ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

Ш.Ғ. ҚОСИМОВ, Т.Н. АЛИҚУЛОВ, Ш.Қ. ОТАЕВ,
Ғ.С. ХАИТБОЕВ, М.М. БАБАЕВ

МАТЕМАТИК ФИЗИКАНИНГ ЗАМОНАВИЙ УСУЛЛАРИ

ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА

2 том. Фурье алмаштириши. Умумлашган функциялар. Соболев фазоси.

Тошкент
“Университет”
2016

Қосимов Ш.Ғ., Аликулов Т.Н., Отаев Ш.Қ., Хаитбоев Ғ.С., Бабаев М.М. “Математик физиканинг замонавий усуллари. 2 том.”. Т.: 2016, 396 б.

Мазкур ўқув қўлланманинг 2-томида математик физиканинг замонавий усулларига оид Фурье алмаштириши, умумлашган функциялар, Соболев фазоси мавзулари етарлича баён қилинган. Параграфларнинг ҳар бирида мавзуга оид асосий тушунчалар келтирилган, тегишли теоремалар исботлари билан берилган ва унга доир намунавий мисоллар таҳлил қилинган. Параграфлар мавзуга оид мустақил иш учун вазифалар билан бойитилган.

Ушбу ўқув қўлланма университетларнинг “Дифференциал тенгламалар ва математик физика”, “Математика” мутахассислиги бўйича магистрлар тайёрлайдиган факультет магистрантлари учун мўлжалланган бўлиб, ундан “Амалий математика ва информатика”, “Математика” ва бошқа таълим йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлайдиган факультет талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Масъул муҳаррир:
физика-математика фанлари доктори, профессор **Алимов Ш.А.**

Тақризчилар:
физика-математика фанлари доктори, профессор **Маматов М.Ш.**
физика-математика фанлари номзоди, доцент **Пирматов Ш.Т.**

Мазкур ўқув қўлланма Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети Математика факультети ўқув-услубий кенгаши томонидан нашрга тавсия этилган. (2016 йил 1 декабрь, 2-сонли баённома)

ISBN-978-9943-4585-7-4

Кириш

Математик физика – бу физик ҳодисаларнинг математик моделлари назариясидир. Бу фан математикага тегишли бўлиб унинг ҳақиқатлик критерияси – бу математик исботдир. Бироқ, соф математик фанлардан фарқи шундан иборатки, математик физика фани физик масалаларни математика даражасида тадқиқ этади ва натижалар теоремалар, графиклар, жадваллар ва ҳакозо шаклларда ифодаланади, ҳамда физик тасаввурлар ҳосил қилинади. Математик физиканинг бундай кенг маънода тушунилиши унга механиканинг назарий механика, гидродинамика ва эластиклик назарияси каби бўлимларининг ҳам таълуқлилигини билдиради.

Дастлабки математик физика масалалари дифференциал (интегро–дифференциал) тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишга олиб келинган. Бу йўналиш *классик математик физика* предметини ташкил этади ва ҳозирда ҳам ўзининг муҳим аҳамиятини сақлаб турибди.

Классик математик физика И. Ньютон давридан бошлаб физика ва математиканинг параллел ривожланиши билан бирга ривожланиб борди. XVII асрнинг охирларида дифференциал ва интеграл ҳисоб (И. Ньютон, Г. Лейбниц) яратилди ва классик механиканинг асосий қонунлари, ҳамда бутун олам тортишиш қонуни (И. Ньютон) ифода қилинди. XVIII асрда тор, стержень, маятникларнинг тебраниши, ҳамда акустика ва гидродинамика билан боғлиқ масалаларни ўрганиш учун математик физиканинг усуллари шакллана бошлади. Шунингдек аналитик механиканинг асослари (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Лагранж, К. Гаусс, П. Лаплас) яратилди. XIX асрда математик физика усуллари иссиқлик ўтказувчанлик, диффузия, эластиклик назарияси, оптика, электродинамика, ночизиқли тўлқин жараёнлари ва ҳакозо масалалар билан боғлиқ бўлган янги ривожланишига эришди. Потенциаллар назарияси, ҳаракатнинг турғунлик назарияси (Ж. Фурье, С. Пуассон, Л. Больцман, О. Коши, М.В. Остроградский, П. Дирихле, Дж.К. Максвелл, Б. Риман, С.В. Ковалевская, Д. Стокс, Г.Р. Кирхгоф, А. Пуанкаре, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Д. Гильберт, Ж. Адамар) яратилди.

XX асрга келиб квант физикаси ва нисбийлик назариясининг масалалари, ҳамда газ динамикаси, заррачаларнинг кўчиш назарияси ва плазма физикасининг янги муаммолари ҳам математик физикага кириб келди.

Классик математик физикада уч хил типдаги содда дифференциал тенгламалар Пуассон (хусусан Лаплас) тенгламаси, иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси, тўлқин тенгламаси билан боғлиқ бўлган ҳар хил масалалар ўрганилган.

Квант механикаси ва ядровий энергетиканинг ривожланиши билан математик физиканинг янги типдаги тенгламалари ва чегаравий масалалари пайдо бўлди. Булар қаторига тўлқин функцияси учун Шрёдингер тенгламаси, стационар Шрёдингер тенгламаси, Гельмгольц тенгламаси ва бу тенглама учун Зоммерфельд нурланиш шартларини қаноатлантирувчи масала, изотроп сочилиш учун заррачалар кўчишининг бир хил тезликли тенгламасини келтириш мумкин.

Бу масалаларни тадқиқ этишда оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси, интеграл тенгламалар, вариацион ҳисоб, функциялар назарияси, функционал анализ, эҳтимоллар назарияси, тақрибий усуллар ва ҳисоблаш математикаси асосий математик қурол бўлиб хизмат қилади.

XX асрда квант физикасининг янги бўлимлари: квант механикаси, квант майдон назарияси, квант статистик физикаси, нисбийлик назарияси, гравитация каби (А. Пуанкаре, Д. Гильберт, П. Дирак, А. Эйнштейн, Н.Н. Боголюбов, В.А. Фок, Э. Шрёдингер, Г. Вейль, Р. Фейнман, Дж. фон Нейман, В. Гейзенберг) бўлимлар пайдо бўлди. Бу ҳодисаларни ўрганиш учун қўлланиладиган математик қуроллар тўплами сезиларли равишда кенгайди. Математиканинг ананавий соҳалари билан бир қаторда операторлар назарияси, умумлашган функциялар назарияси, кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, топологик ва алгебраик усуллар, сонлар назарияси, p–адик анализ, асимптотик ва ҳисоблаш усуллари кенг қўлланила бошлади. Электрон ҳисоблаш машиналарининг пайдо бўлиши билан батафсил таҳлил қилинадиган математик моделларнинг жуда муҳим синфлари кенгайиб борди. Ҳисоблаш экспериментини ўтказишнинг реал имкониятлари пайдо бўлди. Масалан, атом бомбасининг портлашини моделлаштириш ёки атом реакторининг реал вақт масштабидаги ишини моделлаштириш мумкин бўлди. Замонавий назарий физика ва замонавий математиканинг бундай интенсив ўзаро таъсирида янги соҳа – *замонавий математик физика* шаклланди. Унинг моделлари ҳамма вақт ҳам дифференциал тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалаларга келтирилавермайди, балки аксиомалар системаси шаклида ифода қилинади. Математикада, айниқса геометрияда ва тўпламлар назариясида аксиоматик усул анча олдиндан маълум эди. Ҳар қандай аксиомалар системаси сингари, бундай система қарама–қаршиликсиз, боғлиқмаслик, қурилувчанлик ва тўлалик талабларини қаноатлантириши керак бўлади.

XX асрга келиб назарий физиканинг ривожида бу тенденцияни П. Дирак яхши тушунди. У 1930 йилдаги ўз мақоласида назарий жиҳатдан позитроннинг мавжудлигини айтди. У қуйидагича ёзади: “Эҳтимол менинг фикримча бундай узлуксиз абстрактлаш жараёни давом этиб боради ва келажакда физиканинг ютуғи кўп даражада узлуксиз модификациялашга ва математика асосида аксиомаларни умумлаштиришга асосланган бўлади”. Назарий физиканинг кейинги тараққиёти П. Диракнинг фикрларини тўла тасдиқлади. Бунга ёрқин мисол сифатида назарий физикада аксиомалаштириш усулларининг қўлланилиши Н.Н. Боголюбов томонидан ўтган асрнинг 50–йилларида квант майдон назариясида аксиомалаштиришда сезилди. Шу даврда Гамильтон формализмини қўллаганда ультрафиолет узоқлашув муаммоси бор эди. Бу муаммога Н.Н. Боголюбов бошқача ёндошув билан қарашни таклиф этди. У аввал Гамильтон формализмидан воз кечди ва Гейзенберг томонидан киритилган сочилишнинг матрицавий назариясини асос қилиб қабул қилди. Н.Н. Боголюбов бу билан мумкин бўлган математик объектлар тўпламини кенгайтирди. Бунда сочилиш матрицасининг элементлари оператор қийматли умумлашган функциялар олинди. Шу билан бирга сочилиш матрицаси *релятивистлик, ковариантлик, унитарлик, сабаблилик, спектраллик* каби асосий физик постулатларни қаноатлантириши талаб қилинди.

Математик физиканинг масалалари орасида Ж. Адамар бўйича *коррект қўйилган масалалар*, яъни ечими мавжуд, ягона ва шу масаладаги берилганларга узлуксиз боғлиқ бўлган масалалар жуда муҳим синфлардан бири сифатида ажратилади. Бу талаблар биринчи қарашда жуда табиийдек бўлиб кўринсада, уларни қабул қилинган математик моделлар даражасида исбот қилиш зарур бўлади. Масала корректлигининг исботи – бу биринчидан шу математик моделнинг қўланилишини бидиради: модель қарама–қаршиликсиз (ечим мавжуд), модель бир қийматли равишда физик жараённи ифода қилади (ечим ягона), модель физик миқдорларнинг четлашувида кичик сезгирликка эга (ечим масалада берилганларга узлуксиз боғлиқ бўлади).

Математик физика масалаларини тадқиқ этишда умумлашган функциялар муҳим роль ўйнайди ва бу умумлашган ечим билан жипс боғлангандир. Шу сабабли умумлашган функциялар назарияси муҳим аҳамиятга эгадир.

Мазкур ўқув қўлланманинг 2-томи икки бобдан иборат. Ушбу ўқув қўлланманинг учинчи боби Фурье алмаштириши ва умумлашган функциялар назариясига бағишланган. Ўқув қўлланманинг тўртинчи боби эса Лебег ва Соболев фазолари, ҳамда ўзгармас коэффициентли дифференциал операторлар назариясига бағишланган.

Ҳар бир боб параграфларга бўлиб чиқилган. Параграфларнинг ҳар бирида мавзуга оид асосий тушунчалар келтирилган, тегишли теоремалар исботлари билан берилган ва унга доир намунавий мисоллар таҳлил қилинган. Параграфлар мавзуга оид мустақил иш учун вазифалар билан бойитилган.

Ушбу ўқув қўлланма университетларнинг “Дифференциал тенгламалар ва математик физика”, “Математика” мутахассислиги бўйича магистрлар тайёрлайдиган факультет магистрантлари учун мўлжалланган бўлиб, ундан “Амалий математика ва информатика”, “Математика” ва бошқа таълим йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлайдиган факультет талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

III – БОБ

ФУРЬЕ АЛМАШТИРИШИ. УМУМЛАШГАН ФУНКЦИЯЛАР

1-§. Бир ўзгарувчили функциянинг Фурье алмаштириши

1. Фурье алмаштириши ва тескари Фурье алмаштириши ҳақида тушунча. Ҳақиқий ўзгарувчининг $f(x)$ комплекс қийматли функцияси берилган бўлсин. У ҳолда

$$\hat{f}\,(y) = F[f] = V.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)e^{-ixy}dx \qquad (3.1.1)$$

формула билан аниқланадиган функцияга $f(x)$ функциянинг Фурье алмаштириши дейилади ва $\hat{f}\,(y)$ ёки $F[f]$ каби белгиланади.

$$\overset{\vee}{f}\,(y) = F^{-1}[f] = V.p.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx \qquad (3.1.2)$$

формула билан аниқланадиган функцияга эса, тескари Фурье алмаштириши дейилади ва $\overset{\vee}{f}\,(y)$ ёки $F^{-1}[f]$ каби белгиланади. Бу ерда (3.1.1) ва (3.1.2) интеграллар мавжуд деб қаралади. Агар $f(x)$ функция абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$ ва $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx$ хосмас интеграллар мавжуд ва мос бош қиймат маъносидаги интегралларга тенг бўлади. Шунинг учун абсолют интегралланувчи функцияларнинг Фурье алмаштириши ва тескари Фурье алмаштириши қуйидаги хосмас интеграллар ёрдамида

$$F[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx, \qquad (3.1.3)$$

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx \qquad (3.1.4)$$

шаклида аниқланади.

2. R сон ўқида абсолют интегралланувчи функциялар Фурье алмаштиришларининг хоссалари.

1-лемма. *R сон ўқида абсолют интегралланувчи функциянинг Фурье алмаштириши R сон ўқида чегараланган ва узлуксиз бўлади.*

Исбот. R сон ўқида $f(x)$ функция абсолют интегралланувчи функция бўлгани учун

$$\left|\hat{f}(y)\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx\right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = C_0$$

ва шунга кўра, $\hat{f}(y)$ функция R сон ўқида чегараланган бўлади.

$$\hat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$

интегралнинг текис яқинлашувчи эканлигидан ва шунга кўра интеграл белгиси остида лимитга ўтиш ўринли эканлигидан $\hat{f}(y)$ функциянинг узлуксизлиги келиб чиқади. Лемма исбот бўлди.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар абсолют интегралланувчи функциялар бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\lambda, \mu \in C$ сонлар учун

$$F[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda F[f(x)] + \mu F[g(x)]$$

тенглик ўринли бўлади.

1-теорема. *R сон ўқида $f(x)$ функция абсолют интегралланувчи ва ҳар бир нуқтада $f'(x)$ чекли ҳосила мавжуд бўлса, у ҳолда*

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f \qquad (3.1.5)$$

тескариланиш формулалари ўринли бўлади.

Исбот. Маълумки, агар $f(x)$ функция R сон ўқида абсолют интегралланувчи ва x нуқтада Гёльдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)dt$$

тенглик ўринли бўлади. $f'(x)$ чекли ҳосила мавжуд эканлигидан, унинг шу нуқтада Гёльдер шартини қаноатлантириши келиб чиқади. Шунинг учун, бу тенгликдан

$$f(x)=V.p.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt\right)e^{ixy}dy$$

ва

$$f(x)=V.p.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}dt\right)e^{-ixy}dy$$

тенгликлар келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

3. Функция ҳосиласининг Фурье алмаштириши. Агар $f(x)$ функция учун

1) R сон ўқида $f(x)$ функция узлуксиз ва абсолют интегралланувчи;

2) Ихтиёрий $[a, b]$ оралиқ учун шундай бир x_i бўлиниш нуқталари топилиб ҳар бир $(x_{i-1},\ x_i)$ интервалда $f'(x)$ функция узлуксиз;

3) $f'(x)$ функция R сон ўқида абсолют интегралланувчи функция бўлса, у ҳолда бу функция $\bar{L}^C(R)$ синфга тегишли деб айтилади.

2-теорема. *Агар* $f(x)$ *функция* $\bar{L}^C(R)$ *синфга тегишли бўлса, у ҳолда*

$$F[f']=iyF[f] \qquad (3.1.6)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Маълумки, $\bar{L}^C(R)$ синфга тегишли функциялар учун

$$f(x)=f(0)+\int\limits_0^x f'(t)dt$$

Ньютон-Лейбниц формуласи ўринлидир. Бунда $f'(x)$ функция абсолют интегралланувчи функция бўлгани учун

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(0)+\int\limits_0^{+\infty} f'(x)dx=A$$

чекли лимит мавжуд бўлади. Биз $A=0$ эканлигини кўрсатамиз. Агар, масалан $A>0$ бўлса, у ҳолда шундай бир $a\in R$ сони топиладики, $x>a$ учун $f(x)>\frac{1}{2}A$ тенгсизлик бажарилади.

Бундан, таққослаш аломатига кўра, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралнинг узоқлашувчи эканлиги келиб чиқади ва шунга кўра $f(x) \notin \bar{L}^{\,C}(R)$. Бу эса теореманинг шартига зиддир. Шунинг учун $A > 0$ бўла олмайди. Худди шунингдек, $A < 0$ ҳам бўла олмайди. Демак, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ экан.

Худди шунга ўхшаш $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ эканлиги исбот қилинади.

$\bar{L}^{\,C}(R)$ синф функциялари учун бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринлидир. Шу формулани қўллаб

$$F[f'] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}dx = f(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$

тенгликни ёзамиз.

Маълумки, $\left|e^{-ixy}\right| = 1$ эканлигидан юқоридаги тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл ташқарисидаги ҳаднинг нолга тенг эканлиги келиб чиқади ва шунга кўра

$$F[f'] = iy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx,$$

яъни

$$F[f'] = iyF[f]$$

тенглик ўринли бўлади. Теорема исбот бўлди.

Натижа. *Агар* $f(x),\ f'(x),\ \dots,\ f^{(k-1)}(x)$ *функциялар узлуксиз ва* $f^{(k-1)}(x) \in \bar{L}^{\,C}(R)$ *бўлса, у ҳолда*

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f] \qquad (3.1.7)$$

тенглик ўринли.

(3.1.7) формула математик индукция усули билан (3.1.6) формуладан ҳосил қилинади.

4. Функция Фурье алмаштиришини дифференциаллаш.

3-теорема. *Агар* R *сон ўқида* $f(x)$ *функция узлуксиз, ҳамда* $f(x)$ *ва* $xf(x)$ *функциялар* R *да абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда* $\hat{f}(y) = F[f]$ *функция* R *да узлуксиз ҳосилага эга ва*

$$\hat{f}\,'(y)=\frac{d}{dy}(F[f])=F[(-ix)f(x)] \qquad (3.1.8)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. (3.1.3) интегрални y параметр бўйича дифференциалласак, у ҳолда

$$\frac{d}{dy}(F[f])=\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(-ix)f(x)e^{-ixy}dx \qquad (3.1.9)$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу ерда интеграл белгиси остида дифференциаллашнинг қонуний эканлигини асослаймиз. Вейерштрасс аломатига кўра, $\int_{-\infty}^{+\infty}(-ix)f(x)e^{-ixy}dx$ интеграл R сон ўқида y параметр бўйича текис яқинлашувчи бўлади, чунки $\left|(-ix)f(x)e^{-ixy}\right|=|xf(x)|$ тенглик ўринли бўлиб $\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|dx<\infty$ интеграл яқинлашувчидир. Шунга кўра, интеграл белгиси остида дифференциаллаш мумкин бўлади. Теорема исбот бўлди.

Натижа. *Агар* $f(x)$ *узлуксиз функция бўлиб,* $f(x), xf(x), ..., x^n f(x)$ *функциялар абсолют интегралланувчи функциялар бўлса, у ҳолда*

$$\frac{d^k}{dy^k}\big(F[f]\big)=F[(-ix)^k f(x)], \qquad k=\overline{1,n}$$

тенглик ўринли бўлади.

Айрим ҳолларда $f(x)$ функцияга оригинал деб, $\hat{f}(y)=F[f]$ функцияга эса унинг Фурье бўйича тасвири деб айтилади. 2 ва 3–теоремалардан кўринадики, Фурье алмаштириши оригинални дифференциаллаш амали шу функцияга мос Фурье бўйича тасвирини iy эркли ўзгарувчига кўпайтириш амали билан ва оригинални $-ix$ эркли ўзгарувчига кўпайтирилган функциянинг Фурье бўйича тасвири эса шу функцияга мос Фурье бўйича тасвирини дифференциаллаш амали билан алмашади. Фурье алмаштиришининг бу хоссалари дифференциал тенгламаларни ечишнинг асосий операцион методларидан иборат бўлади.

Биз S –орқали бутун сон ўқида чексиз дифференциалланувчи ва ихтиёрий $f^{(k)}(x)$ ҳосила чексизликда x^{-m} ихтиёрий манфий даражадан тез камаювчи бўлган функциялар синфини белгилаймиз. У ҳолда

1) S –синф бўш бўлмаган тўплам,

2) S –синф чизиқли фазо,

3) F Фурье оператори S синфни S синфга акслантирувчи чизиқли ва ўзаро бир қийматли акслантиришдан иборат бўлади.

1-мисол. $e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциянинг Фурье бўйича тасвирини аниқлаймиз.

$$I(y)=F[e^{-\frac{x^2}{2}}]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}dx \qquad (3.1.10)$$

интегрални y параметр бўйича дифференциалласак,

$$I'(y)=-i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}-ixy}dx=i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-iy-x+iy)e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}dx=$$

$$=i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d}{dx}e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\right)dx-y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}dx=ie^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-yI(y)=-yI(y)$$

бўлади. Бундан,

$$\frac{I'(y)}{I(y)}=-y,\ \frac{d}{dy}\left(\ln I(y)\right)=-y,\ \ln I(y)=-\frac{y^2}{2}+\ln C,$$

$$I(y)=Ce^{-\frac{y^2}{2}},\ C=I(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=$$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt=2\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{2\pi},\quad I(y)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

ҳосил бўлади. Бу ерда $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ Эйлер-Пуассон интегралидан фойдаландик. Шундай қилиб

$$F[e^{-\frac{x^2}{2}}]=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}} \qquad (3.1.11)$$

тенглик ҳосил бўлади.

2-мисол. Ихтиёрий $t > 0$ учун

$$F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] = e^{-y^2 t} \tag{3.1.12}$$

формула ўринли бўлишини исбот қиламиз. 1-мисолга кўра,

$$F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}-i\xi(\sqrt{2t}y)}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}I(y\sqrt{2t}) = e^{-y^2 t}$$

тенглик ҳосил бўлади.

5. Функциялар ўрамасининг Фурье алмаштириши. R бутун сон ўқида $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар берилган бўлиб, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt$ хосмас интеграл ихтиёрий $x \in R$ учун яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда бу интеграл R да аниқланган функция бўлиб, одатда бу ифодага f ва φ функцияларнинг ўрамаси деб айтилади ва $f * \varphi$ орқали белгиланади. Шундай қилиб,

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt \tag{3.1.13}$$

тенглик билан f ва φ функцияларнинг ўрамаси аниқланади. Бу $*$ амали f ва φ функцияларнинг ўрама кўпайтмаси деб айтилади.

4-теорема. *Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар R да узлуксиз, чегараланган ва абсолют интегралланувчи функциялар бўлса, у ҳолда $f * \varphi$ ўрама R да узлуксиз, чегараланган ва абсолют интегралланувчи функция бўлади.*

Исбот.

$$\Phi(x, t) = f(t)\varphi(x-t), \ \psi(x) = (f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, t)dt \tag{3.1.14}$$

бўлсин. У ҳолда $\psi(x)$ функциянинг чегараланган эканлиги

$$|\psi(x)| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||\varphi(x-t)|dt \le \sup_{t\in R}|\varphi(t)| \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$$

тенгсизликдан келиб чиқади. $\Phi(x, t)$ функция узлуксиз ва $|\Phi(x, t)| \le M\,|f(t)|$, $M = \sup\limits_{t\in R}|\varphi(t)|$ бўлиб, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} M\,|f(t)|dt < \infty$ интеграл яқинлашувчи эканлигидан Вейерштрасс аломатига кўра, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, t)dt$ хосмас интеграл x параметр бўйича R сон ўқида абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади. Шунга кўра, (3.1.14) тенглик билан аниқланган $\psi(x)$ функция R сон ўқида узлуксиздир.

Энди R сон ўқида $\psi(x) = (f*\varphi)(x)$ ўрама функциянинг абсолют интегралланувчи эканлигини кўрсатамиз. Интеграллаш тартибини алмаштириш ҳақидаги теоремага асосан

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, t)dt \right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x, t)|dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |\varphi(x-t)|dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |\varphi(x-t)|dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi)|d\xi \qquad (3.1.15)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. $|\Phi(x, t)| \le M\,|f(t)|$, $|\Phi(x, t)| \le m|\varphi(x-t)|$ бунда $M = \sup\limits_{t\in R}|\varphi(t)|$, $m = \sup\limits_{t\in R}|f(t)|$ тенгсизликларга кўра, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x, t)|dt$ хосмас интеграл R сон ўқида x параметр бўйича текис яқинлашади. Шунингдек, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x, t)|dx$ хосмас интеграл ихтиёрий чекли $[a, b] \subset R$ оралиқда t параметр бўйича текис яқинлашувчи бўлади. (3.1.15) формулага кўра, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x, t)|dx$

такрорий интеграл мавжуд. Шунинг учун $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|dx$ интеграл яқинлашувчи бўлади.

5-теорема. *Агар 4-теореманинг шартлари бажарилса, у ҳолда*

$$F[f*\varphi]=F[f]\cdot F[\varphi] \qquad (3.1.16)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Интеграллаш тартибини алмаштириш ҳақидаги теоремага кўра,

$$F[f*\varphi]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-iyx}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\varphi(x-t)dt\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-iyx}\varphi(x-t)dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iyt}dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-iy\xi}d\xi=F[f]\cdot F[\varphi]$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

(3.1.16) формуладан оригиналлар ўрама кўпайтмасининг Фурье алмаштириши амали уларнинг мос Фурье бўйича тасвирларининг оддий кўпайтмалари амалига мос келиши келиб чиқади. Фурье алмаштиришининг бу ажойиб хоссаси математик физика тенгламаларини ечишда кенг қўлланилади.

6. Чексиз стерженда иссиқлик тарқалиш ҳақидаги масала.

Стерженнинг x нуқтасидаги $t>0$ вақт моментида ҳарорат $u(x,t)$ бўлсин. $t>0,\ x\in R$ учун $u(x,t)$ ҳароратнинг тарқалиш тақсимоти

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (3.1.17)$$

иссиқлик тарқалиш тенгламаси билан берилади.

Стерженнинг бошланғич ҳарорат тақсимотини

$$u(x,+0)=u_0(x),\ \ x\in R \qquad (3.1.18)$$

кўринишда берамиз.

Бу масалани аввал $u_0(x),\ u_0'(x),\ u_0''(x)$ функциялар узлуксиз, чегараланган ва R сон ўқида абсолют интегралланувчи бўлган шартлар қўйилган ҳолда ечамиз. Шунинг учун юқоридаги 1-леммага кўра, $F[u_0]$, $F[u_0']$ ва $F[u_0'']$ Фурье алмаштиришлари R сон ўқида узлуксиз ва чегараланган функциялардир. У ҳолда 2-теоремага асосан

$$F[u_0''] = (iy)^2 F[u_0] = -y^2 F[u_0],$$

бундан

$$|F[u_0]| = \frac{|F[u_0'']|}{y^2} \le \frac{C}{y^2}$$

ва шунга кўра, $F[u_0]$ функция R сон ўқида абсолют интегралланувчи функция бўлади. (3.1.17) тенгламанинг (3.1.18) бошланғич шартлардаги ечимини

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[u_0]\, v(y, t) e^{ixy} dy \qquad (3.1.19)$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда шундай бир $C_0 > 0$ сон топилиб, барча $t \ge 0$ ва барча $y \in R$ учун

$$|v(y, t)| \le C_0, \ |v_t(y, t)| \le C_0, \ v(y, 0) = 1, \ \left|y^2 v(y, t)\right| \le C_0 \qquad (3.1.20)$$

шартлар бажарилган деб оламиз. У ҳолда (3.1.19) интеграл $t \ge 0$ ва $x \in R$ бўлган t ва x параметрлар бўйича текис яқинлашади ва бу интеграл $t \ge 0$ ва $x \in R$ бўлган t ва x параметрлар бўйича узлуксиз функция бўлиши керак бўлиб, (3.1.18) бошланғич шартни қаноатлантиради.

$v(y, t)$ функцияни шундай танлаймизки, (3.1.20) шартлар ўринли бўлгани ҳолда (3.1.19) интеграл билан аниқланган $u(x, t)$ функция иссиқлик тарқалиш тенгламасини қаноатлантирсин. Шунга кўра,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[u_0] \left[\frac{\partial v(y, t)}{\partial t} + y^2 v(y, t) \right] \cdot e^{ixy} dy \qquad (3.1.21)$$

бўлиб, (3.1.20) шартларга кўра, бу интеграл остида дифференциаллаш қонунийдир ва $u(x, t)$ функция иссиқлик тарқалиш тенгламасининг ечими бўлиши учун $v(x, t)$ функциядан

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial t} + y^2 v(y, t) = 0, \ \ v(y, 0) = 1 \qquad (3.1.22)$$

шартларнинг бажарилишини талаб қиламиз.

Бевосита кўрсатиш мумкинки, $v = e^{-t y^2}$ функция (3.1.20) ва (3.1.22) шартларни қаноатлантиради. Бу ифодани (3.1.19) формулага қўйсак,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[u_0]\cdot e^{-t y^2}\cdot e^{ixy}dy \qquad (3.1.23)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу (3.1.23) ифодани (3.1.12) тенгликдан фойдаланиб ўзгартириб ёзамиз. У ҳолда

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[u_0]\cdot F\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right]e^{ixy}dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F\left[u_0 * \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right]e^{ixy}dy = F^{-1}\left[F\left[u_0 * \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right]\right] =$$

$$= u_0 * \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\cdot u_0(\xi)d\xi$$

бўлади. Шундай қилиб, $t > 0$ учун

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\cdot u_0(\xi)d\xi \qquad (3.1.24)$$

формула ўринли бўлади. (3.1.24) формулага Пуассон формуласи деб айтилади. Бу формулани келтириб чиқаришда ўраманинг Фурье алмаштириши ҳақидаги 5-теоремадан ва ўрамага (3.1.5) тескариланиш формуласини қўллашдан фойдаланилди. Қўйилган шартлар бажарилганда ўрама ҳар бир $t > 0$ учун x бўйича абсолют интегралланувчи ва дифференциалланувчи функция бўлиб бу формула ўринлидир. Бу ерда бошланғич ҳарорат ҳолатига қўйилган шартларни бир мунча камайтирганда ҳам бу формула ўринли бўлаверади. Қўйилган (3.1.17)–(3.1.18) масаланинг чегараланган ечими мавжуд ва ягона бўлишлиги ва бу ечимнинг Пуассон формуласи орқали тасвирланиши учун бошланғич $u_0(x)$ функциянинг бутун сон ўқида узлуксиз ва абсолют интегралланувчи бўлишлиги етарлидир.

Кўрсатиш мумкинки,

а) ҳар бир $t>0$ ва ҳар бир $x \in R$ учун $U(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ функция иссиқлик тарқалиши тенгламасининг ечими бўлади. Бу функцияга *иссиқлик тарқалиши тенгламасининг фундаментал ечими* деб айтилади.

б) агар $u_0(x)$ функция бутун сон ўқида абсолют интегралланувчи функция бўлса, у ҳолда ҳар бир $t>0$ ва ҳар бир $x \in R$ учун $u_0 * U$ функция иссиқлик тарқалиши тенгламасининг ечими бўлади.

в) агар $u_0(x)$ функция бутун сон ўқида абсолют интегралланувчи функция бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\delta>0$ учун

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{x-\delta} U(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi=0,\quad \lim_{t\to+0}\int_{x+\delta}^{+\infty} U(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi=0$$

тенгликлар бажарилади.

г) ҳар бир $\delta>0$ учун

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\delta}^{\delta} U(x,t)dx=1$$

тенглик ўринли бўлади.

д) агар $u_0(x)$ функция бутун сон ўқида абсолют интегралланувчи ва узлуксиз функция бўлса, у ҳолда ҳар бир $\delta>0$ учун

$$\lim_{t\to+0}\int_{x-\delta}^{x+\delta} U(x-\xi,\ t)u_0(\xi)d\xi=u_0(x)$$

тасдиқлар ўринли бўлади.

Кўпинча математик физика тенгламалари учун қўйилган чегаравий масалаларни ечишда қулай бўлган ҳар хил интеграл алмаштиришлардан фойдаланилади. Бундай алмаштиришларга

$$F[f]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$ *экспоненциал Фурье алмаштириши*

билан бир қаторда

$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\cos(xy)dx$ *Фурьенинг косинус-алмаштириши,*

$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\sin(xy)dx$ *Фурьенинг синус-алмаштириши,*

$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)e^{-px}dx$ *Лаплас алмаштириши,*

$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(p)e^{px}dp$ *Лапласнинг тескари алмаштириши,*

$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx$ *Меллин алмаштириши,*

$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(s)x^{-s}ds$ *Меллиннинг тескари алмаштириши,*

$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)J_{\nu}(xy)(xy)^{\frac{1}{2}}dx$ *Бессель–Ганкель алмаштириши,*

$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)Y_{\nu}(xy)(xy)^{\frac{1}{2}}dx$ $Y-$ *алмаштириш,*

$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)K_{\nu}(xy)(xy)^{\frac{1}{2}}dx$ $K-$ *алмаштириш,*

$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)H_{\nu}(xy)(xy)^{\frac{1}{2}}dx$ $H-$ *алмаштириш,*

$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)K_{ix}(y)dx$ *Канторович–Лебедев алмаштириши,*

$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_{0}^{y} f(x)(y-x)^{\mu-1}dx$ *Риман–Лиувилль маъносидаги каср тартибли интеграл алмаштириши,*

$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_{y}^{+\infty} f(x)(x-y)^{\mu-1}dx$ *Вейль маъносидаги каср тартибли интеграл алмаштириши,*

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x+y}dx \text{ Стилтьес алмаштириши,}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{(x+y)^{\rho}}dx \text{ Стилтьеснинг умумлашган алмаштириши,}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x-y}dx \text{ Гильберт алмаштириши}$$

каби алмаштиришларни мисол қилиб келтириш мумкин[1].

Биз энди экспоненциал Фурье алмаштириши учун муҳим саналган айрим формулаларнинг қисқа жадвалини келтирамиз.

Экспоненциал Фурье алмаштиришининг қисқа жадвали

1. Умумий формулалар

№	$f(x)$	$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$
(1)	$g(x)$	$2\pi f(-y)$
(2)	$\overline{f(x)}$	$\overline{g(-y)}$
(3)	$f(x)=f(-x)$	$2\int_0^{\infty} f(x)\cos xydx$
(4)	$f(x)=-f(-x)$	$-2i\int_0^{\infty} f(x)\sin xydx$
(5)	$f(a^{-1}x+b),\ a>0$	$ae^{iaby}g(ay)$
(6)	$f(-a^{-1}x+b),\ a>0$	$ae^{-iaby}g(-ay)$

---

[1] Бу келтирилган алмаштиришлар билан боғлиқ махсус функциялар ва формулалар ҳақида Г. Бейтмен ва А. Эрдейининг “Таблицы интегральных преобразований”, М.: “Наука”, Том 1, 1969, Том 2, 1970 (Harry Bateman and Arthur Erde`lyi “Tables of integral transforms”, Volume I,II, New York, Toronto, London, 1954) китоблари орқали танишиш мумкин.

(7)	$f(ax)e^{ibx},\quad a>0$	$\frac{1}{a}g\left(\frac{y-b}{a}\right)$
(8)	$f(ax)\cos bx,\quad a>0$	$\frac{1}{2a}\left[g\left(\frac{y-b}{a}\right)+g\left(\frac{y+b}{a}\right)\right]$
(9)	$f(ax)\sin bx,\quad a>0$	$\frac{1}{2ai}\left[g\left(\frac{y-b}{a}\right)-g\left(\frac{y+b}{a}\right)\right]$
(10)	$x^n f(x)$	$i^n\,\frac{d^n g(y)}{dy^n}$
(11)	$f^{(n)}(x)$	$i^n y^n g(y)$

2. Элементар функциялар

№	$f(x)$	$g(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$
(1)	$(1+x^2)^{-1}$	$\pi e^{-\lvert y\rvert}$
(2)	$(1+x^2)^{-1}(i-x)^n(i+x)^{-n},$ $n=1,2,3,\ldots.$	$(-1)^{n-1}2\pi\, y e^{-y}L^{\,1}_{n-1}(2y),\quad y>0$ $0,\quad y<0$
(3)	$(\alpha-ix)^{-\nu},\ \operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\nu>0$	$\frac{2\pi y^{\nu-1}}{e^{a y}\,\Gamma(\nu)},\quad y>0$ $0,\quad y<0$
(4)	$(\alpha+ix)^{-\nu},\ \operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\nu>0$	$0,\quad y>0$ $\frac{2\pi(-y)^{\nu-1}e^{a y}}{\Gamma(\nu)},\quad y<0$
(5)	$(x^2+\alpha^2)^{-1}(ix)^{-\nu},$ $-2<\operatorname{Re}\nu<1,\ \operatorname{Re}\alpha>0$ $\arg(ix)=\pi/2\qquad (x>0)$ $\arg(ix)=-\pi/2\qquad (x<0)$	$\pi\alpha^{-\nu-1}e^{-y\alpha},\quad y>0$

(6)	$(x^2+\alpha^2)^{-1}(\beta+ix)^{-\nu}$, $\mathrm{Re}\,\nu>-1$ $\mathrm{Re}\,\alpha>0,\ \mathrm{Re}\,\beta>0$	$\pi\alpha^{-1}(\alpha+\beta)^{-\nu}e^{-\alpha y}, \qquad y>0$
(7)	$(x^2+\alpha^2)^{-1}(\beta-ix)^{-\nu}$, $\mathrm{Re}\,\nu>-1,\ \mathrm{Re}\,\alpha>0$ $\mathrm{Re}\,\beta>0,\ \ \alpha\neq\beta$	$\pi\alpha^{-1}(\beta-\alpha)^{\nu}e^{\alpha y}, \qquad y>0$
(8)	$(\alpha_0-ix)^{-1}(ix)^{\nu_0}\times$ $\times(\alpha_1+ix)^{\nu_1}\ldots(\alpha_n+ix)^{\nu_n}$, $\sum_{i=0}^{n}\mathrm{Re}\,\nu_i<1,\ \mathrm{Re}\,\nu_0>-1,$ $\mathrm{Re}\,\alpha_k>0$ $\arg(ix)=\pi/2 \quad (x>0)$ $\arg(ix)=-\pi/2 \quad (x<0)$	$2\pi e^{-\alpha_0 y}\alpha_0^{\nu_0}(\alpha_0+\alpha_1)^{\nu_1}\cdot$ $\cdot\ldots\cdot(\alpha_0+\alpha_n)^{\nu_n}$, $y>0$
(9)	$(\alpha_0+ix)^{-1}(ix)^{\nu_0}\times$ $\times(\alpha_1+ix)^{\nu_1}\ldots(\alpha_n+ix)^{\nu_n}$, $\sum_{i=0}^{n}\mathrm{Re}\,\nu_i<1,\ \ \mathrm{Re}\,\nu_0>-1,$ $\mathrm{Re}\,\alpha_k>0$ $\arg(ix)=\pi/2 \quad (x>0)$ $\arg(ix)=-\pi/2 \quad (x<0)$	$0, \qquad y>0$

(10)	$(\alpha - ix)^{-\mu}(\beta - ix)^{-\nu}$, $\mathrm{Re}(\mu+\nu) > 1$ $\mathrm{Re}\,\alpha > 0,\ \mathrm{Re}\,\beta > 0$	$\frac{2\pi e^{-\alpha y} y^{\mu+\nu-1}}{\Gamma(\mu+\nu)} \times$ $\times {}_1F_1[\nu;\ \mu+\nu;\ (\alpha-\beta)y], \quad y > 0$ $0, \qquad\qquad y < 0$
(11)	$(\alpha + ix)^{-\mu}(\beta + ix)^{-\nu}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0,\ \mathrm{Re}\,\beta > 0$ $\mathrm{Re}(\mu+\nu) > 1$	$0, \qquad\qquad y > 0$ $\frac{2\pi e^{\alpha y}(-y)^{\mu+\nu-1}}{\Gamma(\mu+\nu)} \times$ $\times {}_1F_1[\nu;\ \mu+\nu;\ (\beta-\alpha)y], \quad y < 0$
(12)	$(\alpha + ix)^{-2\mu}(\beta - ix)^{-2\nu}$, $\mathrm{Re}(\mu+\nu) > 1/2$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0, \quad \mathrm{Re}\,\beta > 0$	$2\pi(\alpha+\beta)^{-\nu-\mu}[\Gamma(2\nu)]^{-1} \times$ $\times e^{2^{-1}(\beta-\alpha)y} y^{\nu+\mu-1} \times$ $\times W_{\nu-\mu,\ 1/2-\nu-\mu}[(\alpha+\beta)y],\ y > 0$ $2\pi(\alpha+\beta)^{-\nu-\mu}[\Gamma(2\mu)]^{-1} \times$ $\times e^{2^{-1}(\alpha-\beta)y}(-y)^{\nu+\mu-1} \times$ $\times W_{\mu-\nu,\ 1/2-\nu-\mu}[-(\alpha+\beta)y],\ y < 0$
(13)	$0, \qquad -\infty < x < -1$ $(1-x)^{\nu-1}(1+x)^{\mu-1}, \ -1 < x < 1$ $0, \qquad 1 < x < \infty$ $\mathrm{Re}\,\nu > 0,\ \mathrm{Re}\,\mu > 0$	$2^{\nu+\mu-1} B(\mu,\ \nu) e^{iy} \times$ $\times {}_1F_1(\mu;\ \nu+\mu;\ -2iy)$
(14)	$(a - e^{-x})^{-1} e^{-\lambda x}$, $0 < \mathrm{Re}\,\lambda < 1,\ a > 0$	$\pi a^{\lambda-1+iy} ctg[\pi\lambda + i\pi y]$ интеграл Кошининг бош қиймати маъносида тушунилади

(15)	$(\alpha+e^{-x})^{-1}e^{-\lambda x}$, $0<\operatorname{Re}\lambda<1,\ -\pi<\arg\alpha<\pi$	$\dfrac{\pi\,\alpha^{\lambda-1+i\,y}}{\sin(\pi\lambda+i\pi\,y)}$
(16)	$x(\alpha+e^{-x})^{-1}e^{-\lambda x}$, $0<\operatorname{Re}\lambda<1,\ -\pi<\arg\alpha<\pi$	$\dfrac{\pi\,\alpha^{\lambda-1+iy}[\ln\alpha-\pi ctg(\pi\lambda+i\pi y)]}{\sin(\pi\lambda+i\pi\,y)}$
(17)	$x^2(1+e^{-x})^{-1}e^{-\lambda x}$, $0<\operatorname{Re}\lambda<1$	$\dfrac{\pi^3\,[2-\sin^2(\pi\lambda+iy\pi)]}{\sin^3(\pi\lambda+i\pi\,y)}$
(18)	$(\alpha+e^{-x})^{-1}(\beta+e^{-x})^{-1}e^{-\lambda x}$, $0<\operatorname{Re}\lambda<2,\ \ \beta\neq\alpha$ $\lvert\arg\alpha\rvert<\pi,\ \lvert\arg\beta\rvert<\pi$	$\dfrac{\pi(\alpha^{\lambda-1+iy}-\beta^{\lambda-1+iy})}{(\beta-\alpha)\sin(\pi\lambda+iy\pi)}$
(19)	$x(\alpha+e^{-x})^{-1}(\beta+e^{-x})^{-1}e^{-\lambda x}$, $0<\operatorname{Re}\lambda<2,\ \ \beta\neq\alpha$ $\lvert\arg\alpha\rvert<\pi,\ \lvert\arg\beta\rvert<\pi$	$\dfrac{\pi(\alpha^{\lambda-1+iy}\ln\alpha-\beta^{\lambda-1+iy}\ln\beta)}{(\alpha-\beta)\sin(\pi\lambda+iy\pi)}+$ $+\dfrac{\pi^2(\alpha^{\lambda-1+iy}-\beta^{\lambda-1+iy})\cos(\lambda\pi+iy\pi)}{(\beta-\alpha)\sin^2(\pi\lambda+iy\pi)}$
(20)	$(1+e^{-x})^{-n}e^{-\lambda x}$, $n=1,\,2,\,3,\,\ldots,$ $0<\operatorname{Re}\alpha<n$	$\dfrac{\pi}{(n-1)!\sin(\pi\lambda+i\pi\,y)}\times$ $\times\prod_{j=1}^{n-1}(j-\lambda-iy)$
(21)	$\dfrac{e^{-\alpha x}}{(e^{\beta/\gamma}+e^{-x/\gamma})^{\nu}}$, $\operatorname{Re}(\nu/\gamma)>\operatorname{Re}\alpha>0$ $\lvert\operatorname{Im}\beta\rvert<\pi\operatorname{Re}\gamma$	$\gamma e^{\beta(\alpha+iy-\nu/\gamma)}\times$ $\times B[\gamma(\alpha+iy),\ \nu-\gamma(\alpha+iy)]$

(22)	$\frac{e^{-\alpha x}}{(e^{\beta}+e^{-x})^{\nu}(e^{\gamma}+e^{-x})^{\mu}}$, $0<\mathrm{Re}\,\alpha<\mathrm{Re}(\mu+\nu)$ $\lvert\mathrm{Im}\,\beta\rvert<\pi, \quad \lvert\mathrm{Im}\,\gamma\rvert<\pi$	$e^{\gamma(\alpha+iy-\mu)-\beta\nu}\times$ $\times\frac{\Gamma(\alpha+iy)\Gamma(\mu+\nu-\alpha-iy)}{\Gamma(\mu+\nu)}\times$ $\times{}_2F_1(\nu,\,\alpha+iy;\,\mu+\nu;1-e^{\gamma-\beta})$
(23)	$(ix)^{\nu}e^{-\alpha^2x^2}$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1$ $\arg(ix)=\pi/2 \quad (x>0)$ $\arg(ix)=-\pi/2 \quad (x<0)$	$\pi^{1/2}2^{-\nu/2}\alpha^{-\nu-1}e^{-2^{-3}\alpha^{-2}y^2}D_{\nu}(2^{-1/2}\alpha^{-1}y)$
(24)	$\left[\exp(e^{-x})-1\right]^{-1}e^{-\lambda x}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda>1$	$\zeta(\lambda+iy)\Gamma(\lambda+iy)$
(25)	$\left[\exp(e^{-x})+1\right]^{-1}e^{-\lambda x},\ \mathrm{Re}\,\lambda>0$	$(1-2^{1-\lambda-iy})\Gamma(\lambda+iy)\zeta(\lambda+iy)$
(26)	$e^{-\lambda x}\ln\lvert 1-e^{-x}\rvert, -1<\mathrm{Re}\,\lambda<0$	$\pi(\lambda+iy)^{-1}ctg(\pi\lambda+iy\pi)$
(27)	$e^{-\lambda x}\ln(1+e^{-x}),\ -1<\mathrm{Re}\,\lambda<0$	$\frac{\pi}{(\lambda+iy)\sin(\pi\lambda+iy\pi)}$
(28)	$e^{-\lambda x}\ln\frac{\lvert 1+e^{-x}\rvert}{\lvert 1-e^{-x}\rvert}, \quad \lvert\mathrm{Re}\,\lambda\rvert<1$	$\pi(\lambda+iy)^{-1}tg(2^{-1}\pi\lambda+2^{-1}iy\pi)$

(29)	$e^{-\lambda x}(a+e^{-x})^{-\nu}\ln(a+e^{-x}),$ $a>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>\mathrm{Re}\,\lambda>0$	$a^{\lambda+iy-\nu}B(\lambda+iy,\,\nu-\lambda-iy)\times$ $\times[\psi(\nu)-\psi(\nu-\lambda-iy)+\ln a]$
(30)	$(shx+sha)^{-1},\quad a>0$	$-\dfrac{i\pi\left[ch(\pi y)-e^{-2lay}\right]e^{lay}}{cha\ sh(\pi y)}$ интеграл Кошининг бош қиймати маъносида тушунилади
(31)	$0, \qquad -\infty<x<-\pi/2$ $(\cos x)^{\mu}(a^2e^{ix}+b^2e^{-ix})^{\nu},$ $-\pi/2<x<\pi/2$ $0, \qquad \pi/2<x<\infty$ $\mathrm{Re}\,\mu>-1$	$\dfrac{\pi b^{2\nu}2^{-\mu}\Gamma(1+\mu)}{\Gamma\left(1-\frac{y}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{y}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)}\times$ $\times{}_2F_1\left(-\nu,\,\dfrac{y+\nu+\mu}{-2};1+\dfrac{\mu-\nu-y}{2};\,\dfrac{a^2}{b^2}\right),$ $a^2<b^2$ $\dfrac{\pi a^{2\nu}2^{-\mu}\Gamma(1+\mu)}{\Gamma\left(1+\frac{y}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}-\frac{y}{2}+\frac{\mu}{2}\right)}\times$ $\times{}_2F_1\left(-\nu,\,\dfrac{y-\nu-\mu}{2};1+\dfrac{\mu+y-\nu}{2};\,\dfrac{b^2}{a^2}\right),$ $a^2>b^2$
(32)	$\dfrac{e^{\nu\,arsh\,x}}{(1+x^2)^{1/2}},\ \lvert\mathrm{Re}\,\nu\rvert<1$	$-2e^{-2^{-1}\nu\pi i}K_{\nu}(y),\quad y>0$ $-2e^{2^{-1}\nu\pi i}K_{\nu}(-y),\quad y<0$

3. Юқори тартибли трансцендент функциялар

№	$f(x)$	$g(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$
(1)	$0, \quad -\infty < x < -1$ $P_n(x), \quad -1 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$	$(-1)^n i^n (2\pi)^{1/2} y^{-1/2} J_{n+1/2}(y)$
(2)	$0, \quad -\infty < x < -1$ $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(x), \quad -1 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$	$(-1)^n i^n \pi J_n(y)$
(3)	$0, \quad -\infty < x < -1$ $(1-x^2)^{\nu} P_n^{(\nu,\ \nu)}(x), \ -1 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $\operatorname{Re}\nu > -1$	$(-i)^n 2^{\nu+\frac{1}{2}} \pi^{1/2} y^{-\nu-1/2} (n!)^{-1} \times$ $\times \Gamma(n+\nu+1) J_{n+\nu+\frac{1}{2}}(y)$
(4)	$0, \quad -\infty < x < -1$ $(1-x)^{\nu}(1+x)^{\mu} P_n^{(\nu,\ \mu)}(x),$ $-1 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$ $\operatorname{Re}\nu > -1, \ \operatorname{Re}\mu > -1$	$(-i)^n 2^{n+\nu+\mu+1} y^n (n!)^{-1} \times$ $\times B(n+\nu+1,\ n+\mu+1) e^{iy} \times$ $\times {}_1F_1(n+\nu+1;\ 2n+\mu+\nu+2;\ -2iy)$
(5)	$[\Gamma(\nu-x)\Gamma(\mu+x)]^{-1}$	$\left[2\cos(y/2)\right]^{\mu+\nu-2} e^{2^{-1} i y(\mu-\nu)} \times$ $\times [\Gamma(\mu+\nu-1)]^{-1}, \quad \lvert y \rvert < \pi$ $0, \quad \lvert y \rvert > \pi$

(6)	$0, \quad -\infty < x < -1$ $P_\nu(x), \quad -1 < x < 1$ $0, \quad 1 < x < \infty$	$2\pi(1+\nu^2)^{-1}\sin(\nu\pi)e^{iy} \times$ $\times {}_2F_2(1,\ 1;\ -\nu,\ 2+\nu;\ -2iy)$
(7)	$x^{-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(x)$	$(-1)^n i^n (2\pi)^{\frac{1}{2}} P_n(y), \quad \lvert y\rvert < 1$ $0, \quad \lvert y\rvert > 1$
(8)	$x^{-\nu-1/2} J_{n+\nu+1/2}(x), \quad \mathrm{Re}\,\nu > -1$	$2^{-\nu+1/2}\pi^{1/2}(-1)^n i^n n![\Gamma(n+\nu+1)]^{-1} \times$ $\times(1-y^2)^\nu P_n^{(\nu,\,\nu)}(y), \quad \lvert y\rvert < 1$ $0, \quad \lvert y\rvert > 1$
(9)	$J_{\mu+x}(\alpha)J_{\nu-x}(\alpha), \quad \mathrm{Re}(\mu+\nu) > -1$	$e^{2^{-1}iy(\mu-\nu)}J_{\mu+\nu}[2\alpha\cos(y/2)], \quad \lvert y\rvert < \pi$ $0, \quad \lvert y\rvert > \pi$
(10)	$[(x+c)^2+b^2]^{-\nu} \times$ $\times J_\nu\{a[(x+c)^2+b^2]\},$ $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2},\ a,\ b,\ c > 0$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{icy}a^{-\nu}b^{-\nu+\frac{1}{2}}(a^2-y^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \times$ $\times J_{\nu-\frac{1}{2}}[b(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}], \quad \lvert y\rvert < a$ $0, \quad \lvert y\rvert > a$

(11)	$0, \qquad \lvert x\rvert > \frac{\pi}{2}$ $(\cos x)^{\nu}(a^2e^{ix}+b^2e^{-ix})^{-\nu}\times$ $\times J_{2\nu}\{c[2(a^2e^{ix}+b^2e^{-ix})\cos x]^{\frac{1}{2}}\},$ $\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1$	$\pi\, 2^{-\nu} a^{\frac{y}{2}-\nu} b^{-\frac{y}{2}-\nu} J_{\nu-\frac{y}{2}}(ac)\, J_{\nu+\frac{y}{2}}(bc)$
(12)	$a^{-\mu-x}b^{-\nu+x}J_{\mu+x}(a)J_{\nu-x}(b),$ $\operatorname{Re}(\mu+\nu)>1,\ a,\ b>0$	$\left[2\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right]^{\frac{\mu+\nu}{2}}\left(a^2e^{i\frac{y}{2}}+\right.$ $\left.+b^2e^{-i\frac{y}{2}}\right)^{-\frac{\mu+\nu}{2}} e^{2^{-1}iy(\mu-\nu)}\times$ $\times J_{\mu+\nu}\{[2(a^2e^{\frac{iy}{2}}+b^2e^{-\frac{iy}{2}})\cos(y/2)]^{1/2}\},$ $\lvert y\rvert < \pi$ $0, \qquad \lvert y\rvert > \pi$
(13)	$e^{-2^{-2}(1+\lambda)x^2}D_{\nu}[(1-\lambda)^{1/2}x],\ \operatorname{Re}\lambda>0$	$(2\pi)^{1/2}\lambda^{\nu/2}e^{-2^{-2}\lambda^{-1}(1+\lambda)y^2}\times$ $\times D_{\nu}[-iy(\lambda^{-1}-1)^{1/2}]$
(14)	$x^ne^{-ix}\,{}_1F_1(a;\ b;\ 2ix),$ $\operatorname{Re}a>n,\ \operatorname{Re}(b-a)>n$	$(-i)^n\pi 2^{n+2-b}n![B(a,\ b-a)]^{-1}\times$ $\times(1-y)^{a-n-1}(1+y)^{b-a-n-1}\times$ $\times P_n^{(a-n-1,\ b-a-n-1)}(y)\quad ,\quad \lvert y\rvert<1$ $0, \qquad \lvert y\rvert>1$

2-§. Бутун сон ўқида квадрати билан жамланувчи бир ўзгарувчили функцияларнинг Фурье алмаштириши. Планшерель теоремаси

$L_2(\Omega)$ – орқали $\Omega \subset R^n$ ўлчовли тўпламда модулининг квадрати Лебег маъносида интегралланувчи бўлган $f(x)$ ўлчовли функциялар тўпламини белгилаймиз.

Бу синфда

$$(f,\varphi)=\int\limits_{\Omega} f(x)\overline{\varphi(x)}dx$$

скаляр кўпайтма киритиш мумкин бўлиб, $L_2(\Omega)$ гильберт фазосини ташкил қилади.

1. Ўртача функциялар ва уларнинг хоссалари. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сонни оламиз ва қуйидаги функцияни қараймиз:

$$\omega_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon C}\cdot\begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}}, & |x|<\varepsilon \\ 0, & |x|\ge\varepsilon \end{cases}, \tag{3.2.1}$$

бунда $C=\int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}dx$. Бу $\omega_\varepsilon(x)$ функция манфиймас, чексиз дифференциалланувчи ва финит функциядир. Бундан ташқари

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega_\varepsilon(x)dx=1 \tag{3.2.2}$$

тенглик ўринли.

Агар $f(x)$ функция $R=(-\infty,\,+\infty)$ сон ўқида аниқланган бўлиб, ихтиёрий чекли $[a,\,b]$ оралиқда Лебег маъносида интегралланувчи бўлса, у ҳолда бу функция $R=(-\infty,\,+\infty)$ *сон ўқида локал интегралланувчи функция* дейилади. Ихтиёрий локал интегралланувчи функция учун

$$f_\varepsilon(x)=f*\omega_\varepsilon=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\omega_\varepsilon(x-t)dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\omega_\varepsilon(t)dt \tag{3.2.3}$$

“ўртача функция” ни қурамиз. (3.2.3) формулада берилган функция финит эканлигидан интеграллашни чекли оралиқ билан алмаштириш мумкин.

Ўртача функция қуйидаги муҳим хоссаларни қаноатлантиради:

1) $f_\varepsilon(x)$ *функция чексиз дифференциалланувчи функция бўлади.*

Исбот. $\omega_\varepsilon(x)$-чексиз дифференциалланувчи функция бўлиб, $[-\varepsilon,\ \varepsilon]$ оралиқнинг ташқарисида нолга тенг эканлигидан, унинг барча ҳосилалари чегараланган эканлиги келиб чиқади, яъни

$$\left|\omega_\varepsilon^{(n)}(x)\right| \le C_n(\varepsilon),\ n = 1, 2, ...$$

тенгсизлик ўринлидир. Лекин, у ҳолда ихтиёрий $[-A,\ A]$ оралиқда

$$\left| f(t)\frac{\omega_\varepsilon(x+\Delta x - t) - \omega_\varepsilon(x-t)}{\Delta x}\right| = |f(t)|\cdot|\omega'_\varepsilon(x - t + \theta\Delta x)| \le C_1(\varepsilon)|f(t)|,$$

$$\int_{-A}^{A} |f(t)|dt < +\infty$$

тенгсизликларга эга бўламиз.

Интеграл белгиси остида дифференциаллаш ҳақидаги теоремага кўра,

$$\frac{df_\varepsilon(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\omega_\varepsilon(x-t)dt = \frac{d}{dx}\int_{-A}^{+A} f(t)\omega_\varepsilon(x-t)dt =$$

$$= \int_{-A}^{+A} f(t)\omega_\varepsilon^{'}(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\omega_\varepsilon^{'}(x-t)dt$$

ҳосил бўлади. Худди шунга ўхшаш, барча ҳосилаларининг мавжудлиги исбот қилинади.

2) Агар f *– финит функция бўлса, у ҳолда* $f_\varepsilon(x)$ *– функция ҳам финитдир.*

Исбот. $|x-t| > \varepsilon$ учун $\omega_\varepsilon(x-t) = 0$ ва $[-a, a]$ оралиқ ташқарисида $f(t) = 0$ эканлигидан, $|x| > a + \varepsilon$ ва $t \in [-a, a]$ учун

$$|x-t| \ge |x| - |t| > a + \varepsilon - a = \varepsilon,\ \omega_\varepsilon(x-t) = 0$$

бўлади. Шунга кўра,

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x-t)f(t)dt = \int_{-a}^{a} \omega_\varepsilon(x-t)f(t)dt = 0$$

ҳосил бўлади.

3) Агар $f \in L_2(R)$ *бўлса, у ҳолда* $\| f_\varepsilon \|_{L_2(R)} \le \| f \|_{L_2(R)}$ *тенгсизлик ўринли бўлади.*

Исбот. f функциянинг локал интегралланувчи эканлиги ихтиёрий чекли $[a, b]$ оралиқ учун

$$\int_a^b |f| dx \le \left(\int_a^b |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b dx \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sqrt{b-a} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a} \, \| f \| \qquad (3.2.4)$$

тенгсизлик ўринли эканлигидан келиб чиқади. Коши-Буняковский тенгсизлигини қўллаб ва $\omega_\varepsilon(x)$ функциянинг хоссаларидан фойдаланиб,

$$|f_\varepsilon(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f| \; \omega_\varepsilon(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \sqrt{\omega_\varepsilon(x-t)} \cdot \sqrt{\omega_\varepsilon(x-t)} \; dt \le$$

$$\le \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, \omega_\varepsilon(x-t) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x-t) dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, \omega_\varepsilon(x-t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз, бундан эса

$$\| f_\varepsilon \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x)|^2 dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x-t) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \| f \|^2$$

бўлишини топамиз. Бу тенгсизлик интеграл остидаги манфиймас функция учун интеграллаш тартибини алмаштириш қонуний эканлигидан келиб чиқади.

4) Агар $R = (-\infty, +\infty)$ *да* $f(x)$ *функция текис узлуксиз бўлса, у ҳолда* $\varepsilon \to +0$ *да* $\max\limits_{x \in R} |f_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0$ *бўлади.*

Исбот. $f_\varepsilon(x) - f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \omega_\varepsilon(x-t) dt - f(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x-t) dt =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\, f(t) - f(x)] \omega_\varepsilon(x-t) dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} [\, f(x-t) - f(x)] \omega_\varepsilon(t) dt$$

бўлиб, бундан агар $\varepsilon \to +0$ бўлса, у ҳолда

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \le \max_{\substack{x\in R\\ |t|<\varepsilon}} |f(x-t) - f(x)| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(t)dt =$$

$$= \max_{\substack{x\in R\\ |t|<\varepsilon}} |f(x-t) - f(x)| \to 0$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Шунга кўра, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \max\limits_{x\in R} |f_\varepsilon(x) - f(x)| = 0$ бўлади.

Натижа. *Агар* $f(x)$ *функция узлуксиз ва финит функция бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \max\limits_{x\in R} |f_\varepsilon(x) - f(x)| = 0$ *бўлади.*

1-теорема*. Ихтиёрий* $f \in L_2(R)$ *функция учун шундай бир* $f_n(x)$ *чексиз дифференциалланувчи финит функциялар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб, бунда* $n \to \infty$ *да* $\|f - f_n\|_{L_2(R)} \to 0$ *бўлади.*

Исбот. $f \in L_2(R)$ бўлсин.

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \le n, \\ 0, & |x| > n \end{cases} \qquad (3.2.5)$$

деб оламиз. Бевосита ҳар бир $x \in R$ учун $n \to \infty$ да $f_n(x) \to f(x)$ эканлиги келиб чиқади. Ҳамда $|f_n| \le |f|$ эканлигидан ва

$$|f_n - f|^2 \le 2|f_n|^2 + 2|f|^2 \le 4|f|^2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dx < +\infty$$

тенгсизликлар ўринли эканлигидан интеграл остида лимитга ўтиш ҳақидаги Лебег теоремасига кўра,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

тенгликка эга бўламиз. Демак, $f \in L_2(R)$ учун ва $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $\varphi_1 \in L_2(R)$ финит функция мавжудки, бунда $\|f - \varphi_1\|_{L_2(R)} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ тенгсизлик ўринли бўлади.

$\varphi_1 \in L_2(R)$ финит функция учун φ_2 узлуксиз финит функция топиладики, бунда $\|\varphi_2 - \varphi_1\|_{L_2(R)} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Ўртача функциянинг 4-хоссасининг натижасига кўра, φ_2 узлуксиз финит функция учун φ_3 чексиз дифференциалланувчи финит функция топилиб, $\| \varphi_3 - \varphi_2 \|_{L_2(R)} < \frac{\varepsilon}{3}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра,

$$\| f - \varphi_3 \| \leq \| f - \varphi_1 \| + \| \varphi_1 - \varphi_2 \| + \| \varphi_2 - \varphi_3 \| < \varepsilon$$

ҳосил бўлади. Теорема исбот бўлди.

Демак, ихтиёрий $f \in L_2(R)$ функцияни исталган аниқлик даражасида $L_2(R)$ фазо нормаси бўйича φ_3 чексиз дифференциалланувчи финит функция билан яқинлаштириш мумкин. Шунга кўра, чексиз дифференциалланувчи финит функциялар кетма-кетлиги $\{f_n\}$ топилиб, $n \to \infty$ да $\| f - f_n \|_{L_2(R)} \to 0$ эканлиги келиб чиқади.

2. Бутун сон ўқида квадрати билан жамланувчи бир ўзгарувчили функцияларнинг Фурье алмаштириши. Агар $f \in L_2(R)$ бўлса, у ҳолда f функция $R = (-\infty, +\infty)$ бутун сон ўқида интегралланувчи бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан,

$$f = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L_2(R), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = +\infty .$$

Шунинг учун умуман олганда, ихтиёрий $f \in L_2(R)$ функция учун $F[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iux} dx$ Фурье алмаштириши мавжуд эмас. $L_2(R)$ синфдаги функциялар учун Фурье алмаштиришининг умумлашмасини киритиш мумкинлигини 1910 йилда Планшерель кўрсатган.

1-лемма. *Агар $\varphi(x)$ чексиз дифференциалланувчи финит функция бўлса, у ҳолда $F[\varphi] \in L_2(R) \cap L_1(R)$ ва*

$$\|F[\varphi]\|^2_{L_2(R)} = 2\pi \|\varphi\|^2_{L_2(R)} \qquad (3.2.6)$$

Планшерель тенглиги ўринли бўлади.

Исбот. $F[\varphi](u)$ Фурье алмаштиришининг хоссаларига кўра, унинг чексизликда ихтиёрий манфий даражали $|u|^{-n}$ га қараганда тезроқ нолга интилувчан эканлигидан $F[\varphi] \in L_2(R) \cap L_1(R)$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[\varphi](u)e^{ixu}du$$

Фурье интеграли формуласининг ўринли бўлиши келиб чиқади. Бундан ташқари,

$$\|\varphi\|^2_{L_2(R)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\overline{\varphi(x)}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(x)}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[\varphi](u)e^{ixu}du\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[\varphi](u)du\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(x)}e^{ixu}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[\varphi](u)\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-ixu}dx}\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F[\varphi]\cdot\overline{F[\varphi]}du = \frac{1}{2\pi}\|F[\varphi]\|^2_{L_2(R)}$$

тенглик ўринли бўлади. 1-лемма исбот бўлди.

2-лемма. *Ихтиёрий $f \in L_2(R)$ финит функция учун (3.2.6) Планшерель тенглиги ўринли бўлади.*

Исбот. $f \in L_2(R)$ ва f функция $[-a,\, a]$ оралиқнинг ташқарисида нолга тенг бўлсин. У ҳолда $f \in L_1(R)$ эканлиги келиб чиқади, чунки

$$\| f \|_{L_1(R)} = \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x)| dx = \int_{-a}^{a} | f(x)| dx \le \left\{\int_{-a}^{a} | f |^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int_{-a}^{a} 1dx\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} | f |^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2a} = \sqrt{2a}\cdot \| f \|_{L_2(R)} \qquad (3.2.7)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Юқоридаги 1-теоремага кўра, $[-2a,\, 2a]$ оралиқнинг ташқарисида нолга айланувчи чексиз дифференциалланувчи функциялар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб $n \to \infty$ да $\| f - f_n\|_{L_2(R)} \to 0$ эканлиги келиб чиқади. Шунингдек, (3.2.7) тенгсизликка кўра, $n \to \infty$ да $\| f - f_n\|_{L_1(R)} \to 0$ бўлади. Шунга кўра,

$$|F[f_n]-F[f]|=\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f-f_n)e^{-ixu}dx\right|\leq\|f-f_n\|_{L_1(R)} \qquad (3.2.8)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу тенгсизликдан $F[f_n]$ функционал кетма-кетликнинг $F[f]$ функцияга текис яқинлашиши келиб чиқади.

Маълумки, f_n кетма-кетлик f га $L_2(R)$ фазода яқинлашувчи эканлигидан шу фазода бу f_n кетма-кетликнинг фундаментал кетма-кетлик эканлиги келиб чиқади. Чексиз дифференциалланувчи финит функциялар учун (3.2.6) Планшерель тенглиги ўринли бўлгани учун

$$\|F[f_n]-F[f_m]\|^2_{L_2(R)}=2\pi\|f_n-f_m\|^2_{L_2(R)}$$

тенглик ўринли ва шунинг учун бу $F[f_n]$ кетма-кетлик $L_2(R)$ фазода фундаментал кетма-кетлик бўлади. Бу фазонинг тўлалигига кўра, $F[f_n]$ кетма-кетлик $L_2(R)$ фазода қандайдир $g\in L_2(R)$ функцияга яқинлашади. $F[f_n]$ кетма-кетлик $F[f]$ га текис яқинлашувчи бўлгани учун $g=F[f]$ тенглик ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $F[f]\in L_2(R)$ экан.

Энди интеграл белгиси остида лимитга ўтиб,

$$\|F[f_n]\|^2_{L_2(R)}=2\pi\|f_n\|^2_{L_2(R)}$$

тенгликдан f функция учун

$$\|F[f]\|^2_{L_2(R)}=2\pi\|f\|^2_{L_2(R)}$$

Планшерель тенглигини ҳосил қиламиз. 2-лемма исбот бўлди.

2-теорема (Планшерель теоремаси). *Ихтиёрий* $f\in L_2(R)$ *ва* $f_n(x)=\begin{cases}f(x), & |x|\leq n\\ 0, & |x|>n\end{cases}$ *тенглик билан аниқланган финит функциялар кетма-кетлиги бўлсин. У ҳолда* $n\to\infty$ *да* $F[f_n](u)$ *кетма-кетлик* $L_2(R)$ *фазонинг нормаси бўйича қандайдир* $g(u)$ *функцияга яқинлашади ва бу функция* f *функциянинг* $F[f]$ *Фурье алмаштириши деб аталади ва* $F[f]$ *каби белгиланади. Бу* f *ва* $F[f]$ *функциялар учун*

$$\|F[f]\|_{L_2(R)}^2 = 2\pi \| f \|_{L_2(R)}^2$$

Планшерель тенглиги ўринли бўлади. Агар $f \in L_2(R) \bigcap L_1(R)$ *бўлса, у ҳолда* $g(u)$ *функция* $F[f]$ *оддий Фурье алмаштириши билан устма-уст тушади.*

Исбот. (3.2.5) формула билан аниқланган $\{f_n\}$ кетма-кетлик $L_2(R)$ фазода яқинлашади ва шунинг учун фундаменталдир. $L_2(R)$ фазога тегишли бўлган финит функциялар учун 2-леммага кўра, Планшерель тенглиги ўринли эканлигидан

$$\|F[f_n] - F[f_m]\|_{L_2(R)}^2 = 2\pi \| f_n - f_m \|_{L_2(R)}^2$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликка кўра, $F[f_n]$ кетма-кетлик фундаментал ва шунга кўра, $L_2(R)$ фазода қандайдир $g(u)$ функцияга яқинлашади ва бу функцияни f функциянинг $F[f]$ Фурье алмаштириши деб аниқлаймиз. f_n функция учун Планшерель тенглигида $n \to \infty$ да лимитга ўтсак, у ҳолда f функция учун Планшерель тенглиги ҳосил бўлади.

Агар $f \in L_2(R) \bigcap L_1(R)$ бўлса, у ҳолда f функция учун

$$F[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixu} dx$$

оддий маънодаги Фурье алмаштириши мавжуд бўлади.

$$|F[f] - F[f_n]| \le \| f - f_n \|_{L_1(R)}$$

эканлигидан $F[f_n]$ кетма-кетликнинг $F[f]$ функцияга текис яқинлашиши келиб чиқади. Бундан ташқари, $F[f_n]$ кетма-кетлик $L_2(R)$ фазода $g(u)$ функцияга яқинлашгани учун

$$g(u) = \lim_{n \to \infty} F[f_n] = F[f]$$

бўлиши келиб чиқади. 2-теорема исбот бўлди.

Натижа. *F Фурье оператори* $L_2(R)$ *фазони* $L_2(R)$ *фазога узлуксиз ва ўзаро бир қийматли акслантиради.*

Ҳақиқатдан ҳам, агар $f_1 \in L_2(R)$, $f_2 \in L_2(R)$ ва $F[f_1] = F[f_2]$ бўлса, у ҳолда Планшерель тенглигига кўра,

$$0 = \|F[f_1 - f_2]\|^2 = 2\pi \| f_1 - f_2 \|^2,$$

яъни $f_1 = f_2$ бўлади.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

$f(x)$ функция учун

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-itx}dt$$

тенглик билан Фурье алмаштириши аниқланган бўлсин.

16.1. $f(x)=e^{-\alpha|x|},(\alpha>0)$ функциянинг $F(x)$ Фурье алмаштиришини аниқланг.

16.2. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциянинг $F(x)$ Фурье алмаштиришини аниқланг.

16.3. $f(x)=x\cdot e^{-\alpha|x|},(\alpha>0)$ функциянинг $F(x)$ Фурье алмаштиришини аниқланг.

16.4. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cos\alpha x$ функциянинг $F(x)$ Фурье алмаштиришини аниқланг.

16.5. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\sin\beta x$ функциянинг $F(x)$ Фурье алмаштиришини аниқланг.

16.6. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x\ (\alpha>0)$ функциянинг $F(x)$ Фурье алмаштиришини аниқланг.

16.7. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x\ (\alpha>0)$ функциянинг $F(x)$ Фурье алмаштиришини аниқланг.

16.8. $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}\ (a>0)$ функциянинг $F(x)$ Фурье алмаштиришини аниқланг.

16.9. $f(x)=\frac{x}{a^2+x^2}\ (a>0)$ функциянинг $F(x)$ Фурье алмаштиришини аниқланг.

16.10. Агар $\int_{0}^{+\infty}\varphi(y)\cos xydy=\frac{1}{1+x^2}$ бўлса, у ҳолда $\varphi(x)$ функцияни топинг.

16.11. Агар $\int_{0}^{+\infty}\psi(y)\sin xydy=e^{-x}\ (x>0)$ бўлса, у ҳолда $\psi(x)$ функцияни топинг.

3-§. Асосий ва умумлашган функциялар

1. Кириш. Умумлашган функция (тақсимот) тушунчаси фанга биринчи бўлиб П. Дирак томонидан 1930 йилда унинг квантомеханик тадқиқотларида киритилган ва бунда асосан Диракнинг машҳур δ–функциясидан кенг фойдаланилган. Умумлашган функциялар (тақсимотлар) назариясининг математик асоси С.Л. Соболев[1] томонидан 1936 йилда қурилган ва гиперболик типдаги тенгламалар учун Коши масаласини ечишда қўлланилган. Ўтган асрнинг йигирманчи ва ўттизинчи йилларининг бошларида (локал интегралланувчи функциялар типидаги) умумлашган функция тушунчаси бир қатор математиклар (Д. Эванс, Л. Тонелли, Ч. Морри, К.О. Фридрихс, Ж.Лере) ишларида дифференциал тенгламанинг умумлашган ечими тушунчасини киритишда учрайди. Бу йўналиш мукаммал кетма–кетликда С.Л. Соболев[2] томонидан 1950 йилда ривожлантирилди. Сингуляр умумлашган функцияларнинг айрим синфлари С. Бохнер[3], Ж. Адамар[4] ва М. Рисс ишларида узоқлашувчи интеграллар ва қаторларни “регуляризациялаш” билан боғлиқ масалаларни ечишда қаралган. В.А. Стеклов[5] томонидан 1907 йилда тақдим этилган ўртачалаш усулининг ҳам умумлашган функциялар назариясининг шаклланишига туртки бўлганини қайд этиш керак. 1950–1951 йилларда Л. Шварц[6] умумлашган функциялар (тақсимотлар) назариясини систематик равишда баён қилди ва унга топологик вектор фазолар

---

[1] Бу ҳақида С.Л. Соболевнинг “Me`thode nouvelle a` re`soudre le proble`me de Cauchy pour les e`quations line`aires hyperboliques normales” // Мат. сб.–1936. – Т.1(43). – С. 39 – 72. мақоласида келтирилган.

[2] Бу ҳақида С.Л. Соболевнинг “Некоторые применения функционального анализа в математической физики” –Л.: Изд–во ЛГУ, 1950 йилдаги китобидан ўқиш мумкин.

[3] Бу ҳақида С. Бохнернинг “Лекции об интегралах Фурье” –М.: Физматгиз, 1960 йилдаги китобидан ўқиш мумкин.

[4] Бу ҳақида Ж. Адамарнинг “Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа” –М.: Наука, 1978 йилдаги китобидан ўқиш мумкин.

[5] Бу ҳақида В.А. Стекловнинг “Основные задачи математической физики” 2–е изд. –М.: Наука, 1983 йилдаги китобидан ўқиш мумкин.

[6] Бу ҳақида Л. Шварцнинг “The`orie des distributions”. Т. I–II. Paris, 1950–1951 йиллардаги китобидан ўқиш мумкин.

назариясини қўллаб унинг бир қатор муҳим масалаларга тадбиқларини кўрсатди.

Ўтган асрнинг 50–йилларида Н.Н. Боголюбов биринчи бўлиб элементар заррачаларнинг локал ўзаро таъсирини ифодалаш учун умумлашган функцияларнинг фундаментал ролини кўрсатди ва уни майдоннинг квант назариясини аксиоматик қуришга қўллади. Шу даврларда Л. Гординг, И.М. Гельфанд, Л. Хёрмандерлар томонидан умумлашган функцияларнинг методлари билан умумий кўринишдаги дифференциал операторлар учун фундаментал натижалар олинди. Кейинчалик, кўпгина математиклар томонидан умумлашган функциялар назарияси интенсив ривожлантирилди. Умумлашган функциялар назариясининг бундай жадал ривожланиши биринчи навбатда математик физика талабларидан, асосан дифференциал тенгламалар назарияси ва квант физикаси талабларидан келиб чиқди. Айни вақтда умумлашган функциялар назарияси кенг ривожлантирилган бўлиб физика, математика ва муҳандислик соҳаларига мустаҳкам кириб борганлиги сабабли кўпгина тадбиқларга эга.

Умумлашган функция тушунчаси классик маънодаги функция тушунчасининг умумлаштирилганидир. Бу умумлаштириш бир томондан моддий нуқтанинг зичлиги, нуқтавий заряд ёки диполнинг зичлиги, оддий ёки иккиламчи қатламларнинг зичлиги, нуқтавий манбанинг оний интенсивлиги ҳамда нуқтага қўйилган кучнинг интенсивлиги ва бошқа тушунчаларни математик шаклда ифодалашга имконият яратди.

Иккинчи томондан, умумлашган функция тушунчаси реал мумкин бўлмаган фактларда ўз аксини топади. Масалан, моддий нуқтанинг зичлигини ўлчашда, бунда шу нуқтанинг кичик атрофида унинг ўртача зичлигинигина ўлчаш мумкин бўлади ва уни шу берилган нуқтанинг зичлиги деб аташга олиб келади. Қўпол қилиб айтганда, умумлашган функция ҳар бир нуқтанинг атрофида ўзининг “ўрта қиймати” билан аниқланади.

Бу айтилганни тушунтириш учун биз массаси 1 га тенг бўлган моддий нуқтанинг зичлигини аниқлашга киришайлик. Бу моддий нуқта координата боши билан устма-уст тушсин деб фараз қилайлик.

Моддий нуқтанинг зичлигини аниқлаш учун 1 га тенг бўлган массани U_ε шар ичига текис тақсимлаймиз. Натижада

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x|<\varepsilon, \\ 0, & |x|>\varepsilon \end{cases}$$

ўртача зичликни ҳосил қиламиз. Изланаётган зичлик сифатида биз аввал $f_\varepsilon(x)$ ўртача зичликлар кетма–кетлигининг $\varepsilon\to+0$ интилгандаги *нуқтавий лимити* деб қараймиз ва уни $\delta(x)$ орқали белгилаймиз, яъни

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x)=\begin{cases} +\infty, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса} \end{cases} \qquad (3.3.1)$$

бўлсин. Табиий равишда, δ зичлик функциясидан ихтиёрий V ҳажм бўйича олинган интеграл шу ҳажмга жамланган массани бериши талаб этилади, яъни

$$\int_V \delta(x)dx=\begin{cases} 1, & \text{агар } 0\in V, \\ 0, & \text{агар } 0\notin V \end{cases}$$

бўлади. Лекин (3.3.1) тенгликка кўра бу келтирилган тенгликнинг чап қисми ҳар доим нолга тенг. Бу қарама-қаршиликка кўра $f_\varepsilon(x)$ ўртача зичликлар кетма–кетлигининг $\varepsilon\to+0$ интилгандаги *нуқтавий лимити* деб $\delta(x)$ зичликни қабул қилиб бўлмаслиги келиб чиқади.

Энди $f_\varepsilon(x)$ ўртача зичликлар кетма–кетлигининг $\varepsilon\to+0$ интилгандаги *кучсиз лимитини* ҳисоблаймиз, яъни ихтиёрий узлуксиз φ функция учун $\int_{R^3} f_\varepsilon\varphi dx$ сонли кетма-кетликнинг $\varepsilon\to+0$ интилгандаги лимитини топамиз.

Биз

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R^3} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)dx=\varphi(0)$$

эканлигини кўрсатамиз.

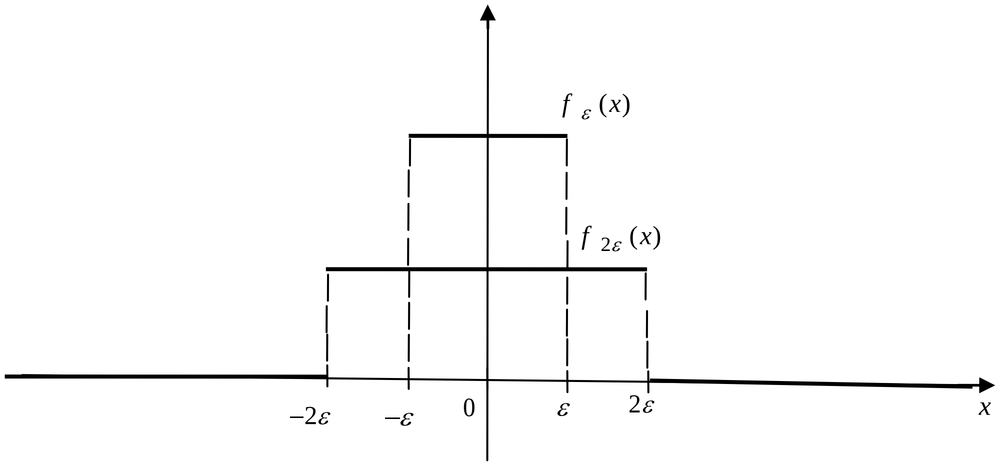
Ҳақиқатдан ҳам, $\varphi(x)$ функциянинг узлуксизлигидан ихтиёрий $\eta>0$ мусбат сон учун шундай бир $\varepsilon_0>0$ мусбат сон топиладики, бунда $|x|<\varepsilon_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x нуқталар учун $|\varphi(x)-\varphi(0)|<\eta$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Бундан эса, барча $\varepsilon \le \varepsilon_0$ учун

$$\left|\int\limits_{R^3} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx-\varphi(0)\right| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\left|\int\limits_{|x|<\varepsilon}\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]dx\right| \le$$

$$\le \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\int\limits_{|x|<\varepsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|dx < \eta\,\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\int\limits_{|x|<\varepsilon}dx=\eta$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса тасдиқни исбот қилади.

Шундай қилиб, $f_\varepsilon(x)$ кетма-кетликнинг $\varepsilon \to +0$ интилгандаги кучсиз лимити $\varphi(0)$ функционал бўлиб, ҳар бир узлуксиз $\varphi(x)$ функцияга унинг $x=0$ нуқтадаги $\varphi(0)$ қиймати бўлган сонни мос қўяр экан. Ушбу функционал эса, $\delta(x)$ зичликнинг таърифи сифатида қабул қилинади. Одатда бу Диракнинг машҳур δ – функцияси дейилади.



Демак, $\varepsilon \to +0$ интилганда $f_\varepsilon(x)\to\delta(x)$ эканлиги аслида ихтиёрий узлуксиз $\varphi(x)$ функция учун $\varepsilon \to +0$ интилганда

$$\int\limits_{R^3} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \to (\delta,\,\varphi)$$

лимитик муносабат ўринли бўлишини билдиради, бунда $(\delta,\,\varphi)$ символ $\varphi(0)$ сонга тенг бўлиб δ функционалнинг φ функцияга таъсиридаги қийматидир, яъни $(\delta,\,\varphi)=\varphi(0)$ бўлади.

Энди жисмнинг тўлиқ массасини тиклаш учун $\delta(x)$ (зичлик) функционали билан $\varphi(x)=1$ функцияга таъсир қилдириш керак, яъни $(\delta,\,1)=1(0)=1$ бўлади.

Агар $x=0$ нуқтада m масса жамланган бўлса, у ҳолда шунга мос зичлик $m\delta(x)$ га тенг ҳисобланади. Агар m масса $x=x_0$ нуқтада жамланган бўлса, у ҳолда зичликни табиий равишда $m\delta(x-x_0)$ га тенг деб ҳисобланади, бунда $(m\delta(x-x_0),\ \varphi)=m\varphi(x_0)$. Умуман олганда турли $x_k,\ k=1,2,...,N$ нуқталарда m_k массалар жамланган бўлса, унга мос зичлик

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\,\delta(x-x_k)$$

йиғиндига бўлади.

Шундай қилиб, моддий нуқталар ёрдамида яратиладиган зичлик классик маънодаги функция тушунчаси билан ифода қилинмас экан ва уни ифода қилиш учун бир оз умумийроқ бўлган объектларни жалб қилиш талаб этилади. Бу эса чизиқли узлуксиз функционаллар (умумлашган функциялар) орқали аниқланар экан.

2. D **асосий функциялар фазоси.** Келтирилган мисолдаги δ – функциядан кўринадики, бу узлуксиз функция ёрдамида шу функцияларда аниқланган чизиқли узлуксиз функционал сифатида аниқланар экан. Бу узлуксиз функциялар δ – функция учун *асосий функциялар* деб айтилади. Бу нуқтаи назар ихтиёрий умумлашган функцияни етарлича “яхши” (асосий) функциялар фазосида чизиқли узлуксиз функционал сифатида аниқлашга асос қилиб олинади. Маълумки, асосий функциялар фазоси қанчалар кичик бўлса, у ҳолда чизиқли узлуксиз функционаллар шунчалар кўп мавжуд бўлади. Иккинчи томондан, эса асосий функциялар тўплами етарлича кўп бўлиши керак. Биз бу пунктда муҳим бўлган D асосий функциялар фазосини киритамиз.

$D=D(R^n)$ орқали R^n фазода аниқланган барча чексиз дифференциалланувчи финит функцияларнинг фазосини белгилаймиз. Биз бу D фазодаги яқинлашиш тушунчасини қуйидагича киритамиз.

Таъриф. *Агар* D *фазодан олинган ихтиёрий* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3,..., \varphi_k, ...$ *функциялар кетма-кетлиги ва* φ *функция учун*

а) шундай бир $R>0$ *мусбат сон мавжуд бўлиб* $\operatorname{supp}\varphi_k \subset U_R$*;*

б) ҳар бир $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *мультииндекс учун* $k \to \infty$ *да*

$$D^\alpha \varphi_k(x) \overset{x \in R^n}{\Rightarrow} D^\alpha \varphi(x) \qquad (3.3.2)$$

бўлса, у ҳолда $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_k, \ldots$ *функциялар кетма-кетлиги* φ *функцияга учун D фазода яқинлашади деб айтилади ва* $k \to \infty$ *да D фазода* $\varphi_k \to \varphi$ *деб ёзилади.*

Бундай яқинлашиш тушунчаси киритилган D чизиқли тўпламга D *асосий функциялар фазоси* дейилади.

Бу D фазода $D^\beta \varphi(x)$ дифференциаллаш амали D фазони шу D фазога узлуксиз акслантиради.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $k \to \infty$ да D фазода $\varphi_k \to 0$ бўлса, у ҳолда а) шундай бир $R > 0$ мусбат сон мавжуд бўлиб $|x| > R$ учун $\varphi_k(x) = 0$ ва б) ҳар бир $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ мультииндекс учун $k \to \infty$ да

$$D^\alpha \varphi_k(x) \overset{x \in R^n}{\Rightarrow} 0$$

бўлади. Лекин у ҳолда: а) $\operatorname{supp} D^\beta \varphi_k \subset U_R$; б) ҳар бир $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ мультииндекс учун $k \to \infty$ да

$$D^\alpha \left[D^\beta \varphi_k(x) \right] = D^{\alpha+\beta} \varphi_k(x) \overset{x \in R^n}{\Rightarrow} 0$$

бўлади. D фазодаги яқинлашиш таърифига кўра бу ҳар бир $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ мультииндекс учун $k \to \infty$ да D фазода $D^\beta \varphi_k \to 0$ эканлигини билдиради. Бу эса D фазода $D^\beta \varphi(x)$ дифференциаллаш оператори D фазони шу D фазога узлуксиз акслантиришини билдиради.

Худди шунингдек, ўзгарувчиларни махсусмас чизиқли алмаштириш $\varphi(Ay + b)$ амали ва $a \in C^\infty(R^n)$ функцияга кўпайтириш $a(x)\varphi(x)$ амали ҳам D фазони шу D фазога узлуксиз акслантиради.

$D(G)$ орқали ташувчиси G фазога тегишли бўлган барча асосий функциялар тўпламини белгилаймиз. Шунга кўра

$$D(G) \subset D(R^n) = D$$

бўлади.

Бу киритилган таърифга кўра айнан нолга тенг бўлмаган шундай асосий функция мавжудми деган савол туғилади.

Маълумки, бундай функциялар R^n фазода аналитик бўлмайди. Нолдан фарқли бўлган асосий функцияга қуйидаги «шапочка» функция мисол бўлади:

$$\omega_\varepsilon(x)=\begin{cases} C_\varepsilon\ e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}}, & |x|\le\varepsilon, \\ 0, & |x|>\varepsilon. \end{cases}$$

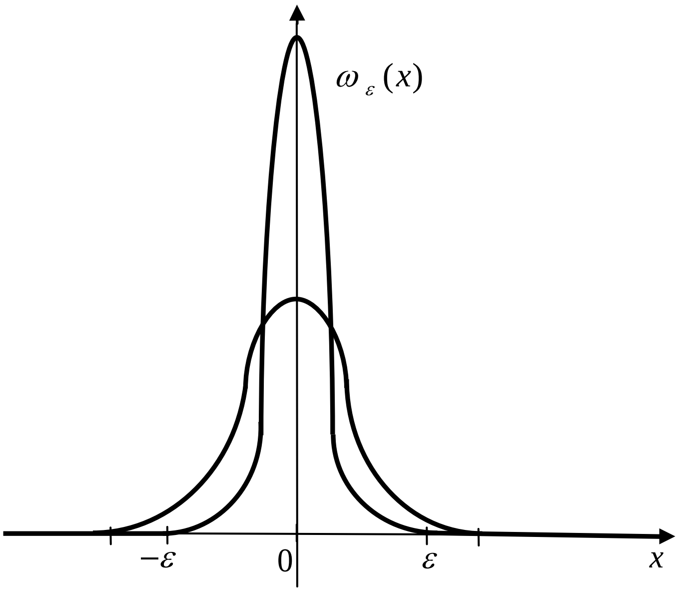
Бу ердаги C_ε ўзгармасни биз

$$\int\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(x)dx=1$$

шартни қаноатлантирадиган қилиб танлаймиз, яъни

$$C_\varepsilon\ \varepsilon^n\int\limits_{U_1} e^{-\frac{1}{1-|\xi|^2}}d\xi=1$$

бўлади.



Осонгина текшириб кўриш мумкинки

$$\omega_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\,\omega_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

тенглик ўринли бўлади.

Қуйидаги лемма асосий функцияларга кўпгина мисоллар келтириш мумкинлигини кўрсатади.

1–лемма. *Ихтиёрий G соҳа ва ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон учун шундай бир $\eta\in C^\infty(R^n)$ функция топиладики, бунда*

$$0 \le \eta(x) \le 1; \quad \eta(x) = 1, \ x \in G_\varepsilon; \quad \eta(x) = 0, \quad x \notin G_{3\varepsilon}$$

бўлади.

Исбот. $\chi(x)$ функция $G_{2\varepsilon}$ тўпламнинг характеристик функцияси бўлсин, яъни

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_{2\varepsilon}, \\ 0, & x \notin G_{2\varepsilon}. \end{cases}$$

У ҳолда

$$\eta(x) = \int_{R^n} \chi(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy$$

функция талаб қилинадиган хоссаларни қаноатлантиради. Ҳақиқатдан ҳам, $\omega_\varepsilon \in D, \ 0 \le \omega_\varepsilon(x), \ \mathrm{supp}\,\omega_\varepsilon = \overline{U}_\varepsilon, \ \int_{R^n} \omega_\varepsilon(x)dx = 1$ бўлгани учун

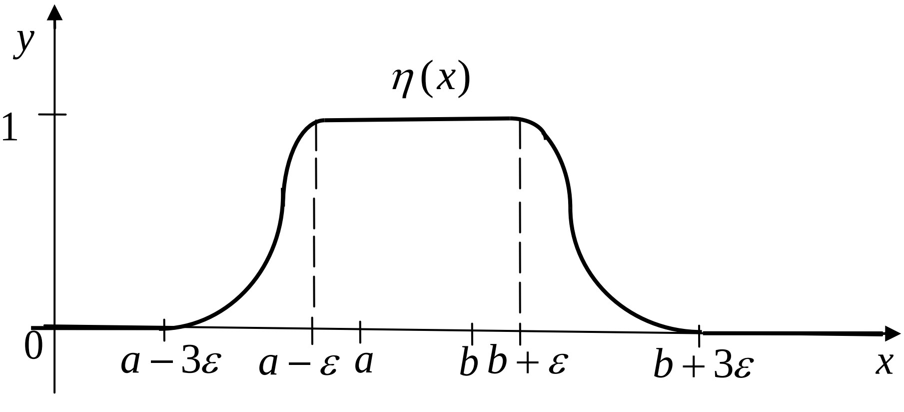
$$\eta(x) = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)dy \in C^\infty(R^n);$$

$$0 \le \eta(x) \le \int_{R^n} \omega_\varepsilon(x-y)dy = \int_{R^n} \omega_\varepsilon(\xi)d\xi = 1;$$

$$\eta(x) = \int_{U(x;\,\varepsilon)} \chi(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy =$$

$$= \begin{cases} \int_{U(x;\,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)dy = \int_{R^n} \omega_\varepsilon(\xi)d\xi = 1, & x \in G_\varepsilon; \\ 0, & x \notin G_{3\varepsilon} \end{cases}$$

бўлади. Биз $G = (a, b)$ бўлган ҳол учун $\eta(x)$ функциянинг графигини чизмада кўрсатамиз.



Лемма исбот бўлди. Бу исбот қилинган 1–леммадан қуйидаги тасдиқ келиб чиқади: *агар* G *соҳа чегараланган ва* $G' \subset\subset G$

ундаги компакт тўплам бўлса, у ҳолда шундай бир $\eta \in D(G)$ *функция мавжуд бўлиб* $0 \le \eta(x) \le 1$ *ва* $x \in G'$ *учун* $\eta(x) = 1$ *бўлади.*

G_k, $k = 1, 2, \ldots$ очиқ тўпламларнинг саноқли системаси бўлсин. Агар $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, $G_k \subset\subset G$ ва ихтиёрий $K \subset\subset G$ компакт тўплам чекли сондаги $\{G_k\}$ тўпламлар билангина кесишмага эга бўлса, у ҳолда бу G_k, $k = 1, 2, \ldots$ очиқ тўпламларнинг саноқли системаси G очиқ тўпламнинг *локал чекли қопламасини* ташкил этади деб айтилади.

1-теорема (бирнинг ёйилмалари). G_k, $k = 1, 2, \ldots$ *очиқ тўпламларнинг саноқли системаси* G *очиқ тўпламнинг локал чекли қопламасини ташкил этсин. У ҳолда*

$$e_k(x) \in D(G_k),\ 0 \le e_k(x) \le 1 \ \text{ ва } x \in G \text{ учун } \sum_{k=1}^{\infty} e_k(x) = 1$$

бўлган $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *функциялар системаси мавжуд бўлади.*

Эслатма. *Ҳар бир* $x \in G$ *нуқта учун йиғиндида қатнашган* $e_k(x)$ *қўшилувчилар сони чеклита бўлади. Бу* $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *функциялар системаси шу берилган* G *очиқ тўпламнинг* $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ *локал чекли қопламасига мос бирнинг ёйилмалари деб айтилади.*

Исбот. Биз G тўпламнинг бошқа бир $G'_k \subset\subset G_k$, $k = 1, 2, \ldots$ компакт тўпламлардан тузилган $\{G'_k\}_{k=1}^{\infty}$ локал чекли қопламаси мавжуд эканлигини исбот қиламиз. Аввал G'_1 тўпламни қурамиз.

$$K_1 = G \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} G_k$$

деб белгилаймиз. У ҳолда $K_1 \subset G_1 \subset\subset G$ ва K_1 тўплам G тўпламда ёпиқ тўплам бўлади. Шунга кўра $K_1 \subset\subset G_1$ бўлади ва шунинг учун G'_1 очиқ тўплам сифатида $K_1 \subset\subset G'_1 \subset\subset G_1$ бўлган очиқ тўпламни олиш мумкин. Шу билан бирга G'_1, G_2, ... система G тўпламнинг локал чекли қопламасини ташкил этади. Худди шунга ўхшаш усул билан $G'_2 \subset\subset G_2$ очиқ тўпламни қуриш мумкин ва ҳакозо. Натижада биз талаб этилган $\{G'_k\}_{k=1}^{\infty}$ локал чекли қопламага эга бўламиз. 1–лемманинг натижасига кўра

$$x \in G'_k \text{ учун } \eta_k(x) = 1 \text{ ва } 0 \le \eta_k(x) \le 1$$

бўлган $\eta_k(x) \in D(G_k)$ функциялар системаси мавжуд бўлади.

$$e_k(x) = \frac{\eta_k(x)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k(x)}$$

деб белгилаб оламиз, бунда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k(x) \ge 1$ бўлади. Натижада биз талаб этилган бирнинг ёйилмаларига эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

Шундай қилиб, биз $D(G)$ синфга тегишли ҳар хил функциялар мавжуд эканлигини кўрамиз. Энди биз бундай функцияларнинг етарлича кўп эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

2–лемма. *$D(G)$ тўплам $L_2(G)$ фазода зич бўлади.*

Исбот. $f \in L_2(G)$ ва ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон бўлсин. Лебег интегралининг абсолют узлуксизлик хоссасига кўра, шундай бир $G' \subset\subset G$ ундаги компакт тўплам мавжудки, бунда

$$\int\limits_{G \setminus G'} |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5} \qquad (3.3.3)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Маълумки, полиномлар тўплами $L_2(G')$ фазода зичдир. Шунга кўра, шундай бир P полином мавжуд бўлиб

$$\int\limits_{G'} |f(x) - P(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5} \qquad (3.3.4)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди $G'' \subset\subset G'$ бўлган ундаги компакт жойлашган қисм соҳани G' соҳага етарлича яқин қилиб шундай танлаймизки, бунда

$$\int\limits_{G' \setminus G''} |P(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5} \qquad (3.3.5)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $\eta \in D(G')$ функцияни $0 \le \eta(x) \le 1$ ва $x \in G''$ учун $\eta(x) = 1$ бўладиган қилиб олсак, у ҳолда $P\eta \in D(G)$ ва (3.3.3), (3.3.4) ва (3.3.5) тенгсизликларга кўра

$$\| f - P\eta \|^2 = \int\limits_{G} |f(x) - P(x)\eta(x)|^2 dx = \int\limits_{G'} |f(x) - P(x)\eta(x)|^2 dx +$$

$$+\int\limits_{G\backslash G''} |f(x)|^2 dx \le \frac{\varepsilon^2}{5} + 2\int\limits_{G'} |f(x)-P(x)|^2 dx + 2\int\limits_{G'} |P(x)-P(x)\eta(x)|^2 dx <$$

$$< \frac{3\varepsilon^2}{5} + 2\int\limits_{G\backslash G'} |P(x)|^2 dx < \varepsilon^2$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Лемма исбот бўлди.

f функция G тўпламда локал жамланувчи бўлсин, яъни $f \in L^1_{loc}(G)$ бўлсин. Бу f функциянинг $\omega_\varepsilon(x)$ функция билан

$$f_\varepsilon(x) = \int\limits_{R^n} f(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy = \int\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(y) f(x-y)dy$$

ўрамасини қарайлик. Бу $f_\varepsilon(x)$ функция f функциянинг *ўртача функцияси ёки* f *функциянинг регуляризацияси* деб айтилади.

$1 \le p \le \infty$ учун $f \in L^p(G)$ бўлсин. (Бу ерда $f(x)$ функция G тўпламдан ташқарида нолга тенг деб ҳисобланади). У ҳолда $f_\varepsilon(x) \in C^\infty(R^n)$ ва

$$\| f_\varepsilon \|_{L^p(G)} \le \| f \|_{L^p(G)} \qquad (3.3.6)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, $f_\varepsilon(x) \in C^\infty(R^n)$ эканлиги f функциянинг хоссасидан ва ўртача функциянинг таърифидан бевосита келиб чиқади. Бу (3.3.6) тенгсизликни исбот қилиш учун Гёльдер тенгсизлигидан фойдаланамиз. Шунга кўра

$$\| f_\varepsilon \|^p_{L^p(G)} \le \int\limits_G |f_\varepsilon(x)|^p dx = \int\limits_G \left| \int\limits_{R^n} f(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy \right|^p dx \le$$

$$\le \int\limits_G \int\limits_G |f(y)|^p \omega_\varepsilon(x-y)dy \left[\int\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(x-y)dy \right]^{p-1} dx =$$

$$= \int\limits_G \int\limits_G |f(y)|^p \omega_\varepsilon(x-y)dydx \le \int\limits_G |f(y)|^p dy = \| f \|^p_{L^p(G)}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш $p = \infty$ бўлган ҳол қаралади.

2-теорема. $f \in L^1_0(G)$ *ва* $K \subset\subset G$ *компакт тўплам ташқарисининг деярли ҳамма жойида* $f(x) = 0$ *бўлсин. У ҳолда* *ихтиёрий* $\varepsilon > 0$ *мусбат сон ва* $\varepsilon < d(K, \partial G)$ *учун* f *функциянинг* $f_\varepsilon(x)$ *ўртача функцияси* $f_\varepsilon(x) \in D(G)$ *бўлади. Бундан ташқари,*

$$\begin{cases} \textit{агар } f \in C_0(G) \textit{ бўлса } C(\overline{G}) \textit{ да} \\ \textit{агар } f \in L_0^p(G), 1 \le p < \infty \textit{ бўлса } L^p(G) \textit{ да} \\ \textit{агар } f \in L_0^\infty(G) \textit{ бўлса } G \textit{ соханинг деярли хамма жойида} \end{cases}$$

$\varepsilon \to +0$ *да* $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ *функцияга яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон ва $\varepsilon < d(K, \partial G)$ бўлса, у ҳолда $f_\varepsilon(x)$ ўртача функция G да финит ва $f_\varepsilon(x) \in C^\infty(G)$ бўлгани учун $f_\varepsilon(x) \in D(G)$ бўлади.

$f \in C_0(G)$ бўлсин. У ҳолда $x \in G$ учун

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int\limits_{R^n} [f(y) - f(x)]\omega_\varepsilon(x-y)dy \right| \le$$

$$\le \max_{|x-y|\le\varepsilon} |f(y) - f(x)| \int\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(x-y)dy = \max_{|x-y|\le\varepsilon} |f(y) - f(x)|$$

ва $f(x)$ функциянинг G тўпламда текис узлуксиз функция эканлигидан $\varepsilon \to +0$ да $f_\varepsilon(x)$ функция $f(x)$ функцияга текис яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

$f \in L_0^p(G), 1 \le p < \infty$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\delta > 0$ мусбат сонни оламиз. Бу сонга мос шундай бир $g \in C_0(G)$ функция мавжуд бўлиб

$$\|f - g\|_{L^p(G)} < \frac{\delta}{3}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Исбот қилинганига кўра шундай бир $\varepsilon_0 > 0$ мусбат сон топилиб барча $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ учун

$$\|g - g_\varepsilon\|_{L^p(G)} < \frac{\delta}{3}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса, барча $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ учун (3.3.6) тенгсизликдан фойдаланиб

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^p(G)} \le \|f - g\|_{L^p(G)} + \|g - g_\varepsilon\|_{L^p(G)} + \|(g - f)_\varepsilon\|_{L^p(G)} \le$$

$$\le 2\|f - g\|_{L^p(G)} + \|g - g_\varepsilon\|_{L^p(G)} < \frac{2\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Бу эса $\varepsilon \to +0$ да $f_\varepsilon(x)$ функция $f(x)$ функцияга $L^p(G)$ фазода яқинлашувчи эканлигини билдиради.

Агар $f \in L_0^\infty(G)$ бўлса, у ҳолда $C_0(G)$ фазога қарашли кетма–кетлик кўрсатиш мумкинки, бу кетма–кетлик G тўпламнинг деярли ҳамма жойида $f(x)$ функцияга яқинлашади. Бундан ва исбот қилинганига кўра $\varepsilon \to +0$ да $f_\varepsilon(x)$ функция G тўпламнинг деярли ҳамма жойида $f(x)$ функцияга яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

1–натижа. *$D(G)$ фазо $1 \le p < \infty$ учун $L^p(G)$ фазода зич бўлади.*

2–натижа. *Агар G чегараланган тўплам бўлса, у ҳолда $D(G)$ фазо $C_0^k(\overline{G})$ фазода ($C^k(\overline{G})$ фазо нормаси бўйича) зич бўлади.*

3. D' умумлашган функциялар фазоси.

Таъриф. *D асосий функциялар фазосида аниқланган ҳар қандай чизиқли узлуксиз функционалга умумлашган функция деб айтилади.*

Мос белгиланишга кўра f орқали функционални (умумлашган функцияни) φ орқали эса асосий функцияни белгилаб, бу f функционалнинг φ асосий функцияга таъсиридаги қийматини (f, φ) каби ёзилади. Шунингдек, формал равишда умумлашган функцияни $f(x)$ кўринишда ҳам белгиланади, бунда x аргумент f функционал таъсир қиладиган асосий функциянинг аргументидир.

Энди f умумлашган функция таърифини тахлил қиламиз.

1) f умумлашган функция D фазодаги функционалдир, яъни ҳар бир $\varphi \in D$ асосий функцияга (f, φ) комплекс сон мос қўйилади.

2) f умумлашган функция D фазодаги чизиқли функционалдир, яъни агар $\varphi, \psi \in D$ ва λ, μ комплекс сонлар бўлса, у ҳолда

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\,(f, \varphi) + \mu\,(f, \psi)$$

муносабат ўринли бўлади.

3) f умумлашган функция D фазодаги узлуксиз функционалдир, яъни агар $k \to \infty$ да D фазода $\varphi_k \to 0$ бўлса, у ҳолда $k \to \infty$ да $(f,\ \varphi_k) \to 0$ бўлади.

$D' = D'(R^n)$ орқали барча умумлашган функциялар фазосини белгилаймиз.

Агар f ва g умумлашган функцияларнинг чизиқли комбинацияси орқали ҳосил қилинган $\lambda f + \mu g$ умумлашган функция $\varphi \in D$ учун

$$(\lambda f + \mu g,\ \varphi) = \lambda(f,\ \varphi) + \mu(f,\ \varphi)$$

формула орқали аниқланадиган функционал бўлса, у ҳолда D' чизиқли тўплам бўлади.

Энди $\lambda f + \mu g$ функционалнинг D фазода чизиқли ва узлуксиз, яъни D' фазога тегишли бўлишигини текширамиз. Ҳақиқатан ҳам, агар $\varphi,\ \psi \in D$ ва ихтиёрий $\alpha,\ \beta$ комплекс сонлар учун киритилган таърифга кўра

$$(\lambda f + \mu g,\ \alpha\varphi + \beta\psi) = \lambda(f,\ \alpha\varphi + \beta\psi) + \mu(g,\ \alpha\varphi + \beta\psi) =$$
$$= \alpha[\lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)] + \beta[\lambda(f, \psi) + \mu(g, \psi)] =$$
$$= \alpha(\lambda f + \mu g,\ \varphi) + \beta(\lambda f + \mu g,\ \psi)$$

тенглик ўринли ва шунга кўра бу функционал чизиқли бўлади. Узлуксизлиги f ва g функционалларнинг узлуксизлигидан келиб чиқади, яъни агар D фазода $k \to \infty$ да $\varphi_k \to 0$ бўлса, у ҳолда $k \to \infty$ да

$$(\lambda f + \mu g,\ \varphi_k) = \lambda(f,\ \varphi_k) + \mu(g,\ \varphi_k) \to 0$$

бўлади.

D' фазодаги яқинлашиш тушунчасини функционаллар кетма–кетлигининг *кучсиз яқинлашиш* сифатида киритамиз.

Таъриф. *Агар D' фазодан олинган $f_1,\ f_2,\ ...,\ f_k,\ ...$ умумлашган функциялар кетма-кетлиги учун $f \in D'$ умумлашган функция мавжуд бўлиб ихтиёрий $\varphi \in D$ учун $k \to \infty$ да $(f_k,\ \varphi) \to (f,\ \varphi)$ бўлса, у ҳолда $f_1,\ f_2,\ ...,\ f_k,\ ...$ умумлашган функциялар кетма-кетлиги $f \in D'$ умумлашган функцияга кучсиз яқинлашади деб айтилади.*

Бу ҳолда D' фазода $k\to\infty$ да $(f_k,\ \varphi)\to(f,\ \varphi)$ деб ёзамиз. D' чизиқли фазо бу киритилган яқинлашиш тушунчаси билан D' *умумлашган функциялар фазоси* дейилади.

$f\in D'(G)$ бўлсин. $\overline{f}\in D'(G)$ функционални $f\in D'(G)$ функционалнинг комплекс қўшмаси сифатида

$$\left(\overline{f},\varphi\right)=\overline{\left(f,\overline{\varphi}\right)},\quad \varphi\in D(G)$$

қоида бўйича аниқлаймиз.

$$\operatorname{Re} f=\frac{f+\overline{f}}{2},\quad \operatorname{Im} f=\frac{f-\overline{f}}{2i}$$

умумлашган функциялар мос равишда $f\in D'(G)$ умумлашган функциянинг *ҳақиқий ва мавҳум* қисмлари деб айтилади. Шунга кўра

$$f=\operatorname{Re} f+i\operatorname{Im} f,\quad f=\operatorname{Re} f-i\operatorname{Im} f$$

бўлади. Агар $\operatorname{Im} f=0$ бўлса, у ҳолда $f\in D'(G)$ *ҳақиқий* умумлашган функция деб айтилади.

Мисол. δ – функция ҳақиқий умумлашган функция бўлади.

Эслатма. *D асосий функциялар фазосидаги ҳар қандай чизиқли функционал узлуксиз бўлмаслиги мумкин, аммо ошкор кўринишда D фазода аниқланган узилишга эга бўлган чизиқли функционал қурилмаган. Унинг мавжудлигини биз назарий жиҳатдан танлаш аксиомасидан фойдаланиб исбот қилишимиз мумкин.*

3-теорема. $D(G)$ *фазода аниқланган* f *чизиқли функционал* $D'(G)$ *фазога қарашли, яъни умумлашган функция бўлишлиги учун ихтиёрий очиқ* $G'\subset\subset G$ *компакт тўплам учун шундай бир* $K=K(G')$ *ва* $m=m(G')$ *сонлар мавжуд бўлиб ихтиёрий*

$$\varphi\in D(G')\ \text{учун}\ \left|(f,\varphi)\right|\le K\|\varphi\|_{C^m(\overline{G'})}\qquad (3.3.7)$$

тенгсизликнинг ўринли бўлишлиги зарур ва етарлидир.

Исбот. Етарлилиги бевосита келиб чиқади. (3.3.7) тенгсизликнинг зарурий шарт эканлигини исбот қиламиз. $f\in D'(G)$ ва $G'\subset\subset G$ бўлсин. Агар (3.3.7) тенгсизлик ўринли бўлмаса, у ҳолда $D(G')$ фазода шундай бир $\varphi_k,\ k=1,2,...$ функциялар кетма–кетлиги мавжудки, бунда

$$\left|(f,\varphi_k)\right|\ge k\|\varphi_k\|_{C^k(\overline{G'})}\qquad (3.3.8)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Лекин $D(G)$ фазода $k\to\infty$ да $\psi_k = \dfrac{\varphi_k}{\sqrt{k}\cdot\|\varphi_k\|_{C^k(\overline{G'})}}$ кетма–кетлик $\psi_k = \dfrac{\varphi_k}{\sqrt{k}\cdot\|\varphi_k\|_{C^k(\overline{G'})}} \to 0$ яқинлашувчи бўлади, чунки $\mathrm{supp}\,\psi_k \subset G' \subset\subset G$ ва $|\beta|\le k$ учун

$$|D^\beta\psi_k(x)| = \left|D^\beta \frac{\varphi_k}{\sqrt{k}\cdot\|\varphi_k\|_{C^k(\overline{G'})}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{k}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунинг учун $k\to\infty$ да $(f,\psi_k)\to 0$ бўлади. Иккинчи томондан эса (3.3.8) тенгсизликка кўра

$$|(f,\psi_k)| = \frac{|(f,\varphi_k)|}{\sqrt{k}\cdot\|\varphi_k\|_{C^k(\overline{G'})}} \ge \sqrt{k}$$

тенгсизлик ўринли бўлиб $k\to\infty$ да $(f,\psi_k)\to\infty$ бўлади. Бу ҳосил қилинган қарама–қаршилик теоремани исбот қилади.

$f\in D'(G)$ бўлсин. Агар (3.3.7) тенгсизликда m бутун сонни $G'\subset\subset G$ компакт тўпламга боғлиқ бўлмаган ҳолда танлаш мумкин бўлса, у ҳолда f умумлашган функция *чекли тартибга эга* деб айтилади. Бундай m соннинг энг кичиги шу f умумлашган функциянинг G тўпламдаги *тартиби* деб айтилади. Масалан, δ –функциянинг тартиби нолга тенг бўлади. $G=(0,\infty)$ тўпламда $(f,\varphi)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi^{(k)}(k)$ умумлашган функция чексиз тартибга эга бўлади.

Эслатма. *Агар* $D(G)$ *фазода* $G_1\subset\subset G_2\subset\subset\ldots$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}G_k=G$ *ва* $\nu=0,1,2,\ldots$, $\varphi\in C_0^\infty(\overline{G}_k)$ *учун* $\|\varphi\|_{C^\nu(\overline{G}_k)}$ *норма билан аниқланган саноқли–нормаланган* $C_0^\infty(\overline{G}_k)$ *фазоларнинг ўсувчи кетма–кетликнинг индуктив лимити (бирлашмаси) сифатида топологияни киритсак, у ҳолда* $D'(G)$ *фазо* $D(G)$ *фазога қўшма бўлган фазо бўлади. Шунингдек, барча* $\varphi\in C_0^m(\overline{G'})$ *учун (3.3.7) тенгсизлик сақланиб қолади.*

4. D' **умумлашган функциялар фазосининг тўлалиги.** D' умумлашган функциялар фазосининг тўлалик хоссаси жуда муҳимдир.

4-теорема. *Агар D' фазодан олинган $f_1,\ f_2,\ ...,\ f_k,\ ...$ умумлашган функциялар кетма-кетлиги ва ихтиёрий $\varphi \in D$ учун $k \to \infty$ да $(f_k,\ \varphi)$ сонли кетма–кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда D асосий функциялар фазосида $\varphi \in D$ учун*

$$(f,\varphi) = \lim_{k\to\infty} (f_k,\varphi)$$

тенглик билан аниқланган f функционал ҳам D асосий функциялар фазосида чизиқли ва узлуксиз бўлади, яъни $f \in D'$ бўлади.

Исбот. Бу f лимитик функционалнинг чизиқлилигини исбот қиламиз. D асосий функциялар фазосидаги $\varphi, \psi \in D$ учун

$$(f,\ \alpha\varphi + \beta\psi) = \lim_{k\to\infty}(f_k,\ \alpha\varphi + \beta\psi) =$$

$$= \alpha \lim_{k\to\infty}(f_k,\ \varphi) + \beta \lim_{k\to\infty}(f_k,\ \psi) = \alpha(f,\varphi) + \beta(f,\psi)$$

тенглик ўринли бўлади.

Энди бу f лимитик функционалнинг узлуксизлигини исбот қиламиз. D асосий функциялар фазосида $\nu \to \infty$ да $\varphi_\nu \to 0$ бўлсин. У ҳолда $\nu \to \infty$ да $(f\ \varphi_\nu\ )\!\to$ эканлигини исбот қиламиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни қандайдир $a > 0$ мусбат сон мавжуд бўлиб қандайдир қисмий кетма–кетлик учун, умуман олганда бунда $\nu = 1,\ 2,\ ...$ деб ҳисобласа ҳам бўлгани учун

$$|(f,\ \varphi_\nu)| \geq 2a$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунингдек

$$(f,\ \varphi_\nu) = \lim_{k\to\infty}(f_k,\ \varphi_\nu)$$

эканлигидан, ҳар бир $\nu = 1,\ 2,\ ...$ учун шундай бир k_ν номер топиладики, бунда $|(f_{k_\nu},\ \varphi_\nu)| \geq a$ муносабат ўринли бўлади. Бу эса қуйида келтириладиган леммага кўра мумкин эмас. Бу ҳосил қилинган қарама–қаршилик f функционалнинг узлуксиз эканлигини исбот қилади. Теорема исбот бўлди.

3–лемма. *D' фазодан олинган $f_1,\ f_2,\ ...,\ f_k,\ ...$ умумлашган функциялар кетма-кетлиги ва ихтиёрий $\varphi \in D$ учун $k \to \infty$ да $(f_k,\ \varphi)$ сонли кетма–кетлик яқинлашувчи бўлсин. Ҳамда D асосий функциялар фазосидан олинган нолга яқинлашувчи*

$\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_k,\ ...$ кетма–кетлик берилган бўлсин. У ҳолда $k\to\infty$ да $(f_k,\ \varphi_k)\to 0$ бўлади.

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни лемма ўринли бўлмасин. У ҳолда қандайдир қисмий кетма–кетлик мавжуд бўлиб, бу ажратилган қисмий кетма–кетлик учун $\left|(f_k,\ \varphi_k)\right|\geq c>0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунингдек D фазода $k\to\infty$ да $\varphi_k\to 0$ эканлиги а) шундай бир $R>0$ мусбат сон мавжуд бўлиб $|x|>R$ учун $\varphi_k(x)=$ ва б) ҳар бир $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ ...,\ \alpha_n)$ мультииндекс учун $k\to\infty$ да

$$D^{\alpha}\varphi_k(x)\overset{x\in R^n}{\Rightarrow}0$$

эканлигини билдиради. Шунга кўра қалаётган кетма-кетлик учун $|\alpha|\leq k=0,1,...$ бўлганда

$$\left|D^{\alpha}\varphi_k(x)\right|\leq\frac{1}{4^k}$$

тенгсизлик ўринли деб ҳисоблаш мумкин. Агар $\psi_k=2^k\varphi_k$ деб белгилаб олсак, у ҳолда

$$\left|D^{\alpha}\psi_k(x)\right|\leq\frac{1}{2^k},\ |\alpha|\leq k=0,1,\ ... \qquad (3.3.9)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса D фазода $k\to\infty$ да $\psi_k\to 0$ бўлишилиги ва $\sum_{\nu}\psi_{k_\nu}(x)$ қаторнинг шу D фазода яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади. Шу билан бир қаторда $k\to\infty$ да

$$\left|(f_k,\psi_k)\right|=2^k\left|(f_k,\varphi_k)\right|\geq 2^k c\to\infty \qquad (3.3.10)$$

эканлиги келиб чиқади.

Энди $\left\{f_{k_\nu}\right\}$ ва $\left\{\psi_{k_\nu}\right\}$ қисмий кетма-кетликларни қуйидаги шартни қаноатлантирадиган қилиб тузамиз. Бунда f_{k_1} ва ψ_{k_1} элементларни $\left|(f_{k_1},\psi_{k_1})\right|\geq 2$ шартни қаноатлантирадиган қилиб танлаймиз. Бу эса (3.3.10) тенгсизликка кўра ҳамма вақт мумкин бўлади.

Фараз қилайлик, $j=1,2,...,\nu-1$ лар учун f_{k_j} ва φ_{k_j} элементлар тузилган деб фараз қилиб, f_{k_ν} ва φ_{k_ν} элементларни тузамиз. Шунингдек D фазода $k \to \infty$ да $\psi_k \to 0$ эканлигидан $j = 1, 2, ..., \nu - 1$ учун $k \to \infty$ да $(f_{k_j}, \psi_k) \to 0$ интилади. Шунинг шундай бир N номер топиладики, бунда ихтиёрий $k \geq N$ шартни қаноатлантирувчи номер учун

$$\left|(f_{k_j}, \psi_k)\right| \leq \frac{1}{2^{\nu - j}}, \ j = 1, 2, ..., \nu - 1 \qquad (3.3.11)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан ташқари, $k \to \infty$ да

$$(f_k, \ \psi_{k_j}) \to (f, \ \psi_{k_j}), \quad j = 1, 2, ..., \nu - 1$$

бўлиб, $N_1 \geq N$ шартни қаноатлантирувчи шундай бир N_1 номер топиладики, бунда ихтиёрий $k_\nu \geq N_1$ учун

$$\left|(f_k, \psi_{k_j})\right| \leq \left|(f, \psi_{k_j})\right| + 1, \ \ j = 1, 2, ..., \nu - 1 \qquad (3.3.12)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ниҳоят (3.3.10) тенгсизликдан фойдаланиб, k_ν сонини $k_\nu \geq N_1$ шартни бажарадиган қилиб танлаб

$$\left|(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})\right| \geq \sum_{j=1}^{\nu-1} \left|(f, \psi_{k_j})\right| + 2\nu. \qquad (3.3.13)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (3.3.11), (3.3.12) ва (3.3.13) тенгсизликлардан фойдаланиб қурилган f_{k_ν} ва ψ_{k_ν} элементларнинг танланишига кўра

$$\left|(f_{k_j}, \ \psi_{k_\nu})\right| \leq \frac{1}{2^{\nu - j}}, \ j = 1, 2, ..., \nu + 1, \qquad (3.3.14)$$

$$\left|(f_{k_\nu}, \ \psi_{k_\nu})\right| \geq \sum_{j=1}^{\nu-1} \left|(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})\right| + \nu + 1 \qquad (3.3.15)$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз. Энди

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{k_\nu}(x)$$

деб оламиз. Бу қатор (3.3.9) тенгсизликка кўра D фазода яқинлашувчи бўлади ва шунга кўра унинг йиғиндиси $\psi \in D$ бўлади. Ҳамда

$$(f_{k_\nu}, \psi) = (f_{k_\nu}, \ \psi_{k_\nu}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^{\infty} (f_{k_\nu}, \ \psi_{k_j})$$

тенгликда (3.3.14) ва (3.3.15) тенгсизликлардан фойдаланиб,

$$\left|(f_{k_\nu}, \psi)\right| \geq \left|(f_{k_\nu}, \psi_{k_\nu})\right| - \sum_{j=1}^{\nu-1} \left|(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})\right| - \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \left|(f_{k_\nu}, \psi_{k_j})\right| \geq$$

$$\geq \nu + 1 - \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-\nu}} = \nu,$$

яъни $\nu \to \infty$ да $(f_{k_\nu}, \psi) \to \infty$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $k \to \infty$ да $(f_k, \psi) \to (f, \psi)$ бўлишига зиддир. Ушбу зиддият 3–леммани исбот қилади.

5. Умумлашган функциянинг ташувчиси. Шуни алоҳида таъкидлаш керакки, умумлашган функция нуқтада қийматига эга эмас. Шундай бўлсада, умумлашган функциянинг соҳада нолга айланиши ҳақида гапириш мумкин.

Таъриф. *Агар ихтиёрий $\varphi \in D(G)$ учун $(f, \varphi) = 0$ бўлса, у ҳолда f умумлашган функция G соҳада нолга айланади деб айтилади ва бу $x \in G$ учун $f = 0$ ёки $x \in G$ учун $f(x) = 0$ каби ёзилади.*

Таъриф. *Агар $x \in G$ учун $f - g = 0$ бўлса, у ҳолда шу G соҳада f ва g умумлашган функциялар тенг дейилади. Ҳамда $x \in G$ учун $f(x) = g(x)$ каби ёзилади.*

Хусусан, агар ихтиёрий $\varphi \in D$ учун $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ бўлса, у ҳолда f ва g умумлашган функциялар G соҳада тенг дейилади ва G соҳада $f = g$ каби ёзилади.

f умумлашган функция G соҳада нолга айлансин. У ҳолда бу умумлашган функция шу G соҳадаги ҳар бир нуқтанинг атрофида нолга айланади. Тескари тасдиқ ҳам ўринлидир.

4–лемма. *Агар f умумлашган функция G соҳанинг ҳар бир нуқтасининг атрофида нолга тенг бўлса, у ҳолда бу f умумлашган функция шу G соҳада ҳам нолга тенг бўлади.*

Исбот. Аввал келтирилган эслатмаларни ҳисобга олиб биз атрофларни шарлар деб ҳисоблашимиз мумкин. Биз ихтиёрий $\varphi \in D(G)$ учун $(f, \varphi) = 0$ эканлигини исбот қилишимиз керак. $D(G)$ фазодан ихтиёрий φ функцияни тайинлаб оламиз. Маълумки, $\mathrm{supp}\,\varphi$ ташувчи G соҳанинг ичида ётади. Шунинг учун Гейне–Борель леммасига кўра $\mathrm{supp}\,\varphi$ ташувчини f умумлашган функция нолга айланадиган чекли сондаги

$U(x_k, r_k),\ k=1, 2, ..., N(\varphi)$ шарлар билан қоплаш мумкин бўлади. Энди $\operatorname{supp}\varphi$ ташувчини ҳали қоплайдиган қилиб кичрайтирилган $U(x_k, r'_k),\ r'_k < r_k,\ k=1, 2, ..., N$ шарларни оламиз. Бу шарлар $\operatorname{supp}\varphi$ ташувчини қоплайди. Шу билан бирга 1–лемманинг натижасига шундай бир $h_k(x)$ асосий функциялар мавжудки, бунда

$$h_k(x)=1,\quad x\in U(x_k;\ r'_k),\quad \operatorname{supp} h_k \subset U(x_k; r_k)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$h(x)=\sum_{k=1}^{N} h_k(x),\qquad \varphi_k(x)=\varphi(x)\,\frac{h_k(x)}{h(x)}.$$

У ҳолда $\operatorname{supp}\varphi$ ташувчи атрофида $h(x)\geq 1$ бўлади. Шунинг учун

$$\varphi_k \in D(U(x_k;\ r_k)) \quad \text{ва} \quad \varphi(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(x)$$

бўлади. Бундан

$$(f, \varphi)=\left(f,\ \sum_{k=1}^{N}\varphi_k \right)=\sum_{k=1}^{N}(f,\ \varphi_k)=0$$

ҳосил бўлади. Лемма исбот бўлди.

$f\in D'$ умумлашган функция бўлсин. $f=0$ бўлган *барча* атрофларнинг бирлашмасидан иборат O_f тўплам очиқ тўплам бўлиб бу тўпламга f умумлашган функциянинг *ноль тўплами* деб айтилади. Исботланган леммага кўра O_f тўпламда жойлашган ихтиёрий соҳада $f=0$ бўлади, ҳамда O_f тўплам $f=0$ шартни қаноатлантирадиган очиқ тўпламларнинг энг каттасидир.

Таъриф. *O_f тўпламнинг R^n фазогача тўлдирувчисига f умумлашган функциянинг ташувчиси дейилади ва $\operatorname{supp} f$ каби белгиланади.*

Бу келтирилган таърифга кўра, $\operatorname{supp} f = R^n \setminus \mathrm{O}_f$ бўлиб, $\operatorname{supp} f$ ёпиқ тўпламдир.

Таъриф. *Агар $\operatorname{supp} f$ ташувчи чегараланган тўплам бўлса, у ҳолда f умумлашган функцияга финит функция дейилади.*

Ушбу таърифлардан қуйидаги хулосаларни чиқарамиз:

а) $\mathrm{supp}\, f$ ташувчидан ташқарида ётган ихтиёрий соҳада f умумлашган функция нолга айланади, яъни ихтиёрий $\varphi \in D$ ва $\mathrm{supp}\, f \bigcap \mathrm{supp}\,\varphi = \varnothing$ учун

$$(f, \varphi) = 0 \qquad (3.3.16)$$

бўлади.

б) f умумлашган функциянинг ташувчиси фақат ва фақат шундай нуқталар тўпламики, бу тўпламнинг ихтиёрий нуқтасининг атрофида f умумлашган функция нолга айланмайди.

Бу исботланган 4–леммани қуйидагича умумлаштириш мумкин. $f \in D'(G)$ ва $G' \subset G$ бўлган соҳа бўлса, у ҳолда ихтиёрий

$$\varphi \in D(G') \text{ учун } (f_{G'}, \varphi) = (f, \varphi)$$

тенглик билан $f_{G'}$ чизиқли функционал аниқланади. Бу $f_{G'}$ функционал қуйидаги маънода $D(G')$ фазода узлуксиздир: агар $D(G)$ фазода $k \to \infty$ да $\varphi_k \to 0$ ва $\mathrm{supp}\,\varphi_k \subset G'' \subset\subset G'$ бўлса, у ҳолда $k \to \infty$ да $(f_{G'}, \varphi_k) \to 0$ бўлади. Одатда $f_{G'}$ функционалга f умумлашган функциянинг G' соҳадаги локал элементи (f умумлашган функциянинг G' соҳага қисқартирилгани) дейилади.

Шундай қилиб, ҳар бир умумлашган функция ҳар бир соҳада ўзининг локал элементини яратади. Тескари тасдиқ ҳам ўринлидир. Ҳар қандай келишилган локал элементлар тўпламида "ямаш" йўли билан ягона умумлашган функцияни ҳосил қилиш мумкин. Аниқироғи, қуйидаги теорема ўринлидир.

5–теорема (бўлакларни ямаш ҳақидаги теорема). *Ҳар бир $y \in G$ нуқта учун $U(y) \subset\subset G$ атроф мавжуд бўлиб бу атрофда f_y умумлашган функция берилган, бундан ташқари агар $x \in U(y_1) \bigcap U(y_2) \neq \varnothing$ бўлса, у ҳолда $f_{y_1}(x) = f_{y_2}(x)$ бўлсин. У ҳолда $D'(G)$ фазога қарашли ягона f умумлашган функция мавжуд бўлиб ҳар бир $y \in G$ нуқта учун $U(y)$ атрофда f умумлашган функция f_y умумлашган функция билан устма–уст тушади.*

Исбот. 4–лемма исботидаги сингари $\{U(y), y \in G\}$ қоплама бўйича G тўпламнинг $\{G_k\}$, $G_k \subset U(y_k)$ бўлган локал чекли қопламасини ва мос $\{e_k(x)\}$ бирнинг ёйилмаларини қурамиз. Ихтиёрий

$$\varphi \in D(G) \quad \text{учун} \quad (f, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{y_k}, \varphi e_k) \qquad (3.3.17)$$

деб оламиз. У ҳолда (3.3.17) тенгликнинг ўнг томонидаги қўшилувчилар сони ҳамма вақт чекли ва ихтиёрий $G' \subset\subset G$ учун $\varphi \in D(G')$ функцияга боғлиқ эмас. Шунинг учун $D(G)$ аниқланган f функционал чизиқли ва узлуксиз бўлади, яъни $f \in D'(G)$ бўлади. Шунингдек, агар $\varphi \in D(U(y))$ бўлса, у ҳолда $\varphi e_k \in D(U(y_k))$ ва $(f_y, \varphi e_k) = (f_{y_k}, \varphi e_k)$ бўлиб (3.3.17) тенгликка кўра

$$(f, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{y_k}, \varphi e_k) = (f_y, \varphi \sum_{k=1}^{\infty} e_k) = (f_y, \varphi)$$

тенглик ўринли бўлади, яъни $x \in U(y)$ соҳада $f(x) = f_y(x)$ тенглик ҳосил бўлади. Бу қурилган f умумлашган функциянинг ягоналиги 4–леммадан келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

6. Регуляр умумлашган функция. G соҳада локал интегралланувчи бўлган $f(x)$ функция ёрдамида яратилган ихтиёрий

$$\varphi \in D(G) \quad \text{учун} \quad (f, \varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)dx \qquad (3.3.18)$$

функционал энг содда умумлашган функцияга мисол бўла олади. Интегралнинг чизиқлилигидан бу функционалнинг ҳам чизиқлилиги келиб чиқади. Шунга кўра

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \int_G f(x)[\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)]dx =$$

$$= \lambda\int_G f(x)\varphi(x)dx + \mu\int_G f(x)\psi(x)dx =$$

$$= \lambda\,(f,\,\varphi) + \mu\,(f,\,\psi)$$

тенглик ҳосил бўлади. Интеграл белгиси остида лимитга ўтиш ҳақидаги теоремага кўра бу функционалнинг $D(G)$ фазода узлуксизлиги эканлиги ҳам келиб чиқади, яъни агар $D(G)$ фазода $k\to\infty$ да $\varphi_k\to 0$ бўлса, у ҳолда $k\to\infty$ да $G'\subset\subset G$ учун

$$(f,\ \varphi_k)=\int\limits_{G'} f(x)\ \varphi_k(x)dx\to 0.$$

эканлиги келиб чиқади.

G соҳада локал интегралланувчи бўлган $f(x)$ функция ёрдамида яратилган (3.3.18) умумлашган функцияга *регуляр умумлашган функция* деб айтилади. Бошқа умумлашган функциялар эса *сингуляр умумлашган функциялар* деб айтилади.

5–лемма (Дю Буа–Реймонд). *G соҳада локал интегралланувчи $f(x)$ функция шу G соҳанинг деярли ҳамма жойида нолга айланиши учун унинг ёрдамида яратилган $f(x)$ умумлашган функциянинг шу G соҳада нолга айланиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. Лемма исботининг зарурийлик шарти осонгина кўриниб турибди. Биз унинг етарлилик шартини исбот қиламиз. Ихтиёрий

$$\varphi\in D(G)\quad \text{учун}\ \ (f,\varphi)=\int\limits_{G} f(x)\varphi(x)dx=0 \qquad (3.3.19)$$

бўлсин. Ихтиёрий $G'\subset\subset G$ соҳани олайлик. Шу G' соҳанинг характеристик функцияси $\chi_{G'}$ функция бўлсин. У ҳолда $D(G)$ фазога қарашли $\varphi_k(x),\ k=1,2,\ ...$ функциялар кетма–кетлиги мавжуд бўлиб бу кетма–кетлик $e^{-i\arg f(x)}\chi_{G'}(x)$ функцияга G соҳанинг деярли ҳамма жойида яқинлашади, бундан ташқари G соҳанинг деярли ҳамма жойида $|\varphi_k(x)|\le 1$ тенгсизлик ўринли бўлади. Лебег интеграл белгиси остида лимитга ўтиш ҳақидаги Лебег теоремасидан фойдаланиб (3.3.19) тенгликни ҳисобга олиб

$$\int\limits_{G'} |f(x)|dx=\int\limits_{G'} f(x)e^{-i\arg f(x)}\chi_{G'}(x)dx=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left\{\int\limits_{G'} f(x)\varphi_k(x)dx+\int\limits_{G'} f(x)\left[e^{-i\arg f(x)}\chi_{G'}(x)-\varphi_k(x)\right]dx\right\}=$$

$$=\int\limits_{G'} \lim_{k\to\infty} f(x)\left[e^{-i\arg f(x)}\chi_{G'}(x)-\varphi_k(x)\right]dx=0$$

бўлади. Демак, G' соҳанинг деярли ҳамма жойида $f(x)=0$ бўлади. $G'\subset\subset G$ соҳанинг ихтиёрий эканлигидан G соҳанинг деярли ҳамма жойида $f(x)=0$ бўлади. Лемма исбот бўлди.

Бу исботланган леммадан G соҳадаги ҳар қандай регуляр умумлашган функция (ўлчами нолга тенг тўпламдаги қиймати аниқлигида) G соҳадаги локал жамланувчи функция орқали ягона равишда аниқланади. Шунга кўра G соҳадаги локал жамланувчи функция ва G соҳадаги регуляр умумлашган функция ўртасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд. Шунинг учун биз G соҳадаги локал жамланувчи $f(x)$ функция ва (3.3.18) формула билан аниқланган $D'(G)$ фазодаги умумлашган функцияни бир-бирига мос қўямиз.

Дю Буа-Ремонд леммасидан G соҳада узлуксиз бўлган функциянинг ташувчиси билан бу функция аниқлайдиган умумлашган функциянинг ташувчиси устма–уст тушишлиги ҳам келиб чиқади.

G соҳада локал жамланувчи бўлган $f_k(x),\, k=1,2,...$ функциялар кетма–кетлиги ҳар бир $K\subset\subset G$ компакт тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $D'(G)$ фазода $k\to\infty$ да $f_k(x)\to f(x)$ бўлади.

$f\in D'(G)$ ва $G_1\subset G$ бўлсин. Агар G_1 соҳада $f\in D'(G)$ умумлашган функция $f_1\in C^k(G_1)$ функция билан устма–уст тушса, яъни ихтиёрий $\varphi\in D(G_1)$ функция учун

$$(f,\varphi)=\int\limits_G f_1(x)\varphi(x)dx$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда f умумлашган функция $C^k(G_1)$ синфга тегишли деб айтилади. Агар бундан ташқари $f_1\in C^k(\overline{G_1})$ бўлса, у ҳолда f умумлашган функция $C^k(\overline{G_1})$ синфга тегишли деб айтилади.

7. Ўлчовлар. Сингуляр умумлашган функция. Регуляр умумлашган функцияларни сақлайдиган умумлашган функцияларнинг бир оз умумийроқ синфи ўлчовлар ёрдамида яратилади.

$$\mu(E)=\int\limits_E \mu(dx)$$

тенглик билан берилган ва A тўпламдаги барча E чегараланган Борель қисм тўпламида чекли, яъни $|\mu(E)|<\infty$ бўлган тўла аддитив (комплекс қийматли) тўплам функцияси A Борель тўпламидаги ўлчов деб айтилади.

A тўпламдаги барча $\mu(E)$ ўлчов тўртта манфиймас $\mu_j(E)\geq 0$ ўлчовлар орқали ва A тўпламда $\mu=\mu_1-\mu_2+i(\mu_3-\mu_4)$ формула бўйича бир қийматли тасвирланади. Шунингдек,

$$\int_E \mu(dx)=\int_E \mu_1(dx)-\int_E \mu_2(dx)+i\int_E \mu_3(dx)-i\int_E \mu_4(dx) \quad (3.3.20)$$

тенглик ўринли бўлади. $\mu(E)$ ўлчов G очиқ тўпламда $\varphi\in D(G)$ учун

$$(\mu,\varphi)=\int_G \varphi(x)\,\mu(dx) \quad (3.3.21)$$

формула бўйича G тўпламдаги μ умумлашган функцияни аниқлайди, бунда интеграл Риман–Стильтес маъносида тушунилади. Бу интегралнинг хоссасидан, ҳақиқатдан ҳам $\mu\in D'(G)$ эканлиги келиб чиқади.

Эслатма. *G тўпламдаги μ ўлчов Лебег ўлчовига нисбатан абсолют узлуксиз бўлган, яъни $\mu(dx)=f(x)dx$, бунда $f\in L^1_{loc}(G)$ бўлган ҳолда (3.3.21) формула f регуляр умумлашган функцияни аниқлайди.*

Дю Буа-Реймонд леммасига ўхшаш қуйидаги лемма ҳам ўринлидир.

6–лемма. *G очиқ тўпламдаги $\mu(E)$ ўлчов нолга тенг бўлишлиги учун унинг ёрдамида яратилган μ умумлашган функциянинг шу G соҳада нолга айланиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. Лемманинг исботи қуйидаги тасдиққа асосланади: G очиқ тўпламдаги $\mu(E)$ ўлчов нолга тенг бўлишлиги учун

$$\varphi\in C_0(G) \quad \text{учун} \int_G \varphi(x)\mu(dx)=0 \quad (3.3.22)$$

тенгликнинг ўринли эканлиги зарур ва етарлидир.

Бундан эса, бирданига зарурийлик келиб чиқади. Етарлиликни исбот қиламиз. Барча $\varphi\in D(G)$ учун (3.3.22) тенглик бажарилган деб қараб бу тенгликнинг ихтиёрий $\varphi\in C_0(G)$ учун бажарилишини исбот қиламиз. $\mathrm{supp}\,\varphi\subset G'\subset\subset G$

бўлсин. У ҳолда $D(G)$ синфга қарашли φ_k, $k=1, 2, 3, ...$ функциялар кетма–кетлиги мавжуд бўлиб, бунда $\operatorname{supp}\varphi_k \subset G' \subset\subset G$ ва $k \to \infty$ да $\varphi_k \to \varphi$ бўлади. Шунинг учун

$$\int\limits_G \varphi(x)\mu(dx) = \int\limits_G \lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)\mu(dx) = \lim_{k\to\infty}\int\limits_G \varphi_k(x)\mu(dx) = 0$$

бўлади. Шунга кўра талаб қилинган тасдиқнинг исбот келиб чиқади. Лемма исбот бўлди.

Бу леммадан G очиқ тўпламдаги $\mu(E)$ ўлчов ва (3.3.21) формула бўйича ундан яратилган умумлашган функция ўртасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд бўлади. Шунинг учун биз кейинчалик G очиқ тўпламдаги $\mu(E)$ ўлчовга ундан яратилган $\mu \in D'(G)$ умумлашган функцияни мос қилиб қўямиз.

6–теорема. *$f \in D'(G)$ умумлашган функция G очиқ тўпламдаги $\mu(E)$ ўлчов бўлишлиги учун унинг G очиқ тўпламдаги тартиби нолга тенг бўлишлиги зарур ва етарлидир.*

Исбот. *Зарурийлиги.* $f \in D'(G)$ умумлашган функция G очиқ тўпламдаги $\mu(E)$ ўлчов бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $G' \subset\subset G$ компакт жойлашган очиқ тўпламда барча $\varphi \in D(G')$ учун

$$|(f,\varphi)| = \left|\int\limits_{G'} \varphi(x)\mu(dx)\right| \le \int\limits_{G'} |\mu(dx)| \cdot \max_{x\in G'}|\varphi(x)|$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бунга кўра $f \in D'(G)$ умумлашган функциянинг G очиқ тўпламдаги тартиби нолга тенг бўлишлигини ҳосил қиламиз.

Етарлилиги. $f \in D'(G)$ умумлашган функциянинг G очиқ тўпламдаги тартиби нолга тенг бўлсин, яъни барча $G' \subset\subset G$ компакт жойлашган очиқ тўпламда барча $\varphi \in D(G')$ учун

$$|(f,\varphi)| \le K(G') \cdot \|\varphi\|_{C(\overline{G'})} \qquad (3.3.23)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. G_k, $k=1,2,...$ очиқ тўпламлар кетма–кетлиги қатъий ўсувчи бўлиб G очиқ тўпламни қопласин, яъни $G_k \subset\subset G_{k+1}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = G$ бўлсин. Маълумки, $D(G_k)$ тўплам $C_0(\overline{G}_k)$ фазода $C(\overline{G}_k)$ фазо нормаси бўйича зич бўлади. Шунинг учун (3.3.23) тенгсизликка кўра f чизиқли функционални $C_0(\overline{G}_k)$

фазога чизиқли узлуксиз функционал қилиб давом эттириш мумкин бўлади. Бундан эса, Рисс–Радон теоремасига кўра, $\overline{G}_k$ тўпламда μ_k ўлчов мавжуд бўлиб барча $\varphi \in C_0(\overline{G}_k)$ учун

$$(f,\varphi) = \int\limits_{G_k} \varphi(x)\mu_k(dx)$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан G_k тўпламда μ_k ва μ_{k+1} ўлчовлар устма–уст тушиши келиб чиқади. Шунинг учун G тўпламда ягона μ ўлчов мавжуд бўлиб ҳар бир G_k тўпламда μ_k ўлчов билан ва $f \in D'(G)$ умумлашган функция билан устма–уст тушади. Теорема исбот бўлди.

Агар $x \in G$ учун $\varphi(x) \geq 0$ тенгсизлиги ўринли бўладиган барча $\varphi \in D(G)$ учун $(f,\varphi) \geq 0$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f \in D'(G)$ умумлашган функция G тўпламда *манфиймас* деб айтилади.

7–теорема. *$f \in D'(G)$ умумлашган функция G очиқ тўпламдаги манфиймас $\mu(E)$ ўлчов бўлишлиги учун унинг G очиқ тўпламда манфиймас бўлишлиги зарур ва етарлидир.*

Исбот. Зарурийлиги бевосита келиб чиқади. Биз етарлиликни исбот қиламиз. $f \in D'(G)$ умумлашган функция G тўпламда манфиймас бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $G' \subset\subset G$ компакт жойлашган очиқ тўпламда барча $\varphi \in D(G')$ учун шундай бир $\eta \in D(G)$ ва $x \in G'$ учун $\eta(x) = 1$ бўлган функция мавжуд бўлади. Шунинг учун

$$-\|\varphi\|_{C(\overline{G'})} \cdot \eta(x) \leq \varphi(x) \leq \|\varphi\|_{C(\overline{G'})} \cdot \eta(x), \ x \in G$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан $f \in D'(G)$ умумлашган функция G очиқ тўпламда манфиймас эканлигидан

$$-(f,\eta) \cdot \|\varphi\|_{C(\overline{G'})} \leq (f,\varphi) \leq (f,\eta) \cdot \|\varphi\|_{C(\overline{G'})},$$

яъни $\varphi \in D(G')$ учун $|(f,\varphi)| \leq (f,\eta) \cdot \|\varphi\|_{C(\overline{G'})}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ҳосил қилинган тенгсизлик $f \in D'(G)$ умумлашган функциянинг G очиқ тўпламдаги тартиби нолга тенг эканлигини кўрсатади. 6–теоремага кўра $f \in D'(G)$ умумлашган функция G очиқ тўпламдаги (манфиймас) ўлчов бўлади. Теорема исбот бўлди.

Олдинги пунктда келтирилган таърифга кўра сингуляр умумлашган функцияни ҳеч бир локал интегралланувчи функция билан мослаштириш мумкин эмас. Энг содда сингуляр умумлашган функцияга мисол сифатида $\varphi \in D$ учун $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ бўлган Диракнинг δ–функциясини келтириш мумкин. Маълумки, $\delta \in D'$ бўлади ва $x \neq 0$ учун $\delta(x) = 0$. Шунга кўра $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$ бўлади.

Энди $\delta(x)$–функциянинг сингуляр умумлашган функция эканлигини исбот қиламиз. Тескарисини фараз қилайлик, R^n фазода локал интегралланувчи $f(x) \in L^1_{loc}(R^n)$ функция мавжуд бўлиб ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^n)$ учун

$$\int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \qquad (3.3.24)$$

бўлсин. Агар $\varphi(x) \in D(R^n)$ бўлса, у ҳолда $|x|^2 \varphi(x) \in D(R^n)$ бўлиб (3.3.24) тенгликка кўра барча $\varphi(x) \in D(R^n)$ учун

$$\int_{R^n} f(x)|x|^2 \varphi(x)dx = |x|^2 \varphi(x)\Big|_{x=0} = 0 = (|x|^2 f(x), \varphi(x))$$

тенглик ўринли бўлади. Шундай қилиб R^n фазода локал интегралланувчи $|x|^2 f(x)$ функция умумлашган функция маъносида нолга тенг экан. Дю Буа-Реймонд леммасига кўра $|x|^2 f(x) = 0$ тенглик деярли ҳамма жойда бажарилади. Шунга кўра $f(x) = 0$ тенглик деярли ҳамма жойда бажарилади. Бу эса (3.3.24) тенгликка зиддир. Бу зиддият $\delta(x)$–функциянинг сингуляр умумлашган функция эканлигини исботлайди.

$\omega_\varepsilon(x)$– "шапкача" функция учун D' фазода $\varepsilon \to +0$ да

$$\omega_\varepsilon(x) \to \delta(x) \qquad (3.3.25)$$

яқинлашувчи эканлигини исбот қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам, D' фазода яқинлашиш тушунчасининг таърифига кўра (3.3.25) муносабат ихтиёрий $\varphi \in D$ учун

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{R^n} \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

тенгликка эквивалент бўлади. Бу тенглик

$$\left|\int\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| \le \int\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(x)\left|\varphi(x)-\varphi(0)\right|dx \le$$

$$\le \max_{|x|\le\varepsilon}\left|\varphi(x)-\varphi(0)\right| \cdot \int\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(x)dx = \max_{|x|\le\varepsilon}\left|\varphi(x)-\varphi(0)\right|$$

тенгсизлик ва $\varphi(x)$ функция узлуксиз функция эканлигидан келиб чиқади.

Нуқтавий δ–функциянинг умумлашмаси сирт δ–функцияси бўлади. R^n фазодаги S– бўлакли-силлиқ сирт бўлиб, $\mu(x)$– функция шу S сиртда узлуксиз функция бўлсин. Биз $\mu\delta_S$ умумлашган функцияни ихтиёрий $\varphi \in D$ учун

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int\limits_S \mu(x)\varphi(x)dS$$

қоида бўйича аниқлаймиз. Кўриниб турибдики, $\mu\delta_S \in D'$ ва $x \notin S$ учун $\mu\delta_S(x) = 0$ бўлиб, шунга кўра $\mathrm{supp}\,\mu\delta_S \subset S$ бўлади. Агар $\mu \not\equiv 0$ бўлса, у ҳолда $\mu\delta_S$ умумлашган функция ўлчам бўлади.

$\mu\delta_S$ умумлашган функцияга μ зичлик билан берилган S сирт устидаги *оддий қатлам* дейилади. Бу оддий қатлам масса ёки заряднинг фазовий зичлигини ифода қилиб, μ сирт зичлиги билан берилган S сирт устида жамланган бўлади. Бу ерда оддий қатлам зичлиги мос S сирт устида дискрет тақсимланган

$$\sum_k \mu(x_k)\Delta S_k \delta(x - x_k)\ ,\ x_k \in S$$

зичликнинг S сирт чексиз майдалангандаги кучсиз лимити каби аниқланади.

Эслатма. Масса, зарядлар, куч ва бошқалар зичлигининг тақсимланиши локал жамланувчи функция ва δ–функциялар орқали тавсифланади. Шунинг учун умумлашган функция *тақсимот* (distributions)[1] деб ҳам айтилади. Агар f умумлашган функция масса ёки заряднинг зичлигини аниқласа, у ҳолда $(f, 1)$ ифода тўла масса ёки зарядни аниқлайди (тасвирда f функция сифатида маънога эга бўлиб айнан 1 функцияга тенг бўлса, у

---

[1] Бу ҳақида Л. Шварцнинг “Математические методы для физических наук”. М.: Мир, 1965 йил ва “The`orie des distributions”. T. I–II. Paris, 1950–1951 йиллардаги китобидан ўқиш мумкин.

ҳолда бу функция D синфга тегишли эмас). Хусусан, $(\delta, 1) = 1$, агар $f \in L_1(R^n)$ бўлса, у ҳолда $(f, 1) = \int\limits_{R^n} f(x)dx$ бўлади.

8. Сохоцкий формуласи. Биз ихтиёрий $\varphi \in D(R^1)$ учун

$$\left(P\frac{1}{x}, \varphi \right) = V.p\int\limits_{R} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \right)\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

формула орқали яна битта муҳим бўлган $\mathrm{P}\frac{1}{x}$ сингуляр умумлашган функцияни киритамиз. Бу $\mathrm{P}\frac{1}{x}$ функционал чизиқли бўлади. Ушбу функционалнинг $D(R^1)$ фазода узлуксизлиги исботлаймиз. D фазода $k \to \infty$ да $\varphi_k \to 0$ бўлсин, яъни $|x| > R$ учун $\varphi_k(x) = 0$ ва $k \to \infty$ да $D^\alpha \varphi_k(x) \Rightarrow 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\left| \left(\mathrm{P}\frac{1}{x}, \varphi_k \right) \right| = \left| V.p\int\limits_{R^1} \frac{\varphi_k(x)}{x}dx \right| = \left| V.p\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0) + x\varphi_k{}'(x')}{x}dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-R}^{R} |\varphi_k{}'(x')|dx \leq 2R \max_{|x| \leq R} |\varphi_k{}'(x)| \to 0 \qquad (3.3.26)$$

бўлади, бу ерда x'–нуқта $(-R, R)$ интервалдан олинган қандайдир нуқта бўлади. Шундай қилиб, $\mathrm{P}\frac{1}{x} \in D'(R^1)$ экан.

$\mathrm{P}\frac{1}{x}$ умумлашган функция $x \neq 0$ учун $\frac{1}{x}$ функция билан устма–уст тушади. Одатда бу функцияга $\frac{1}{x}$ функциянинг чекли қисми (partie finie) ёки $\frac{1}{x}$ функциядан олинган интегралнинг *бош қиймати* деб айтилади.

Энди ихтиёрий $\varphi \in D(R^1)$ учун

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{R^1} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon}dx = -i\pi\varphi(0) + V.p\int\limits_{R^1} \frac{\varphi(x)}{x}dx \qquad (3.3.27)$$

тенглик ўринли эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, агар $|x| > R$ учун $\varphi(x) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{R^1}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx=$$

$$=\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]dx=$$

$$=-2i\varphi(0)\cdot\lim_{\varepsilon\to+0}arctg\frac{R}{\varepsilon}+\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx=$$

$$=-i\pi\varphi(0)+V.p\int\limits_{R^1}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

бўлади. (3.3.27) муносабат $D'(R^1)$ фазода $\varepsilon\to+0$ да $\frac{1}{x+i\varepsilon}$ функциянинг лимити мавжуд бўлишлигини билдиради ва бу лимитни биз $\frac{1}{x+i0}$ орқали белгилаймиз. Шунга кўра,

$$\frac{1}{x+i0}=-i\pi\delta(x)+\mathrm{P}\frac{1}{x} \qquad (3.3.28)$$

тенглик ўринли бўлади. Худди шунингдек

$$\frac{1}{x-i0}=i\pi\delta(x)+\mathrm{P}\frac{1}{x} \qquad (3.3.29)$$

тенглик ўринли бўлади. (3.3.27) “интеграл” форма кўринишидаги (3.3.28) ва (3.3.29) формулаларни 1973 йилда Ю.В. Сохоцкий[1] томонидан биринчи топилган. Ҳозирда бу формулалар квант физикасида кенг қўлланилади.

$\mathrm{P}\frac{1}{x}$ умумлашган функциянинг R^1 тўпламдаги тартиби 1 эканлигини исбот қиламиз.

Ҳақиқатдан ҳам, (3.3.26) тенгсизликдан $\mathrm{P}\frac{1}{x}$ умумлашган функциянинг R^1 тўпламдаги тартиби 1 дан ошмаслиги келиб чиқади. Агар унинг тартиби 0 бўлганда 6–теоремага кўра $\mathrm{P}\frac{1}{x}$ умумлашган функциянинг R^1 тўпламда ўлчов эканлиги келиб

---

[1] Бу ҳақида Ю.В. Сохоцкийнинг “Об определенных интегралах, употребляемых при разложении в ряды” С.-Петербург, 1973. ишида келтирилган.

чиқади. Лекин у ҳолда $V.p\int\limits_{R^1}\frac{\varphi(x)}{x}dx$ интеграл ҳам барча узлуксиз R^1 тўпламда финит бўлган функциялар учун аниқланган бўлар эди. Маълумки бу эса, нотўғридир. Масалан бу 0 нуқта атрофида $\frac{\theta(x)}{\ln x}$ функцияга тенг бўлган функция учун аниқланмаган бўлади.

Шуни таъкидлаш керакки, $\mathrm{P}\frac{1}{x}$ умумлашган функциянинг $\{x\neq 0\}$ тўпламдаги тартиби 0 бўлади, чунки $\mathrm{P}\frac{1}{x}$ умумлашган функция $\{x\neq 0\}$ тўпламда локал жамланувчи $\frac{1}{x}$ функция билан устма–уст тушади.

$\mathrm{P}\frac{1}{x}$ умумлашган функция $\{x\neq 0\}$ тўпламда $\frac{1}{x}$ регуляр бўлган умумлашган функциянинг R^1 бутун сон ўқига давоми бўлади. Савол туғилади?. $G\neq R^n$ тўпламда локал жамланувчи ҳар қандай функцияни бутун R^n фазога $D'(R^n)$ тўпламга қарашли умумлашган функция сифатида давом эттириш мумкин бўладми?. Бу саволнинг жавоби манфий бўлди, чунки $e^{\frac{1}{x}}\in D'(x\neq 0)$ умумлашган функцияни қарайлик. У ҳолда, агар $f\in D'(R^1)$ умумлашган функция мавжуд бўлиб $x\neq 0$ учун $e^{\frac{1}{x}}$ функция билан устма–уст тушса, у ҳолда биз $\varphi(x)\in D(x\neq 0)$ учун

$$(f,\varphi)=\int\limits_{R^1}e^{\frac{1}{x}}\varphi(x)dx \tag{3.3.30}$$

тенгликка эга бўламиз. $\varphi_0\in D(R^1)$ бўлиб, $x<1$ учун ва $x>2$ учун $\varphi_0(x)=0$, ҳамда $\varphi_0(x)\geq 0,\ \int\limits_{R^1}\varphi_0(x)dx=1$ бўлсин. У ҳолда $D(R^1)$ фазода $k\to\infty$ да $\varphi_k(x)=e^{-\frac{k}{2}}k\varphi_0(kx)\to 0$ бўлади. Ҳамда $\varphi_k(x)\in D(x\neq 0)$ ва

$$\int_{R^1} e^{\frac{1}{x}}\varphi_k(x)dx = \int_{R^1} e^{\frac{1}{x}-\frac{k}{2}} k\varphi_0(kx)dx = \int_1^2 e^{k(\frac{1}{y}-\frac{1}{2})}\varphi_0(y)dy \geq \int_1^2 \varphi_0(y)dy = 1$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса (3.3.30) тенгликка кўра $k \to \infty$ да

$$1 \leq \int_{R^1} e^{\frac{1}{x}}\varphi_k(x)dx = (f, \varphi_k) \to 0$$

зиддиятга олиб келади.

9. Умумлашган функцияларда ўзгарувчиларни алмаштириш. $f(x) \in L^1_{loc}(G)$ ва $x = Ay + b, \det A \neq 0$ шу G_1 очиқ тўпламни G очиқ тўпламга акслантирувчи махсусмас чизиқли алмаштириш бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varphi \in D(G_1)$ учун

$$(f(Ay+b), \varphi) = \int_{G_1} f(Ay+b)\varphi(y)dy =$$

$$= \frac{1}{|\det A|}\int_G f(x)\varphi[A^{-1}(x-b)]dx = \frac{1}{|\det A|}(f,\ \varphi[A^{-1}(x-b)]).$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликни биз ихтиёрий $f(x) \in D'(G)$ учун $f(Ay+b)$ умумлашган функциянинг таърифи сифатида қабул қиламиз ва ихтиёрий $\varphi \in D(G_1)$ учун

$$(f(Ay+b),\ \varphi(y)) = \left(f,\ \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right) \qquad (3.3.30)$$

тенгликни ёзамиз. Шунингдек $\varphi(x) \to \varphi[A^{-1}(x-b)]$ амали $D(G_1)$ фазони $D(G)$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантирувчи функционал бўлиб, (3.3.30) тенгликнинг ўнг томони билан аниқланадиган $f(Ay+b)$ функционал $D'(G_1)$ фазога тегишли бўлади.

Хусусан, агар A–буриш, яъни $A^T = A^{-1}$ ва $b = 0$ бўлса, у ҳолда $(f(Ay), \varphi) = (f, \varphi(A^T x))$ тенглик ўринли бўлади. Агар A–ўхшаш (акс эттириш билан бирга) алмаштириш, яъни $A = cI, c \neq 0$ ва $b = 0$ бўлса, у ҳолда

$$(f(cy), \varphi) = \frac{1}{|c|^n}\left(f, \varphi\left(\frac{x}{c}\right)\right)$$

тенглик ўринли бўлади. Агар $A = I$ бўлса, у ҳолда (b векторга силжитиш)

$$(f(y+b), \varphi) = (f, \varphi(x-b))$$

бўлади. Одатда $f(x+b)$ умумлашган функцияга $f(x)$ умумлашган функциянинг b векторга силжитилгани дейилади.

Масалан, а) $\delta(-x)$ функция акс эттириш умумлашган функцияси бўлиб $\delta(x)$ умумлашган функцияга тенг, яъни

$$(\delta(-x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(-x)) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$$

формула орқали аниқланади. Бундан $\delta(-x) = \delta(x)$ келиб чиқади.

б) $\delta(x-x_0)$ умумлашган функция $\delta(x)$ умумлашган функциянинг x_0 векторга силжитилгани бўлиб

$$(\delta(x-x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0)$$

формула орқали аниқланади.

Шунингдек, бундай киритиш трансляцион–инвариант, сферик–симметрик, марказий–симметрик, бир жинсли, даврий, Лорец–инвариант ва бошқа умумлашган функцияларни аниқлашга имкон беради.

Масалан, агар Лоренц гуруппасидаги (яъни R^n фазодаги $x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2$ квадратик формани сақлайдиган ихтиёрий A чизиқли алмаштириш учун) ихтиёрий A алмаштириш учун $f(Ax) = f(x)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда f умумлашган функция *Лоренц гуруппасига нисбатан инвариант* дейилади.

Беъвосита (3.3.30) таърифдан ўзгарувчиларни чизиқли алмаштириш амали $D(G_1)$ фазони $D(G)$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантирувчи функционал бўлиши бевосита келиб чиқади. Шунга кўра, ихтиёрий $f(x), g(x) \in D'(G)$ учун

$$(\lambda f + \mu g)(Ay+b) = \lambda f(Ay+b) + \mu g(Ay+b)$$

бўлиб, агар $D'(G)$ фазода $k \to \infty$ да $f_k(x) \to 0$ бўлса, у ҳолда $D'(G_1)$ фазода $k \to \infty$ да $f_k(Ay+b) \to 0$ бўлади.

$a(x) \in C^1(R^1)$ бўлсин. $\delta(a(x))$ умумлашган функцияни $D'(c,d)$ фазодаги

$$\delta(a(x)) = \lim_{\varepsilon \to +0} \omega_\varepsilon(a(x)) \qquad (3.3.31)$$

лимит формуласи билан аниқлаймиз, бунда ω_ε–“шапкача” функциясидир.

$a(x)$ функция яккаланган ва $x_k, \ \ k=1,2,...$ оддий нолларга эга бўлсин. Бу ҳолда $\delta(a(x))=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\omega_\varepsilon(a(x))$ функция $D'(R^1)$ фазода мавжуд бўлади ва

$$\delta(a(x))=\sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|} \tag{3.3.32}$$

йиғинди орқали тасвирланади.

Бўлакларни ямаш ҳақидаги теоремага кўра, (3.3.32) тенгликни локал исботлаш, яъни ҳар бир нуқтанинг етарлича кичик атрофида исботлаш етарлидир. $\varphi\in D(x_k-\varepsilon_k, x_k+\varepsilon_k)$ бўлиб, бунда $(x_k-\varepsilon_k,\, x_k+\varepsilon_k)$ интервалда $a(x)$ функция монотон функция бўладиган қилиб етарлича кичик танланган бўлсин. У ҳолда

$$(\delta(a(x)),\,\varphi(x))=\lim_{\varepsilon\to+0}(\omega_\varepsilon(a(x)),\,\varphi(x))=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k+\varepsilon_k}\omega_\varepsilon(a(x))\,\varphi(x)dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a(x_k-\varepsilon_k)}^{a(x_k+\varepsilon_k)}\omega_\varepsilon(y)\,\varphi(a^{-1}(y))\frac{dy}{a'[a^{-1}(y)]}=\frac{\varphi(x_k)}{|a'(x_k)|}=\left(\frac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|},\varphi\right)$$

тенгликни ёзамиз. Агар $\varphi\in D(\alpha,\beta)$ бўлиб, бунда $(\alpha,\,\beta)$ интервал $a(x)$ функциянинг $x_k, \ \ k=1,2,...$ нолларини сақламаса, у ҳолда

$$(\delta(a(x)),\,\varphi(x))=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\alpha^\beta\omega_\varepsilon(a(x))\,\varphi(x)dx=0$$

бўлади. Кўриниб турибдики, $(x_k-\varepsilon_k,\, x_k+\varepsilon_k)$ интерваллардаги локал элементлар $\dfrac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|}$ тенг ва $(\alpha,\,\beta)$ интервалдаги локал элемент 0 бўлади. Бўлакларни ямаш ҳақидаги теоремага кўра, (3.3.32) формула исбот бўлди.

Мисол. а) $\delta(x^2-a^2)=\dfrac{1}{2a}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right];$

а) $\delta(\sin x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k\pi)$

тенгликлар ўринли бўлади.

10. Умумлашган функцияга кўпайтириш. $f(x)\in L^1_{loc}(G)$ ва $a(x)\in C^{\infty}(G)$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varphi\in D(G)$ учун

$$(af,\varphi)=\int_G a(x)f(x)\varphi(x)dx=(f,a\varphi).$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликни биз $f(x)\in D'(G)$ умумлашган функциянинг $a(x)$ чексиз дифференциалланувчи функцияга $a\cdot f$ кўпайтмасининг таърифи сифатида қабул қиламиз, яъни ихтиёрий $\varphi\in D(G)$ учун

$$(af,\varphi)=(f,a\varphi) \tag{3.3.32}$$

тенглик ўринли бўлади. Маълумки, ихтиёрий $a(x)\in C^{\infty}(G)$ учун $\varphi\to a\varphi$ амал $D(G)$ синфни $D(G)$ синфга акслантириб чизиқли ва узлуксиз бўлади. Шунинг учун (3.3.32) тенглик билан аниқланган $a(x)f(x)$ функционал $D'(G)$ фазодаги умумлашган функцияни ифода қилади.

Бу (3.3.32) формула билан аниқланган ихтиёрий $a(x)\in C^{\infty}(G)$ функциянинг $f(x)\in D'(G)$ умумлашган функцияга $a(x)f(x)$ кўпайтириш амали $D'(G)$ фазони $D'(G)$ фазога акслантирувчи чизиқли ва узлуксиз акслантириш бўлади, яъни ихтиёрий $f(x), g(x)\in D'(G)$ учун

$$a(\lambda f+\mu g)=\lambda(af)+\mu(ag)$$

бўлиб, агар $D'(G)$ фазода $k\to\infty$ да $f_k(x)\to 0$ бўлса, у ҳолда $D'(G)$ фазода $k\to\infty$ да $a(x)f_k(x)\to 0$ бўлади.

Бундан ташқари,

$$\operatorname{supp}\big(a(x)f(x)\big)\subset\operatorname{supp}\big(a(x)\big)\bigcap\operatorname{supp}\big(f(x)\big)$$

муносабат ўринлидир, чунки $O_{af}\supset O_a\bigcup O_f$ ва

$$\operatorname{supp}\big(a(x)f(x)\big)=G\setminus O_{af}\subset G\setminus\left(O_a\bigcup O_f\right)=$$

$$=\left(G\setminus O_a\right)\bigcap\left(G\setminus O_f\right)=\operatorname{supp}\big(a(x)\big)\bigcap\operatorname{supp}\big(f(x)\big)$$

бўлади.

Агар $f(x)\in D'(G)$ бўлса, у ҳолда

$$f=\eta f \tag{3.3.33}$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $\eta\in C^{\infty}(G)$ ихтиёрий функция бўлиб $f(x)\in D'(G)$ умумлашган функциянинг ташувчиси атрофида бирга тенг бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varphi \in D(G)$ учун $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг ташувчилари умумий нуқтага эга эмас. Шунинг учун

$$(f, (1-\eta)\varphi) = 0 = ((1-\eta) f, \varphi)$$

бўлади. Бу эса (3.3.33) тенгликка тенг кучлидир.

Мисоллар: а) $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ тенглик ўринлидир. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varphi \in D(G)$ учун

$$(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = (a(0)\delta(x), \varphi)$$

бўлади, яъни $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ тенглик ўринлидир.

б) $x\mathrm{P}\frac{1}{x} = 1$ тенглик ўринлидир. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varphi \in D(G)$ учун

$$\left(xP\frac{1}{x}, \varphi\right) = \left(P\frac{1}{x}, x\varphi\right) = V.p\int_{R^1} \frac{x\varphi(x)}{x}dx = \int_{R^1} \varphi(x)dx = (1, \varphi(x))$$

бўлади, яъни $x\mathrm{P}\frac{1}{x} = 1$ тенглик ўринлидир.

Савол туғилади: ихтиёрий умумлашган функцияларнинг кўпайтмасини шундай киритиш мумкинми, бунда кўпайтма ҳам умумлашган функция бўлсин?. Локал интегралланувчи функцияларнинг кўпайтмаси яна локал интегралланувчи функция бўлмаслиги мумкин, масалан R^1 фазода $\left(|x|^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = |x|^{-1}$ функция локал интегралланувчи бўлмайди. Бунга ўхшаш ҳолат умумлашган функциялар учун ҳам ўринли бўлади. Л. Шварц томонидан кўпайтиришнинг ассоциативлик ва коммутативлик хоссалари ўринли бўлган бундай кўпайтмани аниқлаш мумкин эмаслиги кўрсатилган.

Ҳақиқатан ҳам, агарда бундай кўпайтма мавжуд бўлса, у ҳолда а) ва б) мисоллардан фойдаланиб

$$0 = 0P\frac{1}{x} = (x\delta(x))P\frac{1}{x} = (\delta(x)x)P\frac{1}{x} = \delta(x)\left(xP\frac{1}{x}\right) = \delta(x)$$

тенгликка эга бўлар эдик. Бу қарама-қаршилик бундай кўпайтмани аниқлаш мумкин эмаслигини кўрсатади.

f умумлашган функция ва g умумлашган функцияларнинг кўпайтмасини аниқлаш учун ихтиёрий нуқтанинг атрофида f умумлашган функция қанчалик "регуляр" бўлмаса, у ҳолда g умумлашган функция шу нуқтанинг атрофида шунчалик "регуляр" бўлилиги керак бўлади ва аксинча.

Масалан, агар $a \neq b$ бўлса, у ҳолда $\delta(x-a)\delta(x-b)=0$ бўлади деб, агар $a(x)$ функция 0 нуқтанинг атрофида узлуксиз бўлса, у ҳолда $a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x)$ бўлади деб ҳисоблаш табиийдир.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

17.1. $\varphi(x) \in D(R^n)$ бўлсин. У ҳолда

1. $\frac{1}{k}\varphi(x)$. 2. $\frac{1}{k}\varphi(kx)$. 3. $\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$, $k=1,2,...$ кетма–кетликлардан қайси бири $D(R^n)$ фазода яқинлашувчи бўлади.

17.2. Агар $\varphi(x) \in D(R^1)$ ва $\eta(x) \in D(R^1)$ бўлиб $x=0$ нуқта атрофида $\eta(x)=1$ бўлсин. У ҳолда

1. $m=1,2,\,...$ учун $\psi(x)=\frac{1}{x^m}\left[\varphi(x)-\eta(x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}x^k\right]$

функция ҳам $D(R^1)$ синфдаги асосий функция эканлигини исботланг.

2. агар $\alpha(x) \in C^\infty(R^1)$ ва бу функция учун $x=0$ нуқта ягона биринчи тартибли ноли бўлса, у ҳолда

$$\psi(x)=\frac{\varphi(x)-\eta(x)\varphi(0)}{\alpha(x)}$$

функция ҳам $D(R^1)$ синфдаги асосий функция эканлигини исботланг.

17.3. $\varphi_1(x) \in D(R^1)$ функция қандайдир $\varphi_2(x) \in D(R^1)$ функциянинг ҳосиласи бўлишлиги учун

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)dx=0$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

17.4. Ҳар қандай $\varphi(x) \in D(R^1)$ функция

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt+\varphi_1{}'(x)$$

шаклида тасвирланиши мумкин, бунда $\varphi_1(x)\in D(R^1)$ ва $\varphi_0(x)\in D(R^1)$ бўлиб $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)dx=1$ шартни қаноатлантиради.

17.5. Агар $\varepsilon\to+0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}},\quad \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon},\quad \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},\quad \frac{\varepsilon}{\pi x^2}\cdot\sin^2\frac{x}{\varepsilon}$$

функциялар $\delta(x)$ функцияга интилувчи эканлигини исботланг.

17.6. Агар $t\to+\infty$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{e^{ixt}}{x-i0}\to 2\pi i\delta(x),\quad \frac{e^{-ixt}}{x-i0}\to 0,$$

$$\frac{e^{ixt}}{x+i0}\to 0,\quad \frac{e^{-ixt}}{x+i0}\to -2\pi i\delta(x),\, t^m e^{ixt}\to 0, m\geq 0$$

лимитик муносабатлар ўринли эканлигини исботланг.

17.7. Ихтиёрий a_k сонлар сонлар кетма-кетлиги учун $D'(R)$ фазода $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(x-k)$ қатор яқинлашувчи эканлигини исботланг.

17.8. $R\to\infty$ да $D'(R^n)$ фазода $\delta_{S_R}(x)\to 0$ яқинлашувчи эканлигини исботланг.

17.9. $k\to\infty$ да $D'(R^1)$ фазода $P\frac{\cos kx}{x}\to 0$ яқинлашувчи эканлигини исботланг, бунда

$$\left(P\frac{\cos kx}{x},\varphi\right)=V.p\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)dx$$

тенглик билан аниқланган.

17.10. $\varphi(x)\in D(R^1)$ учун

$$\left(P\frac{1}{x^2},\varphi\right)=V.p\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx$$

тенглик билан аниқланган $P\frac{1}{x^2}$ функционал сингуляр умумлашган функция эканлигини кўрсатинг.

17.11. 1. $\alpha(x) \in C^{\infty}(R^n)$ учун $\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x)$; хусусан, $x \in R^1$ учун $x\delta(x) = 0$.

2. $xP\dfrac{1}{x} = 1$.

3. $m \geq 1$ учун $x^m P\dfrac{1}{x} = x^{m-1}$ эканлигини кўрсатинг.

17.12. $\alpha \in D(R^n),\, \alpha \geq 0, \int\limits_{R^n} \alpha(x)dx = 1$ бўлсин. У ҳолда $\varepsilon \to +0$ да $D'(R^n)$ фазода $\varepsilon^{-n}\alpha\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \to \delta(x)$ яқинлашувчи эканлигини исботланг. Хусусан, $\varepsilon \to +0$ да $D'(R^n)$ фазода $\omega_{\varepsilon}(x) \to \delta(x)$ яқинлашувчи эканлигини исботланг.

17.13. Ихтиёрий $a \in C^{\infty}(R^n),\; f \in D'(R^n),\, h \in R^n$ учун

$$(af)(x+h) = a(x+h)\, f(x+h)$$

тенглик ўринли эканлигини исботланг.

17.14. R^1 соҳада f – финит умумлашган функция ва η –эса $D(R^1)$ фазодаги ихтиёрий функция бўлиб $\operatorname{supp} f$ ташувчи атрофида 1 га тенг бўлсин. $z = x + iy$ учун

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(f(x'), \frac{\eta(x')}{x' - z} \right)$$

деб оламиз. У ҳолда

1) $\hat{f}(z)$ функция η ёрдамчи функциянинг танланишига боғлиқ эмас;

2) $z \notin \operatorname{supp} f$ учун $\hat{f}(z)$ аналитик функция;

3) $z \to \infty$ да $\hat{f}(z) = O\left(\dfrac{1}{|z|}\right)$ муносабат ўринли;

4) агар $\varepsilon \to +0$ бўлса, у ҳолда $D(R^1)$ фазода $\hat{f}(x+i\varepsilon) - \hat{f}(x-i\varepsilon) \to f(x)$ яқинлашувчи эканлигини исботланг. Бу $\hat{f}(z)$ функция $f(x)$ функциянинг *Коши тасвири* деб айтилади.

4-§. Умумлашган функцияларни дифференциаллаш

Умумлашган функциялар бир қатор қулай хоссаларга эгадир. Масалан, ҳосила тушунчасини тегишли маънода умумлаштириш ихтиёрий умумлашган функцияларнинг чексиз дифференциалланувчи бўлишлигини таъминлайди ва умумлашган функциялардан ташкил топган яқинлашувчи қаторни чексиз марта ҳадма–ҳад дифференциаллаш мумкин бўлишлигини билдиради.

1. Умумлашган функциянинг ҳосиласи. $f(x) \in C^p(G)$ бўлган функция бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \le p$ мультииндекс ва ихтиёрий $\varphi \in D(G)$ учун

$$(D^\alpha f, \varphi) = \int_G D^\alpha f(x)\varphi(x)dx =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int_G f(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi)$$

бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли бўлади. Бу тенгликни биз $f(x) \in D'(G)$ умумлашган функциянинг $D^\alpha f(x)$ *(умумлашган)* ҳосиласининг таърифи сифатида қабул қиламиз. Шунга кўра, умумлашган ҳосила ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G)$ учун

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi) \qquad (3.4.1)$$

тенглик билан киритилади.

Энди $D^\alpha f \in D'(G)$ умумлашган функция бўлишлигини текширамиз. Ҳақиқатдан ҳам, агар $f(x) \in D'(G)$ бўлса, у ҳолда $D^\alpha f(x)$ функционал (3.4.1) формуланинг ўнг қисми билан аниқланган бўлса, у ҳолда

$$(D^\alpha f, \lambda\varphi + \mu\psi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha(\lambda\varphi + \mu\psi)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(f, \lambda D^\alpha\varphi + \mu D^\alpha\psi) = \lambda(-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi) +$$

$$+\mu(-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\psi) = \lambda(D^\alpha f, \varphi) + \mu(D^\alpha f, \psi)$$

чизиқли бўлади. Шунингдек, агар $k \to \infty$ да D фазода $\varphi_k \to 0$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$(D^\alpha f, \ \varphi_k) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi_k) \to 0$$

яқинлашувчи эканлигини ҳосил қиламиз, яъни $D^{\alpha} f(x)$ функционал узлуксиз ҳам бўлади.

Хусусан, $f=\delta$ умумлашган функция учун (3.4.1) тенглик ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G)$ учун

$$(D^{\alpha}\delta, \varphi)=(-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\varphi(0)$$

шаклида бўлади.

Бу таърифдан, агар $f(x) \in D'(G)$ умумлашган функция $G_1 \subset G$ бўлган очиқ тўпламда $C^p(G_1)$ синфга қарашли бўлса, у ҳолда $|\alpha| \leq p$ учун $D^{\alpha} f(x)$ умумлашган ҳосила ва $\{D^{\alpha} f(x)\}$ классик маънодаги ҳосилалар шу G_1 очиқ тўпламда устма–уст тушади, яъни $|\alpha| \leq p$ ва $x \in G_1$ учун $D^{\alpha} f(x)=\{D^{\alpha} f(x)\}$ тенглик ўринли бўлади.

2. Умумлашган ҳосиланинг хоссалари. Умумлашган функцияларни дифференциалаш амали қуйидаги хоссаларга эгадир:

а) $f \to D^{\alpha} f$ дифференциаллаш амали $D'(G)$ фазони $D'(G)$ фазога акслантирувчи чизиқли ва узлуксиз оператор бўлади. Шунга кўра, ихтиёрий $f,\, g \in D'(G)$ умумлашган функция учун

$$D^{\alpha}(\lambda f+\mu g)=\lambda D^{\alpha} f+\mu D^{\alpha} g$$

тенглик ўринли бўлади. Бу чизиқлилик хоссасини исбот қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G)$ учун

$$(D^{\alpha}(\lambda f+\mu g),\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(\lambda f+\mu g,\, D^{\alpha}\varphi)=$$
$$=\lambda(-1)^{|\alpha|}(f,\, D^{\alpha}\varphi)+\mu(-1)^{|\alpha|}(g,\, D^{\alpha}\varphi)=$$
$$=\lambda(D^{\alpha} f,\varphi)+\mu(D^{\alpha} g,\varphi)$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар $k \to \infty$ да $D'(G)$ фазода $f_k \to 0$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $k \to \infty$ да $D'(G)$ фазода $D^{\alpha} f_k \to 0$ яқинлашувчи бўлади. Бу узлуксизлик хоссасини ҳам исбот қиламиз. $k \to \infty$ да $D'(G)$ фазода $f_k \to 0$ яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G)$ учун $k \to \infty$ да

$$(D^{\alpha} f_k,\, \varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f_k,\, D^{\alpha}\varphi) \to 0$$

яқинлашувчи бўлади. Бу эса $k \to \infty$ да $D'(G)$ фазода $D^{\alpha} f_k \to 0$ яқинлашувчи бўлишлигини билдиради.

Масалан, $\varepsilon \to +0$ да $D'(R^n)$ фазода

$$D^{\alpha}\omega_{\varepsilon}(x) \to D^{\alpha}\delta(x) \tag{3.4.2}$$

яқинлашувчи бўлади.

б) Ихтиёрий $f(x) \in D'(G)$ *умумлашган функция (хусусан, G очиқ тўпламда локал жамланувчи ихтиёрий функция) (умумлашган маънода) чексиз дифференциалланувчи бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, агар $f(x) \in D'(G)$ бўлса, у ҳолда $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D'(G)$ бўлади. Худди шунингдек, ўз навбатида $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \in D'(G)$ бўлади ва ҳоказо.

в) Дифференциаллашнинг натижаси дифференциаллашнинг тартибига боғлиқ эмас.

Масалан: ихтиёрий $f(x) \in D'(G)$ учун

$$D_1(D_2 f) = D_2(D_1 f) = D^{(1,1)} f \tag{3.4.3}$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G)$ учун

$$(D^{(1,1)} f, \varphi) = (f, D_2 D_1 \varphi) = (D_1(D_2 f), \varphi) = (D_2(D_1 f), \varphi)$$

тенглик ўринли бўлади.

Умуман олганда

$$D^{\alpha+\beta} f = D^{\alpha}(D^{\beta} f) = D^{\beta}(D^{\alpha} f) \tag{3.4.4}$$

тенглик ўринлидир.

Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G)$ учун

$$(D^{\alpha+\beta} f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}(f, D^{\alpha+\beta}\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(D^{\beta} f, D^{\alpha}\varphi) =$$
$$= (D^{\alpha}(D^{\beta} f), \varphi) = (-1)^{|\beta|}(D^{\alpha} f, D^{\beta}\varphi) = (D^{\beta}(D^{\alpha} f), \varphi)$$

тенглик ўринли ва бундан эса (3.4.4) тенглик келиб чиқади.

г) Агар $f(x) \in D'(R^n)$ *ва* $a(x) \in C^{\infty}(R^n)$ *бўлса, у ҳолда* $a(x) f(x)$ *кўпайтма функцияни дифференциаллаш учун*

$$D^{\alpha}(af) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\beta}{\alpha} D^{\beta} a \, D^{\alpha-\beta} f \tag{3.4.5}$$

Лейбниц формуласи ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, агар ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G)$ функция бўлса, у ҳолда

$$\left(\frac{\partial(a(x)f(x))}{\partial x_1},\varphi\right)=-\left(a(x)f(x),\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)=-\left(f(x),a(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)=$$

$$=-\left(f(x),\frac{\partial(a(x)\varphi)}{\partial x_1}-\frac{\partial a(x)}{\partial x_1}\varphi\right)=-\left(f(x),\frac{\partial(a(x)\varphi)}{\partial x_1}\right)+$$

$$+\left(f(x),\frac{\partial a(x)}{\partial x_1}\varphi\right)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},a(x)\varphi\right)+\left(\frac{\partial a(x)}{\partial x_1}f(x),\varphi\right)=$$

$$=\left(a(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\varphi\right)+\left(\frac{\partial a(x)}{\partial x_1}f(x),\varphi\right)=\left(a(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial a(x)}{\partial x_1}f,\varphi\right)$$

тенглик ўринли ва бундан (3.4.5) тенглик $\alpha=(1,0,...,0)$ учун келиб чиқади. Шунга кўра, математик индукция усулини қўллаб, биз (3.4.5) формулани ихтиёрий $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ мультииндекс учун исбот қилишимиз мумкин бўлади.

д) Агар $x\in G$ *очиқ тўпламда умумлашган функция* $f=0$ *тенг бўлса, у ҳолда шу* $x\in G$ *очиқ тўпламда* $D^\alpha f=0$ *тенглик ўринли бўлади, шунга кўра* $\operatorname{supp} D^\alpha f\subset\operatorname{supp} f$ *муносабат ўринли бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, агар $\varphi(x)\in D(G)$ бўлса, у ҳолда $D^\alpha\varphi(x)\in D(G)$ бўлади. Шунга кўра ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G)$ функция учун

$$(D^\alpha f,\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,D^\alpha\varphi)=0$$

тенглик ўринли бўлади ва бу тенглик $x\in G$ учун $D^\alpha f=0$ эканлигини билдиради.

и) Агар локал интегралланувчи $u_k(x)$ *функциялардан тузилган*

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=S(x)$$

қатор ҳар бир компактда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қаторни исталган марта ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин ва дифференциаллашдан ҳосил қилинган қаторлар $D'(R^n)$ *фазода яқинлашувчи бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $R>0$ учун $p\to\infty$ да

$$S_p(x)=\sum_{k=1}^{p}u_k(x)\overset{|x|\le R}{\Rightarrow}S(x)$$

текис яқинлашувчи бўлади. Шунга кўра $p\to\infty$ да $D'(R^n)$ фазода $S_p\to S$ яқинлашувчи бўлади. Юқоридаги а) хоссага кўра $p\to\infty$ да $D'(R^n)$ фазода

$$D^{\alpha}S_p(x)=\sum_{k=1}^{p}D^{\alpha}u_k(x)\to D^{\alpha}S(x)$$

яқинлашувчи бўлади. Бу эса хоссанинг тасдиғини билдиради.

Ушбу хоссадан қуйидаги хулоса келиб чиқади: *агар*

$$|a_k|\le A|k|^m+B \qquad (3.4.6)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{ikx} \qquad (3.4.7)$$

тригонометрик қатор $D'(R^1)$ *фазода яқинлашувчи бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, (3.4.6) муносабатага кўра

$$\frac{a_0x^{m+2}}{(m+2)!}+\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{a_k}{(ik)^{m+2}}e^{ikx}$$

қатор R^1 фазода текис яқинлашувчидир. Шунинг учун унинг $m+2$ тартибли ҳосиласи $D'(R^1)$ фазода яқинлашувчи бўлиб, бу қатор эса (3.4.7) қатор билан устма-уст тушади.

3. Умумлашган функциянинг бошланғич функцияси. Бу пунктда $n=1$ деб оламиз. $G=(a,b)$ интервалда узлуксиз бўлган ихтиёрий $f(x)$ функция (ягона ўзгармас сон аниқлигида) $f^{(-1)}(x)$ бошланғич функциясига эга ва бу бошланғич функция

$$f^{(-1)}(x)=\int_a^x f(\xi)d\xi+C,\ \ f^{(-1)}{}'(x)=f(x)$$

тенглик орқали аниқланади. $f^{(-1)}{}'(x)=f(x)$ тенгликни биз ихтиёрий $f(x)$ умумлашган функциянинг бошланғич функциясини аниқлаш учун таъриф сифатида қабул қиламиз.

Таъриф. $D'(a,b)$ *фазодан олинган* $f^{(-1)}(x)$ *умумлашган функция ва* $D'(a,b)$ *фазодан олинган* $f(x)$ *умумлашган* *функциялар учун* $f^{(-1)}{}'(x) = f(x)$ *тенглик бажарилса, яъни ихтиёрий* $\varphi(x) \in D(a,b)$ *учун*

$$(f^{(-1)}(x),\ \varphi') = -(f, \varphi) \qquad \textit{(3.4.8)}$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $f^{(-1)}(x)$ *умумлашган функция* $f(x)$ *умумлашган функциянинг бошланғич функцияси дейилади.*

(3.4.8) тенглик шуни кўрсатадики, $f^{(-1)}$ функционал барча асосий функциялар учун эмас, балки шу асосий функцияларнинг биринчи тартибли ҳосиласи учунгина берилгандир. Бизнинг мақсадимиз мазкур функционални бутун $D(a,b)$ фазога давом эттиришдан иборат бўлиб, бунда давом эттирилган $f^{(-1)}(x)$ функционал шу $D(a,b)$ фазода чизиқли ва узлуксизлигини сақлагани ҳолда давом эттиришнинг ихтиёрийлик даражасини аниқлаш керак бўлади. Ихтиёрий $x_0 \in (a,b)$ танланган нуқта бўлсин. У ҳолда

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \omega_\varepsilon(x - x_0)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)d\xi\ , \qquad (3.4.9)$$

бунда $\varepsilon < \min(x_0 - a,\ b - x_0)$ учун $\omega_\varepsilon(x)$ – «шапкача» функция ва

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x}\left[\varphi(x') - \omega_\varepsilon(x' - x_0)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)d\xi\right]dx' \quad (3.4.10)$$

бўлади.

Биз $\psi \in D(a,b)$ бўлишлигини исбот қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам, $\psi(x) \in C^\infty(R^1)$ ва агар $\operatorname{supp}\varphi \subset [a',b'] \subset (a,b)$ бўлса, у ҳолда $x < a'' = \min(a',\ x_0 - \varepsilon)$, $a'' = \min(a',\ x_0 - \varepsilon) > a$ учун $\psi(x) = 0$ бўлади. Шу билан бирга $x > b'' = \max(b',\ x_0 + \varepsilon)$, $b'' = \max(b',\ x_0 + \varepsilon) < b$ учун

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')dx' - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x' - x_0)dx' \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)d\xi = 0$$

бўлади. Демак, $\operatorname{supp}\psi \subset [a'',b''] \subset (a,b)$ муносабат ўринли бўлади. Шунга кўра $\psi(x) \in D(a,b)$ эканлигини ҳосил қиламиз.

Энди $f^{(-1)}(x)$ функционални (3.4.9) тенгликка қўлласак, у ҳолда

$$(f^{(-1)},\varphi)=(f^{(-1)},\psi')+(f^{(-1)},\omega_\varepsilon(x-x_0))\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi$$

эканлигини ҳосил қиламиз, яъни (3.4.8) тенгликни эътиборга олсак, у ҳолда ихтиёрий $\varphi(x)\in D(a,b)$ учун

$$(f^{(-1)},\varphi)=-(f^{(-1)},\psi)+C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi \qquad (3.4.11)$$

бўлади, бунда $C=(f^{(-1)}(x),\ \omega_\varepsilon(x-x_0))$ деб белгиланган. Демак, агар $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $f^{(-1)}(x)$ мавжуд бўлса, у ҳолда бу бошланғич функция (3.4.11) тенглик орқали аниқланади, бунда $\psi(x)$ функция (3.4.10) формула орқали аниқланган.

Энди тескари тасдиқни исбот қиламиз, яъни ихтиёрий C ўзгармас сон учун $f^{(-1)}(x)$ функционал (3.4.11) ва (3.4.10) формулалар орқали аниқланган бўлса, у ҳолда бу функционал $f(x)$ умумлашган функциянинг бошланғич функцияси эканлигини исботлаймиз.

Ҳақиқатдан ҳам, $f^{(-1)}(x)$ функционалнинг чизиқлилиги беъвосита келиб чиқади. Унинг $D(a,b)$ фазода узлуксизлигини исбот қиламиз. Айтайлик, $k\to\infty$ да $D(a,b)$ фазода $\varphi_k(x)\to 0$ яқинлашувчи бўлсин, яъни $\mathrm{supp}\varphi_k\subset[a',b']\subset(a,b)$ ва $k\to\infty$ да $\varphi_k^{(\alpha)}(x)\Rightarrow 0$ текис яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда юқорида исбот қилинишига кўра, $[a'',b'']\subset[a,b]$ ораличнинг ташқарисида

$$\psi_k(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\left[\varphi_k(x')-\omega_\varepsilon(x'-x_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(\xi)d\xi\right]dx'=0$$

тенг бўлади ва $k\to\infty$ да $\psi_k^{(\alpha)}(x)\Rightarrow 0$ текис яқинлашувчи бўлади. Бошқача сўз билан айтганда $k\to\infty$ да $D(a,b)$ фазода $\psi_k(x)\to 0$ яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун $D(a,b)$ фазода $f(x)$ умумлашган функциянинг узлуксизлигига кўра $k\to\infty$ да

$$(f^{(-1)}(x),\ \varphi_k(x))=-(f^{(-1)}(x),\ \psi_k(x))+C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(\xi)d\xi\to 0$$

яқинлашувчи бўлишлигини ҳосил қиламиз. Бу эса унинг узлуксизлигини тасдиқлайди. Шунга кўра $f^{(-1)}(x)\in D'(a,b)$

бўлади. $f^{(-1)}(x)\in D'(a,b)$ функционал $f(x)$ умумлашган функциянинг (a,b) интервалдаги бошланғич функцияси эканлигини исботлаш қолди. Ҳақиқатдан ҳам, агар (3.4.10) формулада $\varphi(x)$ функцияни $\varphi'(x)$ функция билан алмаштирсак, у ҳолда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi'(\xi)d\xi=0$ бўлади. Шунга кўра $\psi(x)=\varphi(x)$ ҳосил бўлади ва бунга кўра (3.4.11) формуладан (3.4.8) формула келиб чиқади. Шундай қилиб қуйидаги теорема исбот бўлди.

1-теорема. *Ихтиёрий $f(x)\in D'(a,b)$ умумлашган функция (a,b) интервалда $f^{(-1)}(x)\in D'(a,b)$ бошланғич функцияга эга ва $f(x)\in D'(a,b)$ умумлашган функциянинг ҳар қандай бошланғич функцияси (3.4.11) формула билан ифодаланади, бунда $\psi(x)$ функция (3.4.10) тенглик орқали аниқланади ва C – ихтиёрий ўзгармас сон бўлади.*

Исботланган бу теорема

$$u'=f,\ f\in D'(a,b) \tag{3.4.12}$$

дифференциал тенгламанинг $D'(a,b)$ фазога тегишли ечими мавжудлигини тасдиқлайди ва унинг умумий ечими

$$u=f^{(-1)}+C$$

кўринишида бўлади, бундаги $f^{(-1)}(x)\in D'(a,b)$ умумлашган функция $f(x)\in D'(a,b)$ умумлашган функциянинг (a,b) интервалдаги қандайдир бошланғич функцияси ва C – ихтиёрий ўзгармас сон бўлади. Хусусан, агар $f(x)\in C(a,b)$ функция бўлса, у ҳолда (3.4.12) тенгламанинг $D'(a,b)$ фазога тегишли ҳар қандай ечими классик бўлади. Масалан, $u'=0$ дифференциал тенгламанинг $D'(a,b)$ фазога тегишли ечими ихтиёрий ўзгармас сон бўлади.

Худди шунга ўхшаш $f(x)\in D'(a,b)$ умумлашган функциянинг (a,b) интервалдаги $f^{(-n)(n)}(x)=f(x)$ тенглик билан киритилган n – чи тартибли $f^{(-n)}(x)$ бошланғич функцияси аниқланади. Исбот қилинган теоремани $f(x)\in D'(a,b)$ умумлашган функциянинг (a,b) интервалдаги $k-$ чи тартибли

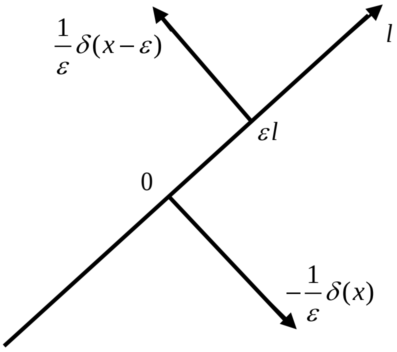
$f^{(-k)}(x)$ бошланғич функцияси учун рекуррент занжирга қўлласак, у ҳолда

$$f^{(-1)}{}' = f,\ f^{(-2)}{}' = f^{(-1)},\ \dots,\ f^{(-n)}{}' = f^{(-n+1)}$$

тенгликлар ҳосил бўлиб $D'(a,b)$ фазода $n-$ чи тартибли $f^{(-n)}(x)$ бошланғич функция мавжуд ва бу бошланғич функция $n-1$ – тартибли ихтиёрий полином аниқлигида ягона бўлади.

4. Мисоллар. а) Берилган $l=(l_1,l_2,...,l_n)$, $|l=1|$ йўналиш бўйлаб йўналтирилган ва мос диполнинг электрик моменти $+1$ га тенг бўлган $x=0$ нуқтада жойлашган заряднинг зичлигини ҳисоблаймиз.

Ушбу диполга мос заряднинг зичлиги тахминан $\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-\varepsilon l)-\frac{1}{\varepsilon}\delta(x),\quad \varepsilon>0$ га тенг бўлади.



Бу ерда $D'(R^n)$ фазода $\varepsilon\to+0$ интилганда лимитга ўтиб

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-\varepsilon l)-\frac{1}{\varepsilon}\delta(x),\,\varphi\right)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\left[\varphi(\varepsilon l)-\varphi(0)\right]\to\frac{\partial\varphi}{\partial l}(0)=\left(\delta,\,\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)=-\left(\frac{\partial\delta}{\partial l},\,\varphi\right)$$

бўлишини топамиз. Шунга кўра изланаётган зичлик

$$-\frac{\partial\delta(x)}{\partial l}=-\left(l,D\delta(x)\right)$$

тенг бўлади.

Диполнинг тўлиқ заряди нолга тенг бўлишини текширамиз. Ҳақиқатдан ҳам

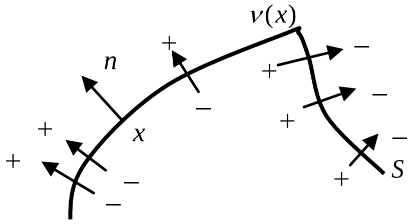
$$\left(-\frac{\partial\delta}{\partial l},1\right)=\left(\delta,\frac{\partial 1}{\partial l}\right)=\left(\delta,0\right)=0$$

ва унинг моменти эса

$$\left(-\frac{\partial\delta}{\partial l},(x,l)\right)=\left(\delta,\frac{\partial(x,l)}{\partial l}\right)=\left(\delta,|l|\right)=\left(\delta,1\right)=1$$

бўлади.

б) $-\frac{\partial\delta(x)}{\partial l}$ зичликнинг умумлашмаси сиртнинг иккиламчи қатлами бўлади. $S-$ бўлакли силлиқ икки томонли сирт бўлсин. $n-$ эса шу S сиртнингнормали ва ν – ундаги узлуксиз функция бўлсин.



Ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ функция учун $-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\delta_S\right)$ умумлашган функцияни

$$\left(-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\delta_S\right),\varphi\right)=\int\limits_S \nu(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}dS$$

қоида бўйича таъсир қилувчи умумлашган функция деб аниқлаймиз. Кўриниб турибдики

$$-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\delta_S\right)\in D'(R^n),\qquad \mathrm{supp}\left[-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\delta_S\right)\right]\subset S$$

бўлади. Бу $-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\delta_S\right)$ умумлашган функцияни $S-$ сирт устидаги *иккиламчи қатлам* деб айтилади. У $S-$ сирт устидаги диполнинг $\nu(x)$ момент сирт зичлигининг мос тақсимоти билан ва ориентацияланган $S-$ сиртга берилган n нормал бўйлаб заряднинг фазовий зичлигини ифода қилади. Бу ерда иккиламчи қатлам $S-$ сирт устидаги диполнинг дискрет жойлашган

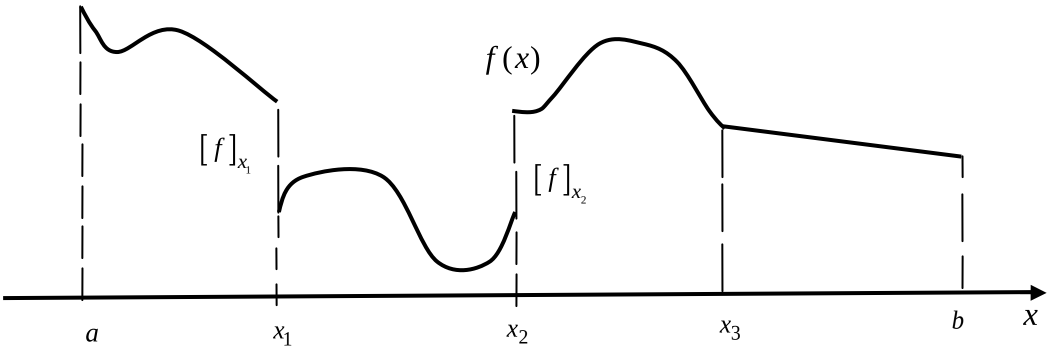
$$-\sum_k \frac{\partial}{\partial n_k}\left[\nu(x_k)\Delta S_k\delta(x-x_k)\right],\ x_k\in S$$

мос зичликларининг $S-$ сирт чексиз кўп майдалангандаги суст лимити сифатида аниқланади.

в) $f(x)$ функция (a,b) интервалда бўлакли–узлуксиз дифференциалланувчи ва $\{x_k\}$ нуқталар шу функция ёки унинг ҳосиласининг 1–турдаги узилишга эга бўлган нуқталари бўлсин. Бу функция учун

$$f' = f_{\text{кл}}'(x) + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k) \qquad (3.4.13)$$

тенглик ўринли бўлишлигини кўрсатамиз, бунда $f_{\text{кл}}'(x)$ – орқали $f(x)$ функциянинг классик ҳосиласи белгилнаган бўлиб $x \neq x_k$ учун $f'(x)$ тенг бўлади ва $\{x_k\}$ нуқталарда аниқланмаган, $[f]_{x_k}$ – орқали эса $f(x)$ функциянинг x_k нуқтадаги сакрашини билдиради, яъни $[f]_{x_k} = f(x_k + 0) - f(x_k - 0)$ бўлади.



Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varphi(x) \in D(a,b)$ учун

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi'(x)dx =$$

$$= \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_{\text{кл}}'(x)\varphi(x)dx - \sum_k \left[f(x_{k+1} - 0)\varphi(x_{k+1}) - f(x_k + 0)\varphi(x_k) \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{кл}}'(x)\varphi(x)dx + \sum_k \left[f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \right] \varphi(x_k) =$$

$$= \left(f_{\text{кл}}'(x),\ \varphi(x) \right) + \sum_k [f]_{x_k} \left(\delta(x - x_k),\ \varphi \right)$$

тенглик ўринли бўлади ва (3.4.13) формула исбот бўлади.

Хусусан, агар $\theta(x)$– Хевисайд функцияси, яъни

$$\theta(x) = 1,\ x > 0; \quad \theta(x) = 0,\ x \leq 0$$

бўлса, у ҳолда

$$\theta'(x) = \delta(x) \qquad (3.4.14)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Умуман олганда электр занжири назариясида Хевисайд функцияси “бирлик зинапоя” ёки улаш функцияси ёки “бирлик импульсли” δ – функция деб айтилади. (3.4.14) формуладан кўринадики “бирлик импульс” бу “бирлик зинапоя”нинг ҳосиласи бўлишлигини тасдиқлайди.

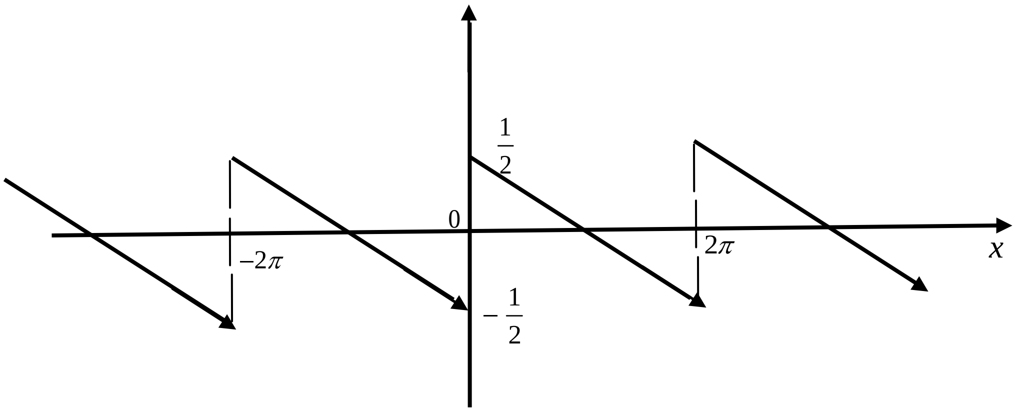
Агар

$$f_0(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi},\ x\in[0,\ 2\pi) \qquad (3.4.15)$$

бўлиб бутун сон ўқига 2π – давр билан давом эттирилган функция бўлса, у ҳолда

$$f_0{}'=-\frac{1}{2\pi}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi) \qquad (3.4.16)$$

тенглик ўринли бўлади.



Шундай қилиб, бу ердан кўрдинадики, умуман олганда умумлашган маънодаги ҳосила ва классик маънодаги ҳосила ҳамма вақт ҳам устма-уст тушмас экан.

г) Энди

$$x^m\delta^{(k)}(x)=\begin{cases} 0,\ k=0,1,\dots,\ m-1,\\ (-1)^m\, m!\cdot C_k^m\,\delta^{(k-m)}(x),\ k\ge m\end{cases} \qquad (3.4.17)$$

формулаларнинг ўринли эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатдан ҳам,

$$\left(x^m\delta^{(k)}(x),\,\varphi(x)\right)=(-1)^k(x^m\varphi)^{(k)}\Big|_{x=0}=$$

$$=(-1)^k\sum_{0\le j\le k}C_k^j(x^m)^{(j)}\varphi^{(k-j)}(x)\Bigg|_{x=0}=$$

$$=\begin{cases} 0,\ k=0,1,\ \dots,\ m-1,\\ (-1)^m\, m!\cdot C_k^m\,\delta^{(k-m)}(x),\ k\ge m\end{cases}$$

тенгликлар ўринли бўлади.

$$x^m u = 0 \tag{3.4.18}$$

тенгламанинг $D'(R^1)$ фазодаги умумий ечими

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x) \tag{3.4.19}$$

формула орқали аниқланиши кўрсатамиз, бунда c_k–ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Маълумки, ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^1)$ учун $k = 0, 1, ..., m-1$ бўлганда

$$(x^m \delta^{(k)}, \varphi) = (\delta^{(k)}, x^m \varphi) = (-1)^k (\delta, (x^m \varphi)^{(k)}) = (-1)^k (x^m \varphi)^{(k)}\Big|_{x=0} = 0$$

тенгликлар ўринли бўлиб, бундан $k = 0, 1, ..., m-1$ учун

$$x^m \delta^{(k)}(x) = 0$$

бўлади. Демак (3.4.19) тенглик орқали аниқланган умумлашган функция (3.4.18) тенгламани қаноатлантиради.

Энди (3.4.19) тенглик орқали аниқланадиган умумлашган функция $D'(R^1)$ фазода (3.4.18) тенгламанинг умумий ечими бўлишлигини исбот қиламиз. Айтайлик, $\eta(x)-$ асосий функция $x = 0$ нуқтанинг атрофида 1 га тенг бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^1)$ функцияни

$$\varphi(x) = \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^m \psi(x) \tag{3.4.20}$$

шаклида тасвирлаш мумкин бўлади, бунда

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m} \left[\varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right]$$

бўлган функциядир. Бу функция учун $\psi(x) \in D(R^1)$ бўлади, чунки бу функция финит ва чексиз дифференциалланувчи бўлади. Унинг $x = 0$ нуқтада чексиз дифференциалланувчи бўлишлиги бу функцияни шу $x = 0$ нуқтанинг қандайдир атрофида (бу атрофда $\eta(x) = 1$ бўлади) барча $N \geq m$ натурал сонлар учун

$$\psi(x) = \sum_{k=m}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^{k-m} + O\left(|x|^{N+1}\right)$$

Тейлор формуласига ёйиш мумкинлигидан келиб чиқади.

Шунга кўра, агар $u(x) \in D'(R^1)$ умумлашган функция (3.4.18) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда (3.4.20) тенгликка кўра

$$(u,\varphi)=\left(u,\,\eta(x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)+(u,\,x^m\psi(x))=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}(u,\,\eta(x)x^k)+(x^m u,\,\psi)=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k c_k\varphi^{(k)}(0)=\sum_{k=0}^{m-1}c_k(\delta^{(k)},\varphi)$$

тенглик ҳосил бўлади, бунда $c_k=\dfrac{(-1)^k}{k!}(u,\,\eta(x)\,x^k)$. Бу ҳосил қилинган тенгликдан биз $u(x)\in D'(R^1)$ умумлашган функция (3.4.18) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^1)$ функция учун

$$(u,\varphi)=\left(\sum_{k=0}^{m-1}c_k\,\delta^{(k)},\,\varphi\right)$$

тенглик ўринли эканлиги келиб чиқади. Бундан эса $u=\sum\limits_{k=0}^{m-1}c_k\,\delta^{(k)}$ умумлашган функция $D'(R^1)$ фазодаги умумий ечими эканлиги келиб чиқади.

Эслатма. *Ҳосил қилинган натижа ихтиёрий умумлашган функциянинг ташувчиси нуқтадан иборат бўлганда уни* $\delta-$ *функция ва унинг шу нуқтадаги ҳосилаларининг чизиқли комбинация орқали ифодалаш мумкинлигидан бевосита келиб чиқади.*

Шуни алоҳида таъкидлаш керакки, локал интегралланувчи функциялар синфида (3.4.18) тенглама ягона $u=0$ *ечимга эга бўлади.*

д) Агар $Z(t)$ функция

$$LZ\equiv Z^{(m)}+a_1(t)Z^{(m-1)}+\ldots+a_m(t)Z=0$$

бир жинсли тенгламанинг

$$Z(0)=Z'(0)=\ldots=Z^{(m-2)}(0)=0,\quad Z^{(m-1)}(0)=1$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлса, у ҳолда

$$E(t)=\theta(t)Z(t)$$

функция

$$LE(t)=\delta(t)$$

тенгламани қаноатлантиришини текширамиз.

Ҳақиқатдан ҳам, (3.4.13) формуладан фойдаланиб

$$E'(t)=\theta(t)Z'(t),\ \ \dots,\ E^{(m-1)}(t)=\theta(t)\,Z^{(m-1)}(t),$$

$$E^{(m)}(t)=\delta(t)+\theta(t)Z^{(m)}(t)$$

ҳосилаларни топамиз. Бундан эса

$$LE=\theta(t)\,LZ+\delta(t)=\delta(t)$$

эканлиги келиб чиқади. Бундан $E(t)=\theta(t)Z(t)$ функция $LE(t)=\delta(t)$ тенгламанинг ечими эканлиги келиб чиқади.

е) Энди биз

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikx}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi) \qquad (3.4.21)$$

формулани исбот қиламиз.

Бунинг учун 2π – даврли ва

$$f_0(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\pi},\ x\in[0,\ 2\pi) \qquad (3.4.22)$$

функцияни R^1 бутун сон ўқида текис яқинлашувчи бўлган Фурье қаторига ёйсак, у ҳолда

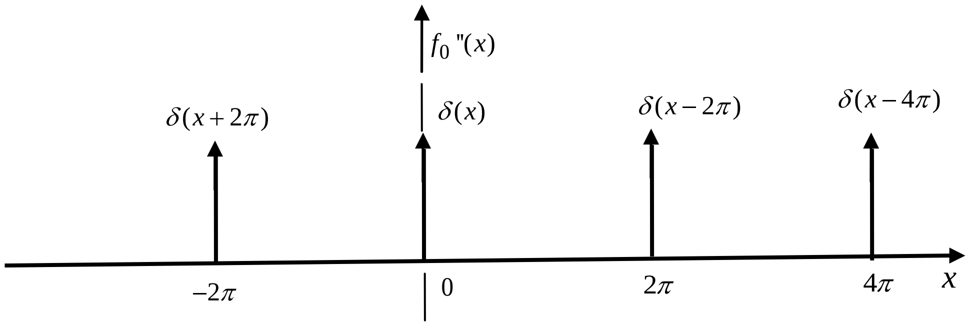
$$f_0(x)=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2\pi}\ \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{k^2}e^{ikx}\ ,\ \ x\in[0,\ 2\pi) \qquad (3.4.23)$$

тенглик ўринли бўлади. $D'(R^1)$ фазода бу (3.4.23) қаторни исталган марта дифференциаллаш мумкин бўлади. Натижада биз

$$f_0'(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}=-\frac{i}{2\pi}\ \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{k}e^{ikx}\ ,\ \ x\in[0,\ 2\pi),$$

$$f_0''(x)=-\frac{1}{2\pi}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\ \delta(x-2k\pi)=\frac{1}{2\pi}\ \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}e^{ikx}\ ,\ \ x\in[0,\ 2\pi)$$

тенгликларга эга бўламиз.



Шуни таъкидлаш керакки, (3.4.21) тенгликнинг чап томони 2π – даврли $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi)$ умумлашган функциянинг Фурье қаторидан иборат бўлади.

ж) $G\subset R^n$ соҳа бўлиб унинг чегараси S бўлакли–силлиқ сирт ва $f\in C^1(\overline{G})\bigcap C^1(\overline{G}_1)$, бунда $G_1=R^n\setminus\overline{G}$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}+\left[\,f\,\right]_S\cos(nx_i)\delta_S,\quad i=1,2,...,n \qquad (3.4.24)$$

бўлиб, бунда ва $n=n_x$ шу S сиртга $x\in S$ нуқтада ўтказилган ташқи нормал, $[f]_S$ эса S сирт орқали ташқаридан ўтишдаги f функциянинг сакраши, яъни ҳар бир $x\in S$ нуқта учун

$$\lim_{x'\to x,\ x'\in G_1}f(x')-\lim_{x'\to x,\ x'\in G}f(x')=\left[\,f\,\right]_S(x)$$

бўлади.

(3.4.24) формулани ҳосил қилиш учун Грин формуласи ва оддий қатлам таърифидан фойдаланамиз. Шунга кўра ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ функция учун

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i},\varphi\right)=-\left(f,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=-\int\limits_{R^n}f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx=$$

$$=\int\limits_{R^n}\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right\}\varphi(x)dx+\int\limits_S\left[\,f\,\right]_S(x)\cos(nx_i)\varphi(x)dS=$$

$$=\left(\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}+\left[\,f\,\right]_S\cos(nx_i)\delta_S,\ \varphi\right),$$

тенглик ҳосил бўлади.

з) Айтайлик е) мисолдаги f функция $f\in C^2(\overline{G})\bigcap C^2(\overline{G}_1)$ синфга қарашли бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big([\,f\,]_S \cos(nx_i)\delta_S \Big) +$$

$$+ \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_S \cos(nx_j)\delta_S \qquad (3.4.25)$$

формула ўринли бўлади.

(3.4.13) формулани ҳосил қилиш учун (3.4.24) формулани x_j ўзгарувчиси бўйича дифференциаллаймиз ва $\left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right\}$ функцияни дифференциаллашда яна (3.4.24) формулани қўллаймиз. Натижада

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right\} + \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_S \cos(nx_j)\delta_S$$

тенгликка эга бўламиз.

(3.4.25) тенгликда $i = j$ деб ва $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ бўйича йиғиб чиқсак, у ҳолда

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big([\,f\,]_S \cos(nx_i)\delta_S \Big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_S \cos(nx_i)\delta_S \qquad (3.4.26)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Диққатимизни

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big([\,f\,]_S \cos(nx_i)\delta_S \Big) = \frac{\partial}{\partial n}\Big([\,f\,]_S\, \delta_S \Big), \qquad (3.4.27)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_S \cos(nx_i)\delta_S = \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S \qquad (3.4.28)$$

тенгликларга қаратсак, у ҳолда (3.4.26) формулани

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial n}\big([\,f\,]_S \delta_S \big) \qquad (3.4.29)$$

шаклида ёзамиз.

Энди (3.4.27) формулани исбот қиламиз. Ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^n)$ учун

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left([\,f\,]_S\cos(nx_i)\delta_S\right),\,\varphi\right)=-\sum_{i=1}^{n}\left([\,f\,]_S\cos(nx_i)\delta_S,\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\int_S\,[\,f\,]_S\cos(nx_i)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dS=-\int_S[\,f\,]_S\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cos(nx_i)dS=$$

$$=-\int_S[\,f\,]_S\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=\left(\frac{\partial}{\partial n}\left([\,f\,]_S\,\delta_S\right),\,\varphi\right)$$

тенгликка эга бўламиз. (3.4.28) формула ҳам (3.4.27) формулага ўхшаш исбот қилинади.

(3.4.29) формулада $x\in G_1$ учун $f=0$ деб олсак, у ҳолда

$$\Delta f=\{\Delta f\}-\frac{\partial f}{\partial n}\delta_s-\frac{\partial}{\partial n}(f\delta_s) \qquad (3.4.30)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула Гриннинг иккинчи формуласининг умумлашган функция маъносида ёзилганидир. (3.4.30) формуланинг ҳар иккала томонига φ асосий функцияни қўлласак, у ҳолда Грин формуласининг оддий ҳолдаги қуйидаги кўриниши ҳосил бўлади:

$$\int_G(f\,\Delta\varphi-\varphi\Delta f)dx=\int_S\left(f\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\,\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS. \qquad (3.4.31)$$

Агар G чегараланган соҳа бўлса, у ҳолда (3.4.31) формула ихтиёрий $\varphi(x)\in C^2(\overline{G})$ функция учун ўринли бўлади.

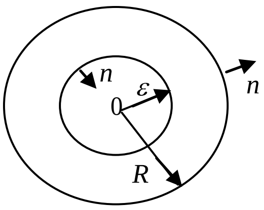
и) $n=2$ бўлсин. У ҳолда $\Delta\ln|x|$ ни ҳисоблаймиз. $\ln|x|$ функция R^2 фазода локал интегралланувчи функция бўлади. Агар $x\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\ln|x|\in C^\infty(R^2)$ бўлади. Шунинг учун $D^\alpha\ln|x|=\{D^\alpha\ln|x|\}$ тенглик ўринли бўлади. Шунга кўра қутб координаталар системасига ўтиб $x\neq 0$ учун

$$\Delta\ln|x|=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\ln r}{\partial r}\right)=0 \qquad (3.4.32)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $\varphi(x)\in D(R^2)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset U_R$ бўлсин. У ҳолда

$$\left(\Delta\ln|x|,\,\varphi\right)=\left(\ln|x|,\,\Delta\varphi\right)=\int_{U_R}\ln|x|\,\Delta\varphi(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon<|x|<R}\ln|x|\,\Delta\varphi(x)dx$$

бўлади.



$G = [\varepsilon < |x| < R]$ ва $f = \ln|x|$ учун (3.4.31) формулани қўллаб, (3.4.32) тенгликни ҳисобга олган ҳолда қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз.

$$\left(\Delta \ln|x|,\, \varphi\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int\limits_{\varepsilon < |x| < R} \Delta \ln|x| \varphi dx + \left(\int\limits_{S_\varepsilon} + \int\limits_{S_R} \right) \left(\ln|x| \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \ln|x|}{\partial n} \right) dS \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{S_\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] dS + 2\pi\varphi(0) \right\} = 2\pi\varphi(0) = (2\pi\delta,\ \varphi).$$

Шундай қилиб $n = 2$ учун

$$\Delta \ln|x| = 2\pi\delta(x) \qquad (3.4.33)$$

тенглик ўринли бўлади.

$n = 3$ бўлсин. У ҳолда $\frac{1}{|x|}$ функция R^3 фазода

$$\Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi\delta(x) \qquad (3.4.34)$$

Пуассон тенгламасини қаноатлантиришини текширамиз.

Ҳақиқатдан ҳам $\frac{1}{|x|}$ функция R^3 фазода локал интегралланувчи функция бўлади ва агар $x \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{|x|} \in C^\infty(R^3)$ бўлади. Шунинг учун $D^\alpha \frac{1}{|x|} = \left\{ D^\alpha \frac{1}{|x|} \right\}$ тенглик ўринли бўлади. Шунга кўра қутб координаталар системасига ўтиб $x \neq 0$ учун

$$\Delta \frac{1}{|x|} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) = 0 \qquad (3.4.35)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $\varphi(x) \in D(R^3)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset U_R$ бўлсин. У ҳолда

$$\left(\Delta\frac{1}{|x|},\,\varphi\right)=\left(\frac{1}{|x|},\,\Delta\varphi\right)=\int\limits_{U_R}\frac{1}{|x|}\,\Delta\varphi(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon<|x|<R}\frac{1}{|x|}\,\Delta\varphi(x)dx$$

бўлади.

$G=[\varepsilon<|x|<R]$ ва $f=\dfrac{1}{|x|}$ учун (3.4.31) формулани қўллаб, (3.4.35) тенгликни ҳисобга олган ҳолда қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз.

$$\left(\Delta\frac{1}{|x|},\,\varphi\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{\varepsilon<|x|<R}\Delta\frac{1}{|x|}\varphi dx+\left(\int\limits_{S_\varepsilon}+\int\limits_{S_R}\right)\left(\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|x|}\right)dS\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{S_\varepsilon}\left(-\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi}{\partial|x|}-\varphi\frac{1}{|x|^2}\right)dS=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{-1}{\varepsilon^2}\right)\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi dS=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{S_\varepsilon}[\varphi(0)-\varphi(x)]dS-4\pi\varphi(0)\right\}=-4\pi\varphi(0)=-4\pi(\delta,\,\varphi)\,.$$

(3.4.34) тенгликни қуйидагича интерпретация қилиш мумкин: $\dfrac{1}{|x|}$ функция Ньютон (Кулон) потенциали бўлиб, бу потенциал $x=0$ нуқтада +1 заряд билан яратилган бўлади.

Худди шунингдек, $n\geq 3$ бўлганда

$$\Delta\,\frac{1}{|x|^{n-2}}=-(n-2)\,\sigma_n\,\delta(x)\qquad(3.4.36)$$

эканлигини ҳосил қиламиз, бунда σ_n- орқали R^n фазодаги бирлик сфера сиртининг юзи, яъни $\sigma_n=\int\limits_{S_1}d\,s=\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $\Gamma-$ Эйлернинг иккинчи турдаги интеграли (гамма–функция) бўлиб, $\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ кўринишда бўлади. Биз

$$E_1(x)=\frac{1}{2}\,|x|\,,\;E_2(x)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x|,\;E_n(x)=-\frac{1}{(n-2)\sigma_n\,|x|^{n-2}}\quad(n\geq 3)$$

тенгликлар билан аниқланган $E_n(x)$ функцияни Лаплас операторининг *фундаментал ечими* деб атаймиз.

к) $n=3$ бўлганда

$$E(x)=-\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|},\quad \bar{E}(x)=-\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|} \tag{3.4.37}$$

кўринишдаги функциялар

$$\Delta E+k^2E=\delta(x) \tag{3.4.38}$$

тенгламани қаноатлантиришини текширамиз.

Ҳақиқатдан ҳам, $\cos k|x|$, $\sin k|x|$ функциялар чексиз дифференциалланувчи функциялар бўлиб, $|x|^{-1}e^{ik|x|}$ функцияни дифференциаллашда Лейбниц формуласидан фойдаланиш мумкин.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x|}=-\frac{x_j}{|x|^3}\ ,\qquad \frac{\partial}{\partial x_j}e^{ik|x|}=\frac{ikx_j}{|x|}e^{ik|x|}\ ,\qquad \Delta e^{ik|x|}=\left(\frac{2ik}{|x|}-k^2\right)e^{ik|x|}$$

тенгликларни инобатга олсак, у ҳолда $n=3$ бўлганда (3.4.36) формуладан фойдаланиб

$$(\Delta+k^2)\frac{1}{|x|}e^{ik|x|}=$$

$$=e^{ik|x|}\Delta\frac{1}{|x|}+2\left(grad\,e^{ik|x|},grad\frac{1}{|x|}\right)+$$

$$+\frac{1}{|x|}\Delta e^{ik|x|}++\frac{k^2}{|x|}e^{ik|x|}=-4\pi e^{ik|x|}\delta(x)+$$

$$+\left(-\frac{2ik}{|x|^2}+\frac{2ik}{|x|^2}-\frac{k^2}{|x|}+\frac{k^2}{|x|}\right)e^{ik|x|}=-4\pi\,\delta(x)$$

бўлишлигини ҳосил қиламиз. Демак, берилган (3.4.37) кўринишдаги функциялар $n=3$ бўлганда (3.4.38) тенгламани қаноатлантиради.

л) Энди

$$E(x,t)=\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\ e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$$

функция бўлсин.

$$\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\Delta E=\delta(x,\,t) \qquad (3.4.39)$$

тенгликни исбот қиламиз.

$E(x,\,t)$ функция R^{n+1} фазода локал интегралланувчи функция бўлиб, $t<0$ учун $E(x,\,t)=0$; $t\geq 0$ учун $E(x,\,t)\geq 0$ ва $t>0$ учун

$$\int\limits_{R^n}E(x,\,t)dx=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{R^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}dx=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi_i^2}d\xi_i=1 \qquad (3.4.40)$$

тенглик келиб чиқади. Агар $t>0$ бўлса, у ҳолда $E(x,\,t)\in C^\infty$ бўлади. Шунинг учун

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2}-\frac{n}{2t}\right)E,\ \frac{\partial E}{\partial x_i}=-\frac{x_i}{2a^2t}E,\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}=\left(\frac{x_i^2}{4a^4t^2}-\frac{1}{2a^2t}\right)E\ ,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\Delta E=\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2}-\frac{n}{2t}\right)E-\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2}-\frac{n}{2t}\right)E=0 \qquad (3.4.41)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

$\varphi(x,t)\in D(R^{n+1})$ бўлсин. У ҳолда (3.4.41) тенгликдан фойдаланиб

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\Delta E,\,\varphi\right)=-\left(E,\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi\right)=$$

$$=-\int\limits_0^\infty\int\limits_{R^n}E(x,\,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi\right)dxdt=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^\infty\int\limits_{R^n}E(x,\,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi\right)dxdt=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{R^n}E(x,\,\varepsilon)\varphi(x,\,\varepsilon)dx+\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\int\limits_{R^n}\left(\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\Delta E\right)\varphi\,dxdt\right]+$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{R^n}E(x,\,\varepsilon)\varphi(x,\,0)dx+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{R^n}E(x,\,\varepsilon)\left[\varphi(x,\,\varepsilon)-\varphi(x,\,0)\right]dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{R^n}E(x,\,\varepsilon)\varphi(x,\,0)dx \qquad (3.4.42)$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Шунингдек (3.4.40) муносабатдан фойдалансак, у ҳолда

$$\left|\int\limits_{R^n} E(x,\,\varepsilon)\left[\varphi(x,\,\varepsilon)-\varphi(x,\,0)\right]dx\right| \le K\varepsilon\int\limits_{R^n} E(x,\,\varepsilon)dx = K\varepsilon\,.$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Энди $t\to +0$ да $D'(R^n)$ фазода

$$E(x,\,t)=\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\to\delta(x) \qquad (3.4.43)$$

яқинлашувчи эканлигини исбот қиламиз.

Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ бўлсин. У ҳолда

$$\left|\int\limits_{R^n} E(x,\,t)\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]dx\right| \le \frac{K}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{R^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}|x|dx =$$

$$=\frac{K\sigma_n}{(4\pi a^2t)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}r^n dr = \frac{2K\sigma_n\sqrt{t}\,a}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^\infty e^{-u^2}u^n du = C\sqrt{t}$$

ҳосил бўлади. Бу ерда (3.4.40) муносабатни эътиборга олсак, у ҳолда $t\to +0$ да

$$\left(E(x,\,t),\varphi\right)=\int\limits_{R^n} E(x,\,t)\varphi(x)dx=\varphi(0)\int\limits_{R^n} E(x,\,t)dx+$$

$$+\int\limits_{R^n} E(x,\,t)\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]dx\to\varphi(0)=(\delta,\varphi)$$

(3.4.43) лимитик муносабатга эга бўламиз.

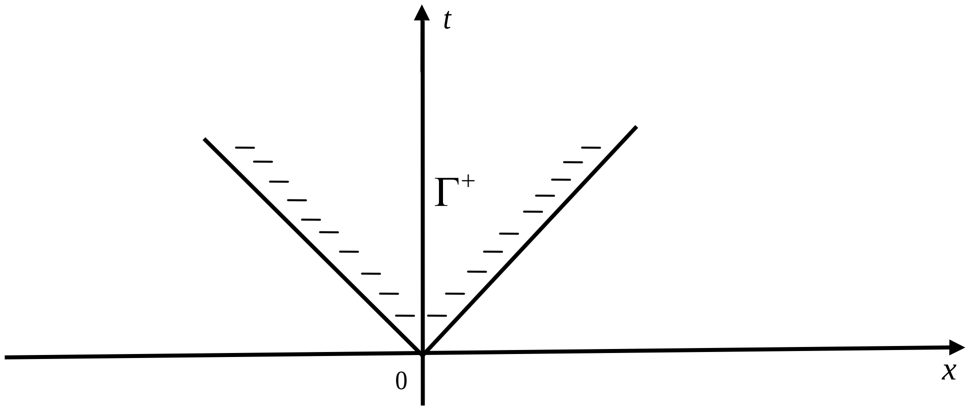
Бу (3.4.42) ва (3.4.43) муносабатлардан (3.4.39) формула келиб чиқади.

Шуни таъкидлаш керакки, (3.4.43) лимитик муносабат функция чегараланган ва $t=0$ нуқтада узлуксиз бўлганда ҳам ўринли бўлади.

м) Энди $x=x_1$ ва $E_1(x,\,t)=\frac{1}{2a}\theta(at-|x|)$ бўлсин. У ҳолда

$$\Box_a E_1=\delta(x,\,t) \qquad (3.4.44)$$

тенгликни исбот қиламиз. Бу ерда E_1 функция R^2 фазода локал интегралланувчи функция бўлади ва $\overline{\Gamma}^+$ ёпиқ конуснинг ташқарисида нолга тенг.



$\varphi(x,t)\in D(R^2)$ бўлсин. У ҳолда

$$\left(\Box_a E_1,\ \varphi\right)=\left(E_1,\ \Box_a\varphi\right)=\int\limits_{R^2} E_1(x,t)\,\Box_a\varphi(x,t)dxdt=$$

$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\frac{|x|}{a}}^{\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dtdx-\frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-at}^{at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dxdt=$$

$$=-\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx-\frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{\partial\varphi(at,\ t)}{\partial x}-\frac{\partial\varphi(-at,\ t)}{\partial x}\right]dt=$$

$$=-\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx-\frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x}dt-\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi\left(-x,\frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx+$$

$$+\frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}dt=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{\partial\varphi(at,\ t)}{\partial t}+a\frac{\partial\varphi(at,\ t)}{\partial x}\right]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{\partial\varphi(-at,\ t)}{\partial t}-a\frac{\partial\varphi(-at,\ t)}{\partial x}\right]dt=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d\varphi(at,\ t)}{dt}dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d\varphi(-at,\ t)}{dt}dt=\frac{1}{2}\varphi(0,\ 0)+\frac{1}{2}\varphi(0,\ 0)=(\delta,\ \varphi)$$

ҳосил бўлади ва бу (3.4.44) тенглик ўринли бўлишини кўрсатади.

н) $|x|=r$ сферада δ_{S_r} – оддий қатлам умумлашган функцияси бўлсин. $D'(R^n)$ фазода $r\to 0$ да

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\delta_{S_r}-\delta\right)\to\frac{1}{2n}\Delta\delta \qquad (3.4.45)$$

лимитик муносабат (Пицетти формуласи) ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатдан ҳам $r \to 0$ да барча $\varphi(x) \in D(R^n)$ учун

$$\left(\frac{1}{\sigma_n r^{n+1}} \delta_{S_r} - \frac{1}{r^2} \delta,\, \varphi \right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n r^{n+1}} \int\limits_{S_r} \varphi(x) dS - \frac{\varphi(0)}{r^2} = \frac{1}{\sigma_n r^2} \int\limits_{S_1} \left[\varphi(rs) - \varphi(0) \right] ds =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n r^2} \int\limits_{S_1} \left[r \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_k} s_k + \frac{r^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_k \partial x_i} s_k s_i + O(r^3) \right] ds \to$$

$$\to \frac{1}{2n} \Delta \varphi(0) = \frac{1}{2n} (\Delta \delta,\, \varphi)$$

лимитик муносабат (Пицетти формуласи) ўринли бўлади, чунки

$$\int\limits_{S_1} s_k ds = 0, \;\; \int\limits_{S_1} s_k s_i ds = \delta_{ki} \int\limits_{S_1} s_k^2 ds = \frac{\sigma_n}{n} \delta_{ki},$$

$$\int\limits_{S_1} s_k^2 ds = \sigma_{n-1} \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-2} \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \sigma_{n-1} \int\limits_0^1 (1-\mu)^{\frac{n-3}{2}} \sqrt{\mu} \, d\mu =$$

$$= \sigma_{n-1} B\left(\frac{n-1}{2},\, \frac{3}{2} \right) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2} \right) \Gamma\left(\frac{3}{2} \right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} \right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1 \right)} = \frac{\sigma_n}{n}$$

тенгликлар ўринлидир. Бу ерда B–Эйлернинг биринчи турдаги интеграли (бета–функция) бўлиб,

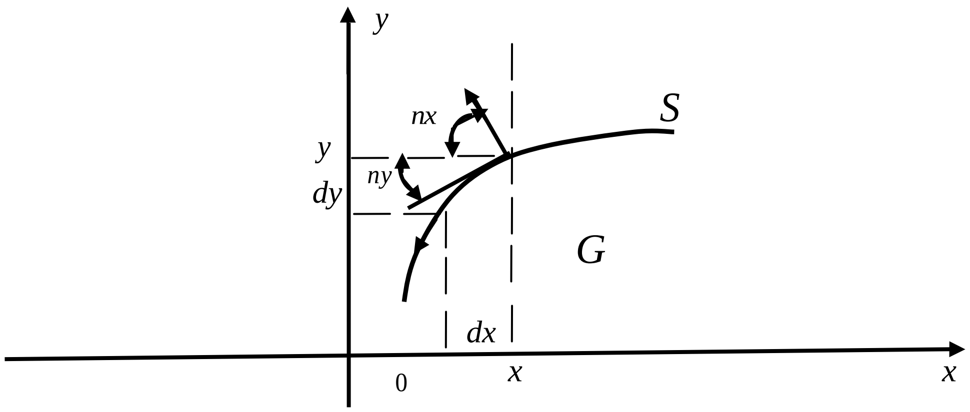
$$B(p,\, q) = \int\limits_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

кўринишида бўлади.

п) $n = 2$ ва $z = x + iy,\ \overline{z} = x - iy,\ dz = dx + idy$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

дифференциал операторга *Коши-Риман* оператори деб айтилади.



$f \in C^1(\overline{G})$ ва $z \in G_1$ учун $f(x,\, y) = 0$ бўлсин, бунда $G_1 = R^2 \setminus \overline{G}$. Бу ерда G соҳанинг S чегараси бўлакли силлиқ чизиқ ва S чегарадаги мусбат йўналиш шу чегара бўйлаб ҳаракатланганда G соҳа чап томонда бўладиган қилиб танланади. (3.4.24) формуладан фойдаланиб

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \left\{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\} - \frac{f}{2}\left[\cos(nx) + i\sin(ny)\right]\delta_S \qquad (3.4.46)$$

тенглик келтириб чиқарилади.

(3.4.46) тенгликнинг ҳар икала томонига $\varphi(x, y)$ асосий функцияни таъсир қилдириб (3.4.31) формулага ўхшаш бўлган

$$\int_G \left(f\,\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\varphi \right) dxdy = \frac{1}{2}\int_S f\varphi\left[\cos(nx) + i\cos(ny)\right]dS =$$

$$= \frac{1}{2}\int_S f\varphi(dy - idx) = -\frac{i}{2}\int_S f\varphi\, dz\,,$$

яъни

$$\int_G \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(f\varphi\right)dx\,dy = -\frac{i}{2}\int_S f\varphi\; dz \qquad (3.4.47)$$

формулани ҳосил қиламиз.

р) Энди

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\;\frac{1}{z} \;=\; \pi\,\delta(x,\, y) \qquad (3.4.48)$$

тенгликни исбот қиламиз.

Маълумки, $\dfrac{1}{z}$ функция R^2 фазода локал интегралланувчи функциядир. Шунинг учун $f=\dfrac{1}{z}$ функция ва $G=\left[\varepsilon<|z|<R\right]$ соҳа учун $\operatorname{supp}\varphi\subset U_R$ шартни қаноатлантирувчи барча $\varphi(x,y)\in D(R^2)$ функциялар учун (3.4.47) формулани қўллаб

$$\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\frac{1}{z},\ \varphi\right)=-\left(\frac{1}{z},\ \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\varphi\right)=-\int\limits_{U_R}\frac{1}{z}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}dxdy=-\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon<|z|<R}\frac{1}{z}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}dxdy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{\varepsilon<|z|<R}\varphi\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\frac{1}{z}dxdy+\frac{i}{2}\left(\int\limits_{S_R}-\int\limits_{S_\varepsilon}\right)\frac{\varphi}{z}dz\right]=-\frac{i}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|z|=\varepsilon}\varphi(z)\frac{dz}{z}=$$

$$=-\frac{i}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}i\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon e^{i\theta})d\theta=\pi\varphi(0)=(\pi\delta,\ \varphi)$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва шу билан (3.4.48) тенглик исбот бўлади.

5. Умумлашган функциянинг локал структураси. Энди биз $D'(G)$ фазо $L_\infty(G)$ фазони ҳамма вақт дифференциаллаш мумкин бўладиган қилиб кенгайтиргандаги шундай бир локал маънода минимал кенгайтмаси эканлигини исбот қиламиз.

2–теорема. *$f(x)\in D'(G)$ умумлашган функция ва ихтиёрий $G'\subset\subset G$ компакт жойлашган очиқ тўплам бўлсин. У ҳолда шундай бир $g(x)\in L_\infty(G')$ функция ва $m\geq 0$ бутун сон мавжудки, бунда ихтиёрий $x\in G'$ учун*

$$f(x)=D_1^m\ldots D_n^m\ g(x) \qquad (3.4.49)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Олдинги параграфда келтирилган $f(x)\in D'(G)$ бўлишлигининг зарурий ва етарли шарти ҳақидаги теоремага кўра, ихтиёрий $G'\subset\subset G$ компакт жойлашган очиқ тўплам учун шундай бир $K=K(G')$ ва $k=k(G')$ сонлар мавжуд бўлиб ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G')$ функция учун

$$\left|(f,\varphi)\right|\leq K\|\varphi\|_{C^k(\overline{G'})} \qquad (3.4.50)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунингдек, ихтиёрий $\psi(x) \in D(G')$, $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x_j} D_j \psi \, dx'_j$ функция учун

$$\max_{x \in \overline{G'}} |\psi(x)| \leq d \max_{x \in \overline{G'}} |D_j \psi(x)|$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда d сон G' очиқ тўпламнинг диаметри. Шунинг учун, бу тенгсизликни етарлича сонда қўллаб биз (3.4.50) тенгсизликдан ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G')$ функция учун

$$|(f,\varphi)| \leq C \max_{x \in \overline{G'}} |D_1^k ... D_n^k \varphi(x)| \qquad (3.4.51)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Шунингдек, ихтиёрий $\psi(x) \in D(G')$ учун

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial^n \psi(y)}{\partial y_1 ... \partial y_n} dy_1 ... dy_n$$

ва шунинг учун

$$|\psi(x)| \leq \int_{G'} |D_1 ... D_n \psi(y)| dy$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан ва (3.4.51) тенгсизликдан $m = k+1$ учун ва ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G')$ учун

$$|(f,\varphi)| \leq C \int_{G'} |D_1^m ... D_n^m \varphi(x)| dx \qquad (3.4.52)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Хан–Банах теоремасига кўра, ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G')$ учун

$$\chi(x) = (-1)^{mn} D_1^m ... D_n^m \varphi(x) \to (f^*, \chi) = (f, \varphi) \qquad (3.4.53)$$

чизиқли узлуксиз функционал $L_1(G')$ фазогача чизиқли узлуксиз функционал бўлиб нормаси шу C сонидан ошмаган ҳолда кенгайтмага эга бўлади. Шунингдек, (3.4.52) тенгсизликдан

$$|(f^*, \chi)| = |(f, \varphi)| \leq C \|\chi\|_{L_1(G')}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Ф. Рисс теоремасига кўра, шундай бир $g(x) \in L_\infty(G')$ функция мавжуд бўлиб, бунда $\|g(x)\|_{L_\infty(G')} \leq C$ тенгсизлиги ўринли бўлгани ҳолда

$$(f^*, \chi) = (-1)^{mn} \int_{G'} g(x) \chi(x) dx$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан ва (3.4.53) тенгликдан ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G')$ учун

$$(f,\varphi)=(-1)^{mn}\int\limits_{G'} g(x)D_1^m...D_n^m\varphi(x)dx=(D_1^m...D_n^m g,\varphi)$$

эканлигини ҳосил қиламиз ва бу (3.4.49) тенгликка эквивалент бўлади. Теорема исбот бўлди.

Натижа. *2–теорема шартлари ўринли бўлганда шундай бир $g_1(x)\in C(\overline{G'})$ функция мавжуд бўлиб $x\in G'$ учун*

$$f(x)=D_1^{m+1}...D_n^{m+1}\ g_1(x) \qquad \textit{(3.4.54)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар биз (3.4.49) тасвирда ҳосил қилинган $g(x)$ функцияни бутун R^n фазога ноль билан давом эттирсак ва

$$g_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}...\int\limits_{-\infty}^{x_n} g(y)dy_1...dy_n$$

деб олсак, у ҳолда (3.4.54) тасвир келиб чиқади.

6. Компакт ташувчили умумлашган функциялар. Энди биз $C^\infty(G)$ функциялар фазосида яқинлашишни киритамиз:

Агар ихтиёрий $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ мультииндекс ва ихтиёрий $G'\subset\subset G$ компакт жойлашган очиқ тўпламлар учун $k\to\infty$ интилганда $D^\alpha\varphi_k(x)\overset{x\in G'}{\Rightarrow}0$ текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $C^\infty(G)$ функциялар фазосида $\varphi_k(x)\to 0$ яқинлашувчи деб айтилади. Бу таърифдан кўринадики, $D(G)=C_0^\infty(G)$ функциялар фазосидаги яқинлашишдан $C^\infty(G)$ функциялар фазосидаги яқинлашиш келиб чиқар экан, лекин акси ўринли эмас.

$f(x)\in D'(G)$ умумлашган функция G соҳада $\operatorname{supp} f(x)=K\subset\subset G$ компакт ташувчига эга бўлсин. $\eta\in D(G)$ ва K компакт ташувчи атрофида $\eta(x)=1$ бўлсин. $C^\infty(G)$ функциялар фазосида $\tilde{f}$ функционални ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G)$ учун

$$(\tilde{f},\varphi)=(f,\eta\varphi) \qquad (3.4.55)$$

қоида бўйича қурамиз.

Кўриниб турибдики, бу $\tilde{f}$ функционал $C^{\infty}(G)$ функциялар фазосида чизиқли функционал бўлади. Шу билан бирга $\varphi \to \eta\varphi$ мос қўйиш амали $C^{\infty}(G)$ функциялар фазосини $D(G)$ фазога узлуксиз акслантиргани учун $C^{\infty}(G)$ функциялар фазосида $\tilde{f}$ функционал узлуксиз бўлади. Бу $\tilde{f}$ функционал f функционалнинг $D(G)$ фазодан $C^{\infty}(G)$ функциялар фазосига давом эттирилгани бўлади ва шунингдек ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G)$ учун

$$(\tilde{f},\varphi) = (f,\eta\varphi) = (\eta f,\varphi) = (f,\varphi)$$

тенглик ўринли бўлади.

f функционалнинг $D(G)$ фазодан $C^{\infty}(G)$ функциялар фазосига давом эттирилгани мавжуд ва ягона бўлиб (3.4.55) тенгликдаги ёрдамчи η функциядан боғлиқ эмас. $\tilde{\tilde{f}}$ функционал f функционалнинг $D(G)$ фазодан $C^{\infty}(G)$ функциялар фазосига бошқа бир давом эттирилгани бўлсин. $D(G)$ фазодан олинган $\{\eta_k\}$ функциялар кетма–кетлигини $x \in G_k$ учун $\eta_k(x) = 1$, бунда $G_1 \subset\subset G_2 \subset\subset ... \subset\subset G_k \subset\subset ...$, $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ бўлгани ҳолда $k \to \infty$ да $C^{\infty}(G)$ функциялар фазосида $\eta_k(x) \to 1$ яқинлашувчи бўлсин. Шунинг учун ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G)$ учун $k \to \infty$ да $C^{\infty}(G)$ функциялар фазосида $\eta_k\varphi \to \varphi$ яқинлашувчи бўлади. Шунга кўра, ихтиёрий $\varphi(x) \in C^{\infty}(G)$ учун

$$(\tilde{f},\varphi) = (\tilde{f},\lim_{k\to\infty}\eta_k\varphi) = \lim_{k\to\infty}(\tilde{f},\eta_k\varphi) = \lim_{k\to\infty}(f,\eta_k\varphi) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}(\tilde{\tilde{f}},\eta_k\varphi) = (\tilde{\tilde{f}},\lim_{k\to\infty}\eta_k\varphi) = (\tilde{\tilde{f}},\varphi)$$

тенглик ўринлидир, яъни $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}$ тенглик ҳосил бўлади.

Демак, биз қуйидаги теореманинг зарурий шартини исбот қилдик.

3–теорема. *$f(x) \in D'(G)$ умумлашган функция G соҳада компакт ташувчига эга бўлишлиги учун унинг $C^{\infty}(G)$ функциялар фазосига чизиқли ва узлуксиз давом эттирилиши зарур ва етарлидир.*

Исботнинг етарлилиги. $f(x)\in D'(G)$ функционалнинг $D(G)$ фазодан $C^{\infty}(G)$ функциялар фазосига $\tilde{f}$ чизиқли ва узлуксиз давом эттирилгани мавжуд бўлсин. Агар f умумлашган функция G соҳада компакт ташувчига эга бўлмаса, у ҳолда $D(G)$ фазодан олинган шундай бир $\{\varphi_k(x)\}$ функциялар кетма–кетлигини кўрсатиш мумкинки, бунда $\operatorname{supp}\varphi_k\subset G\setminus\bar{G}_k$, $G_1\subset\subset G_2\subset\subset\ldots\subset\subset G_k\subset\subset\ldots$, $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}G_k$ ва $(f,\varphi_k)=1$ бўлади. Иккинчи томондан эса, $k\to\infty$ да $C^{\infty}(G)$ функциялар фазосида $\varphi_k(x)\to 0$ яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун $k\to\infty$ да $(\tilde{f},\varphi_k)\to 0$ яқинлашувчи бўлади. Лекин $(\tilde{f},\varphi_k)=(f,\varphi_k)=1$ бўлади ва қарама–қаршиликка келамиз. Бу қарама–қаршилик теореманинг етарлилик шартини исбот қилади.

$f(x)\in D'(G)$ умумлашган функция G соҳада компакт ташувчига эга бўлсин. У ҳолда (3.4.55) тенгликдан ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G)$ учун

$$(f,\varphi)=(f,\eta\varphi)$$

тенгликка эга бўламиз. Шунингдек $\eta(x)\in D(G)$ ва $\operatorname{supp}\eta(x)\subset\subset G$ эканлигидан қандайдир $G'\subset\subset G$ компакт жойлашган очиқ тўплам учун $\eta(x)\in D(G')$ бўлади. Шунинг учун ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G)$ учун $\eta\varphi\in D(G')$ бўлади. Бундан биз юқорида келтирилган теоремага кўра шундай бир $K=K(G')$ ва $m=m(G')$ сонлар мавжуд бўлиб ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G)$ учун

$$|(f,\varphi)|=|(f,\eta\varphi)|\le K\|\eta\varphi\|_{C^m(\bar{G}')}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса бевосита ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G)$ учун

$$|(f,\varphi)|\le C\|\varphi\|_{C^m(\bar{G})} \qquad (3.4.56)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Бу (3.4.56) тенгсизликдан қуйидаги тасдиқ келиб чиқади: G *соҳада компакт ташувчили ҳар қандай умумлашган функция шу* G *соҳада чекли тартибга эгадир.*

G соҳада компакт ташувчили умумлашган функциялар тўпламини $E'(G)$ орқали белгилаймиз. Шундай қилиб

$E(G)=C^{\infty}(G)$ функциялар фазосидаги чизиқли ва узлуксиз функционаллар тўплами G соҳада компакт ташувчили умумлашган функцияларнинг $E'(G)$ тўпламидан иборат бўлади, яъни $E'(G)=\left(C^{\infty}(G)\right)'$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $E'(R^n)=\left(C^{\infty}(R^n)\right)'$ тенглик исбот бўлди.

7. Ташувчиси нуқта бўлган умумлашган функциялар. Ташувчиси яккаланган нуқталардан иборат умумлашган функциялар ошкор тасвирга эга бўладилар. Бу эса қуйидаги теорема орқали берилади.

4–теорема. *Агар $f(x)\in D'(G)$ умумлашган функциянинг G соҳадаги ташувчиси ягона $x=0$ нуқтадан иборат бўлса, у ҳолда бу умумлашган функция ягона равишда*

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\le N} c_{\alpha}D^{\alpha}\delta(x) \qquad (3.4.57)$$

шаклида тасвирланади, бунда N сони $f(x)\in D'(G)$ умумлашган функциянинг тартиби ва c_{α} қандайдир ўзгармас сонлардир.

Исбот. $\eta(x)\in D(U_1)$ ва $|x|\le\frac{1}{2}$ учун $\eta(x)=1$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon>0$ ва $|x|\le\frac{\varepsilon}{2}$ учун $f=\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f$ бўлади ва шунга кўра ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G)$ учун

$$(f,\varphi)=\left(\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f,\varphi\right)=\left(f,\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\varphi-\varphi_N)\right)+\left(f,\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi_N\right), \quad (3.4.58)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бунда

$$\varphi_N(x)=\sum_{|\alpha|\le N}\frac{D^{\alpha}\varphi(0)}{\alpha!}x^{\alpha}.$$

Шунингдек $\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\varphi-\varphi_N)\in D\left(U_{\varepsilon}\right)$ эканлигидан ва (3.4.56) тенгсизликни қўллаб

$$\left|\left(f,\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\varphi-\varphi_N)\right)\right|\le C\left\|\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\varphi-\varphi_N)\right\|_{C^N\left(\overline{U_{\varepsilon}}\right)}=$$

$$= C \max_{\substack{|x|\le\varepsilon,\\ |\alpha|\le N}} \left| D^{\alpha} \left\{ \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left[\varphi(x) - \varphi_N(x)\right] \right\} \right| \le$$

$$\le C \max_{\substack{|x|\le\varepsilon,\\ |\alpha|\le N}} \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\beta}{\alpha} \left| D^{\beta} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) D^{\alpha-\beta} \left[\varphi(x) - \varphi_N(x)\right] \right| \le$$

$$\le C' \max_{|\alpha|\le N} \sum_{\beta\le\alpha} \varepsilon^{-|\beta|} \varepsilon^{N-|\alpha-\beta|} \varepsilon \le C' \max_{|\alpha|\le N} \varepsilon^{N-|\alpha|+1} \varepsilon = C'' \varepsilon$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Энди (3.4.58) тенгликда $\varepsilon \to +0$ интилганда лимитга ўтамиз. У ҳолда ҳосил қилинган баҳолашга кўра тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи нолга интилади. Иккинчи қўшилувчи эса умуман ε дан боғлиқ эмас ва $(\tilde{f}, \varphi_N)$ тенг бўлади, бунда $\tilde{f}$ функционал f функционалнинг $C^{\infty}(G)$ фазога давом эттирилганидан иборат. Шунинг учун (3.4.58) тенгликдан

$$(f, \varphi) = (\tilde{f}, \varphi_N) = \sum_{|\alpha|\le N} \frac{D^{\alpha}\varphi(0)}{\alpha!} (\tilde{f}, x^{\alpha})$$

шаклидаги тенгликни ҳосил қиламиз. Энди $c_{\alpha} = \dfrac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} (\tilde{f}, x^{\alpha})$ деб белгилаш орқали ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G)$ учун

$$(f, \varphi) = \sum_{|\alpha|\le N} (-1)^{|\alpha|} c_{\alpha} D^{\alpha}\varphi(0) = \sum_{|\alpha|\le N} c_{\alpha} \left(D^{\alpha}\delta, \varphi\right)$$

тасвирни ҳосил қиламиз, яъни $f(x) = \sum\limits_{|\alpha|\le N} c_{\alpha} D^{\alpha}\delta(x)$ тенглик келиб чиқади. Агар бошқа бир шундай

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\le N} c'_{\alpha} D^{\alpha}\delta(x)$$

тасвир ўринли бўлса, у ҳолда биридан иккинчисини айириб

$$0 = \sum_{|\alpha|\le N} \left(c'_{\alpha} - c_{\alpha}\right) D^{\alpha}\delta(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$0 = \sum_{|\alpha|\le N} \left(c'_{\alpha} - c_{\alpha}\right)\left(D^{\alpha}\delta(x), x^{k}\right) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le N} \left(c'_{\alpha} - c_{\alpha}\right)(-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} x^{k}\Big|_{x=0} = (-1)^{|k|} k! \left(c'_{k} - c_{k}\right)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, яъни $|\alpha| \leq N$ учун $c'_k = c_k$ тенгликлар келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Биз

$$x^m u(x) = 0 \tag{3.4.59}$$

тенгламанинг $D'(R^1)$ *фазодаги умумий ечими*

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x) \tag{3.4.60}$$

формула орқали аниқланишини кўрсатган эдик, бунда c_k *– ихтиёрий ўзгармас сонлар.*

Бу натижани 4–теоремани қўллаш йўли билан ҳам ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, агар $u(x) \in D'(R^1)$ умумлашган функция (3.4.59) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда ёки $u = 0$, ёки $\mathrm{supp}\, u$ ташувчи фақат $x = 0$ нуқта билан устма–уст тушади. Исбот қилинган 4–теоремага кўра

$$u = \sum_{k=0}^{N} c_k \delta^{(k)}(x) \tag{3.4.61}$$

тенглик ўринли бўлиб, бунда $c_k \in R$ ва $N \geq 0$ бутун сондир. Ҳар бир $k = 0, 1, ..., m-1$ учун

$$x^m \delta^{(k)}(x) = 0$$

эканлигини ҳисобга олиб ва (3.4.61) тенгликни (3.4.59) тенгламага қўйсак, у ҳолда биз

$$0 = (-1)^m m! \sum_{m \leq k \leq N} \binom{m}{k} c_k \delta^{(m-k)}(x)$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан эса $k \geq m$ учун $c_k = 0$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, (3.4.61) тасвирда $N = m-1$ деб ҳисоблаш мумкин ва (3.4.60) тенглик исбот бўлади. Ҳар бир $k = 0, 1, ..., m-1$ учун c_k ихтиёрий ўзгармаслар бўлганда (3.4.60) тенглик билан берилган функция (3.4.59) тенгламани қаноатлантиради.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

18.1. $\theta'(-x)$ ҳосилани ҳисобланг.

18.2. $m \geq 1$ бутун тартибли $\theta^{(m)}(x - x_0)$ ҳосилани ҳисобланг.

18.3. $m \geq 1$ бутун тартибли $\theta^{(m)}(x_0 - x)$ ҳосилани ҳисобланг.

18.4. $m \geq 1$ бутун тартибли $(sign\, x)^{(m)}$ ҳосилани ҳисобланг.

18.5. $(x\, sign\, x)'$ ҳосилани ҳисобланг.

18.6. $m \geq 2$ бутун тартибли $(|x|)^{(m)}$ ҳосилани ҳисобланг.

18.7. $(\theta(x)\sin x)'$ ҳосилани ҳисобланг.

18.8. $(\theta(x)\cos x)'$ ҳосилани ҳисобланг.

18.9. $m \geq 1,\ k = 0,1,2,...$ бутун тартибли $(\theta(x)\, x^{m+k})^{(m)}$ ҳосилани ҳисобланг.

18.10. $m \geq 1,\ k = 1,2,...,m$ бутун тартибли $(\theta(x)\, x^{m-k})^{(m)}$ ҳосилани ҳисобланг.

18.11. $m \geq 1,\ k = 1,2,...,m$ бутун тартибли $(\theta(x) e^{ax})^{(m)}$ ҳосилани ҳисобланг.

18.12. $y = |x|\sin x$ функциянинг $m = 1,2,3$ тартибли ҳосилаларини ҳисобланг.

18.13. $y = |x|\cos x$ функциянинг $m = 1,2,3$ тартибли ҳосилаларини ҳисобланг.

18.14. $m \geq 1$ бутун тартибли $\left(\theta(a - |x|)\right)^{(m)}, a > 0$ ҳосилани ҳисобланг.

18.15. $m \geq 1$ бутун тартибли $\left([x]\right)^{(m)}$ ҳосилани ҳисобланг, бунда $[x]$– шу x ўзгарувчининг бутун қисмини билдиради.

18.16. $m \geq 1$ бутун тартибли $\left(sign \sin x\right)^{(m)}$ ҳосилани ҳисобланг.

18.17. $m \geq 1$ бутун тартибли $\left(sign \cos x\right)^{(m)}$ ҳосилани ҳисобланг.

18.18. $y = \begin{cases} \mathrm{s} \quad x\mathrm{i} \quad x\mathrm{n}\geq \\ 0 \quad ,x < \end{cases}$ функциянинг барча ҳосилаларини ҳисобланг.

18.19. $y = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ функциянинг барча ҳосилаларини ҳисобланг.

18.20. $y=\begin{cases} x^2, & -1\le x\le 1, \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$ функциянинг барча ҳосилаларини ҳисобланг.

18.21. $y=\begin{cases} 1, & x<0, \\ x+1, & 0\le x<1, \\ x^2+1, & x\ge 1 \end{cases}$ функциянинг барча ҳосилаларини ҳисобланг.

18.22. $y=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ (x+1)^2, & -1\le x<0, \\ x^2+1, & x\ge 0 \end{cases}$ функциянинг барча ҳосилаларини ҳисобланг.

18.23. $y=\begin{cases} 0, & x<0, \\ x^2, & 0\le x<1, \\ (x-2)^2, & 1\le x<2, \\ 0, & x\ge 2 \end{cases}$ функциянинг барча ҳосилаларини ҳисобланг.

18.24. $y=\begin{cases} \sin x, & -\pi\le x\le\pi, \\ 0, & |x|>\pi \end{cases}$ функциянинг барча ҳосилаларини ҳисобланг.

18.25. $y=\begin{cases} |\sin x|, & -\pi\le x\le\pi, \\ 0, & |x|>\pi \end{cases}$ функциянинг барча ҳосилаларини ҳисобланг.

19.1. $\frac{d}{dx}\ln|x|=P\frac{1}{x}$ тенгликни исботланг, бунда $\left(P\frac{1}{x},\varphi\right)=V.p\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx$ формула билан аниқланган.

19.2. $\frac{d}{dx}P\frac{1}{x}=-P\frac{1}{x^2}$ тенгликни исботланг, бунда

$\left(P\frac{1}{x^2},\varphi\right)=V.p\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx$ формула билан аниқланган.

19.3. $\frac{d}{dx}\frac{1}{x\pm i0}=\mp i\pi\delta'(x)-P\frac{1}{x^2}$ тенгликларни исботланг, бунда $\left(P\frac{1}{x^2},\varphi\right)=V.p\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx$ формула билан аниқланган.

19.4. $\frac{d}{dx}P\frac{1}{x^2}=-2P\frac{1}{x^3}$ тенгликни исботланг, бунда $\left(P\frac{1}{x^3},\varphi\right)=V.p\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)}{x^3}dx$ формула билан аниқланган.

19.5. $|\sin x|''+|\sin x|=2\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k\pi)$ тенгликни исботланг.

19.6. $|\cos x|''+|\cos x|=2\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\frac{2k+1}{2}\pi\right)$ тенгликни исботланг.

20.1. $u=c_1+c_2\theta(x)+\ln|x|$ функция $xu'=1$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечими эканлигини кўрсатинг.

20.2. $u=c_1+c_2\theta(x)-P\frac{1}{x}$ функция $xu'=P\frac{1}{x}$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечими эканлигини кўрсатинг.

20.3. $u=c_1+c_2\theta(x)+c_3\delta(x)-P\frac{1}{x}$ функция $x^2u'=1$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечими эканлигини кўрсатинг.

20.4. $u=c\delta(x)+P\frac{1}{|x|}$ функция $xu=sign\,x$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечими эканлигини кўрсатинг, бунда

$$\left(P\frac{1}{|x|},\varphi\right)=\int\limits_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}dx+\int\limits_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|}dx$$

формула билан аниқланган.

20.5. $u=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k\delta(x-k\pi)$ функция $(\sin x)\cdot u=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечими эканлигини кўрсатинг.

21.1. $xy=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

21.2. $\alpha(x)y=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг, бунда $\alpha(x)\in C^\infty(R^1)$ ва $x=0$ нуқтада 1 тартибли ягона нолга эга бўлган функция бўлсин.

21.3. $\alpha(x)y=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг, бунда $\alpha(x)\in C^\infty(R^1)$ ва $\alpha(x)>0$ бўлган функция бўлсин.

21.4. $(x-1)y=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

21.5. $x(x-1)y=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

21.6. $(x^2-1)y=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

21.7. $xy=1$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

21.8. $xy=P\dfrac{1}{x}$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

21.9. $x^n y=0,\ n=2,3,...$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

21.10. $x^2y=2$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

21.11. $(x+1)^2y=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

21.12. $(\cos x)\,y = 0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

Шуни таъкидлаш керакки, биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг классик ечими фақат битта ихтиёрий ўзгармаснигина сақлайди.

m тартибли

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x) \qquad (*)$$

чизиқли дифференциал тенглама берилган бўлсин, бунда $a_k(x) \in C^\infty(R^1)$ ва $f(x) \in D'(R^1)$. Агар $y(x) \in D'(R^1)$ умумлашган функция $(*)$ тенгламани умумлашган маънода қаноатлантирса, яъни ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^1)$ учун

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k(x) y^{(k)}(x),\ \varphi \right) = \left(f(x), \varphi \right)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу $y(x) \in D'(R^1)$ умумлашган функция $(*)$ тенгламанинг умумлашган ечими деб айтилади. Бу $(*)$ тенгламанинг ҳар қандай умумлашган ечимини унинг хусусий ечими ва унга мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимлари йиғиндиси шаклида тасвирлаш мумкин бўлади.

22.1. $y' = 0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.2. $y^{(m)} = 0,\ m = 2,3,...$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.3. $D^\alpha \delta(x), |\alpha| = m,\ m = 0,1,...$ умумлашган функциялар системаси чизиқли эркли эканлигини исбот қилинг.

22.4. Ихтиёрий a_k сонлар учун $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \delta^{(k)}(x-k)$ қатор $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфида яқинлашувчи эканлигини исбот қилинг.

22.5. $n > m$ учун $x^n y^{(m)} = 0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечими

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} a_k\, \theta(x)\, x^{m-k-1} + \sum_{k=m}^{n-1} b_k\, \delta^{(k-m)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k$$

шаклида эканлигини исбот қилинг, бунда a_k , b_k , c_k – ихтиёрий ўзгармас сонлардир.

22.6. $xy'=1$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.7. $xy'=P\frac{1}{x}$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.8. $x^2y'=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.9. $x^2y'=1$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.10. $y''=\delta(x)$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.11. $(x+1)y''=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.12. $(x+1)^2y''=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.13. $(x+1)y'''=0$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.14. $y^{(V)}=\delta(x)$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.15. $y^{(IV)}=\theta(x)$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.16. $y''+2y'+y=2\delta(x)+\delta'(x)$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.17. $y''+4y=\delta(x)$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.18. $y''-4y=2\delta(x)+\delta'(x)$ тенгламанинг $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфидаги умумий ечимини топинг.

22.19. $y'=f(x)$ тенглама ихтиёрий $f(x)\in D'(R^1)$ учун $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфида ечимга эга эканлигини исботланг.

22.20. $xu = f(x)$ тенглама ихтиёрий $f(x) \in D'(R^1)$ учун $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфида ечимга эга эканлигини исботланг.

22.21. $x^3u' + 2u = 0$ тенглама $D'(R^1)$ умумлашган функциялар синфида $u = 0$ тривиал ечимдан ташқари ечимга эга эмаслигини исботланг.

22.22. $\theta(x_1, x_2, ..., x_n) = \theta(x_1) \cdot ... \cdot \theta(x_n)$ бўлсин. У ҳолда $D'(R^n)$ умумлашган функциялар синфида

$$\frac{\partial^n \theta}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n} = \delta(x) = \delta(x_1, x_2, ..., x_n)$$

эканлигини исботланг.

22.23. Агар $f \in C^1(\overline{G}) \bigcap C^1(\overline{G_1})$, бунда $G \subset R^n$ чегараланган соҳа бўлиб унинг чегараси S бўлакли–силлиқ сирт ва $G_1 = R^n \setminus \overline{G}$ бўлса, у ҳолда $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + \left[f \right]_S \cos(n, x_i) \delta_S$ формулани $D'(R^n)$ фазода исбот қилинг, бунда $n = n_x$ вектор S сиртга ўтказилган нормаль, $\left[f \right]_S$– эса $f(x)$ функциянинг S сирт орқали ташқарига ўтишдаги сакрашидан иборат, яъни $\left[f \right]_S (x) = \lim\limits_{\substack{x' \to x, \\ x' \in G_1}} f(x') - \lim\limits_{\substack{x' \to x, \\ x' \in G}} f(x')$ бўлади.

22.24. Агар $f \in C^2(\overline{G}) \bigcap C^2(\overline{G_1})$, бунда $G_1 = R^n \setminus \overline{G}$ бўлса, у ҳолда $\Delta f = \{ \Delta f \} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial n} \left(\left[f \right]_S \delta_S \right)$ Грин формуласи ўринли эканлигини исботланг.

22.25 Агар $f(x,t) \in C^2\left(t \ge 0\right)$ ва $t < 0$ учун $f = 0$ бўлса, у ҳолда R^{n+1} фазода $\Box_a f = \{ \Box_a f \} + \delta(t) f_t(x,0) + \delta'(t) f(x,0)$ формула ўринли эканлигини исботланг.

22.26. Агар $f(x,t) \in C^2\left(t \ge 0\right)$ ва $t < 0$ учун $f = 0$ бўлса, у ҳолда R^{n+1} фазода $\frac{\partial f}{\partial t} - a^2 f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} - a^2 f \right\} + \delta(t) f(x,0)$ формула ўринли эканлигини исботланг.

5-§. Умумлашган функцияларнинг тўғри кўпайтмаси

1. Тўғри кўпайтманинг таърифи. Айтайлик $f(x)$ ва $g(y)$ функциялар мос равишда $G_1 \subset R^n$ ва $G_2 \subset R^m$ очиқ тўпламларда локал интегралланувчи функциялар бўлсин. У ҳолда $f(x)g(y)$ функция ҳам R^{n+m} фазода локал интегралланувчи бўлади. Бу $f(x)g(y) = g(y)f(x) \in D'(G_1 \times G_2)$ умумлашган функциянинг $\varphi(x, y) \in D(G_1 \times G_2)$ асосий функцияга таъсири

$$(f(x)g(y), \varphi) = \int\limits_{G_1 \times G_2} f(x)g(y)\varphi(x, y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{G_1} f(x) \int\limits_{G_2} g(y)\varphi(x, y)dydx = \int\limits_{G_1 \times G_2} g(y)f(x)\varphi(x, y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{G_2} g(y) \int\limits_{G_1} f(x)\varphi(x, y)dxdy \quad ,$$

яъни

$$(f(x)g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \qquad (3.5.1)$$

$$(g(y)f(x), \varphi) = (g(y), (f(x), \varphi(x, y))), \qquad (3.5.1')$$

формулалар орқали аниқланган (регуляр) умумлашган функция бўлади.

Бу тенгликлар такрорий интегралларнинг каррали интеграл билан устма–уст тушуши ҳақидаги Фубини теоремасини ифода қилади. Кейинчалик биз (3.5.1) ва (3.5.1') тенгликларни $f(x) \in D'(G_1)$ ва $g(y) \in D'(G_2)$ умумлашган функцияларнинг $f(x) \times g(y)$ ва $g(y) \times f(x)$ *тўғри кўпайтмаларининг* таърифи сифатида қабул қиламиз ва бу умумлашган функцияларни ихтиёрий $\varphi(x, y) \in D(G_1 \times G_2)$ асосий функция учун

$$(f(x) \times g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \qquad (3.5.2)$$

$$(g(y) \times f(x), \varphi) = (g(y), (f(x), \varphi(x, y))), \qquad (3.5.2')$$

формулалар орқали аниқлаймиз.

Бу келтирилган таърифларнинг корректлигини текширамиз, яъни (3.5.2) ва (3.5.2') тенгликларнинг ўнг қисми $D(G_1 \times G_2)$ асосий функцияларнинг фазосида чизиқли узлуксиз функционал эканлигини текширишимиз етарли бўлади.

Маълумки, ҳар бир $x \in G_1$ учун $\varphi(x,y) \in D(G_2)$ ва $g \in D'(G_2)$ бўлганлигидан ихтиёрий $\varphi(x, y) \in D(G_1 \times G_2)$ асосий функция учун

$$\psi(x) = (g(y), \varphi(x,y)) \tag{3.5.3}$$

функция G_1 очиқ тўпламда аниқланган бўлади.

Энди биз қуйидаги леммани исботлаймиз.

1-лемма. *$G' \subset\subset G_1 \times G_2$ компакт жойлашган очиқ тўплам ва $g(y) \in D'(G_2)$ бўлсин. У ҳолда шундай бир $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_1(G') \subset\subset G_1$ компакт жойлашган очиқ тўплам ва $C = C(G', g) \geq 0$, $m = m(G', g) \geq 0$ бутун сонлар мавжуд бўлиб, агар ихтиёрий $\varphi(x, y) \in D(G')$ асосий функция бўлса, у ҳолда*

$$\psi(x) \in D(\tilde{G}_1); \tag{3.5.4}$$

ихтиёрий $\varphi(x, y) \in D(G_1 \times G_2)$ асосий функция бўлса, у ҳолда

$$D^{\alpha}\psi(x) = (g(y), D_x^{\alpha}\varphi(x,y)); \tag{3.5.5}$$

ихтиёрий $\varphi(x, y) \in D(G'),\ x \in G_1$ учун

$$\left|D^{\alpha}\psi(x)\right| \leq C \max_{\substack{(x,y)\in \overline{G'} \\ |\beta| \leq m}} \left|D_x^{\alpha} D_y^{\beta} \varphi(x,y)\right| \tag{3.5.6}$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Исбот. (3.5.3) тенглик билан аниқланган $\psi(x)$ функция G_1 очиқ тўпламда финит функция бўлади. Шунингдек $\operatorname{supp}\varphi \subset G' \subset\subset G_1 \times G_2$ бўлганлиги учун $G'_1 \subset\subset G_1$ ва $G'_2 \subset\subset G_2$ компакт жойлашган очиқ тўпламлар мавжуд бўладики, бунда $G' \subset\subset G'_1 \times G'_2$ бўлади. Шунинг учун, агар $x \in G_1 \setminus G'_1$ бўлса, у ҳолда барча $y \in G_2$ учун $\varphi(x,y) = 0$ ва шунга кўра $\psi(x) = (g, 0) = 0$ бўлади, яъни G'_1 ташқарисида $\psi(x) = 0$ бўлади. Биз $\tilde{G}_1$ очиқ тўпламни $G'_1 \subset\subset \tilde{G}_1 \subset\subset G_1$ компакт жойлашганлик муносабатлари ўринли бўладиган қилиб танлаймиз. Бу ҳолда $\operatorname{supp}\psi \subset \tilde{G}_1$ ҳосил бўлади.

Энди $\psi(x)$ функциянинг G_1 очиқ тўпламда узлуксиз эканлигини исбот қиламиз. $x \in G_1$ бўлган ихтиёрий нуқта ва $x_k \in G_1$, $x_k \to x$ бўлсин. У ҳолда $x_k \in G_1$, $x_k \to x$ да $D(G_2)$ фазода

$$\varphi(x_k, y) \to \varphi(x, y) \tag{3.5.7}$$

яқинлашувчи бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $\operatorname{supp}\varphi(x_k, y) \subset G'_2 \subset\subset G_2$ ва $x_k \to x$ да

$$D_y^\alpha \varphi(x_k, y) \overset{y \in G_2}{\Rightarrow} D_y^\alpha \varphi(x, y)$$

текис яқинлашувчи бўлади. Биз g функционалнинг узлуксизлигидан фойдаланиб (3.5.3) ва (3.5.7) муносабатлардан $x_k \to x$ да

$$\psi(x_k) = (g(y), \varphi(x_k, y)) \to (g(y), \varphi(x, y)) = \psi(x)$$

эканлигини ҳосил қиламиз, яъни $\psi(x)$ функция ихтиёрий x нуқтада узлуксиз бўлади. Шундай қилиб $\psi(x) \in C(G_1)$ ҳосил бўлади.

Энди $\psi(x) \in C^\infty(G_1)$ ва (3.5.5) дифференциаллаш формуласининг ўринли эканлигини исбот қиламиз. $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ бўлсин. У ҳолда ҳар бир $x \in G_1$ учун $h \to 0$ да $D(G_2)$ фазода

$$\chi_h(y) = \frac{1}{h}\left[\varphi(x + he_i, y) - \varphi(x, y)\right] \to \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_1} \qquad (3.5.8)$$

бўлади. Ҳақиқатдан ҳам етарлича кичик h учун $\operatorname{supp}\chi_k \subset G'_2 \subset\subset G_2$ ва $h \to 0$ да $D^\alpha \chi_h(y) \overset{y \in G_2}{\Rightarrow} D_y^\alpha \dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_1}$ бўлади. Шунингдек $g \in D'(G_2)$ бўлганлигидан, ҳамда (3.5.3) ва (3.5.8) муносабатдан фойдаланиб, $h \to 0$ да

$$\frac{\psi(x + he_i) - \psi(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[(g(y), \varphi(x + he_i, y)) - (g(y), \varphi(x, y))\right] =$$

$$= \left(g(y), \frac{\varphi(x + he_i, y) - \varphi(x, y)}{h} \right) = (g, \chi_h) \to \left(g(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_1} \right)$$

эканлигини ҳосил қиламиз ва бундан (3.5.5) формуланинг $\alpha = (1, 0, ..., 0)$ мультииндекс учун ўринли бўлиши келиб чиқади. Демак барча биринчи тартибли ҳосилалар учун

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} = \left(g(y), \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_j} \right), \; j = 1, 2, ..., n$$

формуланинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Бу формулага шу мулоҳазани кетма-кет қўллаб, (3.5.5) формуланининг барча $\alpha-$ мультииндекс учун ўринли бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Шунга кўра $D^{\alpha}\varphi(x,y)\in D(G_1\times G_2)$ бўлишидан ҳамда (3.5.5) формуладан G_1 очиқ тўпламда ихтиёрий α–мультииндекс учун $D^{\alpha}\psi(x)$ функциянинг узлуксиз функция бўлиши келиб чиқади, яъни $\psi\in C^{\infty}(G_1)$ бўлади.

Бундан ва $\operatorname{supp}\psi\subset\tilde{G}_1$ эканлигидан биз $\psi\in D(G_1)$ бўлишлигини ҳосил қиламиз ва (3.5.4) исбот бўлади.

Энди (3.5.6) тенгсизликни исбот қиламиз. $x\in G_1$ бўлсин. У ҳолда исбот қилинганига кўра $D_x^{\alpha}\varphi(x,y)\in D(G'_2)$, $G'_2\subset\subset G_2$ бўлади. Ҳамда умумлашган функция учун келтирилган зарурий ва етарли шартга кўра шундай бир $C\geq 0$ ва $m\geq 0$ бўлган бутан сонлар мавжуд бўлиб, бу сонлар фақат g умумлашган функция ва G'_2 очиқ тўпламга боғлиқ бўлиб ихтиёрий $x\in G_1$ учун

$$\left|D^{\alpha}\psi(x)\right|=\left|(g(y),\,D_x^{\alpha}\varphi(x,y))\right|\leq C\max_{\substack{y\in G'_2\\ |\beta\leq m|}}\left|D_y^{\beta}D_x^{\alpha}\varphi(x,y)\right|$$

тенгсизлик ўринли бўлади ва бундан (3.5.6) тенгсизлик келиб чиқади. 1–лемма исбот бўлди.

Натижа. *$\varphi(x,y)\to\psi(x)=(g(y),\varphi(x,y))$ амали $D(G_1\times G_2)$ фазони $D(G_1)$ фазога акслантирувчи чизиқли ва узлуксиз оператор бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, бу амалнинг чизиқли эканлиги бевосита келиб чиқади. Шунингдек, агар $\varphi(x,y)\in D(G_1\times G_2)$ бўлса, у ҳолда 1–леммага кўра $\psi(x)\in D(G_1)$ эканлиги келиб чиқади. Бу эса шу амалнинг амали $D(G_1\times G_2)$ фазони $D(G_1)$ фазога акслантирувчи оператор эканлигини билдиради. Энди унинг узлуксизлигини исбот қиламиз. Агар $k\to\infty$ да $D(G_1\times G_2)$ фазода $\varphi_k\to 0$ яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $\operatorname{supp}\varphi_k\subset G'\subset\subset G_1\times G_2$ бўлиб $k\to\infty$ да $D_x^{\alpha}D_y^{\beta}\varphi_k(x,y)\overset{(x,y)}{\Rightarrow}0$ текис яқинлашувчи бўлади. Бундан ва (3.5.4), (3.5.6) тасдиқлардан $\psi_k(x)=(g(y),\,\varphi_k(x,y)),\,k=1,2,...$ кетма–кетлик учун $\operatorname{supp}\psi_k\subset\tilde{G}_1\subset\subset G_1$ ва $k\to\infty$ да $D^{\alpha}\psi_k(x)\overset{x}{\Rightarrow}0$ текис яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади, яъни $k\to\infty$ да $D'(G_1)$ фазода $\psi_k\to 0$ яқинлашувчи бўлади.

Энди (3.5.2) формула билан аниқланган тўғри кўпайтманинг таърифига қайтамиз. Ҳозиргина исбот қилинган натижага кўра $\varphi(x,y)\to\psi(x)=(g(y),\varphi(x,y))$ амали $D(G_1\times G_2)$ фазони $D(G_1)$ фазога акслантирувчи чизиқли ва узлуксиз оператор бўлади. Шунга кўра (3.5.2) формуланинг ўнг қисми билан аниқланган тўғри кўпайтма (f,ψ) қийматга тенг бўлиб $D(G_1\times G_2)$ фазодаги чизиқли ва узлуксиз функционални аниқлайди. Шу сабабдан $f(x)\times g(y)\in D'(G_1\times G_2)$ бўлади.

Худди шунга ўхшаш (3.5.2') формуладан фойдаланиб $g(y)\times f(x)\in D'(G_1\times G_2)$ эканлигини исбот қиламиз.

2. Тўғри кўпайтманинг хоссалари.

а) Тўғри кўпайтманинг коммутативлилиги. Ихтиёрий $f(x)\in D'(G_1)$ *ва* $g(y)\in D'(G_2)$ *умумлашган функциялар учун*

$$f(x)\times g(y)=g(y)\times f(x) \qquad (3.5.9)$$

формула ўринли бўлади.

Бу формула умумлашган функциялар тўғри кўпайтмасининг *коммутативлигини* ифода қилади.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $\varphi\in D(G_1\times G_2)$ асосий функция

$$\varphi(x,\,y)=\sum_{i=1}^{N}u_i(x)v_i(y),\ u_i\in D(G_1),\,v_i\in D(G_2) \qquad (3.5.10)$$

шаклида бўлса, у ҳолда (3.5.9) тенглик (3.5.2) ва (3.5.2') таърифларга асосан

$$(f(x)\times g(y),\,\varphi)=\left(f,\,\sum_{i=1}^{N}u_i(g,\,v_i)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(f,\,u_i)(g,\,v_i)=\left(g,\,\sum_{i=1}^{N}v_i(f,\,u_i)\right)=(g(y)\times f(x),\,\varphi)$$

эканлиги келиб чиқади.

(3.5.9) тенгликни ихтиёрий $\varphi\in D(G_1\times G_2)$ асосий функциялар учун келтириб чиқариш учун биз (3.5.10) кўринишидаги асосий функциялар тўплами $D(G_1\times G_2)$ фазода зич эканлигини кўрсатувчи леммани келтирамиз ва исбот қиламиз.

2–лемма. *Ихтиёрий* $\varphi\in D(G_1\times G_2)$ *асосий функция учун*

$$\varphi_k(x,\, y) = \sum_{i=1}^{N_k} u_{ik}(x) v_{ik}(y),\ u_{ik} \in D(G_1),\, v_{ik} \in D(G_2),\, k = 1,2,...$$

шаклидаги шундай бир $\varphi_k(x,\, y) \in D(G_1 \times G_2)$ *асосий функция кетма–кетлиги мавжуд бўлиб бу кетма–кетлик* $\varphi \in D(G_1 \times G_2)$ *асосий функцияга* $D(G_1 \times G_2)$ *фазода яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. $\mathrm{supp}\,\varphi \subset\subset \tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2 \subset\subset G'_1 \times G'_2 \subset\subset G_1 \times G_2$ бўлсин. У ҳолда Вейерштрасс теоремасига кўра шундай бир $P_k(x,\, y),\ k = 1,\, 2,\, ...$ полиномлар кетма–кетлиги мавжуд бўлиб, бунда $|\alpha| \le k$ бўлган ихтиёрий α мультииндекс ва $(x, y) \in \overline{G'_1} \times \overline{G'_2}$ нуқта учун

$$\left| D^\alpha \varphi(x, y) - D^\alpha P_k(x, y) \right| < \frac{1}{k} \tag{3.5.11}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунингдек $\xi(x) \in D(G'_1)$, $x \in \tilde{G}_1$ нуқта учун $\xi(x) = 1$ ва $\eta(y) \in D(G'_2)$, $y \in \tilde{G}_2$ нуқта учун $\eta(y) = 1$ бўлган функциялар бўлсин. У ҳолда

$$\varphi_k(x, y) = \xi(x)\eta(y)P_k(x, y)\,,\ k = 1,2,...$$

кетма–кетлик талаб этилган кетма–кетлик бўлади. Ҳақиқатдан ҳам $\mathrm{supp}\,\varphi_k \subset\subset G'_1 \times G'_2 \subset\subset G_1 \times G_2$ ва барча $|\alpha| \le k$ бўлган α мультииндекс учун (3.5.11) тенгсизликка кўра

$$\left| D^\alpha \varphi(x, y) - D^\alpha P_k(x, y) \right| \le$$

$$\le \begin{cases} \dfrac{1}{k}, \text{ агар } (x, y) \in \tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2 \text{ бўлса,} \\ \dfrac{c_\alpha}{k}, \text{ агар } (x, y) \in G'_1 \times G'_2 \setminus \left(\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2 \right) \text{ бўлса} \end{cases}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз, бунда c_α қандайдир сонлар бўлиб барча $\beta \le \alpha$ учун $\max\left| D^\beta \xi \right|$ ва $\max\left| D^\beta \eta \right|$ орқали баҳоланади. 2–лемма исбот бўлди.

Ихтиёрий $\varphi \in D(G_1 \times G_2)$ асосий функция учун 2–леммага кўра (3.5.10) кўринишидаги $\{\varphi_k\}$ асосий функциялар кетма–кетлиги мавжуд бўлиб $\varphi \in D(G_1 \times G_2)$ асосий функцияга $D(G_1 \times G_2)$ фазода яқинлашувчи бўлади. Бундан ва $D(G_1 \times G_2)$

фазодаги $f(x)\times g(y)$ ва $g(y)\times f(x)$ функционалларнинг узлуксизлигидан, ҳамда (3.5.10) шаклидаги асосий функциялар учун исбот қилинган (3.5.9) тенгликни қўллаб умумий ҳолда

$$(f(x)\times g(y),\,\varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\varphi_k)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}(g(y)\times f(x),\varphi_k)=(g(y)\times f(x),\,\varphi)$$

(3.5.9) тенгликни ҳосил қиламиз.

б) Тўғри кўпайтманинг ассоциативлиги. Агар $f(x)\in D'(G_1)$, $g(y)\in D'(G_2)$ *ва* $h(y)\in D'(G_3)$ *умумлашган функциялар бўлса, у ҳолда*

$$[f(x)\times g(y)]\times h(z)=f(x)\times[g(y)\times h(z)] \qquad (3.5.12)$$

формула ўринли бўлади.

Бу формула умумлашган функциялар тўғри кўпайтмасининг ассоциативлигини ифода қилади.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $\varphi\in D(G_1\times G_2\times G_3)$ асосий функция бўлса, у ҳолда

$$\big([f(x)\times g(y)]\times h(z),\,\varphi(x,y,z)\big)=\big(f(x)\times g(y),(h(z),\,\varphi(x,y,z))\big)=$$
$$=\big(f(x),(g(y),(h(z),\,\varphi(x,y,z)))\big)=\big(f(x),(g(y)\times h(z),\,\varphi(x,y,z))\big)=$$
$$=\big(f(x)\times[g(y)\times h(z)],\,\varphi(x,y,z)\big)$$

тенглик ўринли бўлади.

Юқоридаги умумлашган функциялар тўғри кўпайтмасининг коммутативлиги ва ассоциативлигини ҳисобга олиб биз

$$(f\times g)\times h=f\times g\times h$$

тенгликни ёзамиз.

Мисол. $\delta(x)=\delta(x_1)\times\delta(x_2)\times\ldots\times\delta(x_n)$ тенглик ўринли бўлади.

в) Агар $g\in D'(G_2)$ *бўлса, у ҳолда* $f\to f\times g$ *амали* $D'(G_1)$ *фазони* $D'(G_1\times G_2)$ *фазога акслантирувчи чизиқли ва узлуксиз оператор бўлади.*

Бу акслантиришнинг чизиқли эканлиги кўрсатамиз, яъни ихтиёрий $f_1\in D'(G_1)$, $f_2\in D'(G_1)$ ва ихтиёрий λ,μ сонлар учун

$$\big[\lambda f_1+\mu f_2\big](x)\times g(y)=\lambda(f_1(x)\times g(y))+\mu(f_2(x)\times g(y))$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varphi(x,y)\in D(G_1\times G_2)$, $f_1\in D'(G_1)$, $f_2\in D'(G_1)$ ва ихтиёрий λ,μ сонлар учун

$$\begin{aligned}\big([\lambda f_1+\mu f_2](x)\times g(y),\,\varphi(x,y)\big)&=\big([\lambda f_1+\mu f_2](x),\big(g(y),\,\varphi(x,y)\big)\big)=\\ &=\big(\lambda f_1,\big(g(y),\,\varphi(x,y)\big)\big)+\big(\mu f_2(x),\big(g(y),\,\varphi(x,y)\big)\big)=\\ &=\lambda\big(f_1,\big(g(y),\,\varphi(x,y)\big)\big)+\mu\big(f_2(x),\big(g(y),\,\varphi(x,y)\big)\big)=\\ &=\lambda\big(f_1(x)\times g(y),\,\varphi(x,y)\big)+\mu\big(f_2(x)\times g(y),\,\varphi(x,y)\big)\end{aligned}$$

тенглик ўринли бўлади. Энди унинг узлуксиз эканлигини исбот қиламиз. $D'(G_1)$ фазода $k\to\infty$ да $f_k\to 0$ бўлсин. У ҳолда барча $\varphi\in D(G_1\times G_2)$ учун $k\to\infty$ да

$$(f_k(x)\times g(y),\varphi(x,y))=(f_k(x),\,(g(y),\varphi(x,y)))=(f_k(x),\,\psi(x))\to 0,$$

яъни $D'(G_1)$ фазода $k\to\infty$ да $f_k(x)\times g(y)\to$ бўлади. Биз бу ерда 1–леммага кўра $\psi(x)=(g(y),\varphi(x,y))\in D(G_1)$ эканлигидан фойдаландик.

г) Агар $f(x)\in D'(G_1)$, $g(y)\in D'(G_2)$ *умумлашган функциялар бўлса, у ҳолда*

$$\operatorname{supp}\big(f(x)\times g(y)\big)=\operatorname{supp}f(x)\times\operatorname{supp}g(y)\qquad\textit{(3.5.13)}$$

формула ўринли бўлади.

Натижа. *Агар* $G_1\times G_2$ *очиқ тўпламда* $f(x)\times 1(y)=0$ *бўлса, у ҳолда* G_1 *очиқ тўпламда* $f(x)=0$ *бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, агар $(x_0,y_0)\in\operatorname{supp}f(x)\times g(y)$ ва (x_0,y_0) нуқтанинг $U(x_0,y_0)$ атрофи $G_1\times G_2$ очиқ тўпламда жойлашган бўлса, у ҳолда x_0 ва y_0 нуқталарнинг мос U_1 ва U_2 атрофлари мавжуд бўлиб $U_1\times U_2\subset U(x_0,y_0)$ бўлади. Умумлашган функция ташувчисининг таърифига кўра шундай бир $\varphi_1\in D(U_1)$ ва $\varphi_2\in D(U_2)$ функциялар мавжуд бўлиб $(f,\varphi_1)\neq 0$ ва $(g,\varphi_2)\neq 0$ бўлади. У ҳолда

$$(f\times g,\varphi_1\varphi_2)=(f,\varphi_1)(g,\varphi_2)\neq 0$$

бўлади. Бундан $U(x_0,y_0)$ атрофнинг ихтиёрий эканлигидан $(x_0,y_0)\in\operatorname{supp}f(x)\times\operatorname{supp}g(y)$ эканлиги келиб чиқади. Демак,

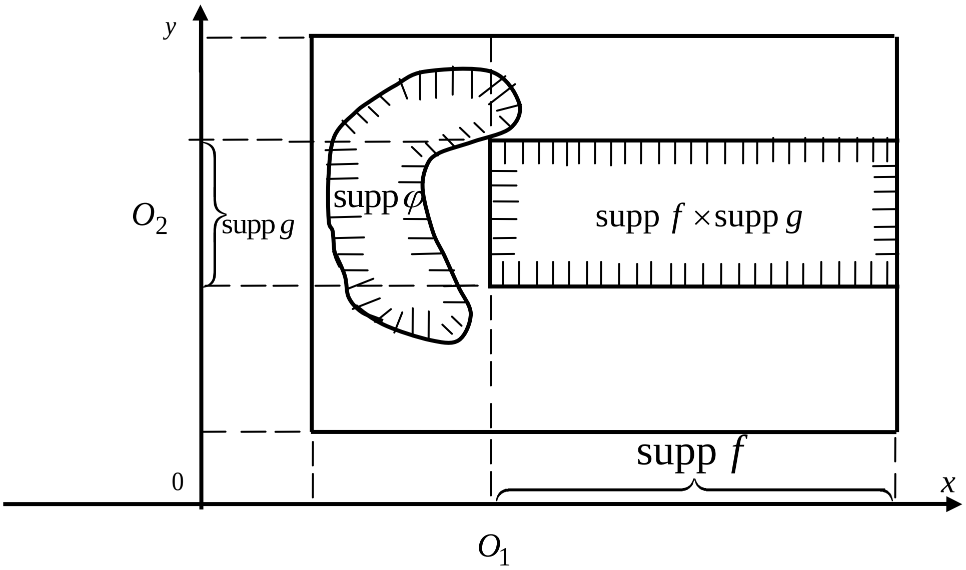
$$\operatorname{supp}f(x)\times\operatorname{supp}g(y)\supset\operatorname{supp}\big(f(x)\times g(y)\big)\qquad(3.5.14)$$

муносабат ўринли бўлади.

Энди тескари муносабатни исбот қиламиз. Бунинг учун биз $\varphi(x,y)\in D(G_1\times G_2)$ асосий функциянинг ташувчиси учун

$$\operatorname{supp}\varphi(x,y)\subset\big(G_1\times G_2\big)\setminus\big(\operatorname{supp}f(x)\times\operatorname{supp}g(y)\big)$$

муносабат ўринли бўлган функцияни оламиз.



У ҳолда $\operatorname{supp} f(x)$ тўпламнинг шундай бир U атрофи топиладики, бунда ҳар бир $x \in U$ учун $\operatorname{supp}\varphi(x,y) \subset G_2 \setminus \operatorname{supp} g(y)$ муносабат ўринли бўлади. Шунинг учун $x \in U$ учун $\psi(x) = (g(y), \varphi(x,y)) = 0$ бўлади ва шунга кўра $\operatorname{supp}\psi(x) \bigcap \operatorname{supp} f(x) = \varnothing$ бўлади. Шунинг учун

$$\left(f(x) \times g(y),\ \varphi(x,y)\right) = \left(f(x),\ \psi(x)\right) = 0$$

тенглик ўринли бўлади. Шундай қилиб $O_{f(x)\times g(y)}$ ноллар тўплами $\left(G_1 \times G_2\right) \setminus \left(\operatorname{supp} f(x) \times \operatorname{supp} g(y)\right)$ тўпламда жойлашган ва демак

$$\operatorname{supp}\left(f(x) \times g(y)\right) \supset \operatorname{supp} f(x) \times \operatorname{supp} g(y)$$

муносабат ўринли бўлади ва (3.5.14) муносабатга қараганда тескари муносабат ўринли бўлгани учун (3.5.13) тенглик исбот қилади.

д) Текшириш осон бўлган қуйидаги формулалар ўринлидир: агар $f(x) \in D'(G_1)$, $g(y) \in D'(G_2)$ умумлашган функциялар бўлса, у ҳолда

$$D_x^{\alpha} D_y^{\beta} [f(x) \times g(y)] = D_x^{\alpha} f(x) \times D_y^{\beta} g(y)\ , \tag{3.5.15}$$

$$a(x)b(y)[f(x) \times g(y)] = [a(x)f(x)] \times [b(y)g(y)]\ , \tag{3.5.16}$$

$$f \times g(x+x_0, y+y_0) = f(x+x_0) \times g(y+y_0) \tag{3.5.17}$$

формулалар ўринли бўлади.

3. Умумлашган функциялар тўғри кўпайтмасининг айрим тадбиқлари. Агар $F(x,y) \in D'(G_1 \times G_2)$ умумлашган функция

$$F(x,y) = f(x) \times 1(y)\,,\; f(x) \in D'(G_1) \qquad (3.5.18)$$

шаклида тасвирланса, у ҳолда бу $F(x,y) \in D'(G_1 \times G_2)$ умумлашган функция y ўзгарувчига боғлиқмас деб айтилади. Бу ҳолда $F(x,y) \in D'(G_1 \times R^m)$ бўлади. $f(x) \times 1(y) = 1(y) \times f(x)$ умумлашган функция $\varphi(x,y) \in D(G_1 \times R^m)$ асосий функцияга

$$\big(f(x) \times 1(y), \varphi(x,y)\big) = \left(f(x), \int\limits_{R^m} \varphi(x,y)dy \right) =$$

$$= \big(1(y) \times f(x), \varphi(x,y)\big) = \int\limits_{R^m} \big(f(x), \varphi(x,y)\big)dy$$

қоида бўйича таъсир қилади.

Шундай қилиб, биз ихтиёрий $f(x) \in D'(G_1)$ ва $\varphi(x,y) \in D(G_1 \times R^m)$ учун

$$\left(f(x), \int\limits_{R^m} \varphi(x,y)dy \right) = \int\limits_{R^m} \big(f(x), \varphi(x,y)\big)dy \qquad (3.5.19)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу (3.5.19) формулани биз Фубини теоремасининг ўзига хос умумлашмаси деб қарашимиз мумкин бўлади.

$F(x,y) \in D'(G \times (a,b))$ бўлсин. Қуйидаги учта тасдиқ эквивалентдир:

1) $F(x,y)$ умумлашган функция y ўзгарувчига боғлиқ эмас;

2) $F(x,y)$ умумлашган функция $G \times (a,b)$ очиқ тўпламда y ўзгарувчига нисбатан трансляцияси инвариант бўлади, яъни $a < y < b$ ва $a < y + h < b$ учун

$$F(x, y+h) = F(x,y) \qquad (3.5.20)$$

тенглик ўринли бўлади;

3) $F(x,y)$ умумлашган функция $G \times (a,b)$ очиқ тўпламда

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad (3.5.21)$$

тенгламани қаноатлантиради.

Натижа. *Агар $f(x)\in D'(G)$ ва G очиқ тўпламда ҳар бир $j=1,2,...,n$ учун $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}=0$ тенгликларни қаноатлантирса, у ҳолда G очиқ тўпламда $f=const$ бўлади; агар $f(x)\in D'(G)$ умумлашган функциянинг G очиқ тўпламда барча аргументлар бўйича трансляцияси инвариант бўлса, у ҳолда G очиқ тўпламда $f=const$ бўлади.*

Исбот. Кўриниб турибдики, бевосита $1)\to 2)$ муносабат келиб чиқади. (3.5.17) муносабатга кўра (3.5.18) муносабатдан $2)\to 3)$ муносабат келиб чиқади. Бунинг учун $\frac{F(x,y+h)-F(x,y)}{h}=0$ тенгликда $D'(G\times(a,b))$ фазода $h\to 0$ да лимитга ўтсак, у ҳолда биз $F(x,y)\in D'(G\times(a,b))$ умумлашган функция (3.5.21) тенгламани қаноатлантиришини кўрамиз.

Энди $3)\to 1)$ муносабат келиб чиқишини исбот қиламиз. Берилган $F(x,y)\in D'(G\times(a,b))$ умумлашган функция $G\times(a,b)$ очиқ тўпламда (3.5.21) тенгламани қаноатлантирсин. У ҳолда ихтиёрий $\varphi(x,y)\in D(G\times(a,b))$ функция учун

$$\varphi(x,y)=\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}+\omega_\varepsilon(y-y_0)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\xi)d\xi\ , \qquad (3.5.22)$$

тасвирни ҳосил қиламиз, бунда $y_0\in(a,b)$, $\varepsilon<\min(y_0-a,\,b-y_0)$ ва $\psi(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\varphi(x,y')-\omega_\varepsilon(y'-y_0)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\xi)d\xi\right]dy'\in D(G\times(a,b))$ бўлади. $f(x)\in D'(G)$ умумлашган функциянинг $\chi(x)\in D(G)$ асосий функцияга таъсирини

$$(f,\chi)=\big(F(x,y),\,\omega_\varepsilon(y-y_0)\chi(x)\big)$$

қоида бўйича киритамиз ва (3.5.21) тенгликни ҳисобга олиб (3.5.22) тенгликдан

$$(F,\varphi)=\left(F(x,y),\,\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}+\omega_\varepsilon(y-y_0)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\xi)d\xi\right)=$$

$$=\left(f(x),\,\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\xi)d\xi\right)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, яъни исбот қилиниши керак бўлган $F(x,y)=f(x)\times 1(y)$ тенглик ҳосил бўлади.

Қуйидаги тасдиқ ҳам ўринлидир:

$F(x,y)\in D'(G\times R^1)$ бўлсин. У ҳолда

$$yu(x,y)=F(x,y) \tag{3.5.23}$$

тенглама ечимга эга ва унинг умумий ечими ихтиёрий $\varphi(x,y)\in D(G\times R^1)$ асосий функция учун

$$(u,\varphi(x,y))=(F,\psi(x,y))+(f(x)\times\delta(y),\varphi(x,y)) \tag{3.5.24}$$

кўринишга эга бўлади, бунда $f(x)\in D'(G)$ бўлган ихтиёрий умумлашган функция,

$$\psi(x,y)=\frac{1}{y}\left[\varphi(x,y)-\eta(y)\varphi(x,0)\right], \tag{3.5.25}$$

$\eta(y)\in D(R^1)$ бўлган ихтиёрий функция бўлиб $y=0$ нуқта атрофида $\eta(y)=1$ бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, (3.5.25) тенглик билан берилган $\varphi\to\psi$ амали $D(G\times R^1)$ фазони $D(G\times R^1)$ фазога акслантирувчи чизиқли ва узлуксиз оператор бўлиб (3.5.24) тенгликнинг ўнг қисми $D'(G\times R^1)$ фазодан олинган умумлашган функция бўлади, бундан ташқари (F,ψ) биринчи қўшилувчи (3.5.23) тенгламани, иккинчи қўшилувчи бўлган $f(x)\times\delta(y)$ умумлашган функция (3.5.23) тенгламага мос

$$yu(x,y)=0 \tag{3.5.26}$$

бир жинсли тенгламани қаноатлантиради.

Бу ерда $f(x)\in D'(G)$ бўлган ихтиёрий умумлашган функция учун $f(x)\times\delta(y)$ умумлашган функциянинг (3.5.26) бир жинсли тенгламанинг $D'(G\times R^1)$ фазодаги умумий ечими эканлигини кўрсатиш керак бўлади. У ҳолда (3.5.25) муносабатга кўра

$$\varphi(x,y)=y\psi(x,y)+\eta(y)\varphi(x,0),\ \ \psi(x,y)\in D(G\times R^1)$$

ва шунинг учун

$$(u(x,y),\varphi(x,y))=(u(x,y),y\psi(x,y))+(u(x,y),\eta(y)\varphi(x,0))=$$
$$=(u(x,y),\eta(y)\varphi(x,0)) \tag{3.5.27}$$

бўлади. $f(x)\in D'(G)$ умумлашган функциянинг $\chi(x)\in D(G)$ асосий функцияга таъсирини

$$(f,\chi)=\big(u(x,y),\,\eta(y)\chi(x)\,\big)$$

қоида бўйича киритамиз ва (3.5.27) тенгликдан ихтиёрий $\varphi(x,y)\in D(G\times R^1)$ учун

$$(u(x,y),\varphi(x,y))=(f(x),\varphi(x,0))=(f(x)\times\delta(y),\varphi(x,y))$$

тенгликни ҳосил қиламиз, яъни исбот қилиниши керак бўлган $u(x,y)=f(x)\times\delta(y)$ тенглик ҳосил бўлади.

4. Қисман ўзгарувчилар бўйича силлиқ бўлган умумлашган функциялар. $f(x,y)\in D'(G_1\times G_2)$ умумлашган функция ва $\varphi(x)\in D(G_1)$ асосий функция бўлсин. $f_\varphi(y)\in D'(G_2)$ умумлашган функцияни ихтиёрий $\psi(y)\in D(G_2)$ асосий функция учун

$$(f_\varphi(y),\psi(y))=(f(x,y)\,,\,\varphi(x)\psi(y))$$

формула бўйича киритамиз. Бу таърифдан

$$D^\alpha f_\varphi(y)=(D_y^\alpha f)_\varphi(y) \qquad (3.5.28)$$

дифференциаллаш формуласи келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\psi(y)\in D(G_2)$ асосий функция учун

$$((D_y^\alpha f)_\varphi(y),\,\psi(y))=(D_y^\alpha f(x,y)\,,\,\varphi(x)\psi(y))=$$
$$=(-1)^{|\alpha|}(f(x,y)\,,\,\varphi(x)D^\alpha\psi(y))=$$
$$=(-1)^{|\alpha|}(f_\varphi(y)\,,\,D^\alpha\psi(y))=(D^\alpha f_\varphi(y)\,,\,\psi(y))$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G_1)$ асосий функция учун умумлашган функция $f_\varphi(y)\in C^p(G_2)$, бунда $p=0,1,...$ бўлса, у ҳолда $f(x,y)\in D'(G_1\times G_2)$ умумлашган функция y ўзгарувчи бўйича $C^p(G_2)$ синфга тегишли деб айтилади.

Агар ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G_1)$ асосий функция учун умумлашган функция $f_\varphi(y)\in C^p(\bar G_2)$ бўлса, у ҳолда $f(x,y)\in D'(G_1\times G_2)$ умумлашган функция y ўзгарувчи бўйича $C^p(\bar G_2)$ синфга тегишли деб айтилади.

$f(x,y)\in D'(G_1\times G_2)$ умумлашган функция y ўзгарувчи бўйича $f\in C(G_2)$ синфга тегишли бўлсин. Бундан эса ҳар бир $y\in G_2$ учун $f(x,y)\in D'(G_1\times G_2)$ умумлашган функциянинг

$f_y(x) \in D'(G_1)$ қисқартирилгани мавжуд бўлади. Бундан ташқари ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G_1)$ асосий функция ва ихтиёрий $y \in G_2$ нуқта учун

$$f_\varphi(y) = (f_y(x), \varphi(x)) \tag{3.5.29}$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, ҳар бир тайинланган $y_0 \in G_2$ учун $\varphi \to f_\varphi(y_0)$ амали $\varphi(x) \in D(G_1)$ асосий функциялар фазосидаги чизиқли функционал бўлади. Унинг узлуксиз эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун барча етарлича катта $k \geq N(y_0)$ учун

$$\varphi \to (f_\varphi(y),\ \omega_{\frac{1}{k}}(y - y_0)),$$

бунда $\omega_{\frac{1}{k}}(y - y_0)$ “шапкача” функция бўлган ҳолда функционалнинг $D'(G_1)$ фазога қарашли эканлигини кўрамиз. Бундан ташқари $k \to \infty$ да

$$(f_\varphi(y),\ \omega_{\frac{1}{k}}(y - y_0)) \to (f_\varphi(y),\ \delta(y - y_0)) = f_\varphi(y_0)$$

яқинлашувчи бўлади. $D'(G_1)$ фазонинг тўлалиги ҳақидаги теоремага кўра бу $f_\varphi(y_0)$ функционал $f_\varphi(y_0) \in D'(G_1)$ бўлади. Уни биз f_{y_0} орқали белгиласак, у ҳолда (3.5.29) тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди (3.5.28) формулани ҳисобга олиб биз (3.5.29) тенгликдан ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G_1)$ асосий функция ва ихтиёрий $y \in G_2$ нуқта учун

$$D^\alpha (f_y(x), \varphi(x)) = \left((D_y^\alpha f)_y, \varphi\right) \tag{3.5.30}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Мисол. F умумлашган функция y ўзгарувчига боғлиқмас бўлсин, яъни $F(x, y) = f(x) \times 1(y)$, $f(x) \in D'(G_1)$ бўлсин. У ҳолда y ўзгарувчи бўйича $F \in C^\infty(R^m)$ ва $F_y(x) = f(x)$ бўлади.

G очиқ тўпламда узлуксиз ва финит бўлган функцияларнинг $C_0(G)$ синфини қарайлик. Агар $\operatorname{supp} f_k \subset G' \subset\subset G$ ва $k \to \infty$ интилганда $f_k(x) \overset{x \in G}{\Rightarrow} 0$ текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $k \to \infty$ да $C_0(G)$ фазода $f_k(x) \to 0$ яқинлашувчи деб атаймиз.

3–лемма. *Агар у ўзгарувчи бўйича $f \in C(G_2)$ бўлса, у ҳолда*

$$\chi \to (f_y, \chi(x,y))$$

амали $D(G_1 \times G_2)$ фазони $C_0(G)$ фазога узлуксиз акслантириш бўлади.

Исбот. $\chi \in D(G_1 \times G_2)$ бўлсин. У ҳолда $\operatorname{supp}\chi \subset G'_1 \times G'_2$, бунда $G'_1 \subset\subset G_1$ ва $G'_2 \subset\subset G_2$ компакт жойлашган тўпламлар бўлади. $\psi(y) = (f_y, \chi(x,y))$ деб белгилаймиз. У ҳолда $\operatorname{supp}\psi \subset G'_2 \subset\subset G_2$ муносабатга эга бўламиз. $\psi(y) \in C(G_2)$ эканлигини исбот қиламиз. $y_0 \in G_2$ бўлган ихтиёрий нуқта ва $k \to \infty$ да $y_k \to y_0$ яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда

$$|\psi(y_k) - \psi(y_0)| \le |(f_{y_k}, \chi(x,y_0)) - (f_{y_0}, \chi(x,y_0))| +$$
$$+|(f_{y_k}, \chi(x,y_k) - \chi(x,y_0))| \qquad (3.5.31)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. (3.5.31) тенгсизликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи $(f_y, \chi(x,y_0))$ функциянинг узлуксизлигига кўра $k \to \infty$ да 0 га яқинлашувчи бўлади. Иккинчи қўшилувчининг ҳам 0 га яқинлашувчи бўлишлиги $\{f_{y_k}\} \subset D'(G_1)$ тўпламнинг суст чегараланганлиги ва $k \to \infty$ да $D(G_1)$ фазода $\chi(x,y_k) - \chi(x,y_0) \to 0$ интилувчи эканлигидан келиб чиқади. Шундай қилиб, $\psi(y) \in C(G_2)$ ва шунинг учун $\psi(y) \in C_0(G_2)$ бўлади.

Энди $k \to \infty$ да $D(G_1 \times G_2)$ фазода $\chi_k \to 0$ яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $\operatorname{supp}\chi_k \subset G'_1 \times G'_2$, бунда $G'_1 \subset\subset G_1$ ва $G'_2 \subset\subset G_2$ компакт жойлашган тўпламлар бўлади. $\psi_k(y) = (f_y, \chi_k(x,y))$ деб белгилаймиз. У ҳолда $\operatorname{supp}\psi_k \subset G'_2 \subset\subset G_2$ муносабатга эга бўламиз. Шунингдек, $\{f_y, y \in G'_2\}$ умумлашган функциялар тўплами $D'(G_2)$ фазода суст чегараланган бўлади. Шунинг учун функционал узлуксиз бўлишлигининг зарурий ва етарли шартига кўра шундай бир $K > 0,\ m \ge 0$ ўзгармаслар мавжуд бўладики, бунда барча $y \in G_2$ учун $k \to \infty$ да

$$|\psi_k(y)| = \left|(f_y,\, \chi_k(x,y))\right| \le K \left\|\chi_k(x,y)\right\|_{C^m\left(\overline{G'_1}\right)} \le$$

$$\le K \left\|\chi_k(x,y)\right\|_{C^m\left(\overline{G'_1}\times\overline{G'_2}\right)} \to 0 \qquad (3.5.31)$$

эканлигини ҳосил қиламиз. 3–лемма исбот бўлди.

Энди қуйидаги формулани исбот қиламиз: *агар у ўзгарувчи бўйича* $f \in C(G_2)$ *бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $\chi(x,y) \in D(G_1 \times G_2)$ *асосий функция учун*

$$(f,\chi) = \int\limits_{R^m} (f_y,\, \chi(x,y))dy \qquad (3.5.32)$$

тенглик ўринли бўлади, яъни $f(x,y) = f_y(x)$ *бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, (3.5.29) тенглик ўринли бўлганлиги учун (3.5.32) тенглик $\chi_N(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k(x)\psi_k(y)$ шаклидаги асосий функциялар учун

$$\left(f, \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x)\psi_k(y)\right) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{R^m} f_{\varphi_k}(y)\psi_k(y)dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{R^m} (f_y, \varphi_k(x))\psi_k(y)dy = \int\limits_{R^m} \left(f_y, \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x)\psi_k(y)\right)dy \qquad (3.5.33)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $\varphi_k(x) \in D(G_1)$ ва $\psi_k(y) \in D(G_2)$ бўлган асосий функциялардир. Бу $\chi_N(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k(x)\psi_k(y)$ шаклидаги асосий функциялар тўплами $D(G_1 \times G_2)$ асосий функциялар фазосида зич бўлганлиги учун ва бундан ташқари 3–леммага кўра, агар $N \to \infty$ да $D(G_1 \times G_2)$ асосий функциялар фазосида $\chi_N(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k(x)\psi_k(y) \to \chi(x,y)$ асосий функцияга интилувчи бўлса, у ҳолда $C_0(G)$ фазода

$$\left(f_y, \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x)\psi_k(y)\right) \to \left(f_y, \chi(x,y)\right)$$

яқинлашувчи бўлади. Бундан ва (3.5.33) тенгликдан (3.5.32) тенглик келиб чиқади.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

23.1. $D'(R^{n+m}(x,y))$ умумлашган функциялар фазосида

$$\operatorname{supp}\big(f(x)\times g(y)\big)=\operatorname{supp} f(x)\times \operatorname{supp} g(y)$$

тенгликни исботланг.

23.2. $f(x)\in D'(R^n$ умумлашган функция x_i ўзгарувчига боғлиқмас бўлишлиги учун $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

23.3. $f(x)\in D'(R^n$ умумлашган функция x_i ўзгарувчига боғлиқмас бўлишлиги учун унинг x_i ўзгарувчи бўйича барча силжишларига нисбатан инвариант бўлишлиги зарур ва етарли эканлигини исботланг.

23.4. $D'(R^{n+1}(x,t))$ умумлашган функциялар синфида

$$\big(u_1(x)\cdot\delta(t),\varphi(x,t)\big)=\big(u_1(x),\varphi(x,0)\big)$$

тенгликни исботланг.

23.5. $D'(R^{n+1}(x,t))$ умумлашган функциялар синфида

$$\big(u_0(x)\cdot\delta'(t),\varphi(x,t)\big)=-\left(u_0(x),\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}\right)$$

тенгликни исботланг.

23.6. $D'(R^n)$ умумлашган функциялар синфида $\theta(x_1)\times\ldots\times\theta(x_n)=\theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ тенгликни исботланг.

23.7. $D'(R^n)$ умумлашган функциялар синфида $\delta(x_1)\times\ldots\times\delta(x_n)=\delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ тенгликни исботланг.

23.8. $D'(R^n)$ умумлашган функциялар синфида $\dfrac{\partial^n\theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}=\delta(x_1)\times\delta(x_2)\times\ldots\times\delta(x_n)$ тенгликни исботланг.

23.9. $D'(R^{n+m})$ умумлашган функциялар синфида $\big(f\cdot g\big)(x+x_0,y)=f(x+x_0)\cdot g(y)$ тенгликни исботланг.

23.10. $D'(R^{n+m})$ умумлашган функциялар синфида $a(x)\big(f(x)\cdot g(y)\big)=a(x)f(x)\cdot g(y)$ тенгликни исботланг, бунда $a(x)\in C^\infty(R^n)$.

23.11. $D'(R^2)$ умумлашган функциялар синфида $\frac{\partial}{\partial t}\theta(at-|x|)=a\delta(at-|x|)$ тенгликни исботланг.

23.12. $D'(R^2)$ умумлашган функциялар синфида $\frac{\partial}{\partial x}\theta(at-|x|)=\theta(t)\delta(at+x)-\theta(t)\delta(at-x)$ тенгликни исботланг.

23.13. $D'(R^2)$ умумлашган функциялар синфида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(at-|x|),\ \varphi(x,t)\right)=-a\left(\delta(at-|x|),\ \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\right)$$

тенгликни исботланг.

23.14. $D'(R^2)$ умумлашган функциялар синфида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(at-|x|),\ \varphi(x,t)\right)=-\left(\theta(t)\delta(at+x),\ \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right)+$$

$$+\left(\theta(t)\delta(at-x),\ \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right)$$

тенгликни исботланг.

$f(x)\cdot 1(y)$ шаклидаги умумлашган функция y ўзгарувчига боғлиқмас деб айтилади. Бу умумлашган функция

$$\left(f(x)\cdot 1(y),\ \varphi(x,y)\right)=\int_{R^m}\left(f(x),\ \varphi(x,y)\right)dy$$

қоида бўйича таъсир қилади.

23.15. $D'(R^{n+m})$ умумлашган функциялар синфида

$$\int_{R^m}\left(f(x),\ \varphi(x,y)\right)dy=\left(f(x),\ \int_{R^m}\varphi(x,y)dy\right)$$

тенгликни исботланг.

23.16. $D'(R^{n+m})$ умумлашган функциялар синфида $f(x)\in D'(R^n)$ умумлашган функция ва $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n>0$ бўлган $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ мультииндекс учун

$$D_y^{\alpha}\left(f(x)\cdot 1(y)\right)=0$$

тенгликни исботланг.

6-§. Умумлашган функцияларнинг ўрамаси

1. Умумлашган функциялар ўрамасининг таърифи. Айтайлик $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар R^n фазода локал жамланувчи функциялар бўлсин. Агар $\int\limits_{R^n} f(y)g(x-y)dy$ интеграл деярли ҳамма $x \in R^n$ нуқталар учун мавжуд ва R^n фазода локал жамланувчи функцияни аниқласа, у ҳолда бу функция $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ўрамаси деб айтилади. Ҳамда $(f * g)(x)$ каби белгиланади. Шундай қилиб

$$(f * g)(x) = \int\limits_{R^n} f(y)g(x-y)dy =$$

$$= \int\limits_{R^n} g(y)f(x-y)dy = (g * f)(x) \qquad (3.6.1)$$

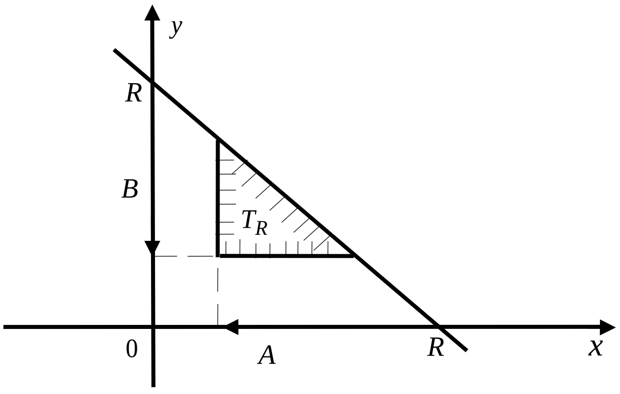
тенглик ўринли бўлади.

$(f * g)(x)$ ўрама мавжуд бўладиган қуйидаги икки ҳолни алоҳида қараймиз:

а) $f(x) \in L^1_{loc}(R^n)$, $g(x) \in L^1_{loc}(R^n)$, $\operatorname{supp} f(x) \subset A$, $\operatorname{supp} g(x) \subset B$ бўлсин, бундан ташқари A ва B тўпламлар шундай тўпламларки, ихтиёрий $R > 0$ мусбат сони учун

$$T_R = \left[(x,y): x \in A, y \in B, |x+y| \le R\right]$$

тўплам R^{2n} фазода чегараланган бўлсин. Масалан, $A = [a,b]$, $a \ge 0$ ва $B = [c,d]$, $c \ge 0$ тўпламлар бўлса, у ҳолда $0 < R \le b+d$ учун $T_R = [(x,y): a+b \le x+y \le R]$ шаклида ва $R \ge b+d$ учун $T_R = [(x,y): a+b \le x+y \le b+d]$ шаклида бўлади. Бу тўплам графиги



шаклида тасвирланади. У ҳолда $(f*g)(x)\in L^1_{loc}(R^n)$ бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, Фубини теоремасидан фойдаланиб ихтиёрий $R>0$ мусбат сони учун

$$\int\limits_{|x|<R}|(f*g)(x)|dx\le\int\limits_{|x|<R}\int\limits_{R^n}|f(y)|\cdot|g(x-y)|dydx\le$$

$$\le\iint\limits_{T_R}|f(y)|\cdot|g(\xi)|dyd\xi<\infty$$

тенгсизлик ўринли эканлигини ҳосил қиламиз. Хусусан, агар $f(x)$ ёки $g(x)$ функция финит бўлса, у ҳолда T_R тўплам чегараланган бўлади.

б) Агар $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ge 1$ бўлиб $f(x)\in L_p(R^n)$ ва $g(x)\in L_q(R^n)$ бўлса, у ҳолда $(f*g)(x)\in L_r(R^n)$ бўлади, бунда $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$ бўлган сон.

Ҳақиқатдан ҳам, $\alpha\ge 0$, $\beta\ge 0$, $s\ge 1$ ва $t\ge 1$ сонларни шундай танлаймизки, бунда

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1,\ \alpha r=p=(1-\alpha)s,\ \beta r=q=(1-\beta)t$$

тенгликлар ўринли бўлсин. У ҳолда

$$p+\frac{pr}{s}=r=q+\frac{qr}{t}$$

тенглик ўринли бўлади, ҳамда Гёльдер тенгсизлиги ва Фубини теоремасидан фойдаланиб

$$\|f*g\|^r_{L_r}=\int\limits_{R^n}\left|\int\limits_{R^n}f(y)g(x-y)dy\right|^r dx\le$$

$$\le\int\limits_{R^n}\left[\int\limits_{R^n}|f(y)|^{\alpha}\cdot|g(x-y)|^{\beta}|f(y)|^{1-\alpha}|g(x-y)|^{1-\beta}dy\right]^r dx\le$$

$$\le\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n}|f(y)|^{\alpha r}\cdot|g(x-y)|^{\beta r}dy\left[\int\limits_{R^n}|f(y)|^{(1-\alpha)s}dy\right]^{\frac{r}{s}}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{R^n} |g(x-y)|^{(1-\beta)t}\,dy\right]^{\frac{r}{t}} \le \|f\|_{L_p}^{r}\cdot\|g\|_{L_q}^{r}$$

талаб қилинган баҳолашни ҳосил қиламиз.

$(f*g)(x)$ ўрама $D(R^n)$ асосий функциялар фазосида

$$\left((f*g)(x),\varphi(x)\right)=\int\limits_{R^n}(f*g)(x)\varphi(x)dx=$$

$$=\int\limits_{R^n}\varphi(x)\int\limits_{R^n}f(y)g(x-y)dydx=\int\limits_{R^n}f(y)\int\limits_{R^n}g(x-y)\varphi(x)dxdy=$$

$$=\int\limits_{R^n}f(y)\int\limits_{R^n}g(\xi)\varphi(y+\xi)d\xi dy$$

қоида бўйича таъсир қилувчи регуляр умумлашган функцияни аниқлайди, яъни ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функциялар учун

$$\left((f*g)(x),\varphi(x)\right)=\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n}f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy \qquad (3.6.2)$$

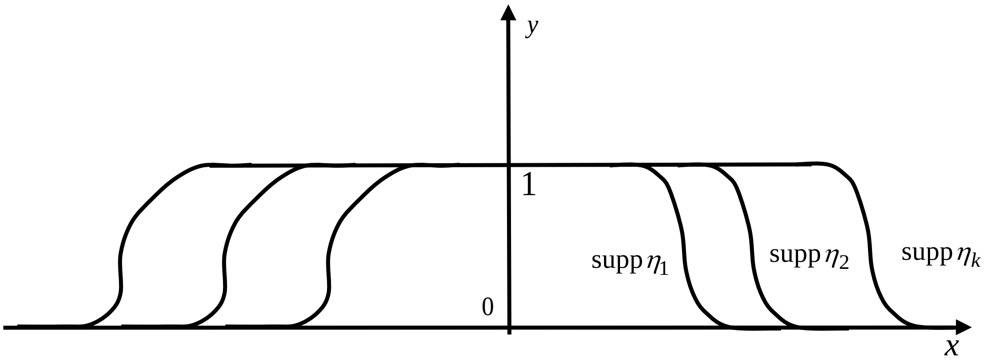
тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликни келтириб чиқаришда биз бир нечта марта Фубини теоремасидан фойдаландик.

Таъриф. *Агар*

а) ихтиёрий K *компакт тўплам учун шундай бир* $N=N(K)$ *номер топилиб ихтиёрий* $x\in K$ *ва ихтиёрий* $k\ge N$ *учун* $\eta_k(x)=1$ *бўлсин;*

б) $\{\eta_k(x)\}$ *функциялар кетма–кетлиги* $x\in R^n$ *фазода ўзининг барча ҳосилалари билан биргаликда текис чегараланган бўлсин, яъни ихтиёрий* α *–мультииндекс учун шундай бир* $C_\alpha>0$ *мусбат сон топилиб барча* $x\in R^n$, $k=1,2,...$ *учун* $\left|D^\alpha\eta_k(x)\right|<C_\alpha$ *тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда* $D(R^n)$ *фазодан олинган* $\{\eta_k(x)\}$ *асосий функциялар кетма–кетлиги* R^n *фазода* 1 *га яқинлашади деб айтилади.*

$n=1$ бўлган ҳолда $\eta_k(x), k=1,2,...$ функциялар кетма-кетлигининг графиги



шаклида тасвирланади.

Шуни таъкидлаш керакки, бундай шартларни қаноатлантирувчи кетма-кетлик ҳар доим мавжуд. Масалан: $\eta_k(x)=\eta\left(\frac{x}{k}\right)$ функциялар кетма–кетлиги бунга мисол бўлади, бунда $\eta(x)\in D(R^n)$ ва $U_1(0)=\left\{x:\ |x|<1,\ \ x\in R^n\right\}$ шарда $\eta(x)=1$ деб олинган.

Энди (3.6.2) тенгликни ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функция учун

$$(f*g,\varphi)=\lim_{k\to\infty}(f(x)g(y),\eta_k(x;\,y)\varphi(x+y)) \qquad (3.6.3)$$

кўринишда ёзиш мумкинлигини исботлаймиз. Бунда $\eta_k(x;\,y)$, $k=1,2,...$ кетма-кетлик R^{2n} фазода 1 га интилувчи ихтиёрий кетма-кетлик бўлади.

Ҳақиқатан ҳам $c_0|f(x)g(y)\varphi(x+y)|$ функция R^{2n} фазода жамланувчи функция бўлади ва R^{2n} фазонинг деярли ҳамма жойида $k\to\infty$ интилганда $f(x)g(y)\varphi(x+y)$ функцияга яқинлашувчи бўлган $f(x)g(y)\eta_k(x;\,y)\varphi(x+y)$, $k=1,2,...$ функциялар кетма–кетлигини мажорандалайди, яъни шундай бир $c_0>0$ сон мавжуд бўлиб ихтиёрий $k=1,2,...$ учун

$$|f(x)g(y)\eta_k(x;\,y)\varphi(x+y)|\le c_0|f(x)g(y)\varphi(x+y)|$$

баҳолаш ўринли бўлади. Бу ерда Лебег теоремасини қўллаб биз

$$\int_{R^n}\int_{R^n}f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{R^n}\int_{R^n}f(x)g(y)\eta_k(x;\,y)\varphi(x+y)dxdy$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенглик (3.6.2) тенгликка кўра (3.6.3) тенгликка эквивалент бўлади.

Биз (3.6.3) ва (3.6.2) тенгликларга асосланган ҳолда умумлашган функцияларнинг ўрамасига қуйидагича таъриф берамиз.

$f(x)\in D'(R^n)$ ва $g(x)\in D'(R^n)$ умумлашган функциялар бўлиб, уларнинг $f(x)\times g(y)$ тўғри кўпайтмаси ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функцияга мос $\varphi(x+y)$ кўринишидаги функция учун аниқланган $(f(x)\times g(y),\varphi(x+y))$ функционал қуйидаги маънода давом эттирилиши мумкин бўлсин:

R^{2n} фазода 1 га яқинлашувчи бўлган ихтиёрий $\{\eta_k(x;y)\}\subset D(R^{2n})$ кетма-кетлик учун

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\,\eta_k(x;\,y)\varphi(x+y))=(f(x)\times g(y),\,\varphi(x+y))$$

сонли кетма–кетлик лимити мавжуд ва бу лимит $\{\eta_k(x;y)\}$ кетма–кетликка боғлиқмас бўлсин. Шуни алоҳида таъкидлаш керакки, ихтиёрий k учун $\eta_k(x;\,y)\varphi(x+y)\in D(R^{2n})$ бўлиб бу сонли кетма-кетлик аниқланган бўлади.

Таъриф. *Ихтиёрий* $f(x)\in D'(R^n)$ *ва* $g(x)\in D'(R^n)$ *умумлашган функциялар ва ихтиёрий* $\varphi(x)\in D(R^n)$ *асосий функция учун*

$$\big((f*g)(x),\,\varphi(x)\big)=\big(f(x)\times g(y),\,\varphi(x+y)\big)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\big(f(x)\times g(y),\,\eta_k(x;\,y)\varphi(x+y)\big)\qquad(3.6.4)$$

лимит мавжуд бўлган ҳолда бу тенглик билан аниқланган функционалга $f(x)\in D'(R^n)$ *ва* $g(x)\in D'(R^n)$ *умумлашган функцияларнинг ўрамаси деб айтилади ва* $(f*g)(x)$ *каби белгиланади.*

Бу тенглик билан аниқланган $(f*g)(x)$ ўрама ҳам $D'(R^n)$ фазога тегишли эканлигини, яъни умумлашган функция бўлишлигини исбот қиламиз. Бунинг учун $D'(R^n)$ фазонинг тўлалиги ҳақидаги теоремага кўра

$$(f(x)\times g(y),\,\eta_k(x;\,y)\varphi(x+y)),\quad k=1,\,2,\,...\qquad(3.6.5)$$

чизиқли функционалларнинг $D(R^n)$ фазода узлуксизлилигини кўрсатиш етарли бўлади. $\nu\to\infty$ интилганда $D(R^n)$ фазода

$\varphi_\nu(x) \to 0$ яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $\eta_k(x;y) \in D(R^{2n})$ бўлгани учун $\nu \to \infty$ интилганда $D(R^{2n})$ фазода

$$\eta_k(x;\ y)\varphi_\nu(x+y) \to 0$$

бўлади. Бундан $D(R^{2n})$ фазода $f(x) \times g(y)$ функционалнинг узлуксизлигидан фойдаланиб, $\nu \to \infty$ интилганда

$$\left(f(x) \times g(y), \eta_k(x;\ y)\varphi_\nu(x+y) \right) \to 0$$

эканлигини ҳосил қиламиз ва бу эса (3.6.5) кўринишидаги функционалларнинг $D(R^n)$ фазода узлуксизлигини исботлайди.

Шуни таъкидлаш керакки, $\varphi(x+y)$ функция $D(R^{2n})$ фазога тегишли эмас (бу функция R^{2n} фазода финит функция эмас). Бу эса (3.6.4) тенгликнинг ўнг қисмидаги лимитнинг ихтиёрий $f(x)$ ва $g(x)$ умумлашган функциялар жуфти учун ҳамма вақт ҳам мавжуд бўлмавермаслигини билдиради. Шунинг учун ҳам ўрама ҳар доим ҳам мавжуд бўлавермайди.

Ихтиёрий сондаги умумлашган функцияларнинг ўрамаси ҳам худди шунга ўхшаш аниқланади. Масалан, ихтиёрий $f(x) \in D'(R^n)$, $g(x) \in D'(R^n)$ ва $h(x) \in D'(R^n)$ умумлашган функциялар ва R^{3n} фазода 1 га яқинлашувчи бўлган ихтиёрий $\{\eta_k(x;y;z)\} \subset D(R^{3n})$ кетма-кетлик бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^n)$ асосий функция учун

$$\left((f * g * h)(x), \varphi(x) \right) = \left(f(x) \times g(y) \times h(z), \varphi(x+y+z) \right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left(f(x) \times g(y) \times h(z), \eta_k(x;\ y;z)\varphi(x+y+z) \right) \qquad (3.6.6)$$

лимит мавжуд бўлган ҳолда бу тенглик билан аниқланган функционалга $f(x) \in D'(R^n)$, $g(x) \in D'(R^n)$ ва $h(x) \in D'(R^n)$ умумлашган функцияларнинг *ўрамаси* деб айтилади ва $(f * g * h)(x)$ каби белгиланади.

2. Ўраманинг хоссалари.

а) *Ўраманинг чизиқлилиги.* $(f * g)(x)$ *ўрама амали мавжуд бўладиган тўпламда* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *умумлашган функцияларнинг ҳар бирига нисбатан алоҳида* $D'(R^n)$ *фазони* $D'(R^n)$ *фазога чизиқли акслантиради, масалан агар ихтиёрий* $f_1(x) \in D'(R^n)$, $f_2(x) \in D'(R^n)$, $g(x) \in D'(R^n)$ *умумлашган функциялар учун*

$(f_1 * g)(x)$ *ва* $(f_2 * g)(x)$ *ўрамалар мавжуд бўлса, у ҳолда ихтиёрий* λ, μ *сонлар учун*

$$(\lambda f_1 + \mu f_2) * g = \lambda(f_1 * g) + \mu(f_2 * g)$$

тенглик ўринли бўлади.

Ушбу хоссанинг исботи (3.6.4) таърифдан ва $f(x) \times g(y)$ тўғри кўпайтманинг $f(x)$ ва $g(x)$ умумлашган функцияларнинг ҳар бирига нисбатан алоҳида $D'(R^n)$ фазони $D'(R^{2n})$ фазога чизиқли акслантиришидан бевосита келиб чиқади.

Шуни алоҳида таъкидлаш керакки $(f * g)(x)$ ўрама $f(x)$ ва $g(x)$ умумлашган функцияларнинг ҳар бирига нисбатан алоҳида $D'(R^n)$ фазони $D'(R^n)$ фазога чизиқли акслантирувчи амал бўлиб умуман олганда узлуксиз бўлмайди. Масалан: $D'(R)$ фазода $k \to \infty$ да $\delta(x-k) \to 0$ яқинлашувчи бўлади, лекин $D'(R)$ фазода $k \to \infty$ да $1 * \delta(x-k) = 1 \not\to 0$ келиб чиқади.

б) *Ўраманинг коммутативлиги. Агар* $(f * g)(x)$ *ўрама мавжуд бўлса, у ҳолда* $(g * f)(x)$ *ўрама ҳам мавжуд бўлади ва бу ўрамалар тенгдир, яъни*

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу тасдиқнинг исботи (3.6.4) таърифдан ва тўғри кўпайтманинг коммутативлигидан келиб чиқади. Шунга кўра ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^n)$ асосий функция учун

$$\big((f * g)(x), \varphi(x)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x) \times g(y), \eta_k(x;\, y)\varphi(x+y)\big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\big(g(y) \times f(x), \eta_k(x;\, y)\varphi(x+y)\big) = \big((g * f)(x), \varphi(x)\big)$$

тенглик ўринли бўлади.

Худди шунингдек (3.6.6) таърифдан

$$(f * g * h)(x) = (f * h * g)(x) = (h * f * g)(x) = \ldots$$

ва ҳакозо тенгликларни ҳосил қиламиз.

в) *Умумлашган функциянинг* $\delta(x)$ *умумлашган функция билан ўрамаси. Ихтиёрий* $f(x) \in D'(R^n)$ *умумлашган функциянинг* $\delta(x)$ *умумлашган функция билан ўрамаси мавжуд ва бу ўрама* $f(x)$ *га тенг, яъни*

$$(f * \delta)(x) = (\delta * f)(x) = f(x) \qquad \textit{(3.6.7)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^n)$ асосий функция ва R^{2n} фазода 1 га интилувчи $D(R^{2n})$ фазодан олинган ихтиёрий $\{\eta_k(x;y)\}$ функциялар кетма–кетлиги учун $k \to \infty$ интилганда $D(R^n)$ фазода $\eta_k(x;0)\varphi(x) \to \varphi(x)$ га интилади ва шунинг учун

$$\big((f*\delta)(x),\varphi(x)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x)\times\delta(y),\,\eta_k(x;\,y)\varphi(x+y)\big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\big(f(x),\,\eta_k(x;\,0)\varphi(x)\big) = (f(x),\,\varphi(x))$$

ва

$$\big((\delta*f)(x),\varphi(x)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(\delta(x)\times f(y),\,\eta_k(x;\,y)\varphi(x+y)\big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\big(\delta(x),\,(f(y),\,\eta_k(x;y)\varphi(x+y))\big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\big(f(y),\,\eta_k(0;y)\varphi(y)\big) = (f(y),\,\varphi(y)) = (f(x),\,\varphi(x))$$

бўлади. Бундан ҳамда (3.6.4) таърифга кўра $(f*\delta)(x)$ ва $(\delta*f)(x)$ ўрамаларнинг мавжудлиги ва бу ўрамалар $f(x)$ га тенг бўлишлиги келиб чиқади.

Эслатма. $f(x) = (f*\delta)(x)$ формуланинг маъноси шундан иборатки, ихтиёрий олинган $f(x)$ умумлашган функцияни $\delta(x)$ функция бўйича ёйиш мумкин бўлади ва ёйилма формал равишда

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$$

кўринишда ёзилади. Айнан ушбу формула ихтиёрий жисмнинг массаси нуқтавий массалардан тузилганлигини, ҳар қандай манба нуқтавий манбалардан тузилганлигини билдиради.

г) *Ўрамани силжитиш. Агар $f*g$ ўрама мавжуд бўлса, у ҳолда ихтиёрий $h \in R^n$ учун $f(x+h)*g(x)$ ўрама ҳам мавжуд бўлади, бундан ташқари*

$$f(x+h)*g(x) = (f*g)(x+h) \qquad (3.6.8)$$

тенглик ўринли, яъни силжитиш ва ўрама амаллари коммутативдир. Бошқача сўз билан айтганда $f \to f*g$ ўрама оператори трансляцион–инвариант оператордир.

Ҳақиқатдан ҳам, $\eta_k(x;\,y)$, $k = 1, 2, \ldots$ функциялар кетма–кетлиги $D(R^{2n})$ фазога тегишли бўлиб $k \to \infty$ интилганда R^{2n}

фазода 1 га интилсин. У ҳолда ихтиёрий $h \in R^n$ учун $\eta_k(x-h;\ y),\ k=1, 2, \ldots$ кетма–кетлик $k \to \infty$ интилганда R^{2n} фазода 1 га интилади. Энди силжитишнинг ва ўраманинг таърифидан фойдаланиб ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^n)$ асосий функция учун

$$((f * g)(x+h), \varphi) = (f * g, \varphi(x-h)) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}(f(x) \times g(y), \eta_k(x-h;\ y)\varphi(x-h+y)) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}(f(x+h) \times g(y), \eta_k(x;\ y)\varphi(x+y)) = (f(x+h) * g(x), \varphi)$$

тенглик ўринли эканлигини ҳосил қиламиз. Бу эса хоссасини исбот қилади. Бунда биз тўғри кўпайтмани силжитиш ҳақидаги формуладан фойдаландик.

д) *Ўраманинг акси. Агар* $f * g$ *ўрама мавжуд бўлса, у ҳолда* $f(-x) * g(-x)$ *ўрама ҳам мавжуд бўлади, бундан ташқари*

$$f(-x) * g(-x) = (f * g)(-x) \qquad (3.6.9)$$

тенглик ўринлидир.

Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^n)$ асосий функция ва R^{2n} фазода 1 га интилувчи $D(R^{2n})$ фазодан олинган ихтиёрий $\{\eta_k(x;y)\}$ функциялар кетма–кетлиги учун $k \to \infty$ интилганда $D(R^n)$ фазода ҳар бир тайинланган x ёки y учун $\eta_k(x;\ y)\varphi(x+y) \to \varphi(x+y)$ га интилади ва шунинг учун

$$\left(f(-x) * g(-x), \varphi(x)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(f(-x) \times g(-y), \eta_k(x;\ y)\varphi(x+y)\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left(f(-x), (g(-y),\ \eta_k(x;\ y)\varphi(x+y))\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left(f(-x), (g(y),\ \eta_k(x;\ -y)\varphi(x-y))\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left(f(x), (g(y),\ \eta_k(-x;\ -y)\varphi(-x-y))\right) = \left((f * g)(x), \varphi(-x)\right)$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу эса хоссасини исбот қилади.

е) *Ўрамани дифференциаллаш. Агар* $f * g$ *ўрама мавжуд бўлса, у ҳолда* $D^\alpha f * g$ *ва* $f * D^\alpha g$ *ўрамалар ҳам мавжуд бўлиб,*

$$D^\alpha f * g = D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g \qquad (3.6.10)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Бу тасдиқни ҳар бир биринчи тартибли $D_j,\ j=1, 2, \ldots, n$ ҳосилалар учун исботлаш етарлидир. Ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^n)$

асосий функция бўлсин, ҳамда $\eta_k(x;\ y),\ k=1,\ 2,\ldots$ функциялар кетма–кетлиги $D(R^{2n})$ фазодан олинган ихтиёрий кетма–кетлик бўлиб R^{2n} фазода 1 га интилсин. У ҳолда $\eta_k(x;y)+\dfrac{\partial\eta_k(x;y)}{\partial x_j},\ \ k=1,\ 2,\ldots$ функциялар кетма–кетлиги ҳам $D(R^{2n})$ фазога тегишли бўлиб, R^{2n} фазода 1 га интилади. Бундан $f*g$ ўраманинг мавжудлигидан фойдаланиб

$$(D_j(f*g),\varphi)=-(f*g,D_j\varphi)=$$

$$=-\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;\ y)\frac{\partial\varphi(x+y)}{\partial x_j}\right)=$$

$$=-\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\ \frac{\partial\left[\eta_k(x;y)\varphi(x+y)\right]}{\partial x_j}-\frac{\partial\eta_k(x;y)}{\partial x_j}\varphi(x+y)\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left[f(x)\times g(y)\right],\ \eta_k(x;y)\varphi(x+y)\right)+$$

$$+\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\left[\eta_k(x;y)+\frac{\partial\eta_k(x;y)}{\partial x_j}\right]\varphi(x+y)\right)-$$

$$-\lim_{k\to\infty}(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;y)\,\varphi(x+y))=$$

$$=\lim_{k\to\infty}(D_j f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;y)\,\varphi(x+y))+$$

$$+(f*g,\varphi)-(f*g,\varphi)=(D_j f*g,\ \varphi).$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бундан эса D_j оператор учун (3.6.10) тенгликларнинг биринчиси келиб чиқади. (3.6.10) тенгликларнинг иккинчиси эса бу биринчи тенгликдан ва ўраманинг коммутативлигидан келиб чиқади. Шунга кўра

$$D_j(f*g)=D_j(g*f)=D_j g*f=f*D_j g$$

тенгликлар ҳосил бўлади.

Бу ҳосил қилинган (3.6.7) ва (3.6.10) тенгликлардан ихтиёрий $f(x)\in D'(R^n)$ учун

$$D^\alpha f=D^\alpha\delta*f=\delta*D^\alpha f \qquad (3.6.11)$$

тенгликлар келиб чиқади.

Шуни таъкидлаш керакки, $|\alpha| \geq 1$ бўлган мультииндекс учун $D^{\alpha} f * g$ ва $f * D^{\alpha} g$ ўрамаларнинг мавжуд бўлиши ҳали $f * g$ ўраманинг мавжуд бўлиши учун ва $D^{\alpha} f * g = D^{\alpha}(f * g) = f * D^{\alpha} g$ тенгликнинг ўринли бўлиши учун етарли эмас. Масалан $\theta' * 1 = \delta * 1 = 1$ бўлиб, лекин $\theta * 1' = \theta * 0 = 0$ бўлади.

ж) *Агар* $f * g$ *ўрама мавжуд бўлса, у ҳолда*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} \qquad (3.6.12)$$

муносабат ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, $\eta_k(x;\, y),\ k = 1,\, 2,\, ...$ функциялар кетма–кетлиги $D(R^{2n})$ фазодан олинган ихтиёрий кетма–кетлик бўлиб R^{2n} фазода 1 га интилсин ва ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^n)$ асосий функция шундай бўлсинки, бунда

$$\operatorname{supp} \varphi \bigcap \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} = \varnothing \qquad (3.6.13)$$

муносабат ўринли бўлсин.

Маълумки, $\operatorname{supp}(f \times g) = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g$ тенгликдан фойдаланиб

$$\operatorname{supp}\left[f(x) \times g(y)\right] \bigcap \operatorname{supp}\left[\eta_k(x;\, y)\varphi(x+y)\right] \subset$$

$$\subset \left[\operatorname{supp} f(x) \times \operatorname{supp} g(y)\right] \bigcap \left[(x;y):\ x+y \in \operatorname{supp} \varphi\right] = \varnothing$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Шунинг учун (3.6.13) шартни қаноатлантирувчи барча $\varphi(x) \in D(R^n)$ асосий функция учун

$$((f * g),\, \varphi) = \lim_{k \to \infty} \left(f(x) \times g(y),\, \eta_k(x;\, y)\varphi(x+y) \right) = 0$$

тенглик ўринли бўлади. Бу (3.6.12) муносабат ўринли бўлишини билдиради.

Эслатма. $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ тўплам ёпиқ бўлмаслиги ҳам мумкин. (3.6.12) жойлашиш муносабатида умуман олганда тенглик ўринли бўлмаслиги ҳам мумкин; масалан, $\delta' * \theta = \delta$ ўрама учун бу муносабат $\{0\} \subset \{x \geq 0\}$ шаклида бўлади.

з) *Ўраманинг ассоциативлиги.* Умуман олганда ўрама амали ассоциатив эмас, масалан $(1 * \delta') * \theta = 1' * \theta = 0 * \theta = 0$ бўлиб, лекин $1 * (\delta' * \theta) = 1 * \delta = 1$ келиб чиқади. Агар $f * g * h$ ўрама мавжуд бўлса, у ҳолда бу ноаниқликлар пайдо бўлмайди. Аниқироғи, қуйидаги тасдиқ ўринли бўлади.

Агар $f*g$ *ва* $f*g*h$ *ўрамалар мавжуд бўлса, у ҳолда* $(f*g)*h$ *ўрама ҳам мавжуд бўлади, бундан ташқари*

$$(f*g)*h = f*g*h \qquad (3.6.14)$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, $\eta_k(x;\, y),\ k=1,\, 2,\, ...$ ва $\xi_k(x;\, y),\ k=1,\, 2,\, ...$ функциялар кетма–кетлиги $D(R^{2n})$ фазодан олинган ихтиёрий кетма–кетлик бўлиб R^{2n} фазода 1 га интилсин. У ҳолда $\eta_i(x;\, y)\xi_k(x+y;\, z)$ функциялар кетма–кетлиги $D(R^{3n})$ фазодан олинган кетма–кетлик бўлиб $i\to\infty$, $k\to\infty$ интилганда R^{3n} фазода 1 га интилади. Бундан ва $f*g*h$ ўраманинг мавжуд эканлигидан ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функция учун

$$\lim_{\substack{i\to\infty\\ k\to\infty}}\big(f(x)\times g(y)\times h(z),\, \eta_i(x;\, y)\xi_k(x+y;\, z)\varphi(x+y+z)\big) =$$

$$=(f*g*h,\, \varphi)$$

икки каррали лимитнинг мавжуд эканлиги келиб чиқади ва шунга кўра такрорий лимит ҳам мавжуд бўлиб

$$(f*g*h,\, \varphi) =$$

$$=\lim_{k\to\infty}\lim_{i\to\infty}\big(f(x)\times g(y)\times h(z),\ \eta_i(x;\, y)\xi_k(x+y;\, z)\varphi(x+y+z)\big) =$$

$$=\lim_{k\to\infty}\lim_{i\to\infty}\big(f(x)\times g(y),\ \eta_i(x;\, y)(h(z),\ \xi_k(x+y;\, z)\varphi(x+y+z))\big) =$$

$$=\lim_{k\to\infty}\big((f*g)(t),\, (h(z),\ \xi_k(t;\, z)\varphi(t+z))\big) =$$

$$=\lim_{k\to\infty}\big((f*g)(t)\times h(z),\ \xi_k(t;\, z)\varphi(t+z)\big) =$$

$$=((f*g)*h,\, \varphi)$$

тенглик келиб чиқади. Ҳамда $(f*g)*h$ ўраманинг мавжудлигини ва (3.6.14) тенгликни исбот қилади.

Натижа. *Агар* $f*g*h$, $f*g$, $g*h$ *ва* $f*h$ *ўрамалар мавжуд бўлса, у ҳолда* $(f*g)*h$, $f*(g*h)$ *ва* $(f*h)*g$ *ўрамалар ҳам мавжуд бўлади, бундан ташқари*

$$f*g*h=(f*g)*h=f*(g*h)=(f*h)*g$$

тенглик ўринли бўлади, яъни бу ҳолда ўрамаларнинг ассоциативлиги ўринли бўлади.

3. Ўраманинг мавжудлиги. $D'(R^n)$ фазода ўраманинг мавжудлигини таъминлайдиган айрим етарли шартларни келтирамиз. Биз аввал киритган

$$T_R=\left[(x,y): x\in A, y\in B, |x+y|\le R\right]$$
тўпламни қараймиз ва $A\subset G$ ёпиқ тўплам бўлиб $D'(G)$ фазодан олинган умумлашган функция ташувчиси A тўпламга тегишли ва ундаги яқинлашиш агар $k\to\infty$ да $D'(G)$ фазо $f_k\to 0$ ва $\operatorname{supp} f_k\subset A$ бўлган ҳолда $D'(G,\, A)$ орқали белгилаймиз. Хусусан $D'(A)=D'(R^n,\, A)$ деб белгиланади.

1-теорема. *Агар $f\in D'(A)$, $g\in D'(B)$ ва ихтиёрий $R>0$ мусбат сон учун T_R тўплам R^{2n} фазода чегараланган бўлса, у ҳолда $f*g$ ўрама $D'(\overline{A+B})$ умумлашган функциялар фазосида мавжуд ва ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функция учун*

$$(f*g,\varphi)=(f(x)\times g(y),\, \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)) \qquad (3.6.15)$$

шаклида тасвирланади, бунда $\xi(x)$ ва $\eta(y)$ функциялар $C^\infty(R^n)$ синфдан олинган бўлиб мос равишда A^ε ва B^ε тўпламларда 1 га тенг, ҳамда $A^{2\varepsilon}$ ва $B^{2\varepsilon}$ тўпламлар ташқарисида 0 га тенг бўлган функциялардир ($\varepsilon>0$ бўлган ихтиёрий сон). Шу билан бирга $f\to f*g$ амали $D'(A)$ фазони $D'(\overline{A+B})$ фазога узлуксиз акслантиради.

Исбот. Ихтиёрий $\varphi(x)\in D(U_R)$ ва $\eta_k(x;\, y),\ k=1,\,2,\,...$ функциялар кетма–кетлиги $D(R^{2n})$ фазодан олинган ихтиёрий кетма–кетлик бўлиб R^{2n} фазода 1 га интилсин. Шунингдек $\operatorname{supp}(f\times g)=\operatorname{supp} f\times\operatorname{supp} g\subset A\times B$ муносабатдан фойдаланиб

$$\operatorname{supp}\left\{\left[f(x)\times g(y)\right]\varphi(x+y)\right\}\subset$$
$$\subset\left[(x,y): x\in A,\ y\in B, |x+y|\le R\right]=T_R$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Шу билан бирга T_R тўплам R^{2n} фазода чегараланган бўлганлиги учун шундай бир $N=N(R)$ номер топилиб барча $k\ge N$ учун T_R тўпламнинг атрофида $\eta_k(x;\, y)=1$ бўлади. Шунинг учун

$$(f*g,\varphi)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left(f(x)\times g(y),\ \eta_k(x;\, y)\varphi(x+y)\right)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left(\left[f(x)\times g(y)\right]\varphi(x+y),\ \eta_k(x;\, y)\right)=$$
$$=\left(f(x)\times g(y),\ \eta_N(x;\, y)\varphi(x+y)\right)$$

ва ихтиёрий $\varphi(x)\in D(U_R)$ асосий функция учун

$$(f*g,\varphi)=(f(x)\times g(y),\,\eta_N(x,y)\varphi(x+y)) \qquad (3.6.16)$$

шаклидаги тасвир исбот бўлади. Кўриниб турибдики, бу (3.6.16) тасвир ёрдамчи $\eta_N(x,y)$ функцияга боғлиқ эмас. Уни $\xi(x)\eta(y)$ функция билан ҳам алмаштириш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам $\xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)\in D(R^{2n})$ асосий функция бўлиб ихтиёрий $R>0$ ва $\varepsilon>0$ мусбат сонлар учун

$$T_{R,\varepsilon}=\left[(x,y):x\in A^{2\varepsilon},y\in B^{2\varepsilon},\left|x+y\right|\le R\right]\subset T_{R+4\varepsilon}$$

тўплам R^{2n} фазода чегараланган бўлади. Ҳамда ихтиёрий $\varphi(x)\in D(U_R)$ асосий функция учун

$$\left[\eta_N(x,y)-\xi(x)\eta(y)\right]\varphi(x+y)$$

функция T_R тўпламнинг атрофида нолга айланади. Шу билан (3.6.15) шаклдаги тасвир исбот бўлади. (3.6.12) формуладан

$$\operatorname{supp}\left(f*g\right)\subset\overline{A+B}$$

муносабат келиб чиқади. Шу билан бирга $f\to f*g$ амали $D'(A)$ фазони $D'(\overline{A+B})$ фазога акслантиради. Унинг узлуксизлиги $f\times g$ тўғри кўпайтманинг f умумлашган функцияга нисбатан узлуксизлигидан ва (3.6.15) шаклидаги тасвирдан қуйидагича келиб чиқади:

агар $k\to\infty$ интилганда $D'(A)$ фазода $f_k(x)\to 0$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ учун

$$\left(f_k(x)*g(x),\ \varphi(x)\right)=\left(f_k(x)\times g(y),\ \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)\right)\to 0$$

яқинлашувчи бўлади, яъни $k\to\infty$ интилганда $D'(\overline{A+B})$ фазода $f_k(x)*g(x)\to 0$ яқинлашувчи бўлади. 1–теорема исбот бўлди.

Шуни таъкидлаш керакки, $f*g$ ўрама амали $f(x)$ ва $g(x)$ умумлашган функцияга нисбатан биргаликда узлуксизлиги ўринли эмас. Буни эса қуйидаги содда мисол тасдиқлайди:

$k\to\infty$ интилганда $\delta(x+k)\to 0$, $\delta(x-k)\to 0$ яқинлашувчи бўлади. Бироқ $\delta(x+k)*\delta(x-k)=\delta(x)*\delta(x)=\delta(x)\not\to 0$ эканлигини ҳосил қиламиз.

Бу 1–теореманинг муҳим бўлган қуйидаги хусусий ҳолини келтирамиз.

Агар $f(x)\in D'(R^n)$ *ва* $g(x)\in E'(R^n)$ *бўлса, у ҳолда* $f*g$ *ўрама* $D'(R^n)$ *умумлашган функциялар фазосида мавжуд ва ихтиёрий* $\varphi(x)\in D(R^n)$ *асосий функция учун*

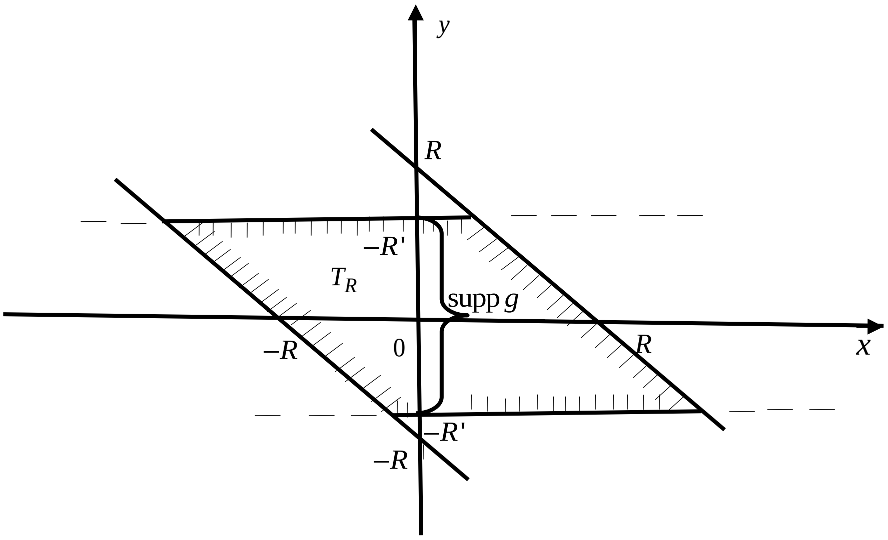
$$(f*g,\varphi)=(f(x)\times g(y),\eta(y)\varphi(x+y)) \qquad (3.6.17)$$

шаклида тасвирланади, бунда $\eta(y)$ *функция ихтиёрий асосий функция бўлиб* $g(x)$ *функция ташувчиси атрофида* 1 *га тенг деб олинган бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, бу ҳолда ихтиёрий $R>0$ мусбат сон учун T_R тўпламнинг R^{2n} фазода чегараланган бўлишлик шарти бажарилади: агар $\mathrm{supp}\,g\subset\overline{U_R}$ бўлса, у ҳолда

$$T_R=\Big[(x,y): x\in R^n,\ \mathrm{supp}\,g,\ |x+y|\le R\Big]\subset\overline{U_{R+R'}}\times\overline{U_{R'}}$$

шаклида бўлади. Бу тўплам графиги



шаклида тасвирланади.

Худди шунга ўхшаш, *агар* $f(x)\in D'(R^n)$ *ва* $g_1(x),g_2(x),...,g_m(x)\in E'(R^n)$ *бўлса, у ҳолда* $f*g_1*g_2*...*g_m$ *ўрама ҳам* $D'(R^n)$ *умумлашган функциялар фазосида мавжуд, ҳамда ассоциатив ва коммутатив бўлиб ихтиёрий* $\varphi(x)\in D(R^n)$ *асосий функция учун*

$$(f*g_1*...*g_m,\varphi)=$$

$$=(f(x)\times g_1(y)\times...\times g_m(z),\eta_1(y)...\eta_m(y)\varphi(x+y+...+z)) \qquad (3.6.18)$$

формула ўринли бўлади.

Агар $f(x)\in C^{\infty}(R^n)$ *ва* $g(x)\in E'(R^n)$ *бўлса, у ҳолда* $f*g$ *ўрама ҳам* $(f*g)(x)\in C^{\infty}(R^n)$ *синфдан бўлади ва (3.6.17) формула*

$$(f*g)(x)=(\tilde{g}(y),f(x-y)) \qquad (3.6.19)$$

шаклга эга. Бу ерда $\tilde{g}(y)$ *функционал* $g(x)\in E'(R^n)$ *функционалнинг* $C^{\infty}=C^{\infty}(R^n)$ *фазога давомидан иборат бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, аввалги параграфдаги лемманинг исботига ўхшаш

$$(\tilde{g}(y),f(x-y))=(g(y),\eta(y)f(x-y))\in C^{\infty}(R^n)$$

эканлигини кўрсатишимиз мумкин. Ҳамда (3.6.17) формуладан ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функция учун

$$(f*g,\varphi)=\left(g(y),\eta(y)\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\varphi(\xi+y)d\xi\right)=$$

$$=\left(g(y),\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(y)f(x-y)\varphi(x)dx\right)$$

формулага эга бўламиз. Энди биз $\eta(y)f(x-y)\varphi(x)\in D(R^{2n})$ эканлигидан, ҳамда ихтиёрий $f(x)\in D'(G_1)$ ва ихтиёрий $\varphi(x,y)\in D(G_1\times R^m)$ асосий функция учун ўринли бўлган

$$\left(f(x),\int_{R^m}\varphi(x,y)dy\right)=\int_{R^m}\big(f(x),\varphi(x,y)\big)dy$$

формуладан фойдаланиб

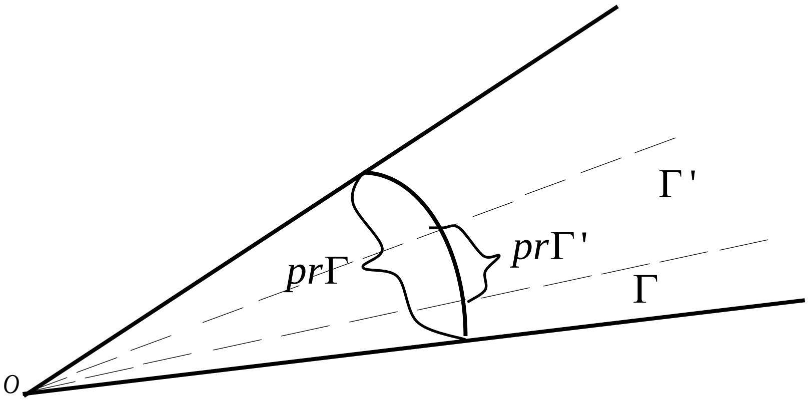
$$(f*g,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\big(g(y),\eta(y)f(x-y)\big)\varphi(x)dx$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан эса (3.6.19) формула келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш, *агар* $f(x)\in C^{\infty}\left(R^n\setminus\{0\}\right)$ *ва* $g(x)\in E'(R^n)$ *бўлса, у ҳолда* $f*g$ *ўрама ҳам* $R^n\setminus\operatorname{supp}g$ *тўпламда (3.6.19) формула орқали ифодаланади. Хусусан,* $(f*g)(x)\in C^{\infty}\left(R^n\setminus\operatorname{supp}g\right)$ *бўлади.*

4. R^n фазодаги конуслар. Агар $x\in\Gamma$ эканлигидан ихтиёрий $\lambda>0$ мусбат сон учун $\lambda x\in\Gamma$ эканлиги келиб чиқса, у ҳолда Γ тўпламга учи 0 нуқтада бўлган R^n фазодаги конус деб айтилади. Γ конуснинг бирлик сфера билан кесишмасини $pr\Gamma$ орқали белгилаймиз.

Бу тўплам графиги



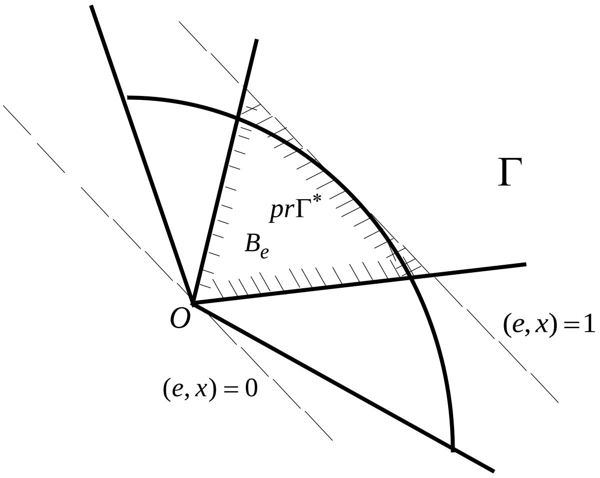
шаклда тасвирланган. Агар $pr\overline{\Gamma'}\subset pr\Gamma$ бўлса, у ҳолда Γ' конус Γ конусда компакт жойлашган деб айтилади ва $\Gamma'\subset\subset\Gamma$ каби ёзилади.

Биз

$$\Gamma^*=\left[\xi:(\xi,x)\geq 0,\ \forall x\in\Gamma\right]$$

конусга Γ конуснинг *қўшмаси* деб атаймиз. Кўриниб турибдики, Γ^* конус ёпиқ қавариқ конус бўлиб унинг учи 0 нуқтада ва $(\Gamma^*)^*=\overline{ch\Gamma}$ тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $ch\Gamma$ орқали Γ конуснинг қавариқ қопламаси белгиланган.

Агар $\overline{ch\Gamma}$ қавариқ қоплама ёпиғининг таянч текислиги мавжуд бўлиб шу $\overline{ch\Gamma}$ қавариқ қоплама ёпиғи билан ягона 0 умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда Γ конус ўткир конус деб айтилади. Бу конус графиги эса



шаклида бўлади.

Энди қавариқ ўткир конусларга мисоллар келтирамиз.

а) *Мусбат координатлар бурчаги*

$$R_+^n = [x:\ x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_n > 0],\ \left(R_+^n\right)^* = \overline{R_+^n}.$$

б) R^{n+1} *фазодаги келажак ёруғлик конуси*

$$V^+ = \left[x : x = (x_0, \mathbf{x}):\ x_0 > |\mathbf{x}|\right],\ \left(V^+\right)^* = \overline{V}^+.$$

в) *координата боши* $\{0\}$, $\{0\}^* = R^n$.

Бироқ, $R_+^1 \times R^{n-1} = [x:\ x_1 > 0]$ конус ўткир бўлмайди.

г) Мусбат (эрмит) бўлган $n \times n$ ўлчамли $X = \left(x_{pq}\right)$ матрицалардан тузилган $P_n \subset R^{n^2}$ конус учун $P_n^* = \overline{P_n}$ бўлади, бунда $\overline{P_n}$ конус манфиймас матрицалардан тузилган бўлади. Бу эса қуйидаги тасдиқдан келиб чиқади: $X \in P_n$ бўлишлиги учун барча $\Xi \in \overline{P_n}$, $\Xi \neq 0$ учун $\left(X, \Xi\right) = sp\left(X\Xi\right) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} x_{pq}\xi_{qp} > 0$ тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

1–лемма. *Қуйидаги тасдиқлар эквивалентдир:*

1) Γ *– ўткир конус;*

2) $\overline{ch\Gamma}$ *конус бутун тўғри чизиқни сақламайди;*

3) $\operatorname{int}\Gamma^* \neq \varnothing$ *;*

4) ихтиёрий $C' \subset\subset \operatorname{int}\Gamma^*$ *компакт тўплам учун шундай бир* $\sigma = \sigma(C') > 0$ *мусбат сон топиладики, бунда ихтиёрий* $\xi \in C'$, $x \in \overline{ch\Gamma}$ *бўлган нуқталар учун*

$$(\xi, x) \geq \sigma |\xi| \cdot |x| \qquad (3.6.20)$$

тенгсизлик ўринли бўлади;

5) ихтиёрий $e \in pr \operatorname{int} \Gamma^*$ *элемент учун*

$$B_e = \left[\ x:\ 0 \leq (e, x) \leq 1,\ x \in \overline{ch\Gamma}\ \right]$$

тўплам чегараланган бўлади.

Исбот. $1) \to 2)$ эканлигини кўрсатамиз. Агар $\overline{ch\Gamma}$ конус бутун $x = x^0 + te$, $-\infty < t < +\infty$ $\left(|e| = 1\right)$ тўғри чизиқни сақласа, у ҳолда $x = te$, $-\infty < t < +\infty$ тўғри чизиқни ҳам сақлайди. Шунга кўра $\overline{ch\Gamma}$ қавариқ қоплама ёпиғининг ҳар қандай таянч текислиги ҳам бу тўғри чизиқни сақлайди ва бу 1) шартга қарама-қаршидир.

$2) \to 3)$ эканлигини кўрсатамиз. Агар $\operatorname{int} \Gamma^* = \varnothing$ бўлса, у ҳолда Γ^*– қавариқ конус учи 0 нуқтада бўлиб қандайдир $n-1$ ўлчамли $(e\,, x) = 0$ $\left(|e| = 1\right)$ текисликда ётади. Шунинг учун $\pm e \in \Gamma^{**} = \overline{ch\Gamma}$ бўлади. У ҳолда $y = te$, $-\infty < t < +\infty$ тўғри чизиқ бутунича $\overline{ch\Gamma}$ қавариқ қоплама ёпиғида ётади. Бу эса 2) шартга қарама–қаршидир.

$3) \to 4)$ эканлигини кўрсатамиз. Маълумки, C' конуснинг барча 0 дан фарқли нуқталари Γ^*– қавариқ конус учун ички нуқталар бўлганлиги учун барча $\xi \in C'$ ва $x \in \overline{ch\Gamma}$ учун $(\xi, x) > 0$ бўлади. Бундан эса, (ξ, x) форманинг узлуксиз ва бир жинсли эканлигидан шундай бир $\sigma = \sigma(C') > 0$ мусбат сон топиладики, бунда ихтиёрий $\xi \in C'$, $x \in \overline{ch\Gamma}$ бўлган нуқталар учун $(\xi, x) \geq \sigma |\xi| \cdot |x|$ тенгсизлик ўринли бўлади.

$4) \to 5)$ эканлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $e \in pr \operatorname{int} \Gamma^*$ элементни олайлик. У ҳолда (3.6.20) тенгсизликни қўллаб $x \in \overline{ch\Gamma}$ бўлган нуқталар учун $(e, x) \geq \sigma |x|$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан B_e тўпламнинг чегараланган бўлишлиги келиб чиқади, яъни $|x| \leq \dfrac{(e, x)}{\sigma} \leq \dfrac{1}{\sigma}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

$5) \to 1)$ эканлигини кўрсатамиз. Агар қандайдир $e \in pr \operatorname{int} \Gamma^*$ элемент учун B_e тўплам чегараланган бўлса, у ҳолда $(e, x) = 0$

текислик $\overline{ch\Gamma}$ қаварик қоплама ёпиғи билан 0 нуқтадан фарқли умумий нуқтага эга бўлмайди. 1–лемма исбот бўлди.

2–лемма. *Γ – конус бўлсин. У ҳолда $ch\Gamma = \Gamma + \Gamma$ бўлади.*

Исбот. $ch\Gamma \subset \Gamma + \Gamma$ муносабат бевосита келиб чиқади. $x \in \Gamma + \Gamma$ бўлсин. Шунга кўра $x = y + z$, бунда $y \in \Gamma$ ва $z \in \Gamma$ бўлади. У ҳолда ихтиёрий $\lambda \in (0,1)$ учун $x = \lambda \frac{y}{\lambda} + (1-\lambda)\frac{z}{1-\lambda} \in ch\Gamma$ бўлади ва шунинг учун $\Gamma + \Gamma \subset ch\Gamma$ муносабат ўринли бўлади. 2–лемма исбот бўлди.

$$\mu_\Gamma(\xi) = -\inf_{x \in pr\Gamma}(\xi, x)$$

функцияга Γ конуснинг *индикатрисаси* деб айтилади. Индикатриса таърифидан $\mu_\Gamma(\xi)$ функциянинг R^n фазода қавариқлиги ва биринчи даражали бир жинсли функция эканлиги келиб чиқади. Шунга кўра узлуксиз ҳам бўлади. Бундан ташқари

$$\mu_\Gamma(\xi) \le \mu_{ch\Gamma}(\xi),$$

$$\mu_\Gamma(\xi) = -\Delta(\xi, \partial\Gamma^*),\ \xi \in \Gamma^*$$

ва $\xi \notin \Gamma^*$ учун $\mu_\Gamma(\xi) > 0$ бўлади. Шундай қилиб

$$\Gamma^* = [\xi : \mu_\Gamma(\xi) \le 0]$$

шаклида бўлиб конуснинг индикатрисаси $\overline{ch\Gamma} = \Gamma^{**}$ тенгликка кўра фақат $\overline{ch\Gamma}$ қаварик қоплама ёпиғини тўлиқ аниқлайди.

Мисол.

$$\mu_{V^+}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\xi| - \xi_0\right), & \xi \notin -V^+, \\ |\xi|, & \xi \in -V^+ \end{cases}$$

тенглик ўринли бўлади.

3–лемма. *Агар Γ – қавариқ конус бўлса, у ҳолда ихтиёрий $a \ge 0$ учун*

$$[\xi : \mu_\Gamma(\xi) \le a] = \Gamma^* + \overline{U_a} \qquad (3.6.21)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот.

$$\Gamma^* + \overline{U_a} \subset [\xi : \mu_\Gamma(\xi) \le a] \qquad (3.6.22)$$

муносабат тривиалдир: агар $\xi=\xi_1+\xi_2$, $\xi_1\in\Gamma^*$, $|\xi_2|\le a$ бўлса, у ҳолда

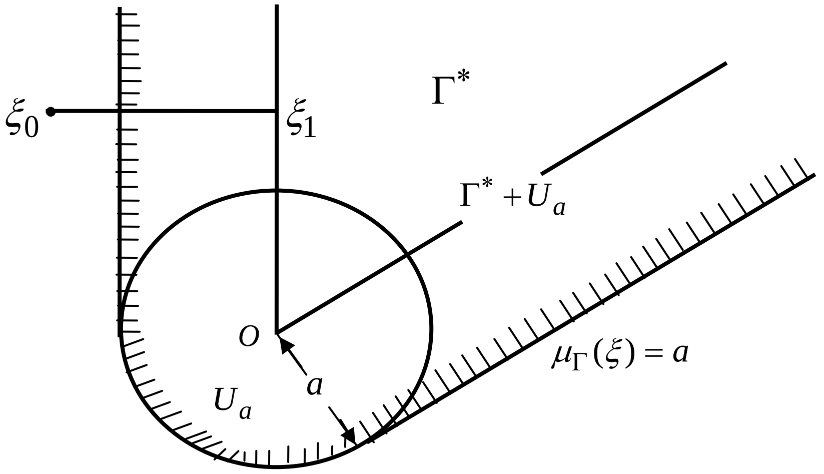
$$\mu_\Gamma(\xi)=-\inf_{x\in pr\Gamma}(\xi,x)=-\inf_{x\in pr\Gamma}\left[(\xi_1,x)+(\xi_2,x)\right]\le-\inf_{x\in pr\Gamma}(\xi_2,x)\le a$$

тенгсизлик ўринли бўлади, чунки ихтиёрий $x\in\Gamma$ учун $(\xi_1,x)\ge 0$ бўлади.

Энди (3.6.22) жойлашиш муносабатига тескари муносабатни келтириб чиқарамиз. ξ_0 нуқта учун $\mu_\Gamma(\xi_0)\le a$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Агар $\xi_0\in\Gamma^*$ ёки $|\xi_0|\le a$ бўлса, у ҳолда $\xi_0\in\Gamma^*+\overline{U_a}$ бўлади. Энди $\xi_0\notin\Gamma^*$ ва $|\xi_0|>a$ бўлсин. $\xi_1\in\Gamma^*$ нуқта ξ_0 нуқтадан Γ^* гача бўлган масофани аниқловчи нуқта бўлсин, яъни $\Delta\left(\xi_0,\Gamma^*\right)=|\xi_0-\xi_1|$ бўлсин. У ҳолда Γ^* қавариқ конус эканлигидан

а) $\xi\in\Gamma^*$ учун $(\xi_1-\xi_0,\xi)\ge 0$;

б) $(\xi_1-\xi_0,\xi_1)=0$ бўлади.



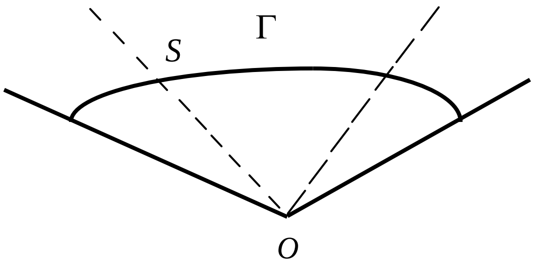
Бу а) тенгсизликдан $\xi_1-\xi_0\in\Gamma^{**}=\overline{\Gamma}$ келиб чиқади ва шунинг учун

$$a\ge\mu_\Gamma(\xi_0)=-\inf_{x\in pr\overline{\Gamma}}(\xi_0,x)\ge-\left(\xi_0,\frac{\xi_1-\xi_0}{|\xi_1-\xi_0|}\right)$$

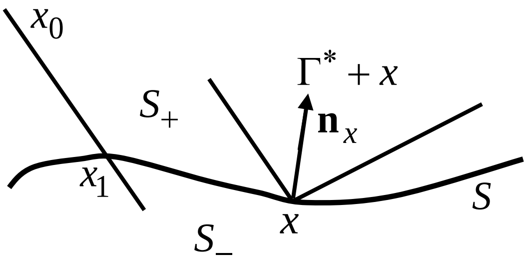
тенгсизлик ўринли бўлади. Бу охирги тенгсизлик б) тенгликка кўра $|\xi_1-\xi_0|\le a$ тенгсизликка эквивалент бўлади. Демак, $\xi_0=\xi_1+(\xi_0-\xi_1)$ нуқта $\xi_1\in\Gamma^*$ ва $\xi_0-\xi_1\in\overline{U_a}$ қўшилувчиларнинг йиғиндиси шаклида тасвирланади, яъни $\xi_0 \in \Gamma^* + \overline{U_a}$ бўлади. Бу билан (3.6.22) жойлашиш муносабатига тескари муносабат исбот бўлади ва (3.6.21) тенглик келиб чиқади. 3–лемма исбот бўлди.

Энди Γ – ёпиқ қаварик ўткир конус бўлсин. $C = \operatorname{int}\Gamma^*$ деб белгилаймиз. 1–леммага кўра $C \neq \varnothing$ бўлади.

Агар $n-1$ ўлчамли чегарасиз силлиқ S сиртни ҳар бир $x = x_0 + te$, $-\infty < t < +\infty$, $e \in pr\Gamma$ тўғри чизиқ ягона нуқтада кесиб ўтса, у ҳолда S сиртни $C-$*ўхшаш* сирт деб айтилади. Бу сирт графиги



шаклда тасвирланган. Шундай қилиб, $C-$*ўхшаш* бўлган S сирт R^n фазони иккита чексиз S_+ ва S_- соҳаларга бўлади. S_+ соҳа S сиртнинг устида ва S_- соҳа эса S сиртнинг пастки қисмида ётади. Бу сиртнинг графиги



шаклда тасвирланган. Шу билан бирга ҳар бир $x \in S$ нуқтадаги $\mathbf{n}_x$ – нормаль $\Gamma^* + x$ конусда жойлашган бўлади.

Мисол. R^{n+1} фазода

$$x_0 = f(x), \left|grad\ f(x)\right| \leq \sigma < 1, \ x \in R^n, \ f \in C^1$$

тенгламалар билан берилган S сирт V^+ – ўхшаш (фазовий–ўхшаш) сирт бўлади.

4–лемма. *Агар S сирт $C-$ўхшаш сирт бўлса, у ҳолда*

$$\overline{S_+} = S + \Gamma \tag{3.6.23}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $x_0 \in \overline{S}_+$ бўлсин. Агар S сиртни $x = x_0 + te$, $-\infty < t < +\infty$, $e \in pr\Gamma$ тўғри чизиқ $x_1 = x_0 - t_1 e$, $t_1 \geq 0$ нуқтада кесиб ўтса, у ҳолда $x_0 = x_1 + t_1 e$, $x_1 \in S$, $t_1 e \in \Gamma$ бўлади ва $\overline{S}_+ \subset S + \Gamma$ жойлашиш муносабати исбот бўлади.

Энди $x_0 \in S + \Gamma$ бўлсин. Шунга кўра $x_0 = x_1 + y$, бунда $x_1 \in S$, $y \in \Gamma$ бўлади. Агар $x_0 \notin \overline{S}_+$ бўлса, у ҳолда $x_0 \in S_-$ бўлади ва юқоридагидек фикрлаш йўли билан $\overline{S}_+$ соҳани S_- соҳа билан алмаштириб биз $x_0 = x_1 - t_1 y$, $t_1 > 0$ эканлигини ҳосил қиламиз. Бу эса $x_0 = x_1 + y$ эканлигига зиддир. Шунга кўра $x_0 \in \overline{S}_+$ ва $S + \Gamma \subset \overline{S}_+$ жойлашиш муносабати исбот бўлади. Бу муносабатга тескари бўлган муносабат билан биргаликда (3.6.23) тенгликни ҳосил қилади. 4–лемма исбот бўлди.

5–лемма. *Агар S сирт $C-$ ўхшаш сирт бўлса, у ҳолда ихтиёрий $R > 0$ мусбат сон учун шундай бир $R'(R) > 0$ мусбат сон топиладики, бунда*

$$T_R = \left[\ (x, y):\ x \in S,\ y \in \Gamma, |x + y| \leq R\ \right]$$

тўплам $U_{R'} \subset R^{2n}$ шарда жойлашган бўлади.

Исбот. S сирт $C-$ ўхшаш сирт бўлгани учун ихтиёрий $x \in S$ нуқта $\xi - y$, $y \in \Gamma, |\xi| \leq R$ шаклида тасвирланади ва шунга кўра $x = \xi - eT$, $e \in pr\Gamma$ шаклга эга бўлади, бунда $T = T(e, \xi)$ сон e ва ξ элементлар орқали бир қийматли аниқланади ва (e, ξ) аргументларнинг функцияси сифатида $e \in pr\Gamma$, $|\xi| \leq R$ компактда узлуксиз функцияни ифода қилади. Шунга кўра

$$\left[(y, \xi) : y = eT(e, \xi), e \in pr\Gamma,\ |\xi| \leq R\right]$$

тўплам чегараланган бўлади ва бу тўплам билан бирга T_R тўплам ҳам чегараланган бўлади. 5–лемма исбот бўлди.

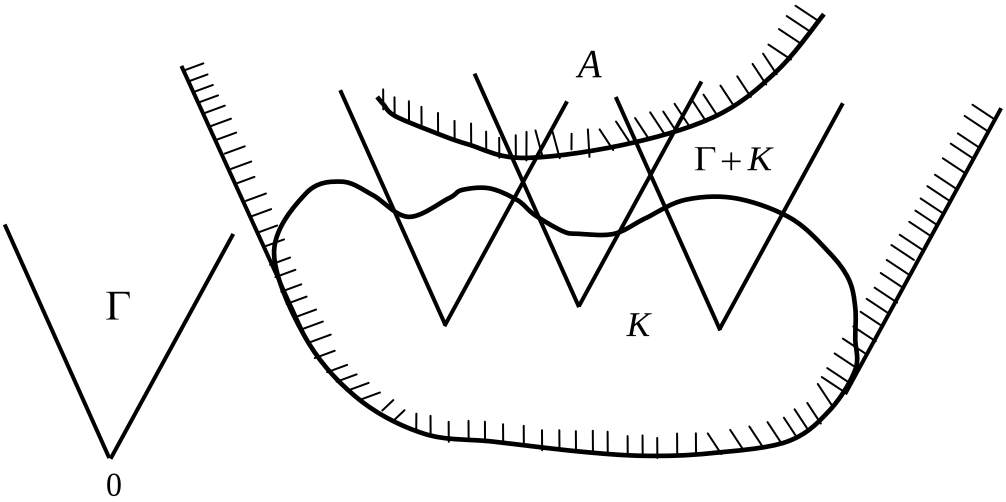
Агар 5–лемма шартларида

$$R'(R) \leq a(1 + R)^{\nu},\ \nu \geq 1,\ a > 0 \tag{3.6.24}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $C-$ ўхшаш бўлган S сирт *қатъий $C-$ ўхшаш* сирт деб айтилади.

Мисол. $(e, x) = 0$, $e \in pr\,\mathrm{int}\,\Gamma^*$ текислик 1–леммага кўра $\nu = 1$ бўлган ҳолда қатъий $C-$ ўхшаш сирт бўлади.

5. $D'(\Gamma+)$ ва $D'(\Gamma)$ ўрама алгебралари. Агар $A \subset \Gamma + K$, бунда Γ – конус ва K – қандайдир компакт бўлса, у ҳолда A тўплам Γ – *конус томонида чегараланган* деб айтилади. Маълумки, агар тўплам $\{0\}$ конус томонида чегараланган бўлса, у ҳолда бу тўплам R^n фазодаги компактлардан иборат бўлади.



Бизга R^n фазодаги $\Gamma-$ ёпиқ конус берилган бўлсин. $D'(R^n)$ умумлашган функциялар фазосидаги ташувчиси Γ конус томонида чегараланган умумлашган функциялар тўпламини $D'(\Gamma+)$ орқали белгилаймиз. $D'(\Gamma+)$ фазода яқинлашиш қуйидагича аниқланади: *агар* $D'(R^n)$ *умумлашган функциялар фазосида* $k \to \infty$ *интилганда* $f_k \to 0$ *яқинлашувчи ва* $\text{supp}\, f_k \subset \Gamma + K$, *бунда* K *компакт* k *номерга боғлиқмас бўлса, у ҳолда* $D'(\Gamma+)$ *фазода* $k \to \infty$ *интилганда* $f_k \to 0$ *яқинлашувчи деб айтилади.* Худди шунга ўхшаш бошқа умумлашган функциялар фазосида, масалан $J'(\Gamma+)$, $L_2^s(\Gamma+)$ ва ҳакозо фазолар маънога эга бўлади. $D'(\{0\}+) = E'(R^n)$ деб белгтлаймиз. Бу $E'(R^n)$ фазо компакт ташувчили умумлашган функциялар фазоси бўлади.

$\Gamma-$ ёпиқ қаварик ўткир конус, $C = \text{int}\,\Gamma^*$, S сирт эса $C-$ ўхшаш сирт, S_+ соҳа S сиртнинг устидаги қисмида ётадиган соҳа бўлсин.

Агар $f \in D'(\Gamma+)$ *ва* $g \in D'(\overline{S}_{+})$ *бўлса, у ҳолда* $(f*g)(x)$ *ўрама* $D'(R^n)$ *фазода мавжуд ва ихтиёрий* $\varphi(x) \in D(R^n)$ *учун*

$$(f*g,\varphi)=(f(x)\times g(y),\ \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)) \qquad (3.6.25)$$

шаклида тасвирланади, бунда $\xi(x)$ *ва* $\eta(y)$ *функциялар мос равишда* $(\mathrm{supp}\, f)^{\varepsilon}$ *ва* $(\mathrm{supp}\, g)^{\varepsilon}$ *тўпламларда* 1 *га тенг ва* $(\mathrm{supp}\, f)^{2\varepsilon}$ *ва* $(\mathrm{supp}\, g)^{2\varepsilon}$ *тўпламлар ташқарисида* 0 *га тенг бўлган* $C^{\infty}(R^n)$ *синфдан олинган ихтиёрий функциялардир, бунда* $\varepsilon > 0$ *бўлган мусбат сондир. Шу билан бирга, агар* $\mathrm{supp}\, f \subset \Gamma + K$, *бунда* K *компакт тўплам бўлса, у ҳолда* $\mathrm{supp}(f*g) \subset \overline{S_{+}} + K$ *ва мос* $f \to f*g$, *ҳамда* $g \to f*g$ *амаллар узлуксиз бўлади.*

Бу тасдиқнинг исботи юқоридаги 1–теоремада $A = \Gamma + K$ ва $B = \overline{S_{+}}$ деб олганда келиб чиқади. Агар 2, 4, ва 5–леммаларни эътиборга олсак, у ҳолда ихтиёрий $R > 0$ мусбат сон учун

$$T_R = \left[(x,y): x \in \Gamma + K,\quad y \in \overline{S_{+}},\quad |x+y| \le R\right] =$$
$$= \left[(x,y): x \in \Gamma + K,\quad y \in S + K,\quad |x+y| \le R\right]$$

тўплам чегараланган ва

$$\overline{\Gamma + K + \overline{S_{+}}} = \overline{\Gamma + K + \Gamma + S} = \overline{\Gamma + S + K} = \overline{S_{+}} + K$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу охирги келтирилган ўрама мавжудлиги критериясининг муҳим хусусий ҳоли бўлган қуйидаги теоремани келтирамиз.

2–теорема. Γ– *ёпиқ қавариқ ўткир конус бўлсин. Агар* $f \in D'(\Gamma+)$ *ва* $g \in D'(\Gamma+)$ *бўлса, у ҳолда* $(f*g)(x)$ *ўрама* $D'(\Gamma+)$ *фазода мавжуд ва ихтиёрий* $\varphi(x) \in D(R^n)$ *учун*

$$(f*g,\varphi)=(f(x)\times g(y),\ \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)) \qquad (3.6.26)$$

шаклида тасвирланади, бунда $\xi(x)$ *ва* $\eta(y)$ *функциялар мос равишда* $(\mathrm{supp}\, f)^{\varepsilon}$ *ва* $(\mathrm{supp}\, g)^{\varepsilon}$ *тўпламларда* 1 *га тенг ва* $(\mathrm{supp}\, f)^{2\varepsilon}$ *ва* $(\mathrm{supp}\, g)^{2\varepsilon}$ *тўпламлар ташқарисида* 0 *га тенг бўлган* $C^{\infty}(R^n)$ *синфдан олинган ихтиёрий функциялардир, бунда* $\varepsilon > 0$ *бўлган мусбат сондир. Шу билан бирга* $D'(\Gamma+)$ *фазони* $D'(\Gamma+)$ *фазога акслантирувчи* $f \to f*g$ *амали узлуксиз бўлади.*

Исбот. Маълумки $\Gamma+K$, бунда Γ – конус ва K – қандайдир компакт бўлса, у ҳолда бу тўплам умуман олганда K тўпламга боғлиқ бўлган қандайдир C – ўхшаш бўлган S сирт учун $\overline{S_+}$ тўпламда жойлашган бўлади. Шунинг учун юқоридаги критерияга кўра $(f*g)(x)$ ўрама $D'(R^n)$ фазода мавжуд ва (3.6.26) формула билан тасвирланади. $(f*g)(x)\in D'(\Gamma+)$ эканлигини исбот қиламиз. $\operatorname{supp} f\subset\Gamma+K_1$ ва $\operatorname{supp} g\subset\Gamma+K_2$, бунда K_1 ва K_2 тўпламлар R^n фазодаги қандайдир компактлар бўлсин. У ҳолда $\operatorname{supp}(f*g)(x)\subset\overline{\operatorname{supp} f(x)+\operatorname{supp} g(x)}$ муносабатдан ва 2–леммадан фойдаланиб

$$\operatorname{supp}(f*g)(x)\subset\overline{\Gamma+K_1+\Gamma+K_2}=\Gamma+K_1+K_2$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Шунга кўра $(f*g)(x)\in D'(\Gamma+)$ бўлади. Шу билан бирга $D'(\Gamma+)$ фазони $D'(\Gamma+)$ фазога акслантирувчи $f\to f*g$ амалнинг узлуксизлиги ҳам шу муносабатдан келиб чиқади. 2–теорема исбот бўлди.

Худди шунга ўхшаш исталган сондаги $D'(\Gamma+)$ фазодан олинган умумлашган функцияларнинг $D'(\Gamma+)$ фазодаги ўрамаси ҳам мавжуд бўлишлиги ва (3.6.26) формулага ўхшаш формула билан тасвирланиши исбот қилинади.

Бундан ва юқоридаги натижалардан $D'(\Gamma+)$ фазодаги умумлашган функцияларнинг ўрамаси *ассоциатив* эканлиги келиб чиқади.

Агар чизиқли фазода кўпайтириш амали аниқланган бўлиб бу амал ҳар бир кўпайтувчига нисбатан алоҳида чизиқли бўлса, у ҳолда бу фазо *алгебра* деб айтилади. Агар алгебрада ихтиёрий элементлар учун $x(yz)=(xy)z$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда *ассоциатив алгебра* деб айтилади. Агар алгебрада ихтиёрий элементлар учун $xy=yx$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда *коммутатив алгебра* деб айтилади.

Агар $D'(\Gamma+)$ *фазодаги умумлашган функциялар тўпламида кўпайтириш амали сифатида* $*$ *ўрама амали киритиладиган бўлса, у ҳолда бу пунктда ўрнатилган натижалар шу тўпламнинг ассоциатив ва коммутатив алгебрани ташкил этишини тасдиқлашга имкон беради.* Бундай алгебра *ўрамалар* *алгебраси* деб айтилади. Бу алгебрадаги бирлик элемент $\delta(x)-$ функциядан иборат бўлади.

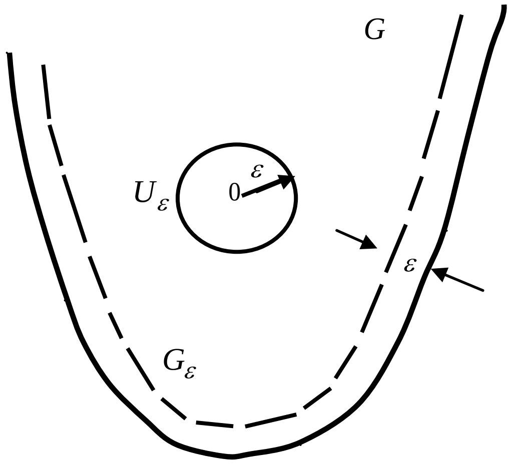
Ниҳоят, шуни таъкидлаш керакки, $D'(\Gamma)$ *умумлашган функциялар тўплами ҳам ўрамалар алгебрасини ташкил этиб* $D'(\Gamma+)$ *алгебранинг қисм алгебрасидан иборат бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, агар $f(x)\in D'(\Gamma)$ ва $g(x)\in D'(\Gamma)$ бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{supp}(f*g)(x)\subset\overline{\operatorname{supp}f(x)+\operatorname{supp}g(x)}\subset\Gamma+\Gamma=\Gamma$$

бўлади ва шунга кўра $(f*g)(x)\in D'(\Gamma)$ келиб чиқади.

6. Умумлашган функциянинг регуляризацияси. Агар $f(x)\in D'(G)$ ва $g(x)\in D'(G)$ умумлашган функциялар ва $g(x)$ – функция G соҳада етарлича кичик ташувчига эга бўлган ҳолда биз $(f*g)(x)$ ўрама тушунчасини умумлаштирамиз, бунда $\operatorname{supp}g\subset U_{\varepsilon}$ ва $G_{\varepsilon}\neq\varnothing$ бўлсин.



Юқорида келтирилган (3.6.17) формулага кўра мос $f(x)\in D'(G)$ ва $g(x)\in E'(G)$ функциялар учун $f*g$ ўрама $D'(G_{\varepsilon})$ умумлашган функциялар фазосида мавжуд ва ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G_{\varepsilon})$ асосий функция учун

$$(f*g,\varphi)=(f(x)\times g(y),\eta(y)\varphi(x+y))\qquad(3.6.27)$$

шаклида тасвирланади, бунда $\eta(y)\in D(G_{\varepsilon})$ функция ихтиёрий асосий функция бўлиб $g(x)$ функциянинг $\operatorname{supp}g(x)$ ташувчиси атрофида 1 га тенг деб олинган бўлади.

Бу қурилган $\varphi(x)\to\eta(y)\varphi(x+y)$ амал $D(G_{\varepsilon})$ фазони $D(G\times G)$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиради. Бундан эса (3.6.27) тенгликнинг ўнг томони $D(G_{\varepsilon})$ фазода чизиқли узлуксиз функционални аниқлаши келиб чиқади, яъни $(f*g)(x)\in D'(G_\varepsilon)$ бўлади. Бу (3.6.27) тенгликнинг ўнг томони ёрдамчи $\eta(x)$ функцияга боғлиқмас эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Ниҳоят $(f*g)(x)$ ўрама коммутатив бўлиб алоҳида $f(x)$ ва алоҳида $g(x)$ функцияларга нисбатан узлуксиз бўлади. Шу билан бирга $f(x)*\delta(x)=f(x)$ бўлади.

Хусусан, агар $\alpha(x)\in D(U_\varepsilon)$ бўлса, у ҳолда (3.6.27) тасвирдан фойдаланиб $f(x)*\alpha(x)$ ўрама учун

$$(f*\alpha)(x)=(f(y),\,\alpha(x-y))\,,\;x\in G_\varepsilon \qquad (3.6.28)$$

тасвирга эга бўламиз. Бундан эса $(f*\alpha)(x)\in C^\infty(G_\varepsilon)$ эканлиги ва

$$(f*\alpha)(0)=(f(y),\,\alpha(-y))=(\delta(y),(f*\alpha)(-y)) \qquad (3.6.29)$$

тенглик келиб чиқади.

(3.6.27) формула (3.6.28) тенгликка кўра ихтиёрий $\varphi(x)\in D(G_\varepsilon)$ асосий функция учун

$$(f*g,\,\varphi)=(f,g(-y)*\varphi) \qquad (3.6.30)$$

шаклга эга бўлади.

$\omega_\varepsilon(x)$ –“шапкача” функцияси ва $f(x)\in D'(G)$ умумлашган функция бўлсин.

$$f_\varepsilon(x)=(f*\omega_\varepsilon)(x)=(f(y),\,\omega_\varepsilon(x-y))$$

ўрамага $f(x)$ умумлашган функциянинг *регуляризацияси* деб айтилади. Исбот қилинганига кўра $f_\varepsilon(x)$ регуляризация функцияси учун $f_\varepsilon(x)\in C^\infty(G_\varepsilon)$ бўлади.

Энди $\varepsilon\to+0$ интилганда $D'(G)$ фазода

$$f_\varepsilon(x)\to f(x) \qquad (3.6.31)$$

яқинлашувчи эканлигини исбот қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам, (3.6.31) лимитик муносабат $\varepsilon\to+0$ интилганда $D'(G)$ фазода $\omega_\varepsilon(x)\to\delta(x)$ яқинлашувчи ва ўраманинг узлуксизлигидан келиб чиқади, яъни $\varepsilon\to+0$ интилганда $D'(G)$ фазода

$$f_\varepsilon(x)=(f*\omega_\varepsilon)(x)\to f(x)*\delta(x)=f(x)$$

яқинлашувчи бўлади.

Демак, $D'(G)$ *фазодаги ҳар қандай* $f(x)$ *умумлашган функция ўзига мос регуляризациясининг суст лимитидан иборат бўлади.*

Ушбу тасдиқдан фойдаланиб, қуйидаги бир оз кучлироқ бўлган натижани келтирамиз.

3–теорема. *$D'(G)$ фазодаги ҳар қандай $f(x)$ умумлашган функция $D(G)$ асосий функциялар фазосидан олинган кетма–кетликнинг суст лимитидан иборат бўлади, яъни $D(G)$ фазо $D'(G)$ фазода зич бўлади.*

Исбот. $f(x)$ умумлашган функциянинг регуляризацияси $f_\varepsilon(x)$ функция бўлсин. Шунингдек $G_1 \subset\subset G_2 \subset\subset \dots$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = G$, $\varepsilon_k = \Delta\left(G_k, \partial G\right) > 0$ ва $\eta_k \in D(G_k), \eta_k(x) = 1,\ x \in G_{k-1}$ бўлсин. $D(G)$ фазодан олинган $\eta_k(x\ )f_{\varepsilon_k}\ (x\ )=,k$ асосий функциялар кетма–кетлигининг $D'(G)$ фазода $f(x)$ умумлашган функцияга яқинлашишини исбот қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам, $k \to \infty$ да $\varepsilon_k \to +0$ бўлади ва $\varepsilon_k \to +0$ интилганда $D'(G)$ фазода $f_{\varepsilon_k}(x) \to f(x)$ яқинлашувчи эканлигидан ихтиёрий $\varphi(x) \in D(G)$ учун

$$\lim_{k\to+\infty}(\eta_k f_{\varepsilon_k}, \varphi) = \lim_{k\to+\infty}(f_{\varepsilon_k}, \eta_k \varphi) = \lim_{k\to+\infty}(f_{\varepsilon_k}, \varphi) = (f, \varphi)$$

тенгликка эга бўламиз. 3–теорема исбот бўлади.

Эслатма. *$D'(G)$ фазонинг тўлалигидан 3–теорема тасдиғининг тескариси ҳам ўринли эканлиги келиб чиқади: G соҳадаги ихтиёрий локал жамланувчи функциялар кетма–кетлигининг суст лимити ҳам $D'(G)$ фазодаги умумлашган функция бўлади. Шунинг учун умумлашган функциялар назариясини локал жамланувчи оддий функциялар кетма–кетлигининг суст лимити сифатида ҳам қуриш мумкин. Умумлашган функцияларга бундай нуқтаи назар билан қараш лимитик функцияни қуришнинг эквивалент функциялар синфига асосланган Кантор таърифидир. Бу секвенциал ёндошиш на фақат содда бўлади, балки бизнинг интуициямиз билан ҳам мос келади. Шунингдек функционал ёндошувдаги ҳар бир умумлашган функцияга секвенциал ёндошувдаги битта умумлашган функция мос келади ва аксинча бўлади. Функционал ва секвенциал ёндошувлардан ташқари бошқа мумкин бўлган ёндошувлар ҳам* *мавжуд бўлиб, бу тушунчалар П. Антосик, Я. Микусинский ва Р. Сикорскийларнинг китоби келтирилган*[1].

Бу ерда қуйидагича ўхшатма ўринлидир. Умумлашган функция асосий функцияга нисбатан қандайдир маънода иррационал соннинг рационал сонга нисбатан ҳолати кабидир: рационал сонлар тўпламини барча мумкин бўлган рационал сонлар кетма–кетлигининг лимити билан тўлдириб ҳақиқий сонларни ҳосил қиламиз; асосий функциялар тўпламини барча мумкин бўлган асосий функциялар кетма–кетлигининг суст лимити билан тўлдириб умумлашган функцияларни ҳосил қиламиз.

7. Ўрама – чизиқли узлуксиз трансляцион–инвариант оператор. Агар $D'(R^n)$ фазони $D'(R^n)$ фазога акслантирувчи $L:\ D'(R^n)\to D'(R^n)$ оператор барча $f(x)\in D'(R^n)$ умумлашган функция ва барча $h\in R^n$ силжиш учун $Lf(x+h)=(Lf)(x+h)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу оператор трансляцион–инвариант оператор деб айтилади.

4–теорема. *$E'(R^n)$ фазони $D'(R^n)$ фазога акслантирувчи $L: E'(R^n)\to D'(R^n)$ оператор чизиқли, узлуксиз ва трансляцион–инвариант оператор бўлишлиги учун унинг ўрама оператор бўлишлиги, яъни $L=f_0(x)*$ шаклда тасвирланиши зарур ва етарлидир, бунда $f_0(x)\in D'(R^n)$ бўлган қандайдир умумлашган функция. Шу билан бирга $f_0(x)$ умумлашган функция L операторнинг ядроси бўлади ва ягона равишда $f_0(x)=L\delta(x)$ формула билан ифодаланади.*

Исбот. Етарлилиги юқорида келтирилган натижалардан келиб чиқади, яъни $f(x)\to f_0(x)*f(x)$, $f_0(x)\in D'(R^n)$ ўрама оператори $E'(R^n)$ фазони $D'(R^n)$ фазога акслантирувчи $L: E'(R^n)\to D'(R^n)$ оператор бўлиб чизиқли, узлуксиз ва трансляцион–инвариант оператор бўлади, бундан ташқари $f_0(x)*\delta(x)=f_0(x)$ тенглик ўринли бўлади.

---

[1] П. Антосик, Я. Микусинский ва Р. Сикорский "Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход.", М.: "Мир" , 1976 г. (Piotr Antosik, Jan Mikusin`ski, Roman Sikorski "THEORY OF DISTRIBUTIONS. THE SEQUENTIAL APPROACH" Warszawa, 1973) китоби орқали танишиш мумкин.

Зарурийлик шартини исботлаш учун аввал қуйидаги леммани келтирамиз.

6–лемма. *$D(R^n)$ фазони $C^\infty(R^n)$ фазога акслантирувчи $L: D(R^n) \to C^\infty(R^n)$ оператор чизиқли, узлуксиз ва трансляцион–инвариант оператор бўлишлиги учун унинг ўрама оператор, яъни $L = f_0(x)*$, $f_0(x) \in D'(R^n)$ бўлишлиги зарур ва етарлидир, бундан ташқари $f_0(x)$ ядро ягонадир.*

Исбот. Етарлилигини исбот қилиш учун

$$\varphi(x) \to f_0(x)*\varphi(x) = (f_0(y), \varphi(x-y))$$

амалнинг $D(R^n)$ фазони $C^\infty(R^n)$ фазога акслантирувчи узлуксиз амал эканлигини кўрсатиш керак бўлади. Бу эса барча $\varphi(x) \in D(U_R)$ ва барча $|x| \le R_1$ учун

$$\left|D^\alpha(f_0 * \varphi)(x)\right| = \left|(f_0(y), D^\alpha \varphi(x-y))\right| \le K \|\varphi\|_{C^{m+|\alpha|}} \qquad (3.6.32)$$

тенгсизликнинг ўринли эканлигидан келиб чиқади (Бу (3.6.32) тенгсизликдаги K ва m сонлар R ва R_1 сонларга боғлиқ бўлади).

Зарурлиги. Қўйилган шартдан $(L\varphi)(0)$ функционалнинг $D(R^n)$ фазода чизиқли ва узлуксиз эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун ягона $f_0(x) \in D'(R^n)$ умумлашган функция мавжуд бўлиб, бунда $(L\varphi)(0) = (f_0(-x), \varphi)$ тенглик ўринли бўлади. Бундан эса $L: D(R^n) \to C^\infty(R^n)$ операторнинг трансляцион–инвариант оператор бўлишлик хоссасидан барча $x_0 \in R^n$ учун

$$(L\varphi(x+x_0))(0) = (L\varphi)(x_0) = (f_0(-x), \varphi(x+x_0)) =$$
$$= (f_0(x), \varphi(x_0 - x)) = (f_0 * \varphi)(x_0)$$

исбот қилинадиган тенглик келиб чиқади. 6–лемма исбот бўлди.

4–теорема исботининг зарурийлик шарти. $E'(R^n)$ фазони $D'(R^n)$ фазога акслантирувчи $L: E'(R^n) \to D'(R^n)$ оператор чизиқли, узлуксиз ва трансляцион–инвариант оператор эканлигидан $L_1 = L - L\delta*: E'(R^n) \to D'(R^n)$ оператор $E'(R^n)$ фазони $D'(R^n)$ фазога акслантирувчи чизиқли, узлуксиз ва трансляцион–инвариант оператор бўлади. Бундан ташқари барча $x_0 \in R^n$ учун

$$L_1\delta(x+x_0) = (L\delta - L\delta * \delta)(x+x_0) = (L\delta - L\delta)(x+x_0) = 0$$

тенгликка эга бўламиз. Шунга кўра L_1 оператор δ–функциянинг барча силжишларида нолга айланади. Энди ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функция бўлсин. У ҳолда $N\to\infty$ интилганда $E'(R^n)$ фазода

$$\frac{1}{N^n}\sum_{0\le|k|\le N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right)\delta\left(x-\frac{k}{N}\right)\to\varphi(x)$$

яқинлашувчи бўлади, бошқача айтганда ихтиёрий $\psi(x)\in C^\infty(R^n)$ функция учун $N\to\infty$ интилганда

$$\frac{1}{N^n}\sum_{0\le|k|\le N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right)\psi\left(\frac{k}{N}\right)\to\int_{R^n}\varphi(x)\psi(x)dx$$

яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун L_1 оператор $E'(R^n)$ фазони $D'(R^n)$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиришидан ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функция учун

$$L_1\varphi=\lim_{N\to\infty}L_1\left[\frac{1}{N^n}\sum_{0\le|k|\le N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right)\delta\left(x-\frac{k}{N}\right)\right]=0$$

тенглик ҳосил бўлади. Энди ихтиёрий $f(x)\in E'(R^n)$ умумлашган функция бўлсин. У ҳолда $f_k(x)\in D(R^n)$ асосий функциялар кетма–кетлиги мавжуд бўлиб $k\to\infty$ интилганда $E'(R^n)$ фазода $f(x)\in E'(R^n)$ умумлашган функцияга яқинлашувчи бўлади. Бундан эса L_1 операторнинг $E'(R^n)$ фазони $D'(R^n)$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиришидан

$$L_1 f=\lim_{k\to\infty}L_1 f_k=0$$

тенглик ихтиёрий $f(x)\in E'(R^n)$ умумлашган функция учун ўринли эканлигига эга бўламиз. Шунга кўра $L_1=0$ бўлади ва демак $L=L\delta*=f_0*$ ҳосил бўлади.

L оператор f_0 ядросининг ягона эканлиги қуйидагича фикрлашдан келиб чиқади: агар $f_1(x)\in D'(R^n)$ умумлашган функция шундай бўлсаки, бунда барча $f(x)\in E'(R^n)$ умумлашган функция учун $f_1*f=0$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда барча $f(x)\in D'(R^n)$ умумлашган функция учун ҳам $f_1*f=0$ тенглик ўринли бўлиб юқори келтирилган тасдиқга кўра $f_1 = 0$ тенглик ўринли бўлади. 4–теорема исбот бўлди.

8. Ўраманинг айрим тадбиқлари. а) *Ньютон потенциали.* $f(x)$ функция $R^n \setminus \{0\}$ тўпламда узлуксиз, 0 нуқта эса унинг махсус нуқтаси бўлган интегралланувчи функция ва S чегараланган бўлакли силлиқ сиртда $\mu(x)$ зичликка эга бўлган $\mu\delta_S(x)$ оддий қатлам берилган бўлсин.

R^n фазода $f * \mu\delta_S$ ўрама локал интегралланувчи функция бўлиб

$$f * \mu\delta_S = \int_S \mu(y) f(x-y) dS_y \qquad (3.6.33)$$

интеграл шаклида тасвирланади.

Бу тасдиқ (3.6.17) муносабатдан бевосита келиб чиқади. Шунга кўра ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^n)$ учун

$$\begin{aligned}(f * \mu\delta_S,\ \varphi) &= (\mu\delta_S(y) \times f(\xi),\ \eta(y)\varphi(y+\xi)) = \\ &= (\mu\delta_S(y),\ \eta(y)(f(\xi),\ \varphi(y+\xi))) = \\ &= \int_S \mu(y)\eta(y) \int_{R^n} f(\xi)\varphi(y+\xi) d\xi dS_y = \\ &= \int_S \mu(y) \int_{R^n} f(x-y)\varphi(x) dS_y = \\ &= \int_{R^n} \varphi(x) \int_S \mu(y) f(x-y) dS_y dx\end{aligned}$$

тенглик ўринли бўлади.

Энди $f(x) \in D'(R^n)$ умумлашган функция бўлсин. Агар

$$V_n = \frac{1}{|x|^{n-2}} * f, \quad n \geq 3; \qquad V_2 = \ln\frac{1}{|x|} * f$$

ўрама мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ зичлик билан *Ньютон потенциали* ($n = 2$ учун эса *логарифмик потенциал*) деб айтилади. Бу V_n потенциал

$$\Delta V_n = -(n-2)\sigma_n f, \quad n \geq 3; \qquad \Delta V_2 = -2\pi f$$

Пуассон тенгламасини қаноатлантиради. Ҳақиқатдан ҳам $n \geq 3$ учун

$$\Delta V_n = \Delta\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} * f\right) = \Delta\frac{1}{|x|^{n-2}} * f = -(n-2)\sigma_n\delta * f = -(n-2)\sigma_n f$$

тенглик ҳосил бўлади. Худди шунингдек $n=2$ учун

$$\Delta V_2 = \Delta\left(\ln\frac{1}{|x|} * f\right) = \Delta\ln\frac{1}{|x|} * f = -2\pi\delta * f = -2\pi f$$

тенглик ҳосил бўлади.

Агар $f(x)=\rho(x)$ функция $R^n, n\geq 3$ фазода финит жамланувчи функция бўлса, у ҳолда мос V_n Ньютон потенциали *ҳажм потенциали* деб айтилади. Бизга маълум бўлган (3.6.1) формулага кўра R^n фазода финит ва локал жамланувчи $\rho(x)$ функция ва R^n фазода локал жамланувчи $\frac{1}{|x|^{n-2}}$ функцияларнинг V_n ўрамаси R^n фазода локал жамланувчи функция бўлади ва

$$V_n(x) = \int_{R^n} \frac{\rho(y)dy}{|x-y|^{n-2}} \qquad (3.6.34)$$

интеграл билан ифодаланади.

$f(x)=\mu\delta_S(x)$ ёки $f(x) = -\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$ – оддий ва иккиламчи қатламлар $S\subset R^n, n\geq 3$ бўлакли силлиқ сиртдаги $\mu(x)$ ва $\nu(x)$ сирт зичликлар билан берилган бўлсин. У ҳолда улар ёрдамида яратилган Ньютон (логарифмик) потенциаллар

$$V_n^{(0)} = \frac{1}{|x|^{n-2}} * \mu\delta_S, \ \ n\geq 3; \qquad V_2^{(0)} = \ln\frac{1}{|x|} * \mu\delta_S; \qquad (3.6.35)$$

$$V_n^{(1)} = -\frac{1}{|x|^{n-2}} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \ \ n\geq 3; \ V_2^{(1)} = -\ln\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S) \qquad (3.6.36)$$

мос равишда S сиртда $\mu(x)$ ва $\nu(x)$ зичликлар билан берилган *оддий ва иккиламчи қатлам сирт потенциаллар* деб айтилади.

Агар S – чегараланган сирт бўлса, у ҳолда $V_n^{(0)}$ ва $V_n^{(1)}$ сирт потенциаллар R^n фазода локал жамланувчи функциялар бўлади ва

$$V_n^{(0)}(x)=\int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}dS_y, \quad n\geq 3;$$

$$V_2^{(0)}(x)=\int_S \mu(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dS_y; \qquad (3.6.37)$$

$$V_n^{(1)}=\int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}dS_y, \quad n\geq 3;$$

$$V_2^{(1)}=\int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|x-y|}dS_y \qquad (3.6.38)$$

формулалар билан ифодаланади.

(3.6.37) формулалар аслида (3.6.33) формуланинг хусусий ҳолларидир. Биз $n\geq 3$ бўлганда $V_n^{(1)}$ потенциал учун (3.6.38) формулани келтириб чиқарамиз. Бунинг учун ўрама ҳақидаги (3.6.17) формуладан фойдаланамиз ва ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$, $\eta(x)\in D(R^n)$ ва S сирт атрофида $\eta(x)=1$ бўлган асосий функциялар учун

$$(V_n^{(1)},\ \varphi)=-\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}*\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S),\ \varphi\right)=$$

$$=-\left(\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)(y)\times\frac{1}{|\xi|^{n-2}},\ \eta(y)\varphi(y+\xi)\right)=$$

$$=-\left(\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)(y),\ \eta(y)\left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}},\ \varphi(y+\xi)\right)\right)=$$

$$=\int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n}\left[\eta(y)\int_{R^n}\frac{\varphi(y+\xi)}{|\xi|^{n-2}}d\xi\right]dS_y=$$

$$=\int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n}\int_{R^n}\frac{\varphi(x)}{|x-y|^{n-2}}dxdS_y=$$

$$=\int_S \nu(y)\int_{R^n}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}dxdS_y=$$

$$=\int_{R^n}\varphi(x)\int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}dS_y dx$$

тенгликлар келиб чиқади. Бундан эса талаб этилган (3.6.38) формула исбот бўлади. Бу ерда шуни таъкидлаш керакки, (3.6.38) формулани келтириб чиқаришда биз

$$\int_S |\nu(y)| \int_{R^n} |\varphi(x)| \left|\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right| dx dS_y$$

такрорий интегралнинг мавжуд эканлигига кўра интеграл белгиси остида функцияни дифференциаллаш ҳақидаги теоремадан ва интеграллаш тартибини ўзгартириш ҳақидаги Фубини теоремасидан фойдаландик.

б) *Грин формуласи.* $G\subset R^n, n\geq 3$ соҳа S бўлакли силлиқ сирт билан чегараланган ва $u(x)\in C^2(G)\bigcap C^1(\overline{G})$ бўлсин. У ҳолда бу $u(x)$ функция *Грин формуласи* бўйича

$$-\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_G \frac{\Delta u(y)}{|x-y|^{n-2}}dy+$$

$$+\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_S\left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\cdot\frac{\partial u(y)}{\partial n}-u(y)\cdot\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right]dS_y=$$

$$=\begin{cases} u(x)\,, & x\in G \\ 0, & x\notin G \end{cases} \qquad (3.6.39)$$

учта Ньютон потенциалларининг йиғиндиси шаклида тасвирланади. Ҳақиқатдан ҳам, $u(x)$ функцияни $x\notin G$ учун ноль функция билан давом эттирамиз ва

$$\Delta f=\Delta_{\text{кл}} f-\frac{\partial f}{\partial n}\delta_S-\frac{\partial}{\partial n}(f\delta_S) \qquad (3.6.40)$$

Гриннинг иккинчи формуласининг умумлашган функция маъносида ёзилганидан фойдаланиб

$$u=\delta * u=-\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\Delta\frac{1}{|x|^{n-2}}*u=-\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}*\Delta u=$$

$$=-\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}*\left[\Delta_{\text{кл}}u-\frac{\partial u}{\partial n}\delta_S-\frac{\partial}{\partial n}(u\delta_S)\right]$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан ва (3.6.34), (3.6.35) ва (3.6.36) формулалардан фойдаланиб (3.6.39) тасвирнинг ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Хусусан, агар $u(x)$ функция G соҳада гармоник функция бўлса, у ҳолда (3.6.39) тасвир

$$\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_S\left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\cdot\frac{\partial u(y)}{\partial n}-u(y)\cdot\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right]dS_y=$$

$$=\begin{cases} u(x)\,, & x\in G \\ 0, & x\notin G \end{cases} \tag{3.6.41}$$

*гармоник функциялар учун Грин формуласи*ни ифода қилади. Худди шунингдек (3.6.39) ва (3.6.41) формулаларга ўхшаш формулалар $n=2$ учун ҳам ўринли бўлади. Бунинг учун $-\frac{1}{(n-2)\sigma_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}$ фундаментал ечимни $-\frac{1}{2\pi}\ln|x|$ фундаментал ечим билан алмаштириш керак бўлади.

Эслатма. *(3.6.41) Грин формуласи соҳада гармоник бўлган функциянинг қийматини унинг шу соҳа чегарасидаги қиймати ва нормал бўйича ҳосиласининг қиймати орқали ифода қилади. Шу маънода бу формула аналитик функциялар учун Коши формуласига ўхшаб кетади.*

в) *Ўрама тенгламалар.*

$$a(x)*u(x)=f(x) \tag{3.6.42}$$

шаклидаги тенглама *ўрама тенглама* деб айтилади, бунда $a(x)\in D'(R^n)$ ва $f(x)\in D'(R^n)$ умумлашган функциялар берилган бўлади. Ўрама тенгламалар синфига

1) $a(x)=\sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha\delta(x),\qquad a(x)*u(x)=\sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u(x)=f(x)$

барча ўзгармас коэффициентли хусусий ҳосилали чизиқли дифференциал тенгламалар;

2) $a(x)=\sum\limits_{\alpha} a_\alpha\delta(x-x_\alpha),\qquad a(x)*u(x)=\sum\limits_{\alpha} a_\alpha u(x-x_\alpha)=f(x)$

барча айирмали чизиқли тенгламалар;

3) $a(x)\in L^1_{loc}(R^n),\qquad a(x)*u(x)=\int\limits_{R^n} u(y)a(x-y)dy=f(x)$

бўлган I турдаги барча чизиқли интеграл тенгламалар;

4) $a(x)=\delta(x)+K(x),\ K(x)\in L^1_{loc}(R^n)$,

$$a(x)*u(x)=u(x)+\int_{R^n} u(y)K(x-y)dy=f(x)$$

бўлган II турдаги барча чизиқли интеграл тенгламалар ва бошқа чизиқли интегродифференциал тенгламалар киради.

Агар $E(x)\in D'(R^n)$ умумлашган функция (3.6.42) шаклидаги ўрама тенгламани $f(x)=\delta(x)$ учун қаноатлантирса, яъни

$$a(x)*E(x)=\delta(x) \tag{3.6.43}$$

тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда бу $E(x)\in D'(R^n)$ умумлашган функцияга $a(x)*$ ўрама операторининг *фундаментал ечими* деб айтилади. $E(x)\in D'(R^n)$ фундаментал ечим умуман олганда ягона бўлмайди. Бу ечим $D'(R^n)$ умумлашган функциялар фазосидаги $a(x)*E_0(x)=0$ бир жинсли ўрама тенгламанинг $E_0(x)$ ечими аниқлигида топилади. Ҳақиқатдан ҳам

$$a(x)*\left(E(x)+E_0(x)\right)=a(x)*E(x)+a(x)*E_0(x)=\delta(x)$$

тенглик ўринли бўлади.

Мисоллар. 1) Лаплас операторининг

$$E_1(x)=\frac{1}{2}\,|x|\,,\ E_2(x)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x|,\ E_n(x)=-\frac{1}{(n-2)\sigma_n\,|x|^{n-2}}\quad (n\geq 3)$$

тенгликлар билан аниқланган $E_n(x)$ *фундаментал ечими* учун $\Delta E_n(x)=\delta(x)$ тенглик ўринли бўлади.

2) Умумий кўриниши $E(x)=\theta(x)+C$ шаклида бўлган $E(x)\in D'(R)$ умумлашган функция $\dfrac{d}{dx}=\delta'*$ ўрама операторининг фундаментал ечими бўлади.

Энди $a(x)*$ ўрама операторининг $E(x)\in D'(R^n)$ фундаментал ечими мавжуд бўлсин. Биз $A(a,E)$ орқали $E(x)*f(x)\in D'(R^n)$ ва $a(x)*E(x)*f(x)\in D'(R^n)$ ўрамалар мавжуд бўладиган $f(x)\in D'(R^n)$ умумлашган функциялар тўпламини белгилаймиз.

Қуйидаги теорема ўринлидир.

5–теорема. *Ихтиёрий* $f(x) \in A(a,E)$ *бўлган умумлашган функция бўлсин. У ҳолда (3.6.42) шаклидаги ўрама тенгламанинг* $u(x)$ *ечими мавжуд ва бу ечим*

$$u(x) = E(x) * f(x) \qquad (3.6.44)$$

формула билан ифодаланади. Бу (3.6.42) шаклидаги ўрама тенгламанинг ечими $A(a,E)$ *синфда ягона бўлади.*

Исбот. $u(x) = E(x) * f(x)$ умумлашган функция (3.6.42) ўрама тенгламани қаноатлантиради, чунки $E(x) * f(x)$ ва $a(x) * E(x) = \delta(x)$ ўрамалар мавжуд, ҳамда ўраманинг коммутативлик ва ассоциативлигига кўра

$$a(x) * u(x) = a(x) * \big(E(x) * f(x)\big) = a(x) * E(x) * f(x) =$$
$$= \big(a(x) * E(x)\big) * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x)$$

тенглик ўринли бўлади.

Энди ўрама тенглама ечимининг $A(a,E)$ синфда ягона эканлигини кўрсатамиз. Агар $a(x) * u(x) = 0$ ва $u(x) \in A(a,E)$ бўлса, у ҳолда

$$u(x) = u(x) * \delta(x) = u(x) * \big(a(x) * E(x)\big) = u(x) * a(x) * E(x) =$$
$$= \big(u(x) * a(x)\big) * E(x) = \big(a(x) * u(x)\big) * E(x) = 0 * E(x) = 0,$$

яъни $u(x) = 0$ исбот қилиниши талаб этилган тенглик ўринли бўлади. 5–теорема исбот бўлди.

Эслатма. *(3.6.44) ечимга қуйидагича физик интерпретация бериш мумкин:* $f(x)$ *манбани* $f(\xi)\delta(x-\xi)$ *нуқтавий манбаларнинг*

$$f(x) = f(x) * \delta(x) = \int_{R^n} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$$

“йиғиндиси” шаклида тасвирлаймиз. $E(x)$ *фундаментал ечим* $\delta(x)$ *нуқтавий манба таъсиридан иборат бўлади. Бундан эса* $a(x) *$ *ўрама операторининг чизиқлилик ва трансляцион инвариантлик хоссасига кўра ҳар бир* $f(\xi)\delta(x-\xi)$ *нуқтавий манба* $f(\xi)E(x-\xi)$ *таъсирни яратади. Шунинг учун табиий равишда бу қўйилган таъсирларнинг*

$$\int_{R^n} f(\xi)E(x-\xi)d\xi = E(x) * f(x)$$

“йиғиндиси” шаклида суммавий $f(x)$ манбанинг таъсирини, яъни (3.6.42) тенгламанинг $u(x)$ ечимини беради. Исбот қилинган теорема бу қатъий бўлмаган қарашни асослаб беради.

г) *Ўрама алгебраларидаги тенгламалар.* A – ўрама алгебраси бўлсин, масалан $D'(\Gamma+)$, $D'(\Gamma)$ алгебралардан бири бўлсин. A алгебрада (3.6.42) тенгламани қараймиз, яъни $a(x) \in A$ ва $f(x) \in A$ деб ҳисоблаб $u(x)$ ечимни ҳам шу A алгебрадан излаймиз. Юқорида исбот қилинган теорема A алгебрада қуйидаги кўринишда бўлади: *агар $a(x)*$ ўрама операторнинг $E(x)$ фундаментал ечими A алгебрада мавжуд бўлса, у ҳолда (3.6.42) тенгламанинг $u(x)$ ечими A алгебрада ягона бўлиб ихтиёрий $f(x) \in A$ учун мавжуд ва $u(x) = E(x) * f(x)$ формула орқали ифодаланади.*

Бу $a(x)*$ ўрама операторининг A алгебрадаги $E(x)$ фундаментал ечимини a^{-1} орқали белгилаш қулай бўлиб (3.6.43) тенгликкка кўра

$$a^{-1} * a = \delta \qquad (3.6.45)$$

шаклида ёзилади.

Бошқача сўз билан айтганда, a^{-1} элемент a элементнинг A алгебрадаги тескари элементи бўлади.

A алгебрада фундаментал ечимни қуриш учун қуйидаги тасдиқ жуда фойдали бўлади:

Агар A алгебрада a_1^{-1} ва a_2^{-1} тескари элементлар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\left(a_1 * a_2\right)^{-1} = a_1^{-1} * a_2^{-1} \qquad \textit{(3.6.46)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам

$$\left(a_1 * a_2\right) * \left(a_1^{-1} * a_2^{-1}\right) = \left(a_2 * a_1\right) * \left(a_1^{-1} * a_2^{-1}\right) =$$
$$= a_2 * \left(\left(a_1 * a_1^{-1}\right) * a_2^{-1}\right) = a_2 * \left(\delta * a_2^{-1}\right) = a_2 * a_2^{-1} = \delta$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу (3.6.46) формула операцион ҳисобнинг асосини ташкил этади.

д) *Каср тартибли дифференциаллаш ва интеграллаш.* Биз $D_+{}'$ орқали $D'\left(\overline{R}_+^1\right)$ алгебрани белгилаймиз.

Бу $D_+{}'$ алгебрадан олинган ва α , $-\infty < \alpha < +\infty$ ҳақиқий параметрларга боғлиқ бўлган f_α умумлашган функцияни

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta(x)\, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha > 0 \\ f_{\alpha+1}{}'(x)\,, & \alpha \le 0 \end{cases}$$

формула бўйича киритамиз.

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta} \qquad (3.6.47)$$

тенгликни кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, агар $\alpha > 0$ ва $\beta > 0$ бўлса, у ҳолда

$$f_\alpha(x) * f_\beta(x) = \frac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x y^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1} dy =$$

$$= \frac{\theta(x)\, x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\theta(x)\, x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = f_{\alpha+\beta}(x)$$

тенглик ҳосил бўлади. Агар $\alpha \le 0$ ёки $\beta \le 0$ бўлса, у ҳолда $m > -\alpha$ ва $n > -\beta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи бутун сонларни танлаб

$$f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\alpha+m}^{(m)}(x) * f_{\beta+n}^{(n)}(x) =$$

$$= \left(f_{\alpha+m}(x) * f_{\beta+n}(x) \right)^{(m+n)} = f_{\alpha+\beta+m+n}^{(m+n)}(x) = f_{\alpha+\beta}(x)$$

тенгликка эга бўламиз. Шу билан (3.6.47) тенглик исбот бўлди.

$D_+{}'$ алгебрада $f_\alpha(x)*$ ўрама операторини қараймиз. Маълумки, $f_0(x) = \theta'(x) = \delta(x)$ бўлгани учун (3.6.47) тенгликдан $f_\alpha(x)*$ ўрама операторининг $f_\alpha^{-1}(x)$ фундаментал ечими мавжуд ва бу ечим $f_{-\alpha}(x)$ умумлашган функцияга тенг бўлади, яъни $f_\alpha^{-1}(x) = f_{-\alpha}(x)$ тенглик ўринли бўлади. Шунингдек $n < 0$ бўлган бутун сон учун $f_n(x) = \delta^{(|n|)}(x)$ ва шунинг учун $f_n(x) * u(x) = \delta^{(|n|)}(x) * u(x) = u^{(|n|)}(x)$ тенглик ўринли бўлади, яъни $n < 0$ бўлган бутун сон учун $f_n(x)*$ оператор $|n|-$ каррали дифференциаллаш оператори бўлади.

Ниҳоят, $n > 0$ бўлган бутун сон учун

$$\left(f_n(x) * u(x) \right)^{(n)} = f_{-n}(x) * \left(f_n(x) * u(x) \right) =$$
$$= \left(f_{-n}(x) * f_n(x) \right) * u(x) = \delta(x) * u(x) = u(x)$$

тенглик ўринли бўлади, яъни $n > 0$ бўлган бутун сон учун $f_n(x) * u(x)$ оператор $u(x)$ умумлашган функциянинг $n-$ тартибли бошланғич функциясидан иборат бўлади.

Юқорида айтилганларга кўра, *агар* $\alpha < 0$ *бўлса, у ҳолда* $f_\alpha(x) *$ *ўрама оператори* $|\alpha|$ *– каср тартибли дифференциаллаш оператори ва агар* $\alpha > 0$ *бўлса, у ҳолда* $f_\alpha(x) *$ *ўрама оператори* $\alpha -$ *каср тартибли интеграллаш оператори деб (Риман–Лиувилль оператори деб ҳам) айтилади.*

Мисол. $f(x) \in D_+'$ умумлашган функция бўлсин. У ҳолда

$$D^{\frac{1}{2}} f(x) = D\left(f_{\frac{1}{2}} * f \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(y)dy}{\sqrt{x-y}}$$

тенглик ўринли бўлади.

е) *Хевисайд операцион ҳисоби.* Хевисайд операцион ҳисоби D_+' ўрамалар алгебрасидаги бошқача бир анализдан иборат бўлади. Мисол сифатида

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m, \quad a_i\text{–ўзгармас сонлар}$$

бўлган дифференциал операторнинг D_+' ўрамалар алгебрасидаги $E(t)$ фундаментал ечимини ҳисоблаймиз.

Бу D_+' ўрамалар алгебрасида мос тенглама

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) E(t) = \frac{d^m E(t)}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} E(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m E(t) = \delta(t)$$

ёки

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \delta(t) * E(t) = \delta(t);$$

$$\left(\delta^{(m)} + a_1 \delta^{(m-1)} + \ldots + a_m \delta(t) \right) * E(t) = \delta(t)$$

кўринишида бўлади. Агар биз формал равишда

$$P(\delta)(t) = \delta^{(m)} + a_1 \delta^{(m-1)} + \ldots + a_m \delta(t)$$

ёзсак, у ҳолда мос тенглама $P(\delta)(t) * E(t) = \delta(t)$ шаклида бўлади.

Бу D_+' ўрамалар алгебрасида $P(\delta)(t)$ функцияни

$$P(\delta)(t) = *\prod_j \left(\delta' - \lambda_j \delta\right)^{k_j}$$

кўпайтувчиларга ёйамиз ва (3.6.46) формуладан фойдаланиб

$$P^{-1}(\delta)(t) = E(t) = \left[*\prod_j \left(\delta' - \lambda_j \delta\right)^{k_j} \right]^{-1} = *\prod_j \left(\delta' - \lambda_j \delta\right)^{-k_j} \qquad (3.6.48)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $* \prod_{1 \le j \le i} a_j = a_1 * a_2 * \ldots * a_i$ символик белгилаш ишлатилди. Шунингдек осонгина текшириш мумкин бўладики, бунда

$$*\left(\delta' - \lambda \delta\right)^{-k} = *\left[\left(\delta' - \lambda \delta\right)^{-1} \right]^k = \frac{\theta(t) t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} \qquad (3.6.49)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу ерда (3.6.48) тенгликни давом эттириб

$$E(t) = *\prod_j \frac{\theta(t) t^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} e^{\lambda_j t} \qquad (3.6.50)$$

тенгликни чиқарамиз. (3.6.50) ўрама эффектив ҳисоблашга эга бўлади. (3.6.48) тенгликнинг ўнг қисмини D_+' ўрамалар алгебрасида содда касрларга ёйсак, у ҳолда

$$E(t) = *\prod_j \left(\delta' - \lambda_j \delta\right)^{-k_j} =$$

$$= \sum_j \left[c_{j,k_j} * \left(\delta' - \lambda_j \delta\right)^{-k_j} + \ldots + c_{j,1} * \left(\delta' - \lambda_j \delta\right)^{-1} \right]$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан эса (3.6.49) формулани қўллаб

$$E(t) = \theta(t) \sum_j \left[c_{j,k_j} \frac{t^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} + \ldots + c_{j,1} \right] e^{\lambda_j t}$$

якуний формулага эга бўламиз.

Шундай қилиб, $P\left(\frac{d}{dt}\right)$ дифференциал операторнинг $E(t)$ фундаментал ечимини топиш учун қуйидаги қоидага эга бўламиз: $\frac{d}{dt}$ символни p билан алмаштириб $P(p)$ полиномни тузамиз, $\frac{1}{P(p)}$ ифодани

$$\frac{1}{P(p)} = \prod_j \left(p - \lambda_j\right)^{-k_j} = \sum_j \left[c_{j,k_j} \left(p - \lambda_j\right)^{-k_j} + \ldots + c_{j,1} \left(p - \lambda_j\right)^{-1} \right]$$

содда касрларга ёйамиз ва ҳар бир $\left(p-\lambda\right)^{-k}$ содда касрга (3.6.49) формуланинг ўнг қисмини мос қилиб қўямиз.

Мисол. $E''(t)+\omega^2 E(t)=\delta(t)$ тенглама учун D_+' ўрамалар алгебрасидаги $E(t)$ фундаментал ечимни топамиз. Юқоридаги қоидага кўра

$$\frac{1}{p^2+\omega^2}=\frac{1}{2\omega i}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\frac{\theta(t)}{2\omega i}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)=\theta(t)\frac{\sin\omega t}{\omega}=E(t)$$

фундаментал ечимга эга бўламиз.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

24.1. Агар $f*g$ ўрама мавжуд бўлса, у ҳолда $\operatorname{supp}\left(f*g\right)\subset\overline{\left[x: x=y+z,\, y\in\operatorname{supp} f,\ z\in\operatorname{supp} g\right]}$ муносабат ўринли эканлигини исботланг.

24.2. Агар $f(x)$ умумлашган функция x_i ўзгарувчига боғлиқмас бўлса, у ҳолда $f*g$ ўрама ҳам x_i ўзгарувчига боғлиқмас эканлигини исботланг.

24.3. Агар $f*1$ ўрама мавжуд бўлса, у ҳолда бу ўрама ўзгармас билан устма–уст тушишини исботланг.

24.4. Агар $f_\alpha(x)=\dfrac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-a\,x}$, $\alpha>0, \operatorname{Re}a>0$ бўлса, у ҳолда $f_\alpha(x)*f_\beta(x)=f_{\alpha+\beta}(x)$ тенгликни текширинг.

24.5. Агар $f_\alpha(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$, $\alpha>0$ бўлса, у ҳолда $f_\alpha(x)*f_\beta(x)=f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(x)$ тенгликни текширинг.

24.6. Агар $f_\alpha(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$, $\alpha>0$ бўлса, у ҳолда $f_\alpha(x)*f_\beta(x)=f_{\alpha+\beta}(x)$ тенгликни текширинг.

24.7. $\left[*\left(\delta'-\lambda\delta\right)^k\right]^{-1}=\left[*\left(\delta'-\lambda\delta\right)^{-1}\right]^k=\dfrac{\theta(x)x^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda x}$

тенгликни исботланг. Бу ерда $*f^k = f*...*f$ (k марта) каби белгилаш киритилган.

24.8. D_+' ўрамалар алгебрасига тегишли

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} & , \alpha > 0 \\ f'_{\alpha+1}(x) & , \alpha \le 0 \end{cases}$$

умумлашган функциялар учун $f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x)$ тенглик ўринли эканлигидан

$$u(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^x \frac{g'(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}} d\xi$$

функция

$$\int_0^x \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^\alpha} d\xi = g(x) \ , g(0) = 0, \ g(x) \in C^1(x \ge 0), 0 < \alpha < 1$$

Абель интеграл тенгламасининг ечими эканлигини кўрсатинг.

Кўрсатма. Берилган тенгламани $u(x) * \theta(x - \alpha) = g(x)$ *(бунда* $x < 0$ *учун* $u(x) = 0$ *ва* $g(x) = 0$ *деб ҳисоблаймиз) ўрама шаклида ёзинг ва юқоридаги тенгликдан фойдаланиб ечинг.*

24.9. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ умумлашган функциялар D_+' ўрамалар алгебрасига тегишли бўлса, у ҳолда $e^{ax} f(x) * e^{ax} g(x) = e^{ax} \left(f * g \right)(x)$ тенгликни исбот қилинг.

24.10. Агар $f(x) \in D'(R^1)$ ва ихтиёрий $\varphi(x) \in D'(R^1)$, $\mathrm{supp}\varphi(x) \subset \left[x < 0\right]$ бўлган асосий функция учун $f(x) * \varphi(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $f(x) \in D_+'$ ўрамалар алгебрасига тегишли эканлигини исбот қилинг.

24.11. Агар а) $D'(R^n)$ фазода $k \to \infty$ интилганда $f_k(x) \to 0$;

б) шундай бир $R > 0$ мусбат сон топилиб барча $k = 1, 2, ...$ учун $\mathrm{supp} f_k \subset U_R$ бўлса, у ҳолда $E'(R^n)$ фазода $k \to \infty$ интилганда $f_k(x) \to 0$ яқинлашувчи деб айтилади. Бу $E'(R^n)$ орқали белгиланган фазо юқоридаги яқинлашиш билан финит умумлашган функциялар фазоси деб айтилади.

$E'(R^n)$ фазони $D'(R^n)$ фазога акслантирувчи L оператор $Lf = f_0 * f$, бунда $f_0 \in D'(R^n)$ ўрама шаклида тасвирланувчи оператор бўлишлиги учун унинг $E'(R^n)$ фазони $D'(R^n)$ фазога акслантирувчи чизиқли ва узлуксиз, ҳамда силжитиш амалига нисбатан коммутатив бўлишлиги зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг. Шунингдек бу ерда f_0 элемент ягона ва $f_0 = L\delta$ тенглик билан аниқланишини кўрсатинг.

24.12. $\delta(x) * f(x) = f(x) * \delta(x) = f(x)$ эканлигини исботланг.

24.13. $\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$ эканлигини исботланг.

24.14. $\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$ эканлигини исботланг.

24.15. $\delta^{(m)}(x) * f(x) = f^{(m)}(x)$ эканлигини исботланг.

24.16. $\delta^{(m)}(x-a) * f(x) = f^{(m)}(x-a)$ эканлигини исботланг.

24.17. $D'(R^1)$ фазода $\theta(x) * \theta(x)$ ўрамани ҳисобланг.

24.18. $D'(R^1)$ фазода $\theta(x) * \theta(x)x^2$ ўрамани ҳисобланг.

24.19. $D'(R^1)$ фазода $e^{-|x|} * e^{-|x|}$ ўрамани ҳисобланг.

24.20. $D'(R^1)$ фазода $e^{-ax^2} * xe^{-ax^2}, (a > 0)$ ўрамани ҳисобланг.

24.21. $D'(R^1)$ фазода $\theta(x)x^2 * \theta(x)\sin x$ ўрамани ҳисобланг.

24.22. $D'(R^1)$ фазода $\theta(x)\cos x * \theta(x)x^3$ ўрамани ҳисобланг.

24.23. $D'(R^1)$ фазода $\theta(x)\sin x * \theta(x)shx$ ўрамани ҳисобланг.

24.24. $D'(R^1)$ фазода $\theta(a-|x|) * \theta(a-|x|)$ ўрамани ҳисобланг.

24.25. R^n фазода $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар локал интегралланувчи бўлсин.

1) агар $f(x) \in L_1(R^n)$ ва $g(x) \in L_1(R^n)$ бўлса, у ҳолда $f(x) * g(x) \in L_1(R^n)$ ва $\| f(x) * g(x) \|_{L_1(R^n)} \le \| f(x) \|_{L_1(R^n)} \cdot \| g(x) \|_{L_1(R^n)}$ тенгсизлик ўринли эканлигини эканлигини кўрсатинг.

2) агар $f(x)$ ёки $g(x)$ финит функция бўлса, у ҳолда $f(x) * g(x)$ ўрама функцияси локал интегралланувчи эканлигини кўрсатинг.

3) агар $n = 1;$ $x < 0$ учун $f(x) = 0$ ва $g(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $f(x) * g(x)$ ўрама функцияси локал интегралланувчи эканлигини кўрсатинг. Ҳамда $\left(f * g\right)(x) = \int\limits_0^x f(y)g(x-y)dy$ тенгликни исботланг.

24.26. $Lu(x) = \delta(x)$, бунда

$$L=\frac{d^m}{dx^m}+a_1(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}+...+a_{m-1}(x)\frac{d}{dx}+a_m(x),\ a_k(x)\in C^\infty(R^1)$$

тенгламанинг $D'(R^1)$ фазодаги ечими $u(x)=\theta(x)Z(x)$ эканлигини кўрсатинг. Бу ерда $Z(x)\in C^m(R^1)$ функция

$$LZ(x)=0, Z(0)=Z'(0)=...=Z^{(m-2)}(0)=0, Z^{(m-1)}(0)=1$$

масаланинг ечими бўлади.

24.27. $Lu(x)=f(x)$, $f(x)\in D'_+$, бунда

$$L=\frac{d^m}{dx^m}+a_1(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}+...+a_{m-1}(x)\frac{d}{dx}+a_m(x),\ a_k(x)\in C^\infty(R^1)$$

тенгламанинг D'_+ фазодаги ечими $u(x)=\theta(x)Z(x)*f(x)$ эканлигини кўрсатинг. Бу ерда $Z(x)\in C^m(R^1)$ функция

$$LZ(x)=0, Z(0)=Z'(0)=...=Z^{(m-2)}(0)=0, Z^{(m-1)}(0)=1$$

масаланинг ечими бўлади.

24.28. $\theta(x)\cos x*f(x)=g(x)$, бунда $g\in C^1(x\geq 0)$ ва $x<0$ учун $g(x)=0$ бўладиган тенгламанинг $D'(R^1)$ фазодаги ечими $f(x)=g'(x)+\int\limits_0^x g(\xi)d\xi$ эканлигини кўрсатинг.

24.29. Электрик занжир R қаршилик, L ўзиндукция ва C сиғимга эга бўлсин. $t=0$ вақтдан бошлаб занжирга $E(t)$ электр юритувчи куч қўйилган. У ҳолда занжирдаги $i(t)$ ток кучи $Z(t)*i(t)=E(t)$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг, бунда $Z(t)=L\delta'(t)+R\delta(t)+\frac{\theta(t)}{C}$ – занжирнинг импедансидир.

24.30. $f(x,t)\in D'(R^{n+1})$ бўлсин. У ҳолда

1) $\left[\delta(x-x_0)\times\delta(t)\right]*f(x,t)=f(x-x_0,t)$ тенгликни исботланг.

2) $\left[\delta(x-x_0)\times\delta^{(m)}(t)\right]*f(x,t)=\frac{\partial^m f(x-x_0,t)}{\partial t^m}$ тенгликни исботланг.

Эслатма. S –бўлакли силлиқ сирт ва $\mu(x)$ – эса унда аниқланган узлуксиз функция бўлсин. Ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функция учун

$$\left(\mu\delta_S,\varphi\right)=\int\limits_S \mu(x)\varphi(x)dS_x$$

формула бўйича таъсир қилувчи $\mu\delta_S$ умумлашган функция оддий қатлам деб айтилади. Хусусан, агар S сирт $R^{n+1}(x,t)$ фазодаги $t=0$ текислик бўлса, у ҳолда $\mu\delta_{(t=0)}(x,t)$ умумлашган функция $\mu(x)\delta(t)$ орқали белгиланади. Шунга кўра

$$\left(\mu(x)\delta(t),\varphi(x,t)\right)=\int\limits_{R^n} \mu(x)\varphi(x,0)dx$$

тенгликни ёзамиз. Агар $n=1$ бўлса, у ҳолда S_R сферадаги $\delta_{S_R}(x)$ оддий қатлам $\delta\left(R-|x|\right)$ орқали белгиланади. Шунга кўра

$$\left(\delta(R-|x|),\varphi(x)\right)=\varphi(R)+\varphi(-R)$$

тенгликни ёзамиз.

Энди S –бўлакли силлиқ икки томонли сирт, n – эса S сиртга ўтказилган нормаль ва $\nu(x)$ – эса унда аниқланган узлуксиз функция бўлсин. Ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функция учун

$$\left(-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S),\varphi\right)=\int\limits_S \nu(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}dS$$

формула бўйича таъсир қилувчи $-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\delta_S\right)$ умумлашган функция S сиртдаги иккиламчи қатлам деб айтилади. Хусусан, агар S сирт $R^{n+1}(x,t)$ фазодаги $t=0$ текислик бўлса, у ҳолда $-\frac{\partial}{\partial n}\left(\nu\delta_{(t=0)}\right)(x,t)$ умумлашган функция $-\nu(x)\delta'(t)$ орқали белгиланади. Шунга кўра

$$\left(-\nu(x)\delta'(t),\varphi(x,t)\right)=\int\limits_{R^n} \nu(x)\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial t}dx$$

тенгликни ёзамиз.

Агар $\mu(x)\in D'(R^n)$ ва $\nu(x)\in D'(R^n)$ бўлса, у ҳолда $\mu(x)\cdot\delta(t)=\mu(x)\times\delta(t)$ ва $-\nu(x)\cdot\delta'(t)=-\nu(x)\times\delta'(t)$ умумлашган функциялар мос $\mu(x)$ ва $\nu(x)$ зичлик билан $t=0$ текисликнинг оддий ва иккиламчи қатлами деб айтилади. Зичликлар узлуксиз бўлган ҳолда бу таърифлар аввал келтирилган таърифлар билан устма–уст тушади.

$D'(R^2)$ фазодаги $\delta\left(at-|x|\right),\ a>0$ умумлашган функция

$$\delta\left(at-|x|\right)=\theta(t)\delta(at+x)+\theta(t)\delta(at-x)$$

тенглик билан аниқланади, бунда $\theta(t)\delta(at+x)$ ва $\theta(t)\delta(at-x)$ умумлашган функциялар $\theta(t')\delta(\xi)$ умумлашган функцияда ўзгарувчиларни $t'=t,\ \xi=at\pm x$ чизиқли алмаштириш натижасида ҳосил бўлади, яъни $\left(\theta(t)\delta(at+x),\ \varphi(x,t)\right)=\int\limits_0^\infty \varphi(-at',t')dt'$ ва $\left(\theta(t)\delta(at-x),\ \varphi(x,t)\right)=\int\limits_0^\infty \varphi(at',t')dt'$ бўлади.

Ўрама мавжудлигининг етарли шартлари.

I. Агар $f(x)\in D'(R^n)$ ихтиёрий умумлашган функция, $g(x)\in D'(R^n)$ ихтиёрий финит умумлашган функция бўлса, у ҳолда $D'(R^n)$ умумлашган функциялар фазосида $f*g$ ўрама мавжуд бўлади ва ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функция учун

$$\left(f*g,\varphi\right)=\left(f(x)\cdot g(y),\ \eta(y)\varphi(x+y)\right)$$

шаклида тасвирланади, бунда $\eta(y)\in D(R^n)$ асосий функция $\operatorname{supp} g$ тўплам атрофида 1 бўлган ихтиёрий функциядир.

II. $D'_+=D'_+(R^1)$ орқали $D'(R^1)$ умумлашган функциялар тўпламидаги $x<0$ учун нолга айланадиган умумлашган функциялар тўпламини белгилаймиз. Агар $f(x),g(x)\in D'_+$ бўлса, у ҳолда $f(x)*g(x)$ ўрама ҳам D'_+ фазога тегишли бўлади ва ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^1)$ асосий функция учун

$$\left(f*g,\varphi\right)=\left(f(x)\cdot g(y),\ \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y)\right)$$

шаклида тасвирланади, бунда

$$\eta_k(t)=\begin{cases} 1\,, & t\ge-\varepsilon_k \\ 0\,, & t<-2\varepsilon_k\,, \end{cases}\qquad \eta_k(t)\in C^\infty(R^1),\quad k=1,2$$

бўлган ихтиёрий функциялардир. Шундай қилиб, $D'_+=D'_+(R^1)$ тўплам ўрамалар алгебрасини ташкил этади.

24.31. Агар $f(x) \in C(R^n)$ ва $\delta_{S_R}(x)$ – эса зичлиги 1 бўлган $|x| = R$ сферадаги оддий қатлам бўлганда $D'(R^n)$ фазода $f(x) * \delta_{S_R}(x)$ ўрамани ҳисобланг.

24.32. Агар $f(x) \in C^1(R^n)$ ва $\delta_{S_R}(x)$ – эса зичлиги 1 бўлган $|x| = R$ сферадаги оддий қатлам бўлганда $D'(R^n)$ фазода $f(x) * \frac{\partial}{\partial n}\delta_{S_R}(x)$ ўрамани ҳисобланг.

24.33. $n = 3$ учун $D'(R^3)$ фазода $\delta_{S_R}(x) * |x|^2$ ўрамани ҳисобланг.

24.34. $n = 3$ учун $D'(R^3)$ фазода $\delta_{S_R}(x) * e^{-|x|^2}$ ўрамани ҳисобланг.

24.35. $n = 3$ учун $D'(R^3)$ фазода $\delta_{S_R}(x) * \sin|x|^2$ ўрамани ҳисобланг.

24.36. $n = 3$ учун $D'(R^3)$ фазода $\delta_{S_R}(x) * \frac{1}{1+|x|^2}$ ўрамани ҳисобланг.

24.37. $n = 3$ учун $D'(R^3)$ фазода $\frac{1}{|x|} * \mu\delta_S(x)$ ўрамани ҳисобланг, бунда S – чегараланган сирт.

24.38. $n = 2$ учун $D'(R^2)$ фазода $\ln\frac{1}{|x|} * \mu\delta_S(x)$ ўрамани ҳисобланг, бунда S – чегараланган чизиқ.

24.39. $n = 3$ учун $D'(R^3)$ фазода $-\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)(x)$ ўрамани ҳисобланг, бунда S – чегараланган сирт.

24.40. $n = 2$ учун $D'(R^2)$ фазода $\ln|x| * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)(x)$ ўрамани ҳисобланг, бунда S – чегараланган чизиқ.

24.41. $D'(R^2)$ фазода $\theta(t)x * \theta(x)t$ ўрамани ҳисобланг.

24.42. $D'(R^2)$ фазода $\theta(t-|x|) * \theta(t-|x|)$ ўрамани ҳисобланг.

24.43. $D'(R^2)$ фазода $\theta(t)\theta(x) * \theta(t-|x|)$ ўрамани ҳисобланг.

24.44. $f(x,t),\ g(x,t) \in D'(R^{n+1})$, $t<0$ учун $f(x,t)=0$ ва $\overline{\Gamma^{+}}$ конус ташқарисида $g(x,t)=0$ бўлсин. У ҳолда $D'(R^{n+1})$ фазода $g(x,t)*f(x,t)$ ўрама мавжуд ва ихтиёрий $\varphi(x,t)\in D(R^{n+1})$ учун

$$\big(g(x,t)*f(x,t),\varphi(x,t)\big)=$$

$$=\Big(g(x,t)\times f(y,\tau),\quad \eta(t)\eta(\tau)\eta\Big(a^2t^2-|x|^2\Big)\varphi(x+y,t+\tau)\Big)$$

формула билан ифодаланишини исботланг, бунда $\eta(t)\in C^{\infty}(R^1)$, $t<-\delta$ учун $\eta(t)=0$ ва $t>-\varepsilon$ учун $\eta(t)=1$ $(0<\varepsilon<\delta)$ бўлган функциядир.

24.45. $g(x,t)\in D'(R^{n+1})$, $\overline{\Gamma^{+}}$ конус ташқарисида $g(x,t)=0$ ва $u(x)\in D'(R^n)$ бўлсин. У ҳолда

1. $g(x,t)*u(x)\times\delta(t)=g(x,t)*u(x)$ тенглик ўринли бўлиб, бунда $g(x,t)*u(x)$ умумлашган функция ихтиёрий $\varphi(x,t)\in D(R^{n+1})$ учун

$$\big(g(x,t)*u(x),\varphi(x,t)\big)=$$

$$=\Big(g(x,t)\times u(y),\ \eta\Big(a^2t^2-|x|^2\Big)\varphi(x+y,t)\Big)$$

қоида бўйича таъсир қилишини исботланг.

2. $$g(x,t)*u(x)\times\delta^{(k)}(t)=\frac{\partial^k}{\partial t^k}\big(g(x,t)*u(x)\big)=\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k}*u(x)$$

тенгликни исботланг.

24.46. $D'(R^2)$ фазода $a>0$, $\omega(t)\in C(t\ge 0)$ ва $t<0$ учун $\omega(t)=0$ бўлганда $\theta\big(at-|x|\big)*\big[\omega(t)\cdot\delta(x)\big]$ ифодани ҳисобланг.

24.47. $D'(R^2)$ фазода $a>0$ учун $\theta\big(at-|x|\big)*\big[\theta(t)\cdot\delta(x)\big]$ ифодани ҳисобланг.

24.48. $D'(R^2)$ фазода $a>0$ учун $\theta\big(at-|x|\big)*\dfrac{\partial}{\partial t}\big[\theta(t)\cdot\delta(x)\big]$ ифодани ҳисобланг.

24.49. $D'(R^2)$ фазода $a>0$ учун $\theta\big(at-|x|\big)*\big[\theta(t)\cdot\delta'(x)\big]$ ифодани ҳисобланг.

24.50. $D'(R^2)$ фазода $a>0$ учун $\theta\big(at-|x|\big)*\big[\theta(x)\delta(t)\big]$ ифодани ҳисобланг.

24.51. $D'(R^2)$ фазода $a>0$, $\omega(x)\in C(R^1)$ учун $\theta\left(at-|x|\right)*\frac{\partial}{\partial t}\left[\omega(x)\delta(t)\right]$ ифодани ҳисобланг.

24.52. $D'(R^2)$ фазода $a>0$ учун $\theta\left(at-|x|\right)*\frac{\partial}{\partial x}\left[\theta(x)\delta(t)\right]$ ифодани ҳисобланг.

24.53. $D'(R^2)$ фазода $a>0$ учун $e^x\delta(t)*\frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ ифодани ҳисобланг.

24.54. $D'(R^2)$ фазода $a>0$ учун $\theta(t)e^t x*\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ ифодани ҳисобланг.

24.55. $D'(R^2)$ фазода $a>0$ учун $\theta(x)\delta(t)*\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ ифодани ҳисобланг.

24.56. $f(x)\in C^\infty\left(R^n\setminus\{0\}\right)$ ва $g(x)\in D'(R^n)$ финит умумлашган функция бўлсин. У ҳолда $f(x)*g(x)\in C^\infty\left(R^n\setminus\operatorname{supp}g(x)\right)$ эканлигини кўрсатинг.

24.57. Агар $f(x)\in D'(R^n)$ бўлса, у ҳолда $\varepsilon\to 0$ интилганда $D'(R^n)$ фазода $f(x)*\omega_\varepsilon(x)\to f(x)$ яқинлашувчи эканлигини кўрсатинг.

24.58. $\theta(x)$ функциянинг $\frac{3}{2}$ тартибли ҳосиласини ҳисобланг.

24.59. $\theta(x)$ функциянинг $\frac{3}{2}$ тартибли бошланғич функциясини ҳисобланг.

24.60. $x<0$ учун $f(x)=0$ бўлган $f(x)$ функциянинг $\frac{1}{2}$ тартибли ҳосиласини ҳисобланг.

24.61. $x<0$ учун $f(x)=0$ бўлган $f(x)$ функциянинг $\frac{1}{2}$ тартибли бошланғич функциясини ҳисобланг.

7-§. Секин ўсувчи умумлашган функциялар

Математик физика масалаларини ечишда энг яхши қуроллардан бири бу Фурье алмаштириши методидир. Кейинги параграфда секин ўсувчи умумлашган функциялар (tempered distributions) учун Фурье алмаштириши назарияси келтирилади. Шунинг учун аввал секин ўсувчи умумлашган функциялар синфини ўрганиш керак бўлади.

1. J тез камаювчи асосий функциялар фазоси. Биз $J = J(R^n)$ орқали R^n фазода аниқланган ва чексиз марта дифференциалланувчи бўлган, ҳамда $|x| \to \infty$ интилганда ўзининг барча ҳосилалари билан бирга $|x|^{-1}$ нинг ихтиёрий даражасига нисбатан ҳам тез нолга интилувчи функциялар фазосини белгилаймиз. $J = J(R^n)$ асосий функциялар фазосида саноқли сондаги нормалар $\varphi(x) \in J(R^n)$, $p = 0,1,2,...$ учун

$$\|\varphi\|_p = \sup_{\substack{x\in R^n,\\ |\alpha|\le p}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{2}} \left|D^\alpha \varphi(x)\right|$$

формула билан киритилади. Кўриниб турибдики, бунда ҳар бир $\varphi(x) \in J(R^n)$ асосий функция учун

$$\|\varphi\|_0 \le \|\varphi\|_1 \le \|\varphi\|_2 \le ... \le \|\varphi\|_p \le ... \qquad (3.7.1)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

$J = J(R^n)$ асосий функциялар фазосида яқинлашиш тушунчаси эса қуйидагича киритилади: агар ҳар бир $p = 0,1,2,...$ учун $k \to \infty$ интилганда $\|\varphi_k\|_p \to 0$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in J(R^n)$ функциялар кетма–кетлиги 0 га яқинлашувчи деб айтилади. Бошқача сўз билан айтганда, агар барча α ва β мультииндекслар учун $k \to \infty$ интилганда $x^\alpha D^\beta \varphi_k(x)$ кетма–кетлик $x \in R^n$ ўзгарувчига нисбатан 0 га текис яқинлашувчи бўлса, яъни $k \to \infty$ интилганда

$$x^\alpha D^\beta \varphi_k(x) \overset{x\in R^n}{\Rightarrow} 0$$

бўлса, у ҳолда $k \to \infty$ интилганда $J = J(R^n)$ асосий функциялар фазосида $\varphi_k(x) \to 0$ яқинлашувчи деб айтилади.

Кўриниб турибдики, $D \subset J$ бўлади ва агар $k \to \infty$ интилганда $D = D(R^n)$ асосий функциялар фазосида $\varphi_k(x) \to 0$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $k \to \infty$ интилганда $J = J(R^n)$ асосий функциялар фазосида ҳам $\varphi_k(x) \to 0$ яқинлашувчи бўлади.

Бироқ, $J = J(R^n)$ асосий функциялар фазоси $D = D(R^n)$ асосий функциялар фазоси билан устма–уст тушмайди. Масалан, $e^{-|x|^2}$ функция J фазога тегишли бўлади, лекин $D(R^n)$ фазога тегишли бўлмайди. Чунки бу функция финит эмас.

Шундай бўлишига қарамасдан $D(R^n)$ фазо $J(R^n)$ фазода зич, яъни ихтиёрий $\varphi \in J(R^n)$ учун шундай бир $\varphi_k(x),\ k = 1, 2, ...$ кетма–кетлик топиладики, $k \to \infty$ интилганда $J(R^n)$ фазода $\varphi_k(x) \to \varphi(x)$ га яқинлашади.

Ҳақиқатдан ҳам, $D(R^n)$ фазодан олинган

$$\varphi_k(x) = \varphi(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right),\ k = 1, 2, ...$$

функциялар кетма-кетлиги $J(R^n)$ фазода $\varphi(x)$ функцияга яқинлашади, бунда $\eta(x) \in D(R^n)$ бўлиб, $|x| < 1$ учун $\eta(x) = 1$ бўлади.

Биз энди $J_p = J_p(R^n)$ орқали J фазонинг $p-$ норма бўйича тўлдирувчисини белгилаймиз. У ҳолда $J_p = J_p(R^n)$ фазо Банах фазоси бўлади. Шу билан бирга

$$J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset ... \supset J_p \supset ... \tag{3.7.2}$$

жойлашиш муносабатлари ўринли бўлади.

Ҳар бир $p = 0,1,2,...$ учун $J_{p+1} \subset J_p$ жойлашиш муносабати (3.7.1) тенгсизликларга кўра узлуксиз бўлади. Бу жойлашиш муносабатининг тўла узлуксиз (компакт) эканлигини исбот қиламиз, яъни J_{p+1} фазодаги ҳар қандай чексиз чегараланган тўпламдан J_p фазода яқинлашувчи бўлган кетма–кетлик ажратиб олиш мумкин бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, бизга J_{p+1} фазодан олинган ихтиёрий чексиз чегараланган M тўплам берилган бўлсин, яъни шундай бир $C>0$ мусбат сон мавжуд бўлиб ихтиёрий $\varphi(x)\in M$ учун $\|\varphi\|_{p+1}\le C$ тенгсизлиги ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varphi(x)\in M$ ва $|\alpha|\le p$ бўлган ихтиёрий α ва $j=1,2,...,n$ учун $\left|\frac{\partial}{\partial x_j}D^\alpha\varphi(x)\right|<C$ тенгсизликни ҳосил қиламиз ва $|x|\to\infty$ интилганда $\left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{2}}D^\alpha\varphi(x)\to 0$ яқинлашувчи бўлади.

Энди R_k, $k=1,2,...$ орқали ихтиёрий $|x|>R_k$ ва $|\alpha|\le p$ учун

$$\left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|<\frac{1}{k} \qquad (3.7.3)$$

тенгсизлик ўринли бўладиган шундай бир ўсувчи мусбат сонлар кетма–кетлигини белгилаймиз. Арцелла леммасига кўра M тўпламда шундай бир $\left\{\varphi_i^{(1)}\right\}$ функциялар кетма–кетлиги мавжуд бўлиб $C^p\left(\bar{U}_{R_1}\right)$ фазода яқинлашувчи бўлади. Шунингдек, яна шу леммага кўра, бу $\left\{\varphi_i^{(1)}\right\}$ функциялар кетма–кетлигининг $\left\{\varphi_j^{(2)}\right\}$ функциялар қисмий кетма–кетлиги мавжуд бўлиб $C^p\left(\bar{U}_{R_2}\right)$ фазода яқинлашувчи бўлади ва ҳакозо. Энди эса, (3.7.3) тенгсизликларга кўра $\left\{\varphi_k^{(k)}\right\}$ функциялар диагонал кетма–кетлигининг $J_p=J_p(R^n)$ фазода яқинлашувчи эканлигини ҳисобга олиш етарли бўлади.

Қуйидаги лемма $J_p=J_p(R^n)$ фазодаги функцияларнинг аниқ характеристикасини беради.

1–лемма. *$\varphi(x)\in J_p(R^n)$ бўлишлиги учун $\varphi(x)\in C^p(R^n)$ ва барча $|\alpha|\le p$ мультииндекслар учун $|x|\to\infty$ интилганда $|x|^p D^\alpha\varphi(x)\to 0$ яқинлашувчи, яъни $\varphi(x)\in\bar{C}_0^p(R^n)$ бўлишлиги зарур ва етарлидир.*

Исбот. Тасдиқнинг зарурийлиги кўриниб турибди. Унинг етарлилигини исбот қиламиз. $\varphi(x)\in \bar{C}_0^p(R^n)$ ва бу $\varphi(x)$ функциянинг $\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(x)*\omega_\varepsilon(x)$ регуляризациясини қараймиз. Шунингдек, $D(R^n)$ фазодаги $\{\eta_k(x)\}$ функциялар кетма–кетлиги R^n фазода 1 га яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $D(R^n)\subset J(R^n)$ фазодаги $\left\{\varphi_{\frac{1}{k}}(x)\eta_k(x)\right\}$ функциялар кетма–кетлиги $J_p(R^n)$ фазода $\varphi(x)$ функцияга яқинлашади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $\varepsilon>0$ ихтиёрий мусбат сон бўлса, у ҳолда шундай бир $R=R(\varepsilon)>0$ мусбат сон мавжуд бўлиб ихтиёрий $|x|>R$ ва $|\alpha|\le p$ бўлган α мультииндекс учун

$$\left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|<\varepsilon \qquad (3.7.4)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. N_1 номерни ихтиёрий $|x|\le R+1$ ва ихтиёрий $k\ge N_1$ учун $\eta_k(x)=1$ бўладиган қилиб оламиз. У ҳолда шундай бир $N\ge N_1$ номер мавжуд бўладики, бунда барча $k\ge N$ номер учун, ҳамда ихтиёрий $|x|\le R+1$ ва ихтиёрий $|\alpha|\le p$ бўлган α мультииндекс учун

$$\left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left|D^\alpha\varphi(x)-D^\alpha\varphi_{\frac{1}{k}}(x)\right|<\varepsilon \qquad (3.7.5)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди ихтиёрий $k\ge N$ учун (3.7.4) ва (3.7.5) баҳолашлардан фойдаланиб

$$\left\|\varphi-\varphi_{\frac{1}{k}}\,\eta_k\right\|_p=\sup_{\substack{x\in R^n,\\ |\alpha|\le p}}\left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left|D^\alpha\left[\varphi(x)-\varphi_{\frac{1}{k}}(x)\,\eta_k(x)\right]\right|\le$$

$$\le\varepsilon+\sup_{\substack{|x|>R+1,\\ |\alpha|\le p}}\left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left[\left|D^\alpha\varphi(x)\right|+\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\beta}{\alpha}\left|D^\beta\varphi_{\frac{1}{k}}(x)D^{\alpha-\beta}\eta_k(x)\right|\right]\le$$

$$\le 2\varepsilon+C'_p\sup_{\substack{|x|>R+1,\\ |\beta|\le p}}\left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left|D^\beta\int\limits_{R^n}\omega_{\frac{1}{k}}(y)\varphi(x-y)dy\right|\le$$

$$\le 2\varepsilon + C'_p \sup_{\substack{|x|>R+1,\\ |\beta|\le p}} \int_{R^n} \omega_{\frac{1}{k}}(y)\left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{2}} \left|D^\beta \varphi(x-y)\right| dy \le$$

$$\le 2\varepsilon + C_p \sup_{\substack{|x|>R+1,\\ |\beta|\le p}} \int_{R^n} \omega_{\frac{1}{k}}(y)\left[\left(1+|x-y|^2\right)^{\frac{p}{2}} + |y|^p\right]\left|D^\beta \varphi(x-y)\right| dy \le$$

$$\le 2\varepsilon + C_p\varepsilon + C_p\varepsilon \int_{R^n} \omega_{\frac{1}{k}}(y)\left(1+|y|^2\right) dy \le \left(2+3C_p\right)\varepsilon$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу эса исбот қилиниши талаб этилган тенгсизликдир. 1–лемма исбот бўлди.

Бу 1–леммадан J фазонинг тўла фазо эканлиги ва

$$J = \bigcap_{p\ge 0} J_p \qquad (3.7.6)$$

тенглик ўринли эканлиги келиб чиқади.

$\varphi(x) \to D^\alpha \varphi(x)$ дифференциаллаш амали ва ўзгарувчиларни махсусмас чизиқли $\varphi(x) \to \varphi(Ax+b)$ алмаштириш амали J фазони J фазога акслантириб чизиқли ва узлуксиз бўлади.

Бу тасдиқ J фазодаги яқинлашиш тушунчаси таърифидан бевосита келиб чиқади.

Иккинчи томондан, эса асосий функцияларга чексиз дифференциалланувчи функцияларни кўпайтириш J фазодан ташқарига чиқиши мумкин, масалан $e^{-|x|^2}e^{|x|^2} = 1 \notin J$ бўлади.

Айтайлик, $a(x) \in C^\infty(R^n)$ функция ўзининг барча ҳосилалари билан биргаликда полиномдан тез бўлмаган ҳолда ўсувчи бўлсин, яъни ихтиёрий α мультииндекс учун

$$\left|D^\alpha a(x)\right| \le C_\alpha (1+|x|)^{m_\alpha} \qquad (3.7.7)$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. Бундай функциялар тўплами θ_M орқали белгиланади ва унга J фазодаги *мультипликаторлар* тўплами деб айтилади.

$a \in \theta_M$ функция учун $\varphi(x) \to a(x)\varphi(x)$ амали J фазони J фазога акслантириб чизиқли ва узлуксиз бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $\varphi(x) \in J$ бўлса, у ҳолда $a(x)\varphi(x) \in C^\infty$ бўлади ва (3.7.7) тенгсизликка кўра ихтиёрий $p = 0,1,2,...$ учун

$$\|a\varphi\|_p = \sup_{\substack{x\in R^n,\\ |\alpha|\le p}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{2}} \left|D^\alpha\left(a(x)\varphi(x)\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{\substack{x\in R^n,\\ |\alpha|\le p}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{2}} \sum_{\beta\le\alpha} \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} \left|D^\beta\varphi(x) D^{\alpha-\beta}a(x)\right| \le$$

$$\le K_p \sup_{\substack{x\in R^n,\\ |\alpha|\le p}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{p+N_p}{2}} \left|D^\alpha\varphi(x)\right| = K_p \,\|\varphi(x)\|_{p+N_p}$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда N_p – сон $\max\limits_{|\alpha|\le p} m_\alpha$ сондан кичик бўлмаган энг кичик бутун сондир. Ҳосил қилинган тенгсизлик $a(x)\varphi(x)\in J(R^n)$ эканлигини билдиради ва $\varphi(x)\to a(x)\varphi(x)$ амали J фазони J фазога чизиқли акслантиради ва узлуксиз бўлади.

2. J' секин ўсувчи умумлашган функциялар фазоси.

Таъриф. *J тез камаювчи асосий функциялар фазосида аниқланган ҳар қандай чизиқли узлуксиз функционалга секин ўсувчи умумлашган функция деб айтилади.*

Секин ўсувчи умумлашган функциялар тўплами $J'=J'(R^n)$ орқали белгиланади. Кўриниб турибдики, $J'=J'(R^n)$ – чизиқли тўплам ва $J'(R^n)\subset D'(R^n)$ бўлади.

$J'(R^n)$ фазодаги яқинлашишни функционаллар кетма–кетлигининг *суст (кучсиз) яқинлашиши* сифатида киритамиз.

Таъриф. *Агар ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ асосий функция ва $J'(R^n)$ фазодан олинган $f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x),...$ умумлашган функциялар кетма-кетлиги, ҳамда $f(x)\in J'(R^n)$ умумлашган функция учун $k\to\infty$ интилганда $(f_k,\varphi)\to(f,\varphi)$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $k\to\infty$ интилганда $J'(R^n)$ фазода $f_k(x)\to f(x)$ яқинлашувчи дейилади.*

Бу $J'=J'(R^n)$ – чизиқли тўплам шу киритилган яқинлашиш билан $J'=J'(R^n)$ *секин ўсувчи умумлашган функциялар фазоси* деб айтилади.

Бу келтирилган таърифдан $J'\subset D'$ *бўлишлиги ва* J' *фазода яқинлашишдан* D' *фазода ҳам яқинлашиш* келиб чиқади.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $f(x)\in J'$ бўлса, у ҳолда $f(x)\in D'$ бўлади, чунки $D\subset J$ ва D фазода яқинлашишдан J фазода яқинлашиш келиб чиқади.

Шунингдек, агар J' фазода $k\to\infty$ интилганда $f_k\to 0$ бўлса, у ҳолда $k\to\infty$ интилганда ихтиёрий $\varphi(x)\in D\subset J$ учун $(f_k,\ \varphi)\to 0$ яқинлашувчи бўлади ва шунга кўра $k\to\infty$ интилганда D' фазода $f_k\to 0$ яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

1-теорема (Л. Шварц теоремаси). *J фазода аниқланган f чизиқли функционалнинг J' фазога тегишли бўлишлиги учун (яъни f функционалнинг J фазода узлуксиз бўлишлиги учун) шундай бир $C>0$ ва $p\geq 0$, $p-$бутун сонлар топилиб ихтиёрий $\varphi(x)\in J$ асосий функция учун*

$$\left|(f,\ \varphi)\right|\leq C\left\|\varphi\right\|_p \qquad (3.7.8)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир, бунда

$$\left\|\varphi\right\|_p=\sup_{|\alpha|\leq p,\ x\in R^n}(1+|x|)^p\left|D^\alpha\varphi(x)\right|$$

бўлади.

Исбот. ***Етарлилиги.*** Айтайлик, f функционал J фазода аниқланган чизиқли функционал бўлиб, қандайдир $C>0$ ва $p\geq 0$ сонлар учун (3.7.8) тенгсизликни қаноатлантирсин. У ҳолда $f\in J'$ эканлигини исбот қиламиз. $k\to\infty$ интилганда J фазода $\varphi_k(x)\to 0$ яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $k\to\infty$ интилганда $\left\|\varphi_k\right\|_p\to 0$ яқинлашувчи бўлади ва шунинг учун $k\to\infty$ интилганда

$$\left|(f,\varphi_k)\right|\leq C\left\|\varphi_k\right\|_p$$

тенгсизликдан $(f,\varphi_k)\to 0$ яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Бу эса f функционалнинг J фазода узлуксиз эканлигини билдиради.

Зарурийлиги. $f\in J'$ бўлсин. Шундай бир $C>0$ ва $p\geq 0$, $p-$бутун сонлар топилиб ихтиёрий $\varphi(x)\in J$ асосий функция учун (3.7.8) тенгсизликнинг бажарилишини исбот қиламиз.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни кўрсатилган шундай $C > 0,\ p \geq 0$ сонлар мавжуд бўлмасин. У ҳолда J фазода шундай бир $\varphi_k,\ k = 1, 2, ...$ функциялар кетма-кетлиги топиладики, бунда

$$|(f, \varphi_k)| \geq k \|\varphi_k\|_k \qquad (3.7.9)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунингдек

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k}\ \|\varphi_k\|_k},\ \ k = 1, 2, ...$$

кетма–кетлик J фазода 0 га интилади, чунки $k \geq |\alpha|$ ва $k \geq |\beta|$ учун

$$\left|x^\beta D^\alpha \psi_k(x)\right| = \frac{\left|x^\beta D^\alpha \varphi_k(x)\right|}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бундан ва f функционалнинг J фазода узлуксиз эканлигидан $k \to \infty$ интилганда $(f, \psi_k) \to 0$ яқинлашувчи бўлишлиги келиб чиқади. Иккинчи томондан, эса (3.7.9) тенгсизликка кўра

$$|(f, \psi_k)| = \frac{1}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k} |(f, \varphi_k)| \geq \sqrt{k}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади ва бундан $k \to \infty$ интилганда $(f, \psi_k) \to \infty$ эканлиги келиб чиқади. Бу ҳосил қилинган қарама–қаршилик фаразимизнинг нотўғри эканлигини билдиради ва 1–теорема исбот бўлади.

Бу исбот қилинган 1–теореманинг мазмуни шундан иборатки, ихтиёрий секин ўсувчи умумлашган функция қандайдир $\|\ \|_p$ нормага нисбатан узлуксиз функционал бўлади. Бундай ҳолда умумлашган функция чекли тартибли деб айтилади.

2-теорема (Л. Шварц теоремаси). *$J'(R^n)$ фазодаги функционалларнинг M' тўплами суст чегараланган бўлсин, яъни барча $f \in M'$ ва ихтиёрий $\varphi(x) \in J(R^n)$ асосий функция учун $|(f, \varphi)| < C_\varphi$ тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда шундай бир $K \geq 0$*

ва $m \geq 0$ *сонлар топилиб, ихтиёрий* $f \in M'$ *ва ихтиёрий* $\varphi(x) \in J(R^n)$ *асосий функция учун*

$$|(f,\ \varphi)| \leq K \|\varphi\|_m \tag{3.7.10}$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда

$$\|\varphi\|_m = \sup_{\substack{x \in R^n, \\ |\alpha| \leq m}} \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \left|D^\alpha \varphi(x)\right|$$

шаклида бўлади.

Исбот. Агар (3.7.10) тенгсизлик ўринли бўлмасин деб фараз қилсак, у ҳолда M' тўпламдан шундай бир $\{f_k\}$ функционаллар кетма-кетлиги ва $J(R^n)$ фазодан шундай бир $\{\varphi_k\}$ асосий функциялар кетма-кетлиги топиладики, бунда ихтиёрий $k = 1, 2, \ldots$ учун

$$|(f_k,\ \varphi_k)| \geq k \|\varphi_k\|_k \tag{3.7.11}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шу билан бирга

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k}\ \|\varphi_k\|_k},\ \ k = 1, 2, \ldots$$

кетма–кетлик $J(R^n)$ фазода 0 га интилади, чунки $k \geq p$ учун

$$\|\psi_k(x)\|_p = \frac{\|\varphi_k\|_p}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Шунингдек, $\{f_k\}$ функционаллар кетма-кетлиги ҳар бир $\varphi(x) \in J(R^n)$ асосий функция учун чегараланган бўлади. Шунинг учун умумлашган функциялар учун ҳосил қилинган леммадаги сингари $k \to \infty$ интилганда $(f_k, \psi_k) \to 0$ яқинлашувчи бўлишлиги келиб чиқади. Иккинчи томондан, эса (3.7.11) тенгсизликка кўра

$$|(f_k, \psi_k)| = \frac{1}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k}|(f_k, \varphi_k)| \geq \sqrt{k}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади ва бундан $k \to \infty$ интилганда $(f_k, \psi_k) \to \infty$ эканлиги келиб чиқади. Бу ҳосил қилинган қарама–қаршилик фаразимизнинг нотўғри эканлигини билдиради ва 2–теорема исбот бўлди.

Бу исбот қилинган Л. Шварц теоремасидан бир қатор натижалар келиб чиқади.

1–натижа. *Ҳар қандай секин ўсувчи умумлашган функция чекли тартибга эга бўлади,* яъни қандайдир энг кичик $J'_m(R^n)$ қўшма фазодаги чизиқли узлуксиз функционал сифатида давом этади. Шунингдек, (3.7.10) тенгсизлик ихтиёрий f учун ва ихтиёрий $\varphi(x) \in J(R^n)$ асосий функция учун

$$|(f, \varphi)| \leq \|f\|_{-m} \|\varphi\|_m \qquad (3.7.12)$$

шаклида бўлади, бунда $\|f\|_{-m}$ – эса f функционалнинг $J'_m(R^n)$ қўшма фазодаги нормаси, m – эса f функционалнинг тартибидир.

Шундай қилиб, (3.7.2) ва (3.7.6) муносабатларига иккиламчи бўлган

$$J'_0 \subset J'_1 \subset J'_2 \subset \ldots \subset J'_p \subset \ldots \quad , \qquad J' = \bigcup_{p \geq 0} J'_p \qquad (3.7.13)$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Шуни таъкидлаш керакки, ҳар бир

$$J'_p \subset J'_{p+1}, \quad p = 0, 1, \ldots$$

жойлашиш муносабати тўла узлуксиз бўлади. Хусусан, J'_p *фазодаги ҳар қандай суст яқинлашувчи кетма–кетлик* J'_{p+1} *фазо нормаси бўйича яқинлашувчи бўлади.*

2–натижа. *Ҳар қандай суст яқинлашувчи секин ўсувчи умумлашган функциялар кетма–кетлиги қандайдир* J'_p *фазода суст яқинлашувчи бўлади ва демак,* J'_{p+1} *фазо нормаси бўйича яқинлашувчи бўлади.*

Маълумки, бу натижа $J'(R^n)$ фазодан олинган ҳар қандай суст яқинлашувчи функционаллар кетма–кетлиги $J'(R^n)$ фазода суст чегараланган тўплам эканлигидан Л. Шварц теоремаси ва 1–натижанинг эслатмасидан келиб чиқади.

3–натижа. $J'(R^n)$ *секин ўсувчи умумлашган функциялар фазоси тўладир.*

Бу натижа J'_p қўшма фазонинг суст тўлалиги ва 2–натижадан келиб чиқади.

3. Секин ўсувчи умумлашган функцияларга мисоллар ва $J'(R^n)$ фазодаги содда амаллар.

а) Агар $f(x)$ *–локал интегралланувчи функция чексизликда полином сингари (секин) ўсувчи функция, яъни қандайдир* $m \geq 0$ *шартни қаноатлантирувчи ўзгармас сон учун*

$$\int_{R^n} |f(x)|(1+|x|)^{-m}dx < \infty$$

интеграл чекли бўлса, у ҳолда бу функция J' *фазога қарашли* $f(x)$ *регуляр умумлашган функцияни ихтиёрий* $\varphi(x) \in J(R^n)$ *учун*

$$(f,\varphi) = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx \qquad (3.7.14)$$

формула бўйича аниқлайди.

Бироқ, ҳар қандай локал интегралланувчи функция ҳар доим ҳам секин ўсувчи умумлашган функцияни ҳосил қилавермайди, масалан $e^x \notin J'(R^1)$ бўлади.

Иккинчи томондан, J' фазога тегишли ҳар қандай локал интегралланувчи функция ҳар доим ҳам чексизликда полином сингари ўсувчи умумлашган функцияни ҳосил қилавермайди, масалан, $(\cos e^x)' = -e^x \sin e^x$ функция чексизликда полином сингари ўсувчи бўлган функция бўлмайди, лекин бу функция J' фазода ихтиёрий $\varphi(x) \in J(R^n)$ учун

$$\left((\cos e^x)',\ \varphi(x)\right) = -\int_{R^n} \cos e^x\, \varphi'(x)dx$$

формула бўйича аниқланадиган умумлашган функция бўлади.

Бундай ноқулай ҳолатлар манфиймас функциялар учун (ҳаттоки ўлчов учун ҳам) бўлиши мумкин эмас. Бунга биз қуйида ишонч ҳосил қиламиз.

Агар қандайдир $m \geq 0$ шартни қаноатлантирувчи ўзгармас сон учун

$$\int_{R^n} (1+|x|)^{-m}\mu(dx) < \infty$$

интеграл чекли бўлса, у ҳолда бу R^n фазода берилган μ ўлчов *секин ўсувчи ўлчов* деб айтилади. Бу ўлчов $J'(R^n)$ фазога қарашли умумлашган функцияни ихтиёрий $\varphi(x) \in J(R^n)$ учун

$$(\mu,\varphi)=\int\limits_{R^n}\varphi(x)\mu(dx) \qquad (3.7.15)$$

формула бўйича аниқлайди.

Агар манфиймас μ *ўлчов* $J'(R^n)$ *фазога қарашли умумлашган функцияни аниқласа, у ҳолда* μ *ўлчов секин ўсувчи ўлчов бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, $\mu\in J'(R^n)$ эканлигидан бу умумлашган функция Л. Шварц теоремасига кўра чекли m тартибга эга бўлади, яъни ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ учун

$$\left|\int\limits_{R^n}\varphi(x)\mu(dx)\right|\le K\|\varphi\|_m \qquad (3.7.16)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $D(R^n)$ фазодан манфиймас $\{\eta_k(x)\}$ функциялар кетма–кетлиги R^n фазода 1 га яқинлашувчи бўлсин. Бу (3.7.16) тенгсизликка

$$\varphi(x)=\eta_k(x)\big(1+|x|\big)^{-m}$$

функцияни қўямиз ва μ ўлчовнинг манфиймас эканлигидан фойдаланиб

$$\left|\int\limits_{R^n}\eta_k(x)\big(1+|x|\big)^{-m}\mu(dx)\right|\le C$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз, бунда C ўзгармас k номерга боғлиқ бўлмайди. Бундан эса Фату леммасига кўра μ ўлчовнинг секин ўсувчи эканлиги келиб чиқади.

Эслатма. $J'(R^n)$ *фазодаги ихтиёрий умумлашган функция Л. Шварц теоремасига кўра чексизликда полином сингари ўсувчи узлуксиз функциянинг ҳосиласи бўлади. Шу билан* $J'(R^n)$ *– фазо секин ўсувчи умумлашган функциялар фазоси деб номланиши асосланади.*

b) Агар $f(x)$ *функция* $D'(R^n)$ *фазодаги финит умумлашган функция бўлса, у ҳолда бу функционал* $J'(R^n)$ *фазонинг элементи сифатида* $J(R^n)$ *фазога ягона равишда давом эттирилади. Ушбу давом эттирилган функционал ихтиёрий* $\varphi(x)\in J(R^n)$ *учун*

$$(f,\varphi)=(f,\eta\varphi) \qquad (3.7.17)$$

формула бўйича аниқлайди, бунда $\eta(x)\in D(R^n)$ *ва* $f(x)$ *функциянинг ташувчиси атрофида* $\eta(x)=1$ *бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, (3.7.17) тенгликнинг ўнг томонидаги $(f,\eta\varphi)$ функционал чизиқли ва $J(R^n)$ фазода узлуксиздир: агар $k\to\infty$ интилганда $J(R^n)$ фазода $\varphi_k\to 0$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $k\to\infty$ интилганда $D(R^n)$ фазода $\eta\varphi_k\to 0$ яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун $k\to\infty$ интилганда $(f,\ \eta\varphi_k)\to 0$ яқинлашувчи бўлади.

f функционалнинг $J(R^n)$ фазога давомининг ягоналиги $D(R^n)$ фазонинг $J(R^n)$ фазода зич эканлигидан келиб чиқади. Хусусан бу (3.7.17) кўринишидаги давом эттириш ёрдамчи η функцияга боғлиқ бўлмайди.

c) *Агар* $f(x)\in J'(R^n)$ *бўлса, у ҳолда ҳар бир* $D^\alpha f(x)$ *ҳосила ҳам* $D^\alpha f(x)\in J'(R^n)$ *фазога қарашли бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, $D^\alpha\varphi(x)$ дифференциаллаш амали $J(R^n)$ фазони $J(R^n)$ фазога узлуксиз акслантиради. Шунинг учун

$$(D^\alpha f,\ \varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,\ D^\alpha\varphi)$$

тенгликнинг ўнг томони $J(R^n)$ фазодаги чизиқли узлуксиз функционалдан иборат бўлади.

d) *Агар* $f(x)\in J'(R^n)$ *ва* $\det A\neq 0$ *бўлса, у ҳолда* $f(Ay+b)\in J'(R^n)$ *бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, $\varphi(x)\to\varphi[A^{-1}(x-b)]$ алмаштириш амали $J(R^n)$ фазони $J(R^n)$ фазога узлуксиз акслантиради. Шунга кўра ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ учун

$$(f(Ay+b),\ \varphi(y))=\left(f(x),\ \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right)$$

тенгликнинг ўнг томони $J(R^n)$ фазодаги чизиқли узлуксиз функционалдан иборат бўлади.

e) *Агар* $f(x)\in J'(R^n)$ *ва* $a(x)\in\theta_M$ *мультипликатор бўлса, у ҳолда* $a(x)f(x)\in J'(R^n)$ *бўлади, бундан ташқари*

$f(x) \to a(x)f(x)$ *амали* $J'(R^n)$ *фазони* $J'(R^n)$ *фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиради.*

Ҳақиқатдан ҳам, θ_M мультипликаторлар тўпламидан олинган $a(x)$ функцияга кўпайтириш $\varphi(x) \to a(x)\varphi(x)$ амали $J(R^n)$ фазони $J(R^n)$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиради. Шунга кўра ихтиёрий $\varphi(x) \in J(R^n)$ учун

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi)$$

тенгликнинг ўнг томони $J(R^n)$ фазодаги чизиқли узлуксиз функционалдан иборат бўлади.

Шундай қилиб, θ_M мультипликаторлар тўплами $J'(R^n)$ фазодаги барча мультипликаторларни сақлайди. Бу тўплам фақат $J'(R^n)$ фазодаги барча мультипликаторлардангина иборат эканлигини исбот қилиш мумкин.

Мисол. Агар $|a_k| \le C\left(1+|k|\right)^N$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_k a_k \delta(x-k) \in J'(R^n)$$

бўлади.

4. Нуқтавий ташувчили умумлашган функцияларнинг структураси.

3–теорема. *Агар* $f(x)$ *умумлашган функциянинг ташувчиси* $\{0\}$ *нуқта бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *умумлашган функция ягона равишда*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} C_\alpha D^\alpha \delta(x) \qquad (3.7.18)$$

шаклида тасвирланади.

Исбот. Теореманинг шартига кўра $f(x)$ умумлашган функциянинг ташувчиси $\{0\}$ нуқта бўлгани учун $f(x) \in J'$ бўлади. Ҳамда ихтиёрий $k > 0$ ўзгармас учун

$$f(x) = \eta(kx)f(x) \qquad (3.7.19)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $\eta(x)$ асосий функция бўлиб, 0 нуқтанинг атрофида 1 га ва $|x|>1$ бўлган нуқталарда 0 га тенг. Шунингдек, Л. Шварц теоремасига кўра, φ га боғлиқ бўлмаган қандайдир $m \geq 0$ ва $C > 0$ ўзгармас сонлар учун ихтиёрий $\varphi(x) \in D(R^n)$ учун

$$\left|(f,\varphi)\right| \leq C\left\|\varphi\right\|_m \tag{3.7.20}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Айтайлик, ихтиёрий $\varphi(x)$ функция $\varphi(x) \in D(R^n)$ соҳадан олинган бўлсин. Қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$\psi_k(x) = \varphi_m(x)\eta(kx),\ \varphi_m(x) = \varphi(x) - \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha\ . \tag{3.7.21}$$

Энди (3.7.20) тенгсизликни ψ_k функцияга қўллаймиз ва $\left|\nu\right| \leq m$ учун $x \to 0$ интилганда $D^\nu \varphi_m(x) = O(\left|x\right|^{m+1-|\nu|})$ ва $k \to \infty$ интилганда $D^\delta \eta(kx) = O(k^{|\delta|})$ муносабатлардан фойдаланиб биз $k \to \infty$ интилганда

$$\left|(f,\psi_k)\right| \leq C\left\|\psi_k\right\|_m = C \sup_{|\beta|\leq m,\, |x|\leq \frac{1}{k}} (1+\left|x\right|^m)\left|D^\beta[\varphi_m(x)\eta(kx)]\right| \leq$$

$$\leq C_1 \max_{|\beta|\leq m,\, |x|\leq \frac{1}{k}} \sum_{|\nu|=0}^{|\beta|} \left|D^\nu \varphi_m(x)\right|\left|D^{\beta-\nu}\eta(kx)\right| \leq$$

$$\leq C_1 \max_{|\beta|\leq m} \sum_{|\nu|=0}^{|\beta|} k^{-m-1+|\nu|} k^{|\beta-\nu|} = \frac{C_2}{k} \to 0$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Шунингдек (3.7.19) тенгликка асосан (f,ψ_k) сон k га боғлиқ эмас. Шунга кўра,

$$(f,\psi_1) = \lim_{k\to\infty}(f,\psi_k) = 0$$

бўлади. Бундан эса (3.7.19) ва (3.7.21) тенгликлардан фойдаланиб

$$(f,\varphi) = (\eta f,\varphi) = (f,\ \eta\varphi) = \left(f, \psi_1 + \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \eta(x)\right) =$$

$$= (f,\psi_1) + \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!}\ (f,\, x^\alpha \eta(x)) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} C_\alpha\ (D^\alpha \delta,\varphi)$$

тасвирни ҳосил қиламиз, яъни $f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} C_\alpha D^\alpha \delta(x)$ бўлади. Бу ерда $C_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}(f,\, x^\alpha \eta)$ ўзгармас сон бўлади.

Энди (3.7.18) кўринишидаги ифоданинг ягона равишда тасвирланишини исбот қиламиз. Фараз қилайлик, бошқа бир $f(x)=\sum_{|\alpha|=0}^{m} C'_{\alpha}\, D^{\alpha}\delta(x)$ тасвир ўринли бўлсин. У ҳолда $\sum_{|\alpha|=0}^{m}(C_{\alpha}-C'_{\alpha})\, D^{\alpha}\delta(x)=0$ тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликни $|\beta|\le m$ учун x^{β} мономларга қўллаб

$$0=\sum_{|\alpha|=0}^{m}(C_{\alpha}-C'_{\alpha})(D^{\alpha}\delta,\, x^{\beta})=$$

$$=\sum_{|\alpha|=0}^{m}(-1)^{|\alpha|}(C_{\alpha}-C'_{\alpha})\,(\delta,\, D^{\alpha}x^{\beta})=(-1)^{|\beta|}\beta!(C_{\beta}-C'_{\alpha})$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан эса ихтиёрий $|\beta|\le m$ учун $C_{\beta}=C'_{\beta}$ тенгликлар келиб чиқади. 3–теорема исбот бўлди.

5. Секин ўсувчи умумлашган функцияларнинг структураси. Биз $J'(R^n)$ фазо R^n фазодаги ҳамма вақт дифференциаллаш мумкин бўлган секин ўсувчи функциялар тўпламининг шундай бир кенгайтмаси эканлигини исбот қиламиз. Бу билан $J'(R^n)$ – фазо секин ўсувчи умумлашган функциялар фазоси деб номланиши асосланади.

4–теорема. *Агар $f(x)\in J'(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция бўлса, у ҳолда R^n фазода узлуксиз бўлган секин ўсувчи $g(x)$ функция ва шундай бир $m\ge 0$ бутун сон мавжуд бўлиб*

$$f(x)=D_1^m...D_n^m g(x) \qquad (3.7.22)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)\in J'(R^n)$ бўлсин. Л. Шварц теоремасига кўра шундай бир K ва p ўзгармас сонлар мавжуд бўлиб ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ учун

$$|(f,\varphi)|\le K\|\varphi\|_p \le \max_{|\alpha|\le p}\int_{R^n}\left|D_1...D_n\left[(1+|x|^2)^{\frac{p}{2}}D^{\alpha}\varphi(x)\right]\right|dx$$

тенгсизлик ўринли бўлади, яъни ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ учун

$$|(f,\varphi)| \le K \max_{|\alpha|\le p} \left\| D_1 ... D_n \left[(1+|x|^2)^{\frac{p}{2}} D^\alpha \varphi(x) \right] \right\|_{L_1} \qquad (3.7.23)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Ҳар бир $\varphi(x)\in J(R^n)$ асосий функцияга ихтиёрий $|\alpha|\le p$ учун компоненталари

$$\psi_\alpha(x) = D_1 ... D_n \left[(1+|x|^2)^{\frac{p}{2}} D^\alpha \varphi(x) \right] \qquad (3.7.24)$$

бўлган $\{\psi_\alpha(x)\}$ вектор–функцияни мос қўямиз. Бу билан биз $J(R^n)$ фазони нормаси $\|\{f_\alpha\}\| = \max\limits_{|\alpha|\le p} \|f_\alpha\|_{L_1}$ тенглик билан киритилган тўғри йиғинди кўринишидаги $\bigoplus\limits_{|\alpha|\le p} L_1(R^n)$ фазога ўзаро бир қийматли акслантирувчи $\varphi(x) \to \{\psi_\alpha(x)\}$ мосликни аниқлаймиз. $\bigoplus\limits_{|\alpha|\le p} L_1(R^n)$ фазонинг $\psi_\alpha(x)$ компоненталари (3.7.24) формула орқали аниқланган $\{\psi_\alpha(x),\ \varphi(x)\in J(R^n)\}$ қисм тўпламида аниқланган f^* чизиқли функционални

$$(f^*, \{\psi_\alpha(x)\}) = (f,\varphi) \qquad (3.7.25)$$

тенглик билан киритамиз. (3.7.23) тенгсизликка кўра

$$\left|(f^*, \{\psi_\alpha(x)\})\right| \le |(f,\varphi)| \le K \max_{|\alpha|\le p} \|\psi_\alpha(x)\|_{L_1} = K \|\{\psi_\alpha(x)\}\|$$

тенгсизлик ўринли бўлиб биз f^* чизиқли функционалнинг узлуксизлигини ҳосил қиламиз. Хан – Банах теоремаси ва Ф. Рисс теоремасига кўра шундай бир $\{\chi_\alpha(x)\} \in \bigoplus\limits_{|\alpha|\le p} L_\infty(R^n)$ вектор–функция мавжуд бўлиб

$$(f^*, \{\psi_\alpha(x)\}) = \sum_{|\alpha|\le p} \int_{R^n} \chi_\alpha(x) \psi_\alpha(x) dx$$

тенглик ўринли бўлади, яъни (3.7.24) ва (3.7.25) формулаларга кўра ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ асосий функция учун

$$(f,\varphi) = \sum_{|\alpha|\le p} \int_{R^n} \chi_\alpha(x) D_1 ... D_n \left[(1+|x|^2)^{\frac{p}{2}} D^\alpha \varphi(x) \right] dx$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонида бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб ҳар бир $|\alpha|\le p+2$ учун шундай бир $g_\alpha(x)$ секин ўсувчи узлуксиз функция мавжуд бўлиб

$$(f,\varphi)=(-1)^{pn}\int\limits_{R^n}\sum_{|\alpha|\le(p+2)n} g_\alpha(x)D_1^{p+2}...D_n^{p+2}\varphi(x)dx$$

тенглик ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Бунда $m=p+2$ учун (3.7.22) тенглик келиб чиқади. 4–теорема исбот бўлди.

Натижа. *Агар $f(x)\in J'(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция бўлса, у ҳолда шундай бир $p\ge 0$ бутун сон мавжуд бўлиб ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон ва $|\alpha|\le p$ учун R^n фазода узлуксиз бўлган секин ўсувчи ва $f(x)$ функция ташувчиси ε – атрофининг ташқарисида нолга айланувчи $g_{\alpha,\varepsilon}(x)$ функциялар мавжуд бўлиб*

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\le p} D^\alpha g_{\alpha,\varepsilon}(x) \qquad (3.7.26)$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон ва $\eta(x)\in\theta_M$, $x\in(\operatorname{supp} f)^{\frac{\varepsilon}{3}}$ учун $\eta(x)=1$, ҳамда $x\notin(\operatorname{supp} f)^{\varepsilon}$ учун $\eta(x)=0$ бўлсин. У ҳолда (3.7.22) тасвирни эътиборга олсак, у ҳолда Лейбниц формуласидан фойдаланиб

$$f(x)=\eta(x)f(x)=\eta(x)D_1^m...D_n^m g(x)=$$

$$=D_1^m...D_n^m\left[\eta(x)g(x)\right]+\sum_{|\alpha|\le mn-1}\eta_\alpha(x)D^\alpha g(x)$$

тенгликка эга бўламиз, бунда $\eta_\alpha(x)\in\theta_M$ ва $x\notin(\operatorname{supp} f)^{\varepsilon}$ учун $\eta_\varepsilon(x)=0$ бўлади. Охирги йиғиндидаги ҳар бир қўшилувчини яна шунга ўхшаш алмаштирамиз ва ҳакозо. Натижада биз чекли қадамдан кейин $p=mn$ ва $g_{\alpha,\varepsilon}(x)=\chi_\alpha(x)g(x)$ бўлган (3.7.26) тасвирга эга бўламиз, бунда $\chi_\alpha(x)\in\theta_M$ ва ташувчиси $\overline{(\operatorname{supp} f)^{\varepsilon}}$ бўлган қандайдир функциядир.

6. Секин ўсувчи умумлашган функцияларнинг тўғри кўпайтмаси. Айтайлик, $f(x)\in J'(R^n)$ ва $g(y)\in J'(R^m)$ бўлсин.

Бизга маълумки, $J'(R^n) \subset D'(R^n)$ бўлиб тўғри кўпайтма учун $f(x) \cdot g(y) \in D'(R^{n+m})$ бўлади.

Энди биз $f(x) \cdot g(y) \in J'(R^{n+m})$ эканлигини исбот қиламиз. Биз $f(x) \cdot g(y)$ тўғри кўпайтма таърифидан фойдаланиб

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x,y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))) \qquad (3.7.27)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу (3.7.27) тенгликнинг ўнг томони $J(R^{n+m})$ фазода аниқланган чизиқли узлуксиз функционал эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун қуйидаги леммани келтирамиз.

2–лемма. *Ихтиёрий* $g(y) \in J'(R^m)$ *ва ихтиёрий* $\varphi(x,y) \in J(R^{n+m})$ *функциялар учун*

$$\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y)) \in J(R^n) \text{ ва } D^\alpha \psi(x) = (g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y)) \qquad (3.7.28)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бундан ташқари, агар $k \to \infty$ *интилганда* $J(R^{n+m})$ *фазода* $\varphi_k(x,y) \to 0$ *яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* $k \to \infty$ *интилганда* $J(R^n)$ *фазода*

$$\psi_k(x) = (g(y), \varphi_k(x, y)) \to 0 \qquad (3.7.29)$$

яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Аввал 3–параграфдаги исботланган лемма сингари (3.7.28) тенглик барча α учун ўринли ва бу тенгликнинг ўнг томонининг узлуксизлиги кўрсатилади. Шунга кўра $\psi(x) \in C^\infty(R^n)$ бўлиши келиб чиқади. Энди $\psi(x) \in J(R^n)$ эканлигини исбот қиламиз. Лемма шартига кўра $g(y) \in J'(R^m)$ ва ҳар бир $x \in R^n$ учун $\varphi(x, y) \in J(R^m)$ бўлади. Ҳамда Л. Шварц теоремасига асосан шундай $C > 0$ ва $p \geq 0$ сонлар топиладики, ихтиёрий $\varphi(x,y) \in J(R^{n+m})$, α ва $x \in R^n$ учун

$$\left|(g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y))\right| \leq C \sup_{y \in R^m, |\nu| \leq p} (1+|y|)^p \left|D_y^\nu D_x^\alpha \varphi(x, y)\right|$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бундан ва (3.7.28) тенгликдан фойдаланиб ихтиёрий $x \in R^n$ учун

$$\left|x^\beta D^\alpha \psi(x)\right| \leq C \sup_{y \in R^m, |\nu| \leq p} (1+|y|)^p \left|x^\beta D_y^\nu D_x^\alpha \varphi(x, y)\right| \qquad (3.7.30)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Шунингдек, $\varphi(x,y)\in J(R^{n+m})$ эканлигидан (3.7.30) тенгсизликка кўра, $\psi(x)\in J(R^n)$ бўлишлиги келиб чиқади.

Энди (3.7.29) лимитик муносабатни исбот қиламиз. $k\to\infty$ интилганда $J(R^{n+m})$ фазода $\varphi_k(x,y)\to 0$ яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $\varphi_k(x,y),\ k=1,2,...$ кетма–кетликка (3.7.30) тенгсизликни қўллаб

$$\left|x^\beta D^\alpha \psi_k\right| \le C \sup_{y\in R^m,\,|\nu|\le p} (1+|y|)^p \left|x^\beta D_y^\nu D_x^\alpha \varphi_k(x,y)\right| \overset{x\in R^n}{\Rightarrow} 0$$

эканлигини ҳосил қиламиз, яъни $k\to\infty$ интилганда $J(R^n)$ фазода

$$\psi_k(x)=(g(y),\,\varphi_k(x,\,y))\to 0$$

яқинлашувчи бўлади. 2– лемма исбот бўлди.

Бу исбот қилинган 2–леммадан (3.7.27) тенгликнинг ўнг томони (f,ψ) га тенг бўлиб $J(R^{n+m})$ фазодаги чизиқли ва узлуксиз функционал эканлиги келиб чиқади, бунда $\psi(x)=(g(y),\varphi(x,y))$ бўлади. Шунга кўра $f(x)\cdot g(y)\in J'(R^{n+m})$ бўлади.

Секин ўсувчи умумлашган функцияларнинг тўғри кўпайтмаси $J'(R^{n+m})$ фазода коммутатив ва ассоциативдир, яъни

$$f(x)\cdot g(y)=g(y)\cdot f(x),\quad f(x)\cdot(g(y)\cdot h(z))=(f(x)\cdot g(y))\cdot h(z)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Бу тасдиқлар $D'(R^n)$ фазодаги тўғри кўпайтманинг хоссаларидан ва $D(R^n)$ фазонинг $J(R^n)$ фазода зич эканлигидан келиб чиқади.

Хусусан, $f(x)\in J'(R^n)$ учун $f(x)\cdot 1(y)=1(y)\cdot f(x)$ тенглик ихтиёрий $\varphi(x,y)\in J(R^{n+m})$ асосий функциялар учун

$$(f(x),\int_{R^m}\varphi(x,\,y)dy)=\int_{R^m}(f,\,\varphi(x,\,y))dy \qquad (3.7.31)$$

тенгликни билдиради.

Ниҳоят, $f(x)\in J'(R^n)$ ва $g(y)\in J'(R^m)$ секин ўсувчи умумлашган функциялар учун $f(x)\cdot g(y)$ тўғри кўпайтма $f(x)\in J'(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функцияга нисбатан

$J'(R^n)$ фазони $J'(R^{n+m})$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиради. Ҳамда $g(y)\in J'(R^m)$ секин ўсувчи умумлашган функцияга нисбатан $J'(R^m)$ фазони $J'(R^{n+m})$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиради.

7. Секин ўсувчи умумлашган функцияларнинг ўрамаси. Айтайлик, $f(x)\in J'(R^n)$, $g(x)\in J'(R^n)$ бўлиб $f(x)*g(x)$ ўрама $D'(R^n)$ фазода мавжуд бўлсин. Савол туғилади: қачон $f(x)*g(x)\in J'(R^n)$ ва $f(x)\to f(x)*g(x)$ ўрама амали $J'(R^n)$ фазони $J'(R^n)$ фазога узлуксиз акслантиради?. $J'(R^n)$ фазода ўрама мавжуд бўлишлигининг учта етарлилик аломатларини келтирамиз.

а) $f(x)\in J'(R^n)$, $g(x)\in E'(R^n)$ *бўлсин. У ҳолда* $f(x)*g(x)$ *ўрама* $J'(R^n)$ *фазога тегишли ва ихтиёрий* $\varphi(x)\in J(R^n)$ *асосий функциялар учун*

$$((f*g)(x),\varphi(x))=(f(x)\cdot g(y),\eta(y)\varphi(x+y)) \qquad (3.7.32)$$

шаклида тасвирланади, бунда η *функция* $D(R^n)$ *фазодаги ихтиёрий функция бўлиб,* g *функция ташувчисининг атрофида* 1 *га тенг. Шу билан бирга* $f(x)\to f(x)*g(x)$ *амали* $J'(R^n)$ *фазони* $J'(R^n)$ *фазога узлуксиз акслантиради. Шунингдек* $g(x)\to f(x)*g(x)$ *амали эса* $E'(R^n)$ *фазони* $J'(R^n)$ *фазога узлуксиз акслантиради.*

Ҳақиқатдан ҳам, $f(x)*g(x)\in D'(R^n)$ ва (3.7.32) формула $D(R^n)$ фазодаги $\varphi(x)$ асосий функциялар учун ўринли бўлади. Маълумки, $f(x)\times g(y)\in J'(R^{2n})$ ва шу билан бирга $\varphi(x)\to\eta(y)\varphi(x+y)$ амали $J(R^n)$ фазони $J(R^{2n})$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиради:

$$\left\|\eta(y)\varphi(x+y)\right\|_p\le\sup_{\substack{(x,y)\in R^{2n},\\ |\alpha|\le p}}\left(1+|x|^2+|y|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left|D^\alpha\left[\eta(y)\varphi(x+y)\right]\right|\le$$

$$\le C_p\sup_{\substack{(x,y)\in R^{2n},\\ |\alpha|\le p}}\left(1+|x+y|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left|D^\alpha\varphi(x+y)\right|=C_p\left\|\varphi\right\|_p$$

тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда (3.7.32) тенгликнинг ўнг томони $J(R^n)$ фазода чизиқли узлуксиз функционални аниқлайди ва шунга кўра $f(x)*g(x)\in J'(R^n)$ бўлади.

б) Γ тўплам R^n фазодаги ёпиқ қавариқ ўткир конус бўлиб унинг учи 0 нуқтада бўлсин, ҳамда $C=\operatorname{int}\Gamma^*$, S – қатъий C – ўхшаш сирт ва S_+ – соҳа эса S устида жойлашган бўлсин.

Агар $f(x)\in J'(\Gamma+)$ *ва* $g(x)\in J'(\Gamma+)$ *бўлса, у ҳолда* $f(x)*g(x)$ *ўрама* $J'(R^n)$ *фазода мавжуд ва ихтиёрий* $\varphi(x)\in J(R^n)$ *асосий функциялар учун*

$$((f*g)(x),\varphi(x))=(f(x)\times g(y),\xi(x)\eta(y)\varphi(x+y))\qquad (3.7.33)$$

шаклида тасвирланади, бунда ξ *ва* η *функциялар* $C^\infty(R^n)$ *фазодаги ихтиёрий функциялар бўлиб* $\left|D^\alpha\xi(x)\right|\le c_\alpha$, $\left|D^\alpha\eta(y)\right|\le c_\alpha$ *тенгсизликлар ўринли. Шунингдек, мос равишда* $(\operatorname{supp} f)^\varepsilon$ *ва* $(\operatorname{supp} g)^\varepsilon$ *тўпламларда бу функциялар* 1 *га тенг, ҳамда мос равишда* $(\operatorname{supp} f)^{2\varepsilon}$ *ва* $(\operatorname{supp} g)^{2\varepsilon}$ *тўпламларнинг ташқарисида эса бу функциялар* 0 *га тенг, бунда* $\varepsilon>0$ *ихтиёрий мусбат сон. Шу билан бирга агар* $\operatorname{supp} f\subset\Gamma+K$*, бунда* K *– компакт тўплам бўлса, у ҳолда* $f(x)\to f(x)*g(x)$ *амали* $J'(\Gamma+K)$ *фазони* $J'(\overline{S_+}+K)$ *фазога узлуксиз акслантиради.*

Бу тасдиқни исботлаш учун

$$(f(x)\times g(y),\varphi(x,y))=(f(x),(g(y),\varphi(x,y)))$$

тасвирдан фойдаланамиз ва шу билан бирга $\varphi(x)\to\chi(x,y)=\xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)$ амали $J(R^n)$ фазони $J(R^{2n})$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиришини кўрсатамиз. Барча $\varphi(x)\in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функциялар учун

$$\left\|\chi(x,y)\right\|_p\le\sup_{\substack{(x,y)\in R^{2n},\\ |\alpha|\le p}}\left(1+|x|^2+|y|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left|D^\alpha_{(x,y)}\left[\xi(x)\eta(y)\varphi(x+y)\right]\right|\le$$

$$\le C'_p\sup_{\substack{x\in\Gamma+K+\overline{U_{2\varepsilon}},\\ y\in\overline{S_+},\,|\alpha|\le p}}\left(1+|x|^2+|y|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left|D^\alpha_{(x,y)}\varphi(x+y)\right|\le$$

$$\leq 2^p C'_p \sup_{\substack{x\in T(\xi),\\ |\alpha|\leq p}} \left(1+|x|^2+|y|^2\right)^{\frac{p}{2}} \left|D^\alpha \varphi(\xi)\right|$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда

$$T(\xi)=\left[x:\ x\in \Gamma+K+\overline{U_{2\varepsilon}},\ x=\xi-y,\ y\in \overline{S_+}\right]$$

бўлган тўпламдир. Шунингдек, S – қатъий C –ўхшаш сирт бўлгани учун $T(\xi)$ тўплам радиуси $a\left(1+|\xi|\right)^\nu$, $\nu\geq 1$ бўлган шарда жойлашган бўлади. Шунинг учун юқоридаги баҳолашимизни давом эттириб, ҳар бир $p=0,1,...$ учун

$$\|\chi(x,y)\|_p \leq C''_p \sup_{\substack{\xi\in R^n,\\ |\alpha|\leq p}} \left[1+|\xi|^2+a^2\left(1+|\xi|\right)^{2\nu}\right]^{\frac{p}{2}} \left|D^\alpha\varphi(\xi)\right| \leq C_p\, \|\varphi\|_{p(|\nu|+1)}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса исбот қилиниши талаб этилган тенгсизликдир.

Бу ҳосил қилинган критериядан хусусан, $J'(\Gamma+)$ *умумлашган функциялар тўплами ўрама алгебрасини ташкил этиши ва* $D'(\Gamma+)$ *ўрама алгебрасининг қисмий алгебраси эканлиги келиб чиқади. Шунингдек,* $J'(\Gamma)$ *тўплам ҳам ўрама алгебрасини ташкил этиши ва* $J'(\Gamma+)$ *ўрама алгебрасининг қисмий алгебрасини ташкил этиши келиб чиқади.*

в) $f(x)\in J'(R^n)$ *ва* $\eta(x)\in J(R^n)$ *бўлсин. У ҳолда* $f(x)*\eta(x)$ *ўрама* θ_M *тўпламда мавжуд ва ихтиёрий* $\varphi(x)\in J(R^n)$ *асосий функциялар учун*

$$((f*\eta)(x),\varphi(x))=(f(x),\eta(x)*\varphi(-x)) \qquad (3.7.34)$$

$$(f*\eta)(x)=(f(y),\eta(x-y)) \qquad (3.7.34’)$$

шаклида тасвирланади. Шу билан бирга шундай бир $m\geq 0$ *бутун мусбат сон (*f *функциянинг тартиби) мавжудки, бунда* $x\in R^n$ *учун*

$$\left|D^\alpha(f*\eta)(x)\right| \leq \|f(x)\|_{-m}\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}\|\eta(x)\|_{m+|\alpha|} \qquad (3.7.35)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, $\{\eta_k(x,y)\}$ функциялар кетма–кетлиги $D(R^{2n})$ фазодаги ихтиёрий функциялар кетма–кетлиги бўлиб 1 га

R^{2n} фазода яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ асосий функциялар учун $J(R^n)$ фазода $k\to\infty$ интилганда

$$\int\limits_{R^n}\eta(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y)dy\to\int\limits_{R^n}\eta(y)\varphi(x+y)dy$$

лимитик муносабат ўринли бўлади. Бундан ўрама ва тўғри кўпайтма таърифларидан фойдаланиб ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ асосий функциялар учун (3.7.34) тасвирни ҳосил қиламиз, яъни

$$((f*\eta)(x),\varphi(x))=\lim_{k\to\infty}\big(f(x)\times\eta(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\big)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(f(x),\int\limits_{R^n}\eta(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y)dy\right)=$$

$$=\left(f(x),\int\limits_{R^n}\eta(y)\varphi(x+y)dy\right)=$$

$$=\left(f(x),\int\limits_{R^n}\varphi(\xi)\eta(\xi-x)d\xi\right)=(f(x),\eta(x)*\varphi(-x))$$

бўлади. Бу ерда $\varphi(\xi)\eta(\xi-x)\in J(R^{2n})$ эканлигидан ва

$$(f(x),\int\limits_{R^m}\varphi(x,y)dy)=\int\limits_{R^m}(f,\varphi(x,y))dy$$

формуладан фойдаланиб юқоридаги тенгликларни давом эттириб

$$((f*\eta)(x),\varphi(x))=\int\limits_{R^n}\big(f(x),\ \eta(\xi-x)\big)\varphi(\xi)d\xi$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва бундан (3.7.34’) тасвир келиб чиқади.

Бу (3.7.34) тасвирдан биз $f(x)*\eta(x)\in C^\infty(R^n)$ эканлигини ва

$$D^\alpha(f*\eta)(x)=(f(y),D_x^\alpha\eta(x-y)) \qquad (3.7.36)$$

формуланинг ўринли эканлигини ҳосил қиламиз.

Ихтиёрий $f(x)$ секин ўсувчи умумлашган функциянинг тартиби m бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varphi(x)\in J$ асосий функция учун $|(f,\varphi)|\le\|f\|_{-m}\|\varphi\|_m$, бунда $\|f\|_{-m}$ эса f функционалнинг $J'_m(R^n)$ қўшма фазодаги нормаси бўлган тенгсизликни (3.7.36) формуланинг ўнг томонига қўлласак, у ҳолда (3.7.35) тенгсизликни ҳосил қиламиз, яъни

$$\left|D^{\alpha}(f*\eta)(x)\right| \le \| f\|_{-m} \cdot \left\|D_x^{\alpha}\eta(x-y)\right\|_m =$$

$$= \| f\|_{-m} \cdot \sup_{\substack{y\in R^n,\\ |\beta|\le m}} \left(1+|y|^2\right)^{\frac{m}{2}} \left|D_x^{\alpha}D_y^{\beta}\eta(x-y)\right| =$$

$$= \| f\|_{-m} \cdot \sup_{\substack{y\in R^n,\\ |\beta|\le m}} \left(1+|x-\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \left|D^{\alpha+\beta}\eta(\xi)\right| \le$$

$$\le \| f\|_{-m} \cdot \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \sup_{\substack{\xi\in R^n,\\ |\beta|\le m}} \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \left|D^{\alpha+\beta}\eta(\xi)\right| \le$$

$$\le \| f\|_{-m} \cdot \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \|\eta\|_{m+|\alpha|}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Натижа. *$J(R^n)$ фазо $J'(R^n)$ фазода зич бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, исбот қилинганига кўра, агар $f(x)\in J'(R^n)$ бўлса, у ҳолда унинг регуляризацияси $f_{\varepsilon}(x)=f(x)*\omega_{\varepsilon}(x)\in\theta_M$ ва $\varepsilon\to+0$ интилганда $J'(R^n)$ фазода $f_{\varepsilon}(x)\to f(x)$ яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун θ_M тўплам $J'(R^n)$ фазода зич бўлади. Лекин $J(R^n)$ фазо θ_M тўпламда зичдир. Бошқача қилиб айтганда, агар $a(x)\in\theta_M$ бўлса, у ҳолда $e^{-\varepsilon|x|^2}a(x)\in J(R^n)$ учун $\varepsilon\to+0$ интилганда $J'(R^n)$ фазода $e^{-\varepsilon|x|^2}a(x)\to a(x)$ яқинлашувчи бўлади.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

25.1. $D(R^n)\subset J(R^n)$ эканлигини ва $D(R^n)$ фазода яқинлашувчи эканлигидан $J(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция фазосида ҳам яқинлашувчи эканлигини исботланг.

25.2. $\varphi(x)\in J(R^n)$ бўлсин. У ҳолда $\varphi_k(x)=\frac{1}{k}\varphi(x)$ кетма–кетликни $J(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция фазосида яқинлашишга текширинг.

25.3. $\varphi(x)\in J(R^n)$ бўлсин. У ҳолда $\varphi_k(x)=\frac{1}{k}\varphi(kx)$ кетма–кетликни $J(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция фазосида яқинлашишга текширинг.

25.4. $\varphi(x)\in J(R^n)$ бўлсин. У ҳолда $\varphi_k(x)=\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$ кетма–кетликни $J(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция фазосида яқинлашишга текширинг.

25.5. $\varphi(x)\in J(R^n)$ ва $P(x)$ полином бўлсин. У ҳолда $\varphi(x)P(x)\in J(R^n)$ эканлигини исботланг.

25.6. $\psi(x)\in C^\infty(R^1)$, $x<a$ учун $\psi(x)=0$, ҳамда бу функция ва унинг барча ҳосилалари чегараланган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\sigma>0$ мусбат сон учун $\psi(x)e^{-\sigma x}\in J(R^1)$ эканлигини исботланг.

25.7. $g(y)\in J'(R^m)$ секин ўсувчи умумлашган функция ва $\varphi(x,y)\in J(R^{n+m})$ тез камаювчи асосий функция бўлсин. У ҳолда

1) $\psi(x)=\big(g(y),\varphi(x,y)\big)\in J(R^n)$,

2) $D^\alpha\psi(x)=\big(g(y),D_x^\alpha\varphi(x,y)\big)$,

3) агар $k\to\infty$ интилганда $J(R^{n+m})$ фазода $\varphi_k(x,y)\to\varphi(x,y)$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $k\to\infty$ интилганда $J(R^n)$ фазода $\psi_k(x)=(g(y),\,\varphi_k(x,\,y))\to\psi(x)=(g(y),\,\varphi(x,\,y))$ яқинлашувчи,

4) агар $f(x)\in J'(R^n)$ ва $g(y)\in J'(R^m)$ бўлса, у ҳолда $f(x)\times g(y)\in J'(R^{n+m})$ эканлигини исбот қилинг.

25.8. $f(x)\in J'(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция ва $g(x)\in D'(R^n)$ финит умумлашган функция бўлсин. У ҳолда $f(x)*g(x)\in J'(R^n)$ эканлигини исбот қилинг.

8-§. Секин ўсувчи умумлашган функцияларнинг Фурье алмаштириши

Секин ўсувчи умумлашган функциялар синфининг ажойиб хоссаларидан бири шундан иборатки, Фурье алмаштириши амали бу синфдан четга чиқмайди.

1. Фурье алмаштириши. Маълумки, ихтиёрий $f(x)\in L_1(R^n)$ функция учун унинг Фурье алмаштиришини

$$\hat{f}(\xi)=\int\limits_{R^n} f(x)e^{-ix\xi}dx \tag{3.8.1}$$

формула орқали аниқлаймиз, бунда $x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n$ бўлади. Кўриниб турибдики, ихтиёрий $f(x)\in L_1(R^n)$ функция учун $\left\|\hat{f}\right\|_{L_\infty}\le\|f\|_{L_1}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу $\hat{f}(\xi)$ Фурье алмаштиришини биз $Ff(\xi)$ орқали ҳам белгилаймиз. (3.8.1) формулада экспонента даражасида ишорани ўзгартириб

$$F^*f(\xi)=\tilde{f}(\xi)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n} f(x)e^{ix\xi}dx$$

алмаштиришга ҳам эга бўламиз.

1–тасдиқ. *Агар $u(x)\in J(R^n)$ бўлса, у ҳолда $\hat{u}(\xi)$, $\tilde{u}(\xi)\in J(R^n)$ бўлади.*

Исбот. Агар $u(x)\in J(R^n)$ бўлса, (3.8.1) формулада интеграл белгиси остида дифференциалласак,

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi)=\int\limits_{R^n} u(x)(-ix)^\alpha e^{-ix\xi}dx \tag{3.8.2}$$

формулани ҳосил қиламиз, бунда $D_\xi^\alpha = D_{\xi_1}^{\alpha_1}D_{\xi_2}^{\alpha_2}\ldots D_{\xi_n}^{\alpha_n}$, $D_{\xi_j}^{\alpha_j}=\dfrac{\partial^{\alpha_j}}{\partial\xi_j^{\alpha_j}}$.

Шунингдек, $\xi^\beta e^{-ix\xi}=i^{|\beta|}D_x^\beta e^{-ix\xi}$ тенгликни эътиборга олиб, (3.8.2) интегралда бўлаклаб интеграллаш орқали

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(-i)^{|\alpha|+|\beta|}\int\limits_{R^n} D_x^\beta(x^\alpha u(x))e^{-ix\xi}dx \tag{3.8.3}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан эса, ихтиёрий $u(x)\in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функция учун ҳар бир $\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi)$ функциянинг

$L_\infty(R^n)$ синфга қарашли эканлиги келиб чиқади. Шунга кўра, $\hat{u}(\xi)\in J(R^n)$ бўлади. Худди шунга ўхшаш, $\tilde{u}(\xi)\in J(R^n)$ эканлиги текширилади.

1–теорема. *$F: J(R^n)\to J(R^n)$ Фурье алмаштириши изоморфизм бўлади. Бундан ташқари, $FF^*=F^*F=I$ тенглик ўринли бўлади. Шунга кўра, хусусан $u(x)\in J(R^n)$ функция учун*

$$u(x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \qquad (3.8.4)$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. (3.8.4) формуладан $F^*F=I$ эканлиги келиб чиқади. $FF^*=I$ тенглик ҳам худди шунга ўхшаш ҳосил қилинади. Шунинг учун (3.8.4) тенгликни исбот қиламиз.

$$(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\int_{R^n}u(y)e^{i(x-y)\xi}dyd\xi=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\int_{R^n}u(y)e^{i(x-y)\xi-\varepsilon|\xi|^2}dyd\xi=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\left\{\int_{R^n}e^{i(x-y)\xi-\varepsilon|\xi|^2}d\xi\right\}u(y)dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{R^n}p(\varepsilon,\, x-y)u(y)dy \qquad (3.8.5)$$

тенгликка эга бўламиз, бунда

$$p(\varepsilon,\, x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}e^{ix\xi-\varepsilon|\xi|^2}d\xi \qquad (3.8.6)$$

бўлади. Кейинроқ (3.8.6) интегрални ҳисоблаймиз ва

$$p(\varepsilon,\, x)=(4\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}=\varepsilon^{-\frac{n}{2}}q\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \qquad (3.8.7)$$

эканлигини топамиз, бунда $q(x)=p(1,\, x)=(4\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ ҳосил бўлади. Кўриниб турибдики, $q(x)\in J(R^n)$ бўлади. Биз (3.8.7) формулани келтириб чиқаришда

$$\int_{R^n}q(x)dx=1 \qquad (3.8.8)$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Кейинчалик эса, ҳар қандай чегараланган узлуксиз $u(x)$ функция учун

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{R^n} p(\varepsilon,\, x-y)u(y)dy = u(x) \qquad (3.8.9)$$

тенглик элементар равишда ҳосил қилинади. (3.8.5) ва (3.8.9) муносабатлардан (3.8.4) формула келиб чиқади.

(3.8.7) тенгликни исботлаш учун (3.8.6) формула орқали аниқланган $p(\varepsilon,\, x)$ функция $x \in C^n$ ўзгарувчининг бутун аналитик функцияси эканлигини эътиборга оламиз.

Бизга $x \in R^n$ учун

$$p(\varepsilon,\, ix) = (4\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} \qquad (3.8.10)$$

тенгликни текшириш қулайдир. Бундан эса, аналитик давом эттириш ёрдамида (3.8.7) формула келиб чиқади. Демак,

$$p(\varepsilon,\, ix) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{-x\xi-\varepsilon|\xi|^2}d\xi = (2\pi)^{-n}e^{\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}\int_{R^n} e^{-\left|\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}+\xi\sqrt{\varepsilon}\right|^2}d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n}e^{\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}\int_{R^n} e^{-\varepsilon|\xi|^2}d\xi = (2\pi)^{-n}\varepsilon^{-\frac{n}{2}}e^{\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}\int_{R^n} e^{-|\xi|^2}d\xi$$

тенглик ўринли бўлади. Шунга кўра (3.8.10) формулани исботлаш учун $\int_{R^n} e^{-|\xi|^2}d\xi = \pi^{\frac{n}{2}}$ айниятни текшириш етарлидир.

Агар $A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|^2}d\xi$ деб белгиласак, у ҳолда $\int_{R^n} e^{-|\xi|^2}d\xi = A^n$ бўлади.

Бироқ,

$$A^2 = \int_{R^2} e^{-|\xi|^2}d\xi = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}rdrd\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-r^2}rdr = \pi$$

ҳосил бўлиб, бундан эса $A = \sqrt{\pi}$ келиб чиқади. Бу келтирилган ҳисоблашлар (3.8.8) формуланинг ҳам ўринли эканлигини билдиради. 1–теорема исбот бўлди.

Агар ихтиёрий $f(x) \in L_1(R^n)$ функция учун унинг Фурье алмаштириши $\hat{f}(\xi) \in L_1(R^n)$ бўлса, у ҳолда тескари Фурье алмаштиришидан фойдаланиб $f(x)$ функцияни $\hat{f}(\xi)$ орқали

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

формула билан ифодалаш мумкин бўлади.

Энди

$$F : J'(R^n) \to J'(R^n) \qquad (3.8.11)$$

операторни

$$\langle \varphi,\ Fu\rangle_{L_2} = \langle (2\pi)^n F^* \varphi,\ u\rangle_{L_2} \qquad (3.8.12)$$

тенглик орқали аниқлаймиз. Таъкидлаш керакки, ихтиёрий $u(x) \in J(R^n)$ учун (3.8.12) формула бажарилади. Шунга кўра F операторнинг $J(R^n)$ фазодан $J'(R^n)$ фазогача ягона узлуксиз давоми аниқланади. Худди шунга ўхшаш $F^* :\ J'(R^n) \to J'(R^n)$ акслантириш аниқланади. 1–теоремадан $FF^* = F^*F = I$ тенглик $J'(R^n)$ синфда ҳам ўринли эканлиги келиб чиқади. Шунга кўра F ва F^* операторлар $J'(R^n)$ фазода изоморфизмдир.

Интеграл белгиси остида дифференциаллаб ёки бўлаклаб интеграллаш формуласи ёрдамида $u(x) \in J(R^n)$ учун (3.8.4) формуладан фойдаланиб,

$$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

$$(-ix)^\beta u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} D_\xi^\beta \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \qquad (3.8.13)$$

муносабатларни ҳосил қиламиз. Шунга кўра

$$D^\alpha = F^{-1}(i\xi)^\alpha F, \quad (-ix)^\beta = F^{-1} D^\beta F$$

тенгликлар $J(R^n)$ фазода ўринли бўлади. Шунингдек бу формулалар $J'(R^n)$ фазода ҳам ўринли бўлади. Ихтиёрий $u(x) \in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функция учун $F^{-1} = F^*$ тенгликдан ва (3.8.12) формуладан

$$\|\hat{u}\|_{L_2}^2 = (Fu, Fu)_{L_2} = (u, (2\pi)^n F^* F u)_{L_2} = (2\pi)^n (u, u)_{L_2} = (2\pi)^n \|u\|_{L_2}^2 \qquad (3.8.14)$$

тенглик келиб чиқади. (3.8.14) формула $F_1 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} F$ акслантиришнинг бир қийматли изометрик равишда $F_1 :\ L_2(R^n) \to L_2(R^n)$ фазога давом эттирилишини билдиради. Худди шунга ўхшаш, $F_1^* = (2\pi)^{\frac{n}{2}} F^*$ оператор ҳам $L_2(R^n)$ фазогача ягона ҳолда изометрик давом этади ва $FF^* = F^*F = I$

тенглик $L_2(R^n)$ фазода ўринли бўлади. Шунинг учун $F_1=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}F$ ва $F_1^*=(2\pi)^{\frac{n}{2}}F^*$ операторлар $L_2(R^n)$ фазода унитар операторлар бўлади. Бу факт Планшерель теоремаси деб айтилади.

Планшерель теоремаси $f(x)\in L_2(R^n)$ функциянинг Фурье алмаштиришини

$$\hat{f}(\xi)=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|x|<R}f(x)e^{-ix\xi}dx$$

тенглик билан аниқлашга имкон беради. Шу билан бирга $\hat{f}(\xi)\in L_2(R^n)$ ва

$$f(x)=\lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-n}\int\limits_{|\xi|<R}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

бўлади. Бундан ташқари, бу охирги иккита формуладаги лимит $L_2(R^n)$ фазо нормаси маъносида тушунилади ва

$$\|f\|_{L_2(R^n)}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|\hat{f}\|_{L_2(R^n)}$$

Парсеваль тенглиги ўринли бўлади. Бу охирги тенглик $L_2(R^n)$ фазодан олинган ихтиёрий $f(x)\in L_2(R^n)$ ва ихтиёрий $g(x)\in L_2(R^n)$ функциялар жуфти учун

$$\int\limits_{R^n}f(x)\,\overline{g(x)}\,dx=(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n}\hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$$

тенгликнинг ўринли бўлишига эквивалент бўлади.

Агар $u(x),\ v(x)\in J(R^n)$ бўлса, у ҳолда $u(x)*v(x)$ ўрамани

$$(u*v)(x)=\int\limits_{R^n}u(y)v(x-y)dy \tag{3.8.15}$$

тенглик орқали аниқлаймиз. Бу ҳолда $(u*v)(x)\in J(R^n)$ бўлади. Буни биз $J(R^n)*J(R^n)\in J(R^n)$ кўринишида ёзамиз. (3.8.15) формулага мос ҳолда биз $L_1(R^n)*L_1(R^n)\subset L_1(R^n)$, $C_0^\infty(R^n)*J(R^n)\subset J(R^n)$, $C_0^\infty(R^n)\times C^\infty(R^n)\subset C^\infty(R^n)$ ва ҳакозо муносабатларга эга бўламиз. Бундан ташқари, маълум шартларда

$$\langle u*v,\,w\rangle=\langle v,\,u*\overset{\vee}{w}\rangle$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $jw(x)=\overset{\vee}{w}(x)=w(-x)$ бўлади. Табиийки, j оператор иккиламчи бўлган $D'(R^n)$, $E'(R^n)$ ва $J'(R^n)$ фазоларда ҳам аниқланади. Энди ω тақсимот учун $u*\omega$ ўрама

$$\langle v,\ u*\omega\rangle=\langle u*v,\ \overset{\vee}{\omega}\rangle$$

тенглик билан аниқланади. Шу билан бирга $C_0^\infty(R^n)*D'(R^n)\subset C^\infty(R^n)$, $J(R^n)*J'(R^n)\subset J'(R^n)$ ва ҳакозо. Кейинчалик, $\langle v,\ \omega*\alpha\rangle=\langle v*\omega,\ \overset{\vee}{\alpha}\rangle$ деб олиб, бу тақсимотлардан ҳеч бўлмаганда бири компакт ташувчига эга бўлганда уларнинг ўрамасини аниқлаш мумкин бўлади. Шу билан бирга $E'(R^n)*D'(R^n)\subset D'(R^n)$, $E'(R^n)*J'(R^n)\subset J'(R^n)$ ҳамда $E'(R^n)*E'(R^n)\subset E'(R^n)$ муносабатлар ўринли бўлади. Шунингдек, мос жуфтлик фазоларига тегишли бўлган $u(x),\ v(x)$ умумлашган функциялар учун

$$(u*v)^\wedge(\xi)=\hat{u}(\xi)\ \hat{v}(\xi) \qquad (3.8.16)$$

тенглик ўринли эканлигини кўриш мумкин. Бу (3.8.16) тенгликни аввал ихтиёрий $u(x), v(x)\in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функциялар учун исботлаш етарли бўлади. Бу эса Фубини теоремасининг содда натижаси сифатида ҳосил қилинади.

Дельта–функция $\delta(x)\in E'(R^n)\subset J'(R^n)\subset D'(R^n)$ бўлиб $<u,\delta>=u(0)$ муносабатдан аниқланади. Унинг энг содда хоссаларини келтирамиз:

$$\hat{\delta}(\xi)=1,\ \delta(x)*\omega(x)=\omega(x),\ \ P(D)\omega(x)=P(D)\delta(x)*\omega(x).$$

Бу (3.8.13) формуладан кўринадики, $P(\xi)$ полином учун $(P(D)u)^\wedge(\xi)=P(i\xi)\hat{u}(\xi)$ ёки

$$P(D)=F^{-1}P(i\xi)F \qquad (3.8.17)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу (3.8.17) тенгликни ихтиёрий $p(\xi)$ функциялар учун умумлаштириб биз

$$p(D)=F^{-1}p(i\xi)F \qquad (3.8.18)$$

деб оламиз. Агар $p(\xi)$ функция

$$\left|D^\beta p(\xi)\right|\le C_\beta\left(1+|\xi|^2\right)^N,\ N=N(\beta)$$

секин ўсиш шартини қаноатлантирса, у ҳолда $p(D)$ оператор мос равишда $J(R^n)$ ва $J'(R^n)$ синфларни ўзига акслантиради.

Агар $p(\xi) \in L_{\infty}(R^n)$ бўлса, у ҳолда Планшерель теоремасига кўра

$$p(D) : L_2(R^n) \to L_2(R^n)$$

акслантирувчи оператор бўлади.

Энди $T^n = R^n /(2\pi Z^n)$ тўрда берилган функция (ёки тақсимот) учун

$$u(x) = \sum_{m\in Z^n} \hat{u}(m) e^{imx}$$

тенглик билан аниқланадиган Фурье қаторига тўхталамиз, бунда $u(x)$ функция учун $\hat{u}(m)$ коэффициентлар

$$\hat{u}(m) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} u(x) e^{-imx} dx \qquad (3.8.20)$$

тенглик билан аниқланади. Ҳамда $u(x) \in D'(T^n)$ тақсимотлар учун эса

$$\hat{u}(m) = (2\pi)^{-n} \langle e^{-imx},\ u(x)\rangle \qquad (3.8.21)$$

тенгликдан аниқланади. Қаторлар учун Планшерель теоремасига кўра,

$$\sum_m |\hat{u}(m)|^2 = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} |u(x)|^2 dx$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан ташқари,

$$D^{\alpha} u(x) = \sum_{m\in Z^n} (im)^{\alpha} \hat{u}(m) e^{imx} \qquad (3.8.22)$$

тенгликка эга бўламиз. Шунга кўра $u(x) \in C^{\infty}(T^n)$ бўлиши учун $\hat{u}(m)$ кетма–кетлик Z^n фазода тез камаювчи бўлиши, яъни барча k учун

$$\sup_{m\in Z^n} (1+|m|)^k |\hat{u}(m)| < \infty \qquad (3.8.23)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши зарур ва етарли бўлади.

Қўшмаликка кўра, $u(x) \in D'(T^n)$ бўлиши учун $\hat{u}(m)$ кетма–кетлик полиномиал чегараланган кетма–кетлик бўлиши, яъни қандайдир l сони учун

$$|\hat{u}(m)| \le C\,\left(1+|m|\right)^l \qquad (3.8.24)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши зарур ва етарлидир бўлади. (3.8.18) тенгликка ўхшаш Z^n фазода берилган ихтиёрий $p(m)$ функция учун

$$p(D)u = \sum_{m \in Z^n} p(im)\, \hat{u}(m) e^{imx} \tag{3.8.25}$$

деб оламиз. Шундай қилиб, агар $p(m)$ кетма–кетлик полиномиал чегараланган бўлса, у ҳолда

$$p(D): C^{\infty}(T^n) \to C^{\infty}(T^n)$$

ва

$$p(D):\ D'(T^n) \to D'(T^n)$$

акслантиради. Шунингдек

$$p(D):\ L_2(T^n) \to L_2(T^n)$$

оператор бўлиши учун $p(m)$ кетма–кетликнинг чегараланган бўлиши зарур ва етарлидир бўлади.

2. $J(R^n)$ синфдаги асосий функцияларнинг Фурье алмаштириши. Маълумки, $J(R^n)$ синфдан олинган $\varphi(x)$ асосий функция R^n фазода жамланувчи бўлганлиги учун бу функциянинг $F[\varphi]$ Фурье алмаштириши амали классик маънода аниқланган бўлади, яъни ихтиёрий $\varphi(x) \in J(R^n)$ асосий функция учун

$$F[\varphi](\xi) = \int_{R^n} \varphi(x) e^{-i(\xi,x)} dx$$

интеграл мавжуд бўлади. Шу билан бирга бу $\varphi(x)$ функциянинг $F[\varphi](\xi)$ Фурье алмаштириши R^n фазода чегараланган ва узлуксиз функция бўлади. Бу $\varphi(x)$ асосий функция чексизликда $|x|^{-1}$ функциянинг исталган даражасидан тез нолга интилади. Шунинг учун унинг Фурье алмаштиришини исталган сондаги марта интеграл белгиси остида дифференциаллаш мумкин бўлади, яъни

$$D^{\alpha} F[\varphi](\xi) = \int_{R^n} (-ix)^{\alpha} \varphi(x) e^{-i(\xi,x)} dx = F[(-ix)^{\alpha} \varphi](\xi) \tag{3.8.26}$$

тенглик ўринли бўлиб, бунда $D_\xi^\alpha = D_{\xi_1}^{\alpha_1} D_{\xi_2}^{\alpha_2} ... D_{\xi_n}^{\alpha_n}$, $D_{\xi_j}^{\alpha_j} = \dfrac{\partial^{\alpha_j}}{\partial {\xi_j}^{\alpha_j}}$. Бу (3.8.26) тенгликдан эса $F[\varphi] \in C^\infty(R^n)$ эканлиги келиб чиқади. Шунингдек, бундай хоссага ҳар бир $D^\alpha \varphi(x)$ ҳосила эга бўлади ва шунинг учун

$$F[D^\alpha \varphi](\xi) = \int\limits_{R^n} D^\alpha \varphi(x) e^{-i(\xi,x)} dx = (i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi) \qquad (3.8.27)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу (3.8.27) тенгликдан хусусан, $F[\varphi](\xi)$ функциянинг R^n фазода жамланувчи функция эканлиги келиб чиқади.

Фурье алмаштиришининг умумий назариясидан ҳар қандай $\varphi(x)$ функция ўзининг $F[\varphi](\xi)$ Фурье алмаштириши орқали F^{-1} тескари Фурье алмаштириши амали ёрдамида

$$\varphi = F^{-1}\big[F[\varphi]\big] = F\left[F^{-1}[\varphi]\right] \qquad (3.8.28)$$

тенглик билан ифодаланади, бунда

$$F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} \psi(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi](-x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} \psi(-\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)] \qquad (3.8.29)$$

бўлади.

1–лемма. *F Фурье алмаштириши амали $J(R^n)$ фазони ўзига бир қийматли ва узлуксиз акслантиради, яъни F алмаштириш $J(R^n)$ фазони $J(R^n)$ фазога чизиқли изоморф акслантиради.*

Исбот. Ихтиёрий $\varphi(x) \in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функция бўлсин. У ҳолда (3.8.26) ва (3.8.27) формулалардан фойдаланиб барча $p = 0,1, ...$ ва барча α мультииндекслар учун

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{p}{2}} \left|D^\alpha F[\varphi](\xi)\right| \le \left(1+|\xi|^2\right)^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} \left|D^\alpha F[\varphi](\xi)\right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{R^n} (1-\Delta)^{\left[\frac{p+1}{2}\right]} \left[(-ix)^\alpha \varphi(x)\right] e^{-i(\xi,x)} dx \right| \le$$

$$\leq C\sup_x\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}\left|(1-\Delta)^{\left[\frac{p+1}{2}\right]}\left[x^\alpha\varphi(x)\right]\right|$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан эса барча $p=0,1,\ldots$ сонлар учун φ функцияга боғлиқ бўлмаган шундай бир C_p ўзгармас сонлар мавжуд бўлиб

$$\left\|F[\varphi]\right\|_p \leq C_p\left\|\varphi\right\|_{p+n+1} \qquad (3.8.30)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. (Бу ерда $[x]-$орқали $x\geq 0$ соннинг бутун қисми белгиланган). Бу (3.8.30) баҳолаш $\varphi\to F[\varphi]$ алмаштириш амали $J(R^n)$ фазони $J(R^n)$ фазога узлуксиз акслантиришини кўрсатади. Шунингдек, (3.8.28) ва (3.8.29) формулалардан $J(R^n)$ фазога қарашли ҳар қандай $\varphi(x)$ функция $J(R^n)$ фазога қарашли $\psi=F^{-1}[\varphi]$ функциянинг Фурье алмаштириши эканлиги, яъни $\varphi=F[\psi]$ тенглик келиб чиқади ва агар $F[\varphi]=0$ бўлса, у ҳолда $\varphi=0$ бўлади. Бу эса $\varphi\to F[\varphi]$ акслантириш $J(R^n)$ фазони $J(R^n)$ фазога акслантирувчи ўзаро бир қийматли акслантириш эканлигини билдиради. Худди шунга ўхшаш хоссага F^{-1} тескари Фурье алмаштириши ҳам эга бўлади. 1–лемма исбот бўлди.

3. $J'(R^n)$ **синфдаги умумлашган функцияларнинг Фурье алмаштириши.** Аввал $f(x)$ функция R^n фазода жамланувчи функция бўлсин. У ҳолда унинг

$$F[f](\xi)=\int_{R^n} f(x)e^{-i(\xi,x)}dx, \qquad |F[f](\xi)|\leq\int_{R^n}|f(x)|dx<\infty$$

Фурье алмаштириши R^n фазода узлуксиз чегараланган функция бўлади. Шунга кўра ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функция учун

$$(F[f],\ \varphi)=\int_{R^n} F[f](\xi)\ \varphi(\xi)d\xi$$

регуляр секин ўсувчи умумлашган функцияни аниқлайди. Интеграллаш тартибини ўзгартириш ҳақидаги Фубини теоремасидан фойдаланиб охирги интегрални

$$\int_{R^n} F[f](\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_{R^n}\left[\int_{R^n} f(x)e^{-i(\xi,x)}dx\right]\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{R^n} f(x)\int_{R^n} \varphi(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi dx = \int_{R^n} f(x)F[\varphi](x)dx$$

шаклида алмаштирамиз, яъни ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функция учун

$$(F[f],\varphi)=(f,F[\varphi])$$

тенгликни ёзамиз.

Бу тенгликни ихтиёрий $f(x)\in J'(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция Фурье алмаштиришининг таърифи сифатида қабул қиламиз, яъни ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функция учун

$$(F[f],\ \varphi)=(f,\ F[\varphi]) \qquad (3.8.31)$$

тенглик билан аниқлаймиз. Маълумки, $\varphi\to F[\varphi]$ алмаштириш амали $J(R^n)$ фазони $J(R^n)$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиради. Шунга кўра (3.8.31) тенгликнинг ўнг томони билан аниқланган $F[f]$ функционал $J'(R^n)$ фазодаги умумлашган функцияни ифода қилади ва бундан ташқари $f\to F[f]$ алмаштириш амали $J'(R^n)$ фазони $J'(R^n)$ фазога *чизиқли ва узлуксиз* акслантиради.

$J'(R^n)$ фазода яна битта F^{-1} орқали белгиланувчи Фурье алмаштириши амалини ихтиёрий $f(x)\in J'(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция учун

$$F^{-1}[f]=\frac{1}{(2\pi)^n}F[f(-x)] \qquad (3.8.32)$$

тенглик билан киритамиз, бунда $f(-x)$ эса $f(x)$ умумлашган функциянинг акси бўлади. Кўриниб турибдики, F^{-1} алмаштириш амали $J'(R^n)$ фазони $J'(R^n)$ фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиради.

Бу F^{-1} алмаштириш F алмаштиришга тескари алмаштириш эканлигини исбот қиламиз, яъни ихтиёрий $f(x)\in J'(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция учун

$$F^{-1}\left[F[f]\right]=f,\quad F\left[F^{-1}[f]\right]=f \qquad (3.8.33)$$

тенгликлар ўринли эканлигини исбот қиламиз.

Ҳақиқатдан ҳам, (3.8.28) ва (3.8.29) тенгликлар $J(R^n)$ фазода ўринли ва $J(R^n)$ тўплам $J'(R^n)$ фазода зич, ҳамда F ва F^{-1} алмаштириш амаллари $J'(R^n)$ фазони $J'(R^n)$ фазога узлуксиз акслантиради. Шунга кўра (3.8.33) формулалар барча $f(x)\in J'(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция учун ҳам ўринли бўлиб қолади.

Бу (3.8.33) формулалардан ҳар қандай $f(x)\in J'(R^n)$ секин ўсувчи умумлашган функция $J'(R^n)$ фазодаги қандайдир $g=F^{-1}[f]$ секин ўсувчи умумлашган функциянинг Фурье алмаштириши бўлади, яъни $f=F[g]$ тенглик ўринли бўлади. Агар $F[f]=0$ бўлса, у ҳолда $f=0$ бўлади. Шундай қилиб, биз *$f\to F[f]$ алмаштириши амали $J'(R^n)$ фазони $J'(R^n)$ фазога ўзаро бир қийматли ва ўзаро узлуксиз акслантиришини исбот қилдик, яъни $f\to F[f]$ алмаштириши амали $J'(R^n)$ фазони $J'(R^n)$ фазога акслантирувчи чизиқли изоморфизм бўлади.*

Энди $f(x,y)\in J'(R^{n+m})$, бунда $x\in R^n$ ва $y\in R^m$ бўлсин. Ихтиёрий $\varphi(\xi,y)\in J(R^{n+m})$ асосий функция учун

$$(F_x[f],\ \varphi)=(f,\ F_\xi[\varphi]) \qquad (3.8.34)$$

тенглик билан $x=(x_1,\ldots,x_n)$ ўзгарувчи бўйича олинган $F_x[f]$ Фурье алмаштиришини киритамиз.

Маълумки

$$\varphi(\xi,y)\to F_\xi[\varphi](x,y)=\int\limits_{R^n}\varphi(\xi,y)e^{-i(x,\xi)}d\xi$$

алмаштириш амали $J(R^{n+m})$ фазони $J(R^{n+m})$ фазога акслантирувчи чизиқли изоморфизмни ифода қилади. Шунга кўра (3.8.34) формула ҳақиқатдан ҳам $J'(R^{n+m})$ фазога тегишли бўлган $F_x[f](\xi,y)$ умумлашган функцияни аниқлайди.

Худди (3.8.32) тенгликка ўхшаш ихтиёрий $g(x,y)\in J'(R^{n+m})$ секин ўсувчи умумлашган функция учун

$$F_{\xi}^{-1}[g]=\frac{1}{(2\pi)^{n}}F_{\xi}\left[g(-\xi,y)\right](x,y) \qquad (3.8.35)$$

тескари Фурье алмаштириши амалини аниқлаймиз. Бу $f\to F_{x}[f]$ алмаштириш амали $J'(R^{n+m})$ фазони $J'(R^{n+m})$ фазога акслантирувчи чизиқли изоморфизм бўлади.

Мисол.

$$F\left[\delta(x-x_{0})\right]=e^{-i(\xi,x_{0})} \qquad (3.8.36)$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^{n})$ асосий функция учун

$$\left(F[\delta(x-x_{0})],\varphi\right)=(\delta(x-x_{0}),F[\varphi])=F[\varphi](x_{0})=$$
$$=\int_{R^{n}}\varphi(\xi)e^{-i(x_{0},\xi)}d\xi=(e^{-i(x_{0},\xi)},\varphi(\xi))$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар (3.8.36) тенгликда $x_{0}=0$ деб олсак, у ҳолда

$$F[\delta]=1 \qquad (3.8.37)$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Бундан эса (3.8.32) тенгликка кўра

$$\delta(\xi)=F^{-1}[1](\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n}}F[1](\xi)$$

эканлиги келиб чиқади. Шунга кўра

$$F[1](\xi)=(2\pi)^{n}\delta(\xi) \qquad (3.8.38)$$

тенглик ҳосил бўлади.

4. Фурье алмаштиришининг хоссалари. Бу пунктда келтириладиган формулалар $J(R^{n})$ синфдаги ихтиёрий тез камаювчи асосий функциялар учун ўринли бўлади. Бироқ $J(R^{n})$ синф $J'(R^{n})$ синфда зичдир. Шунинг учун бу формулалар $J'(R^{n})$ синфдаги барча секин ўсувчи умумлашган функциялар учун ҳам ўринли бўлиб қолаверади.

а) *Фурье алмаштиришини дифференциаллаш:*

$$D^{\alpha}F[f]=F\left[(-ix)^{\alpha}f\right]. \qquad (3.8.39)$$

Хусусан, агар (3.8.39) тенгликда $f=1$ деб олсак ва (3.8.38) формуладан фойдаланиб

$$F[x^{\alpha}]=i^{|\alpha|}D^{\alpha}F[1]=(2\pi)^{n}i^{|\alpha|}D^{\alpha}\delta(\xi) \qquad (3.8.40)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

б) *Ҳосиланинг Фурье алмаштириши:*

$$F[D^{\alpha} f] = (i\xi)^{\alpha} F[f]. \qquad (3.8.41)$$

Бу (3.8.41) тенгликда $f = \delta$ деб олсак ва (3.8.37) формуладан фойдаланиб

$$F[D^{\alpha}\delta] = (i\xi)^{\alpha} F[\delta] = (i\xi)^{\alpha} \qquad (3.8.42)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

в) *Силжитишнинг Фурье алмаштириши:*

$$F\left[f(x - x_0)\right] = e^{-i(\xi, x_0)} F[f] \qquad (3.8.43)$$

тенглик ўринли бўлади.

г) *Фурье алмаштиришининг силжитиши:*

$$F[f](\xi + \xi_0) = F\left[e^{-i(\xi_0, x)} f\right](\xi) \qquad (3.8.44)$$

тенглик ўринли бўлади.

д) *Аргумент чизиқли алмашгандаги Фурье алмаштириши:*

$$F\left[f(Ax)\right](\xi) = \frac{1}{|\det A|} F[f](A^{-1T}\xi), \quad \det A \neq 0 \qquad (3.8.45)$$

тенглик ўринли бўлади, бу ерда $A \to A^T$ эса A матрицани транспонирлаш амалини билдиради.

е) *Тўғри кўпайтманинг Фурье алмаштириши:*

$$F\left[f(x) \times g(y)\right] = F_x\left[f(x) \times F[g](\eta)\right] =$$

$$= F_y\left[F[f](\xi) \times g(y)\right] = F[f](\xi) \times F[g](\eta) \qquad (3.8.46)$$

тенглик ўринли бўлади.

ж) Худди шунга ўхшаш формулалар F_x Фурье алмаштириши учун ҳам ўринлидир, масалан:

$$D_x^{\alpha} D_y^{\beta} F_x[f] = F_x\left[(-ix)^{\alpha} D_y^{\beta} f\right],$$

$$F_x\left[D_x^{\alpha} D_y^{\beta} f\right] = (i\xi)^{\alpha} D_y^{\beta} F_x[f] \qquad (3.8.47)$$

формулалар ўринли бўлади.

5. Компакт ташувчили умумлашган функциянинг Фурье алмаштириши. Агар $f(x)$ умумлашган функция компакт ташувчили, яъни $f(x) \in E'(R^n)$ бўлса, у ҳолда бу функция секин ўсувчи, яъни $f(x) \in J'(R^n)$ бўлади ва шунинг учун унинг Фурье алмаштириши мавжуд бўлади. Бунга қараганда ҳам кенгроқ бўлган қуйидаги теорема ўринлидир.

2–теорема. *Агар* $f(x)\in E'(R^n)$ *бўлса, у ҳолда* $F[f](\xi)$ *Фурье алмаштириши* θ_M *тўпламда мавжуд ва*

$$F[f](\xi)=(f(x),\ \eta(x)e^{-i(\xi,x)}) \qquad (3.8.48)$$

шаклида тасвирланади, бунда $\eta(x)\in D(R^n)$ *ихтиёрий функция бўлиб* $f(x)$ *функциянинг ташувчиси атрофида* 1 *га тенг бўлган функциядир. Шу билан бирга шундай бир* $C_\alpha\geq 0$ *ва* $m\geq 0$ *бўлган сонлар мавжуд бўлиб, ихтиёрий* $\xi\in R^n$ *нуқта учун*

$$\left|D^\alpha F[f](\xi)\right|\leq \|f\|_{-m}C_\alpha\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \qquad (3.8.49)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. (3.8.40) тенгликни ҳисобга олиб барча $\varphi(x)\in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функция учун

$$\left(D^\alpha F[f],\varphi\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(F[f],D^\alpha\varphi\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(f,F\left[D^\alpha\varphi\right]\right)=$$

$$=(-1)^{|\alpha|}\left(f,\ \eta(x)(ix)^\alpha F[\varphi]\right)=\left(f(x),\int\limits_{R^n}\eta(x)(-ix)^\alpha\varphi(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi\right)$$

ҳосил бўлади. Энди эса

$$\eta(x)(-ix)^\alpha\varphi(\xi)e^{-i(x,\xi)}\in J(R^{2n})$$

эканлигидан фойдаланиб

$$\left(f(x),\quad\int\limits_{R^n}\eta(x)(-ix)^\alpha\varphi(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi\right)=$$

$$=\int\limits_{R^n}\left(f(x),\quad\eta(x)(-ix)^\alpha e^{-i(x,\xi)}\right)\varphi(\xi)d\xi$$

тенгликка эга бўламиз. Биз бу тенгликдан фойдаланиб

$$\left(D^\alpha F[f],\ \varphi\right)=\int\limits_{R^n}\left(f(x),\ \eta(x)(-ix)^\alpha e^{-i(x,\xi)}\right)\varphi(\xi)d\xi$$

тенгликни келтириб чиқарамиз. Бундан эса

$$D^\alpha F[f](\xi)=\left(f(x),\ \eta(x)(-ix)^\alpha e^{-i(x,\xi)}\right) \qquad (3.8.50)$$

формула келиб чиқади. (3.8.50) формуладан $\alpha=0$ учун (3.8.48) формула ҳосил бўлади.

Бу (3.8.50) тасвирдан фойдаланиб, олдинги параграфдаги сингари биз $F[f]\in C^\infty(R^n)$ эканлигини келтириб чиқаришимиз мумкин. $f(x)$ функциянинг тартиби m га тенг бўлсин. Бу (3.8.50) тасвирнинг ўнг томонига $f(x)$ функциянинг m – тартибли бўлишлиги ҳақидаги тенгсизликни қўллаб, барча $\xi \in R^n$ учун

$$\left|D^\alpha F[f](\xi)\right| = \left|\left(f(x), \eta(x)(-ix)^\alpha e^{-i(x,\xi)}\right)\right| \le$$

$$\le \|f\|_{-m} \left\|\eta(x)(-ix)^\alpha e^{-i(x,\xi)}\right\|_m =$$

$$= \|f\|_{-m} \cdot \sup_{\substack{x\in R^n, \\ |\beta|\le m}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \left|D_x^\beta\left[\eta(x)\, x^\alpha\, e^{-i(x,\xi)}\right]\right| \le$$

$$\le \|f\|_{-m} \cdot C_\alpha \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда $C_\alpha \ge 0$ манфий бўлмаган қандайдир сон. Шундай қилиб, $F[f] \in \theta_M$ бўлади. 2–теорема исбот бўлди.

Эслатма. *2– теореманинг исботидан кўринадики, агар* f_α *умумлашган функциялар оиласидаги барча умумлашган функциялар ташувчилари текис чегараланган бўлса, у ҳолда (3.8.49) тенгсизликдаги* C_α *ўзгармасларни* f_α *умумлашган функциялар оиласига боғлиқ бўлмаган ҳолда танлаш мумкин бўлади.*

6. Ўраманинг Фурье алмаштириши. Агар $f(x) \in J'(R^n)$ ва $g(x) \in E'(R^n)$ бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг ўрамаси мавжуд ва $f(x) * g(x) \in J'(R^n)$ бўлади. Ҳамда бу ўраманинг Фурье алмаштириши

$$F[f * g] = F[f]F[g] \tag{3.8.51}$$

формула билан ҳисобланади.

Ҳақиқатдан ҳам, $f(x) * g(x) \in J'(R^n)$ ва ихтиёрий $\varphi(x) \in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функция учун

$$(f * g,\ \varphi) = \left(f(x),\ \left(g(y),\ \eta(y)\varphi(x+y)\right)\right)$$

тасвир ўринли бўлади, бунда $\eta(x) \in D(R^n)$ ихтиёрий функция бўлиб, $\operatorname{supp} g$ ташувчининг атрофида $\eta(y) = 1$ тенг бўлади. Фурье алмаштиришининг таърифидан фойдаланиб

$$\left(F[f * g],\ \varphi\right) = \left(f * g,\ F[\varphi]\right) =$$

$$= \left(f(x), \left(g(y),\ \eta(y) \int_{R^n} \varphi(\xi) e^{-i(x+y,\xi)} d\xi \right) \right)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. У ҳолда $F[g] \in \theta_M$ эканлигини ҳисобга олиб ҳосил қилинган тенгликни

$$\left(F[f*g], \varphi\right) = \left(f(x),\ \int_{R^n} \left(g(y),\ \eta(y) e^{-i(\xi,y)} \right) e^{-i(x,\xi)}\, \varphi(\xi) d\xi \right) =$$

$$= \left(f(x),\ \int_{R^n} F[g](\xi)\, e^{-i(x,\xi)}\, \varphi(\xi)\, d\xi \right) = \left(f, F\left[F[g]\varphi\right]\right) =$$

$$= \left(F[f], F[g]\varphi\right) = \left(F[g]F[f],\ \varphi\right)$$

шаклида ёзамиз. Бундан эса (3.8.51) тенглик келиб чиқади.

Энди (3.8.51) формула ўринли бўладиган бошқа ҳолларни ҳам келтирамиз.

а) $f(x) \in J'(R^n)$ ва $g(x) \in J(R^n)$ бўлсин. У ҳолда $f * g \in \theta_M$ бўлади.

б) $f(x) \in L_2(R^n)$ ва $g(x) \in L_2(R^n)$ бўлсин. У ҳолда $f * g \in C(R^n)$ ва $|x| \to \infty$ интилганда $(f*g)(x) = o(1)$, яъни $f * g \in \bar{C}_0(R^n)$ бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, бу ҳолда $F[f](\xi) \in L_2(R^n)$ ва $F[g](\xi) \in L_2(R^n)$ бўлади ва шунга кўра $F[f](\xi)F[g](\xi) \in L_1(R^n)$ эканлиги келиб чиқади. Бундан ташқари Коши–Буняковский тенгсизлигига кўра ихтиёрий $\varphi(x) \in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функция учун

$$\left[\iint_{R^{2n}} |f(y)g(x-y)||\varphi(x)| dxdy \right]^2 \le$$

$$\le \left[\iint_{R^{2n}} |f(y)|^2 |\varphi(x)| dxdy \right] \cdot \left[\iint_{R^{2n}} |g(x-y)|^2 |\varphi(x)| dxdy \right] \le$$

$$\le \| f \|^2 \cdot \|g\|^2 \cdot \left[\int_{R^n} |\varphi(x)| dx \right]^2 < \infty$$

тенгсизлик ўринли бўлади, яъни $f(y)g(x-y)\varphi(x)\in L_1(R^{2n})$ бўлади. Шунинг учун $(f*g)(x)$ ўрама учун келтирилган

$$(f*g)(x)=\int\limits_{R^n} f(y)g(x-y)dy=\int\limits_{R^n} g(y)f(x-y)dy=(g*f)(x)$$

формуладан фойдаланиб Фубини теоремаси ёрдамида ихтиёрий $\varphi(x)\in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функция учун

$$\left(F\left[f*g\right],\ \varphi\right)=\left(f*g,\ F[\varphi]\right)=\int\limits_{R^n} F[\varphi](x)\int\limits_{R^n} f(y)g(x-y)dydx=$$

$$=\int\limits_{R^n} f(y)\int\limits_{R^n} g(x-y)F[\varphi](x)dxdy=$$

$$=\int\limits_{R^n} f(y)\int\limits_{R^n} F\left[g(x-y)\right](\xi)\varphi(\xi)d\xi dy=$$

$$=\int\limits_{R^n} f(y)\int\limits_{R^n} F[g](\xi)\varphi(\xi)e^{-i(y,\xi)}d\xi dy=\int\limits_{R^n} F[g]F[f]\varphi d\xi$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан эса (3.8.51) тенглик келиб чиқади. Шунинг учун

$$f*g=F^{-1}\left[F[f]\,F[g]\right]\in C(R^n)$$

ва Риман–Лебег теоремасига кўра $|x|\to 0$ интилганда $(f*g)(x)\to 0$ яқинлашувчи бўлади.

Эслатма. *Агар $f*g$ ўраманинг $J'(R^n)$ фазода мавжудлиги (масалан, $f\in J'(\Gamma+)$ ва $g\in J'(\overline{S}_+)$ учун) маълум бўлса, у ҳолда (3.8.51) тенглик $F[f]$ ва $F[g]$ умумлашган функциялар кўпайтмасининг таърифи бўлиб хизмат қилиши мумкин.*

Қуйидаги Пэли–Винер теоремаси дифференциал тенгламаларнинг умумий назариясида муҳим роль ўйнайди.

3–теорема (Пэли–Винер теоремаси). *$U(\zeta)$ бутун аналитик функция ташувчиси $S_A=\left\{x:\ x\in R^n,\ |x|\le A\right\}$ шарда ётувчи $u(x)$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштириши бўлишлиги учун шундай бир $C>0$ мусбат сон ва m натурал сонлар мавжуд бўлиб*

$$\left|U(\zeta)\right|\le C\left(1+|\zeta|\right)^m e^{A|\mathrm{Im}\,\zeta|} \qquad (3.8.52)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. $u(x)$ умумлашган функция $u(x)\in C_0^\infty(S_A)$ синфга қарашли бўлишлиги *учун унинг* $U(\zeta)$ *Фурье алмаштириши бутун аналитик функция бўлишлиги ва ҳар бир* N *натурал сони учун*

$$\left|U(\zeta)\right| \le C_N\left(1+\left|\zeta\right|\right)^{-N} e^{A|\mathrm{Im}\zeta|} \qquad (3.8.53)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исбот. *Зарурийлиги.* Агар $u(x) \in E'(R^n)$ ва $\mathrm{supp}\, u \subset S_A$ бўлса, у ҳолда шундай бир $C > 0$ мусбат сон ва m натурал сонлар мавжуд бўлиб ихтиёрий $\varphi(x) \in C_0^\infty(S_A)$ асосий функция учун

$$\left|(u,\varphi)\right| \le C\sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in R^n}\left|D^\alpha \varphi(x)\right|$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Ихтиёрий $h(t) \in C_0^\infty(R)$ функция $|t| \le \frac{1}{2}$ учун $h(t) = 1$ ва $|t| \ge 1$ учун $h(t) = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\varphi_\zeta(x) = e^{-i(x,\zeta)} h\left(\left|\zeta\right|(\left|x\right| - A)\right)$$

функция $\varphi_\zeta(x) \in C_0^\infty(R^n)$ ва $|x| \le A + \left|2\zeta\right|^{-1}$ учун $e^{-i(x,\zeta)}$ функция билан устма–уст тушади. Шунинг учун

$$\left|F[u](\zeta)\right| = \left|(u,\, \varphi_\zeta)\right| \le C\sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in R^n}\left|D_x^\alpha \varphi_\zeta(x)\right| \qquad (3.8.54)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Ҳамда $x \in \mathrm{supp}\,\varphi_\zeta$ учун $\left|e^{-i(x,\zeta)}\right| \le e^{A|\mathrm{Im}\zeta|+1}$ тенгсизлик ўринли эканлигидан ва (3.8.54) тенгсизликдан (3.8.52) тенгсизлик келиб чиқади. Бундан ташқари биз $F[u](\zeta)$ функциянинг бутун аналитик функция эканлигини кўрамиз.

(3.8.53) тенгсизликнинг зарурий эканлиги

$$D^\alpha\left[\xi^\beta F[f](\xi)\right] = \int_{R^n} (-ix)^\alpha D_x^\beta f(x) e^{-i(\xi,x)} dx$$

тенгликда $\alpha = 0$ ва $f = u$ бўлгандаги тенгликдан келиб чиқади.

(3.8.53) тенгсизликнинг етарли эканлиги

$$u(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

формуладаги интегрални комплекс соҳа бўйича олинган интеграл билан алмаштириш ёрдамида исбот қилинади. Ҳақиқатдан ҳам

$$u(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} U(\xi) e^{ix\xi} d\xi = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} U(\xi + i\eta) e^{i(x,\xi+i\eta)} d\xi$$

деб оламиз. Агар (3.8.53) тенгсизликда $N = n+1$ бўлса, у ҳолда

$$|u(x)| = C_N e^{A|\eta|-(x,\eta)} (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} (1+|\xi|)^{-n-1} d\xi$$

ҳосил бўлади. $\eta = tx$ деб оламиз ва t ўзгарувчини $+\infty$ интилтирсак, у ҳолда $|x| > A$ учун $u(x) = 0$ эканлигини ҳосил қиламиз. Агар (3.8.53) тенгсизлик бажарилса, у ҳолда

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

формуладан $u(x) \in C^\infty(R^n)$ эканлиги осонгина келиб чиқади.

(3.8.52) тенгсизликнинг етарли эканлигини исботлаш учун аввал $U(\xi) \in J'(R^n)$ эканлигини кўрамиз ва шунга кўра қандайдир $u(x) \in J'(R^n)$ умумлашган функция учун $U(\xi) = F[u](\xi)$ бўлади. $u_h(x) = u(x) * \omega_h(x)$ функция чексиз дифференциалланувчи ва $F[u_h](\xi) = F[u](\xi) F[\omega_h](\xi)$ тенглик ўринли бўлади. Шу билан бирга $F[u_h](\xi)$ функция учун (3.8.52) тенгсизлик A ўрнига $A+h$ бўлганда бажарилади. Бундан ихтиёрий $h > 0$ учун $\mathrm{supp}\, u_h \subset S_{A+h}$ муносабат келиб чиқади. Энди h сонини 0 га интилтирсак, у ҳолда $\mathrm{supp}\, u \subset S_A$ муносабат ҳосил бўлади. 3–теорема исбот бўлди.

7. Мисоллар.

а) $n = 1, \alpha > 0$ учун

$$F[e^{-\alpha^2 x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}} \qquad (3.8.55)$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $e^{-\alpha^2 x^2}$ функция R^1 фазода жамланувчи ва шунинг учун

$$F[e^{-\alpha^2 x^2}] = \int\limits_{R^1} e^{-\alpha^2 x^2 - i\xi x} dx = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{R^1} e^{-\sigma^2 - i\frac{\xi}{\alpha}\sigma} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}} \int\limits_{R^1} e^{-\left(\sigma + \frac{i\xi}{2\alpha}\right)^2} d\sigma = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}} \int\limits_{\mathrm{Im}\,\zeta = \frac{\xi}{2\alpha}} e^{-\zeta^2} d\zeta$$

бўлади. Охирги интегралда интеграллаш чизиғини ҳақиқий ўққа силжитиш мумкин ва шунинг учун

$$F[e^{-\alpha^2x^2}]=\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha^2}}$$

тенглик ўринли бўлади.

б) (3.8.55) формуланинг кўп ўлчамли ўхшаш ҳоли

$$F\left[e^{-(Ax,x)}\right]=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}e^{-\frac{1}{4}\left(A^{-1}\xi,\xi\right)} \qquad (3.8.56)$$

формула бўлади, бунда A мусбат аниқланган ҳақиқий матрицадир.

Бу (3.8.55) формулани ҳосил қилиш учун $x=By$ ҳақиқий чизиқли махсусмас алмаштириш ёрдамида (Ax,x) квадратик формани

$$(Ax,x)=(ABy,By)=(B^TABy,y)=|y|^2$$

квадратлар йиғиндиси шаклига келтирамиз, бундан ташқари

$$A^{-1}=BB^T,\quad \det A\,|\det B|^2=1$$

бўлади. Бундан эса (3.8.51) формуладан фойдаланиб

$$F\left[e^{-(Ax,x)}\right]=\int_{R^n}e^{-(Ax,x)-i(\xi,x)}dx=$$

$$=|\det B|\int_{R^n}e^{-(ABy,By)-i(\xi,By)}dy=\frac{1}{\sqrt{\det A}}\int_{R^n}e^{-|y|^2-i(B^T\xi,y)}dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\det A}}\prod_{1\le j\le n}\int_{R^1}e^{-y_j^2-i\,(B^T\xi)_j\,y_j}dy_j=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}e^{-\frac{1}{4}|B^T\xi|^2}=$$

$$=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}e^{-\frac{1}{4}(\xi,BB^T\xi)}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}e^{-\frac{1}{4}(\xi,\,A^{-1}\xi)}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

в) $f(x)$ функция R^n фазода секин ўсувчи функция бўлсин. У ҳолда $J'(R^n)$ фазода

$$F[f](\xi)=\lim_{R\to\infty}\int_{|x|<R}f(x)e^{-i(\xi,x)}dx \qquad (3.8.57)$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $R\to\infty$ интилганда $J'(R^n)$ фазода

$$\theta(R-|x|)f(x)\to f(x)$$

яқинлашувчи бўлади. Бундан $J'(R^n)$ фазода F Фурье алмаштиришининг узлуксиз амал эканлигидан (3.8.57) тенглик келиб чиқади.

Хусусан, $f(x) \in L_2(R^n)$ учун қуйидаги Планшерель теоремаси ўринлидир: $L_2(R^n)$ *фазода* $F[f]$ *Фурье алмаштириши*

$$F[f](\xi) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|<R} f(x)e^{-i(\xi,x)}dx$$

тенглик билан ифодаланади. Бу акслантириш $L_2(R^n)$ *фазони* $L_2(R^n)$ *фазога ўзаро бир қийматли ва ўзаро узлуксиз акслантиради, бундан ташқари ихтиёрий* $f(x) \in L_2(R^n)$ *ва ихтиёрий* $\varphi(x) \in L_2(R^n)$ *учун*

$$(2\pi)^n \langle f,\ \varphi \rangle = \langle F[f],\ \ F[\varphi] \rangle$$

Парсеваль тенглиги ўринли бўлади. Шунингдек ихтиёрий $f(x) \in L_2(R^n)$ *учун*

$$(2\pi)^n \|f\|^2 = \|F[f]\|^2$$

тенглик ўринлидир. Бу ерда $\langle .,. \rangle$ символ орқали скаляр кўпайтма аниқланган.

г) $f(x)$ ихтиёрий секин ўсувчи умумлашган функция бўлсин. У ҳолда шундай бир $g(x)$ узлуксиз ва R^n фазода секин ўсувчи функция, ҳамда шундай бир $m \geq 0$ бутун сон мавжуд бўлиб

$$f(x) = D_1^m ... D_n^m g(x)$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан эса $F[D^\alpha f] = (i\xi)^\alpha F[f]$ формулани қўллаб

$$F[f] = i^{mn}\, \xi_1^m ... \xi_n^m\ F[g] \tag{3.8.58}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан ташқари, $F[g]$ Фурье алмаштиришини (3.8.57) формула орқали ҳисоблаш мумкин бўлади.

д) $n = 1$ учун

$$F[e^{ix^2}] = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{i}{4}(\xi^2-\pi)} \tag{3.8.59}$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2}dy = \sqrt{\pi}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

Френель хосмас интегралининг яқинлашувчи эканлигидан $R \to \infty$ интилганда

$$\int_{-R}^{R} e^{ix^2 - i\xi x}dx = e^{-\frac{i}{4}\xi^2} \int_{-R-\frac{\xi}{2}}^{R-\frac{\xi}{2}} e^{iy^2}dy$$

Фурье алмаштириши кетма–кетлигининг ξ бўйича ҳар бир чекли интервалда

$$e^{-\frac{i}{4}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2}dy = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}(\xi^2 - \pi)}$$

функцияга текис яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Бундан эса в) ҳолдаги тенгликни ҳисобга олиб (3.8.59) тенглик барча $D(R^n)$ фазодаги асосий функциялар учун ўринли эканлигини ҳосил қиламиз. Бироқ, $D(R^n)$ фазо $J(R^n)$ фазода зич ва шунинг учун (3.8.59) тенглик $J'(R^n)$ фазода ҳам ўринли бўлади.

е) (3.8.59) формуланинг кўп ўлчамли ўхшаш ҳоли

$$F[e^{i(Ax,x)}] = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}} e^{i\frac{\pi n}{4} - \frac{i}{4}(A^{-1}\xi,\, \xi)} \tag{3.8.60}$$

формула бўлади, бунда A мусбат аниқланган ҳақиқий матрицадир.

ж) $n = 3$ учун

$$F\left[\frac{1}{|x|^2}\right] = \frac{2\pi^2}{|\xi|} \tag{3.8.61}$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам

$$\int_{|x|<R} \frac{e^{-i(\xi,x)}}{|x|^2}dx = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i|\xi|\rho\cos\theta}}{\rho^2}\rho^2 d\psi \sin\theta d\theta d\rho =$$

$$= 2\pi\int_0^R\int_{-1}^1 e^{-i|\xi|\rho\mu}d\mu d\rho = \frac{4\pi}{|\xi|}\int_0^R \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}d\rho$$

тенгликка эга бўламиз. Шунингдек

$$\left|\int_R^\infty \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}d\rho\right| = \left|\frac{\cos(|\xi|R)}{|\xi|R} - \frac{1}{|\xi|}\int_R^\infty \frac{\cos(|\xi|\rho)}{\rho^2}d\rho\right| \le \frac{2}{|\xi|R}$$

ва $|\xi| \ne 0$ учун

$$\int_0^\infty \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}d\rho = \frac{\pi}{2}$$

тенгликка кўра $R \to \infty$ интилганда $J'(R^n)$ фазода

$$\frac{4\pi}{|\xi|}\int_0^R \frac{\sin(|\xi|\rho)}{\rho}d\rho \to \frac{2\pi^2}{|\xi|}$$

яқинлашувчи бўлади. Бундан эса в) ҳолдаги тенгликни ҳисобга олиб (3.8.61) тенглик барча $D(R^n)$ фазодаги асосий функциялар учун ўринли эканлигини ҳосил қиламиз. Бироқ, $D(R^n)$ фазо $J(R^n)$ фазода зич ва шунинг учун (3.8.61) тенглик $J'(R^n)$ фазода ҳам ўринли бўлади.

з) $n = 2$ бўлсин. $J'(R^n)$ фазода $Pf\frac{1}{|x|^2}$ умумлашган функцияни

$$\left(Pf\frac{1}{|x|^2},\varphi\right) = \int_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|^2}dx + \int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|^2}dx$$

қоида бўйича таъсир қилувчи умумлашган функция деб киритамиз. Кўриниб турибдики, $x \ne 0$ учун $Pf\frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^2}$ бўлади.

$$F\left[Pf\frac{1}{|x|^2}\right] = -2\pi\ln|\xi| - 2\pi c_0 \qquad (3.8.62)$$

формулани исбот қиламиз, бунда $c_0 = \int_0^1 \frac{1-J_0(u)}{u}du - \int_1^\infty \frac{J_0(u)}{u}du$ бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, барча $\varphi(x) \in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функциялар учун

$$\left(F\left[Pf\frac{1}{|x|^2}\right],\ \varphi\right) = \left(Pf\frac{1}{|x|^2},\ F[\varphi]\right) =$$

$$= \int\limits_{|x|<1} \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{|x|^2} dx + \int\limits_{|x|<1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|^2} dx =$$

$$= \int\limits_{|x|<1} \frac{1}{|x|^2} \int\limits_{R^n} \varphi(\xi)[e^{-i(x,\xi)} - 1] d\xi dx + \int\limits_{|x|>1} \frac{1}{|x|^2} \int\limits_{R^n} \varphi(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{1}{r} \int\limits_{R^n} \varphi(\xi) \int\limits_0^{2\pi} (e^{-ir|\xi|\cos\theta} - 1) d\theta d\xi dr + \int\limits_1^\infty \frac{1}{r} \int\limits_{R^n} \varphi(\xi) \int\limits_0^{2\pi} e^{-ir|\xi|\cos\theta} d\theta d\xi dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 \frac{1}{r} \int\limits_{R^n} \varphi(\xi) \left[J_0(r|\xi|) - 1 \right] d\xi\, dr + 2\pi \int\limits_1^\infty \frac{1}{r} \int\limits_{R^n} \varphi(\xi) J_0(r|\xi|) d\xi\, dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_{R^n} \varphi(\xi) \left[\int\limits_0^1 \frac{J_0(r|\xi|) - 1}{r} dr + \int\limits_1^\infty \frac{J_0(r|\xi|)}{r} dr \right] d\xi =$$

$$= 2\pi \int\limits_{R^n} \varphi(\xi) \left[\int\limits_0^{|\xi|} \frac{J_0(u) - 1}{u} du + \int\limits_{|\xi|}^\infty \frac{J_0(u)}{u} du \right] =$$

$$= -2\pi \int\limits_{R^n} \varphi(\xi)(\ln|\xi| + c_0) d\xi$$

тенгликлар тузилмасини ҳосил қиламиз ва бундан (3.8.62) формула келиб чиқади.

и) $\Gamma -$орқали R^n фазодаги учи 0 нуқтада бўлган ёпиқ қаварик ўткир конусни белгилаймиз ва $f(x) \in J'(\Gamma+)$ бўлсин. У ҳолда $J'(R^n)$ фазодаги яқинлашиш маъносида

$$F[f](\xi) = \lim_{\substack{\xi' \to 0 \\ \xi' \Subset \operatorname{int}\Gamma^*}} \left(f(x),\ \eta(x) e^{-i(x,\xi)-(x,\xi)} \right) \qquad (3.8.63)$$

формула ўринли бўлади, бунда $\eta(x) \in C^\infty(R^n)$ ихтиёрий функция бўлиб $\left| D^\alpha \eta(x) \right| \le C_\alpha$, $x \in (\operatorname{supp} f)^\varepsilon$ учун $\eta(x) = 1$ ва $x \notin (\operatorname{supp} f)^{2\varepsilon}$ учун $\eta(x) = 0$ бўлган хоссаларга эга функциядир, бунда $\varepsilon > 0$ ихтиёрий мусбат сон бўлади.

(3.8.63) формулани исбот қилиш учун аввал

$$\text{барча } \xi' \in \operatorname{int}\Gamma^* \text{ учун } \eta(x) e^{-(x,\xi')} \in J(R^n) \qquad (3.8.64)$$

барча $\xi' \Subset \operatorname{int}\Gamma^*$ учун $\xi' \to 0$ интилганда $J'(R^n)$ фазодаги яқинлашиш маъносида

$$\eta(x) f(x) e^{-(x,\xi')} \to f(x) \qquad (3.8.65)$$

яқинлашувчи бўлишлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $x \notin (\operatorname{supp} f)^{2\varepsilon}$ бўлса, у ҳолда $\eta(x)=0$ бўлади; агар $x \in (\operatorname{supp} f)^{2\varepsilon}$ бўлса, у ҳолда $x = x' + x''$ бўлади, бунда $x' \in \Gamma$ ва қандайдир $R>0$ мусбат сон учун $|x''| \le R$ тенгсизлик ўринли бўлади. Энди $\xi' \in C' \Subset \operatorname{int}\Gamma^*$ бўлсин. У ҳолда шундай бир $\sigma = \sigma(C') > 0$ мусбат сон мавжуд бўлиб $(x', \xi') \ge \sigma |x'||\xi'|$ тенгсизлик ўринли ва шунинг учун

$$-(x,\xi') = -(x',\xi') - (x'',\xi') \le -\sigma|x'||\xi'| + R|\xi'| \le$$
$$\le (-\sigma|x| + \sigma R + R)|\xi'|$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Ҳосил қилинган баҳолашдан, ҳамда $\eta(x)$ функциянинг хоссаларидан (3.8.64) ва (3.8.65) муносабатлар келиб чиқади.

Энди ихтиёрий $\varphi(x) \in J(R^n)$ тез камаювчи асосий функциялар учун

$$(F[f],\ \varphi) = (f,\ F[\varphi]) =$$
$$= \lim_{\substack{\xi' \to 0 \\ \xi' \Subset \operatorname{int}\Gamma^*}} \left(\ \eta(x) f(x) e^{-(x,\xi')},\ \int_{R^n} \varphi(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi\ \right) =$$
$$= \lim_{\substack{\xi' \to 0 \\ \xi' \Subset \operatorname{int}\Gamma^*}} \int_{R^n} (\ f(x),\ \eta(x) e^{-i(x,\xi)-(x,\xi')}\ )\ \varphi(\xi)\, d\xi$$

тengликлар тузилмасига эга бўламиз ва бундан эса (3.8.63) формула келиб чиқади. Бу ерда биз ихтиёрий $f(x) \in J'(R^n)$ учун $f(x)\cdot 1(y) = 1(y)\cdot f(x)$ тенглик, яъни ихтиёрий $\varphi(x,y) \in J(R^{n+m})$ тез камаювчи асосий функциялар учун ўринли бўлган

$$(f(x), \int_{R^m} \varphi(x,y)dy) = \int_{R^m} (f, \varphi(x,y))dy$$

формуладан фойдаландик, чунки барча $\xi' \in \operatorname{int}\Gamma^*$ учун

$$\eta(x)\varphi(\xi)e^{-i(x,\xi)-(x,\xi')} \in J(R^{2n})$$

бўлади.

к) $$F[\theta(x)] = \frac{-i}{\xi - i0} = \pi\delta(\xi) - iP\frac{1}{\xi}, \qquad (3.8.66)$$

$$F[\theta(-x)] = \frac{i}{\xi + i0} = \pi\delta(\xi) + iP\frac{1}{\xi} \qquad (3.8.66')$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бу формулалар (3.8.63) формуладан ва Сохоцкий формулаларидан келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$F[\theta(x)] = \lim_{\xi'\to+0} \int_0^{\infty} e^{-ix\xi - x\xi'} dx = \lim_{\xi'\to+0} \frac{1}{i\xi + \xi'} = \frac{-i}{\xi - i0} = \pi\delta(\xi) - iP\frac{1}{\xi},$$

$$F[\theta(-x)] = \lim_{\xi''\to-0} \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi - x\xi''} dx = \lim_{\xi'\to+0} \int_0^{+\infty} e^{ix\xi - x\xi'} dx =$$

$$= \lim_{\xi'\to+0} \frac{i}{\xi + i\xi'} = \frac{i}{\xi + i0} = \pi\delta(\xi) + iP\frac{1}{\xi}$$

тенгликлар ўринли бўлади.

л) $$F[signx] = F[\theta(x)] - F[\theta(-x)] = -2iP\frac{1}{\xi} \qquad (3.8.67)$$

тенглик ўринли бўлади.

м) $$F\left[P\frac{1}{x}\right] = -2\pi F^{-1}\left[P\frac{1}{x}\right] = -\pi i\, sign\,\xi \qquad (3.8.68)$$

тенглик ўринли бўлади.

н) V^+ орқали R^{n+1} фазодаги келажак ёруғлик конусини белгилаймиз ва $\theta_{V^+}(x)$ эса унинг характеристик функцияси бўлсин. У ҳолда и) ҳолдаги (3.8.63) формулага кўра

$$F[\theta_{V^+}] = \lim_{\xi'_0\to+0} \int_{V^+} e^{-i(x,\,\xi) - x_0\xi'_0} dx =$$

$$= 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left[-(\xi_0 - i0)^2 + |\xi|^2\right]^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (3.8.69)$$

эканлигини ҳосил қилиш мумкин бўлади.

о) Эрмит полиномлари. Таърифга кўра, биз Эрмит полиномларини $n = 0,1,...$ учун

$$H_n(x) = (-1)^n (n!)^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} 2^{-\frac{n}{2}} e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

тенглик ёрдамида аниқлаймиз. Бу полиномлар учун

$$H_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}, \quad H_1(x) = \sqrt{2}\,\pi^{-\frac{1}{4}} x$$

тенгликлар ўринли бўлади. Ҳамда

$$\sqrt{n+1}\,H_{n+1}(x) = \sqrt{2}xH_n(x) - \sqrt{n}H_{n-1}(x), \quad n = 1,\, 2,... \qquad (3.8.70)$$

ва

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = \sqrt{2n}H_{n-1}(x), \quad n = 1,2,... \qquad (3.8.71)$$

рекуррент муносабатлар ўринли бўлади. Бу полиномлар $\rho(x)=e^{-x^2}$ зичлик билан $(-\infty,+\infty)$ оралиқда ортонормалдир, яъни $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)\,dx=\delta_{nm}$ тенглик ўринли бўлади. Бу функциялар учун

$$F\left[e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)\right]=\sqrt{2\pi}\;i^n\,H_n(-\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{3.8.72}$$

тенглик ўринли бўлади. Бу (3.8.72) тенгликни исбот қиламиз. Бу эса

$$H_n\left(\frac{d}{i\,d\xi}\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}}=i^n\,H_n(\xi)\,e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{3.8.73}$$

тенгликдан келиб чиқади. Шунга кўра

$$F\left[e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)\right]=H_n\left(\frac{d}{-i\,d\xi}\right)F\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]=$$

$$=\sqrt{2\pi}H_n\left(\frac{d}{-id\xi}\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}}=\sqrt{2\pi}\;i^n\,H_n(-\xi)\,e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

ҳосил бўлади.

(3.8.73) тенглик $n=0$ учун ўринлидир. Унинг $n>0$ учун ўринли эканлигини кўрсатиш учун биз (3.8.70) ва (3.8.71) рекуррент муносабатлардан фойдаланиб

$$H_n\left(\frac{d}{i\,d\xi}\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{n}}\,\frac{d}{i\,d\xi}H_{n-1}\left(\frac{d}{i\,d\xi}\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}}-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\;H_{n-2}\left(\frac{d}{i\,d\xi}\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{n}}\,\frac{d}{i\,d\xi}\left[i^{n-1}\,H_{n-1}(\xi)\,e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right]-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\;i^{n-2}H_{n-2}(\xi)\,e^{-\frac{\xi^2}{2}}=$$

$$=\frac{i^{n-2}}{\sqrt{n}}\;e^{-\frac{\xi^2}{2}}\left[-\sqrt{2}\,\xi\,H_{n-1}(\xi)+\sqrt{2}\;H'_{n-1}(\xi)-\sqrt{n-1}\;H_{n-2}(\xi)\right]=$$

$$=\frac{-i^n}{\sqrt{n}}\,e^{-\frac{\xi^2}{2}}\;\left[-\sqrt{2}\,\xi H_{n-1}(\xi)+2\sqrt{n-1}H_{n-2}(\xi)-\sqrt{n-1}\;H_{n-2}(\xi)\right]=$$

$$=i^n H_n(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

тенгликлар тизилмасини ҳосил қиламиз.

п) Бессель функциясининг

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_{-1}^{1}e^{ix\xi}(1-\xi^2)^{\nu-\frac{1}{2}}d\xi,\quad \mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\quad (3.8.74)$$

интеграл тасвирини кўрсатамиз. Бессель функцияси

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\;\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

қаторнинг йиғиндиси бўлиб

$$(xu')'+\left(x-\frac{\nu^2}{x}\right)u=0$$

Бессель тенгламасининг ноль нуқта атрофида чегараланган ва ўзгармас сон аниқлигида ягона бўлган ечимидир. Шунингдек

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{\nu-\frac{1}{2}}d\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{1}(1-\mu)^{-\frac{1}{2}}\mu^{\nu-\frac{1}{2}}d\mu=$$

$$=\frac{B\left(\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+1)}=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$$

тенгликка кўра $x\to+0$ интилганда (3.8.74) тенгликнинг ҳар иккала томони бир хил асимптотик ҳолатга эга бўлади. Шунинг учун (3.8.74) тенгликни исботлаш учун (3.8.74) тенгликнинг ўнг томони Бессель тенгламасини қаноатлантиришини исботлаш етарли бўлади. Бу эса бевосита текшириш ёрдамида

$$\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{\nu-\frac{1}{2}}[\nu^2x^{\nu-1}+(2\nu+1)x^\nu i\xi-x^{\nu+1}\xi^2+x^{\nu+1}-\nu^2x^{\nu-1}]e^{ix\xi}d\xi=$$

$$=x^{\nu+1}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}e^{ix\xi}d\xi+(2\nu+1)i\,x^\nu\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{ix\xi}\xi d\xi=0$$

ҳосил қилинади.

р) $f\left(|x|\right)\in L_2(R^n)$ бўлсин, яъни $'\|f\|^2=\int\limits_0^\infty |f(r)|^2\, r^{n-1}dr<\infty$ бўлсин. У ҳолда

$$g(\rho)=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\rho^{\frac{n-2}{2}}}\int\limits_0^\infty f(r)r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho)dr \qquad (3.8.75)$$

функция $f(r)$ функциянинг $\dfrac{n-2}{2}$ тартибли *Ганкель алмаштириши* деб айтилади. Бу ердаги интеграл $'\|\ \|$ норма бўйича яқинлашувчи бўлади.

Бу алмаштириш учун

$$f(r)=\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{r^{\frac{n-2}{2}}}\int\limits_0^\infty g(\rho)\rho^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho)d\rho \qquad (3.8.75')$$

тескариланиш формуласи ҳам ўринли бўлади, бундан ташқари

$$(2\pi)^n\cdot{}'\|f\|^2={}'\|g\|^2$$

Парсеваль тенглиги ҳам ўринлидир.

Хусусан, $n=1$ учун

$$g(\rho)=2\int\limits_0^\infty f(r)\cos r\rho\, dr$$

алмаштириш ҳосил бўлади; $n=2$ учун

$$g(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty f(r)r\,J_0(r\rho)dr$$

алмаштириш ҳосил бўлади; $n=3$ учун

$$g(\rho)=\frac{4\pi}{\rho}\int\limits_0^\infty f(r)r\sin r\rho\, dr$$

алмаштиришлар ҳосил бўлади.

(3.8.75) ва (3.8.75$'$) ўзаро тескариланиш формулаларини ва Парсеваль айниятини исбот қилиш учун Планшерель теоремасига кўра (3.8.75) ва (3.8.75$'$) формулаларнинг ўнг томонлари мос равишда $f\left(|x|\right)$ ва $g\left(|x|\right)$ функцияларнинг тўғри ва тескари

Фурье алмаштиришлари бўлишлигини кўрсатиш етарлидир. Ҳақиқатдан ҳам, (3.8.74) формуладан фойдаланиб

$$F\left[f\left(|x|\right)\right]=\int_{R^n} f\left(|x|\right)e^{-i(\xi,x)}dx=\int_0^\infty f(r)r^{n-1}\int_{|s|=1} e^{-ir(\xi,\,s)}ds\,dr=$$

$$=\sigma_{n-1}\int_0^\infty f(r)r^{n-1}\int_0^\pi e^{-ir\rho\cos\theta}\sin^{n-2}\theta\,d\theta\,dr=$$

$$=\sigma_{n-1}\int_0^\infty f(r)r^{n-1}\int_{-1}^1 e^{ir\rho\mu}(1-\mu^2)^{\frac{n-3}{2}}d\mu\,dr=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\rho^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^\infty f(r)r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho)dr$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ерда σ_{n-1} орқали R^{n-1} фазодаги бирлик сферанинг юзаси олинган[1].

Мустақил ечиш учун мисоллар.

26.1. $J'(R^n)$ фазода $F\left[\delta(x-x_0)\right]=e^{-i(\xi,x_0)}$ тенгликни исботланг.

26.2. $J'(R^n)$ фазода $F\left[\delta(x)\right]=1$ тенгликни исботланг.

26.3. $J'(R^n)$ фазода $F\left[1\right]=(2\pi)^n\delta(\xi)$ тенгликни исботланг.

26.4. $J'(R^1)$ фазода $F\left[\dfrac{\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)}{2}\right]=\cos x_0\xi$ тенгликни исботланг.

26.5. $J'(R^1)$ фазода $F\left[\dfrac{\delta(x-x_0)-\delta(x+x_0)}{2}\right]=-\sin x_0\xi$ тенгликни исботланг.

26.6. $J'(R^n)$ фазода $F\left[D^\alpha\delta(x)\right]=(i\xi)^\alpha$ тенгликни исботланг.

26.7. $J'(R^n)$ фазода $F\left[x^\alpha\right]=(2\pi)^n i^{|\alpha|}D^\alpha\delta(\xi)$ тенгликни исботланг.

26.8. $n=1$ учун $\theta\left(R-|x|\right)$ функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

---

[1] Умумлашган функцияларнинг Фурье алмаштиришлари жадвали билан Ю.А. Брычков, А.П. Прудников “Интегральные преобразования обобщенных функций”, М.: “Наука”, 1977г. китобидан танишиш мумкин.

26.9. $n=1$ учун $e^{-a^2x^2}$ функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.10. $n=1$ учун e^{ix^2} функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.11. $n=1$ учун e^{-ix^2} функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.12. $n=1$ учун $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ k, & k\le x<k+1,\ k=0,1,2,... \end{cases}$ функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.13. $n=1$ учун $F\left[\theta(x)e^{-ax}\right]=\frac{1}{a+i\xi}$, $a>0$ тенгликни исботланг.

26.14. $n=1$ учун $F\left[\theta(-x)e^{ax}\right]=\frac{1}{a-i\xi}$, $a>0$ тенгликни исботланг.

26.15. $n=1$ учун $F\left[e^{-a|x|}\right]=\frac{2a}{a^2+\xi^2}$, $a>0$ тенгликни исботланг.

26.16. $n=1$ учун $F\left[\frac{2a}{a^2+x^2}\right]=2\pi e^{-a|\xi|}$, $a>0$ тенгликни исботланг.

26.17. $n=1$ учун $F\left[\theta(x)e^{-ax}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]=\frac{1}{(a-i\xi)^{\alpha}}$, $a>0,\ \alpha>0$ тенгликни исботланг.

26.18. $n=1$ учун $\delta^{(k)}(x)$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.19. $n=1$ учун $\theta(x-a)$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.20. $n=1$ учун $sign\,x$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.21. $n=1$ учун $P\frac{1}{x}$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.22. $n=1$ учун $\dfrac{1}{x\pm i0}$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.23. $n=1$ учун $|x|$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.24. $n=1$ учун $\theta(x)x^k,\ k=1,2,...$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.25. $n=1$ учун $|x|^k,\ k=2,3,...$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.26. $n=1$ учун $x^k P\dfrac{1}{x},\ k=1,2,...$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.27. $n=1$ учун $x^k\delta(x),\ k=1,2,...$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.28. $n=1$ учун $x^k\delta^{(m)}(x),\ m\ge k,\ k=1,2,...$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.29. $n=1$ учун $P\dfrac{1}{x^2}$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.30. $n=1$ учун $P\dfrac{1}{x^3}$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.31. $|a_k|\le C\left(1+|k|\right)^m$ учун $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(x-k)$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.32. $\theta^{(\frac{1}{2})}(x)$ Хевисайд функциясининг каср тартибли ҳосиласининг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.33. $n=1$ учун $F\left[P\dfrac{1}{|x|}\right]=-2c-2\ln|\xi|$ тенгликни исботланг, бунда $c=\int\limits_0^1\dfrac{1-\cos u}{u}du-\int\limits_1^\infty\dfrac{\cos u}{u}du$ Эйлер ўзгармасидир.

26.34. $n=2$ учун $F\left[P\frac{1}{|x|^2}\right]=-2\pi\ln|\xi|-2\pi c_0$ тенгликни исботланг, бунда $P\frac{1}{|x|^2}$, $x\in R^2$ умумлашган функция

$$\left(P\frac{1}{|x|^2},\varphi\right)=\int\limits_{|x|<1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|^2}dx+\int\limits_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|^2}dx$$

формула билан аниқланади, $c_0=\int\limits_0^1\frac{1-J_0(u)}{u}du-\int\limits_1^\infty\frac{J_0(u)}{u}du$ ва $J_0(u)-$ Бессель функциясидир.

26.35. $J'(R^n)$ фазода $\int\limits_0^\infty u(\xi)\cos\xi x\,dx=\theta(1-x)$ интеграл тенгламани ечинг.

26.36. $\int\limits_0^\infty\frac{\sin ax\sin bx}{x^2}dx$ интегрални ҳисобланг.

26.37. $n=2$ учун $F\left[\frac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}\right]=2\pi\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}$, $\xi\in R^2$ тенгликни исботланг.

26.38. $n=3$ учун $F\left[\frac{1}{|x|^2}\right]=\frac{2\pi^2}{|\xi|}$, $\xi\in R^3$ тенгликни исботланг.

26.39. $F\left[|x|^{-k}\right]=2^{n-k}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}|\xi|^{k-n}$, $\xi\in R^n,0<k<n$ тенгликни исботланг.

26.40. $F\left[\frac{1}{z}\right]=-\frac{2\pi i}{\zeta}$, $\zeta=\xi+i\eta$ тенгликни исботланг.

26.41. $n=3$ учун $\frac{1}{4\pi R}\delta_{S_R}$ умумлашган функциянинг Фурье алмаштиришини ҳисобланг.

26.42. $J'(R^1)$ фазода Фурье алмаштириши усули билан $y=c_0\delta(x)+c_1\delta'(x)+...+c_{n-1}\delta^{(n-1)}(x)$ умумлашган функция $x^n y=0,\, n=1,\, 2\,,...$ тенгламанинг умумий ечими эканлигини исботланг.

26.43. $J'(R^1)$ фазода Фурье алмаштириши усули билан $y=\sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k+\sum_{k=0}^{m-1} b_k\theta(x)x^{m-k-1}+\sum_{k=m}^{n-1} c_k\delta^{(k-m)}(x)$ умумлашган функция $x^n y^{(m)}=0,\, n>m$ тенгламанинг умумий ечими эканлигини исботланг.

27.1. $J'(R^{n+1})(x,t)$, бунда $(x,t)=(x_1,x_2,...,x_n,t)$ бўлган фазода $F_x\left[\delta(x,t)\right]=1(\xi)\cdot\delta(t)$ тенгликни исботланг.

27.2. $J'(R^{n+1})(x,t)$, бунда $(x,t)=(x_1,x_2,...,x_n,t)$ бўлган фазода

$$F_x\left[\frac{\partial^m f(x,t)}{\partial t^m}\right]=\frac{\partial^m}{\partial t^m}F_x\left[f(x,t)\right]$$

тенгликни исботланг.

27.3. $J'(R^{n+1})(x,t)$, бунда $(x,t)=(x_1,x_2,...,x_n,t)$ бўлган фазода

$$F_x\left[\theta\left(at-|x|\right)\right]=2\theta(t)\frac{\sin a\xi t}{\xi},\;\; a>0,\;\; n=1$$

тенгликни исботланг.

27.4. $J'(R^{n+1})(x,t)$, бунда $(x,t)=(x_1,x_2,...,x_n,t)$ бўлган фазода ихтиёрий $f\in J'(R^n)$ учун $F_x\left[f(x)\cdot\delta(t)\right]=F\left[f\right](\xi)\cdot\delta(t)$ тенгликни исботланг.

27.5. $J'(R^{n+m})(x,y)$ фазода $D_\xi^\alpha D_y^\beta F_x[f(x,y)]=F_x\left[(-ix)^\alpha D_y^\beta f\right]$ тенгликни исботланг.

27.6. $J'(R^{n+m})(x,y)$ фазода $F_x\left[D_x^\alpha D_y^\beta f\right]=(i\xi)^\alpha F_x\left[D_y^\beta f\right]$ тенгликни исботланг.

27.7. $J'(R^2)$ фазода $F_\xi^{-1}\left[\theta(t)e^{-a^2\xi^2 t}\right]=\frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\; e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$

тенгликни исботланг.

27.8. $J'(R^{n+1})$ фазода $F_{\xi}^{-1}\left[\theta(t)e^{-a^2|\xi|^2 t}\right]=\theta(t)\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$ тенгликни исботланг.

27.9. $J'(R^2)$ фазода $F_{\xi}^{-1}\left[\theta(t)\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right]=\frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}$ тенгликни исботланг.

27.10. $J'(R^4)$ фазода $F_{\xi}^{-1}\left[\theta(t)\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right]=\frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x)$ тенгликни исботланг, бунда $S_{at}=\{x:\ |x|=at\}$ сферадир.

27.11. $f(x)\in D'(R^n)$ ва $\eta(x)\in D(R^n)$ ихтиёрий функция бўлиб supp f ташувчи атрофида 1 га тенг бўлсин. У ҳолда

$$\tilde{f}(z)=(f(\xi),\ \eta(\xi)e^{-i(z,\xi)}),\ z=x+iy$$

функциянинг а) $\eta(x)\in D(R^n)$ ихтиёрий функцияга боғлиқ эмаслигини, б) бутун функция ва в) $\tilde{f}(x)=F[f](x)$ тенглик ўринли эканлигини исботланг.

27.12. Агар $f(x)\in E'(R^n)$, $g(x)\in E'(R^n)$ финит умумлашган функциялар ва $f(x)*g(x)=0$ бўлса, у ҳолда ёки $f(x)=0$, ёки $g(x)=0$ бўлади.

27.13. $F\left[\delta(x)\cdot 1(y)\right]=(2\pi)^n\ 1(\xi)\cdot\delta(\eta)$ тенгликни исботланг.

27.14. R^n фазодаги $(a,x)=0$ гипертекисликдаги $\delta-$ функцияни $\delta((a,x))$ орқали белгилаймиз, яъни ихтиёрий $\varphi(x)\in D(R^n)$ асосий функция учун

$$\left(\delta((a,x)),\ \varphi(x)\right)=\int\limits_{(a,x)=0}\varphi ds$$

бўлсин. У ҳолда $F\left[\delta(a,a_1x_1+a_2x_2)\right]=2\pi\delta(a,a_2\xi_1-a_1\xi_2)$ тенгликни исботланг.

9-§. Даврий умумлашган функцияларнинг Фурье қаторлари.

1. Даврий умумлашган функциянинг таърифи ва унинг содда хоссалари. Агар $D'(R^n)$ фазодан олинган $f(x)$ умумлашган функция ҳар бир x_j аргумент бўйича T_j давр билан даврий, яъни ҳар бир $j=1,\dots,n$ учун

$$f(x_1,\dots,x_j+T_j,\dots,x_n)=f(x)$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда *n та давр билан* $T=(T_1,T_2,\dots,T_n)$ даврий умумлашган функция деб айтилади, бунда $T_j>0$ бўлган сондир.

Биз n та давр билан $T=(T_1,T_2,\dots,T_n)$ даврий бўлган барча умумлашган функцияларнинг тўпламини D'_T орқали белгилаймиз.

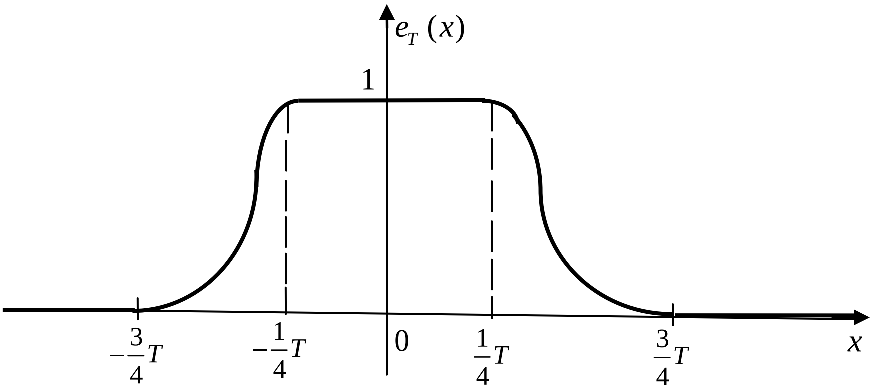
Ҳар бир n та $T=(T_1,T_2,\dots,T_n)$ давр учун R^n фазода

$$\sum_{|k|\geq 0} e_T(x+kT)=1,\quad e_T\geq 0,\quad e_T\in D,$$

$$\operatorname{supp} e_T\subset\left(-\frac{3}{4}T_1,\ \frac{3}{4}T_1\right)\times\ldots\times\left(-\frac{3}{4}T_n,\ \frac{3}{4}T_n\right)\tag{3.9.1}$$

кўринишдаги бирнинг махсус ёйилмаси мавжуд эканлигини исбот қиламиз, бу ерда $e_T(x)-$ҳар бир ўзгарувчи бўйича жуфт функция, $kT=(k_1T_1,\dots,k_nT_n)$ деб белгиланган.

$T>0$ мусбат сон бўлсин. Биз $e_T(x)$ орқали $\operatorname{supp} e_T\subset\left(-\frac{3}{4}T,\ \frac{3}{4}T\right)$ ва $\left[-\frac{1}{4}T,\ \frac{1}{4}T\right]$ оралиқнинг атрофида $e_T(x)=1,$ ҳамда $x\in\left[-\frac{3}{4}T,-\frac{1}{4}T\right]$ учун $e_T(x)=1-e_T(x+T)$ бўлган $D(R^1)$ фазодан олинган жуфт функцияни белгилаймиз. Осонгина кўриш мумкинки, бундай функция мавжуд бўлади.



Кўриниб турибдики, бундай $e_T(x)$ функция ихтиёрий $x \in R^1$ нуқта учун

$$\sum_{|k| \geq 0} e_T(x+kT) = 1 \qquad (3.9.2)$$

тенгликни қаноатлантиради. Агар

$$e_T(x) = e_{T_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot e_{T_n}(x_n) \qquad (3.9.3)$$

деб олсак, у ҳолда бирнинг ёйилмаси мавжуд эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

$$\delta_T(x) = \sum_{|k| \geq 0} \delta(x-kT)$$

умумлашган функцияни киритамиз. Кўриниб турибдики, $\delta_T(x) \in D'_T \bigcap J'(R^n)$ бўлади.

Агар $f \in D'_T$ бўлса, у ҳолда

$$f = (e_T f) * \delta_T \qquad (3.9.4)$$

тасвирни исбот қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам, (3.9.1) муносабатдан ва $f(x)$ умумлашган функциянинг даврийлигидан фойдаланиб

$$f(x) = f(x) \sum_{|k| \geq 0} e_T(x+kT) = \sum_{|k| \geq 0} f(x) e_T(x+kT) =$$

$$= \sum_{|k| \geq 0} f(x+kT) e_T(x+kT) = \sum_{|k| \geq 0} (e_T f) * \delta(x+kT)$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан $J'(R^n)$ фазода ўраманинг узлуксиз эканлигидан фойдаланиб (3.9.4) тасвирни ҳосил қиламиз.

Бу (3.9.4) тасвирдан, хусусан, $D'_T \subset J'(R^n)$ келиб чиқади. Бундан ташқари, (3.9.4) тасвирда $f = \delta_T$ деб олсак, у ҳолда

$$\delta_T = (e_T \delta_T) * \delta_T \qquad (3.9.5)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди $f \in D'_T$ ва $\varphi \in C^\infty \bigcap D'_T$ бўлсин. $(f,\varphi)_T$ скаляр кўпайтмани

$$(f,\varphi)_T = (f, e_T\varphi)$$

қоида бўйича киритамиз. Бу киритилган таъриф коррект бўлишлиги учун бу тенгликнинг ўнг томони $e_T(x)$ ёрдамчи функцияга боғлиқ эмаслигини кўрсатиш зарур бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $e'_T(x)$ бошқа бир шундай функция мавжуд бўлса, у ҳолда (3.9.4) тасвирдан ва ихтиёрий $f(x) \in J'(R^n)$, $g(x) \in E'(R^n)$ учун $f(x) * g(x)$ ўрама $J'(R^n)$ фазога тегишли ва ихтиёрий $\varphi(x) \in J(R^n)$ асосий функциялар учун

$$((f * g)(x), \varphi(x)) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y)\varphi(x+y))$$

шаклида тасвирланиб, бунда η функция $D(R^n)$ фазодаги ихтиёрий функция бўлиб, g функция ташувчисининг атрофида 1 га тенг эканлигидан

$$(f, e'_T\varphi) = ((e_T f) * \delta_T,\ e'_T\varphi) =$$

$$= (e_T(x) f(x) \times \delta_T(y),\ e'_T(x+y)\varphi(x+y)) =$$

$$= (f(x),\ (\delta_T(y),\ e_T(x) e'_T(x+y)\varphi(x+y))) =$$

$$= \left(f(x),\ e_T(x) \sum_{|k|\ge 0} e'_T(x-kT)\ \varphi(x-kT) \right) = (f,\ e_T\ \varphi)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу эса исбот қилиниши талаб этилган тасдиқни билдиради.

Агар $f \in L^1_{loc} \bigcap D'_T$ бўлган умумлашган функция бўлса, у ҳолда

$$(f,\varphi)_T = \int_0^{T_1} \ldots \int_0^{T_n} f(x)\varphi(x)dx \qquad (3.9.6)$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам $(\,,\,)_T$ скаляр кўпайтма e_T функциянинг танланишига боғлиқмаслигидан уни аниқ бир танланган функция учун, масалан (3.9.3) функция учун ҳисоблаш етарлидир. Шунга кўра

$$(f,\varphi)_T = \int_{R^n} e_T(x) f(x)\varphi(x)dx =$$

$$=\left[\int\limits_{-\frac{3}{4}T_1}^{-\frac{1}{4}T_1} e_{T_1}(x_1)+\int\limits_{-\frac{1}{4}T_1}^{-\frac{1}{4}T_1}+\int\limits_{\frac{1}{4}T_1}^{\frac{3}{4}T_1} e_{T_1}(x_1)\right]\int\limits_{R^{n-1}} e_{T_2}(x_2)\ldots$$

$$\ldots\, e_{T_n}(x_n)\, f(x)\varphi(x)dx_2\ldots dx_n dx_1=$$

$$=\int\limits_{-\frac{1}{2}T_1}^{\frac{1}{2}T_1}\int\limits_{R^{n-1}} e_{T_2}(x_2)\ldots e_{T_n}(x_n)\, f(x)\varphi(x)dx_2\ldots dx_n dx_1+$$

$$+\left[\int\limits_{\frac{1}{4}T_1}^{\frac{3}{4}T_1} e_{T_1}(x_1)-\int\limits_{-\frac{3}{4}T_1}^{-\frac{1}{4}T_1} e_{T_1}(x+T_1)\right]\int\limits_{R^{n-1}} e_{T_2}(x_2)\ldots$$

$$\ldots\, e_{T_n}(x_n)\, f(x)\varphi(x)dx_2\ldots dx_n dx_1=$$

$$=\int\limits_{-\frac{1}{2}T_1}^{\frac{1}{2}T_1}\int\limits_{-\frac{1}{2}T_2}^{\frac{1}{2}T_2}\int\limits_{R^{n-2}} e_{T_3}(x_3)\ldots e_{T_n}(x_n)\, f(x)\varphi(x)dx_3\ldots dx_n dx_2 dx_1=\ldots$$

$$\ldots=\int\limits_{-\frac{1}{2}T_1}^{\frac{1}{2}T_1}\int\limits_{-\frac{1}{2}T_2}^{\frac{1}{2}T_2}\ldots\int\limits_{-\frac{1}{2}T_n}^{\frac{1}{2}T_n} f(x)\varphi(x)dx$$

тенглик келиб чиқади.

Хусусан, $e^{i(k\omega,x)}$, $\omega=\left(\frac{2\pi}{T_1},\ldots,\frac{2\pi}{T_n}\right)$ тригонометрик функциялар n та давр билан T даврий умумлашган функция ва унинг учун

$$(e^{i(k\omega,x)},\ e^{-i(k'\omega,x)})_T=\delta_{kk'}\ T_1\cdot\ldots\cdot T_n \qquad (3.9.7)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

2. Даврий умумлашган функцияларнинг Фурье қаторлари. $f(x)\in D'_T$ бўлсин. Формал равишда ҳосил қилинган

$$f(x)\sim\sum_{|k|\geq 0} c_k(f)\, e^{i(k\omega,x)},\qquad c_k(f)=\frac{(f,\, e^{-i(k\omega,x)})_T}{T_1\cdot\ldots\cdot T_n} \qquad (3.9.8)$$

қаторга *Фурье қатори* деб, $c_k(f)$– сонларга эса f умумлашган функциянинг *Фурье коэффициентлари* деб айтилади.

1–мисол. Агар $f \in L^1_{loc} \bigcap D'_T$ бўлса, у ҳолда унинг (3.9.8) Фурье қатори (3.9.6) тенгликка кўра классик Фурье қаторига айланади.

2–мисол. $J'(R^n)$ фазода

$$\sum_{|k|\geq 0} \delta(x+kT) = \frac{1}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n} \sum_{|k|\geq 0} e^{i(k\omega,x)} \tag{3.9.9}$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенглик аввал келтирилган бир ўлчамли ҳолидаги тенгликдан ва $J'(R^n)$ фазода тўғри кўпайтманинг узлуксизлигидан келиб чиқади.

$m \geq 0$ танланган сон бўлсин. Ҳамда $f \in D'_T$ ва $m-$сони шу f функциянинг тартиби бўлсин. У ҳолда f функция ва k мультииндексга боғлиқ бўлмаган шундай бир $C_m \geq 0$ сон мавжуд бўлиб

$$\left|c_k(f)\right| \leq C_m \| f \|_{-m} \left(1+|k|\right)^m \tag{3.9.10}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, $(\ ,\ )_T$ скаляр кўпайтма таърифидан фойдаланиб ва $e_T(x)$ ёрдамчи функцияни танлаш орқали

$$\left|c_k(f)\right| = \frac{1}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n} \left| \left(f, e^{-i(k\omega,x)} \right)_T \right| = \frac{1}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n} \left| \left(f, e_T e^{-i(k\omega,x)} \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\| f \|_{-m}}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n} \sup_{\substack{x\in R^n, \\ |\alpha|\leq m}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \left| D^\alpha \left[e_T(x) e^{-i(k\omega,x)} \right] \right| \leq$$

$$\leq C' \; \| f \|_{-m} \sup_{\substack{x\in R^n, \\ |\alpha|\leq m}} \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \left| D^{\alpha-\beta} e_T(x) \right| \left| (-ik\omega)^\beta \right| \leq C \| f \|_{-m} \left(1+|k|\right)^m$$

(3.9.10) тенгсизликни ҳосил қиламиз.

1–теорема. *Ихтиёрий $f(x) \in D'_T$ умумлашган функциянинг Фурье қатори $J'(R^n)$ фазода $f(x)$ умумлашган функцияга яқинлашади, яъни $J'(R^n)$ фазода*

$$f(x) = \sum_{|k|\geq 0} c_k(f)\, e^{i(k\omega,\, x)} \tag{3.9.11}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. (3.9.9) тенгликни (3.9.4) тенгликнинг ўнг томонига қўйиб

$$f = (e_T f) * \sum_{|k|\geq 0} \frac{1}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n} e^{i(k\omega,x)} = \sum_{|k|\geq 0} \frac{1}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n} \left(e_T f\right) * e^{i(k\omega,x)}$$

тенгликни ёзамиз ва ўрама учун келтирилган формуладан фойдаланиб

$$(e_T f) * e^{i(k\omega,x)} = (f(y),\ e_T(y) e^{i(k\omega,\, x-y)}) = T_1 \cdot \ldots \cdot T_n\ c_k(f)\ e^{i(k\omega,x)}$$

шу $f(x)$ умумлашган функциянинг (3.9.11) Фурье қатори $J'(R^n)$ фазода $f(x)$ умумлашган функцияга яқинлашишини ҳосил қиламиз. 1–теорема исбот бўлди.

1–натижа. *Ихтиёрий* $f(x) \in D'_T$ *умумлашган функция ўзининг барча* $\{c_k(f)\}$ *Фурье коэффициентлари системаси билан тўла аниқланади.*

2–натижа. *Агар* $f \in D'_T$ *ва* $\varphi \in C^\infty \bigcap D'_T$ *бўлса, у ҳолда*

$$(f,\varphi)_T = \sum_{|k|\geq 0} c_k(f)\, c_k(\varphi) \qquad \textit{(3.9.12)}$$

умумлашган Парсеваль тенглиги ўринли бўлади.

3–натижа. *Агар* $f \in D'_T$ *умумлашган функцияни исталган сонда ҳадма–ҳад дифференциаллаш мумкин бўлса, яъни ихтиёрий* α *мультииндекс учун*

$$D^\alpha f(x) = \sum_{|k|\geq 0} c_k(f)(ik\omega)^\alpha e^{i(k\omega,\, x)} \qquad \textit{(3.9.13)}$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда

$$c_k(D^\alpha f) = (ik\omega)^\alpha\ c_k(f) \qquad \textit{(3.9.14)}$$

тенглик ўринли бўлади.

3. D'_T **ўрамалар алгебраси.** Биз D'_T тўпламда $\circledast$ ўрама амалини ихтиёрий $f, g \in D'_T$ учун

$$f \circledast g = (e_T f) * g \qquad (3.9.15)$$

қоида бўйича киритамиз.

Бу $f \circledast g$ *ўрама амали* e_T *ёрдамчи функцияга боғлиқмас бўлади ва коммутативдир.*

Бу тасдиқ (3.9.4) айният ва $*$ ўраманинг узлуксизлик, ассоциативлик ва коммутативлик хоссаларидан келиб чиқадиган

$$(e_T f) * g = (e'_T g) * f \qquad (3.9.16)$$

тенгликдан келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам

$$(e_T f)*g=(e_T f)*((e'_T g)*\delta_T)=((e_T f)*\delta_T)*(e'_T g)=$$
$$=f*(e'_T g)=(e'_T g)*f$$

тенглик ҳосил бўлади.

Бу $f\to f\circledast g$ *ўрама амали* D'_T *тўпламни* $J'(R^n)$ *фазога чизиқли ва узлуксиз акслантиради.*

Ниҳоят биз $f\circledast g\in D'_T$ эканлигига эга бўламиз. Бу эса ўраманинг силжитиш ҳақидаги хоссасидан

$$(f\circledast g)(x+kT)=(e_T f)*g(x+kT)=(e_T f)*g=(f\circledast g)(x)$$

келиб чиқади.

D'_T тўпламдан олинган ихтиёрий сондаги $f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_m$ умумлашган функцияларнинг ўрамаси ҳам худди шундай

$$f_1\circledast f_2\circledast\dots\circledast f_m=(e'_T f_1)*(e''_T f_2)*\dots*f_m \qquad (3.9.17)$$

қоида бўйича аниқланади. Бу ўрама ҳам ассоциатив ва коммутатив бўлади.

3–мисол. Агар $f\in L^1_{loc}\bigcap D'_T$ ва $g\in L^1_{loc}\bigcap D'_T$ бўлса, у ҳолда

$$(f\circledast g)(x)=\int\limits_0^{T_1}\dots\int\limits_0^{T_n}f(x-y)g(y)dy=$$
$$=\int\limits_0^{T_1}\dots\int\limits_0^{T_n}f(y)g(x-y)dy=(g\circledast f)(x) \qquad (3.9.18)$$

тенглик ўринли бўлади.

4–мисол. Ихтиёрий $f\in D'_T$ учун

$$f\circledast e^{i(k\omega,x)}=T_1\cdot\ldots\cdot T_n\,c_k(f)e^{i(k\omega,x)} \qquad (3.9.19)$$

тенглик ўринлидир. Ҳақиқатдан ҳам

$$(g\circledast e^{i(k\omega,x)},\varphi)=((e_T f)*e^{i(k\omega,x)},\varphi)=$$
$$=(e_T(\xi)f(\xi)\times e^{i(k\omega,y)},\varphi(\xi+y))=\left(f(\xi),e_T(\xi)\int\limits_{R^n}e^{i(k\omega,y)}\varphi(\xi+y)dy\right)=$$
$$=\left(f(\xi),e_T(\xi)e^{-i(k\omega,\xi)}\int\limits_{R^n}e^{i(k\omega,x)}\varphi(x)dx\right)=T_1\cdot\ldots\cdot T_n\,c_k(f)\int\limits_{R^n}e^{i(k\omega,x)}\varphi(x)dx$$

тенглик ўринли бўлади. Хусусан, (3.9.7) тенгликка кўра

$$e^{i(k\omega,x)}\circledast e^{i(k'\omega,x)}=T_1\cdot\ldots\cdot T_n\,\delta_{kk'}\,e^{i(k\omega,x)} \qquad (3.9.20)$$

тенглик ҳосил бўлади.

5–мисол. Ихтиёрий $f \in D'_T$ учун (3.9.4) формула

$$f = f \circledast \delta_T, \quad D^\alpha f = f \circledast D^\alpha \delta_T \qquad (3.9.21)$$

шаклида бўлади ва умуман, *агар* $f \in D'_T$ *ва* $g \in D'_T$ *бўлса, у ҳолда*

$$c_k(f \circledast g) = T_1 \cdot \ldots \cdot T_n \, c_k(f)\, c_k(g) \qquad (3.9.22)$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам (3.9.19) тенгликка кўра

$$c_k(g \circledast f) = \frac{1}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n} e^{-i(k\omega,x)}(f \circledast g) \circledast e^{i(k\omega,x)} =$$

$$= \frac{1}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n} e^{-i(k\omega,x)}(f \circledast (g \circledast e^{i(k\omega,x)})) =$$

$$= c_k(g) e^{-i(k\omega,\, x)}(f \circledast e^{i(k\omega,\, x)}) = T_1 \cdot \ldots \cdot T_n \, c_k(f) c_k(g)$$

тенгликка эга бўламиз.

Юқорида келтирилган фикрларга кўра $\circledast$ ўрама амалига нисбатан D'_T тўплам ўрамалар алгебрасини ташкил этади. Бу D'_T алгебра ассоциатив ва коммутатив бўлиб, унинг бирлик элементи (3.9.21) тенгликка кўра δ_T функция бўлади. Ҳамда (3.9.20) тенгликка кўра нолнинг бўлувчиларини сақлайди.

$a \circledast u = f$ тенгламани D'_T ўрамалар алгебрасида қараймиз, яъни $a(x) \in D'_T$ ва $f(x) \in D'_T$ деб ҳисоблаб $u(x)$ ечимни ҳам шу D'_T алгебрадан излаймиз. Юқорида исбот қилинганидек D'_T алгебрада қуйидаги тасдиқ ўринли бўлади: *агар* $a(x) \circledast$ *ўрама операторнинг* $E(x)$ *фундаментал ечими* D'_T *алгебрада мавжуд бўлса, у ҳолда* $a \circledast u = f$ *тенгламанинг* $u(x)$ *ечими* D'_T *алгебрада ягона бўлиб ихтиёрий* $f(x) \in D'_T$ *учун мавжуд ва* $u(x) = E(x) \circledast f(x)$ *формула орқали ифодаланади.*

Бу $a(x) \circledast$ ўрама операторининг D'_T алгебрадаги $E(x)$ фундаментал ечимини a^{-1} орқали белгилаш қулай бўлади ва $a^{-1} \circledast a = \delta$ тенгликни ёзамиз.

Бошқача сўз билан айтганда, a^{-1} элемент a элементнинг D'_T алгебрадаги тескари элементи бўлади.

D'_T алгебрада фундаментал ечимни қуриш учун қуйидаги тасдиқ жуда фойдали бўлади:

Агар D'_T алгебрада a_1^{-1} ва a_2^{-1} тескари элементлар мавжуд бўлса, у ҳолда $\left(a_1 \circledast a_2\right)^{-1} = a_1^{-1} \circledast a_2^{-1}$ тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам

$$\left(a_1 \circledast a_2\right) \circledast \left(a_1^{-1} \circledast a_2^{-1}\right) = \left(a_2 \circledast a_1\right) \circledast \left(a_1^{-1} \circledast a_2^{-1}\right) =$$

$$= a_2 \circledast \left(\left(a_1 \circledast a_1^{-1}\right) \circledast a_2^{-1}\right) = a_2 \circledast \left(\delta \circledast *a_2^{-1}\right) = a_2 \circledast a_2^{-1} = \delta$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу ерда бир оз аниқроқ бўлган қуйидаги тасдиқни ҳам айтиш мумкин.

2–теорема. *$a \in D'_T$ учун $a \circledast$ оператор D'_T тўпламда $E \circledast$ тескари операторга эга бўлишлиги учун шундай бир $L > 0$ сон ва $m \geq 0$ сонлари мавжуд бўлиб*

$$\left|c_k(a)\right| \geq L(1+|k|)^{-m} \tag{3.9.23}$$

тенгсизлигининг бажарилиши зарур ва етарлидир. Шунингдек E фундаментал ечим ягона ва

$$E(x) = \frac{1}{T_1^2 \cdot \ldots \cdot T_n^2} \sum_{|k| \geq 0} \frac{1}{c_k(a)} e^{i(k\omega,\, x)} \tag{3.9.24}$$

Фурье қатори орқали ифодаланади.

Исбот. *Етарлилиги.* (3.9.23) баҳолашга кўра (3.9.24) қатор $J'(R^n)$ фазода яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $E(x) \in D'_T$ бўлади. Бу $E(x)$ умумлашган функциянинг $a \circledast E = \delta_T$ тенгламани қаноатлантиришини исбот қиламиз. Бунинг учун 1–теоремага кўра Фурье коэффициентлари учун

$$c_k(a \circledast E) = c_k(\delta_T) = \frac{1}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n}$$

тенгликни исботлаш етарлидир. Бу эса (3.9.22) ва (3.9.24) тенгликларга кўра бажарилади.

Зарурийлиги. D'_T тўпламда $a \circledast$ операторнинг $E(x)$ фундаментал ечими мавжуд бўлсин, яъни $a \circledast E = \delta_T$ бўлсин. У ҳолда бу ечим ягона бўлади, чунки агар бошқа бир $E_1(x)$ фундаментал ечими мавжуд, яъни $a \circledast E_1 = \delta_T$ бўлса, у ҳолда

$$E_1 = E_1 \circledast \delta_T = E_1 \circledast \left(a \circledast E\right) = \left(E_1 \circledast a\right) \circledast E =$$

$$= \left(a \circledast E_1\right) \circledast E = \delta_T \circledast E = E$$

тенглик ҳосил бўлади ва

$$c_k(a \circledast E) = c_k(a)c_k(E)\,T_1 \cdot \ldots \cdot T_n = c_k(\delta_T) = \frac{1}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n}$$

тенгликдан

$$c_k(E) = \frac{1}{T_1^2 \cdot \ldots \cdot T_n^2\, c_k(a)} \tag{3.9.25}$$

тенгликни келтириб чиқарамиз. Шунинг учун (3.9.24) ёйилма ўринли бўлади. Шунингдек, m орқали $E(x)$ умумлашган функциянинг тартибини белгилаймиз ва (2.9.10) баҳолашни қўллаб (3.9.25) тенгликдан

$$|c_k(E)| = \frac{1}{T_1^2 \cdot \ldots \cdot T_n^2}\,\frac{1}{|c_k(a)|} \le C\|E\|_{-m}(1+|k|)^m$$

тенгсизликни, яъни (3.9.23) баҳолашни ҳосил қиламиз. 2–теорема исбот бўлди.

4. Мисоллар. а) D'_T тўпламда

$$u \circledast u = \delta_T \tag{3.9.26}$$

“квадрат” тенгламани ечамиз. Бунинг учун биз аввал

$$c_k^2(u) = \frac{1}{T_1^2 \cdot \ldots \cdot T_n^2}, \quad c_k(u) = \pm\frac{1}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n}$$

тенгликларга эга бўламиз. Шунинг учун (3.9.26) тенглама

$$u(x) = \frac{1}{T_1 \cdot \ldots \cdot T_n}\sum_{|k|\ge 0} \varepsilon_k\, e^{i(k\omega,\, x)}, \quad \varepsilon_k = \pm 1 \tag{3.9.27}$$

бўлган континуумта ечимларга эга бўлади.

б) $\left(\dfrac{d}{dx} - \lambda\right)E = \delta_T, \quad n = 1, \quad \lambda \ne ik\omega, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$ бўлсин.

У ҳолда уни $(\delta'_T - \lambda\delta_T) \circledast E = \delta_T$ шаклида ёзиб

$$T\,\frac{ik\omega - \lambda}{T}\,c_k(E) = \frac{1}{T}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Шунга кўра

$$E(x) = \frac{1}{T}\sum_{|k|\ge 0}\frac{1}{ik\omega - \lambda}\,e^{ik\omega x} \tag{3.9.28}$$

ҳосил бўлади.

в) Энди $u \in D'_T$ тўпламда $\delta'_T \circledast u = \lambda u$ хос қиймат масаласини қараймиз. У ҳолда $\delta'_T \circledast$ операторнинг мос равишда

$$\lambda_k = ik\omega, \quad u_k(x) = e^{ik\omega x}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots \qquad (3.9.29)$$

хос қиймат ва хос функцияларига эга бўламиз.

г) $f(x) \in D'_T$, $n = 1$ бўлсин. У ҳолда D'_T тўпламда $f^{(-1)}(x)$ бошланғич функцияни топиш

$$\frac{df^{(-1)}(x)}{dx} = f, \quad \delta'_T \otimes f^{(-1)}(x) = f(x)$$

масаласини қараймиз.

$$\frac{ik\omega}{T} \; c_k(f^{(-1)}) = c_k(f)$$

тенгликдан $f^{(-1)}(x)$ бошланғич функциянинг D'_T тўпламда мавжуд бўлишлиги учун $c_0(f) = 0$ ва

$$f^{(-1)}(x) = \sum_{|k|>0} \frac{c_k(f)}{ik\omega} \, e^{ik\omega x} + C, \qquad (3.9.30)$$

бунда C ихтиёрий ўзгармас бўлган Фурье қатори билан ифодаланиши зарур ва етарлидир.

д) *Бернулли полиномлари.* $f_0 = T\delta_T - 1$ деб оламиз. Шунга кўра $c_0(f_0) = T\, c_0(\delta_T) - c_0(1) = 0$ бўлгани учун D'_T тўпламда $f_0^{(-1)}(x)$ бошланғич функция мавжуд бўлади. Бунда $c_0(f_0^{(-1)}(x)) = 0$ деб танлаймиз ва ҳакозо. Натижада биз асосий даврий $(0, T)$ оралиғида полином бўлган D'_T тўпламдан олинган $f_0^{(-m)}(x)$, $m = 1, 2, \ldots$ бошланғич функциялар кетма–кетлигини ҳосил қиламиз. Бу полиномларга *Бернулли полиномлари* деб айтилади. Унинг Фурье қаторига ёйилмасини топамиз. Биз

$$(f_0^{(-m)})^{(m)} = \delta_T^{(m)} \otimes f_0^{(-m)} = f_0 = T\delta_T - 1$$

тенгликларга эга бўламиз ва шунинг учун барча $k \neq 0$ учун

$$c_k(\delta_T^{(m)} \otimes f_0^{(-m)}) = (ik\omega)^m \, c_k(f_0^{(-m)}) = 1$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Шунга кўра

$$f_0^{(-m)}(x) = \sum_{|k|>0} \frac{1}{(ik\omega)^m} \, e^{ik\omega x} \qquad (3.9.31)$$

тенгликлар ҳосил бўлади.

Масалан: $0 < x < T$ оралиқда $f_0^{(-1)}(x) = \dfrac{T}{2} - x$ бўлади.

IV – БОБ

ЛЕБЕГ ВА СОБОЛЕВ ФАЗОЛАРИ

1-§. Нормаланган фазо ва скаляр кўпайтма киритилган фазоларни тўла фазогача тўлдириш. Лебег фазоси

1. Нормаланган фазони тўла фазогача тўлдириш. Биз ихтиёрий нормаланган фазонинг ёпилмасини берувчи шундай бир муҳим бўлган конструкцияни келтирамизки, натижада Банах фазоси ҳосил бўлади. Бу ғоянинг конструкцияси Кошига тегишли бўлиб, у рационал сонлардан тузилган фундаментал кетма–кетликларнинг эквивалент синфларини қараш билан ҳақиқий сонлар назариясини яратиш мумкинлигини кўрсатган.

1–теорема. *Ҳар қандай E нормаланган фазони қандайдир $\hat{E}$ Банах фазосида зич бўлган чизиқли кўпхиллик деб қараш мумкин.*

Шунга кўра $\hat{E}$ фазо E нормаланган фазонинг *тўлдирувчиси* деб айтилади.

Исбот. E фазо элементларидан тузилган ва фундаментал бўлган

$$\{x_n\}\,,\ \{y_n\}\,,\ \{z_n\}\,, ...$$

барча мумкин бўлган кетма–кетликларни қараймиз. Агар $n \to \infty$ да $\left\|x_n - x_n^{'}\right\| \to 0$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий иккита $\{x_n\}$ ва $\left\{x_n^{'}\right\}$ кетма–кетликларни эквивалент деб атаймиз. Агар $\{x_n\}$ ва $\left\{x_n^{'}\right\}$ кетма–кетликлар эквивалент бўлса, у ҳолда $\{x_n\} \sim \left\{x_n^{'}\right\}$ деб ёзамиз. Барча фундаментал кетма–кетликлар тўпламини ўзаро кесишмайдиган тўпламлар синфига қуйидагича усул билан бўламиз: агар $\{x_n\} \sim \left\{x_n^{'}\right\}$ эквивалент бўлса, у ҳолда иккита $\{x_n\}$ ва $\left\{x_n^{'}\right\}$ кетма–кетликлар битта синфга тегишли деб олинади ва фақат шу ҳолдагина. Барча синфлар тўпламини $\hat{E}$ орқали белгилаймиз ва шу синфларнинг ўзларини эса $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, ...$ орқали белгилаймиз. Агар $\{x_n\}$ кетма–кетлик $\hat{x}$ синфдан бўлса, у ҳолда

$\{x_n\} \in \hat{x}$ га тегишли деб ёзилади ва $\{x_n\}$ кетма–кетлик $\hat{x}$ синфнинг вакили деб айтилади. $\hat{E}$ тўпламни нормаланган фазога айлантирамиз. $\hat{x}$ ва $\hat{y}$ синфларнинг йиғиндисини қуйидагича аниқлаймиз: агар $\{x_n\} \in \hat{x}$ ва $\{y_n\} \in \hat{y}$ бўлса, у ҳолда $\{x_n + y_n\}$ кетма–кетликни сақлайдиган синфга $\hat{x} + \hat{y}$ йиғинди синф деб айтилади.

Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма–кетликлар фундаментал кетма–кетликлар бўлса, у ҳолда йиғинди $\{x_n + y_n\}$ кетма–кетлик ҳам фундаментал бўлади.

Биз киритган $\hat{x} + \hat{y}$ йиғинди синф таърифи $\hat{x}$ ва $\hat{y}$ синфлар вакилларининг танланишига боғлиқ эмас. Агар $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$ ва $\{y'_n\} \sim \{y_n\}$ бўлса, у ҳолда $\{x'_n + y'_n\} \sim \{x_n + y_n\}$ бўлади. Шунга кўра, агар $\{x'_n\} \in \hat{x}$ ва $\{y'_n\} \in \hat{y}$ бўлса, у ҳолда $\{x'_n + y'_n\} \sim \{x_n + y_n\}$ бўлади ва демак, $\{x'_n + y'_n\} \in \hat{x} + \hat{y}$ бўлади.

Энди $\hat{E}$ тўпламдаги синфларни сонга кўпайтириш амалини киритамиз. Агар $\{x_n\} \in \hat{x}$ бўлса, у ҳолда $\{\lambda x_n\}$ кетма–кетликни сақлайдиган синфга $\lambda \hat{x}$ кўпайтма синф деб айтилади.

Маълумки, агар $\{x_n\}$ кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик бўлса, у ҳолда $\{\lambda x_n\}$ кетма–кетлик ҳам фундаментал бўлади.

Биз киритган $\lambda \hat{x}$ кўпайтма синф таърифи $\hat{x}$ синф вакилларининг танланишига боғлиқ эмас. Агар $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$ бўлса, у ҳолда $\{\lambda x'_n\} \sim \{\lambda x_n\}$ бўлади. Шунга кўра, агар $\{x'_n\} \in \hat{x}$ бўлса, у ҳолда $\{\lambda x'_n\} \sim \{\lambda x_n\}$ бўлади ва демак, $\{\lambda x'_n\} \in \lambda \hat{x}$ бўлади.

Шунингдек, $\hat{E}$ тўпламда киритилган амаллар E чизиқли нормаланган фазодаги элементлар устидаги амаллар бўлгани учун $\hat{E}$ тўплам ҳам чизиқли фазо бўлади. $\hat{E}$ чизиқли фазодаги 0 ноль элемент ролини $\{0\}$ кетма–кетликни сақлайдиган синф бажаради.

Энди $\hat{E}$ чизиқли фазода норма тушунчасини киритамиз. Ихтиёрий $\{x_n\} \in \hat{x}$ бўлсин. У ҳолда

$$\|\hat{x}\|_{\hat{E}} = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_E$$

деб оламиз. Кўрсатиш мумкинки, бу лимит мавжуддир, чунки $\big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| \le \|x_n - x_m\|$ учбурчак тенгсизлигига кўра $\|x_n\|$ сонли кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик бўлади ва Коши критериясига кўра бу кетма–кетлик яқинлашувчидир.

Бундан ташқари, бу лимит $\hat{x}$ синф вакилларининг танланишига боғлиқ эмас. Агар $\{x'_n\} \in \hat{x}$ муносабат ҳам ўринли бўлса, у ҳолда $n \to \infty$ да

$$\big|\|x'_n\| - \|x_n\|\big| \le \|x'_n - x_n\| \to 0$$

бўлади. Бундан

$$\lim_{n\to\infty}\|x'_n\|_E = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_E$$

тенглик келиб чиқади.

$\hat{E}$ чизиқли фазода бундай киритилган

$$\|\hat{x}\|_{\hat{E}} = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_E$$

мослик норма аксиомаларини қаноатлантиришини кўрсатиш қийин эмас. Шунинг учун $\hat{E}$ чизиқли нормаланган фазодир.

Энди

а) E чизиқли нормаланган фазони $\hat{E}$ чизиқли нормаланган фазонинг чизиқли кўпхиллигига ўзаро бир қийматли мос қўйиш;

б) Бу а) тасдиқда кўрсатилган мослик маъносида E чизиқли нормаланган фазо $\hat{E}$ чизиқли нормаланган фазода зич;

в) $\hat{E}$ – Банах фазоси эканлигини кўрсатамиз.

а) тасдиқнинг исботи. Ҳар бир $x \in E$ элементга $\{x\}$, яъни $x, x, x, ..., x, ...$ стационар кетма–кетликни сақлайдиган синфни ўзаро бир қийматли мос қўямиз. Бундай синфни биз x орқали белгилаймиз. Кўриниб турибдики, λx синф $\{\lambda x\}$ кетма–кетликни сақлайди. Худди шунингдек $x + y$ синф эса $\{x + y\}$ кетма–кетликни сақлайди. Шундай қилиб, стационар кетма–кетликларни сақлайдиган барча синфлар тўплами $\hat{E}$ чизиқли нормаланган фазодаги чизиқли кўпхилликдан иборат бўлади. Бу чизиқли кўпхиллик учун биз E белгилашни сақлаймиз.

б) тасдиқнинг исботи. $x \in E$ синф бўлсин. У ҳолда ўзгармаснинг лимити сифатида $\|x\|_{\hat{E}} = \|x\|$ бўлади. $\hat{x} \in \hat{E}$ бўлсин. У ҳолда шундай бир $\{x_n\} \in E$ кетма–кетлик мавжуд бўлиб $n \to \infty$ да $\|\hat{x} - x_n\|_{\hat{E}} \to 0$ бўлади. Бу эса E чизиқли кўпхилликнинг $\hat{E}$ чизиқли нормаланган фазода зич эканлигини исбот қилади. Ҳақиқатдан ҳам, $\{x_n\} \in \hat{x}$ бўлсин. У ҳолда $\{x_n\}$ кетма–кетликнинг фундаментал эканлигидан ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер мавжудки, бунда ихтиёрий $n,\, m \geq N$ учун

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1.1}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $n \geq N$ деб танлаб ва $\{x_n\}_{m=1}^{\infty} \in x_n$ стационар кетма–кетлик учун

$$\lim_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|_E = \|x_n - \hat{x}\|_{\hat{E}}\ , \tag{4.1.2}$$

эканлигини ҳисобга олиб, ҳамда $m \to \infty$ лимитга ўтсак, у ҳолда

$$\|x_n - \hat{x}\|_{\hat{E}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1.3}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу эса $n \to \infty$ да $x_n \to \hat{x}$ эканлигини билдиради.

в) тасдиқнинг исботи. $\hat{E}$ чизиқли нормаланган фазода фундаментал бўлган $\{\hat{x}_n\}$ кетма–кетлик берилган бўлсин. У ҳолда б) тасдиққа кўра шундай бир $\{x_n\} \in E$ кетма–кетлик мавжуд бўлиб $\|\hat{x}_n - x_n\|_{\hat{E}} < \dfrac{1}{n}$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу $\{x_n\}$ кетма–кетликнинг ўзи ҳам фундаментал кетма–кетлик эканлигини исбот қиламиз. Бу эса $n, m \to \infty$ да

$$\|x_n - x_m\|_{\hat{E}} \leq \|x_n - \hat{x}_n\|_{\hat{E}} + \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_{\hat{E}} + \|\hat{x}_m - x_m\|_{\hat{E}} <$$

$$< \frac{1}{n} + \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_{\hat{E}} + \frac{1}{m} \to 0$$

эканлигидан келиб чиқади. $\hat{E}$ чизиқли нормаланган фазода $\{x_n\}$ кетма–кетлик фундаментал бўлгани учун бу кетма–кетлик E

чизиқли нормаланган фазода ҳам фундаментал бўлган кетма–кетлик бўлади, чунки

$$\|x_n - x_m\|_{\hat{E}} = \|x_n - x_m\|_E$$

тенглик ўринлидир. У ҳолда шундай бир $\hat{x} \in \hat{E}$ синф мавжудки, бу синф $\{x_n\}$ кетма–кетликни сақлайди. Энди $n \to \infty$ да $\hat{x}_n \to \hat{x}$ эканлигини исбот қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}\|_{\hat{E}} \le \|\hat{x}_n - x_n\|_{\hat{E}} + \|x_n - \hat{x}\|_{\hat{E}} < \frac{1}{n} + \|\hat{x} - x_n\|_{\hat{E}}$$

тенгсизликка кўра, ҳамда б) тасдиққа асосан $n \to \infty$ да $\|\hat{x} - x_n\|_{\hat{E}} \to 0$ эканлигидан келиб чиқади. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

2. Скаляр кўпайтма киритилган фазони тўла фазогача тўлдириш. Энди берилган E фазо (x, y) скаляр кўпайтма киритилган фазо бўлсин. Бу $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ норма билан киритилган E нормаланган фазони тўлдириб, биз $\hat{E}$ Банах фазосига келамиз. Бу фазонинг элементлари $\{x_n\}$ фундаментал бўлган эквивалент кетма–кетликларнинг $\hat{x}$ синфларидир. $\hat{E}$ фазо ўз навбатида скаляр кўпайтма киритилган фазо эканлигини кўрсатамиз ва демак, ўзининг тўлалигига кўра Гильберт фазоси ҳам бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}$ бўлиб $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма–кетликлар эса мос равишда уларга қарашли бўлсин. У ҳолда $\hat{E}$ фазода скаляр кўпайтмани

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$$

тенглик билан аниқлаймиз. Шунингдек,

$$(\hat{x}, \hat{x}) = \lim_{n\to\infty}(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|^2 = \|\hat{x}\|^2$$

тенглик бажарилади. $\hat{E}$ фазода скаляр кўпайтма аксиомаларининг бажарилишини текшириш қийин эмас.

Демак, тўлдирилган скаляр кўпайтма киритилган фазо Гильберт фазосидан иборат бўлади.

3. $L[a,b]$ **Лебег фазоси.** $L[a,b]$ Лебег фазосини $\tilde{L}_1[a,b]$ нормаланган фазонинг тўлдирилишдан ҳосил бўлган Банах фазоси сифатида аниқлаймиз. Бу ерда $\tilde{L}_1[a,b]$ нормаланган фазонинг элементлари $[a,b]$ ораликда аниқланган узлуксиз функциялар бўлиб, бунда $x(t)$ функциянинг нормаси

$$\|x(t)\| = \int_a^b |x(t)|\,dt$$

тенглик орқали аниқланган бўлади.

$[a,b]$ ораликда аниқланган $\{x_n(t)\}$ ва $\{x_n^*(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетликлари берилган бўлсин. Агар $\{x_n(t) - x_n^*(t)\}$ кетма–кетлик $\tilde{L}_1[a,b]$ нормаланган фазода чексиз кичик бўлса, яъни $n \to \infty$ да

$$\|x_n(t) - x_n^*(t)\| = \int_a^b |x_n(t) - x_n^*(t)|\,dt \to 0$$

бўлса, у ҳолда $\{x_n(t)\}$ ва $\{x_n^*(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетликлари $\tilde{L}_1[a,b]$ нормаланган фазода эквивалент ёки ўртача маънода эквивалент деб айтилади.

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер мавжуд бўлиб, ихтиёрий $n \geq N$ учун ва ихтиёрий $p \in N$ натурал сони учун

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \int_a^b |x_{n+p}(t) - x_n(t)|\,dt < \varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $[a,b]$ ораликда аниқланган $\{x_n(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлиги $\tilde{L}_1[a,b]$ нормаланган фазода фундаментал ёки ўртача маънода фундаментал деб айтилади.

Тўлдириш ҳақидаги теоремага асосан $L[a,b]$ Лебег фазоси ўртача маънода эквивалент ва ўртача маънода фундаментал бўлган узлуксиз функциялар кетма–кетлигининг синфидан иборат бўлган $\hat{x}$ элементлардан тузилган бўлади.

Ўртача маънода фундаментал бўлган $[a,b]$ ораликда аниқланган $\{x_n(t)\}$ ва $\{x_n^*(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетликлари битта $\hat{x}(t)$ синфдан бўлишлиги учун уларнинг ўртача маънода эквивалент бўлишлиги зарур ва етарлидир. Агар $\{x_n(t)\} \in \hat{x}(t)$ бўлса, у ҳолда таъриф бўйича

$$\|\hat{x}\|_{L[a,b]} = \lim_{n\to\infty}\int_a^b |x_n(t)|dt = \lim_{n\to\infty}\|x_n(t)\|_{\tilde{L}_1[a,b]} \qquad (4.1.4)$$

тенглик билан аниқланади.

Худди шунга ўхшаш иррационал сонларни қандайдир идеал элемент сифатида қараб уни исталган аниқликда рационал сонлар билан яқинлаштириш мумкинлигини ҳосил қилганимиздек, $L[a,b]$ Лебег фазосининг элементларини қандайдир идеал функциялар сифатида қараб уларни исталган аниқликда узлуксиз функциялар билан ўртача маънода яқинлаштириш мумкинлигини ҳосил қиламиз.

Бундан ташқари (4.1.4) ифодани $|\hat{x}(t)|$ функциядан олинган Лебег интеграли деб атаймиз, бунда $\hat{x}(t) \in L[a,b]$ бўлади.

Таърифга кўра, (4.1.4) ифода

$$\int_a^b |\hat{x}(t)|dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b |x_n(t)|dt$$

шаклида бўлиб, бунда чап томондаги Лебег интеграли, ўнг томондаги эса Риман интегралидир.

$L[a,b]$ Лебег фазосининг қандайдир идеал элементларини (синфларини) қандайдир аниқ функцияларга мос қилиб қўйиш мумкин, бу функциялар умуман олганда узилишга эга бўлган функциялар бўлди.

Авваламбор шуни таъкидлаш керакки, тўлдириш ҳақидаги теоремага асосан $L[a,b]$ Лебег фазоси $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган барча функцияларни сақлайди. Буни қуйидаги маънода тушуниш мумкин. Ўзининг вакили сифатида $\{x(t)\}$, бунда $x(t)$ функция $[a,b]$ оралиқда аниқланган узлуксиз функция бўлган стационар синфни қараймиз. Бу синфни биз $x(t)$ функция билан мос қилиб қўямиз ва уни ҳам $x(t)$ орқали белгилаймиз. $x(t)$ функциядан фарқли равишда $x(t)$ синф узилишга эга бўлган функцияларни ҳам сақлайди. Масалан, $x(t)$ функциядан чекли сондаги нуқталарда фарқ қилувчи функциялардир.

Бу ғояни қуйидаги йўналишда янада ривожлантириш мумкин:

қандайдир узилишга эга бўлган функцияни фундаментал бўлган узлуксиз функциялар кетма–кетлигининг $\tilde{L}_1[a,b]$ нормаланган фазо метрикаси бўйича лимити сифатида талқин этиш мумкин.

бундай узилишга эга бўлган ҳар бир функцияни $L[a,b]$ фазодаги қандайдир синфга мослаш мумкин. Бу ишни биз кейинги параграфда тўлиқ амалга оширамиз. $L[a,b]$ фазонинг ҳар қандай элементи билан умуман олганда узилишга эга бўлган қандайдир оддий функция ўртасида мослик ўрнатиш мумкинлигини кўрсатамиз. Бу тўлдириш ҳақидаги теоремага асосланган мулоҳазада Лебег интегралининг конструкцияси ётади.

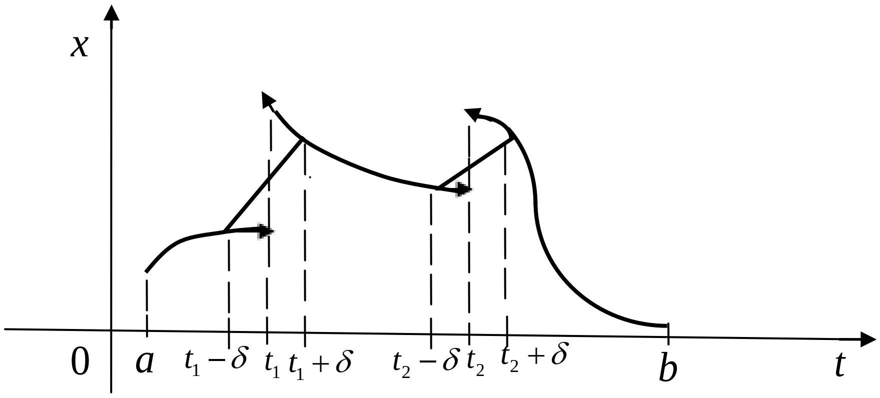
Бу ерда биз қуйидаги иккита мисолни қараб чиқамиз.

1–мисол. $x(t)$ функция чекли сондаги нуқталарда 1–турдаги узилишга эга ва $[a,b]$ оралиқнинг қолган нуқталарида узлуксиз бўлган функция бўлсин. У ҳолда ўртача маънода фундаментал бўлган $\{x_n(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлиги мавжуд бўлиб $x(t)$ функцияга ўртача маънода яқинлашувчи бўлади.

$x(t)$ функция $a < t_1 < t_2 < ....t_l < b$ нуқталарда узилишга эга бўлсин, бунда $x(t_k) = \dfrac{x_+(t_k) + x_-(t_k)}{2}$ бўлиб, $x_+(t_k)$ ва $x_-(t_k)$ орқали $x(t)$ функциянинг t_k нуқтадаги мос ўнг ва чап лимитларидир. Ҳар бир t_k узилиш нуқтасини $(t_k - \delta, t_k + \delta)$ атроф билан ўраб оламиз, бунда $a < t_1 - \delta,\ t_l + \delta < b$ тенгсизликлар ўринли бўладиган қилиб ва бу атрофлар ўзаро кесишмайдиган қилиб δ сонни етарлича кичик танлаймиз. Энди биз

$$x_n(t)=\begin{cases} x(t), \quad t\in[a,b]\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{l}\left(t_k-\dfrac{\delta}{n},\ t_k+\dfrac{\delta}{n}\right), \\[2ex] \dfrac{x\left(t_k+\dfrac{\delta}{n}\right)-x\left(t_k-\dfrac{\delta}{n}\right)}{2\dfrac{\delta}{n}}\left(t-t_k+\dfrac{\delta}{n}\right)+x\left(t_k-\dfrac{\delta}{n}\right), \\[2ex] \quad \text{агар } t\in\left(t_k-\dfrac{\delta}{n},\ t_k+\dfrac{\delta}{n}\right), k=1,...,l \end{cases}$$

узлуксиз функциялар кетма–кетлигини аниқлаймиз.



Бундай қурилган $\{x_n(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлиги $\tilde{L}_1[a,b]$ нормаланган фазо метрикаси бўйича фундаментал бўлган кетма–кетлик бўлади. $M=\sup\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$ бўлсин. У ҳолда $\sup\limits_{t\in[a,b]}|x_n(t)|\le M$ бўлади. $n\to\infty$ да

$$\|x_{n+p}-x_n\|=\int\limits_a^b |x_{n+p}(t)-x_n(t)|dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{t_k-\frac{\delta}{n}}^{t_k+\frac{\delta}{n}} |x_{n+p}(t)-x_n(t)|dt\le 2Ml\frac{2\delta}{n}=\frac{4Ml\delta}{n}\to 0$$

бўлади. Демак, $\{x_n(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлиги фундаментал бўлган кетма–кетлик бўлади. Худди шунингдек, $n\to\infty$ да шу норма бўйича $x_n(t)\to x(t)$ эканлигини кўрсатиш мумкин. Шунинг учун $\{x_n(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлигини сақлайдиган синф сифатида $x(t)$ узилишга эга бўлган функцияни мос қўйиш мумкин бўлади.

2–мисол. Ҳозирга қадар биз 1– тур узилиш ҳақида гапирган эдик. Энди $\frac{1}{\sqrt{t}} \in L[0,2]$ эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, \ t \in \left[\frac{1}{n}, 2\right] \\ \\ \sqrt{n}, \ t \in \left[0\,, \ \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

функциялар кетма–кетлигини қараймиз. У ҳолда

$$\left\|x_{n+p} - x_n\right\| = \int\limits_0^2 \left|x_{n+p}(t) - x_n(t)\right| dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{n+p}} \left(\sqrt{n+p} - \sqrt{n}\right) dt + \int\limits_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{n}\right) dt \le$$

$$\le \frac{\sqrt{n+p} - \sqrt{n}}{n+p} + \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{n}\right) dt =$$

$$= \frac{p}{(n+p)(\sqrt{n+p} + \sqrt{n})} + \left(2\sqrt{t} - t\sqrt{n}\right)_0^{\frac{1}{n}} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{2}{\sqrt{n}}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Демак, $\left\|x_{n+p} - x_n\right\| \le \frac{2}{\sqrt{n}}$ тенгсизлик ҳосил бўлади, яъни $\{x_n(t)\}$ фундаментал кетма–кетлик бўлади. Бундан ташқари, $n \to \infty$ да

$$\int\limits_0^2 x_n(t) dt \to \int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

бўлади, бунда ўнг томондаги интегрални хосмас интеграл маъносида тушуниш керак.

1 ва 2 мисоллардаги фикрларни жамлаб қуйидаги теоремани исботлаш мумкин бўлади.

2–теорема. *$x(t)$ функция $[a,b]$ оралиқда аниқланган ва чекли сондаги нуқталарда узилишга эга бўлиб*

$$\int_a^b |x(t)|dt$$

яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда $[a,b]$ оралиқда ўртача маънода фундаментал бўлган $\{x_n(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлиги мавжуд бўлиб $n\to\infty$ да

$$\int_a^b |x_n(t)-x(t)|dt \to 0$$

бўлади (бундаги интегрални хосмас интеграл маъносида тушуниш керак) ва шунга кўра $x(t)\in L\,[a,b]$ бўлади.

4. $L_p(G),\ p\ge 1$ Лебег фазоси. Олдинги пунктдаги қаралган фазони бир оз умумийроқ бўлган ҳолга ўтказишни қараймиз. G тўплам R^n фазодаги чегараланган соҳа бўлсин. $\bar{G}$ эса шу G соҳанинг ёпиғи бўлсин. $L_p(G),\ p\ge 1$ Лебег фазоси $\tilde{L}_p(\bar{G}),\ p\ge 1$ чизиқли нормаланган фазонинг тўлдирувчиси сифатида аниқланади.

$L_p(G),\ p\ge 1$ Лебег фазосининг элементлари $L[a,b]$ Лебег фазосидагидек қандайдир “функциялар” бўлиб унга $\bar{G}$ ёпиқ соҳада аниқланган узлуксиз функциялар билан ўртача яқинлашиш маъносида исталган аниқликда яқинлаштириш мумкин бўлади, $\tilde{L}_p(\bar{G}),\ p\ge 1$ чизиқли нормаланган фазо $L_p(G),\ p\ge 1$ Лебег фазосида зич бўлади.

Агар $n,m\to\infty$ да $\bar{G}$ ёпиқ тўпламда аниқланган $\{u_n(x)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлиги учун

$$\|u_n-u_m\|^p_{\tilde{L}_p(\bar{G})}=\int_{\bar{G}} |u_n(x)-u_m(x)|^p\,dx\to 0$$

бўлса, у ҳолда $\bar{G}$ ёпиқ тўпламда аниқланган $\{u_n(x)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлиги $\tilde{L}_p(\bar{G}),\ p \geq 1$ чизиқли нормаланган фазода фундаментал ёки $p-$ даражали ўртача маънода фундаментал деб айтилади.

Агар $\{u_n(x) - u_n^*(x)\}$ кетма–кетлик $\tilde{L}_p(\bar{G}),\ p \geq 1$ нормаланган фазода чексиз кичик бўлса, яъни $n \to \infty$ да

$$\|u_n(x) - u_n^*(x)\|_{\tilde{L}_p(\bar{G})}^p = \int\limits_{\bar{G}} |u_n(x) - u_n^*(x)|^p \, dx \to 0$$

бўлса, у ҳолда $\{u_n(x)\}$ ва $\{u_n^*(x)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетликлари $\tilde{L}_p(\bar{G}),\ p \geq 1$ нормаланган фазода эквивалент ёки $p-$ даражали ўртача маънода эквивалент деб айтилади. Бу иккала ҳолда ҳам $\bar{G}$ ёпиқ тўплам бўйича олинган n–каррали Риман интеграли назарда тутилган.

Тўлдириш ҳақидаги теоремага мос $L_p(G)$ Лебег фазосининг элементлари $p-$ даражали ўртача маънода фундаментал бўлган $\bar{G}$ ёпиқ тўпламда аниқланган $\{u_n(x)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлигининг $\hat{u}(x)$ синфларидир.

Шуни алоҳида таъкидлаш керакки, $L_2(G)$ фазо $\tilde{L}_2(\bar{G})$ скаляр кўпайтма киритилган фазонинг тўлдирувчиси бўлади. $L_2(G)$ фазода скаляр кўпайтмани

$$(u,v) = \lim_{n\to\infty}(u_n, v_n) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\bar{G}} u_n(x)\,\overline{v_n(x)}\,dx$$

тенглик билан аниқлаймиз, бунда $u(x)$ ва $v(x)$ синфлар, $\{u_n(x)\}$ ва $\{v_n(x)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлиги эса мос равишда уларнинг вакиллари, яъни ўртача маънода фундаментал бўлган узлуксиз функциялар кетма–кетликларидир. Таърифга кўра, $u(x), v(x) \in L_2(G)$ элементлар учун (u,v) скаляр кўпайтма $u(x)\overline{v(x)}$ функциядан G соҳа бўйича олинган n–каррали Лебег интегралидир, яъни

$$\int\limits_{\bar{G}} u(x)\,\overline{v(x)}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\bar{G}} u_n(x)\,\overline{v_n(x)}\,dx$$

бўлади. Хусусан, $\{1\}, x \in G$ кетма–кетлик вакили бўлган $v(x)=1$ синфни танласак, у ҳолда $u(x) \in L_2(G)$ учун

$$\int\limits_{\bar{G}} u(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bar{G}} u_n(x)\ dx$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Ихтиёрий $u(x) \in L_2(G)$ синф учун Лебег интеграли шу синф вакили Риман интегралининг лимити деб аниқлашимиз мумкин. Бундай аниқланган Лебег интеграли Риман интегралининг бир қатор маълум бўлган хоссаларини қаноатлантиради. $\bar{G}$ соҳа бўйича Лебег интеграли назариясини ҳам оралиқ бўлган ҳол учун қуйида келтириладиган назария сингари қараш ҳам мумкин.

5. Нормаланган ва Банах фазоларида изоморфизм, изометрия ва ичма–ич жойлашиш.

E ва $\tilde{E}$ чизиқли нормаланган фазолар берилган бўлсин.

1–таъриф. Агар $\tilde{x} = J(x)$ чизиқли акслантириш мавжуд бўлиб, бу акслантириш ёрдамида E ва $\tilde{E}$ фазолар ўртасида чизиқли фазо сифатида изоморфизм ўрнатилган ва шундай бир $\alpha > 0$ ва $\beta > 0$ ўзгармас сонлар мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in E$ учун

$$\alpha\|x\| \le \|J(x)\| \le \beta\|x\|$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда E ва $\tilde{E}$ чизиқли нормаланган фазолар *изоморф фазолар* деб айтилади.

Агар, хусусан $\alpha = \beta = 1$, яъни $\|J(x)\| = \|x\|$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу E ва $\tilde{E}$ чизиқли нормаланган фазолар *чизиқли изометрик фазолар* деб айтилади.

Мисол. Ихтиёрий n–ўлчамли E ҳақиқий чизиқли нормаланган фазо R^n фазога изморф бўлади. Демак, барча n–ўлчамли ҳақиқий чизиқли нормаланган фазолар ўзаро бир-бирига изморф бўлган фазолардир. Худди шунингдек, ихтиёрий n–ўлчамли W комплекс чизиқли нормаланган фазо C^n фазога изморф бўлади. Демак, барча n–ўлчамли комплекс чизиқли нормаланган фазолар ҳам ўзаро бир-бирига изморф бўлган фазолардир.

Юқоридаги келтирилган таърифда E ва $\tilde{E}$ чизиқли нормаланган фазолар олдиндан берилган X чизиқли фазода ҳар хил нормаларни киритиш орқали ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда айрим ҳолларда J чизиқли акслантириш сифатида E ва $\tilde{E}$ чизиқли нормаланган фазоларни шу олдиндан берилган X чизиқли фазодаги элементни шу элементга мос қўйиш билан аниқлаш ҳам мумкин бўлади. Бу ҳолда J чизиқли акслантириш табиий изоморфизм деб айтилади.

Изоморфизм тушунчасига нисбатан бир оз умумийроқ бўлган тушунча сифатида нормаланган фазонинг бошқа бир нормаланган фазода жойлашганлиги тушунчасини ҳам киритиш мумкин бўлади, бунда фазоларнинг биттаси ёки ҳар иккаласи ҳам Банах фазоси бўлиши мумкин.

2–таъриф. Агар $\tilde{x} = J(x)$ чизиқли акслантириш мавжуд бўлиб, бу акслантириш бутун E нормаланган фазони $\tilde{E}$ нормаланган фазога акслантирсин ва шундай бир $\beta > 0$ ўзгармас сон мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in E$ учун

$$\|J(x)\| \leq \beta \|x\|$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда E нормаланган фазо $\tilde{E}$ нормаланган фазода *жойлашган* деб айтилади.

Масалан, ҳар бир $p \geq 1$ учун $C[a,b]$ фазо $\tilde{L}_p[a,b]$ фазода жойлашган бўлади.

Агар, хусусан, E ва $\tilde{E}$ чизиқли нормаланган фазолар олдиндан берилган X чизиқли фазода ҳар хил нормаларни киритиш орқали ҳосил қилинган ва унинг D чизиқли кўпхиллигида J чизиқли акслантириш сифатида E ва $\tilde{E}$ чизиқли нормаланган фазоларни шу олдиндан берилган X чизиқли фазодаги элементни шу элементга мос қўйиш билан аниқлаш танланган бўлса, у ҳолда E ва $\tilde{E}$ чизиқли нормаланган фазоларнинг табиий жойлашиши ҳақида гапириш мумкин бўлади. Агар $\|J(x)\| = \|x\|$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу E нормаланган фазонинг $\tilde{E}$ нормаланган фазода жойлашганлигини изометрик деб айтилади.

Энди фазоларнинг жойлашишига мисоллар келтирамиз.

1^0. Ҳар бир $k < n$ учун R^k фазо R^n фазода жойлашган бўлади.

2^0. Ҳар бир $l_2^{(m)}$ фазо l_2 фазода жойлашган бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, агар

$$J\left((x_i)_{i=1}^m\right)=(y_i)_{i=1}^\infty$$

мосликни

$$y_i=\begin{cases} x_i\,, \text{ агар } & i=1,2,...,m \text{ бўлса };\\ 0\,, \text{ агар } & i>m \quad \text{ бўлса}\end{cases}$$

тенглик билан қабул қилинган бўлса, у ҳолда $l_2^{(m)}$ фазо l_2 фазода жойлашган бўлади.

3^0. Тўлдириш ҳақидаги теоремага кўра, ҳар қандай тўла бўлмаган нормаланган фазо ўзининг тўлдирувчиси бўлган Банах фазосида изометрик ва зич жойлашган бўлиши мумкин бўлади.

Иккита E_0 ва E_1 Банах фазоларидан бирининг иккинчисида жойлашганлиги ҳақидаги тушунчасини ҳам бериш мумкин.

3–таъриф. Агар

1^0. $x\in E_1$ эканлигидан $x\in E_0$ эканлиги келиб чиқса;

2^0. E_0 фазо E_1 фазода шу E_1 вектор фазонинг структураси билан устма–уст тушувчи вектор фазо структурасини яратса;

3^0. Шундай бир $C_{01}>0$ ўзгармас сон мавжуд бўлиб ихтиёрий $x\in E_1$ учун

$$\|x\|_{E_0}\le C_{01}\|x\|_{E_1} \tag{4.1.5}$$

тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда E_1 *Банах фазоси* E_0 *Банах фазосида жойлашган* деб айтилади. Бу (4.1.5) тенгсизликни қаноатлантирувчи мумкин бўлган C_{01} ўзгармас сонларнинг энг кичиги E_1 фазонинг E_0 фазога *жойлашганлик ўзгармаси* деб айтилади.

Айрим ҳолларда “*жойлашиш*” термини бир оз кенгроқ маънода ҳам қўлланилади. Бу 1^0 ва 2^0 талаблар ўрнига шундай бир j (*жойлашиш оператори*) инъектив чизиқли акслантириш мавжуд бўлиб, бу акслантириш E_1 фазони E_0 фазога ўтказади ва бу ҳолда (4.1.5) шарт $\|jx\|_{E_0}\le C_{01}\|x\|_{E_1}$ шаклида ёзилади.

3^0 шартни унга эквивалент бўлган қуйидаги шарт билан ҳам алмаштириш мумкин: агар E_1 фазода $x_n\to x$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда E_0 фазода ҳам $x_n \to x$ яқинлашувчи бўлади. Бундай шаклдаги жойлашиш таърифи чизиқли топологик фазоларга ҳам қўлланилади ва бу ҳолда E_1 фазо E_0 фазода алгебраик ва топологик жойлашган деб айтилади.

4–таъриф. Агар 3–таърифдаги 1^0–3^0 шартлар бажарилиши билан бирга,

4^0. E_1 фазо E_0 фазода зич бўлса, у ҳолда E_1 фазо E_0 фазода *зич жойлашган* деб айтилади.

5–таъриф. Агар 3–таърифдаги 1^0–3^0 шартлар бажарилиши билан бирга,

5^0. E_1 фазо нормаси бўйича чегараланган ҳар қандай тўплам E_0 фазода нисбий компакт бўлса, у ҳолда E_1 фазо E_0 фазода *компакт жойлашган* деб айтилади.

Кейинчалик E_1 фазо E_0 фазода жойлашганлигини $E_1 \subset E_0$ символ орқали белгилаймиз. Бу ерда $\subset$ символ нафақат назарий–тўплам маъносида жойлашишни, балки 2^0 ва 3^0 шартларни қаноатлантиргани ҳолда жойлашишни билдиради.

Агар E_1 фазо E_0 фазода жойлашган бўлса, у ҳолда E_1 фазода янги бир $\|x\|^*_{E_1} = C_{01}\|x\|_{E_1}$ нормани киритиш мумкин. У ҳолда бу норма киритилган E_1^* фазо E_1 фазога изоморф бўлади ва

$$\|x\|_{E_0} \le \|x\|^*_{E_1}$$

тенгсизлик ўринлидир. Бу тенгсизлик билан боғлиқ қуйидаги таърифни киритамиз.

6–таъриф. Агар E_1 фазо E_0 фазода зич жойлашган ва C_{01} жойлашиш ўзгармаси бирдан катта бўлмаса, яъни

$$\|x\|_{E_0} \le \|x\|^*_{E_1}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда E_1 фазо E_0 фазода нормал жойлашган деб айтилади.

Нормал жойлашган Банах фазоларига мисоллар келтирамиз.

$E_0 = C[0,1]$ –узлуксиз функциялар фазоси ва $E_1 = C^{(1)}[0,1]$ – узлуксиз дифференциалланувчи функциялар фазоси бўлсин. У ҳолда $C^{(1)}[0,1]$ фазо $C[0,1]$ фазода нормал жойлашган бўлади, чунки $C^{(1)}[0,1]\subset C[0,1]$ ва

$$\|x\|_{C[0,1]}=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|\leq\max_{t\in[0,1]}|x(t)|+\max_{t\in[0,1]}|x'(t)|=\|x\|_{C^{(1)}[0,1]}$$

тенгсизлик ўринлидир.

Бундан ташқари, Вейерштрасс теоремасига кўра M алгебраик кўпҳадлар тўплами $C[0,1]$ фазода зич бўлади. Шунга кўра, $C^{(1)}[0,1]\supset M$ фазо ҳам $C[0,1]$ фазода зич бўлади. Ниҳоят, Арцела теоремасига кўра $C^{(1)}[0,1]$ фазо $C[0,1]$ фазода компакт жойлашган бўлади. Худди шунингдек, агар $n>m$ бўлса, у ҳолда n марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлган $C^{(n)}[0,1]$ фазо $C^{(m)}[0,1]$ фазода нормал ва компакт жойлашган бўлади. Нормал жойлашган фазоларга бошқа бир мисол сифатида $L_p(G)$ фазоларни келтириш мумкин.

$G\subset R^n$ чегараланган соҳа бўлсин. $1\leq p<\infty$ бўлган сон учун ҳақиқий қийматли ёки комплекс қийматли p–даражаси билан G соҳада жамланувчи бўлган ўлчовли функциялар тузилган $L_p(G)$ фазони қараймиз. $p=\dfrac{2}{1-\alpha}$ бўлган $L_p(G)$ фазони L^α орқали белгилаймиз ва ундаги нормани

$$\|x\|_{L^\alpha}=(mesG)^{\frac{\alpha-1}{2}}\|x\|_{L_p(G)}$$

формула бўйича киритамиз.

Агар $\beta>\alpha$ бўлса, у ҳолда L^β фазо L^α фазода нормал жойлашган бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $\beta>\alpha$ бўлса, у ҳолда $L^\alpha\supset L^\beta$ ва Гёльдер тенгсизлигига кўра $x\in L^\beta$ учун

$$\|x\|_{L^\alpha}=(mesG)^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(\int_G|x(t)|^{\frac{2}{1-\alpha}}dt\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}\leq$$

$$\leq(mesG)^{\frac{\alpha-1}{2}}(mesG)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}\left(\int_G|x(t)|^{\frac{2}{1-\beta}}dt\right)^{\frac{1-\beta}{2}}=\|x\|_{L^\beta}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Чекли қийматли ўлчовли функциялар тўплами $-1 \le \alpha < 1$ учун ихтиёрий L^{α} фазода зич бўлади. Шунга кўра L^{β} фазо L^{α} фазода зич бўлади.

L^{β} фазонинг L^{α} фазода жойлашиши компактлик хоссасига эга эмаслигини кўрсатиш мумкин.

Худди шунга ўхшаш, агар $p < q$ бўлса, у ҳолда l_p кетма–кетликлар фазоси l_q кетма–кетликлар фазосида нормал жойлашган бўлади.

Қуйидаги ҳолатга эътиборни қаратиш керак бўлади: E_1 фазо E_0 фазода зич жойлашган бўлиши мумкин, бироқ E_1 фазодаги шарнинг E_0 фазодаги ёпиғи E_0 фазо нормаси маъносида ички нуқталарни сақламаслиги мумкин. Бунга қараганда ҳам умумийроқ бўлган қуйидаги тасдиқ ўринлидир:

1–лемма. *Агар E_1 Банах фазоси E_0 Банах фазосида жойлашган ва у билан устма–уст тушмаса, у ҳолда E_1 фазодаги ихтиёрий шарнинг E_0 фазодаги ёпиғи E_0 фазонинг ҳеч бир жойида зич бўлмайди.*

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик. E_1 Банах фазосидаги S_1 бирлик шарнинг E_0 фазодаги $\overline{S_1^0}$ ёпиғи E_0 фазонинг нормаси маъносида маркази x_0 нуқтада ва радиуси $2r$ бўлган $\sigma_{2r}(x_0)$ шарни сақласин. У ҳолда $\dfrac{y - x_0}{2} \in \overline{S_1^0}$ нуқта бўлади, бунда $y \in \sigma_{2r}(x_0)$ нуқта, маркази ноль нуқтада бўлган $\sigma_r(0)$ шар $\overline{S_1^0}$ шарга қарашли бўлади. Шундай қилиб, S_k шарнинг E_0 фазодаги $\overline{S_k^0}$ ёпиғи маркази ноль нуқтада бўлган $\sigma_{kr}(0)$ шарни сақлайди. Ихтиёрий $z \in \sigma_r(0)$ элемент бўлсин. У ҳолда шундай бир $x_1 \in S_1$ элемент мавжудки, бунда $\|z - x_1\|_{E_0} \le \dfrac{r}{2}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса, шундай бир $x_2 \in S_{\frac{1}{2}}$ элемент мавжудки, бунда $\|z - x_1 - x_2\|_{E_0} \le \dfrac{r}{2^2}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу жараённи давом эттириб биз шундай бир $x_n \in S_{2^{1-n}}$ элементлар кетма–кетлигини қурамизки, бунда $\|z-x_1-x_2-\ldots-x_n\|_{E_0}\le r\,2^{-n}$ тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда $z=\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ ва бу қатор E_1 фазо нормаси бўйича яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун $z\in E_1$ бўлади. Шундай қилиб биз қарама–қарши бўлган $E_1=E_0$ хулосага келамиз. Бу эса леммани исбот қилади.

6. Нисбий тўлдирувчи. E_1 Банах фазоси E_0 Банах фазосида жойлашган, яъни $E_1\subset E_0$ бўлсин. Биз E_{01} орқали E_0 фазодан олинган ва E_1 фазо нормаси бўйича чегараланган E_1 фазодаги элементлар кетма–кетлигининг E_0 фазодаги лимити бўлган барча элементлар тўпламини белгилаймиз:

$$x\in E_{01}:\ x=\lim_{n\to\infty}x_n\ \left(E_0 \text{ фазода}\right),\ x_n\in E_1 \text{ ва } \|x_m\|_{E_1}\le R. \quad (4.1.6)$$

Кўриниб турибдики, E_{01} тўплам E_0 фазодаги чизиқли кўпхилликдан иборат бўлади. Унда нормани

$$\|x\|_{01}=\inf R$$

тенглик билан киритиш мумкин бўлади, бунда аниқ қуйи чегара (4.1.6) хоссаларга эга бўлган мавжуд x_n кетма–кетликлар учун ўринли бўлган барча R сонлар бўйича олинган. Бу $\|x\|_{01}$ миқдор норманинг барча аксиомаларини қаноатлантиришини текширамиз. (4.1.5) тенгсизликдан $\|x_n\|_{E_0}\le C_{01}\|x_n\|_{E_1}\le C_{01}R$ тенгсизлик келиб чиқади ва E_0 фазода $x_n\to x$ яқинлашувчи эканлигидан $\|x\|_{E_0}\le C_{01}R$ тенгсизлик ҳам келиб чиқади. Бундан эса, $\|x\|_{E_0}\le C_{01}\|x\|_{01}$ тенгсизлик келиб чиқади ва хусусан, $\|x\|_{01}=0$ тенглик фақат $x=0$ учунгина ўринли бўлади. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма–кетликлар x ва y элементларга нисбатан (4.1.6) хоссаларга эга бўлган кетма–кетликлар бўлиб, унга R ва R_1 ўзгармаслар мос келган бўлса, у ҳолда

$$x_n+y_n\to x+y\ \left(E_0 \text{ фазода}\right) \text{ ва } \|x_n+y_n\|_{E_1}\le R+R_1$$

бўлади. Бундан эса, $\|x+y\|_{01} \le R+R_1$ эканлигини ҳосил қиламиз ва аниқ қуйи чегарага ўтиш йўли билан $\|x+y\|_{01} \le \|x\|_{01} + \|y\|_{01}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Агар $x \in E_1$ бўлса, у ҳолда $x_n \equiv x$ деб олсак E_{01} фазонинг нормаси таърифидан $\|x\|_{01} \le \|x\|_{E_1}$ тенгсизлик келиб чиқади.

E_{01} фазонинг қурилишига кўра қуйидагича геометрик маъно бериш мумкин бўлади. $x \in E_{01}$ ва $\|x\|_{01} = r$ бўлсин. У ҳолда таърифга кўра x элемент $R > r$ радиусли E_1 фазодан олинган ихтиёрий шарнинг E_0 фазодаги ёпиғига тегишли бўлади. $R_k \to r$ бўлган кетма–кетликни олиб ва ҳар бир R_k учун (4.1.6) хоссаларга эга бўлган мос $\{x_n{}'\} \subset E_1$ кетма–кетликни E_0 фазода $x_n{}' \to x$ ва $k \to \infty$ да $\| x_n{}' \|_{E_1} \to r$ яқинлашувчи бўладиган қилиб қуриш мумкин. У ҳолда E_0 фазода $k \to \infty$ да $\overline{x}_k = r x_k{}' \left(\| x_k{}' \|_{E_1} \right)^{-1} \to x$ ва $\| \overline{x}_k \|_{E_1} = r$ бўлади. Шундай қилиб x элемент E_1 фазодан олинган r радиусли шар(ҳаттоки сфера)нинг E_0 фазодаги ёпиғига тегишли бўлади ва кичик радиусли шарларнинг ёпиғига тегишли бўлмайди.

Демак, E_{01} фазодаги шар шундай радиусли E_1 фазодаги шарнинг E_0 фазодаги ёпиғидан иборат бўлади.

Бу E_{01} нормаланган фазонинг тўла фазо эканлигини исбот қиламиз.

E_{01} нормаланган фазодаги $\{x^{(k)}\}$ фундаментал кетма–кетлик бўлсин. У ҳолда $\|x\|_{E_0} \le C_{01} \|x\|_{01}$ тенгсизликка кўра бу кетма–кетлик E_0 фазода фундаментал кетма–кетлик бўлади. E_0 фазода $x^{(k)} \to x$ яқинлашувчи бўлсин. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $m \ge N$ ва $l \ge N$ учун $\left\| x^{(m)} - x^{(l)} \right\| \le \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Бу эса $x^{(m)} - x^{(l)}$ элемент E_1 фазодаги $\varepsilon > 0$ радиусли шарнинг E_0 фазодаги ёпиғига тегишли эканлигини билдиради. E_0 фазода $l \to \infty$ да $x^{(m)} - x^{(l)} \to x^{(m)} - x$ яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун бу ёпиғига $x^{(m)}-x$ элемент ҳам тегишли бўлади, яъни $\left\|x^{(m)}-x\right\|_{01}\le\varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Демак, E_{01} фазода $k\to\infty$ да $x^{(k)}\to x$ яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун бу E_{01} фазо тўла фазо бўлади. Хулосаларни жамлаб биз шуни айтишимиз мумкинки, биз $E_1\subset E_{01}\subset E_0$ бўлган шундай бир E_{01} Банах фазосини қурдикки, бунда ихтиёрий $x\in E_1$ учун $\|x\|_{01}\le\|x\|_{E_1}$ тенгсизлик ва ихтиёрий $x\in E_{01}$ учун

$$\|x\|_{E_0}\le C_{01}\|x\|_{01} \tag{4.1.7}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар E_1 фазо E_0 фазода нормал жойлашган бўлса, у ҳолда (4.1.7) тенгсизликдан кўринадики, E_{01} фазо E_0 фазода нормал жойлашган бўлади.

E_{01} Банах фазоси E_0 фазога нисбатан E_1 фазонинг нисбий тўлдирувчиси деб айтилади.

2–лемма. *Агар E_1 Банах фазоси E_0 Банах фазосида жойлашган ва у билан устма–уст тушмаса, у ҳолда E_0 фазога нисбатан E_1 фазонинг E_{01} нисбий тўлдирувчиси ҳам E_0 фазо билан устма–уст тушмайди.*

Исбот. 1–леммага кўра E_1 Банах фазосидаги ихтиёрий S_r шарнинг E_0 фазодаги $\overline{S_r^0}$ ёпиғи E_0 фазонинг ҳеч бир жойида зич бўлмайди. Шунинг учун E_0 фазода $E_{01}=\bigcup\limits_{r\ge0}S_r$ тўплам биринчи категориядаги тўплам бўлади ва шунга кўра E_0 фазо билан устма–уст тушмайди.

3–лемма. *E_{01} фазонинг E_0 фазога нисбатан $\hat{E}_{01}$ тўлдирувчиси шу E_{01} фазо билан устма–уст тушади.*

Исбот. Агар $y\in\hat{E}_{01}$ бўлса, у ҳолда шундай бир $y_k\in E_{01}$ элементлар кетма–кетлиги мавжуд бўлиб, бунда $\|y_k\|_{01}=\|y\|_{\hat{E}_{01}}$ ва E_0 фазода $y_k\to y$ яқинлашувчи бўлади. Ҳар бир y_k учун E_0 фазода $n\to\infty$ да $x_n^{(k)}\to y_k$ яқинлашувчи бўлган кетма–кетлик мавжуд бўлиб, бунда $\left\|x_n^{(k)}\right\|_{E_1}=\|y_k\|_{E_{01}}=\|y\|_{\hat{E}_{01}}$ тенгликлар ўринли бўлади. Лекин бу ҳолда E_0 фазода $k \to \infty$ да $x_{n_k}^{(k)} \to y$ яқинлашувчи бўлган $x_{n_k}^{(k)}$ кетма–кетликни қуриш мумкинки, бунда $\left\| x_{n_k}^{(k)} \right\|_{E_1} = \|y\|_{\hat{E}_{01}}$ тенглик ўринли бўлади ва шунга кўра $y \in E_{01}$ бўлади. Бундан ташқари олдинги тенгликдан $\|y\|_{01} \leq \|y\|_{\hat{E}_{01}}$ тенгсизлик келиб чиқади ва ҳамма вақт ўринли бўлган тескари тенгсизликдан $\|y\|_{01} = \|y\|_{\hat{E}_{01}}$ тенглик ҳосил бўлади. Лемма исбот бўлди.

Агар $E_0 = L_1[0,1]$ фазо ва $E_1 = C[0,1]$ фазо бўлса, у ҳолда нисбий тўлдирувчи $E_{01} = L_\infty[0,1]$ фазодан иборат эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Худди шунингдек, агар $E_0 = C[0,1]$ ва $E_1 = C^{(1)}[0,1]$ фазо бўлса, у ҳолда $E_{01} = H_1[0,1]$– Липшиц шартини қаноатлантирувчи функциялар фазосидан иборат бўлади.

Нисбий тўлдирувчи фазонинг таърифидан E_1 ва E_{01} фазолар ўртасидаги боғлиқлик ҳақидаги қуйидаги тасдиқ ўринли бўлади.

4–лемма. *E_1 фазо E_{01} фазода изометрик жойлашган бўлишлиги учун E_1 фазодаги шар E_0 фазо нормаси бўйича яратилган E_1 фазонинг топологиясида ёпиқ бўлишлиги зарур ва етарлидир.*

Исбот. Агар қандайдир $x \in E_1$ элемент учун $\|x\|_{01} < \|x\|_{E_1}$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда E_0 фазода $x_n \to x$ яқинлашувчи ва $\|x_n\|_{E_1} = \|x\|_{01} = a$ тенглик ўринли бўладиган кетма–кетлик мавжуд бўлади. Бу эса E_1 фазодаги a радиусли шар E_0 фазо нормаси бўйича ёпиқ эмаслигини билдиради. Унинг x лимитик нуқтаси a радиусдан катта нормага эга бўлади.

Аксинча, агар a радиусли шар ёпиқ бўлмаса, у ҳолда $\|x\|_{E_1} > a$ тенгсизлик ўринли бўладиган шундай бир x нуқта топилади ва E_0 фазода $x_n \to x$ яқинлашувчи, ҳамда $\|x_n\|_{E_1} \leq a$ тенгсизлик ўринли бўладиган кетма–кетлик мавжуд бўлади.

Лекин бу ҳолда $\|x\|_{01} \le a < \|x\|_{E_1}$ бўлади. Бу эса леммани исбот қилади.

5–лемма. *E_1 фазо E_{01} фазода ёпиқ қисм тўплам бўлишлиги учун E_1 фазодаги шарнинг E_0 фазо нормаси бўйича яратилган E_1 фазонинг топологиясидаги ёпиғи E_1 фазода чегараланган тўплам бўлишлиги зарур ва етарлидир.*

Исбот. Банах теоремасига кўра E_1 фазо E_{01} фазода ёпиқ қисм тўплам бўлишлиги учун E_1 фазода $\|x\|_{E_1}$ ва $\|x\|_{01}$ нормаларнинг эквивалент бўлишлиги зарур ва етарлидир. Бу тасдиқдан фойдаланиб 5–лемма исботини худди 4–лемма исботи каби бажариш мумкин бўлади.

7–таъриф. Агар E_{01} фазо E_1 фазо билан изометрик устма–уст тушса, у ҳолда E_1 фазо E_0 фазога нисбатан тўла деб айтилади.

3–леммага кўра $\hat{E}_{01}$ фазо E_0 фазога нисбатан тўла бўлади. Хусусан, $L_\infty(0,1)$ фазо $L_1(0,1)$ фазога нисбатан тўла бўлади.

6–лемма. *Агар $E_1 \subset F \subset E_0$ бўлса, у ҳолда E_1 фазонинг F фазога нисбатан $E_{F,1}$ нисбий тўлдирувчиси жойлашиш ўзгармаси бирдан катта бўлмаган ҳолда E_{01} фазода жойлашган бўлади. Бу $E_{F,1}$ тўлдирувчиси фазо E_0 фазога нисбатан E_{01} фазо билан изометрик устма–уст тушади.*

Исбот. Агар $x \in E_{F,1}$ бўлса, у ҳолда $\|x_n\|_{E_1} = \|x\|_{E_{F,1}}$ тенглик ўринли бўладиган $x_n \in E_1$ кетма–кетлик мавжуд бўлиб F фазода $x_n \to x$ яқинлашувчи бўлади. $F \subset E_0$ жойлашишга кўра E_0 фазода $x_n \to x$ яқинлашувчи бўлади ва шунга кўра $x \in E_{01}$ ва $\|x\|_{E_{01}} \le \|x\|_{E_{F,1}}$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Шу билан бирга $E_{F,1}$ нисбий тўлдирувчи фазодаги бирлик шар E_0 фазога нисбатан $E_{F,1}$ фазодаги бирлик шарнинг E_0 фазодаги ёпиғини ифода қилади ва бу охирги шарда E_1 фазодаги бирлик шар F фазодаги нормага нисбатан зич бўлади. Шундай қилиб, $E_{F,1}$ нисбий тўлдирувчи фазодаги бирлик шар E_0 фазога нисбатан E_1 фазодаги бирлик шарнинг E_0 фазодаги ёпиғи билан устма–уст тушади, яъни E_{01} фазодаги бирлик шар билан устма–уст тушади.

1–натижа. Агар E_1 фазо E_0 фазога нисбатан тўла бўлса, у ҳолда бу E_1 фазо F фазога нисбатан ҳам тўла бўлади.

Масалан, $L_\infty(0,1)$ фазо $1 \le p < \infty$ учун барча $L_p(0,1)$ фазоларга нисбатан тўла бўлади.

2–натижа. Агар $E_{F,1}$ фазо E_0 фазога нисбатан тўла бўлса, у ҳолда бу $E_{F,1}$ тўлдирувчи фазо E_{01} тўлдирувчи фазо билан устма–уст тушади.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

28.1. $\alpha \ge 0$ бўлсин. $[0,+\infty)$ оралиқда берилган узлуксиз $x(t)$ функцияларнинг $\|x(t)\| = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \left|x(t)e^{\alpha t}\right|$ тенглик билан берилган нормаси чекли бўладиган тўпламини қараймиз. Бу берилган тўплам Банах фазоси эканлигини исбот қилинг.

28.2. $|z| \le 1$ ёпиқ доирада узлуксиз ва $|z| < 1$ очиқ доирада z ўзгарувчи бўйича аналитик бўлган $f(z)$ комплекс қийматли функцияларнинг нормаси $\|f(z)\| = \sup\limits_{|z|\le 1} |f(z)|$ тенглик билан берилган тўплам Банах фазоси эканлигини исбот қилинг.

28.3. Метрик фазоларни тўлдириш ҳақидаги теоремани исбот қилинг.

28.4. Ҳар қандай чекли ўлчамли чизиқли нормаланган фазо Банах фазоси эканлигини исбот қилинг.

28.5. Ҳар қандай Банах фазосининг қисм фазоси ҳам Банах фазоси эканлигини исбот қилинг.

28.6. X – чизиқли нормаланган фазонинг L – чизиқли кўпхиллиги бўлиб X фазонинг нормаси бўйича тўла фазо бўлсин. У ҳолда L шу X фазода ёпиқ, яъни қисм фазо эканлигини исбот қилинг.

28.7. X – Банах фазоси, $L \subset X$ – чизиқли кўпхиллик бўлсин. У ҳолда L тўпламнинг X фазо нормаси бўйича тўлдирувчиси шу L тўпламнинг ёпиғи билан устма–уст тушишини исбот қилинг.

28.8. X,Y–чизиқли нормаланган фазолар бўлсин. $J:X\to Y$ акслантириш бу фазолар ўртасидаги изоморфизм бўлсин. У ҳолда

а) $J:X\to Y$ узлуксиз акслантириш;

б) Бу $J:X\to Y$ акслантириш тескариланувчи ва тескари акслантириш ҳам узлуксиз эканлигини исботланг.

28.9. Ҳар қандай n–ўлчамли ҳақиқий чизиқли нормаланган фазо R^n фазога изоморф эканлигини исботланг.

28.10. X– Банах фазоси Y–чизиқли нормаланган фазога изоморф бўлса, у ҳолда Y–Банах фазоси эканлигини исботланг.

28.11. $Jx=x$ айний мос қўйиш $C[a,b]$ фазонинг $\tilde{L}_2[a,b]$ фазода жойлашганлигини ифода қилишини исботланг.

28.12. $Jx=x$ айний мос қўйиш ҳар бир k натурал сони учун $C^k[a,b]$ фазонинг $C[a,b]$ фазода жойлашганлигини ифода қилишини исботланг.

28.13. X – нормаланган фазо ва M – эса шу X нормаланган фазодаги қисм фазо бўлсин. $\overline{x}$ синфларнинг тўплами X/M фактор–фазо деб айтилади. Бунда $x_1\in\overline{x}$ ва $x_2\in\overline{x}$ қарашли бўлишлиги фақат ва фақат $x_1-x_2\in M$ қарашли бўлишлигини билдиради. $\alpha\overline{x}$ ва $\overline{x}+\overline{y}$ синфларни мос равишда αx ва $x+y$, бунда $x\in\overline{x}$ ва $y\in\overline{y}$ бўлган элементларни сақлайдиган синфлар сифатида аниқлаймиз. $\|\overline{x}\|=\inf\limits_{x\in\overline{x}}\|x\|$ формула билан берилган нормага нисбатан X/M фактор–фазо нормаланган фазо эканлигини исбот қилинг. Агар X тўла нормаланган фазо бўлса, у ҳолда X/M фактор–фазо ҳам тўла нормаланган фазо эканлигини исботланг.

28.14. Агар $X=C[0,1]$ ҳақиқий нормаланган фазо ва $M=\{\,x(t)\in C[0,1]:\ x(0)=0\}$ ундаги чизиқли кўпхиллик бўлса, у ҳолда X/M фактор–фазонинг R ҳақиқий сонлар фазосига изоморф эканлигини исбот қилинг.

28.15. $G\subset R^n$ чегараланган соҳа бўлсин. У ҳолда $1\le s<p$ учун $L_p(G)$ фазо $L_s(G)$ фазода жойлашган эканлигини исбот қилинг.

2-§. Лебег интеграли

Бу параграфда биз ҳар бир $\hat{x}(t) \in L[a,b]$ синфни қандайдир оддий функция, умуман олганда $[a,b]$ оралиқда узилишга эга бўлган функция билан мос қўйиш мумкинлигини ўрнатамиз, бундан ташқари бу мослик ўзаро бир қийматли мослик эканлигини кўрамиз.

1. Ўлчови нолга тенг бўлган тўпламлар. Эквивалент функциялар.

1–таъриф. Агар $M \subset [a,b]$ тўплам берилганда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун чекли ёки саноқли сондаги $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ оралиқлар системаси мавжуд бўлиб

1) M тўплам бу оралиқлар системаси билан қопланса, яъни

$$M \subset \bigcup_n [\alpha_n, \beta_n];$$

2) $[\alpha_n, \beta_n]$ оралиқлар узунликларининг йиғиндиси ε сондан кичик бўлса, яъни

$$\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда берилган $M \subset [a,b]$ тўплам ўлчови нолга тенг тўплам деб айтилади.

Масалан, чекли сондаги $t_1, t_2, ..., t_n \in [a,b]$ нуқталардан иборат тўплам ўлчови нолга тенг бўлади.

Иккинчи бир мисол сифатида ўлчови нолга тенг тўпламга барча рационал сонлар тўпламини келтириш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, $[a,b]$ оралиқдаги барча рационал сонлар тўплами саноқли тўпламни ташкил этади, яъни уларни номерлаб чиқиш мумкин бўлади: $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. У ҳолда берилган $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун ва ҳар бир r_n рационал сон учун $\left[r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right] = [\alpha_n, \beta_n]$ оралиқларни қурамиз. Бу оралиқлар учун

1) $r_n \in [\alpha_n, \beta_n]$ ва шунга кўра $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$ бўлади;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\beta_n - \alpha_n\right) < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ бўлади, яъни таърифга кўра $\left\{r_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ тўплам ўлчови нолга тенг бўлади.

Шуни таъкидлаш керакки, бу фикрни ихтиёрий саноқли тўпламга қўллаш мумкин бўлади ва демак, ҳар қандай саноқли тўплам ўлчови нолга тенг бўлади. Тескариси ҳамма вақт ҳам тўғри эмас, яъни ўлчови нолга тенг бўлган саноқли бўлмаган тўпламлар ҳам мавжуд бўлади.

Кўрсатиш мумкинки, чекли ёки саноқли сондаги ўлчови нолга тенг бўлган тўпламларнинг йиғиндиси ва ўлчови нолга тенг бўлган тўпламларнинг ихтиёрий сондаги кесишмаси ҳам ўлчови нолга тенг бўлган тўплам бўлади.

Агар қандайдир тасдиқ $[a,b]$ оралиқдаги ўлчови нолга тенг бўлган тўпламдан ташқаридаги барча t нуқталар учун ўринли бўлса, у ҳолда бу тасдиқ деярли ҳамма жойда тўғри деб айтилади.

2–таъриф. Агар $x_1(t)$ ва $x_2(t)$ функциялар деярли ҳамма жойда тенг бўлса, у ҳолда улар эквивалент функциялар деб айтилади ва

$$x_1(t) \sim x_2(t)$$

каби белгиланади.

Мисол. [0,1] оралиқда берилган

$$D(t) = \begin{cases} 1, & \text{агар } t \text{ рационал бўлса,} \\ 0, & \text{агар } t \text{ иррационал бўлса} \end{cases}$$

Дирихле функциясини қарайлик. Бу функция [0,1] оралиқда берилган айнан ноль функцияга эквивалент бўлади. Чунки $D(t) \neq 0$ бўлган нуқталар тўплами рационал сонлардан тузилган тўплам бўлиб унинг ўлчови нолга тенг эканлигини биз юқорида кўрдик.

Агар $x_1(t) \sim x_2(t)$ ва $y_1(t) \sim y_2(t)$ функциялар бўлса, у ҳолда $x_1(t) + y_1(t) \sim x_2(t) + y_2(t)$ ва $x_1(t) y_1(t) \sim x_2(t) y_2(t)$ эканлигини кўрсатиш мумкин бўлади.

2. Деярли ҳамма жойда яқинлашиш ва ўртача маънода яқинлашиш. Энди берилган $\left\{x_n(t)\right\}$ кетма–кетлик учун деярли ҳамма жойда унинг $x(t)$ функцияга тенг лимити мавжуд бўлсин. Бу фактни биз

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{д.х.ж.}{=} x(t)$$

каби ёзамиз ва $\{x_n(t)\}$ кетма–кетлик деярли ҳамма жойда $x(t)$ функцияга яқинлашади деб атаймиз.

Маълумки, агар $\{x_n(t)\}$ кетма–кетлик ўртача маънода яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу $\{x_n(t)\}$ кетма–кетлик ўртача маънода фундаментал кетма–кетлик ҳам бўлади.

Тескариси умуман олганда тўғри эмас, яъни ўртача маънода фундаментал бўлган $\{x_n(t)\}$ узлуксиз функцияларнинг кетма–кетлиги учун бу $\{x_n(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлигининг ўртача маънода лимити бўладиган интегралланувчи $x(t)$ функция мавжуд бўлмаслиги мумкин.

Қуйидаги теорема деярли ҳамма жойда яқинлашиш ва ўртача маънода яқинлашиш орасидаги боғлиқликни ўрнатади. Аввал қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$m_0 = \left[\left|\log_2(b-a)\right|\right] + 2$, бу ерда $[\alpha]$–сон α соннинг бутун қисми. Агар A – чекли ёки саноқли сондаги оралиқлар системаси бўлса, у ҳолда $|A|$ орқали бу оралиқлар узунликлари йиғиндисини белгилаймиз. Агар B тўплам A оралиқлар системаси билан қопланган бўлса, яъни $B \subset A$ ва бундан ташқари $|A| < \alpha$ бўлса, у ҳолда $|B| < \alpha$ деб ёзамиз.

1–теорема. *Агар* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{L}_1[a,b]$ *ва* $\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{ўр.маънода}{=} 0$ *яқинлашувчи бўлса, у ҳолда шундай бир* $\left\{x_{n_k}(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ *функциялар қисмий кетма–кетлиги мавжуд бўлиб, бунда*

1) $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t) \overset{д.х.ж}{=} 0$*;*

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_{n_k}(t)\right|$ *қатор* $[a,b]$ *оралиқнинг деярли ҳамма жойида яқинлашувчи бўлади;*

3) ихтиёрий $m \geq m_0$ *натурал сон учун* $B_m \subset [a,b]$ *тўплам мавжуд бўлиб бу тўпламда барча* $k \geq m$ *учун* $\left|x_{n_k}(t)\right| < \frac{1}{2^k}$ *тенгсизлик ўринли, бундан ташқари* $\left|[a,b] \setminus B_m\right| < \frac{1}{2^m}$ *ва* $B_m \subset B_{m+1}$ *муносабатлар ўринли бўлади.*

Исбот. Шартга кўра $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b |x_n(t)|dt = 0$ бўлгани учун шундай бир $\left\{x_{n_k}(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ функциялар қисмий кетма–кетлиги мавжуд бўлиб, бу кетма–кетлик ҳадлари учун

$$\int\limits_a^b \left|x_{n_k}(t)\right|dt < \frac{1}{2^{5k}} \tag{4.2.1}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Иккиламчи индекс билан белгилашдан қочиш маъносида $x_{n_k}(t) \equiv y_k(t)$ деб белгилаш киритамиз ва бу ҳосил қилинган кетма–кетлик учун 1), 2), 3) тасдиқларнинг бажарилишини кўрсатамиз. Бунинг учун $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган функцияни кўпҳад билан текис яқинлаштириш ҳақидаги Вейерштрасс теоремасидан фойдаланамиз ва ҳар бир $y_k(t) \in \tilde{L}_1[a,b]$ функция учун $p_k(t)$ кўпҳад мавжуд бўлиб барча $t \in [a,b]$ учун

$$|y_k(t) - p_k(t)| < \frac{1}{2^{5k}(b-a+1)} \tag{4.2.2}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

У ҳолда (4.2.1) ва (4.2.2) тенгсизликлардан

$$\int\limits_a^b |p_k(t)|dt \leq \int\limits_a^b |y_k(t)|dt + \int\limits_a^b |p_k(t) - y_k(t)|dt <$$

$$< \frac{1}{2^{5k}} + \frac{b-a}{2^{5k}(b-a+1)} < \frac{1}{2^{4k}} \tag{4.2.3}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Энди

$$A_k = \left\{ t \in [a,b]: \ |p_k(t)| \geq \frac{1}{2^{2k}} \right\}$$

тўпламни қараймиз. Бу A_k тўплам ёки чекли сондаги кесишмайдиган оралиқлар ва нуқталар, ёки бўш тўплам бўлади. Шунинг учун ихтиёрий ҳолда ҳам бу A_k тўплам бўйича $|p_k(t)|$ функциядан олинган Риман интегралини қараш мумкин бўлади ва (4.2.3) тенгсизликни ҳисобга олиб

$$|A_k|\frac{1}{2^{2k}} \leq \int_{A_k} |p_k(t)|dt \leq \int_a^b |p_k(t)|dt < \frac{1}{2^{4k}} \tag{4.2.4}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу (4.2.4) тенгсизликдан $|A_k| < \frac{1}{2^{2k}}$ тенгсизлик келиб чиқади ва шунинг учун $\hat{A}_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$ тўпламлар учун

$$\left|\hat{A}_m\right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |A_k| < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4^m}\cdot\frac{4}{3} < \frac{1}{2^m}$$

баҳолаш ўринли бўлади. Энди $B_m = [a,b]\setminus\hat{A}_m$ бўлсин. Агар $m \geq m_0$ бўлса, у ҳолда B_m тўпламлар бўш бўлмаган тўпламлар бўлиб

$$\left|[a,b]\setminus B_m\right| = \left|\hat{A}_m\right| < \frac{1}{2^m}, \qquad B_m \subset B_{m+1}$$

ва ихтиёрий $t \in B_m = [a,b]\setminus\hat{A}_m = [a,b]\setminus\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=m}^{\infty}\{[a,b]\setminus A_k\}$ учун $k \geq m$ бўлганда

$$|p_k(t)| < \frac{1}{2^{2k}} \tag{4.2.5}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

(4.2.2) ва (4.2.5) тенгсизликлардан биринчидан ихтиёрий $t \in B_m$ ва $k \geq m$ учун

$$|y_k(t)| \leq |p_k(t)| + |y_k(t) - p_k(t)| < \frac{1}{2^{5k}(b-a+1)} + \frac{1}{2^{2k}} < \frac{1}{2^k}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шу билан 3) тасдиқ исбот бўлади. Иккинчидан $t \in B_m$ тўпламда

$$\sum_{k=m}^{\infty} |y_k(t)| \tag{4.2.6}$$

қатор текис яқинлашувчи бўлади.

Энди

$$u = \left\{ t \in [a,b]: \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k(t)| = +\infty \right\}$$

тўплам бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $m \geq m_0$ натурал сон учун $u \subseteq \{ [a, b] \setminus B_m \}$ жойлашиш муносабати ўринли бўлади. Шунинг ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сонга кўра $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўладиган m номерни танлаб

$$|u| \leq \left| \hat{A}_m \right| < \frac{1}{2^m} < \varepsilon$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу ерда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон эканлигидан $|u| = 0$ эканлиги келиб чиқади, яъни (4.2.6) қатор деярли ҳамма жойда яқинлашувчи бўлади ва шунга кўра $\lim\limits_{k\to\infty} y_k(t) \overset{д.х.ж}{=} 0$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{L}_1[a, b]$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \overset{ўр.маънода}{=} 0$ яқинлашувчи бўлсада $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялар кетма–кетлиги $[a, b]$ оралиқнинг ҳар бир нуқтасида узоқлашувчи бўлган $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялар кетма–кетлигини қуриш мумкин.

3. Лебег интеграли ва Лебег бўйича интегралланувчи функциялар. Энди айрим эквивалент функциялар синфи ва $L[a,b]$ Лебег фазосининг $\hat{x}(t) \in L[a,b]$ синфи ўртасида мослик ўрнатиш учун ёрдам берувчи бир қатор теоремаларни исбот қиламиз.

2–теорема. *Агар* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{L}_1[a, b]$ *ва* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{x}(t) \in L[a,b]$ *бўлса, у ҳолда шундай бир* $\left\{x_{n_k}(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ *функциялар қисмий кетма–кетлиги мавжуд бўлиб, бунда*

1) $\left\{x_{n_k}(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ *функциялар кетма–кетлиги* $[a, b]$ *оралиқда аниқланган қандайдир* $f(t)$ *функцияга деярли ҳамма жойида яқинлашувчи бўлади;*

2) ихтиёрий $m \geq m_0$ *натурал сон учун* $B_m \subset [a, b]$ *тўплам мавжуд бўлиб бу тўпламда барча* $k \geq m$ *учун* $\left|f(t) - x_{n_k}(t)\right| < \frac{1}{2^{k-1}}$ *тенгсизлик ўринли, бундан ташқари* $\left|[a, b] \setminus B_m\right| < \frac{1}{2^m}$ *ва* $B_m \subset B_{m+1}$ *муносабатлар ўринли бўлади.*

Исбот. Шартга кўра $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{x}(t) \in L[a,b]$ функциялар кетма–кетлиги ўртача маънода фундаментал эканлигидан шундай бир $\left\{x_{n_k}(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ функциялар қисмий кетма–кетлиги мавжуд бўлиб, бу кетма–кетлик ҳадлари учун

$$\int_a^b \left|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\right| dt < \frac{1}{2^{5k}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда 1–теорема исботидаги жараённи $\left\{\left(x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\right)\right\}$ кетма–кетлик учун қўллаб биринчидан, ихтиёрий $m \geq m_0$ натурал сон учун $B_m \subset [a, b]$ тўплам мавжуд бўлиб бу тўпламда барча $k \geq m$ учун

$$\left|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\right| < \frac{1}{2^k} \tag{4.2.7}$$

тенгсизлик ўринли, бундан ташқари $\left|[a, b] \setminus B_m\right| < \frac{1}{2^m}$ ва $B_m \subset B_{m+1}$ муносабатлар ўринли бўлади.

Иккинчидан эса,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\right|$$

қатор деярли ҳамма жойда яқинлашувчи бўлади. Шунга кўра

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\right) \tag{4.2.8}$$

қатор ҳам деярли ҳамма жойда яқинлашувчи бўлади.

Энди (4.2.8) қатор яқинлашувчи бўлган нуқталарда $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\right)$ ва $[a,b]$ оралиқнинг қолган нуқталарида $\varphi(t) = 0$ бўлсин. Шунга кўра

$$\varphi(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{j}\left(x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)\right)=\lim_{j\to\infty}\left(x_{n_{j+1}}(t)-x_{n_1}(t)\right)$$

ва $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}(t) \overset{д.х.ж}{=} \varphi(t)+x_{n_1}(t)=f(t)$ бўлади. Шу билан 1) тасдиқ исбот бўлади. 2) тасдиқнинг ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш учун (4.2.7) тенгсизликни эътиборга олиб барча $t\in B_m$ ва $k\geq m$ учун

$$\left|f(t)-x_{n_k}(t)\right|=\left|\varphi(t)+x_{n_1}(t)-\left(x_{n_1}(t)+\sum_{j=1}^{k-1}\left(x_{n_{j+1}}(t)-x_{n_j}(t)\right)\right)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{j=k}^{\infty}\left|x_{n_{j+1}}(t)-x_{n_j}(t)\right|<\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2^{k-1}}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шу билан 2–теорема исбот бўлади.

3–теорема. *Агар* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\subset\tilde{L}_1[a,b]$ *ва* $\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\subset\tilde{L}_1[a,b]$, *бундан ташқари* $\{x_n(t)\}\sim\{y_n(t)\}$ *ва* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)\overset{д.х.ж}{=}f(t)$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n(t)\overset{д.х.ж}{=}\varphi(t)$ *бўлса, у ҳолда* $f(t)\sim\varphi(t)$ *бўлади.*

Исбот. Теорема шартига кўра

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|x_n(t)-y_n(t)\right|dt=0$$

бўлгани учун 1– теоремага кўра шундай бир $\left\{x_{n_k}(t)-y_{n_k}(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ функциялар қисмий кетма–кетлиги мавжуд бўлиб, бу кетма–кетлик ҳадлари учун $\lim\limits_{k\to\infty}\left(x_{n_k}(t)-y_{n_k}(t)\right)\overset{д.х.ж}{=}0$ тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликни теорема шарти билан мос қўйиб қуйидаги хулосага келамиз:

$$\varphi(t)\overset{д.х.ж}{=}\lim_{n\to\infty}y_n(t)\overset{д.х.ж}{=}\lim_{k\to\infty}y_{n_k}(t)\overset{д.х.ж}{=}\lim_{k\to\infty}x_{n_k}(t)\overset{д.х.ж}{=}\lim_{n\to\infty}x_n(t)=f(t)$$

3–теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан муҳим натижа келиб чиқади: ҳар бир ўртача маънода эквивалент ва ўртача маънода фундаментал бўлган $\hat{x}(t)\in L_1[a,b]$ кетма–кетликлар синфига $\hat{f}(t)$ эквивалент функциялар синфини мос қўйиш мумкинки, бунда ихтиёрий

$f(t)\in\hat{f}(t)$ функция учун $\{x_n(t)\}\in\hat{x}(t)$ кетма–кетлик мавжуд бўлиб $f(t)\overset{д.х.ж}{=}\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$, бундан ташқари агар $\{y_n(t)\}\in\hat{x}(t)$ ва $\lim\limits_{n\to\infty}y_n(t)\overset{д.х.ж}{=}\varphi(t)$ бўлса, у ҳолда $\varphi(t)$ функция ҳам $\hat{f}(t)$ эквивалент функциялар синфига қарашли, яъни $\varphi(t)\in\hat{f}(t)$ бўлади.

Энди агар $\hat{x}_1(t)\neq\hat{x}_2(t)$ бўлса, у ҳолда уларга мос $\hat{f}_1(t)$ ва $\hat{f}_2(t)$ эквивалент функциялар ҳам тенг эмаслигини кўрсатамиз.

4–теорема. *Агар $\{p_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ кўпҳадларнинг ўртача маънода фундаментал кетма–кетлиги ва $\lim\limits_{n\to\infty}p_n(t)\overset{д.х.ж}{=}0$ бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty}p_n(t)\overset{ўр.маънода}{=}0 \qquad (4.2.9)$$

бўлади.

Исбот. $\{p_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ кўпҳадларнинг ўртача маънода фундаментал кетма–кетлиги эканлигидан $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b|p_n(t)|dt$ лимитнинг мавжудлиги келиб чиқади. Шунинг учун (4.2.9) тенгликнинг қандайдир қисмий кетма–кетлик учун ўринли эканлигини исбот қилиш етарлидир.

$\{p_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетликка 2–теоремани қўллаб биз бу теореманинг 1) ва 2) тасдиқларини қаноатлантирувчи

$$\{p_{n_k}(t)\}_{k=1}^{\infty} \qquad (4.2.10)$$

қисмий кетма–кетликни топамиз.

Энди $\varepsilon>0$ мусбат сон бўлсин. (4.2.10) қисмий кетма–кетлик ҳам ўртача маънода фундаментал кетма–кетлик эканлигидан шундай бир k_0 натурал сон мавжуд бўладики, бунда ихтиёрий $k\geq k_0$ ва $m\geq k_0$ натурал сонлари учун

$$\int\limits_a^b\left|p_{n_k}(t)-p_{n_m}(t)\right|dt<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (4.2.11)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

$$Q = \max_{\substack{t\in[a,b] \\ 1\le k\le k_0}} \left| p_{n_k}(t) \right|$$

деб оламиз. У ҳолда ўлчови

$$|A| < \delta = \min\left\{ \frac{\varepsilon}{3Q}, \; \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right\}$$

бўлган A оралиқларнинг чекли системаси ва $1 \le k \le k_0$ учун

$$\int_A \left| p_{n_k}(t) \right| dt < Q\delta \le \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4.2.12)$$

баҳолаш ўринли бўлади.

Агар $k > k_0$ бўлса, у ҳолда (4.2.11) ва (4.2.12) тенгсизликларни эътиборга олиб

$$\int_A \left| p_{n_k}(t) \right| dt \le \int_A \left| p_{n_{k_0}}(t) \right| dt + \int_A \left| p_{n_k}(t) - p_{n_{k_0}}(t) \right| dt < \frac{2\varepsilon}{3} \qquad (4.2.13)$$

баҳолашни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб

$$|A| < \delta = \min\left\{ \frac{\varepsilon}{3Q}, \; \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right\}$$

бўлган A оралиқларнинг чекли системаси ва ихтиёрий $k \ge 1$ учун

$$\int_A \left| p_{n_k}(t) \right| dt < \frac{2\varepsilon}{3} \qquad (4.2.14)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Маълумки, (4.2.10) қисмий кетма–кетлик учун 1) тасдиқ ўринли эканлигидан

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k}(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty} p_n(t) \overset{д.х.ж}{=} 0$$

ва 2) тасдиқ ўринли эканлигидан ихтиёрий $m \ge m_0$ натурал сонлари учун $B_m \subset [a,b]$ тўплам мавжуд бўлиб, бунда барча $k \ge m$ натурал сонлари учун $\left| p_{n_k}(t) \right| < \dfrac{1}{2^{k-1}}$ тенгсизлик ўринли бўлади, бундан ташқари $\left| [a,b] \setminus B_m \right| < \dfrac{1}{2^m}$ тенгсизлик ўринлидир.

Энди i натурал сон бўлиб $i \ge m_0$ ва $\dfrac{1}{2^{i-1}} < \delta \le \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ бўлсин. У ҳолда $t \in B_i$ ва барча $k \ge i$ учун

$$\left|p_{n_k}(t)\right| < \frac{1}{2^{k-1}} \le \frac{1}{2^{i-1}} < \delta \le \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \qquad (4.2.15)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунингдек

$$A_k = \left\{ t \in [a,b]:\ \left|p_{n_k}(t)\right| \ge \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right\} \qquad (4.2.16)$$

$$D_k = \left\{ t \in [a,b]:\ \left|p_{n_k}(t)\right| \le \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right\} \qquad (4.2.17)$$

деб белгиласак, у ҳолда олдин аниқлаганимиздек A_k ва D_k тўпламлар ёки бўш тўплам, ёки ўзаро кесишмайдиган оралиқ ва нуқталарнинг чекли системасидан иборат бўлади. Бундан ташқари, $A_k \bigcup D_k = [a,b]$ ва $A_k \bigcap D_k$ тўплам чекли нуқталардан ёки бўш тўпламдан иборат бўлади. Бу айтилганлардан ихтиёрий ҳол учун ҳам бу тўплам бўйича Риман интегралини қараш мумкин бўлади, бундан ташқари барча $k \ge i$ учун $A_k \subset [a,b] \setminus B_i$ ва демак

$$\left|A_k\right| \le \left|[a,b] \setminus B_i\right| < \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{i-1}} < \delta \qquad (4.2.18)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ниҳоят (4.2.14), (4.2.16), (4.2.17) ва (4.2.18) тенгсизликларни ҳисобга олиб барча $k \ge i$ учун

$$\int_a^b \left|p_{n_k}(t)\right| dt = \int_{A_k} \left|p_{n_k}(t)\right| dt + \int_{D_k} \left|p_{n_k}(t)\right| dt <$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3} + \int_{D_k} \frac{\varepsilon}{3(b-a)} dt \le \frac{2\varepsilon}{3} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)} dt = \varepsilon$$

эканлигини ҳосил қиламиз ва бу 4–теоремани исбот қилади.

Вейерштрасс теоремасидан фойдаланиб $\hat{x}(t) \in L[a,b]$ ихтиёрий синф ўртача маънода фундаментал бўлган кўпҳадлар кетма–кетлигини сақлашини исбот қилиш мумкин бўлади.

5–теорема. *Агар* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{L}_1[a,b]$ *ва* $\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{L}_1[a,b]$, *бундан ташқари бу ҳар иккала кетма–кетлик ўртача маънода фундаментал кетма–кетлик ва* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) \overset{д.х.ж}{=} f(t)$ *бўлса, у ҳолда* $n \to \infty$ *да* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *бўлади.*

Исбот. $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{x}(t) \in L_1[a, b]$ ва $\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{y}(t) \in L_1[a, b]$ бўлсин. У ҳолда $\{p_n(t)\} \in \hat{x}(t)$ ва $\{q_n(t)\} \in \hat{y}(t)$ кўпҳадларнинг ўртача маънода фундаментал бўлган кетма–кетликлари мавжуд бўлиб 2–теоремага кўра уларни деярли яқинлашувчи деб ҳисоблаш мумкин бўлади. Бу кетма–кетликларга 3–теоремани қўллаб

$$\lim_{n\to\infty} p_n(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{д.х.ж}{=} f(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty} y_n(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty} q_n(t)$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Бундан эса

$$\lim_{n\to\infty}\left(p_n(t) - q_n(t)\right) \overset{д.х.ж}{=} 0 \text{ ва } \lim_{n\to\infty}\int_a^b |p_n(t) - q_n(t)|dt = 0,$$

яъни $n \to \infty$ да $\{p_n(t)\} \sim \{q_n(t)\}$ ва демак, $\hat{x}(t) = \hat{y}(t)$ эканлиги ва бундан $n \to \infty$ да $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ эканлиги келиб чиқади. 5–теорема исбот бўлди.

Агар $\{x_n(t)\}$ ва $\{y_n(t)\}$ кетма–кетликлар 5–теорема талабларини қаноатлантирса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt \quad \text{ва} \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b y_n(t)dt$$

лимитлар мавжуд ва бир-бирига тенг бўлади.

Энди биз Лебег интегралининг коррект аниқланган таърифини ва Лебег бўйича интегралланувчи функцияларнинг синфини ифода қилишимиз мумкин бўлади.

Таъриф. Агар шундай бир узлуксиз функцияларнинг ўртача маънода фундаментал бўлган $\{x_n(t)\}$ кетма–кетлиги мавжуд бўлиб $\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{д.х.ж}{=} f(t)$ бўлса, у ҳолда $\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt$ лимитга $f(t)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги Лебег интеграли деб айтилади ва бу интеграл $(L)\int_a^b f(t)dt$ каби белгиланади.

Демак, таъриф бўйича

$$(L)\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt$$

тенглик билан аниқланади. Шуни таъкидлаш керакки, бу келтирилган таъриф биринчидан, $\left\{x_n(t)\right\}$ кетма–кетликка боғлиқ эмас ва у фақат шу кетма–кетликни сақлайдиган $\hat{x}(t)$ синфдан боғлиқ бўлади.

Иккинчидан бевосита таърифдан, агар $f(t)$ функция $[a,b]$ оралиқда Лебег маъносида интегралланувчи ва $n \to \infty$ да $\varphi(t) \sim f(t)$ бўлса, у ҳолда $\varphi(t)$ функция ҳам $[a,b]$ оралиқда Лебег маъносида интегралланувчи бўлиб $\left(L\right)\int\limits_a^b f(t)dt = \left(L\right)\int\limits_a^b \varphi(t)dt$ тенглик ўринли бўлади.

Учинчидан эса олдин ўрнатилган $\hat{x}(t) \in L_1[a,b]$ элемент ва $[a,b]$ оралиқда Лебег маъносида интегралланувчи $f(t)$ функцияга эквивалент бўлган функциялар синфи ўртасидаги мослик ўзаро бир қийматли бўлади.

Агар $f_1(t)$ функцияга $\hat{x}_1(t) \in L_1[a,b]$ элемент ва $f_2(t)$ функцияга $\hat{x}_2(t) \in L_1[a,b]$ элемент мос келса, у ҳолда $f_1(t) + f_2(t)$ функцияга $\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) \in L_1[a,b]$ элемент, $\lambda f_1(t)$ функцияга эса $\lambda \hat{x}_1(t) \in L_1[a,b]$ элемент мос келади.

Шундай қилиб, $[a,b]$ оралиқда Лебег маъносида интегралланувчи бўлган $f(t)$ функцияга эквивалент бўлган функциялар синфини $L_1[a,b]$ Банах фазосининг элементи деб қараш мумкин, бундан ташқари ҳар бир $\hat{f}(t)$ синфга $\int\limits_a^b \hat{f}(t)dt = \left(L\right)\int\limits_a^b f(t)dt$ сонни мос қўйиш мумкин ва бунда $f(t) \in \hat{f}(t)$ Лебег маъносида интегралланувчи бўлган функциядир.

Бироқ кейинчалик биз соддалик учун $\hat{f}(t)$ синфлардан эмас, балки шу синфнинг “вакили” бўлган $f(t)$ оддий функциялардан фойдаланамиз, яъни $f(t) \in \hat{f}(t)$.

$f(t) \in L\,[a,b]$ ёзув қандайдир $\hat{x}(t)$ ўртача маънода фундаментал бўлган ўртача эквивалент узлуксиз функциялар кетма–кетлигининг синфига мос бўлган $\hat{f}(t)$ эквивалент функциялар синфига тегишли $f(t)$ функция интегралланувчи эканлигини билдиради, бундан ташқари $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{x}(t)$ кетма–кетлик мавжуд бўлиб

$$f(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t) \quad \text{ва} \quad (L)\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt$$

тенгликлар ўринли бўлади.

4. Лебег интегралининг асосий хоссалари ва Лебег бўйича интегралланувчи функциялар. Бу ерда биз Лебег интегралининг тенглик ва тенгсизлик билан боғлиқ хоссаларини келтирамиз.

1. Агар $[a,b]$ оралиқда $x(t)$ функция узлуксиз бўлса, у ҳолда $x(t) \in L[a,b]$ ва $\int_a^b x(t)dt = (L)\int_a^b x(t)dt$ бўлади.

2. Агар $f_1(t) \in L[a,b]$ ва $f_2(t) \in L[a,b]$ бўлса, у ҳолда $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \in L[a,b]$ ва

$$(L)\int_a^b (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))dt = \alpha \cdot (L)\int_a^b f_1(t)dt + \beta \cdot (L)\int_a^b f_2(t)dt$$

тенглик ўринли бўлади, бунда α ва β ихтиёрий ўзгармас сонлардир.

Бу 1 ва 2 хоссалар лимитнинг хоссаларидан бевосита келиб чиқади.

3. Агар $f(t) \in L[a,b]$ бўлса, у ҳолда $|f(t)| \in L[a,b]$ ва

$$\left|(L)\int_a^b f(t)dt\right| \leq (L)\int_a^b |f(t)|dt$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $f(t) \in L\,[a,b]$ эканлигидан шундай бир ўртача маънода фундаментал бўлган $\{x_n(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлиги мавжудки, бунда $f(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ бўлади. Шу билан бирга $\{|x_n(t)|\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлиги ҳам ўртача маънода фундаментал бўлган кетма–кетлик бўлади. Бу эса

$$\int_a^b \left|\, |x_n(t)| - |x_m(t)| \,\right| dt \le \int_a^b \left|\, x_n(t) - x_m(t) \,\right| dt$$

тенгсизликдан келиб чиқади ва

$$\lim_{n\to\infty} |x_n(t)| \overset{д.х.ж}{=} |f(t)|, \text{ яъни } |f(t)| \in L\,[a,b]$$

бўлади. Шунингдек

$$\left| \int_a^b x_n(t)\,dt \right| \le \int_a^b |x_n(t)|\,dt$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра

$$\left| (L)\int_a^b f(t)\,dt \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b x_n(t)\,dt \right| \le \lim_{n\to\infty} \int_a^b |x_n(t)|\,dt = (L)\int_a^b |f(t)|\,dt$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу билан 3–хосса исбот бўлади.

4. Агар $f(t) \in L[a,b]$ ва $f(t) \ge 0$ бўлса, у ҳолда $(L)\int_a^b f(t)dt \ge 0$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $f(t) \ge 0$ бўлганлиги учун $f(t) = |f(t)|$ ва

$$0 \le \left| (L)\int_a^b f(t)dt \right| \le (L)\int_a^b |f(t)|dt = (L)\int_a^b f(t)dt$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Шуни таъкидлаш керакки, агар $f(t) \in L[a,b]$ ва деярли ҳамма жойда $f(t) \ge 0$ бўлса, у ҳолда $(L)\int_a^b f(t)dt \ge 0$ тенгсизлик ўринли бўлади.

5. Агар $f_1(t) \in L[a,b]$, $f_2(t) \in L[a,b]$ ва $f_1(t) \ge f_2(t)$ тенгсизлик деярли ҳамма жойда ўринли бўлса, у ҳолда $(L)\int_a^b f_1(t)dt \ge (L)\int_a^b f_2(t)dt$ тенгсизлик ўринли бўлади.

6. Агар $f_1(t) \in L[a,b]$ ва m, M –қандайдир сонлар учун $m \le f(t) \le M$ тенгсизлик деярли ҳамма жойда ўринли бўлса, у

ҳолда $m(b-a) \le (L)\int\limits_a^b f(t)dt \le M(b-a)$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу 5 ва 6 хоссалар 4–хоссадан келиб чиқади.

7. Агар $f(t) \in L[a,b]$, $f(t) \ge 0$ ва $(L)\int\limits_a^b f(t)dt = 0$ бўлса, у ҳолда $f(t) \sim 0$ бўлади.

Исбот. $\{x_n(t)\}$ ўртача маънода фундаментал бўлган узлуксиз функциялар кетма–кетлиги ва $f(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ бўлсин. У ҳолда 3–хосса исботидаги каби фикирлаб

$$0 = (L)\int\limits_a^b f(t)\,dt = (L)\int\limits_a^b |f(t)|dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b |x_n(t)|dt$$

тенглик ҳосил бўлади. Лекин, $f(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim\limits_{n\to\infty}|x_n(t)|$ бўлгани учун 1–теоремага кўра $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n(t)| \overset{д.х.ж}{=} 0$, яъни $f(t) \sim 0$ бўлади. 7– хосса исбот бўлади.

Агар $[a,b]$ оралиқда $f(t)$ функция берилган бўлса, у ҳолда

$$f^+(t) = \begin{cases} f(t), \text{ агар } & f(t) \ge 0 \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } & f(t) < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

ва

$$f^-(t) = \begin{cases} 0, & \text{агар } \quad f(t) > 0 \text{ бўлса}, \\ -f(t), & \text{агар } \quad f(t) \le 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияларни белгилаймиз. У ҳолда

$$f(t) = f^+(t) - f^-(t), \quad |f(t)| = f^+(t) + f^-(t),$$

$$f^+(t) = \frac{f(t) + |f(t)|}{2}, \quad f^-(t) = \frac{|f(t)| - f(t)}{2},$$

$$\max\{f(t); g(t)\} = (f(t) - g(t))^+ + g(t),$$

$$\min\{f(t); g(t)\} = -\max\{-f(t); -g(t)\} = -(-f(t) + g(t))^+ + g(t)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

8. Агар $f(t) \in L[a,b]$ бўлса, у ҳолда $f^{+}(t) \in L[a,b]$ ва $f^{-}(t) \in L[a,b]$ бўлади.

9. Агар $f_1(t) \in L[a,b]$ ва $f_2(t) \in L[a,b]$ бўлса, у ҳолда $\max\left\{ f(t);\, g(t)\right\} \in L[a,b]$ ва $\min\left\{ f(t);\, g(t)\right\} \in L[a,b]$ бўлади.

Бу 8 ва 9 хоссалар юқоридаги тенгликлар ва 2–хоссадан бевосита келиб чиқади.

10. Агар $|f(t)| \in L[a,b]$ ва $\left\{x_n(t)\right\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлиги мавжуд бўлиб $f(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ бўлса, у ҳолда $f(t) \in L[a,b]$ бўлади.

Бу хоссани кейинги пунктдаги бир қатор муҳим теоремаларни келтиргандан кейин исбот қиламиз.

5. Лебег интегралининг лимитга ўтиш билан боғлиқ хоссалари. Маълумки, $L[a,b]$ тўплам нормаланган фазо бўлиб, агар $\hat{x}(t) \in L[a,b]$ бўлса, у ҳолда

$$\left\|\hat{x}(t)\right\|_{L[a,b]} = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|x_n(t)\right| dt,$$

бунда $\left\{x_n(t)\right\}$ – ўртача маънода фундаментал бўлган узлуксиз функциялар кетма–кетлиги ва $\left\{x_n(t)\right\} \in \hat{x}(t)$ бўлади. Агар $\hat{x}(t)$ элементга Лебег маъносида интегралланувчи эквивалент функцияларнинг $\hat{f}(t)$ синфи мос келса, у ҳолда табиий равишда

$$\left\|\hat{f}(t)\right\|_{L[a,b]} = \left\|\hat{x}(t)\right\|_{L[a,b]}$$

деб ҳисоблаш мумкин ва

$$\left\|\hat{x}(t)\right\|_{L[a,b]} = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|x_n(t)\right| dt$$

бўлади. Шунингдек

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|x_n(t)\right| dt = \left(L\right)\int_a^b \left|f(t)\right| dt,$$

бунда $f(t) \in \hat{f}(t)$ бўлади. Шундай қилиб,

$$\left\|\hat{f}(t)\right\|_{L[a,b]} = \left(L\right)\int_a^b \left|f(t)\right| dt,$$

бунда $f(t)\in\hat{f}(t)$ бўлади. Бу ҳолда биз

$$\|f(t)\|_{L[a,b]}=\left\|\hat{f}(t)\right\|_{L[a,b]}=(L)\int_{a}^{b}|f(t)|dt$$

деб ҳам ёзамиз.

Таъриф. Агар Лебег бўйича интегралланувчи функцияларнинг $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетлиги $L[a,b]$ фазонинг нормаси бўйича фундаментал бўлса, у ҳолда бу кетма–кетлик ўртача маънода фундаментал деб айтилади, яъни агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон учун шундай бир $N=N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $m\geq N$ ва $n\geq N$ номерлар учун

$$\|f_n(t)-f_m(t)\|_{L[a,b]}=(L)\int_{a}^{b}|f_n(t)-f_m(t)|dt<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бироқ $L[a,b]$ фазо тўла фазо бўлади. Шунинг учун ихтиёрий $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментал кетма–кетлик учун $f(t)\in L[a,b]$ функция топилиб, бунда

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(t)-f(t)\|_{L[a,b]}=\lim_{n\to\infty}(L)\int_{a}^{b}|f_n(t)-f(t)|dt=0$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу ҳолда биз $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетлик $f(t)$ функцияга ўртача маънода ёки норма бўйича яқинлашади деб айтилади ва

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t)\overset{д.х.ж.}{=}f(t)$$

шаклида ёзилади.

Энди биз 2–теоремага ўхшаш бўлган теоремани исбот қилишимиз мумкин бўлади.

6–теорема. *Агар* $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)\overset{ўр.маънода}{=}f(t)$ *ўртача маънода яқинлашувчи бўлса, у ҳолда шундай бир* $\left\{f_{n_k}(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ *қисмий кетма–кетлик мавжуд бўлиб*

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(t)\overset{д.х.ж}{=}f(t)$$

деярли ҳамма жойда яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Ҳар бир $f_n(t)$ функцияга узлуксиз функцияларнинг ўртача маънода фундаментал бўлган $\hat{x}_n(t)$ синфи мос келади ва бу синфга тегишли бўлган кўпҳадларнинг кетма–кетлиги мавжуд бўлиб, ундан шундай бир $p_n(t)$ кўпҳадни танлаш мумкинки, бунда

1) $(L)\int\limits_a^b |f_n(t)-p_n(t)|dt<\frac{1}{2^{2n+1}}$;

2) $|[a,b]\setminus B_n|<\frac{1}{2^n}$ бўлган B_n тўпламда $|f_n(t)-p_n(t)|<\frac{1}{2^{n-1}}$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетлик ўртача маънода фундаментал бўлгани учун ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сонга мос шундай бир $N=N(\varepsilon)$ натурал сон мавжуд бўлиб барча $m\geq N$ ва $n\geq N$ учун

$$(L)\int\limits_a^b |f_n(t)-f_m(t)|dt<\frac{\varepsilon}{3}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар бундан ташқари $\frac{1}{2^{2N+1}}<\frac{\varepsilon}{3}$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^b |p_n(t)-p_m(t)|dt=(L)\int\limits_a^b |p_n(t)-p_m(t)|dt\leq$$

$$\leq(L)\int\limits_a^b |f_n(t)-p_n(t)|dt+(L)\int\limits_a^b |f_m(t)-p_m(t)|dt+$$

$$+(L)\int\limits_a^b |f_n(t)-f_m(t)|dt<\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{2m+1}}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$$

тенгсизлик ҳосил бўлади, яъни $\{p_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетлик ўртача маънода фундаментал бўлган кўпҳадлар кетма–кетлиги бўлади.

Бу $\{p_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетлик фундаментал бўлган кетма–кетликларнинг $\hat{x}(t)$ синфига тегишли бўлиб

$$\lim_{n\to\infty}\|\hat{x}(t)-\hat{x}_n(t)\|_{L[a,b]}=0$$

тенглик ўринли бўлади ва шунга кўра $\hat{x}(t)$ элементга мос $\hat{f}(t)$ синфга тегишли бўлган $f(t)$ функция интегралланувчи функция бўлади. Бундан эса, $f(t)$ функцияга деярли ҳамма жойда яқинлашувчи бўлган $\left\{ p_{n_k}(t) \right\}_{k=1}^{\infty}$ қисмий кетма–кетлик мавжуд эканлиги келиб чиқади. Энди $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(t) \overset{д.х.ж}{=} f(t)$ деярли ҳамма жойда яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{i=k}^{\infty} B_{n_i}$ деб белгиласак, у ҳолда $\left\{[a,b] \setminus B\right\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=k}^{\infty} \left\{[a,b] \setminus B_{n_i}\right\}$ тенглик ўринли ва шунга кўра

$$\left|[a,b] \setminus B\right| < \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^{n_i}} \le \frac{1}{2^{n_k - 1}} \le \frac{1}{2^{k-1}}$$

бўлади. Бу тенгсизлик ихтиёрий k учун ўринли эканлигидан $[a,b] \setminus B$ тўпламнинг ўлчови нолга тенг эканлиги келиб чиқади, яъни $\left|[a,b] \setminus B\right| = 0$ бўлади. Энди $t \in B$ ва ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сонга мос шундай бир $N = N(\varepsilon)$ натурал сон мавжуд бўлиб, бунда

1) $\frac{1}{2^{n_N - 1}} < \varepsilon$;

2) $t \in \bigcap\limits_{i=N}^{\infty} B_{n_i}$ муносабатлар ўринли бўлади. Шунга кўра, $i \ge N$ учун

$$\left| f_{n_i}(t) - p_{n_i}(t) \right| dt < \frac{1}{2^{n_i - 1}} \le \frac{1}{2^{n_N - 1}} < \varepsilon$$

тенгсизлигини ҳосил қиламиз. Шу билан

$$\lim_{i\to\infty} \left(f_{n_i}(t) - p_{n_i}(t) \right) \overset{д.х.ж}{=} 0$$

ва

$$f(t) = \lim_{i\to\infty} p_{n_i}(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(t)$$

эканлиги кўрсатилади. 6–теорема исбот бўлди.

Натижа. *Агар* $\{f_n(t)\}\subset L[a,b]$ *ва* $\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int\limits_a^b |f_n(t)|dt =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(t)\|_{L[a,b]} = 0$ *бўлса, у ҳолда шундай бир* $\left\{f_{n_k}(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ *қисмий кетма–кетлик мавжуд бўлиб* $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(t) \overset{д.х.ж}{=} 0$ *деярли ҳамма жойда нолга яқинлашувчи (1–теоремага ўхшаш тасдиқ ўринли) бўлади.*

Исбот. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(t)\|_{L[a,b]} = 0$ бўлса, у ҳолда $\{|f_n(t)|\}$ кетма–кетлик ўртача маънода фундаментал бўлган кетма–кетлик бўлади. Исбот қилинган 6–теоремага кўра шундай бир $\left\{\left|f_{n_k}(t)\right|\right\}_{k=1}^{\infty}$ қисмий кетма–кетлик мавжуд бўлиб қандайдир $f(t)\in L[a,b]$ функцияга деярли ҳамма жойда яқинлашувчи бўлади, яъни $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(t) \overset{д.х.ж}{=} f(t)$ бўлади. Бундан ташқари

$$\lim_{k\to\infty}(L)\int_a^b \left|\, f(t) - \left|f_{n_k}(t)\right| \,\right| dt = \lim_{k\to\infty}(L)\int_a^b \left|\, |f(t)| - f_{n_k}(t) \,\right| dt = 0$$

тенглик ўринли бўлади. Бу ҳолда

$$(L)\int_a^b f(t)dt = \lim_{k\to\infty}(L)\int_a^b \left|\, f_{n_k}(t) \,\right| dt = 0$$

тенгликни ҳам исбот қилиш мумкин.

Шундай қилиб, бир томондан деярли ҳамма жойда $f(t)\ge 0$ бўлади. Иккинчи томондан эса, $(L)\int\limits_a^b f(t)dt = 0$ бўлади. Шунинг учун Лебег интегралининг 7–хоссасига кўра $f(t) \overset{д.х.ж}{=} 0$ ҳосил бўлади.

7–теорема (Бепо–Леви теоремаси). *Агар* $\{f_n(t)\}\subset L[a,b]$ *бўлиб бу* $\{f_n(t)\}\subset L[a,b]$ *кетма–кетлик камаймайдиган ва* n *номерга боғлиқ бўлмаган шундай бир* K *сон мавжуд бўлиб* $(L)\int\limits_a^b f_n(t)dt \le K$ *тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \overset{д.х.ж}{=} f(t) \in L[a,b] \qquad \text{ва} \qquad (L)\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(t)dt$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Лебег интегралининг 5–хоссаси ва теореманинг шартидан $\left\{(L)\int_a^b f_n(t)dt\right\}$ кетма–кетлик монотон ва чегараланган эканлиги келиб чиқади ва шунинг учун лимитга эга бўлади.

Бу $\{f_n(t)\}$ кетма–кетликнинг ўртача маънода фундаментал бўлган кетма–кетлик эканлигини исбот қилиш мумкин.

6–теоремага кўра шундай бир $\left\{f_{n_k}(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ қисмий кетма–кетлик мавжуд бўлиб

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(t) \overset{д.х.ж}{=} f(t) \in L[a,b]$$

деярли ҳамма жойда яқинлашувчи бўлади. $\{f_n(t)\}$ кетма–кетликнинг монотон эканлигидан

$$f(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

деярли ҳамма жойда яқинлашувчи ва

$$(L)\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(t)dt$$

тенглик ўринли бўлади.

Худди шунингдек, агар $\{f_n(t)\}$ кетма–кетлик ўсмайдиган ва n номерга боғлиқ бўлмаган шундай бир K сон мавжуд бўлиб $(L)\int_a^b f_n(t)dt \geq K$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \overset{д.х.ж}{=} f(t) \in L[a,b] \qquad \text{ва} \qquad (L)\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(t)dt$$

тенглик ўринли бўлади.

8–теорема. *Агар* $\{f_n(t)\} \subset L[a,b]$ *ва* $|f_n(t)| \leq F(t) \in L[a,b]$ *бўлса, у ҳолда* $\sup_n f_n(t) = f_1^*(t) \in L[a,b]$ *ва* $\inf_n f_n(t) = f_2^*(t) \in L[a,b]$ *бўлади.*

Исбот. Лебег интегралининг 9–хоссасига кўра

$$\varphi_n(t) = \max\left\{ f_1(t),\ f_2(t), ...,\ f_n(t)\right\} \in L[a,b]$$

бўлади. Энди $\{\varphi_n(t)\}$ кетма–кетлик учун 7–теореманинг шартлари ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, $\{\varphi_n(t)\}$ кетма–кетлик камаймайдиган ва

$$(L)\int_a^b \varphi_n(t)dt \le (L)\int_a^b F(t)dt$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунинг учун

$$\sup_n f_n(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = f_1^*(t) \in L[a,b]$$

бўлади. Худди шунингдек, Лебег интегралининг 9–хоссасига кўра

$$\psi_n(t) = \min\left\{ f_1(t),\ f_2(t), ...,\ f_n(t)\right\} \in L[a,b]$$

бўлади. Бу $\{\psi_n(t)\}$ кетма–кетлик ўсмайдиган кетма–кетлик бўлиб

$$(L)\int_a^b \psi_n(t)dt \ge -(L)\int_a^b F(t)dt$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунинг учун

$$\inf_n f_n(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty}\psi_n(t) = f_2^*(t) \in L[a,b]$$

бўлади.

9–теорема (Лебег теоремаси). *Агар* $\left\{ f_n(t)\right\} \subset L[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) \overset{д.х.ж}{=} f(t)$ *ва* $\left| f_n(t)\right| \le F(t) \in L[a,b]$ *бўлса, у ҳолда* $f(t) \in L[a,b]$ *ва* $(L)\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(t)dt$ *тенглик ўринли бўлади.*

Исбот. $\varphi_n(t) = \inf\left\{ f_n(t),\ f_{n+1}(t), ...\right\}$ бўлсин. У ҳолда

1) $\{\varphi_n(t)\}$ камаймайдиган кетма–кетлик;

2) 8–теореманинг натижасига кўра $\varphi_n(t) \in L[a,b]$ бўлади;

3) $\varphi_n(t) \le f_n(t)$ бўлади;

4) $|\varphi_n(t)| \le F(t) \in L[a,b]$ бўлади;

Худди шунга ўхшаш хоссаларни $\psi_n(t) = \sup\{f_n(t),\ f_{n+1}(t), ...\}$ кетма–кетлик ҳам қаноатлантиради, яъни

1) $\{\psi_n(t)\}$ ўсмайдиган кетма–кетлик;

2) $\psi_n(t) \in L[a,b]$ бўлади;

3) $f_n(t) \le \psi_n(t)$ бўлади;

4) $|\psi_n(t)| \le F(t) \in L[a,b]$ бўлади.

Энди $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t_0) = f(t_0)$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ натурал сон мавжуд бўлиб, барча $n \ge N = N(\varepsilon)$ натурал сон учун

$$f(t_0) - \varepsilon < f_n(t_0) < f(t_0) + \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шу билан бирга мос равишда $\varphi_n(t)$ ва $\psi_n(t)$ функциялар учун ҳам

$$f(t_0) - \varepsilon \le \psi_n(t) = \sup_{k\ge n\ge N} f_k(t_0) \le f(t_0) + \varepsilon\,,$$

$$f(t_0) - \varepsilon \le \varphi_n(t) = \inf_{k\ge n\ge N} f_k(t_0) \le f(t_0) + \varepsilon$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу ердан эса

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \overset{д.х.ж}{=} f(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty} \psi_n(t)$$

эканлиги келиб чиқади. Шунингдек 7–теоремага кўра

$$f(t) \in L[a,b]$$

ва

$$(L)\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b \varphi_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b \psi_n(t)dt$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Ниҳоят

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b \varphi_n(t)dt \le \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(t)dt \le \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b \psi_n(t)dt$$

тенгсизликни ҳисобга олиб

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(t)dt = (L)\int_a^b f(t)dt$$

тенгликка эга бўламиз. Шундай қилиб, 9–теорема исбот бўлди.

Энди Лебег интегралининг 10–хоссасини исбот қиламиз.

Бунинг учун

$$\varphi_n(t)=\begin{cases} x_n(t), \text{ агар } \ |x_n(t)|\le|f(t)| \ \text{ бўлса}, \\ |f(t)|, \text{ агар } \ x_n(t)>|f(t)| \ \text{ бўлса}, \\ -|f(t)|, \text{ агар } \ x_n(t)<-|f(t)| \ \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни қараймиз. Кўриниб турибдики, $|\varphi_n(t)|\le|f(t)|\in L[a,b]$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунингдек

$$\varphi_n(t)=\max\left\{-|x_n(t)|, \min\left\{x_n(t),|f(t)|\right\}\right\}$$

ва

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)\overset{д.х.ж}{=}f(t)$$

тенгликларни исбот қилиш мумкин бўлади.

$\left\{\varphi_n(t)\right\}\in L[a,b]$ эканлигидан бу кетма–кетликка 9–теоремани қўллаб $f(t)\in L[a,b]$ эканлигини ҳосил қиламиз.

10–теорема (Фату теоремаси). *Агар* $\left\{f_n(t)\right\}\subset L[a,b]$, $f_n(t)\ge 0$, $f(t)\overset{д.х.ж}{=}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)$ *ва қандайдир* k *сон учун* $(L)\int\limits_a^b f_n(t)dt\le k$ *бўлса, у ҳолда* $f(t)\in L[a,b]$ *ва* $(L)\int\limits_a^b f(t)dt\le k$ *тенгсизлик ўринли бўлади.*

Исбот. Бу ҳолда ҳам $\varphi_n(t)=\inf\left\{f_n(t),\ f_{n+1}(t),...\right\}$ бўлсин. У ҳолда $\left\{\varphi_n(t\ \right\}\subset\ L\ [a$ бўлади ва 9–теоремани исбот қилиш жараёнида биз $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)\overset{д.х.ж}{=}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)$ эканлигини ҳосил қилдик.

Шунингдек $\varphi_n(t)\le f_n(t)$ тенгсизликка кўра

$$(L)\int_a^b \varphi_n(t)dt\le(L)\int_a^b f_n(t)dt\le k$$

эканлигини ҳосил қиламиз ва биз $\left\{\varphi_n(t)\right\}$ камаймайдиган кетма–кетликка 7–теоремани қўлласак

$$f(t)\in L[a,b],\ (L)\int_a^b f(t)dt=(L)\int_a^b \varphi_n(t)dt\le k$$

эканлиги келиб чиқади.

6. Риман интеграли ва Лебег интеграли. Аввал эслатилганидек, агар $[a,b]$ оралиқда $x(t)$ функция узлуксиз бўлса, у ҳолда $x(t) \in L[a,b]$ ва

$$\int_a^b x(t)dt = (L)\int_a^b x(t)dt$$

тенглик ўринли бўлади. Биз энди бир оз умумийроқ бўлган тасдиқни исбот қиламиз.

11–теорема. *Агар $f(t)$ функция $[a,b]$ оралиқда Риман маъносида интегралланувчи бўлса, у ҳолда бу $f(t)$ функция $[a,b]$ оралиқда Лебег маъносида ҳам интегралланувчи ва*

$$\int_a^b f(t)dt = (L)\int_a^b f(t)dt$$

тенглик ҳам ўринли бўлади.

Исбот. Биз аввал чекли нуқталарда 1–тур узилишга эга бўлган функциялар учун шундай бир ўртача маънода фундаментал бўлган $\{x_n(t)\}$ узлуксиз функциялар кетма–кетлигини қуриш мумкин бўлиб, бунда

$$x(t) \overset{д.х.ж}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t)\,,\ x(t) \in L[a,b]$$

ва

$$(L)\int_a^b x(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt$$

эканлигини ҳосил қилган эдик. У ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |x(t)-x_n(t)|dt = 0$

ва шунга кўра $\int_a^b x(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt$ ҳосил бўлади, чунки

$$\left|\int_a^b x(t)dt - \int_a^b x_n(t)dt\right| \le \int_a^b |x(t)-x_n(t)|dt$$

тенгсизлик ўринлидир.

Шундай қилиб, агар $x(t)$ функция чекли нуқталарда 1–тур узилишга эга бўлган функция бўлса, у ҳолда бу функция Риман маъносида ва Лебег маъносида интегралланувчи бўлади ва бундан ташқари

$$\int_a^b x(t)dt = (L)\int_a^b x(t)dt$$

тенглик ҳам ўринли бўлади.

Энди $f(t)$ функция $[a,b]$ ораликда Риман маъносида интегралланувчи бўлган ихтиёрий функция бўлсин. У ҳолда $[a,b]$ ораликни n – та тенг бўлакларга бўламиз ва Дарбунинг юқори ва қуйи йиғиндиларига мос зинапоясимон функцияларни қурамиз:

Ҳар бир $1 \le k \le n$ учун

$$t \in (\alpha_k, \beta_k) = \left(a + \frac{(b-a)(k-1)}{n},\ a + \frac{(b-a)k}{n} \right)$$

интервалда $M_n(t) = \sup\limits_{t\in[\alpha_k,\beta_k]} f(t)$, бу ерда биз шу интервалнинг чеккаларида $M_n(t)$ функциянинг қийматини иккита бир томонли лимитларнинг максимуми каби аниқлаймиз. Худди шунингдек, $m_n(t)$ функцияни қурамиз:

Ҳар бир $1 \le k \le n$ учун

$$t \in (\alpha_k, \beta_k) = \left(a + \frac{(b-a)(k-1)}{n},\ a + \frac{(b-a)k}{n} \right)$$

интервалда $m_n(t) = \inf\limits_{t\in[\alpha_k,\beta_k]} f(t)$, бу ерда биз шу интервалнинг чеккаларида $M_n(t)$ функциянинг қийматини иккита бир томонли лимитларнинг минимуми каби аниқлаймиз.

У ҳолда бу бўлинишга мос $f(t)$ функциянинг $[a,b]$ ораликда Дарбунинг юқори йиғиндиси учун $S_n^{(D)}(f) = \int\limits_a^b M_n(t)dt$ ва Дарбунинг қуйи йиғиндиси учун эса $s_n^{(D)}(f) = \int\limits_a^b m_n(t)dt$ тенглик ўринли бўлади. Шартга кўра, $f(t)$ функция $[a,b]$ ораликда Риман маъносида интегралланувчи бўлгани учун

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n^{(D)}(f) - s_n^{(D)}(f)\right) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \left(M_n(t) - m_n(t)\right)dt = 0 \qquad (4.2.19)$$

тенглик ўринли бўлади.

Маълумки, $M_n(t)$ ва $m_n(t)$ функциялар чекли сондаги 1–тур узилиш нуқталарига эга бўлади. Шунинг учун юқорида исбот қилинганига кўра $M_n(t),\ m_n(t) \in L[a,b]$ ва

$$\int_a^b \left(M_n(t) - m_n(t)\right)dt = \left(L\right)\int_a^b \left(M_n(t) - m_n(t)\right)dt \qquad (4.2.20)$$

тенглик ўринли бўлади. Шунингдек

$$M_n(t) \geq f(t) \geq m_n(t) \qquad (4.2.21)$$

тенгсизлик ўринли ва бу (4.2.19), (4.2.20), (4.2.21) тенглик ва тенгсизликлардан

$$\lim_{n\to\infty}\left(L\right)\int_a^b \left|M_n(t) - m_n(t)\right|dt = \lim_{n\to\infty}\left(L\right)\int_a^b \left(M_n(t) - m_n(t)\right)dt = 0$$

тенглик ҳосил бўлади. 6–теоремага кўра шундай бир $\left\{M_{n_k}(t) - m_{n_k}(t)\right\}$ қисмий кетма–кетлик мавжуд бўлиб бу кетма–кетлик $[a,b]$ оралиқнинг деярли ҳамма жойида нолга интилувчи бўлади ва (4.2.21) тенгсизликлардан

$$M_{n_k}(t) - m_{n_k}(t) \geq f(t) - m_{n_k}(t) \geq 0$$

бўлади. Шунинг учун $[a,b]$ оралиқнинг деярли ҳамма жойида

$$\lim_{k\to\infty} m_{n_k}(t) \overset{д.х.ж}{=} f(t)$$

яқинлашувчи бўлади.

Шартга кўра $f(t)$ функция $[a,b]$ оралиқда Риман маъносида интегралланувчи бўлгани учун бу функция чегараланган бўлади, яъни шундай бир K ўзгармас сон мавжуд бўлиб $\left|f(t)\right| \leq K$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра $\left|m_{n_k}(t)\right| \leq K$ тенгсизлик ҳам ўринлидир. $\left\{m_{n_k}(t)\right\}$ қисмий кетма–кетликка 9–теоремани қўллаб $f(t) \in L[a,b]$ ва

$$\left(L\right)\int_a^b f(t)dt = \lim_{k\to\infty}\left(L\right)\int_a^b m_{n_k}(t)dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_a^b m_{n_k}(t)dt = \lim_{k\to\infty} S_{n_k}^{(D)}(f) = \int_a^b f(t)dt$$

эканлигини ҳосил қиламиз. 11–теорема исбот бўлди.

Шуни таъкидлаш керакки, Лебег маъносида интегралланувчи функциялар синфи Риман маъносида интегралланувчи функциялар синфи билан устма–уст тушмайди ва ундан кенг бўлади. Масалан, Дирихле функцияси Риман маъносида интегралланувчи бўлмайди. Бу функциянинг $D(t) \sim 0$ эквивалент эканлигидан унинг Лебег маъносида интегралланувчи эканлигини ва $\left(L\right)\int\limits_0^1 D(t)dt = \int\limits_0^1 0 \cdot dt = 0$ тенгликни ҳосил қиламиз.

А. Лебег таклиф этган интеграллаш усулига кўра $E=[a,b]$ оралиқда берилган ҳар қандай $f(x)$ ўлчовли ва чегараланган функция интегралланувчи бўлади. Биз $E=[a,b]$ оралиқда берилган ҳар қандай $f(x)$ ўлчовли ва чегараланган функция учун унинг аниқланиш соҳаси ўрнига шу функциянинг $[c,d]$ ўзгариш соҳасини майда бўлакларга бўламиз, бунда c ва d берилган $f(x)$ чегараланган функция қийматларининг аниқ қуйи ва аниқ юқори чегарасидир. Биз $c=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_n=d$ нуқталар ёрдамида $[c,d]$ оралиқни майда бўлакларга бўламиз ва бу бўлиниш нуқталари орқали абсцисса ўқига параллел тўғри чизиқларни ўтказамиз. Шу йўл билан биз

$$l_0=\left\{x: y_0 \le f(x) < y_1\right\},$$

$$l_1=\left\{x: y_1 \le f(x) < y_2\right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l_{n-1}=\left\{x: y_{n-1} \le f(x) < y_n\right\}$$

тўпламларни ҳосил қиламиз. Натижада биз Лебегнинг қуйи ва юқори йиғиндилари деб аталувчи

$$s_n=\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \mu l_k\,, \quad S_n=\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \cdot \mu l_k$$

йиғиндиларни тузамиз, бунда ҳар бир $0 \le k \le n-1$ номер учун $\mu l_k=\mu\left\{x: y_k \le f(x) < y_{k+1}\right\}$ орқали $l_k=\left\{x: y_k \le f(x) < y_{k+1}\right\}$ тўпламнинг Лебег ўлчови белгиланган.

Бу йиғиндилар билан бирга

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{y}_k \cdot \mu\left(f^{-1}[y_k,y_{k+1})\right)$$

Лебегнинг интеграл йиғиндисини ёзиш мумкин бўлади, бунда $\tilde{y}_k$ сон $y_k \le \tilde{y}_k < y_{k+1}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий сон. Биз бу йиғиндини Стильтьес интеграли учун ёзиладиган интеграл йиғинди каби

$$\sigma'_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot \mu l_k$$

шаклида ёзиш мумкин бўлади, бунда $x_k \in l_k$ бўлган нуқта бўлади. Бу миқдорлар учун

$$s_n \le \sigma_n \le S_n \ \left(s_n \le \sigma'_n \le S_n\right)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Агар $\lambda = \max\limits_{0\le k\le n-1}(y_{k+1}-y_k)$ деб бўлиниш майдалиги белгиланса, у ҳолда

$$S_n - s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(y_{k+1}-y_k\right)\cdot \mu l_k \le \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \mu l_k = \lambda \mu E$$

бўлади, яъни

$$0 \le \sigma_n - s_n \le S_n - s_n \le \lambda \mu E$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Агар $U = \sup\limits_n s_n$ ва $W = \inf\limits_n S_n$ деб олинса, у ҳолда $s_n \le U \le W \le S_n$, шу билан бирга $0 \le W - U \le \lambda \mu E$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бўлиниш майдалиги $\lambda = \max\limits_{0\le k\le n-1}(y_{k+1}-y_k) \to 0$ да $W = U$ тенглик келиб чиқади. Шунга кўра,

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sigma_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cdot \mu l_k$$

чекли лимит мавжуд бўлади. Бу айтилганларга кўра қуйидаги асосий теорема ўринли бўлади.

12-теорема. *Ихтиёрий E чекли ўлчовли тўпламда берилган ҳар қандай $f(x)$ ўлчовли ва чегараланган функция шу E чекли ўлчовли тўпламда интегралланувчи ва интегралнинг қиймати Лебег йиғиндиси лимитининг қийматига тенг бўлади.*

Ихтиёрий $E = [a,b]$ оралиқда берилган ҳар қандай $f(x)$ ўлчовли ва чегараланган функция учун

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\{\mu_0 y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{k+1}\cdot(y_{k+1}-y_k)\right\}$$

лимитга Лебег интеграли аташ мумкин, бунда $\lambda = \max\limits_{0\le k\le n-1}(y_{k+1} - y_k)$, $\mu_k = \mu\{x: f(x) \ge y_k\}$, $c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = d$ бўлади.

Агар $f(x) \ge 0$ мусбат чегараланмаган функция бўлса, у ҳолда ихтиёрий $N > 0$ сон учун

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{агар } f(x) \le N \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } f(x) > N \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция чегараланган бўлади ва $\int\limits_a^b f_N(x)dx$ интеграл мавжуд бўлади. $N > 0$ сон ўсиши билан бу интегралнинг қиймати камаймайди. Шунинг учун $N \to \infty$ да $\int\limits_a^b f_N(x)dx$ интеграл чекли ёки чексиз лимитга эга бўлади. *Агар* $N \to \infty$ *да* $\int\limits_a^b f_N(x)dx$ *интегралнинг лимити чекли бўлса, у ҳолда бу лимит* $f(x) \ge 0$ *мусбат чегараланмаган функциянинг Лебег интеграли деб айтилади ва*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_a^b f_N(x)dx$$

каби ёзилади.

Энди $f(x)$ ихтиёрий ишорали функция бўлсин. У ҳолда бу функцияни иккита манфиймас $f_1(x) \ge 0$ ва $f_2(x) \ge 0$ бўлган функцияларнинг айирмаси шаклида тасвирлаймиз, яъни $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, бунда

$$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_1(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \text{ бўлади.}$$

Агар ҳар бир $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар жамланувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам жамланувчи деб айтилади ва бу ҳолда таърифга кўра

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx - \int\limits_a^b f_2(x)dx$$

деб қабул қиламиз.

Агар $f(x)$ функция комплекс қийматли, яъни $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \varphi(x)dx+i\int_a^b \psi(x)dx$$

деб қабул қиламиз. Агар A ўлчовли тўпламда берилган $f(x)$ ўлчовли функцияга текис яқинлашувчи содда интегралланувчи $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма–кетлиги мавжуд бўлса, у ҳолда

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu$$

лимитга $f(x)$ функциянинг A тўплам бўйича олинган Лебег интеграли деб айтилади ва

$$\int_A f(x)d\mu$$

каби ёзилади. Шунга кўра

$$\int_A f(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu$$

тенгликни ёзамиз[1].

Мустақил ечиш учун мисоллар.

29.1. $f(x)=e^{-[x]}$ функциянинг $[0,+\infty)$ оралиқдаги Лебег интегралини ҳисобланг, бунда $[x]-$ эса x соннинг бутун қисми.

29.2. $f(x)=\dfrac{1}{[x+1]\cdot[x+2]}$ функциянинг $[0,+\infty)$ оралиқдаги Лебег интегралини ҳисобланг, бунда $[x]-$ эса x соннинг бутун қисми.

29.3. $f(x)=\dfrac{1}{[x]!}$ функциянинг $[0,+\infty)$ оралиқдаги Лебег интегралини ҳисобланг, бунда $[x]-$ эса x соннинг бутун қисми.

29.4. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқда Риман маъносида интегралланувчи бўлишлиги учун унинг чегараланган ва деярли

---

[1] Лебег интеграли ҳақида батафсил А.Н. Колмогоров, С.В. Фоминларнинг “Элементы теории функций и функционального анализа”, “Наука”, М., 1976 й. китоби орқали танишиш мумкин.

ҳамма жойда узлуксиз бўлишлиги зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг.

29.5. $f(x)=\sin x$ функциянинг $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқдаги Лебег интегралини ҳисобланг.

29.6. $f(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ агар } x \text{ рационал бўлса},\\ \cos x, \text{ агар } x \text{ иррационал бўлса}\end{cases}$ функциянинг $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқдаги Лебег интегралини ҳисобланг.

29.7. $f(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ агар } \cos x \text{ рационал бўлса},\\ \sin^2 x, \text{агар } \cos x \text{ иррационал бўлса}\end{cases}$

функциянинг $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқдаги Лебег интегралини ҳисобланг.

29.8. $h(x,y)=\begin{cases}0, \text{ агар } xy \text{ рационал бўлса},\\ 1, \text{агар } xy \text{ иррационал бўлса}\end{cases}$

функциянинг $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ квадрат бўйича Лебег интегралини ҳисобланг.

29.9. $I_1=\int\limits_{-1}^{3} xdg(x);\qquad g(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x=-1 \text{ бўлса},\\ 1, \text{ агар } x\in(-1,2) \text{ бўлса},\\ -1, \text{ агар } x\in[2,3] \text{ бўлса}\end{cases}$

Риман–Стилтьес интегралини ҳисобланг.

29.10. $I_2=\int\limits_{0}^{2} x^2dg(x);\quad g(x)=\begin{cases}-1, \text{ агар } x\in[0,\frac{1}{2}) \text{ бўлса},\\ 0, \text{ агар } x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}) \text{ бўлса}\\ 2, \text{ агар } x=\frac{3}{2} \text{ бўлса},\\ -2, \text{ агар } x\in(\frac{3}{2},2] \text{ бўлса}\end{cases}$

Риман–Стилтьес интегралини ҳисобланг.

3- §. Соболев фазоси

1. Умумий таъриф. R^m фазода $\overline{G}$ ёпиқ чегараланган соҳа берилган бўлсин. Шу $\overline{G}$ ёпиқ чегараланган соҳада l марта узлуксиз дифференциалланувчи $u\colon \overline{G}\to R^1$ (соддалик учун ҳақиқий қийматли) бўлган $u(x)$ функцияларнинг чизиқли фазосини қараймиз. $\overline{G}$ ёпиқ чегараланган соҳада дифференциалланувчанликни ҳар хил маънода тушуниш мумкин. Биз $u(x)$ функция G соҳада l марта узлуксиз дифференциалланувчи ва ҳар бир хусусий ҳосила G соҳадан олинган x нуқта шу G соҳанинг чегарасидаги ихтиёрий нуқтага интилганда чекли лимитга эга бўлсин деб ҳисоблаймиз. Натижада унинг ҳар бир хусусий ҳосиласининг $\overline{G}$ соҳага давоми шу $\overline{G}$ ёпиқ чегараланган соҳада узлуксиз бўлган функциядан иборат бўлади. Биз бу ерда G соҳанинг Г чегарасини етарлича силлиқ деб ҳисоблаймиз. Бундан ташқари, одатда G соҳа бир боғламли ва бошқа қўшимча шартларни қаноатлантиришини айрим ҳолларда талаб этамиз.

Бу қаралаётган чизиқли фазода норма тушунчасини $p\geq 1$ учун

$$\|u\|=\left\{\int\limits_{\overline{G}}|u(x)|^p\,dx+\sum_{1\leq|\alpha|\leq l}\int\limits_{\overline{G}}\left|D^\alpha u(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (4.3.1)$$

тенглик билан киритамиз. Норманинг барча аксиомалари ўринли бўлиб ҳосил қилинган нормаланган фазони $\tilde{W}_p^l(\overline{G})$ орқали белгилаймиз. Унинг (4.3.1) норма бўйича тўлдирилгани $W_p^l(G)$ орқали белгиланади ва Соболев фазоси деб айтилади.

Кўпгина амалий масалаларни ечишда $p=2$ бўлган ҳол учрайди. Бу ҳолда қуйидагича белгилаш қабул қилинган: $W_2^l(G)=H^l(G)$. Бу $H^l(G)$ Соболев фазоси Гильберт фазоси бўлиб

$$(u,v)=\int\limits_{\overline{G}}u(x)v(x)dx+\sum_{1\leq|\alpha|\leq l}\int\limits_{\overline{G}}D^\alpha u(x)D^\alpha v(x)dx \qquad (4.3.2)$$

скаляр кўпайтма ёрдамида яратилган нормага нисбатан $\tilde{W}_2^l(\overline{G})$ фазонинг тўлдирилгани бўлади.

$W_p^l(G)$ Соболев фазоси ва у билан мукаммал боғлиқ бўлган Соболев маъносидаги умумлашган ҳосила тушунчаси математик амалиётга академик С.Л. Соболев томонидан киритилган ва бу тушунчалар математик физика ва функционал анализнинг назарий ҳамда амалий масалаларини ечишда муҳим роль ўйнайди.

$\tilde{W}_p^l(\bar{G})$ силлиқ функциялар фазосини қандайдир идеал элементлар билан тўлдириш бу элементларни шу $\tilde{W}_p^l(\bar{G})$ силлиқ функциялар фазосидан олинган элементлар билан ихтиёрий аниқлик даражасида ҳисоблаш мумкин бўлиб, бир томондан $W_p^l(G)$ Соболев фазосининг тўлалигидан кўпгина математик тасдиқларнинг аниқ якунини топишга олиб келади ва иккинчи томондан эса, барча ҳисоблаш имкониятларини сақлаб қолади.

Қуйида биз аввал $m=1$ ва $m=3$ бўлган хусусий ҳолларга тўхталамиз, яъни Соболев фазосини ҳақиқий ўқ ва уч ўлчамли фазо бўлган ҳолларда қараймиз.

2. $H^1(a,b)$ **фазо.** Берилган $[a,b]$ ораликда узлуксиз дифференциалланувчи бўлган барча $u(x)$ функцияларнинг $\tilde{H}^1[a,b]$ фазосини қараймиз, бунда скаляр кўпайтма

$$(u,v)=\int_a^b u(x)v(x)dx+\int_a^b u'(x)v'(x)dx \qquad (4.3.3)$$

ва бу скаляр кўпайтмага мос норма эса

$$\|u\|=\left(\int_a^b u^2(x)dx+\int_a^b u'^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.3.4)$$

шаклида бўлиб бу нормага нисбатан $\tilde{H}^1[a,b]$ фазосининг тўлдирилгани $H^1(a,b)$ фазо бўлади. Бу $H^1(a,b)$ фазо қандай элементлардан ташкил топган деган савол пайдо бўлади?. Тўлдириш ҳақидаги теоремага кўра, $H^1(a,b)$ фазонинг элементлари $\tilde{H}^1[a,b]$ фазода ўртача яқинлашиш маъносида фундаментал бўлган $\{u_n(x)\}\in\tilde{H}^1[a,b]$ кетма-кетликлар синфидан иборат бўлади, аниқроқ қилиб айтганда $n,\, m\to\infty$ да

$$\int_a^b |u_n(x)-u_m(x)|^2\,dx+\int_a^b |u_n'(x)-u_m'(x)|^2\,dx\to 0$$

бўлади. Агар $\tilde{H}^1[a,b]$ фазо метрикаси бўйича $\{\hat{u}_n(x)-u_n(x)\}$ кетма-кетлик чексиз кичикдан иборат бўлган бундай $\{u_n(x)\}\in\tilde{H}^1[a,b]$ ва $\{\hat{u}_n(x)\}\in\tilde{H}^1[a,b]$ кетма-кетликлар битта синфга тегишли бўлади, яъни агар $n\to\infty$ да

$$\int_a^b |u_n(x)-\hat{u}_n(x)|^2\,dx+\int_a^b |u_n'(x)-\hat{u}_n'(x)|^2\,dx\to 0$$

бўлса, у ҳолда $\tilde{H}^1[a,b]$ фазода ўртача яқинлашиш маъносида фундаментал бўлган $\{u_n(x)\}\in\tilde{H}^1[a,b]$ кетма-кетликлар учун $n,\,m\to\infty$ да алоҳида

$$\int_a^b |u_n(x)-u_m(x)|^2\,dx\to 0,\qquad \int_a^b |u_n'(x)-u_m'(x)|^2\,dx\to 0$$

эканлиги келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш $\tilde{H}^1[a,b]$ фазо метрикаси бўйича $\{u_n(x)\}$ ва $\{\hat{u}_n(x)\}$ кетма-кетликларнинг эквивалент эканлигидан $n\to\infty$ да

$$\int_a^b |u_n(x)-\hat{u}_n(x)|^2\,dx\to 0,\qquad \int_a^b |u_n'(x)-\hat{u}_n'(x)|^2\,dx\to 0$$

эканлиги келиб чиқади.

$L_2(a,b)$ фазо таърифига кўра, $u(x)\in L_2(a,b)$ ва $w(x)\in L_2(a,b)$ функциялар мавжуд бўлиб, бунда $n\to\infty$ да ўртача яқинлашиш маъносида $u_n(x)\to u(x)$ ва $u_n'(x)\to w(x)$ бўлади.

Биз қуйидаги муҳим таърифга келамиз.

Таъриф. $\{u_n(x)\}\in\tilde{H}^1[a,b]$ бўлсин. У ҳолда $L_2(a,b)$ фазода $\{u_n(x)\}$ кетма-кетлик билан аниқланувчи $u(x)\in L_2(a,b)$ элемент ва $\{u_n'(x)\}$ кетма-кетлик билан аниқланувчи $w(x)\in L_2(a,b)$ элемент мавжуд бўлиб, бу $w(x)$ элемент $u(x)$ элементнинг *Соболев маъносидаги умумлашган ҳосиласи* деб айтилади. Бу ҳолда $w(x)=u'(x)$ каби ёзилади.

Агар $u_1(x),\ u_2(x) \in H^1(a,b)$ бўлса, у ҳолда $\lambda_1 u_1(x)+\lambda_2 u_2(x) \in H^1(a,b)$ ва $(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2)'(x)=\lambda_1 u_1'(x)+\lambda_2 u_2'(x)$ бўлади. Бундан ташқари, ўзгармаснинг умумлашган ҳосиласи нолга тенг бўлади.

Умумлашган ҳосила таърифидан кўриниб турибдики, $u'(x)$ функция нолокал аниқланади, яъни айрим нуқтада эмас, балки глобал равишда бутун $[a,b]$ оралиқда бирданига аниқланади. $u_n(x),\ v_n(x) \in \tilde{H}^1[a,b],\quad n=1,2,...$ бўлиб, бунда $\{u_n(x)\} \in u(x) \in H^1(a,b)$ ва $\{v_n(x)\} \in v(x) \in H^1(a,b)$ бўлсин.

Энди

$$(u_n,v_n)=\int_a^b u_n(x)v_n(x)dx+\int_a^b u_n'(x)v_n'(x)dx \tag{4.3.5}$$

$$\|u_n\|=\left(\int_a^b u_n^2(x)dx+\int_a^b u_n'^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.3.6}$$

тенгликларда $n \to \infty$ да лимитга ўтиб ва тўлдириш ҳақидаги теоремага асосан, ҳамда Лебег интегралининг таърифидан биз (4.3.3) ва (4.3.4) формулаларга эга бўламиз. Бунда ҳосила умумлашган маънода ва интеграл Лебег маъносида тушунилади. Айрим ҳисоблашлар учун, албатта (4.3.5) ва (4.3.6) формулалардан ҳам етарлича катта n учун фойдаланиш мумкин бўлади, яъни $u,\ v,\ u',\ v'$ идеал элементлар ўрнига уларнинг $u_n,\ v_n,\ u_n',\ v_n'$ силлиқ яқинлашишларидан фойдаланиш мумкин бўлади.

3. Умумлашган ҳосиланинг бошқа таърифи. $\overset{0}{C}{}^1[a,b]$ орқали $[a,b]$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи бўлган барча $v(x)$ финит функцияларнинг тўпламини белгилаймиз. Агар $u(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $v(x) \in \overset{0}{C}{}^1[a,b]$ функция ҳосиласи учун қуйидаги интеграл айният ўринлидир:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=-\int_a^b u'(x)v(x)dx\ . \tag{4.3.7}$$

Бу айният бўлаклаб интеграллаш орқали ҳосил қилинади. Бу айният билан $u'(x)$ ҳосила тўлиқ аниқланади. Ҳақиқатдан ҳам, бундан ташқари ихтиёрий $v(x)\in \overset{0}{C}{}^{1}[a,b]$ функция учун $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган $w(x)$ функция мавжуд бўлиб

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = -\int_a^b w(x)v(x)dx \tag{4.3.8}$$

тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда бу тенгликдан олдинги тенгликни айириб, биз ихтиёрий $v(x)\in \overset{0}{C}{}^{1}[a,b]$ функция учун

$$\int_a^b [u'(x)-w(x)]v(x)dx = 0$$

айниятни ҳосил қиламиз. Бундан эса $\overset{0}{C}{}^{1}[a,b]$ тўпламнинг $\tilde{L}[a,b]$ синфда зич эканлигидан $[a,b]$ оралиқда $w(x)=u'(x)$ тенглик келиб чиқади. Шунга кўра, (4.3.8) интеграл айниятни умумлашган ҳосиланинг таърифи сифатида қабул қилиш мумкин бўлади. Қуйидаги лемма ўринлидир.

1–лемма. *Агар* $u(x)\in H^{1}(a,b)$ *бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $v(x)\in \overset{0}{C}{}^{1}[a,b]$ *функция учун (4.3.7) интеграл айният ўринлидир.*

Исбот. $\{u_n(x)\}\in u(x)\in H^{1}(a,b)$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $v(x)\in \overset{0}{C}{}^{1}[a,b]$ функция учун (4.3.7) интеграл айният кўра

$$\int_a^b u_n(x)v'(x)dx = -\int_a^b u_n'(x)v(x)dx$$

тенгликка эга бўламиз. Скаляр кўпайтманинг узлуксизлик хоссасига кўра $n\to\infty$ да лимитга ўтамиз. Натижада биз ихтиёрий $u(x)\in H^{1}(a,b)$ функция учун (4.3.7) интеграл айниятни ҳосил қиламиз. Лемма исбот бўлди.

2–лемма. $u(x)\in H^{1}(a,b)$ *ва* $w(x)\in L_2(a,b)$ *функциялар берилган бўлиб, бунда ихтиёрий* $v(x)\in \overset{0}{C}{}^{1}[a,b]$ *функция учун (4.3.8) интеграл айният ўринли бўлсин. У ҳолда* $u'(x)=w(x)$ *(умумлашган ҳосилали) тенглик ўринли бўлади.*

Исбот. $\{u_n(x)\}\in u(x)$ ва $\{w_n(x)\}\in w(x)$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $v(x)\in \overset{0}{C}{}^{1}[a,\,b]$ функция учун $n\to\infty$ да

$$\int\limits_a^b u_n(x)v'(x)dx+\int\limits_a^b w_n(x)v(x)dx=-\int\limits_a^b \left[u_n'(x)-w_n(x)\right]v(x)dx\to 0$$

бўлади. $z(x)\in L_2(a,\,b)$ – синф $\{u_n'(x)-w_n(x)\}$ кетма-кетлик билан берилган бўлсин. У ҳолда

$$\int\limits_a^b z(x)v(x)dx=0$$

тенглик ихтиёрий $v(x)\in \overset{0}{C}{}^{1}[a,\,b]$ функция учун ўринлидир. Бундан эса $z(x)\equiv 0$ келиб чиқади. Лемма исбот бўлди.

4. Жойлашиш ҳақидаги энг содда теорема. $H^1(a,\,b)$ фазодаги функциянинг абсолют узлуксизлиги.

1–теорема. *$H^1(a,\,b)$ фазо $C[a,\,b]$ фазода жойлашган бўлади.*

Исбот. $u(x)$ функция $[a,\,b]$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан ва $u(x)$ функциянинг $[a,\,b]$ оралиқда узлуксиз эканлигидан шундай бир $\xi\in[a,\,b]$ нуқта топилиб, бунда $u(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^b u(s)ds$ тенглик ўринли бўлади. Шунга кўра $[a,\,b]$ оралиқда қуйидаги айният ўринлидир:

$$u(x)=\int\limits_\xi^x u'(s)ds+\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b u(s)ds.$$

Коши–Буняковский тенгсизлигига кўра

$$|u(x)|\le\int\limits_a^b |u'(s)|ds+\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |u(s)|ds\le$$

$$\le\sqrt{b-a}\left(\int\limits_a^b u'^{\,2}(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\int\limits_a^b u^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\le k\|u\|_{\tilde{W}{}^{1}_{2}[a,b]}$$

тенгсизликка эга бўламиз, бунда $k=\sqrt{b-a}+\dfrac{1}{\sqrt{b-a}}$. Шунга кўра, $[a, b]$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи ихтиёрий $u(x)$ функция учун

$$\|u\|_{C[a,b]}\le k\|u\|_{\tilde{W}_2^1[a,b]} \tag{4.3.9}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Энди $\{u_n(x)\}\in\tilde{W}_2^1[a,b]$ кетма–кетлик $\tilde{W}_2^1[a,b]$ фазо метрикасида фундаментал бўлсин. У ҳолда $n, m\to\infty$ да

$$\|u_n-u_m\|_{C[a,b]}\le k\|u_n-u_m\|_{\tilde{W}_2^1[a,b]}\to 0$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра, $\{u_n(x)\}$ кетма–кетлик текис яқинлашиш маъносида фундаментал бўлади ва текис яқинлашиш ҳақидаги Коши критериясига кўра $u(x)\in C[a,b]$ функцияга текис яқинлашади. Бундан эса ўртача маънода ҳам $n\to\infty$ да $u_n(x)\to u(x)$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $L_2\,[a,b]$ синфдан олинган элементни аниқловчи $\{u_n(x)\}$ кетма–кетлик $u(x)$ узлуксиз функцияни аниқлар экан. $H^1(a, b)$ фазо элементларига узлуксиз функцияни мос қўямиз. $\{u_n(x)\}\in u(x)$ бўлсин. $\|u_n\|_{C[a,b]}\le k\|u_n\|_{\tilde{W}_2^1[a,b]}$ тенгсизликда $n\to\infty$ да лимитга ўтиб (4.3.9) тенгсизликка эга бўламиз. Шундай қилиб, $H^1(a, b)$ фазо $C[a, b]$ фазода жойлашган бўлади. Теорема исбот бўлди.

2–теорема. *$H^1(a, b)$ фазодаги функциялар абсолют узлуксиздир, яъни ихтиёрий $u(x)\in H^1(a,b)$ функция учун*

$$u(x)=\int_a^x u'(s)ds+u(a) \tag{4.3.10}$$

тенглик ўринлидир, бунда $u'(x)\in L_2\,(a,b)$ бўлиб $u(x)$ функциянинг умумлашган ҳосиласидир.

Исбот. $\{u_n(x)\}\in u(x)\in H^1(a,b)$ бўлсин. Қуйидаги айниятни қараймиз:

$$u_n(x)=\int_a^x u_n'(s)ds+u_n(a).$$

Маълумки, $n \to \infty$ да $u_n(x) \to u(x)$, $u_n(a) \to u(a)$ ва $\int\limits_a^x u_n'(s)ds \underset{n\to\infty}{\to} \int\limits_a^x u'(s)ds$ бўлади, бунда $u'(x) \in L_2\,(a,b)$ бўлиб $u(x)$ функциянинг умумлашган ҳосиласидир. Шунга кўра

$$u(x) = \int\limits_a^x u'(s)ds + u(a)$$

тенглик ўринли бўлади. Теорема исбот бўлди.

Умуман олганда абсолют узлуксиз функция қуйидагича киритилади.

Таъриф. $f(x)$ функция қандайдир $[a,\, b]$ оралиқда берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta > 0$ мусбат сон топилиб узунликларининг йиғиндиси шу δ сондан кичик бўлган ихтиёрий чекли сондаги ўзаро кесишмайдиган

$$(a_k,\, b_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

интерваллар системаси учун

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

эканлигидан

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқса, у ҳолда $f(x)$ функция берилган $[a,\, b]$ оралиқда *абсолют узлуксиз функция* дейилади.

Кўриниб турибдики, ҳар қандай абсолют узлуксиз функция текис узлуксиздир. Тескариси умуман олганда, тўғри эмас. Масалан, “Кантор зиначаси” деб номланган функция $[0, 1]$ ёпиқ оралиқда узлуксиз функциядир. Шунинг учун Кантор теоремасига кўра бу функция $[0, 1]$ ёпиқ оралиқда текис узлуксиз функция ҳамдир. Лекин бу функция абсолют узлуксиз эмас.

Ҳақиқатдан ҳам, Кантор тўпламини узунликларининг йиғиндиси исталганча кичик бўлган чекли сондаги ўзаро кесишмайдиган $(a_k,\, b_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ интерваллар системаси билан қоплаш мумкин бўлиб, бундай интерваллар системаси учун

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| = 1$$

тенгликнинг бажарилиши келиб чиқади.

Энди абсолют узлуксиз функциянинг асосий хоссаларини келтирамиз.

1. Келтирилган таърифда узунликларининг йиғиндиси шу δ сондан кичик бўлган ихтиёрий *чекли* сондаги ўзаро кесишмайдиган $(a_k, b_k),\ \ k = 1, 2, \dots, n$ интерваллар системаси ўрнига узунликларининг йиғиндиси шу δ сондан кичик бўлган ихтиёрий *чекли ёки саноқли* сондаги ўзаро кесишмайдиган $(a_k, b_k),\ \ k = 1, 2, \dots, n$ ёки $(a_k, b_k),\ \ k \in N$ интерваллар системасини қараш мумкин бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, берилган $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta > 0$ мусбат сон топилиб узунликларининг йиғиндиси шу δ сондан кичик бўлган ихтиёрий чекли сондаги ўзаро кесишмайдиган

$$(a_k, b_k),\ \ k = 1, 2, \dots, n$$

интерваллар системаси учун

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

эканлигидан

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. У ҳолда узунликларининг йиғиндиси шу δ сондан кичик бўлган ихтиёрий саноқли сондаги ўзаро кесишмайдиган (α_k, β_k) интерваллар системаси учун ҳар бир n натурал сонга мос

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(\beta_k) - f(\alpha_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $n \to \infty$ да лимитга ўтиб

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| f(\beta_k) - f(\alpha_k) \right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

2. *Ҳар қандай абсолют узлуксиз функция ўзгариши чегараланган функциядир.*

Ҳақиқатдан ҳам, $f(x)$ функция қандайдир $[a, b]$ ораликда абсолют узлуксиз эканлигидан, хусусан ҳар бир $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta > 0$ мусбат сонни танлаш мумкин бўлиб шу ораликда узунлиги δ сондан кичик бўлган ихтиёрий оралиқ учун $f(x)$ функциянинг тўла ўзгариши $\varepsilon > 0$ мусбат сондан катта бўлмайди. Маълумки, $[a, b]$ ораликни узунлиги δ сондан кичик бўлган чекли сондаги ораликларга бўлиш мумкинки, бунда $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ ораликдаги тўла ўзгариши чекли бўлади.

3. *Абсолют узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси ва абсолют узлуксиз функциянинг сонга кўпайтмаси ҳам абсолют узлуксиз функциядир.*

Бу хосса абсолют узлуксиз функциянинг таърифи ҳамда йиғинди ва кўпайтма модулининг хоссаларидан келиб чиқади.

2 ва 3 хоссалар *абсолют узлуксиз функциялар синфи барча ўзгариши чегараланган функциялар фазосида чизиқли кўпхилликни ҳосил қилишини билдиради.*

4. *Ҳар қандай абсолют узлуксиз функция камаймайдиган иккита абсолют узлуксиз функцияларнинг айирмаси шаклида тасвирланиши мумкин.*

Ҳақиқатдан ҳам, ҳар қандай $f(x)$ абсолют узлуксиз функция ўзгариши чегараланган функция сифатида

$$f(x) = v(x) - g(x)$$

айирма шаклида тасвирланади, бунда

$$v(x) = V_a^x\left[f\right] \quad \text{ва} \quad g(x) = v(x) - f(x)$$

камаймайдиган функциялардир. Бу ҳар иккала функциянинг $[a, b]$ ораликда абсолют узлуксиз функция эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $v(x)$ функциянинг $[a, b]$ ораликда абсолют узлуксиз функция эканлигини кўрсатиш етарлидир. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон берилган бўлсин. Унга мос $\delta > 0$ мусбат сонни шундай танлаш мумкин бўлиб узунликларининг йиғиндиси шу δ сондан кичик бўлган ихтиёрий чекли n сондаги ўзаро кесишмайдиган (a_k, b_k), $k = 1, 2, \dots, n$ интерваллар системаси учун $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ эканлигидан

$$\sum_{k=1}^{n} \left|v(b_k) - v(a_k)\right| < \varepsilon \tag{4.3.11}$$

эканлигини кўрсатишимиз керак бўлади. Бу йиғинди (a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) интервалларнинг мумкин бўлган

$$a_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < x_{1,2} < \ldots < x_{1,m_1} = b_1,$$

$$a_2 = x_{2,0} < x_{2,1} < x_{2,2} < \ldots < x_{2,m_1} = b_2,$$

....

$$a_n = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,m_n} = b_n,$$

чекли бўлиниши бўйича олинган

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} \left| f(x_{k,l}) - f(x_{k,l-1})\right| \tag{4.3.12}$$

соннинг аниқ юқори чегарасини ифода қилади. Маълумки, барча $(x_{k,l-1}, x_{k,l})$ интерваллар узунликларининг йиғиндиси $\delta > 0$ мусбат сондан ошмайди ва шунинг учун (4.3.12) йиғинди $\varepsilon > 0$ мусбат сондан ошмайди. Шунга кўра, унинг аниқ юқори чегараси бўлган (4.3.11) йиғинди ҳам $\varepsilon > 0$ мусбат сондан ошмайди.

Қуйида келтириладиган иккита теорема абсолют узлуксизлик ва Лебегнинг аниқмас интеграли тушунчаларининг ўзаро жипс боғлиқ эканлигини кўрсатади.

3–теорема. *Жамланувчи функциянинг аниқмас интеграли шаклида тасвирланувчи*

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

функция абсолют узлуксиздир.

Исбот. Лебег интегралининг абсолют узлуксиз эканлигидан ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta > 0$ мусбат сон топилиб узунликларининг йиғиндиси шу δ сондан кичик бўлган ихтиёрий чекли сондаги ўзаро кесишмайдиган (a_k, b_k), $k = 1, 2, \ldots, n$ интерваллар системаси учун $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ эканлигидан $\int_{\bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)} \left|f(t)\right|dt < \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Бундан эса, шу (a_k, b_k), $k = 1, 2, \ldots, n$ ўзаро кесишмайдиган интерваллар системаси учун

$$\sum_{k=1}^{n} \left|F(b_k)-F(a_k)\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \left|f(t)\right|dt = \int_{\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)} \left|f(t)\right|dt < \varepsilon$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

4–теорема (Лебег теоремаси). *Берилган* $[a,b]$ *оралиқда абсолют узлуксиз бўлган* $F(x)$ *функциянинг* $f = F'$ *ҳосиласи шу оралиқда жамланувчи функция бўлади ва ҳар бир* $x \in [a,b]$ *учун*

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a)$$

тенглик ўринлидир.

Бу 3 ва 4– теоремалардан кўринадики ҳар қандай абсолют узлуксиз функция ва фақат шуларгина қўшилувчи ўзгармас сон аниқлигида интеграллаш амали орқали ўзининг ҳосиласи ёрдамида қайта тикланади.

4– теоремани исботлаш учун бизга қуйидаги лемма зарурдир.

3–лемма. *Агар* f *монотон камаймайдиган абсолют узлуксиз функциянинг ҳосиласи деярли ҳамма жойда нолга тенг бўлса, у ҳолда бу функция ўзгармасдир.*

Лемманинг исботи. Бизга $[a,b]$ оралиқда f монотон камаймайдиган абсолют узлуксиз функция берилган бўлсин. Бу f функция узлуксиз монотон камаймайдиган функция эканлигидан унинг қийматлар соҳаси $[f(a), f(b)]$ оралиқдан иборат бўлади. Агар деярли ҳамма жойда $f'(x) = 0$ бўлса, у ҳолда бу оралиқнинг узунлиги нолга тенг эканлигини кўрсатамиз. Шунга кўра лемма исбот бўлган бўлади. Бунинг учун $[a,b]$ оралиқни нуқталар тўпламининг иккита синфига ажратамиз. E тўплам $f'(x) = 0$ бўлган нуқталар тўплами ва Z тўплам унинг тўлдирувчиси бўлсин. Лемма шартига кўра $\mu(Z) = 0$ бўлади. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta > 0$ мусбат сон топилиб узунликларининг йиғиндиси шу δ сондан кичик бўлган ихтиёрий чекли сондаги ўзаро кесишмайдиган

$(a_k, b_k),\ \ k = 1, 2, \dots, n$ интерваллар системаси учун $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ эканлигидан $\sum\limits_{k=1}^{n} \left| f(b_k -)f\ a_k \right| < \varepsilon($ тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади ва Z тўплам ўлчами δ сондан кичик бўлган очиқ тўпламда жойлашади, чунки унинг ўлчами $\mu(Z) = 0$ бўлади. Бошқача айтганда Z тўплам чекли ёки саноқли сондаги узунликларининг йиғиндиси шу δ сондан кичик бўлган ўзаро кесишмайдиган (a_k, b_k) интерваллар системаси билан қопланади. Шунинг учун $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$ эканлигидан

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Шунга кўра, барча (a_k, b_k) интерваллар системаси (бундан эса унда жойлашган Z тўплам ҳам) шу f функция орқали ўлчами ε дан кичик бўлган тўпламга ўтиши келиб чиқади. Шундай қилиб, $\mu(f(Z)) = 0$ бўлади.

Энди $E = [a, b] \setminus Z$ тўпламни қараймиз. $x_0 \in E$ бўлсин. У ҳолда $f'(x_0) = 0$ бўлган учун $x_0 \in E$ нуқтага етарлича яқин бўлган барча x нуқталар учун

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Аниқлик учун $x > x_0$ деб оламиз. У ҳолда $f(x) - f(x_0) < \varepsilon\,(x - x_0)$ бўлади. Бундан эса,

$$\varepsilon x_0 - f(x_0) < \varepsilon x - f(x)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шундай қилиб, x_0 нуқта $g(x) = \varepsilon x - f(x)$ функция учун ўнгдан кўринмас нуқта бўлади. Шунинг учун, Ф. Рисс леммасига[1] асосан E тўплам чекли ёки саноқли сондаги ўзаро кесишмайдиган (α_k, β_k) интерваллар системасида жойлашган бўлиб уларнинг четкаларида эса

---

[1] Бу Ф. Рисс леммаси ва Лебегнинг аниқмас интегралининг бошқа хоссалари билан А.Н. Колмогоров, С.В. Фоминларнинг “Элементы теории функций и функционального анализа” , Москва.: Наука, 1976 йил, китобидан ўқиш мумкин.

$\varepsilon\beta_k - f(\beta_k) \ge \varepsilon\alpha_k - f(\alpha_k)$ шарт бажарилади, яъни $f(\beta_k) - f(\alpha_k) \le \varepsilon(\beta_k - \alpha_k)$ бўлади. Бундан эса

$$\sum_k \left(f(\beta_k) - f(\alpha_k)\right) \le \varepsilon \sum_k \left(\beta_k - \alpha_k\right) \le \varepsilon(b-a)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бошқача қилиб айтганда, f функция E тўпламни қоплавчи интерваллар системасини узунликларининг йиғиндиси $\varepsilon(b-a)$ дан кичик бўлган интерваллар системасига ўтказади. Бунда ε ихтиёрий сон эканлигидан $\mu(f(E)) = 0$ эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, $f(E)$ ва $f(Z)$ тўпламлар ноль ўлчамга эга бўлади. Лекин бу тўпламларнинг йиғиндиси $[f(a), f(b)]$ оралиқдан иборат бўлади. Шунинг учун ҳам бу оралиқнинг узунлиги нолга тенгдир, яъни $f(x) = const$ бўлади.

Бу исбот қилинган лемма ёрдамида 4–теореманинг исботини осонгина келтириш мумкин бўлади. $F(x)$ функция монотон камаймайдиган функция бўлган ҳол учун қараш етарлидир. Бу ҳолда

$$\Phi(x) = F(x) - \int_a^x f(t)dt \tag{4.3.13}$$

функция ҳам монотон камаймайдиган функцияни ифода қилади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $x" > x'$ бўлса, у ҳолда монотон камаймайдиган жамланувчи $f(x)$ функциянинг f' ҳосиласи учун $\int_a^b f'(x)dx \le f(b) - f(a)$ тенгсизлик ўринли эканлигидан фойдаланиб

$$\Phi(x") - \Phi(x') = F(x") - F(x') - \int_{x'}^{x"} f(t)dt \ge 0$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан ташқари, $\Phi(x)$ функция иккита абсолют узлуксиз функциянинг айирмаси сифатида абсолют узлуксиз функция бўлади ва деярли ҳамма жойда $\Phi'(x) = 0$ бўлади. Шунинг учун 3–леммага кўра $\Phi(x)$ функция ўзгармасдир. (4.3.13) тенгликда $x = a$ деб олсак бу ўзгармас сон $F(a)$ сонга тенг эканлигини ҳосил қиламиз. 4–теорема исбот бўлди.

5. $H^1(G)$ **ва** $\overset{0}{H}{}^1(G)$ **Соболев фазолари.** $G \subset R^3$ – бир боғламли соҳа бўлиб унинг ∂G чегараси етарлича силлиқ бўлсин. $\bar{G} = G + \partial G$ ёпиқ соҳада узлуксиз дифференциалланувчи бўлган барча $u(x, y, z)$ функцияларнинг чизиқли фазосини

$$(u, v) = \iiint\limits_{\bar{G}} uvdxdydz + \iiint\limits_{\bar{G}} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} dxdydz \qquad (4.3.14)$$

скаляр кўпайтма билан қараймиз. Бундан эса

$$\|u\| = \left(\iiint\limits_{\bar{G}} u^2 dxdydz + \iiint\limits_{\bar{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dxdydz \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.3.15)$$

ҳосил бўлади. Бу скаляр кўпайтма орқали ҳосил қилинган фазони $\tilde{H}^1(\bar{G})$ орқали белгилаймиз ва унинг тўлдирмаси эса – бу таърифга кўра $H^1(G)$ Соболев фазосидир.

$\{u_n(x, y, z)\}$ кетма–кетлик $\tilde{H}^1(\bar{G})$ фазодаги фундаментал кетма–кетлик бўлсин, яъни $n, m \to \infty$ да $\|u_n - u_m\|_{\tilde{H}^1(\bar{G})} \to 0$ бўлсин. Бундан эса, $L_2(G)$ фазода

$$\{u_n(x, y, z)\}, \ \left\{\frac{\partial u_n(x, y, z)}{\partial x}\right\}, \ \left\{\frac{\partial u_n(x, y, z)}{\partial y}\right\} \ \text{ва} \ \left\{\frac{\partial u_n(x, y, z)}{\partial z}\right\}$$

кетма–кетликларнинг фундаментал эканлиги келиб чиқади. $\tilde{L}_2(\bar{G})$ фазонинг $L_2(G)$ фазода тўла эканлигидан биз

$$u(x, y, z), \ \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}, \ \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} \ \text{ва} \ \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z}$$

шаклида белгиланадиган элементлар мавжуд бўлиб $n \to \infty$ да ўртача маънода

$$u_n(x, y, z) \to u(x, y, z), \qquad \frac{\partial u_n(x, y, z)}{\partial x} \to \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_n(x, y, z)}{\partial y} \to \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} \qquad \text{ва} \qquad \frac{\partial u_n(x, y, z)}{\partial z} \to \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z}$$

яқинлашишларга эга бўламиз. Бу $\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}$ ва $\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}$ элементларга $u(x,y,z)$ элементнинг *умумлашган ҳосилалари* дейилади.

$H^1(G)$ Соболев фазосида скаляр кўпайтма ва норма ҳам шу $\tilde{H}^1(\bar{G})$ фазодаги формулалар каби берилган бўлиб, бунда энди ҳосила умумлашган ҳосила ва интеграл эса Лебег маъносида тушунилади. Бу фазо билан бир қаторда $\overset{0}{H}{}^1(G)$ фазони киритамиз. Бу фазо $\bar{G}$ ёпиқ соҳада узлуксиз дифференциалланувчи ва $u(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\partial G}=0$ бўлган барча $u(x,y,z)$ функцияларнинг чизиқли фазосини

$$\|u\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(G)}=\iiint\limits_{\bar{G}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dxdydz \qquad (4.3.16)$$

метрика ёрдамида тўлдиришдан ҳосил қилинади. Бундай ҳосил қилинган $\overset{0}{H}{}^1(G)$ фазо

$$(u,v)=\iiint\limits_{\bar{G}}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}dxdydz \qquad (4.3.17)$$

скаляр кўпайтмага нисбатан Гильберт фазосини ташкил этади.

4–лемма. *Агар $u\in H^1(G)$ ва $v\in\overset{0}{H}{}^1(G)$ бўлса, у ҳолда*

$$\left(u,\ \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{L_2(G)}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ v\right)_{L_2(G)},$$

$$\left(u,\ \frac{\partial v}{\partial y}\right)_{L_2(G)}=-\left(\frac{\partial u}{\partial y},\ v\right)_{L_2(G)},$$

$$\left(u,\ \frac{\partial v}{\partial z}\right)_{L_2(G)}=-\left(\frac{\partial u}{\partial z},\ v\right)_{L_2(G)}$$

формулалар ўринли бўлади.

Исбот. Бу формулалардан биринчисини исботлаш етарлидир. Агар $u\in C^1(\bar{G})$ ва $v\in\overset{0}{C}{}^1(\bar{G})$ бўлса, у ҳолда бу формула ўринлидир.

$\{u_n\} \in \tilde{H}^1(\bar{G})$ бўлган кетма–кетлик $\tilde{H}^1(\bar{G})$ фазодаги фундаментал кетма–кетлик бўлиб, унинг лимити $u \in H^1(G)$ элемент бўлсин.

$$\left(u_n, \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{L_2(G)} = -\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}, v\right)_{L_2(G)}, \quad v \in \overset{0}{C}{}^1(\bar{G})$$

айниятда $n \to \infty$ да лимитга ўтиб ихтиёрий $v \in \overset{0}{C}{}^1(\bar{G})$ функция учун

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{L_2(G)} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}, v\right)_{L_2(G)}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам, $L_2(G)$ фазода $n \to \infty$ да $u_n \to u$ яқинлашувчи эканлигидан $n \to \infty$ да

$$|(u_n, w) - (u, w)| = |(u_n - u, w)| \le \|u_n - u\| \cdot \|w\| \to 0$$

яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади, яъни скаляр кўпайтма узлуксиздир.

Энди $\{v_n\}$ кетма–кетлик $\overset{\tilde{0}}{H}{}^1(\bar{G})$ фазодаги фундаментал кетма–кетлик бўлсин. У ҳолда

$$\left(u, \frac{\partial v_n}{\partial x}\right)_{L_2(G)} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}, v_n\right)_{L_2(G)}$$

айниятда лимитга ўтиб, $u \in H^1(G)$ ва $v \in \overset{0}{H}{}^1(G)$ бўлган функциялар учун

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{L_2(G)} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}, v\right)_{L_2(G)}$$

айниятни ҳосил қиламиз.

Натижа. $\overset{0}{H}{}^1(G)$ фазо $H^1(G)$ фазонинг ичида қатъий жойлашган бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, $1 \in H^1(G)$ функция учун $1 \notin \overset{0}{H}{}^1(G)$ бўлади. Акс ҳолда биз

$$(u, 0)_{L_2(G)} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}, 1\right)_{L_2(G)}$$

тенгликка эга бўламиз, яъни

$$\iiint\limits_G \frac{\partial u}{\partial x} dxdydz = 0$$

тенглик ихтиёрий $u \in H^1(G)$ учун ўринли бўлади. Биз $u = x$ деб олсак, у ҳолда қарама–қаршиликка келамиз.

5–теорема (Фридрихс теоремаси). *Шундай бир* $c > 0$ *ўзгармас сон мавжуд бўлиб ихтиёрий* $u \in \overset{0}{H}{}^1(G)$ *учун*

$$\|u\|_{L_2(G)} \le c\|u\|_{\overset{0}{H}{}^1(G)}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $\overset{0}{H}{}^1(G)$ фазонинг аниқланишига кўра, бу $\overset{0}{H}{}^1(G)$ фазонинг ҳар қандай элементи $L_2(G)$ фазога тегишли бўлади. $\{u_n\} \in \overset{0}{H}{}^1(G)$ ва $\overset{0}{H}{}^1(G)$ фазода $u \in \overset{0}{H}{}^1(G)$ элементга яқинлашувчи бўлсин.

$Q_a = \{(x, y, z) : |x| \le a,\ |y| \le a,\ |z| \le a\}$ кубни $\bar{G}$ соҳани сақлайдиган қилиб қурамиз. $Q_a \setminus \bar{G}$ тўпламда u_n функцияларни нолга тенг қилиб қўшимча аниқлаймиз. $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ хусусий ҳосилалар Q_a кубнинг абсцисса ўқига параллел тўғри чизиқлар G соҳанинг ∂G чегарасини кесадиган нуқталардан ташқари ҳамма жойда мавжуд бўлади. Ихтиёрий $(x, y, z) \in \bar{G}$ нуқта учун

$$u_n(x, y, z) = \int\limits_{-a}^{x} \frac{\partial u_n(\xi, y, z)}{\partial \xi} d\xi$$

тенгликка эга бўламиз. Коши–Буняковский тенгсизлигидан

$$|u_n(x, y, z)|^2 \le \left(\int\limits_{-a}^{a} \left| \frac{\partial u_n(\xi, y, z)}{\partial \xi} \right| d\xi \right)^2 \le$$

$$\le \left(\int\limits_{-a}^{a} 1^2 \cdot d\xi \right)^2 \left[\int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{\partial u_n(\xi, y, z)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] = 2a \int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{\partial u_n(\xi, y, z)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Ҳосил бўлган тенгсизликни Q_a куб бўйича интеграллаб

$$\|u_n\|^2_{L_2(Q_a)} \leq 4a^2 \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\|^2_{L_2(Q_a)}$$

тенгсизлик ҳосил қилинади. Маълумки $\bar{G}$ соҳанинг ташқарисида $u_n \equiv 0$ бўлгани учун

$$\|u_n\|^2_{L_2(G)} \leq 4a^2 \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\|^2_{L_2(G)} \leq 4a^2 \|u_n\|^2_{\overset{0}{H}{}^1(\bar{G})}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу тенгсизликда $n \to \infty$ да лимитга ўтсак биз исбот қилиниши керак бўлган Фридрихс тенгсизлигига эга бўламиз.

1–натижа. $\overset{0}{H}{}^1(G)$ *фазо* $L_2(G)$ *фазода жойлашган бўлади.*

Бу тасдиқ Банах фазоларининг жойлашганлик таърифи ва Фридрихс тенгсизлигидан бевосита келиб чиқади.

2–натижа. $\overset{0}{H}{}^1(G)$ *фазода (4.3.15) ва (4.3.16) нормалар эквивалентдир.*

Ҳақиқатдан ҳам, Фридрихс тенгсизлигидан фойдаланиб

$$\|u\|_{\overset{0}{H}{}^1(G)} \leq \|u\|_{L_2(G)} + \|u\|_{\overset{0}{H}{}^1(G)} \leq (c+1)\|u\|_{\overset{0}{H}{}^1(G)}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

6. $H^l(G)$ **Соболев фазоси.** Аввал биз $\bar{G}$ ёпиқ чегараланган соҳада l марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлган $u(x,y,z)$ функцияларнинг

$$\|u\| = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} \iiint\limits_{\bar{G}} \left(D^\alpha u(x,y,z) \right)^2 dxdydz \right\}^{\frac{1}{2}}$$

норма билан киритилган $\tilde{H}^l(\bar{G})$ нормалланган фазосини қараймиз.

Бу норма бўйича $\tilde{H}^l(\bar{G})$ нормалланган фазонинг тўлдирилмаси $H^l(G)$ орқали белгиланади. $\{u_n(x,y,z)\} \in \tilde{H}^l(\bar{G})$ кетма–кетлик $\tilde{H}^l(\bar{G})$ фазода фундаментал кетма–кетлик бўлсин, яъни $n,m \to \infty$ да $\|u_n - u_m\|_{\tilde{H}^l(\bar{G})} \to 0$ бўлсин. Маълумки, $\tilde{H}^l(\bar{G})$ фазодаги норма

$$\|u\|^2_{\tilde{H}^l(\bar{G})} = \sum_{0\le|\alpha|\le l} \|D^\alpha u\|^2_{\tilde{L}_2(\bar{G})}$$

шаклида бўлганлиги учун $|\alpha| = 0, 1, \ldots, l$ бўлган ҳар бир α мультииндекс учун $\{D^\alpha u_n\}$ кетма–кетлик $\tilde{L}_2(\bar{G})$ фазода фундаментал кетма–кетликдан иборат бўлади.

$L_2(G)$ фазонинг тўла эканлигидан бу фазода биз $D^\alpha u,\ 0 \le |\alpha| \le l$ орқали белгилайдиган элементлар мавжуд бўлиб, бунда $n \to \infty$ да ўртача маънода $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ яқинлашувчи бўлади. Агар $\alpha \ne 0$ бўлса, у ҳолда $D^\alpha u$ элементга *умумлашган хусусий ҳосила* деб айтилади. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ бўлсин. У ҳолда

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}}\ ,\quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

бўлади. Бу $H^l(G)$ фазо

$$(u, v)_{H^l(G)} = \sum_{0\le|\alpha|\le l} (D^\alpha u,\ D^\alpha v)_{L_2(G)}$$

скаляр кўпайтмага нисбатан Гильберт фазосидан иборат бўлади.

С.Л. Соболевнинг жойлашиш ҳақидаги қуйидаги теоремаси ўринлидир.

6–теорема (С.Л. Соболев теоремаси). *$G \subset R^3$ бир боғламли чегараланган соҳа бўлиб, унинг чегараси ∂G эса l марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин, бунда $l \ge 2$. У ҳолда $H^l(G)$ фазо $C^{l-2}(\bar{G})$ фазода жойлашган бўлади.*

Бу теореманинг исботи қуйидаги леммаларга асосланади.

5–лемма. *Агар u функция $\bar{G}$ соҳада l марта узлуксиз дифференциалланувчи ва $0 \le |\alpha| \le l-1$ бўлган ҳар бир α мультииндекс учун $D^\alpha u\big|_{\partial G} = 0$ бўлса, у ҳолда*

$$\sum_{0\le|\alpha|\le l-2} \max|D^\alpha u| \le c \sum_{0\le|\alpha|\le l} \left(\iiint_{\bar{G}} (D^\alpha u)^2\, dxdydz \right)^{\frac{1}{2}}$$

баҳолаш ўринли бўлади, яъни қисқа қилиб айтганда

$$\|u\|_{C^{l-2}(\bar{G})} \leq c\,\|u\|_{\tilde{H}^{l}(\bar{G})}$$

тенгсизлик ўринлидир.

Исбот. Бу леммани исбот қилиш учун биз аввал Остроградский–Гаусс формуласини келтирамиз.

$$\iiint\limits_{\bar{\Omega}} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint\limits_{\partial\Omega} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma .$$

Бу ерда биз

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x},\ Q = u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\ ,\ R = u\frac{\partial v}{\partial z} - v\frac{\partial u}{\partial z}$$

деб олсак, у ҳолда қуйидаги

$$\iiint\limits_{\bar{\Omega}} \left(u\Delta v - v\Delta u\right)dxdydz = \oiint\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$$

Грин формуласини ҳосил қиламиз. Энди биз учун интеграллаш ўзгарувчиларини ξ, η, ζ орқали белгилаш қулай бўлади ва $\Omega_\varepsilon = G \setminus S_\varepsilon(x,y,z)$ икки боғламли соҳага Грин формуласини қўллаймиз. Бу ерда $(x,y,z)\in G$ қандайдир танланган нуқта, $S_\varepsilon(x,y,z)-$ эса маркази $(x,y,z)\in G$ нуқтада бўлган $\varepsilon > 0$ радусли шардир, бунда $S_\varepsilon(x,y,z)\subset G$ шарт бажарилиши учун ε радус етарлича кичик қилиб олинган.

Энди биз $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\varepsilon^2$ тенглик билан аниқланган $\sigma_\varepsilon(x,y,z)$ сфера учун

$$\iiint\limits_{\bar{\Omega}_\varepsilon} \left(u\Delta v - v\Delta u\right)d\xi d\eta d\zeta = \oiint\limits_{\partial G} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma -$$

$$- \oiint\limits_{\sigma_\varepsilon(x,y,z)} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma \tag{4.3.18}$$

формулага эга бўламиз.

Энди бу формулада u функция 5–лемманинг шартларини қаноатлантирсин ва v функция эса, $v=\dfrac{1}{4\pi r}$, бунда $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ тенглик билан аниқланган бўлсин. У ҳолда ∂G чегарада $u=0$ ва $\dfrac{\partial u}{\partial n}=0$ бўлади. Шунга кўра, $\oiint\limits_{\partial G}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial n}-v\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=0$ тенглик ҳосил бўлади. Бундан ташқари $\Delta\dfrac{1}{r}=0$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$\iiint\limits_{\bar{\Omega}_\varepsilon}(u\Delta v-v\Delta u)d\xi d\eta d\zeta=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\bar{\Omega}_\varepsilon}\frac{\Delta u}{r}d\xi d\eta d\zeta$$

ҳосил бўлади. Ҳамда $\sigma_\varepsilon(x,y,z)$ сферада

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{4\pi r^2}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon^2},\quad v=\frac{1}{4\pi r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon},\quad \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial r}$$

тенгликлар ўринли бўлади ва шунга кўра, $\varepsilon\to 0$ да

$$-\oiint\limits_{\sigma_\varepsilon(x,y,z)}u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\oiint\limits_{\sigma_\varepsilon(x,y,z)}ud\sigma+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint\limits_{\sigma_\varepsilon(x,y,z)}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=$$

$$=u(\xi_\varepsilon,\eta_\varepsilon,\zeta_\varepsilon)+\varepsilon\frac{\partial u(\tilde{\xi}_\varepsilon,\tilde{\eta}_\varepsilon,\tilde{\zeta}_\varepsilon)}{\partial n}=u(x,y,z)+O(\varepsilon)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $\sigma_\varepsilon(x,y,z)$ сферанинг юзи $4\pi\varepsilon^2$ сонга тенг бўлганлиги учун ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаландик.

Шундай қилиб, (4.3.18) тенглик қуйидаги кўринишга келади:

$$u(x,y,z)+O(\varepsilon)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\bar{\Omega}_\varepsilon}\frac{\Delta u}{r}d\xi d\eta d\zeta\,.$$

Бу тенгликда $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтсак, у ҳолда u функция учун қуйидаги интеграл тасвирга эга бўламиз:

$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\bar{G}}\frac{\Delta u}{r}d\xi d\eta d\zeta \qquad (4.3.19)$$

Бу интеграл хосмас интегралдир, чунки (x,y,z) нуқтада $\dfrac{1}{r}$ функция чегараланмагандир. Шунга кўра,

$$\iiint\limits_{\bar{G}} \frac{\Delta u}{r} d\xi d\eta d\zeta = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\bar{G}\backslash S_{\varepsilon}(x,y,z)} \frac{\Delta u}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

бу тенглик хосмас интегралнинг таърифини ифода қилади.

Кўрсатиш мумкинки, агар $\alpha < 3$ ва w –узлуксиз функция бўлса, у ҳолда $\iiint\limits_{\bar{G}} \frac{w}{r} d\xi d\eta d\zeta$ интеграл яқинлашувчи бўлади. Бунинг учун сферик координаталари системасига ўтиш етарлидир.

(4.3.19) интеграл тасвирдан $l = 2$ учун 5–лемманинг тасдиғини олиш мумкин бўлади. Аввалом бор, биз

$$|u| \le \frac{1}{4\pi}\left\{\left|\left(\frac{1}{r},\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{r},\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{r},\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\right)\right|\right\}$$

баҳога эга бўламиз, бундаги скаляр кўпайтмалар $L_2(G)$ фазонинг скаляр кўпайтмаси бўйича олинган. $\tilde{L}_2(\bar{G})$ фазонинг нормаси бўйича Коши–Буняковский тенгсизлигини қўллаб

$$|u| \le \frac{1}{4\pi}\left\|\frac{1}{r}\right\| \left\{\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\right\|\right\} \le const \sum_{0\le|\alpha|\le 2} \left\|D^{\alpha}u\right\|_{\tilde{L}_2(\bar{G})}$$

тенгсизликка эга бўламиз, ёки қисқа қилиб айтганда

$$\|u\|_{C(\bar{G})} \le C\|u\|_{\tilde{H}^2(\bar{G})} \tag{4.3.20}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Энди $u \in \tilde{H}^3(\bar{G})$ ва бу функциянинг иккинчи тартибгача ҳосилалари ∂G чегарада нолга айлансин. (4.3.19) формулада x бўйича дифференциаллаб

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),\ \Delta u\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right),\ \Delta u\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r},\ \Delta\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (4.3.19) формуланинг ўнг томонидаги интегралда x бўйича дифференциаллаш қонунийдир, чунки бу интеграл текис яқинлашувчи ва x бўйича формал дифференциалланган интеграл ҳам текис яқинлашувчидир.

Энди $\tilde{L}_2(\bar{G})$ фазонинг нормаси бўйича $\frac{\partial u}{\partial x}$ ҳосилани баҳоласак

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leq \frac{1}{4\pi} \left\|\frac{1}{r}\right\| \left\{ \left\|\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}\right\| + \left\|\frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \eta^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \zeta^2}\right\| \right\} \leq$$

$$\leq const \sum_{|\alpha|=3} \left\|D^\alpha u\right\|_{\tilde{L}_2(\bar{G})} \leq const \sum_{0\leq|\alpha|\leq 3} \left\|D^\alpha u\right\|_{\tilde{L}_2(\bar{G})}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Худди шунга ўхшаш $\frac{\partial u}{\partial y}$ ва $\frac{\partial u}{\partial z}$ ҳосилаларни баҳолаймиз. Натижада биз

$$\sum_{|\alpha|=1} \left\|D^\alpha u\right\|_{C(\bar{G})} \leq const \sum_{0\leq|\alpha|\leq 3} \left\|D^\alpha u\right\|_{\tilde{L}_2(\bar{G})}$$

баҳолашни эга бўламиз. Бу тенгсизликни (4.3.20) тенгсизлик билан қўшиб

$$\|u\|_{C^1(\bar{G})} \leq c \, \|u\|_{\tilde{H}^3(\bar{G})}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Бу усул билан u функциянинг $C^2(\bar{G})$ фазодаги нормасини $\tilde{H}^4(\bar{G})$ фазодаги нормаси орқали баҳолаймиз, кейин эса u функциянинг $C^3(\bar{G})$ фазодаги нормасини $\tilde{H}^5(\bar{G})$ фазодаги нормаси орқали баҳолаймиз ва ҳакозо кетма–кет баҳолаш ёрдамида биз u функциянинг $C^{l-2}(\bar{G})$ фазодаги нормасини $\tilde{H}^l(\bar{G})$ фазодаги нормаси орқали баҳолашга эришамиз. 5–лемма исбот бўлди.

6–лемма. *$G \subset R^3$ бир боғламли чегараланган соҳа бўлиб, унинг чегараси ∂G эса $l+1$ марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин. Ҳар қандай $u(x,y,z) \in \tilde{H}^l(\bar{G})$ функцияни қандайдир $G' \supset \bar{G}$ соҳага давом эттириш мумкин бўлиб, бунда $u(x,y,z) \in \tilde{H}^l(\bar{G}')$ ва $u(x,y,z)$ функция G' соҳада финит функция, ҳамда фақат $\bar{G}$ соҳага ва l сонга боғлиқ бўлган шундай бир $c_1 > 0$ ўзгармас сон мавжудки, бунда ихтиёрий $u(x,y,z)$ давом эттирилган функция учун*

$$\|u\|_{\tilde{H}^l(\bar{G}')} \leq c_1 \, \|u\|_{\tilde{H}^l(\bar{G})}$$

баҳолаш ўринли бўлади.

Исбот. Сирт тенгламасини параметрик кўринишда Σ сиртдаги (ξ,η) эгри чизиқли координаталар орқали киритамиз:

$$r = r_0(\xi,\eta)$$

ёки

$$x = x_0(\xi,\eta),\ y = y_0(\xi,\eta),\ z = z_0(\xi,\eta)$$

координаталари орқали киритамиз, бундан ташқари $(\xi,\eta)\in\sigma_1(0)$ деб ҳисоблаймиз, яъни Σ сирт бирлик сферанинг образи ва $x = x_0(\xi,\eta),\ y = y_0(\xi,\eta),\ z = z_0(\xi,\eta)$ функциялар $(\xi,\eta)\in\sigma_1(0)$ бирлик сферада $l+1$ марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин деб ҳисоблаймиз. n–бирлик вектор Σ сиртнинг ташқи нормали бўлсин.

Ҳар бир $(\xi,\eta)\in\sigma_1(0)$ учун $r = r_0(\xi,\eta)+n\zeta$ векторлар кесишмайдиган ва уларнинг охирлари G ётадиган қилиб $\delta>0$ мусбат сонни етарлича кичик қилиб шундай танлаймизки, натижада

$$\Sigma_\delta^- = \{(\xi,\eta,\zeta):\ (\xi,\eta)\in\sigma_1(0),\ -\delta\le\zeta\le 0\}$$

ёпиқ соҳада берилган $r = r_0(\xi,\eta)+n\zeta$ ёки координаталарда

$$x = x(\xi,\eta,\zeta),\quad y = y(\xi,\eta,\zeta),\quad z = z(\xi,\eta,\zeta) \qquad (4.3.21)$$

шаклга эга бўлган акслантириш ўзаро бир қийматли $l+1$ марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин.

Энди $u(x,y,z)$ функцияни Σ_δ^- соҳадаги (ξ,η,ζ) ўзгарувчилар орқали ёзамиз. $u(\xi,\eta,\zeta)$ функцияни

$$\Sigma_\delta^+ = \{(\xi,\eta,\zeta):\ (\xi,\eta)\in\sigma_1(0),\ 0\le\zeta\le\delta\}$$

соҳага $\zeta\ge 0$ учун

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{k=1}^{l+1} \alpha_k u\left(\xi,\eta,-\frac{\zeta}{k}\right) \qquad (4.3.22)$$

тенглик ёрдамида давом эттирамиз, бундан ташқари $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{l+1}$ ўзгармасларни қуйидаги чизиқли тенгламалар системасининг ечими қилиб оламиз:

$$\sum_{k=1}^{l+1} \alpha_k \left(-\frac{1}{k}\right)^s = 1,\ \ s = 0, 1,\ \dots,\ l. \qquad (4.3.23)$$

Бу системанинг детерминанти Ван-дер-Монд детерминантидан иборат бўлиб нолдан фарқли бўлади. Шунинг учун (4.3.23) система ягона ечимга эга бўлади.

Энди u функция $\Sigma_\delta^-\bigcup\Sigma_\delta^+$ соҳада аниқланди. Бу соҳада u функция билан бирга унинг l тартибгача хусусий ҳосилалари ҳам узлуксиз бўлади. Биз u функция ва унинг l тартибгача хусусий ҳосилалари Σ сиртда, яъни $\zeta = 0$ учун узлуксиз эканлигини текширишимиз етарлидир. Биз (4.3.22) формуладан $\zeta \to \pm 0$ учун u функциянинг лимити (4.3.23) тенгламаларнинг биринчиси ёрдамида

$$u(\xi,\eta,+0)=\sum_{k=1}^{l+1} \alpha_k u(\xi,\eta,-0)=u(\xi,\eta,-0)$$

эканлигини кўрамиз. Худди шунга ўхшаш $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ ва $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ функциянинг узлуксизлиги ҳосил бўлади. Шунингдек, (4.3.23) тенгламаларнинг иккинчиси ёрдамида

$$\frac{\partial u(\xi,\eta,+0)}{\partial \zeta}=\sum_{k=1}^{l+1} \alpha_k\left(-\frac{1}{k}\right)\frac{\partial u(\xi,\eta,-0)}{\partial \zeta}=\frac{\partial u(\xi,\eta,-0)}{\partial \zeta}$$

эканлигини кўрамиз. Худди шунга ўхшаш бошқа хусусий ҳосилалар ҳам текширилади.

Энди биз давом эттирилган u функциянинг финит бўлишлигига эришамиз. Бунинг учун уни $s_\delta(\zeta)$ қирқувчи функцияга шундай кўпайтирамизки, натижада $\frac{\delta}{2} \le \zeta \le \delta$, $(\xi,\eta)\in\sigma_1(0)$ учун $u \equiv 0$ бўлсин. Ҳосил бўлган қирқим функция учун ҳам шу u белгилашни сақлаймиз. Энди (4.3.22) формуладан қуйидаги баҳони олиш мумкин бўлади:

$$\iiint\limits_{\Sigma_\delta^+} \sum_{k=0}^{l} \left(D^k u\right)^2 d\xi d\eta d\zeta \le c \iiint\limits_{\Sigma_\delta^-} \sum_{k=0}^{l} \left(D^k u\right)^2 d\xi d\eta d\zeta \ . \qquad (4.3.24)$$

Ҳақиқатдан ҳам, (4.3.22) тенгликдан

$$u^2 \le \sum_{k=1}^{l+1} \alpha_k^2 \sum_{k=1}^{l+1} u^2\left(\xi,\eta,-\frac{\zeta}{k}\right)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Уни Σ_δ^+ бўйича интеграллаб

$$\iiint\limits_{\Sigma_\delta^+} u^2 d\xi d\eta d\zeta \le (l+1)\sum_{k=1}^{l+1} \alpha_k^2 \iiint\limits_{\Sigma_\delta^-} u^2 d\xi d\eta d\zeta$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Худди шунга ўхшаш (4.3.22) тенгликни дифференциаллаб ҳосилалар учун шунга ўхшаш баҳоларга эга бўламиз. Ҳосил қилинган тенгсизликларни қўшиб биз (4.3.24) тенгсизликка эга бўламиз.

Ниҳоят, биз (4.3.21) акслантиришнинг махсусмас бўлишлиги шартидан (4.3.24) тенгсизликнинг (x, y, z) ўзгарувчилар учун ҳам тўғри бўлиб қолишлигига эришамиз.

Шундай қилиб,

$$\|u\|^2_{\tilde{H}^l(\Sigma^+_\delta)} \le c^2 \|u\|^2_{\tilde{H}^l(\Sigma^-_\delta)}$$

тенгсизлик исбот қилинди. Лекин $\Sigma^-_\delta \subset \bar{G}$ муносабат ўринли бўлгани учун

$$\|u\|_{\tilde{H}^l(\Sigma^-_\delta)} \le \|u\|_{\tilde{H}^l(\bar{G})}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра, биз $\bar{G}' = \bar{G} \bigcup \Sigma^+_\delta$ соҳа учун

$$\|u\|^2_{\tilde{H}^l(\bar{G}')} = \|u\|^2_{\tilde{H}^l(\bar{G})} + \|u\|^2_{\tilde{H}^l(\Sigma^+_\delta)} \le$$
$$\le \|u\|^2_{\tilde{H}^l(\bar{G})} + c^2 \|u\|^2_{\tilde{H}^l(\Sigma^-_\delta)} \le (1 + c^2) \|u\|^2_{\tilde{H}^l(\bar{G})}$$

баҳолашга эга бўламиз. 6–лемма исбот бўлди.

Энди осонгина кўрсатиш мумкинки, $H^l(G)$ фазо $C^{l-2}(\bar{G})$ фазода жойлашган бўлади, яъни С.Л. Соболев теоремаси ўринлидир. Ҳар қандай $u \in \tilde{H}^l(\bar{G})$ функция учун $l \ge 2$ бўлган ҳолда уни 6–леммага кўра бир оз кенгроқ бўлган $\bar{G}'$ соҳага финит бўлган функция қилиб давом эттириш мумкин. У ҳолда 5–леммага кўра

$$\|u\|_{C^{l-2}(\bar{G})} \le k \|u\|_{\tilde{H}^l(\bar{G})}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизлик $\tilde{H}^l(\bar{G})$ фазодаги ихтиёрий $\{u_n\} \in u \in H^l(G)$ фундаментал кетма–кетлик учун тўғри эканлигидан лимитга ўтиш ёрдамида

$$\|u\|_{C^{l-2}(\bar{G})} \le k \|u\|_{H^l(G)}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз ва шу билан Соболевнинг жойлашиш ҳақидаги теоремаси исбот бўлади.[1]

---

[1] Жойлашиш ҳақидаги бошқа умумийроқ теоремалар билан С.Л. Соболевнинг "Некоторые применения функционального анализа в математической физике", М.: Наука, 1988 ва "Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций", М.: Наука, 1989, Л.А. Люстерник, В.И. Соболевларнинг "Элементы функционального анализа", М.: Наука, 1965., С.М. Никольскийнинг

Бутун s сони учун С.Л. Соболев томонидан киритилган ва ихтиёрий $s \in R$ ҳақиқий сон учун эса Л.Н. Слободецский томонидан киритилган $H^s(\Omega)$ функционал фазо чизиқли дифференциаллар тенгламалар назариясидаги муҳим қуроллардан бири бўлди.

Дастлабки $s = 0$ бўлган ҳолдаги фазо сифатида $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty$ шартни қаноатлантирувчи f ўлчовли функцияларнинг синфларидан ташкил топган $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ фазо қаралади. Бу фазодаги норма $\|f\|_0 = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ шаклида ва иккита ихтиёрий олинган $f(x)$ ва $g(x)$ элементларнинг скаляр кўпайтмаси эса

$$(f, g)_0 = \int\limits_{\Omega} f(x)\, \overline{g(x)} dx$$

тенглик билан киритилади. Маълумки, Парсеваль теоремасига кўра, $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг скаляр кўпайтмаси

$$(f, g)_0 = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$$

формула орқали аниқланади. Бунда $\hat{f}(\xi) = \int\limits_{R^n} f(x) e^{-ix\xi} dx$ эса, шу f функциянинг Фурье алмаштириши бўлиб, шу $f(x)$ функция Ω соҳанинг ташқарисида нолга тенг деб ҳисобланади.

Ҳар бир $s \in N$ сон

$$H^s(\Omega) = \left\{ f \in L_2(\Omega),\ D^\alpha f \in L_2(\Omega),\ |\alpha| \le s \right\}$$

тенглик билан аниқланган фазо бўлади, бунда $D^\alpha f$ тақсимот бўлиб, f тақсимотни дифференциаллаш натижасида ҳосил қилинган. Бу фазода f ва g элементларнинг скаляр кўпайтмаси

"Приближение функций многих переменных и теоремы вложения", М.: Наука, 1969., Л.В. Канторович, Г.П. Акиловларнинг "Функциональный анализ в нормированных пространствах", М.:Физматгиз, 1959., О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольскийларнинг "Интегральные представления функций и теоремы вложения", М.: Наука, 1975., китоблари орқали танишиш мумкин.

$$(f,g)_s = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\le s} D^{\alpha} f(x)\, \overline{D^{\alpha} g(x)}\, dx$$

формула орқали аниқланади. Бундай фазоларнинг тўлалиги қуйидаги теоремадан келиб чиқади.

7-теорема. *Агар* $u_k \in H^s(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$ *кетма-кетлик* $L_2(\Omega)$ *фазода* u *элементга кучсиз яқинлашувчи ва* k *га боғлиқ бўлмаган шундай бир* M *ўзгармас сон топилиб бунда* $\|u_k\|_s \le M$ *тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда* $u \in H^s(\Omega)$ *ва* $\|u\|_s \le M$ *тенгсизлиги ўринли бўлади.*

Исбот. $D^{\alpha} u_k$ ҳосилани $v_{k,\alpha}$ орқали белгилаймиз. Шартга кўра $|\alpha| \le s,\ k = 1, 2, \dots$ учун $v_{k,\alpha} \in L_2(\Omega)$ бўлади. Таърифга кўра,

$$\int\limits_{\Omega} v_{k,\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} u_k D^{\alpha} \varphi\, dx, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

бўлади. Бу ердан кўринадики, $D'(\Omega)$ фазода $v_{k,\alpha} \to v_{\alpha}$ яқинлашувчи бўлади, бундан ташқари ҳар бир $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ учун

$$v_{\alpha}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенглик тақсимот назарияси маъносида $v_{\alpha} = D^{\alpha} u$ бўлишлигини билдиради. $C_0^{\infty}(\Omega)$ тўплам $L_2(\Omega)$ фазода зич бўлади. Шунинг учун ҳар бир $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ учун $\int\limits_{\Omega} v_{k,\alpha} \varphi dx$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлишидан бу кетма–кетликнинг $\varphi \in L_2(\Omega)$ бўлганда ҳам яқинлашувчи бўлишлиги келиб чиқади, яъни $v_{k,\alpha}$ кетма-кетликнинг $L_2(\Omega)$ фазода $w_{\alpha}(x)$ га кучсиз яқинлашиши келиб чиқади. $v_{\alpha}(\varphi) = \int\limits_{\Omega} w_{\alpha} \varphi dx$ тенгликдан v_{α} тақсимотнинг $w_{\alpha}(x) \in L_2(\Omega)$ функция билан устма–уст тушиши келиб чиқади. Шунинг учун $u \in H^s(\Omega)$ бўлади. Бундан ташқари, $\|v_{\alpha}\|_0 \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \|v_{k,\alpha}\|_0$ тенгсизлик ўринлидир[1]. Шунга кўра,

---

[1] Л.В. Канторович, Г.П. Акиловларнинг “Функциональный анализ в нормированных пространствах”, М.:Физматгиз, 1959 йилдаги китобларининг 287 –бетига қаранг.

$$\|u\|_s^2 = \sum_{|\alpha|\le s} \|v_\alpha\|_0^2 \le \overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{|\alpha|\le s} \|v_{k,\alpha}\|_0^2 \le M$$

тенгсизлик ўринли бўлади. 7–теорема исбот бўлди.

Таъриф. Агар $u \in S'(R^n)$ тақсимотнинг $\hat{u}(\xi)$ Фурье алмаштириши функция бўлса ва

$$\int_{R^n} |\hat{u}(\xi)|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi < \infty$$

бўлса, у ҳолда u тақсимот $H^s = H^s(R^n),\ s \in R$ фазога тегишли дейилади.

Бу $H^s = H^s(R^n)$ фазодан олинган ихтиёрий иккита u ва v элементларнинг скаляр кўпайтмаси

$$(u, v)_s = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \hat{u}(\xi)\, \overline{\hat{v}(\xi)}\, (1+|\xi|^2)^s d\xi$$

тенглик билан аниқланади, норма эса $\|u\|_s = \sqrt{(u, u)_s}$ тенглик орқали аниқланади. Ҳар бир $s \in N$ учун бу киритилган норма билан параграфнинг бошида киритилган норманинг эквивалиент эканлигини кўрсатиш мумкин.

8-теорема. *$H^s = H^s(R^n)$ фазо $C_0^\infty(R^n)$ фазонинг $\|\cdot\|_s$ норма бўйича тўлдирилгани билан устма-уст тушади.*

Исбот. Агар $u \in H^s(R^n)$ бўлса, у ҳолда

$$v(\xi) = \hat{u}(\xi) \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \in L_2(R^n)$$

бўлади. Шунинг учун шундай бир $v_k(\xi) \in C_0^\infty(R^n)$ функциялар кетма–кетлиги топилиб, бунда $k \to \infty$ да $v_k(\xi) \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \to v(\xi)$ яқинлашувчи бўлади. Маълумки, $v_k \in J$ ва бу функция $u_k \in J$ функциянинг Фурье образи бўлиб, $k \to \infty$ да $\|u_k - u\|_s \to 0$ бўлади. Энди $C_0^\infty(R^n)$ фазонинг J фазода $\|\ \|_s$ норма бўйича зич бўлишини текшириш етарлидир. $l \in N$ учун $l \ge s$ бўлсин. Шунга кўра, $C_0^\infty(R^n)$ фазонинг J фазода $\|\ \|_l$ бўйича зич бўлишлигини исботлаш етарлидир. Агар $v \in J$ бўлса, у ҳолда $v_\varepsilon(x) = h(\varepsilon x) v(x)$

деб белгилаш киритамиз, бунда $h \in C_0^\infty$ ва $|x| \le 1$ учун $h(x)=1$ деб оламиз. Маълумки, $v_\varepsilon \in C_0^\infty(R^n)$ бўлиб, $\varepsilon \to 0$ интилганда

$$\|v_\varepsilon - v\|_l^2 = \|v(x)[1-h(\varepsilon x)]\|_l^2 \to 0$$

бўлади, чунки фақат $|x| > \varepsilon^{-1}$ бўлгандагина $v_\varepsilon \ne v$ бўлади.

Энди $C_0^\infty(R^n)$ фазонинг $\| \;\|_s$ норма бўйича тўлдирмасидаги элементнинг $H^s = H^s(R^n)$ фазога тегишли элемент эканлигини исботлаш осон бўлади. $u_k \in C_0^\infty(R^n)$ кетма-кетлик $k, m \to \infty$ да $\|u_k - u_m\|_s \to 0$ бўлсин. У ҳолда $u_k(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}$ функциялар кетма-кетлиги $L_2(R^n)$ фазода фундаментал бўлади ва шунинг учун бу кетма-кетлик $L_2(R^n)$ фазога тегишли $v(\xi)$ функцияга интилади. $w(\xi) = v(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}}$ функция $u \in H^s(R^n)$ функциянинг Фурье алмаштириши бўлади. Шундай қилиб, $C_0^\infty(R^n)$ фазонинг $\| \;\|_s$ норма бўйича тўлдирмасидаги ҳар бир элемент $H^s(R^n)$ фазонинг элементини аниқлайди. Теорема исбот бўлди.

9-теорема. *Агар $u \in H^s(R^n), v \in H^{-s}(R^n)$ бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{R^n} u_k(x)\, \overline{v_k(x)}\, dx$$

мавжуд, бунда $u_k, v_k \in C_0^\infty(R^n)$ ва $k \to \infty$ да $\|u_k - u\|_s \to 0,$ $\|v_k - v\|_{-s} \to 0$ бўлади. Бу лимитни $\int_{R^n} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx$ орқали белгилаймиз. Бундан ташқари

$$\left| \int_{R^n} u(x)\, \overline{v(x)}\, dx \right| \le \|u\|_s \|v\|_{-s},$$

тенгсизлик ўринлидир.

Исбот. Маълумки,

$$\int_{R^n} u_k(x)\overline{v_k(x)}dx = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \hat{u}_k(\xi)\, \overline{\hat{v}_k(\xi)}\, d\xi =$$

$$=(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n}\hat{u}_k(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\overline{\hat{v}_k(\xi)}\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}}d\xi$$

ва $k\to\infty$ да $\hat{u}_k(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}$, $\hat{v}_k(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}}$ кетма-кетликлар $L_2(R^n)$ фазода мос равишда $\hat{u}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}$, $\hat{v}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}}$ функцияларга интилади, шунга кўра

$$\int\limits_{R^n}u(x)\overline{v(x)}dx=(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бундан эса теореманинг тасдиғи келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

10-теорема. *Агар* $u\in H^s(R^n)$ *бўлса, у ҳолда*

$$\|u\|_s=\sup_{v\in C_0^\infty(R^n)}\frac{\int\limits_{R^n}u(x)\overline{v(x)}dx}{\|v\|_{-s}}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Аниқланишига кўра

$$\int\limits_{R^n}u(x)\overline{v(x)}dx=(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi$$

тенглик ўринли бўлади. $u_1(\xi)=\hat{u}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}$, $v_1(\xi)=\hat{v}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}}$ бўлсин. У ҳолда $u_1, v_1\in L_2$ бўлади. Шунга кўра,

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|u_1\|_0=\|u\|_s\ ,\qquad (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|v_1\|_0=\|v\|_{-s}$$

бўлиб теореманинг тасдиғи бизга маълум бўлган

$$\|u_1\|_0=\sup_{v_1\in C_0^\infty(R^n)}\frac{\int\limits_{R^n}u_1(\xi)\overline{v_1(\xi)}d\xi}{\|v_1\|_0}.$$

тенгликдан келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

11-теорема. $H^s(R^n)$ *фазодаги ихтиёрий чизиқли узлуксиз* l *функционал*

$$l(u) = \int\limits_{R^n} u v \, dx$$

кўринишда тасвирланади, бунда $v \in H^{-s}(R^n)$ *ва* $\|l\| = \|v\|_{-s}$ *бўлади.*

Исбот. $A_s u = \hat{u}\,(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}$ деб оламиз. Агар $u \in H^s(R^n)$ бўлса, у ҳолда $A_s u \in L_2(R^n)$ ва $\|A_s u\|_0 = \|u\|_s$ бўлади, яъни A_s оператор $H^s(R^n)$ фазони билан $L_2(R^n)$ фазога изометрик акслантиради. Шунинг учун l функционалга $L_2(R^n)$ фазода чизиқли узлуксиз функционал мос келади, яъни шундай бир $w \in L_2(R^n)$ функция учун $\|w\|_0 = \|l\|$ ва $l(u) = \int\limits_{R^n} w \cdot A_s u d\xi$ тенглик ўринлидир. Маълумки,

$$l(u) = \int\limits_{R^n} w(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\,(\xi)\, d\xi = (2\pi)^n \int\limits_{R^n} v(x)u(x)dx$$

тенглик ўринлидир, бунда $v \in H^{-s}(R^n)$ бўлиб, бу функциянинг Фурье алмаштиришидаги образи $A_s w(-\xi)$ бўлади. Шунга кўра, $\|l\| = \|w\|_0 = \|v\|_{-s}$ тенглик ўринлидир. Теорема исбот бўлди.

12-теорема. *Агар* $u \in H^s(R^n)$ *ва* $u_h(x)$ *эса* u *функциянинг ўртачаси бўлса, у ҳолда* $h \to 0$ *да* $\|u_h - u\|_s \to 0$ *бўлади.*

Исбот. Маълумки, $u_h(x) = u * \omega_h$ бўлгани учун $\hat{u}_h(\xi) = \hat{u}(\xi)\cdot\hat{\omega}_k(\xi)$ тенглик ўринли бўлади. Шунингдек, $\hat{\omega}_h(\xi) = \hat{\omega}(h\xi)$ бўлиб, $\hat{\omega}\,(h\xi)$ функция h га нисбатан текис чегараланган ва ҳар бир компактда текис $\hat{\omega}(h\xi) \to \hat{\omega}(0) = 1$ яқинлашувчи бўлади. Шунга кўра,

$$\left\| \hat{u}(\xi)\,[\hat{\omega}\,(h\xi) - 1]\,\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \right\|_0 \to 0$$

муносабат ўринли бўлади, яъни $\|u_h - u\|_s \to 0$ бўлади.

13-теорема (С.Л. Соболевнинг жойлашиш ҳақидаги теоремаси). *Агар* $u \in H^s(R^n)$ *ва* $s > k + \dfrac{n}{2}$, *бунда* $k \geq 0$ *бутун сон бўлса, у ҳолда* $u \in C^k(R^n)$ *бўлади. Ҳамда* $\|u\|_{C^k(R^n)} \leq A\,\|u\|_s$

тенгсизлик ўринли бўлиб бундаги A ўзгармас u элементга боғлиқ эмас.

Исбот. Аввал $u \in C_0^\infty(R^n)$ бўлсин. Биз $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in Z_+^n$ $|\alpha| = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!$, $D = (D_1, ..., D_n)$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot D_n^{\alpha_n}$ белгилашлардан фойдаланамиз. У ҳолда $D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \xi^\alpha \, \hat{u}(\xi) \, e^{ix\xi} d\xi$ тенглик ўринли ва шунинг учун $|\alpha| \le k$ учун

$$|D^\alpha u(x)| \le$$

$$\le (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} |\hat{u}(\xi)| \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\xi^\alpha| \left(1 + |\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}} d\xi \le$$

$$\le (2\pi)^{-n} \left(\int\limits_{R^n} |\hat{u}(\xi)|^2 \left(1 + |\xi|^2\right)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{R^n} |\xi^\alpha|^2 \left(1 + |\xi|^2\right)^{-s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = C \|u\|_s$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда $|\alpha| - s < -\frac{n}{2}$ бўлиб охирги интеграл яқинлашувчидир. Шунга кўра, $\|u\|_{C^k(R^n)} \le A \|u\|_s$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Энди $u \in H^s(R^n)$ бўлсин. У ҳолда 8–теоремага асосан $C_0^\infty(R^n)$ фазонинг элементларидан тузилган шундай u_m кетма-кетлик мавжудки, бунда $m \to \infty$ интилганда $\|u_m - u\|_s \to 0$ бўлади. Исбот қилинган тенгсизликка кўра, $\|u_m - u_{m'}\|_{C^k(R^n)} \le A \|u_m - u_{m'}\|_s$ тенгсизлик ўринлидир. Ҳамда бундаги A ўзгармас u_m кетма-кетликка боғлиқ эмас ва шунинг учун $C^k(R^n)$ фазода $m \to \infty$ интилганда $u_m \to v$ элементга яқинлашувчи бўлиб, бунда $v \in C^k(R^n)$ бўлади. Лекин ихтиёрий $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ учун

$$u(\varphi) = \lim_{m \to \infty} \int\limits_{R^n} u_m(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{R^n} v(x)\varphi(x)dx$$

тенглик ўринлидир. Шунга кўра, деярли ҳамма жойда $u(x) = v(x)$ тенглик ўринли бўлади. Ҳамда $\|u\|_{C^k(R^n)} \le A\|u\|_s$ тенгсизликка эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

14-теорема. *Компакт ташувчили ҳар қандай тақсимот учун шундай бир* s *сони мавжуд бўлиб, бунда* $u \in H^s(R^n)$ *бўлади, яъни* $\mathrm{E}'(R^n) \subset \bigcup_s H^s$ *муносабат ўринлидир.*

Исбот. $u \in E'(R^n)$ бўлсин. Бунда $K = \mathrm{supp}\, u$ компакт тўплам бўлади. Ҳар бир компакт тўпламда $u \in D'(R^n)$ тақсимот m чекли тартибга эга бўлади, яъни ихтиёрий $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ учун

$$|u(\varphi)| \le C \sup_{x \in K} \sum_{|\alpha| \le m} |D^\alpha \varphi(x)|$$

тенгсизлик ўринли бўлади. 13–теоремага кўра,

$$|u(\varphi)| \le CA\|\varphi\|_s, \; s = m + \left[\frac{n}{2}\right] + 1$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса, $u \in (H^s)^*$ бўлишлиги ва 11–теоремага кўра шундай бир $v \in H^{-s}(R^n)$ элемент топиладики, бунда ихтиёрий $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ учун

$$u(\varphi) = \int_{R^n} v\varphi dx$$

тенглик ўринли бўлади. Маълумки, бунда u тақсимотни v билан мослаштириш мумкин бўлади. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. Агар $u \in D'(R^n)$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ функция учун шундай бир s сони мавжуд бўлиб, бунда $\varphi u \in H^s(R^n)$ бўлади. Мисол сифатида $u(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} D^k \varphi(k)$ тақсимотни олсак, бу тақсимот кўрсатадики $D'(R)$ фазода ҳеч бир $H^s(R)$ фазога тегишли бўлмаган тақсимот ҳам мавжуд эканлигини кўрсатади.

Агар Ω тўплам R^n фазодаги соҳа бўлса, у ҳолда $H^s(\Omega)$ фазо $u \in D'(\Omega)$ бўлган элементлардан тузилган бўлиб, бу элемент $H^s(R^n)$ фазодан олинган $v \in H^s(R^n)$ элементга давом эттирилиши мумкин бўлган элементлардан тузилган фазо бўлади. Шунингдек,

$$\|u\|_s = \inf_{\substack{v \in H^s(R^n), \\ \Omega\ да \\ v=u}} \|v\|_s$$

тенглик ўринлидир. $H^s(\Omega)$ фазонинг $\overset{o}{H}{}^s(\Omega)$ қисм–фазоси бу– $H^s(\Omega)$ фазонинг $H^s(R^n)$ фазога қарашли ва $R^n \setminus \Omega$ да 0 га тенг бўлган элементлардан тузилган фазодан иборат бўлади.

15-теорема. *$u \in C_0^\infty(\Omega)$ функциялар фазосининг тўлдирмаси $R^n \setminus \Omega$ га нолга тенг қиймат билан $H^s(R^n)$ фазонинг нормаси билан давом эттирилган фазо $\overset{o}{H}{}^s(\Omega)$ фазода жойлашган бўлади.*

Исбот. $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ ва $k, l \to \infty$ интилганда $\|u_k - u_l\| \to 0$ бўлсин. У ҳолда 8–теоремага кўра, бу кетма-кетлик шундай бир $u \in H^s(\Omega)$ элементни аниқлайди. Шунингдек, агар $\varphi \in C_0^\infty(R^n \setminus \Omega)$ бўлса, у ҳолда $\text{supp}\, u \subset \overline{\Omega}$ учун $u(\varphi) = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{R^n} u_k \varphi dx = 0$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

$\int\limits_\Omega \sum\limits_{|\alpha|\le s} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 dx$ интеграл чекли бўладиган ҳар бир $u(x)$ функция $H^s(R^n)$ фазодан олинган $l_s u$ элементгача давом эттирилиши мумкин.

Аввал $u \in H^s(R_+^n)$, бунда $R_+^n = \left\{x \in R^n,\ x_n > 0\right\}$ бўлсин. Биз

$$l_s u = \begin{cases} u(x), & x_n > 0\ \textit{учун} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} \lambda_k u(x', -kx_n), & x_n < 0\ \textit{учун} \end{cases}$$

деб олайлик, бунда $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ ва λ_k сонлар эса

$$\sum_{k=1}^{s} \lambda_k (-k)^j = 1, \qquad 0 \le j \le s-1$$

тенгламалар системасини ечиб топилади. Агар $u \in C^{s}(\bar{R}^{n}_{+})$ бўлса, у ҳолда λ_k ўзгармасларнинг танланишига кўра

$l_s u \in C^{s-1}(R^n)$ ва $|\alpha| \leq s$ учун $\int\limits_{R^n} \left|D^{\alpha} l_s u(x)\right|^2 dx \leq C \int\limits_{R^n_+} \left|D^{\alpha} u(x)\right|^2 dx$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда C ўзгармас u функцияга боғлиқ эмас.

$\bar{\Omega}$ соҳада $\sum\limits_{j=0}^{N} h_j(x) = 1$, бунда $j = 1,\dots,N$ учун $h_0(x) \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $h_j(x) \in C_0^{\infty}(\bar{\Omega}_j)$ бўлсин. Шунинг учун $h_j u$ функциялар учун давом эттиришларни қуриш етарлидир. $\operatorname{supp} h_j \subset \bar{\Omega}_j$ ва $f_j:\ \Omega_j \to R^n$ силлиқ акслантириш мавжуд бўлиб, бунда $\Gamma \bigcap \bar{\Omega}_j$ тўплам $x_n = 0$ текисликнинг бир қисмига ўтадиган, ҳамда Ω_j тўпламнинг образи R^{n}_{+} соҳада ётадиган қилиб Ω_j соҳани етарлича кичик қилиб оламиз. Ҳар бир $u \in H^{s}(\Omega)$ учун

$$l_{s,\Omega} u = h_0 u + \sum_{j=1}^{N} f_j^{*} l_s f_{j*}(h_j u)$$

деб оламиз, бунда $f_j^{*} v(x) = v(f_j(x))$, $f_{j*} w(x) = w(f_j^{-1}(x))$ бўлсин. Давом эттиришнинг бундай қурилишига кўра, $l_{s,\Omega} u \in H^{s}(R^n)$ ва $\left\|l_{s,\Omega} u\right\|_s \leq C \left\|u\right\|_{H^{s}(\Omega)}$ муносабат ўринли бўлади.

16-теорема. *Агар* $0 < s < 1$ *бўлса, у ҳолда* $\|u\|_s$ *норма*

$$\|u\|'_s = \left(\int\limits_{R^n} |u|^2 dx + \iint\limits_{R^n \times R^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}$$

норма билан эквивалентдир.

Исбот. Айирма $u(x) - u(x+z)$ функциянинг Фурье алмаштириши $\hat{u}\,(\xi)\left[1 - e^{i(z,\,\xi)}\right]$ функцияга тенг. Шунинг учун

$$\iint\limits_{R^n \times R^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dxdy = \iint\limits_{R^n \times R^n} \frac{|u(x) - u(x+z)|^2}{|z|^{n+2s}} dxdz =$$

$$=(2\pi)^{-n}\iint\limits_{R^n\times R^n}\frac{\left|1-e^{i(z,\,\xi)}\right|^2}{|z|^{n+2s}}\,|\,\hat{u}(\xi)\,|^2\,d\xi\,dz$$

тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $\int\limits_{R^n}\left|1-e^{i(z,\xi)}\right|^2|z|^{-n-2s}\,dz$ функция ξ ўзгарувчига нисбатан бир жинсли ва $2s$ даражали функция бўлиб фақат $|\xi|$ гагина боғлиқдир. Шунинг учун бу функция $A|\xi|^{2s}$ га тенг бўлади. Шунга кўра,

$$\left(\|u\|'_s\right)^2=(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n}|\hat{u}(\xi)|^2\left(1+A|\xi|^{2s}\right)d\xi$$

тенглик ўринлидир. Шунинг учун биз энди

$$C_1\left(1+|\xi|^2\right)^s\le 1+A|\xi|^{2s}\le C_2\left(1+|\xi|^2\right)^s$$

тенгсизликни ҳисобга олсак, у ҳолда теореманинг исботи келиб чиқади.

Агар $s>0$ ва $[s]=k<s$ бўлса, у ҳолда $H^s(R^n)$ фазода нормани қуйидагича ҳам киритиш мумкин:

$$\|u\|_s^2=\sum_{|\alpha|\le k}\int\limits_{R^n}\left|D^\alpha u\right|^2dx+\sum_{|\alpha|=k}\int\limits_{R^n}\frac{\left|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2(s-k)}}dxdy\,.$$

Бу нормаларнинг эквивалентлигини 16–теоремада исбот қилинганидек усул билан текшириш мумкин бўлади.

17-теорема. *Агар $u\in H^s(R^n)$ ва $s>\frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда $x_n=0$ гипертекисликка қисқартириш аниқланган ва бу элементнинг қисқартирилгани $H^{s-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ фазога тегишли бўлади. Ҳамда шундай бир $A>0$ ўзгармас сон топилиб*

$$\|u(x',0)\|_{s-\frac{1}{2}}\le A\,\|u\|_s$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $u\in C_0^\infty(R^n)$ ва $v(x')=u(x',0),\ x'=(x_1,\,...,\,x_{n-1})$ бўлсин. У ҳолда $\hat{v}(\xi')=\int\limits_{R^n}\hat{u}(\xi)d\xi_n$ бўлади. Шунинг учун

$$|\hat{v}(\xi')|^2 \le \int\limits_{R^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi_n \int\limits_{R^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-s} d\xi_n =$$

$$= C_0\left(1+|\xi'|^2\right)^{\frac{1}{2}-s} \int\limits_{R^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi_n$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизликнинг ҳар иккала томонини $\left(1+|\xi'|^2\right)^{s-\frac{1}{2}}$ ифодага кўпайтирамиз ва ξ' ўзгарувчи бўйича интеграллаб,

$$\|v\|^2_{s-\frac{1}{2}} \le C_0 \|u\|^2_s$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Натижада 8–теоремадан бизнинг тасдиғимиз келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

1–натижа. *Агар* $u \in H^s(R^n)$ *ва* $s > k+\frac{1}{2}, k \in N$ *бўлса, у ҳолда* $j \le k$ *учун* $D^j u$ *ҳосилани* $x_n = 0$ *гипертекисликка қисқартириш аниқланган ва бу элементнинг қисқартирилгани* $D_n^j u(x', 0) \in H^{s-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ *фазога тегишли бўлади. Ҳамда шундай бир* $A > 0$ *ўзгармас сон топилиб* $j = 0,1,\ldots, k$ *учун*

$$\|D_n^j u(x', 0)\|_{s-j-\frac{1}{2}} \le A \|u\|_s$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

18-теорема. *Ҳар бир* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *функциялар* R^{n-1} *фазода аниқланган ва* $s > k+\frac{1}{2}$ *учун* $\varphi_j \in H^{s-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ *бўлсин. У ҳолда шундай бир* $u \in H^s(R^n)$ *функция мавжуд бўлиб,* $j = 0,1,\ldots, k$ *учун* $D_n^j u(x', 0) = \varphi_j(x')$ *тенгликлар ўринли бўлади. Ҳамда шундай бир* $A > 0$ *ўзгармас сон топилиб*

$$\|u\|_s \le A \sum_{j=0}^{k} \|\varphi_j\|_{s-j-\frac{1}{2}}$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

Исбот. $h \in C_0^\infty(R)$ ва $|t| \le 1$ учун $h(t) = 1$ бўлсин.

$$V(\xi', x_n) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}(ix_n)^j h\left(x_n\left(1+|\xi'|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right) \hat{\varphi}_j(\xi').$$

деб олайлик. Маълумки, $V(\xi', 0) = \varphi_0(\xi')$ бўлиб, $j = 1, 2, ..., k$ учун $D_n^j V(\xi', 0) = \varphi_j(\xi')$ бўлади. Энди V функция x' ўзгарувчи бўйича $u \in H^s(R^n)$ функциянинг Фурье алмаштириши бўлишлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\|u\|_s^2 \le \sum_{j=0}^{k} \int_{R^n} \left|\hat{\varphi}_j(\xi')\right|^2 \left(1+|\xi'|^2\right)^{-j-1} \left|\hat{h}^{(j)}\left(\xi_n\left(1+|\xi'|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi$$

бўлиб, $(ix_n)^j g(x_n)$ функциянинг Фурье алмаштириши $\hat{g}^{(j)}(\xi_n)$ га тенг бўлиб, $g(\rho x_n) = \rho^{-1}\hat{g}(\xi_n \rho^{-1})$ бўлади. Агар $\xi_n = \tau\left(1+|\xi'|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ деб белгилаш киритсак, у ҳолда

$$\|u\|_s^2 \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{k} \int_{R^n} |\hat{\varphi}_i(\xi')|^2 \left(1+|\xi'|^2\right)^{-j-1+s+\frac{1}{2}} \left|\hat{h}^{(j)}(\tau)\right| \left(1+\tau^2\right)^s d\tau d\xi' \le$$

$$\le A\sum_{j=0}^{k} \|\varphi_j\|_{s-j-\frac{1}{2}}^2$$

тенгсизликни келтириб чиқарамиз. Бундан эса, теореманинг исботи келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Таъриф. Агар ҳар бир $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ функция учун $\varphi u \in H^s(R^n)$ шарт ўринли бўлса, у ҳолда u функция $H^s(\Omega)$ синфга локал равишда қарашли дейилади ва бундай функциялар тўплами $H_{loc}^s(\Omega)$ фазо дейилади.

Маълумки, $C^k(\Omega) \subset H_{loc}^k(\Omega)$ бўлади.

19-теорема. *Агар $u \in D'(\Omega)$ ва ҳар бир $x_0 \in \Omega$ нуқта учун шундай бир $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ функция топилиб, $\varphi(x_0) \ne 0$ ва $\varphi u \in H^s(\Omega)$ бўлса, у ҳолда $u \in H_{loc}^s(\Omega)$ бўлади.*

Исбот. $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ бўлсин. Шунга кўра, φ функциянинг ташувчиси Ω соҳада компакт ва бу компактдаги ихтиёрий x_0 нуқта учун юқорида келтирилган хоссаларга эга бўлган шундай бир φ_{x_0} функция мавжуд бўлади. У ҳолда Гейне-Борель теоремасига асосан $C_0^\infty(\Omega)$ фазога тегишли чекли сондаги $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$ функциялар топилиб, $\varphi_j u \in H^s(\Omega)$ бўлади ва $\mathrm{supp}\,\varphi$ тўпламда $\Phi = \sum_{j=1}^{N} \left|\varphi_j\right|^2 > 0$ бўлади. Маълумки, $\psi = \varphi\Phi^{-1} \in C_0^\infty(\Omega)$ ва шунинг учун

$$\varphi u = \sum_{j=1}^{N} \psi\left|\varphi_j\right|^2 u = \sum_{j=1}^{N} (\psi\bar{\varphi}_j)(\varphi_j u) \in H^s(\Omega)$$

бўлади, чунки $\varphi_j u \in H^s(\Omega)$ (Бу ҳақида қуйидаги 23–теоремага ҳам қаранг). Шунга кўра $u \in H^s_{loc}(\Omega)$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

Айрим тақсимотларнинг силлиқлигини тадқиқ этишда биз ёрдамчи $H_{s,\delta}$, бунда $s \in R$, $\delta \in R$, $\delta > 0$ бўлган фазодан фойдаланамиз. Бу фазода норма қуйидагича киритилади:

$$\|u\|_{s,\delta} = \left((2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left(1+|\delta\xi|^2\right)^{-1} |\hat{u}\,(\xi)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Маълумки, $0 < \delta < 1$ учун

$$\|u\|_{s-1} \leq \|u\|_{s,\delta} \leq C(\delta)\, \|u\|_{s-1}$$

тенгсизлик ўринли ва $\delta \to 0$ да

$$\|u\|_{s,\delta} \to \|u\|_s$$

бўлади. Шунинг учун агарда $u \in H^{s-1}(R^n)$ ва δ га боғлиқ бўлмаган C ўзгармас сон мавжуд бўлиб, бунда $\|u\|_{s,\delta} \leq C$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда Фату теоремасига кўра, $u \in H^s(R^n)$ ва $\|u\|_s \leq C$ тенгсизлик ўринли бўлади[1].

20-теорема. *Агар* Ω *соҳа* R^n *фазодаги чегараланган соҳа ва* $s < t$ *бўлса, у ҳолда* $\overset{0}{H}{}^t(\Omega) \to \overset{0}{H}{}^s(\Omega)$ *жойлаштириш оператори тўла узлуксиз оператор бўлади.*

---

[1] Бу Фату теоремаси ҳақида Ф. Рисс, Б. Сёкефальви – Надь “Лекции по функциональному анализу”, М.: Мир, 1979 . китобларининг 50–бетидан топиш мумкин.

Исбот. Айтайлик, $u_k \in \overset{0}{H}{}^t(\Omega)$ ва $\|u_k\|_t \le 1$ бўлсин. Ҳамда $h \in C_0^\infty(R^n)$ ва Ω соҳанинг атрофида $h(x) = 1$ бўлсин. Биз u_k функцияни $R^n \setminus \Omega$ тўпламга ноль қиймат билан давом эттирамиз. Маълумки,

$$hu_k = u_k,\ \hat{u}_k(\xi) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \hat{u}_k(\eta)\, \hat{h}(\xi - \eta)\, d\eta,$$

$$D_{\xi_j} \hat{u}_k(\xi) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \hat{u}_k(\eta) D_j \hat{h}(\xi - \eta)\, d\eta$$

тенгликлар ўринли. Осонликча кўрсатиш мумкинки,

$$1 + |\xi|^2 \le 2\left(1 + |\eta|^2\right)\left(1 + |\xi - \eta|^2\right),$$

$$1 + |\eta|^2 \le 2\left(1 + |\xi|^2\right)\left(1 + |\xi - \eta|^2\right)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Шунинг учун

$$\left(1 + |\xi|^2\right)^s \le 2^{|s|}\left(1 + |\eta|^2\right)^s \left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^{|s|}$$

тенсизлик ўринлидир. Бу охирги тенгсизликдан

$$\left(1 + |\xi|^2\right)^s \ |\hat{u}_k(\xi)|^2 \ \le \ (2\pi)^{-n}\, 2^{|s|} \int\limits_{R^n} \left(1 + |\eta|^2\right)^s |\hat{u}_k(\eta)|^2\, d\eta \times$$

$$\times \int\limits_{R^n} \left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^{|s|} \left(\hat{h}(\xi - \eta)\right)^2 d\eta$$

ва

$$\left(1 + |\xi|^2\right)^s \left| D_{\xi_j} \hat{u}_k(\xi) \right|^2 \le (2\pi)^{-n}\, 2^{|s|} \int\limits_{R^n} \left(1 + |\eta|^2\right)^s |\hat{u}_k(\eta)|^2\, d\eta \times$$

$$\times \int\limits_{R^n} \left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^{|s|} \left| D_j \hat{h}(\xi - \eta) \right|^2 d\eta$$

муносабатлар осонгина келиб чиқади. Шунга кўра, $\|u_k\|_s \le \|u_k\|_t \le 1$ эканлигидан эса

$$\left(1 + |\xi|^2\right)^s \left(\left| \hat{u}_k(\xi) \right|^2 + \sum_{j=1}^{N} \left| D_j \hat{u}_k(\xi) \right|^2 \right) \le A$$

тенгсизлик келиб чиқади ва бу тенгсизликдаги A ўзгармас сон k сонга боғлиқ эмас. Бундан эса, $\{\hat{u}_k\}$ кетма-кетлик текис чегараланган ва ҳар бир $R > 0$ мусбат сонга кўра $|\xi| \le R$ учун текис даражада узлуксиз бўлади. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон ва R сони шундай етарлича катта сон бўлсинки, бунда $\left(1+R^2\right)^{\frac{s-t}{2}}<\varepsilon$ бўлсин. У ҳолда Арцела теоремасига асосан $|\xi|\le R$ учун $\{\hat{u}_k\}$ кетма-кетликдан текис яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин. Бу ажратилган қисмий кетма-кетликни яна биз $\{\hat{u}_k\}$ орқали белгилаймиз. Шунингдек, етарлича катта $N=N(\varepsilon)$ натурал сон топилиб $k>N$ ва $m>N$ учун

$$\left(\int\limits_{|\xi|\le R}\left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\max_{|\xi|\le R}|\,\hat{u}_k(\xi)-\hat{u}_k(\xi)\,|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлди. У ҳолда

$$\|u_k-u_m\|_s\le\varepsilon\|u_k-u_m\|_t+\left(\int\limits_{|\xi|\le R}\left(1+|\xi|^2\right)^s|\,\hat{u}_k(\xi)-\hat{u}_m(\xi)\,|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}<2\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади, яъни $\{u_k\}$ кетма-кетлик H^s фазода фундаментал кетма-кетлик бўлади. Теорема исбот бўлди.

21-теорема. *Айтайлик, $s>s'$, $s\ge-\dfrac{n}{2}$ ва Ω соҳа R^n фазодаги диаметри δ га тенг бўлган соҳа бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир δ_0 сон топиладики, бунда $\delta<\delta_0$ учун ва ихтиёрий $u\in C_0^\infty(\Omega)$ учун*

$$\|u\|_{s'}\le\varepsilon\|u\|_s$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни шундай бир $u_k\in C_0^\infty$ функция мавжуд бўлиб, бу функциянинг ташувчиси координата бошининг атрофи бўлган ω_k тўпламда жойлашган бўлиб, $diam\ \omega_k<\dfrac{1}{k}$ ва $\|u_k\|_s=1$, $\|u_k\|_s\ge c_0>0$ шартларни қаноатлантирсин. Умумийликка хилоф қилмаган ҳолда $k=1,2,\ldots$ учун $\omega_{k+1}\subset\omega_k$ бўлсин деб ҳисоблаймиз. 20–теоремага асосан $\{u_k\}$ тўплам $H^{s'}$ фазода компактдир. Шунга кўра, шундай бир $u\in H^s$ функция топиладики, бунда

$$\left\|u_{k_i}-u\right\|_{s'}\to 0,\quad \|u\|_s\le 1,\quad \|u\|_{s'}\ge c_0>0$$

муносабатлар ўринли ва $\operatorname{supp} u=\{0\}$ бўлади. Маълумки, $\hat{u}\,(\xi)=P(\xi)$ функция ξ ўзгарувчи бўйича $m\ge 0$ даражали кўпҳад бўлади. Лекин $P(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\in L_2(R^n)$ муносабат фақат $m+s<-\frac{n}{2}$ учун ўринли бўлади. Шартга кўра $s\ge-\frac{n}{2}$ бўлганлиги учун биз қарама-қаршиликка келамиз. Бу қарама-қаршилик теоремани исбот қилади.

Эслатма. *Бу теоремадаги* $s\ge-\frac{n}{2}$ *шарт муҳимдир, чунки агар* $s<-\frac{n}{2}$ *бўлса, у ҳолда* $\delta(x)\in H^{s}$ *бўлади.*

Ҳақиқатдан ҳам, агар $s<-\frac{n}{2}$ бўлса, у ҳолда $u_k(x)=\omega_{\frac{1}{k}}(x)$, бунда $\omega_{\frac{1}{k}}(x)$ –ўртача функциянинг ядроси учун $k\to\infty$ да $\operatorname{supp} u_k\to\{0\}$ бўлади. Шу билан бирга $s<-\frac{n}{2}$ учун $\tilde{u}_k\to 1$ ва $\|u_k\|_s^2\to\int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi<\infty$. Шунинг учун $\|u_k\|_{s'}\le C\,\|u_k\|_s$ тенгсизликдаги C ўзгармас сон $s'<s<-\frac{n}{2}$ учун $k\to\infty$ да нолга интила олмайди.

22-теорема. *Ҳақиқий* s *ва* s' *сонлар учун* $s>s'$ *тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $\varepsilon>0$ *мусбат сон учун шундай бир* $C=C(\varepsilon,s,s')$ *ўзгармас сон топиладики, бунда ихтиёрий* $u\in C_0^\infty(R^n)$ *учун*

$$\|u\|_{s'}\le\varepsilon\|u\|_s+C_\varepsilon\|u\|_{s'-1}.$$

тенгсизлик ўринлидир, бунда $C_\varepsilon=C_0\,\varepsilon^{\frac{1}{s'-s}}$ *бўлади.*

Исбот. Маълумки, $\lambda>0$ шартни қаноатлантирувчи барча λ сонлар учун

$$\lambda^{s'}\le\varepsilon\lambda^s+C_\varepsilon\lambda^{s'-1}$$

тенгсизликнинг ўринлидир. Бу тенгсизликдан теореманинг исботи келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

7–лемма. *Агар* $p \geq 1$ *учун* $f \in L_1(R^n)$, $g \in L_p(R^n)$ *бўлса, у ҳолда* $f * g \in L_p(R^n)$ *ва* $\| f * g\|_{L_p} \leq \| f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_p}$ *тенгсизлик ўринли бўлади.*

Исбот. Агар $p = 1$ бўлса, у ҳолда

$$\| f * g\|_{L_1} = \int\limits_{R^n} \left| \int\limits_{R^n} f(y)\, g(x-y)dy \right| dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{R^n} |f(y)| \int\limits_{R^n} |g(x-y)|\, dxdy =$$

$$= \int\limits_{R^n} |f(y)| \int\limits_{R^n} |g(x)|\, dxdy = \| f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Агар $p > 1$ бўлса, у ҳолда Гельдер тенгсизлигига кўра,

$$\| f * g\|_{L_p}^p = \int\limits_{R^n} \left| \int\limits_{R^n} f(y) g(x-y)dy \right|^p dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{R^n} \left(\int\limits_{R^n} |f(y)|dy \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int\limits_{R^n} |f(y)| \cdot |g(x-y)|^p\, dy \right) dx$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, бунда q сон p сон қўшмадир, яъни $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ шартни қаноатлантирувчи сондир. Бундан кўринадики,

$$\| f * g\|_{L_p}^p \leq \| f\|_{L_1}^{\frac{p}{q}} \int\limits_{R^n} |f(y)| \left(\int\limits_{R^n} |g(x-y)|^p\, dx \right) dy =$$

$$= \| f\|_{L_1}^{\frac{p}{q}} \int\limits_{R^n} |f(y)| \int\limits_{R^n} |g(x)|^p\, dxdy = \| f\|_{L_1}^{\frac{p}{q}+1} \cdot \|g\|_{L_p}^p$$

бўлади. Шунинг учун $\| f * g\|_{L_p} \leq \| f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_p}$ тенгсизлик ўринлидир. 7–лемма исбот бўлди.

23-теорема. *Агар* $u \in H^s(R^n)$, $\varphi \in S(R^n)$ *бўлса, у ҳолда* $\varphi u \in H^s(R^n)$ *ва* $\|\varphi u\|_s \leq A\|u\|_s$ *тенгсизлик ўринли бўлади, бунда* A *ўзгармас сон* u *функцияга боғлиқ эмас.*

Исбот. Маълумки,

$$\overset{\wedge}{\varphi u}(\xi) = \int\limits_{R^n} \hat{u}(\eta)\, \hat{\varphi}(\eta - \xi)\, d\eta$$

тенглик ўринлидир. Шунинг учун

$$\| \varphi u \|_s^2 = \int\limits_{R^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s \left| \int\limits_{R^n} \hat{u}(\eta) \hat{\varphi}(\eta - \xi)\, d\eta \right| d\xi$$

тенглик ўринли бўлади. 20–теореманинг исботида кўрдикки,

$$\left(1 + |\xi|^2\right)^s \le 2^{|s|} \left(1 + |\eta|^2\right)^s \left(1 + |\xi - \eta|^2\right)^{|s|}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунинг учун

$$\| \varphi u \|_s^2 \le \left\| 2^{\frac{|s|}{2}} \int\limits_{R^n} \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}(\eta)| \left(1 + |\eta - \xi|^2\right)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\eta - \xi)|\, d\eta \right\|_0^2 \le$$

$$\le 2^{|s|}\ \|u\|_s^2 \left(\int\limits_{R^n} \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta \right)^2$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу охирги тенгсизлик $p = 2$ учун 7–леммадан келиб чиқади. Шундан қилиб

$$A = 2^{\frac{|s|}{2}} \int\limits_{R^n} \left(1 + |\eta|^2\right)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta$$

бўлади. Теорема исбот бўлди.

Энди Ω соҳадан $\overline{\Omega}$ соҳага давом этувчи диффеоморфизмларга нисбатан $H^s(R^n)$ фазонинг инвариантлигини исбот қиламиз.

$f : \Omega \to \Omega'$ акслантириш диффеоморф акслантириш бўлсин. У ҳолда ҳар бир $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ функцияга $C_0^\infty(\Omega)$ фазодан олинган унинг тескари образ $f^* \varphi(x) = \varphi(f(x))$ функцияси мос келади. Агар $v \in D'(\Omega')$ бўлган тақсимот бўлса, у ҳолда $u = f^* v$ тақсимот $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ учун

$$u(\varphi) = v\left(\varphi(f^{-1}(x)) \left| f_x^{'} \right|^{-1}\right)$$

формула орқали аниқланади. Бу ерда $\left| f_x^{'} \right|$ – ифода f акслантиришнинг Якоби детерминантидир. Бу ерда $u \in D'(\Omega')$

эканлигини кўриш қийин эмас. Бу формула табиий равишда $v(\psi)=\int\limits_{R^n} v(x)\psi(x)dx$ ва $v\in L_1(\Omega')$ бўлган ҳолдаги ўзгарувчиларни алмаштиришдан ҳосил қилинган тенгликни умумлаштиради.

24-теорема. *K' тўплам Ω' тўпламнинг компакт қисм тўплами ва $v\in \overset{0}{H}{}^s(K')$ бўлсин. У ҳолда $u=f^*v\in \overset{0}{H}{}^s(K)$ бўлади, бунда K тўплам K' компактнинг прообрази ва $\|u\|_s \le A\,\|v\|_s$ тенгсизлик ўринлидир. Бундан ташқари, A ўзгармас сон v га боғлиқ эмас.*

Исбот. 1°. $s=0$ бўлган ҳол учун теореманинг тасдиғи классик анализдан маълум. Анализда $s\in N$ бўлган ҳолда ҳам қаралади.

2°. Агар $0<s<1$ бўлса, у ҳолда теоремани исботлаш учун 16–теоремани қўллаш қулайдир. $y=f(x)$ бўлсин. У ҳолда

$$\iint\limits_{R^n\times R^n}\frac{|u(x)-u(x')|^2}{|x-x'|^{n+2s}}dxdx'=$$

$$=\iint\limits_{R^n\times R^n}\frac{|v(y)-v(y')|^2}{\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y')\right|^{n+2s}}\frac{dy}{|f'(x)|}\frac{dy'}{|f'(x')|}.$$

тенглик ўринли бўлади. Шунга кўра, K компактга қарашли бўлган x ва x' нуқталар учун

$$|f'(x)|\cdot|f'(x')|\ge C_1,\qquad |x-x'|\ge C_2\,|y-y'|$$

тенгсизликларга эга бўламиз. Шунинг учун

$$\iint\limits_{R^n\times R^n}\frac{|u(x)-u(x')|^2}{|x-x'|^{n+2s}}dxdx'\le C_3\iint\limits_{R^n\times R^n}\frac{|v(y)-v(y')|^2}{|y-y'|^{n+2s}}dydy'$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, ундан эса теореманинг тасдиғи келиб чиқади.

3°. Ихтиёрий $s>0$ бўлган ҳолда эса, биз 16–теоремадан кейин келтирилган $H^s(R^n)$ фазонинг нормасини қўллаймиз. Юқорида келтирилган 1° ва 2°– ҳолларда қаралган ҳолларни комбинациялаш орқали теореманинг тасдиғини ҳосил қиламиз.

4°. Энди $s<0$ бўлсин. У ҳолда 10–теоремага кўра,

$$\|u\|_s = \sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(K) \\ \|\varphi\|_{-s}=1}} \left| \int_{R^n} u(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx \right|$$

бўлади. Агар $y = f(x),\ \varphi(f^{-1}(y)) = \psi(y)$ деб олсак, у ҳолда

$$\left| \int_{R^n} u(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_{R^n} v(y)\cdot\overline{\psi(y)}\cdot\frac{dy}{|f\,'(x)|} \right| \le \|v\|_s \cdot \left\| \psi(y)|f\,'(x)|^{-1} \right\|_{-s}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ҳолда $-s > 0$ бўлгани учун биз юқорида ҳосил қилинган тенгсизликни қўллаб

$$\left\| \psi(y)|f\,'(x)|^{-1} \right\|_{-s} \le A\,\|\varphi\|_{-s}$$

тенгсизликни ёзамиз. Шунинг учун

$$\|u\|_s \le \|v\|_s \cdot A\,\|\varphi\|_{-s} = A\,\|v\|_s$$

тенгсизлик ўринли бўлади, чунки $\|\varphi\|_{-s} = 1$. Теорема исбот бўлди.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

30.1. $M = \left\{ x(t) : x(t) \in L_2[a,b],\ \int_a^b x(t)dt = 0 \right\}$ тўплам $L_2[a,b]$ фазонинг қисм фазоси эканлигини исботланг. Ҳамда $M^\perp$ ортогонал қисм фазони аниқланг.

30.2. Барча кўпҳадлар тўплами $H^1[a,b]$ фазонинг ҳамма жойида зич тўплам эканлигини исботланг.

30.3. Агар $x(t) \in H^1[a,b],\ \ y(t) \in C^1[a,b]$ бўлса, у ҳолда $x(t)y(t) \in H^1[a,b]$ эканлигини исботланг.

30.4. $H^1[0,\pi]$ фазода $x(t) = \sin t$ ва $y(t) = t$ элементлар орасидаги φ бурчакни топинг.

30.5. $H^1[-1,1]$ фазода $x_0(t) \equiv 1,\ x_1(t) = t,\ x_2(t) = t^2,\ x_3(t) = t^3$ элементлар системасини ортогоналлаштиринг.

30.6. $1,\ \sin\frac{2\pi k(t-a)}{b-a},\ \sin\frac{2\pi k(t-a)}{b-a},\ k\in N$ функциялар системасининг $H^1[a,b]$ фазода ортогонал эканлигини исботланг.

30.7. $\overset{0}{H}{}^1[a,b]=\left\{x(t):x(t)\in H^1[a,b],x(a)=x(b)=0\right\}$ тўплам $H^1[a,b]$ фазонинг қисм фазоси эканлигини исботланг. Ҳамда $\left(\overset{0}{H}{}^1[a,b]\right)^{\perp}$ ортогонал қисм фазони аниқланг.

30.8. $M=\left\{x(t):x(t)\in H^1[a,b],\ x(a)=x(b)\right\}$ тўплам $H^1[a,b]$ фазонинг қисм фазоси эканлигини исботланг. Ҳамда $M^{\perp}$ ортогонал қисм фазони аниқланг.

30.9. $M=\left\{x(t):x(t)\in H^1[a,b],\int\limits_a^b x(t)dt=0\right\}$ тўплам $H^1[a,b]$ фазонинг қисм фазоси эканлигини исботланг. Ҳамда $M^{\perp}$ ортогонал қисм фазони аниқланг.

30.10. Ҳар қандай $x(t)\in L_2[a,b]$ бўлган функциянинг $\overset{0}{H}{}^1[0,\pi]=\left\{x(t):x(t)\in H^1[0,\pi],\ x(0)=x(\pi)=0\right\}$ қисм фазога қарашли бўлишлиги учун $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2b_k^2$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги зарур ва етарлидир эканлигини исботланг, бунда $k\in N$ учун $b_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x(t)\sin ktdt$ Фурье коэффициенти. Шу билан бирга

$$\|x\|^2_{\overset{0}{H}{}^1[0,\pi]}=\int\limits_0^{\pi}\left[x^2(t)+x'^2(t)\right]dt=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2+1\right)b_k^2$$

тенгликни ҳам исботланг.

30.11. $x(t)=sign\,t,\quad y(t)=|t|$ функцияларнинг қайси бири $H^1[-\pi,\pi]$ фазога қарашли бўлади.

30.12. $H^1[0,\pi]$ фазонинг $C[0,\pi]$ фазода жойлашиши қатъий жойлашиш эканлигини, яъни $[0,\pi]$ ораликда узлуксиз бўлган $x(t)\notin H^1[0,\pi]$ функция мавжуд эканлигини исботланг.

4- §. Ўзгармас коэффициентли дифференциал операторлар

Ўзгармас коэффицентли чизиқли дифференциал операторлар назарияси асосан ўтган асрнинг 50-йилларида тақсимотлар назарияси базасида яратилган. Биз қуйида

$$P(D)u = f(x) \tag{4.4.1}$$

тенгламани қараймиз, бунда $P(D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \, D^\alpha$, $a_\alpha \in C$, $f \in E'$. Бу тенгламага Фурье алмаштиришини қўллагандан кейин

$$P(\xi)\, \hat{u}\, (\xi) = \hat{f}\, (\xi)$$

шаклидаги тенгламага ўтади. Шунинг учун унинг ечилиши ҳақидаги масала тақсимотнинг Фурье образлари синфида полиномга бўлиш мумкинлиги ҳақидаги масалага келтирилади.

Агар $u \in S'(R^n)$ ва $P(D)u = f$ бўлса, у ҳолда

$$P(\xi)\, \hat{u}\, (\xi) = \hat{f}\, (\xi)$$

тенглик ўринли бўлади ва агар $\hat{f}\, (\xi)\, P(\xi)^{-1} \in S'(R^n)$ бўлса, у ҳолда u тақсимотнинг Фурье образи $\hat{u}\, (\xi) = \hat{f}\, (\xi) P(\xi)^{-1}$ бўлади ва бу u тақсимотни аниқлашга имкон беради. Бу усул агар $P(\xi)$ полином учун $\xi \in R^n$ бўлганда $|P(\xi)| \ge c_0$, бунда $c_0 = const > 0$ тенгсизлик ўринли бўлса , у ҳолда яроқлидир. Умумий ҳолда эса $\xi \in R^n$ ўзгарувчи бўйича комплекс соҳага чиқиш ёрдам беришини кейинроқ кўриб чиқамиз.

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} \frac{\hat{f}\, (\xi)}{P(\xi)}\, e^{ix\xi}\, d\xi \tag{4.4.2}$$

формула (4.4.1) тенглама ечимини аниқлайди. Бизга маълум бўлган $E'(R^n) \subset \bigcup_s H^s(R^n)$ теоремага кўра, $f-$ функционал бирор $s \in R$ учун $H^s(R^n)$ фазога қарашли бўлади. (4.4.2) формуладан $u \in H^s(R^n)$ эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\|u\|_s^2 = \int\limits_{R^n} |\, \hat{u}\, (\xi)\,|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi = \int\limits_{R^n} \left|\frac{\hat{f}\, (\xi)}{P(\xi)}\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi \le c_0^{-2} \,\|\, f\,\|_s^2$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу (4.4.1) тенглама ечилишини ўрганиш учун $f(x)=\delta(x)$ бўлган хусусий ҳолни қараш етарлидир.

1–таъриф. Агар $P(D)E(x)=\delta(x)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $E\in D'(R^n)$ *тақсимотга* $P(D)$ *дифференциал операторнинг фундаментал ечими* деб айтилади, бунда $\delta(x)-$Дирак функциясидир.

Ихтиёрий $f\in D'(R^n)$ тақсимот учун $f=f*\delta$ тенглик ўринлидир. Шунинг учун, агар $f\in E'(R^n)$ бўлса, у ҳолда

$$D^{\alpha}(u*v)=(D^{\alpha}u)*v=u*(D^{\alpha}v)$$

формулага кўра

$$f=f*P(D)E=P(D)(E*f),$$

яъни $u=E*f$ кўринишда (4.4.1) тенглама ечимини ҳосил қиламиз.

Агар $P(\xi)$ полином ҳақиқий нолларга эга бўлган ҳолларда (4.4.2) формула маънога эга бўлмаслиги мумкин. Бироқ интеграллаш соҳасини деформациялаб, C^n фазодаги $n-$ўлчовли сирт ҳосил қилиб, бу формула шаклини ўзгартириш мумкин, чунки $\hat{f}-$ бутун аналитик функциядир. Шу билан бирга интеграллаш сирти шундай танланадики, бу сиртда $P(\zeta)\neq 0$ бўлади.

1-теорема. *Ҳар қандай ўзгармас коэффицентли дифференциал оператор учун фундаментал ечим мавжуддир.*

Исбот. Агар $n=1$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\xi\in R$ учун $P(\xi+i\tau)\neq 0$ бўлган $\tau\in R$ ни топиш етарли ва

$$E(\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\frac{\hat{\varphi}(-\xi-i\tau)}{P(\xi+i\tau)}d\xi$$

деб оламиз. Ҳақиқатдан ҳам,

$$(P(D)E)(\varphi)=E(P(-D)\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\frac{P(-D)\varphi(-\xi-i\tau)}{P(\xi+i\tau)}d\xi=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\frac{P(\xi+i\tau)\hat{\varphi}(-\xi-i\tau)}{P(\xi+i\tau)}\,d\xi=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\hat{\varphi}(-\xi-i\tau)d\xi=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\hat{\varphi}(\xi)d\xi=\varphi(0)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Агар $n>1$ бўлса, у ҳолда $\xi_j = \sum \alpha_j^k \eta_k$ буриш алмаштириши ёрдамида P полиномнинг η_1^m ҳади олдидаги коэффиценти нолдан фарқли бўлишлигига эришиш мумкин. Бу эса, шу коэффициент $P_m(\alpha_1^1, \alpha_2^1, ..., \alpha_n^1)$ га тенг. Бу P_m – эса P полиномнинг m-тартибли бир жинсли қисми бўлиб, нолдан фарқлидир.

Шундай қилиб, $D_1^m P = i^{-m} m!$ деб ҳисоблаш мумкин. Агар $\xi' = (\xi_2, \xi_3, ..., \xi_n)$ вектор қийматини тайинласак, у ҳолда юқоридаги сингари шундай бир τ сон топилиб, $|\tau| \le m+1$ ва $|P(\xi_1 + i\tau, \xi')| > 1$ бўлади, чунки $P(\lambda, \xi') = 0$ тенгламанинг λ илдизлари учун $\min_{\xi_1} |\xi_1 + i\tau - \lambda| > 1$ бўлади. Узлуксизликка кўра бу тенгсизлик тайинланган нуқтага яқин бўлган барча ξ' нуқталар учун ўринлидир.

Шундай қилиб, ҳар бир ξ' нуқтага τ қиймат ва ω атроф мос келиб, $\xi' \in \omega$ учун $|P(\xi_1 + i\tau, \xi')| > 1$ тенгсизлик ўринли бўлади.

R^{n-1} фазонинг ω атрофлар қопламасидан локал чекли ω_1, ω_2, ... қопламаларни ажратиб олиш мумкин бўлиб, уларга τ_1, τ_2, ... қийматлар мос келади, бундан ташқари $|\tau_j| \le m+1$ бўлади. Энди ω_2 ни $\omega_2^{'} = \bar{\omega}_2 \setminus \omega_1$, ω_3 ни $\omega_3^{'} = \bar{\omega}_3 \setminus (\omega_1 \cup \omega_2)$ ва ҳоказолар билан алмаштирамиз. Биз R^{n-1} фазонинг ўзаро кесишмайдиган бўлаклари ёйилмасини ҳосил қиламиз. Энди H тўпламни $(\xi_1 + i\tau, \xi')$ нуқталар тўплами сифатида аниқлаймиз, бунда $\xi' \in \omega_j^{'}$ учун $\tau = \tau_j$ деб аниқлаймиз. Бунга *Ларс Хёрмандер зинапояси* деб айтилади. Ҳар бир $\varphi \in D(R^n)$ учун

$$E(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_H \frac{\hat{\varphi}(-\xi_1 - i\tau, \xi')}{P(\xi_1 + i\tau, \xi')} d\xi$$

бўлсин. Бу интеграл мавжуддир, чунки $|P(\xi_1 + i\tau, \xi')| > 1$ ва $\hat{\varphi}(\xi_1 + i\tau, \xi')$ функция $|\xi| \to \infty$ да $\frac{1}{|\xi|}$ нинг ихтиёрий даражасидан ҳам тезроқ нолга $|\tau| \leq m+1$ учун τ бўйича текис интилади. Ҳамда кўриш мумкинки, E эса $D'(R^n)$ фазодан олинган тақсимотдан иборат бўлади. Шу билан бирга

$$(P(D)E)(\varphi) = E(P(-D)\varphi) = (2\pi)^{-n} \int\limits_H \hat{\varphi}\,(-\xi_1 - i\tau,\, \xi')\, d\xi =$$

$$= \sum_j (2\pi)^{-n} \int\limits_{\xi' \in \omega_j} d\xi' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi_1 - i\tau_j,\, \xi')d\xi_1$$

тенглик ўринли бўлади. Коши теоремасига кўра, ички интеграл $\operatorname{Im}\zeta_1 = \tau_j$ тўғри чизиқ бўйича олинган бўлиб, бу тўғри чизиқ ҳақиқий ўқга параллел ва шу ўқ бўйича олинган интегралга тенг. Шунинг учун

$$(P(D)E)(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} \hat{\varphi}(\xi)d\xi = \varphi(0),$$

яъни $P(D)E(x) = \delta(x)$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

Энди муҳим бўлган эллиптик операторлар синфини қараймиз.

2–таъриф. Агар $m-$тартибли $P(D)$ операторнинг $P_m(\xi)$ бош характеристик формаси $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ учун нолга айланмаса, яъни ихтиёрий $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ учун $P_m(\xi) \neq 0$ бўлса, у ҳолда берилган $P(D)$ операторга *эллиптик оператор* дейилади.

Бу $P_m(\xi)$ полином $m-$тартибли бир жинсли полиномдир. Шунинг учун $|\xi| = 1$ сферада унинг ноллари мавжуд эмаслигидан

$$|P_m(\xi)| \geq c_0 |\xi|^m \tag{4.4.3}$$

тенгсизлик келиб чиқади, бунда $c_0 = \inf\limits_{|\xi|=1} |P_m(\xi)| > 0$ бўлади.

Фундаментал ечимни қуришнинг юқорида қўлланилган усули ягона имконият эмас. Кўпгина ҳолларда фақат $n-1$ ўзгарувчи бўйича Фурье алмаштиришини қўллаб, ҳосил бўлган оддий дифференциал тенгламани ечиш ва кейин эса Фурье алмаштиришининг тескариланиш формуласидан фойдаланиш қулай бўлади.

2-теорема. *$P(D)$ – ўзгармас коэффициентли m–тартибли эллиптик дифференциал оператор бўлиб, $\Omega \subset R^n$ соҳада*

$P(D)u = f$, $u \in D'(\Omega)$ ва $f \in H^s(\Omega)$ бўлсин. У ҳолда $u \in H_{loc}^{s+m}(\Omega)$ бўлади.

Бундан ташқари, агар $h \in C_0^\infty(\Omega)$ ва $x \in \omega$ учун $h(x) = 1$ ва $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ бўлса, у ҳолда шундай бир $C = C(s)$ ўзгармас мавжуд бўлиб, барча $u \in H_{loc}^{s+m}(\Omega)$ учун

$$\| \varphi u \|_{s+m} \le C \left(\| Pu \|_s + \| hu \|_{s+m-1} \right)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $x_0 \in \Omega$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ва x_0 нуқтанинг ω атрофида $\varphi(x) = 1$ бўлсин. У ҳолда $\varphi u \in E'(\Omega)$ бўлиб, $E'(R^n) \subset \bigcup\limits_s H^s(R^n)$ муносабатга кўра $t \in R$ сон мавжуд бўлиб, унинг учун $\varphi u \in H^t(\Omega)$ бўлади. Агар $t < s+m$ бўлса, у ҳолда $u_1 = \varphi_1 u$ функция қаноатлантирадиган тенгламани қараш мумкин, бунда $\varphi_1 \in C_0^\infty(\omega)$ ва x_0 нуқтанинг ω_1 атрофида $\varphi_1 = 1$ дир.

$$P_m(D)u_1 = f_1 \tag{4.4.4}$$

тенгликка эга бўламиз, бунда $f_1 \in H^{t_1}(\Omega)$ ва $t_1 = \min(t - m + 1,\ s)$. Шунингдек $P - P_m$ оператор $m-1$ тартибли ва $(P - P_m)(\varphi_1 u) \in H^{t-m+1}(\Omega)$, ҳамда $Qu = P\varphi_1 u - \varphi_1 Pu$ оператор ҳам $m-1$ тартибли оператор ва унинг коэффиценти ω соҳа ташқарисида нолга тенгдир, шу сабабли $Qu \in H^{t-m+1}(\Omega)$ бўлади. Ниҳоят, $\varphi_1 Pu = \varphi_1 f \in H^s(\Omega)$, чунки $f \in H^s(\Omega)$.

(4.4.4) тенгликнинг ҳар иккала қисмига Фурье алмаштиришини қўллашдан кейин, $P_m(\xi)\ \hat{u}_1(\xi) = \hat{f}_1(\xi)$ тенглик ҳосил бўлиб, шунга кўра $\left| \hat{f}_1(\xi) \right| \ge c_0 |\xi|^m \left| \hat{u}_1(\xi) \right|$ тенгсизлик ўринли бўлади ва шунинг учун

$$\left(1 + |\xi|^2\right)^m |\hat{u}_1(\xi)|^2 \le C \left(\left| \hat{f}_1(\xi) \right|^2 + |\hat{u}_1(\xi)|^2 \right)$$

тенгсизлик ўринлидир. Бу тенгсизликнинг ҳар иккала томонини $\left(1 + |\xi|^2\right)^{t_1} \left(1 + |\delta\xi|^2\right)^{-1}$ га кўпайтириб $\xi \in R^n$ бўйича интеграллаймиз, бунда $\delta > 0$. Натижада

$$\int\limits_{R^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{t_1+m}\left(1+|\delta\xi|^2\right)^{-1}|\hat{u}_1(\xi)|^2 d\xi \le$$

$$\le C\int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{t_1}\left(1+|\delta\xi|^2\right)^{-1}\left(\left|\hat{f}_1(\xi)\right|^2+|\hat{u}_1(\xi)|^2\right)d\xi$$

ёки

$$\|u_1\|^2_{t_1+m,\,\delta} \le C\left(\|f_1\|^2_{t_1,\delta}+\|u_1\|^2_{t_1,\delta}\right)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликнинг ўнг томони δ бўйича текис чегаралангандир, чунки $u_1 \in H^t(R^n)$ ва $t \ge t_1$ ҳамда $f_1 \in H^{t_1}(R^n)$. Шунга кўра, тенгсизликнинг чап томони ҳам δ бўйича текис чегараланган ва $u_1 \in H^{t_1+m}(\Omega)$ бўлади. Агар $t+1 \ge s+m$ бўлса, у ҳолда $t_1+m=\min(t+1,\, s+m)=s+m$ ва тасдиқ исбот бўлади.

Агар $t+1<s+m$ бўлса, у ҳолда $\varphi_2 \in C_0^\infty(\omega_1)$ функция x_0 нуқтанинг ω_2 атрофида $\varphi_2=1$ бўладиган қилиб киритамиз ва юқоридаги фикрни такрорлаймиз. Натижада, $u_2=\varphi_2 u \in H^{t_2+m}(R^n)$ функцияни ҳосил қиламиз, бунда $t_2=\min(t-m+2,\ s)$ ва агар $t+2 \ge s+m$ бўлса, у ҳолда теореманинг исботи тўгайди. Агар $t+2<s+m$ бўлса, у ҳолда юқоридаги фикрни такрорлаймиз.

Иккинчи хулосани исбот қилиш учун

$$P(\varphi u)=\varphi Pu+\sum_{|\alpha|=1}^{m}\frac{1}{\alpha!}P^{(\alpha)}(D)(hu)D^\alpha\varphi$$

тенгликдан фойдаланамиз. Шунга кўра,

$$\|\varphi u\|_{s+m} \le C\left(\|P(\varphi u)\|_s+\|\varphi u\|_{s+m-1}\right)$$

тенгсизликдан

$$\|\varphi u\|_{s+m} \le C_1\left(\|Pu\|_s+\|hu\|_{s+m-1}\right)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

1-натижа. *Агар $u \in D'(\Omega)$ ва $Pu \in C^\infty(\Omega)$ бўлса, у ҳолда $u \in C^\infty(\Omega)$ бўлади.*

Агар $P(D)$ оператор $m-$ тартибли эллиптик оператор ва P_m- ҳақиқий қийматли мусбат функция бўлса, у ҳолда *Гординг тенгсизлиги* деб аталувчи

$$\operatorname{Re}\int\limits_{R^n} Pu\cdot\bar{u}\,dx \ge c_0\,\|u\|^2_{\frac{m}{2}} - C_1\|u\|^2_{\frac{m-1}{2}} \qquad (4.4.5)$$

тенгсизлик барча $u\in C_0^\infty(\Omega)$ функциялар учун ўринли бўлади. Бунда c_0 ўзгармас (4.4.3) тенгсизликдаги ўзгармас, C_1 – эса, P операторнинг кичик коэффицентларига боғлиқ миқдордир.

(4.4.5) тенгсизликни исбот қилиш учун u функцияни $\hat{u}$ Фурье образига ўтиш етарлидир. Шунга кўра, бу

$$\operatorname{Re}\int\limits_{R^n} P(\xi)\,|\,\hat{u}(\xi)\,|^2\,d\xi \ge$$

$$\ge c_0\int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}\cdot\,|\,\hat{u}(\xi)\,|^2\,d\xi - C_1\int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\,|\,\hat{u}(\xi)\,|^2\,d\xi$$

тенгсизлик (4.4.3) тенгсизликдан келиб чиқадиган

$$\operatorname{Re}P(\xi)\ge c_0\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} - C_1\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m-1}{2}}$$

тенгсизликка эквивалент бўлади.

Ихтиёрий s сони ва $f\in H^s(\Omega)$ учун чегараланган $\Omega\subset R^n$ соҳада

$$P(D)u = f \qquad (4.4.6)$$

эллиптик тенгламани қараймиз.

Агар $\varphi\in E'(\Omega)$ тақсимот ${}^tP(D)\varphi=0$ тенглама ечими ва $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega$ бўлса, у ҳолда 2–теоремага кўра $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ бўлади, чунки ${}^tP(D)=\overline{P(D)}$ оператор $P(D)$ оператордан коэффицентларини қўшма комплекс сонлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлади ва шунинг учун у ҳам эллиптикдир. ${}^tP(D)\varphi=0$ тенглама ечимларининг чизиқли фазосидан $C_0^\infty(\Omega)$ фазога қарашли ечимларининг чизиқли фазосини $N(\Omega)$ орқали белгилаймиз.

$${}^tP(D)\varphi=\sum_{|\alpha|=1}^{m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha[a_\alpha\cdot\varphi(x)]$$

оператор учун (4.4.5) Гординг тенгсизлигидан ва $\varphi\in N(\Omega)$ функция учун $c_0\|\varphi\|^2_{\frac{m}{2}}\le C_1\|\varphi\|^2_{\frac{m-1}{2}}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, $\|\varphi\|_{\frac{m-1}{2}} \le 1$ шарда ётган $N(\Omega)$ дан олинган функциялар тўплами қўйидаги теоремага кўра компактдир, яъни тўла узлуксиздир.

Теорема. $\Omega \subset R^n$ *чегараланган тўплам ва* s, t *– ҳақиқий сонлар бўлиб* $s < t$ *бўлсин. У ҳолда* $i : \overset{0}{H}{}^t(\Omega) \to \overset{0}{H}{}^s(\Omega)$ *жойлаштириш оператори тўла узлуксиздир.*

А.Н. Колмогоров теоремасига кўра, бундан $N(\Omega)$ фазонинг чекли ўлчамга эга эканлиги келиб чиқади.

Агар (4.4.6) тенгламанинг ҳар иккала томонини $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ функцияга кўпайтириб ва Ω бўйича интегралласак

$$\int_\Omega u \cdot {}^tP(D)\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx \qquad (4.4.7)$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва бунга кўра (4.4.6) тенглама ечилиши учун барча $\varphi \in N(\Omega)$ учун

$$\int_\Omega f\varphi dx = 0 \qquad (4.4.8)$$

тенгликнинг бажарилиши зарурдир.

Энди бу шартнинг (4.4.6) тенглама ечилиши учун етарли эканлигини ҳам кўрсатамиз.

3-теорема. *Агар* $f \in H^s(\Omega)$ *функция (4.4.8) шартни қаноатлантирса, у ҳолда (4.4.6) тенгламанинг* $H^{s+m}(\Omega)$ *синфдан олинган* u *ечими мавжуд бўлади ва* f *– функцияга боғлиқ бўлмаган қандайдир* C *ўзгармас сон топилиб*

$$\|u\|_{s+m} \le C\|f\|_s$$

тенгсизлик ўринлидир.

Исботи. Исбот қилиш учун $N(\Omega)$ фазога ортогонал бўлган барча $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ функциялар учун

$$\|\varphi\|_{-s} \le C \cdot \|{}^tP(D)\varphi\|_{-s-m} \qquad (4.4.9)$$

тенгсизлик бажарилишини кўрсатиш етарлидир. Ушбу тенгсизликка кўра, $N(\Omega)$ фазога ортогонал бўлган $\varphi \in H^{-s}(\Omega)$ учун узлуксизлик бўйича Хан-Банах теоремасига кўра $u \in H^s(\Omega)$ элемент мавжуд бўлиб, шундай φ учун (4.4.7) тенгсизликни қаноатлантиради. Шунга кўра бу тенглик $\varphi \in N(\Omega)$ учун ҳам ўринли бўлгани учун барча $\varphi \in H^{-s}(\Omega)$ учун ўринли, яъни u функция (4.4.6) тенгламанинг $H^{s}(\Omega)$ синфдаги ечими бўлади ва $\|u\|_{s+m} \leq C \cdot \| f \|_{s}$ тенгсизлик ўринлидир.

(4.4.9) тенгсизликни исботлаш учун

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{-s} \leq C_1 \left|\bar{P}(\xi)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{-s-m} + C_2 \left(1+|\xi|^2\right)^{-s-1}$$

тенгсизликдан фойдаланамиз. Бу тенгсизликнинг ҳар иккала томонини $|\hat{\varphi}(\xi)|^2$ га кўпайтириб ва $\xi \in R^n$ бўйича интегралласак, у ҳолда

$$\|\varphi\|_{-s}^2 \leq C_1 \left\| {}^tP(D)\varphi \right\|_{-s-m}^2 + C_2 \|\varphi\|_{-s-1}^2 \qquad (4.4.10)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади.

Энди $N(\Omega)$ фазога ортогонал бўлган φ учун охирги қўшилувчини ташлаб юбориш мумкинлигини кўрсатамиз, натижада (4.4.9) тенгсизлик ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, тескарисини фараз қилсак, бу нотўғри деб олсак, $C_0^\infty(\Omega)$ фазодан олинган $\{\varphi_k\}$ кетма-кетлик мавжуд бўлиб, $\|\varphi_k\|_{-s} = 1$, $\left\| {}^tP\varphi_k \right\|_{-s-m} \leq \dfrac{1}{k}$ ва $\varphi_k \perp N(\Omega)$ бўлади.

Юқорида келтирилган теоремага кўра, бу кетма-кетлик $H^{-s-1}(\Omega)$ фазода компакт бўлади ва φ функцияга яқинлашувчи φ_{k_j} кетма–кетликни ажратиб олиш мумкин. (4.4.10) тенгсизликдан $\varphi_k - \varphi_l$ учун ҳам бу тенгсизлик ўринли бўлгани ҳолда φ_{k_j} қисмий кетма-кетлик $H^{-s}(\Omega)$ фазода ҳам яқинлашувчи. Шунинг учун ${}^tP(D)\varphi = 0$ ва $\|\varphi\|_{-1} = 1$. Бироқ бу φ функциянинг $N(\Omega)$ фазога ортогонал эканлигига зиддир. Бу қарама-қаршилик (4.4.9) тенгсизликни исбот қилади.

Л. Хёрмандер томонидан биринчи марта чизиқли дифференциал тенгламаларнинг муҳим синфи – бош типдаги тенгламалар киритилган.

3–таъриф. Агар ихтиёрий $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ учун $|\, grad\ P_m(\xi) \,| \neq 0$ бўлса, у ҳолда $P(D)$ оператор *бош типдаги оператор* дейилади.

Маълумки, $P_m(\xi)$ бир жинсли полином бўлгани учун $\sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial P_m(\xi)}{\partial \xi_j} = m P_m(\xi)$ Эйлер айнияти ўринлидир. Шундай қилиб, агар $grad\ P_m(\xi) = 0$ бўлса, у ҳолда $P_m(\xi) = 0$ бўлади. Бу эса хусусан, эллиптик операторлар бош типдаги оператор эканлигини кўрсатади. Бошқа бир мисол сифатида $n \geq 2$ учун D_1 ёки $D_1 + iD_2$ эллиптик бўлмаган операторларни келтириш мумкин.

Биз бош типдаги операторлар характеристик нуқталарга эга бўлиши мумкин эканлигини кўрамиз, яъни $P_m(\xi)$ полином ҳақиқий нолларга эга бўлиши мумкин. Лекин бу ноллар фақат оддий ноллардир.

Ўзгармас коэффицентли бош типдаги тенгламанинг локал ечилувчанлиги юқоридаги сингари Хан-Банах теоремаси ва қуйидаги теорема ёрдамида исбот қилинади.

4-теорема. *Агар $P(D)$ оператор бош типдаги оператор бўлса, у ҳолда координата бошининг шундай ω кичик атрофи ва C ўзгармас мавжуд бўлиб ҳар бир $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ учун*

$$\|\varphi\|_{m-1} \leq C\varepsilon\ \|P(D)\varphi\|_0 \qquad (4.4.11)$$

баҳолаш ўринли бўлади, бунда $\varepsilon = diam\ \omega$ ва C ўзгармас эса ε ва φ функцияга боғлиқ эмас.

Исбот. $\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial P_m(\xi)}{\partial \xi_k} \right|^2 \geq c_0 > 0$ тенгсизлик $|\xi| = 1$ учун бажарилишини кўриш мумкин. Шунинг учун

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial P_m(\xi)}{\partial \xi_k} \right|^2 \geq c_0 \, |\xi|^{2(m-1)}$$

бўлиб $m \geq 2$ учун

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi_k} \right|^2 \geq \frac{c_0}{2} |\xi|^{2(m-1)} - C_1 |\xi|^{2(m-2)} \qquad (4.4.12)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар $m=1$ бўлса, у ҳолда кейинги тенгсизлик $C_1=0$ учун ўринли бўлади. Бундан ташқари, ўзгармас коэффицентли $Q(D)$ дифференциал оператор учун

$$Q(D)x^k - x^kQ(D) = iQ^{(k)}(D)$$

тенглик ўринли бўлади.

$\operatorname{Im} 2x^kP(D)\varphi\cdot\overline{P^{(k)}(D)\varphi}$ функциядан R^n бўйича олинган I_k интегрални қараймиз. Шунга кўра

$$I_k = -i\int\limits_{R^n} x^k\left[P(D)\varphi\cdot\overline{P^{(k)}(D)\varphi} - \overline{P(D)\varphi}\cdot P^{(k)}(D)\varphi\right]dx =$$

$$= -i\int\limits_{R^n}\left[\overline{P^{(k)}(D)x^kP(\bar{D})} - \overline{P(\bar{D})}\; x^k\cdot P^{(k)}(D)\right]\varphi\cdot\bar{\varphi}dx =$$

$$= \int\limits_{R^n}[\overline{P^{(k)}(\bar{D})}P(D) - P^{(k)}(D)\cdot\overline{P^{(k)}(\bar{D})}]\varphi\cdot\bar{\varphi}\,dx + O\left(\|P(D)\varphi\|\cdot\|x^k\varphi\|_{m-1}\right)$$

бўлади. Бундан эса

$$\int\limits_{R^n}\left|P^{(k)}(D)\varphi\right|^2dx = \int\limits_{R^n}P(D)\varphi\cdot\overline{P^{(k)}(D)\varphi}\,dx - I_k + O\left(\|P(D)\varphi\|\cdot\|x^k\varphi\|_{m-1}\right) \tag{4.4.13}$$

ҳосил бўлади.

Ихтиёрий $m\geq 2$ учун (4.4.12) тенгсизликдан

$$\|\varphi\|_{m-1}^2 = \int\limits_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{m-1}\cdot|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi \leq$$

$$\leq C_2\int\limits_{R^n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial P}{\partial\xi_k}\right|^2+1\right)\cdot|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi =$$

$$= C_2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{R^n}\left|P^{(k)}(D)\varphi\right|^2dx + C_2\|\varphi\|_0^2$$

эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун

$$\|\varphi\|_{m-1}^2 \leq C_2\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{R^n}P(D)\varphi\cdot\overline{P^{(k)}(D)\varphi}\,dx\right| +\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}|I_k| + \|\varphi\|_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\|P(D)\varphi\|\cdot\|x^k\varphi\|_{m-1}\right) \leq$$

$$\leq C_3\left(\|P(D)\varphi\|\cdot\|\varphi\|_{m-2}+\varepsilon\|P(D)\varphi\|\cdot\|\varphi\|_{m-1}+\|\varphi\|_{m-2}^2\right)$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда $\varepsilon=\max\limits_{x\in\operatorname{supp}\varphi}\left|x^k\right|$. Фридрихс тенгсизлигига кўра,

$$\|\varphi\|_{m-2}\leq C_4\cdot\varepsilon\cdot\|\varphi\|_{m-1}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра,

$$\|\varphi\|_{m-1}^2\leq C_5\cdot\varepsilon\cdot\left(\|P(D)\varphi\|\cdot\|\varphi\|_{m-1}+\varepsilon\,\|\varphi\|_{m-1}^2\right)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар $2C_5\,\varepsilon^2<1$ бўлса, у ҳолда бу тенгсизликдан $\|\varphi\|_{m-1}\leq 2C_5\cdot\varepsilon\cdot\|P(D)\varphi\|$ муносабат келиб чиқади, яъни (4.4.11) тенгсизлик ўринлидир.

Агар $m=1$ бўлса, у ҳолда $P^{(k)}(D)=0$ бўлиб, (4.4.13) тенглик

$$-I_k=\int\limits_{R^n}\left|P^{(k)}(D)\varphi\right|^2dx+O\left(\|P(D)\varphi\|\cdot\|x^k\varphi\|\right)$$

шаклга эга бўлади. Шунинг учун

$$\|\varphi\|_0^2\leq C_6\sum_{k=1}^n\int\limits_{R^n}\left|P^{(k)}(D)\varphi\right|^2dx+$$

$$+O\left(\|P(D)\varphi\|\cdot\|x^k\varphi\|\right)\leq C_7\cdot\varepsilon\cdot\|P(D)\varphi\|\cdot\|\varphi\|$$

тенгсизлик ўринли бўлади ва биз яна (4.4.13) тенгликка келамиз.

2-натижа. *Агар $P(D)$ оператор бош типдаги оператор бўлса, у ҳолда $H^{1-m}(R^n)$ фазодан олинган ҳар қандай f функция учун $L_2(R^n)$ фазодан олинган шундай бир u функция мавжуд бўлиб, $P(D)u=f$ тенглама ω да ўринли бўлади, бунда $\omega-$ координата бошининг етарли кичик атрофидир. Шу билан бирга*

$$\|u\|_0\leq C\cdot\varepsilon\,\|f\|_{1-m},\ \varepsilon=diam\,\omega.$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Эслатма: Тескари тасдиқни ҳам кўрсатиш қийин эмас, яъни (4.4.11) тенгсизликдан P оператор бош типдаги оператор эканлиги келиб чиқади.

Энди биз қуйидаги шаклда ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама учун Коши масаласини қўямиз: $\operatorname{supp}u$ ташувчиси $x_1\geq 0$ ярим фазода ётадиган ва $P(D)u=f$ тенгламанинг ечими бўлган u функцияни топиш талаб этилади.

Бир оз умумийроқ бўлган масала, агар φ функция берилганда ва бу дифференциал тенгламанинг $x_1 \to 0$ да $u-\varphi=O(|x_1|^m)$ шартни қаноатлантирувчи u ечимини топиш талаб этилади, бунда $m-$ шу P операторнинг тартибидир. Бу масала қуйидаги масалага келтирилади: агар u ечимини $u+\varphi$ билан алмаштирсак ва $x_1<0$ учун $f=0$ деб олиб $x_1 \geq 0$ учун масалани қараймиз. Бу янги масалани ечиб ва кейин эса шунга ўхшаш бўлган x_1 ўрнига $-x_1$ билан алмаштирилган бу масаланинг ечимини топиш билан умумий масала ечилади.

Коши масаласи ечимининг ягоналиги масаласини қараймиз.

5-теорема. *Агар $m-$ тартибли $P(D)$ операторнинг D_1^m учун коэффициенти нолга тенг бўлса, у ҳолда координата бошининг шундай ω кичик атрофи ва шундай бир $u \in C^m(\omega)$ функция мавжуд бўлиб $P(D)u=0$ ва $x_1>0$ учун $u=0$, ҳамда $0 \in \operatorname{supp} u$ бўлади.*

Исбот. $P=P_m+P_{m-1}+...+P_0$ бўлсин, бунда P_j- полином $j-$тартибли бир жинсли ва $P_m(\xi)\not\equiv 0$. Шу билан бирга ξ вектор учун $P_m(\xi)\neq 0$ ва $e_1=(1,0,...,0)$ бўлсин.

$$P(se_1+t\xi)=0 \tag{4.4.14}$$

тенгламани етарлича катта s учун қараймиз. Бу ерда $t=sz$ ўзгарувчини алмаштириш тенгламани

$$P_m(e_1+z\xi)+\frac{1}{s}P_{m-1}(e_1+z\xi)+...+\frac{1}{s^m}P_0(e_1+z\xi)=0$$

шаклга келтиради. $s=\infty$ учун бу тенглама $z=0$ илдизга эга бўлади, чунки $P_m(e_1)=0$ бўлади, лекин $P_m(e_1+z\xi)\not\equiv 0$. Бундай тенглама $z=z(s)$ ечимга эга бўлиб бу ечим қандайдир p бутун сон учун $\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{p}}$ ўзгарувчининг аналитик функциясидан иборат бўлади. Бу эса (4.4.14) тенгламанинг ечими $t(s)=s\sum_{j=1}^{\infty} C_j\left(s^{-\frac{1}{p}}\right)^j$

шаклида бўлиб $\left|s^{\frac{1}{p}}\right| > M$ учун аналитик функция бўлади, бунда M –ўзгармас сондир. Шундай қилиб, шундай бир C ўзгармас мавжуд бўлиб $|s| > (2M)^p$ учун $|t(s)| \le C\,|s|^{1-\frac{1}{p}}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Энди $\rho-$ сонни $1-\dfrac{1}{p} < \rho < 1$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб оламиз ва

$$u(x) = \int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty} e^{isx_1+it(s)(x,\xi)-(\frac{s}{i})^{\rho}}\,ds \qquad (4.4.15)$$

бўлсин, бунда $\tau > (2M)^p$. Биз $(\dfrac{s}{i})^{\rho}$ функцияни мусбат мавҳум ярим ўқда ҳақиқий мусбат қиймат қабул қиладиган қилиб аниқлаймиз ва бу функциянинг $\operatorname{Im} s > 0$ учун қандайдир варағини тайинлаймиз.

Бу (4.4.15) интеграл $x_1 \ge 0$ учун яқинлашувчи ва τ ўзгарувчига боғлиқ эмас, чунки

$$\operatorname{Re}\left(isx_1 + it(s)(x,\xi) - (\frac{s}{i})^{\rho} \right) \le$$

$$\le -\tau x_1 + C\,|x|\cdot|\xi|\cdot|s|^{1-\frac{1}{p}} - |s|^{\rho}\cos\frac{\pi\rho}{2} \le -\tau x_1 - c|s|^{\rho},$$

бунда $c = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi\rho}{2}$, $|x| \le C_1$ ва $|s|$ етарлича катта миқдордир. Шундай қилиб, агар x компакт тўпламга тегишли бўлса, у ҳолда бу (4.4.15) интеграл x бўйича ихтиёрий сонда дифференциалланганда ҳам абсолют яқинлашувчи ва шунга кўра $u \in C^{\infty}$ бўлади, ҳамда (4.4.14) тенгламага кўра $P(D)u = 0$ ҳосил бўлади.

Биз барча $\tau \ge \tau_0$ учун $|u(x)| \le e^{-\tau x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c|\sigma|^{\rho}} d\sigma$ эканлигини кўрсатдик. Энди $\tau \to +\infty$ да лимитга ўтсак $x_1 > 0$ учун $u(x) = 0$ эканлигини ҳосил қиламиз.

$0 \in \operatorname{supp} u$ эканлигини кўрсатиш учун $(x, \xi) = 0$ бўлганда $u(x)$ функция фақат x_1 ўзгарувчигагина боғлиқ бўлади. Уни биз $v(x_1)$ деб белгиласак, у ҳолда

$$v(x_1) = \int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty} e^{isx_1 - (\frac{s}{i})^\rho} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma+i\tau)x_1 - (\tau - i\sigma)^\rho} d\sigma$$

тенглик ўринли бўлиб, бундан

$$v(x_1)e^{\tau x_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_1\sigma - (\tau - i\sigma)^\rho} d\sigma$$

эканлиги келиб чиқади. Парсеваль тенглигига асосан

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| v(x_1)e^{\tau x_1} \right|^2 dx_1 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-(\tau - i\sigma)^\rho} \right|^2 d\sigma$$

тенглик ўринли бўлади. Юқорида биз $x_1 > 0$ учун $v(x_1) = 0$ эканлигини ҳосил қилган эдик. Бундан ташқари, $\rho < 1$ учун

$$\left| (\tau - i\sigma)^\rho \right| \le (\tau + |\sigma|)^\rho \le \tau^\rho + |\sigma|^\rho$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра,

$$\int_{-\infty}^{0} \left| v(x_1)e^{\tau x_1} \right|^2 dx_1 \ge e^{-2\tau^\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma^\rho} d\sigma \qquad (4.4.16)$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Агар қандайдир $(-\varepsilon, 0)$, бунда $\varepsilon > 0$ бўлган интервалда v функция нолга тенг бўлса, у ҳолда $\tau \to +\infty$ да тенгсизликнинг чап томони $O(e^{-2\varepsilon\tau})$ тартибдаги миқдор бўлиб, бу эса (4.4.16) тенгсизликка қарама–қаршидир. Теорема исбот бўлди.

3-натижа. *Агар $P(D)u = 0$ тенгламанинг координата бошининг қандайдир атрофида аниқланган ҳар қандай ечими аналитик функция бўлса, у ҳолда $P(D)$ оператор эллиптик оператор бўлади.*

Исбот. Агар $P(D)$ оператор эллиптик оператор бўлмаса, у ҳолда шундай бир $\xi \ne 0$ вектор мавжуд бўлиб, бунда $P_m(\xi) = 0$ бўлади, бундан ташқари $P_m \not\equiv 0$. Агар ξ вектор йўналишини x_1 ўқ сифатида қабул қилсак, у ҳолда $P(D)u = 0$ тенгламанинг 5–теорема шартларини қаноатлантирадиган ечимини қуриш мумкин бўлади ва бу ечим аналитик функция эмас. Бу қарама–қаршилик тасдиқни исботлайди.

И.Г. Петровский томонидан 3–натижага тескари бўлган тасдиқ ҳам коэффициентлари аналитик бўлган $P(x, D)$ оператор учун ўринли эканлиги исбот қилинган.

6-теорема. *Агар $m-$ тартибли $P(D)$ оператор эллиптик оператор бўлса, у ҳолда $P(D)u=0$ тенгламанинг Ω соҳадаги ҳар бир и умумлашган ечими шу соҳада аналитик функциядан иборат бўлади.*

Исбот. Юқорида келтирилган 1-натижага асосан $P(D)u=0$ тенгламанинг Ω соҳадаги ҳар қандай $u \in D'(\Omega)$ умумлашган ечими учун $u \in C^{\infty}(\Omega)$ бўлади.

Бу функциянинг Ω соҳадаги ҳар қандай x_0 нуқтанинг кичик атрофида аналитик функция бўлишлигини кўрсатамиз. Маркази шу нуқтада бўлган $2r$ радиусли K_{2r} шар шу Ω соҳада жойлашган бўлсин. $h \in C_0^{\infty}(K_{2r})$ ва бундан ташқари $|x-x_0| \le r_1$ учун $h(x)=1$ ва қандайдир $\varepsilon > 0$ сон учун $|x-x_0| > r_1+\varepsilon$ да $h(x)=0$, ҳамда барча $|\alpha| \le m$ учун $|D^{\alpha}h| \le C\varepsilon^{-|\alpha|}$ тенгсизлик ўринли бўлади, бунда $r \le r_1 \le 2r-\varepsilon$.

$f = P(D)(hu)$ функциянинг ташувчиси $\{x : r_1 \le |x-x_0| \le r_1+\varepsilon\}$ қатламда жойлашган, бундан ташқари $f = \sum_{|\alpha|=1}^{m} \frac{1}{\alpha!} P^{(\alpha)}(D)u \cdot D^{\alpha}h$ бўлади.

$N-$ натурал сон, $N > m$ ва $N > \frac{n}{2}+1$ бўлсин.

2–теоремага кўра

$$\|hu\|_N \le C\left(\|f\|_{N-m} + \|hu\|_{N-1}\right)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар r етарлича кичик бўлса, у ҳолда

$$2C\|hu\|_{N-1} \le \|hu\|_N$$

ва шунинг учун

$$\|hu\|_N \le 2C\|f\|_{N-m} \le C_1 \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^{-j} \ \|u\|_{N-j,\ r_1+\varepsilon}$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда бу $\|\cdot\|_{s,\,\rho}$ – норма $H^s(K_\rho)$ Соболев фазосининг нормасидир. Маълумки, барча α мультииндекс учун $P(D)(D^\alpha u) = 0$ ва шунинг учун

$$\left\|hD^\alpha u\right\|_N \le C_1 \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^{-j} \left\|D^\alpha u\right\|_{N-j,\ r_1+\varepsilon} \tag{4.4.17}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Шундай бир $A \ge 1$ ўзгармас сон мавжуд бўлиб, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ва барча $j \ge 0$ бутун сонлар учун

$$\sum_{|\alpha|=j} \left\|D^\alpha u\right\|_{N,\ r_1} \le \varepsilon^{-j} A^{j+1} \tag{4.4.18}$$

тенгсизлик ўринли эканлигини кўрсатамиз, бунда $j\varepsilon \le 2r - r_1$ бўлиб A ўзгармас ε ва j сонларга боғлиқ эмас.

Агар A ўзгармасни етарлича катта танлаш ҳисобига бу баҳолаш $j = 0$ учун албатта тўғри бўлади. Фараз қилайлик бу баҳолаш $j < k$ учун тўғри бўлсин, бунда $k \ge 1$. Биз унинг $j = k$ учун тўғри бўлишлигини исбот қиламиз. $k\varepsilon \le 2r - r_1$ бўлсин. У ҳолда (4.4.17) тенгсизликка кўра

$$\sum_{|\alpha|=k} \left\| D^\alpha u \right\|_{N,\ r_1} \le \sum_{|\alpha|=k} \left\| hD^\alpha u \right\|_N \le C_1 \sum_{|\alpha|=k} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^{-j} \left\| D^\alpha u \right\|_{N-j,\ r_1+\varepsilon}$$

тенгсизликка эга бўламиз. (4.4.18) тенгсизликдан $j < k$ учун фойдаланиб

$$\sum_{|\alpha|=k} \left\| D^\alpha u \right\|_{N,\ r_1} \le C_1 \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^{-j} \sum_{|\beta|=k-j} \left\| D^\beta u \right\|_{N,\ r_1+\varepsilon} \le$$

$$\le C_1 \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^{-j} \varepsilon^{-(k-j)} A^{k-j+1} = C_1 \varepsilon^{-k} \sum_{j=1}^{m} A^{k-j+1}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Агар $A > C_1 + 1$ бўлса, у ҳолда охирги йиғинди $\varepsilon^{-k} A^{k+1}$ миқдордан ошмайди. Шундай қилиб, (4.4.18) тенгсизлик исбот қилинди.

Агар $r_1 = r$ ва $\varepsilon = \dfrac{r}{j}$ деб олинса, у ҳолда (4.4.18) тенгсизликдан барча j учун

$$\sum_{|\alpha|=j} \left\|D^{\alpha}u\right\|_{N,\, r} \leq j^{j}r^{-j}A^{j+1}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. 5–теоремага кўра

$$\max_{|x-x_0|\leq\frac{r}{2}} \left|D^{\alpha}\, u(x)\right| \leq C \left\| D^{\alpha}\, u \right\|_{N,\, r}$$

баҳолаш ўринли бўлиб, бундан эса

$$\sum_{|\alpha|=j} \max_{|x-x_0|\leq\frac{r}{2}} \left|D^{\alpha}\, u(x)\right| \leq C\, j^{j}r^{-j}A^{j+1}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шунинг учун $K_{\frac{r}{2}}$ шарда $u-$ аналитик функция бўлади.

Эслатма. Агар $P(x,D)-$эллиптик дифференциал оператор аналитик коэффициентли ва $u \in D'(\Omega)$ учун $\omega \subset \Omega$ қисм соҳада $P(x,D)u(x)$ функция аналитик бўлса, у ҳолда $\omega \subset \Omega$ қисм соҳада $u(x)$ функция аналитик бўлади. Бу тасдиқ ҳам 6–теорема исбот қилинганидек усул билан исбот қилинади. Бу усул Ч. Морри ва Л. Ниренберглар томонидан яратилган.[1]

И.Г. Петровский[2] натижалари $P(D)u = 0$ кўринишдаги тенгламалар синфи учун барча ечимларнинг аналитик бўлишлигини тўла тавсифлаб беради ва бу Л. Хёрмандер ишларида янада ривожлантирилиб ечимга эга бўлмаган бундай шаклдаги тенгламалар синфи чексиз дифференциалланувчи эмаслиги тавсифланди.

4–таъриф. Агар ихтиёрий $\omega \subset \Omega$ қисм соҳада $P(D)u = 0$ тенгламанинг ҳар бир $u(x)$ умумлашган ечими шу $\omega \subset \Omega$ қисм соҳада чексиз дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда *$P(D)$ оператор Ω соҳада гипоэллиптик оператор* деб айтилади.

7-теорема. *Берилган $P(D)$ оператор гипоэллиптик оператор бўлишлиги учун қуйидаги шартлардан бирининг бажарилиши зарур ва етарлидир:*

---

[1] Ч. Морри ва Л. Ниренберг(Morrey C., Nirenberg L., On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial diff. equations.–Comm.Pure Appled Math.,1957, 10, 271–290) бетларидан ўқиш мумкин.

[2] И.Г. Петровский., Sur I’analyticite` des solutions des syste`mes d’e`quations differentielles. – Матем. сб., 1939, 5 (47) , 3–70 бетларидан ўқиш мумкин.

а) $d(\xi)$ сон $\xi \in R^n$ нуқтадан $\left\{\zeta : \zeta \in C^n, P(\zeta) = 0\right\}$ сиртгача бўлган масофа бўлсин. У ҳолда $\xi \to \infty$ да $d(\xi) \to \infty$ бўлади.

б) Шундай бир C ва a мусбат сонлар мавжуд бўлиб, бунда $d(\xi) \geq C|\xi|^a$ тенгсизлик ўринли бўлади.

в) Барча $\alpha \neq 0$ учун $\lim\limits_{\xi \to \infty} \dfrac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} = 0$ бўлади.

г) Агар шундай бир C ва a мусбат сонлар мавжуд бўлиб, бунда $\xi \in R^n$ ва етарлича катта ξ учун $\left|\dfrac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right| \leq C|\xi|^{-|\alpha|a}$ тенгсизлик ўринли бўлади. (Бу ерда $P^{(\alpha)}(\xi) = \partial_\xi^\alpha P(\xi)$ ҳосила тушунилади).

Бу ва кейинги теорема Л. Хёрмандер[1] томонидан исбот қилинган.

4–таъриф фақат бир жинсли тенгламаларга таъллуқли бўлсада, ҳақиқатда 7–теорема шартларидан агар $\omega \subset \Omega$ қисм соҳада $f-$ силлиқ функция бўлса, у ҳолда $P(D)u = f$ тенгламанинг $D'(\Omega)$ синфдан олинган ҳар қандай ечими ҳам шу $\omega \subset \Omega$ қисм соҳада силлиқ функция бўлишлиги келиб чиқади.

8-теорема. *Агар $P(D)$ оператор гипоэллиптик оператор ва $P(D)u \in C^\infty(\omega)$, бунда ω –соҳа Ω соҳадаги қисм соҳа, ҳамда $u \in D'(\Omega)$ бўлса, у ҳолда $u \in C^\infty(\omega)$ бўлади.*

Қуйидаги теорема ўринлидир.

9-теорема. *$n = 1$ ва $P(x,D) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j(x)D^j$, $a_m(x) \equiv 1$, $a_j(x) \in C^\infty(R)$ бўлсин. Ҳамда $u(x)$ функция*

$$P(x,D)u(x) = 0,\ \ x \in R,\ \ u(0) = 0,\ \ldots,\ u^{(m-2)}(0) = 0,\ u^{(m-1)}(0) = 1$$

тенгликларни қаноатлантирсин. У ҳолда $E(x) = \theta(x)u(x)$ функция, бунда $x > 0$ учун $\theta(x) = 1$ ва $x \leq 0$ учун $\theta(x) = 0$ Хевисайд

---

[1] Л. Хёрмандер (Hormander L., Linear partial differential operators.–Berlin–Heidelberg – N. Y., Springer, 1963.)., Русча таржимаси: “Линейные дифференциальные операторы с частными производными” М.: Мир, 1965., китобида келтирилган.

функцияси бўлган ҳолда $P(x,D)E(x)=\delta(x)$ *тенгламани қаноатлантиради.*

Исбот. Лейбниц формуласига кўра $E'(x)=\theta'(x)u(x)+\theta(x)u'(x)$ формулани ёзамиз. Лекин $\theta'(x)=\delta(x)$ ва $u(0)=0$ бўлгани учун $\theta'(x)u(x)=u(x)\delta(x)=u(0)\delta(x)=0$ ва шунинг учун $E'(x)=\theta(x)u'(x)$ тенглик ўринли бўлади. Худди шунга ўхшаш $j=2,...,m-1$ учун $E^{(j)}(x)=\theta(x)u^{(j)}(x)$ тенглик ўринли бўлади. Маълумки, $u^{(m-1)}(0)=1$ бўлгани учун $E^{(m)}(x)=\theta(x)u^{(m)}(x)+\delta(x)$ тенгликка эга бўламиз. Шундай қилиб $P(x,D)E(x)=\theta(x)P(x,D)u(x)+\delta(x)=\delta(x)$ тенглик ўринли бўлади. Теорема исбот бўлди.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

31.1. $E(x)=\theta(x)e^{\pm ax}$ функция $L(D)=\frac{d}{dx}\mp a$ операторнинг фундаментал ечими эканлигини исботланг.

31.2. $E(x)=\theta(x)\frac{\sin ax}{a}$ функция $L(D)=\frac{d^2}{dx^2}+a^2$ операторнинг фундаментал ечими эканлигини исботланг.

31.3. $E(x)=\theta(x)\frac{shax}{a}$ функция $L(D)=\frac{d^2}{dx^2}-a^2$ операторнинг фундаментал ечими эканлигини исботланг.

31.4. $m=2,3,...$ учун $E(x)=\theta(x)e^{\pm ax}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$ функция $L(D)=\left(\frac{d}{dx}\mp a\right)^m$ операторнинг фундаментал ечими эканлигини исботланг.

$D'_+(a)$ орқали $t<0$ учун нолга айланувчи ва барча $\sigma>a$ учун $f(t)e^{-\sigma t}\in J'(R^1)$ бўлган $f(t)\in D'(R^1)$ умумлашган функциялар тўпламини белгилаймиз.

31.5. $L(D)=\frac{d^2}{dx^2}+4\frac{d}{dx}$ операторнинг D'_+ синфдаги ягона фундаментал ечимини топинг.

31.6. $L(D)=\frac{d^2}{dx^2}-2\frac{d}{dx}+1$ операторнинг D'_+ синфдаги ягона фундаментал ечимини топинг.

31.7. $L(D)=\frac{d^2}{dx^2}+3\frac{d}{dx}+2$ операторнинг D'_+ синфдаги ягона фундаментал ечимини топинг.

31.8. $L(D)=\frac{d^2}{dx^2}-4\frac{d}{dx}+5$ операторнинг D'_+ синфдаги ягона фундаментал ечимини топинг.

31.9. $L(D)=\frac{d^3}{dx^3}-a^3$ операторнинг D'_+ синфдаги ягона фундаментал ечимини топинг.

31.10. $L(D)=\frac{d^3}{dx^3}-3\frac{d^2}{dx^2}+2$ операторнинг D'_+ синфдаги ягона фундаментал ечимини топинг.

31.11. $L(D)=\frac{d^4}{dx^4}-a^4$ операторнинг D'_+ синфдаги ягона фундаментал ечимини топинг.

31.12. $L(D)=\frac{d^4}{dx^4}-2\frac{d^2}{dx^2}+1$ операторнинг D'_+ синфдаги ягона фундаментал ечимини топинг.

31.13. $E(x,y)=\frac{1}{\pi z}=\frac{1}{\pi(x+iy)}$ функция $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ Коши–Риман операторнинг фундаментал ечими эканлигини исботланг.

31.14. $E(x,y)=\frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{ct-\frac{(x-bt)^2}{4a^2t}}$ функция $a,b,c-$ ўзгармаслар бўлганда $\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-b\frac{\partial}{\partial x}-c$ операторнинг фундаментал ечими эканлигини исботланг.

Мундарижа

Қосимов Шокирбой Ғоппорович,
Алиқулов Толиб Норташивич,
Отаев Шоназар Қодирович,
Хаитбоев Ғайрат Сабурбоевич,
Бабаев Махкамбек Мадаминович

МАТЕМАТИК ФИЗИКАНИНГ ЗАМОНАВИЙ УСУЛЛАРИ,

2–ТОМ

Ўқув қўлланма

Муҳаррир З. Аҳмеджанова

Босишга рухсат этилди 20.12.2016 й. Бичими 60x84 1/16.
Офсет босма усулида босилди. Нашр ҳисоб тобоғи 24.
Босма тобоғи 24,75. Адади 150 нусха.   194 рақамли буюртма.
Баҳоси шартнома асосида.
“Университет” нашриёти. Тошкент-100174. Талабалар шаҳарчаси.
М. Улуғбек номидаги ЎзМУнинг маъмурий биноси.
М. Улуғбек номидаги ЎзМУ босмахонасида босилди.