphi)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{ln r}{ln 2}+\left(\dfrac{2}{3r^2}-\dfrac{r^2}{6}\right)\cos 2\varphi.$

VI. 1) $u(r,\varphi)=A\dfrac{ln\dfrac{r}{b}}{ln\dfrac{a}{b}}+\dfrac{Bb^2}{b^4-a^4}\left(r^2-\dfrac{a^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi;$

2) $u(r,\varphi)=\dfrac{b}{b^2-a^2}\left(r-\dfrac{a^2}{r}\right)\cos\varphi;$

3) $u(r,\varphi)=Q+\dfrac{a^2q}{a^2+b^2}\left(r-\dfrac{b^2}{r}\right)\cos\varphi+\dfrac{b^2T}{a^4+b^4}\left(r^2+\dfrac{a^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi;$

4) $u(r,\varphi)=\alpha_0^{(2)}+\alpha_0^{(1)}a\ln\dfrac{r}{b}+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\alpha_k^{(1)}b^{-k}+ka^{-k-1}\alpha_k^{(2)}\right)r^k+\left(k\alpha_k^{(2)}a^{k-1}-b^k\alpha_k^{(1)}\right)r^{-k}}{k\left(a^{k-1}b^{-k}+b^ka^{-k-1}\right)}\cos k\varphi+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\beta_k^{(1)}b^{-k}+ka^{-k-1}\beta_k^{(2)}\right)r^k+\left(k\beta_k^{(2)}a^{k-1}-b^k\beta_k^{(1)}\right)r^{-k}}{k\left(a^{k-1}b^{-k}+b^ka^{-k-1}\right)}\sin k\varphi,$$

bul jerde $\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi)d\varphi, \quad \alpha_k^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi)\cos k\varphi d\varphi;$

$$\alpha_0^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi)d\varphi, \quad \alpha_k^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi)\cos k\varphi d\varphi,$$

$$\beta_k^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi)\sin k\varphi d\varphi, \quad \beta_k^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi)\sin k\varphi d\varphi;$$

5) $u(r,\varphi) = \frac{\ln r/a}{\ln b/a} + \frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\frac{b}{r}\sin\varphi + \frac{r^4-a^4}{b^4-a^4}\left(\frac{b}{r}\right)^2\cos 2\varphi;$

6) $u(r,\varphi) = 3\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\frac{a^2}{r}\sin\varphi - \frac{1}{3}\frac{b^6-r^6}{b^6+a^6}\frac{a^4}{r^3}\sin 3\varphi;$

7) $u(r,\varphi) = 1 + \frac{r^4-a^4}{2(b^4+a^4)}\frac{b^3}{r^2}\cos 2\varphi + b\ln\frac{r}{a};$

8) $u(r,\varphi) = \frac{r^2+a^2}{b^2-a^2}\frac{b^2}{r}\cos\varphi + \frac{r^2+b^2}{a^2-b^2}\frac{a^2}{r}\sin\varphi.$

VII. 1) $u(r,\varphi) = \frac{\alpha U}{2} - \frac{4\alpha U}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}}\cos\frac{k\pi}{\alpha}\varphi;$

2) $u(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}\varphi; \quad a_k = \frac{2}{\alpha}R^{-\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}\varphi d\varphi;$

3) $u(r,\varphi) = \frac{2A\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}}\sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi;$

4) $u(r,\varphi) = \frac{4\alpha QR}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}}\sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi.$

V-BAP. POTENCIALLAR TEORIYASINIŃ METODLARI

Tayanısh sózler: potencial, kólem potencialı, N`yuton potencialı, ápiwayı qatlam potencialı, qos qatlam potencialı, logarifmlik potencial, Fredgol`mnıń integrallıq teńlemesi, Puasson teńlemesi, Dirixle máselesi, Neyman máselesi, Grin funkciyası, jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi.

Tiykarǵı túsinikler hám belgilewler

Vektorlıq maydan – qarastırılıp atırǵan oblasttıń hár bir tochkasında berilgen vektor-funkciya.

Skalyarlıq maydan – qarastırılıp atırǵan oblasttıń hár bir tochkasında berilgen funkciya.

Differenciallıq L operatordıń fundamentallıq sheshimi – $Lu = \delta(x)$ teńlemesin qanaatlandıratuǵın ulıwmalasqan funkciya, bul jerde $\delta(x)$ Dirakttıń del`ta-funkciyası.

Potencial – bul bazı-bir funkciya (potencial tıǵızlıǵı) menen fundamentallıq sheshimnniń yamasa onıń tuwındısınıń kóbeymesinen alınǵan integral kóriniske iye skalyar funkciya.

Laplas teńlemesi – $\Delta u = 0$ teńlemesi, bul jerde Δ Laplas operatorı.

Puasson teńlemesi – $\Delta u = f$ teńlemesi.

N`yuton (kólem) potencialı – $u(A) = \iiint\limits_V \frac{\rho(P)}{r} dV$ túrindegi integral, bul jerde r fiksirlengen A tochkası menen ózgeriwshi P tochkaları arasındaǵı aralıq, ρ potencial tıǵızlıǵı, $V = R^3$.

Ápiwayı qatlam potencialı – $u(A) = \iint\limits_S \frac{\rho(P)}{r} dS$ túrindegi integral, bul jerde r fiksirlengen A tochkası menen ózgeriwshi P tochkaları arasındaǵı aralıq, ρ potencial tıǵızlıǵı, $S = \partial V$, $V = R^3$.

Qos qatlam potencial – $u(A) = \iint\limits_S \frac{\rho(P)\cos\theta}{r^2} dS = \iint\limits_S \rho(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS$ túrindegi integral, bul jerde θ degenimiz $S = \partial V$ betiniń $P \in S$ tochkasına júrgizilgen normal menen PA baǵıtı arasındaǵı múyesh.

Logarifmlik potencialı – $u(A)=\iint\limits_S \rho(P)\ln\frac{1}{r}dS$ *túrindegi integral, bul jerde* $S\in R^2$.

Ápiwayı qatlamnıń logarifmlik potencialı – $u(A)=\int\limits_L \rho(P)\ln\frac{1}{r}dl$ *túrindegi integral, bul jerde* $L\in\partial S,\ S\in R^2$.

Qos qatlamnıń logarifmlik potencialı –

$$u(A)=\int\limits_L \rho(P)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}dl=\int\limits_L \rho(P)\frac{\cos\theta}{r}dl$$

túrindegi integral, bul jerde θ *degenimiz* $L=\partial S$ *tuyıq sızığınıń* $P\in L$ *tochkasına júrgizilgen normal menen* PA *bağıtı arasındağı múyesh.*

Grinniń tiykarğı integrallıq formulası – eki ret differenciallanıwshı u *funkciyasınıń úsh potencialdıń (*Δu *tığızlıqqa iye kólem potencialı,* $\frac{\partial u}{\partial n}$ *betlik tığızlıqqa iye ápiwayı qatlam potencialı hám* u *tığızlıqqa iye qos qatlam potencialı) qosındısı túrinde kórsetiliwi.*

Garmonikalıq funkciya – Laplas teńlemesin qanaatlandıratuğın eki ret differenciallanıwshı funkciya.

Grin funkciyası– Differenciallıq teńlemeler ushın shegaralıq máselelerdi sheshiwde qollanıladı. Grin funkciyası sonday funkciya bolıp, ol berilgen differenciallıq teńlemeniń sheshimi bolıp shegara shártlerin hám qanaatlandıradı, sonıń menen birge teńleme tártibi menen keńislik ólshemine baylanıslı bolğan qásiyetke iye. Mısalı $G(M,M_0)$ *funkciyası úsh ólshemli Laplas operatorınıń Grin funkciyası bolsa, onda Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesiniń sheshimi Grin funkciyası járdeminde*

$$u(M_0)=-\iint\limits_S \varphi(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}ds$$

formulası menen kórsetiledi.

N`yuton potencialı túsinigi birinshi ret XVIII ásirdiń aqırında P. Laplas hám J.Lagranj tárepinen, sońınan gidrodinamika máseleleri ushın L.Eyler tárepinen kiritiledi. Qos qatlam potencialınıń qásiyetleri birinshi ret Kulon hám S. Puasson tárepinen izertlenedi, al potenciallar teoriyasın rawajlandırıwda Grin úlken jetiskenliklerge iye boladı. Házirgi waqıtta potenciallar teoriyası – matematikalıq fizikanıń hár qıylı tarawlarındaǵı máselelerdi izertlewde hám sheshiwde kúshli rawajlanǵan metodlardıń biri.

Meyli $F=\sum_{i=1}^{3}F_i\vec{e}_i$ vektorlıq maydan hám $u(x,y,z)$ skalyarlıq maydan berilgen bolsın. F vektorlıq maydannıń potencialı dep, gradienti F ke teń bolǵan $u(x,y,z)$ skalyarlıq maydannıń gradientine aytıladı:

$$gradu=\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=F.$$

Sonlıqtan potenciallıq funkciyanı biliw tásir etiwshi kúshlerdi esaplawǵa múmkinshilik tuwdıradı.

Potenciallar teoriyasınıń metodlarında Laplas teńlemesiniń úsh ólshemli jaǵdayında $\frac{1}{4\pi r}$ hám eki ólshemli jaǵdayında $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$ bolǵan fundamentallıq sheshimleri tayanısh rolin atqaradı. Bul sheshimler tiykarında, bazı-bir funkciya (potencial tıǵızlıǵı) menen fundamentallıq sheshimnıń yamasa onıń tuwındısınıń kóbeymesinen alınǵan integral kóriniste potenciallar dúziledi. Integrallaw oblastına hám fundamentallıq sheshimdi yamasa onıń normal boyınsha tuwındısın qollanıwǵa ǵárezli kólem potencialı, ápiwayı hám qos qatlam potencialları bir-birinen ózgeshelenedi. Eger potencialdı (sáykes elliptikalıq tiptegi teńlemeniń sheshimin) tıǵızlıqtan alınǵan integral kóriniste izlew kerek bolsa, onda belgisiz tıǵızlıqqa qarata integrallıq teńleme payda boladı. Al sheshimdi hár qıylı potenciallar kórinisinde izlewge bolatuǵın bolǵanlıqtan, payda bolǵan integrallıq teńleme eń ápiwayı bolatuǵınday etip potencialdı tańlap alıw kerek. Mısalı Fredgol`mnıń ekinshi túr integrallıq teńlemesin alıw ushın Dirixle máselesi qos qatlam potencialı járdeminde, al Neyman máselesi ápiwayı qatlam potencialı járdeminde sheshiledi.

§1. Potenciallar teoriyasınıń Dirixle hám Neyman máseleleri ushın qollanıwları

1.1.Keńisliktegi Dirixle máselesiniń sheshimi. Meyli S beti menen shegaralanǵan V oblastı ushın ishki Dirixle máselesin qarastırayıq. Bul máseleniń sheshimin qos qatlam potencialı kóriniste

$$u(A)=\iint_S \rho(P)\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS,\ \ r=|AP|$$

formulası menen esaplaymız, bul jerde $\vec{r}=\overrightarrow{AP},\ \vec{n}$ –bettiń P tochkasındaǵı sırtqı normaldıń baǵıtı. Izleniwshi shama $\rho(P)$ tıǵızlıq. Shegaralıq shárti $u|_S=f(P)$ bolǵan ishki Dirixle máselesi $\rho(P)$ tıǵızlıq ushın

$$f(A)=\iint_S \rho(P)\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}dS+2\pi\rho(A)$$

integrallıq teńlemesi menen teń kúshli. Eger

$$K(A;P)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}$$

yadrosın kiritsek, onda sońǵı teńlemeni

$$\rho(A)=\frac{1}{2\pi}f(A)+\iint_S \rho(P)K(A;P)dS \tag{1}$$

túrinde jazıwǵa boladı. Solay etip $\rho(A)$ nı tabıw máselesi (1) integrallıq teńlemeni sheshiwge alıp kelinedi.

Usıǵan uqsas, sırtqı Dirixle máselesin sheshiw

$$\rho(A)=-\frac{1}{2\pi}f(A)-\iint_S \rho(P)K(A;P)dS \tag{2}$$

integrallıq teńlemeni sheshiwge alıp kelinedi.

Mısal 1. Laplas teńlemesiniń $z\geq 0$ yarım keńislikte $u|_S=f(P)$ shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesin qarastırayıq, bul jerde $S=\{(x,y,0)\}$.

Sheshiliwi. Bul máseleniń sheshimin qos qatlam potencialı kóriniste

$$u(x,y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\xi,\eta)\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}d\xi d\eta,\ \ r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2$$

formulası menen esaplaymız, bul jaǵdayda $\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}=\frac{z}{r^2}$. (1) integrallıq teńlemeniń yadrosı nol`ge teń bolǵanlıǵı sebepli qos qatlam potencialınıń tıǵızlıǵı $\rho(P)=\frac{f(P)}{2\pi}$ bolıp, sheshim

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}d\xi d\eta$$

túrine iye boladı.

Egerde qarastırılıp atırǵan Dirixle máselesiniń sheshimin ápiwayı qatlam potencialı kóriniste izlesek, onda potencial tıǵızlıǵın anıqlaw ushın (1) ge salıstırǵanda bir qansha quramalı bolǵan Fredgol`mnıń birinshi túr integrallıq teńlemesine iye bolamız. Eger V oblastı ápiwayı bolsa, onda bunday shegaralıq máselelerdi sheshiwde Grin funkciyası usılı qolaylı boladı.

1.2. Tegisliktegi Dirixle máselesiniń sheshimi. Meyli $\Delta u=0,\ u\big|_L=f$ Dirixle máselesin qarastırayıq. Aldınǵı punktte qarastırılǵan máselege uqsas sheshim

$$u(A)=\int_L\rho(P)\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}dl$$

kóriniste izlenedi. Potencial tıǵızlıǵı $\rho(A)$ nı anıqlaw ushın

$$\pi\rho(A)=f(A)+\int_L\rho(P)K(A;P)dl$$

integrallıq teńlemege iye bolamız, bul jerde $\vec{r}=\overrightarrow{AP},\ \vec{n}$ –iymekliktiń P tochkasındaǵı ózgeriwshi normal, $K(A,P)=\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}$.

Sońǵı integrallıq teńlemeni

$$\pi\rho(l_0)=f(l_0)+\int_0^{|L|}\rho(l)K(l_0;l)dl \tag{3}$$

kóriniste jazıwǵa boladı, bul jerde l hám l_0 lar L konturınıń fiksirlengen L tochkasınan belgili bir baǵıtta esaplanǵan LP hám LA doǵalarınıń uzınlıqları, $|L|$ bolsa L konturınıń uzınlıǵı.

Mısal 2. Radiusı R ge teń bolǵan K_R dóńgeleginde $u|_{K_R} = f(P)$ shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın Laplas teńlemesiniń sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Eger A hám P tochkalar sheńber boyında bolsa, onda

$$K(A,P) = \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r} = \frac{1}{2R}$$

bolıp, (3) teńleme

$$\rho(l_0) = \frac{1}{\pi} f(l_0) + \frac{1}{\pi} \int_{K_R} \frac{1}{2R} \rho(l) dl$$

túrine iye boladı. Bul integrallıq teńlemeniń sheshimi

$$\rho(l) = \frac{1}{\pi} f(l) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{K_R} f(l) dl$$

boladı. Onda bul tıǵızlıqqa sáykes sheshim, yaǵnıy qos qatlam potencialı

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(t-\theta) + \rho^2} dt$$

túrindegi Puasson integralı bolıp tabıladı.

1.3. Neyman máselesiniń sheshimi. Meyli Neymannıń

$$\Delta u(A) = 0, \ A \in V, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f \tag{5}$$

shegaralıq máselesin qarastırayıq.

Neymannıń ishki máselesiniń sheshimge iye bolıwınıń zárúrli shárti

$$\iint_S f(P) dS = 0$$

teńliginiń orınlanıwı bolıp tabıladı.

Neyman máselesiniń Dirixle máselesinen parqı (4),(5) Neyman máselesi ápiwayı qatlam potencialı bolǵan

$$u(A) = \iint_S \frac{\rho(P)}{r^2} dS$$

kóriniste izlenedi. Bunnan ápiwayı potencial qatlam qásiyetleri boyınsha ishki Neyman máselesine teń kúshli bolǵan

$$2\pi\rho(A) = f(A) - \iint_S \rho(P) K^*(A,P) dS$$

integrallıq teńlemesine iye bolamız, bul jerde

$$K^*(A,P) = \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}.$$

Sırtqı Neyman máselesi ushın joqarıdaǵı integrallıq teńlemeniń ań jaǵı qarama-qarsı belgige iye boladı.

Tegisliktegi Neyman máselesi ápiwayı qatlam potencialı bolǵan

$$u(A) = \int_L \rho(P) \ln\frac{1}{r} dl$$

kóriniste izlenedi hám ishki Neyman máselesi ushın tıǵızlıq

$$\pi\rho(A) = f(A) - \int_L \rho(P) K^*(A,P) dl,$$

integrallıq teńlemesin sheshiw arqalı anıqlanadı, al sırtqı Neyman máselesi ushın onıń ań jaǵındaǵı belgi ózgeredi, bul jerde

$$K^*(A,P) = \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}.$$

§2. Grin funkciyasınıń Dirixle hám Neyman máseleleri ushın qollanıwları

2.1. Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesiniń Grin funkciyası. Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesin sheshiwdiń Grin funkciyası usılı ápiwayı differenciallıq teńlemeler ushın shegaralıq máselelerdi sheshiwdiń Grin funkciyası usılına tiykarlanǵan.

Dáslep, izleniwshi sheshimdi dúziw payıtında sheshiwshi rol` atqaratuǵın Grin funkciyası anıqlamasına alıp keletuǵın járdemshi máseleni qarastıramız. Bul másele tómendegishe qoyıladı: shekli Ω oblastta garmonikalıq, al onıń S betinde bolsa berilgen $-\dfrac{1}{4\pi r}$ mánisine teń bolatuǵın $\vartheta_{M_0} = \vartheta_{M_0}(M)$ funkciyasın tabıń.

Bul Dirixle máselesi sheshiminiń bar hám onıń birden-bir ekenligin dálillewge boladı. Aytayıq, bul másele sheshilgen, yaǵnıy $\vartheta_{M_0}(M)$ funkciyası tabılǵan bolsın. Bul tabılǵan $\vartheta_{M_0}(M)$ funkciyası, oblast` ishindegi mánisin usı oblast` shegarasındaǵı mánisi arqalı ańlatatuǵın garmonikalıq funkciyanı beretuǵın formulanı keltirip shıǵarıwǵa járdem beredi.

Meyli $u(M)$ funkciyası S beti menen shegaralanǵan tuyıq Ω oblastta garmonikalıq funkciya bolsın. Onda $u(M)$ funkciyasınıń tuyıq Ω oblast` ishindegi mánisin, onıń S shegarasındaǵı óziniń hám normal tuwındısınıń mánisleri arqalı ańlatatuǵın

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)ds \qquad (1)$$

formula bizge tanıs. Endi

$$\iiint_\Omega(\vartheta\Delta u-u\Delta\vartheta)dV=\iint_S\left(\vartheta\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\right)ds$$

Grin formulasın $u(M)$ hám $\vartheta_{M_0}(M)$ garmonikalıq funkciyalarına qollanamız, bul jerde $\vartheta_{M_0}(M)$ funkciyası shekli Ω oblastta garmonikalıq, al onıń S betinde bolsa berilgen $-\frac{1}{4\pi r}$ mánisine teń. Onda

$$\iint_S\left[u(M)\frac{\partial\vartheta_{M_0}(M)}{\partial n}-\vartheta_{M_0}(M)\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]ds=0$$

teńligin, yamasa $\vartheta_{M_0}(M)$ funkciyasınıń shegaradaǵı mánisin esapqa alsaq

$$\iint_S\left[u(M)\frac{\partial\vartheta_{M_0}(M)}{\partial n}+\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]ds=0$$

bolıp, bul keyingi teńlikti (1) den ayırsaq

$$u(M_0)=\iint_S\left(\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u(M)}{\partial n}-\frac{1}{4\pi}u(M)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-u(M)\frac{\partial u_{M_0}(M)}{\partial n}-\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial\vartheta(M)}{\partial n}\right)ds=$$

$$=-\iint_S u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi r}+\vartheta_{M_0}(M)\right]ds$$

boladı. Solay etip

$$u(M_0) = -\iint_S u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi r} + \vartheta_{M_0}(M)\right]ds \tag{2}$$

teńligine iye bolamız. Integral astındaǵı

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} + \vartheta_{M_0}(M) \tag{3}$$

funkciyası Dirixle máselesi ushın Grin funkciyası dep ataladı.

Anıqlama. Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesiniń Grin funkciyası dep tómendegi shártlerdi qanaatlandıratuǵın $G(M, M_0)$ funkciyasına aytıladı:

1. $G(M, M_0)$ funkciyası Ω oblasttıń M_0 tochkasınan basqa barlıq jerde garmonikalıq funkciya boladı.

2. Barlıq M ushın S betinde $G(M, M_0)$ funkciyası

$$G(M, M_0)\big|_S = 0$$

shártin qanaatlandıradı.

3. Ω oblastıńda $G(M, M_0)$ funkciyası (3) formula menen anıqlanadı, bul jerde r degenimiz, M hám M_0 tochkalar arasındaǵı aralıq, $\vartheta_{M_0}(M)$ bolsa garmonikalıq funkciya.

Grin funkciyası járdeminde $u(M_0)$ sheshim

$$u(M_0) = -\iint_S u(M)\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n}ds$$

formulası menen anıqlanadı.

Meyli Grin funkciyası belgili bolsın. Onda Laplas teńlemesi ushın $\Delta u = 0,\ u(M)\big|_S = \varphi(M)$ Dirixle máselesiniń sheshimin

$$u(M_0) = -\iint_S \varphi(M)\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n}ds$$

formulası menen anıqlawǵa boladı.

Eger Dirixle máselesi $\Delta u = f(M),\ u(M)\big|_S = \varphi(M)$ túrinde Puasson teńlemesi ushın berilse, onda Grin funkciyası járdeminde sheshim

$$u(M_0) = -\iint_S \varphi(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}ds - \iiint_\Omega f(M)G(M,M_0)dV$$

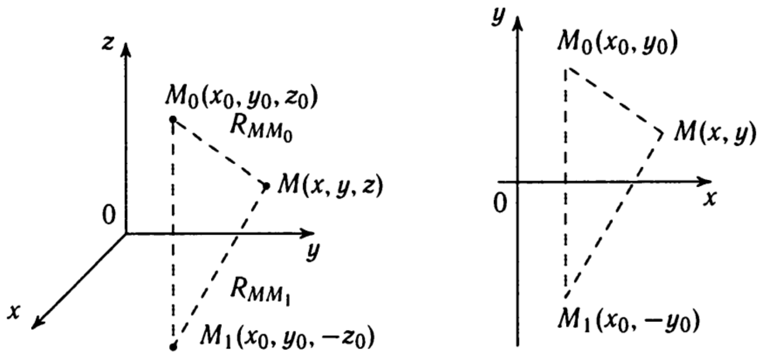
formulası menen anıqlanadı.

2.2. Grin funkciyasın dúziw usılları. Grin funkciyasın dúziw usıllarınıń biri sáwlelendiriw usılı bolıp esaplanadı. Mısal ushın Puasson teńlemesi ushın Dirixle máselesiniń Grin funkciyası yarım keńislik $(z > 0)$ jaǵdayında

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_1}} \tag{4}$$

kóriniske iye boladı, bul jerde R_{AB} degenimiz A tochkadan B tochkaǵa shekemgi aralıq; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ joqarǵı yarım keńislikte $(z > 0)$ jatıwshı tochka; $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ degenimiz $z = 0$ tegisligine qarata M_0 tochkasına simmetriyalı bolǵan tochka; $M(x, y, z)$ bolsa $z > 0$ yarım keńisliginiń erikli tochkası.

Fizikalıq kóz qarastan qaraǵanda Grin funkciyasın M_0 hám M_1 tochkalarındaǵı tochkalıq zaryadtan payda bolǵan potenciallıq maydan sıpatında qarastırıwǵa boladı. Onda $M(x, y, z)$ tochkadaǵı potencial (4)



formula menen anıqlanatuǵın Grin funkciyasına teń boladı.

Yarım $(y > 0)$ tegislik jaǵdayında Grin funkciyası $M(x, y)$ tochkadaǵı potencial menen, yaǵnıy

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_1}} \tag{5}$$

formulası menen anıqlanadı.

Endi tómende Grin funkciyası járdeminde sheshiletuǵın, yarım tegisliktegi Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselelerin qarastırayıq.

Mısal 1. Laplas teńlemesi ushın

$$\Delta u = 0, \quad y > 0, -\infty < x < +\infty,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

Dirixle máselesin Grin funkciyası járdeminde sheshiń.

Sheshiliwi. Eger $M_0 = M_0(x,y)$, $M = M(t,s)$ dep alsaq, onda (5) formula járdeminde Grin funkciyası

$$G(x,y,t,s) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-t)^2+(y-s)^2}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-t)^2+(y+s)^2}}$$

kóriniske iye boladı. Onda

$$\left.\frac{\partial G}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{(x-t)^2+y^2}$$

bolıp, sheshim

$$u(x,y) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\frac{\partial G(x,y,t,0)}{\partial s}dt = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^2+y^2}dt$$

boladı.

Mısal 2. Eger $u(x,0) = \dfrac{x}{1+x^2}$ ekenligi málim bolsa, onda $y > 0$ yarım tegisliginde $u(x,y)$ garmonikalıq funkciyanı tabıń.

Sheshiliwi. Aldıńgı mısal boyınsha $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ ushın bul garmonikalıq funkciya

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^2+y^2}dt = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)\left((x-t)^2+y^2\right)}dt = \frac{x}{x^2+(1+y)^2}$$

túrine iye boladı.

Mısal 3. Laplas teńlemesi ushın

$$\Delta u = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad z > 0,$$

$$u(x,y,0) = \cos x \cos y, \quad -\infty < x, y < +\infty$$

Dirixle máselesin Grin funkciyası járdeminde sheshiń.

Sheshiliwi. Izleniwshi sheshim

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\varsigma\cos\eta}{\left[(\varsigma-x)^2+(\eta-y)^2+z^2\right]^{3/2}}d\varsigma d\eta$$

integralın esaplaw arqalı anıqlanadı. Bul integraldı esaplaw ushın $\varsigma-x=u,\ \eta-y=\vartheta$ belgilewin kiritemiz. Sonda

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(u+x)\cos(\vartheta+y)}{\left[u^2+\vartheta^2+z^2\right]^{3/2}}dud\vartheta=$$

$$=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\cos u\cos x-\sin u\sin x)(\cos\vartheta\cos y-\sin\vartheta\sin y)}{\left[u^2+\vartheta^2+z^2\right]^{3/2}}dud\vartheta=$$

$$=\frac{z}{2\pi}\cos x\cos y\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos u\cos\vartheta}{\left[u^2+\vartheta^2+z^2\right]^{3/2}}dud\vartheta=e^{-z\sqrt{2}}\cos x\cos y$$

boladı.

Qosımsha sorawlar

1. Potenciallar teoriyası haqqında maǵlıwmat keltiriń.
2. Vektorlıq maydannıń potencialı dep nege aytamız?
3. Potenciallar teoriyasında tayanısh rolin atqaratuǵın qanday sheshimlerdi bilesiz?
4. Potencial tıǵızlıǵı degende ne túsinesiz?
5. Potenciallar fundamentallıq sheshim járdeminde qanday anıqlanadı?
6. Potencialdıń qanday túrlerin bilesiz?
7. Qanday potencialǵa N`yuton potencialı dep aytıladı?
8. Qanday potencialǵa logarifmlik potencial dep aytıladı?
9. Qanday potencialǵa ápiwayı qatlam potencialı dep aytıladı?
10. Qanday potencialǵa qos qatlam potencialı dep aytıladı?
11. Keńisliktegi Dirixle máselesi potenciallar járdeminde qalay sheshiledi?
12. Tegisliktegi Dirixle máselesi potenciallar járdeminde qalay sheshiledi?
13. Garmonikalıq analizdegi Puasson integralı dep qanday integralǵa

aytıladı?

14. Puasson integralı garmonikalıq funkciyalardıń qanday mánisleri arasında óz-ara baylanıs ornatadı?

15. Neyman máselesi potenciallar járdeminde qalay sheshiledi?

16. Laplas teńlemesi ushın úshinshi shegaralıq másele potenciallar járdeminde qalay sheshiledi?

17. Puasson teńlemesi ushın shegaralıq máseleler potenciallar járdeminde qalay sheshiledi?

18. Shegaralıq máseleler ushın Grin funkciyası degende ne túsinesiz?

19. Ádettegi differenciallıq teńlemeler ushın shegaralıq máselelerdiń Grin funkciyası qalay dúziledi?

19. Shegaralıq máselelerdiń Grin funkciyası málim bolǵan jaǵdayda onı qanday máselede qollanıladı?

20. Laplas teńlemesi ushın Grin funkciyası qalay dúziledi?

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar

I. 1) $r<R$ dóńgelek ushın $\rho=\rho(r)$ tıǵızlıqqa iye maydan potencialın tabıń;
2) $r<R$ dóńgelek ushın $\rho=\rho_0=const$ tıǵızlıqqa iye maydan potencialın tabıń;
3) $r<R$ dóńgelek ushın $\rho=r$ tıǵızlıqqa iye maydan potencialın tabıń;
4) $r<R$ dóńgelek ushın $\rho=r^2$ tıǵızlıqqa iye maydan potencialın tabıń;
5) $R_1<r<R_2$ saqıyna ushın $\rho=\rho_0=const$ tıǵızlıqqa iye maydan potencialın tabıń;
6) $|x|=R$ sferada turaqlı $\rho=\rho_0$ tıǵızlıqqa iye ápiwayı qatlam potencialın tabıń;
7) $|x|=R$ sferada turaqlı $\rho=\rho_0$ tıǵızlıqqa iye qos qatlam potencialın tabıń;
8) Radiusı R ge teń bolǵan sheńber ushın $\rho=\rho_0=const$ tıǵızlıqqa iye ápiwayı qatlamnıń logariflik potencialın tabıń;
9) Radiusı $R=2$ ge teń bolǵan sheńber ushın $\rho=\cos^2\varphi$ tıǵızlıqqa iye ápiwayı qatlamnıń logariflik potencialın tabıń;
10) Radiusı R ge teń bolǵan sheńber ushın $\rho=\rho_0=const$ tıǵızlıqqa iye qos qatlamnıń logariflik potencialın tabıń.

II. Tómendegi shegaralıq máseleler ushın Grin funkciyasın dúziń

1) $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \ \ y(1) = 0;$

2) $y'' + y = f(x), \quad y'(0) = 0, \ \ y(\pi) = 0;$

3) $y'' + y' = f(x), \quad y(0) = 0, \ \ y'(1) = 0;$

4) $y'' - y = f(x), \quad y'(0) = 0, \ \ y(2) + y'(2) = 0;$

5) $y'' + y = f(x), \quad y(0) = y(\pi), \ \ y'(0) + y'(\pi) = 0;$

6) $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \ \ y(x)$, $x \to \infty$ da shegaralanǵan;

7) $y'' + y' = f(x), \quad y'(0) = 0, \ \ y(+\infty) = 0;$

8) $xy'' - y = f(x), \quad y'(1) = 0, \ \ y(2) = 0;$

9) $xy'' + y' = f(x), \quad y(1) = 0, \ \ y(x)$, $x \to \infty$ da shegaralanǵan

10) $y'' - y = f(x), \quad y(x) \ \ x \to \pm\infty$ da shegaralanǵan.

III. R^3 keńisliginde berilgen tómendegi oblastlar ushın Grin funkciyasın dúziń

1) $x_3 > 0$ yarım keńislikte;

2) $x_2 > 0, \ x_3 > 0$ eki jaqlı múyeshte;

3) $x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ x_3 > 0$ oktantta;

4) $|x| < R$ sharda;

5) $|x| < R, \ x_3 > 0$ yarım sharda;

6) $|x| < R, \ x_2 > 0, \ x_3 > 0$ shar bóleginde;

7) $|x| < R, \ x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ x_3 > 0$ shar bóleginde.

IV. f hám u_0 lardıń tómende berilgen mánisleri ushın

$$\Delta u = -f(x), \quad x_3 > 0; \quad u\big|_{x_3=0} = u_0(x)$$

Dirixle máselesiniń sheshimin tabıń:

1) f, u_0 lar úzliksiz hám shegaralanǵan;

2) $f = 0, \ \ u_0 = \cos x_1 \cos x_2;$

3) $f = e^{-x_3 \sin x_1 \cos x_2}, \quad u_0 = 0;$

4) $f = 0, \ \ u_0 = \theta(x_2 - x_1);$

5) $f = 0, \ \ u_0 = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1/2};$

6) $f=2\left(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right)^{-2}$, $u_0=(1+x_1^2+x_2^2)^{-1}$.

V. $u_0(x)$ tıń tómende berilgen mánisleri ushın

$$\Delta u=0,\quad x_2>0,\ x_3>0;\quad u\big|_S=u_0(x)$$

Dirixle máselesiniń sheshimin tabıń:

1) u_0 bólek úzliksiz hám shegaralanǵan;

2) $u_0\big|_{x_2=0}=0,\quad u_0\big|_{x_3=0}=e^{-4x_1}\sin 5x_2$;

3) $u_0\big|_{x_2=0}=0,\quad u_0\big|_{x_3=0}=x_2(1+x_1^2+x_2^2)^{-3/2}$.

VI. $0<y<\pi,\ x>0$ yarım jolaqta $\Delta u=0$ Laplas teńlemesiniń tómendegi shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıń:

1) $u\big|_{x=0}=1,\ u\big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=\pi}=0$;

2) $u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{y=0}=\sin x,\ u\big|_{y=\pi}=0$;

3) $u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{y=0}=thx,\ u\big|_{y=\pi}=thx$;

4) $u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=\pi}=thx$.

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları

I. 1) $\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\rho(r_1)\ln\dfrac{1}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\varphi_1-\varphi)}}r_1dr_1d\varphi$;

2) $-\pi R^2\rho_0\ln r,\ r\geq R;\quad -\pi\rho_0\left(R^2\ln R-\dfrac{R^2-r^2}{2}\right),\ r\leq R$;

3) $-\dfrac{2}{3}\pi R^2\ln r,\ r\geq R;\quad \dfrac{2\pi}{9}[R^3(1-3\ln R)-r^3],\ r\leq R$;

4) $-\dfrac{\pi}{2}R^4\ln r,\ r\geq R;\quad \dfrac{\pi}{8}[R^4(1-4\ln R)-r^4],\ r\leq R$;

5) $\pi\rho_0(R_1^2-R_2^2)\ln r,\ r\geq R_2;\quad \pi\rho_0(R_1^2\ln r-R_2^2\ln R_2+\dfrac{R_2^2-r^2}{2}),\ R_1\leq r\leq R_2$;

$\pi\rho_0(R_1^2\ln R_1-R_2^2\ln R_2+\dfrac{R_2^2-R_1^2}{2}),\ r\leq R_1$; **Kórsetpe.** 2-máseleniń shıǵarılıwına qarań.

6) $\dfrac{4\pi R^2\rho_0}{|x|},\ |x|\ge R;\quad 4\pi R\rho_0,\ |x|\le R;$

7) $0,\ |x|>R;\quad -4\pi\rho_0,\ |x|<R;\quad -2\pi\rho_0,\ |x|=R;$

8) $-2\pi R\rho_0\ln r,\ r\ge R;\quad -2\pi R\rho_0\ln R,\ r\le R;$

9) $-2\pi\ln 2+\dfrac{\pi}{8}r^2\cos 2\varphi,\ r\le 2;\quad -2\pi\ln r+\dfrac{2\pi}{r^2}\cos 2\varphi,\ r\ge 2;$

10) $0,\ r>R;\quad -2\pi\rho_0,\ r<R,\ -\pi\rho_0,\ r=R.$

II. 1) $G(x,s)=\begin{cases}(s-1)x, & 0\le x\le s,\\ s(x-1), & s\le x\le 1;\end{cases}$ 2) $G(x,s)=\begin{cases}\sin s\cdot\cos x, & 0\le x\le s,\\ \cos s\cdot\sin x, & s\le x\le \pi;\end{cases}$

3) $G(x,s)=\begin{cases}e^s(e^{-x}-1), & 0\le x\le s,\\ 1-e^s, & s\le x\le 1;\end{cases}$ 4) $G(x,s)=\begin{cases}-e^{-s}chx, & 0\le x\le s,\\ -e^{-x}\operatorname{ch}s, & s\le x\le 2;\end{cases}$

5) $G(x,s)=\dfrac{1}{2}\sin|x-s|;$ 6) $G(x,s)=\begin{cases}-x, & 0\le x\le s,\\ -s, & s\le x<\infty;\end{cases}$

7) $G(x,s)=\begin{cases}-1, & 0\le x\le s,\\ -e^{s-x}\operatorname{ch}s, & s\le x<\infty;\end{cases}$ 8) $G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{s^2-4}{2s^2}, & 1\le x\le s,\\ \dfrac{x^2-4}{2s^2}, & s\le x\le 2;\end{cases}$

9) $G(x,s)=\begin{cases}-\ln x, & 1\le x\le s,\\ -\ln s, & s\le x<\infty;\end{cases}$ 10) $G(x,s)=-\dfrac{1}{2}e^{|x-s|}.$

III. Juwaplarda $y_{mnk}=\left((-1)^m y_1,(-1)^n y_2,(-1)^k y_3\right),\ y^*_{mnk}=\dfrac{R^2}{|y|^2}y_{mnk},\ |y_{mnk}||y^*_{mnk}|=R^2$

belgilewler kiritilgen. 1) $\dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{k=0}^{1}\dfrac{(-1)^k}{|x-y_{00k}|};$ 2) $\dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{n,k=0}^{1}\dfrac{(-1)^{n+k}}{|x-y_{0nk}|};$

3) $\dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{m,n,k=0}^{1}\dfrac{(-1)^{m+n+k}}{|x-y_{mnk}|};$ 4) $\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{|x-y|}-\dfrac{R}{|y||x-y^*|}\right);$

5) $\dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{k=0}^{1}(-1)^k\left(\dfrac{1}{|x-y_{00k}|}-\dfrac{R}{|y||x-y^*_{00k}|}\right);$ 6) $\dfrac{1}{4\pi}\sum\limits_{n,k=0}^{1}(-1)^{n+k}\left(\dfrac{1}{|x-y_{0nk}|}-\dfrac{R}{|y||x-y^*_{0nk}|}\right);$

7) $\frac{1}{4\pi}\sum_{m,n,k=0}^{1}(-1)^{m+n+k}\left(\frac{1}{|x-y_{mnk}|}-\frac{R}{|y||x-y^*_{mnk}|}\right).$

IV. 1) $\frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{y_3=0}\frac{u_0(y)}{|x-y|^3}dS_y+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{y_3>0}f(y)\left(\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|x-y_{001}|}\right)dy;$

2) $e^{-\sqrt{2}x_3}\cos x_1\cos x_2$; 3) $(e^{-\sqrt{2}x_3}-e^{-x_3})\sin x_1\cos x_2$; 4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}\,x_3}$;

5) $\left(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right)^{-1/2}$; 6) $\left(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right)^{-1}$.

V. 1) $\frac{x_2}{2\pi}\int\limits_{\substack{y_2=0\\y_3\ge0}}u_0(y)\left(\frac{1}{|x-y|^3}-\frac{1}{|x-y_{001}|^3}\right)dS_y+\frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{\substack{y_2\ge0\\y_3=0}}u_0(y)\left(\frac{1}{|x-y|^3}-\frac{1}{|x-y_{010}|^3}\right)dS_y;$

2) $e^{-4x_1-3x_3}\sin 5x_2$; 3) $x_2\left(x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2\right)^{-3/2}$.

VI. 1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{\sin^2 y-sh^2 y}{2\sin y\,shx}$; 2) $\frac{\sin x\ sh(\pi-y)}{\mathrm{sh}\,\pi}$; 3) $\frac{shx}{chx+\sin y}$;

4) $\frac{x\sin 2y+ysh2x-\pi\sin y\,shx}{\pi(ch2x+\cos 2y)}$.

VI-BAP. INTEGRALLIQ TÚRLENDIRIWLER USILI

Tayanısh sózler: integrallıq túrlendiriwler, Laplas túrlendiriwi, Fur`e túrlendiriwi, Fur`eniń sinus túrlendiriwi, Fur`eniń kosinus túrlendiriwi, Mellin túrlendiriwi, Lyapunov teńligi.

Tiykarǵı túsinikler hám belgilewler

Integrallıq túrlendiriw – $F(x) = \int\limits_{\tilde{A}} K(x,t) f(t)dt$

túrindegi funkcionallıq túrlendiriw bolıp tabıladı, bul jerde $f(t)$ *–original funkciya,* $F(x)$ *–súwretleniwi,* $K(x,t)$ *–túrlendiriw yadrosı,* $\tilde{A}$ *–ulıwma alǵanda kompleksli evklid keńisliginiń oblastı.*

Laplas túrlendiriwi – $K(x,t) = e^{-xt}$ *hám* $\tilde{A} = R_+^1$ *bolǵan jaǵdaydaǵı integrallıq túrlendiriw.*

$0 \le n < \infty$ *ushın* $f(n)$ *izbe-izliktiń diskret Laplas túrlendiriwi – bul, periodı* 2π *bolǵan periodlı* $F(x) = \sum\limits_n f(n)e^{-nx}$ *túrindegi kompleks ózgeriwshili funkciya.*

Fur`e túrlendiriwi – $K(x,t) = e^{-ixt}$ *hám* $\tilde{A} = R^n$ *bolǵan jaǵdaydaǵı integrallıq túrlendiriw.*

Fur`eniń sinus túrlendiriwi – $K(x,t) = \sin xt$ *hám* $\tilde{A} = R_+^1$ *bolǵan jaǵdaydaǵı integrallıq túrlendiriw.*

Fur`eniń kosinus túrlendiriwi – $K(x,t) = \cos xt$ *hám* $\tilde{A} = R_+^1$ *bolǵan jaǵdaydaǵı integrallıq túrlendiriw.*

Mellin túrlendiriwi – $K(x,t) = t^{x-1}$ *hám* $\tilde{A} = R_+^1$ *bolǵan jaǵdaydaǵı integrallıq túrlendiriw.*

Oram túrlendiriwi – $K(x,t) = G(x-t)$ *hám* $\tilde{A} = R^1$ *bolǵan jaǵdaydaǵı integrallıq túrlendiriw.*

Differenciallıq teńlemelerdi integrallawdıń kópshilik metodları klassikalıq metodlar bolıp tabıladı. Bul metodlardıń ishinde ayırımları, aytayıq matematikalıq fizikanıń shegaralıq máselelerin sheshiwge tiykarlanǵan bolsada bul usıllardı ámeliy máselelerdi sheshiwge qollanıw, yaǵnıy praktikada qollanıw bazı-bir qıyınshılıqlardı tuwdıradı. Sheshimleri elementar funkciyalarda alınatuǵın differenciallıq teńlemeler klassı júdá az bolıwına baylanıslı, sheshimdi belgili funkciyalar arqalı yamasa salıstırmalı ápiwayıraq bolǵan teńlemelerdi sheshiw arqalı alıw múmkinshiligin qarastırıwǵa tuwra keledi.

Keyingi dáwirlerde turaqlı koefficientli sızıqlı differenciallıq teńlemelerdi sheshiwde qollanılıp atırǵan integrallıq túrlendiriwler usılı fizikler arasında, sonday-aq ayırım injenerler arasında úlken qızıǵıwshılıq tuwdırmaqta. Bul metodtıń tiykarǵı mańızı sonnan ibarat bolıp, qarastırılıp atırǵan differenciallıq teńlemeni sheshiw Fur`e yamasa Laplas túrlendiriwi járdeminde berilgen máseleni sheshiwge salıstırǵanda bir qansha jeńil bolǵan algebralıq teńlemeni sheshiwge alıp kelinedi. Klassikalıq metodlarǵa salıstırǵanda bul metodtıń tek usı aytqan, esaplaw barısın azaytıw jaǵınan jeńillik tuwdırmay, al ol sheshimdi izzertlewshige qolaylı formada alıwǵa múmkinshilik jaratadı.

Integrallıq túrlendiriwler usılı tek ádettegi differenciallıq teńlemelerdi emes, al berilgen baslanǵısh hám shegaralıq shártlerge iye dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdi sheshiwde de eń qolaylı usıllardıń biri bolıp tabıladı.

Dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerge qollanılatuǵın integrallıq túrlendiriwler usılınıń tiykarǵı mańızı sonnan ibarat bolıp, onda saylap alınǵan integrallıq túrlendiriwler járdeminde berilgen differenciallıq teńleme, ǵárezsiz ózgeriwshi argumenti bir birlikke azayǵan differenciallıq teńlemelerge alıp kelinedi. Mısal ushın eki ǵárezsiz ózgeriwshi argumentlerge iye dara tuwındılı differenciallıq teńleme integrallıq túrlendiriwler usılın qollanǵannan keyin ádettegi differenciallıq teńlemege alıp kelinedi.

Bul bapta dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdi sheshiwde qolaylılıǵı jaǵınan tańlap alınǵan Laplas hám Fur`eniń integrallıq túrlendiriwleri qarastırıladı.

Fur`e túrlendiriwi tegislik, yarım tegislik, jolaq, yarım jolaq, sheksiz cilindr, yarım cilindr hám taǵı basqa usınday shegaralanbaǵan oblastlarda matematikalıq fizikanıń shegaralıq máselelerin sheshiwde qollanılıdı. Sonıń menen birge bul túrlendiriw járdeminde yadrosı argumentler ayırmasına ǵárezli bolǵan integrallıq teńlemelerde sheshiledi.

Laplas túrlendiriwi ornıqlı bolmaǵan máselelerdi operaciyalıq usıllar járdeminde sheshiw barısında qollanıladı. Sonıń menen birge bul túrlendiriw ushın oram teoreması yadrosı argumentler ayırmasına ǵárezli bolǵan Vol`terranıń integrallıq teńlemelerin sheshwge de múmkinshilik beredi.

§1. Laplas túrlendiriwleri hám onıń qásiyetleri

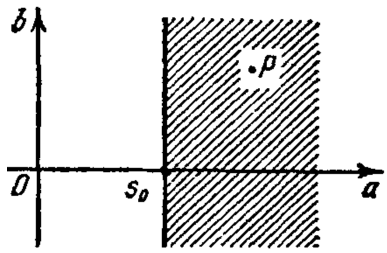
Integrallıq túrlendiriw usılları ayırım differenciallıq teńlemelerdi sheshiwde qolaylı usıllardıń biri bolıp tabıladı. Integrallıq túrlendiriwler arasında Fur`e integralı menen kórsetilgen funkciyalar gruppasınan absolyut integrallanıwshılıq shártin qanaatlandırıwshı funkciyalar klassı júdá tar maǵanada bolǵanlıqtan, bunday funkciyalar klassın keńeytiw maǵanasında ámeliy esaplawlarǵa tiykarlanǵan Laplas túrlendiriwi kóbirek qollanıladı.

Bul paragrafta biz Laplas túrlendiriwine arnalǵan tiykarǵı túsinikler hám onıń bazı-bir áhmiyetli qásiyetlerine toqtap ótemiz.

Meyli haqıyqıy ózgeriwshi t argumenttiń $[0,\infty)$ aralıqta berilgen $f(t)$ funkciyasın qarastırayıq. Ayırım waqıtları $f(t)$ funkciyası $(-\infty,\infty)$ aralıqta anıqlanǵan dep hám esaplaymız, biraq bul jaǵdayda $t<0$ ushın $f(t)\equiv 0$ dep uyǵaramız. Meyli $p=a+ib$ kompleks san ushın

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

funkciyasın qarastırayıq. Eger $|f(t)|<M e^{s_0 t}$ bolsa, onda $F(p)$ funkciyası



$Rep>s_0$ yarım tegislikte analitikalıq funkciya boladı. Haqıyqatında da, $a>s_0$ bolǵanlıqtan

$$|F'(p)|=\left|\int_0^\infty t e^{-at-ibt} f(t)dt\right|\le\int_0^\infty t e^{-at}|f(t)|dt\le\int_0^\infty e^{-at}\cdot tM e^{s_0 t}dt=$$

$$= M\int_{0}^{\infty} te^{-(a-s_0)t}dt < \infty.$$

$F(p)$ funkciyası $f(t)$ funkciyasınıń Laplas túrlendiriwi dep ataladı hám kópshilik waqıtları bul funkciya Laplas túrlendiriwiniń sáwleleniwi depte ataladı. Al $f(t)$ funkciyasınıń ózi Laplas túrlendiriwi ushın orginal funkciya dep ataladı.

Tómendegi úsh qásiyetti qanaatlandıratuǵın $f(t)$ kompleks mánisli funkciyası original funkciya bola aladı:

1). $f(t)$ funkciyası ayırım birinshi túr úzilis tochkalarınan basqa barlıq t kósheriniń boyında jetkilikli dárejedegi joqarı tártipli tuwındıları menen birlikte úzliksiz.

2). Barlıq t nıń teris mánislerinde $f(t) = 0$.

3). $f(t)$ funkciyası kórsetkishli funkciyalardan tez óspeydi, yaǵnıy sonıńday $M > 0,\ s_0 > 0$ sanları bar bolıp, barlıq t lar ushın

$$|f(t)| < M e^{s_0 t}$$

teńsizligi orınlı boladı, bul jerde s_0 sanı $f(t)$ funkciyasınıń ósiw kórsetkishi dep ataladı.

Laplas túrlendiriwi simvolikalıq túrde $F(p) \div f(t)$ kóriniste jazıladı. $F(p)$ súwretleniwi boyınsha $f(t)$ originaldı tabıwǵa múmkinshilik beriwshi keri Laplas túrlendiriwi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-iw}^{s+iw} \cdot e^{pt}F(p)dp$$

formulası menen anıqlanadı.

Ápiwayı original funkciyalarǵa mısal retinde

$$\eta(t) = \begin{cases} 1,\ t > 0, \\ 0,\ t < 0 \end{cases}$$

Xevisayda funkciyasın alıwǵa boladı. Bul funkciyanıń ósiw kórsetkishi $s_0 = 0$ bolıp, Laplas túrlendiriwi

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p}$$

yaǵnıy $\frac{1}{p}\div\eta(t)$ boladı.

Meyli $\varphi(t)$ funkciyası joqarıdaǵı úsh shártti qanaatlandırǵan bazı- bir funkciya bolsın. Onda

$$\varphi(t)\eta(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t>0,\\ 0, & t<0\end{cases}$$

formulası menen anıqlanatuǵın $\varphi(t)\eta(t)$ kóbeymeside original funkciyanıń barlıq shártlerin qanaatlandıratuǵın funkciya boladı.

Kelesi waqıtları $\varphi(t)\eta(t)$ funkciyasınıń ornına qısqalıq ushın $\varphi(t)$ dep jazamız hám bul funkciyanı t nıń teris mánislerinde nol`ge aylanadı dep uyǵaramız.

Laplas túrlendiriwi tómendegi qásiyetlerge iye:

1^0. Qálegen kompleks α hám β turaqlı sanları ushın

$$\alpha\, f(t)+\beta\, g(t)\div\alpha\, F\left(p\right)+\beta\cdot G\left(p\right)$$

túrindegi sızıqlı qásiyetke iye, bul jerde $f(t)\div F\left(P\right),\quad g(t)\div G\left(P\right)$.

Laplas túrlendiriwiniń bul sızıqlılıq qásiyeti menshiksiz integraldıń sáykes qásiyetlerinen kelip shıǵadı.

2^0. Qálegen $\alpha>0$ turaqlı sanı ushın

$$f\left(\alpha\, t\right)\div\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

túrindegi uqsaslıq qaǵıydası orınlı.

3^0. Eger $f'(t)$ original bolsa, onda originaldı differenciallawdıń

$$f'(t)\div pF(p)-f(0)$$

formulası orınlı. Bul qaǵıydanı keńirek maǵanada tómendegi teorema menen berip ótemiz:

Teorema. Eger $f(t) \div F(p)$ hám $f'(t), f''(t), \ldots, f^{n}(t)$ lar dáslepki funkciyalar bolsa, onda

$$f'(t) \div pF(p) - f(0),$$
$$f'(t) \div p^{2}F(p) - pf(0) - f'(0),$$
$$\text{--------------------------------} \qquad (1)$$
$$f^{n}(t) \div p^{n}F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0)\ldots f^{(n-1)}(0)$$

boladı, bul jerde $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to o} f^{(k)}(t), \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$

Dálillew. Súwretleniwdiń anıqlaması boyınsha

$$f'(t) \div \int_{0}^{\infty} e^{-pt} f'(t)dt$$

integraldı bóleklep integrallasaq

$$\int_{0}^{\infty} e^{-pt} f'(t)dt = e^{-pt} f(t)\Big|_{0}^{\infty} + p\int_{0}^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

Al $Rep = s > s_0$ bolǵanlıqtan $\left|e^{-pt} f(t)\right| < Me^{-(s-s_0)t}$ bolıp,

$$\lim_{t \to \infty} e^{-pt} f(t) = 0$$

boladı.

Eger $f(t)$ dáslepki funkciyası $t = 0$ tochkada úzliksiz funkciya bolsa, onda $f(0) = 0$ boladı, sebebi $t < 0$ ushın $f(t) = 0$. Sonlıqtan

$$e^{-pt} f(t)\Big|_{0}^{\infty} = -f(0)$$

teńliginen

$$f'(t) \div pF(p) - f(0), \ Rep > s_0$$

kelip shıǵadı. Endi

$$\int_{0}^{\infty} e^{-pt} f''(t)dt$$

integralın eki ret bóleklep integrallasaq

$$f''(t) \div p^{2}F(p) - pf(0) - f'(0)$$

bolıp, n ushın

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) = \varphi(p)$$

teńligi durıs boladı.

4⁰. Keri differenciallawdıń

$$F'(P) \div -tf(t)$$

formulası orınlı. Keńirek maǵanada tómendegi teorema orınlı.

Teorema. Eger $F(p) \div f(t),\ Rep > s_0$ bolsa, onda

$$f'(p) \div -t\, f(t),$$
$$f''(p) \div (-1)^2 t^2 f(t),$$

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t),\ Rep > s_1 > s_0.$$

Dálillew. $Rep > s_0$ yarım tegisliginde $f(t)$ funkciyası ushın $F(p)$ súwretleniwi analitikalıq funkciya boladı hám $f'(p) \div -t\, f(t)$ ekenligin kórsetiwge boladı. Onda $F(p)$ funkciyası $Rep > s_1$ yarım tegisliginde qálegen tártiptegi tuwındıǵa iye boladı

$$(F'(p))' \div -t(-t\, f(t))$$

yamasa

$$F''(t) \div (-1)^2 t^2 f(t),$$
$$F'''(t) \div -t[(-1)^2 t^2 f(t)] = (-1)^3 t^3 f(t)\text{'}$$

ulıwma alǵanda

$$F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t), \quad Rep > s_1 > s_0$$

5^0. Originaldı hám súwretleniwdi integrallawdıń

$$\int_0^t f(t)dt \div \frac{F(p)}{p}; \quad \int_p^\infty F(p)dp \div \frac{f(t)}{t}$$

formulaları orınlı. Keńirek maǵanada tómendegi teorema orınlı.

Teorema. Eger $f(t) \div F(p),\ Rep > s_0$ bolsa, onda

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p}, \ Rep > s_0. \qquad (2)$$

Dálillew. $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ funkciyası dáslepki funkciyanıń 1), 2) hám 3) shártlerin qanaatlandıradı, sebebi

$$\left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| < \int_0^\tau Me^{s_0\tau}d\tau = \frac{M}{s_0}(e^{s_0 t} - 1) < M_1 e^{s_0 t}$$

bul jerde $M_1 = \frac{1}{s_0}M$ .Sonlıqtan $\varphi(t)$ funkciyası s_0 ósiw kórsetkishine iye dáslepki funkciya boladı.

Meyli $\varphi(t) \div \hat{O}(p), \ Re\, p > s_0$ bolsın. Onda dáslepki funkciyanı differenciallaw qaǵıydası boyınsha

$$\varphi'(t) \div p\hat{O}(p), \varphi(0) = 0,$$

sebebi $\varphi'(t) = f(t)$. Onda $F(p) = p\hat{O}(p)$ bolıp, bunnan $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$ boladı, yaǵnıy (2) formula orınlı boladı.

Teorema. Eger $f(t) \div F(p), \ Rep > s_0$ hám $\int_p^\infty F(p)dp$ integral $Rep > s_1 > s_0$ yarım tegisliginde jıynaqlı bolsa, onda

$$\int_p^\infty F(p)dp \div \frac{f(t)}{t}, \quad Rep > s_1 > s_0$$

integralı orınlı boladı.

Dálillew. $Rep > s_0 + \delta$ yarım tegisliginde

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

Laplas integralı p boyınsha teń ólshemli jıynaqlı boladı. Sonlıqtan bul tegislikte onı p parametri boyınsha p tochkadan shıǵatuǵın hám haqıyqıy kósher menen súyir múyesh jasaytuǵın qálegen nurdan duzilgen kontur boyınsha integrallawǵa boladı

$$\int_p^{\infty} F(p)dp = \int_p^{\infty} dp \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt.$$

Al sol jaǵı jıynaqlı bolǵanlıqtan

$$\int_p^{\infty} dp \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{\infty} f(t)dt \int_p^{\infty} e^{-pt} dp$$

yamasa

$$\int_p^{\infty} F(p)dp = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Sonlıqtan $\frac{f(t)}{t}$ funkciyası dáslepki funkciya bolıp tabıladı.

6^0. Qálegen oń τ sanı ushın

$$f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$$

túrindegi keshigiw qaǵıydası orınlı.

7^0. Qálegen λ kompleks sanı ushın

$$e^{\lambda t} f(t) \div F(p-\lambda)$$

túrindegi orın almasıw qaǵıydası orınlı.

8^0. $F(p)G(p) \div \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

túrindegi kóbeytiw qaǵıydası orınlı. Bul qásiyetti originallardıń oramı olardıń súwretleniwleriniń kóbeymesine teń boladı depte aytıwǵa

boladı, yaǵnıy $f * g = F(p) \cdot G(p)$.

Laplas túrlendiriwleri ushın tiykarǵı originallar hám olardıń súwretleniwleri tablicası

Original $f(t)$	**Súwretleniw** $F(p)$	**Original** $f(t)$	**Súwretleniw** $F(p)$

1	$\dfrac{1}{p}$	$\cos\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$
$t^n,\ n\in Z$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\mathrm{sh}\,\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$t^\alpha,\ \alpha>-1$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$\mathrm{ch}\,\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
$\sin\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$

§2. Laplas túrlendiriwi járdeminde sızıqlı differenciallıq teńlemelerdi sheshiw

2.1.Sızıqlı ádettegi differenciallıq teńlemelerdi sheshiwdiń Laplas túrlendiriwler usılı. Meyli bizge sızıqlı birtekli emes, ádettegi

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t) \qquad (1)$$

differenciallıq teńlemesi berilgen bolıp, bul teńlemeniń

$$x(0)=c_0,\ \ x'(0)=c_1,\ldots,x^{(n-1)}(0)=c_{n-1} \qquad (2)$$

baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw talap etilsin, bul jerde $t\ge 0$, al $a_1,\ a_2,\ldots,a_n$ koefficientleri turaqlı haqıyqıy sanlar. (2) baslanǵısh shártlerdegi belgisiz $x(t)$ funkciyanıń hám olardıń tuwındılarınıń mánisleri $t\to 0+$ ushın esapqa alınadı.

Meyli belgisiz $x(t)$ funkciyası, olardıń $x'(t),\ldots,x^{(n)}(t)$ tuwındıları hám berilgen $f(t)$ funkciyası Laplas túrlendiriwiniń original bolıw shártlerin qanaatlandırsın. Meyli $f(t)\div F(p),\ x(t)\div X(p)$ bolsın. Onda originaldı differenciallaw teoreması boyınsha

$$x'(t)\div pX(p)-c_0,$$

$$x''(t)\div p^2X(p)-pc_0-c_1,$$

....

$$x^{(n-1)}(t) \div p^{n-1}X(p) - p^{n-2}c_0 - \ldots - c_{n-2},$$

$$x^{(n)}(t) \div p^n X(p) - p^{n-1}c_0 - \ldots - c_{n-1}$$

bolıp, túrlendiriwdiń sızıqlılıǵı haqqındaǵı teorema boyınsha

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) \div p^n X(p) -$$

$$-p^{n-1}c_0 - \ldots - c_{n-1} + a_1\left(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}c_0 - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - c_{n-2}\right) + \ldots + a_{n-1}\left(pX(p) - c_0\right) + a_n X(p)$$

boladı, bunnan $f(t) \div F(p)$ bolǵanlıqtan súwretleniwler keńisliginde originaldıń birden birligi haqqındaǵı teorema boyınsha

$$p^n X(p) - p^{n-1}c_0 - \ldots - c_{n-1} + a_1\left(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}c_0 -\right.$$

$$\left.- c_{n-2}\right) + \ldots + a_{n-1}\left(pX(p) - c_0\right) + a_n X(p) = F(p).$$

yamasa

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n\right)X(p) = F(p) + \qquad (3)$$

$$+ p^{n-1}c_0 + \ldots + c_{n-1} + a_1\left(p^{n-2}c_0 + \ldots + c_{n-2}\right) + \ldots + a_{n-1}c_0$$

túrindegi (2) baslanǵısh shártke iye (1) teńlemeniń operatorlıq teńlemesi dep atalatuǵın teńlemesine iye bolamız. Bul teńleme $X(p)$ qarata algebralıq teńleme bolıp tabıladı. Sonlıqtan (3) den $X(p)$ ǵa qarata

$$X(p) = \frac{F(p) + p^{n-1}c_0 + \ldots + a_{n-1}c_0}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n}$$

sheshimge iye bolamız.

Eger (1) teńlemeniń oń jaǵı bolǵan $f(t)$ funkciyası $t^m e^{kt}$ túrindegi funkciyalardıń sızıqlı kombinaciyası bolsa, onda operatorlıq teńlemeniń $X(p)$ sheshimi bólshek racional funkciyalar boladı.

Jayıw teoreması boyınsha yamasa Laplas túrlendiriwiniń qásiyetlerin tikkeley paydalanıw arqalı $X(p)$ súwretleniwi ushın (2) baslanǵısh shártlerdi qanaatlandıratuǵın, (1) teńlemeniń sheshimi bolıp tabılatuǵn $x(t)$ original funkciyanı tabamız.

Mısal 1. Laplas túrlendiriwi járdeminde

$$x'' + x = 2\cos t; \quad x(0) = 0, \;\; x'(0) = -1$$

Koshi máselesin sheshiń.

Sheshiliwi.

$$x(t) = X(p),\, x'(t) = pX(p) - x(0) = pX(p)$$

bolǵanlıqtan

$$x''(t) \div p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1, \quad \cos t \div \frac{p}{p^2+1}$$

bolıp, operatorlıq teńleme

$$p^2 X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1}$$

túrine iye boladı, bunnan

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Endi tabılǵan $X(p)$ súwretleniw ushın $x(t)$ originaldı tabamız. $\frac{1}{p^2+1}$ ushın original $\frac{1}{p^2+1} \div \sin t.$ Al $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$ funkciyasınıń originalın tabıw ushın súwretleniwdi differenciallaw haqqındaǵı teoremanı paydalansaq

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2} \div t\sin t.$$

Demek

$$X(p) = t\sin t - \sin t = (t-1)\sin t$$

bolıp, bunnan originaldıń, yaǵnıy sheshimniń

$$x(t) = (t-1)\sin t$$

kóriniske iye bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı.

2.2. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın Laplas túrlendiriwler usılı. Meyli Laplas túrlendiriwi járdeminde jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın birinshi túr shegaralıq máseleni sheshiw máselesin qarastırayıq. Usı maqsette bir tekli emes

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{4}$$

jıllılıq ótkizgishlik teńlemesiniń

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{5}$$

baslanǵısh shártin hám

$$u(0,t)=\xi(t), \qquad u(l,t)=\eta(t) \tag{6}$$

shegaralıq shártin qanaatlandırıwshı sheshimin tabıw ushın Laplas túrlendiriwin paydalanamız.

$$U(p,x)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt$$

dep belgilesek, onda

$$u_x=\int_0^\infty u_x e^{-pt}dt=U_x, \ u_{xx}=U_{xx}$$

bolıp, originaldı differenciallaw qaǵıydası boyınsha (5) baslanǵısh shártti esapqa alsaq

$$u_t=pU-\varphi(x)$$

boladı. Meyli $\xi(t)=Z(p), \ \eta(t)=w(p)$ bolsın. Onda (6) shegaralıq shártten

$$U\Big|_{x=0}=z(p), \ U\Big|_{x=l}=w(p) \tag{7}$$

boladı. Solay etip (4),(5) aralas máseleni sheshiw

$$a^2\cdot\frac{d^2U}{dx^2}-pU+\varphi(x)+F(x,p)=0 \tag{8}$$

túrindegi ádettegi differenciallıq teńlemeniń (7) shegaralıq shártti qanaatlandırıwshı sheshimin tabıw máselesine alıp kelinedi, bul jerde

$$F(x,p)\div f(x,t).$$

(7),(8) shegaralıq máseleni sheship, oǵan keri Laplas túrlendiriwin qollansaq, onda qarastırılıp atırǵan (2),(5) aralas máseleniń izlenip atırǵan sheshimine iye bolamız.

Mısal 2. Meyli bir ushınan shegaralanǵan birtekli sterjenniń shegaralanǵan ushındaǵı temperatura hámme waqıt turaqlı u_0 ǵa teń bolǵan jaǵdayda dáslepki nollik temperaturaǵa iye bolǵan bul sterjendegi $u(x,t)$ temperaturanıń bólistiriliw nızamın anıqlayıq.

Sheshiliwi. Temperaturanıń bólistiriliw nızamın anıqlaw

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

$$u(x,0)=0,\ u(0,t)=u_0, \quad 0<x<\infty,\ t>0$$

túrindegi birtekli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas máseleni sheshiwge alıp kelinedi.

Máseleni Laplas túrlendiriwi járdeminde sheshiw ushın

$$u(x,t) \div U(x,p),$$

$$u_t \div pU(x,p),$$

$$u_{xx} \div U_{xx}(x,p)$$

qatnasların paydalanamız. Onda operatorlıq teńleme

$$U_{xx}(x,p) - \frac{p}{a^2}U(x,p) = 0 \tag{9}$$

bolıp, bunnan $U(x,p)$ cúwretleniwdiń

$$U(x,p) = C_1 e^{\frac{-x\sqrt{p}}{a}} + C_2 e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}}$$

mánisine iye bolamız. Máseleniń shárti boyınsha $x \to \infty$ ushın $u(x,t)$ hám $U(x,p)$ funkciyaları shegaralanǵan, sonlıqtan $C_2 = 0$ boladı. Endi (9) teńleme ushın $U(0,p) = \frac{u_0}{p}$ shegaralıq shártti paydalansaq, onda $C_1 = \frac{u_0}{p}$ bolıp, bunnan

$$U(x,p) = \frac{u_0}{p} e^{\frac{-x\sqrt{p}}{a}}$$

boladı. Bul súwretleniwge

$$\frac{1}{p} e^{\frac{-x\sqrt{p}}{a}} \div Erf\,\frac{x}{2a\sqrt{t}}$$

qatnasın paydalansaq, $U(x,p)$ ushın tómendegi original funkciyaǵa, yaǵnıy berilgen máseleniń

$$u(x,t) = u_0 \, Erf \, \frac{x}{2a\sqrt{t}}$$

sheshimine iye bolamız, bul jerde

$$Erf \; z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz$$

Mısal 3. Laplas túrlendiriwi járdeminde

$$u_t = u_{xx} + u - f(x), \;\; 0 < x, t < \infty, ,$$

$$u(0,t) = t, \; u_x(0,t) = 0, \quad 0 \le t < \infty$$

shegaralıq máseleni sheshiń.

Sheshiliwi. Laplas túrlendiriwin x ózgeriwshisi boyınsha alıp baramız. Onda

$$u(x,t) \div U(p,t),$$

$$u_t(x,t) \div U_t(p,t),$$

$$u_x(x,t) \div pU(p,t) - t,$$

$$u_{xx}(x,t) \div p^2 U(p,t) - pt, \;\; f(x) \div F(p)$$

bolıp, berilgen teńlemeniń oń hám sol jaǵına Laplas túrlendiriwin qollansaq

$$L[u_t] = L[u_{xx}] + L[u] - L[f(x)]$$

yamasa

$$U_t(p,t) = p^2 U(p,t) - pt + U(p,t) - F(p)$$

boladı. Solay etip, nátiyjede ǵárezsiz t ózgeriwshi boyınsha birinshi tártipli ádettegi differenciallıq teńleme payda boldı, bul jerde p parametr wazıypasın atqaradı. Bul teńlemeni

$$U_t - (1 + p^2)U = -[F(p) + pt]$$

kóriniste jazıp alıp alıp, onıń

$$U(p,t) = Ce^{(1+p^2)t} + \frac{p}{(1+p^2)^2} + \frac{F(p)}{1+p^2} + \frac{p}{1+p^2} t$$

túrindegi ulıwma sheshimin tabamız.

Bul ulıwma sheshimdegi erikli turaqlı C nı nol`ge teń dep alamız, keri jaǵdayda $p \to \infty$ da $U(p,t) \to \infty$ bolıp, súwretleniwdiń bar bolıw shárti buzıladı. Solay etip

$$U(p,t) = \frac{p}{(1+p^2)^2} + \frac{F(p)}{1+p^2} + \frac{p}{1+p^2}t$$

bolıp, buǵan keri Laplas túrlendiriwdi qollanıp, $u(x,t)$ originalǵa qaytıp ótemiz.

$$\frac{p}{1+p^2} \div \cos x$$

hám oram haqqındaǵı teorema boyınsha

$$\frac{p}{(1+p^2)^2} \div \frac{1}{2} x \sin x, \quad \frac{F(p)}{1+p^2} \div \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$$

bolǵanlıqtan, izlenip atırǵan sheshim

$$u(x,t) = t\cos x + \frac{1}{2} x \sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$$

boladı.

Mısal 4. Jińishke birtekli sterjendegi baslanǵısh temperatura nol`ge teń. Eger sterjen` bir ushınan shegaralanbaǵan bolıp $(0 < x < +\infty)$, $u(0,t) = \mu(t)$ bolsa, onda $t > 0$ ushın sterjendegi temperaturanı anıqlań.

Sheshiliwi. Máseleniń matematikalıq qoyılıwı

$$u_t = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x, t < +\infty,$$

$$u(x,0) = 0, \ \ 0 \le x < +\infty,$$

$$u(0,t) = \mu(t), \ \ 0 \le t < +\infty$$

kóriniske iye boladı.

Bul máseleni sheshiw ushın waqıt t ózgeriwshisi boyınsha Laplas túrlendiriwin qollanamız

$$u(x,t) \div U(x,p),$$

$$u_t(x,t) \div pU(x,p),$$

$$u_{xx}(x,t) \div U_{xx}(x,p), \ \mu(t) \div M(p).$$

Endi berilgen teńlemege hám shegaralıq shártine Laplas túrlendiriwin qollansaq

$$U_{xx}-\frac{p}{a^2}U=0,\ U(0,p)=M(p),\ \ U(\infty,p)=0$$

túrindegi x ǵárezsiz ózgeriwshisine qarata ekinshi tártipli turaqlı koefficientli differenciallıq teńleme ushın shegaralıq máselege iye bolamız. Bul shegaralıq máseleniń sheshimi

$$U(x,p)=M(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Endi $u(x,t)$ originalǵa qaytıp ótemiz. Bizge málim

$$M(p)\div\mu(t),\qquad e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\div\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

bolǵanlıqtan, sheshim

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau$$

boladı.

2.3.Tardıń terbelis teńlemesi ushın Laplas túrlendiriwler usılı. Meyli birtekli tardıń terbelis teńlemesi ushın birinshi túr shegaralıq máseleni sheshiw máselesin qarastırayıq. Usı maqsette bir tekli emes

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f\left(x,t\right) \tag{10}$$

terbelis teńlemesiniń

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{11}$$

baslanǵısh shártin hám

$$u(0,t)=\xi(t),\qquad u(l,t)=\eta(t) \tag{12}$$

shegaralıq shártin qanaatlandırıwshı sheshimin tabıw ushın Laplas túrlendiriwin paydalanamız. Eger

$$U(x,p)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt$$

dep alsaq, onda

$$u_x = U_x, \quad u_{xx} = U_{xx}$$

bolıp, originaldı differenciallaw qaǵıydası boyınsha (11) baslanǵısh shártti esapqa alsaq

$$u_t = pU - \varphi(x),$$

$$u_{tt} = p^2U - p\varphi(x) - \psi(x)$$

boladı. Meyli $\xi(t) = Z(p),\ \eta(t) = w(p)$ bolsın. Onda (12) shegaralıq shártten

$$U\Big|_{x=0} = z(p),\ U\Big|_{x=l} = w(p) \tag{13}$$

boladı. Solay etip (10),(11) aralas máseleni sheshiw

$$a^2U_{xx} - p^2U + p\varphi(x) + \psi(x) + F(x,p) = 0 \tag{14}$$

túrindegi ádettegi differenciallıq teńlemeniń (13) shegaralıq shártti qanaatlandırıwshı sheshimin tabıw máselesine alıp kelinedi, bul jerde $F(x,p) \div f(x,t)$.

(13),(14) shegaralıq máseleni sheship, oǵan keri Laplas túrlendiriwin qollansaq, onda qarastırılıp atırǵan (10),(11) aralas máseleniń izlenip atırǵan sheshimine iye bolamız.

Mısal 5. Ushlarınan qattı bekitilgen, uzınlıǵı l ge teń bolǵan birtekli tardıń

$$u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad u(0,t) = u(l,t) = 0$$

erkin terbelis teńlemesi ushın

$$u(x,0) = A\sin\frac{\pi x}{l},\ u_x(x,0) = 0$$

baslanǵısh shártti qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Túrlendiriw jasasaq

$$U_{xx} - \frac{p^2}{a^2}U = -\frac{pA}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l},$$

$$U\Big|_{x=0} = U\Big|_{x=l} = 0$$

túrindegi shegaralıq máselege iye bolıp, bunıń sheshimi

$$U(x,p)=c_1e^{\frac{p}{a}x}+c_2e^{-\frac{p}{a}x}+\frac{Ap}{p^2+\frac{a^2\pi^2}{e^2}}\sin\frac{\pi x}{l}$$

boladı. Bunı shegaralıq shártke aparıp qoyıp, erikli turaqlılardı anıqlasaq

$$U(x,p)=\frac{Ap}{p^2+\frac{a^2\pi^2}{e^2}}sin\frac{\pi x}{l}$$

bolıp, bunıń originalı, yaǵnıy izlenip atırǵan sheshim

$$u(x,t)=A\cos\frac{\pi a}{l}t\cdot\sin\frac{\pi x}{l}$$

boladı.

Mısal 6. Yarım shegaralanǵan tuwrıda

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ \ 0<x,t<+\infty,$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ \ 0\le x<+\infty,$$

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=\varphi(t),\ \ t\ge 0$$

shegaralıq máseleniń sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Berilgen teńlemeniń eki tárepine, baslanǵısh hám shegaralıq shártlerge t ózgeriwshi boyınsha Laplas túrlendiriwin qollanıp, ádettegi differenciallıq teńleme ushın shegaralıq máselege iye bolamız

$$U_{xx}-\frac{p^2}{a^2U}=0,\ 0<x<+\infty,$$

$$U_x(0,p)-hU(0,p)=\Phi(p),$$

bul jerde $\Phi(p)\div\varphi(t)$.

Bul shegaralıq máseleniń sheshimi

$$U(x,p)=-\frac{a\Phi(p)}{ah+p}e^{-\frac{p}{a}x}$$

bolıp, bunnan originalǵa ócek

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & x>at,\\ -ae^{h(x-at)}\int\limits_0^t e^{h\tau}\varphi(\tau)d\tau, & x<at\end{cases}$$

boladı.

§3. Fur`e túrlendiriwi hám onıń qásiyetleri

Meyli ortogonal bolǵan

$$\frac{1}{2};\ \cos\frac{n\pi}{l}t;\ \sin\frac{n\pi}{l}t;\ \ t\in[-l;l];\ n\in N$$

trigonometiyalıq sistemasın qarastırayıq. Bul sistemanıń ortogonallıq qásiyetin paydalanıp, integrallanıwshı erikli $f(t)$ funkciyası ushın $[-l;l]$ aralıqta

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t] \tag{1}$$

qatarına iye bolamız. Bul qatar $f(t)$ funkciyası ushın trigonometriyalıq Fur`e qatarı dep ataladı. Belgisiz a_n hám b_n koefficientleri

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt,\ \ n=0,1,2,...,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt,\ \ n=1,2,..., \tag{2}$$

formulaları menen anıqlanadı. Eger $f(t)$ funkciyasınıń Fur`e qatarın

$$\left\{e^{int},\ n\in Z\right\},\ \ t\in[-\pi,\pi]$$

ortogonal sistemaları boyınsha qarastırsaq, bul jerde

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}e^{-imt}\,dt=\begin{cases}\dfrac{2}{n-m}\sin(n-m)\pi=0,\ n\neq m,\\ 2\pi,\ \ n=m,\end{cases}$$

onda

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{int} \tag{3}$$

bolıp, bul qatar $f(t)$ funkciyasınıń kompleks formadaǵı Fur`e qatarı dep ataladı, bul jerde Fur`e koefficientleri

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt \tag{4}$$

formulası menen anıqlanadı.

(2) teńlikten kosinustıń jup hám sinustıń taq funkciya ekenligin esapqa alsaq $a_n = a_{-n}$ hám $b_n = -b_{-n}$ bolıp, (1) qatardı

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[a_n \cos\frac{n\pi}{l}t + b_n \sin\frac{n\pi}{l}t]$$

túrinde de jazıwǵa boladı. Buǵan (2) formula menen anıqlanatuǵın a_n hám b_n koefficientleriniń mánislerin ákelip qoysaq

$$f(t) = \frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\frac{n\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau.$$

Meyli $f(t) = f(t+2l)$ funkciyası barlıq t kósherinde integrallanıwshı funkciya bolsın. Onda $\frac{n\pi}{l} = \omega_n$, $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l}$, $\omega_n = n\Delta\omega_n$ belgilewlerin paydalansaq, sońǵı teńlikten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta\omega_n \int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

bolıp, bunnan $l \to \infty$ shegin alsaq

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau \tag{5}$$

teńligin alıwǵa boladı. Bunnan kosinustıń ω boyınsha jup funkciya ekenligin esapqa alsaq

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\cos\omega t\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau + \sin\omega t\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau\right)d\omega$$

yamasa

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau$$

belgilewlerin jasaw arqalı

$$f(t) = \int_{0}^{\infty}\big(a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t\big)\,d\omega$$

integralına iye bolamız. Bul integral $f(t)$ funkciyasınıń Fur`e integralı dep ataladı.

Endi ω boyınsha simmetriyalı shekke iye taq funkciyanıń integralı ushın

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau = 0$$

ekenligin esapqa alsaq (5) den

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

yamasa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)[\cos\omega(t-\tau) + i\sin\omega(t-\tau)]\,d\tau$$

hám $\cos\omega(t-\tau) + i\sin\omega(t-\tau) = e^{i\omega(t-\tau)}$ teńligin paydalansaq

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} f(\tau)d\tau$$

yamasa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau)d\tau$$

túrindegi Fur`e integralınıń kompleks formasına iye bolamız. Eger

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt \tag{6}$$

belgilewin jasasaq, onda sońgı Fur`e integralın

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega)d\omega \tag{7}$$

túrinde jazıwǵa boladı.

(6) formula menen anıqlanatuǵın $F(\omega)$ funkciyası $f(t)$ funkciyasınıń Fur`e túrlendiriwi dep ataladı. Al (7) formula keri Fur`e túrlendiriwi dep ataladı.

**3.1. Normallastırılǵan Fur`e túrlendiriwi**. (6) formula menen anıqlanatuǵın Fur`e túrlendiriwi hám (7) formula menen anıqlanatuǵın keri Fur`e túrlendiriwi sáykes (4) formula menen anıqlanatuǵın Fur`e koefficientleriniń hám (3) formula menen anıqlanatuǵın Fur`e qatarınıń ózgertilgen túri bolıp tabıladı, bul jerde Fur`e qatarı $[-\pi,\pi]$ kesindisinde normallastırılmaǵan $\left\{e^{int},\ n\in Z\right\}$ sistemasında bólek-tegis $f(t)$ funkciyası ushın berilgen.

Normallastırılǵan $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int},\ n\in Z\right\}$ sistemasında bólek-tegis $f(t)$ funkciyası ushın Fur`e qatarı $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$ kórinske iye boladı. Onıń Fur`e koefficientleri

$$c_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt$$

formulası menen anıqlanadı. Bul jaǵdayda (6) hám (7) formulalar sáykes túrde

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}f(t)dt$$

hám

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}F(\omega)d\omega \qquad (8)$$

túrine iye boladı.

3.2. Fur`eniń sinus hám kosinus túrlendiriwi. Eger $f(t)$ funkciyası taq funkciya bolsa, onda (8) den

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\omega t d\omega\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t dt$$

al $f(t)$ funkciyası jup funkciya bolsa, onda

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega t d\omega\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t dt$$

bolıp, bularǵa sáykes $F_s(\omega)$ hám $F_c(\omega)$ belgilewlerin paydalansaq

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t dt,\quad f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(\omega)\sin\omega t d\omega$$

túrindegi Fur`eniń sinus túrlendiriwine hám

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos t dt,\quad f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega t d\omega$$

túrindegi Fur`eniń kosinus túrlendiriwine iye bolamız.

Fur`eniń sinus túrlendiriwi ushın tiykarǵı originallar hám olardıń súwretleniwleri tablicası

	$f(x)=\int_0^\infty F(\omega)\sin(\omega x)d\omega,\quad 0<x<\infty$	$F(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)dx,\quad 0<\omega<\infty$
1	$f''(x)$	$\omega^2 F(\omega)+\frac{2}{\pi}\omega f(0)$
2	$f(ax)$	$\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$
3	e^{-ax}	$\frac{2\omega}{\pi(a^2+\omega^2)}$
4	$x^{-1/2}$	$\left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{1/2}$
5	$H(a-x)$	$\frac{2}{\pi\,\omega}[1-\cos(\omega a)]$
6	x^{-1}	1
7	$\frac{x}{x^2+a^2}$	$e^{-\lvert a\rvert\omega}$
8	$\frac{x}{x^4+4}$	$\frac{1}{2}e^{-\omega}\sin\omega$
9	$arctg\,\frac{a}{x}$	$\frac{1-e^{-a\omega}}{\omega}$
10	$-x^2 f(x)$	$\frac{2}{\pi}F''(\omega)$

Fur`eniń kosinus túrlendiriwi ushın tiykarǵı originallar hám olardıń súwretleniwleri tablicası

	$f(x)=\int_0^\infty F(\omega)\cos(\omega x)d\omega,\quad 0<x<\infty$	$F(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)dx,\quad 0<\omega<\infty$
1	$f''(x)$	$-\omega^2 F(\omega)-\frac{2}{\pi}f'(0)$
2	$f(ax)$	$\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$
3	e^{-ax}	$\frac{2a}{\pi(a^2+\omega^2)}$

4	$\delta(x)$	$\frac{2}{\pi}$
5	$x^{-1/2}$	$\left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{1/2}$
6	$H(a-x)$	$\frac{2}{\pi\,\omega}\sin(\omega a)$
7	e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}e^{\omega^2/4a}$
8	$\frac{\sin(ax)}{x}$	$H(a-\omega)$
9	$\frac{a}{x^2+a^2}$	$e^{-a\,\omega}$
10	$-x^2 f(x)$	$\frac{2}{\pi}F''(\omega)$

3.3. Fur`e túrlendiriwiniń ayırım qásiyetleri.

1. Úzliksizligi. Eger $f(t)$ funkciyası original bolsa, onda

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}f(t)dt$$

funkciyası $\omega\in R$ kósherinde úzliksiz boladı hám $\lim\limits_{\omega\to\infty}F(\omega)=0$ boladı.

2. Sızıqlılıǵı. Fur`e túrlendiriwi sızıqlı, yaǵnıy

$$f_1(t)\to F_1(\omega),\;\; f_2(t)\to F_2(\omega),\quad \alpha_1,\alpha_2\in R$$

bolsa, onda

$$\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2\, f_2(t)\to\alpha_1F_1(\omega)+\alpha_2F_2(\omega)$$

orınlı boladı.

3. Súwretleniwdiń túyinlesligi. Eger $f(t)\to F(\omega)$ bolsa, onda $f(-t)\to\bar{F}(\omega)$ boladı.

Dálillew. Anıqlama boyınsha

$$f(-t)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}f(-t)dt.$$

Bul túrlendiriwde $-t=u,\; dt=-du$ belgilewlerin jasasaq

$$f(-t) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega ut} f(u)du = \overline{F}(\omega)$$

boladı.

4. Originaldı jıljıtıw. Eger $f(t) \to F(\omega)$ hám $t_0 \in R$ bolsa, onda

$$f(t \pm t_0) \to e^{\pm i t_0 \omega} F(\omega)$$

Dálillew. Anıqlama boyınsha

$$f(t \pm t_0) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t \pm t_0)dt.$$

Bul túrlendiriwde $t \pm t_0 = u,\ dt = du$ belgilewlerin jasasaq

$$f(t \pm t_0) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(u \mp t_0)} f(u)du = e^{\pm i\omega t_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u)du = e^{\pm i\omega t_0} F(\omega)$$

boladı.

5. Súwretleniwdi jıljıtıw. Eger $f(t) \to F(\omega)$ hám $\omega_0 \in R$ bolsa, onda

$$f(t)e^{\pm i\omega_0 t} \to F(\omega \mp \omega_0).$$

Dálillew. Anıqlama boyınsha

$$f(t)e^{\pm i\omega_0 t} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)e^{\pm i\omega_0 t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega \mp \omega_0)t} f(t)dt = F(\omega \mp \omega_0)$$

6. Uqsaslıq. Eger $f(t) \to F(\omega)$ hám $\alpha \in R$ bolsa, onda

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Dálillew. Anıqlama boyınsha

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(\alpha t)dt.$$

Buǵan $\alpha t = u,\ t = \dfrac{u}{\alpha},\ dt = \dfrac{1}{\alpha} du$ belgilewlerin jasasaq

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{\alpha}ut} f(u)du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

7. Originaldı differenciallaw. Eger $f(t) \to F(\omega)$ hám $f^{(k)}(t),\quad k = 1, 2, ..., n$ funkciyaları absolyut integrallanıwshı bolsa, onda

$$f'(t) \to i\omega F(\omega), \quad f''(t) \to (i\omega)^2 F(\omega), \ldots, f^{(n)}(t) \to (i\omega)^n F(\omega).$$

8. Originaldı integrallaw. Eger $f(t) \to F(\omega)$ hám $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$ bolsa, onda

$$\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \frac{F(\omega)}{i\omega}.$$

Dálillew. Anıqlama boyınsha

$$\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \right) dt \quad = \frac{F(\omega)}{i\omega}.$$

Bóleklep integrallasaq

$$\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{\omega} e^{-i\omega t} \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \right)_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{i\omega} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\omega} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt = \frac{F(\omega)}{i\omega}.$$

9. Súwretleniwdi differenciallaw. Eger $f(t) \to F(\omega)$ hám $t\, f(t)$, $t^2 f(t)$ $,\ldots, t^n f(t)$ funkciyaları t kósherinde absolyut integrallanıwshı bolsa, onda

$F^{(n)}(\omega) \to (it)^n f(t).$

Dálillew.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| t^k f(t) \right| dt, \ k = 0,1,2,\ldots,n$$

integralınıń jıynaqlılıǵınan

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} t^k f(t)dt$$

integralınıń ω boyınsha teń ólshewli jıynaqlılıǵı kelip shıǵadı. Sonlıqtan

$$F^{(k)}(\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt \right)^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\omega t} f(t) \right)^{(k)} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} (-it)^k f(t)dt, \ k = 1,2,..,n .$$

Bunnan $F^{(n)}(\omega) \to (it)^n f(t)$ ekenligi kelip shıǵadı.

10. Lyapunov teńligi. Eger $f(t)\to F(\omega)$ hám $\varphi(t)\to \hat{O}(\omega)$ bolsa, onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\bar{\hat{O}}(\omega)d\omega$$

yamasa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{O}(\omega)\bar{F}(\omega)d\omega.$$

Dálillew. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\hat{O}(\omega)d\omega\right)dt =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{O}(\omega)d\omega\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t)dt\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{O}(\omega)\bar{F}(\omega)d\omega.$$

Usınday jol menen Lyapunov teńliginiń ekinshi variantında dálillewge boladı.

11. Súwretleniwdiń kóbeymesi. Eki $f(t)$ hám $\varphi(t)$ funkciyalarınıń oramı dep

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = f(t)*\varphi(t)$$

funkciyasına aytamız.

Eger $f(t)\to F(\omega)$ hám $\varphi(t)\to \hat{O}(\omega)$ bolsa, onda $f(t)*\varphi(t)\to F(\omega)\cdot\hat{O}(\omega)$ boladı.

12. Originaldıń kóbeymesi. Eger $f(t)\to F(\omega)$ hám $\varphi(t)\to \hat{O}(\omega)$ bolsa, onda

$$F(\omega)*\hat{O}(\omega)\to f(t)\cdot\varphi(t)$$

boladı.

§4. Fur`e túrlendiriwiniń sızıqlı differenciallıq teńlemelerdi sheshiwde qollanıwları

Dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdi sheshiwde eń nátiyjeli usıllardıń biri Fur`eniń integrallıq túrlendiriwler usılı bolıp tabıladı. Bul túrlendiriwler nátiyjesinde qarastırılıp atırǵan dara tuwındılı differenciallıq teńleme ushın shegaralıq másele Koshi máselesin sheshiwge alıp kelinedi.

4.1. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemelerin sheshiwdiń Fur`e túrlendiriw usılı. Meyli $D=\{(x,t);\ -\infty<x<\infty,\ t>0\}$ oblastında

$$u_t=a^2u_{xx} \tag{1}$$

teńlemesiniń

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{2}$$

baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesin qarastırayıq.

Aytayıq $\varphi(x)$ funkciyasınıń Fur`e túrlendiriwi $\hat{O}(\omega)$ bolsın. Onda berilgen (1), (2) máseleni sheshiw

$$U_t(\omega,t)+(a\omega)^2U(\omega,t)=0,$$

$$U(\omega,0)=\hat{O}(\omega)$$

túrindegi Koshi máselesin sheshiwge alıp kelinedi. Bul Koshi máselesiniń sheshimi

$$U(\omega,t)=\hat{O}(\omega)e^{-a^2\omega^2t}$$

bolıp, buǵan Fur`eniń keri túrlendiriwin qollansaq

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\hat{O}(\omega)e^{-a^2\omega^2t}d\omega$$

yamasa

$$\hat{O}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\varphi(x)dx$$

ekenligin esapqa alsaq

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\varphi(x)dx\right)e^{-a^2\omega^2t}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)ds\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t}e^{-i\omega(x-s)}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)ds\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t}[\cos\omega(x-s)+\sin\omega(x-s)]d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)ds\int_{0}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t}\cos\omega(x-s)d\omega=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}\varphi(s)ds$$

boladı, bul jerde

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t}\sin\omega(x-s)d\omega = 0$$

teńligi esapqa alındı.

Mısal 1. Meyli $D=\{(x,t);\ 0<x<\infty,\ t>0\}$ oblastında

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{3}$$

teńlemesiniń

$$u(x,0)=0 \tag{4}$$

baslańǵısh hám

$$u(0,t)=u_0 \tag{5}$$

shegaralıq shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesin qarastırayıq, bul jerde u_0 turaqlı san.

Sheshiliwi. Bul másele bir ushınan shegaralanǵan birtekli sterjendegi jıllılıqtıń taralıw máselesine arnalǵan bolıp, onıń shegaralanǵan ushındaǵı temperatura hámme waqıt turaqlı u_0 ǵa hám sonıń menen birge baslanǵısh temperatura sterjenniń hámme jerinde nol`ge teń. Máseleniń fizikalıq maǵanası boyınsha $u(x,t),\ u_x(x,t),\ u_{xx}(x,t)$ funkciyaları $D$ oblastında úzliksiz hám $u(x,t),\ u_x(x,t)$ lar $x\to\infty$ ushın nol`ge umtıladı, yaǵnıy $x\to\infty$ da temperaturada, jıllılıq aǵımıda azayıp baradı.

(3)-(5) aralas máseleni sheshiw ushın Fur`eniń sinus túrlendiriwin qollanamız. Izleniwshi funkciyanıń sinus túrlendiriwin $u(x,t)\to U(\omega,t)$ dep, yaǵnıy

$$U(\omega,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u(x,t)\sin\omega x dx$$

dep alsaq hám bul túrlendiriwdi t boyınsha differenciallasaq

$$u_t(x,t)\to U_t(\omega,t)$$

boladı. Endi $u_{xx}(x,t)$ tıń sinus túrlendiriwin esaplaymız.

$$u_{xx}(x,t)\to\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u_{xx}(x,t)\sin\omega x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(u_x(x,t)\sin\omega x\Big|_0^{\infty} - \omega\int_0^{\infty} u_x(x,t)\cos\omega x dx \right) =$$

$$= -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_x(x,t)\cos\omega x dx = -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(u_x(x,t)\cos\omega x\Big|_0^\infty + \omega\int_0^\infty u(x,t)\cos\omega x dx \right) =$$

$$= -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-u(0,t)\Big| + \omega\int_0^\infty u(x,t)\sin\omega x dx \right) = -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-u_0 + \omega\int_0^\infty u(x,t)\sin\omega x dx \right) =$$

$$= -\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-u_0 + \omega U(\omega,t)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega u_0 - \omega^2 U(\omega,t).$$

Bulardı (3) teńlemedegi orınlarına qoysaq

$$U_t(\omega,t) + (a\omega)^2 U(\omega,t) = a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega u_0, \quad U(\omega,0) = 0 \tag{6}$$

boladı. Solay etip (3)-(5) aralas máseleni sheshiw Fur`eniń sinus túrlendiriwi járdeminde $U(\omega,t)$ súwretleniwge qarata (6) túrindegi Koshi máselesin sheshiwge alıp kelindi. Bul Koshi máselesiniń sheshimi

$$U(\omega,t) = e^{-(a\omega)^2 t}\left(C(\omega) + a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega u_0 \int e^{(a\omega)^2 t} dt \right) = e^{-(a\omega)^2 t}\left(C(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u_0}{\omega} e^{(a\omega)^2 t} \right)$$

bolıp, baslanǵısh shártti paydalansaq $C(\omega) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u_0}{\omega}$ boladı. Bunı ulıwma sheshimdegi ornına qoysaq, onda

$$U(\omega,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u_0}{\omega}\left(1 - e^{-(a\omega)^2 t}\right).$$

Endi Fur`eniń keri sinus túrlendiriwin paydalansaq

$$u(x,t) = \frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty \left(1 - e^{-(a\omega)^2 t}\right)\frac{\sin\omega x}{\omega} d\omega = u_0\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega x}{\omega} d\omega - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(a\omega)^2 t}\frac{\sin\omega x}{\omega} d\omega \right).$$

Sońǵı integraldı esaplaw ushın Lobachevskiy tárepinen dálillengen ayırım anıq integrallar haqqında maǵlıwmat keltiremiz.

1). Eger $f(x) \equiv f(x+\pi)$ hám $f(-x) \equiv f(x)$ bolsa, onda

$$\int_0^\infty f(x)\frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

Dara jaǵdayda $f(x) = 1$ bolsa, onda

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

2). Eger $f(x+\pi) \equiv -f(x)$ hám $f(-x) \equiv f(x)$ bolsa, onda

$$\int_0^\infty f(x)\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\, dx.$$

Dara jaǵdayda $f(x) = \cos^{-1} x$ bolsa, onda

$$\int_0^\infty \frac{tg\, x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Bul teńliklerdiń birinshisin esapqa alsaq, onda

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega x}{\omega}d\omega = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

bolıp, bul teńlikti paydalansaq, onda

$$u(x,t) = u_0\left(1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(a\omega)^2 t}\frac{\sin \omega x}{\omega}d\omega\right)$$

boladı. Endi sońǵı integraldı esaplaw ushın bizge belgili

$$\int_0^\infty e^{-(a\omega)^2 t}\cos \omega x\, d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

teńliginiń eki jaǵın x boyınsha integrallaymız. Sonda

$$\int_0^\infty e^{-(a\omega)^2 t}\frac{\sin \omega x}{\omega}d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\int_0^x e^{-\frac{s^2}{4a^2 t}}ds$$

bolıp, bul alınǵan nátiyjeni paydalansaq, onda

$$u(x,t) = u_0\left(1 - \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_0^x e^{-\frac{s^2}{4a^2 t}}ds\right).$$

Mısal 2. Meyli $D = \{(x,y,t); -\infty < x, y < \infty,\, t > 0\}$ oblastında

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \tag{7}$$

teńlemesiniń

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad -\infty < x, y < \infty \tag{8}$$

baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Másele pútin $(x,y)\in(-\infty,+\infty)$ tegislikte qarastırılıp atırǵanlıǵı sebepli Fur`e túrlendiriwin (x,y) ózgeriwshileri boyınsha alıp baramız.

Meyli $u(x,y,t)\to U(\xi,\eta,t)$ hám $\varphi(x,y)\to\Phi(\xi,\eta)$ bolsın. Onda qarastırılıp atırǵan (7), (8) másele Fur`e túrlendiriwinen keyin

$$U_t(\xi,\eta,t)+a^2(\xi^2+\eta^2)U(\xi,\eta,,t)=0,\ \ (\xi,\eta)\in(-\infty,+\infty),\ t>0,$$

$$U(\xi,\eta,0)=\Phi(\xi,\eta),\ \ (\xi,\eta)\in(-\infty,+\infty)$$

túrindegi Koshi máselesine alıp kelinedi.

Bul Koshi máselesiniń sheshimi

$$U(\xi,\eta,t)=\Phi(\xi,\eta)e^{-a^2(\xi^2+\eta^2)t}$$

bolıp, buǵan keri Fur`e túrlendiriwin qollansaq

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2t}\int_{R^2}\varphi(z,s)e^{-\frac{(x-z)^2+(y-s)^2}{4a^2t}}dzds.$$

4.2. Tolqın teńlemelerin sheshiwdiń Fur`e túrlendiriw usılı. Meyli $D=\{(x,t);\ -\infty<x<\infty,\ t>0\}$ oblastında

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \tag{9}$$

teńlemesiniń

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{10}$$

baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıw máselesin qarastırayıq.

Meyli $\varphi(x)$ funkciyasınıń Fur`e túrlendiriwi $\hat{O}(\omega)$ bolsın. Onda (9) teńlemeni sheshiw

$$U_{tt}(\omega,t)+(a\omega)^2U(\omega,t)=0$$

túrindegi teńlemeni sheshiwge alıp kelinedi. Bunıń ulıwma sheshimi

$$U(\omega,t)=C_1(\omega)e^{-ia\omega t}+C_2(\omega)e^{ia\omega t}$$

bolıp, buǵan Fur`eniń keri túrlendiriwin qollansaq

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}[C_1(\omega)e^{-ia\omega t}+C_2(\omega)e^{ia\omega t}]d\omega=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(x-at)}C_1(\omega)\,d\omega+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(x+at)}C_2(\omega)\,d\omega=f(x-at)+g(x+at),$$

bul jerde $C_1(\omega)$ hám $C_2(\omega)$ ler ω nıń erikli funkciyaları bolǵanlıqtan $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyaları bulardıń erikli original funkciyaları bolıp tabıladı, yaǵnıy

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}C_1(\omega)\,d\omega,\quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}C_2(\omega)\,d\omega$$

Solay etip

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at).$$

Bul ulıwma sheshimdi (10) baslanǵısh shártlerge aparıp qoysaq

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=\varphi(x), \\ -f(x)+g(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x\psi(s)ds \end{cases}$$

bolıp, bunnan

$$f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(s)ds,\quad g(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(s)ds$$

yamasa

$$f(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(s)ds,$$

$$g(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(s)ds.$$

Onda sheshim

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

boladı.

Mısal 3. Meyli $D=\{(x,y,t);\,-\infty<x,y<\infty,\ t>0\}$ oblastında

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ -\infty<x<+\infty,\ t>0 \tag{11}$$

teńlemesiniń

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ -\infty<x<+\infty \tag{12}$$

baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın sheshimin tabıń.

Sheshiliwi. Másele pútin $x \in (-\infty,+\infty)$ tuwrısında qarastırılıp atırǵanlıǵı sebepli Fur`e túrlendiriwin x ózgeriwshisi boyınsha alıp baramız.

Meyli $u(x,t) \to U(\xi,t)$ hám $f(x,t) \to F(\xi,t)$ bolsın. Onda qarastırılıp atırǵan (11), (12) másele Fur`e túrlendiriwinen keyin

$$U_{tt}(\xi,t) + a^2\xi^2 U(\xi,t) = F(\xi,t), \quad t > 0,$$

$$U(\xi,0) = 0, \;\; U_t(\xi,0) = 0$$

túrindegi Koshi máselesine alıp kelinedi. Bul máselesiniń sheshimi

$$U(\xi,t) = \frac{1}{a\xi}\int_0^t F(\xi,\tau)\sin a\xi(t-\tau)d\tau$$

bolıp, buǵan keri Fur`e túrlendiriwin qollansaq

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\xi a}\int_0^t F(\xi,\tau)\sin a\xi(t-\tau)d\tau\right]e^{i\xi x}d\xi =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\xi x}}{\xi}F(\xi,\tau)\sin a\xi(t-\tau)d\xi\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t F^{-1}\left[F(\xi,\tau)\frac{\sin a\xi(t-\tau)}{\xi}\right]d\tau,$$

bul jerde F^{-1} keri Fur`e túrlendiriwi. Al $\dfrac{\sin a\xi(t-\tau)}{\xi}$ funkciyasınıń Fur`e túrlendiriwi

$$H\left[x+a(t-\tau)\right] - H\left[x-a(t-\tau)\right] = \begin{cases}1, & |x| < a(t-\tau), \\ 0, & |x| > a(t-\tau)\end{cases}$$

bolǵanlıqtan, bul jerde $H(z)$ – Xevisayda funkciyası, oram operaciyasın qollansaq

$$u(x,t) = \frac{1}{a}\int_0^t\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)\{H[x-\eta+a(t-\tau)] -\right.$$

$$\left. -H[x-\eta-a(t-\tau)]\}\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\tau\right.$$

boladı.

Fur`e túrlendiriwi ushın tiykargı originallar hám olardıń súwretleniwleri tablicası

Original $f(t)$	**Súwretleniw** $F(\omega)$	**Original** $f(t)$	**Súwretleniw** $F(\omega)$
$f'(x)$	$i\omega F(\omega)$	$\delta(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ia\omega}$
$f''(x)$	$\omega^2 F(\omega)$		
$f^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n F(\omega)$	$f(x)*g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\omega)G(\omega)$
$f(ax),\ a>0$	$\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$	$(1+x^2)^{-1}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\lvert\omega\rvert}$
$f(x-a)$	$e^{-ia\omega}F(\omega)$	$xe^{-a\lvert x\rvert},\ a>0$	$-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ia\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$
		$H(x+a)-H(x-a)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\omega}{\omega}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}$	$\frac{a}{x^2+a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$\begin{cases}1, & \lvert x\rvert<a\\ 0, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\omega}{\omega}$	$\frac{2ax}{(x^2+a^2)^2}$	$-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \omega e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$\begin{cases}1, & \lvert x\rvert<1\\ 0, & \lvert x\rvert>1\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$	$\begin{cases}1-\lvert x\rvert, & \lvert x\rvert<1\\ 0, & \lvert x\rvert>1\end{cases}$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega}\right)^2$
$\begin{cases}\cos ax, & \lvert x\rvert<\pi/2a\\ 0, & \lvert x\rvert>\pi/2a\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2-\omega^2}\cos(\pi\omega/2a)$	$\cos(ax)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)]$
		$\sin(ax)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\omega+a)-\delta(\omega-a)]$

Bul jerde:

1). $\delta(x)$ –Diraktıń del`ta funkciyası,

2). $H(x-a)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert<a\\ 1, & \lvert x\rvert\geq a\end{cases}$ –Xevisayda funkciyası,

3). $H(a-x)=\begin{cases}1, & \lvert x\rvert\leq a\\ 0, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$ –Xevisayda funkciyasınıń sáwlesi.

Qosımsha sorawlar

1. Integrallıq túrlendiriw dep qanday túrlendiriwge aytamız?

2. Integrallıq túrlendiriwden kelip shıǵatuǵın qanday túrdegi túrlendiriwlerdi bilesiz?

3. Qanday túrdegi túrlendiriwge Laplas, al qanday túrdegi túrlendiriwge Fur`e túrlendiriwi dep aytıladı?

4. Laplas yamasa Fur`e túrlendiriwleri ushın qanday funkciyalarǵa original funkciyalar delinedi hám onıń qásiyetleri qanday?

5. Laplas yamasa Fur`e túrlendiriwleri ushın original funkciya bolmaytuǵın bir qatar funkciyalardı keltiriń hám olardıń ne ushın original funkciya bola almaytuǵınlıǵın aytıp beriń.

6. Laplas yamasa Fur`e túrlendiriwlerine iye bolıwı ushın funkciya qanday shártlerdi qanaatlandırıwı kerek?

7. Laplas yamasa Fur`e túrlendiriwinde original hám súwretleniw arasında qanday baylanıslar bar?

8. Bunday túrlendiriwler ushın qanday oblastta súwretleniw regulyar funkciya boladı?

9. Laplas hám Fur`e túrlendiriwleriniń qanday qásiyetleri bar?

10. Laplas hám Fur`e túrlendiriwleriniń sızıqlı ekenligin qanday túsindire alasań?

11. Eger $f(t)$ funkciyasınıń súwretleniwi málim bolsa, onda Laplas hám Fur`e túrlendiriwleri ushın $f^{(n)}(t)$ nıń súwretleniwi qanday boladı?

12. Eger $f(t)$ funkciyasınıń súwretleniwi málim bolsa, onda Laplas túrlendiriwi ushın $\int_0^t f(\tau)d\tau$ integraldıń súwretleniwi qanday boladı?

13. Eki funkciyanıń oramı dep nege aytıladı?

14.Ádettegi differenciallıq teńlemeler yamasa olardıń sistemaları Laplas túrlendiriwi járdeminde qalay sheshiledi?

15. Laplas túrlendiriwi járdeminde qanday differenciallıq teńlemeler yamasa olardıń sistemaları sheshiledi?

16. Fur`e túrlendiriwi járdeminde qanday differenciallıq teńlemeler yamasa olardıń sistemaları sheshiledi?

17. Laplas túrlendiriwi járdeminde ózgeriwshi koefficientli sızıqlı differenciallıq teńlemelerdi sheshiwge bolama?

18. Dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdi sheshiwde Laplas hám Fur`e túrlendiriwleriniń qollanıw sxemasın keltiriń.

19. Laplas hám Fur`e úrlendiriwleri járdeminde qanday tiptegi dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdi sheshiwge boladı?

20. Mellin túrlendiriwi qanday hám onıń Laplas penen Fur`e túrlendiriwlerden parqı qanday?

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar

I. Laplastıń integrallıq túrlendiriwi járdeminde tómendegi baslanǵısh, shegaralıq hám aralas máselelerdi sheshiń:

1) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x>0,\ t>0, \\ u(x,0)=0, & x>0, \\ u_x(0,t)=\nu(t), & t>0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x>0,\ t>0, \\ u(x,0)=u_0, & x>0,\ (u_0 = const), \\ u_x(0,t)-u(0,t)=0, & t>0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(t), & x>0,\ t>0, \\ u(x,0)=0, & x>0, \\ u(0,t)=0, & t>0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + f(x), & x>0,\ t>0, \\ u(0,t)=t, & t>0, \\ u_x(0,t)=0, & t>0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + B\cos x, & x>0,\ t>0, \\ u(0,t)=Ae^{-3t}, & t>0, \\ u_x(0,t)=0, & t>0,\ (A,B-const). \end{cases}$

6) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, & x>0,\ t>0, \\ u(x,0)=\sin x, & x>0, \\ u(0,t)=0, & t>0,\ (\beta - const); \end{cases}$

7) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x>0,\ t>0, \\ u(x,0)=0, & x>0, \\ u(0,t)=Ae^{-t}, & t>0,\ (A-const). \end{cases}$

8) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + a^2 u + f(x) & x>0,\ t>0, \\ u(0,t)=0, & t>0, \\ u_x(0,t)=0, & t>0; \end{cases}$

9) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - h(u-u_0), \ x>0, \ t>0, \\ u\left(x,0\right) = u_0, \quad x>0, \\ u(0,t)=0, \ t>0, \ \left(h, u_0 - const\right); \end{cases}$

10) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x>0, \ t>0, \\ u\left(x,0\right) = 0, \quad x>0, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = k(t), \left(h - const\right); \end{cases}$

11) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x>0, \ t>0, \\ u(x,0)=0, \quad x>0, \\ u(0,t) = A, \ t>0, \ \ A - const; \end{cases}$

12) $\begin{cases} u_y = u_{xx} + a^2 u + f(x), \\ u(0,y) = u_x(0,y) = 0, \ 0<x,y<\infty; \end{cases}$

13) $\begin{cases} u_{xx} - u_y + u = x, \ 0<x,y<\infty, \\ u(0,y) = y, \quad u_x(0,y)=0; \end{cases}$

14) $\begin{cases} u_{xx} + u_{xt} = 0, \ 0<x,t<\infty, \\ u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(0,t)=0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ \mu(0) = \varphi(0) = 0; \end{cases}$

15) $\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = f(x,y), \ x,y>0, \\ u(0,y) = \psi_0(y), \ u_x(0,y) = \psi_1(y), \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \\ u_y(x,0) = \varphi_1(x), \ \varphi_0(0) = \psi_0(0); \end{cases}$

16) $\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, \ 0<x,t<\infty, \\ u(0,t) = B, \\ u(x,0) = A, \ t\to+\infty \ \left|u(x,t)\right| < \infty; \end{cases}$

17) $\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u = f(x,y), \\ u(0,y) = \mu(y), \\ u_x(0,y) = u(x,0) = 0, \\ u_y(x,0) = \varphi(x); \ 0<x,y<\infty, \end{cases}$

18) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ -\infty<x,t<+\infty, \ t>0, \\ u(x,0) = f(x), \ -\infty<x<+\infty; \end{cases}$

19) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ x>0, \ t>0, \\ u\left(x,0\right) = 0, \quad x>0, \\ u_t\left(x,0\right) = 0, \quad x>0, \\ u(0,t) = \mu(t), \ t>0; \end{cases}$

20) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x>0, \ t>0, \\ u\left(x,0\right) = 0, \quad x>0, \\ u_t\left(x,0\right) = 0, \quad x>0, \\ u(0,t) = \nu\left(t\right), \ t>0. \end{cases}$

II. Fur`eniń integrallıq túrlendiriwi járdeminde tómendegi shegaralıq máselelerdi sheshiń:

1) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ -\infty<x<\infty, t>0, \\ u(x,0)=0, \ -\infty<x<\infty; \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ -\infty<x<\infty, \ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ -\infty<x<\infty, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \ -\infty<x<\infty; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x>0, \ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x>0, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x>0, \\ u(0,t) = 0, \ t>0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x>0, \ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x>0, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x>0, \\ u_x(0,t) = 0, \ t>0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u_t(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = \mu(t), & t > 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u_t(x,0) = 0, & x > 0, \\ u_x(0,t) = \nu(t), & t > 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u_t(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u_t(x,0) = 0, & x > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0; \end{cases}$

9) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = \mu(t), & t > 0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u_x(0,t) = \nu(t), & t > 0; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x > 0, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0; \end{cases}$

13) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(0,t) = u(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty; \end{cases}$

14) $\begin{cases} u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t), & -\infty < x, y < \infty, t > 0, \\ u(x,y,0) = 0, & -\infty < x, y < \infty; \end{cases}$

15) $\begin{cases} u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), & x \in (-\infty, +\infty),\ y \in (0, +\infty), t > 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & x \in (-\infty, +\infty),\ y \in (0, +\infty), \\ u(x,0,t) = 0, & x \in (-\infty, +\infty),\ t > 0; \end{cases}$

16) $\begin{cases} u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), & x \in (-\infty, +\infty),\ y \in (0, +\infty), t > 0, \\ u(x,y,0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty),\ y \in (0, +\infty), \\ u(x,0,t) = \mu(x,t), & x \in (-\infty, +\infty),\ t > 0; \end{cases}$

17) $\begin{cases} u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), & x \in (-\infty, +\infty),\ y \in (0, +\infty), t > 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & x \in (-\infty, +\infty),\ y \in (0, +\infty), \\ u_y(x,0,t) = 0, & x \in (-\infty, +\infty),\ t > 0; \end{cases}$

18) $\begin{cases} u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), & x \in (-\infty, +\infty),\ y \in (0, +\infty), t > 0, \\ u(x,y,0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty),\ y \in (0, +\infty), \\ u_y(x,0,t) = \mu(x,t), & x \in (-\infty, +\infty),\ t > 0; \end{cases}$

19) $\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy}),\ x\in(0,+\infty),\ y\in(0,+\infty),\ t>0, \\ u_x(0,y,t)=\varphi(y,t),\quad y\in(0,+\infty),\ t>0, \\ u(x,0,t)=g(x,t),\ x\in(0,+\infty),\ t>0; \end{cases}$

20) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0,\ x\in(0,\pi),\ y\in(0,\pi), \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0,\quad y\in(0,\pi), \\ u(x,0)=u(x,\pi)=u_0,\ x\in(0,\pi). \end{cases}$

Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları

I. 1) $u(x,t)=-\dfrac{a}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \nu(\tau)\dfrac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau;$

2) $u(x,t)=u_0-u_0\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\displaystyle\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi+e^{(x+t)}\int_{\sqrt{t}+\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi\right];$

3) $u(x,t)=\displaystyle\int_0^t f(\tau)(erf)\left(\frac{x}{2a(t-\tau)}\right)d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t f(\tau)\int_0^{\frac{x}{2a(t-\tau)}} e^{-\xi^2}d\xi d\tau.$

4) $u(x,t)=t\cos x+\dfrac{x}{2}\sin x+\displaystyle\int_0^x f(\xi)\sin(x-\xi)d\xi,$ **Kórsetpe.** Laplastıń integrallıq túrlendiriwin x ózgeriwshisi boyınsha qollanıń;

5) $u(x,t)=Ae^{-3t}\cos 2x-\dfrac{B}{2}x\sin x,$ **Kórsetpe.** Laplastıń integrallıq túrlendiriwin x ózgeriwshisi boyınsha qollanıń;

6) $u(x,t)=e^{-(\alpha^2+\beta)t}\sin x;$ 7) $u(x,t)=\dfrac{Ax}{2\sqrt{\pi}}e^{-t}\displaystyle\int_0^t \dfrac{e^{-\left(\frac{x^2}{4\tau}+\tau\right)}}{\tau^{\frac{3}{2}}}d\tau;$

8) $u(x,t)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x f(x-\xi)\sin(a\xi)d\xi,$ **Kórsetpe.** Laplastıń integrallıq túrlendiriwin x ózgeriwshisi boyınsha qollanıń;

9) $u(x,t)=u_0-\dfrac{u_0}{2}\left[e^{-\frac{x\sqrt{h}}{a}}erfc\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}-\sqrt{ht}\right)+e^{\frac{x\sqrt{h}}{a}}erfc\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}+\sqrt{ht}\right)\right];$

10) $u(x,t)=-a\int_0^t k(\tau)\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}-ae^{hx+h^2a^2(t-\tau)}erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}+ha\sqrt{t-\tau}\right)\right]d\tau;$

11) $u(x,t)=Aerfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$. Kórsetpe. $erfc(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-\xi^2}d\xi$ funkciyası $erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi$ integralına qosımsha funkciya dep atalıp, $erf(z)+erfc(z)=1$ boladı, sebebi Puasson integralı boyınsha $erf(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\xi^2}d\xi=1$. Solay etip, bul máseleniń sheshimin tikkeley kórinisi boyınsha jazatuǵın bolsaq

$$u(x,t)=A\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-\xi^2}d\xi=\frac{A}{2a\sqrt{\pi t}}\int_x^\infty e^{-\frac{\eta^2}{4a^2t}}d\eta;$$

12) $u(x,t)=-\frac{1}{a}\int_0^x f(x-\xi)\sin a\xi d\xi;$ 13) $u(x,t)=x+y\cos x-\sin x+\frac{1}{2}x\sin x;$

14) $u(x,t)=\begin{cases}\varphi(x-t)+\mu(t), & x-t>0,\\ \mu(t), & x-t<0;\end{cases}$

15) $u(x,t)=\begin{cases}\varphi_0(x-y)+y\varphi_0'(x-y)+y\varphi_1(x-y)+\\ +\int_{x-y}^{x} f(\xi,y-x+\xi)(x-\xi)d\xi, \quad x>y;\\ \psi_0(y-x)+x\psi_0'(y-x)+x\psi_1(y-x)+\\ +\int_{y-x}^{y} f(x-y+\xi,\xi)(y-\xi)d\xi, \quad x<y;\end{cases}$

16) $u(x,t)=(B-A)erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)+A;$ **Kórsetpe.** Originaldı dúziw waqtında $\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}\div erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$, $a>0$ túrlendiriwdi paydalanıń

17) $$u(x,t)=\begin{cases}\varphi(x-y)\sin y+\\ +\int\limits_{x-y}^{x} f(t,y-x+t)\sin(x-t)dt, \quad x>y;\\ \mu(y-x)\cos x+\mu'(y-x)\sin x+\\ +\int\limits_{y-x}^{y} f(x-y+t,t)\sin(y-t)dt, \quad x<y;\end{cases}$$

18) $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi;$ 19) $u(x,t)=\begin{cases}0, & x>at,\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & x\le at;\end{cases}$

20) $u(x,t)=\begin{cases}0, & x>at,\\ -\mathrm{a}\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}\nu(\tau)d\tau, & x\le at.\end{cases}$ **Kórsetpe.** Originaldı integrallaw hám keshigiw teoremalarınan paydalanıń.

II. 1) $u(x,t)=\dfrac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\dfrac{1}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau,\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau;$ **Kórsetpe.** Fur\`e niń eksponenciallıq túrlendiriwin qollanıń.

2) $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi;$ **Kórsetpe.** Fur\`e niń eksponenciallıq túrlendiriwin qollanıń.

3) $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)sign(x-at)\right]+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{|x-at|}^{x+at}\psi(\xi)d\xi;$

Kórsetpe. Fur\`eniń sinus túrlendiriwin qollanıń, $x>at$ hám $x<at$ jaǵdayları ushın sheshimlerdi bólek qarań. Tómendegi teńlikti itibarǵa alıń:

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\Psi(\lambda)d\lambda\int\limits_{x-at}^{x+at}\sin\lambda\xi d\xi=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\Psi(\lambda)\frac{\cos\lambda(x-at)-\cos\lambda(x+at)}{\lambda}d\lambda;$$

4) $$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(|x-at|)+\varphi(x+at)sign(x-at)\right]+$$

$$+\frac{1}{2a}\left[\int\limits_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi-sign(x-at)\int\limits_{0}^{|x-at|}\psi(\xi)d\xi\right];$$

Kórsetpe. Fur`eniń kosinus túrlendiriwin qollanıń.

5) $u(x,t)=a\int\limits_0^t \mu(t)\delta\left[x-a(t-\tau)\right]d\tau=\begin{cases}0, & 0<t\le \dfrac{x}{a},\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a};\end{cases}$ **Kórsetpe.** Fur`eniń sinus túrlendiriwin qollanıń, bul jerde $\delta(z)$ -Diraktıń del`ta funkciyası.

6) $u(x,t)=\begin{cases}0, & 0<t\le \dfrac{x}{a},\\ -a\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \nu(\tau)d\tau, & t>\dfrac{x}{a};\end{cases}$ **Kórsetpe.** Fur`eniń kosinus túrlendiriwin qollanıń.

7) $u(x,t)=\dfrac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi;$ **Kórsetpe.** Fur`eniń sinus túrlendiriwin qollanıp, tómendegi teńlikti itibarǵa alıń:

$$\frac{2\sin a\lambda(t-\tau)\sin\lambda x}{\lambda}=\frac{\cos\lambda\left[x-a(t-\tau)\right]-\cos\lambda\left[x+a(t-\tau)\right]}{\lambda}=$$

$$=\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\sin\lambda\xi d\xi=\frac{\cos\lambda\left[a(t-\tau)-x\right]-\cos\lambda\left[a(t-\tau)+x\right]}{\lambda}=\int\limits_{a(t-\tau)-x}^{a(t-\tau)+x}\sin\lambda\xi d\xi$$

8) $u(x,t)=\dfrac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\left\{\int\limits_0^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi-sign\left[x-a(t-\tau)\right]\int\limits_0^{|x-a(t-\tau)|} f(\xi,\tau)d\xi\right\};$

Kórsetpe. Fur`eniń kosinus túrlendiriwin qollanıń.

9) $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi;$ **Kórsetpe.** Fur`eniń sinus túrlendiriwin qollanıń.

10) $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f(\xi,\tau)\dfrac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\xi d\tau;$ **Kórsetpe.** Fur`eniń sinus túrlendiriwin qollanıń. Keri túrlendiriwde tómendegi teńlikti itibarǵa alıń:

$$I(x)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2\lambda^2}\lambda\sin\lambda x d\lambda=-J'(x),$$

bul jerde

$$J(x)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\lambda x\, d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{x^2}{4a^2}};$$

11) $u(x,t)=-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau;$ **Kórsetpe.** Fur\`eniń kosinus túrlendiriwin qollanıń.

12) $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^{\infty} f(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\xi d\tau;$ **Kórsetpe.** Fur\`eniń kosinus túrlendiriwin qollanıń.

13) $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{\infty} f(\xi,\tau)\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)d\xi;$

14) $u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t \frac{1}{t-\tau}\int_{R^2} f(z,s,\tau)e^{-\frac{(x-z)^2+(y-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}dzdsd\tau;$

15) $u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right)d\xi d\eta;$

16) $u(x,y,t)=\frac{y}{4\pi a^2}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(z,\tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-z)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}dzd\tau;$

17) $u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right)d\xi d\eta;$

18) $u(x,y,t)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(z,\tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-z)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}dzd\tau;$

19) $u(x,y,t)=\frac{y}{8\pi a^2}\int_0^t\int_0^{+\infty}\frac{g(\xi,\tau)}{(t-\tau)^2}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)d\xi d\tau-$

$$-\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_0^{+\infty}\frac{f(\eta,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\left(e^{-\frac{x^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{x^2+(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)d\eta d\tau;$$

20) $u(x,y)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{sh(2k+1)y\cdot\sin(2k+1)x}{(2k+1)sh(2k+1)\pi}.$

Ádebiyatlar

1.Агошков В.И. Методы решения задач математической физики:Учебное пособие для студентов вузов, – М.:Физматлит, 2002 . –320 с.
2.Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1982. –336 с.
3.Бицадзе А.В. , Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985. –310 с.
4.Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1998. –350 с.
5.Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
6.Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
7.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. –512 с.
8.Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
9.Владимиров В.С. , Жаринов В.В. Уравнения математической физики. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
10.Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов –СПб.:Питер, 2004. –539 с.
11.Емельянов В.М., Рыбакина Е.А. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач: Учебное пособие.–СПб.: Изд-во Лань, 2008. –224 с
12.Жукова Г.С., Чечеткина Е.М. , Богин Е.С. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: РХТУ им. Д.И.Менделеева. 2001. 196 с.
13.Жукова Г.С., Чечеткина Е.М. Уравнения математической физики. – М.: РХТУ им. Д.И.Менделеева. 2002. 111 с.
14.Жўраев Т.Ж., Абдиназаров С. Математик физика тенгламалари, Тошкент, "Университет" , 2003 й. –332 б.
15.Зикиров О.С. Математик физика тенгламалари, Ўқув-услубийқўлланма. Тошкент, "Университет" , 2001 й. –76 б.
16.Иванов А.О., Булычева С.В. Метод интегральных преобразований в уравнениях с частными производными: Учеб. пособие. –Екатеринбург: Изд-во Урал.ун-та, 2004. –78 с.
17.Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., и др. Задачи по математическим методам физики. – М.:Эдиториал УРСС, 2000. –288 с.
18.Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики: Учеб.-метод.пособие. – Механико-математический факультет МГУ. 1993. 155 с.
19.Костин А.Б., Тихонов И.В., Ткаченко Д.С. Уравнения математической физики. Пособие по практическим занятиям. Часть I: – М.: МИФИ, 2007. –152 с.
20.Костин А.Б., Тихонов И.В., Ткаченко Д.С. Уравнения математической физики: Пособие по практическим занятиям. Часть II: Учебное пособие. – М.: МИФИ, 2008. –328 с.

21.Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных прозводных. – М.: РУДН, 1997 . –447 с.
22.Омаров А.,Қулымбетов Н. Қ, Биринши ҳәм екинши тәртипли дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер. Оқыўлық қолланба, 1-бөлим, Нөкис– 2005. – 60 б.
23.Панов Ю.Д. Егоров Р.Ф. Математическая физика. Методы решения задач. Екатеринбург. 2005.
24.Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. – М.: МЦНМО, 2004 . –208 с.
25.Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. – М.: МЭИ, 1989 .
26.Пикулин В.П. Методические разработки по уравнениям эллиптического и параболического типа. – М.: МЭИ, 1990 .
27.Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
28.Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари, Тошкент, "Узбекистон" , 2002 й. –448 б.
29.Салоҳиддинов М. С., Исломов Б.И. Математик физика тенгламалари фаниданмасалалартўплами, Тошкент, "MUMTOZSO’Z" , 2010 й.–372 б.
30.Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. – М.: Изд-во МГУ, 1993.
31. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1992 .–431 с.
32.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 .
33.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999. –798 с.
34.Уравнения математической физики. Сборник примеров и упражнений. Составители: Рогов А.А., Семенова Е.Е., Чернецкий В.И., Щеголева Л.В. ПетрГУ. Петрозаводск, 2001. –220 с.
35.Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. –384 с.
36.Шарма Дж.Н.,СингчК.Уравнения в частных производных для инженеров. Перевод с английского Б.В. Карпова. – М.:Техносфера, 2002. –320 с.
37.Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦНМО, 2001. –303 с.
38.Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦ-НМО, 2003. –304 с.
39.Mathematical Physics with Partial Differential Equations. Author: James R. Kirkwood 2011
40. Equations in Mathematical Physics (A practical course) Authors: **Pikulin**, Victor P.,**Pohozaev**, Stanislav I. 2001 Publisher Birkhäuser Basel
41. Linear Integral Equations Authors: **Kanwal**, Ram P. 2013 PublisherBirkhäuser Basel

MAZMUNI

	SO`Z BASI…….……………………………………………………...	3
I-BAP.	**DARA TUWINDILI DIFFERENCIALLIQ TEŃLEMELER. KLASSIFIKACIYASI HÁM KANONIKALIQ TÚRLERI**……..	4
§1.	Ekinshi tártipli eki ǵárezsiz ózgeriwshili dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń tipleri hám kanonikalıq kórinisleri........	7
1.1.	Giperbolalıq tiptegi teńlemeler..	9
1.2.	Parabolalıq tiptegi teńlemeler ……………………..…………...	11
1.3.	Elliptikalıq tiptegi teńlemeler...	13
1.4.	Turaqlı koeffcientli sızıqlı differenciallıq teńlemeler.......................	15
§2.	Kóp ǵárezsiz ózgeriwshili ekinshi tártipli dara tuwındılı sızıqlı differenciallıq teńlemelerdiń klassifikaciyası.................................	17
2.1.	Kóp ǵárezsiz ózgeriwshili differenciallıq teńlemelerdiń tipleri hám kanonokalıq kórinisleri..	17
2.2.	Kóp ǵárezsiz ózgeriwshili turaqlı koefficientli sızıqlı differenciallıq teńlemelerdiń kanonokalıq kórinisleri...	19
§3.	Dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń ulıwma integralı…….....	25
	Qosımsha sorawlar……………………………………………..….	30
	Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar……………………………...	31
	Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları ……………….	36
II-BAP.	**GIPERBOLALIQ TIPTEGI TEŃLEMELER**.............................	42
§1.	Tardıń terbelis teńlemesi, baslanǵısh hám shegaralıq shártlerdiń qoyılıwı. Membrananıń terbelis teńlemesi …………………………..	44
1.1.	Birtekli tardıń terbelis teńlemesi………………………………………..	44
1.2.	Membrananıń erkin terbelis teńlemesi……………………………….	47
§2.	Matematikalıq fizika ma`seleleriniń korrektli qoyılıwı. Adamar mısalı………………………………………………………………...	49
§3.	Giperbolalıq tiptegi teńlemeler ushın Koshi máselesi…………….….	51
3.1.	Ushlarınan shegaralanbaǵan birtekli tardıń erkin terbelis teńlemesi ushın Koshi máselesin sheshiwdiń Dalamber usılı…………………..	51
3.2.	Ushlarınan shegaralanbaǵan birtekli tardıń májbúriy terbelis teńlemesi ushın Koshi máselesin sheshiwdiń Dalamber usılı..………	56
3.3.	Bir ushınan qattı bekitilgen, al ekinshi ushınan shegaralanbaǵan birtekli tardıń erkin terbelis teńlemesi ushın Koshi ma`selesin sheshiwdiń dawam ettiriw usılı………………………………………	59
3.4.	Bir ushınan bos bekitilgen, al ekinshi ushınan shegaralanbaǵan birtekli tardıń erkin terbelis teńlemesi ushın Koshi ma`selesin sheshiwdiń dawam ettiriw usılı………………………………………	60
3.5.	Bir ushındaǵı vertikal baǵıtta ta`sir etiwshi kúshtiń shaması nol`ge teń, al ekinshi ushınan shegaralanbaǵan birtekli tardıń erkin terbelis teńlemesi ushın Koshi ma`selesin sheshiwdiń dawam ettiriw usılı….	62
§4.	Giperbolalıq tiptegi teńlemeler ushın ulıwma qoyılǵan Koshi hám Gurs máseleleri……………………………………………………..	64
4.1.	Giperbolalıq tiptegi teńlemeler ushın ulıwma qoyılǵan Koshi máselesi……………………………………………..…………..	64

4.2. Giperbolalıq tiptegi teńlemeler ushın ulıwma qoyılǵan Gurs máselesi…………………………………………………………..….. 67
§5. Giperbolalıq tiptegi teńlemeler ushın sheshimniń birden-birligi haqqındaǵı teorema………………………………………..……. 70
§6. Tardıń terbelis teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı……………………………………………………………..…. 72
6.1. Tardıń birtekli terbelis teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı……………………………………………..… 72
6.2. Tardıń birtekli emes terbelis teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı……………………………………………..… 79
§7. Fur`e usılınıń ulıwma sxeması. Menshikli mánis hám menshikli funkciyalar. Steklov teoreması………………………………...….. 83
§8. Tuwrı múyeshli membrananıń terbelis teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı……………………………...… 88
§9. Dóńgelek membrananıń terbelis teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı……………………………………………...… 93
Qosımsha sorawlar…………………………………………………...… 101
Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar……………………………… 102
Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları ……….……… 108
III-BAP. PARABOLALIQ TIPTEGI TEŃLEMELER……………………. 114
§1. Parabolalıq tiptegi teńlemelerge alıp kelinetuǵın matematikalıq fizikanıń tiykarǵı teńlemeleri. Baslanǵısh hám shegaralıq shártlerdiń qoyılıwı ……………………………………………………….….. 116
§2. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın maksimum principi.................. 119
§3. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı………………………………………………………….… 121
3.1. Birtekli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı……………………………………………..… 121
3.2. Birtekli emes jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı……………………………………………..… 127
3.3. Birtekli plastinkadaǵı jıllılıqtıń taralıw teńlemesi ushın aralas máselelerdi sheshiwdiń Fur`e usılı……………………………...… 134
§4. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın Koshi ma`selesi……………...… 139
§5. Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas ma`selelerdi sheshiwdiń Grin funkciyası usılı………………………………………………..… 149
5.1. Birtekli jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas ma`selelerdi sheshiwdiń Grin funkciyası usılı……………………………..…… 149
5.2. Nollik baslanǵısh sha`rtke iye birtekli emes jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas ma`selelerdi sheshiwdiń Grin funkciyası usılı……………………………………………………………..… 151
5.3. Birtekli emes jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın aralas ma`selelerdi sheshiwdiń Grin funkciyası usılı………………………………....… 152
Qosımsha sorawlar…………………………………………………...… 154
Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar……………………………… 155
Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları……….……… 158

IV-BAP.	**ELLIPTIKALIQ TIPTEGI TEŃLEMELER**……………….…..	164
§1.	Elliptikalıq tiptegi teńlemelerge alıp kelinetuǵın fizikalıq ma`seleler. Shegaralıq ma`selelerdiń qoyılıwı ……………………………..…	166
§2.	Garmonikalıq funkciyalar ha`m olardıń qa`siyetleri …………..……	168
2.1.	Grin formulaları...	168
2.2.	Sızıqlı funkciyalar hám olardıń qásiyetleri. Garmonikalıq funkciyalardıń integrallıq kórinisleri..	169
§3.	Tuwrımúyeshli oblastta Laplas hám Puasson teńlemeleri ushın shegaralıq ma`seleler ……………………………………………...	173
3.1.	Tuwrımúyeshli oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq ma`seleler...	173
3.2.	Tuwrımúyeshli oblastta Puasson teńlemesi ushın shegaralıq ma`seleler..	180
§4.	Dóńgelek oblastta Laplas hám Puasson teńlemeleri ushın shegaralıq ma`seleler…………………………………………………………	184
4.1.	Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi ishki Dirixle ma`selesi…………	184
4.2.	Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi sırtqı Dirixle ma`selesi……..….	191
4.3.	Dóńgelek oblast` ushın Puasson integralları………………………..	193
4.4.	Laplas teńlemesi ushın dóńgelektegi Neyman ma`selesi…………..…	195
4.5.	Saqıyna tárizli oblastta Laplas teńlemesi ushın shegaralıq ma`seleler…………………………………………………………	195
4.6.	Puasson teńlemesi ushın dóńgelek hám saqıynadaǵı shegaralıq ma`seleler…………………………………………………………	201
	Qosımsha sorawlar…………………………………………….…	204
	Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar……………………………..…	205
	Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları……..…………...	207
V-BAP.	**POTENCIALLAR TEORIYASINIŃ METODLARI**……………	211
§1.	Potenciallar teoriyasınıń Dirixle hám Neyman máseleleri ushın qollanıwları..	214
1.1.	Keńisliktegi Dirixle máselesiniń sheshimi...............…………..….	214
1.2.	Tegisliktegi Dirixle máselesiniń sheshimi.........……………..….	215
1.3.	Neyman máselesiniń sheshimi..	216
§2.	Grin funkciyasınıń Dirixle hám Neyman máseleleri ushın qollanıwları..	217
2.1.	Laplas teńlemesi ushın Dirixle máselesiniń Grin funkciyası.............	217
2.2.	Grin funkciyasın dúziw usılları……………………………..…	220
	Qosımsha sorawlar..	222
	Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar...	223
	Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları.......................	225
VI-BAP.	**INTEGRALLIQ TÚRLENDIRIWLER USILI**…………..……	228
§1.	Laplas túrlendiriwleri ha`m onıń qa`siyetleri...…………………..…	230
§2.	Laplas túrlendiriwi ja`rdeminde sızıqlı differenciallıq teńlemelerdi sheshiw..	237
2.1.	Sızıqlı a`dettegi differenciallıq teńlemelerdi sheshiwdiń Laplas túrlendiriwler usılı ……………………………………………..	237
2.2.	Jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi ushın Laplas túrlendiriwler usılı……...	239

2.3.	Tardıń terbelis teńlemesi ushın Laplas túrlendiriwler usılı………..…	244
§3.	Fur`e túrlendiriwi ha`m onıń qa`siyetleri…………………………..…	247
3.1.	Normallastırılǵan Fur`e túrlendiriwi…………………………………	249
3.2.	Fur`eniń sinus ha`m kosinus túrlendiriwi……………………………	250
3.3.	Fur`e túrlendiriwiniń ayırım qa`siyetleri…………………..…...…	252
§4.	Fur`e túrlendiriwiniń sızıqlı differenciallıq teńlemelerdi sheshiwde qollanıwları……………………………………………………..…	255
4.1.	Jıllılıq ótkizgishlik teńlemelerin sheshiwdiń Fur`e túrlendiriw usılı…………………………………………………………..…	256
4.2.	Tolqın teńlemelerin sheshiwdiń Fur`e túrlendiriw usılı....................	260
	Qosımsha sorawlar…………………………………………...…	264
	Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalar………………………………	265
	Óz betinshe jumıslar ushın tapsırmalardıń juwapları………..........	268
	Paydalanılg`an a`debiyatlar dizimi……………………………..…	273

MUNDARIJA

	SWZ BOSHI………………………………………………………...	3
I-BOB.	**XUSUSIY HOSILALI DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR. KLASSIFIKATSIYASI VA KANONIK KO`RINISHLARI**……	4
§1.	Ikkinchi tartibli ikki o`zgaruvchili xususiy hosilali differentsial tenglamalarning tiplari va kanonik ko`rinishlari..............................	7
1.1.	Giperbolik tipdagi tenglamalar..	9
1.2.	Parabolik tipdagi tenglamalar ……………………..……………..	11
1.3.	Elliptik tipdagi tenglamalar..	13
1.4.	O`zgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalar................	15
§2.	Ko`p erkli o`zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamalarning klassifikatsiyasi.................................	17
2.1.	Ko`p erkli o`zgaruvchili differentsial tenglamalarning tiplari va kanonik ko`rinishlari...	17
2.2.	Ko`p erkli o`zgaruvchili o`zgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalarning kanonik ko`rinishlari...........................	19
§3.	Xususiy hosilali differentsial tenglamalarning umumiy integrali …...	25
	Qo`shimcha savollar ……………………………………...…….	30
	Mustaqil echish uchun topshiriqlar …………………………………	31
	Mustaqil echish uchun topshiriqlarning javoblari …………………...	36
II-BOB.	**GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR**................................	42
§1.	Torning tebranish tenglamasi, boshlang`ich va chegaraviy shartlarning qo`yilishi. Membrananing tebranish tenglamasi ……..…	44
1.1.	Bir jinsli torning tebranish tenglamasi …………………………...…	44
1.2.	Membrananing erkin tebranish tenglamasi ………………………....	47
§2.	Matematik fizika masalalarining korrektli qo`yilishi. Adamar misoli.	49
§3.	Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun Koshi masalasi …………..…	51
3.1.	Uchlaridan chegaralanmagan bir jinsli torning erkin tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasiniechishning Dalamber usuli …....	51
3.2.	Uchlaridan chegaralanmagan bir jinsli torning emajburiy tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasiniechishning Dalamber usuli..……	56
3.3.	Bir uchidan qattiq bekitilgan, ikkinchi uchidan chegaralanmagan bir jinsli torning erkin tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasini echishning davom ettirish usuli …………………………………..….	59
3.4.	Bir uchidan yumshok bekitilgan, ikkinchi uchidan chegaralanmagan bir jinsli torning erkin tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasini echishning davom ettirish usuli ……………………..………………	60
3.5.	Bir uchidagi vertikal yo`nalishda tasir etuvchi kuchning mikdori nulga teng, ikkinchi uchidan chegaralanmagan bir jinsli torning erkin tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasini echishning davom ettirish usuli……………………………………………………..	62
§4.	Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun umumiy qo`yilgan Koshi va Gurs masalalari …………………………..……………………..	64
4.1.	Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun umumiy qo`yilgan Koshi masalasi ……………………………………………….……………..	64

4.2. Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun umumiy qo`yilgan Gurs masalasi …………………………………………………………….. 67
§5. Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun echimning yagonaligi haqidagi teorema ……………………………………………………… 70
§6. Torning tebranish tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Fur`e usuli ……………………………………………………….…. 72
6.1. Torning bir jinsli tebranish tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Fur`e usuli ………………………………………………… 72
6.2. Torning bir jinsli emas tebranish tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Fur`e usuli …………………………..…… 79
§7. Fur`e usulining umumiy sxemasi. Xos qiymat va xos funktsiyalar. Steklov teoremasi …………………………………………………..….. 83
§8. To`g`ri burchakli membrananing tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Fur`e usuli……………………..…………… 88
§9. Doiraviy membrananing tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Fur`e usuli ………………………………………………… 93
Qo`shimcha savollar ………………………………………………… 101
Mustaqil echish uchun topshiriqlar …………………………….…… 102
Mustaqil echish uchun topshiriqlarning javoblari ………….………. 108
III-BOB. PARABOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR............................... 114
§1. Parabolik tipdagi tenglamalarga olib kelinadigan matematik fizikaning asosiy tenglamalari. Boshlang`ich va chegaraviy shartlarning qo`yilishi …………………………………………...….. 116
§2. Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi uchun maksimum printsipi........ 119
§3. Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Fur`e usuli ……………………………….……………… 121
3.1. Bir jinsli issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Fur`e usuli ……………………....……… 121
3.2. Bir jinsli emas issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Fur`e usuli ……………………………..… 127
3.3. Bir jinsli plastinkada issiqlikning taralish tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Fur`e usuli ……………………….…….… 134
§4. Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi ………… 139
§5. Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Grin funktsiyasi usuli ……………………………...… 149
5.1. Bir jinsli issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Grin funktsiyasi usuli …………………….. 149
5.2. Nullik boshlang`ich shartga ega bir jinsli emas issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Grin funktsiyasi usuli ………………………………………..…… 151
5.3. Bir jinsli emas issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi uchun aralash masalalarni echishning Grin funktsiyasы usuli …………………..… 152
Qo`shimcha savollar ………………………………………………… 154
Mustaqil echish uchun topshiriqlar ……………………........…… 155
Mustaqil echish uchun topshiriqlarning javoblari ……….…........… 158

IV-BOB.	**ELLIPTIK TIPDAGI TENGLAMALAR**....................................	164
§1.	Elliptik tipdagi tenglamalarga olib kelinadigan fizikaviy masalalar. Chegaraviy masalalarning qo`yilishi…………………………………	166
§2.	Garmonik funktsiyalar va ularning xossalari ……………………..……	168
2.1.	Grin formulalari..	168
2.2.	Chiziqli funktsiyalar va ularning xossalari.Garmonik funktsiyalarning integral ko`rinishlari...	169
§3.	To`g`riburchakli sohada Laplas va Puasson tenglamalari uchun chegaraviy masalalar ……………………………………………….	173
3.1.	To`g`riburchakli sohada Laplas tenglamasi uchun chegaraviy masalalar..	173
3.2.	To`g`riburchakli sohada Puasson tenglamasi uchun chegaraviy masalalar..	180
§4.	Doiraviy sohada Laplas va Puasson tenglamalari uchun chegaraviy masalalar ………………………………………………………	184
4.1.	Laplas tenglamasi uchun doiradagi ichki Dirixle masalasi ………..…	184
4.2.	Laplas tenglamasi uchun doiradagi sirtki Dirixle masalasi ….….......	191
4.3.	Doiraviy soha uchun Puasson integrallari ……………………………	193
4.4.	Laplas tenglamasi uchun doiradagi Neyman masalasi ……………..…	195
4.5.	Halqada Laplas tenglamasi uchun chegaraviy masalalar …………..…	195
4.6.	Puasson tenglamasi uchun doira va halqadagi chegaraviy masalalar …	201
	Qo`shimcha savollar ……………………………………….………	204
	Mustaqil echish uchun topshiriqlar ……………………………………	205
	Mustaqil echish uchun topshiriqlarning javoblari ………………........…	207
V-BOB.	**POTENTSIALLAR NAZARIYASINING USULLARI**................	211
§1.	Potentsiallar nazariyasining Dirixle va Neyman masalalari uchun qo`llanishlari..	214
1.1.	Fazodagi Dirixle masalasining echimi...............……………………	214
1.2.	Tekislikdagi Dirixle masalasining echimi.........……………………	215
1.3.	Neyman masalasining echimi..	216
§2.	Grin funktsiyasining Dirixle va Neyman masalalari uchun qo`llanishlari..	217
2.1.	Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasining Grin funktsiyasi........	217
2.2.	Grin funktsiyasin tuzish usullari ……………………………………	220
	Qo`shimcha savollar...	222
	Mustaqil echish uchun topshiriqlar..	223
	Mustaqil echish uchun topshiriqlarning javoblari............................	225
VI-BOB.	**INTEGRAL ALMASHTIRISHLAR USULI**................................	228
§1.	Laplas almashtirishlari va uning xossalari....………………………...	230
§2.	Laplas almashtirishi yordamida chiziqli differentsial tenglamalarni echish...	237
2.1.	Chiziqli oddiy differentsial tenglamalarni echishning Laplas almashtirishlar usuli ………………………………………….……..	237
2.2.	Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi uchun Laplas almashtirishlar usuli …..…	239

2.3.	Torning tebranish tenglamasi uchun Laplas almashtirishlar usuli ..…	244
§3.	Fur`e almashtirishlari va uning xossalari ………………..………..…	247
3.1.	Normallashtirilgan Fur`e almashtirishi ……………………..……..…	249
3.2.	Fur`ening sinus va kosinus almashtirishi ……………………………	250
3.3.	Fur`e almashtirishining bazi xossalari ……………………..…....…	252
§4.	Fur`e almashtirishining chiziqli differentsial tenglamalarni echishda qo`llanishlari …………………………………………………………	255
4.1.	Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamalarin echishning Fur`e almashtirishi usuli……………………...…………………………	256
4.2.	To`lqin tenglamalarin echishning Fur`e almashtirish usuli................	260
	Qo`shimcha savollar …………………………………………………	264
	Mustaqil echish uchun topshiriqlar ……………………………….……	265
	Mustaqil echish uchun topshiriqlarning javoblari ………………..….	268
	Foydalanilgan adabiyotlar ruyxati …………………………..……	273

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ………………………………………………………….. 3

Глава I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. КЛАССИФИКАЦИЯ И КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ………. 4

§1. Типы и канонические формы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными.. 7

§2. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка со многими независимыми переменными.. 17

§3. Общие интегралы дифференциальных уравнений с частными производными ……………………………………………….. 25

Допольнителные вопросы..................…………………………… 30

Задачи для самостоятельного решения…………….…………… 31

Ответы для самостоятельных задач……......................………… 36

Глава II. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА…………….. 42

§1. Уравнение колебаний струны, постановка начальные и граничные условия. Уравнения колебаний мембраны ………… 44

§2. Постановка корректность задач математической физики. Пример Адамара ……………………………………………….. 49

§3. Задача Коши для уравнения гиперболического типа ………..… 51

§4. Общие постановка задачи Коши и Гурса для уравнения гиперболического типа……………………..…………………….. 64

§5. Теорема о единственность решений для уравнения гиперболического типа………………………………………… 70

§6. Метода Фурье к решению смешанных задач для уравнения колебаний струны………………………………………………. 72

§7. Общая схема метода Фурье.Собственные числа и собственные функции. Теорема Стеклова……………………………….. 83

§8. Метода Фурье к решению смешанных задач для уравнения колебаний прямоугольный мембраны……………………...…… 88

§9. Метода Фурье к решению смешанных задач для уравнения колебаний круглой мембраны ……………………………… 93

Допольнителные вопросы..................…………………………… 101

Задачи для самостоятельного решения…………….…………… 102

Ответы для самостоятельных задач……......................………… 108

Глава III. УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА……………… 114

§1. Основные уравнения математической физики, приводящиеся к уравнениям параболического типа …………………….…….. 116

§2. Принцип максимума для уравнения теплопроводности............. 119

§3. Метода Фурье к решению смешанных задач для уравнения теплопроводности ……………………………..……………… 121

§4. Задача Коши для уравнения теплопроводности …..............… 139

§5. Метод функция Грина к решению смешанных задач для уравнения теплопроводности …………………………………….… 149
Дополнителные вопросы..................…………………………… 154
Задачи для самостоятельного решения………………………… 155
Ответы для самостоятельных задач……......................………… 158
Глава IV. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА………………... 164
§1. Физические задачи, приводящиеся к уравнениям эллиптического типа. Постановка краевых задач ……………… 166
§2. Гармонические функции и их свойства ………………………… 168
§3. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в прямоугольным области ……………………………………..…. 173
§4. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в круглым области ……………………………………………………………… 184
Дополнителные вопросы..................…………………………… 204
Задачи для самостоятельного решения………………………… 205
Ответы для самостоятельных задач……......................………… 207
Глава V. МЕТОДЫ ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА………………………… 211
§1. Применение теория потенциала для задачи Дирихле и Неймана.. 214
§2. Применение функция Грина для задачи Дирихле и Неймана.. 217
Дополнителные вопросы..................…………………………… 222
Задачи для самостоятельного решения………………………… 223
Ответы для самостоятельных задач……......................………… 225
Глава VI. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 228
§1. Интегралные преобразования Лапласа и их свойства ………… 230
§2. Решение линейных дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа... 237
§3. Интегралные преобразования Фурье и их свойства..…............ 247
§4. Применение интегральные преобразования Фурье для решения линейных дифференциальных уравнений …………… 255
Дополнителные вопросы..................…………………………… 264
Задачи для самостоятельного решения………………………… 265
Ответы для самостоятельных задач……......................………… 268
Список использованных литературы ………….............…… 273

CONTENTS

	INTRODUCTION ……………………………………………..	3
Chapter I.	**DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES. CLASSIFICATION AND CANONICAL FORMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARTIAL** ……………………………………………………	4
§1.	Types and canonical forms of differential equations with partial derivatives of the second order with two explanatory variables...	7
§2.	Classification of differential equations with partial derivatives of the second order with many explanatory variables....................	17
§3.	The common integrals of differential equations with partial derivatives ……………………………………………………	25
	Additional tasks…………………………….…………….	30
	Problems for independent solution…………………………….	31
	Keys of independent problems……………………..……….	36
Chapter II.	**EQUATIONS OF HYPERBOLIC TYPE**……………………..	42
§1.	Equation of fluctuations of a string, statement starting and boundary conditions. Equations of fluctuations of a membrane…	44
§2.	Statement correctness of problems of mathematical physics. Example of the Hadamard ………………………………..…..	49
§3.	An initial value problem for the equation of hyperbolic type …..	51
§4.	Common problem definition of Cauchy and Goursat for the equation of hyperbolic type ……………………………………...	64
§5.	The theorem about uniqueness of decisions for the equation of hyperbolic type ………………………………………………..	70
§6.	A method of Fourier to the solution of the mixed problems for the equation of fluctuations of a string ………………………..	72
§7.	Common scheme of a method of Fourier. Eigen values and eigen functions. Steklov's theorem …………………...……………..	83
§8.	A method of Fourier to the solution of the mixed problems for the equation of fluctuations rectangular membranes ……………	88
§9.	A method of Fourier to the solution of the mixed problems for the equation of fluctuations of a round membrane ………………	93
	Additional tasks…………………………….…………….	101
	Problems for independent solution…………………………….	102
	Keys of independent problems……………………..……….	108
Chapter III.	**EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE**…………………….	114
§1.	The constitutive equations of mathematical physics which are led to the equations of parabolic type …………………………...	116
§2.	A maximum principle for a heat conduction equation.................	119
§3.	A method of Fourier to the solution of the mixed problems for a heat conduction equation ……………………………………..…	121
§4.	An initial value problem for a heat conduction equation ……..…	139
§5.	A method a Green function to the solution of the mixed problems for a heat conduction equation ……………………..…	149

	Additional tasks………………………………………………	154
	Problems for independent solution………………………………	155
	Keys of independent problems………………………………………	158
Chapter IV.	**EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE**…………………………	164
§1.	The physical tasks which are led to the equations of elliptic type. Statement of boundary value problems …………………………	166
§2.	Potential functions and their properties …………………………	168
§3.	Boundary value problems for the equation of Laplace and Poisson in rectangular areas ………………………………………………	173
§4.	Boundary value problems for the equation of Laplace and Poisson in round areas ………………………………………………	184
	Additional tasks………………………………………………	204
	Problems for independent solution………………………………	205
	Keys of independent problems………………………………………	207
Chapter V.	**METHODS POTENTIAL THEORY**…………………………	211
§1.	Application a potential theory for a Dirichlet problem and Neumann...	214
§2.	Application a Green function for a Dirichlet problem and Neumann...	217
	Additional tasks………………………………………………	222
	Problems for independent solution………………………………	223
	Keys of independent problems………………………………………	225
Chapter VI.	**APPLICATION OF INTEGRAL TRANSFORMATIONS FOR PROBLEM SOLVING OF MATHEMATICAL PHYSICS**………………………………………………	228
§1.	Integral Laplace transformations and their properties …………..	230
§2.	The solution of the simple differential equations by means of a Laplace transformation...	237
§3.	Integral Fourier transforms and their properties……………..…	247
§4.	Application integral Fourier transforms for the solution of the simple differential equations ……………………………………	255
	Additional tasks………………………………………………	264
	Problems for independent solution………………………………	265
	Keys of independent problems………………………………………	268
	Bibliography………………………………………………	273