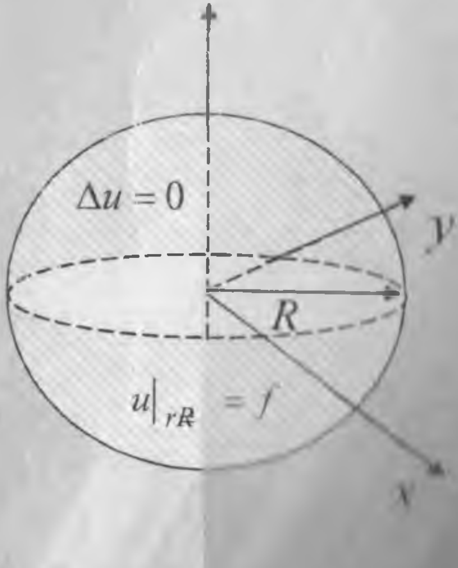
М.С.Салоҳиддинов, Б.И.Исломов

МАТЕМАТИК ФИЗИКА ТЕНГЛАМАЛАРИ ФАНИДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ



ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ ЎЗБЕКИСТОН
МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТОШКЕНТ ДАВЛАТ
ПЕДАГОГИКА УНИВЕРСИТЕТИ

М.С.САЛОҲИДДИНОВ, Б.И.ИСЛОМОВ

МАТЕМАТИК ФИЗИКА ТЕНГЛАМАЛАРИ ФАНИДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

Тошкент
“MUMTOZ SO’Z”
2010

22.311
С26
Салоҳиддинов, М.С.

Математик физика тенгламалари фанидан масалалар тўплами / М.С,Салоҳиддинов, Б.И.Исломов. – Т.: MUMTOZ SO'Z, 2010. – 372 б.

I. Исломов, Б.И.

ББК 22.311я73

УДК: 51:53 (076.1)

Мазкур масалалар тўплами университетларнинг математика, амалий математика ва информатика, механика ва физика йўналишларида таълим олаётган талабалари учун мўлжалланган.

Унда «Математик физика тенгламалари» курсининг хусусий ҳосилали иккинчи ва юқори тартибли дифференциал тенгламалари ҳақида умумий тушунчалар берилган ҳамда уларнинг классификацияси ва каноник кўринишига оид мисоллар тўплами келтирилган. Гиперболик, параболик ва эллиптик типдаги тенгламалар учун қўйилган масалаларнинг ечимларини қуришда турли хил усуллардан (Фурье усули, интеграл алмаштиришлар усули, давом эттириш усули, Риман усули, Грин усули, тушиш усули, характеристикалар усули) фойдаланилган ҳамда ҳар бир мавзуга оид масалалар ечиб кўрсатилган. «Математик физика тенгламалари» курси мавзуларини мустаҳкамлаш учун янги масала ва мисоллар тўплами келтирилган.

Китоб сўнгида мустақил ечиш учун баён этилган мисол ва масалаларнинг жавоблари ҳамда мураккаб масалаларни ечиш учун кўрсатмалар берилган.

Масъул муҳаррир:
Физика маттематика фанлари доктори М.Мирсабуров

Тақризчилар:
Физика математика фанлари доктори Фаязов Қудрат
Физика математика фанлари номзоди Омонов Жумақилич

Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети илмий-методик Кенгашининг 2010 йил 23 июндаги 6-рақамли қарорига биноан нашрга тавсия этилган

ISBN 978-9943-363-98-4

СЎЗБОШИ

Мазкур масалалар тўплами Республикамизда фаолият кўрсатаётган университетларнинг математика, амалий математика ва информатика, механика ва физика йўналишлари учун **«Математик физика тенгламалари»** фани дастурига мосланиб ёзилган. Китоб ДТСларига асосланиб, шу фан бўйича тузилган намунавий дастур ва М.Салоҳиддиновнинг «Ўзбекистон» нашриёти томонидан 2002 йилда чоп этилган **«Математик физика тенгламалари»** дарслигига кўра ёзилган. Бундан ташқари масалаларни танлаш ва тузишда МДҲ ҳамда чет эл олимлари томонидан яратилган тўплам ва монографиялардан фойдаланилган. Шунингдек, муаллифларнинг М.Улугбек номидаги Ўзбекистон Миллий ва Низомий номидаги Тошкент Давлат педагогика университетларида математик физика тенгламаларидан узоқ йиллар давомида олиб борган амалий машғулотлари ва хамкасблари билан биргаликда яратган услубий кўрсатмаларидан хам фойдаланилган.

«Математик физика тенгламалари» фани ниҳоятда кенг, у турли физик, механик, техник, биологик ва бошқа жараёнларни ўрганиш билан узвий боғлиқ бўлибгина қолмай, балки бу жараёнларни акс эттирувчи Коши, чегаравий ва аралаш масалаларни турли хил усулларда ечишни ҳам ўргатади. **Мазкур тўпламда, биринчидан,** хусусий ҳосилали иккинчи ва юқори тартибли дифференциал тенгламаларига оид умумий тушунчалар берилган ҳамда уларнинг классификацияси ва каноник кўринишига оид мисоллар тўплами келтирилган ва айримлари ечиб кўрсатилган, **иккинчидан,** асосий эътибор математик физика тенгламаларининг **учта классик:** гиперболик, параболик ва эллиптик типдаги тенгламалари учун масала ва мисоллар тузилган, ечиб кўрсатилган ҳамда мустақил ечиш учун янги мисоллар тўплами келтирилган.

Шунингдек, ушбу масалалар тўпламида математик физика тенгламалари учун қўйилган масала ва мисоллар ечишда қўлланиладиган бир қатор усуллар, жумладан, **Фурье** (ўзгарувчиларни ажратиш), **Фурье интеграли**, **Грин**, **тушиш**, **Риман**, **давом эттириш** ва **характеристик** усуллари келтирилган.

Ушбу тўплам тўрт бобдан иборат бўлиб, ҳар бир бобнинг параграфларида мавзуларга оид назарий материаллар қисқача баён қилинган, масалалар ечишга қўлланилиши мумкин бўлган бирор

22.311
С26
Салоҳиддинов, М.С.

Математик физика тенгламалари фанидан масалалар тўплами / М.С,Салоҳиддинов, Б.И.Исломов. – Т.: MUMTOZ SO'Z, 2010. – 372 б.

I. Исломов, Б.И.
ББК 22.311я73
УДК: 51:53 (076.1)

Мазкур масалалар тўплами университетларнинг математика, амалий математика ва информатика, механика ва физика йўналишларида таълим олаётган талабалари учун мўлжалланган.

Унда «Математик физика тенгламалари» курсининг хусусий ҳосилали иккинчи ва юқори тартибли дифференциал тенгламалари ҳақида умумий тушунчалар берилган ҳамда уларнинг классификацияси ва каноник кўринишига оид мисоллар тўплами келтирилган. Гиперболик, параболик ва эллиптик типдаги тенгламалар учун қўйилган масалаларнинг ечимларини қуришда турли хил усуллардан (Фурье усули, интеграл алмаштиришлар усули, давом эттириш усули, Риман усули, Грин усули, тушиш усули, характеристикалар усули) фойдаланилган ҳамда ҳар бир мавзуга оид масалалар ечиб кўрсатилган. «Математик физика тенгламалари» курси мавзуларини мустаҳкамлаш учун янги масала ва мисоллар тўплами келтирилган.

Китоб сўнгида мустақил ечиш учун баён этилган мисол ва масалаларнинг жавоблари ҳамда мураккаб масалаларни ечиш учун кўрсатмалар берилган.

Масъул муҳаррир:
Физика маттематика фанлари доктори М.Мирсабуров

Тақризчилар:
Физика математика фанлари доктори Фаязов Қудрат
Физика математика фанлари номзоди Омонов Жумақилич

Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети илмий-методик Кенгашининг 2010 йил 23 июндаги 6-рақамли қарорига биноан нашрга тавсия этилган

ISBN 978-9943-363-98-4

СЎЗБОШИ

Мазкур масалалар тўплами Республикамизда фаолият кўрсатаётган университетларнинг математика, амалий математика ва информатика, механика ва физика йўналишлари учун **«Математик физика тенгламалари»** фани дастурига мосланиб ёзилган. Китоб ДТСларига асосланиб, шу фан бўйича тузилган намунавий дастур ва М.Салоҳиддиновнинг «Ўзбекистон» нашриёти томонидан 2002 йилда чоп этилган **«Математик физика тенгламалари»** дарслигига кўра ёзилган. Бундан ташқари масалаларни танлаш ва тузишда МДҲ ҳамда чет эл олимлари томонидан яратилган тўплам ва монографиялардан фойдаланилган. Шунингдек, муаллифларнинг М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий ва Низомий номидаги Тошкент Давлат педагогика университетларида математик физика тенгламаларидан узоқ йиллар давомида олиб борган амалий машғулотлари ва хамкасблари билан биргаликда яратган услубий кўрсатмаларидан ҳам фойдаланилган.

«Математик физика тенгламалари» фани ниҳоятда кенг, у турли физик, механик, техник, биологик ва бошқа жараёнларни ўрганиш билан узвий боглиқ бўлибгина қолмай, балки бу жараёнларни акс эттирувчи Коши, чегаравий ва аралаш масалаларни турли хил усулларда ечишни ҳам ўргатади. **Мазкур тўпламда, биринчидан,** хусусий ҳосилали иккинчи ва юқори тартибли дифференциал тенгламаларига оид умумий тушунчалар берилган ҳамда уларнинг классификацияси ва каноник кўринишига оид мисоллар тўплами келтирилган ва айримлари ечиб кўрсатилган, **иккиичидан,** асосий эътибор математик физика тенгламаларининг **учта классик:** гиперболик, параболик ва эллиптик типдаги тенгламалари учун масала ва мисоллар тузилган, ечиб кўрсатилган ҳамда мустақил ечиш учун янги мисоллар тўплами келтирилган.

Шунингдек, ушбу масалалар тўпламида математик физика тенгламалари учун қўйилган масала ва мисоллар ечишда қўлланиладиган бир қатор усуллар, жумладан, **Фурье** (ўзгарувчиларни ажратиш), **Фурье интеграли**, **Грин**, **тушиш**, **Риман**, **давом эттириш** ва **характеристик** усуллари келтирилган.

Ушбу тўплам тўрт бобдан иборат бўлиб, ҳар бир бобнинг параграфларида мавзуларга оид назарий материаллар қисқача баён қилинган, масалалар ечишга қўлланилиши мумкин бўлган бирор бир усулнинг моҳияти очиб берилган ва бу усуллар мисоллар ечиш ёрдамида кўрсатилган. Тўпламнинг жавоблар қисмида эса ностандарт масала ва мисоллар учун кўрсатмалар берилган ҳамда айримлари ечиб кўрсатилган.

«Математик физика тенгламалари фанидан масалалар тўплами» китоби ёзишда ўз маслаҳатларини берган физика-математика фанлари доктори **А.Қ.Ўринов**, физика-математика фанлари номзоди **О.Х.Абдуллаев**га ҳамда қўлёзмани кўриб чиқиб, ўз фикр ва мулоҳазаларини билдирган физика-математика фанлари докторлари **Қ.Фаёзов**га, **М.Мирсабуров**га, физика-математика фанлари номзоди **Ж.Омонов**га ва қўлёзмани нашрга тайёрлашда катта ёрдам берган **Н.Б.Исломов**га муаллифлар самимий миннатдорчилик билдирадилар.

Муаллифлар мазкур тўплам математик физика тенгламалари билан шуғулланувчи университет **талабалар**и, **магистрлар**и, **аспирантлар**и ва **ёш тадқиқотчилар**и билимини мустаҳкамлашга хизмат қилади, деган умиддадир ва тўплам ҳақидаги фикр ва мулоҳазаларни мамнуният билан қабул қиладилар.

I БОБ

ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ КЛАССИФИКАЦИЯСИ. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ КАНОНИК КЎРИНИШГА КЕЛТИРИШ

1-§. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечими тўғрисида тушунча

Ω орқали Декарт ортогонал координаталари $x_1, x_2, ... x_n$, $n \geq 2$ бўлган x нуқталарнинг n - ўлчовли E^n Евклид фазосидаги соҳани белгилаймиз.

$u(x) = u(x_1, x_2, \dots x_n)$ функциянинг $x \in \Omega$ нуқтадаги $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ тартибли ҳосиласини

$$D^{\alpha}u = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \; D^0 u = u(x)$$

кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ манфий бўлмаган бутун сонлар.

$F = F(x, ..., p_{\alpha}, ...)$ функция $x \in \Omega$ нуқта ва $p_{\alpha} = p_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n}$ $(\alpha_j = 0,1...,\ j = \overline{1,n})$ ҳақиқий ўзгарувчиларнинг берилган функцияси бўлиб, камида битта $\frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}}$, $|\alpha| = m > 0$ ҳосила нолдан фарқли бўлсин.

Ушбу $F(x, ..., D^{\alpha}u, ...) = 0$ (1.1) тенглик номаълум $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ функцияга нисбатан m **тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама** дейилади.

Агар F барча $p_{\alpha}\ (|\alpha| = 0, 1, \dots, m)$ ўзгарувчиларга нисбатан чизиқли функция бўлса, (1.1) тенглама **чизиқли дифференциал тенглама** дейилади.

Агарда F функция $|\alpha| = m$ бўлганда барча p_{α} ўзгарувчиларга нисбатан чизиқли бўлса, (1.1) тенглама **квазичизиқли дифференциал тенглама** дейилади.

Хусусий ҳосилали m - **тартибли чизиқли дифференциал тенгламани** ушбу

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \tag{1.2}$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин.

Барча $x \in \Omega$ лар учун (1.2) тенгламани ўнг томони $f(x)$ нолга тенг бўлса, (1.2) тенглама **бир жинсли**, $f(x)$ функция айнан нолга тенг бўлмаса, **бир жинсли бўлмаган** тенглама дейилади.

Хусусий ҳосилали иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u = f(x) \tag{1.3}$$

кўринишда ёзилади, бу ерда A_{ij}, B_i, C, f - x ўзгарувчининг Ω соҳада берилган ҳақиқий функцияларидир.

(1.3) тенгламанинг барча A_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$ коэффициентлари нолга тенг бўлган $x \in \Omega$ нуқталарда тенглама иккинчи тартибли бўлмай қолади, яъни бу нуқталарда (1.3) тенгламанинг тартиби бузилади. Биз (1.3) тенглама берилган соҳада унинг тартиби иккига тенг деб ҳисоблаймиз. (1.3) тенгламада $i \neq j$ бўлганда алоҳида–алоҳида $A_{ij} u_{x_i x_j}$, $A_{ji} u_{x_j x_i}$ қўшилувчилар иштирок этмай, балки уларнинг йиғиндиси $(A_{ij} + A_{ji}) u_{x_i x_j}$ иштирок этади. Шу сабабли ҳам умумиятликка зиён етказмай ҳамма вақт $A_{ij} = A_{ji}$ деб ҳисоблаймиз.

(1.1) тенгламада $m = 2$, $n = 2$ бўлса, у ҳолда икки ўзгарувчили хусусий ҳосилали **иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама**

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \tag{1.4}$$

ёки

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + a_1(x, y) u_x +$$
$$+ b_1(x, y) u_y + c_1(x, y) u = 0 \tag{1.5}$$

кўринишда ёзилади, бу ерда $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $a_1(x, y)$, $b_1(x, y)$, $c_1(x, y)$ – берилган функциялар.

1–Мисол. Қуйидаги тенгламалар чизиқли (бир жинсли ёки бир жинсли бўлмаган) ёки чизиқли бўлмаган (квазичизиқли) эканини аниқланг.

а) $u_x u_{xy}^2 + 2xuu_{yy} - 3xyu_y - u = 0.$

Ечиш. Берилган тенглама чизиқли эмас, чунки тенгламанинг чап томони u_{xy} га чизиқли боғлиқ эмас.

б) $u_y + 3x^2 u \cdot u_{xy} + 2u_x - f(x, y)u = 0.$

Ечиш. Тенгламада u_{xy} олдидаги $3x^2 \cdot u$–коэффициент номаълум u функцияга ҳам боғлиқ бўлгани учун, берилган тенглама квазичизиқли бўлади.

в) $sin\, x \cdot u_{xx} + xcos\, y \cdot u_{xy} - 2xy \cdot u_x - u + x^2 = 0.$

Ечиш. Кўриниб турибдики, тенгламанинг чап томони u, u_x, u_{xx}, u_{xy} ларга нисбатан чизиқли функция ва $f(x, y) = x^2$. Шунинг учун, берилган тенглама чизиқли, бир жинсли эмас.

Агар (1.4) даги $F-$ функция ушбу шартни

$$\left|\frac{\partial F}{\partial(u_{xx})}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial(u_{xy})}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial(u_{yy})}\right| \neq 0 \,. \qquad (1.6)$$

қаноатлантирса, у ҳолда (1.4) тенглама хусусий ҳосилали дифференциал тенглама бўлади.

2–Мисол. Қуйидаги тенгламалар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар бўладими?

а) $cos(u_{xx} + u_{yy}) - cos\, u_{xx} \cdot cos\, u_{yy} + sin\, u_{xx} \cdot sin\, u_{yy} = 0.$

Ечиш. Белгилаш киритамиз:

$$F = cos(u_{xx} + u_{yy}) - cos\, u_{xx} \cdot cos\, u_{yy} + sin\, u_{xx} \cdot sin\, u_{yy} = 0\,.$$

Бундан $$\frac{\partial F}{\partial(u_{xx})} = -sin(u_{xx} + u_{yy}) + sin\, u_{xx} cos\, u_{yy} + cos\, u_{xx} sin\, u_{yy} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial(u_{yy})} = -sin(u_{xx} + u_{yy}) + cos\, u_{xx} \cdot sin\, u_{yy} + sin\, u_{xx} \cdot cos\, u_{yy} = 0$$

келиб чиқади.

Демак, (1.6) га кўра берилган тенглик хусусий ҳосилали дифференциал тенглама эмас.

б) $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 - (u_{xx} - u_{yy})^2 = 0.$

Ечиш. Берилган тенгликдан, $u_{xx} \cdot u_{yy} = 0$ келиб чиқади, бу эса хусусий ҳосилали дифференциал тенглама бўлади.

Ω соҳада аниқланган $u(x)$ функция (1.1) тенгламада иштирок этувчи барча ҳосилалари билан узлуксиз бўлиб, уни айниятга айлантирса, $u(x)$ ни (1.1) **тенгламанинг регуляр (классик) ечими** дейилади.

3–Мисол. $u = cos\, y + (y-x) sin\, y$ функция $(x-y)u_{xy} = u_y$ дифференциал тенгламанинг ечими бўлиши ёки бўлмаслигини аниқланг.

Ечиш. $u = cos\, y + (y-x) sin\, y$ функциядан хосилалар оламиз:

$$u_y = -\sin y + \sin y + (y-x)cos\, y = (y-x)cos\, y, u_{yx} = -cos\, y$$

u, u_y, u_{xy} функциялар $\Omega = \{(x,y):\ -\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty\}$ соҳада узлуксиз бўлганлиги учун бу функцияларни берилган дифференциал тенгламага қўйиб айният ҳосил қиламиз:

$$-(x-y)cos\, y = (y-x)cos\, y.$$

Демак, $u = cos\, y + (y-x) sin\, y$ функция $(x-y)u_{xy} = u_y$ дифференциал тенгламанинг ечими бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар

I. Қуйидаги тенгликларнинг хусусий ҳосилали дифференциал тенглама (х.ҳ.д.т) бўлиши ёки бўлмаслигини аниқланг:

1. $sin^2(u_{xx} + u_{xy}) + cos^2(u_{xx} + u_{xy}) - u = 1.$
2. $sin(u_{xy} + u_x) - sin\, u_{xx} \cdot cos\, u_x - cos\, u_{xy} \cdot sin\, u_x + 2u = 0.$
3. $\frac{\partial}{\partial x} tg\, u - u_x sec^2 u - 3u + 2 = 0.$
4. $ln\,|u_x u_y| - ln\,|u_x| + ln\,|u_y| + 5u - 6 = 0.$
5. $cos(u_x + u_y) - cos\, u_x cos\, u_y + sin\, u_x sin\, u_y = 0.$
6. $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 - (u_{xx} + u_{yy})^2 = 0.$
7. $u_y(u_y - 4u_{xx}) - (u_y - 2u_{xx})^2 = 0.$
8. $sin\, 2(u_{yy} + u_x) - 2 sin\, u_{yy} cos\, u_x + u_{xy} + u = 0$

II. Тенгламаларнинг тартибини аниқланг.

9. $u_x u_{xy}^2 + (u_{xx}^2 - 2u_{xy}^2 + u_y)^2 - 2xy = 0.$

10. $cos^2 u_{xy} + sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u = 0$.

11. $2(u_x - 2u)u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y}(u_x - 2u)^2 - xy = 0$.

12. $\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{yy}^2 - u_y\right) - 2u_{yy}\frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xy} - u_x\right) - 2u_x + 2 = 0$.

13. $ln\left|u_{xx}u_{yy}\right| - ln\left|u_{xx}\right| - ln\left|u_{yy}\right| + u_{xyy} + u_y = 0$.

14. $2u_{xx}u_{xxy} - \frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx} - u_y\right)^2 - 2u_y u_{xxy} + u_x = 0$.

15. $u_{xxxx} + a(x, y)u_{xxx} + b(x, y)u_{yyy} + c(x, y)u_{yyyy} = f(x, y)$.

16. $\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\right)\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial u^2}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$.

17. $\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma\right)\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$.

18. $\frac{\partial}{\partial x}\left(sign y\left|y\right|^m\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad m > 0$.

III. Қуйидаги тенгламаларнинг қайси бири бир жинсли ёки бир жинсли бўлмаган, квазичизикли ёки чизикли бўлмаган тенгламалар эканлигини аниқланг:

19. $u_y u_{xx} - 3x^2 u u_{xy} + 2u_x - f(x, y)u = 0$.

20. $2sin(x + y)u_{xx} - xcos\, yu_{xy} + xyu_x - 3u + 1 = 0$.

21. $x^2 yu_{xxy} + 2e^x y^2 u_{xy} - \left(x^2 y^2 + 1\right)u_{xx} - 2u = 0$.

22. $u_{xy}u_{xx} - 3u_{yy} - 6xu_y + xyu = 0$.

23. $2xu_{xy} - 6\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 - xy\right) + u_{yy} = 0$.

24. $\frac{\partial}{\partial y}\left(yu_y + u_x^2\right) - 2u_x u_{xy} + u_x - 6u = 0$.

25. $u_{xy} + u_y + u^2 - xy = 0$.

26. $a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + h(x, y) = 0$.

27. $u_{xy} + 2\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2 + u) - 6x \cdot sin\, y = 0$.

IV. Берилган функция берилган дифференциал тенгламанинг ечими бўлиши ёки бўлмаслигини аниқланг.

28. $u=\frac{y^2}{3x}+arcsin(xy)$, $\quad x^2u_x - xyu_y + y^2 = 0$.

29. $u=e^{xy}$, $\quad x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+2xyu=0$.

30. $u=ln\left(x+e^{-y}\right)$, $\quad u_xu_{xy}-u_yu_{xx}+u_{yy}+u=0$.

31. $u=\frac{x}{y}$, $\quad xu_{xy}-u_y+u_x+u_{xx}=0$.

32. $u=x^y \ (x>0)$, $\quad yu_{xy}=(1+yln\,x)u_x$.

33. $u=cos\,y+(y-x)sin\,y+x^2$, $\quad (x-y)u_{xy}=u_y$.

2-§. Характеристик форма тушунчаси. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг классификацияси ва каноник кўриниши

Фараз қилайлик (1.1) m - тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламада иштирок этаётган $F=F\left(x,...,p_\alpha,...\right)$ функция $p_\alpha=p_{\alpha_1,...,\alpha_n}, |\alpha|=m$ ўзгарувчилар бўйича узлуксиз биринчи тартибли ҳосилаларга эга бўлсин.

Ушбу

$$K(\lambda_1,...,\lambda_n)=\sum_{|\alpha|=m}\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\lambda^\alpha,\quad \lambda^\alpha=\lambda_1^{\alpha_1}\cdot\lambda_2^{\alpha_2}\cdot...\cdot\lambda_n^{\alpha_n} \qquad (1.7)$$

m - тартибли форма (m - даражали бир жинсли кўпхад) (1.1) тенгламага мос бўлган характеристик форма дейилади.

Иккинчи тартибли квазичизиқли ушбу

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\Phi\left(x,u,u_{x_i},...,u_{x_n}\right)=0 \qquad (1.8)$$

кўринишдаги дифференциал тенглама учун (1.7) форма

$$Q\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \qquad (1.9)$$

квадратик формадан иборат бўлади, бу ерда $A_{ij}(x)\in C(\Omega)$.

Алгебра курсида исбот қилинадики, ҳар бир тайин $x_0\in\Omega$ нуқта учун шундай махсус бўлмаган

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki}\xi_k , \quad \det(\beta_{ki}) \neq 0 , \quad i = 1,2,...,n \tag{1.10}$$

алмаштириш мавжуд бўлиб, унинг ёрдами билан (1.9) квадратик форма қуйидаги кўринишга олиб келинади:

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \xi_k^2 , \tag{1.11}$$

бу ерда μ_k, $k=1,...,n$ коэффициентлар $1,-1,0$ қийматларни қабул қилади. Шу билан бирга мусбат (манфий) коэффициентлар сони (инерция индекси) ва нолга тенг бўлган коэффициентлар сони (форма дефекти) аффин инвариантдир, яъни бу сонлар фақат (1.9) форма билан аниқланиб, (1.10) алмаштиришнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмайди.

Бу нарса (1.8) дифференциал тенглама $A_{ij}(x)$ коэффициентларининг x нуқтада қабул қиладиган қийматларига қараб, классификация қилиш имконини беради.

Шундай қилиб, (1.8) тенглама Ω соҳанинг ҳар бир нуқтасида эллиптик, гиперболик ёки параболик дейилади. Агар ҳар бир $x \in \Omega$ нуқтада (1.11) форманинг μ_k, $k=1,...,n$ коэффициентлар мос равишда нолдан фарқли ва бир хил ишорали, нолдан фарқли ва бир хил ишорали эмас ёки камида биттаси нолга тенг(ҳаммаси эмас) бўлса, у ҳолда (1.8) тенглама Ω соҳани ҳар бир нуқтасида мос равишда эллиптик, гиперболик ёки параболик дейилади.

1-мисол. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0$

тенгламанинг типини аниқланг.

Ечиш. (1.9)га асосан берилган тенгламага мос квадратик форма қуйидаги кўринишга эга:

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_3 + 5\lambda_3^2 =$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)^2 + \lambda_3^2.$$

Бу ерда $\xi_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\xi_2 = \lambda_2 + 2\lambda_3$, $\xi_3 = \lambda_3$, яъни $\lambda_1 = \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3$, $\lambda_2 = \xi_2 - 2\xi_3$, $\lambda_3 = \xi_3$ алмаштириш қилсак, $Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ квадратик форма $Q = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ каноник кўринишга келади. Бундан ва (1.11) га асосан $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ ни ҳисобга олиб, берилган тенглама эллиптик типга тегишли эканлиги келиб чиқади.

(1.8) тенгламанинг юқорида баён қилинган классификациясини эквивалент тарзда $A=\left\|A_{ij}\right\|$ матрицанинг характеристик сонларига асосланиб ҳам бериш мумкин. Бунинг учун алгебрадан маълум бўлган (1.9) квадратик форманинг (1.11) каноник кўринишдаги μ_k, $k=1,...,n$ сонлар A матрицанинг характеристик сонларидан иборат эканлигини эслаш кифоядир.

(1.8) тенгламадаги A матрицанинг характеристик сонлари ушбу

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (1.12)$$

алгебраик тенгламанинг илдизларидан иборат бўлиб, улар ҳақиқийдир (A матрица симметрик бўлгани учун), бу ерда E бирлик матрица.

(1.8) тенгламадаги A матрица берилган Ω соҳанинг ихтиёрий x нуқтасида α та мусбат, β та манфий ва γ та нол характеристик сонларга эга бўлсин. Маолумки, $\alpha+\beta+\gamma=n$.

Агар A матрицанинг характеристик сонлари мос равишда нолдан фарқли ва бир хил ишорали $\left[(\alpha,\beta,\gamma)\equiv(n,0,0)=(0,n,0)\right]$, нолдан фарқли ва бир хил ишорали эмас $\left[(\alpha,\beta,\gamma)\equiv(n-1,1,0)=(1,n-1,0)\right]$ ёки камида биттаси нолга тенг $\left[(\alpha,\beta,\gamma)\equiv(n-1,0,1)=(0,n-1,1)\right]$ бўлса, у ҳолда (1.8) тенглама Ω соҳанинг ҳар бир нуқтасида эллиптик, гиперболик ёки параболик дейилади.

2–Мисол. $u_{xy}+u_{yz}+u_{xz}-x\cos x\,u_y-y\sin x\,u+(x+y)e^{-y}=0$ тенгламанинг типини аниқланг.

Ечиш. Берилган тенглама

$$(A_{11}=0,\ A_{12}=\frac{1}{2},\ A_{13}=\frac{1}{2},\ A_{21}=\frac{1}{2},\ A_{22}=0,$$

$$A_{23}=\frac{1}{2},\ A_{31}=\frac{1}{2},\ A_{32}=\frac{1}{2},\ A_{33}=0)$$

ва (1.12) дан қуйидагига эга бўламиз:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -\lambda & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -\lambda \end{vmatrix}=0,$$

$$4\lambda^3-3\lambda-1=0,\quad (2\lambda+1)^2(\lambda-1)=0,\quad \lambda_{1/2}=-0,5;\quad \lambda_3=1.$$

Демак, таърифга асосан берилган тенглама $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,2,0)$ типга, яъни гиперболик типга тегишли эканлиги келиб чикади.

Агар нолдан фаркли бўлган бир хил ишорали k_0, k_1 ҳақиқий сонлар мавжуд бўлиб, барча $x\in\Omega$ нуқталар учун ушбу

$$k_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\le Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\le k_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

тенгсизлик бажарилса, Ω соҳада эллиптик бўлган (1.8) тенглама текис эллиптик тенглама дейилади.

Юкорида айтилганларга асосан (1.8) тенглама

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_k u_{y_k y_k}+\overline{\Phi}\left(y,u,u_{y_1},\dots,u_{y_n}\right)=0 \qquad (1.13)$$

кўринишда ёзилади.

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг аралаш ҳосилалар қатнашмаган (1.13) кўриниши, одатда унинг **каноник кўриниши** дейилади.

Агар барча $\mu_k=1$ ёки барча $\mu_k=-1$, $k=1,2,....,n$ бўлса, яъни Q форма мос равишда мусбат ёки манфий аникланган (дефинит) бўлса, (1.8) тенглама $x\in\Omega$ нукта эллиптик типдаги ёки эллиптик тенглама дейилади.

Агар μ_k коэффициентлардан биттаси манфий, қолганлари мусбат (ёки аксинча) бўлса, (1.8) тенглама $x\in\Omega$ нуқтада гиперболик тенглама дейилади.

μ_k коэффициентлардан l таси, $1<l<n-1$, мусбат, қолган $n-l$ таси манфий бўлса, (1.8) тенглама $x\in\Omega$ нуқтада ультрагиперболик типдаги тенглама дейилади.

Агар μ_k коэффициентлардан биттаси нолга тенг, қолганлари нолдан фаркли ва бир хил ишорали бўлса (1.8) тенглама $x\in\Omega$ нуқтада параболик тенглама дейилади.

Агар коэффициентлардан камида биттаси нолга тенг бўлса, (1.8) тенглама кенг маънода $x \in \Omega$ нуқтада параболик тенглам дейилади.

Агар (1.8) тенглама Ω соҳанинг ҳар бир нуқтасида эллиптик, гиперболик ёки параболик бўлса, у ҳолда Ω соҳада мос равишд эллиптик, гиперболик ёки параболик типдаги тенглама деб аталади.

3–Мисол. $u_{xy} - u_{xz} - u_{yz} = 0$ тенгламани каноник кўринишг келтиринг.

Ечиш. (1.9)га асосан берилган тенгламага мос квадратик форм ёзиб оламиз: $Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3 =$

$$= \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)^2 - \frac{1}{4}(\lambda_2 - \lambda_1)^2 - \lambda_3^2.$$

Агар $\xi_1 = 0{,}5(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)$, $\xi_2 = 0{,}5(\lambda_2 - \lambda_1)$, $\xi_3 = \lambda_3$ деб белгиласа $Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ квадратик форма $Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$ канони кўринишга келади.

Демак матрицаси $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ бўлган $\lambda_1 = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3$ $\lambda_2 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $\lambda_3 = \xi_3$ аффин алмаштириши орқали $Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ квадратик форма $Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$ каноник кўринишг келади.

Берилган дифференциал тенгламани каноник кўринишг келтирувчи алмаштиришнинг матрицаси M га қўшма матрица яъни $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ бўлиб, у $\xi = x + y$, $\eta = -x + y$, $\zeta = x + y + z$ кўринишга эга бўлади. Тенгламада бу алмаштиришни бажариб в $u(x, y, z) = \upsilon(\xi, \eta, \zeta)$ белгилаш киритиб, ҳамда қуйидагилар хисобга олиб $u_{xy} = \upsilon_{\xi\xi} - \upsilon_{\eta\eta} + \upsilon_{\zeta\zeta} + 2\upsilon_{\xi\zeta}$, $u_{xz} = \upsilon_{\xi\zeta} - \upsilon_{\eta\zeta} + \upsilon_{\zeta\zeta}$, $u_{yz} = \upsilon_{\xi\zeta} + \upsilon_{\eta\zeta} + \upsilon_{\zeta\zeta}$ берилган дифференциал тенгламан ушбу кўринишдаги $\upsilon_{\xi\xi} - \upsilon_{\eta\eta} - \upsilon_{\zeta\zeta} = 0$ каноник шаклга оли келамиз. Дамак, (1.13)га асосан берилган тенглама гиперболи типга тегишли бўлади.

Ω соҳанинг турли қисмида (1.8) тенглама ҳар хил типга тегишли бўлса, бундай тенгламага **аралаш типдаги** тенглама дейилади.

4–Мисол. $u_{xx}+yu_{yy}-3u_x+4u_y-10u=0$ тенгламанинг типини аниқланг.

Ечиш. Берилган тенглама $(A_{11}=1,\ A_{12}=0,\ A_{21}=0,\ A_{22}=y)$ ва (1.12) дан қуйидагига эга бўламиз:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & y\text{-}\lambda\end{vmatrix}=0,\ \ (1-\lambda)(y-\lambda)=0,\ \ \lambda_1=1,\ \ \lambda_2=y.$$

Шундай қилиб, берилган тенглама $y=0$ ўқнинг ихтиёрий қисмини ўз ичига олган Ω соҳада аралаш типга тегишли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $y>0$ бўлса, $(2,0,0)$ типга; $y<0$ бўлса, $(1,1,0)$ типга; $y=0$ бўлса, $(1,0,1)$ типга тегишли бўлади, яъни берилган тенглама Ω соҳанинг ҳар бир нуқтасида эллиптик, гиперболик ва параболик типдаги тенглама бўлади.

Агар (1.8) квазичизиқли тенгламада A_{ij} функциялар x ўзгарувчидан ташқари, u ва u_{x_i} $\left(i=\overline{1,n}\right)$ ларга ҳам боғлиқ бўлса, тенглама конкрет $u(x)$ ечимга нисбатан типга ажратилади.

5–Мисол. $u_x^2u_{xx}+u_y^2u_{yy}-u_x+u_y=0$ тенгламанинг типини $u=x+y$ ечимига нисбатан аниқланг.

Ечиш. Берилган тенглама $(A_{11}=u_x^2,\ A_{12}=0,\ A_{21}=0,\ A_{22}=u_y^2)$ ва $u=x+y$ дан қуйидагини

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}u_x^2-\lambda & 0\\ 0 & u_y^2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 1\text{-}\lambda\end{vmatrix}=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=1.$$

ҳосил қиламиз. Демак, берилган тенглама $u=x+y$ ечимга нисбатан $(2,0,0)$ типга, яъни эллиптик типга тегишли экан.

Агар $m=n=2$ бўлса, у ҳолда (1.1) тенглама

$$F\left(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}\right)=0 \tag{1.14}$$

кўринишда ёзилади. (1.7) га асосан

$$K\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\lambda_1^2+\frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\lambda_1\lambda_2+\frac{\partial F}{\partial u_{yy}}\lambda_2^2 \tag{1.15}$$

квадратик формага эга бўламиз.

Алгебра курсидан маълумки, бирор нуқта (соҳа)да

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\right)^2-\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\cdot\frac{\partial F}{\partial u_{yy}} \tag{1.16}$$

ифода манфий, нол, мусбат қийматга эга бўлса, шу нуқта (соҳа)да (1.15) квадратик формани мос равишда $\xi_1^2+\xi_2^2$, ξ_1^2, $\xi_1^2-\xi_2^2$ кўринишга келтириш мумкин.

Демак, (1.16) ифода манфий, нол, мусбат қиймат қабул қилган нуқта (соҳа)да (1.14) тенглама мос равишда эллиптик, параболик гиперболик типга тегишли бўлади.

6–Мисол. $u_{xx}-8u_{xy}+16u_{yy}+2u_y=0$ тенгламанинг типини аниқланг.

Ечиш. (1.12) га асосан $F\equiv u_{xx}-8u_{xy}+16u_{yy}+2u_y$ га тенг. Бундан

$$\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}=1,\qquad \frac{\partial F}{\partial u_{xy}}=-8,\qquad \frac{\partial F}{\partial u_{yy}}=16$$

эга бўламиз. (1.16) кўра эса қуйидагини

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\right)^2-\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\cdot\frac{\partial F}{\partial u_{yy}}=\frac{1}{4}(-8)^2-1\cdot16=16-16=0$$

ҳосил қиламиз. Таърифга асосан берилган тенглама параболик типга тегишли эканлиги келиб чиқади.

Икки ўзгарувчили иккинчи тартибли квазичизиқли

$$A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+$$
$$+\Phi(x,y,u,u_x,u_y)=0 \tag{1.17}$$

дифференциал тенгламада $\left(|A|+|B|+|C|\neq 0\right)$ агар $B^2-AC<0$, $B^2-AC=0$, $B^2-AC>0$ бўлса, у ҳолда (1.17) тенглама мос равишда эллиптик, параболик, гиперболик типга тегишли бўлади.

7–Мисол. $u_{xx}-6u_{xy}+8u_{yy}+2u_x+7u+xy=0$ тенгламанинг типини аниқланг.

Ечиш. (1.17) га асосан берилган тенгламадан қуйидагига эга бўламиз:

$$A(x,y)=1,\quad B(x,y)=-3,\quad C(x,y)=8,$$
$$B^2-AC=(-3)^2-1\cdot8=1>0.$$

Бундан, таърифга асосан берилган тенглама гиперболик типга тегишли эканлиги келиб чиқади.

(1.1) тенглама чизиқсиз бўлган ҳолда у (1.7) квадратик форманинг характерига мос ҳолда юқоридаги каби классификация қилинади. Бироқ бу ҳолда (1.7) квадратик форманинг коэффициентлари x ўзгарувчидан ташқари $u(x)$ функция ва унинг ҳосиласига ҳам боғлиқ бўлгани учун (1.1) тенгламанинг типи конкрет $u(x)$ ечимига нисбатан аниқланади.

8-Мисол.

$$u_{xx}^2 - 2\left(u_{xy} + 2\right)u_{xy} + u_{yy}^2 + 2u_x + 5u_y - 7\left(x + y - \frac{4}{7}\right) = 0$$

тенгламанинг типини $u = 0,5\left(x + y\right)^2$ ечимига нисбатан аниқланг.

Ечиш. Берилган тенгламадан (1.17) га асосан қуйидагини аниқлаймиз:

$$A(x, y) = u_{xx}, \quad B(x, y) = -\left(u_{xy} + 2\right), \quad C(x, y) = u_{yy}.$$

Бундан ва $u = 0,5\left(x + y\right)^2$ дан қуйидагини

$$A(x, y) = 1, \quad B(x, y) = -3, \quad C(x, y) = 1,$$

$$B^2 - AC = (-3)^2 - 1 \cdot 1 = 8 > 0$$

ҳосил қиламиз. Демак, берилган тенглама $u = 0,5\left(x + y\right)^2$ ечимга нисбатан гиперболик типга тегишли экан.

Мустақил ечиш учун масалалар

I. Қуйидаги тенгламалар типини аниқланг.

34. $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 6u_y + 2u + 5x^2 y = 0$.

35. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x^2 + 2u_y u = 0$.

36. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x \cdot u_y + 3u - \sin x\, y^2 = 0$.

37. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + 2u_y = 0$.

38. $4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0$.

39. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} - xu_x + yu_y = 0$.

40. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2xyu_x + 3xu = 0$.

41. $u_{xy} + u_{yz} + u_{xz} - 3x^2 u_y - y(\sin x)u + xe^{-y} = 0$.

42. $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+3u_z-u=0$.

43. $xyu_{xx}+u_{yy}=0$.

44. $y^{2m+1}u_{xx}+u_{yy}-u_x=0$, m - номанфий бутун сон.

45. $xu_{xx}+yu_{yy}-u=0$.

II. Қуйидаги тенгламаларнинг типини унинг берилган ечимига нисбатан аниқланг.

46. $u_{xx}^2+(u_{xx}-2)u_{xy}-u_{yy}^2=0$, $u=x^2+y^2$.

47. $u_{xy}^2+u_{xx}u_{yy}+u_{yy}^2=8$, $u=2\sqrt{2}xy$.

48. $u_{xx}^2-4u_{xy}+u_{yy}^2=0$, $u=(x+y)^2$.

49. $u_{xx}+u_{xy}u_{yy}+u_{yy}^2-4u_{yy}=0$, $u=2y^2$.

50. $3u_{xx}^3-6u_{xy}+u_{yy}-4=0$, $u=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.

51. $u_{xx}^2u_{xy}-5u_{yy}+u_x-2(x+y)-8=0$, $u=x^2+2xy$.

52. $u_{xx}^4+2u_{xy}^2-3u_{yy}+u_y-2x=0$, $u=2xy-8y$.

53. $5u_{xx}^5-7u_{xy}+25u_{yy}-150y=0$, $u=\frac{x^2}{2}+y^3+\frac{5}{7}xy$.

54. $u_{xx}^2+5u_{xy}^2+6u_{yy}^2=12$, $u=\sqrt{3}x^2$.

55. $u_{xx}^3-4u_{xy}^2+7u_{yy}-4u_x+u_y+3x+4y+3=0$, $u=\frac{1}{2}x^2+xy$.

56. $u_{xx}^2-2u_{xy}^2+u_{yy}^2+2u_x-2(x+y)=0$, $u=\frac{1}{2}(x+y)^2$.

57. $u_{xy}^2+u_{xx}u_{yy}+u_{yy}^2+2u_{xx}+2u_{yy}=0$, $u=x^2-y^2$.

III. Қуйидаги тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг.

58. $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}=0$.

59. $u_{xx}-4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yy}+u_{zz}+3u_x=0$.

60. $u_{xy}+u_{xz}+u_{yz}-u_x+u_y=0$.

61. $3u_{yy}-2u_{xy}-2u_{yz}+4u=0$.

62. $u_{xx}+4u_{yy}+u_{zz}+4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yz}+2u=0$.

63. $u_{xx}+4u_{yy}+9u_{zz}+4u_{xy}+6u_{xz}+12u_{yz}-2u_x-4u_y-6u_z=0$.

64. $3u_{xy}-2u_{xz}-u_{yz}-u=0$.

65. $u_{xx} + 3u_{yy} + 3u_{zz} - 2u_{xy} - 2u_{xz} - 2u_{yz} - 8u = 0.$

66. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 6u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_{yz} + 2u_x + 2u_y + 2u_z + 4u = 0.$

67. $2u_{xx} + 5u_{yy} + 2u_{zz} - 6u_{xy} - 4u_{xz} + 6u_{yz} - 3u + y - 2z = 0.$

68. $2u_{xy} - u_{xz} + 2u_{yz} - u = 0.$

3-§. Юқори тартибли дифференциал тенгламаларнинг ва системаларнинг классификацияси

m - тартибли хусусий ҳосилали квазичизиқли тенглама

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + \Phi\left(x,\ u,\ \ldots,\ D^\alpha u,\ \ldots\right) = 0 \qquad (1.18)$$

кўринишда ёзилади, бу ерда $\Phi\left(x,\ u,\ \ldots,\ D^\alpha u,\ \ldots\right)$ ифода номаълум $u = u(x)$ функциянинг $m-1$ дан юқори бўлган хосилаларини ўз ичига олмайди.

(1.8) тенгламага мос бўлган характеристик форма (1.7) га асосан

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \lambda^\alpha \qquad (1.19)$$

кўринишда ёзилади.

Агар Ω соҳанинг тайин нуқтасида $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_n$ ўзгарувчиларнинг шундай $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1,\ \ldots,\ \mu_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ аффин алмаштиришини (аффин алмаштириш махсус бўлмаган $\lambda = A\mu + B$ $(\det A \neq 0,\ B \in E^n)$ алмаштиришдан иборатдир) топиш мумкин бўлсаки, натижада (1.19) формадан ҳосил бўлган форма μ_i ўзгарувчиларнинг фақат l тасини $0 < l < n$, ўз ичига олса, (1.18) тенглама параболик ёки параболик бузилади деб айтилади.

Параболик бузилиш бўлмаганда, фақатгина $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, бўлгандагина $K(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = 0$ бўлса, (1.18) тенглама $x \in \Omega$ нуқтада эллиптик дейилади.

Агарда $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_n$ ўзгарувчилар орасидан биттасини, масалан $\lambda_n = \lambda$ ни ажратиб олиш мумкин бўлсаки (зарур бўлган ҳолда бу ўзгарувчиларни аффин алмаштиришдан сўнг), барча $\lambda' = (\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n-1}) \in E^{n-1}$ нуқталар учун λ га нисбатан характеристик

$$K(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n-1},\lambda)=0 \qquad (1.20$$

тенгламанинг барча илдизлари ҳақиқий бўлса, (1.18) тенглам $x\in\Omega$ нуқтада гиперболик дейилади.

Агарда λ илдизларининг бир қисми ҳақиқий, қолганлар комплекс бўлса, (1.18) тенглама $x\in\Omega$ нуқтада кўшма типдаг тенглама дейилади.

Бу таърифга кўра $\alpha\geq3$ бўлгандагина (1.18) тенглама кўшма тип бўлиши мумкин.

1–Мисол. $u_{xxy}+3u_x+6u_y-4u=0$ тенгламанинг типини аниқланг.

Ечиш.(1.19)га асосан берилган тенгламага мос квадратик форма $K\ (\lambda_1,\lambda_2\ )=\ \lambda_1^{\ 2}\lambda_2$ бўлиб, $\lambda_1=\lambda$ деб олсак, (1.20) га асосан $\lambda^2\lambda_2=0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама $\forall\lambda_2\in R$ да ҳақиқий илдизга эга ($\lambda_2\neq0$ да $\lambda=0$; $\lambda_2=0$ да λ ихтиёрий ҳақиқий сон) Таърифга асосан берилган тенглама гиперболик типга тегишл эканлиги келиб чиқади.

2–мисол. $yu_{xxx}+u_{xyy}+5u_x=0$ тенгламанинг типини аниқланг

Ечиш. (1.19) га асосан берилган тенгламага мос квадратик форм $K\ (\lambda_1,\lambda_2\ )=\ y\lambda_1^3+\lambda_1\ \lambda_2^2$ бўлиб, $\lambda_1=\lambda$ деб олсак, (1.20) г асосан $\lambda\left(y\lambda^2+\lambda_2^2\right)=0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама $y\leq0$ д ҳақиқий илдизларга, $y>0$ да эса ҳам ҳақиқий ва ҳам комплек илдизларга эга. Демак берилган тенглама $y\leq0$ да гиперболик, $y>0$ да кўшма типга тегишлидир.

(1.1) тенгламада қатнашаётган F функция N ўлчовли $F=(F_1,\ \ldots,\ F_N)$ вектордан иборат бўлсин. Бу векторнин $F_1,\ \ldots,\ F_N$ компоненталари Ω соҳа x нуқталарнинг ҳамд $p_0^{\,j}=u_j$, $p_\alpha^{\,j}=D^\alpha u_j$, $j=1,\ldots,M$, $|\alpha|=m$ ҳақиқий ўзгарувчиларнинг берилган ҳақиқий функциялари бўлсин.

Ушбу

$$F_i\left(x,\ldots,\ D^\alpha u_j,\ldots\right)=0,\ i=1,\ldots,N,\ j=1,\ldots,M \qquad (1.21)$$

кўринишдаги тенглик, номаълум $u_1,\ldots,u_M$ функцияларга нисбата m - тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламала системаси дейилади.

Агар $N = M$ бўлса, у ҳолда (1.21) система аниқ система дейилади.

Ушбу

$$a_\alpha = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p_\alpha^j} \right\|, \qquad i,\, j = 1, \dots, N\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = m$$

квадратик матрица ёрдамида ҳақиқий скаляр $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \dots,\, \lambda_n$ параметрларга нисбатан $N \cdot m$ тартибли формани қуйидагича аниқлаймиз:

$$K(\lambda_1, \dots \lambda_n) = \det \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \lambda^\alpha = \det \sum_{\alpha|=m} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n} . \qquad (1.22)$$

(1.22) форма (1.21) системанинг **характеристик детерминанти** дейилади.

(1.22) форманинг характерига караб, худди (1.18) тенгламага ўхшаш, (1.21) система ҳам типларга ажратилади.

Айрим ҳолларда (1.21) тенгламалар системасини битта матрица тенглама кўринишда ёзиш мумкин:

$$\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha u = f\,, \qquad (1.23)$$

бу ерда D^α – дифференциал оператор, $u = \left(u_1(x), \dots, u_N(x)\right)$ вектор-функция матрица устуннинг ҳар бир компонентасига таъсир килади, a_α – коэффициентлар N – тартибли матрицадан иборат бўлиб, булар ҳамда (1.23) системанинг ўнг томони $f = \left(f_1, \dots, f_N\right)$ номаълум $u_1, \dots, u_N$ функцияларга ва уларнинг тартиби $m - 1$ дан катта бўлмаган ҳосилаларига боғлиқ бўлиши мумкин.

Агар $m = 1$ бўлса, у ҳолда (1.23) системадан биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системаси

$$\sum_{j=1}^{n} a_j D_j u + b u = f \qquad (1.24)$$

келиб чиқади, бу ерда $b - N -$ тартибли квадратик матрица.

(1.24) тенгламага мос бўлган $N -$ тартибли характеристик форма ушбу

$$K\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right) = \det \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \lambda_j \qquad (1.25)$$

кўринишда ёзилади.

3–Мисол. $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ Коши - Рима
системасининг типини аниқланг.

Ечиш. Берилган системани (1.24) формула билан солиштирса қуйидаги эга бўламиз:

$$n = N = 2,\quad b = 0,\quad f = 0,\quad a_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad a_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\quad \begin{Vmatrix} D_1u_1 - D_2u_2 \\ D_2u_1 + D_1u_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

(1.25) га асосан берилган системага мос характеристик форма

$$K\left(\lambda_1,\lambda_2\right) = \det(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2) = \det\begin{Vmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{Vmatrix} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

кўринишда эга бўлади. Демак, берилган Коши-Риман системас эллиптик типдаги система экан.

4–Мисол. $\begin{cases} 2u_x - 3u_y + 3v_v + u = 0, \\ -u_x + u_y + v_x + xy = 0 \end{cases}$ системанинг типини аниқлан

Ечиш. Берилган системани (1.24) формула билан солиштирс қуйидаги эга бўламиз:

$$n = N = 2,\qquad b = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},\qquad f = \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix},\qquad a_2 = \begin{Vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},\qquad D_1 = \frac{\partial}{\partial x},\qquad D_2 = \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{Vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix},$$

$$= \begin{Vmatrix} 2D_1u - 3D_2u + 3D_2v + u \\ -D_1u + D_1v + D_2u \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}.$$

(1.25)га асосан берилган системага мос характеристик форма

$$K\left(\lambda_1,\lambda_2\right) = \det(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2) = \det\begin{Vmatrix} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 & 3\lambda_2 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_1 \end{Vmatrix} = 2\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2$$

кўринишда эга бўлади. Демак, берилган система гиперболи типдаги система экан.

Бу ерда ҳам (1.1) квазичизиқли тенгламада a_α функциялар ўзгарувчидан ташқари $u,...,D^\beta u,...$ $(1 \le \beta \le m-1)$ ларга боғли бўлса, тенгламa конкрет $u(x)$ ечимга нисбатан типларга ажратилади.

5–Мисол.

$$u_{xxx}+u_x\cdot u_{xxy}+u_y\cdot u_{xyy}+u\cdot u_{yyy}+u_{xx}+u_{yy}+xu_x-yu_y=0$$

тенгламанинг типини $u = xy$ ечимига нисбатан аниқланг.

Ечиш. (1.19) га асосан берилган тенгламага мос квадратик форма $K\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=\lambda_1^3+u_x\lambda_1^2\lambda_2+u_y\lambda_1\lambda_2^2+u\lambda_2^3$ кўринишда эга бўлади. Бундан ва $u=xy$ дан қуйидагини $K\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=\lambda_1^3+y\lambda_1^2\lambda_2+x\lambda_1\lambda_2^2+xy\lambda_2^3$ ҳосил қиламиз.

(1.20)га асосан $\lambda_1=\lambda$ деб қуйидаги $\left(\lambda^2+x\lambda_2^2\right)\times\left(\lambda+y\lambda_2\right)=0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама $x\le 0$ да ҳақиқий илдизларга, $x>0$ да эса ҳам ҳақиқий ва ҳам комплекс илдизларга эга. Демак берилган тенглама $x\le 0$ да гиперболик, $x>0$ да қўшма типга тегишлидир.

Мустақил ечиш учун масалалар

I. Қуйидаги тенгламалар типини аниқланг.

69. $u_{xxx}+2u_{xx}+3u_x+u_y+u=0$.
70. $u_{xxy}+3u_y=0$.
71. $u_{xxx}-3u_{xxy}+3u_{xyy}-u_{yyy}+u_{yy}+u_x=0$.
72. $u_{xxy}+u_{xyy}=0$.
73. $yu_{xxx}+u_{xyy}=0$.
74. $3y^2u_{xxx}+3y^2u_{xxy}+u_{xyy}+u_{yyy}+u=0$.
75. $u_{yyyy}+u=0$.
76. $u_{xxxx}+3u_{xxyy}-6u_{xyyy}+10u_{yyyy}=0$.
77. $3u_{xxxx}+13u_{xxxy}+18u_{xxyy}+8u_{xyyy}=0$.
78. $4u_{xxxx}+4u_{xxxy}+5u_{xxyy}+4u_{xyyy}+u_{yyyy}+125u=0$.
79. $u_{xxxx}-xu_{xxyy}=0$.
80. $u_{xxxx}+2yu_{xxyy}+u_{yyyy}=0$.
81. $signy|y|^m u_{xxx}+u_{xyy}=0, \quad m=const>0$.

II. Қуйидаги тенгламалар типини унинг берилган ечими нисбатан аниқланг.

82. $u_{xxx}+u_x\cdot u_{xxy}+u_y\cdot u_{xyy}+u\cdot u_{yyy}+u_{xx}+u_{yy}=0,\ u=xy.$

83. $u_{xxx}+u\cdot u_{xxy}-u_x^2\cdot u_{xyy}-u\cdot u_x^2\cdot u_{yyy}=0,\qquad u=x^2+y^2.$

84. $u_{xxx}-3u\cdot u_{xxy}+3u_{yy}^2\cdot u_{xyy}-u^3\cdot u_{yyy}-u_y\left(u_{yy}\right)^3=0,\ u=\sin y.$

85. $u^4u_{xxxx}+4u^3yu_{xxxy}+6u^2y^2u_{xxyy}+4uy^3u_{xyyy}+y^4u_{yyyy}+u_{xx}+u_y=0,u=x.$

86. $u_{yy}\cdot u_{xxxx}-4yu_{xxyy}+2uu_{yyyy}-u_{xxy}+3yu_{yyy}=0,\ u=y^2.$

87. $(u_x)^2\cdot u_{xxxx}-2u\cdot u_{xxxy}+\left[\left(u_y\right)^2-\left(u_x\right)^2\right]\cdot u_{xxyy}+2u\cdot u_{xyyy}-\left(u_v\right)^2\cdot u_{yyyy}=0,\ u=xy.$

III. Қуйидаги тенгламалар системасини типини аниқланг.

88. $\begin{cases}2u_x+3u_y+3\upsilon_y-6u=0,\\ u_x+u_y+\upsilon_x+x^2u=0.\end{cases}$

89. $\begin{cases}2u_x+3u_y+3\upsilon_y-2u=0,\\ u_x+\upsilon_x-u+xy^2=0.\end{cases}$

90. $\begin{cases}2u_x+3u_y-4\upsilon_x+8\upsilon_y-u=0.\\ 3u_x+6u_y-2\upsilon_x+3\upsilon_y+2u=0.\end{cases}$

91. $\begin{cases}2u_x+12u_y+\upsilon_x-2u=0,\\ 4u_y+\upsilon_x+\upsilon_y+xy=0.\end{cases}$

92. $\begin{cases}2u_x+7u_y+\upsilon_x+u=0,\\ 3u_x+31u_y+3\upsilon_x+\upsilon_y-e^y\sin x=0.\end{cases}$

93. $\begin{cases}5u_x+22{,}5\upsilon_x+2u_y+\upsilon_y-6u=0,\\ 5\upsilon_x+2u_y+5\upsilon_y-2xu=0.\end{cases}$

94. $\begin{cases}3u_x+3\upsilon_x+3u_y+4\upsilon_y=0,\\ 2u_x+3\upsilon_x-\upsilon_y-3u=0.\end{cases}$

95. $\begin{cases}2u_x-3u_y+\upsilon_y+xu+e^y\cos x=0,\\ 3\upsilon_x+2\upsilon_y-u_x+3u=0.\end{cases}$

96. $\begin{cases}2u_x+3u_y-\upsilon_y+yu+e^x\cos y=0,\\ 3\upsilon_x+2\upsilon_y-u_x-xu+e^y\sin x=0.\end{cases}$

97. $\begin{cases}u_x-2u_y-3\upsilon_x+\upsilon_y+x^2u-f(x,y)=0,\\ u_x+u_y+2\upsilon_x-\upsilon_y-3u+g(x,y)=0.\end{cases}$

98. $\begin{cases}-2u_x+u_y-3\upsilon_y+\upsilon_x+f(x,y,u)=0,\\ u_x+u_y+2\upsilon_y-\upsilon_x+g(x,y,\upsilon)=0.\end{cases}$

99. $$\begin{cases} u_x - u_y + 2v_x + 3v_y + f(x, y, u, v) = 0, \\ 2u_x + u_y - 3v_x - v_y + g(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

IV. k параметрнинг кийматларига мос равишда қуйидаги тенгламалар системасини типини аниқланг.

100. $$\begin{cases} u_x - kv_y + u = 0, \\ u_y + v_x + xy = 0. \end{cases}$$

101. $$\begin{cases} u_y - kv_x + v_y = 0, \\ u_x + kv_y - u = 0. \end{cases}$$

102. $$\begin{cases} u_y - kv_x + kv_y = 0, \\ u_x + v_y + u + v = 0. \end{cases}$$

103. $$\begin{cases} u_x - v_y + v = 0, \\ u_y + kv_x - u = 0. \end{cases}$$

4-§. Иккинчи тартибли икки ўзгарувчили хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни каноник кўринишга келтириш

Ушбу

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0 \qquad (1.26)$$

кўринишдаги иккинчи тартибли икки ўзгарувчили хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани қараймиз. Бунда a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентлар x, y нинг функциялари. Бу ерда хусусий ҳолда F функция u, u_x, u_y ларга нисбатан чизиқли бўлиши ҳам мумкин.

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0 \qquad (1.27)$$

оддий дифференциал тенглама (1.26) тенгламанинг **характеристик тенгламаси** дейилади.

Характеристик тенгламанинг умумий ечимлари (1.26) тенгламанинг **характеристикалари** дейилади.

(1.27) характеристик тенглама $a_{11}\neq 0$ бўлганда қуйидаги иккита биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларга ажрайди:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \qquad (1.28)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \qquad (1.29)$$

Бу тенгламалардаги радикал остидаги $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ ифоданинг ишорасига қараб, (1.26) тенглама типларга ажралади:

1) Агар M нуқтада $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$ бўлса, (1.26) тенглама M нуқтада гиперболик типдаги тенглама дейилади.

2) Агар M нуқтада $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ бўлса, (1.26) тенглама M нуқтада параболик типдаги тенглама дейилади.

3) Агар M нуқтада $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$ бўлса, (1.26) тенглама M нуқтада эллиптик типдаги тенглама дейилади.

Агар тенглама қаралаётган соҳанинг барча нуқталарида $\Delta>0$ ёки $\Delta=0$ ёки $\Delta<0$ бўлса, (1.26) тенглама шу соҳада мос равишда **гиперболик, параболик** ва **эллиптик** типга тегишли дейилади.

Агар тенглама қаралаётган соҳанинг турли қисмларида $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ ифоданинг ишораси турлича бўлса, (1.26) тенглама бу соҳада **аралаш типдаги тенглама** дейилади.

1. $\Delta>0$ бўлсин. (1.26) гиперболик типдаги тенглама бўлиб, (1.27) характеристик тенгламанинг умумий ечимлари ҳақиқий ва ҳар хил $\varphi(x,y)=C_1$, $\psi(x,y)=C_2$ бўлади. Агар (1.26) тенгламада эркли ўзгарувчиларни $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ тengликлар орқали алмаштирсак, тенглама

$$V_{\xi\eta}=Q_1\left(\xi,\eta,V,V_\xi,V_\eta\right) \tag{1.30}$$

кўринишга келади, бу ерда $V(\xi,\eta)=u(x,y)$ тенглама гиперболик типдаги тенгламаларнинг каноник кўриниши дейилади. (1.30) тенгламада ξ, η ўзгарувчилардан янги α, β ўзгарувчиларга $\xi=\alpha+\beta$, $\eta=\alpha-\beta$ тенгликлар ёрдамида ўтсак, тенглама

$$W_{\alpha\alpha}-W_{\beta\beta}=Q_2\left(\alpha,\beta,W,W_\alpha,W_\beta\right) \tag{1.31}$$

кўринишга келади. (1.31) тенглама гиперболик типдаги тенгламанинг иккинчи каноник кўриниши дейилади.

1–Мисол. $7u_{xx}+6u_{xy}-u_{yy}+u_x+3u=0$. тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=3^2-7\ (-1)=16>0$ бўлгани учун, берилган тенглама гиперболик типга тегишли.

(1.27)га кўра берилган тенгламага мос характеристик тенглама

$$7dy^2-6dxdy-dx^2=0 \quad \text{ёки} \quad (7dy+dx)(dy-dx)=0,$$

$$7dy+dx=0, \qquad dy-dx=0$$

бўлади. Бундан эса берилган тенгламанинг характеристикаларини топамиз:

$$7y+x=c_1, \qquad y-x=c_2.$$

Янги ξ ва η ўзгарувчиларни $\xi=7y+x$, $\eta=y-x$ киритиб, тенгламада қатнашаётган ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$u_x=\upsilon_\xi\xi_x+\upsilon_\eta\eta_x=\upsilon_\xi-\upsilon_\eta, \quad u_{xx}=\upsilon_{\xi\xi}-2\upsilon_{\xi\eta}+\upsilon_{\eta\eta},$$

$$u_{xy}=7\upsilon_{\xi\xi}-6\upsilon_{\xi\eta}-\upsilon_{\eta\eta}, \quad u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=7u_\xi+u_\eta,$$

$$u_{yy}=49\upsilon_{\xi\xi}+14\upsilon_{\xi\eta}+\upsilon_{\eta\eta}.$$

Сўнг буларни тенгламага қўйиб,

$$\upsilon_{\xi\eta}-\frac{1}{64}\left(\upsilon_\xi-\upsilon_\eta+3\upsilon\right)=0, \qquad \upsilon(\xi,\eta)=u(x,y)$$

каноник тенгламани оламиз.

2. $\Delta=0$ бўлсин. (1.26) параболик типдаги тенглама бўлиб, (1.27) характеристик тенглама битта $\psi(x,y)=C$ ҳақиқий умумий ечимга эга бўлади. Янги эркли ўзгарувчиларни $\xi=\psi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ (бу ерда $\eta(x,y)$ сифатида $\psi(x,y)$ функцияга чизиқли боғлик бўлмаган ихтиёрий функцияни олиш мумкин) деб олсак, (1.26) тенглама

$$V_{\eta\eta}=Q_3\left(\xi,\eta,V,V_\xi,V_\eta\right) \tag{1.32}$$

кўринишга келади. (1.32) – параболик типдаги тенгламаларнинг каноник кўриниши дейилади.

2-Мисол. $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}+3u_x-u_y=0$ тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. $a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}=(-2)^2-1\cdot 4=0$ бўлгани учун, берилган тенглама параболик типга тегишли. (1.27)га кўра унинг характеристик тенгламаси $dy^2+4dxdy+4dx^2=0$ *ёки* $dy+2dx=0$ кўринишли бўлади. Уни интеграллаб, $y+2x=c$ характеристикани оламиз.

Ушбу

$$\xi=y+2x, \qquad \eta=y$$

формула бўйича янги ўзгарувчиларни танлаб,

$$u_x=2\upsilon_\xi, \quad u_y=\upsilon_\xi+\upsilon_\eta, \quad u_{xx}=4\upsilon_{\xi\xi},$$

$$u_{xy}=2\upsilon_{\xi\xi}+2\upsilon_{\xi\eta}, \quad u_{yy}=\upsilon_{\xi\xi}+2\upsilon_{\xi\eta}+\upsilon_{\eta\eta}$$

хусусий ҳосилалар қийматларини берилган тенгламага қўями

Натижада $\upsilon_{\eta\eta} + \frac{5\upsilon_\xi - \upsilon_\eta}{4} = 0$ параболик типдаги тенгламанин каноник кўринишини оламиз, бу ерда $\upsilon(\xi,\eta) = u(x,y)$.

3. $\Delta < 0$ бўлсин. (1.26) эллиптик типдаги тенглама бўли (1.27) характеристик тенглама иккита қўшма комплек $\psi(x,y) = C_1$, $\overline{\psi}(x,y) = C_2$ ечимларга эга бўлади. Янги эркл ўзгарувчиларни $\xi = \mathrm{Re}\,\psi(x,y)$, $\eta = \mathrm{Im}\,\psi(x,y)$ деб олсак, (1.2 тенглама

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} = Q_4\left(\xi,\eta,V,V_\xi,V_\eta\right) \qquad (1.3$$

кўринишга келади. (1.33) - эллиптик типдаги тенгламаларнин каноник кўриниши дейилади.

3–Мисол. $u_{xx} + 2u_{xy} + 10u_{yy} + u + 3xy = 0$ тенгламани канони кўринишга келтиринг.

Ечиш. $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} = 1^2 - 1\cdot 10 = -9 < 0$ бўлгани учун, берилга тенглама эллиптик типга тегишли.

(1.27)га кўра унинг характеристик тенгламаси

$$dy^2 - 2dxdy + 10dx^2 = 0 \quad \text{ёки} \quad dy = \left(1 \pm 3i\right)dx$$

кўринишда бўлади. Бундан $y - x + 3xi = c_1$, $y - x - 3xi = c_2$ иккит қўшма комплекс характеристикаларга эга бўламиз.

Тенгламада

$$\xi = y - x, \qquad \eta = 3x$$

янги ўзгарувчиларни киритамиз. У ҳолда $u(x,y) = \upsilon(\xi,\eta)$ ни ҳисоб олиб

$$u_x = \upsilon_\xi \xi_x + \upsilon_\eta \eta_x = -\upsilon_\xi + 3\upsilon_\eta, \quad u_{xx} = \upsilon_{\xi\xi} - 6\upsilon_{\xi\eta} - 9\upsilon_{\eta\eta},$$

$$u_y = \upsilon_\xi \xi_y + \upsilon_\eta \eta_y = \upsilon_\xi, \quad u_{xy} = -\upsilon_{\xi\xi} + 3\upsilon_{\xi\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

эга бўламиз. Буларни тенгламага қўйиб,

$$\upsilon_{\xi\xi} + \upsilon_{\eta\eta} + \frac{1}{9}\upsilon + \left(\xi + \frac{1}{3}\eta\right)\eta = 0$$

каноник тенгламани оламиз.

Агар (1.26) тенгламадаги F функция чизиқли бўли тенгламанинг коэффициентлари ўзгармас сонлар бўлса, тенгламанинг каноник кўриниши қуйидагича бўлади:

$$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}+b_1V_\xi+b_2V_\eta+cV+f=0 \text{ (эллиптик тип)}, \qquad (1.34)$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{\xi\eta}+b_1V_\xi+b_2V_\eta+cV+f=0 \\ \text{ёки} \\ V_{\xi\xi}-V_{\eta\eta}+b_1V_\xi+b_2V_\eta+cV+f=0 \end{array}\right\} \text{(гиперболик тип)}, \qquad (1.35)$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{\xi\xi}+b_1V_\xi+b_2V_\eta+cV+f=0 \\ \text{ёки} \\ V_{\eta\eta}+b_1V_\xi+b_2V_\eta+cV+f=0 \end{array}\right\} \text{(параболик тип)}, \qquad (1.36)$$

бу ерда $b_1, b_2, c-$ ўзгармас сонлар, $f-(\xi,\ \eta)$ нинг функцияси.

(1.34), (1.35), (1.36) каноник кўринишдаги тенгламаларни

$$V(\xi,\eta)=e^{\lambda\xi+\mu\eta}W(\xi,\eta) \qquad (1.37)$$

тенглик ёрдамида, λ ва μ коэффициентларни танлаш ҳисобига янада соддалаштириш мумкин.

4–Мисол. $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}-2u_x-2u_y+u=0$ тенгламани каноник кўринишга келтиринг ва каноник тенгламани соддалаштиринг.

Ечиш. $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=2^2-1\cdot5=-1<0$ бўлгани учун, берилган тенглама эллиптик типга тегишли.

(1.27)га кўра унинг характеристик тенгламаси

$$dy^2\ -4dxdy\ +5dx^2=0 \quad \text{ёки} \quad dy=(2\pm i)dx$$

кўринишда бўлади. Бундан

$$2x-y\ +xi=c_1, \qquad 2x-y-xi=c_2$$

иккита қўшма комплекс характеристикаларга эга бўламиз.

Тенгламада

$$\xi=2x-y, \qquad \eta=x$$

янги ўзгарувчиларни киритамиз. У ҳолда $u(x,y)=V(\xi,\eta)$ ни ҳисобга олиб

$$u_x=V_\xi\xi_x+V_\eta\eta_x=2V_\xi+V_\eta, \quad u_{xx}=4V_{\xi\xi}+4V_{\xi\eta}+V_{\eta\eta},$$

$$u_y=V_\xi\xi_y+V_\eta\eta_y=-V_\xi, \quad u_{xy}=-2V_{\xi\xi}-V_{\xi\eta}, \quad u_{yy}=-V_{\xi\xi}$$

га бўламиз. Буларни тенгламага қўйиб,

$$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}-2V_\xi-2V_\eta+V=0 \qquad (1.38)$$

каноник тенгламани оламиз.

(1.37)га кўра (1.38) тенгламага $V(\xi,\eta)=e^{\xi+\eta}W(\xi,\eta)$

алмаштиришни бажариб қуйидаги

$$W_{\xi\xi} + W_{\eta\eta} - W = 0$$

каноник тенгламани оламиз.

Мустақил ечиш учун масалалар

I. Қуйидаги тенгламаларнинг типини аниқланг.

104. $3u_{xx} - u_{yy} + 4u_x - u_y + 1 = 0$.

105. $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 64u = 0$.

106. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + 2u_y = 0$.

107. $y^{2m+1}u_{xx} + u_{yy} - u = 0$, m – бутун манфий бўлмаган сон.

108. $xu_{xx} + yu_{yy} - u = 0$.

109. $xyu_{xx} + u_{yy} = 0$.

110. $xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y = 0, \quad \alpha, \beta -$ ҳақиқий сонлар.

111. $sign\ y u_{xx} + sign\ x u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_x + \gamma u = 0$.

112. $sign\ y|y|^m u_{xx} + sign\ x|x|^m u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_x + \gamma u = 0, \quad m = const > 0$.

113. $sign\ y|y|^m u_{xx} + sign\ x|x|^n u_{yy} = 0, \quad m, n = const > 0$.

114. $sign\ y|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{\alpha}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \dfrac{\beta}{y} u_y + \gamma u = 0, \;\; m = const > 0$.

II. Қуйидаги тенгламаларни типи ўзгармайдиган каноник кўринишга келтиринг.

115. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$.

116. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0$.

117. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$.

118. $u_{xx} - \left(1 + y^2\right)^2 u_{yy} - 2y\left(1 + y^2\right)u_y = 0$.

119. $xy^2u_{xx} - 2x^2yu_{xy} + x^3u_{yy} - y^2u_x = 0$.

120. $\left(1 + x^2\right)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x\left(1 + x^2\right)u_x = 0$.

121. $u_{xx} - 2xu_{xy} = 0$.

122. $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0$.

123. $yu_{xx} + u_{yy} = 0$.

124. $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$.

125. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$.

126. $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} - x \cdot u = 0$.

127. $\left(1+x^2\right)u_{xx} + \left(1+y^2\right)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$.

128. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0$.

129. $u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0$.

130. $tg^2 x u_{xx} - 2y\, tgx\, u_{xy} + y^2u_{yy} + tg^3 x u_x = 0$.

131. $sin^2 x u_{xx} - 2y\, sin\, x u_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.

132. $u_{xx} - 2sin\, x u_{xy} - cos^2 x u_{yy} - cos\, x u_y = 0$.

133. $(-y)^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad y < 0,\ m = const > 0$.

134. $u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \alpha(-y)^{m-1} u_y = 0, \quad y < 0, \quad 0 < m < 1,\ \alpha = const > 0$.

135. $-(-y)^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0,\ x > 0, y < 0,\ m,n = const > 0$.

136. $u_{xx} + (-y)^m u_{yy} + \mu u = 0,\ y < 0, \quad 0 < m < 1,\ \mu -$ ҳақиқий сон.

137. $-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{\alpha_0}{(-y)^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \dfrac{\beta_0}{y} u_x + \gamma u = 0,\ m > 0,\ y < 0, \alpha_0, \beta_0 = const.$

III. Қуйидаги тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг ва каноник тенгламаларни соддалаштиринг.

138. $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0$.

139. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$.

140. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0$.

141. $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0$.

142. $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y + 64u = 0$.

143. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$.

144. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y + 27u = 0$.

145. $u_{xy} + u_{xx} - u_y - 10u + 4x = 0$.

146. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$.

IV. Қуйидаги масалалар ечилсин.

147. $u_{xy} - u_{yy} - u_x + u_y = 0$ тенглама берилган:

а) тенгламани типини аниқланг.

б) тенгламанинг барча характеристикаларини топинг.

в) тенгламанинг каноник кўринишини топинг.

148. $2u_{xx} + u_{xy} = 1$ тенглама берилган:

а) тенгламанинг типини аниқланг.

б) тенгламанинг барча характеристикаларини топинг.

в) тенгламанинг каноник кўринишини топинг.

149. $u_{xx} - 2\alpha u_{xy} - 3\alpha^2 u_{yy} + \alpha u_y + u_x = 0$ тенглама берилган, бу ер α ҳақиқий параметр.

а) α параметрнинг қийматларига мос равишда тенгла типини аниқланг.

б) тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

150. $u_{xx} + 4u_{xy} - \alpha u_{yy} = 0$ тенглама берилган, α ҳақиқий парамет α параметрнинг шундай қийматлари тўпламини топингки, б қийматларда берилган тенгламани а) $u_{tt} = u_{zz}$, б) $u_t = u_{zz}$, $u_{tt} + u_{zz} = 0$ тенгламага келтирувчи чизиқли $(x, y) \to (t,$ алмаштириш мавжуд бўлсин.

151. 150–масаладаги саволларга $u_{xx} + 4u_{xy} - \alpha u_{yy} - \alpha u_x + \alpha^2 u_y = 0$ тенгл мага нисбатан жавоб беринг.

152. α параметрнинг шундай қийматлари тўпламини топингк $2u_{xx} - (\alpha + 1)u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ тенглама

а) гиперболик типга; б) параболик типга;

в) эллиптик типга тегишли бўлсин.

V. Қуйидаги тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг в каноник тенгламаларни соддалаштиринг.

153. $u_{xy} - u_{xz} - u_x + u_y + u = 0.$

154. $u_{xy} - u_{yz} + 2u_x - 3u_y + 4u_z - u = 0.$

155. $u_{xx} - 2u_{xy} - 2u_{xz} + u_x + u_y + 2u_z + u = 0.$

156. $u_{yy} - 2u_{xy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z + u = 0.$

157. $u_{xx} + u_{xy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z + u = 0.$

158. $u_{xx} - 2u_{xy} - u_{zz} + u_x + u_y + u_z + u = 0.$

159. $2u_{xx}+2u_{xy}+u_{zz}+u_{yy}+2u_x+u_y+u_z+4u=0$.

160. $2u_{xx}-2u_{xy}+u_{zz}+u_{yy}+2u_x-u_y+u_z+u=0$.

161. $3u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-2u_{xy}+2u_{xz}+2u_x+2u_y+2u_z=0$.

162. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-2u_{xy}+2u_{xz}-2u_{yz}+2u_x-u_z+u=0$.

5–§. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимлари ҳақида тушунча. Умумий ечимни топишнинг характеристикалар усули

Оддий дифференциал тенгламалар курсидан маълумки, n–тартибли $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right)=0$ оддий дифференциал тенгламанинг ечими n та ихтиёрий ўзгармасга боғлиқдир, яъни $y=\left(x, c_1, \dots, c_n\right)$. Бу ўзгармасларни аниқлаш учун номаълум функция $y(x)$ қўшимча шартларни қаноатлантириши керак.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун масала мураккаброқдир. Бу тенгламаларнинг умумий ечими оддий дифференциал тенгламанинг умумий ечимидан фарқли равишда берилган тенгламанинг тартибига тенг бўлган сондаги ихтиёрий функцияларга боғлиқ бўлади. Ихтиёрий функциялар аргументларининг сони ечим аргументлари сонидан битта кам бўлади. Бу фикрнинг тўғрлигига Коши-Ковалевская теоремасига асосан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Таъриф. (1.26) тенгламанинг коэффициентлари бирор Ω соҳада узликсиз бўлсин. Агар Ω соҳада аниқланган $u(x,y)$ функция (1.26) тенгламада иштирок этувчи барча ҳосилалари билан узлуксиз бўлиб, уни айниятга айлантирса, у ҳолда $u(x,y)$ функция (1.26) тенгламанинг **регуляр (классик) ечими** дейилади. Бундай ечимлар тўпламига (1.26) тенгламанинг умумий ечими дейилади.

Буни содда мисолларда кўриб чиқамиз.

1–Мисол. Номаълум $u(x,y)$ функция учун $u_x=0$ тенглама $u(x,y)$ нинг x га боғлиқ эмаслигини кўрсатади. Демак, берилган $u_x=0$ тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y)=\varphi(y)$$

кўринишда бўлади, бу ерда φ(y) – y нинг ихтиёрий функцияси.

2–Мисол. Ушбу $u_{xy}=0$ ёки $\left(u_y\right)_x=0$ тенгламани қарайми

Уни x бўйича интеграллаб, $\frac{du}{dy}=\psi(y)$ тенгламани ҳосил қилами

Бунда $\psi(y)$ – y нинг ихтиёрий функцияси. Охирги тенгламани бўйича интеграллаб,

$$u(x,y)=\int\psi(y)dy+\psi_1(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бунда $\psi_1(x)$ – x нинг ихтиёри функцияси. $\int\psi(y)dy=\psi_2(y)$ деб белгилаб,

$$u(x,y)=\psi_1(x)+\psi_2(y)$$

формулага эга бўламиз. Бу ерда $\psi_1(x)$ ихтиёрий функци бўлганлиги учун $\psi_2(y)$ ҳам y нинг ихтиёрий функцияси бўлади.

3–Мисол. Учинчи тартибли $u_{xyy}=0$ тенгламанинг умуми ечими $u(x,y)=\varphi(y)+y\psi(x)+\psi_1(x)$ дан иборат бўлади.

Юқорида келтирилган мисоллар **1–тартибли** хусуси ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг барча ечимлар формуласи, яъни **умумий ечими битта ихтиёрий функцияга,** m **тартибли** тенгламанинг умумий ечими m **та ихтиёрий функцияг** боғлиқ бўлиши керак, деган фикрга олиб келади.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умуми ечимини **характеристикалар усули** (ёки **Даламбер усули**) била ҳам топиш мумкин. Тенгламани характеристикалар усули била ечишда дастлабки тенглама характеристикалари ёрдамида канони кўринишга келтирилади, сўнгра каноник тенглама интеграллани қайтадан эски ўзгарувчиларга ўтилса, берилган тенгламани умумий ечими ҳосил бўлади.

4–Мисол. $2u_x=-3u_y$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани

$$\xi=3x-2y,\quad \eta=3x+2y,\quad u(x,y)=\upsilon(\xi,\eta)$$

алмаштириш ёрдамида $12\upsilon_\eta=0$ кўринишга келтириш мумкин. Б тенгламанинг умумий ечими $\upsilon(\xi,\eta)=\psi(\xi)$ бўлади. Дема $2u_x=-3u_y$ тенгламанинг умумий ечими $u(x,y)=\psi(3x-2y)$ да иборат.

Худди шунга ўхшаш, агар α, β *ва* γ ўзгармас сонлар бўлиб $\alpha\beta \neq 0$ бўлса,

$$\alpha \cdot u_x + \beta \cdot u_y + \gamma \cdot u = 0 \qquad (1.39)$$

тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$u(x, y) = \psi(\beta x - \alpha y)\exp\left\{-\frac{\gamma}{2\alpha\beta}(\beta x + \alpha y)\right\}. \qquad (1.40)$$

5–Мисол.

$$u_{xx} + 2cos\, xu_{xy} - sin^2 x u_{yy} + (cos\, x - sin\, x - 1)u_y + u_x = 0$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани

$$\xi = x + y - sin\, x, \quad \eta = y - x - sin\, x, \quad u(x, y) = \upsilon(\xi, \eta)$$

алмаштириш ёрдамида $\upsilon_{\xi\eta} = 0,5\upsilon_\eta$ каноник кўринишга келтирамиз. Унинг умумий ечимини топиш учун $\upsilon_\eta = w$ белгилаш киритамиз. У ҳолда $w_\xi = \frac{1}{2}w$ тенглама ҳосил бўлади. Охирги тенгликни интеграллаб, w функцияни топамиз

$$w(\xi, \eta) = f(\eta)e^{0,5\xi},$$

бу ерда $f(\eta)$–ихтиёрий функция. Бундан ва белгилашга кўра $\upsilon_\eta = f(\eta)e^{\frac{1}{2}\xi}$ эга бўламиз. Бу ифодани интеграллаб

$$\upsilon(\xi, \eta) = f_1(\eta)e^{\frac{1}{2}\xi} + f_2(\xi)$$

ҳосил қиламиз, бу ерда $f_1(\eta)$, $f_2(\xi)$ –ихтиёрий икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар.

Демак, бошланғич тенгламанинг умумий ечими

$$u(x, y) = f_1(y - x - sin\, x)e^{\frac{1}{2}(x+y-sin\, x)} + f_2(x + y - sin\, x)$$

дан иборат.

6–Мисол. $u_{xy} + yu_y - u = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани y бўйинча дифференциаллаб

$$u_{xyy} + yu_{yy} + u_y - u_y = 0 \quad ёки \quad u_{xyy} + yu_{yy} = 0$$

ҳосил қиламиз.Бу тенгламани $u_y = \upsilon$ алмаштириш ёрдамида

$$\upsilon_{xy} + y\upsilon_y = 0 \tag{1.41}$$

кўринишга ёзиб олмиз.

Бундан ва $\frac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon_x + y\upsilon\right) = \upsilon \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$ ни хисобга олиб қуйидагига эга бўламиз:

$$u = \upsilon_x + y\upsilon \tag{1.42}$$

Энди (1.41) тенгламани $\upsilon_y = w$ алмаштириш ёрдамида ечамиз:

$$w_x + yw = 0 \;\Rightarrow\; w(x, y) = \phi(y)e^{-xy} \;\Rightarrow \upsilon_y(x, y) = \phi(y)e^{-xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(x, y) = \int\limits_{y_0}^{y} \phi(\eta)e^{-x\eta}d\eta + \varphi(x).$$

Бундан ва (1.42) асосан бошланғич тенгламанинг умумий ечими

$$u(x, y) = y\varphi(x) + \varphi'(x) + \int\limits_{y_0}^{y} (y - \eta)e^{-x\eta}\phi(\eta)d\eta$$

дан иборат бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги тенгламаларнинг умумий ечимлари топилсин.

163. $u_{xx} = 1.$ 164. $u_{yy} = 6y.$

165. $u_{xy} = 1.$ 166. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$

167. $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$

168. $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + \frac{5}{15}u = 0.$

169. $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 4e^x.$

170. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2.$

171. $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}.$

172. $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = ce^{x+y}.$

173. $u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} - \cos x\, u_y = 0.$

174. $\cos^2 x\, u_{yy} + 2\sin x\, u_{xy} - u_{xx} + (\cos x + 4)u_y + 4u = 0.$

175. $yu_{xx}+(x-y)u_{xy}-xu_{yy}=0$.

176. $2u_{xx}+3u_{xy}+u_{yy}+7u_x+4u_y+3u=0$.

177. $u_{xx}-(1+y^2)^2u_{yy}-2y(1+y^2)u_y=0$.

178. $u_{xy}-\frac{1}{x-y}(u_x-u_y)=1$ агар $y+x<0$, $x>2$ бўлса.

179. $u_{xy}-\frac{1}{x-y}(u_x-u_y)=3(x+y)$ агар $y>x$, $x>0$ бўлса.

180. $u_{xx}-u_{yy}+\frac{2}{x}u_x=2$ агар $y>1+|x|$ бўлса.

181. $u_{xx}-u_{yy}-\frac{2}{y}u_y=0$ агар $y\neq 0$ бўлса.

182. $u_{xx}-2xu_{xy}=0$ агар $x\neq 0$ бўлса.

183. $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}+xu_x-yu_y=0$ агар $\frac{1}{x}<y<x$, $x>1$ бўлса.

184. $u_{xx}-6u_{xy}+8u_{yy}+u_x-2u_y+4e^{5x+\frac{3}{2}y}=0$.

185. $e^{-2x}u_{xx}-e^{-2y}u_{yy}-e^{-2x}u_x+e^{-2y}u_y+8e^y=0$.

186. $ch\,x\,u_{xy}+(sh\,x+y\,ch\,x)u_y-ch\,x\,u=0$.

187. $\frac{\partial}{\partial y}(u_x+u)+2x^2y(u_x+u)=0$.

188. $\frac{\partial}{\partial y}(u_x+u)+x(u_x+u)+x^2y=0$.

189. $xu_{xx}-yu_{yy}+\frac{1}{2}(u_x-u_y)=0,\quad x>0,\ y>0$.

190. $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-2yu_y=0$.

191. $x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y=0$.

192. Қуйидаги биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий ечими кўрсатилган кўринишга эга эканлиги исботлансин.

а) $\frac{\partial u}{\partial x}+cu=0, u=e^{-cx}\varphi(y)$. б) $\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0$, $u=e^{-cy}\varphi(x)$.

в) $a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $ab\neq 0$, $u=\varphi(bx-ay)$.

г) $a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0$, $abc\neq 0$, $u=e^{-\frac{c}{2ab}(ax+by)}\varphi(bx-ay)$.

д) $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $|x|\neq|y|$, $u=\varphi\left(x^2-y^2\right)$.

е) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $x\neq 0$,да $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $y\neq 0$ да $u=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

193. Қуйидаги учинчи тартибли тенгламалар умумий ечими топилсин:

а) $u_{xxx}=12y$. б) $u_{xxy}=6x^2$. в) $u_{xxy}+u_{xyy}=0$.

г) $u_{xxy}-u_{xyy}=0$. д) $u_{xxx}-u_{xyy}=0$.

е) $\left(\frac{\partial}{\partial y}+c\right)\left(y^2u_{xx}+yu_{yy}+\frac{1}{2}u_y\right)=0$, $y<0$.

f) $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)\left(u_{xx}-u_{yy}\right)=0$, $abc\neq 0$.

l) $\left(y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[u_{xx}-\left(1+y^2\right)^2u_{yy}-2y\left(1+y^2\right)u_y\right]=0$, $|x|\neq|y|$.

h) $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(u_{xx}-yu_{yy}-\frac{1}{2}u_y\right)=0$, $y>0$.

194. Қуйидаги тўртинчи тартибли тенгламалар умумий ечими топилсин.

а) $u_{xyyy}=60y^2$. б) $u_{xxyy}-2cxu_{xyy}=0$.

в) $u_{xxxy}-u_{xyyy}=0$. г) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)}u=0$.

д) $u_{xxxx}-2yu_{xxyy}+y^2u_{yyyy}-u_{xxy}+3yu_{yyy}+\frac{3}{4}u_{yy}=0$.

е) $3u_{xxxx}+13u_{xxxy}+18u_{xxyy}+8u_{xyyy}=0$.

f) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$.

195. Гиперболик типдаги ушбу $a^2u_{xx}+b^2u_{yy}-c^2u_{zz}=0$ тенглама $u(x,y,z)=f(\alpha x+\beta y+\gamma z)$ кўринишдаги ечимга эга бўлиши учун α, β, γ ўзгармаслар қандай шартни бажаришини топинг, бу ерда $f\in C^2$-ихтиёрий функция.

196. Гиперболик типдаги ушбу

$$u_{xxx}-(a+b+c)u_{xxy}+(ab+ac+bc)u_{xyy}-abcu_{yyy}=0$$

тенглама $u(x,t)=f(t+\alpha x)+\varphi(t+bx)+\psi(t+cx)$ кўринишдаги ечимга эга эканлигини исботланг, бу ерда $f,\varphi,\psi\in C^3$ – ихтиёрий функциялар.

197. Гиперболик типдаги ушбу $u_{xxxx}-2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$ тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y)=(x+y)\varphi(x-y)+(x-y)\psi(x+y)+\varphi_1(x-y)+\psi_1(x+y)$$

кўринишга эга эканлигини исботланг, бу ерда $\varphi,\varphi_1,\psi,\psi_1\in C^4$ – ихтиёрий функциялар.

198. Агар $u(x,t)$ функция $u_{tt}-u_{xx}=0$ тенгламанинг ечими бўлса, ҳолда

а) $u\left(\frac{x}{x^2-t^2},\frac{y}{x^2-t^2}\right), x\pm t\neq 0$, б) $\frac{u_t}{u_x^2-u_t^2}, u_x^2\neq u_t^2$,

в) xu_x+tu_t, г) $u_x^2+u_t^2$, д) $u_x\cdot u_t$ функциялар ҳам шу тенгламанинг ечими бўлишини исботланг.

199. Агар $u(x,t)=u(x_1,x_2,...,x_n,t)$ функция $u_{tt}-\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}=0$ тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда

а) $v(x,t)=\frac{1}{\left(|x|^2-t^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}u\left(\frac{x}{|x|^2-t^2},\frac{t}{|x|^2-t^2}\right), |x|^2\neq t^2$,

б) $v(x,t)=\sum_{i=1}^{n}x_iu_{x_i}+tu_t$

функциялар ҳам шу тенгламанинг ечими бўлишини исботланг, бу ерда $|x|^2=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

200. k ва m_i $\left(i=\overline{1,n+1}\right)$ ўзгармаслар қандай шартларни бажарганда $u_{tt}-\sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}=0$ тенглама

а) $u(x,t)=\dfrac{1}{\left(|x|^2-t^2\right)^k}$,

б) $u(x,t)=\phi(m_1x_1+m_2x_2+...+m_nx_n+m_{n+1}t)$

кўринишдаги ечимга эга бўлади.

201. Агар $u(x,t)=u(x_1,x_2,...,x_n,t)$ функция $u_{tt}-\sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}=0$ тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда

$$v(x,t)=u\left(\frac{x_1}{\sqrt{|a_1|}},\frac{x_2}{\sqrt{|a_2|}},...,\frac{x_n}{\sqrt{|a_n|}},\frac{t}{\sqrt{|a_0|}}\right)$$

функция $a_0u_{tt}-\sum\limits_{i=1}^{n} a_iu_{x_i x_i}=0$ тенгламанинг ечими бўлишини исботланг.

II БОБ

ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР

1- §. Тўлқин тенгламаси учун Коши масаласи

Тўлқин тенгламаси учун классик Коши масаласи деб $C^2(t>0)\cap C^1(t\geq 0)$ синфга тегишли ва $t>0$ да

$$u_{tt}=a^2\left(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\ldots+u_{x_nx_n}\right)+f(x,t) \tag{2.1}$$

тенгламани, $t=0$ да эса

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x) \tag{2.2}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функцияни топишга айтилади, бу ерда $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - берилган функциялар.

1. Агар $n=1$ да $f\in C^1(t\geq 0)$, $\varphi\in C^2\left(\mathbb{R}^1\right)$, $\psi\in C^1\left(\mathbb{R}^1\right)$ шартлар бажарилса, у холда (2.1) - (2.2) Коши масаласининг ечими мавжуд ва ягона бўлиб, у

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{o}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{2.3}$$

Даламбер формуласи орқали ифодаланилади[7].

1–Мисол. $u_{tt}=u_{xx}+6$ тенглама учун қўйилган қуйидаги

$$u(x,t)\big|_{t=0}=x^2,\qquad u_t(x,t)\big|_{t=0}=4x \tag{2.4}$$

Коши масаласининг ечимини топинг.

Ечиш. (2.3) Даламбер формуласига кўра, берилган тенглама ва (2.4) шартдан фойдаланиб қўйидагини

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}4\xi d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{o}^{t}\int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}6d\xi d\tau=x^2+t^2+2\cdot\frac{(x+t)^2-(x-t)^2}{2}+$$

$$+3\int_0^t (x + t - \tau - x + t - \tau)d\tau = x^2 + t^2 + 4xt +$$

$$+3\left(2t\tau - \tau^2\right)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = x^2 + t^2 + 4xt + 3t^2 = \left(x + 2t\right)^2 .$$

Ҳосил қиламиз. Демак, $u_{tt} = u_{xx} + 6$ тенглама учун қўйилган (2.4) Коши масаласининг ечими $u(x,t) = \left(x + 2t\right)^2$ дан иборатдир.

Агар хусусий ҳосилали дифференциал тенглама

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + b_1(x,y)u_x +$$
$$+b_2(x,y)u_y + c(x,y)u + f(x,y) = 0 \qquad (2.5)$$

кўринишда берилган бўлса, у ҳолда бу тенглама учун қўйилган

$$u(x,y)\big|_{y=\mu(x)} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=\mu(x)} = \psi(x) \qquad (2.6)$$

ёки

$$u(x,y)\big|_{x=g(y)} = \phi(y), \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\bigg|_{x=g(y)} = \nu(y) \qquad (2.7)$$

Коши масаласини ечиш учун **характеристикалар усулидан** (ёки **Даламбер усули**[3],[15], 1-боб, 5-§га қаранг) фойдаланилади, бу ерда $y = \mu(x)$ ёки $x = g(y)$ функциялар (2.5) тенгламанинг характеристикаларини биттадан ортиқ нуқтада кесиб ўтмайдиган эгри чизиқлар.

2–Мисол. $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} + 4e^{y+x} = 0$ тенглама учун қўйилган қуйидаги

$$u(x,y)\big|_{y=0} = 2x, \qquad u_y(x,y)\big|_{y=0} = 0 \qquad (2.8)$$

Коши масаласининг ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани

$$\xi = x + y, \quad \eta = 3x + y, \quad u(x,y) = \upsilon(\xi,\eta)$$

алмаштириш ёрдамида

$$\upsilon_{\xi\eta} = e^{\xi}$$

кўринишга келтириш мумкин. Унинг умумий ечими

$$\upsilon(\xi,\eta) = \eta e^{\xi} + f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

кўринишда бўлади. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y)=(3x+y)e^{x+y}+f_1(x+y)+f_2(3x+y) \tag{2.9}$$

дан иборатдир.

(2.9)ни (2.8) шартларга қўямиз. У ҳолда f_1 ва f_2 функцияларни аниқлаш учун ушбу

$$\begin{cases} f_1(x)+\ f_2(3x)+3x\,e^x=2x, \\ f_1'(x)+\ f_2'(3x)+(1+3x)e^x=0 \end{cases}$$

системани оламиз. Уни ечиб,

$$f_1(x)=-x+3e^x(1-x)-f_2(0),\ \ f_2(3x)=3x-3e^x-f_1(0)$$

ифодаларга эга бўламиз. Буларни (2.5)га қўйсак,

$$u(x,y)=2x+(3-2y)e^{x+y}-3e^{\frac{y+3x}{3}}$$

ҳосил бўлади. Бу эса берилган тенглама учун Коши масаласининг ечимидир.

2. Агар $n=2$ да $f\in C^2(t\geq 0)$, $\varphi\in C^3(\mathbb{R}^n), \psi\in C^2(\mathbb{R}^n)$ шартлар бажарилса, у ҳолда (2.1) - (2.2) Коши масаласининг ечими мавжуд ва ягона бўлиб, у

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t \int\limits_{|x-\xi|<a(t-\tau)} \frac{f(\xi,\tau)d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|x-\xi|<at}\frac{\psi(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|x-\xi|<at}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}} \tag{2.10}$$

Пуассон формуласи орқали ифодаланилади[5],[7].

3–Мисол. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+2$ тенглама учун қўйилган қуйидаги

$$u(x,y,t)\big|_{t=0}=x, \qquad u_t(x,y,t)\big|_{t=0}=y \tag{2.11}$$

Коши масаласининг ечимини топинг.

Ечиш. (2.10) Пуассон формуласига кўра, берилган тенглама ва (2.11) шартдан фойдаланиб қўйидагини

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}d\xi\int\limits_{y-\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2}}^{y+\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2}}\frac{2d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{y-t}^{y+t}\eta\, d\eta \int\limits_{x-\sqrt{t^2-(\eta-y)^2}}^{x+\sqrt{t^2-(\eta-y)^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-t}^{x+t}\xi\, d\xi \int\limits_{y-\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}}^{y+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}} \frac{d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}=$$

$$u(x,y,t)=\frac{2\pi}{2\pi}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} d\xi+\frac{\pi}{2\pi}\int\limits_{y-t}^{y+t}\eta\, d\eta+\frac{\pi}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-t}^{x+t}\xi\, d\xi=$$

$$=2\int\limits_0^t (t-\tau)d\tau+\frac{1}{4}\eta^2\Big|_{y-t}^{y+t}+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}\xi^2\Big|_{x-t}^{x+t}=-(t-\tau)^2\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}+\frac{(y+t)^2}{4}-$$

$$-\frac{(y-t)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}\left[(x+t)^2-(x-t)^2\right]=t^2+yt+x.$$

ҳосил қиламиз. Демак, Коши масаласининг ечими

$$u(x,y,t)=x+ty+t^2$$

функциядан иборатдир.

3. Агар $n=3$ да $f\in C^2(t\geq 0)$, $\varphi\in C^3(\mathbb{R}^n)$, $\psi\in C^2(\mathbb{R}^n)$ шартлар бажарилса, у ҳолда (2.1) - (2.2) Коши масаласининг ечими мавжуд ва ягона бўлиб, у

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{|x-\xi|<at}\frac{1}{|x-\xi|}f\left(\xi,t-\frac{|x-\xi|}{a}\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{4t\pi a^2}\int\limits_{|x-\xi|=at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{|x-\xi|=at}\varphi(\xi)d\xi\right] \quad (2.12)$$

Кирхгоф формуласи билан ифодаланилади[15].

4–Мисол.

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+2xyz, \quad -\infty<x,y,z<+\infty, \ t>0$$

тенглама учун қўйилган қуйидаги

$$u(x,y,z,t)\Big|_{t=0}=x^2+y^2-2z^2, \quad u_t(x,y,t)\Big|_{t=0}=5,$$

$$-\infty<x,y,z<+\infty$$

Коши масаласининг ечимини топинг.

Ечиш. (2.12) Кирхгоф формуласига кўра, берилган тенглама ва шартдан фойдаланиб қуйидагини

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \iint_{S_{t-\tau}} \frac{2\xi\eta\zeta}{t-\tau}d\sigma+\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{5}{t}d\sigma+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_t}\frac{\xi^2+\eta^2-2\zeta^2}{t}d\sigma$$

ҳосил қиламиз, бу ерда S_t ва $S_{t-\tau}$ лар мос равишда радиуслари t ва $t-\tau$, маркази эса (x,y,z) нуқтада бўлган сфералардир (1.1-чизма).

$M(\xi,\eta,\zeta)\in S_t$ бўлганлиги учун Кирхгоф формуласида ушбу

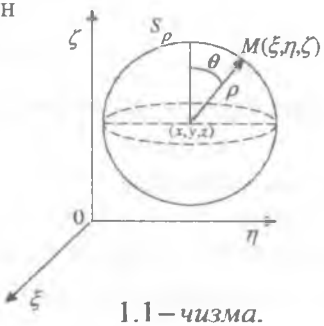
$$\xi = x+t\,sin\theta\cdot cos\varphi,$$

$$\eta = y+t\,sin\theta\cdot sin\varphi,$$

$$\zeta = z+t\,cos\theta,$$

$$0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\pi$$

алмаштиришни бажарамиз.



1.1 – *чизма.*

Сўнгра қуйидаги интегралларни ҳисоблаймиз:

$$J_1=\frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \iint_{S_{t-\tau}}\frac{2\xi\eta\zeta}{t-\tau}d\sigma=\frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{1}{t-\tau}\{2[x+(t-\tau)sin\theta\cdot cos\varphi]\times$$

$$\times[y+(t-\tau)sin\theta\cdot sin\varphi]\cdot[z+(t-\tau)cos\theta]\}\cdot(t-\tau)^2 sin\theta\, d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^t(t-\tau)d\tau\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}x\,y\,z\,sin\theta\, d\theta\, d\varphi=2\,x\,y\,z\int_0^t(t-\tau)d\tau=t^2x\,y\,z,$$

$$J_2=\frac{5}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{1}{t}d\sigma=\frac{5}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{t}\cdot t^2\,sin\theta\, d\theta\, d\varphi=5t,$$

$$J_3=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_t}\frac{\xi^2+\eta^2-2\zeta^2}{t}d\sigma=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{1}{t}\Big\{[x+t\,sin\theta\cdot cos\varphi]^2+$$

$$+[y+t\,sin\theta\cdot sin\varphi]^2-[z+t\,cos\theta]^2\Big\}\cdot t^2 sin\theta\, d\theta=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\Big[x^2+2xt\times$$

$$\times sin\theta\cdot cos\varphi+t^2 sin^2\theta\cdot cos^2\varphi\Big]\cdot t\,sin\theta\, d\theta+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\Big[y^2+2yt\times$$

$$\times sin\theta\cdot sin\varphi+t^2 sin^2\theta\cdot sin^2\varphi\Big]\cdot t\,sin\theta\, d\theta+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\Big[-2z^2-4zt\times$$

$$\times\cdot cos\theta-2t^2cos^2\theta\Big]\cdot t\,sin\theta d\theta=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}t\cdot\left(x^2+y^2-2z^2\right)sin\theta d\theta+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}t^3\cdot\left(sin^2\theta-2cos^2\theta\right)sin\theta\,d\theta+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{\pi}2t^2x\,sin^2\theta\,d\theta\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}cos\varphi\,d\varphi+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{\pi}2t^2y\,sin^2\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}sin\varphi\,d\varphi-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{\pi}2t^2z\,sin\theta\,cos\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=x^2+y^2-2z^2.$$

Демак, Коши масаласининг ечими

$$u(x,y,t)=x^2+y^2-2z^2+5t+t^2x\,y\,z$$

функциядан иборатдир.

Даламбер, Пуассон ва Кирхгоф формулаларидан хулоса қилиб айтиш мумкинки, бир жинсли тўлқин тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг ихтиёрий $M_0(x_0,t_0)=M_0\left(x_1^0,\,x_2^0,\,\ldots,\,x_n^0;\,t_0\right)$ нуқтадаги қиймати берилган бошланғич $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларнинг

1) $n=1$ бўлганда $[x_0-at_0,\;x_0+at_0]$ кесмадаги,

2) $n=2$ бўлганда маркази x_0 нуқтада радиуси at_0 бўлган доирадаги,

3) $n=3$ бўлганда маркази x_0 нуқтада радиуси at га тенг бўлган сферадаги **қийматлари** билан аниқланар экан.

4. Хусусий ечимларни танлаш ёрдамида тўлқин тенгламаси учун Коши масаласини ечиш.

Бу ҳолда берилган тенглама ёки бошланғич шартларнинг ўнг томонига қараб қуйилган Коши масаласининг ечими изланади.

5–Мисол. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+t\,e^{5x}sin3y\,cos4z,$

$-\infty<x,y,z<+\infty,\ t>0$ тенглама учун қўйилган қуйидаги

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=e^{6x+8y}cos10\,z,\quad u_t(x,y,t)\big|_{t=0}=e^{4z+3y}sin5\,x,$$

$$-\infty<x,y,z<+\infty$$

Коши масаласининг ечимини топинг.

Ечиш. Берилган масалани қуйидаги иккита масалага ажратиб ечамиз:

$$(A)\ \begin{cases}\upsilon_{tt}=\upsilon_{xx}+\upsilon_{yy}+\upsilon_{zz}+t\,e^{5x}sin3y\,cos4z, & -\infty<x,y,z<+\infty,\ t>0\\ \upsilon(x,y,z,t)\big|_{t=0}=0,\quad \upsilon_t(x,y,t)\big|_{t=0}=0, & -\infty<x,y,z<+\infty;\end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} w_{tt}=w_{xx}+w_{yy}+w_{zz}, \quad -\infty<x,y,z<+\infty,\ t>0 \\ w(x,y,z,t)\big|_{t=0}=e^{6x+8y}cos10z, \quad w_t(x,y,t)\big|_{t=0}=e^{4z+3y}sin5x, \\ \qquad\qquad -\infty<x,y,z<+\infty; \end{cases}$$

(A) масаланинг ечими қуйидаги

$$\upsilon(x,y,z,t)=\frac{1}{6}t^3e^{5x}sin3y\,cos4z$$

кўринишда бўлади. Ҳақиқатан, ҳам

$$\Delta\upsilon\equiv\upsilon_{xx}+\upsilon_{yy}+\upsilon_{zz}=\frac{1}{6}t^3\Big[25e^{5x}sin3y\,cos4z-9e^{5x}sin3y\,cos4z-$$

$$-16e^{5x}sin3y\,cos4z\Big]=0, \qquad \upsilon_{tt}=t\,e^{5x}sin3y\,cos4z.$$

Бундан

$$\upsilon_{tt}-\Big[\upsilon_{xx}+\upsilon_{yy}+\upsilon_{zz}\Big]-t\,e^{5x}sin3y\,cos4z=$$

$$=t\,e^{5x}sin3y\,cos4z+0-t\,e^{5x}sin3y\,cos4z=0$$

га эга бўламиз.

Худди шундай, ушбу $\varphi(x,y,z)=e^{6x+8y}cos10z$, $\psi(x,y,z)=e^{4z+3y}sin5x$ функциялар $w_{xx}+w_{yy}+w_{zz}=0$ тенгламани ечими бўлишлигини осонгина текшириб кўриш мумкин.

У ҳолда

$$w(x,y,z,t)=e^{6x+8y}cos10z+t\,e^{4z+3y}sin5x$$

функция (B) масаланинг ечими бўлади.

Шундай қилиб, қуйилган масаланинг ечими

$$u(x,y,z,t)=\upsilon(x,y,z,t)+w(x,y,z,t)=\frac{1}{6}t^3e^{5x}sin3y\,cos4z+$$

$$+e^{6x+8y}cos10z+t\,e^{4z+3y}sin5x$$

кўринишда бўлади.

6–Мисол. $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), \ -\infty<x,y<+\infty, \ t>0$ тенглама учун қўйилган қуйидаги

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=cos(bx+cy), \quad u_t(x,y,t)\big|_{t=0}=sin(bx+cy),$$

$$-\infty<x,y<+\infty$$

Коши масаласининг ечимини топинг.

Ечиш. Берилган масалани қуйидаги иккита масалага ажратиб ечамиз:

$$(I)\begin{cases} \upsilon_{tt} = a^2(\upsilon_{xx} + \upsilon_{yy}), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0 \\ \upsilon(x,y,z,t)\big|_{t=0} = cos(bx+cy), \quad \upsilon_t(x,y,t)\big|_{t=0} = 0, \\ \qquad -\infty < x, y < +\infty; \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} w_{tt} = a^2(w_{xx} + w_{yy}), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0 \\ w(x,y,z,t)\big|_{t=0} = 0, \quad w_t(x,y,t)\big|_{t=0} = sin(bx+cy), \\ \qquad -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

(I) масаланинг ечими қуйидаги

$$\upsilon(x,y,z,t) = \varphi(t)\,cos(bx+cy) \qquad (*)$$

кўринишда излаймиз. Бундан (I) масала бошланғич шартларнинг бажарилиши учун $\varphi(0)=1, \quad \varphi'(0)=0$ шартлар келиб чиқади.

(*) ни (I) масалага қўйиб, қуйидаги

$$\begin{cases} \varphi''(t) + a^2(b^2+c^2)\varphi(t) = 0, \quad t > 0, \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0 \end{cases}$$

Коши масаласини оламиз. Бу масаланинг ечими

$\varphi(t) = cos\left(a\sqrt{b^2+c^2}\cdot t\right)$ кўринишда бўлади. Бундан (I) масаланинг ечими қуйидаги

$$\upsilon(x,y,z,t) = cos\left(a\sqrt{b^2+c^2}\cdot t\right)\cdot cos(bx+cy)$$

кўринишда топилади.

Худди шундай, (II) масаланинг ечими қуйидаги

$$w(x,y,z,t) = \psi(t)\,sin(bx+cy)$$

кўринишда излаймиз. У ҳолда қуйидаги

$$\begin{cases} \psi''(t) + a^2(b^2+c^2)\psi(t) = 0, \quad t > 0, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1 \end{cases}$$

Коши масаласини оламиз. Бу масаланинг ечими

$\psi(t) = sin\left(a\sqrt{b^2+c^2}\cdot t\right)\Big/ a\sqrt{b^2+c^2}$ кўринишда бўлади.

Бундан (II) масаланинг ечими қуйидаги

$$W(x,y,z,t) = \frac{\sin\left(a\sqrt{b^2+c^2}\cdot t\right)}{a\sqrt{b^2+c^2}}\cdot \sin(bx+cy)$$

кўринишда топилади.

Шундай қилиб, қуйилган масаланинг ечими

$$u(x,y,z,t) = \upsilon(x,y,z,t) + w(x,y,z,t) = \cos\left(a\sqrt{b^2+c^2}\cdot t\right)\cdot \cos(bx+cy) +$$

$$+\frac{\sin\left(a\sqrt{b^2+c^2}\cdot t\right)}{a\sqrt{b^2+c^2}}\cdot \sin(bx+cy)$$

кўринишда бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар

I. Тор тебраниш тенгламаси учун қўйилган қуйидаги Коши масалалари ечимини топинг.

202. $u_{tt} = u_{xx}$, $\quad u(x,0) = x$, $\quad u_t(x,0) = -x$.

203. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $\quad u(x,0) = 0$, $\quad u_t(x,0) = \cos x$.

204. $u_{tt} = u_{xx}$, $\quad u(x,0) = \sin x$, $\quad u_t(x,0) = \cos x$.

205. $u_{tt} = u_{xx}$, $\quad u(x,0) = x^2$, $\quad u_t(x,0) = 4x$.

206. $u_{tt} = 4u_{xx} + xt$, $\quad u\big|_{t=0} = x^2$, $\quad u_t\big|_{t=0} = x$.

207. $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$, $\quad u\big|_{t=0} = \sin x$, $\quad u_t\big|_{t=0} = 0$.

208. $u_{tt} = u_{xx} + b x^2$, $\quad u(x,0) = e^{-x}$, $\quad u_t(x,0) = a$.

209. $u_{tt} = u_{xx} + axt$, $\quad u(x,0) = x$, $\quad u_t(x,0) = \sin x$.

210. $u_{tt} = u_{xx} + ae^{-t}$, $\quad u(x,0) = b\sin x$, $\quad u_t(x,0) = c\cdot\cos x$.

211. $u_{tt} = u_{xx} + a\sin bt$, $\quad u(x,0) = \cos x$, $\quad u_t(x,0) = \sin x$.

212. $u_{tt} = u_{xx} + x\sin t$, $\quad u(x,0) = \sin x$, $\quad u_t(x,0) = \cos x$.

213. $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x$, $\quad u(x,0) = 1$, $\quad u_t(x,0) = 1$.

214. $u_{tt} = u_{xx} + e^{x}$, $\quad u(x,0) = \sin x$, $\quad u_t(x,0) = x + \cos x$.

215. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin\omega x$, $\quad u(x,0) = 0$, $\quad u_t(x,0) = 0$.

I. Тўлқин тенгламаси учун қўйилган қуйидаги Коши масалалари ечимини топинг.

216. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$, $\quad u\big|_{t=0} = e^{y}$, $\quad u_t\big|_{t=0} = e^{-y}$.

217. $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right),\ u\big|_{t=0}=\left(x^2+y^2\right)^2,\ u_t\big|_{t=0}=\left(x^2+y^2\right)^2.$

218. $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right),\ u\big|_{t=0}=cos(3x+4y),\ u_t\big|_{t=0}=sin\,(3x+4y).$

219. $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+re^t,\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=0,r^2=x^2+y^2.$

220. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+6xyt,\quad u\big|_{t=0}=x^2-y^2,\ u_t\big|_{t=0}=xy.$

221. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+2,\qquad u\big|_{t=0}=x,\quad u_t\big|_{t=0}=y.$

222. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+x^2-3xy^2,\quad u\big|_{t=0}=e^x cos\,y,\quad u_t\big|_{t=0}=e^y sin\,x.$

223. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+t\,sin\,y,\qquad u\big|_{t=0}=x^2,\qquad u_t\big|_{t=0}=sin\,y.$

224. $u_{tt}=2(u_{xx}+u_{yy}),\qquad u\big|_{t=0}=2x^2-y^2,\ u_t\big|_{t=0}=2x^2+y^2.$

225. $u_{tt}=3(u_{xx}+u_{yy})+x^3+y^3,\ u\big|_{t=0}=x^2,\ u_t\big|_{t=0}=y^2.$

II. Уч ўлчовли тўлқин тенгламаси учун қўйилган қуйидаги Коши масалалари ечимини топинг.

226. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz},\qquad u\big|_{t=0}=\frac{1}{z},\ u_t\big|_{t=0}=0,\ z\neq 0,\ z\neq t.$

227. $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right),\ u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=cos\,z.$

228. $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right),\ u\big|_{t=0}=xy\,cos\,z,\quad u_t\big|_{t=0}=0.$

229. $u_{tt}=u_{xr}+u_{yy}+u_{zz}+3,\ u\big|_{t=0}=x^2+y^2,\quad u_t\big|_{t=0}=1.$

230. $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)u_{zz}+r^2e^t,\ u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0,\ r^2=x^2+y^2+z^2.$

231. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+6te^{x\sqrt{z}}sin\,y cos\,z,\ u\big|_{t=0}=0,\ u_t\big|_{t=0}=0.$

232. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+2xyz,\quad u\big|_{t=0}=x^2+y^2-2z^2,\ u_t\big|_{t=0}=1.$

233. $u_{tt}=8(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+t^2x^2,\ u\big|_{t=0}=y^2,\quad u_t\big|_{t=0}=z^2.$

234. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz},\qquad u\big|_{t=0}=xyz,\quad u_t\big|_{t=0}=x^2y^2z^2.$

IV. Иккинчи тартибли икки ўзгарувчили хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун қўйилган қуйидаги Коши масалалари ечимини топинг.

235. $u_{xy}+u_x=0,\quad u\big|_{y=x}=sin\,x,\quad u_x\big|_{y=x}=1,\quad |x|<\infty..$

236. $u_{xx}-u_{yy}+2u_x+2u_y=0,\quad u\big|_{y=0}=x,\quad u_y\big|_{y=0}=0,\quad |x|<\infty.$

237. $u_{xx}-u_{yy}-2u_x-2u_y=4, \quad u\big|_{x=0}=-y, \quad u_x\big|_{x=0}=y-1, \quad |y|<\infty.$

238. $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=2, \quad u\big|_{y=0}=0, \quad u_y\big|_{y=0}=x+\cos x, \quad |x|<\infty.$

239. $u_{xy}+yu_x+xu_y+xyu=0,, \quad u\big|_{y=3x}=0, \quad u_y\big|_{y=3x}=e^{-5x^2}, \quad x<1.$

240. $xu_{xx}+(x+y)u_{xy}+yu_{yy}=0, \quad u\big|_{y=\frac{1}{x}}=x^3, \quad u_y\big|_{y=\frac{1}{x}}=2x^2, \quad x>0.$

241. $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-2yu_y=0, \quad u\big|_{x=1}=y, \quad u_x\big|_{x=1}=y, \quad y<0.$

242. $u_{xx}-6u_{xy}+5u_{yy}=0, \quad u\big|_{y=x}=\sin x, \quad u_y\big|_{y=x}=\cos x.$

243. $u_{xx}-u_{yy}+5u_x+3u_y+4u=0, \quad u\big|_{y=0}=xe^{-\frac{5}{2}x-x^2}, \quad u_y\big|_{y=0}=e^{-\frac{5}{2}x}.$

244. $3u_{xx}-5u_{xy}+2u_{yy}=0, \quad u\big|_{y=x}=\dfrac{x}{1+x^2}, \quad u_y\big|_{y=x}=\sin x.$

245. $e^yu_{xy}-u_{yy}+u_y=xe^{2y}, \quad u\big|_{y=0}=\sin x, \quad u_y\big|_{y=0}=\dfrac{1}{1+x^2}.$

246. $u_{xx}+2\cos x\,u_{xy}-\sin^2 x\,u_{yy}+u_x+(1+\cos x-\sin x)u_y=0,$

$u\big|_{y=\sin x}=\cos x, \quad u_y\big|_{y=\sin x}=\sin x.$

247. $u_{xx}+2\sin x\,u_{xy}-\cos^2 x\,u_{yy}+u_x+(\sin x+\cos x+1)u_y=0,$

$u\big|_{y=-\cos x}=1+2\sin x, \quad u_y\big|_{y=-\cos x}=\sin x.$

248. $u_{xx}-2\sin x\,u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}+u_x+(2-\sin x-\cos x)u_y=0,$

$u\big|_{y=\cos x}=0, \quad u_y\big|_{y=\cos x}=e^{-\frac{x}{2}}\cos x.$

249. $u_{xx}-2\sin x\,u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}-\cos x\,u_y=0,$

$u\big|_{y=\cos x}=\sin x, \quad u_y\big|_{y=\cos x}=\dfrac{e^x}{2}.$

250. $e^yu_{xy}-u_{yy}+u_y=0, \quad u\big|_{y=0}=-\dfrac{x^2}{2}, \quad u_y\big|_{y=0}=-\sin x.$

251. $yu_{xx}+u_{yy}=0, \quad u\big|_{y=0}=\tau(x), \quad 0\le x\le 1,$

$u_y\big|_{y=0}=\upsilon(x), \quad 0<x<1, \quad y<0.$

252. $(-y)^m u_{xx}-u_{yy}=0, \quad u\big|_{y=0}=\tau(x), \quad 0\le x\le 1,$

$u_y\big|_{y=0}=\upsilon(x), \quad 0<x<1, \quad y<0,\ m>0.$

253. $u_{xx}-(-y)^m u_{yy}=0,\quad u\big|_{y=0}=\tau(x),\quad 0\le x\le 1,$

$$u_y\big|_{y=0}=\upsilon(x),\quad 0<x<1,\qquad y<0,\ 0<m<1.$$

254. Қуйидаги $y^2u_{xx}+yu_{yy}+0,5u_y=0,\ \ y<0$ тенглама учун қўйилган $u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1,\ \ u_y(x,0)=\psi(x),\ 0<x<1$ Коши масаласини коррект қўйилмаганлигини исботланг.

255. $y<0$ да 254– масаладаги тенглама учун ушбу

$$u(x,0)=x,\ \ 0\le x\le 1,\quad \lim_{y\to -0}(-y)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=1,\ \ 0<x<1$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ ечимни топинг.

256. Қуйидаги $u_{xx}-yu_{yy}-0,5u_y=0,\ \ y>0$ тенглама учун қўйилган $u(x,0)=\cos x,\quad \lim\limits_{y\to+0} y^{\frac{1}{2}}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin x$ Коши масаласининг ечимини топинг.

257. Агар $u_1(x)\in C\left(-1;1\right),\ \ xu_1(x)\in C^1\left(-1;1\right)$ бўлиб, $u_1(x)$– жуфт функция бўлса, у ҳолда ушбу

$$u_{xy}=0,\ \ |x|<1,\ \ 0<y<1;\ \ u\big|_{y=x^2}=0,\ \ u_y\big|_{y=x^2}=u_1(x)$$

Коши масаласининг ечими мавжуд ва ягона эканлигини исботланг.

258. Агар $u_0(x)\in C^2\left(-\infty;+\infty\right),\ \ u_1(x)\equiv const$ бўлса, у ҳолда ушбу

$$u_{xy}=0,\ \ -\infty<x,y<+\infty;\ \ u\big|_{y=0}=u_0(x),\ \ u_y\big|_{y=0}=u_1(x)$$

Коши масаласининг ечими мавжуд эканлигини исботланг. Бу масаланинг ягона бўлмаган ечими қуйидаги кўринишда

$$u(x,y)=u_0(x)+f(y)-f(0)+y\left[u_1(0)-f'(0)\right]$$

бўлишлигини кўрсатинг, бу ерда $f(y)\in C^2\left(-\infty,+\infty\right)$– ихтиёрий функция.

259. Агар $u_1(x)-3x^2\equiv const$ бўлса, у ҳолда ушбу

$$u_{xx}-u_{yy}=6(x+y),\ \ -\infty<x,y<+\infty;\ \ u\big|_{y=x}=0,\ \ u_x\big|_{y=x}=u_1(x)$$

Коши масаласининг ечими мавжуд эканлигини исботланг. Бу масаланинг ягона бўлмаган ечими қуйидаги кўринишда

$$u(x,y)=x^3-y^3+f(x-y)-f(0)+(x-y)\left[u_1(0)-f'(0)\right]$$

бўлишлигини кўрсатинг, бу ерда $f(y)\in C^2(-\infty,+\infty)-$ ихтиёрий функция.

260. Қуйидаги $u_{xy}+\frac{\beta}{x-y}\left(u_y-u_x\right)=0,\ \ 0<x<y<1,\ \ 0<\beta<0{,}5$ тенглама учун қўйилган

$$\lim_{y-x\to 0} u(x,y)=\tau(x), \qquad 0\le x\le 1$$

$$\lim_{y-x\to 0} \left(2(1-2\beta)\right)^{-2\beta}(y-x)^{2\beta}\left(u_x-u_y\right)=\nu(x),\ \ 0<x<1$$

Коши масаласининг ечимини топинг.

261. Қуйидаги тенгламалар учун $u(0,t)=\varphi(t),\ \ u_x(0,t)=\psi(t)$ шартлар билан қўйилган Коши масаласини ечилсин.

а) $u_{xx}-u_{tt}+au_x+\frac{1}{4}a^2u=0, \qquad a=const$;

б) $u_{xx}-u_{tt}+bu_t-\frac{1}{4}b^2u=0, \qquad b=const$;

в) $u_{xx}-u_{tt}+au_x+bu_t-\frac{1}{4}\left(a^2-b^2\right)u=0, a=const,\ b=const$.

2- §. Риман функцияси. Умумий қўйилган Коши масаласи. Риман усули. Гурса масаласи

1. ***Риман функцияси.*** Маълумки, иккинчи тартибли икки ўзгарувчи хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг коэффициентлари етарли умумий шартларни каноатлантирганда, уни

$$Lu\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+$$

$$+c(x,y)u=f(x,y) \tag{2.13}$$

каноник кўринишга келтириш мумкин. Агар (2.13) тенгламанинг a ва b коэффициентлари дифференциалланувчи деб ҳисобласак, L операторга қўшма бўлган оператор

$$M\upsilon\equiv\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}(a\upsilon)-\frac{\partial}{\partial y}(b\upsilon)+c\upsilon$$

кўринишда ёзилади.

L операторнинг ***Риман функцияси*** деб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\upsilon(x,y)$ функцияга айтилади [4],[15],18]:

1. $M\upsilon=0$; (2.14)

2. $x=x_1$, $y=y_1$ характеристикаларда

$$\upsilon(x_1,y)=exp\left(\int\limits_{y_1}^{y}a(x_1,\tau)d\tau\right),\ \ \upsilon(x,y_1)=exp\left(\int\limits_{x_1}^{x}b(t,y_1)dt\right), \tag{2.15}$$

бу ерда (x_1, y_1) нуқта (2.13) тенглама берилган Ω соҳанинг тайин нуқтасидир.

(2.15) шартлардан келиб чиқадики, Риман функцияси $x=x_1$, $y=y_1$ характеристикаларда

$$\upsilon(x,y_1)-\int\limits_{x_1}^{x}b(t,y_1)\upsilon(t,y_1)dt=1, \upsilon(x_1,y)-\int\limits_{y_1}^{y}a(x_1,\tau)\upsilon(x_1,\tau)d\tau=1,$$

$$\upsilon(x_1,y_1)=1 \tag{2.16}$$

шартларни ҳам қаноатлантиради.

(2.16) тенгликлардан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, агар (2.13) тенглама учун Риман функцияси

$$\upsilon(x,y)=w(x,y)+\int\limits_{x_1}^{x}w(t,y)b(t,y)exp\left(\int\limits_{t}^{x}b(t_1,y)dt_1\right)dt+$$

$$+\int\limits_{y_1}^{y}w(x,\tau)a(x,\tau)exp\left(\int\limits_{\tau}^{y}a(x,\tau_1)d\tau_1\right)d\tau \tag{2.17}$$

кўринишда қидирилса, $w(x,y)$ номаълум функция

$$w(x,y)+\int\limits_{x_1}^{x}dt\int\limits_{y_1}^{y}K_0(x,y,t,\tau)w(t,\tau)d\tau=1 \tag{2.18}$$

интеграл тенгламани қаноатлантиради, бу ерда

$$K_0(x,y,t,\tau)=c(t,\tau)-b(t,y)a(t,\tau)exp\left(\int\limits_{\tau}^{y}a(x,\tau_1)d\tau_1\right)-$$

$$-a(x,\tau)b(x,\tau)exp\left(\int\limits_{t}^{x}b(t_1,y)dt_1\right)+$$

$$b(x,\tau)\int\limits_{t}^{x}c(t_1,\tau)exp\left(\int\limits_{t}^{t_1}b(t_2,\tau)dt_2\right)dt_1+$$

$$+a(t,\tau)\int_{\tau}^{y}c(t,\tau_1)exp\left(\int_{\tau}^{\tau_1}a(x,\tau_2)d\tau_2\right)d\tau_1 .$$

Риман функцияси фақат x, y ўзгарувчиларга боғлиқ бўлмай, x_1, y_1 ўзгарувчиларга ҳам боғлиқ бўлгани учун,уни

$$\upsilon = R(x, y; x_1, y_1)$$

кўринишда белгилаб олиш мумкин.

Кўрсатиш мумкинки $R(x, y; x_1, y_1)$ Риман функцияси x_1, y_1 ўзгарувчиларга нисбатан бир жинсли $LR(x, y; x_1, y_1) = 0$ тенгламани қаноатлантиради ва $f(x, y)$ функция узлуксиз бўлганда, ушбу

$$u_0(x, y) = \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{y_0}^{y} R(x_1, y_1; x, y) f(x_1, y_1)\, dy_1$$

функция (2.13) тенгламанинг хусусий ечимларидан бири бўлади.

1–Мисол. $u_{xy} + 2u_x + u_y + 2u = 1, \quad 0 < x,\ y < 1$ тенгламанинг Риман функциясини тузинг.

Ечиш. Берилган тенглама ва (2.14), (2.15), (2.16) шартлардан қуйидагига

$$M\,\upsilon \equiv \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + 2\upsilon = 0, \tag{2.19}$$

$$\upsilon(x_1, y) = e^{\int_{y_1}^{y} 2d\tau} = e^{2(y-y_1)}, \upsilon(x, y_1) = e^{\int_{x_1}^{x} d\tau} = e^{x-x_1} \tag{2.20}$$

$$\upsilon = R(x_1, y_1; x_1, y_1) = 1 \tag{2.21}$$

га бўламиз.

Энди (2.19), (2.20), (2.21) масалани ечамиз. (2.19) тенгламани қуйидагича

$$\frac{\partial}{\partial x}(\upsilon_y - 2\upsilon) - (\upsilon_y - 2\upsilon) = 0 \tag{2.22}$$

ёзиб олмиз. (2.22) тенгламани $w = \upsilon_y - 2\upsilon$ алмаштириш ёрдамида $w_x - w = 0$ кўринишга келтириш мумкин. Унинг умумий ечими $w(x, y) = f(y)e^x$ кўринишда бўлади. Демак, (2.22) тенгламанинг умумий ечими

$$\upsilon(x, y) = f_1(y)e^x + f_2(x)e^{2y} \tag{2.23}$$

дан иборатдир.

(2.23)ни (2.19), (2.20), (2.21) шартларга қўямиз. У ҳолда f_1 ва f_2 функцияларни аниқлаш учун ушбу

$$\begin{cases} f_2(x_1)e^{2y} + f_1(y)e^{x_1} = e^{2(y-y_1)}, \\ f_2(x)e^{2y_1} + f_1(y_1)e^{x} = e^{x-x_1} \end{cases}$$

системани оламиз. Уни ечиб,

$$f_1(y) = e^{2(y-y_1)-x_1} - f_2(x_1)e^{2y-x_1}, \ f_2(x) = e^{x-x_1-2y_1} - f_1(y_1)e^{x-2y_1}$$

ифодаларга эга бўламиз. Буларни (2.23)га қўйиб, (2.21)ни хисобга олиб қуйидагини

$$\upsilon(x, y) = e^{x-x_1+2(y-y_1)}$$

ҳосил қиламиз. Бу эса берилган тенгламанинг Риман функциясидир.

II. ***Умумий қўйилган Коши масаласи. Риман усули.*** (2.13) тенгламанинг характеристик тенгламаси $dxdy = 0$ бўлиб, $x = const$ ва $y = const$ тўғри чизиқлар тенгламанинг характеристикалари бўлади.

Текисликда AB эгри чизиқ берилган бўлиб, бу эгри чизиқни координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар, яъни (2.13) тенгламанинг характеристикалари биттадан ортиқ нуқтада кесиб ўтмасин. Шу AB эгри чизиқда φ ва ψ функциялар берилган бўлиб, $n - AB$ чизиққа ўтказилган нормал бўлсин.

Коши масаласи[15]**.** (2.13) тенгламанинг

$$u\,|_{AB} = \varphi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AB} = \psi \tag{2.24}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда берилган φ ва ψ мос равишда икки марта ва бир марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялардир.

(2.13), (2.24) масаланинг ечими ва (2.13) тенгламанинг Риман функцияси мавжуд деб фараз қилайлик.

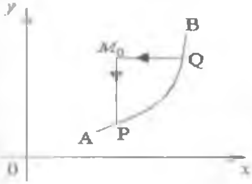
Етарли силлик $u(x, y)$ ва $\upsilon(x, y)$ функциялар учун

$$2\left[\upsilon Lu - uM\ (\upsilon)\right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + 2(au\upsilon)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + 2(bu\upsilon)\right) \tag{2.25}$$

ёки

$$\upsilon L(u) - uM(\upsilon) = \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} \tag{2.26}$$

айният ўринли, бу ерда



$$K = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u\upsilon) - u\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y} - a\upsilon\right), \tag{2.27}$$

$$N = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u\upsilon) - u\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x} - b\upsilon\right). \tag{2.28}$$

Текисликдаги ихтиёрий $M_0(x_0, y_0)\,(\notin AB)$ нуқтани белгилаб, бу нуқтадан $x=x_0$ ва $y=y_0$ характеристикалар ўтказайлик. Бу характеристикалар берилган AB чизиқ билан кесишиб, QM_0P эгри чизиқли учбурчак ҳосил қилади. QM_0P учбурчак билан чегараланган соҳани Ω деб белгилайлик. (2.26) айниятни Ω соҳа бўйича интеграллайлик ва Грин формуласини қўллайлик:

$$\iint_{\Omega}[\upsilon Lu - uM\,\upsilon]dxdy = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= \oint_{QM_0P}(-N)dx + K\,dy = \int_{QM_0}(-N)dx + K\,dy +$$

$$+ \int_{M_0P}(-N)dx + Kdy + \int_{PQ}(-N)dx + Kdy. \tag{2.29}$$

QM_0 да $y=const$, M_0P да $x=const$ бўлганлиги учун (2.29) тенглик қуйидаги кўринишга келади:

$$\iint_{\Omega}[\upsilon Lu - uM\,\upsilon]dxdy = -\int_{QM_0} Ndx + \int_{M_0P} Kdy + \int_{PQ}(-N)dx + Kdy.$$

Бу ерда u ни (2.13) тенгламанинг ечими, υ ни эса (2.13) тенгламанинг Риман функцияси деб қарасак,

$$\iint_{\Omega} Rf(x,y)dxdy = -\int_{QM_0} Ndx + \int_{M_0P} Kdy + \int_{PQ}(-N)dx + Kdy \tag{2.30}$$

тенгликка эга бўламиз. Бунда

$$\int_{M_0P} Kdy = \frac{1}{2}\left\{(uR)_P - (uR)_{M_0}\right\} - \int_{M_0P} u\left(\frac{\partial R}{\partial y} - aR\right)dy, \qquad (2.31)$$

$$-\int_{QM_0} Ndy = \frac{1}{2}\left\{(uR)_Q - (uR)_{M_0}\right\} + \int_{QM_0} u\left(\frac{\partial R}{\partial x} - bR\right)dx. \qquad (2.32)$$

Энди Риман функцияси учун

$$x = x_0 \text{ бўлганда, } \frac{\partial R}{\partial y} - aR = 0;$$

$$y = y_0 \text{ бўлганда, } \frac{\partial R}{\partial x} - aR = 0;$$

$$M(x_0, y_0) \text{ нуқтада } R = 1$$

тенгликлар ўринли эканлигини эътиборга олсак, (2.30) (2.31) ва (2.32) тенгликлардан қуйидаги формулага эга бўламиз[18]:

$$u(M_0) = \frac{(uR)_P + (uR)_Q}{2} + \int_{PQ} Kdy - Ndx - \iint_{\Omega} R\, f\, dxdy$$

ёки

$$u(M_0) = \frac{(uR)_P + (uR)_Q}{2} - \iint_{\Omega} R\, f\, dx\, dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{PQ}\left(R\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial R}{\partial y} + 2auR\right)dy - \frac{1}{2}\left(R\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial R}{\partial x} + 2buR\right)dx. \qquad (2.33)$$

Бу ерда биринчи интеграл остидаги ифодаларнинг AB эгри чизиқнинг PQ ёйи устидаги қийматлари маълумдир. Ҳақиқатан ҳам R функция олдин аниқланган бўлганлиги учун AB чизиқ устида R, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$ ларнинг қийматларини топиш мумкин; u функциянинг AB эгри чизиқ устидаги қиймати берилган; (2.24) шартларга асосан $\frac{\partial u}{\partial x}$ ва $\frac{\partial u}{\partial y}$ ларнинг AB чизиқ устидаги қийматларини

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{AB} = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial s}cos\,(s,x) + \frac{\partial u}{\partial n}cos\,(n,x)\right)\right|_{AB} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial s}cos\,(s,x) + \psi(s)cos\,(n,x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{AB} = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial s}\cos(s,y) + \frac{\partial u}{\partial n}\cos(n,y)\right)\right|_{AB} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial s}\cos(s,y) + \psi(s)\cos(n,y)$$

тенгликлардан топилади. Бу ерда $\frac{\partial}{\partial s}$ – AB чизиққа ўтказилган уринманинг йўналиши бўйича ҳосила. (2.13) тенглама учун Коши масаласи ечимини ифодаловчи (2.33) формулага **Риман формуласи** дейилади.

Гиперболик типдаги (2.13) тенглама учун умумий қўйилган Коши масаласини ечишнинг бу усулида Риман функциясига асосланилди. Шунинг учун бу усулни **Риман усули** дейилади. Риман функцияси AB эгри чизиқнинг кўринишига ва AB чизиқ устида (2.24) бошланғич шартларнинг берилишига боғлиқ эмас.

2–Мисол. $u_{xy} + 2u_x + u_y + 2u = 1, \quad 0 < x,\ y < 1$ (2.34)

тенглама учун қўйилган қуйидаги

$$u(x,y)\big|_{x+y=1} = x, \qquad u_x(x,y)\big|_{x+y=1} = x \tag{2.35}$$

Коши масаласини Риман усули ёрдамида ечинг.

Ечиш. 1–мисолга асосан (2.34) тенгламанинг Риман функцияси қуйидаги кўринишда

$$R(x, y; x_1, y_1) = e^{x - x_1 + 2(y - y_1)} \tag{2.36}$$

бўлади. (2.34), (2.35) ва (2.36) кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$M_0 = M_0(x_1, y_1),\ a(x,y) = 2, \quad b(x,y) = 1, \quad f(x,y) = 1,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = e^{x - x_1 + 2(y - y_1)}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = 2e^{x - x_1 + 2(y - y_1)},$$

$$u_x\big|_{x+y=1} - u_y\big|_{x+y=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad u_y\big|_{x+y=1} = x - 1,$$

$$(uR)_{P=P(1-y_1,y_1)} = (1 - y_1)e^{1-x_1-y_1},\ (uR)_{Q=Q(x_1,1-x_1)} = x_1 e^{2(1-x_1-y_1)}.$$

Бу ифодаларни (2.33) Риман формуласига қўямиз:

$$u(x_1, y_1) = \frac{(1-y_1)e^{1-x_1-y_1} + x_1 e^{2(1-x_1-y_1)}}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{1-y_1}^{x_1}\Big(xe^{-x-x_1+2-2y_1} - xe^{-x-x_1+2-2y_1} +$$

$$+2xe^{-x-x_1+2-2y_1}\Big)dx-\frac{1}{2}\int\limits_{y_1}^{1-x_1}\Big(-ye^{1-x_1+y-2y_1}-2(1-y)e^{1-x_1+y-2y_1}+4(1-y)e^{1-x_1+y-2y_1}\Big)dy+$$

$$+\int\limits_{1-y_1}^{x_1}dx\int\limits_{1-x}^{y_1}e^{x-x_1+2(y-y_1)}dy=\frac{(1-y_1)e^{1-x_1-y_1}+x_1e^{2(1-x_1-y_1)}}{2}+$$

$$+\int\limits_{1-y_1}^{x_1}x\cdot e^{-x-x_1+2-2y_1}dx-\frac{1}{2}\int\limits_{y_1}^{1-x_1}(2-3y)e^{1-x_1+y-2y_1}dy+\frac{1}{2}\int\limits_{1-y_1}^{x_1}\Big(e^{x-x_1}-e^{-x-x_1+2-2y_1}\Big)dx=$$

$$=\frac{(1-y_1)e^{1-x_1-y_1}+x_1e^{2(1-x_1-y_1)}}{2}-(1+x_1)e^{2(1-x_1-y_1)}+(2-y_1)e^{1-x_1-y_1}-$$

$$-\frac{1}{2}(2+3x_1)e^{2(1-x_1-y_1)}+\frac{1}{2}(5-3y_1)e^{1-x_1-y_1}+\frac{1}{2}e^{2(1-x_1-y_1)}-e^{1-x_1-y_1}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\left(2x_1+\frac{3}{2}\right)e^{2(1-x_1-y_1)}+\left(4-3y_1\right)e^{1-x_1-y_1}.$$

Демак, (2.34), (2.35) Коши масаласининг ечими қуйидаги кўринишда $u(x_1, y_1)=0,5-\left(2x_1+1,5\right)e^{2(1-x_1-y_1)}+\left(4-3y_1\right)e^{1-x_1-y_1}$. бўлади.

III. ***Гурса масаласи***[15],[18]. Маълумки (2.13) тенгламанинг характеристикалари $x=const$, $y=const$ тўғри чизиқлардан иборат. Ихтиёрий $M_0(x_0, y_0)$ нуқта олайлик ва бу нуқтадан $x=x_0$, $y=y_0$ характеристикалар ўтказайлик. Бу характеристикалар текисликни тўрт соҳага ажратади.

Бу соҳалардан бирини Ω орқали белгилайлик. M_0 нуктадан чиқиб Ω соҳани чегараланувчи ярим тўғри чизиқларда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар берилган бўлсин. У ҳолда (2.13) тенглама учун Ω соҳада Гурса масаласи қуйидагича баён қилинади: (2.13) тенгламанинг Ω соҳада аниқланган ва узлуксиз ҳамда

$$u(x, y_0)=\varphi(x),\;\; u(x_0, y)=\psi(y) \qquad (2.37)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Бу масала баъзида **характеристик масала** ҳам деб айтилади.

Агар $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ функцияларнинг баъзи ҳусусий қийматларида (2.13) тенгламанинг умумий ечими топилган бўлса, Гурса масаласининг ечимини бу умумий ечимдан фойдаланиб топиш мумкин. Умумий ҳолда эса (2.13), (2.37) Гурса масаласи Риман усули ёрдамида ечилади.

Бунда Ω соҳанинг ихтиёрий $P(x_1, y_1)$ нуқтасида Гурса масаласи ечимини топиш учун $x = x_1$, $y = y_1$ ҳарактеристикалар ўтказамиз. Бу характеристикаларнинг $x = x_0$, $y = y_0$ характеристикалар билан кесишишидан ҳосил бўлган соҳа (тўртбурчак)ни Ω_1 билан белгилаймиз.

$R(x, y; x_1, y_1)$ - (2.13) тенгламанинг Риман функцияси бўлсин. Риман функцияси x, y ўзгарувчилар бўйича қўшма тенгламанинг ечими бўлгани учун

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(aR) - \frac{\partial}{\partial y}(bR) = -c\,R(x, y, x_1, y_1)$$

тенглик ўринлидир. У ҳолда Ω_1 соҳада етарли силлиқ бўлган $u(x_1, y_1)$ функция учун ушбу

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[u(x, y) R(x, y; x_1, y_1)\right] - R(x, y; x_1, y_1) Lu(x, y) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial y} - aR\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial x} - bR\right)\right] \qquad (2.38)$$

айниятнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

(2.38) айниятни Ω_1 соҳа бўйича, яъни x ва y ўзгарувчилар бўйича $x_0 \le x \le x_1$, $y_0 \le y \le y_1$ оралиқларда интеграллаб, Риман функциясининг ҳоссаларига асосан қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$u(x_1, y_1) = u(x_0, y_1) R(x_0, y_1; x_1, y_1) + u(x_1, y_0) R(x_1, y_0; x_1, y_1) -$$

$$-u(x_0, y_0) R(x_0, y_0; x_1, y_1) +$$

$$+ \int_{y_0}^{y_1} \left[a(x_0, y) R(x_0, y; x_1, y_1) - \frac{\partial R(x_0, y; x_1, y_1)}{\partial y} \right] u(x_0, y) dy +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left[b(x, y_0) R(x, y_0; x_1, y_1) - \frac{\partial R(x, y_0; x_1, y_1)}{\partial x} \right] u(x, y_0) dx -$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} R(x, y; x_1, y_1) f(x, y) dy \qquad (2.39)$$

Фараз қилайлик $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган функциялар, $u(x,y)$ эса (2.13) тенгламанинг ечими бўлсин. У ҳолда (2.39) тенгликдан (2.13),(2.37) Гурса масаласининг ечими

$$u(x_1,y_1)=R(x_1,y_0;x_1,y_1)\varphi(x_1)+R(x_0,y_1;x_1,y_1)\psi(y_1)-$$

$$-R(x_0,y_0;x_1,y_1)\varphi(x_0)+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left[b(x,y_0)R(x,y_0;x_1,y_1)-\frac{\partial}{\partial x}R(x,y_0;x_1,y_1)\right]\varphi(x)dx+$$

$$+\int_{y_0}^{y_1}\left[a(x_0,y)R(x_0,y;x_1,y_1)-\frac{\partial}{\partial y}R(x_0,y;x_1y_1)\right]\psi(y)dy+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}dx_1\int_{y_0}^{y_1}R(x,y;x_1y_1)f(x,y)dy \qquad (2.40)$$

формула билан аниқланади.

Агар (2.13) тенгламада $a(x,y)\equiv b(x,y)\equiv c(x,y)\equiv 0$ бўлса, у ҳолда (2.13), (2.37) Гурса масаласининг ечими

$$u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)-\varphi(0)+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad (2.41)$$

формула билан аниқланади. $u_{xy}=0$ тенгламанинг Риман функцияси $R_1(x,y,x_0,y_0)=1$ кўринишда бўлади.

3–Мисол. $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}+xu_x-yu_y=0,\quad 1/x<y<x,\ x>1$ (2.42)

тенглама учун қўйилган қуйидаги

$$u(x,y)\big|_{y=x}=x,\qquad u(x,y)\big|_{y=1/x}=1+ln\ x \qquad (2.43)$$

Гурса масаласининг ечимини (2.42) тенгламани умумий ечимидан фойдаланиб топинг.

Ечиш.(1.27) га кўра (2.42) тенгламага мос характеристик тенглама

$$x^2dy^2-y^2dx^2=0 \quad ёки \quad (xdy+ydx)(xdy-ydx)=0,$$

$$xdy+ydx=0,\qquad xdy-ydx=0$$

бўлади. Бундан эса (2.42) тенгламанинг характеристикаларини топамиз:

$$x\,y=c_1,\qquad x/y=c_2.$$

(2.42) тенгламани $\xi = x\,y$, $\eta = x/y$, $u(x,y) = \upsilon(\xi,\eta)$ алмаштириш ёрдамида $\upsilon_{\xi\eta} = 0$ кўринишга келтириш мумкин. Унинг умумий ечими $\upsilon(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ кўринишда бўлади. Демак, берилган (2.42) тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y) = f_1(x\,y) + f_2\left(x/y\right) \qquad (2.44)$$

дан иборатдир.

(2.44)ни (2.43) шартларга қўямиз. У ҳолда f_1 ва f_2 функцияларни аниқлаш учун ушбу

$$\begin{cases} f_1(x^2) + f_2(1) = x, \\ f_2(x^2) + f_1(1) = 1 + ln\,x \end{cases}$$

системани оламиз. Уни ечиб,

$$f_1(x) = \sqrt{x} - f_2(1), \quad f_2(x) = 1 + 0,5\,ln\,x - f_1(1)$$

ифодаларга эга бўламиз. Буларни (2.44) га қўйиб, $u(1,1) = f_1(1) + f_2(1) = 1$ ни хисобга олиб, қуйидагини

$$u(x,y) = \sqrt{x\,y} + 0,5\,ln\left(x/y\right)$$

ҳосил қиламиз. Бу эса (2.42),(2.43) Гурса масаласининг ечимидир.

4-Мисол. $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + u = 0, \quad 0 < x < +\infty, \; -x < y < x$ 2.45)

тенглама учун қўйилган қуйидаги

$$u(x,y)\Big|_{y=x} = x, \quad u(x,y)\Big|_{y=-x} = x^2, \quad 0 \le x < +\infty \qquad (2.46)$$

Гурса масаласини Риман усули ёрдамида ечинг.

Ечиш. 1–мисолга ўхшаш (2.45) тенгламанинг Риман функциясини қуйидаги $R\left(x,y,x_0,y_0\right) = e^{x-x_0}$ кўринишда топамиз.

Энди (2.45)да $u\left(x,y\right) = e^{-x}\upsilon\left(x,y\right)$ алмаштириш бажариб, $\upsilon(x,y)$ га нисбатан

$$\upsilon_{xx} - \upsilon_{yy} = 0, \; \upsilon\left(x,x\right) = e^x x, \; \upsilon\left(x,-x\right) = e^x x^2 \qquad (2.47)$$

Гурса масаласига эга бўламиз. $\upsilon_{xx} - \upsilon_{yy} = 0$ тенгламанинг Риман функцияси $R_1\left(x,y,x_0,y_0\right) = 1$ га тенг.

(2.41) формулага кўра $\upsilon(0,0) = 0$, $f(x,y) = 0$ ни хисобга олиб (2.47) Гурса масаласини ечимини топамиз:

$$\upsilon\left(x,y\right) = e^{\frac{x+y}{2}} \cdot \frac{x+y}{2} + e^{\frac{x-y}{2}}\left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Бундан (2.45),(2.46) Гурса масаласининг ечимини қуйидаги

$$u(x,y)=e^{-x}\left[e^{\frac{x+y}{2}}\cdot\frac{x+y}{2}+e^{\frac{x-y}{2}}\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right]$$

кўринишда топамиз.

Мустақил ечиш учун масалалар

I. Қуйидаги тенгламаларнинг Риман функцияси топилсин.

262. $u_{xx}-u_{yy}=0$.

263. $u_{xx}-u_{yy}+\lambda^2u=0, \quad \lambda=const$.

264. $u_{xx}-u_{yy}+au_x+\frac{1}{4}a^2u=0, \quad a=const$.

265. $u_{xx}-u_{yy}+bu_y-\frac{1}{4}b^2u=0, \quad b=const$.

266. $u_{xx}-u_{yy}+au_x+bu_y+cu=0$, $a,b,c=const$.

267. $u_{xy}-\frac{1}{4}\frac{u}{(x-y)^2}=0$.

II. Қуйидаги функциялар берилган тенгламаларнинг Риман функцияси эканлиги исботлансин.

268. $R(\xi,\eta;x,y)=(xy/\xi\eta)^{1/2}, \qquad x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$.

269. $R(\xi,\eta;x,y)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{sin(\xi-x)sin(\eta-y)}{sin(x-y)sin(\xi-\eta)}\right)$,

$u_{\xi\eta}-\frac{1}{4}\frac{u}{sin^2(\xi-\eta)}=0$, бу ерда $F(a,b,c;z)-$ гипергеометрик функция[2].

270. $R(\xi,\eta;x,y)=(\xi-\eta)^{\alpha+\beta}(\xi-y)^{-\alpha}(x-\eta)^{-\beta}F\left[\alpha,\beta,1;\frac{(x-\xi)(\eta-y)}{(x-\eta)(\xi-y)}\right]$,

$$u_{\xi\eta}-\frac{\alpha}{\xi-\eta}u_\xi+\frac{\beta}{\xi-\eta}u_\eta=0,\ \alpha,\beta=const.$$

271. $R(x,y;x_0,y_0)=J_0\left[\lambda\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}\right]$, $u_{xx}-u_{yy}+\lambda^2u=0$, бу ерда $J_0(z)-$нолинчи тартибли Бессел функция [2],[12].

272. $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=$

$$\left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta} F_3(\alpha,\beta,1-\alpha,1-\beta,1;\sigma_1,\sigma_2),$$

$$u_{\xi\eta}+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_{\xi}+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_{\eta}=0,\ 0<\alpha<\beta<\frac{1}{2},$$

бу ерда $\sigma_1=-\dfrac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta+\xi)(\eta_0+\xi_0)}$, $\sigma_2=\dfrac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)}$.

$F_1(\alpha,\beta,1-\alpha,1-\beta,1;\sigma_1,\sigma_2)-$ Горн типидаги гипергеометрик функция[2].

273. $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=$

$$=\left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta}\cdot{}_3\Phi_B^{(5)}(\alpha,\beta,1-\alpha,1-\beta,1;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),$$

$$u_{\xi\eta}+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_{\xi}+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_{\eta}+\frac{\lambda^2}{4}u=0,\ 0<\alpha<\beta<\frac{1}{2},$$

бу ерда $\sigma_1=-\dfrac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta+\xi)(\eta_0+\xi_0)}$,

$$\sigma_2=\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)},\quad \sigma_3=\frac{\lambda^2}{4}(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0),$$

$${}_3\Phi_B^{(5)}(a,b,a',b',c;x,y,z)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(a)_i(b)_j(a')_i(b')_j}{(c)_{i+j+k}\,i!\,j!\,k!}x^i y^j z^k\ .$$

Горн типидаги гипергеометрик функция[1].

III. Гиперболик типдаги тенгламалар учун қўйилган қуйидаги Коши масалалари Риман усули билан ечилсин.

274. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $u(x,0)=f_1(x)$, $u_y(x,0)=f_2(x)$.

275. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u(x,1)=f_1(x)$, $u_y(x,1)=f_2(x)$.

276. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c^2u+f(x,t)$, $-\infty<x<+\infty$, $0<t<+\infty$,

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad -\infty<x<+\infty.$$

277. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c^2u+f(x,t)$, $-\infty<x<+\infty$, $0<t<+\infty$,

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad -\infty<x<+\infty.$$

278. $(l-x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ -\infty<x<l,\ 0<t<+\infty, l>0,$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad -\infty<x<l.$$

279. $\left(l^2-x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{1}{4}u=0,\ -l<x<l,\ 0<t<+\infty,$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad -l<x<l.$$

280. $xu_{xx}-u_{yy}+u_x=0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_y(x,0)=\psi(x),\ x>0.$

281. $yu_{xx}-u_{yy}=0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_y(x,0)=\psi(x),\ y>0.$

282. $xyu_{xy}-yu_y+xu_x-u=2y,\quad 0<x,y<+\infty,$

$$u\left(\frac{1}{y},y\right)=1-y,,\qquad u_y\left(x,\frac{1}{x}\right)=x-1.$$

283. $u_{xy}+\dfrac{1}{x+y}\left(u_x+u_y\right)=2,\quad 0<x,y<+\infty,$

$$u(x,x)=x^2,\qquad u_x(x,x)=x+1.$$

284. $2u_{xy}-e^{-x}u_{yy}=4x,\quad 0<x,y<+\infty,$

$$u(x,x)=x^5 cos\, x,\ u_y(x,x)=x^2+1.$$

IV. Гиперболик типдаги тенгламалар учун қўйилган қуйидаги Гурса масаласининг ечимини берилган тенгламани умумий ечимидан фойдаланиб топилсин.

285. $u_{xy}+u_x=x,\quad x>0,\ y>0,\qquad u\big|_{x=0}=y^2,\ u\big|_{y=0}=x^2.$

286. $u_{xy}+x^2yu_x=x,\quad x>0,\ y>0,\ u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{y=0}=x.$

287. $u_{xy}+u_x=1,\quad x>0,\ y>0,\qquad u\big|_{x=0}=\varphi(y),\ u\big|_{y=0}=\psi(x),$

бу ерда $\varphi(x),\ \psi(x)\in C^2(x>0)\cap C(x\geq 0)$ ва $\varphi(0)=\psi(0).$

288. $u_{xy}+xu_x=0,\quad x>0,\ y>0,\qquad u\big|_{x=0}=\varphi(y),\ u\big|_{y=0}=\psi(x),$

бу ерда $\varphi(x),\ \psi(x)\in C^2(x>0)\cap C(x\geq 0)$ ва $\varphi(0)=\psi(0).$

289. $2u_{xx}-2u_{yy}+u_x+u_y=0,\quad y>|x|,$

$$u\big|_{y=x}=1,\quad u\big|_{y=-x}=(x+1)e^x.$$

290. $2u_{xx}+u_{xy}-u_{yy}+u_x+u_y=0,\quad -\dfrac{1}{2}x<y<x,\quad x>0,$

$$u\big|_{y=x} = 1+3x, \qquad u\big|_{y=-\frac{1}{2}x} = 1.$$

291. $u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0, \quad x < y < 5x, \quad x > 0,$

$$u\big|_{y=x} = \varphi(x), \qquad u\big|_{y=5x} = \psi(x),$$

бу ерда $\varphi(x),\ \psi(x) \in C^2(x>0) \cap C(x \geq 0)$ ва $\varphi(0) = \psi(0)$.

292. $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0 \ \ y < 0,\ x > 0,$

$$u\Big|_{y=-x} = x+1, \quad u\Big|_{y=x-1} = x^2 + \frac{5}{4}.$$

293. $u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 5u_y = 0 \ \ x < y < 5x,\ x > 0$

$$u\Big|_{y=x} = x^2 \quad u\Big|_{y=5x} = x^2 - x.$$

294. $u_{xy} + yu_y = 0 \quad y > 0,\ x > 0 \ \ u\big|_{y=0} = e^x \quad u\big|_{x=0} = \cos y.$

295. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0, \quad -\frac{1}{4}x^2 < y < 0, \quad x > 0,$

$$u\big|_{y=0} = 0, \qquad u\big|_{y=-\frac{1}{4}x^2} = x^2.$$

296. $u_{xy} - e^x u_{yy} = 0, \quad x > 0,\ y > -e^x,\ \ u\big|_{x=0} = y^2,\ u\big|_{y=-e^x} = 1 + x^2,$

297. $yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0,\ 0 < y < x,\ \ x > 0,$

$$u\big|_{y=0} = 0, \qquad u\big|_{y=x} = 4x^4.$$

298. $xu_{xx} + (x-y)u_{xy} - yu_{yy} = 0, \quad 0 < y < x, \quad x > 0,$

$$u\big|_{y=0} = 0, \qquad u\big|_{y=x} = x.$$

299. $y^2 u_{xx} + u_{xy} = 0, \quad 0 < y < 2, \quad y^3 - 8 < 3x < y^3,$

$$u\big|_{y=2} = 3x + 8, \qquad u\big|_{3x=y^3} = 2y^3.$$

300. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0, \quad y > x, \quad x > 1, \quad u\big|_{x=1} = 1,\ u\big|_{y=x} = x.$

301. $3x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0, \quad x < y < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad 0 < x < 1,$

$$u\big|_{x=y} = y,\ \ u\big|_{xy^3=1} = y^2.$$

302. $3x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0, \quad 1 < y < x, \quad x > 1,$

$$u\big|_{y=x} = 0, \qquad u\big|_{y=1} = y\cos\frac{\pi x}{2}.$$

303. $u_{xy} - \frac{1}{x-y}\left(u_x - u_y\right) = 1, \quad y < -x, \quad x > 2,$

$$u\big|_{y=-x} = 0, \qquad u\big|_{x=2} = 2 + 2y + 0,5y^2.$$

304. $u_{xx} - u_{yy} + \frac{2}{x}u_x = 0, \quad y > 1 + |x|,$

$$u\big|_{y=x+1} = 1 - x, \qquad u\big|_{y=1-x} = 1 + x.$$

305. $u_{xx} - u_{yy} + \frac{4}{x}u_x + \frac{2}{x^2}u = 0, \quad y > x, \ x > 1,$

$$u\big|_{y=x+1} = 1 - x, \qquad u\big|_{y=1-x} = 1 + x.$$

306. $u_{xy} = 1, \ \alpha x < y < \beta x, \ x > 0, \ 0 < \alpha < \beta, \ u\big|_{y=\alpha x} = 0, \ \ u\big|_{y=\beta x} = 0.$

307. $u_{xy} = 0, \ x^2 < y < 2x^2, \ \ x > 0, \quad u\big|_{y=x^2} = x^4, \ \ u\big|_{y=2x^2} = x^2.$

308. $u_{xy} = 0, \ x^4 < y < x^2, \ 0 < x < 1, \quad u\big|_{y=x^2} = 0, \ u\big|_{y=x^4} = x(1-x).$

V. Қуйидаги тенгламалар учун $u(x,x) = \varphi(x)$, $u(x,-x) = \psi(x)$, $\varphi(0) = \psi(0)$, $0 \le x < +\infty$ шартлар билан қўйилган Гурса масалаларининг ечими Риман усули билан топилсин.

309. $u_{xx} - a^2 u_{tt} = 0, \qquad a = const.$

310. $u_{xx} - u_{tt} + \lambda^2 u = 0 \qquad \lambda = const.$

311. $u_{xx} - u_{tt} + \lambda^2 u = 1, \qquad \varphi(x) = \psi(x) \equiv 0, \ \lambda = const.$

312. $u_{xx} - u_{tt} + a u_x + \frac{1}{4}a^2 u = 0, \ a = const.$

313. $u_{xx} - u_{tt} + b u_t - \frac{1}{4}b^2 u = 0, \quad b = const.$

314. $u_{xx} - u_{tt} + a u_x + b u_t - \frac{1}{4}\left(a^2 - b^2\right)u = 0, a = const, b = const.$

315. $u_{xx} - t u_{tt} + 0,5 u_t = 0 \ \ (t < 0)$ тенгламанинг

$$u\big|_{L_1} = \varphi(x), \ 0 \le x \le 1/2; \ u\big|_{L_2} = \psi(x), \ (1/2) \le x \le 1$$

шартларни каноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда

$$L_1: \ x - 2\sqrt{-t} = 0, \ L_2: \ x + 2\sqrt{-t} = 1. \ \varphi(1/2) = \psi(1/2).$$

316. Тор тебраниш тенгламасн $(a = 1)$ учун:

а) Ушбу Асгейрссон принципи ўринли эканлигини исботланг: тор тебраниш тенгламаси ечимининг характеристик тўртбурчак қарама-қарши учларидаги қийматларининг йиғиндиси ўзгармасдир;

б) Гурса масаласи Асгейрссон принципидан фойдаланиб ечилсин.

3- §. Гиперболик типдаги тенгламалар учун коррект қўйилган бошқа масалалар

Иккинчи тартибли икки ўзгарувчили каноник кўринишдаги ушбу

$$u_{xx}-u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=f(x,y) \qquad (2.48)$$

тенглама берилган бўлсин. Бу тенгламанинг характеристикалари $x-y=const$, $x+y=const$ тўғри чизиқлар оиласидан иборат бўлади.

Ω орқали $y=0$ тўғри чизиқнинг ихтиёрий $A(a,0)B(b,0)$ кесмаси $(a<b)$ ва (2.48) тенгламанинг $AC: x+y=a$, BC: $x-y=b$ характеристикалари билан чегараланган учбурчакни белгилаймиз. Бу учбурчак **характеристик учбурчак** дейилади.

(2.48) тенгламанинг коэффициентлари ва ўнг томони $\overline{\Omega}$ да етарли силлиқ бўлганда бу тенглама учун Коши ва Гурса масалаларидан ташқари қуйидаги масалаларни ўрганиш мумкин.

Дарбунинг биринчи(Коши-Гурса-1) масаласи. (2.48) тенгламанинг Ω соҳада регуляр, $\overline{\Omega}$ да узлуксиз ва

$$u(x,0)=\tau(x),\ a\le x\le b,\ u\big|_{\overline{AC}}=\psi(x),\ a\le x\le\frac{a+b}{2} \qquad (2.49)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)$, $\psi(x)$ - берилган функциялар бўлиб,

$$\tau(x)\in C^2(a,b)\cap C[a,b],\ \ \psi(x)\in C^2\left(a;\ \frac{a+b}{2}\right)\cap C\left[a;\ \frac{a+b}{2}\right],$$

$\tau(a)=\psi(a)$ синфга тегишлидир.

1–Мисол. $2u_{xx}-2u_{yy}+u_x+u_y=0,\ 0<y<x,\ 0<x<1-y$ (2.50)

тенглама учун қўйилган қуйидаги

$$u(x,y)\big|_{y=0}=1+x, \qquad u(x,y)\big|_{y=x}=1 \qquad (2.51)$$

Коши-Гурса-1 масаласининг ечимини (2.50) тенгламани умуми ечимидан фойдаланиб топинг.

Ечиш. (2.50) тенгламани $u(x,y)=e^{\frac{y-x}{4}}\upsilon(x,y)$ алмаштириш ёрдами $\upsilon_{xx}-\upsilon_{yy}=0$ кўринишга келтириш мумкин. Унинг умумий ечими

$$\upsilon(x,y)=f_1(x+y)+f_2(x-y)$$

кўринишда бўлади. Демак, (2.50) тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y)=e^{\frac{y-x}{4}}\left[f_1(x+y)+f_2(x-y)\right] \qquad (2.52)$$

дан иборатдир.

(2.52)ни (2.51) шартларга қўямиз. У ҳолда f_1 ва f функцияларни аниқлаш учун ушбу

$$\begin{cases} f_1(2x)+f_2(0)=1, \\ \left(f_1(x)+f_2(x)\right)e^{-0,25x}=x+1 \end{cases}$$

системани оламиз. Уни ечиб,

$$f_1(x)=1-f_2(0), \qquad f_2(x)=e^{0,25x}\left(x+1\right)-1+f_2(0)$$

ифодаларга эга бўламиз. Буларни (2.52)га қўйсак,

$$u(x,y)=x-y+1$$

ҳосил бўлади. Бу эса (2.50), (2.51) Коши-Гурса-1 масалани ечимидир.

Дарбунинг иккинчи(Коши-Гурса-2) масаласи. (2.48) тенгламанинг Ω соҳада регуляр, $\overline{\Omega}$ да узлуксиз ва

$$u_y(x,0)=\nu(x),\ a<x<b,\ u|_{AC}=\psi(x),\ a\le x\le\frac{a+b}{2} \qquad (2.53)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\nu(x)$ - берилган функция бўлиб, $\nu(x)\in C^1(a,b)$ синфга тегишлидир.

2–Мисол. $u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}=0,\ -\frac{3}{4}<y<0,-y<x<1+\frac{1}{3}y$ (2.54)

тенглама учун қўйилган қуйидаги

$$u_y(x,y)\big|_{y=0}=0,25\,x+cos\,x, \qquad u(x,y)\big|_{y=-x}=1 \qquad (2.55)$$

Коши-Гурса-2 масаласининг ечимини (2.54) тенгламани умуми ечимидан фойдаланиб топинг.

Ечиш. (2.54) тенгламани

$$\xi=3x-y, \quad \eta=x+y, \quad u(x,y)=\upsilon(\xi,\eta)$$

алмаштириш ёрдамида $\upsilon_{\xi\eta} = 0,125$ кўринишга келтириш мумкин. Унинг умумий ечими

$$\upsilon(\xi,\eta) = 0,125\eta\xi + f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

кўринишда бўлади. Демак, (2.54) тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y) = 0,125(3x-y)(x+y) + f_1(3x-y) + f_2(x+y) \qquad (2.56)$$

ни ифодадир. Бундан y бўйича ҳосила оламиз:

$$u_y(x,y) = 0,25x - 0,25y - f_1'(3x-y) + f_2'(x+y) . \qquad (2.57)$$

(2.56) ва (2.57)ни (2.55) шартларга қўямиз. У ҳолда f_1 ва f_2 функцияларни аниқлаш учун ушбу

$$\begin{cases} f_1(4x) + f_2(0) = 1, \\ 0,25x + f_1'(3x) + f_2'(x) = 0,25x + \cos x \end{cases}$$

системани оламиз. Уни ечиб,

$$f_1(x) = 1 - f_2(0), \qquad f_2(x) = \sin x + f_2(0)$$

ифодаларга эга бўламиз. Буларни (2.56) га қўйсак,

$$u(x,y) = 0,125(3x-y)(x+y) + \sin x + 1$$

ечим бўлади. Бу эса (2.54), (2.55) Коши-Гурса-2 масаланинг ечимидир.

Дарбунинг биринчи ва иккинчи масаларда (2.49) ва (2.53) шартлардаги иккинчи шартни $\overline{BC}$ характеристикада берилган $u|_{BC} = \varphi(x)$, $\dfrac{a+b}{2} \le x \le b$ шарт билан алмаштириш мумкин.

B (A) нуқта x ўқи бўйича ўнгга (чапга) чексиз узоқлашган ҳолда ҳосил бўлган Ω соҳада ҳам Дарбу масалалари юқоридагидек қўйилади, факат бу ерда берилган функциялар $(a,+\infty)$, $\left[(-\infty,b)\right]$ интервалларда аниқланган бўлади.

Энди Ω_1 орқали $y=0$ тўғри чизиқ ҳамда $l_1 : y = f(x)$, $l_2 : y = g(x)$ эгри чизиклар билан чегараланган соҳани белгилайлик, бу ерда

$$f(a) = g(b) = 0\,,\ 0 > \frac{df}{dx} > -1\,,\ 0 < \frac{dg}{dx} < 1 .$$

Ω_1 соҳада (1) тенглама учун Дарбу масалалари баён қилинаётганда $u|_{AC} = \psi(x)$ $\left[u|_{BC} = \varphi(x)\right]$ шарт $u|_{l_1} = \psi(x)$

$\left[u\big|_{l_2}=\varphi(x)\right]$ шарт билан, Гурса масаласида эса $u\big|_{\overline{AC}}=\psi(x)$, $u\big|_{\overline{BC}}=\varphi(x)$ шартлар $u\big|_{l_1}=\psi(x)$, $u\big|_{l_2}=\varphi(x)$ шартлар билан алмаштирилади.

Агар (2.5) тенгламанинг коэффициентлари ва ўнг томони $y\to 0$ да махсусликка эга бўлса, бу тенглама учун Коши ва Коши Гурса масалалари коррект қўйилмаган бўлиши мумкин. Бунда бу тенглама учун қўйилган масала коррект бўлиши учун бошланғич шартларни бошқачароқ, масалан:

$$\lim_{y\to 0}|y|^{\alpha(x)}u(x,y)=\tau_1(x),\ \lim_{y\to 0}|y|^{\beta(x)}u(x,y)=\nu_1(x),$$

$$|u(x,y)|<+\infty,\qquad |u_y(x,y)|<+\infty$$

кўринишларда беришга тўғри келади, бу ерда $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - мусбат функциялар.

3–Мисол. $u_{xx}-yu_{yy}-0{,}5u_y=0$, $y>0$ (2.58)

тенглама учун коррект Коши масаласи қўйинг ва ечинг.

Ечиш. (2.58) тенгламани

$$\xi=x+2y^{1/2},\ \eta=x-2y^{1/2},\qquad u(x,y)=\upsilon(\xi,\eta)$$

алмаштириш ёрдамида $\upsilon_{\xi\eta}=0$ кўринишга келтириш мумкин. Унинг умумий ечими

$$\upsilon(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)$$

кўринишда бўлади. Демак, (2.58) тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y)=f_1\left(x+2y^{1/2}\right)+f_2\left(x-2y^{1/2}\right) \tag{2.59}$$

дан иборатдир. Бундан y бўйича ҳосила оламиз:

$$u_y(x,y)=y^{-\frac{1}{2}}\left(f_1{}'(x+2y^{\frac{1}{2}})-f_2{}'(x-2y^{\frac{1}{2}})\right). \tag{2.60}$$

Бу ифоданинг ўнг томони $y\to 0$ да махсусликка эга бўлганлиги сабабли (2.58) тенглама учун (2.6) бошланғич шарт билан берилган Коши масаласи коррект қўйилмагандир. Шу сабабли (2.58) тенглама учун қўйилган Коши масаласи коррект бўлиши учун (2.6) бошланғич шартларни (2.60) асосан қўйидаги

$$u(x,0)=\tau(x), \quad \lim_{y\to -0} y^{1/2}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x) \qquad (2.61)$$

кўринишида бериш шартдир. Шуни таъкидлаш лозимки, (2.61) шартларга **кўриниши ўзгарган Коши шартлари** дейилади.

(2.59) ва (2.60)ни (2.61) шартларга қўямиз. У ҳолда f_1 ва f_2 функцияларни аниқлаш учун ушбу

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\tau(x), \\ f_1'(x)-f_2'(x)=\nu(x); \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} f_1'(x)+f_2'(x)=\tau'(x), \\ f_1'(x)-f_2'(x)=\nu(x) \end{cases}$$

системани оламиз. Уни ечиб,

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\left(\tau(x)-\tau(0)+f_1(0)+\int_0^x \nu(t)dt\right),$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\left(\tau(x)-\tau(0)+f_2(0)-\int_0^x \nu(t)dt\right)$$

ифодаларга эга бўламиз. Буларни (2.59)га қўйиб, $u(0,0)=f_1(0)+f_2(0)=\tau(0)$ ни ҳисобга олиб қуйидагини

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\tau\left(x+2y^{1/2}\right)+\frac{1}{2}\tau\left(x-2y^{1/2}\right)+\frac{1}{2}\int_{x-2y^{1/2}}^{x+2y^{1/2}}\nu(t)dt$$

ҳосил қиламиз. Бу эса (2.58), (2.61) Коши масаласининг ечимидир.

Худди шу каби юқори тартибли тенгламалар учун ҳам турли масалалар қўйилади.

Мустақил ечиш учун масалалар

I. $u_{xx}-u_{yy}=0$ тор тебраниш тенгламаси учун қўйилган қуйидаги масалаларни ечими топилсин.

317. $u(x,0)=\varphi(x)$, $0\le x\le 2a$, $u(x,x)=\psi(x)$, $0\le x\le a$, $\varphi(0)=\psi(0)$.

318. $u(0,y)=\sin y$, $0\le y\le 1$, $u(y,y)=0$, $0\le y\le 2$.

319. $u(0,y)=y^2$, $0\le y\le 4$, $u(y,y)=y^3$, $0\le y\le 2$.

320. $u(x,0)=\varphi(x)$, $0\le x\le \frac{4}{3}$, $u\left(x,\frac{x}{2}\right)=\psi(x)$, $0\le x\le \frac{2}{3}$, $\varphi(0)=\psi(0)$.

321. $u(x,0)=\sin x$, $u\left(x,\frac{x}{4}\right)=x$, $x\ge 0$.

322. $u(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1;\ u\left(x,x^2/4\right)=x^3,\ 0\le x\le 1.$

323. $u(x,0)=\varphi(x),\ u[x,\tau(x)]=\psi(x), 0\le x\le 1, \varphi(0)=\psi(0),\ 0<\frac{d\tau}{dx}<1.$

324. $u(x,-0;\,0,25x)=x,\ u(x;0,25x)=x,\ x\ge 0.$

325. $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi(x),\ u(x,x)=\psi(x),\ x\ge 0.$

326. $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi(x),\ u(x,x-1)=\psi(x),\ x\le 1.$

327. $u(x,x)=\varphi(x),\ \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{y=-x}=\psi(x),\ 0\le x<\infty.$

328. $u(x,x)=\varphi(x),\ \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{y=x}=\psi(x),\ 0\le x<\infty.$

II. $u_{xx}-u_{yy}=0$ тенгламанинг $\Omega=\{(x,y):-x<y<x-1, x>0\}$ соҳад регуляр $\overline{\Omega}$ да узлуксиз ва куйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

329.
$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1;$$
$$\alpha(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+\beta(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{1+x}{2},\frac{x-1}{2}\right)=\gamma(x),\ 0<x<1.$$

330.
$$u_y(x,0)=\nu(x),\ 0<x<1;$$
$$\alpha(x)u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+\beta(x)u\left(\frac{1+x}{2},\frac{x-1}{2}\right)=\gamma(x),\ 0\le x\le 1.$$

331. $u_{xx}-u_{yy}=0$ тенглама учун Дарбунинг биринчи масалас Асгейрссон принципидан фойдаланиб ечилсин.

332. Тор тебраниш тенгламаси ечимининг Ω характеристик тўртбурчак чегарасида берилган қиймати бўйича бу тенгламанин Ω да регуляр ва $\overline{\Omega}$ да узлуксиз бўлган ечимини топиш ҳақидаг масала коррект бўладими?

333. $u_{xx}-u_{yy}=0$ тенглама ечимини $x-y=0$ ҳарактеристикад берилган ўзининг ва $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ нормал ҳосиласинин киймати орқали бир кийматли топиб бўлмаслигини исботланг.

134. k нинг қандай қийматида $u_{xx}-u_{yy}=0$ тенглама учун $y=kx$ тўғри чизиқда бошланғич шартлар берилган Коши масаласи коррект бўлади?

135. φ_0 ва φ_1 нинг қандай қийматларида $u_{xx}-u_{yy}=0$ тенглама учун $s=\{(x,y):x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ \varphi_0\le\varphi\le\varphi_1\}$ ёйда бошланғич шартлар берилган Коши масаласи коррект бўлади?

136. Ушбу $y^2u_{xx}+yu_{yy}+0,5u_y=0$ тенгламанинг $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_y(x,0)=\psi(x)$, $0<x<1$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масала коррект эмаслиги исботлансин.

137. Ушбу $y^2u_{yy}+yu_{xx}+0,5u_y=0$ тенгламанинг $u(x,0)=\tau(x)$, $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{-1/2}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x)$, $0<x<1$ шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

138. Ушбу $u_{xx}-yu_{yy}-0,5u_y=0$ $y>0$ тенгламанинг қуйида берилган шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$\text{а) } u(x,0)=\tau(x),\qquad 0<x<1,\ \left|\lim_{y\to+0}u_y\right|<\infty;$$

$$\text{б) } u(x,0)=\sin x,\qquad \lim_{y\to-0}y^{1/2}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

139. Ушбу $u_{yy}-(-y)^m u_{xx}+\dfrac{m}{2}(-y)^{\frac{m}{2}-1}u_x=0$ тенглама учун

$$u(x,y)\big|_{AC}=\varphi(x),\ 0\le x\le\frac{1}{2},\quad \lim_{y\to0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x),\ 0<x<1$$

шартлар билан берилган Коши-Гурса масаласи коррект эмаслиги исботлансин, бу ерда

$AC: x-\dfrac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0$, $\varphi(x),\nu(x)-$ берилган функциялар.

140. Ушбу $u_{yy}-(-y)^m u_{xx}+\dfrac{m}{2}(-y)^{\frac{m}{2}-1}u_x=0$ тенглама учун

$$u(x,y)\big|_{BC}=\psi(x),\ 0,5\le x\le1,\quad \lim_{y\to0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x),\ 0<x<1$$

шартлар билан берилган Коши-Гурса масаласи коррект эмаслиги исботлансин, бу ерда

$BC: x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$, $\psi(x)$, $\nu(x)$ – берилган функциялар.

341. Ушбу $u_{xx}-2u_{xy}+4e^{x}=0$ тенглама учун $u\big|_{x=0}=\sin y$, $u\big|_{x=-0,5y}=y$ шартлар билан берилган Коши-Гурса масаласини ечинг.

342. Ушбу $u_{xy}+u_{x}=1$, $0<y<x$ тенглама учун $u\big|_{y=0}=x^{2}$, $u_{y}\big|_{y=x}=\sin x$ шартлар билан берилган Коши-Гурса масаласини ечинг.

343. Ушбу $u_{xx}-u_{yy}+2u_{x}+2u_{y}=0$, $0<y<x$ тенглама учун $u_{y}\big|_{y=0}=0$, $u\big|_{y=x}=x$ шартлар билан берилган Коши-Гурса масаласини ечинг.

344. Ушбу $\frac{\partial^{3}u}{\partial x^{3}}-\frac{\partial^{3}u}{\partial y^{3}}=0$ тенгламанинг берилган шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

а) $u(0,y)=\varphi_{1}(y), u_{x}(0,y)=\varphi_{2}(y), \quad u_{xx}(0,y)=\varphi_{3}(y)$.

б) $u(x,0)=\varphi_{1}(x), \quad u_{y}(x,0)=\varphi_{2}(x), u_{yy}(x,0)=\varphi_{3}(x)$.

345. Ушбу $\frac{\partial^{3}u}{\partial x^{3}}-(a+b+c)\frac{\partial^{3}u}{\partial x^{2}\partial y}+(ab+ac+bc)\frac{\partial^{3}u}{\partial x\partial y^{2}}-abc\frac{\partial^{3}u}{\partial y^{3}}=0.$

тенгламанинг $u(x,0)=\varphi_{1}(x), u_{t}(x,0)=\varphi_{2}(x), u_{tt}(x,0)=\varphi_{3}(x)$ шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

346. Ушбу $\frac{\partial^{4}u}{\partial x^{4}}-2\frac{\partial^{4}u}{\partial x^{2}\partial y^{2}}+\frac{\partial^{4}u}{\partial y^{4}}=0$ тенгламанинг берилган шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

а) $u(x,0)=\tau(x), u_{y}(x,0)=0, \; u_{yy}(x,0)=0, \; u_{yyy}(x,0)=0$.

б) $u(x,x)=\tau_{1}(x), \; u(x,-x)=\tau_{2}(x), \; \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{y=-x}=\tau_{3}(x),$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{y=x}=\tau_{4}(x), x\geq 0; \; \tau_{1}(0)=\tau_{2}(0), \; \tau_{1}'(0)=\tau_{2}'(0),$$

$$\tau_{2}'(0)=\tau_{3}(0)=\tau_{4}(0), \; \tau_{3}'(0)=\tau_{4}'(0).$$

4-§. Тор тебранишли тенгламаси учун Коши масаласини ечишда Фурье интегралини қўллаш

4.1-Таъриф. Агар $f(x)$ функция $(-\infty,+\infty)$ да абсолют интегралланувчи бўлиб, OX ўқининг исталган чекли $[-l,l]$ кесмасида силлиқ бўлакли бўлса, у ҳолда $f(x)$ нинг ушбу

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi \tag{2.62}$$

кўринишдаги **Фурье интеграли** мавжуд [5], [15].

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad -\infty<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty \tag{2.63}$$

тенгламанинг ечими (2.62) кўринишда излаймиз, яъни

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}U(\xi,t)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi. \tag{2.64}$$

(2.64) ни (2.63)га қўйиб

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{U_{tt}+a^2\lambda^2U\right\}e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi=0 \tag{2.65}$$

ҳосил қиламиз.

(2.65) тенглик ўринли бўлиши учун

$$\frac{d^2U(t,\xi)}{dt^2}+a^2\lambda^2U(t,\xi)=0 \tag{2.66}$$

бўлиши етарлидир.

(2.66) оддий дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$U(\xi,t)=A(\xi)e^{ia\lambda t}+B(\xi)e^{-ia\lambda t}, \tag{2.67}$$

бу ерда $A(\xi)$ ва $B(\xi)$ - ξ параметрнинг ихтиёрий функциялари.

(2.67)ни (2.64)га қўйиб, (2.62) га асосан тенгламанинг умумий ечимини оламиз:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A(\xi)e^{i\lambda(x+at-\xi)}+B(\xi)e^{i\lambda(x-at-\xi)}\right]d\xi=$$

$$=A(x+at)+B(x-at). \tag{2.68}$$

Худди шундай (2.62) Фурье интегралини тор тебраниш тенгламаси учун турли хил масалаларни ечишда қўллаш мумкин.

1. $(-\infty,+\infty)$да аниқланган $f(x)$ функциянинг Фурье алмаштириши.

4.2-Таъриф. 4.1– таърифдаги шартларни қаноатлантирувчи $f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$ функция учун ушбу

$$\overline{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \tag{2.69}$$

кўринишдаги Фурье интеграли мавжуд бўлиб, у $f(x)$ функциянинг **Фурье алмаштириши** дейилади [5].

(1) формулага асосан $f(x)$ нинг оригиналига ўтиш

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \tag{2.70}$$

формула орқали амалга оширилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, (2.69) ва (2.70) формулалар ўзаро тескари алмаштиришлардир.

2. $(0,+\infty)$да аниқланган $f(x)$ функциянинг Фурье алмаштириши.

4.3-Таъриф. 4.1–таърифдаги шартларни қаноатлантирувчи $f(x)$, $x\in(0,+\infty)$ функция учун ушбу

$$\overline{f_c}(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(\xi)cos\,\lambda\,\xi\,d\xi \tag{2.71}$$

ва

$$\overline{f_s}(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(\xi)sin\,\lambda\,\xi\,d\xi \tag{2.72}$$

кўринишдаги Фурье интеграллари мавжуд бўлиб, улар $f(x)$ функциянинг мос равишда **косинус ва синус алмаштиришлари** дейилади.

(2.71) ва (2.72) формулаларнинг оригиналига ўтиш мос равишда

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_{0}^{+\infty}\overline{f_c}(\lambda)cos\lambda x\,d\lambda \tag{2.73}$$

ва

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{+\infty}\overline{f}_s(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda \tag{2.74}$$

формулалар орқали амалга оширилади.

1–Мисол. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ -\infty<x<+\infty,\ t>0$ (2.75)

тенгламанинг

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad -\infty<x<+\infty \tag{2.76}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. (2.64) формулани (2.75) ва (2.76) қўйиб, (2.62) га кўра

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,t)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi \tag{2.77}$$

формулани ҳисобга олиб

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2U}{dt^2}+a^2\lambda^2U=f(\xi,t)\\[2ex] U(\xi,0)=0,\qquad \dfrac{dU(\xi,0)}{dt}=0\end{array}\right| \tag{2.78}$$

ҳосил қиламиз.

(2.78) масаланинг ечими

$$U(\xi,t)=\frac{1}{a\lambda}\int\limits_{0}^{t}f(\xi,\tau)\sin a\lambda(t-\tau)d\tau \tag{2.79}$$

кўринишда бўлади.

(2.79) ни (2.64) га қўйиб, (2.77) ва $\sin\varphi=\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)/2i$ формулаларга асосан қуйидаги ечимни оламиз:

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\lambda}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi\int\limits_{0}^{t}f(\xi,\tau)\sin a\lambda(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{4a\pi}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\lambda}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda i\xi}f(\xi,\tau)\left[e^{i\lambda(x+a(t-\tau))}-e^{i\lambda(x-a(t-\tau))}\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{4a\pi}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda i\xi}f(\xi,\tau)d\xi\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)}e^{i\lambda\mu}d\mu=$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}d\mu\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda(\mu-\xi)}f(\xi,\tau)d\xi\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\mu,\tau)d\mu$$

Демак, (2.75), (2.76) Коши масаласининг ечими

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\mu,\tau)d\mu$$

кўринишда бўлади.

2–Мисол. $u_{tt}=a^2u_{xx}\quad -\infty<x<+\infty,\ 0<t<+\infty$ (2.80)

тенгламанинг

$$u(0,t)=0,\quad 0<t<+\infty \tag{2.81}$$

$$u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<+\infty \tag{2.82}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. (2.80) тенгламани ва (2.82) шартни иккала томонини $\sqrt{2}\cdot sin\lambda\xi/\sqrt{\pi}$ га кўпайтириб, ξ бўйича 0 дан $+\infty$ гача интеграллаб, қуйидаги масалани ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^2U_s(\lambda,t)}{dt^2}+a^2\lambda^2U_s(\lambda,t)=0, \tag{2.83}$$

$$U_s(\lambda,t)\Big|_{t=0}=\bar{f}_s(\lambda),\qquad \frac{dU_s}{dt}\Big|_{t=0}=\bar{\psi}_s(\lambda), \tag{2.84}$$

бу ерда

$$U_s(\lambda,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}u(\xi,t)\cdot sin\,\lambda\,\xi\,d\xi,$$

$$\bar{f}_s(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}f(\xi)\cdot sin\,\lambda\xi\,d\xi,\ \bar{\psi}_s(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\psi(\xi)\cdot sin\,\lambda\xi d\xi.$$

(2.83) тенгламани (2.84) бошланғич шарт асосида ечиб, қуйидаги ечимни оламиз:

$$U_s(\lambda,t)=\bar{f}_s(\lambda)cos\,a\lambda t+\bar{\psi}_s(\lambda)\frac{sin\,a\lambda t}{a\lambda} \tag{2.85}$$

(2.85) формулани иккала томонини $\sqrt{2}\cdot\sin\lambda x/\sqrt{\pi}$ га кўпайтириб, λ бўйича 0 дан $+\infty$ гача интеграллаймиз:

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}U_s(\lambda,t)\sin\lambda x d\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\bar{f}_s(\lambda)\cos a\lambda t\cdot\sin\lambda x d\lambda+$$

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\bar{\psi}_s(\lambda)\sin a\lambda t\cdot\sin\lambda x d\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\bar{f}_s(\lambda)\left[\sin\lambda(x+at)+\right.$$

$$\left.+\sin\lambda(x-at)\right]d\lambda+\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\bar{\psi}_s(\lambda)\frac{\cos\lambda(x-at)-\cos\lambda(x+at)}{\lambda}d\lambda,$$

бу ерда $x>at$. Бундан ва қуйидаги

$$\int_{x-at}^{x+at}\psi(\mu)d\mu=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\bar{\psi}_s(\lambda)d\lambda\int_{x-at}^{x+at}\sin\lambda\mu d\mu=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\bar{\psi}_s(\lambda)\frac{\cos\lambda(x-at)-\cos\lambda(x+at)}{\lambda}d\lambda,$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\bar{f}_s(\lambda)\sin\lambda(x\pm at)d\lambda=f(x\pm at)$$

формулаларни эътиборга олиб, $x\geq at$ да

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\mu)d\mu \qquad (2.86)$$

ҳосил қиламиз.

Агар $x\leq at$ бўлса, у ҳолда синус ва косинусларнинг $x-at$ аргументини $at-x$ га алмаштириб қуйидагича ечимни оламиз:

$$u(x,t)=\frac{f(at+x)-f(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\psi(\mu)d\mu \qquad (2.87)$$

(2.86) ва (2.87) ечимларни бирлаштириб, (2.80), (2.81), (2.82) масаланинг ечимини оламиз:

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+sign(x-at)f(|x-at|)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{|x-at|}^{x+at}\psi(z)dz.$$

Гиперболик типдаги тенгламалар учун қўйилган Коши ва бошқа масалаларни ечишда **Лаплас**

$$U(x,p)=\int_{0}^{+\infty}u(x,t)e^{-pt}dt \quad \text{ёки} \quad u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U(x;a+i\,p)e^{(a+i\,p)t}dp,\ a>\xi>0$$

ва

$$U(\lambda,t)=\int_{0}^{+\infty}\rho u(\rho,t)J_0(\lambda\rho)d\rho \quad \text{ёки} \quad u(\rho,t)=\int_{0}^{+\infty}\lambda U(\lambda,t)J_0(\lambda\rho)d\lambda$$

Ханкел алмаштиришлардан ҳам фойдаланиш мумкин, бу ерда $J_0(z)-$ нолинчи тартибли биринчи тур Бессел функцияси [2. Том 2]. Бу ҳақидаги тўлиқ малумотларни [15], [3], [5] адабиётлардан топиш мумкин.

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги масалаларни Фурье интегралини қўллаб ечинг.

347. $u_{tt}=a^2u_{xx}+c^2u,\quad -\infty<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty,$
$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\quad -\infty<x<+\infty$

348. $u_{tt}=a^2u_{xx}+c^2u+f(x,t),\ -\infty<x<+\infty,\ 0<t<+\infty,$
$u(x,0)=u_t(x,0)=0,\quad -\infty<x<+\infty.$

349. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x,\ t<+\infty,\ u_x(0,t)=0,\ 0<t<+\infty,$
$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0<x<+\infty.$

350. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x,\ t<+\infty,\ u(0,t)=\mu(t),\ 0<t<+\infty,$
$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0<x<+\infty.$

351. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x,\ t<+\infty,\ u_x(0,t)=\nu(t),\ 0<t<+\infty,$
$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0<x<+\infty.$

352. $u_{tt}=u_{xx}+c^2u,\ 0<x,\ t<+\infty,u_x(0,t)=\nu(t),\ 0<t<+\infty,$
$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0<x<+\infty.$

353. $u_{tt}=u_{xx}+c^2u,\ 0<x,\ t<+\infty,u(0,t)=\mu(t),\ 0<t<+\infty,$
$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0<x<+\infty.$

354. Агар $\overline{f}(\lambda)$ ва $\overline{g}(\lambda)$ функциялар мос равишда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг $e^{i\lambda\xi}$ ядроли Фурье алмаштиришлари (образи) бўлса, у ҳолда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda)\overline{g}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s-x)g(s)ds$$

тенгликни ўринли бўлишини исботланг.

355. a) Агар $\overline{f}_c(\lambda)$ ва $\overline{g}_c(\lambda)$ функциялар мос равишда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг косинус - образлари бўлса, у ҳолда

$$\int_{0}^{+\infty} \overline{f}_c(\lambda)\overline{g}_c(\lambda)\cdot cos\ \lambda x d\lambda = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} g(s)\left[f\left(|s-x|\right)+f(s+x)\right]ds$$

тенгликни ўринли бўлишини исботланг.

b) Агар $\overline{f}_s(\lambda)$ ва $\overline{g}_c(\lambda)$ функциялар мос равишда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг синус ва косинус – образлари бўлса, у ҳолда

$$\int_{0}^{+\infty} \overline{f}_s(\lambda)\overline{g}_c(\lambda)\cdot sin\ \lambda x d\lambda = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} f(s)\left[g\left(|s-x|\right)-g(s+x)\right]ds$$

тенгликни ўринли бўлишини исботланг.

356. **1.** Қуйидаги масалаларни

a) $u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

b) $u_{tt} = a^2u_{xx} + f\left(x,t\right), \ -\infty < x < +\infty, \ 0 < t < +\infty,$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Фурье алмаштиришлари ёрдамида ечинг.

2. Қуйидаги масалаларни

a) $u_{tt} = u_{xx}, \ 0 < x, \ t < +\infty,$

$$u\left(0,t\right) = \varphi(t), \quad u(+\infty,t) = 0, \ 0 < t < +\infty,$$

$$u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0, \ 0 < x < +\infty;$$

b) $u_{tt} = a^2u_{xx} + 2bu_t + c^2u, \ 0 < x, \ t < +\infty,$

$$u\left(0,t\right) = \varphi(t), \quad u(+\infty,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0, \ 0 < x < +\infty;$$

c) $u_{tt} = a^2u_{xx}, \ 0 < x, \ t < +\infty,$

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=\varphi(t),\quad u(+\infty,t)=0,\quad 0<t<+\infty,$$
$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0<x<+\infty$$

Лаплас алмаштиришлари ёрдамида ечинг.

3. Қуйидаги масалаларни

a) $u_{tt}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right),\quad 0<\rho,t<+\infty,$

$$u(\rho,0)=\frac{A}{\sqrt{1+\rho^2}},\quad u_t(\rho,0)=0,\quad 0\le\rho<+\infty,\quad A=const;$$

b) $\Delta u(\rho,z)\equiv\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\quad 0<\rho,t<+\infty,$

$$u(\rho,0)=f(\rho),\quad u(\rho,+\infty)=0,\quad 0\le\rho<+\infty,$$
$$u(+\infty,z)=0,\quad u_\rho(+\infty,z)=0,\quad z>0$$

Ханкел алмаштиришлари ёрдамида ечинг.

5-§. Ярим чегараланган тор тебраниш тенгламаси учун масалалар. Давом эттириш усули

Ярим чегараланган торнинг эркин тебранишига торнинг бошланғич ҳолати ва бошланғич тебраниш тезлигидан ташқари унинг чегараланган учида содир бўлаётган жараён ҳам таъсир қилади. Бу – математик тилда ярим чегараланган тор тебранишини ўрганиш учун бошланғич шартлардан ташқари чегаравий шартлар ҳам берилиши зарурлигини билдиради. Ярим чегараланган тор тебраниш тенгламаси учун қўйилган бундай шартли масалалар аралаш масалалар ёки бошланғич – чегаравий масалалар дейилади.

Ярим чегараланган тор эркин тебраниш тенгламаси учун аралаш масалалар қуйидагича баён қилинади:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}\qquad (a>0),\ x>0,\quad t>0 \tag{2.88}$$

тенгламанинг $Q=\{(x,t):x\ge 0,\ t\ge 0\}$ соҳада аниқланган, узлуксиз ва

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\ x\ge 0 \tag{2.89}$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$u\big|_{x=0}=\mu(t),\quad t\ge 0; \tag{2.90$_1$}$$
$$u_x\big|_{x=0}=\mu(t),\ t\ge 0; \tag{2.90$_2$}$$

$$(u_x - \alpha u)\big|_{x=0} = \mu(t),\ t \geq 0 \qquad (2.90_3)$$

шартлардан бирини қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Бу ерда $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu(t)$ берилган функциялар, α - берилган сон.

Одатда (2.90_1), (2.90_2), (2.90_3)лар мос равишда **I, II, III чегаравий шартлар** дейилади, уларга мос равишда ўрганилаётган масала ҳам **I, II, III аралаш масала** деб аталади[5],[15],[19].

Аралаш масаланинг ечими мавжуд бўлиши учун берилган бошланғич ва чегаравий функциялар $O(0,0)$ нуқтада маълум мувофиқлаштириш шартларини бажариши керак. Масалан, I чегаравий масала учун бу шартлар қуйидагича:

$$\mu(0) = \varphi(0)\ \left[= u(0,0)\right], \qquad \mu'(0) = \psi(0)\ \left[= u_t(0,0)\right],$$

$$\mu''(0) = a^2\varphi''(0)\ \left[u_{tt}(0,0) = a^2 u_{xx}(0,0)\right].$$

Аралаш масалаларни ечишда қуйидаги икки лемма муҳим ўрин тутади.

5.1-Лемма. Агар $-\infty < x < +\infty$да аниқланган $\Phi(x)$ ва $\Psi(x)$ функциялар бирор x_0 нуқтага нисбатан тоқ бўлса,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad (a>0),\ -\infty < x < +\infty,\ \ t>0 \qquad \textbf{(A)}$$

$$u\big|_{t=0} = \Phi(x),\ x \geq 0;\ u_t\big|_{t=0} = \Psi(x),\ x>0 \qquad \textbf{(B)}$$

масаланинг ечими x_0 нуқтада нолга тенг бўлади.

5.2-Лемма. Агар $-\infty < x < +\infty$ да аниқланган $\Phi(x)$ ва $\Psi(x)$ функциялар бирор x_0 нуқтага нисбатан жуфт бўлса, (A), (B) масала ечимининг x бўйича ҳосиласи x_0 нуқтада нолга тенг бўлади.

Бу леммаларнинг исботи **(A), (B)** масала ечимини аниқловчи

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\,d\xi \qquad \textbf{(D)}$$

Даламбер формуласидан келиб чиқади[5],[19].

5.1-леммадан фойдаланиб,(2.88) тенгламанинг (2.89) ва

$$u\big|_{x=0} = 0 \qquad (2.91)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам, бу ерда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларни $-\infty < x < 0$ оралиққа тоқ давом эттириб,

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0,\\ -\varphi(-x), & x<0,\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0,\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}$$

белгилашлар киритсак, **(D)** формула билан аниқланган $u(x,t)$ функция $\{(x,t):\ -\infty<x<+\infty,\ t\geq 0\}$ соҳада **(A)**, **(B)** масаланин ечими бўлади.

5.1- леммага асосан, бу функция учун $u(0,t)=0$ тенглик бажарилади. Бундан ташқари $t=0$ ва $x>0$ да

$$u(x,0)=\Phi(x)=\varphi(x),\ x>0;\ \ u_t(x,0)=\Psi(x)=\psi(x),\ x>0$$

тенгликлар ҳосил бўлади.

Демак, **(D)** формула $x\geq 0$, $t\geq 0$ да (2.88), (2.89), (2.91) масал ечимини аниқлайди. Агар бу формулада $\varphi(x)$ ва $\psi($ функцияларга қайтсак, (2.88), (2.89), (2.91) масаланинг ечими

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds, & t<\dfrac{x}{a},\ x>0,\\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)\right]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & t>\dfrac{x}{a},\ x>0\end{cases}\qquad \textbf{(E)}$$

формула билан аникланиши келиб чиқади.

Энди (2.88) тенгламанинг

$$u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=0,\ u\big|_{x=0}=\mu(t)\qquad (2.92$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топайлик.

(2.88) тенгламанинг умумий ечимини аниқловчи

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)\qquad \textbf{(Y)}$$

формуладан бошланғич шартларга асосан келиб чиқадики, агар $x>at$ бўлса, $f(z)\equiv g(z)\equiv 0$ бўлиб, $u(x,t)\equiv 0$ бўлади. Агар $0<x<at$ бўлса, $x+at>0$ бўлиб, $g(z)\equiv 0$ бўлади ва натижада (Y) тенглик

$$u(x,t)\equiv f(x-at)\qquad (2.93)$$

кўринишни олади. Бу ердаги $f(x)$ номаълум функция чегарави шартдан топилади:

$$u(0,t)=f(-at)=\mu(t),\ t>0 \text{ ёки } f(\xi)=\mu\left(-\frac{\xi}{a}\right),\xi<0.\qquad (2.94)$$

Демак, (2.93) ва (2.94)га асосан, (2.88), (2.92) масаланин ечими $0<x<at$ бўлганда

$$u(x,t)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right) \tag{2.95}$$

формула билан аниқланади.

(2.95) формула $x-at>0$ бўлганда ҳам (2.88), (2.92) масаланинг ечимини бериши учун $\mu(t)$ функцияни $t<0$ да нол деб давом эттириш керак. У ҳолда

$$H(t)=\begin{cases}\mu(t), & t>0;\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

белгилаш киритсак, (2.88), (2.92) масала ечимини

$$u(x,t)=H\left(t-\frac{x}{a}\right),\ \ x\ge 0,\ \ t\ge 0,$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Юқоридагилардан келиб чиқадики, I аралаш масаланинг ечими $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$ тенглик билан аниқланади, бу ерда $u_1(x,t)$ - (2.88), (2.89), (2.91) масаланинг ечими, $u_2(x,t)$ эса (2.88), (2.92) масаланинг ечими.

Мисол. Ярим чегараланган $(0<x<+\infty)$ тор $x=0$ нуқтаға маҳкамланган бошланғич вақтда тор

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[l,3l],\\ x-l, & x\in[l,2l],\\ 3l-x, & x\in[2l,3l]\end{cases}$$

функция графиги кўринишга эга. Тор бошлангич тебраниш тезлигига эга эмас. Торнинг $t_k=k\,l/4a$ $(k=0,2,4)$ вақтдаги кўриниши чизилсин.

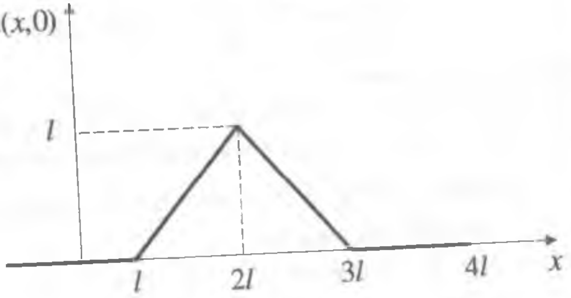
Ечиш. Торнинг тебранишини аникловчи функцияни $u(x,t)$ билан белгиласак, унинг учи $x=0$ нуктага маҳкамлангани учун $u(0,t)=0$ ва бошланғич тезликка эга бўлмагани учун $u_t\big|_{t=0}=0$ бўлади. Демак, бу ерда $u_{tt}=a^2u_{xx}$ $(x>0,t>0)$ тенгламанинг $u(0,t)=0$, $t\ge 0;$ $u(x,0)=\varphi(x)$, $x\ge 0;$ $u_t\big|_{t=0}=0$, $x>0$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масалага эгамиз. (E) формулага асосан масала ечими

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right], & x\ge at,\\ \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)\right], & 0\le x<xt\end{cases}\qquad(2.96)$$

формула билан аниқланади.

1. $t=t_0=0$ бўлсин. У ҳолда $x\ge 0$ бўлиб, (2.96) формулага асосан

$$u(x,0)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)+\varphi(x)\right]=\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[l,3l];\\ x-l, & x\in[l,2l];\\ 3l-x, & x\in[2l,3l].\end{cases}\qquad(2.97)$$



5.1-чизма

2. $t=t_2=l/2a$ бўлсин. У ҳолда ечим (2.97) формулага кўра

$$u\left(x,\frac{l}{2a}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+\frac{l}{2}\right)+\varphi\left(x-\frac{l}{2}\right)\right], & x\ge\frac{l}{2};\\ \frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+\frac{l}{2}\right)-\varphi\left(\frac{l}{2}-x\right)\right], & 0\le x<\frac{l}{2}\end{cases}\qquad(2.98)$$

каби аниқланади.

а) $0\le x<\frac{l}{2}$ бўлганда $\frac{l}{2}\le x+\frac{l}{2}\le l$, $0\le\frac{l}{2}-x\le\frac{l}{2}$ бўлади. Шунин

учун (2.97) га асосан $\varphi\left(x+\frac{l}{2}\right)=0$, $\varphi\left(\frac{l}{2}-x\right)=0$. У ҳолда (2.98) га

асосан $u\left(x,\frac{l}{2a}\right)\equiv 0$;

б) $\frac{l}{2}\le x\le\frac{3l}{2}$ бўлганда $l\le x+\frac{l}{2}\le 2l$, $0\le x-\frac{l}{2}\le l$ бўлади. У ҳолда

(2.97) га асосан $\varphi\left(x+\frac{l}{2}\right)=\left(x+\frac{l}{2}\right)-l=x-l/2, \varphi\left(x-\frac{l}{2}\right)\equiv 0$. Шунинг учун (2.98) асосан, $u\left(x,\frac{l}{2a}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)+0\right]=\frac{1}{2}\left(x-\frac{l}{2}\right);$

в) $\frac{3l}{2}\le x\le\frac{5l}{2}$ бўлганда $2l\le x+\frac{l}{2}\le 3l$ бўлади.Шунинг учун (2.97) га асосан $\varphi\left(x+\frac{l}{2}\right)=3l-\left(x+\frac{l}{2}\right)=\frac{5l}{2}-x$,

$\varphi\left(x-\frac{l}{2}\right)=\left(x-\frac{l}{2}\right)-l=x-\frac{3l}{2}$. У ҳолда (2.98) га асосан

$$u\left(x,\frac{l}{2a}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{5l}{2}-x\right)+\left(x-\frac{3l}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}l\,.$$

г) $\frac{5l}{2}\le x\le\frac{7l}{2}$ бўлганда $3l\le x+\frac{l}{2}\le 4l\,, 2l\le x-\frac{l}{2}\le 3l$ бўлиб, (2.97) га асосан $\varphi\left(x+\frac{l}{2}\right)\equiv 0$, $\varphi\left(x-\frac{l}{2}\right)=3l-\left(x-\frac{l}{2}\right)=\frac{7l}{2}-x$. У ҳолда (2.98) га асосан $u\left(x,\frac{l}{2a}\right)=\frac{1}{2}\left[0+\left(\frac{7l}{2}-x\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{7l}{2}-x\right);$

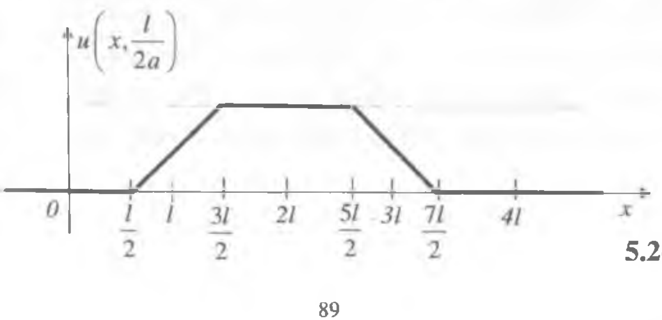
д) $\frac{7l}{2}\le x$ бўлганда $x+\frac{l}{2}\ge 4l$, $x-\frac{l}{2}\ge 3l$ бўлиб, (2.97) га асосан

$$\varphi\left(x+\frac{l}{2}\right)\equiv\varphi\left(x-\frac{1}{2}\right)\equiv 0\,.\text{ Демак, } u\left(x,\frac{l}{2a}\right)\equiv 0\,.$$

Юқоридагиларга асосан:

$$u\left(x,\frac{l}{2a}\right)=\begin{cases} 0, \quad \text{агар} \quad 0\le x\le\frac{l}{2}; & \frac{1}{2}\left(x-\frac{l}{2}\right), \quad \text{агар} \quad \frac{l}{2}\le x\le\frac{3l}{2}; \\ \frac{1}{2}l, \quad \text{агар} \quad \frac{3l}{2}\le x\le\frac{5l}{2}; & \frac{1}{2}\left(\frac{7l}{2}-x\right), \quad \text{агар} \quad \frac{5l}{2}\le x\le\frac{7l}{2}; \\ 0, \quad \text{агар} \quad \frac{7l}{2}\le x. & \end{cases}$$

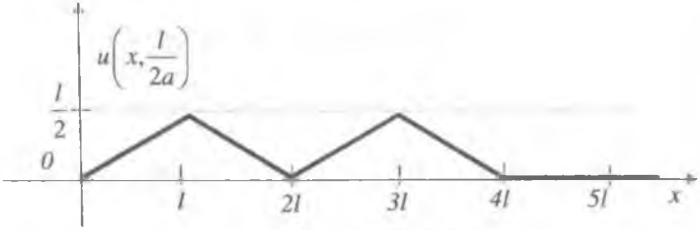
Демак, бу ҳолда тор 5.2 - чизмадаги кўринишга эга бўлади.



5.2-чизма

3. Худди шу каби $t = t_4 = \dfrac{l}{a}$ да

$$u\left(x, \frac{l}{2a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & агар \quad 0 \le x \le l; \quad l - \frac{1}{2}x, \quad агар \quad l \le x \le 2l; \\ \frac{1}{2}x - l, & агар \quad 2l \le x \le 3l; \quad 2l - \frac{1}{2}x, \quad агар \quad 3l \le x \le 4l; \\ 0, & агар \quad 4l \le x. \end{cases}$$



5.3- чизма

II ва **III** аралаш масалалар ечимлари ҳам худди шу усулд топилади. Бунда **II** бир жинсли чегаравий шарт олинганд бошланғич функциялар $-\infty < x < 0$ га жуфт давом эттирилади, III бир жинсли чегаравий шарт олинганда эса тоқ давом эттирилади.

Бир жинсли бўлмаган **II** ва **III** чегаравий шарт олинганд $f(\xi)$ га нисбатан биринчи тартибли оддий дифференциал тенглам ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг ягона ечими $u(x,t)$ функциянин $x - at = 0$ характеристикада узлуксизлигидан фойдалан топилади.

Агар (2.88) тенглама ўрнига

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{2.99}$$

бир жинсли бўлмаган тенглама берилган бўлса, аввал (2.99) тенгламанинг бирор $w(x,t)$ хусусий ечими топилиб, сўнгра масал ечимини $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ кўринишда қидириш керак. Бунд $v(x,t)$ янги номаълум функция учун (2.88), (2.89), (2.90$_1$) (ёки (2.90$_2$) ёки (2.90$_3$)) кўринишдаги янги масала ҳосил бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар

157. Қандай A ва ω ўзгармас сонлар учун

$$u_{tt}=u_{xx},\ u\big|_{x=0}=\cos\omega t,\ u\big|_{t=0}=Ae^{-x^2},\ u_t\big|_{t=0}=0$$

масаланинг ечими мавжуд бўлади. Шу ечим топилсин.

158. Чегараланмаган $(0<x<\infty)$ тор $x=0$ нуқтага маҳкамланган. Бошланғич вақтда тор

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[h,2h],\\ 4(x-2h)(x-h), & x\in[h,2h]\end{cases}$$

функция графиги кўринишга эга. Тор бошланғич тебраниш тезлигига эга эмас. Торнинг $t_k=kh/4a$ $(k=0,2,4)$ вақтдаги кўриниши чизилсин.

159. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ x>0,\ t>0;$

$$u_x(0,t)=0,\ t>0;\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x>0$$

масаланинг ечими топилсин.

160. Ярим чегараланган тор учун қўйилган қуйидаги аралаш масала ечимининг $t_0=0$, $t_1=1{,}5\pi$, $t_2=2{,}5\pi$ вақтдаги графиги чизилсин:

$$u_{tt}=u_{xx},\ x>0,\ y>0;\ u_x\big|_{x=0}=0,\ t>0;$$

$$u\big|_{t=0}=\begin{cases}-\sin x, & \pi<x<2\pi,\\ 0\ , & x\notin(\pi,2\pi),\end{cases}\qquad u_t\big|_{t=0}=0\ .$$

161. Ярим чегараланган $(0<x<+\infty)$ торнинг $x=0$ нуқтадаги учи эркин. Тор бошланғич тебраниш тезлигига эга эмас ва бошланғич вақтда

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\notin[l,3l],\\ (l-x)(x-3l), & x\in[l,3l]\end{cases}$$

функция графиги каби кўринишга эга. Торнинг $t_k=kl/4a$, $(k=0{,}2{,}4)$ вақтдаги кўринишини аниқланг.

162. $u_{tt}=a^2u_{xx},\qquad x>0,\qquad y>0;\qquad u_x\big|_{x=0}=\nu(t),\qquad t>0;$ $u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0,\ x>0$ масала ечими топилсин.

163. $u_{tt}=a^2u_{xx},\ x>0,\ t>0;$

$$(u_x-hu)\big|_{x=0}=X(t),\ t>0,\ h>0;\ u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0,\ x>0$$

масаланинг ечими топилсин.

364. $u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx};\ (u_x-u)\big|_{x=0}=\alpha(t),\ t>0;$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=0,\ x>0$$

масаланинг ечими топилсин.

365. Қандай $\lambda=const$ ва $\varphi(x)$ функция учун

$$u_{tt}=u_{xx},\ (u_t+\lambda u_x)\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=0$$

масаланинг $u(x,t)\in C^2\left(R_+^2\times R_+^2\right)$ ечими мавжуд бўлади, шу ечим топилсин.

366. Чегараланмаган тор учун ушбу Коши масаласи берилган:

$$u_{tt}=u_{xx}+f(x,t),\quad -\infty<x+\infty,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ -\infty<x+\infty.$$

Агар $f(x,t)$ функция x аргументга нисбатан тоқ бўлса $u(x,t)\big|_{x=0}=0$ ва жуфт бўлса $u_x(x,t)\big|_{x=0}=0$ бўлиши исботлансин.

367. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ \ x>0,\ t>0;$

$$u\big|_{x=0}=0,\ t>0;\qquad u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0,\ x>0$$

масаланинг ечими топилсин.

368. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ x>0,\ t>0;$

$$u_x\big|_{x=0}=0,\ t>0;\qquad u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0,\ x>0$$

масаланинг ечими топилсин.

369. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ x>0,\ t>0;$

$$u\big|_{x=0}=0,\ t>0;\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\ x>0$$

масаланинг ечими топилсин.

370. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ x>0,\ t>0;$

$$u_x\big|_{x=0}=0,\ t>0;\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\ x>0$$

масаланинг ечими топилсин.

371. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ x>0,\ t>0;$

$$u\big|_{x=0}=\mu(t),\ t>0;u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\ x>0$$

масаланинг ечими топилсин.

172. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$, $x>0$, $t>0$; $u_x\big|_{x=0}=\nu(t)$, $t>0$;

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\ x>0$$

масаланинг ечими топилсин.

6-§. Чекли оралик учун давом эттириш усули

Чекли $(0,l)$ оралиқ учун аралаш масалалар қуйидагича баён қилинади:

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \qquad 0<x<l,\ \ t>0 \tag{2.100}$$

тенгламанинг $\{\ (x,t):\ 0\le x\le l,\ t\ge 0\}$ соҳада аниқланган, узлуксиз ва

$$u\big|_{x=0}=0,\ \ u\big|_{x=l}=0,\ \ t\ge 0; \tag{2.101}$$

чегаравий ҳамда

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad 0\le x\le l,\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\quad 0<x<l, \tag{2.102}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

(2.100) тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at) \tag{2.103}$$

кўринишда бўлади. (2.103) ни (2.102) шартга қўйиб қуйидагига эга бўламиз:

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(s)ds, \tag{2.104}$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(s)ds. \tag{2.105}$$

(2.104) ва (2.105) формулалардаги $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $0\le x\le l$ оралиқда аниқланган бўлгани учун $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар ҳам шу оралиқда аниқланган бўлади.

Демак, (2.103) формуладан фойдаланиш учун $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларни ёки тўла эквивалент бўлгани сабабли $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларни $0<x<l$ оралиқдан ташқарига давом эттириш зарур бўлади. $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларни давом эттириш учун (2.101) шартдан фойдаланамиз. (2.103) формуланинг ўнг томонига $x=0$ ва $x=l$ ни қўйиб,

$$f_1(-at)+f_2(at)=0, \qquad f_1(l-at)+f_2(l+at)=0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бунда at ни x орқали белгилаб олсак,

$$f_1(-x)=-f_2(x), \qquad f_1(l-x)=-f_2(l+x) \qquad (2.106)$$

тенгликларга эга бўламиз.

Агар (2.106) да $x\in(0,l)$ бўлса, у ҳолда $f_1(x)$ функция $(-l,0)$ оралиқда $f_2(x)$ эса $(l,2l)$ оралиқда аниқланади. Шунингдек,

$$f_2(x+2l)=-f_1(-x)=f_2(x), \quad f_1(x+2l)=f_1(x)$$

яъни $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар даври $T=2l$ тенг.

Шундай қилиб, $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар барча ҳақиқий x лар учун аниқланади. (2.102) бошланғич шартларга кўра,

$$\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x), \qquad \psi(x)=a\left[f_2'(x)-f_1'(x)\right].$$

Булардан дарҳол

$$\varphi(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=-f_2(x)-f_1(x)=-\varphi(x), \quad (2.107)$$

$$\psi(-x)=a\left[f_2'(-x)-f_1'(-x)\right]=a\left[f_1'(x)-f_2'(x)\right]=-\psi(x), \quad (2.108)$$

$$\varphi(x+2l)=\varphi(x), \qquad \psi(x+2l)=\psi(x) \qquad (2.109)$$

тенгликлар келиб чиқади. Бу формулалар шуни кўрсатадики $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $(0,l)$ оралиқдан $(-l,0)$ оралиққа тоқлик қонуни бўйича $2l$ давр билан давом эттирилади.

Шуни таъкидлаш лозимки,

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-a\,t}^{x+a\,t}\psi(\xi)\,d\xi, \quad x\in R, \quad t>0 \qquad (2.110)$$

ечимнинг иккинчи тартибгача ҳосилалари билан узлуксиз ўлишини таъминлаш учун давом эттирилган $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар мос равишда $C^2[0,l]$ ва $C^1[0,l]$ синф-ларга тегишли бўлиб,

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0, \quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0, \quad \psi(0)=\psi(l)=0 \qquad (2.111)$$

шартларни қаноатлантириши зарурдир.

Мисол. $u_{tt}=u_{xx}$, $0<x<\pi$, $t>0$ тенгламанин $\{\,(x,t):\ 0\le x\le\pi,\ t\ge 0\}$ соҳада аниқланган, узлуксиз ва $u\big|_{x=0}=0$, $u\big|_{x=l}=0, t\ge 0$ чегаравий хамда $u\big|_{t=0}=sinx$, $0\le x\le\pi$,

$u_t\big|_{t=0} = sinx, \quad 0 < x < \pi$, бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини давом эттириш усулида топинг.

Ечиш. Қўйилган масаланинг чегаравий ва бошланғич шартлари (2.107), (2.108), (2.109), (2.111), шартларни қаноатлантиради хамда $\varphi(x) = sinx$ ва $\psi(x) = sinx$ функцияларнинг даври $T = 2l$ га тенг. Шунинг учун (2.110)га кўра масаланинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[sin(x+t) + sin(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} sin\xi\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[sin(x+t) + sin(x-t)\right] - \frac{1}{2}\left[cos(x+t) - cos(x-t)\right] = \sqrt{2}\cdot sinx \cdot cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right).$$

Мустақил ечиш учун масалалар

Чекли оралиқ учун давом эттириш усули ёрдамида қуйидаги масалаларни ечинг.

173. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty; \quad u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=l} = 0, \; 0<t<+\infty,$ $u\big|_{t=0} = \varphi(x), 0 \le x \le l, \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0<x<l$, бу ерда $\varphi(x) \in C^2[0,l]$, $\psi(x) \in C^1[0,l]$ бўлиб, $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(l) = 0$ шартларни қаноатлантиради.

174. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty; \quad u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=l} = 0, \; 0<t<+\infty,$ $u\big|_{t=0} = \varphi(x), \; 0 \le x \le l, \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \; 0<x<l$, бу ерда $\varphi(x) \in C^2[0,l]$, $\psi(x) \in C^1[0,l]$ бўлиб, $\psi(0) = \psi'(l) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi'(l) = 0$ шартларни қаноатлантиради.

175. $$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u, \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty;$$
$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \; 0<t<+\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0<x<l.$$

176. $$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u, \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty;$$
$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=l} = 0, \; 0<t<+\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0<x<l.$$

377.
$$u_{tt}=a^2u_{xx}+c^2u\,,\ 0<x<l\,,0<t<+\infty;$$
$$u_x\big|_{x=0}=0\,,\ u_x\big|_{x=l}=0,\ 0<t<+\infty,$$
$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad 0\le x\le l\,,u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\quad 0<x<l\,.$$

378. $u_{tt}=a^2u_{xx}\,,\quad 0<x<l\,,0<t<+\infty;\quad u\big|_{t=0}=0,,\quad u_t\big|_{t=0}=0,$ $u_x\big|_{x=0}=g(t)\,,\ u_x\big|_{x=l}=0,\ 0<t<+\infty,$ бу ерда $g(t)\in C^1[0,+\infty)$ бўлиб, $g(0)=g'(0)=0$, шартларни қаноатлантиради.

379. $u_{tt}=a^2u_{xx}\,,\quad 0<x<l\,,\quad 0<t<+\infty;\quad u\big|_{t=0}=0\,,\quad u_t\big|_{t=0}=0,$ $u\big|_{x=0}=g(t)\,,\quad u_x\big|_{x=l}=0,\ 0<t<+\infty,$ бу ерда $g(t)\in C^2[0,+\infty)$, бўлиб, $g(0)=g'(0)=g''(0)=0$, шартларни қаноатлантиради.

380.
$$u_{tt}=a^2u_{xx}\,,\ 0<x<\pi\,,\ 0<t<+\infty;$$
$$u_x\big|_{x=0}=0\,,\ u_x\big|_{x=l}=0,\ 0<t<+\infty,$$
$$u\big|_{t=0}=cos\,x,\quad 0\le x\le\pi\,,\ u_t\big|_{t=0}=cos\,x,\quad 0<x<\pi\,.$$

7- §. Чегараланган тор тебраниш тенгламаси учун масалалар. Фурье усули

Фурье ёки ўзгарувчиларни ажратиш усули хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишда кенг қўлланиладиган усуллардан биридир. Бу усулнинг моҳиятини тор тебраниш тенгламаси учун бир қатор мисолларда текшириб кўрамиз.

1. Аралаш масалани чегараланган тор тебраниш тенгламаси учун ечиш. Ушбу

$$\rho(x)u_{tt}=\left[\,p(x)u_x\,\right]_x-q(x)u\,,\ 0<x<l\,,\ t>0 \qquad (2.112)$$

тенгламанинг $P=\{(x,t):\ 0\le x\le l,\ t\ge 0\}$ да аниқланган, узлуксиз ва

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ 0\le x\le l\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\ 0<x<l \qquad (2.113)$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$\left.\begin{aligned}\alpha u(0,t)+\beta u_x(0,t)=0,\quad t\ge 0,\\ \gamma u(l,t)+\delta u_x(l,t)=0,\qquad t\ge 0\end{aligned}\right\} \qquad (2.114)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечими топилсин.

Бу ерда $\rho(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - берилган функциялар; l, α, β, γ, δ - берилган сонлар бўлиб, $\rho(x)>0$, $p(x)>0$, $q(x)\ge 0$,

$l>0, \alpha^2+\beta^2\neq 0$, $\gamma^2+\delta^2\neq 0$. $\rho(x)\equiv 1$, $p(x)=a^2$, $q(x)\equiv 0$ бўлганда (2.112) дан тор тебраниш тенгламаси, $\beta=\delta=0$, $\alpha=\gamma=0$, $\alpha\beta\gamma\delta\neq 0$ бўлганда (2.114) дан мос равишда **I, II, III** чегаравий шартлар келиб чиқади[5],[8],[15],[19].

Юқорида қўйилган (2.112), (2.113), (2.114) аралаш масалани Фурьенинг **ўзгарувчиларни ажратиш усули** билан ечиш мумкин. Бу усулда асосан аввало (2.112) тенгламанинг (2.114) шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими

$$u(x,y)=X(x)T(t) \tag{2.115}$$

кўринишда қидирилади. (2.115) ни (2.112) га қўйиш натижасида $T(t)$ ва $X(x)$ функцияларга нисбатан

$$T''(t)+\lambda T(t)=0, \tag{2.116}$$

$$\left[p(x)X'(x)\right]'+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]X(x)=0 \tag{2.117}$$

кўринишдаги оддий дифференциал тенгламаларга эга бўламиз, бу ерда λ- номаълум ўзгармас параметр.

(2.115)ни (2.114)га қўйиб, $T(t)\neq 0$ эканлигини эътиборга олсак, $X(x)$ функция

$$\alpha X(0)+\beta X'(0)=0,\ \gamma X(l)+\delta X'(l)=0 \tag{2.118}$$

шартларни қаноатлантириши зарурлиги келиб чиқади.

Натижада $X(x)$ функцияга нисбатан қуйидаги масалага эга бўламиз: λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, бу қийматларда (2.117) тенгламанинг (2.118) шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимлари мавжуд бўлсин.

Одатда бу масалани **Штурм-Лиувилл масаласи** деб аталиб, λ нинг топиладиган қийматлари **хос** (махсус) **қийматлар** (сонлар), унга мос тривиал бўлмаган ечимлар эса **хос** (махсус) **функциялар** дейилади[7],[15]. Барча хос қийматлар тўплами масаланинг **спектри** дейилади[6].

(2.117), (2.118) масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари қуйидаги **хоссаларга эга:**

1) Масала хос қийматларининг чексиз $\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n<...$ тўплами мавжуд.

2) Ҳар бир хос қийматга ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида $X_k(x)$ хос функция мос келади. Ўзгармас кўпайтувчини шундай

танлаш мумкинки, $\int\limits_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx=1,\quad k\in N$ тенглик ўрин

бўлади, яъни хос функциялар $[0,l]$ кесмада $\rho(x)$ вазн била нормаллашган дейилади.

3) Турли хос қийматларга мос келадиган хос функцияла $[0,l]$ кесмада $\rho(x)$ вазн билан ортогонал бўлади, яъни

$$\int\limits_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)dx=0,\ (k\neq m).$$

4) $q(x)\geq 0$ ва $\left[p(x)X_n(x)X_n'(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=l}<0$ бўлганда барча хо қийматлар мусбат бўлади, яъни $\lambda_k>0$, $k\in N$.

5) **Стеклов теоремаси:** $f(x)$ - биринчи тартибли узлукси иккинчи тартибли бўлак – бўлак узлуксиз ҳосилаларга эга в (2.118) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи функция бўлси У ҳолда бу функция (2.117), (2.118) масаланинг хос функцияла бўйича абсолют ва текис яқинлашувчи қаторга ёйилади, яъни

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kX_k(x),\ c_k=\int\limits_0^l \rho(x)f(x)X_k(x)dx,k\in N. \qquad (2.119)$$

(2.117), (2.118) масаланинг хос қийматлари ва хос функ-циялари топилгандан сўнг, $T(t)$ функцияни топишга ўтилади. Ҳа бир λ_k ни (2.116) тенгламага қўйиб, унинг умумий ечими (уни $T_k(t)$ деб белгилаб),

$$T_k(t)=a_kcos\sqrt{\lambda_k}\cdot t+b_ksin\sqrt{\lambda_k}\cdot t$$

топилади, бу ерда a_k ва b_k ихтиёрий ўзгармаслар.

(2.115) га асосан юқоридагилардан келиб чиқадики, ҳар бир

$$u_k(x,t)=X_k(x)T_k(t)=\left(a_kcos\sqrt{\lambda_k}t+b_ksin\sqrt{\lambda_k}t\right)X_k(x),k\in N$$

функция (2.112) тенгламанинг (2.114) шартни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимидан иборат экан.

(2.113) бошланғич шартларни қаноатлантириш мақсадида

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_kcos\sqrt{\lambda_k}t+b_ksin\sqrt{\lambda_k}t\right)X_k(x) \qquad (2.120)$$

қатор тузилади. Агар бу қатор текис яқинлашувчи бўлиб, уни x ва t бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин бўлса, унинг йиғиндиси ҳам (2.112), (2.113), (2.114) масаланинг ечими бўлади.

У ҳолда, (2.113) бошланғич шартлар бажарилиши учун

$$u\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x) = \varphi(x), \tag{2.121}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} X_k(x) = \psi(x) \tag{2.122}$$

тенгликларнинг ўринли бўлиши зарурлиги келиб чиқади.

Агар $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар Стеклов теоремаси шартларини бажарувчи функциялар бўлса, (2.121) ва (2.122) - бу функцияларнинг $X_k(x)$ хос функциялар бўйича ёйилмасидан иборат бўлади ва (2.119)га асосан

$$a_k = \int_0^l \rho(x)\varphi(x) X_k(x)dx\,,\ b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^l \rho(x)\psi(x) X_k(x)dx\,, k \in N$$

тенгликлар ўринли бўлади. a_k ва b_k ларнинг бу ифодаси (2.120) га қўйилса. (2.112), (2.113), (2.114) аралаш масала ечими ҳосил бўлади.

1-Мисол. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ 0 < x < l, \quad t > 0$ (2.123)

тенгламанинг

$$u\big|_{t=0} = 0,\ \ 0 \le x \le l\,,\ u_t\big|_{t=0} = sin\frac{3\pi}{2l}x + sin\frac{5\pi}{2l}x\,, 0 < x < l \tag{2.124}$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0 \tag{2.125}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечими топилсин.

Ечиш. (2.115) ни (2.123) га қўйиш натижасида $T(t)$ ва $X(x)$ функцияларга нисбатан

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0\,, \tag{2.126}$$

$$X(x)'' + \lambda X(x) = 0 \tag{2.127}$$

кўринишдаги оддий дифференциал тенгламаларга эга бўламиз, бу ерда λ - номаолум ўзгармас параметр.

(2.115) ни (2.125) га қўйиб, $T(t) \neq 0$ эканлигини эътиборга олсак, $X(x)$ функция

$$X(0) = 0\,,\ X'(l) = 0 \tag{2.128}$$

шартларни қаноатлантиради.

(2.115) кўринишдаги (2.124) шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган $u(x, y)$ ечимни топиш учун (2.127) тенгламанинг (2.128) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи айнан нолга тенг бўлмаган ечимни топиш зарурдир.

Агар $\lambda > 0$ бўлса, (2.127) тенгламанинг (2.128) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи айнан нолга тенг бўлмаган ечими мавжуд. Хақиқатан, (2.127) тенгламанинг умумий ечими

$$X(x) = C_1 cos\sqrt{\lambda} \cdot x + C_2 sin\sqrt{\lambda} \cdot x$$

кўринишга эга бўлади. (2.128) чегаравий шартларга биноан

$$C_1 = 0, \qquad C_2\sqrt{\lambda} cos\sqrt{\lambda} \cdot l = 0 .$$

Бунда $C_2 \neq 0$ деб хисоблаймиз, акс холда $X(x) \equiv 0$ бўлиб қолади. Демак, $cos\sqrt{\lambda} \cdot l = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda} l = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \;\Rightarrow\; \lambda = \dfrac{\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}, \quad n \in Z$ ни ҳамда $cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = -sin\ \pi n$ ва $cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi n\right) = sin\ \pi n$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлгани учун $n = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$ ни ҳисобга олиб (2.127), (2.128) масаланинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$X_n(x) = sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots . \qquad (2.129)$$

Энди хар бир $\lambda_n = \dfrac{\pi^2(1+2n)^2}{4l^2}$ ни (2.126) тенгламага қўйиб, унинг умумий ечими (уни $T_n(t)$ деб белгилаб),

$$T_n(t) = a_n cos\frac{\pi a(1+2n)}{2l}t + b_n sin\frac{\pi a(1+2n)}{2l}t$$

кўринишда бўлади,бу ерда a_n ва b_n ихтиёрий ўзгармаслар.

(2.115) га асосан юқоридагилардан келиб чиқадики, ҳар бир

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) =$$

$$= \left(a_n cos\frac{\pi a(1+2n)}{2l}t + b_n sin\frac{\pi a(1+2n)}{2l}t\right) sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x \qquad (2.130)$$

функция (2.123) тенгламанинг (2.125) шартни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими бўлганлиги сабабли, (2.130) ечимларнинг чексиз йиғиндиси ҳам ечим бўлади, яъни

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n cos\frac{\pi a(1+2n)}{2l}t + b_n sin\frac{\pi a(1+2n)}{2l}t\right) sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x. \qquad (2.131)$$

(2.131)ни t бўйинча дифференциаллаймиз:

$$u_t(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi a(1+2n)}{2l}\times$$

$$\times\left(b_n cos\frac{\pi a(1+2n)t}{2l}+a_n sin\frac{\pi a(1+2n)t}{2l}\right)sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}. \quad (2.132)$$

(2.131) ва (2.132) да $t=0$ деб, (2.124) бошланғич шартларга асосан ушбу

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x=0 \;\Rightarrow\; a_n=0,$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi a(1+2n)b_n}{2l}sin\frac{\pi(1+2n)x}{2l}=sin\frac{3\pi x}{2l}+sin\frac{5\pi x}{2l} \;\Rightarrow\; b_0\frac{\pi a}{2l}sin\frac{\pi x}{2l}+$$

$$+b_1\frac{3\pi a}{2l}sin\frac{3\pi}{2l}x+b_2\frac{5\pi a}{2l}sin\frac{5\pi}{2l}x+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\pi a(1+2n)b_n}{2l}sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b_0=0,\;\; b_1=\frac{2l}{3\pi a},\;\; b_2=\frac{2l}{5\pi a},\;\; b_n=0,\;\; n=3,\,4,\,...$$

тенгликларни ҳосил киламиз. Буларни (2.131) га қўйиб (2.123), (2.124), (2.125) аралаш масаланинг ечими ҳосил қиламиз:

$$u(x,t)=\frac{2l}{3a\pi}sin\frac{3a\pi}{2l}t\cdot sin\frac{3\pi}{2l}x+\frac{2l}{5a\pi}sin\frac{5a\pi}{2l}t\cdot sin\frac{5\pi}{2l}x.$$

(2.112), (2.113), (2.114) масаладан хусусий ҳолларида тор тебраниш тенгламаси учун **I, II, III** аралаш масалалар келиб чиққанлиги учун, бу масалаларни ҳам **Фурре усули билан ечиш мумкин** [8], [19].

2. Аралаш масалани бир жинсли бўлмаган тор тенгламаси учун ечиш.

Ушбу

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\; 0<x<l,\; t>0 \quad (2.133)$$

тенгламанинг $\{(x,t):\, 0\le x\le l,\; t\ge 0\}$ да аниқланган, узлуксиз ва (2.113),

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \quad (2.134)$$

шартларни каноатлантирувчи $u(x,t)$ ечими топилсин.

Бу масаланинг ечими қуйидаги

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)sin\frac{k\pi x}{l} \quad (2.135)$$

кўринишда қидирилади ва $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ функциялар $X_k(x)=sin\frac{k\pi x}{l}$ функциялар бўйича каторга ёйилади[15]:

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l},\ f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}dx; \qquad (2.136)$$

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{k\pi x}{l},\quad \varphi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx; \qquad (2.137)$$

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\frac{k\pi x}{l},\quad \psi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \qquad (2.138)$$

(2.135) ва (2.136) ни (2.133) га қўйилса, $u_k(t)$ га нисбатан

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{u_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 u_k(t)-f_k(t)\right\}\sin\frac{k\pi x}{l}=0$$

ёки

$$u_k''(t)+\omega_k^2 u_k(t)=f_k(t), \qquad \omega_k=\frac{k\pi a}{l} \qquad (2.139)$$

тенглама ҳосил бўлади.

(2.135) ни (2.137) ва (2.138) га қўйилса, $u_k(t)$ функциялар учун

$$u_k(0)=\varphi_k,\ u_k'(0)=\psi_k \qquad (2.140)$$

бошланғич шартлар келиб чиқади.

Энди (2.139), (2.140) масаланинг ечимини

$$u_k(t)=\upsilon_k(t)+\rho_k(t) \qquad (2.141)$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда $\upsilon_k(t)$ функция $\upsilon_k''(t)+\omega_k^2\upsilon_k(t)=f_k(t)$ тенгламанинг $\upsilon_k(0)=0$, $\upsilon_k(0)=0$ шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлиб, ушбу

$$\upsilon_k(t)=\frac{1}{\omega_k}\int_0^t f_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)d\tau,$$

кўринишга эга бўлади ёки $f_k(t)$ ўрнига унинг (2.136) ифодасини қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\upsilon_k(t)=\frac{2}{l\omega_k}\int_0^t\sin\omega_k(t-\tau)d\tau\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi. \qquad (2.142)$$

$\rho_k(t)$ функция эса $\rho_k''(t)+\omega_k^2\rho_k(t)=0$ тенгламанин $\rho_k(0)=\varphi_k$, $\rho_k'(0)=\psi_k$ шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлиб, ушбу

$$\rho_k(t)=\varphi_k\cos\frac{k\pi at}{l}+\frac{\psi_k}{\omega_k}\sin\frac{k\pi at}{l}$$

ини (2.137), (2.138)га кўра қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$p_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\left[\varphi(\xi)cos\frac{k\pi at}{l}+\frac{\psi(\xi)}{\omega_k}sin\frac{k\pi at}{l}\right]\cdot sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi. \qquad (2.143)$$

Шундай қилиб, (2.141), (2.142), (2.143), (2.135) кўра (2.133), (2.113) ва (2.134) масалани ечими ушбу кўринишда бўлади:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{l\omega_k}\int_0^t sin\omega_k(t-\tau)d\tau\int_0^l f(\xi,\tau)sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{l}\int_0^l\left[\varphi(\xi)cos\frac{k\pi at}{l}+\frac{\psi(\xi)}{\omega_k}sin\frac{k\pi at}{l}\right]\cdot sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right\}sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (2.144)$$

2-Мисол. $u_{tt}=u_{xx}+\dfrac{\pi^2x}{2l^2},\ 0<x<l,\ t>0$ тенгламанинг

$u|_{t=0}=\dfrac{\pi}{2},\ 0\le x\le l,\ u_t|_{t=0}=0,\ 0<x<l$ бошланғич шартларни ҳамда $u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечими топилсин.

Ечиш. Берилган тенглама, бошланғич шартлар ва чегаравий шартларга асосан (2.144) ечимдан фойдаланиб қуйидагини

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{l\,\omega_k}\int_0^t sin\omega_k(t-\tau)d\tau\int_0^l\frac{\pi^2\xi}{2l^2}sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{l}cos\frac{k\pi t}{l}\int_0^l\frac{\pi}{2}\cdot sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right\}sin\frac{k\pi x}{l},\quad \omega_k=\frac{k\pi}{l}$$

ҳосил қиламиз. Бундан, интегралларни хисоблаб қуйидагига

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[(-1)^k-1\right]\left\{1-(1+k^2)cos\frac{k\pi t}{l}\right\}sin\frac{k\pi x}{l}$$

эга бўламиз.

Бундан, агар $k=2n$ бўлса, $(-1)^k-1=0$, агар $k=2n+1$ бўлса, $(-1)^k-1=-2$ бўлганлиги учун топилган ечимни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$u(x,t)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^3}\left\{1-\left[1+(2n+1)^2\right]cos\frac{(2n+1)\pi t}{l}\right\}sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

3-Мисол. $u_{tt}=u_{xx}+t\,sinx,\ \ 0<x<\pi,\ t>0$ тенгламанинг

$$u\big|_{t=0}=0,\ 0\le x\le\pi,\ u_t\big|_{t=0}=0,\ 0<x<\pi$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечими топилсин.

Ечиш. Берилган тенглама, бошланғич шартлар ва чегарави шартларга асосан масаланинг ечимини $u(x,t)=\upsilon(t)\cdot sin$ кўринишда излаймиз.

$u(x,t)=\upsilon(t)\cdot sin\,x$ функцияни бир жинсли бўлмаган тенглам ва бошлангич шартларга қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\upsilon''+a^2\upsilon=t,\quad \upsilon(0)=\upsilon'(0)=0.$$

Бу Коши масаласининг ечими

$$\upsilon(t)=\frac{1}{a^2}\left[t-\frac{1}{a}sin\,at\right]$$

кўринишда бўлади.

Шундай қилиб, қўйилган масаланинг ечимини

$$u(x,t)=\frac{1}{a^2}\left[t-\frac{1}{a}sin\,at\right]\cdot sin\,x$$

кўринишда топамиз.

3. Агар (2.133) тенглама учун бир жинсли бўлмаган

$$\alpha u(0,t)+\beta u_x(0,t)=\mu(t),\ \ t>0,$$

$$\gamma u(l,t)+\delta u_x(l,t)=\nu(t),\quad t>0$$

чегаравий шартли аралаш масала берилган бўлса, бу масалан ечиш учун аввал масала ечимини

$$u(x,t)=\upsilon(x,t)+w(x,t)$$

кўринишда ёзиб олинади, бу ерда $w(x,t)=\left(C_1x^2+C_2x+C_3\right)\mu(t)$ $+\left(C_4x^2+C_5x+C_6\right)\nu(t)$. Сўнгра C_j $\left(j=\overline{1,6}\right)$ ўзгармаслар шунд танланадики, натижада $\upsilon(x,t)$ номаълум функцияга нисбат (2.133), (2.113), (2.114)га ўхшаш масала ҳосил бўлсин.

4-Мисол.

$$u_{tt}+2u_t=u_{xx}+8u+2x(1-4t)+cos\,3x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2},\ t>0$$

тенгламанинг

$$u\big|_{t=0}=0,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ u_t\big|_{t=0}=x,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$u_x(0,t)=t,\quad u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=\frac{\pi t}{2},\quad t\ge 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечими топилсин.

Ечиш. $u(x,t)$ функцияни қуйидаги

$$u(x,t)=w(x,t)+\upsilon(x,t)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $\upsilon(x,t)=xt$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи функциядир $[\mu(t)=\nu(t)=t]$,

$$\left[\alpha=0,\ \beta=1,\ l=\frac{\pi}{2},\ \gamma=\frac{2}{\pi},\ \delta=0,\ C_2=C_5=\frac{1}{2},\ C_1=C_3=C_4=C_6=0\right].$$

$u(x,t)$ функцияни берилган тенглама, бошланғич шартлар ва чегаравий шартларга қўйиб, $w(x,t)$ функцияга нисбатан қуйидаги масалани

$$w_{tt}+2w_t=w_{xx}+8w+\cos 3x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2},\ t>0,$$

$$w_x(0,t)=0,\quad w\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0,\quad t\ge 0,$$

$$w\big|_{t=0}=0,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ w_t\big|_{t=0}=0,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$$

ҳосил қиламиз. Бу масаланинг ечими (2- ҳолга қаранг)

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos(1+2n)x$$

кўринишда қидирилади ва $T_n(t)$ функцияга нисбатан қуйидаги Коши масалани

$$(K)\ \begin{cases}T_n''(t)+2T_n'(t)+(1+2n)^2T_n(t)-8T_n(t)=1,\\ T_n(0)=0,\quad T_n'(0)=0,\quad n=0,1,2,\ldots\end{cases}$$

оламиз.

1) Агар $n\neq 1$ бўлса, у ҳолда (К) масаласи фақат айнан нолга тенг ечимга эга бўлади, яъни $T_n(t)=0$.

2) Агар $n=1$ бўлса, у ҳолда (К) масаласи $T_1(t)=1-e^{-t}-te^{-t}$ ечимга эга бўлади.

Шундай қилиб, қўйилган масаланинг ечимини

$$u(x,t)=w(x,t)+xt=\left(1-e^{-t}-te^{-t}\right)cos3x+xt$$

кўринишда топамиз.

4. Тўғри бурчакли мембрананинг тебраниши.

Ушбу

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})\,,\ 0<x<p,\quad 0<y<q,,\ t>0 \qquad (2.145)$$

тенгламанинг $\{(x,y,t):\ 0\le x\le p,\ 0\le y\le q,\ t\ge 0\}$ да аниқланган, узлуксиз ва

$$u(x,y,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y),\ 0\le x\le p,\quad 0\le y\le q, \qquad (2.145.1)$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x,y),\quad 0<x<p,\ \ 0<y<q \qquad (2.145.2)$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$u(0,y,t)=0,\quad u(p,y,t)=0,\quad u(x,0,t)=0,\quad u(x,q,t)=0\ (2.145.3)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y,t)$ ечими топилсин.

Бу масаланиниг ечимини

$$u\left(x,y,t\right)=T\left(t\right)\cdot\upsilon\left(x,y\right)$$

кўринишда излаб $T(t)$ учун (2.126) $\left(\lambda=\mu^2\right)$ тенгламага, $\upsilon(x,y)$ учун

$$\upsilon_{xx}+\upsilon_{yy}+\mu^2\upsilon=0$$

тенгламага ва

$$\upsilon(0,y)=0,\quad \upsilon(p,y)=0,\quad \upsilon(x,0)=0,\quad \upsilon(x,q)=0$$

чегаравий шартларга эга бўламиз. Бу масалани **1-2 ҳолларга** ўхшаш ечиб, унинг хос қийматлари ва хос функцияларини қуйидаги кўринишда топамиз:

$$\mu^2_{m,n}=\pi^2\left(\frac{m^2}{p^2}+\frac{n^2}{q^2}\right),\ \upsilon_{m,n}(x,y)=sin\frac{m\pi}{p}x\cdot cos\frac{n\pi}{q}y,\ m,n=1,2,\dots\ . \quad (2.145.4)$$

$\upsilon_{m,n}(x,y)$ хос функциялар ортонормаланган функцияларнинг системасини ҳосил қилади. Ҳақиқатан,

$$\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q sin\frac{m\pi}{p}x\cdot cos\frac{n\pi}{q}y\cdot sin\frac{m'\pi}{p}x\cdot cos\frac{n'\pi}{q}y=$$

$$= \begin{cases} 1, & агар \quad m = n, \quad m' = n', \\ 0, & агар \quad m \neq n' \quad ёки \quad m' \neq n'. \end{cases} \qquad (2.145.5)$$

Энди (2.126) тенгламадан

$$T_{n,m}(t) = A_{n,m} cos\, a\, \mu_{n,m} t + B_{n,m} sin\, a\, \mu_{n,m} t$$

ни бўламиз.

Шундай килиб, қуйилган (2.145), (2.145.1), (2.145.2), (2.145.3) масалани ечимини

$$u(x, y, t) = T(t) \cdot \upsilon(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{n,m}(t) \cdot \upsilon_{n,m}(x, y) =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[A_{n,m} cos\, a\, \mu_{n,m} t + B_{n,m} sin\, a\, \mu_{n,m} t \right] \cdot sin \frac{m\pi}{p} x \cdot cos \frac{n\pi}{q} y \qquad (2.145.6)$$

кўринишда аниқлаймиз, бу ердаги $A_{n,m}$ ва $B_{n,m}$ коэффициентлар бошланғич шартлардан топилади:

$$A_{n,m} = \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q sin \frac{m\pi}{p} x \cdot cos \frac{n\pi}{q} y \cdot \varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad (2.145.7)$$

$$B_{n,m} = \frac{4}{a\, p\, q\, \mu_{m,n}} \int_0^p \int_0^q sin \frac{m\pi}{p} x \cdot cos \frac{n\pi}{q} y \cdot \psi(x, y)\, dx\, dy. \qquad (2.145.8)$$

5-Мисол. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < q, \quad t > 0$

тенгламанинг

$$u\big|_{t=0} = A\, sin \frac{\pi}{p} x \cdot cos \frac{\pi}{q} y, \;\; 0 \le x \le p, \quad 0 \le y \le q,$$

$$u_t\big|_{t=0} = 0, \;\; 0 < x < p, \quad 0 < y < q$$

бошланғич шартларни ҳамда

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(p, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, q, t) = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y, t)$ ечими топилсин.

Ечиш. (2.145.6) ечимга ва бошланғич шартларга кўра

$$A\, sin \frac{\pi}{p} x \cdot cos \frac{\pi}{q} y = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{n,m} \cdot sin \frac{m\pi}{p} x \cdot cos \frac{n\pi}{q} y$$

$$0 = \sum_{m,n=1}^{\infty} a\, \mu_{m,n}\, B_{n,m} \cdot sin \frac{m\pi}{p} x \cdot cos \frac{n\pi}{q} y$$

эга бўламиз. Бундан, $A_{1,1} = A,\ B_{1,1} = 0,\ A_{n,m} = B_{n,m} = 0\ \ m,n = 2,3,\ldots$.

Демак, қўйилган масаланинг ечими (2.145.6) ва (2.145.5) формулаларга асосан

$$u(x,y,t) = A\cos a\mu_{n,m} t \cdot \sin\frac{\pi}{p}x \cdot \cos\frac{\pi}{q}y, \quad \mu_{n,m} = \frac{\pi\sqrt{2}}{p}$$

кўринишда бўлади.

Юқорида баён қилинган Фурье усулини тўлқин тенгламасида фазовий ўзгарувчилари сони икки(доиравий мембрананинг эркин тебраниши учун) ва ундан ортиқ бўлганда ҳам қўллаш мумкин [3],[5],[7],[15].

Изоҳ. Чегараланган тор тебраниш тенгламаси учун **I, II, III** аралаш масалаларни давом эттириш усули билан ҳам ечиш мумкин[5].

Мустақил ечиш учун масалалар

I. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ тенглама учун $0 < x < l,\quad t > 0$ ярим йўлак(полаcа)да қўйилган қуйидаги масалаларнинг ечими топилсин.

381. $u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ u(x,0)=\dfrac{4h}{l^2}x(l-x),\ u_t\big|_{x=0}=0,\ h>0.$

382. $u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\sin\dfrac{5\pi x}{l}.$

383. $u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u\big|_{t=0}=\sin 7x,\ u_t\big|_{t=0}=0,\ a=1,\ l=\pi.$

384. $u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u\big|_{t=0}=0,\ u_t\big|_{t=0}=\sin\dfrac{2\pi}{l}x.$

385. $u(0,t)=u_x(l,t)=0,\quad u\big|_{t=0}=\sin\dfrac{5\pi}{2l}x,\ u_t\big|_{t=0}=\sin\dfrac{\pi}{2l}x.$

386. $u_x(0,t)=u(l,t)=0,\quad u\big|_{t=0}=\cos\dfrac{\pi}{2l}x,\ u_t\big|_{t=0}=\cos\dfrac{3\pi}{2l}x+\cos\dfrac{5\pi}{2l}x.$

387. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,\ u\big|_{t=0}=x,\ u_t\big|_{t=0}=1.$

388. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,\quad u\big|_{t=0}=\cos 2x,u_t\big|_{t=0}=3\cos 5x;\ l=\pi,a=1.$

389. $u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)+hu(l,t)=0,\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),u_t\big|_{t=0}=\psi(x),h>0.$

390. $u_x(0,t)=0,u_x(l,t)+hu(l.t)=0,\ u\big|_{t=0}=0,u_t\big|_{t=0}=1,\ h>0.$

91. $u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0,\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),$

$$u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\ \ h>0.$$

92. $u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\ u_x(l,t)+hu(l,t)=0,$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \ u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\ h>0.$$

II. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x)$ тенгламанинг $0<x<l$, $t>0$ ярим йўлак(полоса)да аниқланган, бир жинсли $u\big|_{t=0}=0$, $u_t\big|_{t=0}=0$ бошланғич ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

93. $u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\ f(x)=b\,shx.$

94. $u(0,t)=\alpha,\quad u(l,t)=\beta.$

95. $u_x(0,t)=\alpha,\quad u_x(l,t)=\beta.$

96. $u_x(0,t)-hu(0,t)=\alpha,\ u(l,t)=\beta.$

97. $u_x(0,t)=\alpha,\ \ u_x(l,t)+hu(l,t)=\beta.$

98. $u_x(0,t)-hu(0,t)=\alpha,\ u_x(l,t)+hu(l,t)=-\alpha.$

III. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$ тенгламанинг $0<x<l$, $t>0$ ярим йўлак(полоса)да аниқланган, бир жинсли $u\big|_{t=0}=0$, $u_t\big|_{t=0}=0$ бошланғич шартларни ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

99. $u(0,t)=u(l,t)=0,\qquad f(x,t)=sin\dfrac{\pi x}{l}.$

100. $u(0,t)=u(l,t)=0,\qquad f(x,t)=Ae^{-t}\ sin\dfrac{\pi x}{l}.$

101. $u(0,t)=u(l,t)=0,\qquad f(x,t)=Axe^{-t}.$

102. $u(0,t)=0,\ u_x(0,t)=0,\ \ f(x,t)=A\,sint.$

103. $u_x(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ f(x,t)=Ae^{-t}cos\dfrac{\pi x}{2l}.$

104. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0.$

IV. $u_{tt}=u_{xx}$ тенгламанинг $0<x<l$, $t>0$ ярим йўлак (полоса)да аниқланган ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

405. $u(0,t)=t^2$, $u(l,t)=t^3$, $u(x,0)=sin x$, $u_t(x,0)=0$, $l=\pi$.

406. $u(0,t)=e^{-t}, u(l,t)=t, u(x,0)=sin x\, cos x$, $u_t(x,0)=1; l=\pi$.

407. $u(0,t)=t$, $u_x(l,t)=1$, $u(x,0)=sin\frac{1}{2}x$, $u_t(x,0)=1; l=\pi$.

408. $u_x(0,t)=0$, $u_x(l,t)=shl\, e^{-t}$, $u(x,0)=chx$, $u_t(x,0)=-chx$.

409. $u(0,t)=t, u(l,t)=0, u(x,0)=sin x\, cos x$, $u_t(x,0)=0; l=\pi$.

410. $u_x(0,t)=0$, $u_x(l,t)=2\, sin 2t$, $u(x,0)=0$,

$u_t(x,0)=-2cos\, 2x$, $l=\pi/4$.

V. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t,u)$ тенгламага $0<x<l$, $t>0$ ярим йўлак(полоса)да қуйидаги шартлар билан қўйилган аралаш масаланинг ечими Фурье усули билан топилсин.

411. $u(0,t)=2t$, $u(l,t)=0$, $u(x,0)=u_t(x,0)=0$,

$f=u$, $a=1$, $l=2$.

412. $u_x(0,t)=0$, $u_x(l,t)=0$, $u(x,0)=u_t(x,0)=0$,

$f=4u+2\, sin^2 x$, $a=1$, $l=\pi$.

413. $u(0,t)=3$, $u_x(l,t)=t^2+t$, $u(x,0)=3$, $u_t(x,0)=x+sin x$,

$$f=2u_t+4t\left(sin x-xt-\frac{1}{2}x\right),\ l=\pi/2,\ a=1.$$

VI. Тўртбурчакли мембрананинг эркин тебранишини аниқловчи қуйидаги аралаш масалалар Фурье усули билан ечилсин.

414. $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})$, $u|_{x=0}=u|_{x=p}=u|_{y=0}=u|_{y=q}=0$.

$$p,q=const>0;\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=5\, sin\left(\frac{3\pi x}{q}\right) sin\left(\frac{5\pi y}{p}\right).$$

415. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}$, $u|_{x=0}=u_x|_{x=p}=u|_{y=0}=u_y|_{y=q}=0$.

$p,q = const > 0$, $u\big|_{t=0} = Axy$, $u_t\big|_{t=0} = 0$, $A = const$.

116. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$, $u_x\big|_{x=0} = u\big|_{x=p} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=q} = 0$,

$$u\big|_{t=0} = \cos\left(\frac{\pi x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{q}\right),\ u_t\big|_{t=0} = 0.$$

VII. Қуйидаги аралаш масалаларни Фурье усули билан ечинг.

117. $u_{tt} = u_{xx} - 4u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u\big|_{t=0} = x^2 - x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0.$

118. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u\big|_{t=0} = -x^2 + \pi x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0.$

119. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
$u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = x.$

120. $u_{tt} + u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
$u(0,t) = t, \quad u(1,t) = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 1 - x.$

121. $u_{tt} = u_{xx} + u, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$
$u(0,t) = 2t, \quad u(2,t) = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0.$

122. $u_{tt} = u_{xx} + u, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = t, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \frac{x}{l}.$$

123. $u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = 4x + 8e^t \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$

$$u_x(0,t) = 2t, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \pi t, \quad u\big|_{t=0} = \cos x, \quad u_t\big|_{t=0} = 2x.$$

124. $u_{tt} - 3u_t - u_{xx} - u = -(4+t)x + \cos\frac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
$u_x(0,t) = 1 + t, \quad u(\pi,t) = \pi(t+1), \quad u\big|_{t=0} = x, \quad u_t\big|_{t=0} = x.$

125. $u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2\cos x \cdot \sin 2x, \quad 0 < x < 0{,}5\pi, \quad t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0.$$

426. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x + (t^2 + 1) \cdot J_0(\mu_k x), \quad 0 < x < 1,$

$|u(0,t)| < \infty, \quad u(1,t) = 0, \; u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0,$

бу ерда $\mu_k -$ $J_0(\mu) = 0$ тенгламанинг мусбат ечимлари, $J_0(\mu)$ − Бессел функцияси [2. том 2], [12].

427. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x + (sint + cost) \cdot J_0(\mu_k x), \quad 0 < x < 1,$

$|u(0,t)| < \infty, \quad u(1,t) = 0, \; u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$

428. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x \quad 0 < x < 1,$

$|u(0,t)| < \infty, \quad u(1,t) = sin^2 t, \; u|_{t=0} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}\right], \; u_t|_{t=0} = 0.$

429. $u_{tt} + sin3t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x \quad 0 < x < 1,$

$|u(0,t)| < \infty, \quad u(1,t) = 1, \; u_t|_{t=0} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{J_0(3x)}{J_0(3)}\right], \; u|_{t=0} = 1.$

430. $u_{tt} = x u_{xx} + u_x \quad 0 < x < \frac{1}{4},$

$|u(0,t)| < \infty, \quad u(0{,}25, t) = 0, \; u_t|_{t=0} = 0, \; u|_{t=0} = J_0(2\mu_1 \sqrt{x}),$

бу ерда $\mu_1 -$ $J_0(\mu) = 0$ тенгламанинг мусбат ечимлари, $J_0(\mu)$ Бессел функцияси [2],[12].

431. $u_{tt} = x u_{xx} + u_x \quad 0 < x < 1,$

$|u(0,t)| < \infty, \quad u_x(1,t) = 0, \; u_t|_{t=0} = J_0(\mu_k \sqrt{x}), \; u|_{t=0} = 0,$ бу ерд

$\mu_k -$ $J_1(\mu) = 0$ тенгламанинг мусбат ечимлари, $J_1(\mu)$ − Бессе функцияси [2], [12].

432. $u_{tt} = a^2 (x u_x)_x \quad 0 < x < l, \quad a = \sqrt{g},$

$|u(0,t)| < \infty, \quad u(l,t) = 0, \; u|_{t=0} = u_0(x), \; u_t|_{t=0} = 0.$

433. $u_{tt} = a^2 (x u_x)_x + \omega^2 u \quad 0 < x < l, \quad a = \sqrt{g},$

$|u(0,t)| < \infty, \quad u(l,t) = 0, \; u|_{t=0} = u_0(x), \; u_t|_{t=0} = u_1(x).$

III БОБ

ПАРАБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР

1- §. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун Коши масаласи

Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун классик Коши масаласи деб $C^{2,1}(t>0)\cap C(t\geq 0)$ синфга тегишли ва $t>0$, $x\in\mathbb{R}^n$ да $u_t=a^2\left(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\ldots+u_{x_nx_n}\right)+f(x,t)$ (3.1)

тенгламани, $t=0$ да эса $u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n$ (3.2)

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функцияни топишга айтилади, бу ерда $f(x,t)$, $\varphi(x)$ - берилган функциялар.

Агар $f(x,t)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $0\leq t<+\infty$ ва $\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$ берилган узлуксиз чегараланган функциялар бўлса, у ҳолда (3.1), (3.2) Коши масаласининг ечими мавжуд ва ягона бўлиб, у

$$u(x,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\xi,\tau)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau}{\left[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right]^n} \qquad (3.3)$$

Пуассон формуласи орқали ифодаланади [5], [7].

1. Агар (3.3) формулада $n=1$, $f(x,t)\equiv 0$ бўлса, у ҳолда (3.1), (3.2) Коши масаласининг ечими

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E(x,t;\xi)\varphi(\xi)d\xi \qquad (3.3_1)$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда $E(x,t;\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ функция $t>0$ да $u_t=a^2u_{xx}$ тенгламанинг **фундаментал ечими** дейилади [15], [19].

2. Агар (3.3) формулада $n=1$, $f(x,t)\neq 0$ бўлса, у ҳолда (3.1), (3.2) Коши масаласининг ечими

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (3.3_2)$$

кўринишда ёзилади.

1–Мисол. $u_t=u_{xx}$, $-\infty<x<+\infty$, $t>0$ тенглама учун қуйидаги $u(x,t)\big|_{t=0}=x\cdot e^{-x^2}$, $-\infty<x<+\infty$ шартларни қаноатлантирувчи Коши масаласининг ечимини топинг.

Ечиш. (3.3_1) формулага асосан берилган масаланинг ечими

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\xi^2}\cdot e^{\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi \qquad (3.4)$$

кўринишда бўлади.

Ўнг томондаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\xi^2}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}de^{-\xi^2}=$$

$$=\frac{x}{4t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi-\frac{1}{4t}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\xi^2-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi.$$

Бундан

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\xi^2-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi=\frac{x}{4t+1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi.$$

Қуйидаги

$$\xi^2+\frac{(x-\xi)^2}{4t}=\frac{4t+1}{4t}\left(\xi^2-\frac{2x\xi}{4t+1}\right)+\frac{x^2}{4t}=\frac{x^2}{4t+1}+\frac{4t+1}{4t}\left(\xi^2-\frac{x}{4t+1}\right)^2$$

тенгликка ва

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\rho^2}d\rho=\sqrt{\pi} \qquad (3.5)$$

формулага кўра

$$I=\frac{x}{4t+1}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t+1}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{4t+1}{4t}\left(\xi-\frac{x}{4t+1}\right)^2}d\xi=\frac{2\sqrt{\pi t}}{\sqrt{(4t+1)^3}}xe^{-\frac{x^3}{4t+1}}. \qquad (3.6)$$

Шундай қилиб, (3.6) ни (3.4) тенгликка қўйиб, берилган Коши масаласининг ечимини оламиз:

$$u(x,t)=\frac{x}{\sqrt{(4t+1)^3}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}.$$

2–Мисол. $u_t=4u_{xx}+t+e^t \quad -\infty<x<+\infty, \quad t>0$ тенглама учун қуйидаги

$$u(x,t)\big|_{t=0}=2 \tag{3.7}$$

шартни қаноатлантирувчи Коши масаласининг ечимини топинг.

Ечиш. $n=1$ да (3.3) Пуассон формуласига кўра, берилган тенглама ва (3.7) шартдан фойдаланиб қўйидагини

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}2e^{-\frac{|x-\xi|^2}{16t}}d\xi+\int_0^t\frac{(\tau+e^\tau)d\tau}{4\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{16(t-\tau)}}d\xi \tag{3.8}$$

ҳосил қиламиз.

(3.8) ифоданинг ξ бўйинча олинган биринчи ва иккинчи интегралларида

$$\xi=x+4\sqrt{t}\cdot s,\ \ d\xi=4\sqrt{t}\,ds;\ \ \xi=x+4\sqrt{t-\tau}\cdot z,\ d\xi=4\sqrt{t-\tau}dz$$

алмаштириш бажариб қўйидагига

$$u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|s|^2}ds+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t(\tau+e^\tau)d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|z|^2}dz \tag{3.9}$$

эга бўламиз. Маълум бўлган (3.5) формулага асосан (3.9) формуладан

$$u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}\int_0^t(\tau+e^\tau)d\tau=2+\frac{t^2}{2}+e^t-1=1+\frac{t^2}{2}+e^t$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, берилган тенглама учун қўйилган Коши масаласининг ечими $u(x,y,t)=1+\frac{t^2}{2}+e^t$ дан иборатдир.

3–Мисол. $u_t=u_{xx}+u_{yy}+e^t$ тенглама учун қуйидаги

$$u(x,y,t)\big|_{t=0}=cosx\cdot siny \tag{3.10}$$

шартни қаноатлантирувчи ечимни топинг.

Ечиш. $n=2$ да (3.3) Пуассон формуласига кўра, берилган тенглама ва (3.10) шартдан фойдаланиб қўйидагини

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}cos\,\xi\cdot sin\,\eta\, e^{-\frac{|x-\xi|^2+|y-\eta|^2}{4t}}d\xi d\eta+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t \frac{e^{\tau}d\tau}{t-\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-\xi|^2+|y-\eta|^2}{4(t-\tau)}}\, d\xi d\eta \qquad (3.11)$$

ҳосил қиламиз.

(3.11) ифоданинг биринчи ва иккинчи интегралларида

$$\xi = x+2\sqrt{t}\cdot s_1,\quad d\xi=2\sqrt{t}ds_1;\quad \eta=y+2\sqrt{t}\cdot s_2,\quad d\eta=2\sqrt{t}ds_2;$$

$$\xi = x+2\sqrt{t-\tau}\cdot z_1,\ d\xi=2\sqrt{t-\tau}dz_1;\ \eta=y+2\sqrt{t-\tau}\cdot z_2,\ d\eta=2\sqrt{t-\tau}dz_2$$

алмаштиришлар бажариб қуйидагига

$$u(x,y,t)=\frac{4t}{4\pi t}\int_{-\infty}^{+\infty} sin(x+2\sqrt{t}\cdot s_1)e^{-|s_1|^2}ds_1\int_{-\infty}^{+\infty} cos(y+2\sqrt{t}\cdot s_2)\times$$

$$\times e^{-|s_2|^2}ds_2+\frac{4}{4\pi}\int_0^t \frac{e^{\tau}(t-\tau)}{t-\tau}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z_1|^2}dz_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z_2|^2}dz_2 \qquad (3.12)$$

эга бўламиз. Маълум бўлган (3.5) ва

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}cos\,\beta\lambda\,d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \qquad (3.13)$$

формулаларга асосан (3.12) формуладан

$$u(x,y,t)=e^t-1+e^{-2t}cos\,x\cdot sin\ \ y$$

Коши масаласининг ечимини ҳосил қиламиз.

Мустақил ечиш учун масалалар

Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун Коши масаласини ечинг.

I. (3.1), (3.2) масалани $n=1$ бўлганда ечинг.

434. $u_t=16u_{xx}$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0}=8.$

435. $u_t=u_{xx}+2t$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0}=1.$

436. $u_t=u_{xx}$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0}=e^{-x^2}.$

437. $u_t=u_{xx}+sin\,t$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0}=0.$

438. $u_t=u_{xx}$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0}=sin\,2x.$

439. $u_t=u_{xx}$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0}=cos\,3x.$

440. $u_t=u_{xx}$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0}=ch\,x.$

141. $u_t = u_{xx}$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0} = sh 2x.$

142. $u_t = u_{xx} + 3t^2$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0} = \sin x.$

143. $u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0} = \cos x$

144. $u_t = u_{xx} + e^t \cdot \sin x$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0} = \sin x.$

145. $u_t = u_{xx} + \sin t$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0} = e^{-x^2}.$

146. $4u_t = u_{xx}$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0} = e^{2x-x^2}.$

147. $u_t = u_{xx}$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0} = xe^{-x^2}.$

148. $4u_t = u_{xx}$, $\quad u(x,t)\big|_{t=0} = \sin x \cdot e^{-x^2}.$

II. (3.1), (3.2) масалани $n = 2$ бўлганда ечинг.

149. $u_t = \Delta u$, $\quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = \sin x \cdot \sin 2y.$

150. $u_t = \Delta u$, $\quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = \sin 2x \cdot \cos y.$

151. $u_t = \Delta u + t \cdot \sin x \cdot \cos y$, $\quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = x y.$

152. $u_t = \Delta u + x y \cdot e^{-t}$, $\quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = 2x \sin y.$

153. $u_t = 4\Delta u + xt \cdot \sin y$, $\quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = x \cos y.$

154. $u_t = \Delta u + e^t$, $\quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = \cos x \cdot \sin y.$

155. $u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y$, $\quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = 1.$

156. $u_t = \Delta u + \cos t$, $\quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = xy\, e^{-x^2-y^2}.$

157. $8u_t = \Delta u + 1$, $\quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = e^{-(x-y)^2}.$

158. $2u_t = \Delta u$, $\quad u(x,y,t)\big|_{t=0} = \cos xy.$

III. (3.1), (3.2) масалани $n = 3$ бўлганда ечинг.

159. $u_t = 2\Delta u + t \cos x$, $\quad u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = \cos y \cdot \cos z.$

160. $u_t = 3\Delta u + e^t$, $\quad u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = \sin(x-y-z).$

161. $4u_t = \Delta u + \sin 2z$, $\quad u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = 0{,}25 \sin 2z + e^{-x^2} \cos 2y.$

162. $u_t = \Delta u + \cos(x-y+z)$, $\quad u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = e^{-(x+y-z)^2}.$

463. $u_t = \Delta u$, $\quad u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = cos(xy)\cdot sin z.$

464. Қуйидаги функция $u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy,\ t>0$, бу ерда $\varphi(y),\ -\infty<y<+\infty$ – берилган узлуксиз чегараланган функция, $u_t=u_{xx}$ тенгламанинг $u\big|_{t=0}=\varphi(x)$, $x\in(-\infty;+\infty)$ шартни қаноатлантирувчи ечими бўлишини кўрсатинг.

465. $u_t=u_{xx}$ тенгламанинг $t>0$ ярим текисликдаги регуляр ечими учун $m\le u(x,t)\le M$ баҳо ўринли эканини кўрсатинг, бу ерда $m=inf\ u(x,0),\ M=sup\, u(x,0),\quad x\in(-\infty;+\infty)$.

466. $u_t=u_{xx}$, $u\big|_{t=0}=\varphi(x)$, $\quad x\in(-\infty;+\infty)$ Коши масаласининг $u(x,t)$ ечимининг ягоналигини исботланг.

467. Бевосита текшириш йўли билан $u(x,t)=\int\limits_0^t v(x,t,\tau)d\tau$ функция $u_t=u_{xx}+g(x,t)$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг, бу ерда

$$v(x,t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}}g(y,\tau)dy,\ t>\tau,$$

$g(x,\tau),\quad -\infty<x,\tau<+\infty$ –эса берилган узлуксиз чегараланган функция.

468. $u_t=u_{xx}$ тенглама учун $t>T$ бўлганда $u(x,t)\big|_{t=T}=chx$ шартли Коши масаласининг ечимини топинг.

2- §. Чегараланмаган ва ярим чегараланган соҳаларда бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун қўйилган масалаларни Фурье алмаштириш ёрдамида ечиш

1. Ушбу

$$\overline{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \qquad (3.14)$$

интеграл билан аникланган $\overline{f}(\lambda)$ функция $f(x)$ функциянинг **Фурье алмаштириши** дейилади[5],[6],[15].

2. $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$ функцияни $\overline{f}(\lambda)$ орқали топиш формуласи қуйидагича:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \tag{3.15}$$

3. (3.14) га тескари алмаштириш (3.15) формула билан аниқланади.

4. Фурье алмаштириши мавжуд бўлиши учун:

а) $f(x)$ функция чекли сондаги экстремумларга эга бўлиши;

б) $f(x)$нинг биринчи турдаги узилиши мумкин бўлган нуқталардан ташқари барча нуқталарда узлуксиз бўлиши;

в) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл абсолют яқинлашувчи бўлиши етарлидир.

1-Мисол. $u_t = a^2 u_{xx}$, $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$ (3.16)

тенглама учун қўйилган

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty \tag{3.17}$$

Коши масаласини Фурье алмаштириш ёрдамида ечинг.

Ечиш. Фараз қилайлик $u(x,t)$ функция ва унинг u_t, u_{xx} ҳосилалари $x \to \pm\infty$ да нолга шундай интилсинки, ушбу

$$\vartheta(t,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx \tag{3.18}$$

Фурье алмаштириш маънога эга бўлсин, у ҳолда қуйидагилар

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-i\lambda x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx \right] = \frac{d\vartheta(t,\lambda)}{dt}, \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)(-\lambda^2) e^{-i\lambda x} dx =$$

$$= \frac{-\lambda^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx = -\lambda^2 \vartheta(t,\lambda). \tag{3.20}$$

$$\vartheta(0,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\lambda x} dx = \Phi(\lambda) \tag{3.21}$$

ўринлидир.

(3.14) тенгламани ва (3.15) шартни иккала томонини $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda}$ га кўпайтириб ҳамда x бўйича $-\infty$ дан $+\infty$ гача интеграллаб, (3.19) – (3.21) ни ҳисобга олиб, қуйидаги масалани ҳосил қиламиз:

$$\frac{d\vartheta(t,\lambda)}{dt}+a^2\lambda^2\vartheta(t,\lambda)=0, \tag{3.22}$$

$$\vartheta(0,\lambda)=\Phi(\lambda). \tag{3.23}$$

(3.22) оддий дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$\vartheta(t,\lambda)=c_1e^{-a^2\lambda^2t} \tag{3.24}$$

тенг. (3.24) ва (3.23) дан

$$\vartheta(0,\lambda)=c_1=\Phi(x).$$

Демак, (3.22), (3.23) масаланинг ечими

$$\vartheta(t,\lambda)=\Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t} \tag{3.25}$$

кўринишда бўлади.

Энди (3.15) тескари Фурье алмаштиришга кўра (3.18) дан қуйидагини

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vartheta(t,x)e^{i\lambda x}d\lambda \tag{3.26}$$

ҳосил қиламиз.

(3.25) ни (3.26) га қўйиб (3.21) га асосан

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda)e^{i\lambda x}e^{-a^2\lambda^2t}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}e^{i\lambda(x-\xi)}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}cos\lambda(x-\xi)e^{-a^2\lambda^2t}d\lambda+i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}sin\lambda(x-\xi)e^{-a^2\lambda^2t}d\lambda\right]$$

ни оламиз. Бундан $cosx$ функциянинг жуфтлигини, sin функциянинг тоқлигини ҳисобга олиб,

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int\limits_{0}^{\infty}cos\lambda(x-\xi)e^{-a^2\lambda^2t}d\lambda \qquad (3.2$$

ҳосил қиламиз.

(3.27) дан ва

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} cos\,\beta\,\lambda\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \tag{3.28}$$

формулани ҳамда $\alpha = a\sqrt{t}$, $\beta = x-\xi$ ни эътиборга олиб, (3.14), (3.15) Коши масаласининг ечимини оламиз:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi. \tag{3.29}$$

5. $(0,+\infty)$**да аниқланган** $f(x)$ **функциянинг Фурье алмаштириши.**

Ушбу

$$\overline{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(\xi) cos\,\lambda\,\xi\,d\xi \tag{3.30}$$

ва

$$\overline{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(\xi) sin\,\lambda\,\xi\,d\xi \tag{3.31}$$

интеграллар билан аниқланган $\overline{f}_c(\lambda)$ ва $\overline{f}_s(\lambda)$ функциялар $f(x)$ функциянинг мос равишда **косинус ва синус (Фурье) алмаштиришлари** дейилади.

(3.30) ва (3.31) формулаларнинг оргиналига ўтиш мос равишда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{+\infty} \overline{f}_c(\lambda) cos\,\lambda\,x\,d\lambda \tag{3.32}$$

ва

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{+\infty} \overline{f}_s(\lambda) sin\,\lambda\,x\,d\lambda \tag{3.33}$$

формулалар орқали амалга оширилади.

2–Мисол. $u_t = a^2 u_{xx}$ $0 < x < +\infty,\ 0 < t < +\infty$ (3.34)

тенгламанинг

$$u(0,t) = 0,\quad 0 < t < +\infty, \tag{3.35}$$

$$u(x,0) = f(x),\quad 0 < x < +\infty \tag{3.36}$$

шартларни каноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. (3.34) тенгламани ва (3.36) шартни иккала томони $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot \sin\lambda\xi$ га кўпайтириб, ξ бўйича 0 дан $+\infty$ гача интегралл қуйидаги масалани ҳосил қиламиз:

$$\frac{dU_s(\lambda,t)}{dt}+a^2\lambda^2U_s(\lambda,t)=0,\quad 0<t<+\infty, \qquad (3.37)$$

$$U_s(\lambda,t)\Big|_{t=0}=\overline{f}_s(\lambda), \qquad (3.38)$$

бу ерда

$$U_s(\lambda,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}u(\xi.t)\sin\lambda\xi\, d\xi,$$

$$\overline{f}_s(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}f(\xi)\cdot\sin\lambda\xi d\xi.$$

(3.37) тенгламани (3.38) бошланғич шарт асосида ечиб, қуйидаги ечимни оламиз:

$$U_s(\lambda,t)=\overline{f}_s(\lambda)\,e^{-a^2\lambda^2t}. \qquad (3.39)$$

(3.39) формулани иккала томонини $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sin\lambda x$ га кўпайтириб, λ бўйича 0 дан $+\infty$ гача интеграллаймиз:

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}U_s(\lambda,t)\sin\lambda xd\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}\overline{f}_s(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}\sin\lambda xd\lambda. \qquad (3.40)$$

(3.33) ва (3.28) формулаларга кўра (3.40)дан қуйидагини

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{+\infty}f(\xi)d\xi\int\limits_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\sin\lambda\xi\sin\lambda x\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{+\infty}f(\xi)d\xi\int\limits_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\left[\cos\lambda(x-\xi)-\cos\lambda(x+\xi)\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]f(\xi)d\xi.$$

ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (3.34), (3.35), (3.36) масаланинг ечими қуйидаги

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]f(\xi)d\xi \qquad (3.41)$$

кўринишида бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги масалаларни Фурье алмаштиришларини қўллаб ечинг.

469. $u_t=a^2u_{xx}-u,\ -\infty<x<+\infty,\quad t>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\quad -\infty<x<+\infty.$

470. $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0,$
$u(x,0)=0,\ -\infty<x<+\infty.$

471. $u_t=a^2u_{xx}-hu,\quad 0<x,t<+\infty,$
$u(0,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<+\infty.$

472. $u_t=a^2u_{xx},\ 0<x,t<+\infty,$
$u_x(0,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<+\infty.$

473. $u_t=a^2u_{xx}-hu,\quad 0<x,t<+\infty,$
$u_x(0,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<+\infty.$

474. $u_t=a^2u_{xx},\ 0<x,t<+\infty,$
$u(0,t)=\varphi(t),\quad 0<t<+\infty,\quad u(x,0)=0,\quad 0<x<+\infty.$

475. $u_t=a^2u_{xx},\ 0<x,t<+\infty,$
$u_x(0,t)=\varphi(t),\quad 0<t<+\infty,\quad u(x,0)=0,\quad 0<x<+\infty.$

476. $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad 0<x,t<\infty,$
$u(0,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\quad u(x,0)=0,\quad 0<x<+\infty.$

477. $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad 0<x,t<\infty,$
$u_x(0,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\quad u(x,0)=0,\quad 0<x<+\infty.$

478. $u_t=a^2u_{xx}-hu+f(x,t),\quad 0<x,t<\infty,$
$u(0,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\quad u(x,0)=0,\quad 0<x<+\infty.$

479. $u_t=a^2u_{xx}-hu+f(x,t),\quad 0<x,t<\infty,$

$$u_x(0,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\quad u(x,0)=0,\ \ 0<x<+\infty.$$

480. $u_t = a^2u_{xx} - hu + f(x,t),\quad 0<x,t<+\infty,$

$$u(0,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\qquad u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<+\infty.$$

481. $u_t = a^2u_{xx} - hu + f(x,t),\quad 0<x,t<+\infty,$

$$u_x(0,t)=0,\ \ 0<t<+\infty,\qquad u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<+\infty.$$

482. II-бобдаги 355-масаладаги тенгликдан фойдаланиб қуйидаги тенгликни ўринлигини исботланг:

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha\lambda^2}\cos\lambda x}{\lambda^2+h^2}d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{4h\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty}e^{-h\xi}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha^2}}\right]d\xi.$$

483. II-бобдаги 356-масаладаги тенгликдан фойдаланиб қуйидаги тенгликни ўринлигини исботланг:

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha\lambda^2}\cdot\lambda\sin\lambda x}{\lambda^2+h^2}d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty}e^{-h\xi}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha^2}}\right]d\xi.$$

484. Ядроси $K(x,\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\lambda\cos\lambda x+h\sin\lambda x}{\lambda^2+h^2}$ кўринишда бўлган Фурье алмаштиришларини қўллаб, қуйидаги масалани ечинг.

$$u_t=a^2u_{xx},\ 0<x,t<+\infty,$$

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=-h\varphi(t),\ 0<t<+\infty,\ u(x,0)=0,\ 0<x<+\infty.$$

485. Ядроси $K(x,\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\lambda\cos\lambda x+h\sin\lambda x}{\lambda^2+h^2}$ кўринишда бўлган Фурье алмаштиришларини қўллаб, қуйидаги масалани ечинг.

$$u_t=a^2u_{xx},\ 0<x,t<+\infty,$$

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\ 0<t<+\infty,\ u(x,0)=f(x),\ 0<x<+\infty.$$

3- §. Ярим чегараланган соҳаларда бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун қўйилган масалаларни давом эттириш усулида ечиш

Бизга маолумки **II** бобнинг **5** - ва **6**- параграфларида ярим чегараланган ва чегараланмаган соҳаларда тор тебраниш тенгламаси учун қўйилган турли хил масалаларни давом эттириш усулида ечиш тўлиқ ўрганилган эди. Шунга кўра, ярим чегараланган соҳаларда бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун қўйилган масалаларни ҳам давом эттириш усулида ечиш мумкин[5].

1-Мисол. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty$ (3.42)

тенгламанинг

$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty \tag{3.43}$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечимини давом эттириш усулида топинг.

Ечиш. (3.42), (3.43) масалани ечиш учун $\varphi(x)$ функцияни $-\infty < x < 0$ интервалда тоқ давом эттирамиз, яъни қуйидаги функцияни

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leq x < +\infty, \\ -\varphi(-x), & -\infty < x \leq 0 \end{cases} \tag{3.44}$$

тузамиз. Демак, $\Phi(x)$ функция $-\infty < x < +\infty$ интервалда тўлиқ аниқланганлиги учун қуйидаги Коши масаласини қараймиз:

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \tag{3.45}$$

$$U(x,0) = \Phi(x), \quad -\infty < x < +\infty \tag{3.46}$$

1-§нинг (3.3_1) формуласига асосан (3.45), (3.46) Коши масаласининг ечимини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \tag{3.47}$$

(3.47) формуладан (3.44) кўра $U(x,0) = \varphi(x)$, $0 \leq x < +\infty$ шартни бажарилишини осон кўрсатиш мумкин.

(3.44) асосан (3.47) формуладан қуйидагига эга бўламиз:

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Бундан $U(0,t) = 0$ шартни ўринлилиги келиб чиқади, ҳамда агар $0 \leq x < +\infty$ бўлса, у ҳолда $U(x,t) = u(x,t)$ бўлади.

Шундай қилиб, (3.42), (3.43) масаланинг ечими

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)d\xi \qquad (3.48)$$

кўринишда бўлади.

2-Мисол. $u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty$ (3.42)

тенгламанинг

$$u_x(0,t)=0,\quad t>0,\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x<+\infty \qquad (3.49)$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечимини давом эттириш усулида топинг.

Ечиш. (3.42), (3.49) масалани ечиш учун $\varphi(x)$ функцияни $-\infty<x<0$ интервалда жуфт давом эттирамиз, яъни қуйидаги функцияни

$$\Phi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & 0\le x<+\infty,\\ \varphi(-x), & -\infty<x\le 0\end{cases} \qquad (3.50)$$

тузамиз. Демак, $\Phi(x)$ функция $-\infty<x<+\infty$ интервалда тўлиқ аниқланганлиги учун қуйидаги Коши масаласини қараймиз:

$$U_t=a^2U_{xx},\qquad -\infty<x<+\infty,\quad t>0, \qquad (3.45)$$

$$U(x,0)=\Phi_1(x),\qquad -\infty<x<+\infty \qquad (3.51)$$

1-§нинг (3.3$_1$) формуласига асосан (3.45), (3.51) Коши масаласининг ечимини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_1(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi \qquad (3.52)$$

(3.50)га асосан (3.52) формуладан қуйидагига эга бўламиз:

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Бундан $U_x(0,t)=0$ шартни ўринлилиги келиб чиқади, ҳамда агар $0\le x<+\infty$ бўлса, у ҳолда $U(x,t)=u(x,t)$ бўлади.

Шундай қилиб, (3.42), (3.49) масаланинг ечими

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)d\xi \qquad (3.53)$$

кўринишда бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар

Қуйидаги масалаларда берилган шартларни бутун x ўқига мос давом эттириш йўли билан уларнинг ечимини топинг:

486. $u_t=a^2u_{xx}-u, \quad 0<x<\infty, \quad t>0,$
$u(0,t)=0, \quad t>0, \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad 0<x<\infty.$

487. $u_t=a^2u_{xx}-2u, \quad 0<x<\infty, \quad t>0,$
$u_x(0,t)=0, \quad t>0, \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad 0<x<\infty.$

488. $u_t=a^2u_{xx}-hu, \quad 0<x<\infty, \quad t>0,$
$u(0,t)=0, \quad t>0, \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad 0<x<\infty.$

489. $u_t=a^2u_{xx}-hu, \quad 0<x<\infty, \quad t>0,$
$u_x(0,t)=0, \quad t>0, \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad 0<x<\infty.$

490. $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad 0<x<\infty, \quad t>0,$
$u(0,t)=0, \quad t>0, \quad u(x,0)=0, \quad 0<x<\infty.$

491. $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad 0<x<\infty, \quad t>0,$
$u_x(0,t)=0, \quad t>0, \quad u(x,0)=0, \quad 0<x<\infty.$

492. $u_t=a^2u_{xx}-hu+f(x,t), \quad 0<x<\infty, \quad t>0,$
$u(0,t)=0, \quad t>0, \quad u(x,0)=0, \quad 0<x<\infty.$

493. $u_t=a^2u_{xx}-hu+f(x,t), \quad 0<x<\infty, \quad t>0,$
$u_x(0,t)=0, \quad t>0, \quad u(x,0)=0, \quad 0<x<\infty.$

494. $u_t=a^2u_{xx}-hu+f(x,t), \quad 0<x<\infty, \quad t>0,$
$u(0,t)=0, \quad t>0, \quad u(x,0)=\varphi(x), \quad 0<x<\infty.$

495. $u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x,t), \quad 0 < x < \infty, \qquad t > 0,$

$$u_x(0,t) = 0, \ t > 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty.$$

4- §. Чекли соҳаларда иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун қўйилган масалаларни Грин функцияси ёрдамида ечиш

Ушбу

$$L(u) \equiv a^2 u_{xx} - u_t = 0 \qquad (3.54)$$

$$AEFB = \{ (x,t): \ AE: x = \gamma_1(t), \ \ BF: x = \gamma_2(t), \ \ AB: t = t_1, \ \ EF: t = t_2 \}$$

чекли соҳада аникланган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун қўшма тенглама

$$M(v) \equiv a^2 v_{xx} + v_t = 0 \qquad (3.55)$$

кўринишда бўлади.

Ҳар қандай етарлича дифференциалланувчи u ва v функциялар учун қуйидаги

$$v L(u) - u M(v) = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t}(uv) \qquad (3.56)$$

айният ўринли. (3.56) айниятни $APQB \subset AEFB$ соҳа бўйича интеграллаб (3.54) тенгламанинг ихтиёрий ечимини берувчи

$$u(x,t) = \int\limits_{APQB} u(\xi,\tau) v(x,\xi;t) d\xi + a^2 \int\limits_{BQ \cup PA} \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\tau \qquad (3.57)$$

асосий интеграл формулани оламиз [5],[7],[19], бу ерда

$$v(x,\xi;t) \equiv U(x,\xi;t-\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \qquad (3.58)$$

- функция (x,t) бўйича (3.54) тенгламани, (ξ,τ) бўйича эса (3.55) тенгламани қаноатлантиради.

I–Масала. (3.54) тенгламанинг $D = \{(x,t): \ \gamma_1(t) < x < \gamma_2(t), \ t > 0\}$ соҳада аникланган ва узлуксиз ҳамда

$$u|_{AB} = u|_{t=0} = \varphi(t), \quad \gamma_1(t) \le x \le \gamma_2(t), \qquad (3.59)$$

бошланғич ва

$$u\big|_{AP}=u\big|_{x=\gamma_1(t)}=\psi_1(t),\ u\big|_{BQ}=u\big|_{x=\gamma_2(t)}=\psi_2(t),\ t\geq 0 \qquad (3.60)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини Грин функцияси ёрдамида топинг, бу ерда $\varphi(A)=\psi_1(A),\quad \varphi(B)=\psi_2(B)$.

Ечиш. Масалани ечишдан олдин **I–аралаш** масаланинг Грин функциясини топиш керак.

Таъриф. I–аралаш (чегаравий) масаланинг Грин функцияси деб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G_1(x,t;\xi,\tau)$ функцияга айтилади[5]:

1) $G_1(x,t;\xi,\tau)$ функция $PABQ$ соҳада аниқланган ва ҳар қандай $t>\tau$ учун (ξ,τ) бўйича (2) тенгламани қаноатлантиради;

2) Ушбу

$$G_1(x,t;\xi,\tau)\big|_{AP}=0, \qquad (3.61)$$

$$G_1(x,t;\xi,\tau)\big|_{BQ}=0, \qquad (3.62)$$

бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантиради;

3) $$G_1(x,t;\xi,\tau)\big|_{PQ}=G_1(x,t;\xi,\tau)\big|_{t=\tau}=0 \qquad (3.63)$$

бўлади;

4) $\lim\limits_{\substack{t\to\tau\\ t>\tau}}\int\limits_{\xi-\lambda}^{\xi+\lambda}G_1(x,t;\xi,\tau)\,dx=1$ ихтиёрий $\lambda>0$ учун, яъни $(0<\xi-\lambda<\xi+\lambda<l)$;

5) $$G_1(x,t;\xi,\tau)=U(x,\xi;t-\tau)-v(x,t;\xi,\tau) \qquad (3.64)$$

кўринишда бўлади, бу ерда $v(x,t;\xi,\tau)$ функция қуйидаги

$$v\big|_{PQ}=0,\ v\big|_{AP}=U(x,\xi;t-\tau),\ v\big|_{BQ}=U(x,\xi;t-\tau) \qquad (3.65)$$

шартларни қаноатлантирувчи (3.55) тенгламанинг регуляр ечимидир, $U(x,\xi;t-\tau)$ функция эса (3.58) формула орқали аниқланади.

(3.64) Грин функциясидан ва (3.57) формуладан фойдаланиб, I–аралаш масаланинг ечими қуйидагича

$$u(x,t)=\int\limits_{AB}G_1(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi+a^2\int\limits_{AP}\frac{\partial G_1}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=\gamma_1(\tau)}\psi_1(\tau)\,d\tau-$$

$$-a^2\int\limits_{BQ}\left.\frac{\partial G_1}{\partial\xi}\right|_{\xi=\gamma_2(\tau)}\psi_2(\tau)\,d\tau \qquad (3.66)$$

топилади.

Агар $\gamma_1(t)\equiv 0$, $\gamma_2(t)\equiv l$ бўлиб, AB эса $(0,l)$ интервалдан ибора бўлса, у ҳолда (3.54), (3.59), (3.60) **I–аралаш** масаланинг ечими (3.66) формулага кўра

$$u(x,t)=\int\limits_0^l G_1(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi+a^2\int\limits_0^t\left.\frac{\partial G_1}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}\psi_1(\tau)\,d\tau-$$

$$-a^2\int\limits_0^t\left.\frac{\partial G_1}{\partial\xi}\right|_{\xi=l}\psi_2(\tau)\,d\tau \qquad (3.67)$$

кўринишда бўлади [5], бу ерда $\varphi(x)=u(x,0)$, $\psi_1(x)=u(0,t)$, $\psi_2(x)=u(l,t)$, $\varphi(0)=\psi_1(0)$, $\varphi(l)=\psi_1(l)$.

(3.67) формуладаги $G_1(x,t;\xi,\tau)$ - Грин функциясин акслантириш усули ёрдамида тузилади. Бунда мусбат манбал $2nl+\xi$ нуқталарда, манфий манбалар $2nl-\xi$ нуқтала жойлаштириб, унинг кўриниши қуйидагича ифодалаймиз:

$$G_1(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[U(x,2nl+\xi;t-\tau)-U(x,2nl-\xi;t-\tau)\right], \qquad (3.68)$$

бу ерда $U(x;\xi,t-\tau)$ - функция (3.58) формула орқали топилиб, у (3.54) тенгламанинг фундаментал ечими бўлади.

(3.68) қаторни қуйидаги кўринишда ҳам ёзиб олиш мумкин:

$$G_1(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\tau(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+g(x,t;\xi,\tau) \qquad (3.69)$$

бу ерда

$$g(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\left[U(x,2nl+\xi;t-\tau)-U(x,2nl-\xi;t-\tau)\right]. \qquad (3.70)$$

Бунда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}{}'$ - белги (3.68) қатордан (3.58) кўринишдаги ҳа айириб ташланганлигини билдиради. (3.70) қаторнинг ҳадлари x в t бўйича $0\le x\le l$, $0\le t<+\infty$ соҳада исталган тартиб ҳосилаларга эга. (3.70) қатор $0 \le x \le l,\ \ 0 \le t \le t^*$ (t^* - ихтиёрий мусбат сон) соҳада абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади. Худди шундай (3.70) қаторни x ва t бўйича ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар ҳам $0 \le x \le l,\ \ 0 \le t \le t^*$ соҳада абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади. ҳамда $t \to \tau,\ t > \tau$ яқинида (3.70) каторнинг ҳар бир ҳади нолга интилади.

Шундай қилиб, (3.69) қатор билан аниқланган $G_1(x,t;\xi,\tau)$ функция Грин функцияси учун қўйилган 1), 2), 3), 4) шартларни қаноатлантиради.

II–Масала. (3.54) тенгламанинг

$D_1 = \{(x,t): 0 < x < l,\ t > 0\}$ соҳада аниқланган ва узлуксиз ҳамда

$$u\big|_{AB} = u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \ 0 \le x \le l, \tag{3.71}$$

бошланғич ва

$$u_x\big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u_x\big|_{x=l} = \mu_2(t), \quad 0 < t < +\infty \tag{3.72}$$

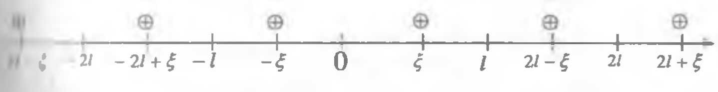
чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини Грин функцияси ёрдамида топинг.

Ечиш. Давом эттириш усули ёрдамида (III бобнинг 3-§ даги 2 – масалага каранг) Грин функциясини қуйидагича тузиб оламиз:

$$G_2(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\},$$

$$0 \le x \le l, \qquad 0 < t < +\infty. \tag{3.73}$$

Бунда манбаларни жойлашиш схемаси қуйидагича



бўлади. (3.73) Грин функцияси ушбу хоссаларга эга:

$$\left.\frac{\partial G_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0,\ \ \left.\frac{\partial G_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=l} = 0,\ \ \lim_{\substack{t \leftarrow \tau \\ t > \tau}} G_2(x,t;\xi;\tau) = 0 \tag{3.74}$$

(3.73) Грин функцияси ва унинг (3.74) хоссасидан ҳамда (3.57) формуладан фойдаланиб (3.54), (3.71), (3.72) **II-аралаш (чегаравий)** масаланинг ечимини қуйидагича кўринишда

$$u(x,t)=\int_0^l G_2(x,t;\xi,0)f(\xi)d\xi-a^2\int_0^t G_2(x,t;0,\tau)\mu_1(\tau)d\tau+$$

$$+a^2\int_0^t G_2(x,t;l,\tau)\mu_2(\tau)d\tau \tag{3.75}$$

ёзиб оламиз.

Худди юкоридаги масалаларга ўхшаш **III-аралаш (чегаравий)** масалани ҳам Грин функцияси ёрдамида ечиш мумкин[5].

<u>Коши масаласи.</u> $$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t) \tag{3.76}$$

тенгламанинг $D_2=\{(x,t):-\infty<x<+\infty,\ \ t>0\}$ соҳада аниқланган ва узлуксиз ҳамда

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad -\infty<x<+\infty \tag{3.77}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини Грин функцияси ёрдамида топинг.

Ечиш. (3.76) тенгламадаги x ва t ўзгарувчиларни мос равишда ξ ва τ га алмаштириб қуйидаги тенгламани

$$u_\tau=a^2u_{\xi\xi}+f(\xi,\tau) \tag{3.78}$$

ҳосил қиламиз.

Агар $G(x,\xi;t-\tau)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$ Грин функцияси бўлса, у ҳолда бу функция қуйидаги тенгламани

$$G_\tau=-a^2G_{\xi\xi} \tag{3.79}$$

қаноатлантиради.

(3.78) ва (3.79) формулаларга асосан қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(G\,u)=a^2\left[G\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-u\frac{\partial^2G}{\partial\xi^2}\right]+G\,f\ . \tag{3.80}$$

(3.80) тенгликни ξ бўйича $-\infty$ дан $+\infty$ гача, τ бўйича эса 0 дан $t-\alpha$ гача интеграллаб, $(0<\alpha<t)$ қуйидагини

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(G\,u)\Big|_{\tau=t-\alpha}d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(G\,u)\Big|_{\tau=0}d\xi+\int_{0}^{t-\alpha}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}G\,f\,d\xi \qquad (3.81)$$

ҳосил қиламиз. Бу ерда (3.81) айниятни олишда $u(\xi,\tau)$ ва унинг ξ бўйича ҳосилалари $\xi\to\pm\infty$ да чегараланган бўлиши талаб қилинган.

(3.81) айниятда $\alpha\to 0$ лимитга ўтиб, ҳамда [19, 230-233 бетлар] ўхшаш амалларни бажариб, қуйидаги

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G(x,\xi;t)\,d\xi+\int_{0}^{t}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi;t-\tau)\,f(\xi,\tau)d\xi \qquad (3.82)$$

Коши масаласини ечимини оламиз.

Мустақил ечиш учун масалалар

I. Қуйидаги функциялар берилган тенгламаларнинг Грин (манба)функцияси эканлиги исботлансин.

106. $G(x,\xi;t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},\quad -\infty<x,\xi<+\infty,\quad \xi\neq x,\quad t>0,$

$$u_t=a^2u_{xx},\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0.$$

107. $G(x,\xi;t)=\dfrac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},\ -\infty<x,\xi<+\infty,\quad \xi\neq x,\quad t>0,$

$$u_t=a^2u_{xx}-hu,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0.$$

II. Агар чегаравий шарт биринчи тур, яъни $u(0,t)=0$ бўлса, қуйидаги функциялар берилган тенгламаларнинг Грин (манба) функцияси эканлиги исботлансин.

108. $G(x,\xi;t-\tau)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right],$

$$0<x,\xi<+\infty,\ \xi\neq x,\ \tau<t<+\infty,\quad u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x,t<+\infty.$$

499. $$G(x,\xi;t-\tau)=\frac{e^{-h(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right],$$

$$0<x,\xi<+\infty,\ \xi\neq x,\ \tau<t<+\infty,\quad u_t=a^2u_{xx}-hu,\quad 0<x,t<+\infty.$$

III. Агар чегаравий шарт биринчи тур, яъни $u_x(0,t)=0$ бўлса, қуйидаги функциялар берилган тенгламаларнинг Грин (манба) функцияси эканлиги исботлансин.

500. $$G(x,\xi;t-\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right],$$

$$0<x,\xi<+\infty,\ \xi\neq x,\ \tau<t<+\infty,\ u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x,t<+\infty.$$

501. $$G(x,\xi;t-\tau)=\frac{e^{-h(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right],$$

$$0<x,\xi<+\infty,\ \xi\neq x,\ \tau<t<+\infty,\ u_t=a^2u_{xx}-hu,\quad 0<x,t<+\infty.$$

502. 497 масаладаги Грин функциясидан фойдаланиб, куйидаги масалани ечинг.

$$u_t=a^2u_{xx}-hu+f(x,t),\quad -\infty<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad -\infty<x<+\infty.$$

503. (3.82) формуладан фойдаланиб, қуйидаги масалани ечинг.

$$u_t=a^2u_{xx},\quad -\infty<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty.$$
$$u(x,0)=\begin{cases}0, & агар\quad -\infty<x<-l,\\ U_0=const\neq 0, & агар\quad -l<x<l,\\ 0, & агар\quad l<x<+\infty.\end{cases}$$

504. 498 масаладаги Грин функциясидан фойдаланиб, куйидаги масалани ечинг.

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty,$$
$$u(0,t)=\varphi(t),\quad 0<t<+\infty\quad u(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<+\infty.$$

505. 500 масаладаги Грин функциясидан фойдаланиб, қуйидаги масалани ечинг.

$$u_t = a^2u_{xx} + f(x,t),\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty,$$

$$u_x(0,t)=\varphi(t),\quad 0<t<+\infty\quad u(x,0)=\psi(t),\quad 0<x<+\infty.$$

506. (3.69) кўринишдаги Грин функциясидан фойдаланиб, қуйидаги масалани ечинг.

$$u_t = a^2u_{xx} + g(x,t),\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,$$

$$u(0,t)=\varphi(t),\; u(l,t)=0,\quad 0<t<+\infty\quad u(x,0)=f(x),\; 0<x<l.$$

507. (3.73) кўринишдаги Грин функциясидан фойдаланиб, қуйидаги масалани ечинг.

$$u_t = a^2u_{xx} + g(x,t),\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,$$

$$u_x(0,t)=\varphi(t),\; u(l,t)=0,\quad 0<t<+\infty\quad u(x,0)=f(x),\; 0<x<l.$$

508. 500 масаладаги Грин функциясидан фойдаланиб, қуйидаги масалани ечинг.

$$u_t = a^2u_{xx} + f(x,t),\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty,$$

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=-h\,\varphi(t),\; 0<t<+\infty\; u(x,0)=\psi(x),\; 0<x<+\infty.$$

509. Қуйидаги масалани ечинг.

$$u_t = a^2u_{xx} + f(x,t),\quad 0<t<x<+\infty,$$

$$u(x,0)=0,\; 0<x<+\infty,\; u(t,t)=0,\quad 0<t<+\infty.$$

510. Қуйидаги масалани ечинг.

$$u_t = a^2u_{xx},\quad \vartheta_0 t<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty,$$

$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<+\infty,\; u(\vartheta_0 t,t)=0,\quad 0<t<+\infty.$$

511. Қуйидаги масалани ечинг.

$$u_t = a^2u_{xx},\quad \vartheta_0 t<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty,$$

$$u(x,0)=0,\quad 0<x<+\infty,\; u(\vartheta_0 t,t)=\mu(t),\quad 0<t<+\infty.$$

512. Қуйидаги масалани ечинг.

$$u_t = a^2u_{xx},\quad \vartheta_0 t<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty,$$

$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<+\infty,\; u_x(\vartheta_0 t,t)=\mu(t),\quad 0<t<+\infty.$$

5- §. Бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун аралаш масалаларни Фурье усули ёрдамда ечиш

1. Бир жинсли тенглама бўлган ҳол.

I - Чегаравий масала.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3.83)$$

тенгламанинг $\{(x;t):0\le x\le l,\ \ t\ge 0\}$ соҳада аниқланган, узлукси ва

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad u\big|_{x=l}=0,\quad t\ge 0 \qquad (3.84)$$

чегагавий шартларни ҳамда

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad 0\le x\le l \qquad (3.85)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечими топилсин, бу ерда $\varphi(x)$ функция узлуксиз, бўлак – бўлак узлуксиз ҳосилага эга ва $\varphi(0)=\varphi(l)=0$.

Фурье усулига биноан (3.83) тенгламанинг хусусий ечимларини

$$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad (3.86)$$

кўринишда излаймиз [8],[15],[19]. (3.86) ни (3.83) ва (3.84) га қўйиб қуйидагиларни

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \qquad (3.87)$$

$$\left.\begin{aligned}&X''(x)+\lambda X(x)=0\\&X(0)=X(l)=0\end{aligned}\right\} \qquad (3.88)$$

ҳосил қиламиз[7].

II-бобнинг 7-§дан маълумки (3.88) масала Штурм – Лиувилл масаласи бўлиб, унинг хос қийматлари

$$\lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{l^2},\qquad n=1,2,3... \qquad (3.89)$$

лардан, хос функциялари эса

$$X_n(x)=sin\frac{\pi nx}{l}$$

лардан иборатдир. λ нараметрнинг $\lambda=\lambda_n$ қийматларига (3.87) тенгламанинг

$$T_n(t) = a_n exp\left(-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t\right)$$

ечимларни мос келади, бунда a_n - ихтиёрий ўзгармаслар.
Шундай қилиб,

$$u_n(x,t) = a_n sin\frac{\pi nx}{l} exp\left(-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t\right)$$

функциялар (3.83) тенгламани ва (3.84) чегаравий шартларни қаноатлантиради.

Бошланғич (3.85) шартни қаноатлантириш учун ушбу

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n exp\left(-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t\right) \cdot sin\frac{\pi nx}{l} \qquad (3.90)$$

қаторни тузамиз ва

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\frac{\pi nx}{l}$$

тенгликнинг бажарилишини талаб қиламиз, бунда

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi) sin\frac{\pi n\xi}{l} d\xi, \qquad (3.91)$$

$\varphi(x)$ функцияга қўйилган шартларга ва $0 \le exp\left(-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t\right) \le 1$ тенгсизликка асосан (3.90) қатор $t \ge 0$ бўлганда абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади.

(3.90) ва (3.91) дан (3.83), (3.84), (3.85) масаланинг ечимини топамиз:

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,t;\xi)\varphi(\xi) d\xi, \qquad (3.92)$$

бу ерда

$$G(x,t;\xi) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} exp\left(-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t\right) \cdot sin\frac{\pi n\xi}{l} \cdot sin\frac{\pi nx}{l}.$$

II-Чегаравий масала. (3.83) тенгламанинг (3.85) бошланғич шартни ва

$$u_x\Big|_{x=0}=0, \qquad u_x\Big|_{x=l}=0$$

чегаравий шартларни каноатлантирувчи $u(x,t)$ ечими топилсин.

III-Чегаравий масала. (3.83) тенгламанинг (3.85) бошланғич шартни ва

$$\alpha_1 u_x\Big|_{x=0}+\beta_1 u_x\Big|_{x=0}=0, \quad \alpha_2 u_x\Big|_{x=l}+\beta_2 u_x\Big|_{x=l}=0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечими топилсин, бу ерда $\alpha_i^2+\beta_i^2\neq 0,\ \ (i=1,2)$.

II ва **III** чегаравий масалаларни ҳам худди **I** чегаравий масалага ўхшаш Фурье усулида ечиш мумкин [3],[5],[8], [15]. Буни мисолларда кўрсатамиз.

1–Мисол. $$u_t=a^2u_{xx},\ \ 0<x<l,\ \ t>0 \tag{3.93}$$

тенгламанинг

$$u_x(0,t)=0,\ \ u_x(l,t)=0, \quad t>0 \tag{3.94}$$

чегаравий ва

$$u(x,0)=x \tag{3.95}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечимини топинг.

Ечиш. (3.93), (3.94), (3.95) масалани Фурье усулида ечиб, унинг ечимини

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

кўринишида ифодалаймиз, бу ерда

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l x\,dx=\frac{1}{l}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=l}=\frac{l}{2}, \tag{3.96}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad n=1,2\ldots \tag{3.97}$$

(3.97) ифодани соддалаштириш учун уни бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\rho=x,\ \Rightarrow\ d\rho=dx, \quad d\mu=\cos\frac{n\pi}{l}dx \quad \Rightarrow\ \mu=\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Бундан

$$a_n=\frac{2}{l}\left[\frac{l}{n\pi}x\cdot sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_{x=0}^{x=l}-\frac{l}{n\pi}\int_0^l sin\frac{n\pi}{l}xdx\right]=\frac{2l}{n\pi}sin\pi n+\frac{2l}{(n\pi)^2}cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_{x=0}^{x=l}=$$

$$=\frac{l}{2(n\pi)^2}[cosn\pi-cos0]=\frac{l}{2(n\pi)^2}\left[(-1)^n-1\right]=$$

$$=\begin{cases}0, & агар\ \ m=2k\\ -\dfrac{4l}{(n\pi)^2}, & агар\ \ n=2k+1,\quad k=0,1,2...\end{cases}\qquad(3.98)$$

(3.96) ва (3.98) га асосан (3.93), (3.94), (3.95) масаланинг ечимини қуйидагича кўринишда ифодалаймиз:

$$u(x,t)=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot e^{-\left(\frac{(2k+1)a\pi}{l}\right)^2 t}cos\frac{(2k+1)\pi}{l}x.$$

2–Мисол. $u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0$ тенгламанинг

$$u(0,t)=u_x(l,t)+hu(l,t)=0\ \ t>0,\ \ h>0\qquad(3.99)$$

чегаравий ва $u(x,0)=1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечимини топинг.

Ечиш. (3.93) ва (3.99) ни (3.86) га қўйиб қуйидагини

$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0\qquad(3.100)$$

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0\qquad(3.101)$$

$$X(0)=0,\ X'(l)+hX(l)=0\qquad(3.102)$$

ҳосил қиламиз. Энди (3.101), (3.102) масалани ечамиз.

(3.101)–оддий дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$X(x)=c_1cos\lambda x+c_2sin\lambda x\qquad(3.103)$$

кўринишда бўлади. (3.103) ни (3.102) шартни қаноатлантириб, c_1 ва c_2 ларни топамиз:

$$X(0)=c_1=0$$

$$c_2\left[\lambda cos\lambda l+hsin\lambda l\right]=0\ .$$

Бундан

$$c_2 \neq 0\,,\ \lambda cos\lambda l = -hsin\lambda l\ \Rightarrow\ htg\,\lambda l = -\lambda\ \Rightarrow$$

$$tg\mu_n = -\frac{\mu_n}{hl},\ \ \mu_n = \frac{\lambda_n}{l}. \qquad (3.10$$

(3.104) тенгламанинг мусбат ечимларини $\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}$ деб бел ласак, унга мос хос функция

$$X_n(x) = sin\lambda_n x, \quad n = 1,2,3... \qquad (3.10$$

кўринишда бўлади.

(3.100) тенгламанинг λ_n га мос ечимлари

$$T_n(t) = a_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \qquad (3.10$$

кўринишда бўлади, бу ерда a_n - ихтиёрий ўзгармаслар.

Демак, (3.93), (3.99) ва $u(x,0) = \varphi(x) = 1$ масаланинг ечим (3.105) ва (3.106) га кўра қуйидагига

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} sin\lambda_n x \qquad (3.10$$

тенг, бу ерда

$$a_n = \frac{1}{\left\| sin\lambda_n x \right\|^2} \int_0^l \varphi(x) sin\lambda_n x\, dx,$$

$$\left\| sin\lambda_n x \right\|^2 = \int_0^l sin^2\lambda_n x\, dx = \frac{l\left(h^2 + \lambda_n^2\right) + h}{2\left(h^2 + \lambda_n^2\right)}.$$

$\varphi(x) \equiv 1$ тенгликни эътиборга олиб a_n коэффициенти ҳисоблайми

$$a_n = \frac{2\left(h^2 + \lambda_n^2\right)}{l\left(h^2 + \lambda_n^2\right) + h} \int_0^l sin\,\lambda_n x\, dx = \frac{2\left(h^2 + \lambda_n^2\right)}{\lambda_n\left[l\left(h^2 - \lambda_n^2\right) + h\right]} cos\lambda_n x\Big|_{x=0}^{x=l} =$$

$$= -\frac{2\left(h^2 + \lambda_n^2\right)}{\lambda_n\left[l\left(h^2 - \lambda_n^2\right) + h\right]}\left[cos\lambda_n l - cos0\right] = -\frac{2\left(h^2 + \lambda_n^2\right)}{\lambda_n\left[l\left(h^2 - \lambda_n^2\right) + h\right]}\left[cos\mu_n - 1\right] =$$

$$= \left\{cos\mu_n = 0\right\} = \frac{2\left(h^2 + \lambda_n^2\right)}{\lambda_n\left[l\left(h^2 - \lambda_n^2\right) + h\right]}. \qquad (3.10$$

(3.108) ни (3.107) га қўйиб, қуйилган масаланинг ечимини топами

$$u(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(h^2+\lambda_n^{\ 2}\right)exp\left\{-\lambda_n^2a^2t\right\}}{\lambda_n\left[h+l\left(h^2-\lambda_n^{\ 2}\right)\right]}sin\lambda_n x\,.$$

2. Бир жинсли бўлмаган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси.

Ушбу

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t) \qquad (3.109)$$

тенгламанинг

$$u\big|_{x=0}=\psi_1(t),\ \ u\big|_{x=l}=\psi_2(t),\quad t\geq 0 \qquad (3.110)$$

чегаравий ва

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (3.111)$$

бошланғич шартларни каноатлантирувчи ечимини топинг.

(3.109), (3.110), (3.111) масаланинг ечимини

$$u(x,t)=\vartheta(x,t)+U(x,t) \qquad (3.112)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда

$$U(x,t)=\psi_1(t)+\left[\psi_2(t)-\psi_1(t)\right]\frac{x}{l}, \qquad (3.113)$$

$\vartheta(x,t)$ - функция $\vartheta_t=a^2\vartheta_{xx}+\overline{F}(x,t)$ тенгламанинг бир жинсли чегаравий шартларни, яъни

$$\vartheta\big|_{x=0}=\vartheta\big|_{x=l}=0,\quad t>0$$

ҳамда

$$\vartheta\big|_{t=0}=\overline{\varphi}(x)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимидир.

Бу $\vartheta(x,t)$ га нисбатан тузилган масала ўхшаш масала II-бобининг 7-§ да ўрганилган. Худди шундай (3.109) тенглама учун Фурье усули ёрдамида **II, III** аралаш масалаларни ечиш мумкин[3],[5],[8].

3. Тўғри бурчакли пластинкада иссиқлик тарқалиши ҳақидаги масала.

Ушбу

$$u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right) \qquad (3.114)$$

тенгламанинг $\mathrm{T}=\{(x,y,t):\ \ 0<x<p,\ 0<y<s,\ t>0\}$ соҳада аниқланган, узлуксиз ва

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=p}=0,\ 0\le y\le s,\ \ t\ge 0;\ \ u\big|_{y=0}=u\big|_{y=s}=0,\ 0\le x\le p,\ t\ge 0 \qquad (3.115)$$

чегаравий ва

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y),\quad 0\le x\le p,\quad 0\le y\le s \qquad (3.116)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

(3.114), (3.115), (3.116) масаланинг ечимини

$$u(x,t)=X(x)Y(y)T(t) \qquad (3.117)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $X(x)$, $Y(y)$, $T(t)$ функциялар мос равишда қуйидаги

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\quad Y''(y)+\mu^2Y(y)=0,$$

$$T'(t)+a^2\left(\lambda^2+\mu^2\right)T(t)=0$$

тенгламаларнинг умумий ечимлари бўлиб, мос равишда

$$X(x)=c_1cos\lambda x+c_2sin\lambda x,\qquad Y(y)=c_3cos\,\mu y+c_4sin\,\mu y,$$

$$T(t)=A\,e^{-\left(\lambda^2+\mu^2\right)a^2t}$$

функциялардан иборатдир. Бундан (3.115) шартларга асоса қуйидагига

$$c_1=c_3=0,\qquad \lambda=\frac{\pi k}{p},\quad \mu=\frac{\pi n}{s},\quad (n,k=1,2,3,...)$$

эга бўламиз.

Шундай қилиб, (3.117) га кўра (3.114) тенгламанинг (3.115) шартларни қаноатлантирувчи ечими қуйидагича

$$u(x,y,t)=\sum_{k,n=1}^{\infty}A_{kn}\,exp\left(-a^2\left(\frac{k^2\pi^2}{p^2}+\frac{n^2\pi^2}{s^2}\right)t\right)sin\frac{\pi k}{p}x\cdot sin\frac{\pi n}{s}y, \qquad (3.118)$$

бўлади.

(3.118)ни (3.116)га қаноатлантириб, икки каррали Фурь қаторининг хоссаларига кўра номаълум A_{kn} коэффициен қуйидагича

$$A_{kn}=\frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s\varphi(x,y)\,sin\frac{\pi k}{p}x\cdot sin\frac{\pi n}{s}y\,dxdy$$

аниқланади.

Буни (3.118)га қўйиб, (3.114), (3.115), (3.116) масаланинг ечимини оламиз.

Мустақил ечиш учун масалалар

I. $u_t = a^2 u_{xx}$ тенглама учун $0 < x < l$, $t > 0$ ярим поласада қўйилган қуйидаги аралаш масалаларнинг ечими топилсин.

913. $u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = Ax.$

914. $u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x).$

915. $u_x(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = A(l-x).$

916. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = U.$

917. $u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad h > 0.$

918. $u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = U, \quad h > 0.$

919. $u_t(0,t) - hu(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \quad u(x,0) = U, \quad h > 0.$

II. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун $0 < x < l$, $t > 0$ ярим поласада қўйилган қуйидаги аралаш масалаларнинг ечими топилсин.

920. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x).$

921. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = sin\frac{\pi x}{2l}.$

922. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x).$

923. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = U, \quad h > 0.$

924. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0,t) = T, \quad u(l,t) = U, \quad u(x,0) = 0.$

925. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x), \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = q, \quad u(x,0) = \varphi(x).$

926. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad u_x(0,t) = u_x(l,t) = q, \quad u(x,0) = Ax.$

927. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0,t) = T, u_x(l,t) + hu(l,t) = U, \quad u(x,0) = 0, \quad h > 0.$

928. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + sin\frac{\pi x}{l}, \quad u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = 0.$

929. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = Ae^{-t}, \quad u(x,0) = T.$

930. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0,t) = At, \quad u_x(l,t) = T, \quad u(x,0) = 0.$

III. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун қўйилган қуйидаги аралаш масалаларнинг ечими топилсин.

531. $u_t = u_{xx}, \; 0 < x < 1, \; u_x\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \; u\big|_{t=0} = x^2 - 1.$

532. $u_{xx} = u_t + u, \; 0 < x < l, \; u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, \; u\big|_{t=0} = 1.$

533. $u_t = u_{xx} - 4u, \; 0 < x < \pi, \; u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \; u\big|_{t=0} = x^2 - \pi x.$

534. $u_t = u_{xx}, \; 0 < x < l, \; u_x\big|_{x=0} = 1, \; u\big|_{x=l} = 0, \; u\big|_{t=0} = 0.$

535. $u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x, \; 0 < x < \frac{\pi}{2}, \; u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = u\big|_{t=0} = 0.$

536. $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t, \; 0 < x < 1, \; u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = t, \; u\big|_{t=0} = e^x \sin \pi x.$

537. $u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cdot \cos x, \; 0 < x < 0{,}5\pi, \; u_x\big|_{x=0} = 0,$

$$u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1, \; u\big|_{t=0} = x.$$

538. $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x, \; 0 < x < \pi, \; u_x\big|_{x=0} = 0,$

$$u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi t, \; u\big|_{t=0} = 0.$$

539. $u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \cdot \sin x - t, \; 0 < x < \pi, \; u_x\big|_{x=0} = 1 + t,$

$$u_x\big|_{x=\pi} = 1 + t, \; u\big|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x.$$

540. $u_t - u_{xx} - u = x\,t(2 - t) + 2\cos t, \; 0 < x < \pi, \; u_x\big|_{x=0} = t^2,$

$$u_x\big|_{x=\pi} = t^2, \; u\big|_{t=0} = \cos 2x.$$

541. $u_t - u_{xx} - 9u = 4\sin^2 t \cdot \cos 3x - 9x^2 - 2, \; 0 < x < \pi, \; u_x\big|_{x=0} = 0,$

$$u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi, \; u\big|_{t=0} = x^2 + 2.$$

542. $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1 - 3t) - 6x + 2\cos x \cdot \cos 2x, \; 0 < x < \frac{\pi}{2},$

$$u_x\big|_{x=0} = 1, \; u_x\big|_{x=0{,}5\pi} = t^2 + 0{,}5\pi, \; u\big|_{t=0} = x.$$

543. $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1 - 6t) - 2(t + 3x) + \sin 2x, \; 0 < x < \pi,$

$$u_x\big|_{x=0} = 1, \; u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi t + 1, \; u\big|_{t=0} = x.$$

544. $u_t = u_{xx} + 4u_x + x - 4t + 1 + e^{-2x} \cdot \cos^2 \pi x, \; 0 < x < 1, \; u\big|_{x=0} = t,$

$$u\big|_{x=1} = 2t, \; u\big|_{t=0} = 0.$$

IV. $T=\{(x,y,t):\quad 0<x<p,\ 0<y<s,\ t>0\}$ соҳада қуйидаги аралаш масалаларнинг ечими топилсин.

945. $u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right),\ u(0,y,t)=u(p,y,t)=0,\quad 0<y<s,\quad t>0,$

$u(x,0,t)=u(x,s,t)=0,\quad 0<x<p,\quad t>0,$

$u(x,y,0)=xy,\quad 0<x<p,\ 0<y<s.$

946. $u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right),\ u_x(0,y,t)=u(p,y,t)=0,\quad 0<y<s,\quad t>0,$

$u(x,0,t)=u(x,s,t)=0,\quad 0<x<p,\quad t>0,$

$u(x,y,0)=f(x,y),\quad 0<x<p,\ 0<y<s.$

947. $u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right),$

$u(0,y,t)=0,\quad u_x(p,y,t)+hu(p,y,t)=0,\quad 0<y<s,\quad t>0,$

$u_y(x,0,t)=u(x,s,t)=0,\quad 0<x<p,\quad t>0,$

$u(x,y,0)=f(x,y),\quad 0<x<p,\ 0<y<s.$

948. $u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f(x,y,t),$

$u(0,y,t)=u_x(p,y,t)=0,\quad 0<y<s,\quad t>0,$

$u(x,0,t)=u(x,s,t)=0,\ 0<x<p,\ t>0,\ u(x,y,0)=0,\ 0<x<p,\ 0<y<s.$

949. $u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+A\sin\dfrac{3\pi x}{2p}\cos\dfrac{\pi y}{2s},$

$u(0,y,t)=u_x(p,y,t)=0,\quad 0<y<s,\quad t>0,$

$u_y(x,0,t)=u(x,s,t)=0,\quad 0<x<p,\quad t>0,$

$u(x,y,0)=B\sin\dfrac{\pi x}{2p}\cos\dfrac{3\pi y}{2s},\quad 0<x<p,\ 0<y<s.$

950. $u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+A\sin\dfrac{\pi x}{p}\cos\dfrac{\pi y}{2s},$

$u(0,y,t)=u(p,y,t)=0,\quad 0<y<s,\quad t>0,$

$u_y(x,0,t)=u_y(x,s,t)=0,\quad 0<x<p,\quad t>0,$

$u(x,y,0)=0,\quad 0<x<p,\ 0<y<s.$

IV БОБ

ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР

1- §. Гармоник функциянинг асосий хоссалари

1.1-Таъриф. Агар $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ функция z_0 нуқтал ва унинг бирор атрофидаги барча нукталарида дифференциа ланувчи бўлса, бу функция шу нуқтада **аналитик** дейилади [9], [14].

1.2-Таъриф. Бирор D соҳанинг барча нуқталарида аналити бўлган $f(z)$ функция, D **соҳада аналитик** дейилади.

1-Мисол. Қуйидаги e^z, $cosz$, $sinz$, z^n, chz, shz функци лар барча z ларда дифференциалланувчи бўлгани учун буту текисликда аналитик функциялар бўлади.

Агар $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ функция D соҳада аналитик бўл у ҳолда бу функция учун қуйидаги

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4.1)$$

Коши-Риман шарти бажарилади.

(4.1) шартнинг биринчисини x бўйича, иккинчисини бўйича дифференциаллаб, $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ тенгликни эътибор олсак, $u(x,y)$ функция учун

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (4.2_1)$$

тенгликни оламиз. Худди шу усул билан $v(x,y)$ функция учун ҳам (4.2$_1$) тенгликни ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин. (4.2$_1$) кўринишдаги тенгламага **Лаплас тенгламаси** дейилади, ва бу тенглама эллиптик типдаги энг содда ва муҳим тенгламалард бири ҳисобланади.

Энди ушбу Лаплас тенгламасини

$$\Delta u=0, \qquad \Delta\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \qquad (4.2)$$

қарайлик.

1.3-Таъриф. Агар $u(x)=u(x_1,x_2,...,x_n)$ функция чекли D соҳада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, (4.2) Лаплас тенгламасини қаноатлантирса, $u(x)=u(x_1,x_2,...,x_n)$ функция чекли D соҳада **гармоник функция** дейилади[11],[15].

1.4-Таъриф. Агар $u(x)=u(x_1,x_2,...,x_n)$ функция чексиз D соҳанинг координата бошидан чекли масофада ётган ихтиёрий x нуқтасида икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, (4.2) Лаплас тенгламасини қаноатлантирса ва етарли катта $|x|$ лар учун

$$\left|u(x)\right|\le\frac{c}{|x|^{n-2}},\quad |x|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2},\quad c=const$$

тенгсизлик бажарилса, $u(x)$ функция чексиз D соҳада **гармоник функция** дейилади.

Масалан. 1) $u(x)\equiv 1$ функция $n=2$ бўлганда, чексиз D соҳада гармоник функция бўлади. Агар $n>2$ бўлса, у ҳолда чексиз D соҳада гармоник функция бўла олмайди. Лекин бу функция ихтиёрий n да чекли D соҳада гармоник функция бўлади.

2) $u(x,y)=x^2+y^2+5$ функция ҳеч бир соҳада гармоник функция эмас, чунки бу функция Лаплас тенгламасини қаноатлантирмайди:

$$\Delta u(x,y)=\Delta\left(x^2+y^2+5\right)=4\ne 0.$$

2–Мисол. Агар $u=u(x,y)$ – гармоник функция бўлса, у ҳолда $u=u\left(ax+b,\ cy+d\right)$ функция ҳам гармоник бўладими? Бу ерда $a,\ b,\ c,\ d-$ ўзгармас сонлар.

Ечиш. Таърифларга кўра $u=u(x,y)$ – гармоник бўлгани учун, бу функция икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, қуйидаги

$$\Delta u(x,y)=\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}=0$$

Лаплас тенгламасини қаноатлантиради.

Бундан $u=u\left(ax+b,\ cy+d\right)$ функциянинг ҳам 2–тартибгача хусусий ҳосилалари узлуксиздир. Энди бу функцияни Лаплас тенгламасини қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Қуйидаги тенглик ўринли:

$$\Delta u = \Delta u\left(ax+b,\ cy+d\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 u(ax+b,\ cy+d)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(ax+b,\ cy+d)}{\partial y^2}=$$

$$=a^2\,\frac{\partial^2 u(ax+b,\ cy+d)}{\partial(ax+b)^2}+c^2\,\frac{\partial^2 u(ax+b,\ cy+d)}{\partial(cy+d)^2}.$$

Бу ердан кўринадики, агар $a=c$ бўлса, $u=u\left(ax+b,\ cy+d\right)$ функция гармоник бўлади, $a\neq c$ да эса, гармоник эмас.

Шундай килиб, юқоридаги таърифларга асосан аналити функциянинг **мавҳум** ва **ҳақиқий** қисмлари гармоник функция синфига тегишли булади.

3-Мисол. $u_x(x,y)=xy+x^2-y^2$ бўлса, $u(x,y)$ гармон функцияни топинг.

Ечиш. $u(x,y)$ гармоник функция **Лаплас** тенгламасини кано лантиради, демак берилган ифодадан ва

$$u_{xx}(x,y)=y+2x,\quad u(x,y)=\frac{x^2}{2}y+\frac{x^3}{3}-xy^2+\varphi(y),$$

$u_{yy}(x,y)=-2x+\varphi''(y)$ ларни эътиборга олиб, куйидаги $u_{xx}+u_{yy}=y+\varphi''(y)=0$ эга бўламиз.

Бундан $\varphi(y)=-\frac{1}{6}y^3+c_1y+c_0;$ ни топамиз, яъни юқоридагила кўра $u(x,y)$ гармоник функция

$$u(x,y)=\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{6}+\frac{x^2y}{2}-xy^2+c_1y+c_0$$

кўринишга эга бўлади.

4-Мисол. $u_z=e^x(x\cos y-y\sin y)+2z;$ бўлса, $u(x,y,z)$ гармон функцияни топинг.

Ечиш. $u(x,y,z)$ гармоник функция $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ уч ўлчов Лаплас тенгламасини қаноатлантиради. Демак берил $u_z=e^x(x\cos y-y\sin y)+2z$ ифодадан

$$u=e^x(x\cos y-y\sin y)z+z^2+f(x,y)\qquad (4.$$

ни оламиз, бу ерда $f(x,y)$ ихтиёрий икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функция.

(4.3) функциядан қуйидаги ҳосилаларни

$$u_{zz} = 2, \quad u_{xx} = \left[e^x(x+2)cos\, y - e^x y sin\, y\right]z + f_{xx},$$

$$u_{yy} = \left[-e^x(x+2)cos\, y + e^x y sin\, y\right]z + f_{yy}$$

топамиз. Буларни уч ўлчовли Лаплас тенгламасига қўйиб $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=2+f_{xx}+f_{yy}=0$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $f_{xx}+f_{yy}=-2$ тенглама ечимини $f(x,y)=g(x,y)+\varphi(x)$ кўринишда излаймиз, бу ерда $g(x,y)-$ ихтиёрий гармоник функция. $f(x,y)=g(x,y)+\varphi(x)$ ни охирги тенгламага қўйиб $\varphi(x)=-x^2+cx+c_1$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, $u(x,y,z)$ гармоник функция

$$u = e^x(x cos\, y - y\, sin\, y)z + z^2 - x^2 + g(x,y)$$

кўринишга эга бўлади.

1.5-Таъриф. Коши–Риман шарти орқали боғланган иккита $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ гармоник функциялар **қўшма гармоник** функциялар дейилади.

1.6-Таъриф. Агар $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ функциялар бирор D соҳада қўшма гармоник бўлса, у ҳолда $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ функция D соҳада **аналитик** бўлади.

5-Мисол[3]. $u(x,y) = ch\, x \cdot sin\, y$ функцияга қўшма гармоник бўлган $v(x,y)$ функцияни Коши–Риман системасидан фойдаланиб топинг.

Ечиш. Коши--Риман системасидан фойдаланиб $u(x,y)=shx\ cos\ y$ функциядан $u_x(x,y)=cos\ y\cdot chx=v_y(x,y)$ ни оламиз. Бундан эса

$$v(x,y) = sin\, y\cdot chx + \varphi(x) \tag{4.4}$$

ни эга бўламиз.

(4.4)ни x бўйинча дифференциаллаб, берилган функция ва (4.1) формулани эътиборга олиб, қуйидагига

$$v_x(x,y) = sin\, y\cdot shx + \varphi'(x) = -u_y(x,y) = sh\, x\cdot sin\, y$$

ни эга бўламиз. Бундан $\varphi'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x)=const.$

Шундай қилиб, $v(x,y)$ функция $v(x,y)=sin\, y\cdot chx+c$ кўринишга эга бўлади.

6-Мисол. $u_x(x,y)=xy$ бўлса, $v(x,y)$ қўшма гармони функцияни топинг.

Ечиш. (4.1) Коши–Риман системаси кўра $u_x(x,y)=xy=v_y(x,y)$ г тенг. Бундан $v(x,y)=\frac{xy^2}{2}+\varphi(x)$ га эга бўламиз. Изланаётги $v(x,y)$ гармоник функция бўлгани учун Лаплас тенгламасин қаноатлантиради, яъни $v_{yy}(x,y)=x$, $v_{xx}(x,y)=\varphi''(x)$ лари эътиборга олиб, куйидагини $v_{yy}(x,y)+v_{xx}(x,y)=\varphi''(x)+x=0 \Rightarrow \varphi''(x)=$ оламиз. Бундан $\varphi(x)=-x^3/6+c_1x+c_2$ ни топамиз.

Шундай қилиб, $v(x,y)$ қўшма гармоник функция

$$v(x,y)=\frac{xy^2}{2}-\frac{x^3}{6}+c_1x+c_2$$

кўринишда бўлади.

Бир боғламли D соҳада $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ гармони функциялар $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитик функциянинг ҳақиқи ва мавҳум қисмлари бўлиб, улар ўзаро (4.1) Коши-Риман шарт орқали боғланган бўлсин. Шунинг учу $dv=v_x dx+v_y dy=-u_y dx+u_x dy$ ифода $v(x,y)$ қўшма гармони функциянинг тўла дифференциалини ифодалайди. Бу ифодани эгри чизиқли интеграли куйидаги

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y dx+u_x dy \qquad (4.5)$$

кўринишда топилади, бу ерда (x_0,y_0) ва (x,y) нуқталар D соҳани ихтиёрий нуқталари бўлиб, бу нуқталарда u, u_x ва u функциялар узлуксиздир. Агар интеграллаш йўли D соҳада ёт бирор (x_0,y_0), (x,y_0) ва (x,y_0), (x,y) нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқли кесмадан (ёки (x_0,y_0) ва (x,y) нуқталари туташтирувчи чекли сондаги поғонали синиқ чизиқлардан) ибор бўлса, у ҳолда (4.5) тенгликдан $v(x,y)$ функцияни куйидаги

$$v(x,y)=\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dy-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial y}dx+c \qquad (4.6)$$

кўринишда топамиз.

Худди шу усул билан $u(x,y)$ функцияни $v(x,y)$ функция орқали қуйидагича

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}dx-\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial v(x_0,y)}{\partial x}dy+c \qquad (4.7)$$

ифодалаймиз.

7-Мисол. Агар $f(z)$ аналитик функциянинг $u(x,y)=Re\,f(z)=sin\,x\cdot ch\,y$ ҳақиқий қисми берилган бўлса, у ҳолда бир боғламли D соҳада эгри чизиқли интеграллаш ёрдамида $f(z)$ аналитик функцияни топинг.

Ечиш. Маълумки, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ бўлиб, $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ функциялар

$$\begin{cases} u_x-v_y=0 \\ u_y+v_x=0 \end{cases}$$

Коши – Риман системасини қаноатлантиради. Демак, (4.5) формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$v(x,y)=-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial y}dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dy+c=-\int\limits_{x_0}^{x}sin\,x\cdot sh\,y_0dx+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}cos\,x\cdot ch\,y\,dy=cos\,x\,sh\,y_0-cos\,x_0\,sh\,y_0+cos\,x\,sh\,y-cos\,x\,sh\,y_0+c=$$

$$=-cos\,x_0\,shy_0+cos\,x\,shy+c\,.$$

Шундай қилиб, $f(z)$ аналитик функция қуйидаги

$$f(z)=sin\,x\,ch\,y+i(cos\,x\,sh\,y-cos\,x_0\,sh\,y_0+c)$$

кўринишда тузилади.

8-Мисол. $v(x,y)=\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}sin\,y$ функция ва $f(0)=2$ шарт орқали $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитик функцияни топинг.

Ечиш. $v(x,y)$ функция гармоник функция эканлигини текшири максадида $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2shx\,sin\,y$ ва $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-2shx\,sin\,y$ ҳосилаларни топами ва барча (x,y) лар учун Лаплас тенгламаси қаноатлантирилиши ишонч хосил қиламиз, яъни $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ тенглик бажарила Демак $v(x,y)$ функция гармоник функциядир. Бундан ва (4. формуладан ҳамда $x_0=0,\ \ y_0=0$ нуқтани танлаб, қуйидагига

$$u(x,y)=2\int_0^x sh\,x\,cos\,y dx-2\int_0^y ch0\cdot sin\,y dy=2ch\,x\,cos\,y-2+c$$

эга бўламиз.

Шундай қилиб, $f(z)$ аналитик функция қуйидаги

$$f(z)=2chx\cdot cos\,y+2i\cdot shx\cdot sin\,y-2+c\ .$$

кўринишда тузилади. Бундан $f(0)=2$ шартга асосан $c=2$ тенгли келиб чиқади. Демак, изланаётган $f(z)$ функция

$$f(z)=2\left(chx\cdot cos\,y+i\cdot shx\cdot sin\,y\right)$$

кўринишда бўлади.

Экстремум принципи. D соҳада гармоник бўлган ўзгармас фарқли $u(x)$ функция ўзининг экстремум қийматига соҳанинг бир ички нуқтасида эришмайди.

Мустақил ечиш учун масалалар

551. $u_{xx}+u_{yy}=0$ бўлганда, қуйидаги функциялар k нинг қан қийматида гармоник бўлади?

a) $kx^2+3kyx-2x$; b) $2x^3+3kxy^2-1$;

c) $e^{2x}shky$; d) $e^{kx}ch3y$; e) $cos2x\,shky$.

552. $u=u(x,y)$–гармоник функция бўлсин. қуйидаги функция нинг гармоник ёки гармоник эмаслигини аникланг:

a) $u(x+h_1,y+h_2)$, $h_1.h_2-$ ўзгармас сонлар;

b) $u(\lambda x,\lambda y)$, $\lambda-$ скаляр ўзгармас; c) $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$;

d) $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}$; e) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$; f) $\frac{\partial u}{\partial x}\Big/\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$;

g) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}$; h) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$; i) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

553. Агар $u(x_1,x_2,x_3)$ ва $v(x_1,x_2,x_3)$ функциялар гармоник функциялар бўлса, қуйидаги функциялар гармоник функция бўладими?

a) $u(x_1,x_2,x_3)\pm v(x_1,x_2,x_3)$;

b) $u(x+h)$, $h=(h_1,h_2,h_3)$ - ўзгармас вектор;

c) $u_{x_1}u_{x_2}$; d) $u_{x_1}u_{x_2}+v_{x_2}v_{x_3}$; e) $x_1u_{x_1}+x_2u_{x_2}+x_3u_{x_3}$.

554. Агар $f(z)$ аналитик функциянинг $u(x,y)=Re\ f(z)$ ҳақиқий ёки $v(x,y)=\mathrm{Im}\ f(z)$ мавҳум қисми берилган бўлса, у ҳолда бир боғламли D соҳада эгри чизиқли интеграллаш ёрдамида $f(z)$ аналитик функцияни топинг. Бу ерда

a) $u(x,y)=x+\dfrac{x}{x^2+y^2}$; b) $u(x,y)=x^3-3xy^2$;

c) $u(x,y)=e^x\sin y$; d) $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$, $f(0)=0$;

e) $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(1)=1+i$; f) $v(x,y)=x^3y-xy^3$;

g) $v(x,y)=chx\cdot\sin y$; h) $v(x,y)=-shx\cdot\cos y$, $f(0)=3$;

i) $v(x,y)=x^2-y^2$, $f(2)=i+2$; j) $v(x,y)=5chx\cdot\sin y$, $f(0)=1$.

555. Коши-Риман системасидан фойдаланиб, $u(x,y)$ га қўшма гармоник бўлган $v(x,y)$ функцияни топинг, агар

a) $u(x,y)=xy^3-yx^3$; b) $u(x,y)=shx\cos y$;

c) $u_x(x,y)=chx\sin y$; d) $u(x,y)=e^y\sin x$;

556. $u(x,y)$ ва $u(x,y,z)$ гармоник функцияларни топинг, агар

a) $u_x(x,y)=3yx^2-y^3$; b) $u_y(x,y)=x^2-y^2+x+y$;

c) $u_y(x,y)=e^x\cos y$; d) $u_y(x,y,z)=e^x\cos z-2y$;

e) $u_z(x,y)=xy^2-xz^2+6xz+x$.

2- §. Регуляр ва фундаментал ечим

D орқали декарт ортогонал координаталари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $n\geq 2$ бўлган x нуқталарнинг n – ўлчовли E^n Евклид фазосидаги соҳани, яъни очиқ боғланган (бўш бўлмаган) тўпламни белгилаймиз.

D соҳада аникланган ушбу

$$F\left(x,\ ...,\ D^{\alpha}u,\ ...\right)=0 \qquad (4.8)$$

кўринишдаги m – тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда

$$D^{\alpha}u=D_1^{\alpha_1}\ D_2^{\alpha_2}\ \ ...\ D_n^{\alpha_n}u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ \partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}},\quad D^0u=u(x) \qquad (4.9)$$

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\alpha_n$ - n – тартибли мультииндекс бўлиб, унинг узунлиги $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ га тенг.

2.1 – Таъриф. D соҳада аниқланган $u(x)$ функция (4.8) тенгламада иштирок этувчи барча ҳосилалари билан узлуксиз бўлиб, уни айниятга айлантирса, $u(x)$ ни (4.8) тенгламанинг **регуляр(классик) ечими** дейилади [15].

2.2 – Таъриф. Айрим ажралган нуқталарда ёки махсус кўринишдаги кўпхиллик (ўз – ўзи билан кесишмайдиган ва четлари бўлмаган сирт) ларда регуляр ечим бўлмайдиган ечимлари (4.8)нинг **фундаментал (элементар) ечими** дейилади [4].

Масалан: E^n фазодаги икки $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ нуқта орасидаги масофани r орқали белгилаб оламиз, яъни

$$r=|x-\xi|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2} \qquad (4.10)$$

Бевосита текшириш билан ишонч ҳосил қилиш мумкинки, ушбу

$$E(x,\xi)=\begin{cases} r^{2-n}, & n>2, \\ \ln\frac{1}{r}, & n=2 \end{cases} \qquad (4.11)$$

функция $x\neq\xi$ $\left[(x_1,...,x_n)\neq(\xi_1,...,\xi_n)\right]$ бўлганда x бўйича ҳам, ξ бўйича ҳам (4.2) Лаплас тенгламасини каноатлантиради.

Ҳақиқатан,

$$\frac{\partial E}{\partial x_i}=(2-n)r^{1-n}\frac{\partial r}{\partial x_i}=(2-n)r^{1-n}\frac{x_i-\xi_i}{r}=(2-n)r^{-n}\left(x_i-\xi_i\right),$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}=(2-n)r^{-n}-(2-n)nr^{-n-2}\left(x_i-\xi_i\right)^2.$$

Охирги ифодани (4.2) Лаплас тенгламасининг чап томонига олиб бориб қўямиз. У ҳолда (4.10) кўра

$$\Delta E = n(2-n)r^{-n} - n(2-n)r^{-n-2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2 = 0.$$

Худди шунга ўхшаш $n=2$ ҳолни текширилиб кўрилади. $E(x,\xi)$ функция x ва ξ га нисбатан симметрик бўлгани учун бу функция $x \neq \xi$ да ξ бўйича ҳам (4.2) Лаплас тенгламасини қаноатлантиради. Шундай қилиб, 2.2 – таърифга кўра (4.11) формула билан аниқланган $E(x,\xi)$ функцияни (4.2) Лаплас тенгламасининг **элементар** ёки **фундаментал** ечими дейилади. $E(x,\xi)$ функция учун чексизликда $(|x| \to \infty)$

$$E(x,\xi) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right) \tag{4.12}$$

баҳо ўринлидир. Агар $n=2$ бўлса, у ҳолда $E(x,\xi)$ функция чексизликда **чегараланган** бўлади.

1–Мисол. $E(x,\xi)=\dfrac{1}{r}$ функцияни $u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}=0$ тенглама учун фундаментал ечим бўлишлигини исботланг.

Исбот. Берилган $E(x,\xi)=\dfrac{1}{r}$ функция $x \neq \xi$ бўлганда x бўйича ҳам, ξ бўйича ҳам берилган тенгламани қаноатлантиради.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = -\frac{1}{r^3}(x_1-\xi_1), \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} = \frac{3}{r^5}(x_1-\xi_1)^2 - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_2} = -\frac{1}{r^3}(x_2-\xi_2), \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} = \frac{3}{r^5}(x_2-\xi_2)^2 - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_3} = -\frac{1}{r^3}(x_3-\xi_3), \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x_3^2} = \frac{3}{r^5}(x_3-\xi_3)^2 - \frac{1}{r^3}.$$

Бу ифодаларни берилган тенгламанинг чап томонига қуйиб, (4.10) га кўра қуйидагига

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial x_3^2} = \frac{3}{r^5}\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2\right]-\frac{3}{r^3} =$$

$$=\frac{3}{r^5}r^2-\frac{3}{r^3}=3\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^3}\right)=0$$

эга бўламиз. Шундай қилиб, $E(x,\xi)$ функция $x\neq\xi$ бўлга берилган Лаплас тенгламасини қаноатлантиради.

Демак, 2.2 – таърифга кўра $E(x,\xi)=1/r$ функция фундамен ечимдир.

2–Мисол. $E(x,\xi)=\frac{1}{\pi z}=\frac{1}{\pi(x+iy)}$ функция $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ Коши Риман операторининг фундаментал ечими эканлигини исботлан

Исбот. $E(x,\xi)=\frac{1}{\pi(x+iy)}$ функция $z=x+iy\neq0$ да $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=0$ Коши Риман тенгламасини қаноатлантиради.

Ҳақиқатан,

$$\frac{\partial E}{\partial x}=-\frac{1}{\pi(x+iy)^2},\qquad \frac{\partial E}{\partial y}=-\frac{i}{\pi(x+iy)^2}$$

ифодаларга кўра

$$\frac{\partial E}{\partial\bar{z}}=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{(x+iy)^2}+i\frac{i}{(x+iy)^2}\right]=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{(x+iy)^2}-\frac{1}{(x+iy)^2}\right]=0$$

эга бўламиз. Шундай қилиб, $E(x,\xi)=\frac{1}{\pi(x+iy)}$ функция Коши – Риман тенгламасини қаноатлантиради. Демак, бу функц фундаментал ечимдир.

Мустақил ечиш учун масалалар

557. $E(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $u_{xx}+u_{yy}=0$ тенгламани фундаментал ечими бўлишлигини исботланг.

558. $E(x,\zeta)=-\frac{\Gamma(n/2)}{(n-2)\cdot2\pi^{n/2}r^{n-2}}$, $n=3,4...$ функция $\Delta u\equiv\sum_{i=3}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}$ тенгламанинг фундаментал ечими эканлигини исботланг.

559. $E(x,y,z)=-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ функция

$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+k^2u=0$ Гельмголрц тенгламасининг фундаментал ечими эканлигини исботланг.

160. $E(x,y,z)=-\dfrac{e^{-ikr}}{4\pi r}$, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ функция $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-k^2u=0$ Гельмголрц тенгламасининг фундаментал ечими эканлигини исботланг.

161. $E(x,y,z)=\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{sign\operatorname{Im}\lambda}{y-\lambda x}\cdot e^{-\mu\alpha}$, $\operatorname{Im}\lambda\neq0$ функция $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial u}{\partial y}+\mu u=0$ умулашган Коши–Риман тенгламасининг фундаментал ечими эканлигини исботланг.

162. $E(x)$ - функция берилган тенгламанинг фундаментал ечими бўлишлигини исботланг.

1) $E(x)=\theta(x)\cdot e^{\pm ax}$; $\dfrac{du}{dx}\mp au=0$, $\theta(x)=\begin{cases}1, & x\geq0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

2) $E(x)=\theta(x)\cdot\dfrac{\sin ax}{a}$; $\dfrac{d^2u}{dx^2}+a^2u=0$;

3) $E(x)=\theta(x)\cdot\dfrac{sh\,ax}{a}$; $\dfrac{d^2u}{dx^2}-a^2u=0$;

4) $E(x)=\theta(x)\cdot\dfrac{1-e^{-4x}}{4}$; $\dfrac{d^2u}{dx^2}+4\dfrac{du}{dx}=0$;

5) $E(x)=0,5\,\theta(x)\cdot\left(1-e^{x}\right)^2$; $\dfrac{d^3u}{dx^3}-3\dfrac{d^2u}{dx^2}+2\dfrac{du}{dx}=0$.

163. $E(x,y)=\gamma\left(r_1^2\right)^{-\frac{1}{6}}F\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3};1-\dfrac{r^2}{r_1^2}\right)$ функция $yu_{xx}+u_{yy}=0,\ (y>0)$ Трикоми тенгламасининг фундаментал ечими эканлигини исботланг, бу ерда

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\}=(x-x_0)^2+\frac{4}{9}\left(y^{3/2}\mp y_0^{3/2}\right)^2.$$

164. $E(x,y)=\gamma_1\left(\dfrac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}\left(r_1^2\right)^{-\beta}\left(1-\dfrac{r^2}{r_1^2}\right)^{1-2\beta}F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;1-\dfrac{r^2}{r_1^2}\right)$

функция $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \ (y > 0)$ Геллерстедт тенгламасининг фундаментал ечими эканлигини исботланг, бу ерда

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x - x_0)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{(m+2)/2} \mp y_0^{(m+2)/2}\right)^2, \beta = \frac{m}{2(m+2)}, \ m > 0.$$

565. $u(x, y) = \operatorname{Re}\int_0^z J_0\left[\mu\sqrt{(z-t)\cdot\overline{z}}\,\right] f(t)dt, z = x + iy, \quad \mu^2 = \lambda$ функция $u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ Гельмголрц тенгламасининг регуляр ечими эканлигини исботланг, бу ерда $f(z)$- ихтиёрий аналитик функция.

566. $u(r) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\mu r t}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \quad \mu^2 = -\lambda, \ r \neq 0$ функция $u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ Гельмголрц тенгламасининг ечими эканлигини исботланг.

567. $u(x) = \vartheta_0(x) + |x|^2 \vartheta_1(x), \ \Delta\vartheta_0(x) = 0, \ \Delta\vartheta_1(x) = 0, \ |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ функция $\Delta^2 u = 0,$ бигармоник тенгламанинг ечими эканлигини исботланг.

568. $u(r) = r^2 \ln r, \quad |x - y| = r \neq 0$ функция $n = 2$ да $\Delta^2 u = 0$ бигармоник тенгламанинг ечими эканлигини исботланг.

3- §. Лаплас ва Пуассон тенгламалари учун чегаравий масалалар

Маълумки стационар бўлмаган иссиқлик майдоннинг температураси $u_t = a^2 \Delta u$ дифференциал тенгламани қаноатлантиради. Агар жараён стационар бўлса, у ҳолда $u(x, y)$ температуранинг вақтга нисбатан ўзгармас тарқалиши кузатилади, яъни температура (4.2$_1$) Лаплас тенгламасини қаноатлантиради. Иссиклик манбаи маълум бўлган ҳолда эса

$$\Delta u = f \ , \ \ f = -\frac{F}{k} \tag{4.13}$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бу ерда F – иссиқлик манбаи зичлиги k – эса иссиклик тарқалиш коэффициенти. (4.13) кўринишдаги бир жинсли бўлмаган Лаплас тенгламасини кўп ҳолларда **Пуассон тенгламаси** деб ҳам юритилади.

E^n фазодаги икки $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ нукта орасидаги масофани r орқали белгилаб оламиз, яъни

$$r=|x-\xi|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\xi_i\right)^2}\ .$$

Кўп ҳолларда Лаплас тенгламасининг сферик ёки цилиндрик симметрияга эга бўлган, яъни фақат r ёки ρ га боғлик бўлган ечимини топиш масаласи катта қизиқиш уйғотади. Бунинг учун Лаплас операторининг сферик ёки цилиндрик кординаталардаги кўринишини муҳим ахамият касб этади[3],[5],[7].

Лаплас тенгламасининг **сферик симметрияга** эга бўлган ечими

$$u(r)=\frac{c_1}{r}+c_2 \tag{4.14}$$

кўринишда бўлса, цилиндрик ёки **доиравий симметирияга** эга бўлган ечими эса,

$$u(\rho)=c_1 ln\,\rho+c_2 \tag{4.15}$$

кўринишда бўлади, бу ерда c_1, c_2 - ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Шундай қилиб, $u_0(r)=\frac{1}{r}$ ва $u(\rho)=ln\frac{1}{\rho}$ функцияларга Лаплас тенгламасининг мос равишда фазодаги ва текисликдаги ***фундаментал*** ечимлари дейилади.

1-Мисол. Лаплас операторининг кутб координаталардаги кўринишини аниқланг.

Ечиш. $\Delta u\equiv\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}$ операторда

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi \tag{4.16}$$

кутб координаталарида алмаштиришларни бажарамиз, бу ерда $r>0$, $0<\varphi<2\pi$ бўлиб, (4.16) алмаштириш тескариланувчи, яъни r ва φ ўзгарувчилар x ва y оркали қуйидагича аниқланади:

$$x^2+y^2=r^2,\quad \varphi=arctg\left(y/x\right) \tag{4.17}$$

$\Delta u(x,y)$ операторни r ва φ ўзгарувчилари орқали ифодалаймиз:

$$u_x=u_r r_x+u_\varphi\varphi_x,\qquad u_y=u_r r_y+u_\varphi\varphi_y,$$

$$u_{xx}=u_{rr}r_x^2+2u_{r\varphi}r_x\varphi_x+u_{\varphi\varphi}\varphi_x^2+u_r r_{xx}+u_\varphi\varphi_{xx}=\frac{x^2}{r^2}u_{rr}-\frac{2xy}{r^3}u_{r\varphi}+$$

$$+\frac{y^2}{r^4}u_{\varphi\varphi}+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)u_r+\frac{2xy}{r^4}u_\varphi$$

$$u_{yy}=\frac{y^2}{r^2}u_{rr}+\frac{2xy}{r^3}u_{r\varphi}+\frac{x^2}{r^4}u_{\varphi\varphi}+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)u_r-\frac{2xy}{r^4}u_\varphi .$$

Демак, Лаплас операторининг қутб координаталардаги кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\Delta u\equiv u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r}u_r$$

ёки

$$\Delta u\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\,. \qquad (4.18)$$

2-Мисол. $u(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}r^k(a_k cos\,k\varphi+b_k sin\,k\varphi)$ функциянинг $|z|<R$ доирада гармоник функция эканлигини кўрсатинг, бу ерда $r=|z|$, $\varphi=arg\,z$, $z=x+iy$ ва a_k, b_k лар ҳақиқий сонлар.

Ечиш. Берилган $u(x,y)$ функция гармоник функция бўлиши учун $|z|<R$ доирада r ва φ ўзгарувчилар бўйича иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилага эга бўлиб, $\Delta u\equiv u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r}u_r=0$ тенгламани қаноатлантириши шарт.

Демак, берилган функциядан қуйидаги ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$u_r(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}k\,r^{k-1}(a_k cos\,k\varphi+b_k sin\,k\varphi),$$

$$u_{rr}(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)r^{k-2}(a_k cos\,k\varphi+b_k sin\,k\varphi),$$

$$u_{\varphi\varphi}(x,y)=-\sum_{k=0}^{\infty}k^2r^k(a_k cos\,k\varphi+b_k sin\,k\varphi)$$

ва топилганларни (4.18) тенгламага қуямиз:

$$\Delta u=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k cos\,k\varphi+b_k sin\,k\varphi)\left(k(k-1)\,r^{k-2}-k^2r^{k-2}+k\,r^{k-2}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\left(k^2r^{k-2}-k\,r^{k-2}-k^2r^{k-2}+k\,r^{k-2}\right)=0.$$

Шундай қилиб, берилган функция (4.18) тенгламани қаноатлантирди, яъни бу функция гармоник функциядир.

Гармоник функциялар назариясида, мос равишда биринчи ва иккинчи чегаравий масала деб юритиладиган Дирихле ва Нейман масалалари муҳим ўрин тутади.

$D-E^n$ фазода чекли соҳа бўлиб, унинг чегараси S бўлаклари силлиқ сиртдан иборат бўлсин. $\overline{D}=D\bigcup S$, $D_1=E^n-\overline{D}$ деб белгилаш киритамиз.

Дирихленинг ички масаласи[15]. D соҳада гармоник $\overline{D}$ да узлуксиз ва

$$\lim_{x\to x_0} u(x)=\psi(x_0),\quad x_0\in S,\quad x\in D \tag{4.19}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи $u(x)$ функция топилсин, бу ерда $\psi(x)\in C(\overline{S})$ - берилган функция.

1-Масала[3] *(Дирихленинг доира учун ички масаласи).* $\Delta u(x,y)=0$ тенгламанинг $x^2+y^2=r^2<R^2$ доирада $u(x,y)\big|_{r=R}=$ $2x^2-x-y$, $(0\le r<R)$ шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Дирихле масаласи ечимини қутб координаталарида

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty} r^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi) \tag{4.20}$$

кўринишда излаймиз. Демак, масала шарти ва (4.16) га асосан

$$u(R,\varphi)=R^2(1+\cos 2\varphi)-R\sin\varphi-$$

$$-R\cos\varphi=\sum_{k=0}^{\infty} R^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)$$

[illegible] бўламиз. Бундан номаълум коэффициентларни қуйидагича $a_0=R^2$; $a_1=-1$; $b_1=-1$; $a_2=1$; $b_2=b_3=\ldots=0$; $a_3=a_4=\ldots=0$ аниқлаймиз.

Шундай қилиб, топилган коэффициентларни ўрнига қуйиб, Дирихле масаласининг ечимини қуйидаги кўринишда топамиз:

$$u(r,\varphi)=R^2-r\cos\varphi-r\sin\varphi+r^2\cos 2\varphi$$

[illegible]

$$u(x,y)=R^2-x-y+x^2-y^2.$$

Дирихленинг ташқи масаласи. D_1 соҳада гармоник шунд $u(x)$ функция топилсинки, у Sда берилган узлуксиз қийматлар қабул қилиб,

$$\lim_{x\to x_0} u(x)=\psi(x_0),\quad x_0\in S,\quad x\in D_1 \qquad (4.21)$$

$|x|\to+\infty$ да $n>2$ бўлган ҳолда $|x|^{2-n}$ дан секин бўлмай нол интилсин, $n=2$ да эса чекли лимитга интилсин.

2-Масала (Дирихленинг доира учун ташқи масалас $x^2+y^2=r^2\le R^2$ доира ташкарисида $\Delta u(x,y)=0$, $R<r<\infty$, тенг манинг $u(x,y)\big|_{r=R}=ax+by+c$, $|u(x,y)|<\infty$, шартлар каноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Дирихленинг ташқи масаласи ечимини қу координаталарида

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty} r^{-k}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi) \qquad (4.22)$$

кўринишда излаймиз. Демак, масала шарти ва (4.16) га асосан

$$u(R,\varphi)=aR\cos\varphi+bR\sin\varphi+c=\sum_{k=0}^{\infty} R^{-k}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан номаълум коэффициентлар қуйидагича $a_0=c,\quad a_1=aR^2,\quad a_2=a_3=\ldots=0;\ b_1=bR$ $b_2=b_3=\ldots=0$ аниқлаймиз. Демак, (4.22) кўра қуйилган мас ечимини қуйидагича топамиз:

$$u(r,\varphi)=a\frac{R^2}{r}\cos\varphi+b\frac{R^2}{r}\sin\varphi+c,\ \text{ёки}\ \ u(x,y)=\frac{R^2}{x^2+y^2}(ax+by)+c.$$

Айрим ҳолларда Дирихле масаласини ечишда таққосл усулидан фойдаланиб бўлмайди. Бу ҳолларда **Дирихленинг доир учун ички ва ташқи масаласининг** ечимни мос равиш қуйидаги кўринишда ҳам

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi) \qquad (4.$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-k}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi) \qquad (4.24)$$

бўлиши мумкин, бу ердаги a_k ва b_k, $(k=0,1,2,...)$ коэффициентлар

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\varphi)d\varphi, \qquad (4.25_0)$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi\ ,\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi \qquad (4.25_к)$$

формулалардан топилади [5].

Пуассон интеграли. (4.25к) формуладаги Фурье коэффициентларини (4.23) ечимга қўямиз:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k(\cos k\varphi\cos k\alpha+\sin k\varphi\sin k\alpha)\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos k(\varphi-\alpha)\right]d\alpha. \qquad (4.26)$$

$\cos k(\varphi-\alpha)=\dfrac{e^{ik(\varphi-\alpha)}-e^{-ik(\varphi-\alpha)}}{2}$ ва чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси формуласига кўра $q=\dfrac{r}{R}<1$ ни эътиборга олиб, (4.26) формуладаги квадрат қавс ичидаги ифодани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos k(\varphi-\alpha)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}q^k\left[e^{ik(\varphi-\alpha)}-e^{-ik(\varphi-\alpha)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(qe^{i(\varphi-\alpha)}\right)^k+\left(qe^{-i(\varphi-\alpha)}\right)^k\right]\right]=\frac{1}{2}\left[1+\frac{qe^{i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{i(\varphi-\alpha)}}+\frac{qe^{-i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{-i(\varphi-\alpha)}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-q^2}{1-2q\cos(\varphi-\alpha)+q^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\alpha)+r^2}. \qquad (4.27)$$

(4.26) ва (4.27) асосан **Дирихленинг доира учун ички масаласининг** ечимини қуйидаги

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rRCos(\varphi-\alpha)+r^2}\psi(\alpha)d\alpha \quad (r<R) \qquad (4.28)$$

кўринишдаги **Пуассон интеграли** орқали ёзиб оламиз.

Худди шундай, **доира учун Дирихленинг ташки** масаласининг ечими қуйидаги

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{r^2-R^2}{r^2-2rRCos(\varphi-\alpha)+R^2}\psi(\alpha)d\alpha \quad (r>R) \quad (4.29)$$

Пуассон интеграли орқали топилади[5],[7].

Энди (4.28) **Пуассон формуласини комплекс кўринишда** ёзиб оламиз. Бунинг учун қуйидаги тенгликдан фойдаланамиз [5], [9]:

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2rRCos(\varphi-\alpha)+r^2}=\frac{R^2-|z|^2}{\left|R\cdot e^{i\alpha}-z\right|^2}=\mathrm{Re}\frac{R\cdot e^{i\alpha}+z}{R\cdot e^{i\alpha}-z} \quad (4.30)$$

Ҳақиқатан,

$$\mathrm{Re}\frac{R\cdot e^{i\alpha}+z}{R\cdot e^{i\alpha}-z}=\mathrm{Re}\frac{\left(R\cdot e^{i\alpha}+re^{i\varphi}\right)\left(\overline{R\cdot e^{i\alpha}}-\overline{re^{i\varphi}}\right)}{\left(R\cdot e^{i\alpha}-re^{i\varphi}\right)\left(\overline{R\cdot e^{i\alpha}}-\overline{re^{i\varphi}}\right)}=$$

$$=\mathrm{Re}\frac{R^2-|z|^2+rR\left[e^{i(\varphi-\alpha)}-e^{i(\varphi-\alpha)}\right]}{\left|R\cdot e^{i\alpha}-z\right|^2}=\frac{R^2-|z|^2}{\left|R\cdot e^{i\alpha}-z\right|^2}. \quad (4.30)$$

тенгликга кўра (4.28) Пуассон интегралини қуйидаги комплекс кўринишда

$$u(z)=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\psi(\alpha)\frac{R\cdot e^{i\alpha}+z}{R\cdot e^{i\alpha}-z}d\alpha=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\psi(\zeta)\frac{\zeta+z}{(\zeta-z)\zeta}d\zeta,\quad |z|<R \quad (4.31)$$

ёзиб оламиз, бу ерда $R\cdot e^{i\alpha}=\zeta$.

Дирихленинг ташқи масаласи учун ҳам (4.31) формулага ўхшаш формула олиш мумкин.

Агар Дирихле масаласидаги $\psi(\zeta)$ чегаравий функция $cos\varphi$ ва $sin\varphi$ ларга нисбатан **рационал функция** бўлса, у ҳолда (4.31) ички Дирихле масаласининг ечими чегирма ёрдамида хисобланади [5].

3-Масала. Доирада қуйидаги $\Delta u=0$, $|z|<2$;

$u\big|_{|z|=2}=\dfrac{2sin\,\varphi}{5+3cos\,\varphi}$ Дирихле масаласини ечинг.

Ечиш. Ечишда (4.31) формуладан фойдаланамиз. Агар $2\cdot e^{i\alpha}=\zeta$ бўлса, у ҳолда

$$\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(\frac{\zeta}{2}-\frac{2}{\zeta}\right),\quad \cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{2}+\frac{2}{\zeta}\right)$$

бўлиб, $\psi(\zeta)=\frac{2\sin\varphi}{5+3\cos\varphi}$ чегаравий функция қуйидаги кўринишга

$$\psi(\zeta)=\frac{2\sin\varphi}{5+3\cos\varphi}=\frac{2\frac{1}{2i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{2\zeta}}{5+\frac{3}{2}\cdot\frac{\zeta^2+4}{2\zeta}}=\frac{2}{i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{3\zeta^2+20\zeta+12}=$$

$$=\frac{2}{i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{3(\zeta+6)\left(\zeta+\frac{2}{3}\right)} \tag{4.32}$$

ни бўлади.

(4.32) ни (4.31) қуйиб,

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=2}\frac{2}{i}\cdot\frac{\zeta^2-4}{3(\zeta+6)\left(\zeta+\frac{2}{3}\right)}\cdot\frac{\zeta+z}{(\zeta-z)\zeta}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=2}F(\zeta)d\zeta$$

интегрални хисоблаймиз. Бу ердаги $F(\zeta)$ функция $|\zeta|>2$ соҳада $\zeta=-6$ да битта чекли ва $\zeta=\infty$ да бартараф этиш мумкин бўлган махсус нуқталарга эга. Шундай қилиб, чегирмалар ҳақидаги Коши [9], [14] теоремасига кўра

$$J=-\underset{\zeta=-6}{res}F(\zeta)-\underset{\zeta=\infty}{res}F(\zeta)$$

ни эга бўламиз, бу ерда

$$\underset{\zeta=-6}{res}F(\zeta)=\frac{2}{3i}\cdot\frac{32}{\left(-\frac{16}{3}\right)}\cdot\frac{z-6}{(z+6)\cdot 6}=-\frac{4}{i}\cdot\frac{z-6}{(z+6)\cdot 6}=\frac{2}{3i}\cdot\frac{6-z}{6+z},$$

$$\underset{\zeta=\infty}{res}F(\zeta)=\underset{\zeta=\infty}{res}\left\{\frac{2}{3i}\cdot\frac{\left(1-\frac{4}{\zeta^2}\right)\left(1+\frac{z}{\zeta}\right)}{\left(1+\frac{6}{\zeta}\right)\left(1+\frac{2}{3\zeta}\right)\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)}\cdot\frac{1}{\zeta}\right\}=\underset{\zeta=\infty}{res}\left(\frac{2}{3i}\cdot\frac{1}{\zeta}+\dots\right)=-\frac{2}{3i}.$$

Демак,

$$J=-\underset{\zeta=-6}{res}F(\zeta)-\underset{\zeta=\infty}{res}F(\zeta)=\frac{2}{3i}\cdot\frac{z-6}{z+6}+\frac{2}{3i}=\frac{4z}{3i(z+6)}=\frac{4}{3i}\cdot\frac{x+iy}{6+x+iy}=$$

$$=\frac{4}{3i}\frac{(x+iy)(6+x-iy)}{(6+x)^2+y^2}.$$

Бундан

$$\mathrm{Re}\,J=\frac{8y}{36+12x+x^2+y^2} \qquad \text{ёки} \qquad \mathrm{Re}\,J=\frac{8r\sin\varphi}{36+12r\cos\varphi+r^2}.$$

Шундай килиб, Дирихле масаласининг ечими

$$u(r,\varphi)=\frac{8r\sin\varphi}{36+12r\cos\varphi+r^2}$$

кўринишда бўлади.

4-Масала. $x^2+y^2=r^2<R^2$ доирада $\Delta u(x,y)=y, \quad 0\le r<R$ Пуассон тенгламасининг $u(x,y)\big|_{r=R}=1$ шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Масала ечимини $u(x,y)=u_0(x,y)+\frac{1}{6}y^3$ кўринишда излаймиз. Бу ерда $\frac{1}{6}y^3$ функция берилган тенгламанинг хусусий ечими $u_0(x,y)$ функция эса $\Delta u=0$ тенгламанинг ечими

$$u_0(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}r^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi) \tag{4.31}$$

эканлигини эътиборга олиб, қўйилган масала шартидан

$$u(x,y)\big|_{r=R}=\sum_{k=0}^{\infty}R^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)+\frac{1}{6}R^3\sin^3\varphi=1,$$

яъни

$$\sum_{k=0}^{\infty}R^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)=1-\frac{1}{6}R^3\left(\frac{3}{4}\sin\varphi-\frac{1}{4}\sin 3\varphi\right)$$

га эга бўламиз. Бундан номаълум коэффициентларни куйидагича

$$a_0=1;\; a_1=a_2=\ldots=0;\; b_1=-\frac{R^2}{8};\; b_2=0;$$

$b_3=\frac{1}{24}$; $\quad b_4=b_5=\ldots=0$ аниклаймиз.

Шундай қилиб, топилган коэффициентларни ўрнига қўйиб, Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласи ечимини қуйидаги кўринишда топамиз:

$$u(r,\varphi)=1-\frac{r\cdot R^2}{8}\sin\varphi+\frac{r^3}{24}\sin 3\varphi+\frac{1}{6}r^3\sin^3\varphi=1-\frac{r\cdot R^2}{8}\sin\varphi+$$

$$+\frac{r^3}{24}\left(3\sin\varphi-4\sin^3\varphi\right)+\frac{1}{6}r^3\sin^3\varphi$$

ёки

$$u(x,y)=\frac{1}{8}(8-R^2y+y^3+x^2y). \qquad (4.34)$$

Ҳалқа учун Дирихле масаласи. Маркази координата бошида, радиуслари R_1 ва R_2 бўлган ҳалқада қуйидаги

$$\Delta\, u(x,y)\equiv u_{xx}+u_{yy}=0, \quad R_1^2<x^2+y^2<R_2^2, \qquad (4.35)$$

$$u\big|_{L_1}=f_1, \qquad u\big|_{L_2}=f_2 \qquad (4.36)$$

Дирихле масаласини қарайлик, бу ерда

$$L_1:\ x^2+y^2=R_1^2, \quad L_2:\ x^2+y^2=R_2^2.$$

(4.35), (4.36) масалани (r,φ) поляр координаталарда қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$\Delta u\equiv r^2u_{rr}+u_{\varphi\varphi}+r\,u_r=0, \quad R_1<r<R_2, \ 0\le\varphi\le 2\pi, \qquad (4.37)$$

$$u(R_1,\varphi)=f_1(\varphi), \qquad u(R_2,\varphi)=f_2(\varphi), \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \qquad (4.38)$$

бу ерда $f_1(\varphi)$ ва $f_2(\varphi)$ функциялар даврий бўлиб, унинг даври 2π га тенг.

(4.37), (4.38) Дирихле масаласининг ечими қуйидаги кўринишда ифодаланади [5]:

$$u(r,\varphi)=a_0+b_0\ln r+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_kr^k+b_kr^{-k})\cos k\varphi+(c_kr^k+d_kr^{-k})\sin k\varphi\right]. \qquad (4.39)$$

Бу ечимдаги номаълум $a_0, b_0, a_k, b_k, c_k, d_k$ коэффициентлар қуйидаги системалардан топилади:

$$\begin{cases} a_0+b_0\ln R_1=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f_1(s)ds, \\ a_0+b_0\ln R_2=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f_2(s)ds; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_kR_1^k+b_kR_1^{-k}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f_1(s)\cos k\,s\,ds, \\ a_kR_2^k+b_kR_2^{-k}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f_2(s)\cos k\,s\,ds; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_k R_1^k + d_k R_1^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(s)\sin k\, s\, ds, \\ c_k R_2^k + d_k R_2^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(s)\sin k\, s\, ds. \end{cases} \qquad (4.40)$$

5-Масала. $\Delta u(r) = 0$ тенгламанинг $a < r < b,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ ҳалқада $u(a) = T,\quad u(c) = hu(b),\quad a < c < b;\ h \ne 0$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Изланаётган функция фақат r нинг функцияси бўлгани учун, Лаплас тенгламасининг ечими цилиндрик ёки доиравий симметрияга эга бўлиб, унинг ечимини (4.15) кўринишда излаймиз.

(4.15) ва масала шартларидан қуйидаги

$$\begin{cases} c_1 ln\, a + c_2 = T \\ c_1 ln\, c + c_2 = h(c_1 ln\, b + c_2) \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системадан c_1 ва c_2 номаълумларни қуйидаги кўринишда топамиз:

$$c_1 = T\cdot(h-1)\Big/\left(h ln\frac{a}{b} - ln\frac{a}{c}\right),\quad c_2 = T\cdot(lnc - h lnb)\Big/\left(h ln\frac{a}{b} - ln\frac{a}{c}\right).$$

Топилган c_1 ва c_2 номаълумларни (4.15) га қўямиз ва қуйилган масаланинг қуйидаги

$$u(r) = T\cdot\left(h\, ln\frac{r}{b} - ln\frac{r}{c}\right)\Big/\left(h\, ln\frac{a}{b} - ln\frac{a}{c}\right)$$

кўринишдаги ечимини оламиз.

6-Масала. Ҳалқада қуйидаги

$$\Delta u(r) = 0 \quad 1 < r < 2,\quad 0 \le \varphi < 2\pi \qquad (4.41)$$

$$u(1,\varphi) = 0,\quad u(2,\varphi) = cos\,\varphi,\quad 0 < \varphi < 2\pi \qquad (4.42)$$

Дирихле масаласини ечинг.

Ечиш. (4.41), (4.42) масаланинг ечимини (4.39) кўринишда ифодалаш учун умуман олганда (4.40) системаларни ечиш керак, лекин айрим ҳолларда (4.39) формула ўрнига (4.41) тенгламанинг (4.42) шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимларининг комбинациясидан тузилган ечимларни ҳам қараш мумкин. Бу масалада

$$u(r,\varphi) = a_1\, r\cdot cos\,\varphi + b_1\, r^{-1}\cdot cos\,\varphi$$

функция юқорида қўйилган талабларга жавоб беради.

Бу ечимга (4.42) шартни қаноатлантириб, қуйидаги системани оламиз:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 0, \\ 2a_1 + \dfrac{b_1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{3}, \\ b_1 = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Шундай қилиб, (4.41), (4.42) масаланинг ечими қуйидагича

$$u(r,\varphi) = \frac{2}{3}\left(r - \frac{1}{r}\right)cos\,\varphi$$

бўлади.

7-Масала. Ҳалқада қуйидаги

$$\Delta u(r) = 0 \quad 1 < r < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \tag{4.43}$$

$$u(1,\varphi) = cos\,\varphi, \quad u(2,\varphi) = sin\,\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \tag{4.44}$$

Дирихле масаласини ечинг.

Ечиш. (4.40) системадан кўрсатиш мумкинки, $k > 1$ да $a_0, b_0, a_k, b_k, c_k, d_k$ коэффициентлар нолга тенг бўлади, колган a_1, b_1, c_1, d_1 коэффициентлар қуйидаги системалардан топилади:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 1, \\ 2a_1 + \dfrac{b_1}{2} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + d_1 = 0, \\ 2c_1 + \dfrac{d_1}{2} = 1. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, a_1, b_1, c_1, d_1 коэффициентларни топамиз:

$$a_1 = -\frac{1}{3}, \quad b_1 = \frac{4}{3}, \quad c_1 = \frac{2}{3}, \quad d_1 = -\frac{2}{3}.$$

Шундай қилиб, (4.43), (4.44) масаланинг ечими қуйидагича

$$u(r,\varphi) = \left(-\frac{1}{3}r + \frac{4}{3r}\right)cos\,\varphi + \left(\frac{2}{3}r - \frac{2}{3r}\right)sin\,\varphi$$

бўлади.

8-Масала. $\Delta u(r) = ar$, $(a \ne 0)$ Пуассон тенгламасининг $K: x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ доирадаги ечими $u(r) \in C(\overline{K})$ бўлиб, $u(c) = T$ бўлса, $u(R)$ ни топинг.

Ечиш. Ечим фақат r нинг функцияси бўлгани учун, Пуассон тенгламасининг ечими цилиндрик ёки доиравий симметрияга эга

бўлиб, уни $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = ar$ дифференциал тенгламани ечи
орқали топамиз:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=ar^2,\quad \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{ar^2}{3}+\frac{c_1}{r},\quad u(r)=\frac{ar^3}{9}+c_1 ln\, r+c_2,$$

Ечим қаралаётган соҳада узлуксиз бўлиши учун $c_1=0$ бўлиш керак. Шунинг учун, қўйилган масаланинг ечими $u(r)=\frac{ar^3}{9}+$ кўринишда бўлади. Масаланинг $u(c)=T$ шартидан номаълум $c_2=T-\frac{ac^3}{9}$ коэффициентни топамиз. Шундай қилиб, қўйилг масаланинг ечими $u(R)=\frac{a(R^3-c^3)}{9}+T$ кўринишда бўлади.

9-Масала. Бир жинсли $x^2+y^2+z^2=r^2<R^2$ шарда, хажми зичлиги $6Q$ га тенг бўлган доимий (ўзгармас) иссиқлик манба таосир қилмокда. Шардаги $u(r)$ температура стационар, ша сиртидаги $u(R)$ температура ўзгармас бўлсин. Агар $u(c)=T$ в $u_r(b)=U$ бўлса, $u(R)$ ва Q ни топинг.

Ечиш. Иссиқлик манбаи маълум бўлгани учун, изланаётг температура (4.13) Пуассон тенгламасини, яъни $\Delta u(r)=-6Q/$ тенгламани қаноатлантиради, ҳамда сферик симметрияга бўлади. Демак $\Delta u(r)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)$, яъни изланаётган $u($ температура $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{6Q}{k}$, $(0\le r\le R)$ дифференци тенгламани қаноатлантиради, бу тенгламанинг ечими $u(r)=-\frac{Qr^2}{k}-\frac{c_1}{r}+c_2$ кўринишда бўлади. Ечим қаралаётган шар узлуксиз бўлиши учун $c_1=0$ бўлиши керак, Шунинг учун, қўйилган масаланинг ечими $u(r)=-\frac{Qr^2}{k}+c_2$ кўринишда бўла

Масаланинг $u(c)=T$ ва $u_r(b)=U$ шартларидан $\begin{cases} -\dfrac{Qc^2}{k}+c_2=T \\ -\dfrac{2Qb}{k}=U \end{cases}$

системага эга бўламиз. Бу системадан Q ва c_2 номаълумларни қуйидаги кўринишда топамиз:

$$Q=-\frac{Uk}{2b} \qquad c_2=T+\frac{Qc^2}{k}=T-\frac{Uc^2}{2b}.$$

Шундай қилиб, қўйилган масаланинг ечими

$$u(R)=T+\frac{U(R^2-a^2)}{2b}$$

кўринишда бўлади.

Нейманнинг ички масаласи. D соҳада гармоник бўлган,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\partial u(x)}{\partial n}=\psi(x_0), \quad x_0\in S, \quad x\in D \tag{4.45}$$

чегаравий шартни қанотлантирувчи $u(x)\in C^1(\overline{D})$ функцияни топинг, бу ерда $\psi(x)\in C(S)$ - берилган функция, $n-S$ га ўтказилган ташқи нормал.

Нейманнинг ички масаласи ечимга эга бўлиши учун

$$\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial n}dS=0 \tag{4.46}$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

10-Масала. $x^2+y^2=r^2<R^2$ доирада $\Delta u(x,y)=0, \quad 0\le r<R$ тенгламанинг

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial r}\right|_{r=R}=Ax^2-By^2+y$$

шартни қаноатлантирувчи ечимига эга бўладиган A ва B нинг қийматларини топинг ва масалани ечинг.

Ечиш. Қуйилган масала Нейман масаласи бўлиб, масала ечимга эга бўлиши учун (4.46) га асосан

$$\int_0^{2\pi}(AR^2cos^2\varphi-BR^2sin^2\varphi+R\,sin\varphi)d\varphi=$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(AR^2\frac{cos\,2\varphi+1}{2}-BR^2\frac{1-cos\,2\varphi}{2}+Rsin\varphi\right)d\varphi=\frac{AR^2}{2}\cdot 2\pi-\frac{BR^2}{2}\cdot 2\pi=0$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Бу шарт факат $A = B$ бўлгандагина бажарилади, яъни Нейман масаласи туғри қуйилг бўлади, аксинча, яъни $A \neq B$ бўлганда эса нотўғри қуйилганлиг келиб чиқади.

Шундай қилиб, $A = B$ бўлган ҳолда масала ечимини (4.20) кўринишда излаймиз ва масала шартига асосан

$$u_r\Big|_{r=k} = \sum_{k=0}^{\infty} kR^{k-1}(a_k cos\,k\varphi + b_k sin\,k\varphi) = \frac{AR^2}{2}(cos\,2\varphi+1) -$$

$$-\frac{BR^2}{2}(1-cos\,2\varphi)+Rsin\,\varphi$$

га эга бўламиз. Бундан номаълум коэффициентлар қуйидагича $a_1=0,\ a_2=\frac{(A+B)R}{4},\ a_3=a_4=...=0;\ b_1=R,\ \ b_2=b_3=b_4=...=0$ ани лаймиз. Демак, (4.20) кўра $A = B$ бўлганда Нейман масаласини ечимини

$$u(r,\varphi) = r\cdot Rsin\,\varphi + \frac{A\cdot R}{2}\cdot r^2 cos\,2\varphi + a_0\,,$$

ёки $u(x,y) = \frac{AR}{2}(x^2-y^2)+Ry+const$ кўринишда топамиз.

Нейманнинг ички масаласини (r,φ) поляр координатала қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$\Delta u \equiv r^2 u_{rr} + u_{\varphi\varphi} + r\,u_r = 0, \quad 0 \le r < R,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad (4.47)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad (4.48)$$

(4.47), (4.48) масаланинг ечимини қуйидаги кўринишда

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k (a_k cos\,k\varphi + b_k sin\,k\varphi) \qquad (4.49)$$

излаймиз. (4.49) ечимдаги a_k ва b_k коэффициентлар

$$a_k = \frac{R}{k\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)cos\,k\varphi d\varphi,\ b_k = \frac{R}{k\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,sin\,k\varphi d\varphi, \quad k=1,2,\dots \qquad (4.50)$$

формуладан топилади.

11-Масала. Қуйидаги

$$\Delta u(r)=0 \qquad 0<r<R, \quad 0\le\varphi<2\pi \tag{4.51}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=cos^3\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi \tag{4.52}$$

Нейманнинг ички масаласини ечинг.

Ечиш. (4.51), (4.52) масала ечимга эга бўлиши учун (4.46) шартни бажарилишини кўрсатамиз. (4.52) шартга асосан (4.46) дан

$$\int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}ds=\int\limits_0^{2\pi}R\cdot cos^3\varphi d\varphi=\frac{R}{2}\int\limits_0^{2\pi}cos\varphi d\varphi+\frac{R}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left[cos3\varphi+cos\varphi\right]d\varphi=0$$

эга бўламиз. Бундан (4.46) шартни бажарилиши келиб чиқади.

Энди (4.51), (4.52) масалани ечамиз. (4.52) шарт ва (4.49) ечимдан $cos^3\varphi=\frac{3}{4}cos\varphi+\frac{1}{3}cos3\varphi$ни ҳисобга олиб, a_k ва b_k коэффициентларни топамиз:

$$a_1=\frac{3}{4}R, \quad a_2=0, \quad a_3=\frac{1}{12}R, \quad a_k=0,\ k>3, \quad b_k=0,\ k>1. \tag{4.53}$$

(4.53) кўра (4.49) дан ички Нейман масаласининг ечимини

$$u(r,\varphi)=a_0+\frac{3r}{4}cos\varphi+\frac{r^3}{12R^2}cos3\varphi$$

кўринишда топамиз, бу ерда a_0- ихтиёрий ўзгармас сон.

Нейманнинг ташқи масаласи. D_1 соҳада гармоник шундай $u(x)$ функция топилсинки, унинг нормал бўйича олинган ҳосиласи S да аввалдан берилган қийматларни қабул қилсин, яъни

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\partial u}{\partial n}=\psi(x_0), \quad x_0\in S, \quad x\in D_1 \tag{4.54}$$

бунда $|x|\to+\infty$ да $n>2$ бўлган ҳолда $u(x)$ функция нолга интилсин, $n=2$ да эса чекли лимитга интилсин.

(r,φ) поляр координаталар системасида Нейманнинг ташқи масаласини ечими қуйидаги кўринишда

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-k}(a_k cos\,k\varphi+b_k sin\,k\varphi) \tag{4.55}$$

изланади. (4.55) ечимдаги a_k ва b_k коэффициентлар (4.50) формуладан топилади, унда $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = -\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = f(\varphi)$ эканлигини эътиборга олиш керак [5].

Юқоридаги масалаларга ўхшаш масалаларни Нейманнинг ташқи масаласи учун ҳам қўллаш мумкин.

Мустақил ечиш учун масалалар

569. Лаплас $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial z^2}$ операторининг қуйидаги координаталар системасидаги кўринишини топинг:

a) $x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = z$ цилиндрик координаталардаги;

b) $x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi\sin\theta.\quad z = r\cos\theta$ сферик координаталардаги.

570. Маркази координаталар бошида, радиуси a га тенг бўлган доирада Лаплас тенгламаси учун қуйидаги биринчи чегаравий масалаларни ечинг:

a) $u|_{r=a} = A$; b) $u|_{r=a} = A\cos\varphi$; c) $u|_{r=a} = A + By$;

d) $u|_{r=a} = Axy$; e) $u|_{r=a} = A + B\sin\varphi$;

f) $u|_{r=a} = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi$,

бу ерда A ва B ўзгармас сонлар, (ρ,φ) - эса қутб координаталари (x,y)-тўғрибурчакли координаталар.

571. $\Delta u(x,y) = 0$ тенгламанинг $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ доирада $u(x,y)|_{r=R} = g(x,y),\ (0 \le r < R)$ шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг:

a) $g(x,y) = 4xy^2$; b) $g(x,y) = x^2 - 2y^2$;

c) $g(x,y) = \frac{y^2}{R} + Rxy$; d) $g(x,y) = x + xy$;

e) $g(x,y) = 2\left(x^2 + y\right)$; f) $g(x,y) = 4y^3$.

172. $x^2 + y^2 = r^2 \le R^2$ доира ташқарисида $\Delta u(x,y) = 0, \quad R < r < \infty$, тенгламанинг $u(x,y)\big|_{r=R} = g(x,y)$ ёки $u\big|_{r=R} = f(\varphi)$ $|u(x,y)| < \infty$, шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг:

a) $g(x,y) = y^2 + x + y$; g) $f(\varphi) = A$;
b) $g(x,y) = 2x^2 - x + y$; h) $f(\varphi) = A\cos\varphi$;
c) $g(x,y) = y + 2xy$; i) $f(\varphi) = A + B\,R\sin\varphi$;
d) $g(x,y) = y^2 - xy$; j) $f(\varphi) = A\,R^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$;
e) $g(x,y) = x^2 - y^2$; k) $f(\varphi) = A + B\sin\varphi$;
f) $g(x,y) = x^2 + 1$; l) $f(\varphi) = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi$.

173. $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ доирада $\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad 0 \le r < R$ Пуассон тенгламасининг $u(x,y)\big|_{r=R} = g(x,y)$ шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг:

a) $f(x,y) = 4, \quad g(x,y) = 1$;
b) $f(x,y) = -1, \quad g(x,y) = \dfrac{y^2}{2}$;
c) $f(x,y) = x, \quad g(x,y) = 0$;
d) $f(x,y) = x^4 - y^4, \quad g(x,y) = 0, \quad R = 1$;

174. $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ доирада $\Delta u(x,y) = 0, \ 0 \le r < R$ тенгламанинг

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial r}\bigg|_{r=R} = g(x,y)$$

шартни қаноатлантирувчи ечимга эга бўладиган A ва B нинг қийматларини топинг ва масалани ечинг:

a) $g(x,y) = Ay^2 - B$; d) $g(x,y) = A$;
b) $g(x,y) = 2x^2 + A$; e) $g(x,y) = 2xy$;
c) $g(x,y) = 1$; f) $g(x,y) = A\,x^2 - B\,y^2 + y$.

Бу ерда $A, \ B$ – ўзгармаслар.

175. $x^2 + y^2 = r^2 \le R^2$ доира ташқарисида $\Delta u(x,y) = 0, \ R < r < \infty$ тенгламанинг $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial r}\bigg|_{r=R} = g(x,y)$ $|u(x,y)| < \infty$, шартларни қаноатлантирувчи ечимига эга бўладиган A ва B нинг қийматларини топинг ва Нейман масаласини ечинг:

a) $g(x,y) = y^2 - A$; c) $g(x,y) = x^2 + Ax - B$;
b) $g(x,y) = 2xy - Ax^2 + B$; d) $g(x,y) = x^2 - Ay^2 + B$.

Бу ерда $A,\ B$ – ўзгармаслар.

576. Маркази $r=0$ да, радиуси a га тенг булган C доирада $\Delta u=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C=f(\varphi)$ иккинчи ички чегаравий масаласини қуйидаги ҳолларда ечинг:

a) $f=Ax$; b) $f=A\left(x^2-y^2\right)$;

c) $f=A\cos\varphi$; d) $f=A\sin\varphi+B\sin^3\varphi$.

Бу ерда (r,φ) - эса қутб координаталари, бу ерда $A,\ B$ – ўзгармаслар.

577. Маркази $r=0$ да, радиуси a га тенг булган C доирада $\Delta u=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C=f(\varphi)$ иккинчи ташқи чегаравий масаласини қуйидаги ҳолларда ечинг:

a) $f=Ax$; b) $f=A\left(x^2-y^2\right)$; c) $f=A\cos\varphi+B$;

d) $f=A\sin\varphi+B\sin^3\varphi$, e) $f=A$, бу ерда (r,φ) - қутб координаталари, $A,\ B$ – ўзгармаслар.

578. $K:0\le r<R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ доирада $u(R,\varphi)-u(R_1,\varphi)=f(\varphi)$ шартни қаноатлантирувчи $u(r,\varphi)\in C^1(K)$ гармоник функцияни топинг, бу ерда $0<R_1<R,\ \int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0$ бўлиб, $f(\varphi)$ функция қуйидаги қийматларни қабул қилади:

a) $f(\varphi)=\cos\varphi$; b) $f(\varphi)=\cos^2\varphi+C$;

c) $f(\varphi)=\cos3\varphi+\sin2\varphi$; d) $f(\varphi)=A\cos^2\varphi+B\sin^2\varphi$,

e) $f(\varphi)=-3\cos^2\varphi+\sin\varphi+C$; f) $f(\varphi)=\sin\varphi$.

Бу ерда $A,\ B,\ C$ – ўзгармаслар.

579. $K:0\le r<R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ доира ташқарисида $u(R,\varphi)-u(R_1,\varphi)=f(\varphi)$ шартни қаноатлантирувчи $u(r,\varphi)\in C^1(K)$ гармоник функцияни топинг, бу ерда $0<R_1<R,\ \int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0$ бўлиб, $f(\varphi)$ функция қуйидаги қийматларни қабул қилади:

a) $f(\varphi)=3\sin2\varphi$; b) $f(\varphi)=5\sin^2\varphi-A$;

c) $f(\varphi)=\sin^3\varphi$; d) $f(\varphi)=3\cos^2\varphi+\sin\varphi-A$,

e) $f(\varphi)=cos5\varphi+sin\varphi$, бу ерда A – ўзгармас сон.

880. $a<r<b$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$ ҳалқа ичида қуйидаги чегаравий масалаларнинг $u(r)$ ечимини топинг.

a) $\Delta u(r)=0$, $u(a)=T$, $u_r(b)=U$;

b) $\Delta u(r)=0$, $u_r(a)=T$, $u_r(b)=U$;

c) $\Delta u(r)=0$, $u(a)=T$, $u_r(b)+hu(b)=U$;

d) $\Delta u(r)=0$, $u_r(a)-hu(a)=T$, $u_r(b)=U$;

e) $\Delta u(r)=0$, $u_r(a)-hu(a)=T$, $u_r(b)+hu(b)=U$.

881. Агар $u(r)$ функция $K: a^2<x^2+y^2=r^2<b^2$ ҳалқада $\Delta u(r)=0$ Лаплас тенгламасининг ечими бўлиб, $u(r)\in C(\bar{K})$ бўлса:

a) $u(c)=T_0$, $u(b)=T$ бўлганда $u(a)$ ни топинг;

b) $u(c)=T$, $u_r(b)=U$ бўлганда $u(a)$ ни топинг;

c) $u(c)=T$, $u_r(b)+u(b)=W$ бўлганда $u(a)$ ни топинг;

d) $u_r(c)=U$, $u(b)=T$ бўлганда $u(a)$ ни топинг,

бу ерда $a<c<b$.

882. Агар $u(r)$ функция $K: a^2<x^2+y^2=r^2<b^2$ ҳалқада $\Delta u(r)=\frac{1}{r}$ Пуассон тенгламасининг ечими бўлиб, $u(r)\in C(\bar{K})$ бўлса:

a) $u(b)=T$, $u_r(c)=U$; бўлганда $u(a)$ ни топинг;

b) $u(c)=T_0, u(d)=T$; бўлганда $u(a)$, $u_r(b)$ ни топинг;

c) $u(c)=T$, $u_r(d)=U$; бўлганда $u(b)$, $u_r(a)$ ни топинг;

d) $u(b)=T_0$, $u(c)=T$ бўлганда $u(a)$ ни топинг,

бу ерда $a<c<b$, $a<d<b$.

883. Доира ичида $\Delta u(r,\varphi)\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$ Лаплас тенгламасининг $u|_{r=1}=g(\varphi)$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$ шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг:

a) $g(\varphi)=cos^2\varphi$; b) $g(\varphi)=cos^4\varphi$;

c) $g(\varphi)=sin^3\varphi$; d) $g(\varphi)=sin^6\varphi+cos^6\varphi$;

e) $g(\varphi)=\dfrac{sin\varphi}{5+4cos\varphi}$.

584. Маркази координаталар бошида, радиуси R га тенг бўл доирада $\Delta u(r,\varphi)\equiv\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$ Лаплас тенглама синниг $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=f(\varphi)$ шартни қаноатлантирувчи ечимини топин

a) $f(\varphi)=Acos\varphi$, b) $f(\varphi)=Acos2\varphi$, c) $f(\varphi)=sin^3\varphi$.

585. Ҳалқа ичида $\Delta u(r,\varphi)\equiv\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$ $(1<\rho<2)$ Лапл тенгламасининг $u\big|_{r=1}=g(\varphi)$ $u\big|_{r=2}=f(\varphi)$ шартни қаноатлан рувчи ечимини топинг:

a) $g(\varphi)=u_1=const$, $f(\varphi)=u_2=const$;

b) $g(\varphi)=1+cos^2\varphi$, $f(\varphi)=sin^2\varphi$.

586. Маркази координаталар бошида, радиуси Rга тенг бўл шарда $\Delta u(r,\theta)\equiv\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2 sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$ Лаплас тенглам сининг (изланаётган u функция φ боғлиқ эмас) $u\big|_{r=R}=f($ шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг:

a) $f(\theta)=cos\theta$; b) $f(\theta)=cos^2\theta$;

c) $f(\theta)=cos2\theta$; d) $f(\theta)=sin^2\theta$.

587. Маркази координаталар бошида, радиуси R га тенг бўл шарда $\Delta u(r,\theta)=0$ Лаплас тенгламасининг (изланаётган функция φ боғлиқ эмас) $(u+u_r)\big|_{r=R}=1+cos^2\theta$. шартни қаноатл тирувчи ечимини топинг.

588. Шарнинг ташқарисида гармоник бўлиб, қуйидаги $\Delta u(r,\theta)$ тенгламани ва

a) $u_r\big|_{r=R}=sin^2\theta$; b) $(u-u_r)\big|_{r=R}=sin^2\theta$;

c) $u_r\big|_{r=R}=Acos\theta$ шартларни қаноатлантирувчи $u=u(r,$ фукцияни топинг.

989. $1<r<2$ шар қатламида гармоник бўлиб, қуйидаги $\Delta u(r,\theta)=0$ тенгламани ва $u\big|_{r=1}=g(\theta)$ $u\big|_{r=2}=f(\theta)$ шартларни қаноатлантирувчи $u=u\left(r,\theta\right)$ фукцияни топинг:

a) $g(\theta)=cos^2\theta,\ f(\theta)=\frac{1}{8}\left(cos^2\theta+1\right);$

b) $g(\theta)=cos^2\theta,\ f(\theta)=4cos^2\theta-\frac{4}{3};$

c) $g(\theta)=1-cos\,2\theta,\qquad f(\theta)=2cos\,\theta;$

d) $g(\theta)=\frac{1}{2}cos\,\theta,\qquad f(\theta)=1+cos\,2\theta;$

e) $g(\theta)=9cos\,2\theta,\qquad f(\theta)=3\left(1-7cos^2\,\theta\right).$

990. $1<r<2$ шар қатламида гармоник бўлиб, қуйидаги $\Delta u(r,\theta)=0$ тенгламани ва

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=1}=P_2(cos\theta),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=2}=P_3(cos\,\theta)$$

шартларни қаноатлантирувчи $u=u\left(r,\theta\right)$ фукцияни топинг, бу ерда $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\,x^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right],\quad n=1,2,...$ – Лежандр кўпҳади.

991. $U\left(r,\theta,\varphi\right)=-R\int\limits_0^r\frac{u\left(t,\theta,\varphi\right)}{t}dt,$ функция шарда $\left(r<R\right)$ $\Delta U\left(r,\theta,\varphi\right)=0$ Лаплас тенгламаси учун қуйилган ички Нейман масаласининг ечими эканлигини исботланг, бу ерда

$$u(t,\theta,\varphi)=\frac{R}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}u_0^-\left(R,\theta_1,\varphi_1\right)\frac{R^2-t^2}{\left[t^2-2tR\,cos\gamma+R^2\right]^{3/2}}\cdot sin\theta_1\cdot d\theta_1\cdot d\varphi_1\ -$$

шар $\left(r<R\right)$ учун Пуассон интеграли (ички Дирихле масаласи ечими), $u_0^-=\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{r=R}=u\left(R,\theta,\varphi\right),$ $\gamma-\left(r,\theta,\varphi\right)$ ва $\left(R,\theta_1,\varphi_1\right)$ нуқталарнинг радиус-векторлари орасидаги бурчак.

592. $U\left(r,\theta,\varphi\right)=R\int\limits_{\infty}^{r}\frac{u\left(t,\theta,\varphi\right)}{t}dt,$ функция шарда $(r>R)$ $\Delta U\left(r,\theta,\varphi\right)=0$ Лаплас тенгламаси учун қуйилган ташқи Нейман масаласининг ечими эканлигини исботланг, бу ерда

$$u(t,\theta,\varphi)=\frac{R}{4\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}u_0^+\left(R,\,\theta_1,\varphi_1\right)\frac{t^2-R^2}{t^2-2tR\cos\gamma+R^2}\cdot\sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 -$$

шар $(r>R)$ учун Пуассон интеграли (ташқи Дирихле масаласи ечими), $u_0^+=\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{r=R}=u\left(R,\theta,\varphi\right),$ $\gamma-$ $\left(r,\theta,\varphi\right)$ ва $\left(R,\theta_1,\varphi_1\right)$ нуқталарнинг радиус-векторлари орасидаги бурчак.

4- §. Грин функцияси усули

Эллиптик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишда (Манба функция) Грин функцияси муҳим ўрин тутади. Бўлаклари силлиқ S сирт билан чегараланган D соҳани карайлик.

4.1-Таъриф. (4.2) Лаплас тенгламаси учун D соҳада ички (ташқи) Дирихле масаласининг ***Грин функцияси*** деб, иккита $x,\xi\in D\bigcup S$ нуқталарнинг функцияси бўлган ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G(x,\,\xi)$ функцияга айтилади[15]:

1) $G(x,\,\xi)$ функция ушбу кўринишга эга

$$G(x,\xi)=\frac{1}{4\pi}\left(E(x,\xi)+g(x,\xi)\right), \qquad (4.56)$$

бу ерда $E(x,\xi)$ - Лаплас тенгламасининг (4.9) формула билан аниқланган фундаментал (элементар) ечими, $g(x,\xi)$ - функция эса $x\in D$ бўйинча ҳам, $\xi\in D$ бўйинча ҳам гармоник функция бўлиб, x бўйинча ҳар бир ξ лар учун $\overline{D}$ соҳада узликсиз.

2) $x,\ \xi$ нуқталарнинг ҳеч бўлмаганда биттаси S га тегишли бўлса

$$G(x,\xi)=0 \qquad (4.57)$$

бўлади. Агар D соҳа чегараланмаган бўлса, у ҳолда $|x|\to\infty$ да $g(x,\xi)\to 0$ шарт бажарилиши талаб қилинади.

Бу таърифга асосан, $G(x,\,\xi)$ функция ξ нуқтадан ташқари барча D соҳада гармоник бўлиб, $g(x,\xi)$ функция ёрдамида аниқланади. $g(x,\xi)$ функция эса ўз навбатида D соҳада гармоник бўлиб, S да $-\ln\frac{1}{r}, n=2$ ёки $\frac{1}{r^{n-2}}$, $n>2$ қийматларга тенг. Бу ерда $g(x,\xi)$ шундай гармоник функцияки, у чегарада махсус қийматларни қабул қилади. Айрим ҳолларда бундай функцияни топиш анча қулай бўлади. Бу функция маълум бўлгандан сўнг, чегарада ихтиёрий қийматни қабул қилувчи гармоник функцияни топиш мумкин бўлади.

Грин функциясининг хоссалари:

1) $D\bigcup S$ да $G(x,\xi)\geq 0$;

2) агар D соҳанинг S чегараси етарлича силлиқ сирт бўлса, у ҳолда $G(x, \xi)$ функция S чегарада ҳар бир $\xi\in D$ да тўғри нормал $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_x}$ ҳосилага эга;

3) $G(x, \xi)$ функция $x\in D$ ва $\xi\in D$ нуқталарга нисбатан симметрик функциядир, яъни

$$G(x,\xi)=G(\xi,x);$$

4) $x\in D$ нуқталарда қуйидаги тенглик

$$-\frac{1}{(n-2)\left|S_1\right|}\int_S \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_\xi} d_\xi S = 1$$

ўринли. $\left|S_1\right|-$ бирлик сферанинг юзи.

Агар $w=w(z)$ функция $D\left(n=2 \text{ бўлганда}\right)$ соҳани бирлик доирага $\left(\text{яъни } |w|<1 \text{ га}\right)$ конформ акслантирувчи функция бўлса, у ҳолда Грин функцияси қуйидаги формуладан

$$G\left(z,\zeta\right)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\left|w(z,\zeta)\right|}, \qquad w(z,\zeta)=\frac{w(z)-w(\zeta)}{1-w(z)\cdot w(\zeta)},$$

$$z=x+iy,\ \zeta=\xi+i\eta$$

топилади.

Грин функциясини тузиш. Қаралаётган кўпгина соҳаларда Грин функцияси акслантирш усулидан фойдаланиб тузилади [5], [10], [19].

1- Масала. (4.2) Лаплас тенгламаси учун шарда ички Дирихле масаласининг Грин функциясини тузинг.

Ечиш. Акслантириш усули ёрдамида шарда Грин функциясини тузамиз. U_R соҳа маркази координата бошида ва радиуси R га тенг бўлган шар бўлсин. Уни чегаралаб турган сферани S_R орқали белгилаб оламиз. Фараз қилайлик, $y \neq 0$ бўлиб, y га S_R сферага нисбатан симметрик нуқта y^* бўлсин, яъни

$$|y||y^*| = R^2. \qquad (4.58)$$

$|y| < R$ бўлганлиги учун, y^* нуқта S_R сферадан ташқарида ётади. Бу нуқта учун ушбу инверсия алмаштириш ўринлидир:

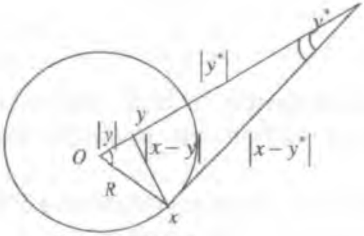
$$y = \frac{R^2}{|y^*|^2} y^*, \qquad y^* = \frac{R^2}{|y|^2} y, \quad |y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2},$$

ёки
$$y_i^* = \frac{R^2}{|y|^2} y_i, \qquad y_i = \frac{R^2}{|y^*|^2} y_i^*, \quad i = 1,2,3. \qquad (4.59)$$

Грин функцияни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,y) = \upsilon(x,y) + g(x,y), \qquad (4.60)$$

бу ерда $\upsilon(x,y) = \dfrac{1}{4\pi|x-y|}$ функция Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими бўлиб, бу функция $y \neq x$ бўлганда y бўйича ҳам, x бўйича ҳам Лаплас тенгламасини қаноатлантиради. $g(x,y) = -\dfrac{\alpha}{4\pi|x-y^*|}$ функция эса U_R да y бўйича ҳам, x бўйича ҳам гармоник функция бўлиб, $C^\infty(U_R)$ синфга тегишлидир, яъни бу функциянинг махражи нолга айланмайди, α - кейинчалик аниқланадиган сон.



4.1 – чизма

Агар $x\in S_R$ бўлса, у ҳолда 4.1 – чизмага кўра Oxy^* ва $O\,x\,y$ учбурчаклар ўхшаш бўлади, чунки улар умумий O бурчакка эга ва бу бурчакни ҳосил қилган томонлари (4.58) ва (4.59) тенгликларга кўра пропорционалдир, яъни

$$|y^*|/R = R/|y|,$$

бу ерда $|y^*|$ ва R - Oxy^* ва Oxy учбурчакларнинг мос равишда томонларининг узунликлари.

Шундай қилиб, учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$R\cdot|x-y|=|y|\cdot|x-y^*| \text{ ёки } R\cdot|x-y|=|x-y^*|\cdot|y| \tag{4.61}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Грин функциясининг таърифига кўра α сонини шундай танлаймизки, $G(x,y)\big|_{S_R}=0$ бўлсин. Бундан ва (4.60) дан

$$\alpha\cdot|x-y|=|x-y^*| \;\Rightarrow\; \alpha=|x-y^*|/|x-y|,\quad x\in S_R \tag{4.62}$$

келиб чиқади. (4.61) га асосан эса

$$\alpha = R/|y| \tag{4.63}$$

эга бўламиз.

Шундай қилиб, (4.60) ва (4.63)га кўра

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}-\frac{R}{4\pi|y||x-y^*|} \tag{4.64}$$

ни ҳосил қиламиз.

(4.64) формуланинг иккинчи қўшилувчисини (4.59) га асосан қуйидагича ифодалаб оламиз:

$$\frac{R}{4\pi|y||x-y^*|}=\frac{R}{4\pi|y||x-y^*|}\cdot\frac{|y|}{|y|}=\frac{R|y|}{4\pi|y|^2|x-y^*|}=$$

$$=\frac{R|y|}{4\pi\left|x|y|^2-y^*|y|^2\right|}=\frac{R|y|}{4\pi\left|x|y|^2-R^2y\right|}. \tag{4.65}$$

(4.65) ифодани (4.64) формулага қўйиб, шар учун Грин функциясини қуйидаги кўринишда топамиз:

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}-\frac{R|y|}{4\pi\left|x|y|^2-R^2y\right|} \tag{4.66}$$

2-Масала. $\Delta u(x,y,z)=0$ тенгламанинг $D_1:\quad z>0$ ярим ф даги Грин функцияси $G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)$ кўриниш бўлишини кўрсатинг, бу ерда

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

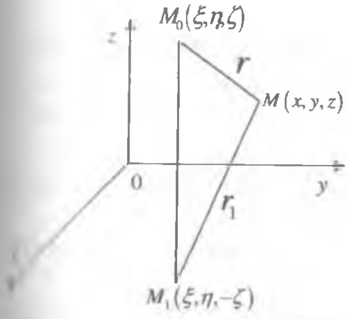
$$r_1=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2} \qquad \text{(4.2-чи}$$

Ечиш. (4.56) ва (4.11) асосан, Грин функцияси $G(x,y,\xi,\eta$ $=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}+g(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\right)$ кўринишга эга бўлади. $g(x,y,z;\xi,\eta,$ функция, қаралаётган соҳада гармоник функция бўлгани уч $\Delta g(x,y,z)=0$ ва $\Delta g(\xi,\eta,\zeta)=0$ тенгламаларни каноатлантир шу билан бирга (4.57) шартга асосан (x,y,z) *ва* $(\xi,\eta,$ нуқталарнинг ҳеч бўлмаганда биттаси ∂D_1га тегишли бў $G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)=0$, яъни $g(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-1/r$ бўлиши керак. Дем (x,y,z) *ва* (ξ,η,ζ) нукталарнинг ҳеч бўлмаганда биттаси ∂D_1 тегишли бўлиши учун $z=0$ ёки $\zeta=0$ бўлиши шарт. Бундан $r=r_1$ бўлади, яъни $g(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-1/r_1$. Бу функция D_1 соха гармоникдир. Шундай қили $G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}+g(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)$ функция D_1 соха Лаплас тенгламасининг Грин функцияси бўлади.

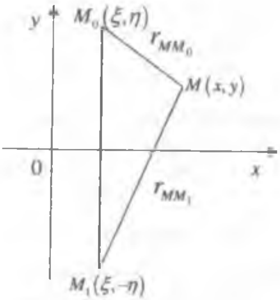
$\Delta u(x,y)=0$ тенгламанинг $D_2:\quad y>0$ ярим текисликдаги Гр функцияси куйидаги кўринишда бўлади:

$$G(x,y;\xi,\eta)=G(\xi,\eta;x,y)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\ln\frac{1}{r_{MM_1}}\right], \qquad (4.6$$

бу ерда $\left.\begin{matrix} r_{MM_0} \\ r_{MM_1}\end{matrix}\right\} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y\mp\eta)^2}$ (4.3-чизма).



4.2 – чизма



4.3 – чизма

Интеграл ифода [11], [15]. Агар $u(x)$ функция $C^2(D)\bigcap C^1(\overline{D})$ синфига тегишли бўлса, у ҳолда бу функциянинг **интеграл ифодаси**

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_S\left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}E(x,\xi)-u(\xi)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial n}\right]d_\xi S-\frac{1}{2\pi}\int_D E(x,\xi)\Delta u(\xi)d\xi=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_S\left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}ln\frac{1}{r}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}ln\frac{1}{r}\right]d_\xi S- \\ \qquad -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_D ln\frac{1}{r}\Delta u(\xi)d\xi, \qquad n=2, \qquad (4.68) \\ \dfrac{1}{(n-2)|S_1|}\displaystyle\int_S\left[\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right]d_\xi S- \\ \qquad -\displaystyle\int_D\frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}}d\xi, \quad n>2 \qquad (4.69)\end{cases}$$

шаклида бўлади, бу ерда S_1 - бирлик сфера.

Агар $u(x)$ функция D соҳада гармоник функция бўлса, у ҳолда (4.68) ва (4.69) формулаларда $\Delta u=0$ бўлиб, бу **гармоник функциянинг интеграл ифодаси**

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_S\left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}ln\frac{1}{r}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}ln\frac{1}{r}\right]d_\xi S, \qquad n=2, \qquad (4.70) \\ \dfrac{1}{(n-2)|S_1|}\displaystyle\int_S\left[\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right]d_\xi S, \quad n>2 \quad (4.71)\end{cases}$$

кўринишда бўлади.

Юқоридаги интеграл ифодаларга ўхшаш учун $\Delta u(x,y) = -f(x)$ Пуассон тенгламаси учун $u|_S = \varphi(x)$, $x \in S$ Дирихле масаласининг ечими

$$u(x) = -\int\limits_S \frac{\partial G}{\partial n_y} \cdot \varphi(y)dS_y + \int\limits_D G(x,y)f(y)dy, \qquad (4.72)$$

формула орқали топилади, бу ерда $G(x,\xi)$ Грин функция бўлиб, (4.56) формуладан аниқланади.

Грин функцияси ёрдамида чегаравий масалаларни ечиш

Ярим текисликда (4.2) Лаплас тенгламаси учун $(n=2)$ Дирихле масаласини қараймиз:

$$\Delta u \equiv \Delta u(x,y) = 0, \quad y > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \qquad (4.73)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \qquad (4.74)$$

(4.73), (4.74) масаланинг ечими қуйидаги кўринишда

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot \left.\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} d\xi \qquad (4.75)$$

ифодаланади, бу ерда $G(x,y;\xi,\eta)-$ функция (4.67) формула орқали аниқланади, яъни

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}}\right].$$

Бу функцияни η бўйинча дифференциаллаб, қуйидагига

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(y+\eta)}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2} \qquad (4.76)$$

эга бўламиз.

(4.76) ни (4.75) га қуйиб, (4.73), (4.74) масаланинг ечимини

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2} d\xi \qquad (4.77)$$

оламиз.

3-Масала. Қуйидаги $\Delta u(x,y) = 0, \ y > 0, \ -\infty < x < +\infty,$ (4.77)

$$u(x,0) = \frac{x}{x^2+1}, \quad -\infty < x < +\infty. \qquad (4.78)$$

Дирихле масаласини ечинг.

Ечиш. (4.78) ни (4.77) га қуйиб, қуйидагини ҳисоблаймиз:

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi d\xi}{\left[(x-\xi)^2+y^2\right]\left(1+\xi^2\right)}=2i\,y\left[resf(i)+resf(x+iy)\right],\qquad(4.79)$$

Бу ерда $f(z)=\xi/\left[(x-\xi)^2+y^2\right]\left(1+\xi^2\right)$.

Бундан, чегирмалар ҳақидаги теоремадан фойдаланиб [9], [14]

$$res\,f(i)=\frac{1}{2\left[(i-x)^2+y^2\right]},\qquad res\,f(x+iy)=\frac{x+iy}{2iy\left[1-(x+iy)^2\right]}\qquad(4.80)$$

ни топамиз.

Буни (4.79) га қўямиз:

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi d\xi}{\left[(x-\xi)^2+y^2\right]\left(1+\xi^2\right)}=\frac{i\,y}{(i-x)^2+y^2}+\frac{x+iy}{1-(x+iy)^2}=$$

$$=\frac{i\,y}{\left[(i-x)+i\,y\right]\left[(i-x)-i\,y\right]}+\frac{x+i\,y}{\left[(x+i\,y)-1\right]\left[(x+i\,y)+1\right]}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i-x-i\,y}-\frac{1}{i-x+i\,y}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+i\,y-1}-\frac{1}{1+x+i\,y}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{i(y-1)+x}-\frac{1}{i(1+y)-x}+\frac{1}{x+i(y-1)}+\frac{1}{x+i(y+1)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{i(1+y)-x}+\frac{1}{x+i(y+1)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{x-i(y+1)}{(1+y)^2+x^2}+\frac{x+i(y+1)}{x^2+(y+1)^2}\right]=$$

$$=\frac{x}{x^2+(1+y)^2}.$$

Шундай қилиб, (4.73), (4.78) масаланинг ечими

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+(1+y)^2}$$

кўринишда бўлади.

Ярим фазода (4.2) Лаплас тенгламаси учун $(n=3)$ Дирихле масаласини қараймиз:

$$\Delta u=\Delta u(x,y,z)=0,\quad -\infty<x,y<+\infty,\quad z>0,$$

$$u(x,y,0)=f(x,y),\quad -\infty<x,y<+\infty.$$

Бу масаланинг ечими қуйидаги кўринишда

$$u(x,y,z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)\left.\frac{\partial G}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}d\xi d\eta$$

ифодаланади, бу ерда $G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)-$ функция ушбу форму
орқали аниқланади (4-§ даги 2-масалага қаранг)

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right]$$

Бу функцияни ζ бўйинча дифференциаллаб, сўнг $\zeta=0$ қўй
қуйидагига

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2z}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}$$

эга бўламиз.

Демак, ярим фазода $(z>0)$ (4.2) Лаплас тенгламаси уч
Дирихле масаласининг ечими

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2z}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}f(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad (4$$

кўринишда бўлади.

4-Масала. Қуйидаги

$$\Delta u(x,y,z)=0,\quad -\infty<x,y<+\infty,\quad z>0,$$
$$u(x,y,0)=cos\,x\cdot cos\,y,\quad -\infty<x,y<+\infty.$$

Дирихле масаласини ечинг.

Ечиш. Қўйилган Дирихле масаласининг ечими қуйидаги

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos\,\xi\cdot cos\,\eta\,d\xi d\eta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2\right]^{3/2}}$$

формуладан топилади. Бу интегрални ҳисоблаш уч
$\xi-x=w,\quad \eta-y=\upsilon$ алмаштиришларни бажариб,

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(x+w)\cdot cos(\upsilon+y)dwd\upsilon}{\left[w^2+\upsilon^2+z^2\right]^{3/2}}=$$

$$=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos\,w\cdot cos\,x-sin\,w\cdot sin\,x}{\left[w^2+\upsilon^2+z^2\right]^{3/2}}\left[cos\,\upsilon\cdot cos\,y-sin\,\upsilon\cdot sin\,y\right]dwd\upsilon=$$

$$=\frac{z}{2\pi}cos\,x\cdot cos\,y\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos\,w\cdot cos\,\upsilon\,dw\,d\upsilon}{\left[w^2+\upsilon^2+z^2\right]^{3/2}}, \qquad (4$$

ни ҳосил қиламиз, ифодадаги қолган учта интеграллар инте
остидаги функцияларнинг тоқлигига кўра нолга тенг бўлади.

Энди ушбу интегрални ҳисоблаймиз:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos w\cdot\cos v\,dw\,dv}{\left[w^2+v^2+z^2\right]^{3/2}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(w+v)+\sin w\cdot\sin v\,dw\,dv}{\left[w^2+v^2+z^2\right]^{3/2}}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(w+v)\,dw\,dv}{\left[w^2+v^2+z^2\right]^{3/2}},$$

чунки

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin w\cdot\sin v\,dw\,dv}{\left[w^2+v^2+z^2\right]^{3/2}}=0$$

Охирги интегралда $\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(w+v)$, $\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}(w-v)$ алмаштиришларни бажариб,

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\sqrt{2}\mu)\,d\mu\,d\rho}{\left[\mu^2+\rho^2+z^2\right]^{3/2}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\sqrt{2}\mu)\,d\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\rho}{\left[\mu^2+\rho^2+z^2\right]^{3/2}}=$$

$$=\left\{\rho=\sqrt{\mu^2+z^2}\,tg\,t\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\sqrt{2}\mu)\,d\mu\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{|\cos t|\,dt}{\mu^2+z^2}=$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\sqrt{2}\mu)}{\mu^2+z^2}\,d\mu \tag{4.82}$$

га эга бўламиз.

(4.82) формулага чегирмалар ҳақидаги Коши [14] теоремасини қўллаймиз:

$$J=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(e^{i\sqrt{2}\mu}+e^{-i\sqrt{2}\mu}\right)}{\mu^2+z^2}\,d\mu=2\,\mathrm{Re}\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{i\sqrt{2}\mu}}{\mu^2+z^2}\,d\mu=4\pi i\,res\left.\frac{e^{i\sqrt{2}\mu}}{\mu^2+z^2}\right|_{\mu=zi}=$$

$$=4\pi i\cdot\frac{e^{-z\sqrt{2}}}{2zi}=\frac{2\pi}{z}\cdot e^{-z\sqrt{2}}.$$

Бундан ва (4.81)дан қўйилган Дирихле масаласининг ечимини

$$u(x,y,z)=e^{-z\sqrt{2}}\cos x\cdot\cos y.$$

кўринишда топамиз.

Бошқа усуллар ёрдамида чегаравий масалаларни ечиш.

1- Изоҳ. (4.73), (4.78) масаланинг ечимини Грин функциясид фойдаланмасдан ҳам топиш мумкин. Ҳақикатан,

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+\alpha)^2}}\quad(\alpha>0)$$

функция юқори ярим текисликда $(y>0)$ (4.73) Лаплас тенгламаси қаноатлантиради, яъни

$$\Delta u(x,y)=\Delta ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+\alpha)^2}}=0.$$

Бундан ташқари куйидаги тенгликлар ўринли:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+\alpha)^2}}=0 \quad \text{ёки} \quad \Delta\frac{\partial}{\partial x}ln\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+\alpha)^2}}=0,$$

яъни

$$\Delta\left(\frac{x}{r^2}\right)=0,\quad r^2=x^2+(y+\alpha)^2.$$

Шундай қилиб, $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+(y+\alpha)^2}$ функция юқори яр текисликда гармоникдир. Бундан, (4.78) чегаравий шартга кў $\alpha=1$ га тенг бўлиб, $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+(1+y)^2}$ функция (4.73), (4.7 масаланинг ечими бўлади.

2- Изоҳ. Агар $z=x+iy$, $\dfrac{y}{(x-\xi)^2+y^2}=\mathrm{Re}\dfrac{1}{i(\xi-z)}$ бўлса, у хол (4.77) формулани қуйидаги кўринишда

$$u(z)=\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad (4.8$$

ёзиб оламиз.

Энди ярим текисликда $(\mathrm{Im}\,z>0)$ (яъни $y>0$ да) Лап тенгламаси учун Дирихле масаласини кўрайлик:

$$\Delta u(x,y)=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad y>0,$$

$$u(x,y)\big|_{y=0}=R(x),\quad -\infty<x<+\infty,$$

бу ерда $R(z)$ ҳақиқий ўқда қутб махсус нуқтага эга бўлма ҳақиқий рационал функция бўлиб, $z\to\infty$ да $R(z)\to 0$.

Берилган Дирихле масаласининг ечими

$$u(z) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(\xi)}{\xi - z}d\xi \tag{4.84}$$

формула орқали топилади. (4.84) формуладаги интеграл чегирмалар ҳақидаги Коши [9], [14] теоремасини ёрдамида ҳисобланади:

$$u(z) = -2\,\mathrm{Re}\sum_{\mathrm{Im}\,\zeta_0<0} \underset{\zeta=\zeta_0}{res}\,\frac{R(\zeta)}{\zeta - z}. \tag{4.85}$$

5-Масала. Қуйидаги

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0,$$

$$u(x,0) = \frac{k}{x^2+1}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad k = const$$

Дирихле масаласини ечинг.

Ечиш. (4.84) ва (4.85) формулалардан фойдаланиб, Дирихле масаласининг ечимини қуйидаги кўринишда

$$u(z) = -2\,\mathrm{Re}\,\underset{\zeta=-i}{res}\,\frac{k}{(\zeta - z)\left(1+\zeta^2\right)} = -2\,\mathrm{Re}\frac{k}{2i(z+i)} = \frac{k(y+1)}{x^2+(y+1)^2}.$$

топамиз.

6-Масала. Қуйидаги

$$\Delta u(x,y,z) = z\,e^{-z} sin\,x\cdot sin\,y, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad z > 0,$$

$$u(x,y,0) = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty$$

масаланинг $z \to +\infty$ да чегараланган $u(x,y,z)$ ечимини топинг.

Ечиш. Берилган масалани ечимини $u(x,y,z) = \vartheta(z)\; sin\,x\cdot sin\,y$ кўринишда излаймиз. У ҳолда

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\vartheta(z)\cdot sin\,x\cdot sin\,y - \vartheta(z)\cdot sin\,x\cdot sin\,y +$$

$$+\vartheta''(z)\cdot sin\,x\cdot sin\,y$$

ни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка

$$-2\vartheta(z)\cdot sin\,x\cdot sin\,y + \vartheta''(z)\cdot sin\,x\cdot sin\,y = z\,e^{-z} sin\,x\cdot sin\,y$$

эга бўламиз. Бундан қуйидаги

$$\vartheta''(z) - 2\vartheta(z) = z\,e^{-z}$$

[illegible] дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг умумий ечими

$$\vartheta(z)=c_1e^{\sqrt{2}\,z}+c_2e^{-\sqrt{2}\,z}+e^{-z}\left(2-z\right) \qquad (4.86)$$

кўринишда бўлади.

Энди c_1 ва c_2 ўзгармасларни чегаравий шартлар ёрдами топамиз. (4.86) ечимда $c_1=0$, чунки агар $c_1\neq 0$ бўлса, у ҳолд $z\to+\infty$ да $\vartheta(z)\to\infty$ бўлади. Шунинг учун (4.86) ечимда $z=0$ де $0=\vartheta(0)=c_2+2 \;\Rightarrow\; c_2=-2$ аниқлаймиз. Демак, (4.86) кўр қуйилган масаланинг ечими

$$u(x,y,z)=\left[e^{-z}(2-z)-2e^{-\sqrt{2}z}\right]\sin x\cdot\sin y.$$

кўринишда топамиз.

7-Масала. Қуйидаги

$$\Delta u(x,y,z)=0,\quad -\infty<x,y<+\infty,\quad z>0,$$

$$u(x,y,0)=\frac{x^2+y^2-2}{\left(x^2+y^2+1\right)^{5/2}},\quad -\infty<x,y<+\infty$$

масаланинг $u(x,y,z)$ ечимини топинг.

Ечиш. Шуни айтиш мумкинки, $z>0$ ярим фазонинг ҳамм жойида $u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(1+z)^2}}$ функция $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ Лаплас тенгламасини қаноатлантиради, яъни

$$\Delta\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(1+z)^2}}\right]=0.$$

Бу тенгликни z бўйича икки марта дифференциаллаб, қуйидаги

$$\Delta\left[\frac{x^2+y^2-2(1+z)^2}{\left(x^2+y^2+(1+z)^2\right)^{5/2}}\right]=0 \qquad (4.87)$$

эга бўламиз. Бундан хулоса қилиб, шуни айтиш лозимки

$$u(x,y,z)=\frac{x^2+y^2-2(1+z)^2}{\left(x^2+y^2+(1+z)^2\right)^{5/2}} \qquad (4.88)$$

функция $z>0$ ярим фазонинг ҳамма жойида гармоник бў ((4.87) га қаранг), $z=0$ да қуйидаги

$$u\Big|_{z=0}=\frac{x^2+y^2-2}{\left(x^2+y^2+1\right)^{5/2}}$$

чегаравий шартни қаноатлантиради.

Шундай қилиб, қуйилган масаланинг ечими (4.88) формула орқали топилади.

Бигармоник тенглама. Ушбу $\Delta^2 u = 0$ бигармоник ва $\Delta^2 u = f$ тенгламалар учун Грин функциясидан фойдаланмай чегаравий масалалар ўрганиш мумкин.

8-Масала. Қуйидаги $K=\{(r,\varphi):\ 0\le r\le a,\ \ 0\le\varphi<2\pi\}$ соҳада

$$\Delta^2 u = 0 \quad K\ да,$$

$$u\big|_{r=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=a} = A\cos\varphi \quad \partial K\ да$$

масалани ечинг, $n-$доиранинг чегарасида ўтказилган ташқи бирлик нормал.

Ечиш. Бизга маълумки, бигармоник тенглама учун Дирихле масаласи:

$$u\big|_{r=a} = \psi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=a} = \phi$$

ушбу кўринишдаги ечимга эга

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2a\pi}\left(r^2-a^2\right)^2\left[-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(t)\,dt}{r^2+a^2-2a\,r\cos(\varphi-t)}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}\frac{\psi(t)\left[a-r\cos(\varphi-t)\right]dt}{\left[r^2+a^2-2a\,r\cos(\varphi-t)\right]^2}\right]. \tag{4.89}$$

(4.89) формулага $\psi=0, \quad \phi=A\cos\varphi$ қўйиб,

$$u(r,\varphi) = -\frac{A}{2a}\left(r^2-a^2\right)^2\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\cos t\,dt}{r^2+a^2-2a\,r\cos(\varphi-t)}.$$

ҳосил қиламиз. IV бобнинг 3-§ кўра охирги интеграл Лаплас тенгламаси учун қўйилган

$$\Delta v = 0 \quad K\ да,$$

$$v\big|_{r=a} = \cos\varphi \quad \partial K\ да$$

Дирихле масаласининг ечимидир. Бу масаланинг ечими $v=r/a\cos\varphi$ кўринишда бўлади. Демак, қўйилган масала ечимининг ягоналигига кўра қуйидаги тенгликка

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos t\,dt}{r^2+a^2-2a\,r\cos(\varphi-t)}=\frac{r}{a}\cos\varphi$$

эга бўламиз.

Шундай қилиб, бигармоник тенглама учун қўйилган Дирих масаласининг ечими

$$u(r,\varphi)=-\frac{A\,r\left(r^2-a^2\right)^2}{2a^2}\cos\varphi$$

кўринишда бўлади.

9-Масала. Қуйидаги $K=\{(r,\varphi):\ \ 0\le r\le a,\ \ 0\le\varphi<2\pi\}$ соҳа

$$\Delta^2 u=1 \quad K\ да,$$

$$u\big|_{r=a}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=a}=0,\quad \partial K\ да$$

масалани ечинг, $n-$доиранинг чегарасада ўтказилган таш бирлик нормал.

Ечиш. Фараз қилайлик, изланаётган ечим фақат r га бог бўлсин, яъни $u=u(r)$. У ҳолда

$$\Delta^2 u=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\,\partial r}\right)^2 u=\left(\frac{\partial^4}{\partial r^4}+\frac{2\partial^3}{r\,\partial r^3}+\frac{\partial^2}{r^2\,\partial r^2}\right)u$$

ўринлидир.

Шундай қилиб, оддий дифференциал тенглама учун қўйил масалага келамиз:

$$\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{2d^3u}{r\,dr^3}+\frac{d^2u}{r^2\,dr^2}=1,\ 0<r<a,\quad u\big|_{r=a}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=0.$$

Бу масалани ечиб, қўйилган масаласининг ечимини

$$u(r)=\frac{a^4}{7}\left[\frac{1}{12}\left(\frac{r}{a}\right)^4-\frac{1}{3}\left(\frac{r}{a}\right)+\frac{1}{4}\right]$$

кўринишда топамиз.

10-Масала. Қуйидаги $E=\{(x,y):\ -\infty<x<+\infty,\ \ y>0\}$ яр текисликда

$$\Delta^2 u=e^{-2y}\sin x\ \ E\ да\quad u\big|_{y=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\quad -\infty<x<+\infty$$

масалани ечинг.

Ечиш. Берилган тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=e^{-2y}\ sin\ x.$$

Бу тенгламанинг ечимини $u(x, y)=\omega(y)\,sin\,x$ кўринишда излаймиз, $\omega(y)-$номаълум функция. $u(x, y)=\omega(y)\,sin\,x$ функцияни берилган тенгламага қўйиб,

$$\omega^{(IV)}-2\omega''+\omega=e^{-2y}$$

оддий дифференциал тенгламани оламиз. Унинг умумий ечими

$$\omega(y)=C_1e^y+C_2ye^y+C_3e^{-y}+C_4ye^{-y}+\frac{1}{9}e^{-2y}$$

кўринишда бўлади. Масала шартига кўра $C_1=0,\ C_2=0$ тенг, лекин $y\to+\infty$ да $\omega(y)\to\infty$ бўлади. $C_3,\ \ C_4$лар $\omega(0)=\omega'(0)=0$ шартлардан топилади. Демак, оддий дифференциал тенгламанинг ечими

$$\omega(y)=\frac{1}{9}\left(-e^{-y}+ye^{-y}+e^{-2y}\right)$$

кўринишда бўлиб, қўйилган масаласининг ечими эса

$$u(x, y)=\frac{1}{9}\left(-e^{-y}+ye^{-y}+e^{-2y}\right)sin\,x$$

формуладан топилади.

Мустақил ечиш учун масалалар

[illegible]. $\Delta u(x, y, z)=0$ тенгламанинг $y>0,\ z>0$ икки ёқли бурчакдаги Грин функцияси

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$$

кўринишига эга бўлишини кўрсатинг. Бу ерда

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\,,\quad r_1=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}\,,$$

$$r_2=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}\,,\quad r_3=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2}\,.$$

[illegible]. $\Delta u(x, y, z)=0$ тенгламанинг $x>0,\ y>0,\ z>0$ октантадаги Грин функцияси

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{7}(-1)^k\frac{1}{r_k}$$

кўринишга эга бўлишини кўрсатинг. Бу ерда

$$r_0=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\,,\quad r_1=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)}$$

$$r_2=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2}\,,\quad r_3=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)}$$

$$r_4=\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}\,,\quad r_5=\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)}$$

$$r_6=\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}\,,\quad r_7=\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)}$$

595. $\Delta u=0$ тенгламанинг радиуси $R=4$ га тенг бўлган шар Грин функцияси

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-y|}-\frac{4}{|y||x-y^*|}\right)$$ кўринишга эга бўли кўрсатинг.

596. $\Delta u(x,y,z)=0$ тенгламанинг иккита $z=0$ ва $z=l$ текисли билан чегараланган соҳадаги Грин функцияси

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n'}\right)$$

кўринишга эга бўлишини кўрсатинг, бу ерда

$$r_n=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\left[z-(2nl+\zeta)\right]^2}\,,$$

$$r_n'=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\left[z-(2nl-\zeta)\right]^2}\,.$$

597. $\Delta u(x,y,z)=0$ тенгламанинг $z>0$ ярим фазода $z=0$ қуйидаги $\dfrac{\partial u}{\partial z}+hu=0$ чегаравий шартни қаноатлантиради Грин функцияси топинг.

598. $\Delta u(x,y,z)=0$ тенгламанинг қуйидаги соҳадаги Гри функциясини топинг:

1) $x^2+y^2+z^2<R^2$, $z>0$ ярим шарда;

2) $x^2+y^2+z^2<R^2$, $y>0$ $z>0$ шарнинг тўртдан бир қисмид

3) $x^2+y^2+z^2<R^2$, $x>0$ $y>0$ $z>0$ шарнинг саккиздан би қисмида.

599. $\Delta u(z)=0$, $z=x+iy$ тенгламанинг қуйидаги соҳад Грин функциясини топинг:

1) $\operatorname{Im} z>0$ ярим текисликда;

2) $0 < arg\, z < \dfrac{\pi}{2}$ текисликнинг тўртдан бирида;

3) $|z| < R$ доирада;

4) $|z| < R \;\; \operatorname{Im} z > 0$ ярим доирада;

5) $|z| < 1, \;\; 0 < arg\, z < \dfrac{\pi}{2}$ доиранинг тўртдан бирида;

6) $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ полосада;

7) $0 < \operatorname{Im} z < \pi, \;\; \operatorname{Re} z > 0$ ярим полосада;

600. $D = \left\{(x, y): \;\; -1 < x < 1, \; 0 < y < \sqrt{1 - x^2}\right\}$ соҳада

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \quad -1 < x < 1, \qquad 0 < y < \sqrt{1 - x^2}, \\ u\big|_{x^2 + y^2 = r^2} = \varphi(s), \quad 0 \le s \le l, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x) \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

масаланинг Грин функциясини тузинг ва ечимни топинг.

601. $D = \left\{(x, y): \;\; -1 < x < 1, \; 0 < y < \sqrt{1 - x^2}\right\}$ соҳада

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \quad -1 < x < 1, \qquad 0 < y < \sqrt{1 -- x^2}, \\ u\big|_{x^2 + y^2 = r^2} = \varphi(s), \quad 0 \le s \le l, \quad u\big|_{y=0} = \tau(x), \quad -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

масаланинг Грин функциясини тузинг ва ечимни топинг.

602. $D = \left\{(x, y): \;\; -1 < x < 1, \; 0 < y < \left[\left(\dfrac{m+2}{2}\right)^2 \left(1 - x^2\right)\right]^{\frac{1}{m+2}}\right\}$ соҳада

$$\begin{cases} y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad u\big|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad 0 \le s \le l, \\ u\big|_{y=0} = \tau(x), \quad -1 \le x \le 1; \quad \Gamma : x^2 + \dfrac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = 1 \end{cases}$$

масаланинг Грин функциясини тузинг ва ечимни топинг.

603. $D = \left\{(x, y): \;\; -1 < x < 1, \; 0 < y < \left[\left(\dfrac{m+2}{2}\right)^2 \left(1 - x^2\right)\right]^{\frac{1}{m+2}}\right\}$ соҳада

$$\begin{cases} y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad u\big|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad 0 \le s \le l, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x), \quad -1 < x < 1; \quad \Gamma : x^2 + \dfrac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = 1 \end{cases}$$

масаланинг Грин функциясини тузинг ва ечимини топинг.

604. Ушбу

$$\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad z > 0,$$
$$u\big|_{z=0} = u_0(x, y), \quad -\infty < x, y < +\infty$$

Дирихле масаласини f ва u_0 қуйидаги қийматларида ечинг: (f
u_0 - бўлакли-узлуксиз ва чегараланган функциялар)

1) $f = e^{-z} \sin x \cdot \cos y, \quad u_0 = 0;$

2) $f = 0, \quad u_0 = \theta(y - x) = \begin{cases} 1, & y - x \geq 0, \\ 0, & y - x < 0; \end{cases}$

3) $f = 0, \quad u_0 = \left(1 + x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}};$

4) $f = 2\left((1+z)^2 + x^2 + y^2\right)^{-2}, \quad u_0 = \left(1 + x^2 + y^2\right)^{-1};$

605. Ушбу
$$\Delta u(x) = 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0,$$
$$u\big|_S = u_0(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$
Дирихле масаласини u_0-нинг қуйидаги қийматларида ечинг:

1) u_0 - бўлакли-узлуксиз ва чегараланган функция;

2) $u_0\big|_{x_2=0} = 0, \quad u_0\big|_{x_3=0} = e^{-4x_1} \sin 5x_2 ;$

3) $u_0\big|_{x_2=0} = 0, \quad u_0\big|_{x_3=0} = x_2\left(1 + x_1^2 + x_2^2\right)^{-3/2}.$

606. Ушбу
$$\Delta u(x) = -f(x), \quad |x| < R,$$
$$u\big|_{|x|=R} = \varphi(x), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$
Дирихле масаласи
$|x| < R$ шарда ечинг.

607. Ушбу
$$\Delta u(x) = 4, \quad |x| < R,$$
$$u\big|_{|x|=R} = 0, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$
Дирихле масаласи
$|x| < R$ шарда ечинг.

608. Ушбу
$$\Delta u(x) = e^{|x|}, \quad |x| < R,$$
$$u\big|_{|x|=R} = 0, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$
Дирихле масаласи
$|x| < R$ шарда ечинг.

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > 0,$$

609. Ушбу $u|_{y=0}=\varphi(x), \quad -\infty<x<+\infty$ Дирихле масаласини φ нинг қуйидаги кийматларида ечинг:

1) $\varphi(x)$ -бўлакли-узлуксиз ва чегараланган функция;

2) $\varphi(x)=\theta(x-a)=\begin{cases}1, & x-a\geq 0,\\ 0, & x-a<0;\end{cases}$ 3) $\varphi(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$;

4) $\varphi(x)=\dfrac{8x}{1+x^2}$; 5) $\varphi(x)=\dfrac{x^2-1}{\left(1+x^2\right)^2}$;

6) $\varphi(x)=5cos\, x$; 7) $\varphi(x)=\begin{cases}0, & агар \quad x<0,\\ V, & агар \quad x>0.\end{cases}$

610. Ушбу $\Delta u(x,y)=0, \quad -\infty<x<+\infty, \quad y<0,$

$u|_{y=0}=\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}, \quad -\infty<x<+\infty$ масалани ечинг.

611. Қуйидаги $\Delta u(x,y,z)=0, \quad -\infty<x,y<+\infty, \quad z>0,$

$$u(x,y,0)=\frac{1}{\left(x^2+y^2+1\right)^{3/2}}, \quad -\infty<x,y<+\infty$$

масаланинг $u(x,y,z)$ ечимини топинг.

612. Қуйидаги $K=\left\{(r,\varphi):\ \ 0\leq r<a, \quad 0\leq\varphi<2\pi\right\}$ соҳада

$$\Delta^2 u=x^2+y^2 \quad K\ да, \qquad u|_{r=a}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=a}=0$$

масалани ечинг, бу ерда $n-$доиранинг чегарасида ўтказилган ташқи бирлик нормал.

613. Қуйидаги $K=\left\{(r,\varphi):\ \ 0\leq r<a, \quad 0\leq\varphi<2\pi\right\}$ соҳада

$$\Delta^2 u=0 \quad K\ да, \qquad u|_{r=a}=1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial\, n}\right|_{r=a}=sin^3\varphi$$

масалани ечинг, бу ерда $n-$доиранинг чегарасида ўтказилган ташқи бирлик нормал.

5- §. Штурм – Лиувилл масаласи

Гиперболик, параболик ва эллиптик типдаги тенгламалар учун қўйилган **1-3 чегаравий(аралаш) масалаларни** ечишда **Лаплас** ва **Фурье** алмаштириш-лардан ҳамда **Фурье** усулидан фойдаланилганда [7],[15] аралаш масалалар қуйидаги

$$Ly \equiv -\left(p(x)y'(x)\right)' + q(x)y(x) = f(x) \qquad (4.90)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\ y(a) - \alpha_2\ y'(a) = 0 \\ \beta_1\ y(b) - \beta_2\ y'(b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.91)$$

чегаравий масалага келтирилади, бу ерда

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0, \quad p(x) \in C^1[a,b], \quad p(x) \neq 0,$$

$$q(x) \in C[a,b], \quad f(x) \in C(a,b) \cap L_2(a,b).$$

Бунда $f_0(x) \in L_2(a,b)$ - квадрати билан жамланувчи функция

синфи, яъни $\int\limits_a^b \left|f_0(x)\right|^2 dx < \infty$.

5.1-Таъриф. M_L -L операторнинг аниқланиш соҳаси деб шундай $y(x)$ функцияларга айтиладики, $y(x) \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b]$, $y''(x) \in L_2(a,b)$ синфга теги бўлиб, (4.91) чегаравий шартларни қаноатлантирсин.

Ушбу

$$Ly = \lambda y \qquad (4.92)$$

тенгламани қараймиз.

5.2-Таъриф. (4.92) тенгламадаги λ параметрга мос операторнинг хос қийматлари) (4.92) тенгламанинг M_L соҳ тегишли нолдан фарқли $y(x)$ (хос қийматига мос хос функци ечимини топиш масаласига **Штурм – Лиувилл масала** дейилади [7].

Агар $\lambda = 0$ L операторнинг хос қийматлари бўлмаса, у ҳол (4.90), (4.91) масаланинг ечими M_l соҳада ягона ва қуйида формуладан

$$y(x) = \int\limits_a^b G_0(x,\xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in R^n \qquad (4.93)$$

топилади, бу ерда $G_0(x,\xi) -$ (4.90), (4.91) масаланинг Гри функцияси.

5.3-Таъриф. (4.90), (4.91) масаланинг Грин функцияси деб шундай $G_0(x,\xi)$ функцияга айтиладики, у функ

$\{(x,\xi):\ x\in[a,b],\ \xi\in(a,b)\}$ соҳада аниқланган бўлиб, $[a,b]$ оралиқда олинган ҳар бир ξ учун x нинг функцияси сифатида қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

1) x – нинг функцияси сифатида $G_0(x,\xi)$ функция $(x\neq\xi)$ қуйидаги

$$-p(x)G_{xx}''(x,\xi)-p'(x)G_x'(x,\xi)+q(x)G_0(x,\xi)=0 \qquad (4.94)$$

тенгламани қаноатлантиради;

2) $G_0(x,\xi)$ функция $x=a$ ва $x=b$ бўлганда (4.91) чегаравий шартларни қаноатлантиради;

3) $x=\xi$ бўлганда $[a,\xi]$ ва $[\xi,b]$ оралиқда x бўйича $G_0(x,\xi)$ функция узлуксиз, лекин биринчи тартибли ҳосиласи $x=\xi$ нуқтада чекли узулишга эга, яъни:

$$\left.\begin{aligned} &G_0(\xi+0,\xi)=G_0(\xi-0,\xi)\\ &G_{0x}'(\xi+0,\xi)-G_{0x}'(\xi-0,\xi)=-\frac{1}{p(\xi)}\end{aligned}\right| \qquad (4.95)$$

Агар (4.90), (4.91) чегаравий масала фақат тривиал ечимга эга бўлса, у ҳолда бу масала учун ягона Грин функция мавжуд ва қуйидаги кўринишда

$$G_0(x,\xi)=\begin{cases}\varphi(\xi)\,y_1(x), & агар \quad a\le x\le\xi\\ \psi(\xi)\,y_2(x), & агар \quad \xi\le x\le b\end{cases} \qquad (4.96)$$

ёзилади, бу ерда $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар $L(y)=0$ тенгламанинг нолдан фаркли ечимлари бўлиб, мос равишда (4.91) нинг биринчи ва иккинчи шартларини қаноатлантиради.

(4.96) функция (4.95) шартни қаноатлантириши учун $\varphi(\xi)$ ва $\psi(\xi)$ функцияларни шундай танлаш керакки, қуйидаги система

$$\varphi(\xi)\,y_1(\xi)=\psi(\xi)\,y_2(\xi),\quad \varphi(\xi)\,y_1'(\xi)-\psi(\xi)\,y_2'(\xi)=-\frac{1}{p(\xi)} \qquad (4.97)$$

ечимга эга бўлсин.

(4.97) кўра (4.96) ни қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

$$G_0(x,\xi)=-\frac{1}{K}\begin{cases}y_1(x)\,y_2(\xi), & a\le x\le\xi\\ y_1(\xi)\,y_2(x), & \xi\le x\le b\end{cases} \qquad (4.98)$$

бу ерда

$$K=p(x)\omega(x)=p(a)\omega(a)\neq 0,\quad x\in[a,b] \tag{4.99}$$

$$\omega(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \tag{4.100}$$

$\omega(x)$ – Вронский детерминанти.

Агар $\lambda=0$ L операторнинг хос қийматлари бўлмаса, у ҳолда $Ly=\lambda y+f(x)$ тенглама учун қўйилган (4.91) чегаравий масаланинг ечими қуйидаги интеграл тенгламага

$$y(x)=\lambda\int_a^b G_0(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\int_a^b G_0(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi \tag{4.101}$$

тенг кучлидир, бу ерда $f(x)\in C(a,b)\cap L_2(a,b)$.

1–Мисол. Қуйидаги

$$Ly\equiv -y''=f(x) \tag{4.102}$$

$$y(0)=y(1)=0 \tag{4.103}$$

масаланинг Грин функциясини тузинг ва унинг ечимини топинг.

Ечиш. $y''=0$ тенгламанинг умумий ечими $y(x)=C_1x+C_2$дан иборат. Бунга кўра $y_1(x)=x$ ва $y_2(x)=x-1$ функциялар мос равишда $y(0)=0$ ва $y(1)=0$ шартларни қаноатлантирувчи $y''=0$ тенгламанинг ечимлари бўлади. (4.90) ва (4.102) га асосан $p(x)=1$ тенг. (4.100) кўра эса $\omega(x)=\begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=x-x+1=1$га тенг. Демак, $K=p(x)\omega(x)=1$. Бундан ва (4.98) формулага асосан (4.102), (4.103) масаланинг Грин функцияси қуйидаги кўринишда

$$G_0(x,\xi)=\begin{cases} x(1-\xi), & 0\le x\le\xi \\ \xi(1-x), & \xi\le x\le 1 \end{cases} \tag{4.104}$$

бўлади.

(4.93), (4.104) формулаларга кўра (4.102), (4.103) масаланинг ечими қуйидаги формуладан

$$y(x)=\int_0^1 G_0(x,\xi)f(\xi)\,d\xi=\int_0^x \xi(1-x)f(\xi)\,d\xi+\int_x^1 x(1-\xi)f(\xi)\,d\xi=$$

$$=(1-x)\int_0^x \xi f(\xi)\,d\xi + x\int_x^1 (1-\xi) f(\xi)\,d\xi \qquad (4.105)$$

пилади.

2–Мисол. Қуйидаги

$$-\left(x^2+1\right)y''-2xy'+2y=\lambda y, \quad 0<x<1 \qquad (4.106)$$

$$y'(0)=0, \quad y(1)-y'(1)=0 \qquad (4.107)$$

Штурм–Лиувилл масаласига тенг кучли интеграл тенгламани нинг.

Ечиш. $\left(x^2+1\right)y''+2xy'-2y=0$ тенгламанинг нолдан фаркли 4.107) нинг биринчи ва иккинчи шартларини мос равишда ноатлантирувчи ечимлари

$$y_1(x)=1+x\,arctg\,x \text{ ва } y_2(x)=x \qquad (4.108)$$

функциялардан иборат. (4.90) ва (4.106) тенгламаларга асосан $p(x)=x^2+1$. 4.100) кўра эса

$$\omega(x)=\begin{vmatrix} 1+x\,arctg\,x & x \\ arctg\,x+\dfrac{x}{1+x^2} & 1 \end{vmatrix}=1+x\,arctg\,x-x\,arctg\,x-\frac{x}{1+x^2}=1-\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

га. Демак, $K=p(x)\omega(x)=1$. Бундан ва (4.98) формулага асосан (4.106) ва (4.107) масаланинг Грин функцияси қуйидаги кўринишда

$$G_0(x,\xi)=\begin{cases}-\xi(1+x\,arctg\,x), & 0\le x\le\xi \\ -x(1+\xi\,arctg\,\xi), & \xi\le x\le 1\end{cases} \qquad (4.109)$$

бўлади.

(4.101) ва (4.109) формулаларга асосан (4.106), (4.107) масаланинг ечими қуйидаги интеграл тенгламага

$$y(x)=\lambda\int_0^1 G_0(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi$$

тенг кучли бўлади, бу ерда $G_0(x,\xi)$ - функция (4.109) формула рқали аниқланади.

3–Мисол. Қуйидаги

$$Ly\equiv x^2y''+2x\,y'=m(m+1)\,x^m, \quad m>0 \qquad (4.110)$$

$$y(1)=y'(1)=0, \quad |y(0)|<\infty \qquad (4.111$$

масаланинг Грин функциясини тузинг ва унинг ечимини топиш

Ечиш. $x^2y''+2xy'=0$ тенгламанинг нолдан фарқли (4.111 нинг биринчи ва иккинчи шартларини мос равиш қаноатлантирувчи ечимлари

$$y_1(x)=1 \quad \text{ва} \quad y_2(x)=2-\frac{1}{x} \qquad (4.11$$

функциялардан иборат. (4.90) ва (4.110) тенгламаларга асос $p(x)=-x^2$. (4.100) кўра эса $\omega(x)=\begin{vmatrix}1 & 2-\frac{1}{x}\\ 0 & \frac{1}{x^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{x^2}$ га эга. Дем $K=p(x)\omega(x)=-1$. Бундан ва (4.98) формулага асосан (4.110) ва (4.111) масаланинг Грин функцияси қуйидаги кўринишда

$$G_0(x,\xi)=\begin{cases}2-\frac{1}{\xi}, & 0<x\le\xi\\ 2-\frac{1}{x}, & \xi\le x\le 1\end{cases} \quad \text{бўлади.} \qquad (4.11$$

(4.93), (4.113) формулаларга кўра (4.110), (4.111) масаланинг ечими $\left(f(\xi)=m(m+1)\xi^m\right)$ қуйидаги формуладан топилади:

$$y(x)=\int_0^1 G_0(x,\xi)m(m+1)\xi^m d\xi=m(m+1)\left[\int_0^x \xi^m\left(2-\frac{1}{x}\right)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_x^1 \xi^m\left(2-\frac{1}{\xi}\right)d\xi\right]=m(m+1)\left[\left(2-\frac{1}{x}\right)\frac{x^{m+1}}{m+1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2\xi^{m+1}}{m+1}-\frac{\xi^m}{m}\right)\Bigg|_{\xi=x}^{\xi=1}\right]=x^m+m-1.$$

(4.92), (4.91) масаланинг хос қийматлари ва хос функцияларини топиш.

Ушбу $y''(x)+\lambda y(x)=0, \quad 0<x<l$ бир жинсли тенгламани қуйидаги бир жинсли чегаравий шартлар асосида **хос қийматлари ва хос функцияларини топайлик:**

I. Агар $y(0)=0,\ \ y(l)=0$ бўлса, у ҳолда масаланинг хос қийматлари $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ \ (n=1,2,3,\dots)$ дан иборат бўлиб, унга мос хос функциялар $y_n(x)=sin\frac{\pi n}{l}x,\ \ (n=1,2,3,\dots)$ кўринишда бўлади. Бу хос функциялар нормасининг квадрати $\|y_n(x)\|^2=\int\limits_0^l\left[sin\frac{\pi n}{l}x\right]^2dx=\frac{l}{2}$ тенг.

II. Агар $y'(0)=0,\ \ y'(l)=0$ бўлса, у ҳолда масаланинг хос қийматлари $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ \ (n=1,2,3,\dots)$ дан иборат бўлиб, унга мос хос функциялар $y_n(x)=cos\frac{\pi n}{l}x,\ \ (n=1,2,3,\dots)$ кўринишда бўлади. Бу хос функциялар нормасининг квадрати $\|y_n(x)\|^2=\int\limits_0^l\left[cos\frac{\pi n}{l}x\right]^2dx=\frac{l}{2}\varepsilon_n,\ \ \varepsilon_n=\begin{cases}2, & n=0,\\ 1, & n\neq 0\end{cases}$ тенг.

III. Агар $y(0)=0,\ \ y'(l)=0$ бўлса, у ҳолда масаланинг хос қийматлари $\lambda_n=\left(\frac{\pi(2n+1)}{l}\right)^2,\ \ (n=0,1,2,3,\dots)$ дан иборат бўлиб, унга мос хос функциялар $y_n(x)=sin\frac{\pi(2n+1)}{l}x,\ \ (n=0,1,2,3,\dots)$ кўринишда бўлади. Бу хос функциялар нормасининг квадрати $\|y_n(x)\|^2=l/2$ тенг.

IV. Агар $y(0)=0,\ \ y'(l)+h\,y(l)=0,\ \ h>0$ бўлса, у ҳолда масаланинг хос қийматлари $tg\,\mu=-\frac{\mu}{h\,l},\ \mu^2=\lambda\,l^2$ трансцендент тенгламадан топилади ва унинг кўриниши $\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2,\ \ (n=1,2,3,\dots)$ дан иборат бўлиб, унга мос хос функциялар $y_n(x)=sin\frac{\mu_n}{l}x,\ \ (n=1,2,3,\dots)$ кўринишда бўлади.

Бу хос функциялар нормасининг квадрати

$$\|y_n(x)\|^2=\int\limits_0^l\left[sin\frac{\mu_n}{l}x\right]^2dx=\frac{l}{2}+\frac{h\,l^2}{2\left(\mu_n^2+(h\,l)^2\right)}$$

тенг.

V. Агар $y'(0)=0,\quad y'(l)+h\,y(l)=0,\quad h>0$ бўлса, у холд масаланинг хос қийматлари $tg\,\mu=\frac{h\,l}{\mu},\quad \mu^2=\lambda\,l^2$ трансценд тенгламадан топилади ва унинг кўрини $\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2,\quad (n=1,2,3,\ldots)$дан иборат бўлиб, унга мос функциялар $y_n(x)=cos\,\frac{\mu_n}{l}x,\quad (n=1,2,3,\ldots)$ кўринишда бўли Бу хос функциялар нормасининг квадрати

$$\left\|y_n(x)\right\|^2=\int_0^l\left[cos\,\frac{\mu_n}{l}x\right]^2dx=\frac{l}{2}+\frac{h\,l^2}{2\left(\mu_n^2+(h\,l)^2\right)}$$

тенг.

VI. Агар $y'(0)-h_1\,y(0)=0,\quad y'(l)+h_2\,y(l)=0,\quad h_1>0,\quad h_2<$ бўлса, у ҳолда масаланинг хос қийматлари $tg\,\mu\,l=\frac{(h_1+h_2)\mu}{\mu^2-h_1\,h_2}$ $\mu^2=\lambda$трансцендент тенгламадан топилади ва унинг кўрини $\lambda_n=(\mu_n)^2,\quad (n=1,2,3,\ldots)$дан иборат бўлиб, унга мос х функциялар

$$y_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n+h_1^2}}\left[\sqrt{\lambda_n}cos\,\mu_n x+h_1\,sin\,\mu_n x\right],\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

кўринишда бўлади. Бу хос функциялар нормасининг квадрати

$$\left\|y_n(x)\right\|^2=\int_0^l\left[y_n(x)\right]^2dx=\frac{l}{2}+\frac{(h_1+h_2)(h_1\,h_2+\mu_n^2)}{2(\mu_n^2+h_1^2)(\mu_n^2+h_2^2)}$$

тенг.

4–Мисол. Қуйидаги $y''=\lambda\,y\quad y(0)=y(1)=0$ масаланин қийматлари ва хос функцияларини топинг.

Ечиш. Агар $\lambda=0$ бўлса, у ҳолда $y=C_1x+C_2$ бўлиб, чегар шартларга кўра $y\equiv0$ бўлади. Демак, $\lambda=0$ хос қиймат б олмайди. Худди шундай $\lambda>0$ да ҳам қуйилган масала три ечимга эга бўлади, яъни $y\equiv0$. Агар $\lambda<0$ бўлса, у ҳолда y'' тенглама $y=C_1\,sin\sqrt{-\lambda}\,x+C_2\,cos\sqrt{-\lambda}\,x$ кўринишда умумий ечим бўлади. Бу ечимни чегаравий шартларга қуйиб, C_1

$C_2 \sin\sqrt{-\lambda}=0$ ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, берилган масала нолдан фарқли ечимга эга бўлди, агар $\lambda_k=-(k\pi)^2$, $(k=1,2,3,\ldots)$ бўлса. Бу масаланинг хос қийматлари, унга мос хос функциялар эса $y_k=\sin k\pi x$, $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ кўринишда бўлади.

5–Мисол. Қуйидаги $y''=\lambda y$ $y'(0)=y(l)=0$, $l>0$ масаланинг хос қийматлари ва хос функцияларини топинг.

Ечиш. Агар $\lambda\geq 0$ бўлса, у ҳолда қўйилган масала хос қийматларга эга бўлмайди. Агар $\lambda<0$ бўлса, у ҳолда $y''=\lambda y$ тенглама $y=C_1\sin\sqrt{-\lambda}\,x+C_2\cos\sqrt{-\lambda}\,x$ кўринишда умумий ечимга эга бўлади. Бу ечимни чегаравий шартларга қўйиб, $C_1=0$, $C_2\cos\sqrt{-\lambda}\,l=0$ ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, берилган масала нолдан фарқли ечимга эга бўлди, агар $\lambda_k=-\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right)^2$, $(k=0,1,2,3,\ldots)$ бўлса. Бу масаланинг хос қийматлари, унга мос хос функциялар эса $y_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$, $(k=0,1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ кўринишда бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар

I. Қуйидаги масалаларни $(0,1)$ интервалда Грин функциясини топинг.

6.14. $-y''=f(x)$, $y(0)=y(1)=0$.

6.15. $-y''=f(x)$, $y'(0)=y(0)$, $y(1)+y'(1)=0$.

6.16. $-y''=f(x)$, $y(0)=hy'(0)$, $y(1)=0$, $h\geq 0$.

6.17. $-y''-y=f(x)$, $y(0)=y(1)=0$.

6.18. $-y''-y=f(x)$, $y'(0)=y(0)$, $y(1)=y'(1)$.

6.19. $-y''+y=f(x)$, $y(0)=y(1)=0$.

6.20. $-y''+y=f(x)$, $y'(0)=y'(1)=0$.

6.21. $-\left(1+x^2\right)y''-2xy'=f(x)$, $y(0)=y'(0)$, $y(1)=0$

6.22. $-\left(1+x^2\right)y''-2xy'=f(x)$, $y(0)=0$, $y(1)+y'(1)=0$.

6.23. $-\left(3+x^2\right)y''-2xy'=f(x)$, $y(0)=y'(0)$, $y(1)=0$.

624. $-(x+1)^2 y''-2(x+1)y'+2y=f(x),\ \ y(0)=y(1)=0.$

625. $-\left(\frac{1}{x-2}y'\right)'+\frac{3y}{(x-2)^3}=f(x),\ \ y(0)=0,\quad y(1)=0.$

626. $-(xy')'+\frac{4}{x}y=f(x),\quad y(0)=y(1)=0.$

627. $-\frac{1}{x^2}y''+\frac{2}{x^3}y'-\frac{2}{x^4}y=f(x),\ \ y'(0)=y(1)=0.$

628. $y''=f(x),\quad y(0)+y(1)=0,\quad y'(0)+y'(1)=0.$

II. Қуйидаги масалаларни Грин функциясини тузинг.

629. $y''-k^2 y=f(x),\quad k\neq 0\quad y(-1)=y(1),\quad y'(-1)=y'(1).$

630. $y''+y=f(x),\quad y(0)=y(\pi),\quad y'(0)=y'(\pi).$

631. $xy''-y'=f(x),\quad y'(1)=0,\quad y(2)=0.$

632. $x^2y''+xy'-y=f(x),\ y(1)=0,\quad y(x)$ функция $x\to+\infty$ да чегар
ланган.

633. $-x^2y''-2xy'=f(x),\ \ y'(1)=0,\quad y(2)=0.$

634. $-xy''-y'=f(x),\ \ y'(1)=y(2)=0.$

635. $-x^3y''-3x^2y'-xy=f(x),\ \ y'(1)=0,\quad 2y'(2)+y(2)=0.$

636. $-x^4y''-4x^3y'-2x^2y=f(x),$
$y'(1)+y(1)=0,\quad 3y'(2)+y(2)=0.$

637. $cos^2x\,y''+sin2x\,y'=f(x),\ \ y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$

638. $-\left(\frac{y'}{cos\,x}\right)'=f(x),\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$

639. $-(cos^2x\,y')'=f(x),\quad y(0)=y'(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)+y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$

640. $-cos^2x\,y''+sin2x\,y'=f(x),\ \ y(0)=0,\quad \left|y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|<\infty.$

641. $-sin^2x\,y''-sin2x\,y'=f(x),\quad |y(0)|<\infty,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)+y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

642. $-x^2y''-2xy'+6y=f(x),\ |y(0)|<\infty,\quad 3y(1)+y'(1)=0.$

643. $-y''+\frac{2}{x^2}y=f(x),\ |y(0)|<\infty,\quad y(1)=0.$

644. $-xy''-y'=f(x),\ |y(0)|<\infty,\quad y(1)+y'(1)=0.$

645. $-(xy')'-(1+x)y=f(x),\quad |y(0)|<\infty,\quad y(1)=0.$

646. $-x^4y''-4x^3y'-2x^2y=f(x),\ y(1)+y'(1)=0,\ 2y(3)+3y'(3)=0.$

647. $-e^{x^2}y''-2xe^{x^2}y'=f(x),\ y(0)=2y'(0),\quad y(1)=0.$

648. $-(x+1)y''-y'=f(x),\quad |y(-1)|<\infty,\quad y(0)=0.$

649. $-\left[\left(x^2-1\right)y'\right]'+2y=f(x),\ |y(1)|<\infty,\quad y(2)=0.$

III. Қуйидаги Штурм–Луивилл масалаларнинг Грин функциясини тузинг ва унга тенг кучли бўлган интеграл тенгламаларини топинг.

650. $-\left(1+x^2\right)y''-2xy'+\lambda y=0,\ y(0)=y'(1)=0.$

651. $-e^xy''-e^xy'+\lambda y=0,\quad y(0)=0,\quad y(1)+y'(1)=0.$

652. $-y''+\lambda y=0,\ y(0)=hy'(0),\quad y(1)=0,\quad h\geq 0.$

653. $-xy''-y'+\lambda yx=0,\ |y(0)|<\infty,\quad y(1)=0.$

654. $-\frac{x}{1+x}y''-\frac{y'}{(1+x)^2}=f(x),$

$1<x<l,\quad y(1)=0,\quad y(l)-l\,y'(l)=0,\quad l\in N.$

655. $-(1-cos\,x)\cdot y''+cin\,x\cdot y'=f(x),$

$0<x<\frac{\pi}{2},\ y(0)-2y'(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

656. $-cos^4x\,y''+4\,sin\,x\cdot cos^3x\,y'=\lambda\,x\,y,$

$0<x<\frac{\pi}{2},\quad 2y(0)-y'(0)=0,\quad \left|y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|<\infty.$

657. $-x^2y''-2xy'+\left(2cos^2x+1\right)y=\lambda cos\,x,$

$1<x<2,\quad y(1)=0,\quad y'(2)=0.$

658. $-y''=\lambda y,\quad 0<x<1,\quad y'(0)=y'(1)=0.$

659. $-xy''-y'=\lambda y,\ 1<x<2,\quad y(1)=y'(2)=0.$

IV. Қуйидаги масалаларнинг хос қийматлари ва хос функцияларини топинг.

660. $y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y'(1) = 0$.

661. $x^2 y'' + \frac{1}{4} y = \lambda y, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0$.

662. $y'' + \frac{1}{x} y' = -\lambda y, \quad y(1) = 0, \quad |y(0)| < \infty$.

663. $\bar{\vartheta}''(x) + \frac{\lambda}{a_1^2} \bar{\vartheta}(x) = 0, \quad 0 < x < x_0; \qquad \tilde{\vartheta}''(x) + \frac{\lambda}{a_2^2} \tilde{\vartheta}(x) = 0, \qquad x_0 < x$

$a_j = \sqrt{\frac{E_j}{\rho_j}}, (j = 1,2)$ тенгламанинг $\bar{\vartheta}(x_0) = \tilde{\vartheta}(x_0), \quad E_1 \bar{\vartheta}'(x_0) = E_2 \tilde{\vartheta}'(x$

улаш шарти ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $\vartheta(x) = \begin{cases} \bar{\vartheta}(x), & 0 < x < x_0, \\ \tilde{\vartheta}(x), & x_0 < x < l \end{cases}$ хос функцияларни топинг:

a) $\vartheta(0) = \vartheta(l) = 0$; b) $\vartheta'(0) = \vartheta'(l) = 0$;

c) $\vartheta'(0) - h_1 \vartheta(0) = 0, \quad \vartheta'(l) + h_2 \vartheta(l) = 0, \; h_1 > 0, \; h_2 < 0$.

664. $V^{(IV)}(x) + \frac{\lambda}{a^2} V(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad l > 0$ тенгламанинг қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хос қийматлари ва хос функцияларини топинг:

a) $\vartheta(0) = \vartheta'(0) = 0, \quad \vartheta(l) = \vartheta'(l) = 0$;

b) $\vartheta''(0) = \vartheta'''(0) = 0, \quad \vartheta''(l) = \vartheta'''(l) = 0$;

c) $\vartheta(0) = \vartheta'(0) = 0, \quad \vartheta''(l) = \vartheta'''(l) = 0$.

665. $Q = \{(x, y): \; 0 < x < a, \; 0 < y < b\}$ соҳада $\Delta u(x, y) + \lambda u(x, y) = 0$ тенгламанинг

a) $u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = u(x, b) = 0$;

b) $u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0, \quad u_y(x, 0) = u_y(x, b) = 0$;

c) $u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad u_y(x, 0) = u_y(x, b) = 0$;

d) $u(0, y) = u_x(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = u_y(x, b) = 0$

шартларни қаноатлантирувчи хос қийматларини топинг.

6- §. Лаплас ва Пуассон тенгламаси учун ўзгарувчиларни ажратиш усули

Лаплас ва Пуассон тенгламалари учун турли хил соҳалар (доира, шар ва ҳалқа) да ички ва ташқи Дирихле ҳамда Нейман масалаларини 3 ва 4 параграфларда ўргандик. Ушбу параграфда, шунга ўхшаш масалаларни ўзгарувчиларни ажратиш усули (***Фурье усули***) ёрдамида ечишни ўрганамиз. Бу усулнинг умумий схемаси (модели) тўлалигича II ва III бобларда ҳамда [5], [8], [11], [15], [19] адабиётларда берилган.

(4.2_1) Лаплас тенгламаси учун $0<x<p,\quad 0<y<q$ тўғри тўртбурчакда

$$u\big|_{y=0}=\varphi(x),\qquad u\big|_{y=q}=\varphi_1(x),\tag{4.114}$$

$$u\big|_{x=0}=0,\qquad u\big|_{x=p}=0\tag{4.115}$$

шартларни қаноатлантирувчи Дирихле масаласини ечамиз. Бу ерда $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ функциялар $0\le x\le p$ оралиқда берилган узлуксиз функциялар.

Қуйилган масала ечимини $u(x,y)=X(x)Y(y)$ кўринишда излаймиз ва

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda,\quad \lambda=const\tag{4.116}$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан $X(x)\neq 0$ функцияни аниқлаш учун хос қийматлар ва хос функциялар тўғрисидаги

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$

$$X(x)\big|_{x=0}=0,\quad X(x)\big|_{x=p}=0$$

Штурм-Лиувилл масаласига келамиз. Бизга маълумки (6 5га қаранг), бу масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари $\lambda_n=\dfrac{n^2\pi^2}{p^2}$, $X_n(x)=sin\dfrac{n\pi}{p}x,\ \ n=1,2,\dots$ лардан иборат. λ_n нинг топилган қийматларини (4.116)га қўйиб, $Y(y)=Y_n(y)$ функцияни топиш учун $Y_n''(y)-\dfrac{n^2\pi^2}{p^2}Y_n(y)=0$ тенгламани ечамиз ва қуйидаги $Y_n(y)=\alpha_n ch\dfrac{n\pi}{p}y+\beta_n sh\dfrac{n\pi}{p}y,\ \ \alpha_n,\beta_n=const$ кўринишдаги умумий ечимни оламиз. Шундай қилиб, (4.2_1) тенгламанинг (4.115) шартлари қаноатлантирувчи ечими

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n ch\frac{n\pi}{p}y+\beta_n sh\frac{n\pi}{p}y\right)sin\frac{n\pi}{p}x, \qquad (4.117)$$

кўринишда бўлади. α_n, β_n номаълум коэффициентларни аниқла учун (4.114) шартлардан ва (4.117) ечимдан фойдалани қуйидагига

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\ sin\frac{n\pi}{p}x,\quad \varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\ sin\frac{n\pi}{p}x \qquad (4.118)$$

эга бўламиз.

Агар $\varphi(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функциялар Стеклов теоремаси (II боб қаранг) шартларини бажарувчи функциялар бўлса, (4.118) форму бу функцияларнинг $X_n(x)=sin\frac{n\pi}{p}x$ хос функциялар бўйи ёйилмасидан иборат бўлади ва (2.119) га асосан номаълум α_n, β_n коэффициентларни аниқлаймиз:

$$\alpha_n=\frac{2}{p}\int_0^p\varphi(x)\,sin\frac{n\pi}{p}x\,dx\,,\ \beta_n=\frac{2}{p}\int_0^p\varphi_1(x)\,sin\frac{n\pi}{p}x\,dx\,, n\in N\,.$$

α_n ва β_n ларнинг бу ифодаси (4.117) га қўйилса. (4.114), (4.11 масаланинг ечими ҳосил бўлади.

(4.2_1) Лаплас тенгламаси учун $0<x<p,\ 0<y<q$ тўғ тўртбурчакда

$$u\Big|_{y=0}=0,\quad u\Big|_{y=q}=0,\quad u\big|_{x=0}=\psi(y),\quad u\big|_{x=p}=\psi_1(y)$$

масаласини қарасак, юқоридаги мулоҳазалар ўзгармайди, фақ x *ва* y ўрнини алмаштирсак етарли, чунки тенглама x *ва* y нисбатан симметрик. Бу ерда $\psi(y), \psi_1(y)$ функциялар $0\leq y$ оралиқда берилган узлуксиз функциялар бўлиб, синуслар бўйи текис яқинлашувчи Фурье қаторига ёйилишини талаб қилами яъни

$$\psi(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\alpha}_n\ sin\frac{n\pi}{q}y,\quad \psi_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\beta}_n\ sin\frac{n\pi}{q}y\,,$$

бу ерда

$$\overline{\alpha}_n=\frac{2}{q}\int_0^q\psi(y)\,sin\frac{n\pi}{q}y\,dy\,,\ \overline{\beta}_n=\frac{2}{q}\int_0^q\psi_1(y)\,sin\frac{n\pi}{q}y\,dy\,, n\in N\,.$$

Биринчи ва иккинчи ҳолдаги масалаларнинг ечимларини қўшиш натижасида (4.2₁) тенглама учун $0<x<p,\quad 0<y<q$ тўғри тўртбурчакда

$$u\big|_{y=0}=\varphi(x),\quad u\big|_{y=q}=\varphi_1(x),\ u\big|_{x=0}=\psi(y),\quad u\big|_{x=p}=\psi_1(y)$$

масаланинг ечимини ҳосил қиламиз.

1-Мисол. $\Delta u=0$ Лаплас тенгламаси учун $0<x<p,\ 0<y<q$ тўғри тўртбурчакда $u\big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=q}=\frac{qTx}{p},\quad u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=p}=Ty$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Берилган масала ечимини $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$ кўринишда излаймиз, бу ерда $u_1(x,y)$ функция

$$\Delta u_1=0\ ,\ \left(0<x<p,\quad 0<y<q\right),$$

$$u_1\big|_{y=0}=0,\quad u_1\big|_{y=q}=0,\ \ u_1\big|_{x=0}=0,\quad u_1\big|_{x=p}=T\ \ y$$

масала ечими, $u_2(x,y)$ функция эса

$$\Delta u_2=0\ ,\left(0<x<p,\ \ 0<y<q\right),$$

$$u_2\big|_{y=0}=0,\quad u_2\big|_{y=q}=\frac{qTx}{p},\ u_2\big|_{x=0}=0,\quad u_2\big|_{x=p}=0$$

масаланинг ечими бўлади.

Демак, қўйилган масала иккита содда масалага келтирилди. Биринчи масала ечимини $u_1(x,y)=X(x)Y(y)$ кўринишда излаб, $Y(y)$ функция учун хос қийматлар ва хос функциялар тўғрисидаги

$$Y''(y)+\lambda Y(y)=0\ ,\quad Y(y)\big|_{y=0}=0,\quad Y(y)\big|_{y=q}=0$$

Штурм-Лиувилл масаласига келамиз (§ 5 га қаранг). Юқорида таъкидлаганимиздек, бу масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{q^2},\quad Y_n(y)=sin\frac{n\pi}{q}y,\quad n=1,2,...$лардан иборат. Демак, $X''(x)-\lambda X(x)=0$ тенглама ечимини эътиборга олиб,

$$u_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n e^{\frac{n\pi}{q}x}+b_n e^{-\frac{n\pi}{q}x}\right)sin\frac{n\pi}{q}y$$

ечимга эга бўламиз. Биринчи масаладаги охирги икки шарт фойдаланиб, номаълум a_n, b_n коэффициентларга нисб қуйидаги системани ҳосил киламиз:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\sin\frac{n\pi}{q}y=0 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n e^{\frac{n\pi p}{q}}+b_n e^{-\frac{n\pi p}{q}})\sin\frac{n\pi}{q}y=T\,y \end{cases}$$

Бу системани ечиб, $a_n=-b_n=(-1)^{n+1}qT\Big/n\pi sh\frac{n\pi p}{q}$ ни топамиз, дем

$u_1(x,y)$ функция

$$u_1(x,y)=\frac{2qT}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\,sh\frac{n\pi\,p}{q}}sh\frac{n\pi}{q}x\,\sin\frac{n\pi}{q}y$$

кўринишга эга бўлади.

Энди иккинчи масала ечимини топамиз, бунинг учун а таъкидлаганимиздек биринчи масаладаги *х ва у* ўрни алмаштириш етарлидир, юқоридаги мулоҳазаларни да эттирамиз, яъни $X''(x)+\lambda X(x)=0$, $X(x)\big|_{x=0}=0$, $X(x)\big|$ масаланинг хос қийматлари ва хос функцияларини топ $Y(y)=Y_n(y)$ функциянинг $Y_n(y)=\alpha_n ch\frac{n\pi}{p}y+\beta_n sh\frac{n\pi}{p}y$, $\alpha_n,\beta_n=$ кўринишга эга эканлигидан, (4.117) кўринишдаги умумий еч оламиз. Иккинчи масаладаги охирги икки шартдан фойдал номаълум α_n, β_n коэффициентларга нисбатан қуйи системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi}{p}x=0 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n ch\frac{n\pi}{p}q+\beta_n sh\frac{n\pi}{p}q\right)\sin\frac{n\pi}{p}x=\frac{qTx}{p}. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, $\alpha_n=0$, $\beta_n=(-1)^{n+1}2qT\Big/n\pi sh\frac{n\pi q}{p}$ ни топами

демак, $u_2(x,y)$ функция

$$u_2(x, y) = \frac{2qT}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, sh \frac{n\pi q}{p}} sh \frac{n\pi}{p} y \; sin \frac{n\pi}{p} x,$$

кўринишга, қуйилган масала ечими эса

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) =$$

$$= \frac{2qT}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(sh \frac{n\pi}{p} y \; sin \frac{n\pi}{p} x \Big/ sh \frac{n\pi q}{p} + sh \frac{n\pi}{q} x \; sin \frac{n\pi}{q} y \Big/ sh \frac{n\pi p}{q} \right)$$

кўринишга эга бўлади.

2-Мисол. $\Delta u(x, y) = 0$ Лаплас тенгламаси учун $0 \leq x \leq p$, $0 \leq y < +\infty$ ярим текисликда $u|_{y=0} = A\left(1 - \frac{x}{p}\right)$, $u|_{y=+\infty} = 0$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=p} = 0$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Қуйидаги ёрдамчи масалани қараймиз:

$$\begin{cases} \upsilon_{xx} + \upsilon_{yy} = 0, \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < +\infty, \\ \upsilon(0, y) = 0, \quad \upsilon(p, y) = 0, \quad 0 \leq y < +\infty. \end{cases} \qquad (4.119)$$

Бу масала ечимини $\upsilon(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ кўринишда излаймиз ва

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda, \quad \lambda = const \qquad (4.120)$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан $X(x) \neq 0$ функцияни аниқлаш учун хос қийматлар ва хос функциялар тўғрисидаги

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < p, \; X(x)\big|_{x=0} = 0, \; X(x)\big|_{x=p} = 0$$

Штурм-Лиувилл масаласига келамиз. Бизга маълумки (§ 5га қаранг), бу масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{p^2}$, $X_n(x) = sin \frac{n\pi}{p} x, n = 1, 2, ...$ лардан иборат. λ_n нинг топилган қийматларини (4.119)га қўйиб, $Y(y) = Y_n(y)$ функцияни топиш учун $Y_n''(y) - \frac{n^2\pi^2}{p^2} Y_n(y) = 0$ тенгламани ечамиз ва қуйидаги $Y_n(y) = A_n e^{-\frac{n\pi}{p} y} + B_n e^{\frac{n\pi}{p} y}$ $A_n, B_n = const$ кўринишдаги умумий ечимни оламиз. Булардан $\upsilon_n(x,y)=\left[A_n e^{-\frac{n\pi}{p}y}+B_n e^{\frac{n\pi}{p}y}\right]\cdot sin\frac{n\pi}{p}x$ эканлигини топами

Шундай қилиб, $u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=p}=0$ шартларни қаноатлантиру қўйилган масаланинг ечими

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{-\frac{n\pi}{p}y}+B_n e^{\frac{n\pi}{p}y}\right]sin\frac{n\pi}{p}x,$$

кўринишда бўлади. A_n, B_n номаълум коэффициентлар аниқлаймиз. $u(x,+\infty)=0$ шартга кўра $B_n=0,\ n=1,2,\ldots$. Икки $u(x,0)=A\left(1-\frac{x}{p}\right)$ шартга асосан эса

$$A\left(1-\frac{x}{p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\ sin\frac{n\pi}{p}x\quad\Rightarrow\quad A_n=\frac{2}{p}\int_0^p A\left(1-\frac{x}{p}\right)sin\frac{n\pi}{p}x\,dx=\frac{2A}{\pi n}$$

эга бўламиз. Демак, қўйилган масаланинг ечими

$$u(x,y)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{p}y}\ sin\frac{n\pi}{p}x$$

формуладан топилади.

3-Мисол. $\Delta u=0$ Лаплас тенгламаси учун $0<x<\infty,\quad 0<y$ тўғри тўртбурчакда $u_y(x,0)-hu(x,0)=0,\ \ u(x,q)=0,\ \ u(0,y)=q$ $u(\infty,y)=0,\ \ h>0$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини топин

Ечиш. Масала ечимини $u(x,y)=X(x)Y(y)$ кўринишда и $Y(y)$ функция учун хос қийматлар ва хос функциялар тўғриси

$$Y''(y)+\lambda Y(y)=0\quad Y'(0)-hY(0)=0,\ Y(q)=0$$

Штурм-Лиувилл масаласига келамиз (§5га қаранг). масаланинг λ_n хос қийматлари $htg\sqrt{\lambda}=-\sqrt{\lambda}$ тенгламанинг му илдизларидан иборат ва хос функциялари $Y_n(y)=\sqrt{\lambda_n}\ cos\sqrt{\lambda_n}y+h\ sin\sqrt{\lambda_n}y,\ \ n=1,2,\ldots$ лардан иборат. Дем масала ечими

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n e^{\sqrt{\lambda_n}x}+b_n e^{-\sqrt{\lambda_n}x}\right)\left(\sqrt{\lambda_n}\ cos\sqrt{\lambda_n}y+h\ sin\sqrt{\lambda_n}y\right)$$

кўринишга эга бўлиб, охирги иккита шартдан фойдаланиб, номаълум a_n, b_n коэффициентларга нисбатан қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left|\begin{array}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\left(\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}y+h\sin\sqrt{\lambda_n}y\right)=q-y\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}(a_n e^{\sqrt{\lambda_n}x}+b_n e^{-\sqrt{\lambda_n}x})\left(\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}y+h\sin\sqrt{\lambda_n}\,y\right)=0\end{array}\right.$$

Бу системани ечиб, $a_n=0,\quad b_n=\dfrac{2(1+hq)}{\sqrt{\lambda_n}\left(h+q(h^2+\lambda_n)\right)}$ ни топамиз,

демак, $u(x,y)$ функция

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1+hq)e^{-\sqrt{\lambda_n}x}}{\sqrt{\lambda_n}\left(h+q(h^2+\lambda_n)\right)}Y_n(y)$$

кўринишга эга бўлади.

Кутб, цилиндрик ёки сферик координаталар ёрдамида ечиладиган масалаларни қараймиз.

(4.2$_1$) тенглама $x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$ кутб координаталарида

$$\Delta u(r,\varphi)\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \qquad (4.121)$$

кўринишга эга бўлади.

$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ тенглама $x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z$ цилиндрик координаталарида

$$\Delta u(r,\varphi,z)\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \qquad (4.122)$$

кўринишга эга бўлади.

$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ тенглама $x=r\sin\theta\cdot\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\cdot\sin\varphi,$ $z=r\cos\theta$ сферик координаталарида

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)\equiv\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (4.123)$$

кўринишга эга бўлади.

I. (4.2$_1$) (ёки (4.121)) Лаплас тенгламасининг $x^2+y^2=r^2<R^2$, $(0\le r<R)$ **доирада**

$$u(x,y)\big|_{r=R}=f(\varphi) \qquad (4.124)$$

шартни қаноатлантирувчи Дирихле масаласининг $u(r,\varphi)$ ечими **Фурье** усули орқали топишни кўрсатамиз.

(4.121) формуладан фойдаланиб, унинг ечимини

$$u = Z(r)\Phi(\varphi) \qquad (4.1$$

кўринишида изласак,

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0\,, \qquad (4.1$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Z}{\partial r}\right)-\lambda Z=0 \qquad (4.1$$

тенгламаларга эга бўламиз. $u(r,\varphi+2\pi)=u(r,\varphi)$, бўлгани учун $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$, ҳамда (4.126)дан $\sqrt{\lambda}=n,\ (n>0-\text{бутун сон})$ $\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi$ бўлади. У ҳолда (4.127) тенгламанинг ечими

$$Z_n(r)=a\,r^n+b\,r^{-n}$$

кўринишга эга бўлади. Агар $n=0\ (\lambda=0)$ бўлса, $Z(r)=c_1\ln r+$ цилиндрик ёки доиравий симметрияга эга бўлган ечимни олами

Дирихленинг ички масаласини қарасак, $r\to 0$ да ечим чегараланган бўлиши керак, демак, $b=0$ бўлиб, $Z_n(r)=a\,r^n$ $Z_0(r)=C$ бўлади, яъни Дирихленинг ички масаласи ечимини

$$u(r,\varphi)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi) \qquad (4.1$$

кўринишда излаймиз, бу ердаги A_n ва B_n коэффициентлар ўзгармас C лар (4.124) чегаравий шартдан аниқланади.

Дирихленинг ташқи масаласида эса $r\to+\infty$ да ечим чегараланган бўлиши керак, демак, $a=0$ бўлиб, $Z_n(r)=br^{-n}$ $Z_0(r)=C$ бўлади, яъни Дирихленинг ташқи масаласи ечими

$$u(r,\varphi)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^n}{r^n}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right) \qquad (4.1$$

кўринишда изланади.

4-Мисол. Бирлик доирада $u\big|_{r=1}=\sin^6\varphi+\cos^6\varphi$ шартни қаноатлантирувчи гармоник функцияни топинг.

Ечиш. Бирлик доирада гармоник бўлган $u(r,\varphi)$ функцияни (4.1 кўринишда излаймиз, яъни

$$u(r,\varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) .$$

Энди масала шартидан фойдаланиб,

$$C + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \sin^6\varphi + \cos^6\varphi = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4\varphi)$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан

$$C = \frac{5}{8},\ A_1 = A_2 = A_3 = 0,\ A_4 = \frac{3}{8},\ A_5 = A_6 = \ldots = 0 \text{ ва } B_1 = B_2 = \ldots = 0 .$$

Демак, биз излаётган гармоник функция $u(r,\varphi) = \frac{5}{8} + r^4 \frac{3}{8} \cos 4\varphi$ кўринишга эга бўлади.

5-Мисол (4.2$_1$) Лаплас тенгламасининг $x^2 + y^2 = r^2 \leq R^2$, $(0 \leq r \leq R)$ доира ташқарисида $u_r(R,\varphi) - hu(R,\varphi) = f(\varphi)$ шартини қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Доира ташқарисида гармоник функцияни (4.129) кўринишда излаймиз. Масала шартига асосан:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nR^n}{R^{n+1}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) - Ch -$$

$$-h \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right) = f(\varphi) ,$$

бундан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{R} + h \right) \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \right) = -f(\varphi) - Ch$$ га эга бўламиз.

Охирги тенгликни иккала томонини аввал $\cos k\varphi$ ва сўнгра $\sin k\varphi$ функцияларга кўпайтириб, 0 дан 2π гача интеграллаш натижасида, мос равишда аввал $A_k = -\frac{R}{\pi(k+hR)} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi$ ни, кейин эса $B_k = -\frac{R}{\pi(k+hR)} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi \, d\varphi$ ни топамиз.

Демак, масала ечими

$$u(r,\varphi) = C - \frac{R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{(n+hR) \cdot r^n} \left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \right)$$

кўринишга эга бўлиб, бу ерда

$$a_n = \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\ , \quad b_n = \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi\, .$$

6-Мисол. Қуйидаги

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} r^4 sin\, 2\varphi, \quad 0 \le r < R,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad (4.130)$$

$$u(R,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad (4.131)$$

масалани ечинг.

Ечиш. (4.130) тенгламанинг хусусий ечимини

$$u_1(r,\varphi) = w(r)\cdot sin\, 2\varphi$$

кўринишда излаймиз. Бу ечимни (4.130) тенгламага кўйиб қуйидагини

$$r^2\, w'' + r\, w' - 4w = -0{,}5\, r^4$$

ҳосил қиламиз. Охирги тенгламада $r = e^t$ алмаштириш қилиб ўзгармас коэффициентли оддий дифференциал тенгламани оламиз

$$w''_{tt} \ - 4w = -0{,}5\, e^{4t}\ .$$

Бу тенгламанинг хусусий ечими $w(t) = -\, e^{4t}\big/24$ тенг, юқоридаги алмаштиришга кўра эса $w(r) = -\, r^4\big/24$ тенг.

Шундай қилиб, (4.130) тенгламанинг хусусий ечими

$$u_1(r,\varphi) = -\big(r^4 sin\, 2\varphi\big)\big/24$$

кўринишда бўлади.

Энди (4.130), (4.131) масала ечимини қуйидаги

$$u(r,\varphi) = \upsilon(r,\varphi) + u_1(r,\varphi) \qquad (4.132)$$

кўринишда ифодалаймиз, бу ерда $\upsilon(r,\varphi)$ функция қуйидаги

$$\begin{cases} r^2 \upsilon_{rr} + r\,\upsilon_r + \upsilon_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ \upsilon(R,\varphi) = \dfrac{1}{24} R^4 sin\, 2\,\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Дирихле масаласининг ечими.

(4.23) формулага кўра:

$$\frac{1}{24} R^4 sin\, 2\,\varphi = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cos\, k\,\varphi + b_k sin\, k\,\varphi\right),$$

бундан $a_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots;\quad b_1 = 0,\ b_2 = \dfrac{1}{24} R^4, \quad b_k = 0, \quad k = 3, 4, \ldots$ эга бўламиз ва охирги масаланинг ечимини топамиз:

$$v(r,\varphi)=\left(\frac{r}{R}\right)^{2}\cdot\frac{1}{24}R^{4}\sin 2\varphi=\frac{1}{24}R^{2}r^{2}\sin 2\varphi .$$

Буни (4.132) формулага куйиб, (4.130), (4.131) масала ечимини

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{24}r^{2}\left(R^{2}-r^{2}\right)\sin 2\varphi$$

кўринишда топамиз.

II. (4.2$_1$) (ёки (4.121)) Лаплас тенгламасининг $\{(r,\varphi):\ R_1<r<R_2,\ 0\le\varphi<2\pi\}$ **ҳалқада** $u(r,\varphi)\big|_{r=R_1}=f_1(\varphi)$, $u(r,\varphi)\big|_{r=R_2}=f_2(\varphi),\ \ 0\le\varphi\le 2\pi$ шартни қаноатлантирувчи Дирихле масаласининг $u(r,\varphi)$ ечимини топинг.

Бу масаланинг ечими

$$u(r,\varphi)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^{n}+\frac{C_n}{r^{n}}\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n r^{n}+\frac{D_n}{r^{n}}\right)\sin n\varphi$$

кўринишда изланади, бу ердаги A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n коэффициентлар чегаравий шартларга асосан топилади[5].

7-Мисол. $R_1<r<R_2$ ҳалқада $u(R_1,\varphi)=T+U\ \cos\varphi$, $u_r(R_1,\varphi)-h\,u(R_2,\varphi)=0$ шартларни қаноатлантирувчи гармоник функцияни топинг.

Ечиш. Гармоник функцияни $u(r)=a\ln r+b$ кўринишда излаймиз, ва масала шартлари орқали a ва b номаълумларни аниқлаймиз:

$$\begin{cases}u(R_1)=a\ln R_1+b=T+U\ \cos\varphi\\ u_r(R_2,\varphi)-h\,u(R_2,\varphi)=\dfrac{a}{R_2}-h\,a\ln R_2-hb=0\end{cases}$$

Бундан

$$a=\frac{(T+U\ \cos\varphi)hR_2}{hR_2\ln\dfrac{R_1}{R_2}+1}\quad \text{ва}\quad b=T+U\ \cos\varphi-\frac{(T+U\ \cos\varphi)h\,R_2}{h\,R_2\ln\dfrac{R_1}{R_2}+1}\ln R_1$$

ларни топамиз. Демак, қўйилган масала ечими

$$u(r)=T+U\ \cos\varphi+\frac{(T+U\ \cos\varphi)h\,R_2}{h\,R_2\ln\dfrac{R_1}{R_2}+1}\ln\frac{r}{R_1}$$

кўринишга эга бўлади.

8-Мисол. Қуйидаги

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=Ar^2\cos 2\varphi, \quad R_1<r<R_2, \ \ 0\le\varphi<2\pi, \\ u(r,\varphi)\big|_{r=R_1}=1, \quad \left.\dfrac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=R_2}=0, \quad 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases} \qquad (4.1$$

масалани ечинг.

Ечиш. Қўйилган масаланинг ечимини $u(r,\varphi)=\upsilon(r,\varphi)+w($ кўринишда излаймиз, бу ерда $w(r)$ ва $\upsilon(r,\varphi)$ функциялар мо равишда қуйидаги масалаларнинг ечими:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)=0, \quad R_1<r<R_2, \\ w(R_1)=1, \quad w'(R_2)=0; \end{cases} \qquad (4.13$$

ва

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial \upsilon}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial \varphi^2}=Ar^2\cos 2\varphi, \quad R_1<r<R_2, \ \ 0\le\varphi<2\pi, \\ \upsilon(R_1,\varphi)=0, \quad \dfrac{\partial}{\partial r}\upsilon(R_2,\varphi)=0, \quad 0\le\varphi\le 2\pi. \end{cases} \qquad (4.13$$

(4.133.1) масаланинг ечими $w(r)=1$ дан иборат. (4.13 масаланинг ечимини $\upsilon(r,\varphi)=R(r)\cdot\cos 2\varphi$ кўринишда излайми Буни (4.133.2) даги тенгламага қўйиб,

$$\cos 2\varphi\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)-\frac{4}{r^2}R(r)\cos 2\varphi=Ar^2\cos 2\varphi\,, \quad \text{ёки}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-4R(r)=Ar^2\,, \ R(R_1)=0, \quad R'(R_2)=0 \qquad (4.1$$

ҳосил қиламиз.

(4.133.3) масала $r=e^t$ алмаштириш ёрдамида ечилиб, у ечимини

$$R(r)=\left[-\frac{A\left(R_1^6+2R_2^6\right)}{12\left(R_1^4+R_2^4\right)}r^2+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{AR_1^4R_2^4\left(2R_2^2-R_1^2\right)}{6\left(R_1^4+R_2^4\right)}+\frac{A}{12}r^4\right]\cdot\cos 2\varphi$$

кўринишда топамиз.

Шундай қилиб, (4.133) масаланинг ечимини

$$u(r,\varphi)=\upsilon(r,\varphi)+w(r)=$$

$$=1+\left[-\frac{A\left(R_1^6+2R_2^6\right)}{12\left(R_1^4+R_2^4\right)}r^2+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{AR_1^4R_2^4\left(2R_2^2-R_1^2\right)}{6\left(R_1^4+R_2^4\right)}+\frac{A}{12}r^4\right]\cdot cos\,2\varphi$$

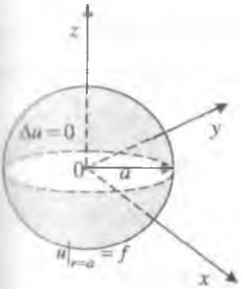
оламиз.

III. (4.122) Лаплас тенгламасининг **цилиндрда** (5.2-чизма)

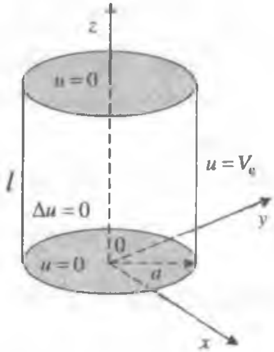
$$u(r,0)=u(r,l)=0,\quad 0\le r\le a, \tag{4.134}$$

$$u(a,z)=V_0,\quad 0\le z\le l \tag{4.135}$$

шартни қаноатлантирувчи $u(r,z)$ ечимини **Фурье** усули орқали топамиз.



5.1-чизма



5.2- чизма

Ечиш. (4.122), (4.134) масала ечимини $u(r,z)=R(r)\cdot Z(z)$ кўринишда излаб,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,R')-\lambda R=0, \tag{4.136}$$

$$\begin{cases} Z''+\lambda Z=0, & 0<z<l \\ Z(0)=Z(l)=0 \end{cases} \tag{4.137}$$

эга бўламиз.

(4.137) масала **Штурм-Лиувилл масаласи** (§5га қаранг). Бизга маълумки , бу масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $Z_n(x)=sin\,\frac{n\pi}{l}z$, $n=1,2,...$ лардан иборат. λ_n нинг топилган қийматларини (4.136)га қўйиб, $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,R'(r)\right)-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 R(r)=0$ Бессел тенгламани оламиз. Бу тенгламани $x=\pi n r/l$ алмаштириш ёрдамида

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-x^2R=0$$

тенгламага келтирамиз. Унинг умумий ечими

$$R(x)=C_1I_0(x)+C_2K_0(x) \qquad (4.138)$$

кўринишда бўлади, бу ерда $I_0(x)$ ва $K_0(x)$ мос равишда мавҳум аргументли биринчи ва иккинчи турдаги нолинчи тартибдаги Бессел функциялар [2],[12],[19], яъни

$$I_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\pi\nu},$$

бунда $x\to 0$ да $K_0(x)$ −Макдоналрд функцияси чексизликка интилади $\left(K_0(x)\to\infty\right)$. Демак, чегараланган ечимга эга бўлиш учун (4.138) да $C_2=0$ деб оламиз.

Шундай қилиб, (4.138) дан

$$R_n(r)=C_nI_0\left(\frac{\pi n}{l}r\right)$$

ҳосил қиламиз. Демак, (4.122), (4.134) масала ечимини

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nI_0\left(\frac{\pi n}{l}r\right)\sin\frac{n\pi}{l}z$$

қатор кўринишда ифодалаймиз. Бундан, (4.135) шартга кўра ни топамиз:

$$C_nI_0\left(\frac{\pi n}{l}a\right)=\frac{2}{l}\int_0^l V_0\sin\frac{\pi n}{l}z\,dz=\begin{cases}\dfrac{4V_0}{\pi n}, & n=2k+1,\\ 0 & n=2k;\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_n=4V_0\Big/\left[(2k+1)\pi\, I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}a\right)\right].$$

У ҳолда (4.122), (4.134), (4.135) масаланинг ечими

$$u(r,z)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_0\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{l}r\right)}{I_0\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{l}a\right)}\frac{\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{l}z}{2k+1}$$

кўринишда бўлади.

9-Мисол. Қуйидаги

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-4\pi A z J_0\left(\frac{\mu}{R}r\right),\quad 0<r<R,\ 0<z<h, \tag{4.139}$$

$$u(r,0)=u(r,h)=0,\quad 0\le r\le R, \tag{4.140}$$

$$u(R,z)=0,\quad 0\le z\le h \tag{4.141}$$

масалани ечинг.

Ечиш. (4.139), (4.140), (4.141) масалани ечимини $u(r,z)=J_0\left(\frac{\mu}{R}r\right)f(z)$ кўринишда излаймиз. Агар μ сони $J_0(\mu)=0$ тенгламанинг мусбат ечими бўлса, у ҳолда изланаётган ечим (4.141) шартни қаноатлантиради. Энди буни (4.139) тенгламага қўйиб, қуйидагини

$$f(z)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(J_0\left(\frac{\mu}{R}r\right)\right)\right]+J_0\left(\frac{\mu}{R}r\right)f''(z)=-4\pi A z J_0\left(\frac{\mu}{R}r\right) \tag{4.142}$$

оламиз. Олдинги масалага кўра $R(r)=J_0\left(\frac{\mu}{R}r\right)$ функция Бессел тенгламасини қаноатлантиради. Шунинг учун (4.142) тенглик

$$(-1)f(z)\left(\frac{\mu}{R}\right)^2 J_0\left(\frac{\mu}{R}r\right)+J_0\left(\frac{\mu}{R}r\right)f''(z)=-4\pi A z J_0\left(\frac{\mu}{R}r\right)$$

кўринишни олади. Бундан қуйидаги

$$f''(z)-\left(\frac{\mu}{R}\right)^2 f(z)=-4\pi A z,\quad 0<z<h \tag{4.143}$$

оддий дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз.

(4.140) шартга асосан (4.143) тенгламани $f(0)=f(h)=0$ шарт остида ечимини топамиз:

$$f(z)=-\frac{4\pi hR^2}{\mu^2}\cdot\left\{\left[sh\left(\frac{\mu}{R}z\right)\Big/sh\left(\frac{\mu}{R}h\right)\right]-\frac{z}{h}\right\}.$$

Шундай қилиб, (4.139), (4.140), (4.141) масалани ечими

$$u(r,z)=-\frac{4\pi hR^2}{\mu^2}\cdot\left\{\left[sh\left(\frac{\mu}{R}z\right)\Big/sh\left(\frac{\mu}{R}h\right)\right]-\frac{z}{h}\right\}\cdot J_0\left(\frac{\mu}{R}r\right)$$

кўринишда бўлади.

IV. (4.123) Лаплас тенгламасининг

$\{(r,\theta,\varphi):\ 0<r<a,\ 0<\theta<\pi,\ 0\le\varphi<2\pi\}$ **шарда** (5.1-чизма)

$$u(a,\theta,\varphi)=sin3\theta\cdot cos\varphi,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi \tag{4.145}$$

шартни қаноатлантирувчи ички Дирихле масаласининг ечими **Фурье** усули ёрдамида ечамиз.

Ечиш. (4.123), (4.145) масалани ечимини

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\cdot f(\theta,\varphi) \qquad (4.146)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $f(\theta,\varphi)-$ сферада чегарала функция бўлиб,

$$\left|f(0,\varphi)\right|<+\infty, \quad \left|f(\pi,\varphi)\right|<+\infty, \quad f(0,\varphi)=f(0,\varphi+2\pi) \qquad (4.147)$$

шартларни қаноатлантиради.

(4.146) ни (4.123) тенгламага қўйиб, иккита

$$r^2R''(r)+2\,r\,R'(r)-\lambda\,R(r)=0, \qquad (4.148)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\lambda\,f=0 \qquad (4.149)$$

тенгламаларни оламиз.

6.1-Таориф. Агар $f(\theta,\varphi)$ функциянинг икки марта узлук ҳосилалари мавжуд бўлиб, (4.149) тенгламанинг чегарала ечими бўлса, у ҳолда $f(\theta,\varphi)$ функция **сферик функция** дейил

(4.149), (4.147) масала ечимини $u(\theta,\varphi)=T(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$ кўринишда излаб,

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\cdot\dfrac{dT}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\dfrac{\mu}{\sin^2\theta}\right)T=0, \quad 0<\theta<\pi,\\ \left|T(0)\right|<+\infty, \quad \left|T(\pi)\right|<+\infty;\end{cases} \qquad (4.150)$$

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\,\Phi=0, \quad 0\le\varphi<2\pi,\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)=0\end{cases} \qquad (4.151)$$

эга бўламиз.

(4.151) масаланинг хос қийматлари ва хос функция $\mu=m^2, \quad \Phi_m(\varphi)=C_1\cos m\varphi+C_2\sin m\varphi, \quad m=0,1,\ldots$ лардан иборат, C_1 C_2 − ихтиёрий ўзгармаслар.

(4.150) масалани ечиш учун тенгламада $x=\cos\theta$ алмаштир бажариб,

$$T'=\frac{dT}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cdot\frac{dT}{dx}, \qquad T''=\frac{d^2T}{dx^2}\cdot\sin^2\theta-\frac{dT}{dx}\cdot\cos\theta$$

тенгликларни эътиборга олиб, қуйидаги масалага

$$\begin{cases} \left(1-x^2\right)\dfrac{d^2T}{d\,x^2}-2x\dfrac{d\,T}{d\,x}+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)T=0, \quad -1<x<1, \\ \left|T(-1)\right|<+\infty, \quad \left|T(+1)\right|<+\infty \end{cases} \tag{4.152}$$

ммиз. Бу масаланинг хос функциялари куйидаги кўринишда бўлади [5]:

$$T_n^{(m)}(x)=P_n^{(m)}(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^2P_n(x)}{d\,x^m},$$

бу ерда $P_n^{(m)}(x)$ - кўшиб олинган Лежандр функцияси [2].

Бундан, (4.150) формуладаги тенгламанинг ечими $T_n^{(m)}(\theta)=P_n^{(m)}(cos\,\theta)$ кўринишда бўлади.

Шундай қилиб, (4.149) тенгламанинг $\lambda_n = n(n+1)$ бўлгандаги умумий ечими қуйидаги кўринишда

$$f_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{n}T_n^{(m)}(\theta)\cdot\Phi_m(\varphi)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\left[A_{m\,n}cos\,m\,\varphi+B_{m\,n}sin\,m\,\varphi\right]\cdot P_n^{(m)}\left(cos\,\theta\right)$$

ифодаланади.

Энди (4.148) тенгламани ечамиз. Бунинг учун $R(r)=r^{\sigma}$ ва $\lambda=n(n+1)$ ларни (4.148) тенгламага қўйиб, $\sigma(\sigma+1)-n(n+1)=0 \;\Rightarrow\; \sigma_1=n,\;\; \sigma_2=-(n+1)$ ҳосил қиламиз. Шуни таъкидлаш лозимки, $\sigma_2=-(n+1)$ га мос бўлган ечимлар $r\to 0$ да чегараланмаган. Шунинг учун бу ечимларни қарамаймиз. Демак, масалага мос ечим сифатида қуйидаги

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}r^n\left[A_{mn}cos\,m\varphi+B_{mn}sin\,m\varphi\right]\cdot P_n^{(m)}\left(cos\,\theta\right) \tag{4.153}$$

қаторни қараш мумкин.

(4.153) ва (4.145) га кўра

$$sin\,3\theta\cdot cos\,\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}a^n\left[A_{mn}cos\,m\varphi+B_{mn}sin\,m\varphi\right]\cdot P_n^{(m)}\left(cos\,\theta\right)$$

га бўламиз. Бу тенглик фақат $m=1$ бўлгандагина бажарилади, яъни

$$sin 3\theta = \sum_{n=1}^{\infty} a^n A_{1n} \cdot P_n^{(1)}\left(cos\theta\right). \qquad (4.154)$$

Қуйидаги формулаларни эътиборга олиб,

$$sin 3\theta = sin\theta\left(4Cos^2\theta - 1\right), \quad P_n^{(1)}\left(cos\theta\right) = sin\theta \cdot \frac{d P_n(cos\theta)}{d(cos\theta)},$$

$$P_1(x) = x, \quad P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^2 - 3x\right)$$

(4.154) тенгликдан номаълум коэффициентларни

$$\left(4Cos^2\theta - 1\right)\cdot sin\theta =$$

$$= sin\theta\left[a \cdot A_{11} \cdot 1 + a^2 \cdot A_{13} \cdot \frac{1}{2}\left(14cos^2\theta - 3\right)\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow A_{11} = -\dfrac{1}{5a}, \quad A_{13} = \dfrac{8}{15a^3}, \quad A_{1n} = 0, \quad n = 2, 3, \ldots$ топамиз.

Шундай қилиб, (4.123), (4.145) масаланинг ечими

$$u(r,\theta,\varphi) = -\frac{r}{5a} P_1^{(1)}(cos\theta)\cdot cos\varphi + \frac{8}{15}\left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3^{(1)}(cos\theta)\cdot cos\varphi$$

кўринишда бўлади.

Умумий ҳолда. Агар $\psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot P_n^{(1)}\left(cos\theta\right)$ бўлса, у ҳолда (4.154) тенгликдаги номаълум коэффициентлар

$$b_n = \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\int_0^{\pi}\psi(\theta)\cdot P_n^{(1)}\left(cos\theta\right) sin\theta\, d\theta$$

формуладан топилади.

1-Изоҳ. Шарда (4.123) Лаплас тенгламаси учун

$$u(a,\theta,\varphi) = \phi(\theta,\varphi) \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad (4.155)$$

шарт билан берилган Дирихле масаласининг ечими (4.153) қатор орқали топилади.(4.153) ва (4.155) кўра эса

$$\phi(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a^n\left[A_{mn} cos\, m\varphi + B_{mn} sin\, m\varphi\right]\cdot P_n^{(m)}\left(cos\theta\right) \qquad (4.156)$$

тенглик ўринлидир.

(4.156) тенгликдаги номаълум коэффициентлар қуйидаги

$$A_{mn} = \frac{1}{\left\|f_n^{(m)}\right\|^2 a^n}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^{(m)}\left(cos\theta\right) cos\, m\varphi \cdot sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\left\| f_n^{(m)} \right\|^2 a^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta) \sin m\varphi \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

формулалардан топилади, бу ерда

$$\left\| f_n^{(m)} \right\|^2 = \frac{2\pi\,\varepsilon_m (m+n)!}{(2n+1)(n-m)!}, \qquad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m > 1. \end{cases}$$

2-Изоҳ. (4.123), (4.155) ички Дирихле масаласининг $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ нуктадаги ечимини Пуассон интеграли орқали аниқлаш мумкин:

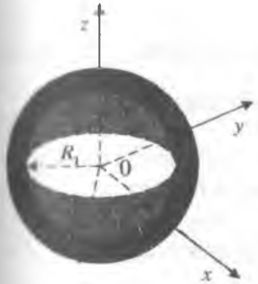
$$u(r_0,\theta_0,\varphi_0) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) \frac{a^2 - r_0^2}{\left(a^2 + r_0^2 - 2a\,r_0 \cos\gamma\right)^{3/2}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

бу ерда $\cos\gamma = \cos\theta \cdot \cos\theta_0 + \sin\theta \cdot \sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$.

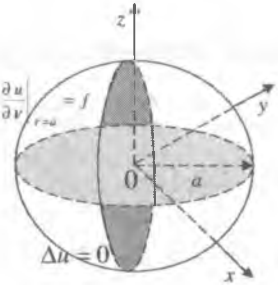
V. (4.123) Лаплас тенгламасининг $\{(r,\theta,\varphi):\ R_1 < r < R_2,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ **сферик қатлам ичида** (5.3-чизма)

$$u\big|_{r=R_1} = P_2^{(1)}(\cos\theta) \cdot \sin\varphi, \quad u\big|_{r=R_2} = P_5^{(3)}(\cos\theta) \cdot \cos 3\varphi, \qquad (4.157)$$
$$\theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi]$$

шартни қаноатлантирувчи $u(r,\theta,\varphi)$ гармоник функцияни топинг



5.3-чизма



5.4- чизма

Ечиш. (4.123), (4.157) масалани ечими

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[\left(A_{nm} r^n + \frac{B_{nm}}{r^{n+1}} \right) \cos m\varphi + \right.$$

$$+\left(C_{nm}r^{n}+\frac{D_{nm}}{r^{n+1}}\right)\sin m\varphi\Bigg]\cdot P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

кўринишда изланади, бу ердаги A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D коэффициентлар (4.157) чегаравий шартларга асосан топилади[5]

$$1)\ \begin{cases} C_{21}R_1^2+\dfrac{D_{21}}{R_1^3}=1,\\[2ex] A_{21}R_1^2+\dfrac{B_{21}}{R_1^3}=0,\\[2ex] C_{21}R_2^2+\dfrac{D_{21}}{R_2^3}=0,\\[2ex] A_{21}R_2^2+\dfrac{B_{21}}{R_2^3}=0; \end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases} A_{53}R_1^5+\dfrac{B_{53}}{R_1^6}=0,\\[2ex] C_{53}R_1^5+\dfrac{D_{53}}{R_1^6}=0,\\[2ex] A_{53}R_2^5+\dfrac{B_{53}}{R_2^6}=1,\\[2ex] C_{53}R_2^5+\dfrac{D_{53}}{R_2^6}=0. \end{cases}\qquad (4.15$$

Қолган коэффициентлар нолга тенг. (4.158) системани ечиб номаълум коэффициентларни

$$A_{21}=B_{21}=0,\quad C_{53}=D_{53}=0,\quad C_{21}=-\frac{R_1^3}{R_2^5-R_1^5},$$

$$D_{21}=\frac{R_1^3R_2^5}{R_2^5-R_1^5},\quad A_{53}=\frac{R_2^6}{R_2^{11}-R_1^{11}},\quad B_{53}=-\frac{R_1^{11}R_2^6}{R_2^{11}-R_1^{11}}$$

топамиз.

Шундай қилиб, (4.123), (4.157) масаланинг ечими

$$u(r,\theta,\varphi)=\left(C_{21}r+\frac{D_{21}}{r^2}\right)\cdot P_2^{(1)}(\cos\theta)\cdot\sin\varphi+$$

$$+\left(A_{53}r^5+\frac{D_{53}}{r^6}\right)P_5^{(3)}(\cos\theta)\cdot\cos 3\varphi$$ кўринишда бўлади.

VI. (4.123) $(r<a)$ Лаплас тенгламасининг **сферада** (5.4 чизма)

$$\left.\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial\nu}\right|_{r=a}=f(\theta,\varphi)$$

шартни қаноатлантирувчи ички Нейман масаласининг ечимини **Фурье** усули ёрдамида қуйидагича

$$u(r,\theta,\varphi)=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{r^{n}}{n\,a^{n-1}}\left(A_{nk}cos\,k\,\varphi+B_{nk}sin\,k\,\varphi\right)P_{n}^{(k)}\left(cos\,\theta\right)+const \qquad (4.159)$$

топилади, бу ерда ν - ташқи нормал,

$$A_{nk}=\frac{1}{\left\|f_{n}^{(k)}\right\|^{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}f(\theta,\varphi)P_{n}^{(k)}\left(cos\,\theta\right)cos\,k\varphi\cdot sin\,\theta\,d\theta\,d\varphi,\,n>0, \qquad (4.160)$$

$$B_{nk}=\frac{1}{\left\|f_{n}^{(k)}\right\|^{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}f(\theta,\varphi)P_{n}^{(k)}\left(cos\,\theta\right)sin\,k\varphi\cdot sin\,\theta\,d\theta\,d\varphi\,, \qquad (4.161)$$

$$\left\|f_{n}^{(m)}\right\|^{2}=\frac{2\pi(k+n)!}{(2n+1)(n-k)!}.$$

$f(\theta,\varphi)$ функция эса қуйидаги шартни

$$\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{\pi}f(\theta,\varphi)\cdot sin\,\theta\,d\theta=0 \qquad (4.162)$$

қаноатлантиради.

9-Мисол. $\frac{\partial}{\partial\,r}\left(r^{2}\frac{\partial\,u}{\partial\,r}\right)+\frac{1}{sin\,\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\,\theta}\left(sin\,\theta\,\frac{\partial\,u}{\partial\,\theta}\right)=0$ (4.163)

Лаплас тенгламасининг **сферада**

$$\left.\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial\nu}\right|_{r=a}=A\,cos\,\theta,\quad \theta\in\left[0,\pi\right],\quad A=const \qquad (4.164)$$

шартни қаноатлантирувчи Нейман масаласининг $u(r,\theta)$ ечимини топинг.

Ечиш. (4.163), (4.164) масала бир қийматли ечилиши учун (4.162)шарт бажарилиши етарлидир. Ҳақиқатан ҳам,

$$A\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{\pi}cos\,\theta\cdot sin\,\theta\,d\theta=A\int_{0}^{2\pi}d\varphi\cdot\left.\frac{sin^{2}\theta}{2}\right|_{\theta=0}^{\theta=\pi}=0$$

шарт бажарилади.

(4.163), (4.164) масала ечимини $u(r,\theta)=R(r)\cdot T(\theta)$ кўринишда излаб,

$$r^{2}R''(r)+2\,r\,R'(r)-\lambda\,R(r)=0, \qquad (4.165)$$

$$\begin{cases}\frac{d}{d\,\theta}\left(sin\,\theta\cdot\frac{d\,T}{d\,\theta}\right)+\lambda T=0,\quad 0<\theta<\pi,\\ \left|T(0)\right|<+\infty,\quad \left|T(\pi)\right|<+\infty\end{cases} \qquad (4.166)$$

эга бўламиз.

(4.166) масалани ечиш учун тенгламада $x = \cos\theta$ алмашти бажариб,

$$T' = \frac{dT}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\cdot\frac{dT}{dx}, \qquad T'' = \frac{d^2T}{dx^2}\cdot\sin^2\theta - \frac{dT}{dx}\cdot\cos\theta$$

тенгликларни эътиборга олиб, қуйидаги масалага

$$\begin{cases} \left(1-x^2\right)\dfrac{d^2T}{dx^2} - 2x\dfrac{dT}{dx} + \lambda T = 0, \quad -1 < x < 1, \\ \left|T(-1)\right| < +\infty, \quad \left|T(+1)\right| < +\infty \end{cases}$$

келамиз. Бу Лежандр тенгламасининг $(-1,1)$ интер $\lambda_n = n(n+1)$ тенг бўлгандаги чегараланган ечими $T_n(x) =$ Лежандр кўпҳадидан иборатдир [2],[5]. Демак, (4.166) масал ечими $(0,\pi)$ интервалда $T_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$ кўринишда бўл (4.165) тенгламанинг чегараланган ечими $R_n(r) = r^n$, функци $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ иборат. У ҳолда

$$u(r,\theta) = R(r)\cdot T(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad (4.16$$

бу ердаги C_n номаълум коэффициент Лежандр функция хоссасига асосан (4.164) чегаравий шартдан топилади:

$$A\cos\theta = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta)\right\}\Bigg|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n a^{n-1} P_n(\cos\theta) =$$

$$= C_1\cdot P_1(\cos\theta) + 2C_2\, a P_2(\cos\theta) + \cdots \Rightarrow C_1 = A,\ C_n = 0,\ n = 2,3,\ldots.$$

Шундай қилиб, (4.167) кўра (4.163), (4.164) масаланинг ечим $u(r,\theta) = C_0 + A\, r \operatorname{Cos}\theta$ кўринишда ифодаланади, бу ер C_0 ихтиёрий сон.

3-Изоҳ. Сферада (4.123) $(r > a)$ Лаплас тенгламаси учун

$$\left.\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial \nu}\right|_{r=a} = f(\theta,\varphi) \text{ ёки } -\left.\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta,\varphi)$$

шартни қаноатлантирувчи ташқи Нейман масаласининг ечими **Фурье** усули ёрдамида қуйидагича

$$u(r,\theta,\varphi) =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{n+2}}{(n+1)\,r^{n+1}}\left(A_{nk}\cos k\,\varphi+B_{nk}\sin k\,\varphi\right)P_n^{(k)}(\cos\theta)+const \qquad (4.168)$$

илади, бу ердаги номаълум коэффициентлар (4.160), (4.161) дан икланади, $\nu-$ ташқи нормал.

4-Изоҳ. Доиранинг ички ва ташқи қисмида

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0,\ 0<r<a,\ 0\le\varphi<2\pi$$

Гельмголрц тенгламаси учун

$$u(a,\varphi)=f(\varphi),\ 0\le\varphi\le 2\pi\ \left(r<a\right)\ \text{ва}\ u(a,\varphi)=f(\varphi),\ 0\le\varphi\le 2\pi$$

$$\left(r>a\right),\quad u_r+ikr=o(r^{-1/2}),\quad r\to\infty$$

шартни каноатлантирувчи ички ва ташқи Дирихле масаласининг ечимини мос равишда **Фурье** усули ёрдамида қуйидагича

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos n\,\varphi+B_n\sin n\,\varphi\right)\cdot J_n(k\,r)\quad \text{ва}$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n\cos n\,\varphi+D_n\sin n\,\varphi\right)\cdot H_n^{(2)}(k\,r)$$

иқланади, бу ерда

$$A_n=\frac{1}{2\pi J_n(ka)}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$B_n=\frac{1}{2\pi J_n(ka)}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi H_n^{(2)}(ka)}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$D_n=\frac{1}{2\pi H_n^{(2)}(ka)}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

$J_n(x)$ ва $H_n^{(2)}(x)$ мос равишда биринчи ва иккинчи турдаги Бессел ва Ханкел функциялари[2],[12],[19]:

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},\quad H_n^{(2)}(x)=\frac{e^{i\pi n}J_n(x)-J_{-n}(x)}{i\cdot\sin\pi n},$$

$H_n^{(1)}(x)$ функциянинг $x\to\infty$ даги асимптотикаси:

$$H_n^{(2)}(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot e^{-i\left(x-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Масалан. Агар $f(\varphi)=A\sin 3\varphi$ бўлса, у ҳолда ички Дири масаласининг ечими

$$B_3=\frac{A}{J_3(ka)};\quad A_n=0,\,(n=0,1,2,...);\quad B_n=0\ (n\neq 3)$$

кўра қуйидагича $u(r,\varphi)=\dfrac{A}{J_3(ka)}J_3(kr)\cdot\sin 3\varphi$ топилади.

Мустақил ечиш учун масалалар

666. $\Delta u=0$ Лаплас тенгламаси учун $0<x<p$, $0<y<$ тўртбурчакда қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантиру ечимини топинг:

a) $u(0,y)=u(p,y)=0,\quad u(x,0)=0,\quad u(x,s)=U_0;$

b) $u(0,y)=u_x(p,y)=0,\quad u(x,0)=0,\quad u(x,s)=f(x);$

c) $u(0,y)=U,\quad u(p,y)=0,\quad u(x,0)=0,\quad u(x,s)=V;$

d) $u(0,y)=U,\quad u_x(p,y)=0,\quad u_y(x,0)=T\sin\dfrac{\pi x}{2p},\quad u(x,s)=0;$

e) $u_x(0,y)=u_x(p,y)=0,\quad u(x,0)=A,\quad u(x,s)=Bx;$

f) $u(0,y)=A,\quad u(p,y)=Ay,\quad u_y(x,0)=0,\quad u_y(x,s)=0;$

g) $u(0,y)=0,\quad u_x(p,y)=q,\quad u(x,0)=0,\quad u(x,s)=U.$

667. $\Delta u=0$ Лаплас тенгламаси учун $0<x<\infty$, $0<y<l$ сох қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топинг.

a) $u(x,0)=u(x,l)=0,\quad u(0,y)=y(l-y),\quad u(\infty,y)=0;$

b) $u(x,0)=u_y(x,l)=0,\quad u(0,y)=f(y),\quad u(\infty,y)=0;$

c) $u_y(x,0)=u_y(x,l)+hu(x,l)=0,\ u(0,y)=f(y),\ u(\infty,y)=0, h>0;$

d) $u_y(x,0)-hu(x,0)=0,\quad u(x,l)=0,\quad u(0,y)=l-y,$

$$u(\infty,y)=0,\quad h>0.$$

668. $\Delta u=0$ Лаплас тенгламаси учун $0\le x\le l$, $0\le y<$ соҳада қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топинг.

$$u(0,y)=u(l,y)=0,\quad u(x,0)=A\left(1-\frac{x}{l}\right),\quad u(x,\infty)=0\ \left(0\le x\le l\right);$$

669. $0\le r<R$ доирада қуйидаги чегаравий шартла қаноатлантирувчи гармоник функцияни топинг.

a) $u(R,\varphi)=\varphi\sin\varphi;\qquad$ b) $u(R,\varphi)=\varphi(2\pi-\varphi);$

c) $u_r(R,\varphi)+hu(R,\varphi)=T+Q\ sin\ \varphi+Ucos\ 3\varphi;$

d) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=A\cos\varphi,$ e) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=A\cos 2\varphi,$ f) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=sin^3\varphi$.

6.70. $\Delta u=0$ Лаплас тенгламасининг $0\le r<R$ доира ташқарисида қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

a) $u(R,\varphi)=T\ sin\dfrac{\varphi}{2};$ b) $u_r(R,\varphi)=\dfrac{1}{2}+\varphi\ sin\ 2\varphi$;

c) $u(R,\varphi)=U\,(\varphi+\varphi\ cos\ \varphi)$.

6.71. $1<r<2$ ҳалқада қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи гармоник функцияни топинг.

a) $\left.u\right|_{r=1}=1,\quad \left.u\right|_{r=2}=2;$ b) $\left.u\right|_{r=1}=1+cos^2\varphi,\ \left.u\right|_{r=2}=sin^2\varphi$.

6.72. $a<r<b$ ҳалқада қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи гармоник функцияни топинг.

a) $u(a,\varphi)=A,\quad u(b,\varphi)=B\ sin\ 2\varphi;$

b) $u(a,\varphi)=0,\quad u(b,\varphi)=A\ cos\ \varphi;$

c) $u_r(a,\varphi)=q\ cos\ \varphi,\quad u(b,\varphi)=Q+T\sin 2\varphi$.

d) $u_r(a,\varphi)=f_1(\varphi),\quad u(b,\varphi)=f_2(\varphi)$

6.73. $0<r<R,\quad 0<\varphi<\alpha$ доиравий секторда қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи гармоник функцияни топинг.

a) $u_\varphi(r,0)=u_\varphi(r,\alpha)=0,\quad u(R,\varphi)=U\,\varphi$;

b) $u_\varphi(r,0)=u(r,\alpha)=0,\quad u(R,\varphi)=f(\varphi);$

c) $u(r,0)=u(r,\alpha)=0,\quad u(R,\varphi)=A\varphi;$

d) $u(r,0)=u(r,\alpha)=0,\quad u_r(R,\varphi)=Q$.

6.74. Бир жинсли секторда қуйидаги

$$\Delta u(r,\varphi)\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,0<r<a,\ 0<\varphi<\alpha<2\pi,$$

$$u(r,0)=0,\ u(r,a)=0\ 0\le r\le a,\ u(a,\varphi)=A\varphi,$$

$0\le\varphi\le\alpha$ масалани ечинг.

6.75. $\Delta u=-Q/k$ Пуассон тенгламаси учун $0<x<p,0<y<s$ тўртбурчакли қуйидаги $u(0,y)=0,u_x(p,y)=0,\quad u(x,0)=0,u_y(x,s)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

6.76. Цилиндрда қуйидаги

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\quad 0<r<R,\ 0<z<h,$$

$$u(r,0)=0,\quad u(r,h)=f(r)\quad 0\le r\le R\quad u(R,z)=0,\quad 0\le z\le h$$

масалани ечинг.

677. $\{(r,\theta,\varphi):\ 1<r<2,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi\}$ сферик катлам учун қуйидаги

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

$$1<r<2,\ 0<\theta<\pi,\quad 0<\varphi<2\pi,$$

$$\left.\left(3u+\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=1}=5\sin^2\theta\cdot\sin 2\varphi,$$

$u\big|_{r=2}=\cos\theta,\qquad \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]$ масалани ечинг.

678. Шарда Пуассон тенгламаси учун қуйидаги

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=$$

$$=\frac{r^2}{2}\cos\varphi\cdot\sin 2\theta,\quad 0<r<a,\quad 0<\theta<\pi,\quad 0\le\varphi<2\pi,$$

$u(a,\theta,\varphi)=1,\quad \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]$ масалани ечинг.

679. $\{(r,\varphi):\ a\le r\le b,\quad 0\le\varphi\le\varphi_0\}$ чегараси эркин бўлган ҳалқавий секторда Гельмголрц тенгламаси учун қуйидаги

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\lambda u=0,\ 0<r<a,\ 0\le\varphi<\varphi_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a,\varphi)=\frac{\partial u}{\partial r}(b,\varphi)=0,\quad 0\le\varphi\le\varphi_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}(r,0)=\frac{\partial u}{\partial\varphi}(r,\varphi_0),\quad a\le r\le b$$

масаланинг хос функцияларини топинг.

680. Цилиндрда Гельмголрц тенгламаси учун қуйидаги

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\beta^2 u=0,\ 0<r<a,\ 0<\varphi<2\pi,$$

$u(a,\varphi)=u_0,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\quad (a-$цилиндр радиуси), $(\beta^2>0)$ масалани ечинг.

681. Шарда Гельмголрц тенгламаси учун қуйидаги

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)-\beta^2 u=0,$$

$$0 < r < a, \ 0 < \theta < \pi,$$

$u(a,\theta) = u_0 \cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$ масалани ечинг.

682. Сфера ичида Гельмголрц тенгламаси учун куйидаги

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \beta^2 u = 0, 0 < r < a, \ 0 < \theta < \pi, \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$\left.\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial \nu}\right|_{r=a} = A, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

ички Нейман масалани ечинг ($\nu -$ ташқи нормал).

683. Сфера ташқарисида Гельмголрц тенгламаси учун қуйидаги

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \beta^2 u = 0, r > a, \ 0 < \theta < \pi, \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$\left.\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial \nu}\right|_{r=a} = A, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u_r - i\beta u - o(r^{-1}) \quad r \to +\infty$$

ташқи Нейман масалани ечинг ($\nu -$ ташқи нормал).

684. Сфера ичида Гельмголрц тенгламаси учун қуйидаги

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \beta^2 u = 0, 0 < r < a, \ 0 < \theta < \pi, \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(r,\theta,\varphi)\big|_{r=a} = A, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

ички Дирихле масалани ечинг.

685. Сфера ташқарисида Гельмголрц тенгламаси учун қуйидаги

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \beta^2 u = 0, r > a, \ 0 < \theta < \pi, \ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(r,\theta,\varphi)\big|_{r=a} = A, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$u(r) \to 0, \quad r \to +\infty$ ташқи Дирихле масалани ечинг.

686. $\{(r,\theta,\varphi): \ 1 < r < 2, \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 < \varphi < 2\pi\}$ сферик қатлам ичида қуйидаги

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$1 < r < 2, \ 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi$ тенглама учун

$$u\big|_{r=1} = f_1(\theta,\varphi), \quad u\big|_{r=2} = f_2(\theta,\varphi), \qquad \theta \in [0,\pi], \ \varphi \in [0, 2\pi]$$

масаланинг $f_1(\theta,\varphi)$ ва $f_2(\theta,\varphi)$ куйидаги қийматларда ечинг:

a) $f_1 = \sin\theta \cdot \sin\varphi, \quad f_2 = 0$; b) $f_1 = 3\sin^2\theta \cdot \sin 2\varphi, \quad f_2 = 3\cos\theta$;

c) $f_1 = 7\sin\theta \cdot \cos\varphi, \quad f_2 = 7\cos\theta$;

d) $f_1 = \sin^2\theta \cdot (3 - \sin 3\varphi), \quad f_2 = 4 f_1$;

e) $f_1 = 12\sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos^2\dfrac{\theta}{2}, \quad f_2 = 0$;

f) $f_1 = \sin^2\theta \cdot \sin 2\varphi, \quad f_2 = \cos 2\varphi \cdot \sin^2\theta$;

g) $f_1 = \sin 2\theta \cdot \cos\varphi, \quad f_2 = \sin\varphi \cdot \sin 2\theta$;

h) $f_1 = 31\sin 2\theta \cdot \sin\varphi, \quad f_2 = 31\cos 2\varphi \cdot \sin^2\theta$.

687. $\{(r,\theta,\varphi): \ 1 < r < 2, \ 0 < \theta < \pi, \ 0 < \varphi < 2\pi\}$ сферик қатлам ичида ушбу

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$1 < r < 2, \ 0 < \theta < \pi, \ 0 < \varphi < 2\pi$ тенглама учун қуйидаги

a) $u\big|_{r=1} = \sin\theta \cdot \sin\varphi\,(5 + 6\cos\theta), \quad u_r\big|_{r=2} = 12\sin 2\theta \cdot \sin\varphi$;

b) $u\big|_{r=1} = 1, \quad u_r\big|_{r=2} = 15\cos\varphi\left(\cos^2\theta \cdot \sin\theta + \sin\varphi \cdot \sin^2\theta\cos\theta\right)$

масалаларни ечинг.

688. $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$ Лап тенгламасининг маркази координаталар бошида радиуси R бўл сферада $(r < R)$ қуйидаги

a) $u\big|_{r=R} = \sin^2\theta \cdot \sin\left(2\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\theta$;

b) $u\big|_{r=R} = \sin^3\theta \cdot \sin\left(3\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

c) $u\big|_{r=R} = \sin^2\theta \cdot \cos\left(2\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\theta \cdot \sin\varphi$;

d) $u\big|_{r=R} = \sin^2\theta \cdot \cos\left(2\varphi + \dfrac{\pi}{3}\right), \quad R = 1$;

e) $u\big|_{r=R} = (\sin\theta + \sin 2\theta) \cdot \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right), \quad R = 1$;

f) $u\big|_{r=R} = (\sin\theta + \sin\varphi) \cdot \sin\theta, \quad R = 1$;

g) $u_r\Big|_{r=1} = \sin 10\varphi\cdot\sin^{10}\theta, \quad u\big|_{r=0} = 1$ шартларни қаноатлантирувчи $u(r,\theta,\varphi)$ ечимини топинг.

180. $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$ Лаплас тенгламасининг маркази координаталар бошида радиуси R бўлган сферанинг ташқарисида $(r>R)$ қуйидаги

a) $u\big|_{r=R} = \sin^3\theta\cdot\cos\left(3\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\theta$; b) $u_r\Big|_{r=R} = \sin 100\varphi\cdot\sin^{100}\theta$;

c) $\left(u-u_r\right)\Big|_{r=R} = \sin\theta\cdot\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

шартларни қаноатлантирувчи $u(r,\theta,\varphi)$ ечимини топинг.

МАВЗУЛАРНИ МУСАКАМЛАШ УЧУН ЎТҚАЗИЛАДИГАН НАЗОРАТ НАМУНАЛАРИ

1 - ЖОРИЙ НАЗОРАТ

1–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўриниш келтиринг:

1. $u_{xx}+6u_{xy}+9u_{yy}+e^{x+y}u_x+e^{x-y}u_y=0.$
2. $2u_{zz}+2u_{xy}+9e^{x}u_z-6u_y=xy.$

2–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўриниш келтиринг:

1. $3u_{xx}-3u_{xy}-6u_{yy}+u_x+(2x+y)u_y-7u=y-x.$
2. $-2u_{xz}+2u_{xy}-2u_{yz}+7u_x-5u_y+4u_z=\frac{1}{2}(x^2-y^2).$

3–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўриниш келтиринг:

1. $u_{xx}+8u_{xy}+(16-x^4)u_{yy}+x^2u_x+y^2u_y=0.$
2. $2u_{yz}+4u_{xz}-6u_{xy}+8u_x-9u_y=0.$

4–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўриниш келтиринг:

1. $3u_{xx}+7u_{xy}+4u_{yy}-sin(x+y)u_x+u_y+e^{x-y}=0.$
2. $u_{yz}+2u_{xz}-3u_{xy}+5u+y^2-z^2=0.$

5–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўриниш келтиринг:

1. $2(x+1)u_{xy}+(y+1)u_{yy}+ln\,y\,u_x+sin\,x\,u_y=0.$

2. $4u_{xy} + 4u_{yz} - 4u_{xz} + u_z - u_y + u_x - u = 0.$

6–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўринишга келтиринг:

1. $2u_{xx} + 12u_{xy} + 18u_{yy} + 5u_x + 2u_y - 9u = 10x(3x - y).$
2. $5u_{xy} + 5u_{zz} - 6u_x - 9u_y + 7u_z = xy.$

7–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўринишга келтиринг:

1. $15u_{xx} - 15u_{xy} - 30u_{yy} + e^x u_x + cos\, y u_y = x - y.$
2. $-u_{xz} + u_{xy} - u_{zy} + e^x u_z - e^y cos\, x u_y - sin\, y u_x = 0.$

8–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўринишга келтиринг:

1. $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} u_x - e^{y - \frac{1}{2}x} u_y - e^{2y - x} = 0.$
2. $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 12u_{zy} + 6u_{xz} - 2u_z = x(y - 2x)(z - 3x).$

9–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўринишга келтиринг:

1. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + \frac{e^{x+y}}{x - y} u_x + \frac{e^{x-y}}{x + y} u_y = 0.$
2. $u_{zz} + 2u_{xy} + u_{xx} + u_z + u_y + u_x + x(y - x)u = tgz.$

10–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўринишга келтиринг:

1. $e^x u_{xx} + 2e^{\frac{x+y}{2}} u_{xy} + e^y u_{yy} + e^{\frac{x}{2}} u_x + e^{\frac{y}{2}} u_y - 7u = x.$

2. $u_{xy}+u_{zz}+2u_x-3u_y+4u_z=0.$

11–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўрини келтиринг:

1. $\sin^2 y u_{xx}+2\sin y\cdot\cos x u_{xy}+\cos^2 x u_{yy}+\sin 2y u_y=0.$

2. $u_{xz}-u_{xy}+u_{zy}-u_y=10(x+y+z).$

12–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўрини келтиринг:

1. $9x^2u_{xx}+16y^2u_{yy}-7u_x+9u_y-8\ln x u=0.$

2. $15u_{yy}-10u_{zy}-10u_{xy}+7u_x-6u_y+(x-z)u_z=0.$

13–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўрини келтиринг:

1. $u_{xx}-2u_{xy}+5u_{yy}+xu_x+yu_y+5u=0.$

2. $2u_{zz}+4u_{xy}+2u_{yy}+2u_{xx}+u_z-u_y+u_x=0.$

14–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўрини келтиринг:

1. $u_{xx}+12u_{xy}+36u_{yy}-(y-6x)u_x+yu_y-25u=5.$

2. $2u_{xz}+6u_{xy}+2u_{yz}+u_{zz}+u_{xx}+u_{yy}+7xu_x+15yu_y=0.$

15–Вариант

Қуйидаги тегламаларнинг типини аниқланг ва каноник кўрини келтиринг:

1. $xu_{xx}+yu_{yy}-\left(\sqrt{-y}+\sqrt{x}\right)u_x+3u=0, \quad x>0,\ y<0.$

2. $2u_{zz}+2u_{xy}+9e^xu_z-6u_y+z\left(x^2-y^2\right)=0.$

2 - ЖОРИЙ НАЗОРАТ

1–Вариант

1. Ўзгармас коэффицентли дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

$$3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2 .$$

2. Коши масаласини ечинг:

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0 , u\big|_{y=x} = sin\, x , u_y\Big|_{y=x} = cos\, x + sin\, x .$$

2–Вариант

1. Ўзгармас коэффицентли дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

$$u_{xy} + 3u_x + 5u_y + 15u = 0 .$$

2. Коши масаласини ечинг:

$$u_{xx} - u_{yy} + 5u_x + 3u_y + 4u = 0 , u\big|_{y=0} = xe^{-\frac{5}{2}x - x^2} , u_y\big|_{y=0} = e^{-\frac{5}{2}x} .$$

3–Вариант

1. Ўзгармас коэффицентли дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

$$u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y} .$$

2. Коши – Гурса –1 масаласини ечинг:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^x = 0 ,\quad u\big|_{x=0} = sin\, y ,\quad u_y\Big|_{x=-0,5y} = y .$$

4–Вариант

1. Ўзгармас коэффицентли дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0 .$$

2. Гурса масаласини ечинг:

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0 , x > 0,\ \ y > 0 , u\big|_{y=-x} = x + 1 ,$$

$$u\big|_{y=x-1} = x^2 + \frac{5}{4} .$$

5–Вариант

1. Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$y u_{xx} + (x-y) u_{xy} - x u_{yy} = 0 \text{ агар } x + y > 0 \text{ бўлса.}$$

2. Коши масаласини ечинг:

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2 y u_y = 0,\ y < 0,\ u\big|_{x=1} = y,\ \ u_x\big|_{x=1} = y.$$

6–Вариант

1. Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y = 0$$

2. Коши масаласини ечинг:

$$u_{xx} + 2u_{yy} - 3u_{yy} = 2,\ u\big|_{y=0} = 2,\ u_y\Big|_{y=0} = x + \cos x,\ \ x \in R.$$

7–Вариант

1. Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$u_{xx} - \left(1 + y^2\right)^2 u_{yy} - 2y\left(1 + y^2\right) u_y = 0.$$

2. Гурса масаласини ечинг:

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0,\ x < y < 5x,\ x > 0,\ u\big|_{y=x} = x^2,\ u\big|_{y=5x} =$$

8–Вариант

1. Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} - \cos x\, u_y = 0.$$

2. Гурса масаласини ечинг:

$$u_{xx} + y u_y = 0,\ \ y > 0,\ \ x > 0,\ u\big|_{y=0} = e^x,\ u\big|_{x=0} = \cos y.$$

9–Вариант

1. Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$u_{xy} - \frac{1}{x-y}\left(u_x - u_y\right) = 1 \quad \text{агар } y + x < 0, \quad x > 2 \text{ бўлса.}$$

2. Коши-Гурса масаласини ечинг:

$$u_{xy} + u_x = 1,\ 0 < y < x,\ u\big|_{y=0} = x^2,\ u_y\Big|_{y=x} = \sin x.$$

10–Вариант

Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$u_{xx}-u_{yy}+\frac{2}{x}u_x=0 \quad \text{агар} \quad y>1+|x| \ \text{бўлса.}$$

Коши масаласини ечинг:

$$u_{xx}+u_{yy}-2u_x-2u_y=4,\ u\big|_{x=0}=-y,\ u_x\big|_{x=0}=y-1,\ y\in R.$$

11–Вариант

Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$u_{xx}-2xu_{xy}=0 \quad \text{агар} \quad x\neq 0 \ \text{бўлса.}$$

Коши масаласини ечинг:

$$u_{xy}+u_y=0,\ u\big|_{x=y}=cos\,y,\ \ u_y\big|_{x=y}=2,\ |y|<\infty.$$

12–Вариант

Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}+xu_x-yu_y=0 \ \text{агар} \ \frac{1}{x}<y<x,\ \ x>1 \ \text{бўлса.}$$

Коши-Гурса-2 масаласини ечинг:

$$u_{xx}-u_{yy}+2u_x+2u_y=0,\ \ u_y\big|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=x}=x.$$

Вариант 13

Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$u_{xy}-4u_x-5u_y+20u=2e^{x+y},$$

Гурса масаласини ечинг:

$$u_{xx}-u_{yy}+2u_x+2u_y=0,\ u\big|_{y=-x}=x,\ u_y\big|_{y=x-1}=0,5.$$

Вариант 14

Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$u_{xy}+9u_x+5u_y+45u=0.$$

Коши масаласини ечинг:

$$u_{xx}-u_{yy}+5u_x+6,25u=0,\ u\big|_{x=0}=y^2,\ u_x\big|_{x=0}=y.$$

3 - ЖОРИЙ НАЗОРАТ

1–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 5xt\,,\ \ u\big|_{t=0} = x^2\,,\ \ u_t\big|_{t=0} = x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $u(x,0) = x(l-x)$, $u_t\big|_{t=0} = 6$ масалани Фурье усулида ечинг.

2–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin x\,,\ u\big|_{t=0} = \sin x\,,\ u_t\big|_{t=0} = 10$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = 16u_{xx}$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $u(x,0) = A$, $u_t(x,0) = \sin\frac{5\pi x}{l} + 2$ масалани Фурье усулида ечинг.

3–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_{tt} = u_{xx} + 4x^2 t,\quad u(x,0) = e^{-x},\ u_t(x,0) = 5$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $u\big|_{t=0} = \sin\frac{3\pi x}{l} + A$, $u_t\big|_{t=0} = \sin\frac{5\pi x}{l} + B$ масалани Фурье усулида ечинг.

4–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_{tt} = u_{xx} + 5e^{-t},\quad u(x,0) = 3\sin x,\quad u_t(x,0) = 7\cdot\cos x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$, $u\big|_{t=0} = \sin\frac{5\pi}{2l}x + 6$, $u_t\big|_{t=0} = \sin\frac{\pi}{2l}x$ масалани Фурье усулида ечинг.

5–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, куйидаги

$$u_{tt} = u_{xx} + 7xt,\quad u(x,0) = x,\quad u_t(x,0) = \sin x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = 9u_{xx}$, $u_x(0,t)=0, u(l,t)=0, u|_{t=0}=5\cos\frac{5\pi x}{2l}$,

$u_t|_{t=0}=\cos\frac{\pi}{2l}x+2$ масалани Фурье усулида ечинг.

6–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_{tt} = u_{xx} + 2\sin 2t + 1,\quad u(x,0)=\cos x + x,\quad u_t(x,0) = \sin x - x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = u_{xx}$, $u_x(0,t)=u(l,t)=0$, $u|_{t=0}=\cos\frac{\pi}{2l}x+1$,

$u_t|_{t=0}=7\cos\frac{7\pi x}{2l}$ масалани Фурье усулида ечинг.

7–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, куйидаги

$$u_{tt} = u_{xx} + x\sin t,\quad u(x,0) = \sin x,\quad u_t(x,0) = \cos^2 x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = 36u_{xx}$, $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$, $u|_{t=0}=x$,

$u_t|_{t=0}=1+x$ масалани Фурье усулида ечинг.

8–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x,\quad u(x,0) = \sin 2x,\quad u_t(x,0) = x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = u_{xx}$, $u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0, u|_{t=0}=\cos 2x$,

$u_t|_{t=0}=3\cos 5x$ масалани Фурье усулида ечинг.

9–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, куйидаги

$$u_{tt} = u_{xx} + e^{x}, \quad u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = \cos 2x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u_x(0,t) = u(l,t) = 0$, $u\big|_{t=0} = 5\cos\frac{7\pi}{2l}x$,

$u_t\big|_{t=0} = 1 + \cos\frac{5\pi}{2l}x$ масалани Фурье усулида ечинг.

10–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, куйидаги

$$u_{tt} = u_{xx} + e^{2x}, \quad u(x,0) = \cos x, \quad u_t(x,0) = x + 1$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = 9u_{xx}$, $u_x(0,t) = u(l,t) = 0$, $u\big|_{t=0} = \cos\frac{9\pi x}{2l}$,

$u_t\big|_{t=0} = C + \cos\frac{3\pi x}{2l}$ масалани Фурье усулида ечинг.

11–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, куйидаги

$$u_{tt} = 16u_{xx} + xt, \quad u(x,0) = ctg\, x, \quad u_t(x,0) = -1/\sin^2 x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $u(x,0) = 2x$,

$u_t(x,0) = \sin\frac{7\pi x}{l}$ масалани Фурре усулида ечинг.

12–Вариант

1. Даламбер формуласидан фойдаланиб, куйидаги

$$u_{tt} = u_{xx} + e^{-t}, \quad u(x,0) = 3tg\, x, \quad u_t(x,0) = 3/\cos^2 x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Қуйидаги $u_{tt} = 9u_{xx}$, $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$, $u\big|_{t=0} = \sin\frac{5\pi x}{2l} + 6$,

$u_t\big|_{t=0} = \sin\frac{\pi x}{2l}$ масалани Фурье усулида ечинг.

4 - ЖОРИЙ НАЗОРАТ

1–Вариант

1. Пуассон формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = 9u_{xx} + t + e^{2t}, \quad u(x,0)=5$$

Коши масаласини ечинг.

2. Фурье усулидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_{xx} = u_t + u,\ 0 < x < 1,\ t > 0,\ u_x(0;t) = u(1;t) = 0,$$

$u(x;0) = 1 + x$ аралаш масалани ечинг.

2–Вариант

1. Пуассон формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = u_{xx} + 3t^2 + sin\,t, \quad u(x,0) = sin\,2x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Фурье усулидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = u_{xx} + u + 2sin\,2x \cdot sin\,x, 0 < x < 0{,}5\pi, t > 0, u_x(0;t) = 0$$

$u(0{,}5\pi;t) = 0,\ u(x;0) = 0$ аралаш масалани ечинг.

3–Вариант

1. Пуассон формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}cos\,x + 3, \quad u(x,0) = cos\,2x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Фурье усулидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = 4u_{xx} - 8u,\ 0 < x < \pi,\ t > 0, u_x(0;t) = 0,\ u(\pi;t)=0,$$

$u(x;0) = x^2 - \pi x + 1$ аралаш масалани ечинг.

4–Вариант

1. Пуассон формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = u_{xx} + e^t sin\,x + t, \quad u(x,0) = cos\,x$$

Коши масаласини ечинг.

2. Фурье усулидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = 9u_{xx} + 5u,\ 0 < x < 1, t > 0,\ u_x(0;t) = 0,\ u(1;t) = 0,$$

$u(x;0) = x^2 - 1$ аралаш масалани ечинг.

5–Вариант

1. Пуассон формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = u_{xx} + \sin t + 1, \quad u(x,0) = 2e^{-x^2}$$

Коши масаласини ечинг.

2. Фурье усулидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = u_{xx} + 4u, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0, u(0;t) = 0,$$

$u(\pi;t) = 2\pi t$, $u(x;0) = 0$ аралаш масалани ечинг.

6–Вариант

1. Пуассон формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$4u_t = u_{xx} + 4t, \quad u(x,0) = 4e^{2x - x^2}$$

Коши масаласини ечинг.

2. Фурье усулидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = 4u_{xx} - 5u, \ 0 < x < l, t > 0, u(0;t) = 0, u_x(l;t) = 0,$$

$u(x;0) = 3\sin\frac{3\pi}{2l}x + 7\sin\frac{7\pi}{2l}x$ аралаш масалани ечинг.

7–Вариант

1. Пуассон формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = 4u_{xx} - 2t - 3e^t, \quad u(x,0) = 1$$

Коши масаласини ечинг.

2. Фурье усулидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = u_{xx} - 5u, 0 < x < 1, t > 0, \ u_x(0;t) - 2u(0;t) = 0,$$

$u_x(1;t) = 0$, $u(x;0) = -1$ аралаш масалани ечинг.

8–Вариант

1. Пуассон формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = 16u_{xx} + 3t + 4, \quad u(x,0) = \sin x + 2$$

Коши масаласини ечинг.

2. Фурье усулидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_{xx} = u_t + 8u, \ 0 < x < l, t > 0, \ u_x(0;t) = u_x(l;t) = 0,$$

$u(x;0) = \cos\frac{2\pi}{l}x - \cos\frac{4\pi}{l}x$ аралаш масалани ечинг.

9–Вариант

1. Пуассон формуласидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_t = 25u_{xx} + 5t + e^t, \quad u(x,0) = cos\,x + 5$$

Коши масаласини ечинг.

2. Фурье усулидан фойдаланиб, қуйидаги

$$u_{xx} = 16u_t + 4u,\ 0 < x < 1, t > 0, u_x(0;t) = u(1;t) = 0,$$

$u(x;0) = 1 + x$ аралаш масалани ечинг.

ЖАВОБЛАР

I БОБ

1-§

1. Х. ҳ. д. т.эмас. **2.** Х. ҳ. д. т. **3.** Х. ҳ. д. т.эмас. **4.** Х. ҳ. д. т. **5.** Х. ҳ. т. эмас. **6.** Х. ҳ. д. т. **7.** Х. ҳ. д. т. **8.** Х. ҳ. д. т. **9.** 2-тартиб **10.** 1-тартибли. **11.** 1-тартибли. **12.** 2-тартибли. **13.** 3-тартиб **14.** 2-тартибли. **15.** 4-тартибли. **16.** 3-тартибли. **17.** 4-тартибли. **1** 3-тартибли. **19.** Бир жинсли квазичизиқли **20.** Бир жинсли бўлмаг чизиқли. **21.** Бир жинсли чизиқли. **22.** Бир жинсли чизиқ бўлмаган. **23.** Бир жинсли бўлмаган квазичизиқли. **24.** Бир жин чизиқли. **25.** Бир жинсли бўлмаган квазичизиқли. **26.** Бир жинс бўлмаган чизиқли, агар $h(x,y)\neq 0$. **27.** Бир жинсли бўлма квазичизиқли. **28.** Бўлади. **29.** Бўлади. **30.** Бўлмайди. **31.** Бўлмайд **32.** Бўлади. **33.** Бўлади.

2-§

34. Гиперболик. **35.** Эллиптик. **36.** Параболик. **37.** Парабол **38.** Параболик. Ҳақиқатдан ҳам бу тенгламага мос характерист форма қуйидаги кўринишга эга:

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=4\lambda_1^2+2\lambda_2^2-6\lambda_3^2+6\lambda_1\lambda_2+10\lambda_1\lambda_3+4\lambda_2\lambda_3=$$

$$=\frac{1}{4}(4\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3)^2-\frac{1}{4}(\lambda_2+7\lambda_3)^2.$$

Агар бу ерда $\xi_1=\frac{1}{2}(4\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3),\xi_2=\frac{1}{2}(\lambda_2+7\lambda_3)$, $\xi_3=\lambda_3$, ян

$\lambda_1=\frac{1}{2}\xi_1-\frac{3}{2}\xi_2+4\xi_3$, $\lambda_2=2\xi_2-7\xi_3$, $\lambda_3=\xi_3$ алмаштириш қилс

$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ квадратик форма $K(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1^2-\xi_2^2$ кўриниш келади. Демак, тенглама параболик типга тегишли. **39.** Эллипти чунки

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2^2+4\lambda_2\lambda_3+5\lambda_3^2=(\lambda_1+\lambda_2)^2+(\lambda_2+2\lambda_3)^3+\lambda_3^2$$

кавадратик форма $\lambda_1=\xi_1-\xi_2+2\xi_3$, $\lambda_2=\xi_2-2\xi_3$, $\lambda_3=\xi$ алмаштириш натижасида $K(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$ кўриниш келади. **40.** Гиперболик. Бу ерда

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1^2-4\lambda_1\lambda_2+2\lambda_1\lambda_3+4\lambda_2^2+\lambda_3^2=$$

$$=(\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3)^2+(\lambda_2+\lambda_3)^2-(\lambda_2-\lambda_3)^2$$

қўйиб, $\xi_1=\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3$, $\xi_2=\lambda_2+\lambda_3$, $\xi_3=\lambda_2-\lambda_3$, яъни $\lambda_1=\xi_1+\frac{1}{2}\xi_2+\frac{3}{2}\xi_3$, $\lambda_2=\frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3)$, $\lambda_3=\frac{1}{2}(\xi_2-\xi_3)$ алмаштириш бажарилса, $K(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2$ каноник кўринишга келади. **41.** Гиперболик, чунки

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3=\frac{1}{4}(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)^2-\frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_2)^2-\lambda_3^2$$

квадратик форма $\lambda_1=\xi_1+\xi_2-\xi_3$, $\lambda_2=\xi_1-\xi_2-\xi_3$, $\lambda_3=\xi_3$ алмаштиришдан сўнг $K(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2$ каноник кўринишга келади. **42.** Гиперболик, чунки $\lambda_1=\xi_1-\xi_2-\xi_3$, $\lambda_2=\xi_2+\xi_3$, $\lambda_3=\xi_3$ алмаштириш бу тенгламага мос квадратик формани $K(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2$ каноник кўринишга келтиради. **43.** $xy>0$ да эллиптик, $xy<0$ да гиперболик, $xy=0$ да параболик. **44.** $y=0$ да параболик, $y>0$ да эллиптик, $y<0$ да гиперболик. **45.** $x=0$, $y\neq0$ ва $x\neq0$, $y=0$ да параболик; $xy>0$ да эллиптик, $xy<0$ да гиперболик **46.** Гиперболик. **47.** Гиперболик. **48.** Эллиптик. **49.** Параболик. **50.** Параболик. **51.** Гиперболик. **52.** Гиперболик. **53.** Эллиптик. **54.** Параболик. **55.** Эллиптик. **56.** Параболик. **57.** Ҳеч қайси типга тегишли эмас. **58.** $\upsilon_{\xi\xi}+\upsilon_{\eta\eta}+\upsilon_{\zeta\zeta}=0$, $\xi=x$, $\eta=-x+y$, $\zeta=2x-2y+z$. Берилган тенгламага мос $Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2^2+4\lambda_2\lambda_3+5\lambda_3^2$ квадратик формани $Q=(\lambda_1+\lambda_2)^2+(\lambda_2+2\lambda_3)^2+\lambda_3^2$ кўринишда ёзиб олиш мумкин. Бу ерда $\mu_1=\lambda_1+\lambda_2$, $\mu_2=\lambda_2+2\lambda_3$, $\mu_3=\lambda_3$ (*) белгилаш киритиб квадрат формани $Q=\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2$ каноник кўринишига эга бўламиз. (*)ни λ_1, λ_2, λ_3га нисбатан ечсак, $\lambda_1=\mu_1-\mu_2+2\mu_3,\lambda_2=\mu_2-2\mu_3$, $\lambda_3=\mu_3$ (**). Демак, матрицаси

$$M=\begin{Vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$$

бўлган (**) алмаштириш Q квадратик формани каноник кўринишга келтиради. У ҳолда берилган дифференциал тенгламани каноник кўринишга келтирувчи алмаштиришнинг матрицаси Mга қўшма матрица, яъни

$M^{*}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{Vmatrix}$ бўлиб, у $\xi=x$, $\eta=-x+y$, $\zeta=2x-2$

кўринишга эга бўлади. Тенгламада бу алмаштиришни бажар $u(x,y,z)=\upsilon(\xi,\eta,\zeta)$ белгилаш киритиб, тенгламанинг кан кўринишига эга бўламиз.

59. $\upsilon_{\xi\xi}+\upsilon_{\eta\eta}-\upsilon_{\zeta\zeta}+3\upsilon_{\xi}+(3/2)\upsilon_{\eta}-(9/2)\upsilon_{\zeta}=0$,
$\xi=x$, $\eta=(x+y+z)/2$, $\zeta=(-3x-y+z)/2$.

60. $\upsilon_{\xi\xi}-\upsilon_{\eta\eta}-\upsilon_{\zeta\zeta}+2\upsilon_{\eta}=0, \xi=x+y, \eta=-x+y, \zeta=-x-y+z$.

61. $\upsilon_{\xi\xi}-\upsilon_{\eta\eta}+4\upsilon=0, \xi=y+z, \eta=-y-2z, \zeta=x-z$.

62. $\upsilon_{\xi\xi}+2\upsilon=0$, $\xi=x$, $\eta=-2x+y$, $\zeta=-x+z$.

63. $\upsilon_{\xi\xi}-2\upsilon_{\xi}=0$, $\xi=x$, $\eta=-2x+y$, $\zeta=-3x+z$.

64. $\upsilon_{\xi\xi}-\upsilon_{\eta\eta}+\upsilon_{\zeta\zeta}+\upsilon=0$, $\xi=z+y$, $\eta=-y+z$, $\zeta=\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y+\frac{\sqrt{6}}{2}z$.

65. $\upsilon_{\eta\eta}+\upsilon_{\zeta\zeta}-8\upsilon=0, \xi=x+0{,}5z+0{,}5y, \eta=-0{,}5(y+z), \zeta=(y-z)/2\sqrt{2}$.

66. $\upsilon_{\xi\xi}-\upsilon_{\eta\eta}+\upsilon_{\zeta\zeta}+2\upsilon_{\xi}-\sqrt{2}\upsilon_{\eta}+\sqrt{2}\upsilon_{\zeta}+4\upsilon=0$,
$\xi=x$, $\eta=(3x-y)/2\sqrt{2}$, $\zeta=-(x+y-4z)/2\sqrt{2}$.

67. $\upsilon_{\xi\xi}+\upsilon_{\eta\eta}-3\upsilon+(\xi+\eta)/\sqrt{2}-2\zeta=0$,
$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}x$, $\eta=\frac{3}{\sqrt{2}}x+\sqrt{2}y$, $\zeta=x+z$.

68. $\upsilon_{\xi\xi}-\upsilon_{\eta\eta}+\upsilon=0, \xi=(3x-z-2y)/\sqrt{5}, \eta=-x+y+z$.

3-§

69. Параболик. Чунки бу тенгламага мос ҳарактеристик фор $K(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1^3$ каноник кўринишга эга бўлиб, фақат λ_1ни ўз ич олмоқда. **70.** Гиперболик. Бу ерда $K(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1^2\lambda_2$ бўлиб, $\lambda_1=\lambda$ олсак, I бобнинг (1.20) формуласига асосан $\lambda^2\lambda_2=0$ тенгламага бўламиз. Бу тенглама $\forall\lambda_2\in R$ да ҳақиқий илдизга ($\lambda_2\neq 0$ да $\lambda=0$, $\lambda_2=0$ да λ ихтиёрий ҳақиқий сон).

71. Параболик. $K(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1^3-3\lambda_1^2\lambda_2+3\lambda_1\lambda_2^2-\lambda_2^3=(\lambda_1-\lambda_2)^3$ бўли уни $\lambda_1=\mu_1$, $\lambda_2=\mu_1-\mu_2$ алмаштириш $K(\lambda_1,\lambda_2)=\mu_2^3$ кано кўринишга келади. **72.** Гиперболик. **73.** $y\leq 0$ да гиперболик, $y>0$

қўшма типга тегишли. Бу ерда I бобнинг (1.19) ва (1.20) формуласига асосан $\lambda\left(y\lambda^2+\lambda_2^2\right)=0$ тенгламага эгамиз. Бу тенглама $y\le 0$да ҳақиқий илдизларга, $y>0$да эса ҳам ҳақиқий ва ҳам комплекс илдизларга эга.

74. Қўшма. **75.** Параболик. **76.** Эллиптик. Бу ерда I бобнинг (1.19) формуласига асосан ҳарактеристик форма

$$K\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=\lambda_1^4+3\lambda_1^2\lambda_2^2-6\lambda_1\lambda_2^3+\lambda_2^4$$

кўринишга эга бўлиб, уни $\lambda_1^4+\lambda_2^4+3\lambda_1^2\left[\left(\lambda_1-\lambda_2\right)^2+2\lambda_1^2\right]$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ифода фақат $\lambda_1=\lambda_2=0$да нолга тенг бўлади. **77.** Гиперболик. Бу ерда $K(\lambda,\lambda_1)=3\lambda(\lambda+\lambda_1)(\lambda+2\lambda_1)\left[\lambda+(4/3)\lambda_1\right]=0$ тенгламага эгамиз.

78. Қўшма. Бунда $K\left(\lambda,\lambda_2\right)=\left(\lambda^2+\lambda_2^2\right)\left(2\lambda+2\lambda_2\right)^2$.

79. $x=0$да параболик; $x>0$ да гиперболик; $x<0$ да қўшма. **80.** $y>-1$да қўшма, $y\le -1$да гиперболик. Бу ерда $K\left(\lambda,\lambda_2\right)=\lambda^4+2y\lambda^2\lambda_2^2+\lambda_2^4=0$ тенгламага эгамиз.

81. $y\le 0$да гиперболик, $y>0$ да қўшма типга тегишли. Ҳақикатан, ями I бобнинг (1.19) ва (1.20) формулаларига асосан $\lambda\left(signy|y|^m\lambda^2+\lambda_2^2\right)=0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама $y\le 0$да ҳақиқий илдизларга, $y>0$да эса ҳам ҳақиқий ва ҳам комплекс илдизларга эга. **82.** $x\le 0$да гиперболик, $x>0$да қўшма. **83.** Гиперболик. **84.** Параболик. **85.** Параболик. **86.** $y=0$да параболик, $y>0$да гиперболик, $y<0$да эллиптик. **87.** Гиперболик. **88.** Гиперболик. **89.** Параболик. **90.** Гиперболик. **91.** Гиперболик. **92.** Эллиптик. **93.** Параболик. **94.** Гиперболик. **95.** Гиперболик. **96.** Параболик. **97.** Эллиптик. **98.** Эллиптик. **99.** Эллиптик. **100.** $k<0$ да гиперболик, $k=0$ да параболик, $k>0$да эллиптик. **101.** $-0,5<k<0,5$ да гиперболик, $k=\pm 0,5$ да параболик, $|k|>0,5$ да эллиптик. **102.** $k<0$ *ва* $k>4$ да гиперболик, $k=0$ *ва* $k=4$ да параболик, $0<k<4$да эллиптик. **103.** $k<0$да гиперболик, $k=0$ да параболик, $k>0$ да эллиптик.

4-§

104. Гиперболик. **105.** Эллиптик. **106.** Параболик. **107.** $y=0$да параболик, $y<0$да гиперболик, $y>0$да эллиптик. **108.** $x=0$, $y\neq0$ ва $y=0$ $x\neq0$да параболик, $xy<0$да гиперболик; $xy>0$ да эллиптик. **109.** $x=0$ ва $y=0$да параболик, $xy<0$ гиперболик, $xy<0$да эллипти **110.** $xy>0$ да эллиптик, $xy<0$да гиперболик, $x=0$, $y\neq0$ ва $y=0$ $x\neq0$да параболик. **111.** $xy>0$да эллиптик, $xy<0$да гипербол $x=0$, $y\neq0$ ва $y=0$, $x\neq0$да параболик. **112.** $xy>0$да эллиптик, $xy<0$да гипер-болик, $x=0$, $y\neq0$ ва $y=0$, $x\neq0$да параболик. **113.** $xy>0$да эллиптик, $xy<0$да гиперболик, $x=0$, $y\neq0$ ва $y=0$, $x\neq0$да парабол **114.** $y=0$да параболик, $y<0$да гиперболик, $y>0$да эллипти

115. Гиперболик, $\upsilon_{\xi\eta}+\upsilon_{\xi}-2\upsilon_{\eta}+\xi+\eta=0$, $\xi=2x-y$, $\eta=x+y$.

116. Параболик, $\upsilon_{\eta\eta}+18\upsilon_{\xi}+9\upsilon_{\eta}-9\upsilon=0$, $\xi=x+y$, $\eta=x$.

117. Эллиптик, $\upsilon_{\xi\xi}+\upsilon_{\eta\eta}-8\upsilon=0$, $\xi=y-x, \eta=2x$;

118. Гиперболик, $\upsilon_{\xi\eta}=0, \xi=x+arctgy, \eta=x-arctgy$. **119.** Парабол $(x\neq0)$, $\upsilon_{\eta\eta}+\dfrac{2\eta^2}{\xi-\eta^2}\upsilon_{\xi}-\dfrac{1}{\eta}\upsilon_{\eta}=0$, $\xi=x^2+y^2$; $\eta=x$. **120.** Эллипти $\upsilon_{\xi\xi}+\upsilon_{\eta\eta}=0$, $\xi=y$, $\eta=arctgx$. **121.** $x=0$ да параболик, $u_{xx}=0$; $x\neq0$да гиперболик, $\upsilon_{\xi\eta}-\dfrac{1}{2(\xi-\eta)}\upsilon_{\xi}=0$, $\xi=x^2+y$; $\eta=y$. **122.** $x=0$да параболик, $u_{yy}=0$; $x>0$, да гиперболик, $\upsilon_{\xi\eta}+\dfrac{1}{2(\xi-\eta)}\left(\upsilon_{\xi}-\upsilon_{\eta}\right)=0$, $\xi=y-x+2\sqrt{x}$, $\eta=y-x-2\sqrt{x}$; $x<0$да эллипти $\upsilon_{\xi\xi}+\upsilon_{\eta\eta}-\dfrac{1}{\eta}\upsilon_{\eta}=0$, $\xi=y-x, \eta=2\sqrt{-x}$. **123.** $y=0$да парабол $u_{yy}=0$; $y<0$да гипер-болик, $\upsilon_{\xi\eta}+\dfrac{1}{6(\xi+\eta)}\left(\upsilon_{\xi}+\upsilon_{\eta}\right)=0$ $\xi=\dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}+x$, $\eta=\dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}-x$; $y>0$да эллипти $\upsilon_{\xi\xi}+\upsilon_{\eta\eta}+\dfrac{1}{3\xi}\upsilon_{\xi}=0$, $\xi=\dfrac{2}{3}y^{3/2}, \eta=x$. **124.** $xy=0$ параболик, $x=0$ $y\neq0$да $u_{yy}+\dfrac{2}{y}\left(u_x+u_y\right)=0$ ва $x\neq0$, $y=0$да $u_{xx}+\dfrac{2}{x}\left(u_x+u_y\right)$

$x>0$, $y>0$ ва $x<0, y>0$да гиперболик, $v_{\xi\eta}-\frac{3}{\xi^2-\eta^2}(\eta v_\xi-\xi v_\eta)=0$, бу ерда $x>0$, $y<0$ да $\xi=\sqrt{-y}+\sqrt{x}$, ва $\eta=\sqrt{-y}-\sqrt{x}$; $x<0$, $y>0$да $\xi=\sqrt{y}+\sqrt{-x}$, $\eta=\sqrt{y}-\sqrt{-x}$; $x>0$, $y>0$ ва $x<0$, $y<0$да эллиптик, $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+3\left(\frac{1}{\xi}v_\xi+\frac{1}{\eta}v_\eta\right)=0$, бу ерда $\xi=\sqrt{y}, \eta=\sqrt{x}$ ва $x<0$, $y<0$ да $\xi=\sqrt{-y}$, $\eta=\sqrt{-x}$. **125.** $x=0$ ва $y=0$да параболик, $u_{xx}=0$; $xy<0$да гиперболик, $v_{\xi\eta}-\frac{1}{3(\xi^2-\eta^2)}\left[(2\xi-\eta)v_\xi-(2\eta-\xi)v_\eta\right]=0$, бу ерда $\xi=-2(-y)^{1/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}$, $\eta=-2(-y)^{-1/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}$, агар $x>0$, $y<0$ бўлса; $\xi=2y^{1/2}+\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$, $\eta=2y^{-1/2}-\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$, $x<0$, $y>0$ бўлса; $xy>0$да эллиптик, $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}v_\xi+\frac{1}{3\eta}v_\eta=0$, бу ерда $\xi=2y^{1/2}$, $\eta=\frac{2}{3}x^{2/3}$, агар $x>0, y>0$ бўлса; $\xi=2(-y)^{1/2}, \eta=\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$, агар $x<0, y<0$ бўлса. 126. Параболик, $v_{\eta\eta}-\frac{\xi}{1+\xi e^{\eta}}v_\xi-\eta e^{-2\eta}v=0$, $\xi=e^{-y}-e^{-x}$, $\eta=x$. 127. Эллиптик, $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}=0$, $\xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $\eta=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$. 128. Эллиптик, $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\frac{1}{\xi-\eta}v_\xi+\frac{1}{2\eta}v_\eta=0$, $\xi=x^2-y^2$, $\eta=x^2$. 129. $y<0$да гиперболик, $v_{\xi\eta}-\frac{\alpha-1/2}{\xi-\eta}(v_\xi-v_\eta)=0$ $\xi=x-2\sqrt{-y}$, $\eta=x+2\sqrt{-y}$; $y>0$да эллиптик, $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\frac{2\alpha-1}{\eta}v_\eta=0$, $\xi=x$, $\eta=2\sqrt{y}$; $y=0$да параболик, $u_{xx}+\alpha u_y=0$. **130.** Параболик, $v_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{\eta^2}v_\xi=0$, $\xi=y\sin x, \eta=y$. **131.** Параболик, $v_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}v_\xi=0$ $\xi=ytg\frac{x}{2}$, $\eta=y$. **132.** Гиперболик, $v_{\xi\eta}=0$, $\xi=x+y-\cos x$, $\eta=-x+y-\cos x$. **133.** Гиперболик, $v_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}(v_\eta-v_\xi)=0$, $2\beta=\frac{m}{m+2}$,

$\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}$, $\eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}$. **134.** Гипербо

$v_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}(v_\eta-v_\xi)=0$, $2\beta=\frac{2\alpha-m}{2-m}$, $\xi=x-\frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)}$

$\eta=x+\frac{2}{2-m}(-y)^{(2-m)/2}$.

135. Гиперболик, $v_{\xi\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}(v_\xi-v_\eta)+\frac{\alpha}{\eta+\xi}(v_\eta+v_\xi)=0$, $2\beta=\frac{m}{m+}$

$2\alpha=\frac{n}{n+2}$, $\xi=\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$, $\eta=\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$.

136. $v_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}(v_\eta-v_\xi)+\frac{\mu}{4}v=0$, $2\beta=\frac{m}{m-2}$, $\xi=x-\frac{2}{2-m}(-y)^{(}$

$\eta=x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}$. **137.** $v_{\xi\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}v_\xi-\frac{\alpha}{\eta-\xi}v_\eta=0$, $2\beta=\frac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{m+2}$

$2\alpha=\frac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{m+2}$. $\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}$, $\eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}$

138. Гиперболик, $w_{\xi\eta}+\frac{1}{2}w+\frac{\eta}{2}e^{\xi/2}=0$, $\xi=2x+y$, $\eta=x$,

$$v(\xi,\eta)=u(\eta,\xi-2\eta)=e^{-\xi/2}w(\xi,\eta).$$

139. Параболик, $w_{\eta\eta}-w_\xi=0$, $\xi=3x+y$, $\eta=x$,

$$v(\xi,\eta)=u(\eta,\xi-3\eta)=e^{\frac{-\xi+2\eta}{4}}w(\xi,\eta).$$

140. Эллиптик, $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}-\frac{3}{2}w=0$, $\xi=2y-x$, $\eta=x$,

$$v(\xi,\eta)=u\left(\eta,\frac{\xi+\eta}{2}\right)=e^{-\xi-\eta}w(\xi,\eta).$$

141. Гиперболик, $w_{\xi\eta}-w+\xi e^\eta=0$, $\xi=y$, $\eta=x-3y$,

$$v(\xi,\eta)=u(\eta+3\xi,\xi)=e^{-\eta}w(\xi,\eta).$$

142. Эллиптик, $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}-2w=0$, $\xi=y$, $\eta=4x-2y$,

$$v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\eta+2\xi}{2},\xi\right)=e^{-\xi-\eta}w(\xi,\eta).$$

143. Параболик, $w_{\eta\eta}-2w_\xi=0$, $\xi=-x+y$, $\eta=x+y$,

$$v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\eta-\xi}{2},\frac{\eta+\xi}{2}\right)=e^{\frac{15\xi+8\eta}{32}}w(\xi,\eta).$$

144. Параболик, $w_{\xi\xi} + w_\eta = 0$, $\xi = 2x - y$, $\eta = x + y$,
$v(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{3}, \frac{2\eta-\xi}{3}\right) = e^{\xi-2\eta} w(\xi,\eta)$. **145.** Гиперболик,

$$w_{\xi\eta} + 9w + 4(\xi-\eta)e^{\xi+\eta} = 0, \ \xi = y - x, \quad \eta = y,$$
$$v(\xi,\eta) = u(\xi-\eta,\eta) = e^{-\xi-\eta} w(\xi,\eta).$$

146. Гиперболик, $w_{\xi\eta} + 7w = 0$, $\xi = 2x - y$, $\eta = x$,

$$v(\xi,\eta) = u(\eta, 2\eta-\xi) = e^{-\xi-6\eta} w(\xi,\eta).$$

147. а) Гиперболик тип. б) $x = C_1, x + y = C_2$ тўғри чизиқлардан иборат; в) $u_{\xi\eta} - u_\xi = 0$, $\xi = x$, $\eta = x + y$. **148.** а) Гиперболик тип; б) $y = C_1, x - 2y = C_2$ тўғри чизиқлардан иборат. в) $u_{\xi\eta} = 1$, $\xi = y$, $\eta = x - 2y$. **149.** а) $\alpha \neq 0$ да гиперболик тип, $\alpha = 0$да параболик тип. б) $\alpha \neq 0$да $4\alpha u_{\xi\eta} - u_\xi = 0$, $\xi = y + 3\alpha x$, $\eta = y - \alpha x$; $\alpha = 0$да $u_{yy} + u_x = 0$. **150.** а) $\alpha > -4$. б) $\alpha \in \varnothing$. в) $\alpha < -4$. **151.** а) $\alpha = 0$. б) $\alpha = -4$. в) $\alpha \in \varnothing$. **152.** а) $\alpha \in (-\infty;-5) \cup (3;+\infty)$. б) $\alpha = 3$, $\alpha = -5$. в) $\alpha \in (-5,3)$.
153. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 2v_\eta + 2v_\zeta + v = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = -x + y$, $\zeta = y + z$; $v = e^{\eta-\zeta} w$, $w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + 2w_\zeta = 0$. **154.** $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 2v_\eta + 6v_\xi - v = 0$, $\xi = x + z$, $\eta = -3x + 2y + z$; $v = e^{-(3\xi+4\eta)} w$, $w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + 6w = 0$.

155. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_\xi + 2v_\eta + v_\zeta + v = 0$, $\xi = x$, $\eta = x + y$, $\zeta = -y + z$;

$$v = e^{-\frac{1}{4}(\xi-4\eta+7\zeta)} w, \qquad w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + w_\zeta = 0.$$

156. $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + v_\xi + 2v_\eta + v_\zeta + v = 0$, $\xi = y$, $\eta = x + y$, $\zeta = z$;

$$v = e^{-\frac{1}{2}(\xi-2\eta+\zeta)} w, \qquad w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + w_{\zeta\zeta} + 1{,}5w = 0.$$

157. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + v_\xi + v_\eta + v_\zeta + v = 0$, $\xi = x, \eta = -x + 2y$, $\zeta = z$;

$$v = e^{-\frac{1}{2}(\xi-\eta+\zeta)} w, \ w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + w_{\zeta\zeta} + 0{,}75w = 0.$$

158. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} + v_\xi + 2v_\eta + v_\zeta + v = 0$,

$$\xi = x, \ \eta = x + y, \ \zeta = z; \ v = e^{-0{,}5(\xi-2\eta-\zeta)} w, \ w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} - w_{\zeta\zeta} + 2w = 0.$$

159. $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + v_\xi + v_\eta + v_\zeta + 4v = 0$, $\xi = x - y$, $\eta = y$, $\zeta = z$;

$$v = e^{\frac{1}{2}(\xi-\eta+\zeta)} w, \ -w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + w_{\zeta\zeta} + 0{,}75w = 0.$$

160. $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + v_\xi + v_\eta + v_\zeta + v = 0$,

$$\xi = x+y,\ \eta = -y,\ \zeta = z;\ \upsilon = e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta+\zeta)}w,\ w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}+w_{\zeta\zeta}+0{,}25w=0.$$

161. $\upsilon_{\xi\xi}+\upsilon_{\eta\eta}+\upsilon_{\zeta\zeta}+2\upsilon_\xi-2\upsilon_\eta+2\upsilon_\zeta=0,\ \xi=x+y-z,\ \eta=-y,\ \zeta=z;$

$$\upsilon=e^{-\xi+\eta-\zeta}w,\quad w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}+w_{\zeta\zeta}-3w=0.$$

162. $\upsilon_{\xi\xi}+2\upsilon_\xi+2\upsilon_\eta-3\upsilon_\zeta+\upsilon=0,$

$$\xi=x,\ \eta=x+y,\ \zeta=-x+z;\ \upsilon=e^{-\xi+3\eta+2\zeta}w,\ w_{\xi\xi}+2w_\eta-3w_\zeta=0.$$

5-§

163. $u(x,y)=x\varphi(y)+\psi(y)$. **164.** $u(x,y)=y\varphi(x)+\psi(x)+y^3$.

165. $u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)+xy$. **166.** $u(x,y)=\varphi(x+y)+\psi(3x+2y)$.

167. $u(x,y)=\varphi(y-x)+e^{(x-y)/2}+\psi(y-2x)$.

168. $u(x,y)=\left[\varphi(x+3y)+\psi(3x+y)\right]e^{(7x+y)/16}$.

169. $u(x,y)=2e^x+e^{(x+2y)/2}\left[\varphi(x)+\psi(x+2y)\right]$.

170. $u(x,y)=x-y+\left[\varphi(x-3y)+\psi(2x+y)\right]e^{\frac{3y-x}{7}}$..

171. $u(x,y)=\left[\varphi(x)+\psi(y)\right]e^{3x+2y}+e^{x+y}$.

172. $u(x,y)=\left[\varphi(x)+\psi(y)\right]e^{-bx-ay}+\dfrac{c}{1+a+b+ab}e^{x+y}$.

173. $u(x,y)=\varphi(x+y-\cos x)+\psi(x-y+\cos x)$.

174. $u(x,y)=\left[\varphi(y-x-\cos x)+\psi(x+y-\cos x)\right]e^{2\cos x-2y}$.

175. $u(x,y)=\dfrac{1}{x+y}\varphi\left(x^2-y^2\right)+\psi(x+y)$.

176. $u(x,y)=\left[\varphi(y-x)+\psi(-x+2y)\right]e^{2x-5y}$.

177. $u(x,y)=\varphi(x+\operatorname{arctg} y)+\psi(-x+\operatorname{arctg} y)$.

178. $u(x,y)=\dfrac{xy}{2}+\dfrac{1}{x-y}\left[\varphi(x)+\psi(y)\right]$.

179. $u(x,y)=xy(x+y)+\dfrac{1}{x-y}\left[\varphi(x)+\psi(y)\right]$.

180. $u(x,y)=\dfrac{1}{4x}\left[x\cdot\left(x^2-y^2\right)+\varphi(x+y)+\psi(x-y)\right]$.

181. $u(x,y)=\dfrac{1}{y}\left[\varphi(x+y)+\psi(x-y)\right]$.

182. $u(x,y)=\displaystyle\int_0^{x^2+y}\frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{t-y}}+\psi(y)$. **183.** $u(x,y)=\varphi(xy)+\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

184. $u=e^{x+\frac{y}{2}}\left[(2x+y)e^{4x+y}+\varphi(2x+y)+\psi(4x+y)\right].$

185. $u=e^{y}\left(e^{2y}-e^{2x}\right)+\varphi\left(e^{y}+e^{x}\right)+\psi\left(e^{y}-e^{x}\right).$

186. $u=\frac{1}{chx}\left\{y\varphi(x)+\varphi'(x)+\int\limits_{0}^{y}(y-\eta)e^{-x\eta}\,\psi(\eta)\,d\eta\right\}.$

Кўрсатма: Ушбу $\upsilon=chx\,u_y$ алмаштиршга асосан берилган тенгламани қуйидаги кўринишга $\upsilon_{xy}+y\upsilon_y=0.$ келтириб, умумий ечим топилади.

187. $u=e^{-x}\left\{\varphi(x)+\int\limits_{0}^{x}e^{\xi-\xi^2y^2}\psi(\xi)\,d\xi\right\}.$

188. $u=(1+y)\left(1-e^{-x}\right)-xy+e^{-x}\left\{\varphi(y)+\int\limits_{0}^{x}e^{\xi(1-y)}\psi(\xi)\,d\xi\right\}.$

Кўрсатма: Ушбу $u_x+u=e^{-xy}\upsilon$ алмаштиришга асосан берилган тенгламани қуйидаги кўринишга $\upsilon_y=-x^2y\,e^{xy}$, келтириб, υни топамиз. Сўнг топилган υни $u_{xx}+u=e^{-xy}\upsilon$ ифодага қўйиб $u_x+u=1-xy+e^{-xy}\psi(x)$ тенглик олинади ва бу тенгликни интеграллаб, юқоридаги умумий ечим топилади.

189. $u(x,y)=\varphi\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+\psi\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right).$ **190.** $u(x,y)=\sqrt{\frac{x}{y}}\varphi(xy)+\psi\left(y/x\right).$

191. $u(x,y)=\varphi(xy)\ln y+\psi(xy).$

193. а) $u(x,y)=\varphi(y)+x\psi(y)+x^2f(y)+2yx^3.$

б) $u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)+xf(y)+\frac{1}{2}x^4y.$

в) $u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)+\omega(x-y).$ г) $u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)+\omega(x+y).$

д) $u(x,y)=\varphi(x+y)+\psi(x-y)+\omega(y).$

е) $u(x,y)=\varphi\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right]+\psi\left[x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right]+$

$$+\int\limits_{a}^{x+2/3(-y)^{2/3}}dt\int\limits_{b}^{x-2/3(-y)^{3/2}}e^{-C\left[t+\frac{2}{3}(-z)^{3/2}\right]}\varphi(t+z)\,dz$$

) $u=\varphi(x+arctgy)+\psi(x-arctgy)+$

$$+\int\limits_{a}^{x+arctgy} dt \int\limits_{b}^{x-arctgy} \omega\left[\left(\frac{t+z}{2}\right)^2 - tg^2\left(\frac{t-z}{2}\right)\right]dz$$

194. а) $u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)+yg(x)+\frac{1}{2}y^2 f(x)+y^5 x$.

б) $u(x,y)=\varphi(x)+y\psi(x)+f(y)+g(y)\int\limits_a^x e^{ct^2}dt$.

в) $u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)+f(x+y)+g(x-y)$.

г) $u(x,y)=\varphi(x+y)+\psi(x-y)+(x+y)f(x-y)+(x-y)g(x+y)$.

д) $u(x,y)=\varphi\left(x+2\sqrt{y}\right)+\psi\left(x-2\sqrt{y}\right)+\left(x-2\sqrt{y}\right)f\left(x+2\sqrt{y}\right)+$

$$+\left(x+2\sqrt{y}\right)g\left(x-2\sqrt{y}\right).$$

Кўрсатма: $\xi=x-2\sqrt{y}$, $\eta=x+2\sqrt{y}$ алмаштириш бажари тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

е) $u(x,y)=\varphi(x-y)+\psi(2x-y)+f(4x-3y)+g(y)$

Кўрсатма: $\xi=x-y$, $\eta=2x-y$ алмаштириш бажариб, тенглама каноник кўринишга келтиринг.

f) $u(x,y)=\varphi(x+y)+\psi(x+t)+f(y)+(x+y)g(x-y)$.

195. $\alpha^2a^2+\beta^2b^2-\gamma^2c^2=0$.

II БОБ

1-§

202. $u(x,t)=x(1-t)$. **203.** $u(x,t)=\frac{\cos x\cdot \sin at}{a}$.**204.** $u(x,y)=\sin(x+t)$.

205. $u(x,t)=(x+2t)^2$. **206.** $u(x,t)=x^2+xt+4t^2+\frac{1}{6}xt^3$.

207. $u(x,t)=\sin x$. **208.** $u(x,t)=at+\frac{1}{2}bx^2t^2+\frac{1}{12}bt^4+e^{-x}ch t$.

209. $u(x,t)=x+\frac{axt^3}{6}+\sin x\sin t$.

210. $u(x,t)=at+a\left(e^{-t}-1\right)+b\sin x\cos t+c\cdot\cos x\sin t$.

211. $u(x,t)=\frac{at}{b}-\frac{a}{b^2}\sin bt+\cos(x-t)$. **212.** $u(x,t)=x(t-\sin t)+\sin(x+t)$.

213. $u(x,t)=1+t+\frac{1}{9}\sin x(1-\cos 3t)$. **214.** $u(x,t)=xt+\sin(x+t)-(1-ch t)e^x$.

215. $u(x,t)=\frac{1}{a^2\omega^2}\sin\omega x(1-\cos a\omega t)$. **216.** $u(x,y,t)=e^y ch t+e^{-y} sh t$.

217. $u(x,y,t)=\left(x^2+y^2\right)^2(1+t)+8a^2t^2\left(x^2+y^2\right)\left(1+{}^{t}\!/_{3}\right)+\frac{8}{3}a^4t^4\left(1+\frac{t}{5}\right)$.

218. $u(x,y,t)=\cos(3x+4y)\cos 5at+\frac{1}{5a}\sin(3x+4y)\sin 5at$.

219. $u(x,y,t)=\left(x^2+y^2+4a^2\right)\left(e^t-1-t\right)-2a^2t^2\left(1+{}^{t}\!/_{3}\right)$.

220. $u(x,y,t)=x^2-y^2+xyt\left(1+t^2\right)$. **221.** $u(x,y,t)=t^2+yt+x$.

222. $u(x,y,t)=0,5t^2\left(x^3-3xy^2\right)+te^y\sin x+e^x\cos y$.

223. $u(x,y,t)=x^2+t^2+t\sin y$.

224. $u(x,y,t)=2x^2-y^2+t\left(2x^2+y^2\right)+2t^2+2t^3$.

225. $u(x,y,t)=x^2+ty^2+0,5t^2\left(6+x^3+y^3\right)+t^3+0,75t^4(x+y)$.

226. $u(x,y,z,t)=z/\left(z^2-t^2\right)$.

227. $u(x,y,z,t)=\left(\cos at+\frac{1}{a}\sin at\right)\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}+$

$+\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\left(t\cos at-at\sin at-\frac{1}{a}\sin at\right)$.

228. $u(x,y,z,t)=xy\cos z\cdot\cos at$. **229.** $u(x,y,z,t)=x^2+y^2+t+3{,}5t^2$.

230. $u(x,y,z,t)=\left(x^2+y^2+z^2+6a^2\right)\left(e^t-1-t\right)-a^2t^2(3+t)$.

231. $u(x,y,z,t)=t^3\ \sin y\ \cos z e^{x\sqrt{z}}$.

232. $u(x,y,z,t)=x^2+y^2+t-2z^2+t^2xyz$.

233. $u(x,y,z,t)=\ y^2+8t^2+tz^2+\frac{8}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4x^2+\frac{2}{45}t^4$.

234. $u(x,y,z,t)=x\,y\,z+x^2\,y^2\,z^2+\frac{1}{3}\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)t^3+$

$+\frac{1}{15}\left(x^2+y^2+z^2\right)t^5+\frac{1}{105}t^7$. **Кўрсатма.** $u_{tt}=\Delta u\equiv\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}$,

$$u(x,t,\tau)\big|_{t=\tau}=\mu(x,\tau),\qquad u_t(x,t,\tau)\big|_{t=\tau}=\nu(x,\tau),\quad x=(x_1,x_2,...,x_n)$$

Коши масаласининг ушбу ечимидан

$$u(x,t,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(t-\tau)^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\mu(x,\tau)+\frac{(t-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\nu(x,\tau)\right]$$

фойдаланиб ечинг.

235. $u(x,y)=\sin y-1+e^{x+y},\quad -\infty<x,\,y<+\infty$.

236. $u(x,y)=x-y-0{,}5+0{,}5e^{2y},\quad -\infty<x,\,y<+\infty$.

237. $u(x,y)=0{,}5\left[1-x-3y-(x+y-1)e^{2x}\right],\quad -\infty<x,\,y<+\infty$.

238. $u(x,y)=xy+1{,}5\sin\frac{2y}{3}\cdot\cos\left(x+\frac{y}{3}\right),\quad -\infty<x,\,y<+\infty$.

239. $u(x,y)=(y-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad x<1,\quad y<3$.

240. $u(x,y)=\frac{x^2}{y},\quad x>0,\ y>0$. **241.** $u(x,y)=\frac{2x^2y}{3}+\frac{y}{3x},\quad x>0,\ y<0$.

242. $u(x,y)=\frac{5}{2}\sin\frac{x+y}{2}-\frac{3}{2}\sin\frac{5x+y}{6}$.

243. $u(x,y)=\frac{1}{2}e^{\frac{3y-5x}{2}}\left[2y+\left(x+y+\frac{3}{4}\right)e^{-(x+y)^2}+\left(x-y-\frac{3}{4}\right)e^{-(x-y)^2}\right]$.

244. $u(x,y)=\frac{12(x+y)}{4+(x+y)^2}+10\cos\frac{x+y}{2}-\frac{25(2x+3y)}{25+(2x+3y)^2}-10\cos\frac{(2x+3y)}{5}$.

245. $u(x,y)=\frac{1}{2}x^2\left(e^y-1\right)+\sin x+\frac{x^3-\left(x-e^y-1\right)^3}{6}+\operatorname{arctg}\left(x+e^y-1\right)-\operatorname{arctg}x$.

246. $u(x,y)=cos(y-x-sin\,x)$.

247. $u(x,y)=1-sin(y-x+cos\,x)+e^{y+cos\,x}sin(x+y+cos\,x)$.

Кўрсатма. Қуйидаги $\xi=-x+y+cos\,x$, $\eta=x+y+cos\,x$ алмаштириш ёрдамида берилган тенгламани каноник кўринишга келтирамиз: $v_{\xi\eta}-v_\eta=0$, бу ерда $v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\eta-\xi}{2},\frac{\eta+\xi}{2}+cos\frac{\eta-\xi}{2}\right)=u(x,y)$. Бу тенгламанинг умумий интеграли $v(\xi,\eta)=f(\xi)+e^{\frac{\xi}{2}}F(\eta)$ бундаги f ва F –икки марта дифференциалланувчи функциялар. Эски x, y ўзгарувчиларга ўтиб, берилган тенгламанинг умумий интегралини қуйидаги кўринишда

$$u(x,y)=f(y-x+cos\,x)+e^{\frac{1}{2}(y-x+cos\,x)}F(x+y+cos\,x)$$

ифодалаймиз. Сўнг бошланғич шартларга кўра эса f ва F функцияларнинг кўринишини топамиз.

248. $u(x,y)=2e^{-\frac{1}{4}(2x-y+cos\,x)}cos\,x\,sin\frac{1}{2}(y-cos\,x)$.

Кўрсатма. Қуйидаги $\xi=2x-y+cos\,x$, $\eta=2x+y-cos\,x$ алмаштириш ёрдамида берилган тенгламани каноник кўринишга келтирамиз: $v_{\xi\eta}+v_\eta=0$, бу ерда $v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{4},\frac{\eta-\xi}{2}+cos\frac{\xi+\eta}{4}\right)=u(x,y)$. Сўнг 247-масалага ўхшаш ечилади.

249. $u(x,y)=e^x\,sh\left(\frac{y-cos\,x}{2}\right)+sin\,x\,cos\left(\frac{y-cos\,x}{2}\right)$.

Кўрсатма. Қуйидаги $\xi=2x-y+cos\,x$, $\eta=2x+y-cos\,x$ алмаштириш ёрдамида берилган тенгламани каноник кўринишга келтирамиз:

$$v_{\xi\eta}=0,$$

бу ерда $v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{4},\frac{\eta-\xi}{2}+cos\frac{\xi+\eta}{4}\right)=u(x,y)$. Берилган тенгламанинг умумий интегралини қуйидаги кўринишда $u(x,y)=f(2x-y+cos\,x)+F(2x+y-cos\,x)$ ифодалаймиз. Сўнг бошланғич шартларга кўра эса f ва F функцияларнинг кўриниши топилади.

250. $u(x,y)=-\frac{x^2}{2}+Cos(x-1+e^y)-Cosx$.

Кўрсатма. 249-масалага ўхшаш ечилади.

251. $$u(x,y)=\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{3\Gamma^3(1/3)}\int_0^1\tau\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right]t^{-\frac{5}{6}}(1-t)^{-\frac{5}{6}}dt+$$
$$+\frac{\sqrt[3]{6}\Gamma^3(1/3)}{4\pi^2}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}y\int_0^1\upsilon\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right]t^{-\frac{1}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{6}}dt.$$

$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt,\ (z>0)$ – Гамма функция [2].

Кўрсатма. Қуйидаги $\xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$, $\eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$ алмашти ёрдамида берилган тенгламани каноник кўринишга келтир [15], [17]: $u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\eta-\xi)}(u_\eta-u_\xi)=0$. Бу тенгламанинг умумий е қуйидаги кўринишда
$$u(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{\frac{2}{3}}\int_0^1\Phi\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{-\frac{1}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{6}}dt+$$
$+\int_0^1\Psi\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{-\frac{5}{6}}(1-t)^{-\frac{5}{6}}dt$ бўлади, бу ерда Φ ва Ψ – и марта дифференциаланувчи функциялар. Бундан ва бошлан шартлардан Φ ва Ψ функцияларнинг кўриниши топилади.

252. $$u(x,y)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1\tau\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt+$$
$$+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}y\int_0^1\upsilon\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt.$$

Кўрсатма. Қуйидаги $\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$, $\eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$ алмаштириш ёрдамида берилган тенгламани каноник кўрини келтирамиз [15], [17]: $u_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}(u_\eta-u_\xi)=0,\ 2\beta=\frac{m}{m+2}$. Бу тенгламан умумий ечими қуйидаги кўринишда
$$u(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{1-2\beta}\int_0^1\Phi\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt+$$
$+\int_0^1\Psi\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ бўлади, бу ерда Φ ва Ψ – икки ма дифференциаланувчи функциялар. Бундан ва бошлан шартлардан Φ ва Ψ функцияларнинг кўриниши топилади.

183. $u(x,y)=\frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}\int_0^1\tau\left[x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(2t-1)\right]t^{\beta}(1-t)^{\beta}\,dt+$

$$+\frac{2\Gamma(2+2\beta)(-y)^{(2-m)/2}}{(1+2\beta)(2-m)\Gamma^2(1+\beta)}\int_0^1\tau'\left[x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(2t-1)\right]\times$$

$$\times t^{\beta}(1-t)^{\beta}(2t-1)\,dt+$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}y\int_0^1\upsilon\left[x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(2t-1)\right]t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\,dt,\quad 2\beta=\frac{m}{m-2}.$$

Кўрсатма. Қуйидаги $\xi=x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}$, $\eta=x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}$ алмаштириш ёрдамида берилган тенгламани каноник кўринишга келтирамиз [17]

$$u_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}(u_\eta-u_\xi)=0,\quad 2\beta=\frac{m}{m-2},\quad -1<2\beta<0.$$

Бу тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда

$$u(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{1-2\beta}\frac{\partial^2 Z(-\beta,-\beta)}{\partial\xi\partial\eta}$$

бўлади, бу ерда

$$Z(-\beta,-\beta)=(\eta-\xi)^{1+2\beta}\int_0^1\Phi\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{\beta}(1-t)^{\beta}\,dt+$$

$$+\int_0^1\Psi\left[\xi+(\eta-\xi)t\right]t^{-\beta-1}(1-t)^{-\beta-1}\,dt.$$

Бундан ва бошланғич шартлардан Φ, Φ' ва Ψ функцияларнинг кўриниши мос равишда τ, τ' ва υ функциялар орқали топилади.

184. $u(x,y)=x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}$.

Кўрсатма. Масалани ечишда

$u(x,y)=\frac{1}{2}\tau\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}\right]+\frac{1}{2}\tau\left[x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}\right]-\frac{1}{2}\int\limits_{x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}}^{x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}}\upsilon(t)dt$ формуладан фойдаланилади.

185. $u(x,y)=cos\left(x-2y^{\frac{1}{2}}\right)$. **Кўрсатма.** Масалани ечишда

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\tau\left[x+2y^{1/2}\right]+\frac{1}{2}\tau\left[x-2y^{1/2}\right]-\frac{1}{2}\int\limits_{x-2y^{1/2}}^{x+2y^{1/2}}\upsilon(t)dt$$ формул

фойдаланилади.

260. $$u(x,y)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int\limits_x^y\tau(t)\frac{(x-y)^{1-2\beta}}{(y-t)^{1-\beta}(t-x)^{1-\beta}}dt-$$

$$-\frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma^2(1-\beta)}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\int\limits_x^y\frac{\nu(t)dt}{(y-t)^{\beta}(t-x)^{\beta}},\quad 2\beta=\frac{m}{m+2}.$$

Кўрсатма. 252-масалага ўхшаш ечилади.

261. а) $u(x,t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{a}{2}x}\left\{\varphi(x+t)+\varphi(t-x)+\int\limits_{t-x}^{t+x}\left[\frac{a}{2}\varphi(\tau)+\psi(\tau)\right]d\tau\right\}.$

Кўрсатма. Тенгламада $u(x,t)=e^{-\frac{a}{2}x}\upsilon(x,t)$ алмаштириш бажар $\upsilon(x,t)$ га нисбатан $\upsilon_{xx}-\upsilon_{tt}=0$, $\upsilon(0,t)=\varphi(t)$,, $\upsilon_x(0,t)=\psi(t)+\frac{a}{2}\varphi($ Коши масаласига эга бўламиз.

б) $u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{e^{-\frac{b}{2}x}\varphi(x+t)+e^{\frac{b}{2}x}\varphi(t-x)+\int\limits_{t-x}^{t+x}e^{\frac{b}{2}(t-\tau)}\psi(\tau)d\tau\right\}.$

Кўрсатма. 261-масаланинг а) ҳолига ўхшаш ечилади.

в) $$u(x,t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{a}{2}x+\frac{b}{2}t}\times$$

$$\times\left\{e^{-\frac{b}{2}(x+t)}\varphi(x+t)+e^{\frac{b}{2}(x-t)}\varphi(t-x)+\int\limits_{t-x}^{t+x}e^{-\frac{b}{2}\tau}\left[\frac{a}{2}\varphi(\tau)+\psi(\tau)\right]d\tau\right\}.$$

2-§

262. $R(x,y,x_0,y_0)=1$. Тенглама $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ алмашти ёрдамида $\upsilon_{\xi\eta}(\xi,\eta)=0$ кўринишга келтирилади. Риман функци учун ўринли бўлган II бобнинг 2-§даги (2.17) ва (2.1 тенгламалардан келиб чиқадики,

$$\upsilon(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=1.$$

263. Берилган тенглама учун Риман функциясини топиш мақсадида $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ алмаштириш бажарамиз:

$$W\equiv W_{\xi\eta}+\frac{1}{4}\lambda^2W=0,\qquad W(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

(1) тенглама учун Риман функцияси

$$V_{\xi\eta}+\frac{1}{4}\lambda^2 V=0 \qquad (2)$$

тенгламанинг

$$V\Big|_{\xi=\xi_0}=1, \quad V\Big|_{\eta=\eta_0}=1 \qquad (3)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимидан иборат.

Уни топайлик. (2)да ξ ни t билан, ηни эса z билан алмаштирамиз ва уни t бўйича $[\xi_0,\xi]$, z бўйича эса$[\eta_0,\eta]$ оралиқда интеграллаймиз:

$$V(\xi,\eta)-V(\xi,\eta_0)-\int_{\eta_0}^{\eta}V_z(\xi_0,z)dz+\frac{1}{4}\lambda^2\int_{\xi_0}^{\xi}dt\int_{\eta_0}^{\eta}V(t,z)dz=0.$$

Бу ердан (3)ни ҳисобга олиб,$V(\xi,\eta)$га нисбатан қуйидаги интеграл тенгламани топамиз:

$$V(\xi,\eta)+\frac{1}{4}\lambda^2\int_{\xi_0}^{\xi}dt\int_{\eta_0}^{\eta}V(t,z)dz=1. \qquad (4)$$

(4) - Волртерра типидаги интеграл тенглама бўлгани учун ягона ечимга эга [15]. Уни кетма-кет яқинлашиш усули билан ечамиз.

Нолинчи яқинлашиш сифатида $V_0=0$ни олиб, кейинги яқинлашишларни

$$V_k=1-\frac{1}{4}\lambda^2\int_{\xi_0}^{\xi}dt\int_{\eta_0}^{\eta}V_{k-1}(t,z)dz, \qquad k=1,2,...$$

формула бўйича топамиз:

$$V_0=0, \qquad V_1=1,$$

$$V_2=1-\frac{\lambda^2}{4}(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0),$$

$$V_3=1-\frac{\lambda^2}{4}(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)+\frac{1}{(2!)^2}\left[\frac{\lambda^2}{4}(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)\right]^2,$$

……………………………………………………………………………

Бу процессни давом эттириб, ихтиёрий $n\in N$ учун

$$V_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left[\frac{\lambda^2}{4}(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)\right]^k$$

тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Бу ерда $n \to \infty$ лимитга ўтиб ва

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = J_0(x)$$

тенгликни эътиборга олиб, $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n = J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right]$ ни топамиз.

Демак, (1) тенглама учун Риман функцияси

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = J_0\left[\lambda\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right]$$

функциядан иборат экан.

x, y ўзгарувчиларга қайтиб ва $\xi_0 = x_0 + y_0, \eta_0 = x_0 - y_0$ белгилашни киритиб, берилган тенглама учун Риман функциясини топамиз:

$$R(x, y; x_0, y_0) = J_0\left[\lambda\sqrt{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}\right].$$

264. $R(x,y;x_0,y_0) = exp\left(\frac{a}{2}(x-x_0)\right)$. Қўшма тенглама $u(x,y) = \upsilon(x,y)\cdot exp\left(\frac{a}{2}x\right)$ алмаштириш натижасида $\upsilon_{xx} - \upsilon_{yy} = 0$ кўринишга келади ва 262-масаланинг жавобидан фойдаланилади.

265. $R(x,y,x_0,y_0) = e^{-0,5b(y_0-y)}$. **266.** $R(x, y, x_0, y_0) =$

$$= e^{\frac{1}{2}[a(x_0-x)-b(y_0-y)]} J_0\left\{\frac{1}{2}\sqrt{4c-a^2-b^2\left[(x-x_0)^2-(y-y_0)^2\right]}\right\}.$$

Кўрсатма. Қўшма тенглама $u(x,y) = \upsilon(x,y)e^{0,5(ax-by)}$ алмаштириш ёрдамида $\upsilon_{xx} - \upsilon_{yy} + c_1\upsilon = 0$ тенгламага келтирилади ва 263 - масаланинг жавобидан фойдаланилади.

267. $R(x,y,x_0,y_0) = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x-y)(x_0-y_0)}\right)$. Риман функцияси таърифига асосан

$$\upsilon_{xy} - \frac{1}{4}\frac{\upsilon}{(x-y)^2} = 0 \qquad (5)$$

қўшма тенгламанинг $v\big|_{x=x_0}=1$, $v\big|_{y=y_0}=1$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш керак. Бу ечимни $v=G(\sigma)$, $\sigma=\left[\dfrac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x-y)(x_0-y_0)}\right]$ кўринишида қидирамиз[17].

Натижада (5) тенглама

$$\sigma(1-\sigma)G''(\sigma)-(1-2\sigma)G'(\sigma)-\frac{1}{4}G(\sigma)=0 \tag{6}$$

кўринишга келади. Бу - Гаусснинг ушбу

$$\sigma(1-\sigma)y''+\left[\gamma-(1+\alpha+\beta)\sigma\right]y'-\alpha\beta y=0$$

гипергиометрик тенгламасининг хусусий ҳоли бўлиб [2], $\alpha=\beta=0{,}5$, $\gamma=1$.Гаусс тенгламаси $|\sigma|<1$ да узлуксиз бўлган

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\sigma)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma\cdot 1!}\sigma+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 2!}\sigma^2+.... \tag{7}$$

ечимга эга [2].

(7)дан келиб чиқадики $F(\alpha,\beta,\gamma,0)=1$. Буларни ва $\sigma\big|_{x=x_0}=\sigma\big|_{y=y_0}=0$ни эътиборга олсак, тегишли ечимга эга бўламиз: $G(\sigma)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\sigma\right)$.

274. Берилган тенгламанинг характеристикалари $x-at=C_1$, $x+at=C_2$ бўлганлиги учун $\xi=x-at$, $\eta=x+at$ алмаштириш қилинади. У ҳолда каноник тенглама $u_{\xi\eta}=0$ кўринишига келади. Берилган масалада AB чизиқ $t=0$ тўғри чизиқ, яьни Ox ўқидан иборат, Ox ўқига нормал эса Ot ўқидан иборатдир. Шу билан бирга t=0да u ва u_t ларнинг берилиши, функция ва унинг нормал ҳосиласининг қийматларининг берилиши демакдир. t=0 да x=ξ, η=ξ бўлганлиги учун

$$u\,|_{t=0}=f_1(x)=f_1(\xi),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=f_2(x)=f_2(\xi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta}=a\left.\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right|_{t=0}=f_2(\xi)$$

ёки $$u\,|_{\eta=\xi}=f_1(\xi),\qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right|_{\eta=\xi}=-\frac{1}{a}f_2(\xi) \tag{8}$$

бўлади. $u_{\xi\eta}=0$ тенглама учун Риман функцияси $R(x,y;x_0y_0) =$ эканлигини ва (8) шартларни эътиборга олиб, Риман формулас масала ечимини

$$u(\xi_0,\eta_0)=\frac{f_1(\xi_0)+f_2(\eta_0)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}f_2(z)dz$$

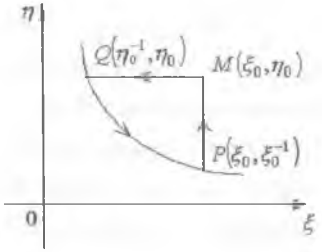
кўринишда топамиз. Бу ерда $\xi_0=x-at$, $\eta_0=x+at$ тенглик асосан эски x ва t ўзгарувчиларга қайтилса, берилган масала Даламбер усули билан топилган ечими келиб чиқади:

$$u(\xi,\eta)=\frac{f_1(x-at)+f_2(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}f_2(z)dz.$$

275. Берилган тенглама $\xi=xy,\ \eta=y/x$ алмаштириш ёрдам $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$ каноник кўринишга келади, $y=1$ тўғри чи тенгламаси эса $\xi\eta=1$ кўринишда ёзилади. Бундан ташқари

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|_{\xi\eta=1}=\left.\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{\xi\eta=1},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|_{\xi\eta=1}=\left.\left(-\frac{\xi^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\xi}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{\xi\eta=1}$$

тенгликлар ва бошланғич шартларга асосан,



$$\left.\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|_{\xi\eta=1}=\frac{1}{2}f_1(\xi)+\frac{1}{2\xi}f_2(\xi),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|_{\xi\eta=1}=-\frac{\xi^2}{2}f_1(\xi)+\frac{\xi}{2}f_2(\xi),$$

$$u|_{\xi\eta=1}=f_1(\xi).$$

Риман формуласида $a=0,\ b=-\frac{1}{2\xi},\ f=0$ десак, масала ечи қуйидагича ёзилади:

$$u(\xi_0,\eta_0)=\frac{(uR)_P+(uR)_Q}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{QP}\left(R\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{uR}{\xi}\right)d\xi-\left(R\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)d\eta.$$

Бу ерда

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\sqrt{\xi_0/\xi},\ \ u(P)=f_1(\xi_0),\, u(Q)=f_1\left(\frac{1}{\eta_0}\right),$$

$$R(P)=R\left(\xi_0,\frac{1}{\frac{\xi}{\xi_0}};\xi_0,\eta_0\right)=1;\ \ R(Q)=R\left(\frac{1}{\eta_0},\eta_0;\xi_0,\eta_0\right)=\sqrt{\xi_0\eta_0}$$

нлигини эътиборга олсак,

$$u(\xi_0,\eta_0)=\frac{f_1(\xi_0)}{2}+\frac{\sqrt{\xi_0\eta_0}}{2}f_1\left(\frac{1}{\eta_0}\right)+\frac{\sqrt{\xi_0}}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\frac{1}{\eta_0}}\frac{f_1(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi-\frac{\sqrt{\xi_0}}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\frac{1}{\eta_0}}\frac{f_2(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi$$

формулага эга бўламиз. Бу ерда эски x ва y ўзгарувчиларга йтилса, масаланинг ечими ҳосил бўлади:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}f_1(xy)+\frac{y}{2}f_1\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{xy}}{4}\int\limits_{xy}^{x/y}\frac{f_1(z)}{z^{3/2}}dz-\frac{\sqrt{xy}}{2}\int\limits_{xy}^{x/y}\frac{f_2(z)}{z^{3/2}}dz.$$

276. $$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}-\frac{ct}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{J_1\left(c\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}\right)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2/a^2}}\psi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}J_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)f(\xi,\tau)d\xi.$$

277. $$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}-\frac{ct}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}}\times$$

$$\times\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)f(\xi,\tau)d\xi.$$

278. $$u(x,t)=\frac{\sqrt{\sqrt{l-x}-\frac{at}{2}}\,\varphi\left(x+\sqrt{l-x}at-\frac{a^2t^2}{4}\right)}{2\sqrt[4]{l-x}}+$$

$$+\frac{\sqrt{\sqrt{l-x}+\frac{at}{2}}\,\varphi\left(x-\sqrt{l-x}at-\frac{a^2t^2}{4}\right)}{2\sqrt[4]{l-x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{l-x}}\int\limits_{\sqrt{l-x}-\frac{at}{2}}^{\sqrt{l-x}+\frac{at}{2}}\Phi(x,t,z)dz,$$

$$\Phi(x,t,z)=\frac{\sqrt{z}}{a}\psi(l-z^2)F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\left(\frac{a^2t^2}{4}-\left(z-\sqrt{l-x}\right)^2\right)\Big/4z\sqrt{l-z}\right)+$$

$$+\frac{at}{8\sqrt{(l-x)z}}\varphi\left(l-z^2\right)F'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\left(\frac{a^2t^2}{4}-\left(z-\sqrt{l-x}\right)^2\right)\Big/4z\sqrt{l-z}\right),$$

Кўрсатма. Тангламада $\xi=\sqrt{l-x}+\frac{y}{2},\eta=\sqrt{l-x}-\frac{y}{2},\ u=\frac{\omega}{\sqrt{\xi+\eta}}$ алм

тириш бажариб, сўнгра 267-масаланинг жавобидан фойдала зарур.

279. $u(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\sin w}}\Big[\sqrt{\sin(w-y)}\cdot\varphi[l\cos(w-y)]+$

$$+\sqrt{\sin(w-y)}\cdot\varphi[l\cos(w+y)]\Big]+\frac{1}{2\sqrt{\sin w}}\int\limits_{w-y}^{w+y}\Phi(w,y,z)dz,$$

бу ерда $w=\arccos(x/l)$,

$$\Phi(x,y,z)=\psi(l\cos z)\sqrt{\sin z}\cdot F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{\cos(w-z)-\cos y}{2\sin w\sin z}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\varphi(l\cos z)\frac{\sin y}{\sin w\sqrt{\sin z}}F'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{\cos(w-z)-\cos y}{2\sin w\sin z}\right).$$

Кўрсатма. Тенгламада аввал $\xi=\frac{1}{2}\left(y+\arccos\frac{x}{l}\right),\ \eta=\frac{1}{2}\Big(y-\arccos$

$u=\frac{\omega}{\sqrt{\sin(\xi-\eta)}}$ алмаштириш бажарилиб, сўнгра 269-масала

фойдаланиш керак.

280. Берилган тенглама $\xi=(y/2)+\sqrt{x},\ \eta=(y/2)-\sqrt{x}.\ \omega=u\sqrt{\xi}$ алмаштириш натижасида

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{4}\frac{\omega}{(\xi-\eta)^2}=0 \qquad (9)$$

кўринишни олди. Бунда $y=0$ чизик $\eta+\xi=0$, яъни $\eta=-\xi$ чизик алмашиб, бошланғич шартлар

$$\omega\big|_{\eta=-\xi}=\varphi(\xi),\ \frac{1}{2}\left(\omega_\xi+\omega_\eta\right)\Big|_{\eta=-\xi}=\psi(\xi) \qquad (10)$$

кўринишга келади. II бобнинг 2-§ даги (2.33) формул $a(x,y)=b(x,y)=f(x,y)=0$ деб ва R сифатида (9) тенгламани Риман функцияси (2-§ даги 267-мисолга қаранг) олинса,

$$\omega(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2}\left[\omega(P)+\omega(Q)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\eta_0}^{\xi_0} R\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}+\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)\Bigg|_{\eta=-\xi}-\frac{1}{2}\int\limits_{-\eta_0}^{\xi_0}\omega\left(\frac{\partial R}{\partial\xi}+\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)\Bigg|_{\eta=-\xi} d\xi. \qquad (11)$$

либ чикади. $x=\frac{1}{4}(\xi-\eta)^2$, $y=\xi+\eta$ тенгликларга асосан

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}\bigg|_{\eta=-\xi}=\left(\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0},\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=-\xi}=\left(-\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0}.$$

У қолда, иккинчи бошланғич шартга асосан

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\bigg|_{\eta=-\xi}=2\psi\left(\xi^2\right).$$

Булардан ва

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\bigg|_{\eta=-\xi}=\sqrt{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{u}{2\sqrt{2\xi}},\ \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=-\xi}=\sqrt{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{u}{2\sqrt{2\xi}}$$

тенгликлардан

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\bigg|_{\eta=-\xi}=\sqrt{2\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\bigg|_{\eta=-\xi}=2\sqrt{2\xi}\psi\left(\xi^2\right). \qquad (12)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бевосита хисоблаб топиш мумкинки

$$\left(\frac{\partial R}{\partial\xi}+\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)\bigg|_{\eta=-\xi}=-\frac{\xi_0+\eta_0}{2(\xi_0-\eta_0)\xi}\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)\bigg|_{\eta=-\xi}. \qquad (13)$$

$$\omega(P)=\omega(\xi_0,-\xi_0)=\sqrt{2\xi_0}\varphi\left(\xi^2\right)\omega(Q)=\omega(-\eta_0,\eta_0)=\sqrt{-2\eta_0}\varphi\left(\eta_0^2\right). \qquad (14)$$

(12) - (14) ларни (11) га қўйиб ва x,y ўзгарувчиларга ва $u(x,y)$ функцияга қайтиб масала ечимини топамиз:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\sqrt{\sqrt{x}+\frac{y}{2}}\cdot\varphi\left(x+\sqrt{xy}+\frac{1}{4}y^2\right)+\sqrt{\sqrt{x}-\frac{y}{2}}\cdot\varphi\left(x-\sqrt{xy}+\frac{1}{4}y^2\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\int\limits_{\sqrt{x}-y/2}^{\sqrt{x}+y/2}\left\{\sqrt{z}\psi\left(z^2\right)G\left[\frac{\frac{1}{4}y^2-\left(z-\sqrt{x}\right)^2}{4z\sqrt{x}}\right]+\frac{y\varphi\left(z^2\right)}{8\sqrt{zx}}G'\left[\frac{\frac{1}{4}y^2-\left(z-\sqrt{x}\right)^2}{4z\sqrt{x}}\right]\right\}dz.$$

У ерда $G(z)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\sigma\right)$.

281. $u(x,y)=\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{3\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}\int\limits_0^1\varphi\left[x+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right]\left[t(1-t)\right]^{-\frac{5}{6}}dt+$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)y\int_0^1\psi\left[x+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right]\left[t(1-t)\right]^{-\frac{1}{6}}dt,$$

бу ерда $\Gamma(z)$ - Эйлернинг Гамма функцияси. Берилган тенглам $\xi = x+\frac{2}{3}y^{3/2}$, $\eta = x-\frac{2}{3}y^{3/2}$ алмаштириш бажариб, сўнгра 270 масаладан ва II бобнинг 2-§даги (2.33) формуладан фойдаланил

282. $u(x,y)=xy-y;\quad R(x,y;\xi,\eta)=\frac{\xi y}{x\eta}.$

Кўрсатма. Берилган тенгламага қўшма тенглама қуйид кўринишда

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{x}V=0,\qquad V(x,y)=R_y-\frac{1}{y}R \tag{15}$$

бўлади. (15) тенгламанинг

$$R\big|_{x=\xi}=\frac{y}{\eta},\quad R\big|_{y=\eta}=\frac{\xi}{x},\quad R(\xi,\eta;\xi,\eta)=1 \tag{16}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими Риман функциясидан ибор

(15) ва (16) масалани ечиб, Риман функциясини топамиз:

$$R(x,y;\xi,\eta)=\xi\, y/x\eta.$$

Бундан ва II бобнинг 2-§ даги (2.33) формуладан фойдаланиб Коши масаласининг ечими топилади.

283. $u(x,y)=xy+x-y;\quad R(x,y;\xi,\eta)=\frac{x+y}{\xi+\eta}.$

Кўрсатма. Берилган тенгламага қўшма тенглама қуйид кўринишда

$$W_x=0,\qquad W=\frac{1}{x+y}\left[R_y-\frac{1}{x+y}R\right], \tag{17}$$

бўлади. (17) тенгламанинг

$$R\big|_{x=\xi}=\frac{\xi+y}{\xi+\eta},\quad R\big|_{y=\eta}=\frac{x+\eta}{\xi+\eta},\quad R(\xi,\eta;\xi,\eta)=1 \tag{18}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими $R(x,y;\xi,\eta)=\frac{x+y}{\xi+\eta}$ кўринишда

Риман функциясидан иборатдир.

Бундан ва II бобнинг 2-§ даги (2.33) формуладан фойдаланиб Коши масаласининг ечими топилади.

284. $u(x,y)=(y-x)(x^2+1)+x^5cos\ x.$

Кўрсатма. 282-масалага ўхшаш ечилади.

285. $u(x,y)=y^2+0,5x^2\left(e^{-y}+1\right)$. **Кўрсатма.** Қўйилган Гурса масаласи $u(x,y)=\upsilon(x,y)e^{-y}$ алмаштириш ёрдамида ечилади.

286. $u(x,y)=\int\limits_0^x e^{-\frac{1}{2}\xi^2 y^2}d\xi$. **287.** $u(x,y)=y+\psi(x)+\left[\varphi(y)-\varphi(0)-y\right]e^{-x}$.

Кўрсатма. Қўйилган Гурса масаласи $u_x+u=\upsilon(x,y)$ алмаштириш ёрдамида ечилади.

288. $u(x,y)=\varphi(y)+\int\limits_0^x \psi'(\xi)e^{-\xi y}d\xi$.

Кўрсатма. Қўйилган Гурса масаласи $u_x=\upsilon(x,y)$ алмаштириш ёрдамида ечилади.

289. $u(x,y)=(1-0,5y+0,5x)e^{0,5(x-y)}$. **290.** $u(x,y)=1+(2y+x)e^{\frac{1}{3}(y-x)}$.

Кўрсатма. Берилган тенглама $\xi=2y+x$, $\eta=y-x$ алмаштириш натижасида $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$ кўринишни олди. Бу тенгламада $u=e^{\frac{1}{3}\eta}\upsilon(\xi,\eta)$ алмаштиришни бажариш ёрдамида Гурса масаласи ечилади.

291. $u(x,y)=\varphi\left(\frac{5x-y}{4}\right)+\psi\left(\frac{y-x}{4}\right)-\varphi(0)$.

292. $u(x,y)=\frac{1}{4}\left[(x+y+1)^2-1\right]e^{y-x+1}+\frac{1}{2}(x-y+2)$.

293. $u(x,y)=\left[\left(\frac{y-x-2}{4}\right)^2-\frac{1}{4}\right]e^{20x-4y}+\left(\frac{y-5x}{4}\right)^2$.

294. $u(x,y)=\frac{[\cos y+x\sin y]\cdot e^{-xy}-1}{x^2+1}+e^x$. **295.** $u(x,y)=2x\sqrt{-y}$.

296. $u(x,y)=x^2+\left(e^x+y-1\right)^2$. **297.** $u(x,y)=xy(x+y)^2$.

298. $u(x,y)=y$. **299.** $u(x,y)=3x+y^3$. **Кўрсатма.** Берилган тенглама $\xi=-y^3+3x$, $\eta=y$ алмаштириш натижасида $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ кўринишни олди. Бу тенгламанинг умумий ечимидан фойдаланиб, Гурса масаласи ечилади.

300. $u(x,y)=x$. **Кўрсатма.** Берилган тенглама $\xi=xy$, $\eta=y/x$ алмаштириш натижасида $2\xi u_{\xi\eta}-u_{\eta}=0$ кўринишни олади. Бу тенгламага $2\xi\, u_{\xi}-u=\upsilon(\xi,\eta)$ алмаштиришни бажариш ёрдамида Гурса масаласи ечилади.

301. $u(x,y)=\sqrt[4]{y^5/x}$. **Кўрсатма.** 300-масалага ўхшаш ечилади.

302. $u(x,y)=y\cos\frac{\pi x}{2y}$. **Кўрсатма.** Берилган тенглама $\xi=y/x$, $\eta=x\,y^3$ алмаштириш натижасида $4\eta\, u_{\xi\eta}-u_{\xi}=0$ кўринишни олади. Бу тенгламада $u_{\xi}=\upsilon(\xi,\eta)$ алмаштириш ёрдамида Гурса масаласи ечилади.

303. $u(x,y)=0{,}5(x+y)^2$. **Кўрсатма.** Қўйилган Гурса масаласи $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\upsilon(x,y)$ алмаштириш ёрдамида ечилади.

304. $u(x,y)=2-y$. **Кўрсатма.** Қўйилган Гурса масаласи $u=\frac{1}{x}\upsilon$ алмаштириш ёрдамида ечилади. **305.** $u(x,y)=y/x$. **Кўрсатма.** Қўйилган Гурса масаласи $u=\frac{1}{x^2}\upsilon$ алмаштириш ёрдамида ечилади.

306. $u(x,y)=\frac{1}{\alpha+\beta}(y-\alpha x)(\beta x-y)$. Берилган тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда

$$u(x,y)=xy+\Phi(x)+\Psi(y) \qquad (19)$$

бўлади. (19) ечимдан

$$u\Big|_{y=\alpha x}=0, \qquad u\Big|_{y=\beta x}=0$$

кўра

$$\begin{aligned} &\alpha x^2+\Phi(x)+\Psi(\alpha x)=0,\\ &\beta x^2+\Phi(x)+\Psi(\beta x)=0 \end{aligned} \qquad (20)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан

$$\Psi(\beta x)=\alpha x^2-\beta x^2+\Psi(\alpha x)=(\alpha-\beta)x^2+\Psi(\alpha x) \qquad (21)$$

га эга бўламиз. Энди $\Psi(\alpha x)=\Psi\left(\beta\cdot\frac{\alpha x}{\beta}\right)$ асосан (21) формуладан қуйидагини оламиз:

$$\Psi(\alpha x)=\Psi\left(\beta\cdot\frac{\alpha x}{\beta}\right)=(\alpha-\beta)\cdot\frac{\alpha^2x^2}{\beta^2}+\Psi\left(\alpha\cdot\frac{\alpha x}{\beta}\right)=\frac{(\alpha-\beta)\alpha^2}{\beta^2}x^2+\Psi\left(\frac{\alpha^2x}{\beta}\right). \qquad (22)$$

(22) ни (21) га қўйиб

$$\Psi(\beta x)=(\alpha-\beta)x^2+\frac{(\alpha-\beta)\alpha^2}{\beta^2}x^2+\Psi\left(\frac{\alpha^2x}{\beta}\right)$$

ни ҳосил қиламиз. Худди шундай кетма-кет давом эттириб, қуйидагини

$$\Psi(\beta x)=(\alpha-\beta)x^2\left[1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^4}{\beta^4}+\frac{\alpha^6}{\beta^6}+\cdot\cdot\cdot\right]+\Psi(0) \qquad (23)$$

оламиз. $\alpha x<y<\beta x,\ \ x>0,\ \ 0<\alpha<\beta$ шартга кўра, ушбу $[\cdots]$ қавс ичидаги ифода чексиз камаювчи геометрик прогрессияни ташкил этгани учун унинг йиғиндиси $1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^4}{\beta^4}+\frac{\alpha^6}{\beta^6}+\cdot\cdot\cdot=\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}$ га тенг бўлади. Бундан ва (23)дан

$$\Psi(\beta x)=(\alpha-\beta)x^2\cdot\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}+\Psi(0)=-\frac{\beta^2x^2}{\alpha+\beta}+\Psi(0) \qquad (24)$$

оламиз. (24) ни (20) га қўйиб

$$\Phi(x)=-\beta x^2-\Psi(\beta x)=-\beta x^2+\frac{\beta^2x^2}{\alpha+\beta}-\Psi(0)=-\frac{\alpha\beta x^2}{\alpha+\beta}-\Psi(0) \qquad (25)$$

ни ҳосил қиламиз. (24) ва (25) ифодаларга кўра (19) дан Гурса масаласининг ечимини қуйидаги кўринишда

$$u(x,y)=xy-\frac{\alpha\beta x^2}{\alpha+\beta}-\frac{y^2}{\alpha+\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta}(y-\alpha x)(\beta x-y)$$

ифодалаймиз.

307. $u(x,y)=\frac{4}{3}x^4-x^2+y-\frac{1}{3}y^2.$

Кўрсатма. 306-масалага ўхшаш ечилади.

308. $u(x,y)=x-\sqrt{y}.$ **Кўрсатма.** 306-масалага ўхшаш ечилади.

309. $u(x,t)=\varphi\left(\frac{x+at}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-at}{2}\right)-\varphi(0).$ Берилган тенглама $\xi=x-at$, $\eta=x+at$ алмаштириш билан $\upsilon_{\xi\eta}=0$ кўринишга келтирилади ва 302-масала жавобидан фойдаланилади.

310. $u(x,t)=\varphi\left(\frac{x+at}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-at}{2}\right)-J_0\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\varphi(0)-$

$$-\int_0^{x+t}\frac{\partial}{\partial z}J_0\left[\lambda\sqrt{(z-x-t)(t-x)}\right]\cdot\varphi\left(\frac{z}{2}\right)dz-$$

$$\int_0^{x-t}\frac{\partial}{\partial z}J_0\left[\lambda\sqrt{(x+t)(x-t-z)}\right]\cdot\psi\left(\frac{z}{2}\right)dz.$$

Кўрсатма. Тенгламада аввал $\xi=x+t$, $\eta=x-t$ алмаштири қилинади. Сўнгра II бобнинг 2-§ даги (2.40) формула ва 263-ма жавобидан фойдаланилади.

311. $u(x,t)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\frac{\left(x^2-t^2\right)^{k+1}}{\left[(k+1)!\right]^2}$. **Кўрсатма.** II бобнинг 2-§ да (2.40) формула ва 263-масала жавобига асосан:

$$u(x,t)=\frac{1}{4}\int_0^{\xi}d\xi_1\int_0^{\eta}J_0\left[A\sqrt{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}\right]d\eta_1$$

Бу ердаги интегралларни ҳисоблаб масала ечимига эга бўлами

312. $u(x,t)=e^{-\frac{a}{2}x}\left\{e^{\frac{a}{4}(x+t)}\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{\frac{a}{4}(x-t)}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0)\right\}$.

Тенгламада $u(x,t)=e^{-\frac{a}{2}x}\upsilon(x,t)$ алмаштириш бажариб, $\upsilon(x,t)$ нисбатан $\upsilon_{xx}-\upsilon_{tt}=0$, $\upsilon(x,x)=e^{\frac{a}{2}x}\varphi(x)$, $\upsilon(x,-x)=e^{\frac{a}{2}x}\psi(x)$ Гу масаласига эга бўламиз.

313. $u(x,t)=e^{\frac{b}{2}t}\left\{e^{-\frac{b}{4}(x+t)}\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{-\frac{b}{4}(x-t)}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0)\right\}$.

314. $u(x,t)=e^{\frac{1}{2}(bt-ax)}\left\{e^{\frac{1}{4}(a-b)(x+t)}\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{\frac{1}{4}(a+b)(x-t)}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0)\right\}$.

315. $u(x,t)=\varphi\left(\frac{x+2\sqrt{-t}}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-2\sqrt{-t}+1}{2}\right)-\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

Кўрсатма. Берилган тенгламанинг умумий ечими фойдаланилади.

316. а) AB: $x+t=\alpha$, BC: $x-t=\beta$, CD: $x+t=\gamma$, DA: $x-t=\delta$ α $\beta\neq\delta$ тўғри чизиқлар билан ҳосил қилинган ABCD тўртбур бўйича $u_{xx}-u_{tt}=\left(u_x\right)_x-\left(u_t\right)_t=0$ айниятни интеграллаш кер

б) Ечим қидирилаётган соҳанинг ихтиёрий $M_0(x_0,y_0)$ нуқтаси тенглама характеристикаларини ўтказиб, уларни масала шартлари берилган характеристикалар билан кесишишидан ҳосил бўлган тўртбурчакка Айсгейрссон принципини татбиқ қилинади.

3-§

117. $u(x,y)=\varphi(x-y)+\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\psi\left(\frac{x-y}{2}\right).$

118. $u(x,y)=sin\,(y-x).$

119. $u(x,y)=\frac{1}{8}(x+y)^3+(x-y)^2+\frac{1}{8}(x-y)^3.$

120. $$u(x,y)=\varphi(x+y)-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\varphi\left[\frac{1}{3^k}(x+y)\right]-\psi\left[\frac{2}{3^{k+1}}(x+y)\right]\right\}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\varphi\left[\frac{1}{3^k}(x-y)\right]-\psi\left[\frac{2}{3^{k+1}}(x-y)\right]\right\}.$$

Кўрсатма. Ечимни $u(x,y)=f(x+y)+g(x-y)$ кўринишда қидирилса, масала шартларига асосан,

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=\varphi(x), & 0\le x\le 4/3,\\ f\left(\frac{3}{2}x\right)+g\left(\frac{x}{2}\right)=\psi(x), & 0\le x\le 2/3 \end{cases}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу ерда $(3x/2)=z$ алмаштириш бажариб, сўнгра $f(x)$ ни йуқотсак,

$$g(z)=g\left(\frac{1}{3}z\right)+\varphi(z)-\psi\left(\frac{2}{3}z\right),\ 0\le z\le 1$$

тенглама келиб чиқади. Бу тенгламага итерация усули қўлланса, ихтиёрий натурал n - учун

$$g(z)=g\left(\frac{1}{3^{n+1}}z\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi\left(\frac{1}{3^k}z\right)-\psi\left(\frac{2}{3^{k+1}}z\right)\right],\ 0\le z\le 1$$

тенгликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Демак, $g(z)=g(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi\left(\frac{1}{3^k}z\right)-\psi\left(\frac{2}{3^{k+1}}z\right)\right].$

121. $$u(x,y)=sin\,(x+y)-\sum_{k=0}^{\infty}sin\left[\left(\frac{3}{5}\right)^k(x+y)\right]-\sum_{k=0}^{\infty}sin\left[\left(\frac{3}{5}\right)^k(x-y)\right]+4y$$

122. $u(x,y)=8\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[1-\sqrt{1+\theta^k(x+y)}\right]^3-\left[1-\sqrt{1+\theta^k(x-y)}\right]^3\right\}$, бу ерда

$$\theta(x)=4\sqrt{1+x}-x-4\,,\ \theta^0(x)=x\,,\ \theta^k(x)=\theta^{k-1}(\theta(x)).$$

Кўрсатма. 320-масалага ўхшаш

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=0, & 0\le x\le 2, \\ f\left(x+x^2/4\right)+g\left(x-x^2/4\right)=x^3, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу ерда $x+x^2/4=z\in[0,5/4]$ алмаштиришни бажариб ва $g(x)$ ни йукотсак,

$$f(z)=f\left[\theta(z)\right]-8\left[1-\sqrt{1+z}\right]^3$$

тенглама келиб чиқади, бу ерда $\theta(z)=x+x^2/4=4\sqrt{1+z}-4-z$ бўлиб $0\le\theta(z)\le 3/4$. Бу тенгламага итерация усули қўлланса,

$$f(z)=f(0)-8\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-\sqrt{1+\theta^n(z)}\right]$$

келиб чиқади, бу ерда $\theta^0(z)=z\,,\ \theta^n(z)=\theta^{n-1}(\theta(x))$.

323. $u(x,y)=\varphi(x+y)-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Big\{\varphi\left[\theta^k(x+y)\right]-\varphi\left[\theta^k(x-y)\right]-$

$$-\psi\left[\omega\left(\theta^k(x+y)\right)\right]+\psi\left[\omega\left(\theta^k(x-t)\right)\right]\Big\}$$

бу ерда $x=\omega(\xi)$ функция $x+\tau(x)=\xi$ тенгламанинг ечими,

$$\theta(\xi)=\omega(\xi)-\tau\left[\omega(\xi)\right],\ \theta^k(x)=\theta^{k-1}\cdot\theta\,,\ \theta^0(\xi)=\xi\,.$$

Кўрсатма. 320-масалага ўхшаш

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=\varphi(x), \\ f\left[x+\tau(x)\right]+g\left[x-\tau(x)\right]=\varphi(x) \end{cases}$$

кўринишидаги система келиб чиқади. $0<\tau'(x)<1$ бўлгани учун $0<\tau(x)<x$. Демак, $0<\xi=x+\tau(x)<2x\le 2$. $x+\tau(x)=\xi$ тенгламанинг ечими $x=\omega(\xi)$ бўлсин. У ҳолда $x-\tau(x)=\omega(\xi)-\tau\left[\omega(\xi)\right]=\theta(\xi)$ бўлиб, $0<\theta(\xi)<1$.

Буларни эътиборга олиб ва юқоридаги системадан $g(x)$ ни чиқарамиз:

$$f(\xi)=f\left[\theta(\xi)\right]-\varphi\left[\theta(\xi)\right]+\psi\left[\omega(\xi)\right].$$

Бу тенгламага итерация усулини қўллаб, $\lim\limits_{n\to\infty}\theta^n(\xi)=0$ эканлигини эътиборга олиб, топамиз:

$$f(\xi)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\psi\left[\omega\left(\theta^{k}(\xi)\right)\right]-\varphi\left[\theta^{n}(\xi)\right]\right\},$$

бу ерда $\theta^{0}(\xi)=\xi$, $\theta^{k}(\xi)=\theta^{k-1}(\theta(\xi))$.

324. $u(x,y)=x$. Ечимни $u(x,y)=f(x+y)+g(x-y)$ кўринишда кидиринг.

325. $u(x,y)=\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\psi(0)-\int\limits_{0}^{x-y}\varphi(t)dt$, $x\geq 0$.

326. $u(x,y)=\psi\left(\frac{x+y+1}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y+1}{2}\right)-\psi(1)+\int\limits_{x-y}^{1}\varphi(t)dt$, $x\leq 1$.

327. $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x-y}\psi(t/2)dt$. Тенгламанинг умумий ечими $u(x,t)=f(x+y)+g(x-y)$. Буни масала шартларига қўйсак, $f(2x)+g(0)=\varphi(x)$, $g'(2x)=\psi(x)$ тенгламага эга бўламиз.

328. Масала коррект қўйилган эмас. Масала факат $\varphi(x)=\psi(x)$ шарт бажарилгандагина ечимга эга. Бу шарт бажарилганда $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(x-y)$ кўринишдаги ечимларга эга, бу ерда $f(x)\in C^{2}$ –синфга тегишли ихтиёрий функция бўлиб, $f(0)=\varphi(0)$ шартни қаноатлантиради.

329. Масаланинг ечими

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau(x+y)+\tau(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(t)dt \qquad (1)$$

кўринишда кидирилади, бу ерда $\tau(x)$ - берилган, $\nu(x)$ - номаълим функция. (1) ни масаланинг иккинчи шартига қўйиб,

$$\left[a(x)-b(x)\right]\nu(x)=\left[\alpha(x)-\beta(x)\right]\tau'(x)-2\gamma(x) \qquad (2)$$

тенгламага келамиз. Бундан келиб чиқадики масала $a(x)\neq b(x)$ да ягона ечимга эга; $a(x)\equiv b(x)$, $\left[\alpha(x)-\beta(x)\right]\tau'(x)=2\gamma(x)$да чексиз кўп ечимга эга; $a(x)\equiv b(x)$, $\left[\alpha(x)-\beta(x)\right]\tau'(x)\not\equiv 2\gamma(x)$да ечимига эга эмас. Ечим мавжуд бўлганда у (1) кўринишга эга, бу ерда $\nu(x)$ - (2)дан топилади.

330. Кўрсатма. Бу масала 329-масалага ўхшаш ечилади. Масала $\alpha(x)\neq\beta(x)$, $\alpha(1)\beta(0)\neq 0$, $\alpha(1)\left[\gamma(0)-\alpha(0)\tau(0)\right]=\beta(0)\left[\gamma(1)-\alpha(1)\tau(1)\right]$

шартлар бажарилганда ягона ечимга эга; $\alpha(x)\equiv\beta(x)$да мас ечимга эга эмас ёки чексиз кўп ечимга эга бўлиши мумкин.

331. Ω соҳанинг ихтиёрий $M_0(x_0,y_0)$ нуқтасидан тенгла характеристикаларини ўтказиб, учларининг биттаси M_0 нуқта биттаси Ox ўқида, қолган иккитаси эса $AC\ (BC)$ характеристик ётувчи характеристик тўртбурчак ҳосил қилинади ва Айсгейрессо принципи қўлланилади.

332. Коррект бўлмайди. Чунки характеристик тўртбурчак икк томонида берилган тенглама ечимининг қиймати орқали ечимни қийматини тўртбурчакда тўла аниқланади. Шунинг учун ечи қиймати қолган томонларда берилиши шарт эмас.

333. Коррект бўлмайди. Масаланинг шартига асосан

$$u(x,y)\big|_{y=x}=\varphi(x),\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{y=x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{y=x}=\psi(x),$$

бу ерда $\varphi(x)$ $\psi(x)$ - берилган функциялар. Бу тенгликлар ва тенгламанинг умумий ечими $u(x,y)=f(x+y)+g(x-y)$ форму лага асосан $f(2x)+g(0)=\varphi(x)$, $\sqrt{2}f'(2x)=\psi(x)$ тенгликлар кели чиқади. Демак, $f(x)=\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-g(0)$, $f'(x)=\frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x}{2}\right)$. Буларди келиб чиқадики, масала $\varphi'(x)=\sqrt{2}\psi(x)$ тенглик бажарилгандаги масала чексиз кўп ечимга эга: $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)-g(0)+g(x-y)$, бу ерда $g(x)\in C^2$ - ихтиёрий функция.

334. Коши масаласи коррект қўйилган бўлиши учун бошланғич шартлар берилган $l:y=kx$ чизиқ $u_{xx}-u_{yy}=0$ тенглама харак теристикалари бўлган $x\mp y=C$ чизиқлар билан фақат биттада нуктада кесишиши зарур. Бунинг учун эса $k\neq\pm1$ бўлиши керак.

335. Маълумки Коши масаласида бошланғич шартлар бериладиган ёй ўрганилаётган тенглама характеристикалари билан фақат битта нуқтада кесишадиган бўлиши керак. Бу ерда $S=\{(x,y):x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ \ \varphi_0<\varphi<\varphi_1\}$ ёйлар маркази коор дината бошида ётувчи бирлик айлананинг ёйлари ва $u_{xx}-u_{yy}=0$ тенгламанинг характеристикалари эса $x\pm y=C$ тўғри чизиқлар иласидан иборатдир. Қуйидаги ҳолларда S ёйда Коши масаласи учун бошланғич шартлар бериш мумкин:

1) $\varphi_1 = -\pi/4$, $\varphi_2 = \pi/4$, 2) $\varphi_1 = \pi/4$, $\varphi_1 = 3\pi/4$,

3) $\varphi_1 = 3\pi/4$, $\varphi_1 = 5\pi/4$, 4) $\varphi_1 = 5\pi/4$, $\varphi_1 = 7\pi/4$.

336. $\xi = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$, $\eta = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$ алмаштириш ёрдамида берилган тенглама каноник кўринишга келтирилади ва умумий ечим топилади:

$$u(x,y) = f_1\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] + f_2\left[x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right], \qquad (3)$$

бу ерда $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ - икки марта дифференциалланувчи ихтиёрий функциялар. (3) ечимни бошланғич шартларга қаноатлантириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$\lim_{y \to 0} (-y)^{1/2} \left\{-f_1'\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] + f_2'\left[x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right]\right\} = \psi(x).$$

Бундан кўринадики $\psi(x) \not\equiv 0$ бўлмаса, иккинчи тенглик ўринли бўлмайди. Агар $\psi(x) \equiv 0$ бўлса, масала чексиз кўп ечимга эга:

$$u(x,y) = \varphi\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] - f_2\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] + f_2\left[x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right],$$

бу ерда $f_2(x) \in C^2$ - ихтиёрий функция.

337. $u(x,y) = \frac{1}{2}\tau\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] + \frac{1}{2}\tau\left[x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}}^{x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}} \nu(\xi)d\xi$,

тенгламанинг умумий ечимидан фойдаланилади.

338. $\xi = x + 2y^{1/2}$, $\eta = x - 2y^{1/2}$ алмаштириш ёрдамида берилган тенглама каноник кўринишга келтирилади ва умумий ечимини топамиз: $u(x,y) = f_1\left(x + 2y^{1/2}\right) + f_2\left(x - 2y^{1/2}\right)$. Умумий ечим ва масала шартларидан фойдаланиб, қўйилган масаланинг ечимини топамиз:

а) $u(x,y) = 0{,}5\tau\left(x + 2y^{1/2}\right) + 0{,}5\tau\left(x - 2y^{1/2}\right)$.

б) $u(x,y) = 0{,}5sin\left(x + 2y^{1/2}\right) + 0{,}5sin\left(x - 2y^{1/2}\right)$.

339. Қўйилган масала коррект бўлмайди, чунки масаланин ягоналиги бузилади. Қўйилган масала ечимга эга бўлиши учу қўйидаги шартни

$$x^{\frac{m}{m+2}}\psi'\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-2\beta}\nu(x),\quad 2\beta=\frac{m}{m+2} \qquad (4)$$

бажарилиши зарур ва етарлидир. Ҳақиқатан,

$u_{yy}-(-y)^{m}u_{xx}+\frac{m}{2}(-y)^{\frac{m}{2}-1}u_{x}=0$ тенгламанинг

$D=\left\{(x,y):\ \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}<x<1-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}};\ -\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}<y<0\right\}$ соха

$\lim\limits_{y\to 0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\nu(x),0<x<1$ шартни каноатлантирувчи ечим

қўйидаги формула оркали

$$u(x,y)=f\left(x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)-\frac{2y}{m+2}\int_{0}^{1}\nu\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right](1-t)^{-2\beta}dt \qquad (5)$$

ифодаланади. Бундан ва $u(x,y)|_{AC}=\varphi(x)$ га кўра f ни топамиз:

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\varphi(0)+\frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-\beta}\int_{0}^{x}\nu(\zeta)\zeta^{-2\beta}d\zeta. \qquad (6)$$

(6) формуладан (4) тенглик келиб чиқади. Бир жинсли Коши-Гур масаласининг ечими қуйидаги кўринишда

$$u(x,y)=f\left(x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)-f(0)$$

бўлади, бу ерда $f-$ ихтиёрий функция. Агар (4) шарт бажарилса, у ҳолда қўйилган масала ечими (5) формула орқали топилади.

340. Қўйилган Коши-Гурса масала коррект бўлиб, унинг ечими (5) формула орқали топилади, бунда

$$f(z)=\psi\left(\frac{z+1}{2}\right)-\left(\frac{m+2}{2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{\frac{2}{m+2}}\int_{0}^{1}\nu[1+t(z-1)](1-t)^{-2\beta}dt.$$

Кўрсатма. Бу масала 339-масалага ўхшаш ечилади.

341. $u(x,y)=4e^{-\frac{y}{2}-x}\left[1-e^{x}-e^{2x+\frac{y}{2}}\right]+sin(2x+y)-2x+4$.

342. $u(x,y)=e^{-y}[(x+y)(x-y-1)-1]-cos\,y+x+2$.

343. $u(x,y)=e^{y-x}(y-1)+1$. **344.** Тенгламанинг умумий ечими

$u(x,y)=f_1(x+y)+f_2(x-y)+f_3(y)$ эканлигидан фойдаланилади:

а) $\int\limits_{x-y}^{x+y}\varphi_2(t)dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x+y}dt\int\limits_0^t\varphi_3(z)dz+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x-y}dt\int\limits_0^t\varphi_3(z)dz-\frac{1}{2}\int\limits_0^y dt\int\limits_0^t\varphi_3(z)dz-$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^y dt\int\limits_0^t\varphi_3(z)dz.$$

б) Масала коррект қўйилган эмас. $\varphi''(x)\equiv\varphi_3(x)-f_3''(0)$ бўлгандагина масала ечими мавжуд бўлади:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\varphi_1(x+y)+\frac{1}{2}\varphi_1(x-y)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\varphi_1(t)dt+$$

$$+f_3(y)-f_3'(0)y-f_3(0),$$

бу ерда $f_3(y)$ - ихтиёрий функция.

145. Тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y)=f(y+ax)+\varphi(y+bx)+\psi(y+cx)$$

эканлигидан фойдаланилади:

$$u(x,y)=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\times$$

$$\times\left\{\varphi_1\left(x+\frac{1}{a}y\right)-(b+c)\int\limits_0^{x+y/a}\varphi_2(t)dt+bc\int\limits_0^{x+y/a}dt\int\limits_0^t\varphi_3(z)dz\right\}+$$

$$+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}\left\{\varphi_1\left(x+\frac{1}{b}y\right)-(a+c)\int\limits_0^{x+y/b}\varphi_2(t)dt+ac\int\limits_0^{x+y/b}dt\int\limits_0^t\varphi_3(z)dz\right\}+$$

$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\left\{\varphi_1\left(x+\frac{1}{c}y\right)-(a+b)\int\limits_0^{x+y/c}\varphi_2(t)dt+ab\int\limits_0^{x+y/c}dt\int\limits_0^t\varphi_3(z)dz\right\}.$$

146. Аввал $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ алмаштириш ёрдамида тенглама соддалаштирилади ва умумий ечими топилади:

$$u(x,y)=(x+y)\varphi(x-y)+\varphi_1(x-y)+(x-y)\psi(x+y)+\psi_1(x+y).$$

Сўнгра масалалар ечими топилади:

а) $u(x,y)=\frac{1}{2}\tau(x+y)+\frac{1}{2}\tau(x-y)+\frac{1}{4}y\tau'(x-y)-\frac{1}{4}y\tau'(x+y).$

б) $u(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)\tau_3\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{1}{2}(x-y)\tau_4\left(\frac{x+y}{2}\right)+\tau\left(\frac{x-y}{2}\right)+$

$$+\tau_1\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(x^2-y^2\right)\tau_4(0)-\frac{1}{2}(x+y)\tau_2'(0)-\frac{1}{2}(x-y)\tau_4(0)-\tau_1(0).$$

4-§

347. Кўрсатма. $\upsilon = e^{-\mu t} u(x,t)$ алмаштириш ёрдамида те раф тенгламасига келтирилади. Масаланинг ечими қуйидагича

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} +$$

$$+\frac{ct}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left\{ I_1\left(c\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) \Big/ \left(c\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) \right\}\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I_0\left(c\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right)\psi(\xi)d\xi$$ бўлади,

бу ерда $I_0(z)$ ва $I_1(z)$ мавҳум аргументли нолинчи ва бири тартибли Бессел функциялари [2], [12]:

$$I_0(z) = J_0(iz) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad I_1(z) = -i\cdot J_1(iz) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}$$

Қўйилган масаланинг ечимини қуйидаги

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}U(\xi,t)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi$$

кўринишда изланади ва унинг ечими ушбу кўринишда топилади

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}\cdot cos\, t\sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)\frac{sin\, t\sqrt{a^2\lambda^2-c^2}}{\sqrt{a^2\lambda^2-c^2}}\cdot e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi =$$

$$= u_1(x,t) + u_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t u_1(x,\tau)d\tau + u_2(x,t).$$

Ечиш давомида цилиндрик функцияларнинг қуйидаги хосса ридан фойдаланиб,

$$\frac{sin\ r}{r} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} J_0(rsin\varphi\cdot sin\theta)e^{i\, rcos\varphi\cdot cos\theta}sin\theta d\theta, \quad rcos\varphi = -a\lambda t, \quad rsin\varphi = u$$

$r^2 = t^2(a^2\lambda^2 - c^2)$ алмаштириш ёрдамида қуйидаги кўрини келтирилади.

$$\frac{\sin t\sqrt{a^2\lambda^2-c^2}}{\sqrt{a^2\lambda^2-c^2}}=\frac{1}{2}\int_{-at}^{at}J_0\left(ict\sqrt{1-\frac{\beta^2}{a^2t^2}}\right)e^{-i\lambda\beta}\frac{d\beta}{dt}=$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right)e^{-i\lambda\beta}\frac{d\beta}{t}.$$

Сўнг

$$\Phi(\beta)=\begin{cases}0, & \text{агар } \left|\frac{\beta}{a}\right|>|t|,\\ I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right), & \text{агар } \left|\frac{\beta}{a}\right|<|t|\end{cases}$$

ёрдамчи функция киритилади ва

$$\int_{-at}^{at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right)e^{i\lambda(x-\beta)}d\beta=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\beta)e^{i\lambda(x-\beta)}d\beta$$

ифодаланилади. Ҳамда масаланинг ечими қуйидаги кўринишга келтирилади

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi\right].$$

Бу эса масаланинг ечимидир.

148. Кўрсатма. $u=e^{\mu_1x+\mu_2t}v$ алмаштириш ёрдамида ечилади. Масаланинг ечими:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi.$$

149. Кўрсатма. Фурьенинг косинус алмаштириш формуласидан фойдаланиб ечилади. Масаланинг ечими:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(|x-at|)}{2}+\frac{1}{2a}\left\{\int_0^{x+at}\psi(z)dz-sign(x-at)\int_0^{|x-at|}\psi(z)dz\right\}.$$

350. $$u(x,t)=\begin{cases}0, & агар \quad 0<t<\dfrac{x}{a}\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & агар \quad t>\dfrac{x}{a}\end{cases}.$$

Кўрсатма. Фурьенинг синус алмаштириш формуласи фойдаланиб ечилади ва масала қуйидаги масалага келтирилади:

$$\frac{\partial^2 U_s(\lambda,t)}{\partial t^2}+a^2\lambda^2 U_s(\lambda,t)=a^2\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu(t)$$

$$U_s(\lambda,0)=\frac{dU_s(\lambda,0)}{dt}=0\ .$$

Унинг ечими

$$U_s(\lambda,t)=a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^t\mu(t)\sin\ a\lambda(t-\tau)dt$$

кўринишда бўлиб, қўйилган масаланинг ечими эса

$$u(x,t)=\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_0^t\mu(\tau)\sin\lambda x\cdot\sin a\lambda(t-\tau)d\tau$$

кўринишда бўлади. Сўнг

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\cdot\sin\ a\lambda(t-\tau)d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda[x-a(t-\tau)]d\lambda-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda[x+a(t-\tau)]d\lambda=\delta(x-a(t-\tau))-\delta(x+a(t-\tau))$$

формуладан фойдаланамиз, бу ерда $\delta(x)-$ Диракнинг дел функцияси:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix\xi}d\xi.$$

Бундан ва охирги формуладан $0\le\tau<t$ бўлгани учун $x>0$ $\delta(x+a(t-\tau))\equiv0$ бўлади. Демак,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\cdot\sin\ a\lambda(t-\tau)d\lambda=\delta(x-a(t-\tau)) \qquad агар \qquad 0<\tau<t,\ \ 0<x<$$

Шундай қилиб,

$$u(x,t)=a\int_0^t\mu(\tau)\delta(x-a(t-\tau))d\tau=\int_0^{at}\mu\left(t-\frac{s}{a}\right)\delta(x-s)ds=$$

$$=\begin{cases} 0, & агар \quad 0<t<\dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & агар \quad t>\dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

351. Кўрсатма. Фурьенинг косинус алмаштириш формуласидан фойдаланиб ечилади. Масаланинг ечими:

$$u(x,t)=-a\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\nu(z)dz.$$

352. $u(x,t)=-\int\limits_0^{t-x}\nu(z)I_0\left[c\sqrt{(t-z)^2-x^2}\right]dz.$

Кўрсатма. Қўйилган масаланинг ечимини

$$u(x,t)=\int\limits_0^{t-x}\varphi(z)I_0\left[c\sqrt{(t-z)^2-x^2}\right]dz$$

кўринишда изланади, бу ерда $\varphi(z)-$ номаълум функция бўлиб, чегаравий шарт асосида топилади.

353. $u(x,t)=\mu(t-x)-cx\int\limits_0^{t-x}\mu(z)\dfrac{I_1\left[c\sqrt{(t-z)^2-x^2}\right]}{\sqrt{(t-z)^2-x^2}}dz.$

Кўрсатма. Қўйилган масала 352-масаланинг ечимидан фойдаланиб ечилади.

354. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(\lambda)\overline{g}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(s)e^{i\lambda s}ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(s)ds\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(\lambda)e^{i\lambda(s-x)}d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(s-x)g(s)ds.$$

355. $$\int\limits_0^{+\infty}\overline{f}_c(\lambda)\overline{g}_c(\lambda)\cdot cos\ \lambda x d\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}\overline{f}_c(\lambda)\cdot cos\ \lambda x d\lambda\int\limits_0^{+\infty}g(s)cos\lambda s ds=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}g(s)ds\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}\overline{f}_c(\lambda)[cos\ \lambda(x-s)+cos\ \lambda(x+s)]d\lambda=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}g(s)\left[f(|s-x|)+f(s+x)\right]ds.$$

356. 355-масалага ўхшаш ечилади.

357. $A=1$, $\omega=\pm\sqrt{2}$. $u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[e^{-(x+t)^2}+e^{-(x-t)^2}\right], & x\geq t,\\ \frac{1}{2}\left[e^{-(x+t)^2}-e^{-(x-t)^2}\right]+cos\sqrt{2}(t-x), & 0\leq x<t.\end{cases}$

Кўрсатма. Масала ечимини $u(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$ кўрини қидирамиз. Бошланғич шартлардан келиб чиқадики, $x>0$ $f(x)+g(x)+Ae^{-x^2}$, $f'(x)-g'(x)=0$ тенгликлар ўринли. Бу ик тенгликдан $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x>0$ учун топилади:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[Ae^{-x^2}+C\right],\ g(x)=\frac{1}{2}\left[Ae^{-x^2}-C\right],\ x>0,$$

бу ерда $C=const$ - ихтиёрий сон.

Демак, $x\geq t$ да ечим қуйидаги кўринишга эга:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[Ae^{-(x-t)^2}+C\right]+\frac{1}{2}\left[Ae^{-(x-t)^2}-C\right]=\frac{A}{2}\left[e^{-(x+t)^2}+e^{-(x+t)^2}\right].$$

Энди $0\leq x<t$ да $g(x)$ функцияни топамиз. Чегаравий шартга асос

$$u\big|_{x=0}=f(t)+g(-t)=cos\,\omega t,\quad t>0,$$

яъни $g(\xi)=cos\,\omega\xi-f(-\xi)$, $\xi<0$. Буни ва $f(x)$ нинг $x>0$ да ифодасини эътиборга олсак,

$$g(\xi)=-\frac{1}{2}\left[Ae^{-\xi^2}+C\right]+cos\,\omega\xi,\ \xi<0.$$

Демак, $0\leq x<t$ да ечим қуйидаги кўринишга эга:

$$u(x,y)=0{,}5\left[Ae^{-(x+t)^2}+C\right]-0{,}5\left[Ae^{-(x-t)^2}+C\right]+cos\,\omega(x-t),\,0<x<t,$$

яъни $u(x,y)=\frac{A}{2}\left[e^{-(x+t)^2}-e^{-(x-t)^2}\right]+cos\,\omega(x-t)$, $0<x<t$. $x=t$ да u,

u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt} функциялар узлуксиз бўлиши керак:

$$u(x,x)=\frac{A}{2}\left[e^{-4x^2}+1\right]=\frac{A}{2}\left[e^{-4x^2}-1\right]+cos\,0,$$

$$u_x(x,x)=A\left[-2xe^{-4x^2}-0\right]=A\left[-2xe^{-4x^2}+0\right]-\omega\,sin\,0,$$

$$u_t(x,x)=A\left[-2xe^{-4x^2}+0\right]=A\left[-2xe^{-4x^2}-0\right]+\omega\,sin\,0,$$

$$u_{xx}(x,x)=-A\left(e^{-4x^2}-8x^2e^{-4x^2}+1-0\right)=-A\left(e^{-4x^2}-8x^2e^{-4x^2}-1+0\right)-\omega^2cos\,0,$$

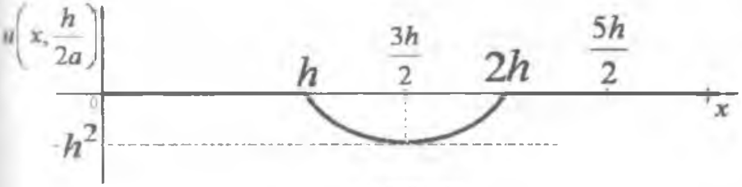
$$u_{tt}(x,x)=A\left(-e^{-4x^2}+8x^2e^{-4x^2}-1-0\right)=A\left(-e^{-4x^2}+8x^2e^{-4x^2}+1-0\right)-\omega^2\cos 0.$$

Бу тенгликлардан келиб чиқадики, $A=1$, $\omega^2=2$. Демак, $A=1$, $\omega=\pm\sqrt{2}$. Буларни ечимнинг $x\geq t$ ва $0<x<t$ даги формулаларига қўйиб, масала жавобига эга бўламиз.

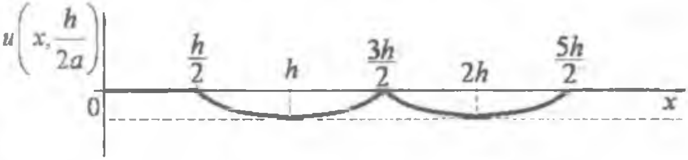
58. $u(x,0)=\begin{cases}0, & x\notin[h,2h];\\ 4(x-h)(x-2h) & x\in[h,2h].\end{cases}$

$$u\left(x,\frac{h}{a}\right)=\begin{cases}2x(x-h), & 0\leq x\leq h;\\ 0, & h\leq x\leq 2h;\\ 2(x-2h)(x-3h), & 2h\leq x\leq 3h;\\ 0, & 3h\leq x.\end{cases}$$

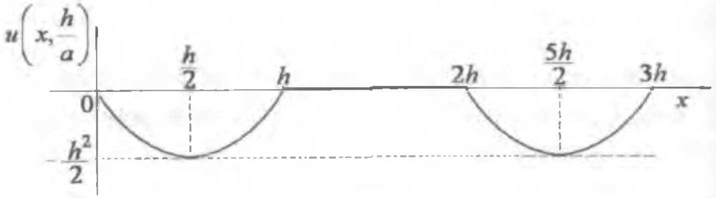
$$u\left(x,\frac{h}{2a}\right)=\begin{cases}0, & 0\leq x\leq \frac{h}{2};\\ 2\left(x-\frac{h}{2}\right)\left(x-\frac{3h}{2}\right), & \frac{h}{2}\leq x\leq\frac{3h}{2};\\ 2\left(x-\frac{3h}{2}\right)\left(x-\frac{5h}{2}\right), & \frac{3h}{2}\leq x\leq\frac{5h}{2};\\ 0. & \frac{5h}{2}\leq x.\end{cases}$$



1-чизма



2-чизма



3-чизма

359. Қуйидаги ёрдамчи масалани қарайлик:

$$V_{tt}=a^2V_{xx},\ -\infty<x<+\infty,\ t>0$$

$$V(x,0)=\Phi(x),\ V_t(x,0)=\Psi(x),\ -\infty<x<+\infty,$$

бу ерда $\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0,\\ \varphi(-x), & x<0,\end{cases}$ $\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0,\\ \psi(-x), & x<0.\end{cases}$

Бу масаланинг ечими Даламбер формуласи билан аниқланади

$$V(x,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi. \tag{1}$$

$\Phi(x)$ ва $\Psi(x)$ функциялар жуфт бўлгани учун $V_x\big|_{x=0}=0$ бўлади. Бундан ташқари $x>0$ бўлса, $V(x,0)=\Phi(x)=\varphi(x)$, $V_t(x,0)=\Psi(x)=\psi(x)$. Шунинг учун $V(x,t)$ функция $x\geq 0$, $t\geq 0$ да берилган масаланинг ечими бўлади. У ҳолда $x\geq at$ бўлса,

$$u(x,t)=V(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

бўлади. Агар $0\leq x\leq at$ бўлса,

$$u(x,t)=V(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)\right]+$$

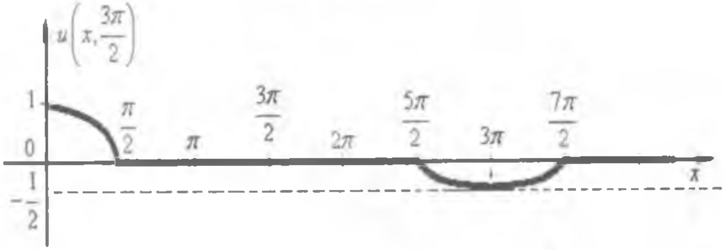
$$+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\psi(\xi)d\xi-\int_{at-x}^{0}\psi(\xi)d\xi\right]$$

бўлади. Демак,

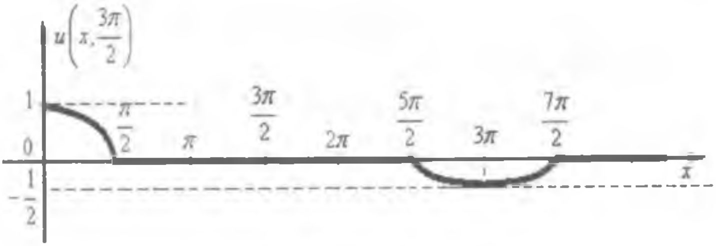
$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & x\geq at;\\ \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{at-x}\psi(\xi)d\xi, & 0<x<at.\end{cases}$$

360. $$u\left(x,\frac{3\pi}{2}\right)=\begin{cases} \cos x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2};\\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{5\pi}{2};\\ -\frac{1}{2}\cos x, & \frac{5\pi}{2}\le x\le\frac{7\pi}{2};\\ 0, & \frac{7\pi}{2}\le x. \end{cases}$$

$$u\left(x,\frac{5\pi}{2}\right)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le\frac{\pi}{2};\\ -\frac{1}{2}\cos x, & \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2};\\ 0, & \frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{7\pi}{2};\\ \frac{1}{2}\cos x, & \frac{7\pi}{2}\le x\le\frac{9\pi}{2};\\ 0, & \frac{9\pi}{2}\le x. \end{cases}$$



4-чизма



5-чизма

361. Торнинг тебранишини аниқловчи функцияни $u(x,t)$ билан белгилайлик. Торнинг $x=0$ нуқтадаги учи эркин бўлгани учун $u_x\big|_{x=0}=0$ чегаравий шарт ўринли бўлади. Шунинг учун II бобнинг 5-§ даги 3-масала жавобига асосан,

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right], & x>at,\\ \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)\right], & 0<x<at.\end{cases}$$

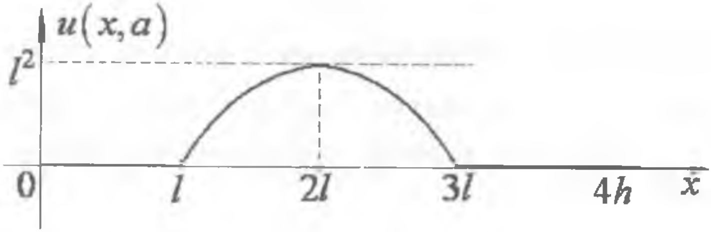
1) $t=t_0=0$ да $u(x,0)=\begin{cases}0, & x\notin[l,3l];\\ (l-x)(x-3l), & x\in[l,3l]\end{cases}$ бўлади;

2) $t=t_2=\dfrac{l}{2a}$ бўлса, $u\left(x,\dfrac{l}{2a}\right)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+\frac{l}{2}\right)+\varphi\left(x-\frac{l}{2}\right)\right], & x\geq\frac{l}{2};\\ \frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+\frac{l}{2}\right)+\varphi\left(\frac{l}{2}-x\right)\right], & 0<x<\frac{l}{2}\end{array}\right|=$

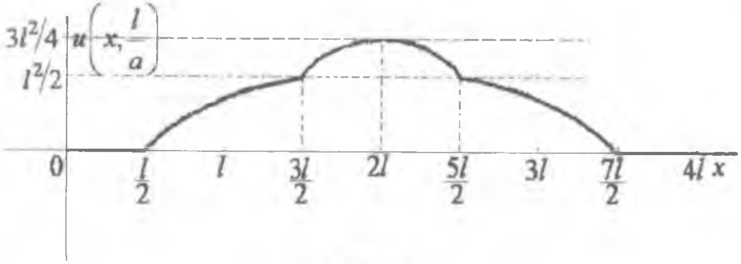
$$=\begin{cases}0, & 0<x<\frac{l}{2};\\ \frac{1}{2}\left[l-\left(x+\frac{l}{2}\right)\right]\left[x+\frac{l}{2}-3l\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right)\left(x-\frac{5l}{2}\right), & \frac{l}{2}\leq x\leq\frac{3l}{2};\\ \frac{1}{2}\left[l-\left(x+\frac{l}{2}\right)\right]\left[x+\frac{l}{2}-3l\right]+\frac{1}{2}\left[l-\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\left[x-\frac{l}{2}-3l\right]= & \\ =\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right)\left(x-\frac{5l}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3l}{2}-x\right)\left(x-\frac{7l}{2}\right)=-x^2+4lx-\frac{13}{4}l^2. & \frac{3l}{2}\leq x\leq\frac{5l}{2};\\ \frac{1}{2}\left[l-\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]\left[x-\frac{l}{2}-3l\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{3l}{2}-x\right)\left(x-\frac{7l}{2}\right), & \frac{5l}{2}\leq x\leq\frac{7l}{2};\\ 0, & \frac{7l}{2}\leq x;\end{cases}$$

3) $t=t_2=\dfrac{l}{a}$ бўлса, $u\left(x,\dfrac{l}{a}\right)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2}\left[\varphi(x+l)+\varphi(x-l)\right], & x\geq l;\\ \frac{1}{2}\left[\varphi(x+l)+\varphi(l-x)\right], & 0<x<l\end{array}\right|=$

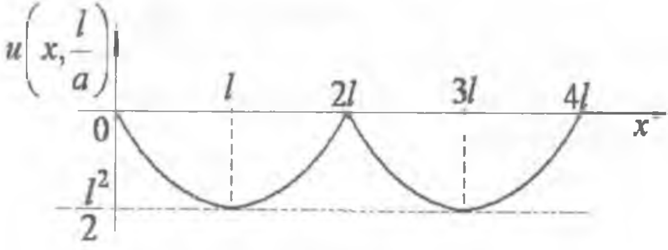
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[l-(x+l)\right]\left[3l-(x+l)\right]=\frac{1}{2}x(x-2l), & 0\le x\le 2l;\\ \frac{1}{2}\left[l-(x-l)\right]\left[3l-(x-l)\right]=\frac{1}{2}(2l-x)(4l-x), & 2l\le x\le 4l;\\ 0, & \frac{7l}{2}\le x.\end{cases}$$



6-чизма



7-чизма



8-чизма

162. Масала ечимини $u(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$ кўринишда қидирамиз. Агар $x\geq at$ бўлса, бошланғич шартлардан келиб чиқадики,

$f(x+at)\equiv 0$, $g(x-at)\equiv 0$. Агар $0\le x<at$ бўлса, $f(x+at)=0$ бўлиб, ечим $u(x,t)=g(x-at)$ кўринишни олади. Бу ерда $g(x)$ функцияни чегаравий шартдан фойдаланиб топамиз:

$$u_x\big|_{x=0}=g'(x-at)\big|_{x=0}=g'(-at)=v(t),\ t>0,\ \text{яъни}$$

$$g'(\xi)=v\left(-\frac{\xi}{a}\right),\ \xi<0.$$

Охирги тенгламани интеграллаб, $g(\xi)=g(0)+\int\limits_0^{\xi}v(-z/a)dz$ га эга бўламиз. $g(0)=0$ эканлигини эътиборга олиб ва интегралда $s=-z/a$ алмаштириш бажариб, $g(\xi)$ функцияни бир қийматини топамиз:

$$g(\xi)=-a\int\limits_0^{-\xi/a}v(s)ds,\quad \xi<0.$$

Демак,

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & x\ge at,\\ -a\int\limits_0^{t-x/a}v(s)ds, & 0\le x<at.\end{cases}$$

363.

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & x\ge at,\\ -ae^{h(x-at)}\int\limits_0^{t-x/a}e^{ahs}\chi(s)ds, & 0\le x<at.\end{cases}$$

Кўрсатма. 362-масаладаги каби ечимни $u(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$ кўринишда қидириб, $x\ge at$ да бошланғич шартлар ёрдамида $f(x+at)\equiv g(x-at)\equiv 0$ эканини топамиз. $0\le x<at$ да $g(x-at)$ функцияни топиш учун чегаравий шартдан фойдаланамиз:

$$(u_x-hu)\big|_{x=0}=\left[g'(x-at)-hg(x-at)\right]\big|_{x=0}=\chi(t),\ t>0,$$

яъни

$$g'(-at)-hg(-at)=\chi(t),\ \ t>0,$$

ёки

$$g'(\xi)-hg(\xi)=\chi\left(-\frac{\xi}{a}\right),\ \ \xi<0.$$

Бу дифференциал тенгламани $g(0)=0$ шартда ечиб, $g(\xi)$ функцияни топамиз:

$$g(\xi)=-ae^{h\xi}\int\limits_0^{-\xi/a} e^{ahs}\chi(s)ds\,,\ \xi\le 0.$$

Юқоридагиларга асосан

$$u(x,t)=\begin{cases} 0, & x\ge at;\\ g(x-at), & 0\le x<at.\end{cases}$$

Бу ерга $g(x-at)$ функция ифодасини қўйиб, масала жавобига эга бўламиз.

364. Ечимни $u(x,t)=f(x+t/2)+g(x-t/2)$ кўринишда қидирамиз. Бошланғич шартлардан фойдаланиб $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни $x\ge 0$ да топамиз:

$$f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+C\,,\quad g(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-C\,,\quad x\ge 0,$$

бу ерда C - ихтиёрий сон.

Буларни эътиборга олсак,

$$u(x,t)=\begin{cases} 0, & x\ge at;\\ g(x-at), & 0\le x<at.\end{cases}\tag{2}$$

келиб чиқади.

$g(x-at)$ функцияни $0\le x<at$да топиш учун чегаравий шартдан фойдаланамиз:

$$\frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{1}{2}t\right)+g'\left(-\frac{1}{2}t\right)-\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}t\right)-C-g\left(-\frac{1}{2}t\right)=\alpha(t)\,,\ t>0,$$

ёки

$$g'(\xi)-g(\xi)=\alpha(-2\xi)-\frac{1}{2}\varphi'(-\xi)+\frac{1}{2}\varphi(-\xi)\,,\ \xi<0.\tag{3}$$

Ечимнинг $x=t/2$ да узлуксизлигидан келиб чиқадики, $C+g(0)=\varphi(0)/2$. Бу ерда $C=\varphi(0)/2$ десак, $g(0)=0$ бўлади.

(3) тенгламанинг $g(0)=0$ шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуд, ягона ва

$$g(\xi)=-\frac{1}{2}e^{\xi}\int\limits_0^{-2\xi} e^{\frac{1}{2}z}\left[\alpha(z)-\frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{1}{2}z\right)+\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}z\right)+\frac{1}{2}\varphi(0)\right]dz\,,\xi<0$$

кўринишда аниқланади. Топилган $g(\xi)$ ва $C=\varphi(0)/2$ни (2)га қўйиб, масала ечимига эга бўламиз:

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+\frac{1}{2}t\right)+\varphi\left(x-\frac{1}{2}t\right)\right], & x\geq\frac{1}{2}t;\\ \frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+\frac{1}{2}t\right)+\varphi(0)\right]-\frac{1}{2}e^{x-t/2}\times & \\ \times\int\limits_0^{t-2x}e^{\frac{1}{2}z}\left[\alpha(z)-\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}z\right)+\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}z\right)+\frac{1}{2}\varphi(0)\right]dz, & 0\leq x\leq\frac{1}{2}t.\end{cases}$$

365. Масала ечимини $u(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$ кўринишд қидирамиз. Бошланғич шартлардан фойдаланиб, $f(x)$ ва $g(x)$ни топамиз:

$$f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+C,\;\; g(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-C,\; x>0.$$

Булар ёрдамида масала ечимини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right], & x\geq t,\\ \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+C+g(x-t)\right], & x<t.\end{cases}$$

$g(x-t)$ функцияни $x<t$ да топиш учун чегаравий шартдан фойдаланамиз:

$$\left[\frac{1}{2}\varphi'(t)-g'(-t)\right]+\lambda\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi'(t)+g'(-t)\right]=0,\; t>0,$$

ёки

$$(\lambda-1)g'(-t)=\frac{1}{2}(1+\lambda)\varphi'(t),\; t>0.$$

Демак,

$$(\lambda-1)g'(\xi)=\frac{1}{2}(1+\lambda)\varphi'(-\xi),\;\xi<0. \qquad (4)$$

Бу ерда икки ҳолни қараймиз:

1) $\lambda=1$. У ҳолда $\varphi'(-\xi)=0$; $\varphi(\xi)=K=const$.

Бунда масала ечими ушбу кўринишга эга:

$$u(x,t)=\begin{cases}K, & x\geq t,\\ \frac{1}{2}K+C+g(x-t), & x<t.\end{cases}$$

Ечим ва унинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилалари $x=t$ да узлуксиз бўлгани учун

$$K=\frac{1}{2}K+C+g(0),\; 0=0+g'(0),\; 0=0+g''(0) \qquad (5)$$

тенгликлар ўринли бўлиши керак. Бу ерда умумийликни чегараламаган ҳолда $g(x-t)$ функция сифатида $\omega(0)=0$ шартни қаноатлантирувчи $\forall\omega(t-x)\in C^2[0,+\infty)$ функцияни олиш мумкин. У ҳолда (5) дан $C=K/2$, $\omega'(0)=\omega''(0)=0$ келиб чиқади.

Демак,

$$u(x,t)=\begin{cases} K, & x\geq t, \\ K+\omega(t-x), & x<t, \end{cases}$$

бу ерда $\forall\omega(x)\in C^2[0,+\infty)$, $\omega(0)=\omega'(0)=\omega''(0)=0$.

2) $\lambda\neq 1$. У холда (4) дан

$$g'(\xi)=\frac{1}{2}\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\varphi'(-\xi),\quad \xi<0$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани интеграллаб топамиз:

$$g(\xi)=\frac{1}{2}\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\varphi(-\xi)+C_1,\, \xi<0.$$

Демак, бунда ечим қуйидаги кўринишга эга:

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right], & x\geq t; \\ \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\varphi(t-x)\right]+C+C_1, & x<t. \end{cases}$$

$u(x,t)$ ечим ва унинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилалари $x=t$ да узлуксизлигидан

$$\varphi(0)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)\varphi(0)+C+C_1,\ \varphi'(0)=\frac{1}{2}\varphi'(0)\left[1-\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right],$$

$$\varphi''(0)=\frac{1}{2}\varphi''(0)\left[1+\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right]$$

тенгликлар келиб чиқади. Бу тенгликлардан қуйидагини топамиз:

$$C+C_1=\frac{1}{1-\lambda}\varphi(0),\ \lambda\varphi'(0)=0,\ \varphi''(0)=0.$$

Демак, $\lambda\neq 1$ бўлганда $\lambda\varphi'(0)=0$, $\varphi''(0)=0$ шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\varphi(x)\in C^2[0,+\infty)$ функция учун масала ечими мавжуд ва у қуйидаги формула билан аниқланади:

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right], & x\geq t;\\ \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\varphi(t-x)+\frac{2}{1-\lambda}\varphi(0)\right], & x<t.\end{cases}$$

366. Маълумки бу масаланинг ечими

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dzd\tau$$

формула билан аниқланади.

Бу формуладан бевосита келиб чиқадики, агар

а) $f(x,t)$ функция $x=0$ нуқтага нисбатан тоқ бўлса,

$$u(0,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)}f(z,\tau)dz=0.$$

б) $f(x,t)$ функция $x=0$ нуқтага нисбатан жуфт бўлса,

$$u_x(0,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left\{f\left[x+a(t-\tau),\tau\right]-f\left[x+a(t-\tau),\tau\right]\right\}\Big|_{x=0}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t\left\{f\left[a(t-\tau),\tau\right]-f\left[a(t-\tau),\tau\right]\right\}d\tau=0.$$

367. Масалани ечиш учун $f(x,t)$ функцияни $x=0$ нуқтага нисбатан $x<0$ га тоқ давом эттирамиз ва қуйидаги функцияни киритамиз:

$$F(x,t)=\begin{cases}f(x,t), & x>0,\\ -f(-x,t), & x<0.\end{cases}$$

Бу функция ёрдамида қўйилган ушбу

$$V_{tt}=a^2V_{xx}+F(x,t),\ -\infty<x<+\infty,\ t>0;$$

$$V(x,0)=V_t(x,0)=0,\ -\infty<x<+\infty$$

масала ягона ечимга эга ва унинг ечими қуйидаги кўринишга эга

$$V(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(z,\tau)dzd\tau.$$

$F(x,t)$ функция $x=0$ нуқтага нисбатан тоқ бўлгани учун 366-масалага асосан, $V(0,t)=0$ ва $x\geq 0$да $V(0,t)=V_t(x,0)=0$ Демак, $x\geq 0$, $t\geq 0$да $V(x,t)$ функция масала ечимини беради, яъни $u(x,t)=V(x,t)$.

Бу ечим кўринишини ўзгартирамиз:

1) $x>0$, $x-at>0$ $(t<x/a)$. У ҳолда, $x-a(t-\tau)=x-at+a\tau>0$. Шунинг учун

$$u(x,t)=V(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\,dzd\tau\,.$$

2) $x>0$, $x-at<0$ $(t>x/a)$. У ҳолда

$$x-a(t-\tau)=x-at+a\tau=\begin{cases}<0, & 0<\tau<t-\dfrac{x}{a},\\ >0, & \tau>t-\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Шунинг учун τ бўйича $(0,t)$ оралиқда олинган интегрални $(0,t-x/a)$ ва $(t-x/a,t)$ оралиқлар бўйича интегралларга ажратиб топамиз:

$$u(x,t)=V(x,t)=\frac{1}{2a}\left\{\int_0^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(z,\tau)dz+\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(z,\tau)dz\right\}=$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\int_0^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{0}\left[-f(z,\tau)\right]dz+\int_0^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int_0^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dz+\right.$$

$$\left.\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dz\right\}=$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int_{a(t-\tau)-x}^{a(t-\tau)+x}f(z,\tau)dz+\frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dz\,.$$

Демак,

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dz, & x>0,\, t<\dfrac{x}{a};\\ \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int_{a(t-\tau)-x}^{a(t-\tau)+x}f(z,\tau)dz+\dfrac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dz, & x>0,\, t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

368. $f(x,t)$ функцияни $x=0$ нуқтага нисбатан $x<0$ га жуфт давом эттириб, $F(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & x>0; \\ f(-x,t), & x<0 \end{cases}$ функцияни ва у ёрдамида қўйилган

$$V_{tt}=a^2V_{xx}+F(x,t), \quad -\infty<x<+\infty, \quad t>0;$$
$$V(x,0)=V_t(x,0)=0, \quad -\infty<x<+\infty$$

масалани қараймиз. Сўнгра 366-масаладан фойдаланиб ва 367 масаладаги каби мулоҳазаларни юритиб, масала ечимини топами

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz, & x>0,\, t<\frac{x}{a}; \\ \frac{1}{2a}\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\left[\int\limits_0^{a(t-\tau)-x}+\int\limits_0^{a(t-\tau)+x}\right]f(z,\tau)dzd\tau+ & \\ +\frac{1}{2a}\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dzd\tau, & x>0,\, t>\frac{x}{a}. \end{cases}$$

369. Масала ечими $u(x,t)=\upsilon(x,t)+\omega(x,t)$ кўринишда қидирилади, бу ерда $\upsilon(x,t)$ ва $\omega(x,t)$ - мос равишда 367-масала ва $\left\{(2.88),(2.89),u\big|_{x=0}=0\right\}$ масалаларнинг ечимидир.

370. Масала ечими 368- ва 359- масалалар ечимининг йиғиндиси шаклида қидирилади.

371. Ечимни $u(x,t)=\upsilon(x,t)+\omega(x,t)$ кўринишда қидирилади, бу ерда $\upsilon(x,t)$ ва $\omega(x,t)$ - мос равишда 367-масала ва {(2.88), (2.89), (2.90$_1$)} масалаларнинг ечими.

372. Ечим 358-, 362-, 368 – масалалар ечимининг йиғиндиси сифатида қидирилади.

6-§

373. $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x+at)+\tilde{\varphi}(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\bar{\psi}(\xi)d\xi$, бу ерда $\tilde{\varphi}(x)$ ва $\bar{\psi}(x)$ жуфт функциялар бўлиб, уларнинг даври $T=2l$ тенг хамда $0\le x\le l$ ораликда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар билан устма-уст тушади.

374. $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x+at)+\tilde{\varphi}(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}(\xi)d\xi$, бу ерда $\tilde{\varphi}(x)$ ва $\tilde{\psi}(x)$ ток функциялар бўлиб, уларнинг даври $T=2l$ тенг ҳамда $0\leq x\leq l$ ораликда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар билан устма-уст тушади ва $\varphi(x-l)$, $\psi(x-l)$ - жуфт функциялар.

375. $$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{ct}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)\psi(\xi)d\xi, \qquad \textbf{(A)}$$

бу ерда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $x=0$ га нисбатан тоқ давом эттирилган функциялар бўлиб, уларнинг даври $T=2l$ тенг. Бунда $I_0(z)$ ва $I_1(z)$ мавҳум аргументли нолинчи ва биринчи тартибли Бессел функциялари [2], [12]:

$$I_0(z)=J_0(iz)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k},$$

$$I_1(z)=-i\cdot J_1(iz)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}.$$

376. Масаланинг ечими (А) формула оркали топилиб, ундаги $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $x=0$га нисбатан ток, $x=l$га нисбатан эса жуфт давом эттирилган функциялар бўлиб, уларнинг даври $T = 4l$ тенг.

377. Масаланинг ечими (А) формула оркали топилиб, ундаги $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $x=0$ ва $x=l$га нисбатан эса жуфт давом эттирилган функциялар бўлиб, уларнинг даври $T=2l$ тенг.

378. $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[f\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2nl}{a}\right)-f\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(n+1)l}{a}\right)\right]$, бу ерда $f(x)=0$ агар $x\leq 0$ бўлса; $f(x)=-a\int\limits_0^x g(\tau)d\tau$ агар $x>0$ бўлса.

379. $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\bar{g}\left(t-\frac{x}{a}-\frac{2nl}{a}\right)-\bar{g}\left(t+\frac{x}{a}-\frac{2(n+1)l}{a}\right)\right]$, бу ерда $\bar{g}(t)=0$ агар $t<0$ бўлса; $\bar{g}(t)=g(t)$ агар $t\geq 0$ бўлса.

380. Ечим 373 – масала ечимидан топилади, агар $\bar{\varphi}(x)=\cos x$ ва $\bar{\psi}(x)=\cos x$ бўлса.

7-§

381. Масала ечимини

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (1)$$

катор кўринишида излаймиз. Бу қаторнинг коэффициентлари

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{4h}{l^2}\left(lx-x^2\right)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad b_k=\frac{l}{2}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

тенгликлар орқали топилади, яъни

$$a_k=\frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right],\ b_k=0,\ k=1,2,...$$

a_k ва b_k коэффициентларнинг топилган қийматларини (1) қаторга қўйиб, масала ечимини ҳосил қиламиз:

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16h}{k^3\pi^3}[1-(-1)^k]\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Агар $k=2n$ бўлса, $1-(-1)^k=0$, агар $k=2n+1$ бўлса, $1-(-1)^k=2$, бўлганлиги учун ечимни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$U(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

382. Ечимни (1) функционал катор кўринишда қидирамиз. Бу ерда

$$a_k=0;\quad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\sin\frac{5\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}$ $(k=1,2,...)$ – хос функциялар $(0,l)$ оралиқда нормаллашган ортогонал функциялар системасини ташкил қилганлиги учун

$$\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{cases}0, & k\neq n \quad \text{бўлса},\\ 1, & k=n \quad \text{бўлса}\end{cases}$$

бўлади. Бу тенгламалардан $k \neq 5$ бўлганда $b_k = 0$ ва $k = 5$ бўлганда $b_5 = \frac{l}{5\pi a}$ эканлиги келиб чикади. Демак, масаланинг ечими

$$U(x,t) = \frac{l}{5\pi a} \sin\frac{5\pi at}{l} \sin\frac{5\pi x}{l}.$$

383. $u(x,t) = \cos 7t \sin 7x$.

384. $u(x,t) = \frac{l}{2\pi a} \sin\frac{2\pi at}{l} \sin\frac{2\pi x}{l}$.

385. $u(x,t) = \frac{2l}{a\pi} \sin\frac{a\pi t}{2l} \sin\frac{\pi x}{2l} + \cos\frac{5a\pi t}{2l} \sin\frac{5\pi x}{2l}$.

386. $u(x,t) = \cos\frac{a\pi t}{2l} \cos\frac{\pi x}{2l} + \frac{2l}{3a\pi} \sin\frac{3a\pi t}{2l} \cos\frac{3\pi x}{2l} + \frac{2l}{5a\pi} \sin\frac{5a\pi t}{2l} \cos\frac{5\pi x}{2l}$.

387. $u(x,t) = t + \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\frac{(2k+1)a\pi t}{l} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}$

388. $u(x,t) = \cos 2x \cos 2t + \frac{3}{5} \cos 5x \sin 5t$.

389. $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t) \sin \lambda_k x$,

$$a_k = \frac{1}{\| \sin \lambda_k x \|^2} \int_0^l \varphi(x) \sin \lambda_k x dx, \; b_k = \frac{1}{a\lambda_k \| \sin \lambda_k x \|^2} \int_0^l \psi(x) \sin \lambda_k x dx,$$

$\| \sin \lambda_k x \|^2 = \int_0^l \sin^2 \lambda_k x \, dx = \frac{l(h^2 + \lambda_k^2) + h}{2(h^2 + \lambda_k^2)}$, бу ерда λ_k сонлар $h tg \lambda l = -\lambda$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

390. $u(x,t) = \frac{2h}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{h^2 + \lambda_k^2}}{\lambda_k^2 \left[l(h^2 + \lambda_k^2) + h \right]} \sin a\lambda_k t \cos \lambda_k x$, бу ерда λ_k сонлар $\lambda tg \lambda l = h$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

391. $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos a\lambda_k t + b_k \sin a\lambda_k t)(\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x)$,

$$a_k = \frac{1}{\| \Phi_k(x) \|^2} \int_0^l (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x) \varphi(x) dx,$$

$$b_k = \frac{1}{a\lambda_k \| \Phi_k(x) \|^2} \int_0^l (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x) \psi(x) dx,$$

$$\left\|\Phi_k(x)\right\|^2=\int_0^l(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)^2dx=\frac{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h}{2},$$

бу ерда λ_k сонлар $hctg\lambda l=\lambda$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

392. $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k x\right)\left(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x\right),$

$$a_k=\frac{1}{\left\|\Phi_k(x)\right\|^2}\int_0^l(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)\varphi(x)dx,$$

$$b_k=\frac{1}{a\lambda_k\left\|\Phi_k(x)\right\|^2}\int_0^l(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)\psi(x)dx,$$

$$\left\|\Phi_k(x)\right\|^2=\int_0^l(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x)^2dx=\frac{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+2h}{2},$$

бу ерда λ_k сонлар $ctg\lambda l=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{\lambda}\right)$ тенгламанинг манфий бўлмаган илдизлари.

393. Масала ечимини $u(x,t)=\upsilon(x)+\omega(x,t)$ кўринишда қидирамиз, бу ерда $\upsilon(x)$ функция $a^2\upsilon''(x)+b\,sh\,x=0$ тенгламанинг $\upsilon(0)=\upsilon(l)=0$ шартларни қаноатлантирувчи ечими, $\omega(x,t)$ эса $\omega_{tt}=a^2\omega_{xx}$ тенгламанинг $\omega(0,t)=0$, $\omega(l,t)=0$; $\omega(x,0)=-\upsilon(x)$, $\omega_t(x,0)=0$ шартларни қаноатлантирувчи ечими. $\upsilon(x)$ ва $\omega(x,t)$ функциялар топилгандан сўнг масала ечимига эга бўламиз:

$$u(x,t)=\frac{b}{a^2}\left(\frac{x}{l}shl-sh\,x\right)+\frac{2b}{a^2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}-$$

$$-\frac{2b\pi shl}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2\pi^2+l^2}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

394. $u(x,t)=\upsilon(x,t)+\omega(x)$, бу ерда

$$\upsilon(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{ka\pi}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x,\ a_k=-\frac{2}{l}\int_0^l\omega(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$\omega(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x\left[\int_0^y f(\xi)d\xi\right]dy+\frac{x}{la^2}\int_0^l\left[\int_0^y f(\xi)d\xi\right]dy+\frac{\beta-\alpha}{l}x+\alpha.$$

395. $u(x,t)=\frac{\beta-\alpha}{2l}x^2+\alpha x+\Phi_0+\psi_0 t+\frac{F_0}{2}t^2+$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{ak\pi}\right)^2 F_k+\left[\Phi_k-\left(\frac{1}{ak\pi}\right)^2 F_k\right]cos\frac{ak\pi t}{l}+\frac{l\psi_k}{ak\pi}sin\frac{ak\pi t}{l}\right\}cos\frac{k\pi x}{l},$$

$$F_k=\frac{\varepsilon_k}{l}\int_0^t\left[f(x)-\frac{(\beta-\alpha)a^2}{l}\right]cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$\Phi_k=\frac{\varepsilon_k}{l}\int_0^t\left[\varphi(x)-\frac{(\beta-\alpha)x^2}{2l}-\alpha x\right]cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$\psi_k=\frac{\varepsilon_k}{l}\int_0^t\psi(x)cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ k=0,1,...,\ \varepsilon_0=1,\ \varepsilon_k=2,\ k=1,2,...$$

Кўрсатма. Ечимни $u(x,t)=\omega(x)+\upsilon(x,t)$ кўринишда қидириш керак, бу ерда $\omega(x)=\left(\alpha_1x^2+\beta_1x\right)\alpha+\left(\alpha_2x^2+\beta_2x\right)\beta$; α_1, β_1, α_2, β_2 сонлар $\omega(x)$ функция $\omega_x(0)=\alpha$, $\omega_x(l)=\beta$ шартларни қаноатлантирадиган қилиб танланади.

396. $u(x,t)=\omega(x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\,cos\,a\lambda_kt+b_k\,sin\,a\lambda_kt)(\lambda_k\,cos\,\lambda_kx+h\,sin\,\lambda_kx)$,

$$\omega(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x\left[\int_0^y f(\xi)d\xi\right]dy+\left\{\beta-\alpha l+\frac{1}{a^2}\int_0^l\left[\int_0^y f(\xi)d\xi\right]dy\right\}\frac{1+hx}{1+hl}+\alpha x,$$

$$a_k=\frac{2}{h+l\left(h^2+\lambda_k^2\right)}\int_0^t\left[\varphi(x)-\omega(x)\right](\lambda_k cos\,\lambda_kx+h\,sin\,\lambda_kx)dx,$$

$b_k=\dfrac{2}{a\lambda_k\left[h+l\left(h^2+\lambda_k^2\right)\right]}\int\limits_0^t\psi(x)(\lambda_k\,cos\,\lambda_kx+h\,sin\,\lambda_kx)dx$, бу ерда λ_k сонлар $h\,tg\,\lambda l=-\lambda$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

397. $u(x,t)=\omega(x)-2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{h^2+\lambda_k^2}{k-l\left(h^2+\lambda_k^2\right)}\int\limits_0^t\omega(\xi)\,cos\,\lambda_k\xi d\xi\right]cos\,a\lambda_kt\,cos\,\lambda_kx$,

$$\omega(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x\left[\int_0^y f(\xi)d\xi\right]dy+\frac{\beta-\alpha}{h}-\alpha(l-x)+$$

$+\dfrac{1}{a^2}\int\limits_0^l\left[\int\limits_0^y f(\xi)d\xi\right]dy+\dfrac{1}{a^2h}\int\limits_0^l f(\xi)d\xi$, бу ерда λ_k сонлар $-\lambda\,tg\,\lambda l=h$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

398. $u(x,y)=-\dfrac{a}{h}+$

$$+4\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{2n+1}\left[2h+l\left(h^2+\lambda_{2n+1}\right)\right]}\left(\lambda_{2n+1}\cos\lambda_{2n+1}x+h\sin\lambda_{2n+1}x\right)\cos\lambda_{2n+1}t,$$

бу ерда λ_{2n+1} сонлар $ctg\lambda l=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{\lambda}\right)$ тенгламанинг мусб

илдизлари.

399. Масала ечимини қуйидаги функционал

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

қатор кўринишида қидирамиз, бу ерда

$$T_k(t)=\frac{2}{k\pi a}\int_0^t\left[\int_0^l\sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right]d\tau=$$

$$=\frac{l}{k\pi a}\int_0^t\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\left[\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right].$$

$X_k(\xi)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi\xi}{l}$ функцияларнинг $(0,l)$ оралиқда ортонормалли шартидан $k\neq1$ да $T_k(t)=0$,

$$T_1(t)=\frac{l}{\pi a}\int_0^t\sin\frac{\pi a}{l}(t-\tau)d\tau=\frac{l}{\pi a}\cos\frac{\pi a}{l}(t-\tau)\Big|_0^t=\frac{l}{\pi a}\left(1-\cos\frac{\pi a}{l}t\right)$$

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган масала ечими

$$U(x,t)=\frac{l}{\pi a}\left(1-\cos\frac{\pi a}{l}t\right)\sin\frac{\pi x}{l}.$$

400. $U(x,t)=\dfrac{A}{1+\left(\dfrac{a\pi}{l}\right)^2}\left(e^{-t}-\cos\dfrac{a\pi t}{l}+\dfrac{l}{a\pi}\sin\dfrac{a\pi t}{l}\right)\sin\dfrac{\pi x}{l}.$

401. $U(x,t)=\dfrac{2lA}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k\left[1+(ka\pi/l)^2\right]}\left(e^{-t}-\cos\dfrac{ka\pi t}{l}+\dfrac{l}{ka\pi}\sin\dfrac{ka\pi t}{l}\right)\sin\dfrac{k\pi x}{l}.$

402. $u(x,t)=\dfrac{4A}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left[\sin t-\dfrac{2l}{a\pi(2k+1)}\sin\dfrac{a\pi(2k+1)t}{2l}\right]}{(2k+1)}\dfrac{\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2l}}{\left(\left[\dfrac{a\pi(2k+1)}{2l}\right]^2-1\right)}.$

403. $u(x,t)=\dfrac{A}{1+(a\pi/2l)^2}\left(e^{-t}-\cos\dfrac{a\pi t}{2l}+\dfrac{2l}{a\pi}\sin\dfrac{a\pi t}{2l}\right)\cos\dfrac{\pi x}{2l}.$

404. $u(x,t)=\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\tau f_0(\xi)d\xi\right)d\tau+\frac{l}{a\pi}[\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}\int\limits_0^t f_k(\xi)\sin\frac{ka\pi(t-\xi)}{l}d\xi]\cos\frac{k\pi x}{l}$,

$$f_0(\xi)=\frac{1}{l}\int\limits_0^l f(x,\xi)dx,\ f_k(\xi)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,\xi)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \quad k=1,2,\dots .$$

405. $u(x,t)=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)t^2+\frac{x}{\pi}t^3+\sin x\cos t+$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[(-1)^k 3t-1+\cos kt-\frac{1}{k}(-1)^k 3\sin kt\right]\sin kx .$$

Кўрсатма. Ечимни $u(x,t)=\omega(x,t)+\upsilon(x,t)$ кўринишда кидириш керак, бу ерда $\omega(x,t)=(C_1x+C_2)t^2+(C_3x+C_4)t^3$; C_1, C_2, C_3, C_4 ўзгармасларни шундай танланадики, $\omega(0,t)=t^2$, $\omega(\pi,t)=t^3$ бўлсин: $C_1=-1/\pi$, $C_2=1$, $C_3=1/\pi$, $C_4=0$. Натижада $\upsilon(x,t)$ га нисбатан бир жинсли бўлмаган тенглама учун бир жинсли чегаравий шартли аралаш масалага келамиз.

406. $u(x,t)=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)e^{-t}+\frac{xt}{\pi}+\frac{1}{2}\cos 2t\sin 2x-$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left(1+k^2\right)}\left[e^{-t}+k^2\cos kt-\left(2k+\frac{1}{k}\right)\sin kt\right]\sin kx .$$

Кўрсатма. 405 – масала каби ечилади.

407. $u(x,t)=x+t+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}-$

$$-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x .$$

Кўрсатма. 405 - масаланинг ечиш усули қўлланилади.

408. $u(x,t)=e^{-t}chx$.

Кўрсатма. Ечимни $u(x,t)=\upsilon(x,t)+e^{-t}f(x)$ кўринишида қидириш керак. $f(x)$ функцияни $f''(x)-f(x)=0$, $f'(0)=0$, $f'(l)=shl$ шартларни қаноатлантирувчи қилиб танлаб, $\upsilon(x,t)$ га нисбатан бир жинсли аралаш масалага келамиз.

409. $u(x,t)=\frac{1}{\pi}t(\pi-x)+\frac{1}{2}\cos 2t\sin 2x-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\sin kt\sin kx$.

Кўрсатма: Ечимни $u(x,t)=v(x,t)+\frac{1}{\pi}t(\pi-x)$ кўринишда қидириш керак.

410. $u(x,t)=-\cos 2x \sin 2t$.

Кўрсатма. Ечимни $u(x,t)=v(x,t)+2f(x)\sin 2t$ кўришда қидириш керак.

411. $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4t}{k\pi\mu_k^2}-\frac{4}{k\pi\mu_k^3}\sin 2\mu_k t+\frac{k\pi}{\mu_k^3}\sin\mu_k t\right)\sin\frac{k\pi}{2}x+t(2-x)$.

Кўрсатма. Ечимни $u(x,t)=v(x,t)+t(2-x)$ кўринишда қидириб $v(x,t)$ функцияга нисбатан

$$v_{tt}=v_{xx}+v+t(2-x),\ t>0,\ 0<x<2; \quad (2)$$

$$v(0,t)=v(2,t)=0,\ t>0; \quad (3)$$

$$v(x,0)=0,\ v_t(x,0)=2-x,\ 0\le x\le 2 \quad (4)$$

масалага эга бўламиз. $v(x,t)$ ва $t(2-x)$ функцияларни $X''(x)+\lambda X(x)=0, X(0)=X(2)=0$ масалага мос $X_k(x)=\sin\frac{k\pi}{2}x$, $(k\in N)$ хос функциялар бўйича қаторга ёямиз:

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi}{2}x, \quad (5)$$

$$t(2-x)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{k\pi}{2}x \quad (6)$$

Бу ерда $T_k(t)$, $k\in N$ - номаолум коэффициентлар,

$$C_k(t)=\int_0^2 t(2-x)\sin\frac{k\pi}{2}x dx=\frac{4t}{k\pi}. \quad (7)$$

(5) – (7) ларни (2) ва (4) га қўйиб, $T_k(t)$ га нисбатан

$$T_k''(t)+\left[\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2-1\right]T_k(t)=\frac{4t}{k\pi},\ T_k(0)=0,\ T_k'(0)=\frac{4}{k\pi}$$

масалага эга бўламиз. Бу масаланинг ечими

$$T_k(t)=\frac{4t}{k\pi\mu_k^2}-\frac{4}{k\pi\mu_k^3}\sin 2\mu_k t+\frac{k\pi}{\mu_k^3}\sin\mu t$$

кўринишга эга бўлиб, уни (5) га қўйиб, $v(x,t)$ функцияга эга бўламиз.

412. $u(x,t)=\frac{1}{2}(ch 2t-1)-\frac{1}{2}t^2\cos 2x$.

Кўрсатма. Масала ечими $u(x,t)$ ни ва $2\,sin^2 x$ функцияни $X''(x)+\lambda X(x)=0, X'(0)=X'(\pi)=0$ масалага мос $X_k(x)=cos\,kx$ $(k=0,1,2,3,\ldots)$ хос функциялар бўйича қаторга ёямиз:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\,cos\,kx\,, \tag{8}$$

$$2sin^2 x=\sum_{k=1}^{\infty} C_k\;cos\;kx\,, \tag{9}$$

Бу ерда $T_k(t)$ $(k=0,1,2,3,\ldots)$ - номаълум функциялар,

$$C_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\,sin^2 x\,cos\,kxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-cos\,2x)\,cos\,kxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[2\,cos\,kx-cos\,(k-2)\,x-cos\,(k+2)dx\right]=\begin{cases}2, & k=0,\\ -1, & k=2,\\ 0, & k=1,3,4,\ldots\ldots\end{cases} \tag{10}$$

(8) – (10) ларни тенгламага ва (8) ни бошланғич шартларга қўйиб, $T_k(t)$ функцияларга нисбатан масалаларга эга бўламиз:

$$T_0''(t)-4T_0(t)=2\,, \qquad T_0(0)=T_0'(0)=0\,;$$

$$T_1''(t)-3T_1(t)=0\,, \qquad T_1(0)=T_1'(0)=0\,;$$

$$T_2''(t)=-1\,, \qquad T_2(0)=T_2'(0)=0\,;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_k''(t)+\left(k^2-4\right)T_k(t)=0\,, \qquad T_k(0)=T_k'(0)=0\,,\; k=1,3,4,\ldots$$

Бу масаларни ечиб топамиз:

$$T_0(t)=\frac{1}{2}(ch2t-1),\; T_2(t)=-\frac{1}{2}t^2\,,\; T_k(t)\equiv 0\,,\; k=1,3,4,\ldots$$

Буларни (8) га қўйиб, масала ечимига эга бўламиз.

413. $u(x,t)=3+x\left(t^2+t\right)+\left[4-(4-5t)e^t\right]sin\,x+$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left\{4-e^t\left[4\,cos\,\mu_k t-\frac{1}{\mu_k}\left(\mu_k^2+5\right)sin\,\mu_k t\right]\right\}\frac{sin\,(2k-1)\,x}{\mu_k^2+1}\,.$$

Кўрсатма. Аввал $\omega(x,t)=3(a_1x+b_1)+(a_2x+b_2)\left(t^2+t\right)$ функцияларни шундай танлаймизки, $\omega(0,t)=3\,, \omega_x(l,t)=t^2+t$ тенгликлар бажарилсин. Бундай функция мавжуд ва ягона $\omega(x,t)=3+x\left(t^2+t\right)$. Сўнгра масала ечимини $u(x,t)=v(x,t)+\omega(x,t)$ кўринишда қидирамиз. Натижада

$$\upsilon_{tt}=\upsilon_{xx}+2\upsilon_t+4\ sin\ x\ ,\ t>0,0<x<\frac{\pi}{2}, \qquad (11)$$

$$\upsilon(0,t)=\upsilon_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0,\quad t>0, \qquad (12)$$

$$\upsilon(x,0)=0,\ \upsilon_t(x,0)=sin\ x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2} \qquad (13)$$

масалага эга бўламиз.

Бу масаланинг ечими бўлган $u(x,t)$ функцияни ва $4\ sin\ x$ функцияни $X''(x)+\lambda X(x)=0$, $X(0)=X'(\pi/2)=0$ масаланинг хос функциялари $X_k(x)=sin(2k-1)x\ \ (k=1,2,3,...)$ бўйича қаторга ёямиз

$$\upsilon(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\ sin\ (2k-1)x, \qquad (14)$$

$$4\ sin\ x=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\ sin\left(2k-1\right)x, \qquad (15)$$

бу ерда $T_k(t)\ \ (k=1,2,3,...)$ - номаълум функциялар,

$$C_k=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}4\ sin\ x\ sin\left(2x-1\right)x\ dx=\begin{cases}4, & k=1\\ 0, & k=2,3,...\end{cases} \qquad (16)$$

(14) – (16) ларни (11) га ва (14) ни бошланғич шартларга қўйиб, $T_k(t)$, $k\in N$ функцияларга нисбатан масалага эга бўламиз:

$$T_k''(t)-2T_k'(t)+(2k-1)^2T_k(t)=4,$$

$$T_k(0)=0,\ T_k'(t)=1.$$

Бу ердан $T_k(t)\ \ (k\in N)$ функцияларни топамиз:

$$T_1(t)=4-(4-5t)e^t$$

$$T_k(t)=\frac{1}{\mu_k^2+1}\left\{4-e^t\left[4\ cos\ \mu_kt-\frac{1}{\mu_k}\left(\mu_k^2+5\right)sin\ \mu_kt\right]\right\},$$

бу ерда $\mu_k=k(k-2)$, $k=2,3,4...$

Буларни (14) га қўйиб, $\upsilon(x,t)$ ни топамиз:

$$\upsilon(x,t)=\left[4-(4-5t)e^t\right]sin\ x+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left\{4-e^t\left[4\ cos\ \mu_kt-\frac{1}{\mu_k}\left(\mu_k^2+5\right)sin\ \mu_kt\right]\right\}\frac{sin\ (2k-1)x}{\mu_k^2+1}.$$

414. Масала ечимини

$$u(x,y,t)=T(t)\upsilon(x,y) \qquad (17)$$

кўринишда қидирамиз. Натижада

$$T''(t)+\mu^2a^2T(t)=0 \qquad (18)$$

$$\upsilon_{xx}+\upsilon_{yy}+\mu^2\upsilon=0 \qquad (19)$$

тенгламаларга эга бўламиз, бу ерда $\mu = const$ - параметр.

Ўз навбатида (19) тенгламани

$$\upsilon(x,y)=X(x)Y(y) \qquad (20)$$

кўринишда қидирсак,

$$X''(x)+\mu_1^2X(x)=0 \qquad (21)$$

$$Y''(y)+\mu_2^2Y(y)=0 \qquad (22)$$

тенгламаларга эга бўламиз, бу ерда $\mu^2=\mu_1^2+\mu_2^2$.

Чегаравий шартларга асосан

$$X(0)=X(p)=0, \qquad (23)$$

$$Y(0)=Y(q)=0. \qquad (24)$$

{(21), (23)} ва {(22), (24)} масалалар мос равишда

$$\mu_{1,m}=\frac{m\pi}{p},\ \mu_{2,n}=\frac{n\pi}{q}$$

хос сонларга ва

$$X_m(x)=sin\frac{m\pi}{p}x,\ Y_m(y)=sin\frac{n\pi}{q}y,\ m,n\in N$$

хос функцияларга эга.

Демак, $\mu_{mn}^2=\mu_{1m}^2+\mu_{2n}^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{p^2}+\frac{n^2}{q^2}\right)$ хос сонга (20) га асосан

$$\upsilon_{mn}(x,y)=sin\frac{m\pi}{p}x\ sin\frac{n\pi}{q}y \qquad (25)$$

хос функциялар мос келади.

μ_{mn} нинг қийматини (18) га қўйиб, бу тенгламани ечамиз:

$$T_{mn}(t)=A_{mn}\ cos\ a\mu_{mn}t+B_{mn}\ cos\ a\mu_{mn}t\ . \qquad (26)$$

(17), (20), (25), (26) ларга асосан масала ечимини

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}(A_{mn}\ cos\ a\mu_{mn}t+B_{mn}\ sin\ a\mu_{mn}t)\ sin\frac{m\pi x}{p}\ sin\frac{n\pi y}{q} \qquad (27)$$

тор кўринишда қидирамиз.

Бошланғич шартларга асосан:

$$u(x,y,0)=\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn}\ sin\frac{m\pi}{p}x\ sin\frac{n\pi}{q}y=0,$$

$$u_t(x,y,0)=\sum_{m,n=1}^{\infty} B_{mn}a\mu_{mn}\sin\frac{m\pi}{p}x\sin\frac{n\pi}{q}y=5\sin\frac{3\pi x}{p}\sin\frac{5\pi y}{q}$$

Бу тенгликлардан келиб чиқадики $A_{mn}=0$,

$$B_{mn}=\frac{4\cdot 5}{a\mu_{mn}pq}\int_0^p\int_0^q \sin\frac{3\pi x}{p}\sin\frac{5\pi}{q}y\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}dydx=$$

$$=\frac{20}{a\mu_{mn}pq}\int_0^p \sin\frac{3\pi x}{p}\sin\frac{m\pi x}{p}dx\int_0^q \sin\frac{5\pi}{q}y\sin\frac{n\pi y}{q}dy=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{5}{a\mu_{mn}}, & \text{агар}\quad m=3,\ \ n=5\ \text{бўлса},\\ 0, & \text{агар}\quad m\neq 3,\ \ n\neq 5\ \text{бўлса}.\end{cases}$$

Буларни (27) га қўйиб масала ечимига эга бўламиз:

$$u(x,y,t)=\frac{5pq}{a\pi\sqrt{9q^2+25p^2}}\sin\left(ta\pi\sqrt{\frac{9}{p^2}+\frac{25}{q^5}}\right)\sin\frac{3\pi x}{p}\sin\frac{5\pi y}{q}.$$

415. Ечимни (17), (20) кўринишда қидириб, (18), (21), (22) тенгламалларга ва

$$X(0)=X'(p)=0, \tag{28}$$

$$Y(0)=Y'(q)=0 \tag{29}$$

чегаравий шартларга эга бўламиз.

{(21), (28)}, {(22), (29)} масалаларни ечиб,

$$\mu_{1,m}=\frac{\pi}{p}\left(m-\frac{1}{2}\right),\ \mu_{2,n}=\frac{\pi}{q}\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

хос сонларга ва $X_m(x)=\sin\frac{\pi}{p}\left(m-\frac{1}{2}\right)x,\ \ Y_n(y)=\sin\frac{\pi}{q}\left(n-\frac{1}{2}\right)y,\ \ m,n\in N$

хос функцияларга эга бўламиз. Буларни эътиборга олсак, μ нин

ҳар бир $\mu_{mn}=\pi\sqrt{\frac{1}{p^2}\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{q^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$ қийматига

$$u_{mn}(x,y)=\sin\frac{\pi}{p}\left(m-\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{\pi}{q}\left(n-\frac{1}{2}\right)y,\qquad m,n\in N$$

хос функциялар мос келишини топамиз. Сўнгра масала ечимини

$$u(x,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(A_{mn}\cos a\mu_{mn}t+B_{mn}\sin a\mu_{mn}t\right)\sin\frac{\pi}{p}\left(m-\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{\pi}{q}\left(n-\frac{1}{2}\right)y$$

кўринишда қидириб ва бошланғич шартлардан фойдалани ечимни топамиз:

$$u(x,y,t)=\frac{4Apq}{\pi^2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\times$$

$$\times cos\left[a\pi t\sqrt{\frac{1}{p^2}\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{q^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right]sin\left[\frac{\pi}{p}\left(m-\frac{1}{2}\right)x\right]sin\left[\frac{\pi}{q}\left(n-\frac{1}{2}\right)y\right].$$

416. Масала ечимини (17), (20) кўринишда кидириш натижасида

$$X''(x)+\mu_1 X(x)=0\,,\ X'(0)=X(p)=0 \qquad (30)$$

ва {(22), (24)} масалаларга эга бўламиз. Бу масалаларни ечиб, $X_m(x)=cos\ \mu_{1m}x$, $Y_n(y)=sin\ \mu_{2n}y$ функцияларга эга бўламиз, бу ерда $\mu_{1m}=\frac{\pi}{p}(m-1/2)$, $\mu_{2n}=\frac{n\pi}{q}$, $m,n\in N$.

Сўнгра (18) тенгламани $\mu=\mu_{mn}=\sqrt{\mu_{1m}^2+\mu_{2n}^2}$ да ечиб, масала ечимини

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(A_{mn}\ cos\ \mu_{mn}t+B_{mn}\ sin\ \mu_{mn}t\right)\cos\mu_{1m}x\cdot sin\ \mu_{2n}y$$

кўринишда қидирамиз ва бу функцияни бошланғич шартларга бўйсундириб масала ечимига эга бўламиз:

$$u(x,y,t)=cos\left[\pi t\sqrt{\frac{1}{4p^2}+\frac{1}{q^2}}\right]cos\frac{\pi x}{2p}\cdot sin\frac{\pi y}{q}.$$

417. $u(x,t)=-\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^3}\cdot cos\left(\sqrt{[(2k+1)\pi]^2+4t}\right).$

418. $u(x,t)=-\frac{8e^{-t}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}\cdot\left[cos(2k+1)t+\frac{1}{2k+1}sin(2k+1)t\right].$

419. $u(x,t)=8e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k-\frac{2}{\pi(2k+1)}\right]\frac{sin\frac{(2k+1)t}{2}cos\frac{(2k+1)x}{2}}{(2k+1)^2}.$

420. $u(x,t)=t(1-x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin\,k\pi x}{(k\pi)^3}\cdot e^{-\frac{t}{2}}\left[2cos\,\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}sin\,\lambda_k t-2\right],$

бу ерда $\lambda_k=\sqrt{(\pi x)^2-1}.$

421. $u(x,t)=t(2-x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin\frac{k\pi}{2}x}{(k\pi)^3}\left[\frac{4t}{k\pi\lambda_k^2}-\frac{\pi k}{\lambda_k^3}sin\,\lambda_k t\right],\ \lambda_k=\sqrt{\frac{(\pi x)^2}{4}-1}$

422. $u(x,t)=\frac{t\,x}{l}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi\,\lambda_k^2}\left[t-\frac{1}{\lambda_k}sin\,\lambda_k\,t\right]\cdot sin\frac{k\pi}{2}x,\ \ \lambda_k=\sqrt{\frac{(\pi x)^2}{l^2}-1}.$

423. $u(x,t)=2xt+(2e^{t}-e^{-t}-3t\,e^{-t})\cdot cos\,x.$

424. $u(x,t)=x(t+1)+(\frac{1}{5}e^{\frac{5}{2}t}-e^{\frac{t}{2}}+\frac{4}{5})\cdot cos\,\frac{3}{2}x.$

425. $u(x,t)=\frac{1}{9}sin\,x\,(ch\,3t-1)+sin\,3x\,(ch\,t-1).$

426. $u(x,t)=\left[\mu_k^{-4}(2-\mu_k^2)\cdot cos\mu_k\,t+\mu_k^{-2}t^2-\mu_k^{-4}(2-\mu_k^2)\right]\cdot J_0\left(\mu_k\,x\right).$

Кўрсатма. Масаланинг ечимини $u=\upsilon+w$ кўринишда излаймиз. Бу ерда $\upsilon=(at^2+c)\cdot J_0(\mu_k x)-$ бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими, $w-$бир жинсли тенгламанинг қуйидаги шартларни $w(x,0)=-\upsilon(x,0),\ \ w_t(x,0)=-\upsilon_t(x,0)$ қаноатлантирувчи ечим.

427. $u(x,t)=(\mu_k^2-1)^{-1}\cdot\left[cos\,t+sin\,t-cos\mu_k t-\mu_k^{-1}sin\mu_k\,t\right]\cdot J_0\left(\mu_k\,x\right).$

Кўрсатма. Масаланинг ечимини $u=\upsilon+w$ кўринишда излаймиз. Бу ерда $\upsilon=(bcos\,t+asin\,t)\cdot J_0(\mu_k x)-$ бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими, $w=\left(Acos\mu_k t-Bsin\mu_k\,t\right)J_0(\mu_k x)-$ бир жинсли тенгламанинг ечими, A,B коэффициентлар қуйидаги шартлардан $w(x,0)=-\upsilon(x,0),\ \ w_t(x,0)=-\upsilon_t(x,0)$ топилади.

428. $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{J_0(2x)}{J_0(2)}cos2t\right].$ **429.** $u(x,t)=1+\frac{1}{9}sin3t\left[1-\frac{J_0(3x)}{J_0(3)}\right].$

430. $u(x,t)=J_0\left(2\mu_1\sqrt{x}\right)cos\mu_1\,t.$ **Кўрсатма.** Масаланинг ечимини $u=X(x)T(t)$ кўринишда излаймиз. У ҳолда

$$X''+\frac{1}{x}X'+\frac{\lambda^2}{x}X=0, \tag{31}$$

$$T''+\lambda^2T=0.$$

ҳосил қиламиз. (31) тенгламада $\eta=2\lambda\sqrt{x}$ алмаштириш бажариб, $X''(\eta)+\frac{1}{\eta}X'(\eta)+X(\eta)=0$ Бессел тенгламасини оламиз. Бу тенгламанинг умумий ечими $X(\eta)=a\,J_0(\eta)+b\,Y_0(\eta)$ кўринишда бўлади.

431. $u(x,t)=\frac{2}{\mu_k}J_0\left(\mu_k\sqrt{x}\right)\cdot sin\frac{\mu_k}{2}t.$

432. $u(x,t)=\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{J_1^2(\mu_n)}\cdot J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\cdot cos\frac{\mu_k a}{2\sqrt{l}}t,$ бу ерда

$$A_n=\int_0^l u_0(x)J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx\quad \mu_n\,(n=1,2,\ldots)-\,J_0(\mu)=0$$

тенгламанинг мусбат ечими.

433. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n cos\,a\,\lambda_n\,t+B_n sin\,a\,\lambda_n\,t\right]\cdot J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right),$

$\lambda_n=\sqrt{\frac{\mu_n^2}{4l}-\left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$, бу ерда $A_n=\frac{1}{l\,J_1^2(\mu_n)}\int_0^l u_0(x)J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx,$

$$B_n=\frac{1}{a\,\lambda_n\,l\,J_1^2(\mu_n)}\int_0^l u_1(x)J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx,$$

$\mu_n\,(n=1,2,\ldots)-\,J_0(\mu)=0$ тенгламанинг мусбат ечими.

III БОБ

1-§

434. $u(x,t)=8.$

435. $u(x,t)=t^2+1.$

436. $u(x,t)=\frac{e^{-\frac{x^2}{1+4t}}}{\sqrt{1+4t}}.$

437. $u(x,t)=1-\cos t.$

438. $u(x,t)=e^{-4t}\cdot\sin 2x.$

439. $u(x,t)=e^{-9t}\cdot\cos 3x.$

440. $u(x,t)=e^{t}\cdot ch\,x.$

441. $u(x,t)=e^{4t}\cdot sh2x.$

442. $u(x,t)=t^2+e^{-t}\sin x.$

443. $u(x,t)=(1+t)e^{-t}\cdot\cos x.$

444. $u(x,t)=ch\,t\,\sin x.$

445. $u(x,t)=1-\cos t+(1+4t)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{1+4t}}$

446. $u(x,t)=(1+t)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{2x-x^2+t}{1+t}}.$

447. $u(x,t)=x(1+4t)^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$

448. $u(x,t)=(1+t)^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{1+t}\cdot e^{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}}.$

449. $u(x,y,t)=e^{-5t}\sin x\sin 2y.$

450. $u(x,y,t)=e^{-5t}\sin 2x\cos y.$

451. $u(x,y,t)=xy+\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)\right]\sin x\cos y.$

452. $u(x,y,t)=xy\left(1-e^{-t}\right)+2xe^{-t}\sin y.$

453. $u(x,y,t)=\left[\frac{t}{4}-\frac{1}{16}+\frac{17}{16}\cdot e^{-4t}\right]x\cdot\sin y.$

454. $u(x,y,t)=e^{t}-1+e^{-2t}\sin y\cos x.$

455. $u(x,y,t)=1+\frac{1}{5}\sin x\sin y\left(2\sin t-\cos t+e^{-2t}\right).$

456. $u(x,y,t)=\sin\ t+\frac{xy}{(1+4t)^3}e^{-\frac{x^2+y^2}{1+4t}}.$

457. $u(x,y,t)=\frac{t}{8}+\frac{1}{\sqrt{1+t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{1+t}}.$

458. $u(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\cos\frac{xy}{1+t^2}\cdot e^{-\frac{t(x^2+y^2)}{2(1+t^2)}}.$

459. $u(x,y,z,t)=\frac{1}{4}\cos x\left(e^{-2t}-1+2t\right)+\cos y\cos z\cdot e^{-4t}.$

460. $u(x,y,z,t)=e^{t}-1+e^{-9t}\sin(x-y-z).$

461. $u(x,y,z,t)=\frac{1}{4}\sin 2z+\frac{\cos 2y}{\sqrt{1+t}}e^{-t-\frac{x^2}{1+t}}.$

462. $u(x,y,z,t)=\frac{1}{3}\cos(x-y+z)\left(1-e^{-3t}\right)+\frac{1}{\sqrt{1+12t}}\cdot e^{-\frac{(x+y-z)^2}{1+12t}}.$

463. $u(x,y,t)=\frac{\sin z}{\sqrt{1+4t^2}}\cdot\cos\frac{xy}{1+4t^2}\cdot e^{-t-\frac{t(x^2+y^2)}{1+4t^2}}.$

464. Ушбу

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{(x-y)^2}{4t}}\varphi(y)dy,\quad t>0 \qquad (1)$$

интеграл якинлашувчи. Ҳақиқатан, $M=\max\limits_{-\infty<y<\infty}|\varphi(y)|$ деб белгилаб, қуйидагини оламиз:

$$|u(x,t)|\le\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\frac{dy}{2\sqrt{t}}=\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mu^2}d\mu=M.$$

Шу билан бирга (1) дан интеграл белгиси остида x ва t бўйича, керакли марта такрорланган дифференциаллашдан ҳосил қилинган интегрални яқинлашувчилигини текшириш қийин эмас. Бунда агар $t>0$ бўлса, ихтиёрий (x,t) нуқта атрофида барча интеграллар текис яқинлашади. Будан келиб чиқадики, $t>0$ да $u(x,t)$ функция барча тартибдаги ҳосилаларга эга бўлади ва улар қуйидаги формалалар бўйича ҳисобланади

$$\frac{\partial^{m+n}u(x,t)}{\partial x^m\partial t^n}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial t^n}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right]dy.$$

Ушбу

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = u(x,0) = \varphi(x), \ -\infty < x < \infty$$

шартни ўринли эканига ишонч ҳосил қилиш учун, (1)нинг ўн томонидаги интеграл $t>0$ да ҳар бир $(x,0)$ нуқта атрофида текис яқинлашувчилигини кўриш етарли. $y = x + 2\eta\sqrt{t}$ формула бўйича ўзгарувчиларни алмаштириш натижасида,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2\eta\sqrt{t}) e^{-\eta^2} d\eta$$

тенгликни оламиз. Бу ердан интегрални текис яқинлашувчилиги ва φ функцияни узлуксизлигидан

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \varphi(x)$$

келиб чиқади.

465. $u(x,t)$ функция

$$u_t = u_{xx} \tag{2}$$

тенгламанинг $t \geq 0$да узлуксиз ва чегараланган ечими бўлсин. Исбот қиламизки, $u(x,t) \leq M$ (бунга $u(x,t) \geq m$ тенгсизликнинг исботи, $u(x,t)$ функциянинг ишорасини ўзгартириш билан келтирилади). Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонни фиксирлаймиз. $u(x,t)$ ярим текисликнинг ихтиёрий (x_0, t_0) нуқтасида $u(x_0,t_0) \leq M + \varepsilon$ эканини кўрсатамиз. (2) тенгламани қаноатлантирувчи $\vartheta(x,t) = x^2 + 2t$ функцияни қурамиз. $N = sup\, u(x,t), \quad t \geq 0$ бўлсин. (2) тенгламани $t>0$ да қаноатлантирувчи $\frac{\varepsilon\,\vartheta(x,t)}{\vartheta(x_0,t_0)} + M - u(x,t)$ функция $t=0$да ва $|x| = \left[\frac{1}{\varepsilon}(N-M)\vartheta(x_0,t_0) + |x_0|\right]^{\frac{1}{2}}$ да манфий эмас. Чегараланган соҳа учун экстремум принципига кўра [15, V боб, 1-§], бу функция (x_0,t_0) нуқта ётувчи $\left\{0 \leq t \leq T, \quad |x| \leq \left[\frac{1}{\xi}(N-M)\vartheta(x_0,t_0)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$ тўғри тўртбурчакни ҳамма ерида манфий бўлмаганлиги керак. Равшанки, бу тўғри тўртбурчакда

$u(x,t) \le M + \dfrac{\varepsilon\vartheta(x,t)}{\vartheta(x_0,t_0)}$, будан $u(x_0,t_0) \le M + \varepsilon$ ва ε сон ихтиёрий бўлгани учун, у холда $t \ge 0$да $u(x,t) \le M$ бўлади.

466. Кўрсатма. 465–масалада олинган тенгсизликларни $u_t = u_{xx}$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$ масаланинг $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ иккита ечимлари айирмасига қўлланг.

468. $u(x,t) = e^{2t} \cdot ch\, x$ (ечим ягона эмас).

2-§

469. $$u(x,t) = \frac{e^{-t}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi .$$

Кўрсатма. Изланаётган функцияни $u(x,t) = e^t\, \vartheta(x,t)$ формула бўйича алмаштириш натижасида $\vartheta(x,t)$ учун III бобнинг 2-§ даги (3.16), (3.17) масалага **(1–мисол)** келамиз.

470. $$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\xi .$$

471. $$u(x,t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi .$$

Кўрсатма. Изланаётган функцияни $u(x,t) = e^{-ht} \cdot \vartheta(x,t)$ формула бўйича алмаштириш натижасида $\vartheta(x,t)$ учун III бобнинг 2-§ даги (3.34), (3.35), (3.36) масалага **(2–мисол)** келамиз.

472. $$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi .$$

473. $$u(x,t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi .$$

Кўрсатма. Изланаётган функцияни $u(x,t)=e^{-ht}\cdot\vartheta(x,t)$ формул бўйича алмаштириш натижасида $\vartheta(x,t)$ учун 472–масалаг келамиз.

474. $$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\varphi(\tau)d\tau.$$

Кўрсатма. Фурьенинг синус алмаштириш формуласид фойдаланиб ечилади ҳамда кейинги масалаларни ечилиши қаранг.

475. Фурьенинг косинус алмаштириш формуласидан ва чегарави шарт $u_x(0,t)=\varphi(t)$, $0<t<+\infty$дан фойдаланиб қуйидагини ҳоси қиламиз:

$$\frac{dU_c(\lambda,t)}{dt}=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}\cos\lambda\xi\,d\xi=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\partial u}{\partial\xi}\cos\lambda\xi\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}+$$

$$+a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda\int_0^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial\xi}\sin\lambda\xi\,d\xi=-a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\varphi(t)+a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}u\cdot\lambda\sin\lambda\xi\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}-$$

$$-a^2\lambda^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}u(\xi,t)\cos\lambda\xi\,d\xi=-a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\varphi(t)-a^2\lambda^2U_c(\lambda,t),$$

476. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\xi.$$

477. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\xi.$$

478. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_0^{+\infty}e^{-h(t-\tau)}f(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\xi.$$

Кўрсатма. Изланаётган функцияни $u(x,t)=e^{-ht}\cdot\vartheta(x,t)$ форму бўйича алмаштириш натижасида $\vartheta(x,t)$ учун 476–масал келамиз.

479. $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{+\infty} e^{-h(t-\tau)}f(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\xi.$

Кўрсатма. Изланаётган функцияни $u(x,t)=e^{-ht}\vartheta(x,t)$ формула бўйича алмаштириш натижасида $\vartheta(x,t)$ учун 477–масалага келамиз.

480. $$u(x,t)=\frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{+\infty} e^{-h(t-\tau)}f(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\xi.$$

481. $$u(x,t)=\frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{+\infty} e^{-h(t-\tau)}f(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\xi.$$

482. Кўрсатма. Исботлашдан олдин қуйидагиларга эътибор бериш керак: $\overline{f}_c(\lambda)=e^{-\alpha\lambda^2}$ ва $\overline{g}_c(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2+h^2}$ Фурьенинг косинус алмаштиришлари учун оргинали қуйидаги кўринишда $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$, $g(x)=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-hx}$ бўлади.

483. Кўрсатма. Исботлашдан олдин қуйидагиларга эътибор бериш керак: $\overline{f}_c(\lambda)=e^{-\alpha\lambda^2}$ ва $\overline{g}_c(\lambda)=\frac{\lambda}{\lambda^2+h^2}$ Фурьенинг косинус алмаштиришлари учун оргинали қуйидаги кўринишда

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha}},\qquad g(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-hx}$$ бўлади.

484. $$u(x,t)=\frac{ah}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}-h\int_0^{+\infty}e^{-h\xi-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\right]d\tau=$$

$$=\frac{ah}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(t-\zeta)}{\sqrt{\zeta}}\left[e^{-\frac{x^2}{4a^2\zeta}}-h\int_0^{+\infty}e^{-h\xi-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2\zeta)}}d\xi\right]d\zeta.$$

Кўрсатма. Ечишда 482 ва 483 масалалардан фойдаланилади.

485. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}-2h\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2t}-h\eta}d\eta\right]f(\xi)d\xi.$$

3-§

486. $$u(x,t)=\frac{e^{-t}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)d\xi.$$

Кўрсатма. Изланаётган функцияни $u(x,t)=e^{-t}\cdot\vartheta(x,t)$ формула бўйича алмаштириш натижасида $\vartheta(x,t)$ учун III бобнинг 2-§ даги (3.16), (3.17) масалага (1–мисол) келамиз.

487. $$u(x,t)=\frac{e^{-2t}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)d\xi.$$

Кўрсатма. Изланаётган функцияни $u(x,t)=e^{-2t}\cdot\vartheta(x,t)$ формула бўйича алмаштириш натижасида $\vartheta(x,t)$ учун III бобнинг 2-§ даги (3.34), (3.35), (3.36) масалага (2–мисол) келамиз.

488. $$u(x,t)=\frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)d\xi.$$

Кўрсатма. Изланаётган функцияни $u(x,t)=e^{-ht}\cdot\vartheta(x,t)$ формула бўйича алмаштириш натижасида $\vartheta(x,t)$ учун III бобнинг 2-§ даги (3.16), (3.17) масалага (1–мисол) келамиз.

489. $$u(x,t)=\frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)d\xi.$$

490. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Бу формулани олиш учун, ёрдамчи масалани қараймиз:

$$U_t=a^2U_{xx}+F(x,t),\qquad U(x,0)=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0,$$

бу ерда

$$F(x,t)=\begin{cases}f(x,t), & x>0,\\ -f(-x,t), & x<0.\end{cases}\qquad (*)$$

Бу масаланинг ечими

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}F(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

формула билан берилади. (*) га кўра бу формула

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\xi,\tau)d\xi-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\xi,\tau)d\xi\right\}\cdot d\tau.$$

кўринишда ёзилади. Равшанки, $U_t=a^2U_{xx}+f(x,t),\ x>0,\ \ t>0,$ $U(0,t)=0,\ \ t\geq 0,\quad U(x,0)=0,\ \ x\geq 0$ ва $x\geq 0,\ t\geq 0$ да $U(x,t)=u(x,t)$ бўлади.

491. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

492. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^{\infty}\frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Кўрсатма: $u(x,t)=e^{-ht}\ \vartheta(x,t)$ алмаштириш ёрдамида $\vartheta(x,t)$ функция учун 490–масалага келамиз.

493. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^{\infty}\frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

494. $$u(x,t)=\frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

495. $$u(x,t)=\frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

4-§

502. $$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G(x,\xi;t)d\xi+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi;t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi$$, бу ер

$$G(x,\xi;t)=\frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},\quad -\infty<x,\xi<+\infty,\quad \xi\neq x,\quad t>0,$$

503. $$u(x,t)=U_0\cdot\left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right],\quad \Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\xi^2}d\xi.$$

504. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\psi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\varphi(\tau)\cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Кўрсатма. Агар $u(\xi,\tau)$ функция $u_\tau=a^2u_{\xi\xi}+f(\xi,\tau)$ тенгламанинг ечими бўлиб, $G(x,\xi;t-\tau)-$ 498 масаладаги Грин функцияси бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринлидир:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(Gu)=G\frac{\partial u}{\partial\tau}+u\frac{\partial G}{\partial\tau}=a^2\left[G\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-u\frac{\partial^2G}{\partial\xi^2}\right]+G\,f\,.$$

Бу тенгликни ξ бўйича 0 дан $+\infty$ гача, τ бўйича эса 0 дан $t-\alpha$ гача интеграллаб, $(0<\alpha<t)$ қуйидагини

$$\int_0^{+\infty}(Gu)\Big|_{\tau=t-\alpha}d\xi=\int_0^{+\infty}(Gu)\Big|_{\tau=0}d\xi-a^2\int_0^{t-\alpha}\left(u\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)\Big|_{\xi=0}d\tau+\int_0^{t-\alpha}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}G\,fd\xi$$

ҳосил қиламиз. Бу айниятни олишда $u(\xi,\tau)$ ва унинг ξ бўйича ҳосилалари $\xi\to+\infty$ да чегараланган бўлиши талаб қилинган.

Айниятда $\alpha\to0$ лимитга ўтиб, ҳамда

$$\lim_{\alpha\to0}\int_0^{+\infty}(G\,u)\Big|_{\tau=t-\alpha}d\xi=u(x,t)$$

ни ҳисобга олиб, юқоридаги ечимни оламиз.

505. $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]\psi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\tau)e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau\,.$$

Кўрсатма. 504- масалага ўхшаш ечилади.

506. $$u(x,t)=\int_0^l G_1(x,t;\xi,0)\,f(\xi)d\xi+a^2\int_0^t\frac{\partial G_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0}\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l g(\xi,\tau)G_1(x,t;\xi,\tau)d\xi,$$

бу ерда $G_1(x,t;\xi,\tau)-$ III бобнинг 3-§ даги (3.69) формула орқали аниқланади.

Кўрсатма: Қуйидаги тенглик

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(G_1 u)=G_1\frac{\partial u}{\partial\tau}+u\frac{\partial G_1}{\partial\tau}=a^2\left[G_1\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-u\frac{\partial^2 G_1}{\partial\xi^2}\right]+G_1\, g$$

ўринлидир. Бунда $u(\xi,\tau)$ функция $u_\tau=a^2u_{\xi\xi}+g(\xi,\tau)$ тенгламанинг ечими, $G_1(x,t;\xi,\tau)$ функция эса $G_\tau=-a^2G_{\xi\xi}$ тенгламанин ечимидир.

Бу тенгликни ξ бўйича 0 дан l гача, τ бўйича эса 0 дан $t-\alpha$ гача интеграллаб, $(0<\alpha<t)$ қуйидагини

$$\int_0^l (G_1 u)\Big|_{\tau=t-\alpha}d\xi=\int_0^l (G_1 u)\Big|_{\tau=0}d\xi+a^2\int_0^{t-\alpha}\left(G_1\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=l}d\tau-$$

$$-a^2\int_0^{t-\alpha}\left(u\frac{\partial G_1}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=l}d\tau+\int_0^{t-\alpha}d\tau\int_0^l G_1\cdot g(\xi,\tau)\,d\xi \qquad (\bullet\bullet)$$

ҳосил қиламиз.

$(\bullet\bullet)$ тенгликда $\alpha\to 0$ лимитга ўтиб [19, 230-233 бетлар] ҳамда $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^l (G_1 u)\Big|_{\tau=t-\alpha}d\xi=u(x,t)$ ни ҳисобга олиб, қуйидагига

$$u(x,t)=\int_0^l (G_1 u)\Big|_{\tau=0}d\xi+a^2\int_0^t\left(G_1\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=l}d\tau-a^2\int_0^t\left(u\frac{\partial G_1}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=l}d\tau$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l G_1\, g(\xi,\tau)\,d\xi$$

эга бўламиз. Бундан

$u(0,t)=\varphi(t),\ \ u(l,t)=0,\ \ 0<t<+\infty\ \ u(x,0)=f(x),\ \ 0<x<l.$ ва

$G_1(x,t;\xi,\tau)\Big|_{\xi=0}=0,\quad G_1(x,t;\xi,\tau)\Big|_{\xi=l}=0,\quad 0<x<l,\ \ 0<\tau<t$

ни ҳисобга олиб, қуйилган масалани ечимини олмиз:

$$u(x,t)=\int_0^l G_1(x,t;\xi,0)\,f(\xi)\,d\xi+a^2\int_0^t\frac{\partial G_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial\xi}\Bigg|_{\xi=0}\varphi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l g(\xi,\tau)\,G_1(x,t;\xi,\tau)\,d\xi.$$

507. $u(x,t)=\int_0^l G_2(x,t;\xi,0)\,f(\xi)\,d\xi-a^2\int_0^t G_2(x,t;0,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau+$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l g(\xi,\tau) G_2(x,t;\xi,\tau)\, d\xi,$$

бу ерда $G_2(x,t;\xi,\tau)-$ (3.73) формула оркали аникланади.

Кўрсатма. Бу масала 506- масалага ўхшаш ечилади, унда (••) тенгликдан фойдаланилади.

508. $$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} - 2h \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t} - h\eta} d\eta \right] \psi(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{ah}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} - h \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\eta)} - h\eta} d\eta \right] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} f(\xi,\tau) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - 2h \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2(t-\eta)} - h\eta} d\eta \right] d\xi .$$

Кўрсатма. Бу масала 505- масалага ўхшаш ечилади.

509. $$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \cdot exp\left(-\frac{1}{2a^2}(x-t) - \frac{1}{4a^2} t \right) \times$$

$$\times \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} f(\xi+\tau,\tau)\, e^{\frac{1}{2a^2}\xi + \frac{1}{4a^2}\tau} \left[e^{-\frac{(x-\xi-t)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi-t)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi,$$

$$t < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty .$$

Кўрсатма: Қўйилган масалада қуйидагича $\xi = x - t,\ t = t$ алмаштириш бажарилиб, сўнг янги $u(x,t) = e^{\alpha\xi + \beta t}\ \vartheta(x,t)$ функция киритиш асосида ечилади.

510.

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{\vartheta_0}{2a^2}(x-\vartheta_0 t) - \frac{\vartheta_0^2}{4a^2} t}}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{\vartheta_0}{2a^2}\xi} \left[e^{-\frac{(x-\xi-\vartheta_0 t)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi-\vartheta_0 t)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi$$

Кўрсатма. Бу масала 509 - масалага ўхшаш ечилади.

511. $$u(x,t)=\frac{e^{-\frac{\vartheta_0}{2a^2}(x-\vartheta_0 t)-\frac{\vartheta_0^2}{4a^2}t}(x-\vartheta_0 t)}{2a\sqrt{\pi}}\times$$

$$\times\int\limits_0^t\frac{\mu(\tau)\,e^{-\frac{\vartheta_0^2}{4a^2}\tau-\frac{(x-\vartheta_0 t)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\,d\tau .$$

Кўрсатма. Бу масала 509 - масалага ўхшаш ечилади.

512. $$u(x,t)=e^{-\frac{\vartheta_0}{2a^2}(x-\vartheta_0 t)-\frac{\vartheta_0^2}{4a^2}t}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{\vartheta_0}{2a^2}\xi}\left[e^{-\frac{(x-\xi-\vartheta_0 t)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi-\vartheta_0 t)^2}{4a^2t}}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\vartheta_0}{2a^2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{(x-\vartheta_0 t+\xi+\eta)^2}{4a^2t}-\frac{\vartheta_0}{2a^2}\eta}\,d\eta\right]d\xi-$$

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{e^{\frac{\vartheta_0^2}{4a^2}\tau}\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-\vartheta_0 t)^2}{4a^2(t-\tau)}}-\frac{\vartheta_0}{2a^2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{(x-\vartheta_0 t)^2}{4a^2(t-\eta)}-\frac{\vartheta_0}{2a^2}\eta}\,d\eta\right]d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^{+\infty}f(\xi+\vartheta_0\tau,\tau)\,e^{-\frac{\vartheta_0}{2a^2}\xi+\frac{\vartheta_0^2}{4a^2}\tau}\times$$

$$\left.\left[e^{-\frac{(x-\vartheta_0 t-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x-\vartheta_0 t+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-\frac{\vartheta_0}{2a^2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{(x-\vartheta_0 t+\xi+\eta)^2}{4a^2(t-\eta)}-\frac{\vartheta_0}{2a^2}\eta}\,d\eta\right]d\xi\right\}.$$

5-§

513. $$u(x,t)=\frac{2lA}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot e^{\left(-\frac{ak\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x .$$

514. $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\left[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}\right]^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x,$ бу ерда

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}dx.$$

515. $u(x,t)=\frac{8lA}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}e^{-\left(\frac{(2k+1)a\pi}{2l}\right)^2 t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}x.$

516. $u(x,t)=U.$

517. $u(x,t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{h^2+\lambda_k^2}{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h}\int_0^1\varphi(\xi)\cos\lambda_k\xi\,d\xi\right\}e^{-a^2\lambda_k^2 t}\cdot\cos\lambda_k x,$

бу ерда λ_k - $\lambda tg\,\lambda l=h$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

518. $u(x,t)=2U\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h-(-1)^k\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k\left[l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h\right]}e^{-a^2\lambda_k^2 t}\Phi_k(x),$

бу ерда $\Phi_k(x)=\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x,$ λ_k - $htg\,\lambda l=-\lambda$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

519. $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}\left(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x\right),$

бу ерда $a_k=\frac{2U}{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+2h}\left(\frac{h}{\lambda_k}+\frac{h^2+\lambda_k^2}{2\lambda_k^2}\sin\lambda_k l\right),$

λ_k - $ctg\lambda l=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{\lambda}\right)$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

520. $u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\,d\xi\right\}e^{-\left[\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2+\beta\right]t}\sin\frac{k\pi}{l}x.$

521. $u(x,t)=e^{-\left[\frac{a^2\pi^2}{4l^2}+\beta\right]t}\sin\frac{\pi}{2l}x.$ **522.** $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\left[\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2+\beta\right]t}\cos\frac{k\pi}{l}x,$

бу ерда $a_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)dx,$ $a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx,$ $k=1,2,3...$

523. $$u(x,t) = 2hU \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \left[l\left(h^2 + \lambda_k^2\right) + h \right]} e^{-(a^2\lambda_k^2 + \beta)t} \Phi_k(x),$$

бу ерда $\Phi_k(x) = \lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x$, λ_k - $h\, ctg\, \lambda l = \lambda$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

524. $$u(x,t) = \frac{(U-T)}{l} x + T + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[(-1)^k U - T \right] e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{l} x .$$

525. $$u(x,t) = \omega(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\frac{(2k+1)^2 a^2 \pi^2}{4l^2} t} \sin \frac{(k+1)\pi}{2l} x,$$

бу ерда $\omega(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x \left[\int_0^y f(\xi) d\xi \right] dy + \frac{x}{a^2} \int_0^l f(\xi) d\xi + qx,$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \left[\varphi(x) - \omega(x) \right] \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x\, dx .$$

526. $$u(x,t) = qx + \frac{(A-q)l}{2} -$$

$$-\frac{4l(A-q)}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\frac{(2k+1)^2 a^2 \pi^2}{l^2} t} \cos \frac{(2k+1)\pi}{l} x .$$

527. $$u(x,t) = \frac{U - hT}{1 + lh} x + T -$$

$$-2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^2 + \lambda_k^2}{\lambda_k \left[l\left(h^2 + \lambda_k^2\right) + h \right]} \left[T - \frac{(-1)^k U}{\sqrt{h^2 + \lambda_k^2}} \right] e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \sin \lambda_k x,$$

бу ерда λ_k - $h\, tg\, \lambda l = -\lambda$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

528. $$u(x,t) = \left[1 - e^{-\left[\beta + \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\right] t} \right] \sin \frac{\pi}{l} x \bigg/ \left[\beta + \left(\frac{a\pi}{l} \right)^2 \right].$$

529. $$u(x,t) = \frac{a\,A}{Cos\, \frac{l}{a}} e^{-t} \cdot \sin \frac{x}{a} +$$

$$+ \frac{2}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{T}{\omega_k} + \frac{(-1)^k A a^2}{1 - a^2 \omega_k^2} \right] e^{-a^2 \omega_k^2 t} \cdot \sin \omega_k x ,$$

бу ерда $\omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}$, $\omega_k \neq \frac{1}{a}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Кўрсатма. Қўйилган масаланинг ечими қуйидаги $u(x,t) = f(x)\epsilon^{-t} + \upsilon(x,t)$ кўринишда изланади. Бу ерда $\upsilon(x,t)$ функция бир жинсли тенглама ва чегаравий шартларни қаноатлантиради.

530. $$u(x,t) = -\frac{a^2 A}{2l}t^2 - \left(\frac{A}{2l}x^2 - Ax + \frac{Al}{3} - \frac{a^2 T}{l}\right)t + \frac{T}{2l}x^2 - \frac{lT}{6} +$$
$$+\frac{2l}{a^2\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\left\{Al^2 - \left[Al^2 + (-1)^k T(ak\pi)^2\right]e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\right\}\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

531. $$u(x,t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 t}\cos\frac{2n+1}{2}\pi x.$$

532. $$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot e^{-\left(\frac{\pi^2(2k+1)^2}{l^2}+1\right)t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

533. $$u(x,t) = -\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)^2}\sin(2k+1)x.$$

534. $$u(x,t) = x - l + \frac{8l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_k^2 t}}{(2k+1)^2}\cos\lambda_k x;\quad \lambda_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l}.$$

535. $u(x,t) = t\cos x + \frac{1}{8}\left(e^{-8t} - 1\right)\cos 3x$. **536.** $u(x,t) = xt + e^{x-t-\pi^2 t}\cdot\sin\pi x$.

537. $u(x,t) = x + t\sin x + \frac{1}{8}\left(1 - e^{-8t}\right)\sin 3x$.

538. $u(x,t) = tx^2 + \frac{1}{4}\left(e^{4t} - 1\right) + t\cos 2x$.

539. $u(x,t) = t + 1 + \left(1 - e^{-t}\right)e^x\cdot\sin x + e^{x-4t}\cdot\sin 2x$.

540. $u(x,t) = xt^2 + e^t + \sin t - \cos t + e^{-3t}\cos 2x$.

541. $u(x,t) = x^2 + 2e^{9t} + (2t - \sin 2t)\cdot\cos 3x$.

542. $u(x,t) = x + t^2 + \frac{1}{5}\left(e^{5t} - 1\right)\cos x + \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)\cos 3x$.

543. $$u(x,t) = x^2 t + x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_{2k-1}}{(2k-1)^2 - 6}\left\{1 - e^{-6(2k-1)^2 t}\right\}\sin(2k-1)x,$$

бу ерда $C_{2k-1}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-3}\right).$

544. $u(x,t)=t(x+1)+e^{-2x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{k^2\pi^2+4}\left[1-e^{-(k^2\pi^2+4)t}\right]\sin k\pi x,$ бу ерда

$$C_k=\begin{cases}0, & \text{агар} \quad k=2m,\\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2m-1}+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m-3}\right), & \text{агар} \quad k=2m-1.\end{cases}$$

545.. $u(x,y,t)=\sum_{k,n=1}^{\infty}a_{kn}e^{-a^2\omega_{kn}^2t}\sin\frac{\pi k}{p}x\cdot\sin\frac{\pi n}{s}y,$ бу ерда

$$a_{kn}=\frac{4}{ps}\int_0^p x\cdot\sin\frac{\pi k}{p}x\,dx\int_0^s y\cdot\sin\frac{\pi n}{s}y\,dy=\frac{4\cdot(-1)^{n+k}}{nk\pi^2},$$

$$\omega_{kn}^2=\frac{k^2\pi^2}{p^2}+\frac{n^2\pi^2}{s^2}$$

546. $u(x,y,t)=\sum_{k=1,n=0}^{\infty}a_{kn}e^{-a^2\omega_{kn}^2t}\sin\frac{\pi k}{s}y\cdot\cos\frac{\pi(2n+1)}{2p}x,$ бу ерда

$$a_{kn}=\frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s f(x,y)\sin\frac{\pi k}{s}y\cdot\cos\frac{\pi(2n+1)}{2p}x\,dxdy,\quad \omega_{kn}^2=\frac{k^2\pi^2}{s^2}+\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4p^2}.$$

547. $u(x,y,t)=\sum_{k=1,n=0}^{\infty}a_{kn}e^{-a^2\omega_{kn}^2t}\sin\mu_k x\cdot\cos\frac{\pi(2n+1)}{2s}y,$ бу ерда

$$a_{kn}=\frac{4\left(h^2+\mu_k^2\right)}{s\left[p\left(h^2+\mu_k^2\right)+h\right]}\int_0^p\int_0^s f(x,y)\sin\mu_k x\cdot\cos\frac{\pi(2n+1)}{2s}y\,dxdy,$$

$\omega_{kn}^2=\mu_k^2+\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4s^2},$ μ_k- $h\,tg\;p\mu=-\mu$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

548. $u(x,y,t)=\sum_{k=0,n=1}^{\infty}T_{kn}(t)\sin\frac{\pi ny}{s}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)x}{2p},$ бу ерда

$$T_{kn}(t)=\frac{4}{ps}\int_0^t e^{-a^2\omega_{kn}^2(t-\tau)}d\tau\int_0^p\int_0^s f(\xi,\eta,\tau)\sin\frac{\pi n\eta}{s}\sin\frac{\pi(2k+1)\xi}{2p}d\xi d\eta,$$

$$\omega_{kn}^2=\frac{n^2\pi^2}{s^2}+\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4p^2}.$$

549. $$u(x,y,t)=Be^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2}\right)t}\sin\frac{\pi x}{2p}\cos\frac{3\pi y}{2s}+\frac{4A}{a^2\pi^2\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)}\times$$
$$\times\left[1-e^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)t}\right]\sin\frac{3\pi x}{2p}\cos\frac{\pi y}{2s}.$$

550. $$u(x,y,t)=\frac{A}{a^2\pi^2\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4s^2}\right)-1}\left[e^{-t}-e^{-a^2\pi^2\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4s^2}\right)t}\right]\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{2s}.$$

IV БОБ

1-§

551. a) $k=0$; **b)** $k=-1$; **c)** $k=\pm 2i$; **d)** $k=\pm 3i$; **e)** $k=\pm 2$.

552. *a*) ҳа; *b*) ҳа; *c*) ҳа; *d*) ҳа; *e*) ҳа; *f*) ҳа; **Кўрсатма.** Шуни ҳисобга олиш керакки, $u=u(x,y)$ гармоник функцияни бирор $f(z)$ аналитик функциянинг ҳақиқий қисми $u(x,y)=Re\,f(z)$, $z=x+iy$ деб қабул қилиб, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитик функциянинг таърифларидан фойдаланиб, $v(x,y)=Im\,f(z)$ функцияни қуриш мумкин. Бу функциялар учун Коши – Риман шарти $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ кўринишда бўлади. Равшанки, $\omega(z)=u_x+iv_x$ функция Коши – Риман шартига кўра аналитик функция бўлиб, $\omega(z)=u_x-iu_y$ кўринишга эга бўлади. Худди шундай, ушбу

$$\frac{1}{\omega(z)}=\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

функция ҳам аналитикдир, аналитик функциянинг таърифига кўра унинг ҳақиқий қисми гармоникдир; *g*) йўқ; *h*) ҳа; *i*) йўқ. **553. a)** ҳа; **b)** ҳа; **c)** йўқ; **d)** йўқ; **e)** ҳа.

554. a) $f(z)=z+\frac{1}{z}+c,\ \ z=x+iy$;

b) $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)+c,\ c=const$;

c) $f(z)=e^x\sin y-ie^x\cos y+c,\ \ c=const$;

d) $f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+i\,e^x\,(x\sin y+y\cos y)$;

e) $f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

555. a) $v(x,y)=\frac{1}{4}\left(x^4+y^4-6x^2y^2\right)+c$;

b) $v(x,y)=sh x\sin y+c$;

c) $v(x,y)=-ch x\cos y+c_0x+c_1$;

d) $v(x,y)=e^y\cos x+c$.

556. a) $u(x,y)=yx^3-xy^3+c_0y+c_1$;

b) $u(x,y)=x^2y-\dfrac{y^3}{3}+xy-\dfrac{x^2-y^2}{2}+c_0x+c_1;$

c) $u(x,y)=e^x\sin y+c_0x+c_1;$

d) $u(x,y,z)=ye^x\cos z-y^2+z^2+g(x,y);$

e) $u(x,y,z)=xy^2z-\dfrac{xz^3}{3}+3xz^2-x^3+xz+g(x,y).$

§ 2

563. Кўрсатма. Исботлашда қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

$$\frac{d}{dz}F(a,b,c;z)=\frac{a\cdot b}{c}F(a+1,b+1,c+1;z),$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^aF(a,b,c;z)\right]=a\cdot z^{a-1}F(a+1,b,c;z),$$

$F(a,b,c;z)-$ гипергеометрик функция [2].

564. Кўрсатма. Исботлашда 563- масаладаги формулалардан фойдаланилади.

§ 3

569. a) $\Delta u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2};$

b) $\Delta u=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}.$

570. a) $u(r,\varphi)=A$; **b)** $u(r,\varphi)=\dfrac{A}{a}r\cos\varphi$; **c)** $u=A+By$ ёки

$u(r,\varphi)=a+Br\sin\varphi$; **d)** $u=Axy$ ёки $u(r,\varphi)=\dfrac{A}{2}r^2\sin2\varphi;$

e) $u=A+\dfrac{B}{a}y$ ёки $u(r,\varphi)=A+\dfrac{B}{a}r\sin\varphi;$

f) $u=\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{B-A}{2a^2}\left(x^2-y^2\right)$ ёки

$$u(r,\varphi)=\frac{A}{2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\cos2\varphi\right)+\frac{B}{2}\left(1+\frac{r^2}{a^2}\cos2\varphi\right).$$

571. a) $u(x,y)=x\left(1-x^2+3y^2\right)$; **b)** $u(x,y)=-\dfrac{R^2}{2}+\dfrac{3}{2}\left(x^2-y^2\right).$

Кўрсатма. (4.20) формулага кўра қўйилган масала ечилади. Ҳақиқатан, ҳам $x = r\,cos\,\varphi, \quad y = r\,sin\,\varphi$ деб $g(x,y) = -\frac{R^2}{2} + \frac{3R^2}{2}cos\,2\varphi$ эга бўламиз. У ҳолда чегаравий шарт ва (4.20) га асосан

$$\sum_{k=0}^{\infty} R^k\left(a_k cos\,k\,\varphi + b_k sin\,k\,\varphi\right) = -\frac{R^2}{2} + \frac{3}{2}R^2 cos\,2\varphi$$

ҳосил қиламиз. $Cosk\varphi$ ва $Sink\varphi$ функцияларнинг олдидаги коэффициентларни тенглаштириб

$$a_0 = -\frac{R^2}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_k = 0, k > 3, \quad b_k = 0, \quad k = 0,1,2,...$$

га эга бўламиз. Демак, берилган масаланинг ечими

$$u(x,y) = -\frac{R^2}{2} + \frac{3}{2}r^2 cos\,2\varphi = -\frac{R^2}{2} + \frac{3}{2}r^2\left(cos^2\varphi - sin^2\varphi\right) = -\frac{R^2}{2} + \frac{3}{2}\left(x^2 - y^2\right)$$

кўринишда бўлади. **c), d), e)** ва **f)** ҳолларда ҳам худди шундай кўрсатилади.

572. *a)* $u(x,y) = \frac{R^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4(x^2 - y^2) + \left(\frac{R}{r}\right)^2(x + y);$

b) $u(x,y) = R^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^4(x^2 - y^2) - \left(\frac{R}{r}\right)^2(x - y);$

c) $u(x,y) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 y + 2\left(\frac{R}{r}\right)^4 xy;$ *d)* $u(x,y) = \frac{R^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4(x^2 - y^2 + 2xy);$

e) $u(x,y) = \left(\frac{R}{r}\right)^4(x^2 - y^2);$ *f)* $u(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4(x^2 - y^2) + \frac{R^2}{2} + 1;$

g) $u(r,\varphi) = A$; **h)** $u(r,\varphi) = \frac{AR}{r}cos\,\varphi$;

i) $u(r,\varphi) = A + \frac{BR^2}{r}sin\,\varphi$;

j) $u(r,\varphi) = \frac{A}{2}\frac{R^4}{r^2}sin\,2\varphi$; **k)** $u(r,\varphi) = A + \frac{BR}{r}sin\,\varphi$;

l) $u = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2r^2}\cdot R^2 cos\,2\varphi$.

573. **a)** $u(x,y) = x^2 + y^2 - R^2 + 1$; **b)** $u(x,y) = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)$;

c) $u(x,y) = \frac{1}{8}\left(x^3 + xy^2 - R^2x\right)$; **d)** $u(x,y) = \frac{1}{32}\left[\left(x^2 + y^2\right)^2 - 1\right]\left(x^2 - y^2\right)$.

Кўрсатма. Қўйилган масалани хусусий ечими танлаш усулида топилади ва масала Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласига келтирилади.

574. a) $u(x,y)=-\frac{AR}{4}\left(x^2-y^2\right)+const$, агар $B=\frac{AR^2}{2}$ бўлса. Агар $B\neq\frac{AR^2}{2}$ бўлса, у ҳолда масала тўғри қўйилмаган;

b) $u(x,y)=\frac{R}{2}\left(x^2-y^2\right)+const$, агар $A=\frac{R}{2}$ бўлса. Агар $A\neq\frac{R}{2}$ бўлса, у ҳолда масала тўғри қўйилмаган.

Кўрсатма. Масала (4.20) формуладан фойдаланиб ечилади;

c) Масала тўғри қўйилмаган, чунки $\int\limits_{c}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$ шарт бажарилмайди.

d) $u(x,y)=const$, агар $A=0$ бўлса. Агар $A\neq 0$ бўлса, у ҳолда масала тўғри қўйилмаган;

e) $u(x,y)=R\,x\,y+const$;

f) $u(x,y)=\frac{AR}{2}\left(x^2-y^2\right)+R\,y+const$, агар $A=B$ бўлса. Агар $A\neq B$ бўлса, у ҳолда масала тўғри қўйилмаган.

575. a) $u(x,y)=\frac{R^5}{4r^4}\left(x^2-y^2\right)+const$, агар $A=\frac{R^2}{2}$ бўлса. Агар $A\neq\frac{R^2}{2}$ бўлса, у ҳолда масала тўғри қўйилмаган.

Кўрсатма. (4.22) формуладан фойдаланиб ечилади;

b) $u(x,y)=\frac{AR^5}{4r^4}\left(x^2-y^2\right)-\frac{R^5}{r^4}x\,y+const$, агар $B=\frac{AR^2}{2}$ бўлса. Агар $B\neq\frac{AR^2}{2}$ бўлса, у ҳолда масала тўғри қўйилмаган;

c) $u(x,y)=\frac{R^5}{4r^4}\left(y^2-x^2\right)-\frac{AR^3}{r^2}y+const$, агар $B=\frac{R^2}{2}$ бўлса. Агар $B\neq\frac{R^2}{2}$ бўлса, у ҳолда масала тўғри қўйилмаган;

d) $u(x,y)=\frac{(1+A)R^5}{4r^4}\left(y^2-x^2\right)+const$, агар $B=(A-1)\frac{R^2}{2}$ бўлса. Агар $B\neq(A-1)\frac{R^2}{2}$ бўлса, у ҳолда масала тўғри қўйилмаган.

576. **a)** $u(r,\varphi)=Aar\cos\varphi+C$; **b)** $u(r,\varphi)=\frac{A}{2}ar^2\cos2\varphi+C$;

c) $u(r,\varphi)=Ar\cos\varphi+C$; **d)** $u(r,\varphi)=\left(A+\frac{3}{4}B\right)r\sin\varphi+\frac{B}{12a^2}r^3\sin3\varphi+C$.

Кўрсатма. **a)** ҳоли учун кўрсатамиз. $u=Dr\cos\varphi$ гармоник функция бўлганлиги учун, унинг нормал бўйинча ҳосиласи r бўйинча ҳосилага мос келади. Берилган чегаравий шартга кўра $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=D\cos\varphi=Aa\cos\varphi\;\Rightarrow\;D=Aa$. Демак, берилган масаланинг ечими $u(r,\varphi)=Aar\cos\varphi$ кўринишда бўлади.

577. **c)** ва **e)** ҳолларда масала ечимга эга эмас, чунки $\int_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$ шарт бажарилмайди.

a) $u(r,\varphi)=-\frac{Aa^3}{r}\cos\varphi+const$; **b)** $u(r,\varphi)=-\frac{Aa^5}{2r^2}\cos2\varphi+const$;

d) $u(r,\varphi)=-\left(A+\frac{3}{4}B\right)\frac{a^2}{r}\sin\varphi+\frac{a^4}{12r^3}\sin3\varphi+C$.

578. **a)** $u(r,\varphi)=\frac{r}{R-R_1}\cos\varphi+const$;

b) $u(r,\varphi)=\frac{r^2\cos2\varphi}{2(R^2-R_1^2)}+const$, агар $C=-\frac{1}{2}$ бўлса. Агар $C\neq-\frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда $\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0$ шарт бажарилмайди;

c) $u(r,\varphi)=\frac{r^2\sin2\varphi}{R^2-R_1^2}+\frac{r^3\cos3\varphi}{R^3-R_1^3}+const$;

d) $u(r,\varphi)=A\cdot\frac{r^2\cos2\varphi}{R^2-R_1^2}+const$, агар $B=-A$ бўлса. Агар $B\neq-A$ бўлса, у ҳолда $\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0$ шарт бажарилмайди;

e) $u(r,\varphi)=\frac{r\sin\varphi}{R-R_1}+\frac{3r^2\cos2\varphi}{2(R^2-R_1^2)}+const$, агар $C=\frac{3}{2}$ бўлса. Агар $C\neq\frac{3}{2}$ бўлса, у ҳолда $\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0$ шарт бажарилмайди;

f) $u(r,\varphi)=\dfrac{r}{R-R_1}\sin\varphi+const.$

Кўрсатма. f) ҳолда масала ечими (4.20) формула ёрдамида изланади. У ҳолда

$$u(R,\varphi)-u(R_1,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(R^k-R_1^k\right)(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)=\sin\varphi\,.$$

$Cosk\varphi$ ва $Sink\varphi$ функцияларнинг олдидаги коэффициентларни тенглаштириб $b_1=\dfrac{1}{R-R_1}$, $b_k=0$, $k>2$, $a_k=0$, $k=1,2,\dots$ га эга бўламиз. Демак, берилган масаланинг ечими $u(r,\varphi)=\dfrac{r}{R-R_1}\sin\varphi+a_0$, $a_0=const$ кўринишда топамиз.

579. a) $u(r,\varphi)=\dfrac{3R^2R_1^2\sin 2\varphi}{(R_1^2-R^2)r^2}+const.$

Кўрсатма. a) ҳолда масала ечими (4.22) формула ёрдамида изланади. У ҳолда

$$u(R,\varphi)-u(R_1,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(R^{-k}-R_1^{-k}\right)(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)=3\sin 2\varphi.$$

$\cos k\varphi$ ва $\sin k\varphi$ функциялар олдидаги коэффициентларни таққослаб, қуйидагига

$$a_1=a_2=\dots=0 \quad b_1=b_3=\dots=0 \quad b_3=\frac{3R^2R_1^2}{R_1^2-R^2}.$$

эга бўламиз. Бундан ва (4.22) формулага кўра масала ечими топилади: $u(r,\varphi)=\dfrac{3R^2R_1^2\sin 2\varphi}{(R_1^2-R^2)r^2}+a_0$, $a_0=const$;

b) $u(r,\varphi)=\dfrac{5R^2R_1^2\cos 2\varphi}{2(R_1^2-R^2)r^2}+const$, агар $A=\dfrac{5}{2}$ бўлса.

Агар $A\neq\dfrac{5}{2}$ бўлса, у ҳолда масала тўғри қўйилмаган, яъни қуйидаги $\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0$ шарт бажарилмайди;

c) Масала ечимга эга эмас, яъни қуйидаги $\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0$ шарт бажарилмайди;

d) $u(r,\varphi)=\dfrac{R\,R_1 sin\,\varphi}{(R_1-R)r}+\dfrac{3R^2R_1^2\,cos\,2\varphi}{2(R_1^2-R^2)r^2}+const,$ агар $A=\dfrac{3}{2}$ бўлса.

Агар $A\neq\dfrac{3}{2}$ бўлса, у ҳолда масала тўғри қўйилмаган, яъни қуйидаги $\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0$ шарт бажарилмайди;

e) $u(r,\varphi)=\dfrac{R\,R_1 sin\,\varphi}{(R_1-R)r}+\dfrac{R^5R_1^5\,cos\,5\varphi}{2(R_1^5-R^5)r^5}+const.$

580. a) $u=T+bU\,ln\dfrac{r}{a}$; **b)** $u=aT\,ln\,r+const$, агар $aT=bU$ бўлса.

Агар $aT\neq bU$ бўлса, у ҳолда масала тўғри қўйилмаган;

c) $u=U+\left[a(T+hU)\,ln\dfrac{r}{b}\right]\Big/\left[1+a\,h\,ln\dfrac{b}{a}\right]$;

d) $u=\dfrac{bU-aT}{ah}+bU\,ln\dfrac{r}{a}$;

e) $u=\left[abh\left(T\,ln\dfrac{r}{b}+U\,ln\dfrac{r}{a}\right)+bU-aT\right]\Big/h\cdot\left(a+b+abh\,ln\dfrac{b}{a}\right).$

581. a) $u(a)=\left[T_0\,ln\dfrac{b}{a}-T\,ln\dfrac{c}{a}\right]\Big/ln\dfrac{b}{c}$; **b)** $u(a)=T-bU\,ln\dfrac{c}{a}$;

c) $u(a)=\left[T(1+hb\,ln\dfrac{b}{a})-bW\,ln\dfrac{c}{a}\right]\Big/\left[1+bh\,ln\dfrac{b}{c}\right]$;

d) $u(a)=T-cU\,ln\dfrac{b}{a}.$

582. a) $u(a)=a-b+T-c(U-1)\,ln\dfrac{a}{b}$;

b) $u(a)=a-c+T_0+(T-T_0+c-d)\,ln\dfrac{a}{c}\Big/ln\dfrac{d}{c}$;

$$u_r(b)=1+\left(T-T_0+c-d\right)\Big/b\,ln\dfrac{d}{c};$$

c) $u_r(a)=\dfrac{a+(U-1)d}{a}$; $u(b)=b-c+T-d(U-1)\,ln\dfrac{b}{c}$;

d) $u(a)=a-c+T+(T-T_0)\,ln\dfrac{a}{c}\Big/(c-b)\,ln\dfrac{c}{b}.$

583. a) $u(r,\varphi)=\dfrac{1}{2}\left(1+r^2cos\,2\varphi\right)$; **b)** $u(r,\varphi)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{r^2}{2}cos\,2\varphi+\dfrac{r^4}{8}Cos\,4\varphi$;

c) $u(r,\varphi)=\frac{r}{4}\left(3\sin\varphi-r^2\sin3\varphi\right)$; **d)** $u(r,\varphi)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}r^4\cos4\varphi$;

e) $u(r,\varphi)=\frac{r\sin\varphi}{r^2+4r\cos\varphi+4}$.

584. a) $u(r,\varphi)=r\cdot\cos\varphi+C$; **b)** $u(r,\varphi)=\frac{A}{2R}r^2\cos2\varphi+C$;

c) $u(r,\varphi)=\frac{1}{4}\left(3r\sin\varphi-\frac{r^3}{3R^2}\sin3\varphi\right)+C$, бу ерда C - ихтиёрий ўзгармас сон.

585. a) $u(r,\varphi)=u_1+(u_2-u_1)\frac{\ln r}{\ln2}$; **b)** $u(r,\varphi)=\frac{3}{2}\frac{\ln r}{\ln 2}+\left(\frac{2}{3r^2}-\frac{1}{6}r^2\right)\cos2\varphi$.

586. a) $u(r,\theta)=\frac{r}{R}\cdot\cos\theta$; **b)** $u(r,\theta)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)+\frac{r^2}{R^2}\cos^2\theta$;

c) $u(r,\theta)=\frac{3}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2P_2(\cos\theta)-\frac{1}{3}$; **d)** $u(r,\theta)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2P_2(\cos\theta)$, бу ерда $P_n(\xi)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(\xi^2-1)^n}{d\xi^n}$ Лежандр кўпҳади бўлиб[2], ҳусусий холларда $P_0(\xi)=1$, $P_0(\xi)=\xi$, $P_2(\xi)=\frac{1}{2}(2\xi^2-1)$, $P_3(\xi)=\frac{1}{2}(5\xi^2-3\xi)$, $P_4(\xi)=\frac{1}{8}(35\xi^4-30\xi^2+3)$ кўринишда бўлади. **Кўрсатма.** Берилган тенгламанинг ушбу

$$u_n(r,\theta)=\left[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\vartheta)$$

хусусий ечимидан фойдаланилади.

587. $u(r,\theta)=\frac{4}{3}+\frac{2r^3}{3R(R+2)}P_2(\cos\theta)$.

588. a) $u(r,\theta)==-\frac{2R^2}{3r}+\frac{R^4}{9r^3}\left(3\cos^2\theta-1\right)+C$;,

b) $u(r.\theta)=C+\left(\frac{2}{3}-C\right)\frac{R^2}{r(R+1)}-\frac{R^4}{(R+3)r^3}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)$;

c) $u(r,\theta)=C--\frac{A}{2}\frac{R^3}{r^2}\cos\theta$, бу ерда C - ихтиёрий ўзгармас сон.

Кўрсатма. Ечимни куйидаги кўринишда излаш керак:

$$u_n(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\,r^{-(n+1)}\,P_n(\cos\theta).$$

589. a) $u(r,\theta)=\frac{1}{3r}+\frac{3\cos^2\theta-1}{3r^2}$; **b)** $u(r,\theta)=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{r}-1+r^2\left(3\cos^2\theta-1\right)\right]$;

c) $u(r,\theta)=\frac{8}{3r}-\frac{4}{3}+\left(\frac{8}{7}r-\frac{8}{7r^2}\right)P_1(\cos\theta)+\left(\frac{4}{93}r^2-\frac{128}{93r^3}\right)P_2(\cos\theta)$;

d) $u(r,\theta)=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{14}\left(\frac{8}{r^2}-r\right)P_1(\cos\theta)+\frac{32}{93}\left(r^2-\frac{1}{r^3}\right)P_2(\cos\theta)$;

e) $u(r,\theta)=\frac{2}{r}-5+4\left(\frac{4}{r^3}-r^2\right)P_2(\cos\theta)$.

Кўрсатма. Масала ечимини

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\,r^n+B_n\,r^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta)$$

кўринишда излаш керак, бу ерда

$$P_n(\xi)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot n}\left\{\xi^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\xi^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}\xi^{n-4}-\ldots\right]=$$

$=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(\xi^n-1)^n}{d\xi^n}$ - Лежандр кўпҳади[2].

§ 4

597. $G(x,y,z:\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}-2\int_{\zeta}^{\infty}e^{-h(\zeta-s)}\frac{ds}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+s)^2}}\right]$,

бу ерда $\left.\begin{matrix}r^2\\r_1^2\end{matrix}\right\}=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z\mp\zeta)^2$.

Кўрсатма. Грин функцияси $G=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)+v(x-\xi,y-\eta,z+\zeta)$ кўринишда изланади. Буни $\left[\frac{\partial u}{\partial z}+h\,u\right]\Bigg|_{z=0}=0$ шартга қўйиб, қуйидагини

$$v(x-\xi,y-\eta,z+\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta}^{\infty}e^{-h(\zeta-s)}\frac{ds}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+s)^2}}$$

топамиз.

598.

$$1)\quad G(x,y,z:\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{1}(-1)^{k}\left(\frac{1}{|\overline{x}-\overline{y}_{00k}|}-\frac{R}{|\overline{y}||\overline{x}-\overline{y}^{*}_{00k}|}\right),$$

бу ерда

$$\overline{y}_{mnk}=\left((-1)^{m}\xi,(-1)^{n}\eta,(-1)^{k}\zeta\right),\quad \overline{y}^{*}_{mnk}=\frac{R^{2}}{\xi^{2}+\eta^{2}+\zeta^{2}}\overline{y}_{mnk},$$

$$\overline{x}=(x,y,z),\quad \overline{y}=(\xi,\eta,\zeta),\quad |\overline{x}-\overline{y}|^{2}=(x-\xi)^{2}+(y-\eta)^{2}+(z-\zeta)^{2},$$

$$|\overline{x}|^{2}=x^{2}+y^{2}+z^{2},\quad |\overline{y}|^{2}=\xi^{2}+\eta^{2}+\zeta^{2},\quad |\overline{y}_{mnk}|\cdot|\overline{y}^{*}_{mnk}|=R^{2}.$$

Кўрсатма. Акслантириш усули ёрдамида топилади.

$$2)\quad G(\overline{x},\overline{y})=\frac{1}{4\pi}\sum_{n,k=0}^{1}(-1)^{n+k}\left(\frac{1}{|\overline{x}-\overline{y}_{0nk}|}-\frac{R}{|\overline{y}||\overline{x}-\overline{y}^{*}_{0nk}|}\right);$$

$$3)\quad G(\overline{x},\overline{y})=\frac{1}{4\pi}\sum_{m,n,k=0}^{1}(-1)^{m+n+k}\left(\frac{1}{|\overline{x}-\overline{y}_{mnk}|}-\frac{R}{|\overline{y}||\overline{x}-\overline{y}^{*}_{mnk}|}\right).$$

599. 1) $G(z,\zeta)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\left|\dfrac{z+\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|,\quad z=x+iy,\quad \zeta=\xi+i\eta.$

Кўрсатма. Ушбу

$$G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\omega(z,\zeta)|},\quad \omega(z,\zeta)=\frac{\omega(z)-\omega(\zeta)}{1-\omega(z)\omega(\zeta)}$$

формуладан фойдаланиб топилади.

$$2)\quad G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z^{2}-\overline{\zeta}^{2}}{z^{2}-\zeta^{2}}\right|;\quad 3)\quad G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|R^{2}-z\overline{\zeta}^{2}|}{R|z-\zeta|};$$

$$4)\quad G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z-\overline{\zeta}||R^{2}-z\overline{\zeta}^{2}|}{|z-\zeta||R^{2}-z\zeta^{2}|};$$

$$5)\quad G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^{2}-\zeta^{2}||R^{4}-(z\overline{\zeta})^{2}|}{|z^{2}-\zeta^{2}||R^{4}-(z\zeta)^{2}|};$$

$$6)\quad G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|e^{z}-e^{\overline{\zeta}}|}{|e^{z}-e^{\zeta}|};\quad 7)\quad G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|chz-ch\overline{\zeta}|}{|chz-ch\zeta|}.$$

600. $G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_0r_1}-\ln\frac{1}{r^2r_2r_3}\right]$, бу ерда

$$\left.\begin{matrix} r_0^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\}=(x-\xi)^2+(y\mp\eta)^2,\quad \left.\begin{matrix} r_2^2 \\ r_3^2 \end{matrix}\right\}=(\overline{x}-\xi)^2+(\overline{y}\mp\eta)^2,$$

$$r^2=x^2+y^2,\qquad \overline{x}=\frac{x}{r^2},\quad \overline{y}=\frac{y}{r^2}. \tag{1}$$

Масаланинг ечими:

$$u(x,y)=\int_{-1}^{1}G(x,y;\xi,\eta,0)\nu(\xi)\,d\xi+\int_{0}^{l}\frac{\partial G}{\partial\eta}\varphi(s)\,ds \tag{2}$$

s – (1,0) нуктадан ҳисобланадиган ёй узунлиги, $0\leq s\leq l$.

Кўрсатма. (2) ечим IV бобнинг 4 §даги (4.70) формулага асосан топилади.

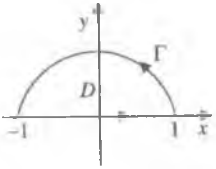
601. $G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{r_1}{r_0}-\ln\frac{r_3}{r_2}\right]$, бу ерда r_0, r_1, r_2, r_3 - (1)дан аниқланади.

Масаланинг ечими:

$$u(x,y)=\int_{-1}^{1}\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta,0)}{\partial\eta}\tau(\xi)\,d\xi+\int_{0}^{l}\varphi(s)\frac{\partial G}{\partial\eta}ds \tag{3}$$

Кўрсатма. (3) ечим IV бобнинг 4 §даги (4.70) формулага асосан топилади.

602. D соҳа қуйидагидан



иборат.

$$G(x,y;x_0,y_0)=q_2(x,y;x_0,y_0)-\left(\frac{1}{R}\right)^{2\beta}q_2(x,y;\overline{x}_0,\overline{y}_0),$$

бу ерда $R^2=x_0^2+\frac{4}{(m+2)^2}y_0^{m+2}$,

$$2\beta=\frac{m}{m+2},\quad \overline{x}_0=\frac{1}{R^2}x_0,\quad \overline{y}_0^{\frac{m+2}{2}}=\frac{1}{R^2}y^{\frac{m+2}{2}},$$

$$q_2(x,y;x_0,y_0)=k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}\times$$

$$\times\left(r_1^2\right)^{-\beta}\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right)^{1-2\beta}\cdot F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;1-\frac{r_1^2}{r^2}\right)$$

$Lu\equiv y^m u_{xx}+u_{yy}=0,\quad y>0$ тенгламанинг фундаментал ечими,

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\}=\left(x-x_0\right)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}\mp y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}$, $F(a,b,c,z)$ гипергеометрик функция[2]. Масаланинг ечими:

$$u(x_0,y_0)=\int_{-1}^{1}\tau(x)\frac{\partial G_2(x,0;x_0,y_0)}{\partial y}dx-$$

$$-\int_0^l\varphi(s)A_s\left[G_2(\xi,\eta;x_0,y_0)\right]ds\,, \tag{4}$$

бу ерда $A_s[\cdot]=y^m\frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial y}$, s - ёй узунлиги.

Кўрсатма. (4) ечим

$$\int_{\partial D}\left\{uA_S[G_2]-G_2A_S[u]\right\}ds=0,\quad \partial D=[-\vec{1};1]\cup\vec{\Gamma} \tag{5}$$

формулага асосан топилади [17].

603. $G_1(x,y;x_0,y_0)=q_2(x,y;x_0,y_0)-\left(\frac{1}{R}\right)^{2\beta}q_2(x,y;\overline{x}_0,\overline{y}_0)$,

R, $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$, β, r, r_1 - 602 масалада аниқланган,

$$q_1(x,y;x_0,y_0)=k_1\left(r_1^2\right)^{-\beta}\cdot F\left(\beta,\beta,2\beta;1-\frac{r_1^2}{r^2}\right)$$

- $Lu=0$ тенгламанинг фундаментал ечими, Қўйилган масаланинг ечими:

$$u(x_0,y_0)=-\int_{-1}^{1}\nu(x)G_1(x,0;x_0,y_0)dx-$$

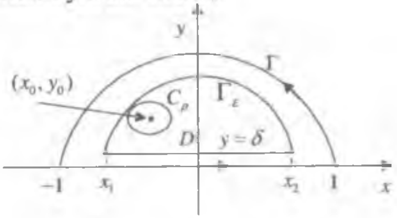
$$-\int_0^l \varphi(s) A_s\left[G_1(\xi,\eta;x_0,y_0)\right]ds \tag{6}$$

Кўрсатма. (6) масала ечимини олиш учун (5) формулани қўллаймиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon}\left\{G_1A_S[u]-uA_S[G_1]\right\}ds+\int_{x_1}^{x_2}\left[u\frac{\partial G_1}{\partial y}-G_1\frac{\partial u}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=\delta}=$$

$$=\int_{C_\rho}\left\{G_1A_S[u]-uA_S[G_1]\right\}ds, \tag{7}$$

бу ерда x_1 ва x_2 нуқталар Γ_ε ва $y=\delta$ чизикларнинг кесишган ўрни, C_ρ - маркази (x_0,y_0), радиуси ρ бўлган доира, Γ_ε - соҳа ичида Γ чизикқа параллел бўлган чизиқ.



(7) да $\varepsilon\to 0$, $\rho\to 0$, $\delta\to 0$ интилтириб, сўнг [17]:

$$G_1\big|_\Gamma=0,\qquad \frac{\partial G_1}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0$$

ва

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\left\{\left[G_1A_S(u)-u\,A_S(G_1)\right]\right\}ds=u(x_0,y_0) \tag{8}$$

тенгликни эътиборга олиб, (6) ни ҳосил қиламиз.

604. 1) $u(x,y,z)=\left(e^{-\sqrt{2}z}-e^{-z}\right)\sin x\cos y$;

2) $u(x,y,z)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}arctg\,\dfrac{y-x}{\sqrt{2}\,z}$;

3) $u(x,y,z)=\left(x^2+y^2+(1+z)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$;

4) $u(x,y,z)=\left(x^2+y^2+(1+z)^2\right)^{-1}$.

Кўрсатма. Ярим фазода қўйилган Дирихле масаласини ечишда IV бобнинг 4 §даги (4.80) формуладан фойдалинилади.

605. 1) $$u(x)=\frac{x_3}{\pi}\int\limits_{y_2=0,\, y_3\geq 0} u_0(y)\left[\frac{1}{|x-y|^3}-\frac{1}{|x-y_{001}|^3}\right]ds_y+$$

$$+\frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{y_2\geq 0,\; y_3=0} u_0(y)\left[\frac{1}{|x-y|^3}-\frac{1}{|x-y_{010}|^3}\right]ds_y,$$

бу ерда, $y_{m.n.k}=\left((-1)^m y_1,\, (-1)^n y_2,\, (-1)^k y_3\right),\;\; x=(x_1, x_2, x_3),$

$$|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2};$$

$$|x-y_{001}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2};$$

$$|x-y_{010}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3-y_3)^2}\,.$$

2) $u(x)=e^{-4x_1-3x_3}sin5x_2$; **3)** $u(x)=x_2\left(x_1^2+x_2^2+(1+x_3)^2\right)^{-\frac{3}{2}}$.

606. $$u(x)=\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|y|=R}\varphi(y)\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^2}ds_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|y|\leq R}\left[\frac{1}{|x-y|}-\frac{R}{|y||x-y^*|}\right]f(y)dy, \qquad (9)$$

бу ерда, $y^*=yR^2/|y|^2$ нукта $|y|=R$ сферага нисбатан y нуқтага симметрик нуқта.

Кўрсатма. Масалани ечишда IV боб 4 § даги (4.64), (4.66) Грин функцияси ва унинг хоссаларидан, ҳамда (4.72) формуладан фойдаланилади.

607. $u(x)=\frac{2}{3}\left(R^2-|x|^2\right)$. **Кўрсатма.** Масалани ечишда (9) формуладан фойдаланилади.

608. $$u(x)=e^R-e^{|x|}-\frac{2}{R}\left(e^R-1\right)+\frac{2}{|x|}\left(e^{|x|}-1\right).$$

609. 1) $$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi;$$

2) $u(x,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\frac{x-a}{y}$; **3)** $u(x,y)=\frac{4(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$;

4) $u(x,y)=\frac{8x}{x^2+(y+1)^2}$; **5)** $u(x,y)=\frac{x^2-(y+1)^2}{\left(x^2+(y+1)^2\right)^2}$;

6) $u(x,y)=5e^{-y}cos\,x$; **7)** $u(x,y)=V\left(1-\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{x}\right)$.

610. $u(x,y)=\frac{2x(1-y)}{\left(x^2+(y+1)^2\right)^2}$. **611.** $u(x,y,z)=\frac{1+z}{\left(x^2+y^2+(1+z)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Кўрсатма. IV бобнинг 4 § даги **7** – масалага ўхшаш ечилади.

612. $u=a^6\left[\frac{1}{630}\left(\frac{r}{a}\right)^6-\frac{1}{105}\left(\frac{r}{a}\right)+\frac{1}{126}\right]$.

613. $u=1-\frac{a^2-r^2}{2a}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{r}{a}\right)sin\,\varphi-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^3 sin\,3\varphi\right]$.

§ 5

614. $G(x,\xi)=\begin{cases} x(1-\xi), & 0\le x\le\xi, \\ \xi(1-x), & \xi\le x\le 1. \end{cases}$

615. $G(x,\xi)=\frac{1}{3}\begin{cases} (x+1)(2-\xi), & 0\le x\le\xi, \\ (\xi+1)(2-x), & \xi\le x\le 1. \end{cases}$

616. $G(x,\xi)=-\frac{1}{h+1}\begin{cases} (x+h)(\xi-1), & 0\le x\le\xi, \\ (\xi+h)(x-1), & \xi\le x\le 1. \end{cases}$

617. $G(x,\xi)=\frac{1}{sin\,1}\begin{cases} sin\,x\,sin(1-\xi), & 0\le x\le\xi, \\ sin(1-x)\,sin\,\xi, & \xi\le x\le 1. \end{cases}$

618. $G(x,\xi)=\frac{1-ctg\,1}{2}\begin{cases} (sin\,x+cos\,x)\left(\frac{ctg\,1+1}{ctg\,1-1}sin\,\xi-cos\,\xi\right), & 0\le x\le\xi, \\ \left(\frac{ctg\,1+1}{ctg\,1-1}sin\,x-cos\,x\right)(sin\,\xi+cos\,\xi), & \xi\le x\le 1. \end{cases}$

619. $G(x,\xi)=\frac{1}{sh\,1}\begin{cases} sh\,x\,sh(1-\xi), & 0\le x\le\xi, \\ sh(1-x)\,sh\,\xi, & \xi\le x\le 1. \end{cases}$

620. $$G(x,\xi)=\frac{1}{2\left(e^2-1\right)}\begin{cases}\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^\xi+e^{2-\xi}\right), & 0\le x\le\xi,\\ \left(e^\xi+e^{-\xi}\right)\left(e^x+e^{2-x}\right), & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

621. $$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{4}{\pi+4}(1+arctg\,x)\left(arctg\,\xi-\frac{\pi}{4}\right), & 0\le x\le\xi,\\ \frac{4}{\pi+4}(1+arctg\,\xi)\left(arctg\,x-\frac{\pi}{4}\right), & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

622. $$G(x,\xi)=\begin{cases}arctg\,x\left(-\frac{4}{\pi+2}arctg\,\xi+1\right), & 0\le x\le\xi,\\ arctg\,\xi\left(-\frac{4}{\pi+2}arctg\,x+1\right), & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

623. $$G(x,\xi)=\frac{2}{\pi+2\sqrt{3}}\begin{cases}\left(1+\sqrt{3}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\pi}{6}-arctg\frac{\xi}{\sqrt{3}}\right), & 0\le x\le\xi,\\ \left(1+\sqrt{3}arctg\frac{\xi}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\pi}{6}-arctg\frac{x}{\sqrt{3}}\right), & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

624. $$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{21}\left[\frac{1}{(x+1)^2}-(x+1)\right]\left[\frac{8}{(\xi+1)^2}-(\xi+1)\right], & 0\le x\le\xi,\\ \frac{1}{21}\left[\frac{1}{(\xi+1)^2}-(\xi+1)\right]\left[\frac{8}{(x+1)^2}-(x+1)\right], & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

625. $$G(x,\xi)=\frac{1}{60}\begin{cases}\left[(x-2)^3-\frac{16}{x-2}\right]\left[\frac{1}{\xi-2}-(\xi-2)^3\right], & 0\le x\le\xi,\\ \left[(\xi-2)^3-\frac{16}{\xi-2}\right]\left[\frac{1}{x-2}-(x-2)^3\right], & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

626. $$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{x^2}{4}\left[\frac{1}{\xi^2}-\xi^2\right], & 0\le x\le\xi,\\ \frac{\xi^2}{4}\left[\frac{1}{x^2}-x^2\right], & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

627. $$G(x,\xi)=\begin{cases}x^2\left(\xi-\xi^2\right), & 0\le x\le\xi,\\ \xi^2\left(x-x^2\right), & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

628. $$G(x,\xi)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(x-\xi)-\frac{1}{4}, & 0\le x\le\xi,\\ -\frac{1}{2}(\xi-x)-\frac{1}{4}, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

629. $G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{ch\,k(x-\xi+1)}{2k\,sh\,k}, & -1\le x\le\xi,\\ -\dfrac{ch\,k(\xi-x+1)}{2k\,sh\,k}, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$ **630.** $G(x,\xi)=\dfrac{1}{2}\sin x|x-\xi|$

631. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\xi^2-4}{2\xi^2}, & 1\le x\le\xi,\\ \dfrac{x^2-4}{2\xi^2}, & \xi\le x\le 2.\end{cases}$ **632.** $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{2\xi^2x}, & 1\le x\le\xi,\\ \dfrac{1-\xi^2}{2\xi^2x}, & \xi\le x<\infty\end{cases}$

633. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\xi}, & 1\le x\le\xi,\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}, & \xi\le x\le 2.\end{cases}$ **634.** $G(x,\xi)=\begin{cases}\ln\dfrac{2}{\xi}, & 1\le x\le\xi,\\ \ln\dfrac{2}{x}, & \xi\le x\le 2.\end{cases}$

635. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{-\ln x}{x\xi}, & 1\le x\le\xi,\\ \dfrac{-\ln\xi}{x\xi}, & \xi\le x\le 2.\end{cases}$ **636.** $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\xi^2}-\dfrac{2}{\xi}\right), & 1\le x\le\xi,\\ \dfrac{1}{\xi}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\right), & \xi\le x\le 2.\end{cases}$

637. $G(x,\xi)=\begin{cases}tg\,x\,(1-tg\,\xi), & 0\le x\le\xi,\\ tg\,\xi\,(1-tg\,x), & \xi\le x\le\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

638. $G(x,\xi)=\begin{cases}-\sin x\left(\sqrt{2}\sin\xi-1\right), & 0\le x\le\xi,\\ -\sin\xi\left(\sqrt{2}\sin x-1\right), & \xi\le x\le\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

639. $G(x,\xi)=\begin{cases}(tg\,x+1)(tg\,\xi-3), & 0\le x\le\xi,\\ (tg\,\xi+1)(tg\,x-3), & \xi\le x\le\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$ **640.** $G(x,\xi)=\begin{cases}-tg\,x, & 0\le x\le\xi,\\ -tg\,\xi, & \xi\le x\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

641. $G(x,\xi)=\begin{cases}ctg\,\xi+1, & 0\le x\le\xi,\\ ctg\,x+1, & \xi\le x\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ **642.** $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{5\xi^3}, & 0\le x\le\xi,\\ \dfrac{\xi^2}{5x^3}, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$

643. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}\left[\dfrac{1}{\xi}-\xi^2\right], & 0\le x\le\xi,\\ \dfrac{\xi^2}{3}\left[\dfrac{1}{x}-x^2\right], & \xi\le x\le 1.\end{cases}$ **644.** $G(x,\xi)=\begin{cases}1-\ln\xi, & 0\le x\le\xi,\\ 1-\ln x, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$

645. $G(x,\xi)=\begin{cases} e^{x-\xi}\int\limits_{\xi}^{1}\frac{e^{-2t}}{t}dt, & 0\le x\le\xi, \\ e^{x-\xi}\int\limits_{x}^{1}\frac{e^{-2t}}{t}dt, & \xi\le x\le 1. \end{cases}$ **646.** $G(x,\xi)=\begin{cases} \frac{1}{x\xi^2}, & 1\le x\le\xi, \\ \frac{1}{\xi x^2}, & \xi\le x\le 3. \end{cases}$

647. $G(x,\xi)=\begin{cases} -\frac{1}{2+\int\limits_0^1 e^{-t^2}dt}\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}dt+2\right)\int\limits_1^{\xi} e^{-t^2}dt, & 0\le x\le\xi, \\ -\frac{1}{2+\int\limits_0^1 e^{-t^2}dt}\left(\int\limits_0^{\xi} e^{-t^2}dt+2\right)\int\limits_1^{x} e^{-t^2}dt, & \xi\le x\le 1. \end{cases}$

648. $G(x,\xi)=\begin{cases} -\ln(\xi+1), & -1\le x\le\xi, \\ -\ln(x+1), & \xi\le x\le 0. \end{cases}$

649. $G(x,\xi)=\begin{cases} x\left[1+\frac{\xi}{2}\ln\frac{\xi-1}{\xi+1}+\frac{\xi}{2}(\ln 3-1)\right], & 1\le x\le\xi, \\ \xi\left[1+\frac{x}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{x}{2}(\ln 3-1)\right], & \xi\le x\le 2. \end{cases}$

650. $y(x)=-\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi)y(\xi)d\xi,\quad G(x,\xi)=\begin{cases} arctg\, x, & 0\le x\le\xi, \\ arctg\,\xi, & \xi\le x\le 1. \end{cases}$

651. $y(x)=-\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi)y(\xi)d\xi,\quad G(x,\xi)=\begin{cases} (-e^{-x}+1)e^{-\xi}, & 0\le x\le\xi, \\ (-e^{-\xi}+1)e^{-x}, & \xi\le x\le 1. \end{cases}$

652. $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi)y(\xi)d\xi+\int\limits_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi,$ бу ерда

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \frac{-\xi+1}{h+1}(x+h), & 0\le x\le\xi, \\ \frac{-x+1}{h+1}(\xi+h), & \xi\le x\le 1. \end{cases}$$

653. $y(x)=-\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi)\xi\cdot y(\xi)d\xi,\quad G(x,\xi)=\begin{cases} \ln\xi, & 0\le x\le\xi, \\ \ln x. & \xi\le x\le 1. \end{cases}$

654. $y(x)=\int\limits_1^e G(x,\xi)f(\xi)d\xi,\quad G(x,\xi)=\begin{cases} (x+\ln x-1)(\xi+\ln\xi), & 1\le x\le\xi, \\ (\xi+\ln\xi-1)(x+\ln x), & \xi\le x\le e. \end{cases}$

655. $y(x)=\int\limits_1^2 G(x,\xi)\, f(\xi)d\xi,\quad G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{\xi^2}, & 1\le x\le\xi,\\ \left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}\right)\frac{1}{x^2}, & \xi\le x\le 2.\end{cases}$

656. $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,\xi)\,\xi\cdot y(\xi)\,d\xi,\ G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{3}tg^3 x+tg\, x+\frac{1}{2}, & 0\le x\le\xi,\\ \frac{1}{3}tg^3\xi+tg\,\xi+\frac{1}{2}, & \xi\le x\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

657. $y(x)=(\lambda-1)\int\limits_1^2 G(x,\xi)\cos 2\xi\cdot y(\xi)\,d\xi,$ бу ерда

$$G(x,\xi)=\frac{1}{15}\begin{cases}\left(x-x^{-2}\right)\left(\xi+4\xi^{-2}\right), & 1\le x\le\xi,\\ \left(\xi-\xi^{-2}\right)\left(x+4x^{-2}\right), & \xi\le x\le 2.\end{cases}$$

658. $y(x)=(\lambda-a)\int\limits_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi,$ бу ерда

$$G(x,\xi)=-\frac{1}{\sqrt{a}\sin\sqrt{a}}\begin{cases}\cos\sqrt{a}\,x\cdot\cos\sqrt{a}\,(\xi-1), & 0\le x\le\xi,\\ \cos\sqrt{a}\,\xi\cdot\cos\sqrt{a}\,(x-1), & \xi\le x\le 1,\end{cases}$$

$$a>0,\quad a\ne(\pi n)^2,\quad n-\text{бутун сон}\ .$$

659. $y(x)=\lambda\int\limits_1^2 G(x,\xi)\frac{y(\xi)}{\xi^2}d\xi,\quad G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2-1), & 1\le x\le\xi,\\ \frac{1}{2}(\xi^2-1), & \xi\le x\le 2.\end{cases}$

660. $\lambda_k=-\frac{k^2\pi^2}{l^2},\quad y_k=\cos\frac{k\pi x}{l},\quad k=0,1,2,\dots\ .$

661. $\lambda_k=-k^2\pi^2,\quad y_k=\sqrt{x}\,\sin(k\,\pi\ln x),\quad k=0,1,2,\dots\ .$

662. λ_k - хос қиймат $J_0(\sqrt{\lambda})=0$ тенгламанинг ечими, $y_k(x)=J_0\left(\sqrt{\lambda_k}\ x\right)$, бу ерда $J_0(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$ - нолинчи тартибли Бессел функцияси[1],[2].

Кўрсатма. $\lambda>0$ да тенгламани $\sqrt{\lambda_k}\ x=t$ алмаштириш ёрдамида

$$y''+(1/t)\,y'+\ y=0$$

кўринишдаги Бессел тенгламасига $(\nu=0)$ келтирамиз [19]. Унинг ечими $y=CJ_0(t)$.

663. **а)** хос қиймат қуйидаги тенгламадан аниқланади:

$$a_1\,\rho_1\,ctgx\frac{\sqrt{\lambda}}{a_1}x_0+a_2\,\rho_2\,ctgx\frac{\sqrt{\lambda}}{a_2}(l-x_0)=0\,;$$

хос функция эса

$$\vartheta_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x}{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x_0}, & 0<x<x_0,\\[2ex] \dfrac{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x)}{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x_0)}, & x_0<x<l,\end{cases}$$

кўринишда бўлади.

b) хос қиймат қуйидаги тенгламадан аниқланади:

$$a_1\,\rho_1\,tgx\frac{\sqrt{\lambda}}{a_1}x_0+a_2\,\rho_2\,tgx\frac{\sqrt{\lambda}}{a_2}(l-x_0)=0\,;$$

хос функция эса

$$\vartheta_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x}{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x_0}, & 0<x<x_0,\\[2ex] \dfrac{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x)}{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x_0)}, & x_0<x<l,\end{cases}$$

кўринишда бўлади.

c) хос қиймат қуйидаги тенгламадан аниқланади:

$$a_1\,\rho_1\frac{h_1-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_1}tg\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_1}x_0}{\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_1}+h_1\,tg\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_1}x_0}+a_2\,\rho_2\frac{h_2-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_2}tg\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_2}(l-x_0)}{\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_2}+h_2\,tg\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_2}(l-x_0)}=0;$$

хос функция эса

$$\vartheta_n(x) = \begin{cases} \dfrac{X_n(x)}{X_n(x_0)}, & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{Y_n(x)}{Y_n(x_0)}, & x_0 < x < l, \end{cases}$$

кўринишда бўлади, бу ерда

$$X_n(x) = \sqrt{\lambda_n} cos \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1} x + a_1 h_1 sin \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1} x,$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\lambda_n}\, cos \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l - x) + a_2\, h_2\, sin \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l - x).$$

Кўрсатма. Қуйилган масала ечими куйидаги

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \dfrac{X(x)}{X(x_0)}, & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{Y(x)}{Y(x_0)}, & x_0 < x < l, \end{cases}$$

кўринишда изланади, бу ерда

$$X''(x) + \frac{\lambda}{a_1^2} X(x) = 0, \quad X(0) = 0,$$

$$Y''(x) + \frac{\lambda}{a_2^2} Y(x) = 0, \quad X(l) = 0.$$

664. а) $\lambda_n = a^2 \dfrac{\mu_n^4}{l^4}$, $(n = 0, 1, 2\ldots)$, бу ерда $\mu_n -$ $ch\mu \cdot cos\mu$

тенгламанинг ечими;

$$V_n(x) = A_n \left\{ \left(ch \frac{\mu_n x}{l} - cos \frac{\mu_n x}{l} \right)(sh\, \mu_n - sin\, \mu_n) - \right.$$

$$\left. -(ch\, \mu_n - cos\, \mu_n)\left(sh \frac{\mu_n x}{l} - sin \frac{\mu_n x}{l} \right) \right\},$$

A_n - ихтиёрий кўпайтувчи;

b) $\lambda_n = a^2 \cdot \dfrac{\mu_n^4}{l^4}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, бу ерда $\mu_n -$ $ch\mu \cdot cos\mu$

тенгламанинг ечими;

$$V_n(x)=A_n\left\{\left(ch\frac{\mu_n x}{l}+cos\frac{\mu_n x}{l}\right)(sh\,\mu_n-sin\,\mu_n)-\right.$$
$$\left.-(ch\,\mu_n+cos\,\mu_n)\left(sh\frac{\mu_n x}{l}-sin\frac{\mu_n x}{l}\right)\right\};$$

c) $\lambda_n=a^2\frac{\mu_n^4}{l^4}$, $(n=0,1,2,\dots)$, бу ерда μ_n – $ch\mu\cdot cos\mu=1$ тенгламанинг ечими;

$$V_n(x)=A_n\left\{\left(ch\frac{\mu_n x}{l}-cos\frac{\mu_n x}{l}\right)(sh\,\mu_n-sin\,\mu_n)-\right.$$
$$\left.-(ch\,\mu_n-cos\,\mu_n)\left(sh\frac{\mu_n x}{l}-sin\frac{\mu_n x}{l}\right)\right\}.$$

665. a) $\lambda_{m,n}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$, $(m,n=1,2,\dots)$;

b) $\lambda_{m,n}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$, $(m,n=0,1,2,\dots)$;

c) $\lambda_{m,n}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$, $(m=1,\ 2,\ \dots;\ \ n=0,\ 1,\ 2,\ \dots)$;

d) $\lambda_{m,n}=\frac{\pi^2}{4}\left(\left(\frac{2m+1}{a}\right)^2+\left(\frac{2n+1}{b}\right)^2\right)$, $(m,n=0,1,2,\dots)$.

Кўрсатма. Тенгламанинг ечими $u=X(x)\cdot Y(y)$ кўринишда изланади.

§ 6

666. a) $u(x,y)=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sin\frac{(2n+1)\pi}{s}y\,sh\frac{(2n+1)\pi}{s}(p-x)}{(2n+1)sh\frac{(2n+1)\pi}{s}p}$;

b) $u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x\cdot sh\frac{(2n+1)\pi}{2p}y$,

$$a_n=\frac{2}{p}sh^{-1}\frac{(2n+1)\pi s}{2p}\int_0^p f(x)\cdot sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}x\,dx;$$

c) $$u(x,y)=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{p}x\cdot sh\frac{(2n+1)\pi}{p}y}{(2n+1)\,sh\frac{(2n+1)\pi}{p}s}+$$

$$+\frac{4U}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{s}y\,sh\frac{(2n+1)\pi}{s}(p-x)}{(2n+1)\,sh\frac{(2n+1)\pi}{s}p};$$

d) $$u(x,y)=U+\frac{2p}{\pi}\left[T\,sh\frac{\pi}{2p}y-\left(ch^{-1}\frac{\pi s}{2p}\right)\left(\frac{2U}{p}+T\,sh\frac{\pi s}{2p}\right)ch\frac{\pi}{2p}y\right]\times$$

$$\times\sin\frac{\pi}{2p}x-\frac{4U}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ch^{-1}\frac{(2k+1)\pi s}{2p}}{2k+1}ch\frac{(2k+1)\pi}{2p}y\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p}x;$$

e) $$u(x,y)=\frac{(pB-2A)y}{2s}+A-\frac{4pB}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{p}x\,sh\frac{(2k+1)\pi}{p}y}{(2k+1)^2\,sh\frac{(2k+1)\pi s}{p}};$$

f) $$u(x,y)=A+\frac{A(s-2)x}{2p}-\frac{4bA}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{sh\frac{(2k+1)\pi x}{s}}{(2k+1)^2\,sh\frac{(2k+1)\pi p}{s}}\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi y}{s};$$

g) $$u(x,y)=\frac{4qs}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi y}{s}\,sh\frac{(2k+1)\pi x}{s}}{(2k+1)^2\cos\frac{(2k+1)\pi p}{s}}+$$

$$+\frac{4U}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2p}\,sh\frac{(2k+1)\pi y}{2p}}{(2k+1)\,sh\frac{(2k+1)\pi s}{2p}}.$$

667. a) $$u(x,y)=\frac{8l}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(2k+1)\pi x}{l}}}{(2k+1)^3}\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi y}{l};$$

b) $$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\frac{(2k+1)\pi x}{2l}}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2l},$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(y)\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2l}dy;$$

c) $$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2(h^2+\lambda_k^2)}{(h^2+\lambda_k^2)l+h}\int_0^l f(\xi)\cdot\cos\lambda_k\xi\,d\xi\right\}\cdot e^{-\lambda_k x}\cos\lambda_k y,$$

бу ерда λ_k – хос сонлар $\lambda\, tg\, \lambda l = h$ тенгламанинг мусбат ечимлари.

d) $$u(x,y)=2(1+hl)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_k x}}{\left[(h^2+\lambda_k^2)l+h\right]\lambda_k}\cdot Y_k(y),$$

бу ерда $Y_k(y)=\lambda_k\cos\lambda_k y+h\sin\lambda_k y$, λ_k – хос сонлар $h\, tg\, \lambda l = -\lambda$ тенгламанинг мусбат ечимлари.

668. $$u(x,y)=\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot e^{-\frac{k\pi}{l}y}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

669. a) $$u(r,\varphi)=-1-\frac{r}{2R}\cos\varphi+\frac{\pi r}{R}\sin\varphi+2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k^2-1)^3}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos k\varphi,$$ бу ерда λ_k хос сонлар $\lambda\, tg\, \lambda l = h$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

b) $$u(r,\varphi)=\frac{2\pi^2}{3}-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos k\varphi;$$

c) $$u(r,\varphi)=\frac{T}{h}+\frac{Qr}{1+Rh}\sin\varphi+\frac{Ur^3}{R^2(3+Rh)}\cos 3\varphi;$$

d) $u(r,\varphi)=Ar\cos\varphi+C$; **e)** $u(r,\varphi)=\dfrac{A}{2R}r^2\cos 2\varphi+C$;

f) $$u(r,\varphi)=\frac{1}{4}\left(3r\sin\varphi-\frac{r^3}{3R^2}\sin 3\varphi\right)+C.$$

g) $u(r,\varphi)=C+\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$, бу ерда $\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)\,d\varphi=0$,

$A_n=\dfrac{1}{n\pi R^{n-1}}\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi$, $B_n=\dfrac{1}{n\pi R^{n-1}}\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi$, ихтиёрий ўзгармас сон.

670. a) $$u(r,\varphi)=\frac{2T}{\pi}+\frac{4T}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}\left(\frac{R}{r}\right)^k\cos k\varphi;$$

b) $$u(r,\varphi)=C+\frac{4R^2}{3r}\cos\varphi+\frac{R^3}{4r^2}\cos 2\varphi-$$

$$-\frac{\pi R^3}{r^2}\sin 2\varphi+4R\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{4-k^2}\left(\frac{R}{r}\right)^k\cos k\varphi;$$

c) $$u(r,\varphi)=\pi U-\frac{RU}{r}\sin\varphi+2U\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k^2-1}{k(1-k^2)}\left(\frac{R}{r}\right)^k\sin k\varphi;$$

d) $$u(r,\varphi)=-\frac{A_0}{2\pi h}-\frac{R}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+hR}\left(\frac{R}{r}\right)^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),$$

бу ерда $A_n=\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\quad B_n=\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$

671. a) $u_1+(u_2-u_1)\dfrac{\ln r}{\ln 2};$ **b)** $\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln r}{\ln 2}+\left(\dfrac{2}{3r^2}-\dfrac{1}{6}r^2\right)\cos 2\varphi.$

672. a) $$u(r,\varphi)=A\cdot\frac{\ln\frac{r}{b}}{\ln\frac{a}{b}}+\frac{Bb^2}{b^4-a^4}\left(r^2-\frac{a^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi;$$

b) $$u(r,\varphi)=\frac{b}{b^2-a^2}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\cos\varphi;$$

c) $$u(r,\varphi)=Q+\frac{a^2q}{a^2+b^2}\left(r-\frac{b^2}{r}\right)\cos\varphi+\frac{b^2T}{a^4+b^4}\left(r^2+\frac{a^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi;$$

d) $$u(r,\varphi)=\alpha_0^{(2)}+\alpha_0^{(1)}a\ln\frac{r}{b}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\alpha_k^{(1)}b^{-k}+ka^{-k-1}\alpha_k^{(2)}\right)r^k+\left(k\alpha_k^{(2)}a^{k-1}-b^k\alpha_k^{(1)}\right)r^{-k}}{k\left(a^{k-1}b^{-k}+b^ka^{-k-1}\right)}\cdot\cos k\varphi+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\beta_k^{(1)}b^{-k}+ka^{-k-1}\beta_k^{(2)}\right)r^k+\left(k\beta_k^{(2)}a^{k-1}-b^k\beta_k^{(1)}\right)r^{-k}}{k\left(a^{k-1}b^{-k}+b^ka^{-k-1}\right)}\cdot\sin k\varphi,$$

бу ерда $\alpha_0^{(1)}=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_1(\varphi)d\varphi,\ \alpha_n^{(1)}=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_1(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,$

$$\alpha_0^{(2)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_2(\varphi)d\varphi,\quad\alpha_n^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_2(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,$$

$$\beta_n^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_1(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi,\quad\beta_n^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_2(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

673. a) $$u(r,\varphi)=\frac{\alpha U}{2}-\frac{4\alpha U}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}}\cos\frac{k\pi\varphi}{\alpha};$$

b) $u(r,\varphi)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, r^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}}\, cos\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}\varphi,$

$$a_k=\frac{2}{\alpha}R^{-\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\,cos\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}\varphi\,d\varphi\,;$$

c) $u(r,\varphi)=\frac{2A\alpha}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} sin\frac{k\pi\varphi}{\alpha};$

d) $u(r,\varphi)=\frac{4\alpha QR}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} sin\frac{k\pi\varphi}{\alpha}.$

674. $u(r,\varphi)=\frac{2\alpha A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\ sin\frac{k\pi\varphi}{\alpha}.$

Кўрсатма. Масала **Фурье** усули ёрдамида қуйидаги $u(r,\varphi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}\, sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi$ қаторга келтирилади, C_n коэффициент $u(a,\varphi)=A\varphi,\quad 0\le\varphi\le\alpha$ чегаравий шартга асосан аниқланади.

675. $u=\frac{16Qp^2}{k\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\left[1-\frac{ch\left[\frac{(2n+1)(s-y)\pi}{2p}\right]}{ch\left[\frac{(2n+1)s\pi}{2p}\right]}\right]sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{2p}x\right].$

676. $u(r,z)=\frac{2}{R^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{sh\left(\frac{\mu_n}{R}z\right)J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right)}{sh\left(\frac{\mu_n}{R}h\right)J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r\,f(r)\,J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right)dr,$

бу ерда $\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{R}\right)-$хос қийматлар, $J_0(x)$ ва $J_1(x)-$биринчи турдаги Бессел функциялари[2].

677. $u(r,\theta,\varphi)=\left(-r+\frac{4}{r^2}\right)cos\,\theta+\left(r^2-\frac{32}{r^3}\right)sin^2\theta\cdot sin\,2\varphi.$

Кўрсатма. Масалани ечишда қуйидаги ечимдан

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\left(A_{nm}r^n+\frac{B_{nm}}{r^{n+1}}\right)cos\,m\varphi+\right.$$

$$\left.+\left(C_{nm}r^n+\frac{D_{nm}}{r^{n+1}}\right)sin\,m\varphi\right]\cdot P_n^{(m)}(cos\,\theta)$$

аланилади, бу ердаги A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm} коэффициентлар чегаравий шартларга асосан топилади.

Бунга ва масалага кўра ечимни

$$u(r,\theta,\varphi)=\left(ar+\frac{b}{r^2}\right)\cos\theta+\left(cr^2-\frac{d}{r^3}\right)\sin^2\theta\cdot\sin 2\varphi$$

кўринишда ҳам излаш мумкин.

678. $u(r,\theta,\varphi)=1+\frac{1}{84}r^2\left(r^2-a^2\right)P_2^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi,$ бу ерда

$P_2^{(1)}(x)$ – қўшиб олинган Лежандр функцияси [2].

Кўрсатма. Масаланинг ечими қуйидаги

$$u(r,\theta,\varphi)=\upsilon(r,\theta,\varphi)+w(r)$$

кўринишда изланади, бу ерда $\upsilon(r,\theta,\varphi)$ ва $w(r)$ функциялар мос равишда

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\upsilon}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\varphi^2}=\frac{r^2}{2}\cos\varphi\cdot\sin 2\theta,$$

$$0<r<a,\quad 0<\theta<\pi,\quad 0\le\varphi<2\pi,\quad \upsilon(a,\theta,\varphi)=0,\quad \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]$$

ва

$$\begin{cases}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2w'(r)\right)=0, & 0<r<a,\\ w(a)=1, & |w(0)|<+\infty;\end{cases}$$

масалаларнинг ечими.

679. $u_{m,n}(r,\varphi)=\cos\left(\frac{\pi n}{\varphi_0}\varphi\right)\times$

$$\times\left[J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}\cdot r\right)N'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}\cdot a\right)-J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}\cdot a\right)N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}r\right)\right],$$

бу ерда $\mu_m^{(n)}$ – қуйидаги тенгламани ечими:

$$\frac{J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu\cdot a)}{J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu\cdot b)}=\frac{N'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu\cdot a)}{N'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu\cdot b)},$$

$N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu\cdot r)$ – иккинчи тур Бессел функцияси [19].

680. $u(r,\varphi)=\dfrac{I_0(\beta\cdot r)}{I_0(\beta\cdot a)}\cdot u_0$, бу ерда $I_0(x)$ - мавҳум аргументли Бессел функцияси[19].

Кўрсатма. Масаланинг ечими қуйидаги

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right]\cdot I_n(\beta r)$$

қатордан топилади, A_n, B_n коэффициентлар чегаравий шартларга асосан аниқланади.

681. $u(r,\theta)=\dfrac{\sqrt{a}\,I_{\frac{3}{2}}(\beta r)}{\sqrt{r}\,I_{\frac{3}{2}}(\beta a)}\cdot u_0\cdot\cos\theta.$

Кўрсатма. Масаланинг ечими куйидаги $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{C_nI_{\frac{1}{2}+n}(\beta r)}{\sqrt{r}}P_n(\cos\theta)$ қатордан топилади, C_n коэффициент чегаравий шартга асосан аниқланади.

682. $u(r)=\dfrac{Aa^2}{\beta a\cos\beta a-\sin\beta a}\cdot\dfrac{\sin\beta r}{r}.$

Кўрсатма. Масаланинг ечими қуйидаги кўринишда $u(r)=\dfrac{1}{r}\upsilon(r)$ изланади.

683. $u(r)=\dfrac{Aa^2}{e^{i\beta a}(1-i\beta a)}\cdot\dfrac{e^{i\beta r}}{r}.$

684. $u(r)=\dfrac{Aa\cdot sh(\beta r)}{r\cdot sh(\beta a)}.$

685. $u(r)=\dfrac{Aa}{e^{-\beta a}}\cdot\dfrac{e^{-\beta r}}{r}.$

686. a) $u(r,\theta,\varphi)=\dfrac{1}{7}\left(-r+\dfrac{1}{r^2}\right)\sin\varphi\cdot\sin\theta;$

b) $u(r,\theta,\varphi)=\dfrac{12}{7}\left(r-\dfrac{1}{r^2}\right)\cos\theta+\left(\dfrac{96}{31r^2}-\dfrac{2r^2}{31}\right)\sin 2\varphi\cdot\sin^2\theta;$

c) $u(r,\theta,\varphi)=4\left(r-\dfrac{1}{r^2}\right)\cos\theta+\left(\dfrac{8}{r^2}-r\right)\cos\varphi\cdot\sin\theta;$

d) $u(r,\theta,\varphi)=\left(14-\frac{12}{r}\right)P_0(\cos\theta)+r^2(1-3\cos^2\theta-\sin2\varphi\cdot\sin^2\theta)$;

e) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{12}{7}\left(-\frac{r}{2}+\frac{4}{r^2}\right)\cos\varphi\cdot\sin\theta+\frac{12}{31}\left(\frac{8}{r^3}-\frac{r^2}{4}\right)\cos\varphi\cdot\sin2\theta$;

f) $u(r,\theta,\varphi)=\left[\left(\frac{8}{31}\cos2\varphi-\frac{1}{31}\sin2\varphi\right)r^2+\left(-\frac{8}{31}\cos2\varphi+\frac{32}{31}\sin2\varphi\right)\frac{1}{r^3}\right]\cdot\sin^2\theta$;

g) $u(r,\theta,\varphi)=\left[\left(-\frac{1}{31}\cos\varphi-\frac{8}{31}\sin\varphi\right)r^2+\left(\frac{32}{31}\cos\varphi-\frac{8}{31}\sin\varphi\right)\frac{1}{r^3}\right]\cdot\sin2\theta$;

h) $u(r,\theta,\varphi)=\left(\frac{32}{r^3}-r^2\right)\sin2\theta\cdot\sin\varphi+\left(8r^2-\frac{8}{r^3}\right)\cos2\varphi\cdot\sin^2\theta$.

Кўрсатма. Масалаларни ечишда IV бобнинг 6-§ даги (4.158) формуладан фойдаланилади.

687. a) $u(r,\theta,\varphi)=\left(r+\frac{4}{r^2}\right)\sin\theta\cdot\sin\varphi+3r^2\sin2\theta\cdot\sin\varphi$;

b) $u(r,\theta,\varphi)=1+\frac{12}{5}\left(r-\frac{1}{r^2}\right)\cos\varphi\cdot P_1^{(1)}(\cos\theta)+\frac{16}{97}\left(r^3-\frac{1}{r^4}\right)\cos\varphi\times$

$$\times P_3^{(1)}(\cos\theta)+\frac{4}{97}\left(r^3-\frac{1}{r^4}\right)\sin2\varphi\cdot P_3^{(2)}(\cos\theta).$$

Кўрсатма. Масалаларни ечишда қуйидагини

$$u_r\Big|_{r=2}=2P_3^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi+\frac{1}{2}P_3^{(2)}(\cos\theta)\sin2\varphi+3P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi$$

ҳисобга олиб,

$$u(r,\theta,\varphi)=C+\frac{d}{r}+\left(ar-\frac{b}{r^2}\right)\cos\varphi\cdot\sin\theta+\left(f\,r^3-\frac{h}{r^4}\right)\cos\varphi\times$$

$$\times P_3^{(1)}(\cos\theta)+\left(l\,r^3-\frac{m}{r^4}\right)\sin2\varphi\cdot P_3^{(2)}(\cos\theta)$$

формуладан фойдаланилади.

688. a) $u(r,\theta,\varphi)=\left(\frac{r}{R}\right)^3\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta$;

b) $u(r,\theta,\varphi)=\left(\frac{r}{R}\right)^3\sin\left(3\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin^3\theta$;

c) $u(r,\theta,\varphi)=\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin^2\theta+\frac{r}{R}\sin\theta\cdot\sin\varphi$;

d) $u(r,\theta,\varphi)=r^2cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot sin^2\theta$;

e) $u(r,\theta,\varphi)=sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\left(r\,sin\,\theta+r^2\,sin\,2\theta\right)$;

f) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{2}{3}-\frac{r^2}{6}(3cos2\theta+1)+r\,sin\,\theta\cdot sin\,\varphi$;

g) $u(r,\theta.\varphi)=1+\frac{r^{10}}{10}sin^{10}\,\theta\cdot sin10\,\varphi$.

Кўрсатма. Масалаларни ечишда қуйидаги

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k Y_k(\theta,\varphi)$$

формуладан фойдаланилади, бу ерда

$$Y_k(\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{k}\left(a_n cos\,n\,\varphi+b_n sin\,n\,\varphi\right)P_k^{(n)}(cos\theta),$$

$P_k^{(n)}(\xi)=(1-\xi)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n P_k(\xi)}{d\xi^k}$, $P_k(\xi)$ $(k=1,2,...)-$ Лежандр полиноми[2].

689. a) $u(r,\theta,\varphi)=\left(\frac{R}{r}\right)^3 cos\left(3\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin^3\theta\cdot cos\,\theta$;

b) $u(r,\theta,\varphi)=\left(\frac{R}{r}\right)^{101} sin^{100}\,\theta\cdot sin100\,\varphi$;

c) $u(r,\theta,\varphi)=sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\times$

$$\times\left[\frac{R}{2+R}\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1^{(1)}(cos\,\theta)+\frac{6}{6(3+R)}\left(\frac{R}{r}\right)^3 P_2^{(1)}(cos\,\theta)\right].$$

Кўрсатма. Масалаларни ечишда қуйидагини

$$(u-u_r)\big|_{r=R}=\left[\frac{1}{2}P_1^{(1)}(cos\,\theta)+\frac{1}{6}P_2^{(1)}(cos\,\theta)\right]\cdot sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$$

ҳисобга олиб,

$$u(r,\theta,\varphi)=sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\left[A\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1^{(1)}(cos\,\theta)+B\left(\frac{R}{r}\right)^3 P_2^{(1)}(cos\,\theta)\right]$$

формуладан фойдаланилади.

АДАБИЁТЛАР

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I - II. – М.: Наука, 1973.

3. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985.

4. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. – М. Наука, 1982.

5. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1978.

6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

7. Владимиров В.С., Михайлов В.П. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1974.

8. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1962.

9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.

10. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977.

11. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1977.

12. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978.

13. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. – М.: МЭИ, 1989.

14. Привалов И. И. Введение в теорию функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1977.

15. Салахитдинов М. С. Математик физика тенгламалари. – Т.: Ўзбекистон, 2002.

16. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1975.

17. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа, 1985.

18. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.

19. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.

20. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985.

21. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные Уравнения. – М.: Наука, 1973.

МУНДАРИЖА

I боб. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни классификацияси. Иккинчи тартибли икки ўзгарувчили дифференциал тенгламаларни каноник кўринишга келтириш

II боб. Гиперболик типдаги тенгламалар

III боб. Параболик типдаги тенгламалар

IV боб. Эллиптик типдаги тенгламалар

Илмий-методик нашр

М.С.Салоҳиддинов, Б.И.Исломов

МАТЕМАТИК ФИЗИКА ТЕНГЛАМАЛАРИ ФАНИДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

ЎзР ОЎМТВ томонидан молиялаштирилган
ОТ-Ф1-045-рақамли фундаментал лойиҳа асосида
чоп этилди

Муҳаррир: Маҳкам Маҳмудов
Техник муҳаррир: Беҳзод Болтабоев
Мусаҳҳиҳа: Камола Болтабоева

«MUMTOZ SO'Z»
масъулияти чекланган жамиятининг нашриёти.
Манзил: Тошкент, Навоий кўчаси, 69.
Тел: 241-60-33

Босишга рухсат этилди 28.12.2010.
Қоғоз ўлчами 60x84 1/32. Офсет қоғози. Times New Roman гарнитураси.
Шартли босма табоғи 23,0. Нашриёт-ҳисоб тобоғи 23,25.
Буюртма 35. Адади 150. Баҳоси келишилган нархда.

«MUMTOZ SO'Z»
масъулияти чекланган жамиятининг
матбаа бўлимида чоп этилди.
Манзил: Тошкент, Навоий кўчаси, 69.
Тел: 241-81-20

Махмуд Салохиддинович Салохиддинов. 1933 йил 23 ноябрда Наманган шаҳрида туғилган. Физика-математика фанлари доктори (1967), профессор (1969), ЎзР ФА мухбир аъзоси (1968), ЎзР ФА академиги (1974), Абу Райҳон Беруний номидаги ЎзР Давлат мукофоти совриндори (1974), Ўзбекистонда хизмат кўрсатган фан арбоби (1984), Ислом академиясининг академиги (1993), ЎзР ФА Математика институти дифференциал тенгламалар булими илмий ходими, мудири (1959-1966), ЎзР ФА Математика институти директори (1967-1985), ЎзР ФА вице президенти (1984-1985). Ўзбекистон Олий ва урта махсус таълим вазири (1985-1988). ЎзР ФА Президенти (1988-1994), ЎзР ФА Математика институти дифференциал тенгламалар булими мудири (1994 йилдан буён) вазифаларида ишлаган. 2002 йилдан ЎзМУ "Дифференциал тенгламалар" кафедраси мудири.

7 та монография, 10 дан ортик дарслик ва укув кулланма хамда 320 дан ортик илмий, илмий-оммабоп маколалар муаллифи. Унинг раҳбарлигида 7 та фан доктори ва 35 та фан номзоди диссертация ёқлаган.

М.С.Салоҳиддинов "Ҳурмат белгиси" (1976), "Меҳнат шухрати" (1999) ва "Буюк хизматлари учун" (2007) орденлари билан тақдирланган.

Бозор Исломович Исломов. 1957 йил 17 декабрда Самарканд вилояти Оқдарё туманида туғилган. Физика-математика фанлари доктори (2000), профессор (2006) ЎзР ФА Математика институти илмий ходими (1980-2004), Низомий номидаги ТДПУ физика-математика факультети декани (2004-2008) булиб ишлаган.

2008 йилдан буён ЎзМУ "Дифференциал тенгламалар" кафедраси профессори.

Б.И.Исломов 1 та монография, 10 дан ортик укув ва методик кулланма хамда 90 дан ортик илмий маколалар муаллифи. Унинг раҳбарлигида 5 та фан номзоди диссертация ёқлаган. Фан ва техника соҳасида "Ўзбекистон ёшлари" мукофоти совриндори (1994).

ISBN 978-9943-363-98-4