ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

Ш.Ғ. ҚОСИМОВ, Т.Н. АЛИҚУЛОВ, Ш.Қ. ОТАЕВ,
Ғ.С. ХАИТБОЕВ, М.М. БАБАЕВ

МАТЕМАТИК ФИЗИКАНИНГ ЗАМОНАВИЙ УСУЛЛАРИ

ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА

1 том. Дастлабки маълумотлар. Фурье қатори ва интеграли.

Тошкент
"Университет"
2016

Қосимов Ш.Ғ., Алиқулов Т.Н., Отаев Ш.Қ., Хаитбоев Ғ.С., Бабаев М.М. “Математик физиканинг замонавий усуллари. 1 том.”. Т.: 2016, 478 б.

Мазкур ўқув қўлланманинг 1-томида математик физиканинг замонавий усулларига оид дастлабки маълумотлар, Фурье қатори ва интеграли мавзулари етарлича баён қилинган. Параграфларнинг ҳар бирида мавзуга оид асосий тушунчалар келтирилган, тегишли теоремалар исботлари билан берилган ва унга доир намунавий мисоллар таҳлил қилинган. Параграфлар мавзуга оид мустақил иш учун вазифалар билан бойитилган.

Ушбу ўқув қўлланма университетларнинг “Дифференциал тенгламалар ва математик физика”, “Математика” мутахассислиги бўйича магистрлар тайёрлайдиган факультет магистрантлари учун мўлжалланган бўлиб, ундан “Амалий математика ва информатика”, “Математика” ва бошқа таълим йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлайдиган факультет талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

М а с ъ у л м у ҳ а р р и р:
физика-математика фанлари доктори, профессор **Алимов Ш.А.**

Т а қ р и з ч и л а р:
физика-математика фанлари доктори, профессор **Маматов М.Ш.**
физика-математика фанлари номзоди, доцент **Пирматов Ш.Т.**

Мазкур ўқув қўлланма Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети Математика факультети ўқув-услубий кенгаши томонидан нашрга тавсия этилган. (2016 йил 1 декабрь, 2-сонли баённома)

ISBN-978-9943-4585-6-7

Кириш

Математик физика – бу физик ҳодисаларнинг математик моделлари назариясидир. Бу фан математикага тегишли бўлиб унинг ҳақиқатлик критерияси – бу математик исботдир. Бироқ, соф математик фанлардан фарқи шундан иборатки, математик физика фани физик масалаларни математика даражасида тадқиқ этади ва натижалар теоремалар, графиклар, жадваллар ва ҳакозо шаклларда ифодаланади, ҳамда физик тасаввурлар ҳосил қилинади. Математик физиканинг бундай кенг маънода тушунилиши унга механиканинг назарий механика, гидродинамика ва эластиклик назарияси каби бўлимларининг ҳам таълуқлилигини билдиради.

Дастлабки математик физика масалалари дифференциал (интегро–дифференциал) тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишга олиб келинган. Бу йўналиш *классик математик физика* предметини ташкил этади ва ҳозирда ҳам ўзининг муҳим аҳамиятини сақлаб турибди.

Классик математик физика И. Ньютон давридан бошлаб физика ва математиканинг параллел ривожланиши билан бирга ривожланиб борди. XVII асрнинг охирларида дифференциал ва интеграл ҳисоб (И. Ньютон, Г. Лейбниц) яратилди ва классик механиканинг асосий қонунлари, ҳамда бутун олам тортишиш қонуни (И. Ньютон) ифода қилинди. XVIII асрда тор, стержень, маятникларнинг тебраниши, ҳамда акустика ва гидродинамика билан боғлиқ масалаларни ўрганиш учун математик физиканинг усуллари шакллана бошлади. Шунингдек аналитик механиканинг асослари (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Лагранж, К. Гаусс, П. Лаплас) яратилди. XIX асрда математик физика усуллари иссиқлик ўтказувчанлик, диффузия, эластиклик назарияси, оптика, электродинамика, ночизиқли тўлқин жараёнлари ва ҳакозо масалалар билан боғлиқ бўлган янги ривожланишига эришди. Потенциаллар назарияси, ҳаракатнинг турғунлик назарияси (Ж. Фурье, С. Пуассон, Л. Больцман, О. Коши, М.В. Остроградский, П. Дирихле, Дж.К. Максвелл, Б. Риман, С.В. Ковалевская, Д. Стокс, Г.Р. Кирхгоф, А. Пуанкаре, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Д. Гильберт, Ж. Адамар) яратилди.

XX асрга келиб квант физикаси ва нисбийлик назариясининг масалалари, ҳамда газ динамикаси, заррачаларнинг кўчиш назарияси ва плазма физикасининг янги муаммолари ҳам математик физикага кириб келди.

Классик математик физикада уч хил типдаги содда дифференциал тенгламалар Пуассон (хусусан Лаплас) тенгламаси, иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси, тўлқин тенгламаси билан боғлиқ бўлган ҳар хил масалалар ўрганилган.

Квант механикаси ва ядровий энергетиканинг ривожланиши билан математик физиканинг янги типдаги тенгламалари ва чегаравий масалалари пайдо бўлди. Булар қаторига тўлқин функцияси учун Шрёдингер тенгламаси, стационар Шрёдингер тенгламаси, Гельмгольц тенгламаси ва бу тенглама учун Зоммерфельд нурланиш шартларини қаноатлантирувчи масала, изотроп сочилиш учун заррачалар кўчишининг бир хил тезликли тенгламасини келтириш мумкин.

Бу масалаларни тадқиқ этишда оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси, интеграл тенгламалар, вариацион ҳисоб, функциялар назарияси, функционал анализ, эҳтимоллар назарияси, тақрибий усуллар ва ҳисоблаш математикаси асосий математик қурол бўлиб хизмат қилади.

XX асрда квант физикасининг янги бўлимлари: квант механикаси, квант майдон назарияси, квант статистик физикаси, нисбийлик назарияси, гравитация каби (А. Пуанкаре, Д. Гильберт, П. Дирак, А. Эйнштейн, Н.Н. Боголюбов, В.А. Фок, Э. Шрёдингер, Г. Вейль, Р. Фейнман, Дж. фон Нейман, В. Гейзенберг) бўлимлар пайдо бўлди. Бу ҳодисаларни ўрганиш учун қўлланиладиган математик қуроллар тўплами сезиларли равишда кенгайди. Математиканинг ананавий соҳалари билан бир қаторда операторлар назарияси, умумлашган функциялар назарияси, кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, топологик ва алгебраик усуллар, сонлар назарияси, р–адик анализ, асимптотик ва ҳисоблаш усуллари кенг қўлланила бошлади. Электрон ҳисоблаш машиналарининг пайдо бўлиши билан батафсил таҳлил қилинадиган математик моделларнинг жуда муҳим синфлари кенгайиб борди. Ҳисоблаш экспериментини ўтказишнинг реал имкониятлари пайдо бўлди. Масалан, атом бомбасининг портлашини моделлаштириш ёки атом реакторининг реал вақт масштабидаги ишини моделлаштириш мумкин бўлди. Замонавий назарий физика ва замонавий математиканинг бундай интенсив ўзаро таъсирида янги соҳа – *замонавий математик физика* шаклланди. Унинг моделлари ҳамма вақт ҳам дифференциал тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалаларга келтирилавермайди, балки аксиомалар системаси шаклида ифода қилинади. Математикада, айниқса геометрияда ва тўпламлар назариясида аксиоматик усул анча олдиндан маълум эди. Ҳар қандай аксиомалар системаси сингари, бундай система қарама–қаршиликсиз, боғлиқмаслик, қурилувчанлик ва тўлалик талабларини қаноатлантириши керак бўлади.

XX асрга келиб назарий физиканинг ривожида бу тенденцияни П. Дирак яхши тушунди. У 1930 йилдаги ўз мақоласида назарий жиҳатдан позитроннинг мавжудлигини айтди. У қуйидагича ёзади: “Эҳтимол менинг фикримча бундай узлуксиз абстрактлаш жараёни давом этиб боради ва келажакда физиканинг ютуғи кўп даражада узлуксиз модификациялашга ва математика асосида аксиомаларни умумлаштиришга асосланган бўлади”. Назарий физиканинг кейинги тараққиёти П. Диракнинг фикрларини тўла тасдиқлади. Бунга ёрқин мисол сифатида назарий физикада аксиомалаштириш усулларининг қўлланилиши Н.Н. Боголюбов томонидан ўтган асрнинг 50–йилларида квант майдон назариясида аксиомалаштиришда сезилди. Шу даврда Гамильтон формализмини қўллаганда ультрафиолет узоқлашув муаммоси бор эди. Бу муаммога Н.Н. Боголюбов бошқача ёндошув билан қарашни таклиф этди. У аввал Гамильтон формализмидан воз кечди ва Гейзенберг томонидан киритилган сочилишнинг матрицавий назариясини асос қилиб қабул қилди. Н.Н. Боголюбов бу билан мумкин бўлган математик объектлар тўпламини кенгайтирди. Бунда сочилиш матрицасининг элементлари оператор қийматли умумлашган функциялар олинди. Шу билан бирга сочилиш матрицаси *релятивистлик, ковариантлик, унитарлик, сабаблилик, спектраллик* каби асосий физик постулатларни қаноатлантириши талаб қилинди.

Математик физиканинг масалалари орасида Ж. Адамар бўйича *коррект қўйилган масалалар*, яъни ечими мавжуд, ягона ва шу масаладаги берилганларга узлуксиз боғлиқ бўлган масалалар жуда муҳим синфлардан бири сифатида ажратилади. Бу талаблар биринчи қарашда жуда табиийдек бўлиб кўринсада, уларни қабул қилинган математик моделлар даражасида исбот қилиш зарур бўлади. Масала корректлигининг исботи – бу биринчидан шу математик моделнинг қўланилишини бидиради: модель қарама–қаршиликсиз (ечим мавжуд), модель бир қийматли равишда физик жараённи ифода қилади (ечим ягона), модель физик миқдорларнинг четлашувида кичик сезгирликка эга (ечим масалада берилганларга узлуксиз боғлиқ бўлади).

Математик физика масалаларини тадқиқ этишда умумлашган функциялар муҳим роль ўйнайди ва бу умумлашган ечим билан жипс боғлангандир. Шу сабабли умумлашган функциялар назарияси муҳим аҳамиятга эгадир.

Мазкур ўқув қўлланманинг 1-томи икки бобдан иборат бўлиб, унинг биринчи бобида дастлабки маълумотлар келтирилган. Иккинчи бобида эса Фурье қатори ва интеграли билан боғлиқ тушунчалар ва теоремалар батафсил баён қилинган.

Ҳар бир боб параграфларга бўлиб чиқилган. Параграфларнинг ҳар бирида мавзуга оид асосий тушунчалар келтирилган, тегишли теоремалар исботлари билан берилган ва унга доир намунавий мисоллар таҳлил қилинган. Параграфлар мавзуга оид мустақил иш учун вазифалар билан бойитилган.

Ушбу ўқув қўлланма университетларнинг “Дифференциал тенгламалар ва математик физика”, “Математика” мутахассислиги бўйича магистрлар тайёрлайдиган факультет магистрантлари учун мўлжалланган бўлиб, ундан “Амалий математика ва информатика”, “Математика” ва бошқа таълим йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлайдиган факультет талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

I – БОБ

ДАСТЛАБКИ МАЪЛУМОТЛАР

1-§. Метрик фазолар

1. Метрик фазо тушунчаси ва уларга доир асосий мисоллар. X тўплам берилган бўлсин. Бу тўпламнинг ҳар бир x ва y элементлари жуфтига шундай бир $\rho(x,y)$ манфиймас сон мос қўйилган бўлиб, бу мослик ихтиёрий x,y,z элементлар учун

1°. $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2°. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (симметриклик аксиомаси);

3°. $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$ (учбурчак аксиомаси)

шартларини қаноатлантирса, у ҳолда $\rho(x,y)$ сон x ва y элементлар орасидаги масофа дейилади ва X тўпламга эса метрик фазо дейилади.

Метрик фазонинг элементларига *нуқта* деб, X метрик фазодаги элементлар жуфтидан тузилган $X\times X$ тўпламда аниқланган $\rho(x,y)$ мосликка эса метрика деб, 1° – 3° шартларга метрика аксиомалари деб айтилади.

Шуни таъкидлаш керакки, X метрик фазодаги ҳар қандай Y тўплам шу X метрик фазодаги элементлар орасидаги масофага нисбатан ўз навбатида метрик фазо ташкил этади ва шунинг учун X метрик фазонинг қисм фазоси деб айтилади.

Энди асосий метрик фазоларга мисоллар келтирамиз.

1. Ҳақиқий сонларнинг $n-$та $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ тартибланган системаси шаклидаги элементларнинг тўпламида $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ва $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ элементлар орасидаги масофани

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2} \qquad (1.1.1)$$

тенглик билан киритиш мумкин. Бу фазо R^n орқали белгиланади ва $n-$*ўлчамли арифметик Евклид фазоси* деб айтилади. R^n фазо учун 1° ва 2° аксиомалар бевосита ўринлидир.

Бу фазодаги $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ ва $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ нуқталар учун учбурчак тенгсизлиги

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - x_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2} \qquad (1.1.2)$$

шаклида ёзилади. Агар $y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$ деб олсак, у ҳолда $z_k - x_k = a_k + b_k$ эканлигини ҳосил қиламиз ва (1.1.2) тенгсизлик бу ҳолда

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k{}^2} \qquad (1.1.3)$$

шаклида бўлади. Бу тенгсизлик эса, бизга маълум бўлган

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k{}^2 \qquad (1.1.4)$$

Коши–Буняковский тенгсизлигидан келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, бу тенгсизликка кўра

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k{}^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k{}^2} + \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k{}^2}\right)^2$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шу билан биз (1.1.3) тенгсизликни ва бунга кўра (1.1.2) тенгсизликни исбот қилдик. Коши–Буняковский тенгсизлиги бевосита

$$P(\xi) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \xi + b_k)^2 = A\xi^2 + 2B\xi + C,$$

бунда $A = \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2$, $B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, $C = \sum_{k=1}^{n} b_k{}^2$ бўлган квадрат учҳаднинг манфий эмаслигидан ва шунга кўра $P(\xi)$ квадрат учҳаднинг дискриминанти манфий эмаслиги, яъни $B^2 - AC \le 0$ эканлигидан келиб чиқади.

2. Ҳақиқий сонларнинг $n-$та $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ тартибланган системаси шаклидаги элементларнинг тўпламида $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ва $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ элементлар орасидаги масофани

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.1.5)$$

тенглик билан ҳам киритиш мумкин, бунда $p \geq 1$. Бу фазо R_p^n орқали белгиланади. Бу R_p^n фазо учун ҳам 1^{o} ва 2^{o} аксиомалар бевосита ўринлидир.

Бу R_p^n фазодаги $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ва $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ нуқталар учун учбурчак тенгсизлиги ўринли эканлигини кўрсатамиз. Агар $y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$ деб олсак, у ҳолда $z_k - x_k = a_k + b_k$ ва $\rho_p(x,z) \leq \rho_p(x,y) + \rho_p(y,z)$ учбурчак тенгсизлиги

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.1.6)$$

шаклида бўлади. Бу тенгсизликка *Минковский тенгсизлиги* деб айтилади. $p = 1$ бўлган ҳолда Минковский тенгсизлиги оддий бўлиб, йиғиндининг модули модуллар йиғиндисидан ошмаслигини билдиради. Шунинг учун $p > 1$ деб ҳисоблаймиз. Бу $p > 1$ ҳол учун (1.1.6) тенгсизлик *Гёльдер тенгсизлиги* деб аталувчи

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (1.1.7)$$

тенгсизликдан келтириб чиқарилади, бунда $p > 1$ ва $q > 1$ сонлар

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad (1.1.8)$$

шарт билан боғланган, яъни $q = \dfrac{p}{p-1}$ бўлади. Бу Гёльдер тенгсизлиги *бир жинсли тенгсизлик* эканлигини кўриш мумкин, яъни агар иккита $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ва $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ векторлар учун бу тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда λa ва μb векторлар учун ҳам бу тенгсизлик ўрин бўлади. Шунинг учун (1.1.7) Гёльдер тенгсизлигини

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = 1 \qquad (1.1.9)$$

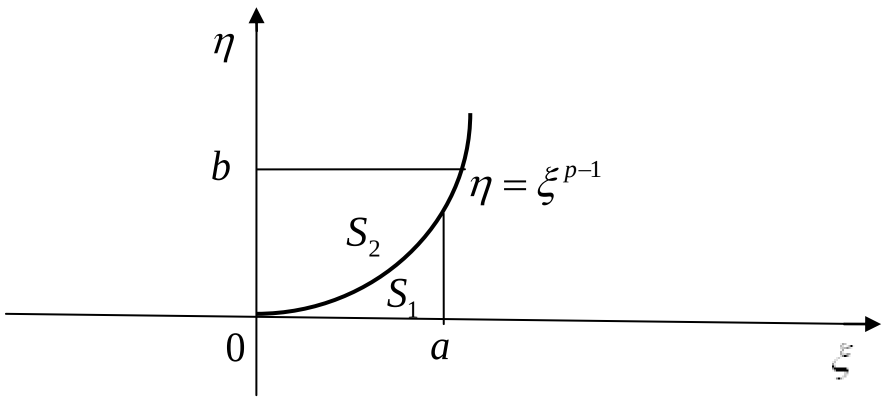
шарт ўринли бўлган ҳолда исботлаш етарлидир.

Демак, (1.1.9) шарт бажарилган бўлсин. У ҳолда

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \le 1 \qquad (1.1.10)$$

тенгсизликни исботлаймиз.

Биз (ξ,η) текисликда $\eta = \xi^{p-1}$ $(\xi > 0)$ тенглама билан аниқланадиган эгри чизиқни қараймиз. У ҳолда $\xi = \eta^{q-1}$ $(\eta > 0)$ тенгламага ҳам эга бўламиз. Қуйидаги расмдан кўринадики, ихтиёрий a ва b мусбат сонлар учун $S_1 + S_2 \ge ab$ тенгсизлик ўринли бўлади.



Бу S_1 ва S_2 юзаларни ҳисоблаймиз:

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}.$$

Шундай қилиб,

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

сонли тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда a ўрнига $|a_k|$ ва b ўрнига $|b_k|$ билан алмаштириб, k индекснинг 1 дан n гача ўзгаришида жамлаб чиқсак, у ҳолда (1.1.8) ва (1.1.9) муносабатларни ҳисобга олиб

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \le 1$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Шу билан биз (1.1.10) тенгсизликни ва шунга кўра, (1.1.7) Гёльдер тенгсизлиги исбот қилдик.

Энди Минковский тенгсизлигининг исботига тўхталамиз. Бунинг учун

$$\left(|a|+|b|\right)^p=\left(|a|+|b|\right)^{p-1}|a|^p+\left(|a|+|b|\right)^{p-1}|b|$$

айниятни қараймиз. Бу ерда a ўрнига a_k ва b ўрнига b_k билан алмаштириб, k индекснинг 1 дан n гача ўзгаришида жамлаб чиқсак, у ҳолда

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^p=\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^{p-1}|a_k|^p+\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^{p-1}|b_k|$$

айниятни ҳосил қиламиз.

Энди бу ҳар бир қўшилувчига Гёльдер тенгсизлигини қўллаб ва $(p-1)q=p$ эканлигини ҳисобга олиб

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^p\le$$

$$\le\left(\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left[\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликнинг ҳар иккала томонини

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

ифодага бўлиб, биз

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left[\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

тенгсизлигини ҳосил қиламиз. Бундан эса,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Минковский тенгсизлигини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, R_p^n фазода учбурчак аксиомаси ўрнатилди.

Агар бу мисолда $p=2$ деб олинса, у ҳолда ρ_p метрика Евклид метрикасига айланади. Агар $p=\infty$ деб олинса, у ҳолда $\rho_\infty(x,y)$ метрика $\rho_\infty(x,y)=\max\limits_{1\le k\le n}|y_k-x_k|$ тенглик билан аниқланишини кўрсатиш мумкин бўлади, яъни

$$\rho_\infty(x,y)=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\max_{1\le k\le n}\left|y_k-x_k\right| \qquad (1.1.11)$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$1\le\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left|y_i-x_i\right|}{\max\limits_{1\le k\le n}\left|y_k-x_k\right|}\right)^p\le n$$

тенгсизликка кўра

$$0\le\ln\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left|y_i-x_i\right|}{\max\limits_{1\le k\le n}\left|y_k-x_k\right|}\right)^p\le\ln n$$

тенсизлик ўринлидир. Бундан эса

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\left|y_i-x_i\right|}{\max\limits_{1\le k\le n}\left|y_k-x_k\right|}\right)^p\right)}{p}=0$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Шунинг учун

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\max_{1\le k\le n}\left|y_k-x_k\right|\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left|y_i-x_i\right|}{\max\limits_{1\le k\le n}\left|y_k-x_k\right|}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\max_{1\le k\le n}\left|y_k-x_k\right|e^{\lim\limits_{p\to\infty}\frac{\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\left|y_i-x_i\right|}{\max\limits_{1\le k\le n}\left|y_k-x_k\right|}\right)^p\right)}{p}}=\max_{1\le k\le n}\left|y_k-x_k\right|$$

тенглик келиб чиқади.

3. Энди биз $[a,b]$ сегментда аниқланган ҳақиқий қийматли узлуксиз функцияларнинг $C[a,b]$ тўпламида масофани

$$\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}\left|x(t)-y(t)\right|$$

тенглик ёрдамида киритамиз. Бунда $\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}\left|x(t)-y(t)\right|\ge 0$ ва $\rho(x,y)=0$ тенглик фақатгина $x(t)\equiv y(t)$ айният ўринли бўлгандагина бажарилади. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ симметриклик аксиомаси эса осонгина келиб чиқади. Ҳар бир $t\in[a,b]$ учун

$$\begin{aligned}&\left|x(t)-y(t)\right|=\left|\left[x(t)-z(t)\right]+\left[z(t)-y(t)\right]\right|\le\\&\le\left|x(t)-z(t)\right|+\left|z(t)-y(t)\right|\le\\&\le\max_{a\le t\le b}\left|x(t)-z(t)\right|+\max_{a\le t\le b}\left|z(t)-y(t)\right|=\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z)\end{aligned}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шунинг учун

$$\rho(x,z)=\max_{a\le t\le b}\left|x(t)-z(t)\right|\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

4. Агар биз $[a,b]$ сегментда аниқланган узлуксиз функциялар тўпламида масофани

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b \left|x(t)-y(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

тенглик ёрдамида киритсак, у ҳолда биз $C_2\,[a,b]$ (ёки $\tilde{L}_2\,[a,b]$) метрик фазога эга бўламиз. Бунда 1^{o} ва 2^{o} аксиомалар бевосита ўринлидир. Учбурчак аксиомаси эса, интеграл кўринишдаги

$$\int_a^b \left|x(t)y(t)\right|dt\le\left(\int_a^b \left|x(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b \left|y(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.12)$$

*Коши–Буняковский тенгсизлиги*дан келиб чиқади.

5. Агар биз $[a,b]$ сегментда аниқланган узлуксиз функциялар тўпламида масофани

$$\rho_p(x,y)=\left(\int_a^b \left|x(t)-y(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

тенглик ёрдамида киритсак, у ҳолда биз $C_p\,[a,b]$ (ёки $\tilde{L}_p\,[a,b]$) метрик фазога эга бўламиз. Бунда 1^{o} ва 2^{o} аксиомалар бевосита ўринлидир. Учбурчак аксиомаси эса, интеграл кўринишдаги

$$\int_a^b \left|x(t)y(t)\right|dt\le\left(\int_a^b \left|x(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b \left|y(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.1.13)$$

*Гёльдер тенгсизлиги*дан келиб чиқади.

Биз $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ шартни қаноатлантирувчи сонлар учун исбот қилган

$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

тенгсизликдан ихтиёрий $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар учун

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.1.14)$$

интеграл шаклдаги Гёльдер тенгсизлиги ўнг томондаги интеграллар маънога эга бўлганда ҳолда ўринли бўлишлиги келиб чиқади. Бундан эса, ўз навбатида

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.1.15)$$

Минковскийнинг интеграл тенгсизлигини ҳосил қиламиз.

Агар $0<p<1$ бўлса, у ҳолда Гёльдер ва Минковскийнинг тескари тенгсизликлар ўринли бўлиб метрик фазо аксиомалари бажарилмайди[1].

6. Ҳақиқий сонлардан тузилган $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ сонли кетма–кетликда $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$ қатор яқинлашувчи бўлган барча $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ элементлар тўпламини l_p метрик фазо деб оламиз, яъни

$$l_p=\left\{x:\ x=(x_1,x_2,...,x_n,...),\ x_n\in R,\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\right\}.$$

Бу ерда ҳам $p\ge 1$ бўлсин. Бу l_p метрик фазодаги $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ ва $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ элементлар орасидаги масофани

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k-x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.1.16)$$

---

[1] Бу ҳақида С.Л. Соболевнинг “Некоторые применения функционального анализа в математической физики”, М.: Наука, 1988. китоби орқали танишиш мумкин.

формула билан аниқлаймиз. Биз (1.1.6) шаклидаги Минковский тенгсизлигига кўра, ихтиёрий $n \in N$ бўлган ҳолда

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.1.17)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шартга кўра,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p \quad \text{ва} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^p$$

қаторлар яқинлашувчи бўлгани учун $n \to \infty$ да (1.1.17) тенгсизликда лимитга ўтиб

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1.1.18)$$

қаторнинг яқинлашувчи эканлигини ҳосил қиламиз.

Худди шунингдек,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k + b_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Минковский тенгсизлигида $a_k = y_k - x_k$, $b_k = z_k - y_k$ деб олсак, у ҳолда $a_k + b_k = z_k - x_k$ ва

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left| z_k - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left|z_k - y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.1.19)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу (1.1.19) тенгсизликда $n \to \infty$ да лимитга ўтсак

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left| z_k - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|z_k - y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.1.20)$$

учбурчак тенгсизлигини ҳосил қиламиз. Бу (1.1.20) тенгсизликдаги қаторларнинг ҳар бир яқинлашувчидир.

Шундай қилиб, бу l_p метрик фазодаги ихтиёрий $x, y \in l_p$ элементлар орасидаги масофани $\rho_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ формула билан аниқлаш мумкин ва барча аксиомалар ўринли бўлади.

2. Метрик фазодаги нуқталар кетма–кетлигининг яқинлашиши.

Таъриф. *Агар X метрик фазодан олинган $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетлик ва $x \in X$ элемент учун $n \to \infty$ да $\rho(x_n, x) \to 0$ бўлса, у ҳолда $x \in X$ элементга шу $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетликнинг лимити деб айтилади.*

Бошқача қилиб, айтганда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб, бу номердан бошлаб барча $n \geq N(\varepsilon)$ натурал сонлари учун $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $x \in X$ элементга шу $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетликнинг лимити деб айтилади.

Лимитга эга бўлган кетма–кетликлар яқинлашувчи кетма–кетликлар деб айтилади ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ каби белгиланади.

Агар шундай бир $C \in R$ сон ва $a \in X$ элемент мавжуд бўлиб, ихтиёрий $n \in N$ натурал сон учун $\rho(x_n, a) \leq C$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетликка чегараланган кетма–кетлик деб айтилади.

Метрик фазодаги яқинлашувчи кетма–кетликларга нисбатан қуйидаги содда теоремаларни келтириш мумкин[1].

1–теорема. *Агар X метрик фазодан олинган $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нуқталар кетма–кетлиги $x \in X$ нуқтага яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетликнинг ҳар қандай $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ қисмий кетма–кетлиги ҳам шу $x \in X$ нуқтага яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. Маълумки, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натурал сонлар кетма–кетлиги қатъий ўсувчи натурал сонлар кетма–кетлигидир, яъни

$$n_1 < n_2 < \ \dots \ < n_k < \dots$$

---

[1] Метрик фазоларга оид бошқа маълумотларни А.Н. Колмогоров, С.В. Фоминларнинг "Элементы теории функций и функционального анализа", М.: Наука, 1976., Л.А. Люстерник, В.И. Соболевларнинг "Элементы функционального анализа", М.: Наука, 1965., Т.А. Саримсоқовнинг "Функционал анализ курси", Т.: Ўқитувчи, 1980. китобларидан ўқиш мумкин.

бўлади. Теореманинг шартига кўра, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб, бу номердан бошлаб барча $n \geq N(\varepsilon)$ натурал сонлари учун $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунга кўра, $n_{k_0} \geq N(\varepsilon)$ тенгсизлик ўринли бўладиган $k_0 = k(\varepsilon)$ номер топиш мумкинки, бунда $k \geq k(\varepsilon)$ бўлган барча натурал сонлари учун $\rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Бу эса теоремани исбот қилади.

2–теорема. *X метрик фазодан олинган $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нуқталар кетма–кетлиги иккита ҳар хил нуқталарга яқинлашувчи бўлишлиги мумкин эмас.*

Исбот. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ бўлсин. У ҳолда учбурчак тенгсизлигига кўра ихтиёрий $n \in N$ учун

$$0 \leq \rho(a,b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b)$$

тенгсизлиги бажарилади. Бу ерда $n \to \infty$ да лимитга ўтсак, $\rho(a,b) = 0$ бўлади. Шунинг учун $a = b$ келиб чиқади. Бу эса теоремани исбот қилади.

3–теорема. *Агар X метрик фазодан олинган $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нуқталар кетма–кетлиги $x \in X$ нуқтага яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ҳар қандай $y \in X$ нуқта учун $\rho(x_n, y)$ сонли кетма–кетлик чегаралангандир.*

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, учбурчак аксиомасига кўра, ихтиёрий $n \in N$ учун

$$\rho(x_n, y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, y) \leq L + \rho(x, y) = K$$

тенгсизлиги ўринли бўлади, чунки $\rho(x_n, x)$ кетма–кетлик яқинлашувчи сонли кетма–кетлик бўлганлиги учун чегаралангандир, яъни шундай бир L ўзгармас сон топилиб $\rho(x_n, x) \leq L$ тенгсизлиги ихтиёрий $n \in N$ учун ўринли бўлади. Бу эса теоремани исбот қилади.

X метрик фазодан олинган

$$U_r(a) = \{x: \; x \in X, \; \rho(x,a) < r\}$$

нуқталар тўпламига маркази $a \in X$ нуқтада бўлган r радиусли *шар* деб айтилади. Мос равишда X метрик фазодан олинган

$$\overline{U}_r(a) = \{x: \; x \in X, \; \rho(x,a) \leq r\}$$

нуқталар тўпламига маркази $a \in X$ нуқтада бўлган r радиусли *ёпиқ шар* деб айтилади. Худди шунингдек, X метрик фазодан олинган

$$S_r(a) = \{x:\ x \in X,\ \rho(x,a) = r\}$$

нуқталар тўпламига маркази $a \in X$ нуқтада бўлган r радиусли *сфера* деб айтилади. Маркази $a \in X$ нуқтада бўлган ҳар қандай шар шу нуқтанинг *атрофи* деб айтилади. X метрик фазодан олинган

$$U_\varepsilon(a) = \{x:\ x \in X,\ \rho(x,a) < \varepsilon\}$$

шарга $a \in X$ нуқтанинг $\varepsilon -$ *атрофи* деб айтилади.

Осонгина кўриш мумкинки, агар X метрик фазодан олинган $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нуқталар кетма–кетлиги $x \in X$ нуқтага яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $x \in X$ нуқтанинг ҳар қандай атрофи бирор бир номердан бошлаб, шу кетма–кетликнинг барча нуқталарини ўз ичида сақлайди ва аксинча бўлади.

Агар тўплам қандайдир шарнинг ичида жойлашган бўлса, у ҳолда бу тўпламга *чегараланган тўплам* деб айтилади.

Айрим ҳолларда қандайдир фазода бевосита элементлар кетма–кетлигининг лимити тушунчаси берилган бўлади. Агар бу фазода элементлар кетма–кетлигининг лимити тушунчаси билан устма–уст тушадиган қилиб метрикани киритиш мумкин бўлса, у ҳолда бу фазони *метрикалаштириш* мумкин деб айтилади.

Энди биз кетма–кетликнинг яқинлашиши тушунчасини киритиш мумкин ва шу вақтнинг ўзида бу яқинлашишни аниқлайдиган метрикани киритиш мумкин бўлмаган тўпламга мисол келтирамиз, яъни *метрикалаштирилмайдиган фазо*га мисол келтирамиз.

$F\,[a,b]$ орқали биз $[a,b]$ сегментда аниқланган барча ҳақиқий функциялар тўпламини белгилаймиз. У ҳолда бу тўпламда кетма–кетликларнинг яқинлашиши тушунчасини қуйидагича киритамиз. Агар ҳар бир $t \in [a,b]$ нуқта учун

$$x_n(t) \to x(t)$$

бўлса, у ҳолда $\{x_n(t)\} \subset F[a,b]$ кетма–кетлик $x(t) \in F[a,b]$ функцияга яқинлашувчи деб айтилади. Шундай қилиб, $F[a,b]$ тўпламдаги яқинлашиш бу *нуқтавий яқинлашишдир*. Бу яқинлашишни *метрикалаштириш* мумкин эмас. Ҳақиқатдан ҳам, бу $F[a,b]$ тўпламда метрика киритиш мумкин бўлиб, бу функциялар кетма–кетлигининг нуқтавий яқинлашишини аниқлайдиган метрика бўлсин деб фараз қилайлик. Бу ҳосил қилинган $F[a,b]$ метрик фазодаги барча узлуксиз функцияларнинг тўпламини M орқали белгилаймиз. Бир томондан метрик фазодаги тўплам ёпиғининг хоссасига кўра $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ тенглик ўринлидир. Иккинчи томондан эса, $\overline{\overline{M}} \neq \overline{M}$ чунки $\overline{M}$ тўплам барча узлуксиз функциялар ва уларнинг нуқтавий яқинлашиш маъносидаги лимитларидан ташкил топган бўлади, яъни Бэрнинг биринчи синф функциялари тўпламидир. $\overline{\overline{M}}$ тўплам эса биринчи синф функциялари тўплами ва унинг лимитларидан иборат, яъни Бэрнинг иккинчи синф функциялари тўпламидир[1]. Бу қарама–қаршилик фаразимизнинг нотўғри эканлигини билдиради. Демак, бу $F[a,b]$ тўплам метрикалаштирилмайдиган фазо экан.

Энди биз айрим асосий метрик фазолардаги кетма–кетликларнинг яқинлашиш турларига тўхталамиз.

1. $M[a,b]$ орқали $[a,b]$ оралиқда аниқланган барча чегараланган ҳақиқий $x(t)$ функцияларнинг тўпламини белгилаймиз. Бу тўпламда биз метрикани

$$\rho(x,y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$$

тенглик ёрдамида киритамиз. Метриканинг барча аксиомалари ўринли эканлигини ҳеч қандай қийинчиликсиз текшириш мумкин. Бу $M[a,b]$ фазодаги яқинлашиш тушунчаси $[a,b]$ оралиқдаги *текис яқинлашиш*дан иборат бўлади. Бундан ташқари, $C[a,b] \subset M[a,b]$ муносабат ҳам ўринлидир.

2. $\tilde{M}[a,b]$ орқали биз $[a,b]$ оралиқда аниқланган барча муҳим чегараланган ўлчовли функцияларнинг фазосини қараймиз[2]. Бу фазодаги яқинлашиш *деярли ҳамма жойда текис*

---

[1] Бэр синфларининг классификацияси ҳақида И.П. Натансоннинг “Теория функций вещественной переменной”, М.: Наука, 1974. китобидан ўқиш мумкин.

[2] Ўлчовли функциялар ва Лебег интегралига оид бошқа маълумотлар билан А.Н. Колмогоров, С.В. Фоминларнинг “Элементы теории функций и функционального анализа”, М.: Наука, 1976., Т.А. Саримсоқовнинг “Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси”, Т.: Ўзбекистон, 1993. китобларидан ўқиш мумкин.

яқинлашиш бўладиган қилиб *метрикалаштириш* мумкинлигини қараб чиқамиз. Бу фазони қарашдан олдин биз қуйидаги тушунчани киритамиз.

$\alpha(t)$ функция $[a, b]$ ораликда аниқланган ўлчовли функция бўлсин.

Биз Ψ орқали $[a, b]$ ораликда жойлашган ноль ўлчамли барча E тўпламларнинг синфини белгилаймиз ва бу Ψ синфда

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E} \alpha(t) = \mu(E)$$

функцияни қараймиз. Агар бу функция ҳар қандай $E \in \Psi$ тўпламлар учун чекли бўлса, у ҳолда қандайдир $E_{(\alpha)}$ тўпламда минимал қийматини қабул қилишлигини кўрсатамиз.

$$\mu_0 = \inf_{E\in\Psi} \mu(E)$$

деб олайлик. Аниқ қуйи чегаранинг таърифига асосан шундай бир $\{E_n\} \subset \Psi$ тўпламлар кетма–кетлиги мавжудки, бунда

$$\mu_0 \le \sup_{t\in[a,b]\setminus E_n} \alpha(t) < \mu_0 + \frac{1}{n}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $E_{(\alpha)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ бўлсин. У ҳолда $mE_{(\alpha)} = 0$ бўлади ва

$$\mu_0 \le \sup_{t\in[a,b]\setminus E_{(\alpha)}} \alpha(t) \le \sup_{t\in[a,b]\setminus E_n} \alpha(t) < \mu_0 + \frac{1}{n}$$

тенгсизлик ўринлидир. Бу тенгсизлик ихтиёрий $n \in N$ учун ўринлидир. Шунинг учун бу тенгсизликдан $\mu_0 = \mu_0(E_{(\alpha)})$ эканлиги келиб чиқади. Бу μ_0 сон $\alpha(t)$ функциянинг $[a,b]$ ораликдаги *муҳим максимуми* деб айтилади ва

$$\mu_0 = vrai \max_{t\in[a,b]} \alpha(t) = \min_{E\in\Psi} \left\{ \sup_{t\in[a,b]\setminus E} \alpha(t) \right\}$$

каби белгиланади.

Биз X орқали $[a,b]$ ораликда муҳим максимуми чекли бўлган барча чегараланган ўлчовли $x(t),\ y(t),\ z(t),\ ...$ функцияларнинг тўпламини белгилаймиз. Агар $x(t)$ ва $y(t)$

функциялар деярли ҳамма жойда тенг бўлса, у ҳолда биз $x(t)$ ва $y(t)$ функцияларни X тўпламда айнан тенг деб ҳисоблаймиз.

Ихтиёрий иккита $x(t),\ y(t) \in X$ функциялар учун

$$\rho(x,y) = vrai \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$$

тенглик орқали метрика киритамиз. Бу метрика учун аксиомаларнинг бажарилишини текширамиз.

1) $\sup\limits_{t\in[a,b]\setminus E} |x(t) - y(t)| \geq 0$ бўлганлиги учун $\rho(x,y) \geq 0$ бўлади, бундан ташқари деярли ҳамма жойда $x(t) = y(t)$ бўлса, у ҳолда $\rho(x,y) = 0$ бўлади. Аксинча, агар $\rho(x,y) = 0$ бўлса, у ҳолда ўлчами нолга тенг бўлган қандайдир E_{xy} тўплам учун

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_{xy}} |x(t) - y(t)| = 0$$

тенглик ўринли бўлади, яъни E_{xy} тўплам ташқарисида $x(t) = y(t)$ ва шунга кўра, $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар деярли ҳамма жойда тенгдир.

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ тенгликнинг ўринлилиги бевосита кўрсатилади.

3) $x(t),\ y(t)$ ва $z(t)$–функциялар X тўпламдан олинган, ҳамда E_{xz} , E_{yz} тўпламлар ноль ўлчамли тўпламлар бўлиб

$$\rho(x,z) = \sup_{t\in[a,b]\setminus E_{xz}} |x(t) - z(t)| \quad \text{ва} \quad \rho(y,z) = \sup_{t\in[a,b]\setminus E_{yz}} |y(t) - z(t)|$$

бўлсин. $E_{xy} = E_{xz} \bigcup E_{yz}$ деб олайлик. У ҳолда

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_{xy}} |x(t) - y(t)| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]\setminus E_{xy}} |x(t) - z(t)| + \sup_{t\in[a,b]\setminus E_{xy}} |z(t) - y(t)| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]\setminus E_{xz}} |x(t) - z(t)| + \sup_{t\in[a,b]\setminus E_{yz}} |z(t) - y(t)| =$$

$$= \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

тенгсизликка эга бўламиз.Шунга асосан

$$\rho(x,y) = vrai \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

учбурчак тенгсизлиги келиб чиқади. Ҳосил қилинган фазо $\tilde{M}\,[a,b]$ орқали белгиланади. Бу фазода яқинлашиш қандай эканлигини кўриб чиқамиз. $x_n(t),\ x(t)\ \in\ \tilde{M}\ [a,b]$ ва $n \to \infty$ да $\rho(x_n, x) \to 0$ бўлсин. Бу эса, берилган $\varepsilon_k > 0$ кетма–кетлик учун

$$\rho(x_n, x) = \min_{E \in \Psi} \left\{ \sup_{t \in [a,b] \setminus E} \left| x_n(t) - x(t) \right| \right\} < \varepsilon_k$$

тенгсизлик $n \geq n_0(\varepsilon_k)$ учун ўринли эканлигини билдиради. У ҳолда ноль ўлчамли E_k тўплам мавжуд бўлиб, бунда $n \geq n_0(\varepsilon_k)$ учун $\sup\limits_{t \in [a,b] \setminus E_k} \left| x_n(t) - x(t) \right| < \varepsilon_k$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунинг учун ихтиёрий $n \geq n_0(\varepsilon_k)$ ва $t \in [a,b] \setminus E_k$ учун $\left| x_n(t) - x(t) \right| < \varepsilon_k$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Энди $m \to \infty$ да $\varepsilon_m \to 0$ бўладиган $\{\varepsilon_m\}$ кетма–кетликни ва мос E_m тўпламларни олайлик. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон бўлсин. Ихтиёрий $n \geq n_0(\varepsilon_k)$ ва барча $t \in [a,b] \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$ учун

$$\left| x_n(t) - x(t) \right| < \varepsilon_k < \varepsilon$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шундай қилиб, $[a,b]$ оралиқнинг деярли ҳамма жойида $x_n(t) \to x(t)$ ва тўлиқ ўлчамли кўрсатилган тўпламда эса текис яқинлашувчи бўлади.

Энди аксинча $\{x_n(t)\}$ кетма–кетлик деярли ҳамма жойда $x(t)$ функцияга текис яқинлашувчи бўлсин. Шунга кўра, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $n_0(\varepsilon)$ номер ва ноль ўлчамли E_ε тўплам мавжуд бўлиб, бунда $n \geq n_0(\varepsilon)$ учун ва ихтиёрий $t \in [a,b] \setminus E_\varepsilon$ учун $\left| x_n(t) - x(t) \right| < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Бундан эса, барча $n \geq n_0(\varepsilon)$ учун

$$\sup_{t \in [a,b] \setminus E_\varepsilon} \left| x_n(t) - x(t) \right| \leq \varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Бундан эса, ўз навбатида барча $n \geq n_0(\varepsilon)$ учун

$$\min_E \left\{ \sup_{t\in[a,b]\setminus E} |x_n(t)-x(t)| \right\} \le \varepsilon$$

тенгсизлиги келиб чиқади, яъни $n\to\infty$ да $\rho(x_n, x)\to 0$ бўлади.

Шунга кўра, $\tilde{M}\ [a,b]$ фазодаги яқинлашиш *бу деярли ҳамма жойда текис яқинлашишдир*[1].

3. Чегараланган сонли кетма–кетликларининг фазосини қараймиз. Биз X орқали

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$$

барча чегараланган сонли кетма–кетликларининг тўпламини белгилаймиз. Бу эса, ҳар бир $x=(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ кетма–кетлик учун шундай бир $K_x>0$ мусбат ўзгармас сон мавжуд бўлиб, барча $i\in N$ учун $|x_i|\le K_x$ тенгсизлик ўринли бўлишини билдиради.

Энди биз X тўпламдан олинган $x=(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ ва $y=(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots)$ кетма–кетликлари учун масофани

$$\rho(x, y)=\sup_i |x_i-y_i|$$

тенглик билан киритамиз. Бу ерда биринчи ва иккинчи аксиомаларнинг бажарилишини бевосита кўрсатиш мумкин. Шунинг учун биз фақат учбурчак тенгсизлигини текширамиз.

Биз

$$|x_i-y_i|\le|x_i-z_i|+|z_i-y_i|\le$$

$$\le\sup_i|x_i-z_i|+\sup_i|z_i-y_i|=\rho(x, z)+\rho(z, y)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шунга кўра,

$$\sup_i|x_i-y_i|=\rho(x, y)\le\rho(x, z)+\rho(z, y)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Ҳосил бўлган метрик фазо m *чегараланган сонли кетма–кетликларининг фазоси* деб айтилади.

Бу m метрик фазодаги яқинлашиш турини аниқлаймиз. Бунинг учун шу m метрик фазога тегишли бўлган $x^{(n)}$ кетма–кетлик ва x элементларни қараймиз. Бу ерда

---

[1] Кўп ўлчамли чегараланган тўпламлардаги муҳим чегараланган ўлчовли функцияларининг фазоси ҳақида С.М. Никольскийнинг “Приближение функций многих переменных и теоремы вложения”, М.: Наука, 1977. китобидан ўқиш мумкин.

$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_i^{(n)}, \ldots)$ ва $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ бўлиб $n \to \infty$ да $\rho(x^{(n)}, x) \to 0$ бўлади. Бу эса, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $n_0 = n_0(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq n_0(\varepsilon)$ учун

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sup_i \left| x_i^{(n)} - x_i \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли эканлигини билдиради. Бундан эса, $n \geq n_0(\varepsilon)$ ва барча $i \in N$ учун $\left| x_i^{(n)} - x_i \right| < \varepsilon$ тенгсизликка эга бўламиз.

Осонгина кўриш мумкинки, агар $n \geq n_0(\varepsilon)$ ва барча $i \in N$ учун $\left| x_i^{(n)} - x_i \right| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $n \to \infty$ да $\rho(x^{(n)}, x) \to 0$ бўлади. Шунга кўра m чегараланган сонли кетма–кетликларининг метрик фазосидаги яқинлашиш *координата бўйича яқинлашиш бўлиб координата номерларига нисбатан текис* бўлади.

4. Энди яқинлашувчи сонли кетма–кетликларининг фазосини қараймиз. Биз X орқали

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$$

барча яқинлашувчи сонли кетма–кетликларининг тўпламини белгилаймиз. Бу эса ҳар бир $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ кетма–кетлик учун чекли

$$\lim_{i \to \infty} x_i = c$$

лимитнинг мавжуд эканлигини билдиради.

Энди биз X тўпламдан олинган $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ ва $y = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots)$ кетма–кетликлари учун масофани

$$\rho(x, y) = \sup_i \left| x_i - y_i \right|$$

тенглик билан киритамиз. Ҳосил бўлган метрик фазо c *яқинлашувчи сонли кетма–кетликларининг фазоси* деб айтилади.

Кўриниб турибдики, бу c яқинлашувчи сонли кетма–кетликларининг метрик фазоси ўз навбатида m чегараланган сонли кетма–кетликларининг метрик фазосидаги қисм фазо бўлади.

Бундан эса, c яқинлашувчи сонли кетма–кетликларининг фазосида метрика аксиомаларининг бажарилиши келиб чиқади ва *с яқинлашувчи сонли кетма–кетликларининг метрик фазосидаги яқинлашиш* ҳам *координата бўйича яқинлашиш бўлиб координата номерларига нисбатан текис* бўлади.

5. Барча ҳақиқий сонли кетма–кетликларининг фазосини қараймиз. Биз X орқали

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$$

барча ҳақиқий сонли кетма–кетликларининг тўпламини белгилаймиз. Бу тўпламда лимитга ўтиш амалини киритамиз.

Бунинг учун X тўпламга тегишли бўлган $x^{(n)}$ кетма–кетлик ва x элементларни қараймиз. Бу ерда $x^{(n)}=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_i^{(n)}, \ldots)$ ва $x=(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ бўлиб, барча $i=1, 2, 3, \ldots$ учун (умуман олганда $i=1, 2, 3, \ldots$ координатага нисбатан текисмас бўлган ҳолда) $n\to\infty$ да $x_i^{(n)}\to x_i$ бўлади. Шундай қилиб, биз қандайдир метрик бўлмаган фазога эга бўламиз. Бу фазони биз s орқали белгилаймиз.

Шу s фазони *метрикалаштириш мумкин* эканлигини кўрсатамиз.

$x=(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)\in s$ ва $y=(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots)\in s$ бўлсин. У ҳолда

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\,\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$$

деб оламиз. Айниятлик ва симметриклик аксиомалари ўринлидир. Учбурчак аксиомаси эса

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

тенгсизликдан келиб чиқади. Бу тенгсизликни исбот қиламиз.

Бу a ва b сонлар бир хил ишорали бўлсин. Масалан, $a>0$ ва $b>0$ деб ҳисоблаймиз. У ҳолда

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}=\frac{a+b}{1+a+b}=\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$

тенгсизлик ўринлидир.

Агар $a<0$ ва $b<0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}=\frac{-a-b}{1-a-b}=\frac{-a}{1-a-b}+\frac{-b}{1-a-b}=$$

$$= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} < \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

тенгсизлик ўринлидир.

Энди a ва b сонлар ҳар хил ишорали бўлсин. Бунда $|a| \geq |b|$ деб ҳисоблаймиз. У ҳолда

$$|a+b| \leq |a|$$

тенгсизлик ўринлидир. Биз $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ функцияни қарасак, у ҳолда $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$ бўлгани учун бу функция қатъий ўсувчидир. Демак,

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

тенгсизлик ўринлидир.

Энди биз учбурчак тенгсизлигининг исботига тўхталамиз. Юқоридаги тенгсизликка кўра

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i + z_i - y_i|}{1+|x_i - z_i + z_i - y_i|} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|z_i - y_i|}{1+|z_i - y_i|} = \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу эса исбот қилиниши керак бўлган $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ учбурчак тенгсизлигидир.

Бу киритилган метрика бўйича яқинлашиш координата бўйича (умуман олганда $i = 1, 2, 3, \ldots$ координата индексларига нисбатан текисмас бўлган ҳолда) яқинлашиш эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_i^{(n)}, \ldots)$ ва $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ бўлиб $n \to \infty$ да $x^{(n)} \to x$ бўлсин. Бу эса ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $n_0(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq n_0(\varepsilon)$ учун

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1+|x_i^{(n)} - x_i|} < \varepsilon$$

тенгсизлигининг бажарилишини билдиради. Лекин, у ҳолда ҳар бир танланган $i = 1, 2, 3, \ldots$ индекс учун ҳам ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сонга мос шу $n_0(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq n_0(\varepsilon)$ учун

$$\frac{1}{2^i} \frac{\left|x_i^{(n)} - x_i\right|}{1 + \left|x_i^{(n)} - x_i\right|} < \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса ҳар бир танланган $i = 1, 2, 3, \ldots$ индекс учун $n \to \infty$ да $x_i^{(n)} \to x_i$ бўлишини билдиради.

Энди эса, аксинча ҳар бир танланган $i = 1, 2, 3, \ldots$ индекс учун $n \to \infty$ да $x_i^{(n)} \to x_i$ бўлсин. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сонни олайлик. Бу сонга мос шундай бир m номерни танлаймизки, бунда

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлиги ўринли бўлсин. У ҳолда

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\left|x_i^{(n)} - x_i\right|}{1 + \left|x_i^{(n)} - x_i\right|} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{\left|x_i^{(n)} - x_i\right|}{1 + \left|x_i^{(n)} - x_i\right|} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\left|x_i^{(n)} - x_i\right|}{1 + \left|x_i^{(n)} - x_i\right|} <$$

$$< \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{\left|x_i^{(n)} - x_i\right|}{1 + \left|x_i^{(n)} - x_i\right|} + \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу ердаги қолган қўшилувчилар танланган чекли сонда бўлганлиги учун шундай бир $n_0(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq n_0(\varepsilon)$ учун

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{\left|x_i^{(n)} - x_i\right|}{1 + \left|x_i^{(n)} - x_i\right|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунга кўра, биз ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $n_0(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq n_0(\varepsilon)$ учун $\rho(x^{(n)}, x) < \varepsilon$ тенгсизликка эга бўламиз.

Бу исбот қилинган тенгсизликдан s фазода олдин аниқланган яқинлашиш бу киритилган метрика бўйича яқинлашиш билан устма–уст тушишлиги келиб чиқади ва шунга кўра бу метрикани киритиш s фазони метрикалаштиришга олиб келади.

6. $S\,[a,b]$ орқали биз $[a,\,b]$ ораликда аниқланган барча ўлчовли функцияларнинг фазосини қараймиз. Бу фазодаги яқинлашиш *ўлчов бўйича яқинлашиш* бўладиган қилиб *метрикалаштириш* мумкинлигини қараб чиқамиз.

$S\,[a,b]$ фазодаги иккита функция деярли ҳамма жойда тенг бўлса, у ҳолда бу функциялар айнан тенг деб айтилади.

Бу $S\,[a,b]$ фазодаги метрикани

$$\rho(x,y)=\int_a^b \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,d\,t$$

формула билан киритамиз. Бу ерда биз метрика аксиомаларининг бажарилишига ишонч ҳосил қилишимиз ва шу $S\,[a,b]$ фазода киритилган метрика бўйича яқинлашиш билан *ўлчов бўйича яқинлашиш* устма–уст тушишлигини кўрсатишимиз мумкин.

3. Метрик фазодаги очиқ тўпламлар. Агар шундай бир $\varepsilon>0$ мусбат сон топилиб $U_\varepsilon(a)\subset M$ бўлса, у ҳолда $a\in M$ нуқтага M тўпламнинг *ички нуқтаси* деб айтилади, яъни $a\in M$ нуқта M тўпламнинг ички нуқтаси бўлишлиги учун бу нуқта ўзининг қандайдир атрофи билан бирга шу M тўпламга қарашли бўлишлиги керак бўлади. M тўпламнинг барча ички нуқталари тўпламига шу M тўпламнинг *ички қисми* деб айтилади ва $\operatorname{int}M$ каби белгиланади. Маълумки, $\operatorname{int}M\subset M$ бўлади. Агар $\operatorname{int}M=M$, яъни M тўпламнинг барча нуқталари ички нуқталар бўлса, у ҳолда M тўпламга шу X метрик фазодаги *очиқ тўплам* деб айтилади. Таърифга кўра, бўш тўплам очиқ тўплам ҳисобланади.

X метрик фазодан олинган ҳар қандай шар очиқ тўпламга мисол бўла олади. Ҳақиқатдан ҳам, $U_C(a)=\{x:x\in X,\ \rho(x,a)<C\}$ шар ва $\tilde{x}\in U_C(a)$ бўлган ихтиёрий нуқта бўлсин. У ҳолда $\rho(\tilde{x},a)<C$ бўлади. $\varepsilon=C-\rho(\tilde{x},a)$ деб оламиз, бунда $\varepsilon>0$. Энди $U_\varepsilon(\tilde{x})\subset U_C(a)$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, агар $x\in U_\varepsilon(\tilde{x})$ бўлса, у ҳолда $\rho(x,\tilde{x})<\varepsilon$ бўлади. Учбурчак тенгсизлигига кўра,

$$\rho(x,a) \le \rho(x,\tilde{x}) + \rho(\tilde{x},a) <$$
$$< \varepsilon + \rho(\tilde{x},a) = C - \rho(\tilde{x},a) + \rho(\tilde{x},a) = C$$
тенгсизликка эга бўламиз. Шунга кўра, $x \in U_C(a)$ бўлади. Ҳамда x ихтиёрий нуқта эканлигидан $U_\varepsilon(\tilde{x}) \subset U_C(a)$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $U_C(a)$ шардан олинган ихтиёрий $\tilde{x}$ нуқта ўзининг қандайдир $U_\varepsilon(\tilde{x})$ атрофи билан шу шарга қарашлидир, яъни $U_\varepsilon(\tilde{x}) \subset U_C(a)$ ҳосил бўлади. Шунинг учун $U_C(a)$ шар очиқ тўпламдир.

4–теорема. *X метрик фазодан олинган очиқ тўпламлар қуйидаги хоссаларга эгадир:*

1) бутун X метрик фазо ва $\varnothing$ бўш тўплам очиқ тўпламдир;

2) очиқ тўпламларнинг исталган сондаги йиғиндиси ҳам очиқ тўпламдир;

3) очиқ тўпламларнинг чекли сондаги кесишмаси ҳам очиқ тўпламдир.

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, 1) хосса ўз-ўзидан равшан. 2) хоссани исбот қиламиз. $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ бўлсин, бунда G_α – очиқ тўпламдир. $a \in G$ бўлсин. У ҳолда шундай бир $\bar{\alpha} \in \Lambda$ топилиб, бунда $a \in G_{\bar{\alpha}}$ бўлади. Бу $G_{\bar{\alpha}}$ тўплам очиқ тўпламдир. Шунинг учун шундай бир $U_\varepsilon(a) \subset G_{\bar{\alpha}}$ шар мавжуд бўлади. Бундан эса, $U_\varepsilon(a) \subset G$ эканлиги келиб чиқади. Демак, a нуқта G тўпламнинг ички нуқтаси экан. Бу a нуқтанинг ихтиёрий нуқта эканлигидан G тўпламнинг очиқ тўплам эканлиги келиб чиқади. Энди 3) хоссани исбот қиламиз. $G = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ бўлсин, бунда G_i – очиқ тўпламдир. Ихтиёрий $a \in G$ бўлган нуқтани оламиз. У ҳолда ҳар бир $i = \overline{1, n}$ учун $a \in G_i$ бўлади. Бу G_i тўплам очиқ тўплам бўлгани учун шундай бир $U_{\varepsilon_i}(a) \subset G_i$ шарлар мавжуд. $\varepsilon = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \varepsilon_i$ бўлсин. У ҳолда $U_\varepsilon(a) \subset G_i$, $i = \overline{1, n}$ бўлади. Шунинг учун $U_\varepsilon(a) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i = G$ эканлиги келиб чиқади ва шунга кўра, G очиқ тўпламдир. Теорема исбот бўлди.

Чексиз сондаги очиқ тўпламларнинг кесишмаси ҳамма вақт ҳам очиқ тўплам бўлавермаслиги мумкин.

4. Лимитик нуқталар. Метрик фазодаги ёпиқ тўпламлар. X метрик фазодан олинган ихтиёрий $O(x_0)$ тўплам учун x_0 нуқта ички нуқта бўлса, у ҳолда бу тўпламга $x_0 \in X$ нуқтанинг атрофи деб аталади. Масалан, $U_\varepsilon(x_0)$ шар шу $x_0 \in X$ нуқтанинг шарсимон атрофи бўлади.

X метрик фазодан олинган $M \subset X$ тўплам берилган бўлсин. Агар $a \in X$ нуқтанинг ҳар қандай атрофи $M \setminus a$ тўпламнинг ҳеч бўлмаганда битта нуқтасини ўзида сақласа, у ҳолда бу $a \in X$ нуқтага *лимитик нуқта* деб айтилади, яъни агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун

$$U_\varepsilon(a) \bigcap \left(M \setminus a\right) \neq \varnothing$$

бўлса, у ҳолда $a \in X$ нуқтага $M \subset X$ тўпламнинг *лимитик нуқтаси* деб айтилади. M тўпламнинг лимитик нуқтаси шу M тўпламга тегишли бўлиш ҳам ёки тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, $X = R$ метрик фазодаги (a, b) интервалнинг барча нуқталари лимитик нуқталардир. Интервалнинг a ва b охирги нуқталари ҳам лимитик нуқта бўлсада бу интервалга тегишли эмас.

M тўпламнинг лимитик нуқта бўлмаган нуқталари шу M *тўпламнинг яккаланган нуқталари* деб айтилади. Агар x_0 нуқта M тўпламнинг яккаланган нуқтаси бўлса, у ҳолда шундай бир $O(x_0)$ атроф мавжудки, бу атрофда M тўпламнинг x_0 нуқтадан фарқли нуқталари мавжуд эмас. M тўпламнинг ҳар бир нуқтаси шу M тўпламнинг *лимитик нуқтаси* бўлади ёки шу M тўпламнинг *яккаланган нуқтаси* бўлади. Агар M тўплам ўзининг барча лимитик нуқталарини сақласа, у ҳолда бу $M \subset X$ тўпламга *ёпиқ тўплам* деб айтилади. $X = R$ метрик фазодаги $[a, b]$ сегмент ёпиқ тўпламдир, (a, b) интервал эса, шу $X = R$ метрик фазода ёпиқ тўплам бўлмайди.

M тўпламга унинг барча лимитик нуқталарини қўшишдан ҳосил бўлган тўплам шу M тўпламнинг ёпиғи деб айтилади ва $\overline{M}$ орқали белгиланади. Бу $\overline{M}$ тўплам ёпиқ тўпламдир.

Агар x_0 нуқтанинг ихтиёрий атрофида M тўпламнинг ҳеч бўлмаганда битта элементи мавжуд бўлса, у ҳолда бу нуқта шу M тўпламнинг *уриниш нуқтаси* деб айтилади. Бундай уриниш нуқталари шу M тўпламнинг *лимитик нуқтаси* бўлади ёки шу M тўпламнинг *яккаланган нуқтаси* бўлади. Ихтиёрий M тўпламнинг барча уриниш нуқталари тўпламини шу M тўпламнинг ёпиғи деб аташ мумкин бўлади. Шундай қилиб, биз ихтиёрий X метрик фазодаги ихтиёрий M тўпламдан унинг $\overline{M}$ *ёпиғига ўтиш* амалини аниқладик.

5–теорема. *X метрик фазодан олинган нуқталар тўпламининг ёпиғи қуйидаги хоссаларга эгадир:*

1) $M \subset \overline{M}$,

2) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$,

3) агар $M_1 \subset M_2$ *бўлса, у ҳолда* $\overline{M_1} \subset \overline{M_2}$ *бўлади,*

4) $\overline{M_1 \bigcup M_2} = \overline{M_1} \bigcup \overline{M_2}$.

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, 1) хосса таърифдан келиб чиқади. 2) хоссани исбот қиламиз. Бунинг учун $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$ ва $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$ эканлигини кўрсатиш керак. 1) хоссага кўра, $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$ муносабат ўринлидир. $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$ эканлигини исбот қиламиз. $x \in \overline{\overline{M}}$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $O_{\varepsilon}(x)$ атрофдан шундай бир $x_1 \in O_{\varepsilon}(x)$ нуқта мавжудки, бунда $x_1 \in \overline{M}$ бўлади. $\varepsilon - \rho(x, x_1) = \varepsilon_1$ деб оламиз ва $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ шарни қараймиз. Бу шар бутунича $O_{\varepsilon}(x)$ шарнинг ичида жойлашган бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$ бўлса, у ҳолда $\rho(z, x_1) < \varepsilon_1$ бўлади ва $\rho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1$ бўлгани учун учбурчак аксиомасига кўра

$$\rho(z, x) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади, яъни $z \in O_{\varepsilon}(x)$ бўлади. Бундан ташқари, $x_1 \in \overline{M}$ бўлгани учун $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ шардан олинган шундай бир $x_2 \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$ нуқта мавжудки, бунда $x_2 \in M$ бўлади. Бундан эса $x_2 \in O_{\varepsilon}(x)$ эканлиги келиб чиқади. Маълумки, $O_{\varepsilon}(x)$ атроф x нуқтанинг ихтиёрий атрофи бўлгани учун $x \in \overline{M}$ бўлади. Иккинчи тасдиқ исбот бўлди. Учинчи тасдиқ бевосита таърифдан келиб чиқади. Биз тўртинчи тасдиқни исбот қиламиз. Агар $x \in \overline{M_1 \bigcup M_2}$ бўлса, у ҳолда бу x нуқта ҳеч бўлмаганда $\overline{M_1}$ ёки $\overline{M_2}$ тўпламларнинг бирига қарашли бўлади, яъни

$$\overline{M_1 \bigcup M_2} \subset \overline{M_1} \bigcup \overline{M_2}$$

муносабат ўринлидир. $M_1 \subset M_1 \bigcup M_2$ ва $M_2 \subset M_1 \bigcup M_2$ эканлигидан 3) хоссага кўра $\overline{M_1} \subset \overline{M_1 \bigcup M_2}$ ва $\overline{M_2} \subset \overline{M_1 \bigcup M_2}$ келиб чиқади. Бундан эса, $\overline{M_1} \bigcup \overline{M_2} \subset \overline{M_1 \bigcup M_2}$ муносабатни ҳосил қиламиз. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

6–теорема. *X метрик фазодан олинган F тўплам ёпиқ тўплам бўлишлиги учун унинг $X \setminus F$ тўлдирувчиси очиқ тўплам бўлишлиги зарур ва етарлидир.*

Исбот. *Зарурлиги.* $F \subset X$ тўплам ўзининг барча лимитик нуқталарини сақласин. У ҳолда унинг $G = X \setminus F$ тўлдирувчиси очиқ тўплам эканлигини исбот қиламиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни шундай бир $a \in G$ нуқта мавжуд бўлиб, бу нуқта шу G тўпламнинг ички нуқтаси бўлмасин. У ҳолда a нуқтанинг ихтиёрий $O(a)$ атрофида G тўпламга тегишли бўлмаган нуқта мавжуддир, яъни бу нуқта F тўпламга тегишлидир. Шунинг учун a нуқта F тўпламнинг лимитик нуқтасидир. F ёпиқ тўплам бўлганлиги учун $a \in F$ бўлади. Иккинчи томондан эса, $a \in G = X \setminus F$ ва шунга кўра, $a \notin F$ бўлади. Ҳосил қилинган қарама–қаршилик $G = X \setminus F$ тўпламнинг барча нуқталари ички нуқта эканлигини исбот қилади, яъни G очиқ тўпламдир.

Етарлилиги. Энди $X \setminus F = G$ тўплам очиқ тўплам бўлсин. F тўпламнинг ёпиқ эканлигини кўрсатамиз. a нуқта F тўпламнинг лимитик нуқтаси бўлсин. Фараз қилайлик, $a \notin F$ бўлсин. У ҳолда $a \in G$ бўлиб, бу тўпламнинг очиқ тўплам эканлигидан шундай бир $O(a) \subset G$ атроф мавжудки, бунда $O(a) \bigcap F = \varnothing$ бўлади ва шунга кўра a нуқта F тўпламнинг лимитик нуқтаси бўла олмайди. Бу қарама–қаршилик фаразимизнинг нотўғри эканлигини кўрсатади. Шунинг учун F тўплам ўзининг барча лимитик нуқталарини сақлайди, яъни F тўплам ёпиқдир.

7–теорема. *X метрик фазодан олинган ёпиқ тўпламлар қуйидаги хоссаларга эгадир:*

1) бутун X метрик фазо ва $\varnothing$ бўш тўплам ёпиқ тўпламдир;

2) ёпиқ тўпламларнинг исталган сондаги кесишмаси ҳам ёпиқ тўпламдир;

3) ёпиқ тўпламларнинг чекли сондаги йиғиндиси ҳам ёпиқ тўпламдир.

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, 1) хосса ўз-ўзидан равшан, чунки бутун X метрик фазо ва $\varnothing$ бўш тўплам очиқ тўплам бўлиб уларнинг тўлдирувчилари ёпиқдир. 2) хоссани исбот қиламиз. $F = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha$ бўлсин, бунда F_α – ёпиқ тўпламдир. Иккилик принципига кўра, $X \setminus F = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} (X \setminus F_\alpha)$ тенглик ўринлидир. 6–теоремага кўра, ёпиқ тўпламнинг $X \setminus F_\alpha$ тўлдирувчиси очиқ тўплам бўлиб, уларнинг $X \setminus F$ йиғиндиси ҳам очиқдир. Шу 6–теоремага кўра, F тўплам ёпиқ тўплам бўлади. Энди учинчи хоссанинг исботига ўтамиз. $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ бўлсин, бунда F_i – ёпиқ тўпламдир. Иккилик принципига кўра, $X \setminus F = \bigcap\limits_{i=1}^{n}(X \setminus F_i)$ тенглик ўринлидир. 6–теоремага кўра, ёпиқ тўпламнинг $X \setminus F_i$ тўлдирувчиси очиқ тўплам бўлиб, уларнинг чекли сондаги кесишмаси бўлган $X \setminus F$ тўплам ҳам очиқдир. Шу 6–теоремага кўра, F тўплам ёпиқ тўплам бўлади. Теорема исбот бўлди.

5. Зич қисм тўпламлар. Сепарабель фазолар. X метрик фазодан олинган ихтиёрий иккита A ва B тўпламлар берилган бўлсин. Агар $B \subset \overline{A}$ бўлса, у ҳолда A тўплам B тўпламда *зич* деб айтилади. Агар $A \subset B$ бўлиб $B \subset \overline{A}$ бўлса, у ҳолда A тўплам B тўпламда *зич жойлашган* деб айтилади. Агар $\overline{A}$ тўплам бутун X метрик фазо билан устма–уст тушса, яъни $X = \overline{A}$ бўлса, у ҳолда *A тўплам бутун X метрик фазонинг ҳамма жойида зич* деб айтилади. Масалан, рационал сонлар тўплами бутун сон ўқининг ҳамма жойида зич бўлган тўплам бўлади. Агар A тўплам ҳеч бир шарда зич бўлмаса, яъни агар ҳар бир $B \subset X$ шар ўз ичида A тўплам билан умумий нуқтага нуқтага эга бўлмаган бошқа бир $B' \subset B \subset X$ шарни сақласа, у ҳолда *A тўплам ҳеч бир жойда зич бўлмаган тўплам* деб айтилади.

Агар X метрик фазонинг ҳамма жойида зич бўлган саноқли қисм тўплам мавжуд бўлса, у ҳолда бу X метрик фазо *сепарабель метрик фазо* деб айтилади.

Бошқача қилиб айтганда, X метрик фазода

$$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ... \qquad (1.1.21)$$

кетма–кетлик мавжуд бўлиб, шу X метрик фазонинг ихтиёрий $x \in X$ элементи учун шу $x \in X$ элементга яқинлашувчи бўлган (1.1.21) кетма–кетликнинг шундай бир $x_{n_1},\ x_{n_2},\ ...,\ x_{n_k},\ ...$ қисмий кетма–кетлиги мавжуд бўлади.

Шундай қилиб, X метрик фазонинг сепарабель метрик фазо бўлишлик таърифини қуйидагича ифода қилиш мумкин: X метрик фазода шундай бир $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...$ кетма–кетлик мавжуд бўлиб, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон ва ихтиёрий $x \in X$ элемент учун бу кетма–кетликнинг шундай бир x_{n_0} элементи мавжуд бўлиб, бунда $\rho(x,\ x_{n_0}) < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади.

Энди биз айрим асосий фазоларнинг сепарабель фазо бўлишлигини кўриб чиқамиз.

1. *$n-$ ўлчамли R^n Евклид фазоси сепарабелдир.* Ҳақиқатдан ҳам, бу фазодаги координаталари рационал сонлардан иборат бўлган E тўплам саноқли ва ҳамма жойда зич тўплам бўлади.

2. *$C[a, b]$ фазо сепарабелдир.* Ҳақиқатдан ҳам, бу фазодаги барча рационал коэффициентли кўпҳадларнинг C_0 тўплами $C[a, b]$ фазонинг ҳамма жойида зич эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Ихтиёрий $x(t) \in C[a, b]$ функцияни олайлик. У ҳолда Вейерштрасс теоремасига кўра, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $p(t)$ кўпҳад топилиб, бунда

$$\max_t |x(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Иккинчи томондан эса, рационал коэффициентли $p_0(t)$ кўпҳад топилиб, бунда

$$\max_t |p(t) - p_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Бу ердан эса, учбурчак тенгсизлигига кўра

$$\max_t |x(t) - p_0(t)| < \varepsilon$$

тенгсизлиги келиб чиқади. Бу эса, шу $C[a, b]$ фазонинг сепарабель фазо эканлигини билдиради.

3. l_p *фазо сепарабелдир.* Ҳақиқатдан ҳам, бу фазодаги $(r_1, r_2, ..., r_n, 0, 0, ...)$ кўринишдаги барча x элементларнинг тўпламини E_0 орқали белгилаймиз, бунда $r_i -$ ихтиёрий рационал сон ва $n -$ эса ихтиёрий натурал сондир. Бу E_0 тўплам саноқлидир. Шу E_0 тўплам l_p фазонинг ҳамма жойида зич тўплам эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, бу l_p фазодан ихтиёрий $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \in l_p$ элемент ва ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сонни олайлик. У ҳолда шундай бир $n -$ натурал сон топилиб, бунда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

тенгсизлик бажарилади.

Энди $x_0 = (r_1, r_2, ..., r_n, 0, 0, ...)$ элементни

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - r_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

тенгсизлик ўринли бўладиган қилиб танлаймиз. У ҳолда

$$[\rho(x, x_0)]^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k - r_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан эса, исбот қилиниши талаб этилган

$$\rho(x, x_0) < \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, l_p фазо сепарабель метрик фазо бўлади.

4. $L_p[a, b]$ *фазо сепарабелдир.* Бу фазо Лебег маъносида $p -$ даражаси билан абсолют интегралланувчи бўлган ўлчовли функциялар синфидан ташкил топган тўпламдир. Лебег интегралининг абсолют узлуксизлик хоссасига кўра, $L_p[a, b]$ фазодаги ихтиёрий $x(t)$ функция учун

$$x_n(t)=\begin{cases} x(t), & агар\ |x(t)|\le n \\ 0, & агар\ |x(t)|>n \end{cases}$$

тенглик билан аниқланадиган чегараланган ўлчовли функциялар кетма–кетлиги мавжудки, бунда бу кетма-кетлик p кўрсаткич билан ўртача маънода шу $x(t)$ функцияга яқинлашади. Бундан ташқари, ўлчовли функцияларнинг $C-$ хоссасига кўра[1], ҳар бир чегараланган ўлчовли функция узлуксиз функциялар кетма-кетлигининг p кўрсаткич билан ўртача маънода лимити бўлади. Шунга кўра, $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган функциялар тўплами $L_p[a,b$ фазонинг ҳамма жойида зичдир. Иккинчи томондан эса, рационал коэффициентли кўпҳадларнинг саноқли тўплами $C[a,b]$ фазонинг ҳамма жойида шу фазо метрикаси бўйича зичдир. Бундан эса, $L_p[a,b]$ фазонинг метрикаси бўйича ҳам зич бўлишлиги келиб чиқади. Шунинг учун қаралаётган рационал коэффициентли кўпҳадларнинг саноқли тўплами $L_p[a,b]$ фазонинг метрикаси бўйича шу $L_p[a,b]$ фазонинг ҳамма жойида зич тўплам эканлигини ҳосил қиламиз. Бу эса $L_p[a,b]$ фазонинг сепарабель фазо эканлигини билдиради.

5. *s фазо сепарабелдир.* Ҳақиқатдан ҳам, бу фазодаги $(r_1,\ r_2,\dots,r_n,0,0,\dots)$ кўринишдаги барча x элементларнинг тўпламини E_0 орқали белгилаймиз, бунда r_i- ихтиёрий рационал сон ва $n-$ эса ихтиёрий натурал сондир. Бу E_0 тўплам саноқлидир. Шу E_0 тўпламдан $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\dots,x_n,\dots)\in s$ ихтиёрий танланган элементга яқинлашувчи қисмий кетма–кетлик ажратиш мумкинлигини кўрсатамиз. Ҳар бир x_n сон учун $k\to\infty$ да шу x_n сонга яқинлашувчи бўлган $\{r_n^{(k)}\}$, $k=1,2,\dots$ рационал сонларнинг кетма–кетлигини қуриш мумкин. E_0 тўпламдан $\{x^{(k)}\}$ кетма–кетликни

[1] Бу ҳақида А.Н. Колмогоров, С.В. Фоминларнинг “Элементы теории функций и функционального анализа”, М.: Наука, 1976. ва И.П. Натансоннинг “Теория функций вещественной переменной”, М.: Наука, 1974. китобларидан ўқиш мумкин.

$$x^{(k)}=(r_1^{(k)},r_2^{(k)},\dots,r_k^{(k)},0,0,\dots)$$

шаклида қараймиз. Осонгина кўриш мумкинки, бунда $k\to\infty$ да $x^{(k)}\to x$ бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, бу тасдиқни исботлаш учун $n\to\infty$ да $x^{(k)}$ элементнинг $n-$ компонентаси x элементнинг $n-$ компонентасига яқинлашувчи эканлигини кўрсатиш керак бўлади. Бу эса осонгина ҳосил қилинади, чунки етарлича катта $k>n$ учун

$$\left|x_n-r_n^{(k)}\right|<\varepsilon$$

тенгсизликка эга бўламиз.

6. *m фазонинг сепарабель эмаслиги*. Шу m тўпламдан $x=(x_1,x_2,x_3,\dots,x_i,\dots)\in m$ элементлар тўпламини қараймиз, бунда ҳар бир $x_i=0$ ёки $x_i=1$ бўлсин. Бундай элементлар тўплами континуум қуватга эга бўлади. Бу тўпламдан иккита ҳар хил $x=(x_1,x_2,x_3,\dots,x_i,\dots)\in m$ ва $y=(y_1,y_2,y_3,\dots,y_i,\dots)\in m$ элементларни олайлик. У ҳолда

$$\rho(x,y)=\sup_i\left|x_i-y_i\right|=1$$

бўлади ва биз бир–биридан бирга тенг масофада жойлашган элементлар континуумта эканлигига эга бўламиз. Бундан эса осонгина m фазонинг сепарабель эмаслиги келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, фараз қилайлик m фазода саноқли ва ҳамма жойда зич бўлган E_0 тўплам мавжуд бўлсин. E_0 тўпламнинг ҳар бир элементининг атрофида $\varepsilon=\frac{1}{3}$ радиусли шарларни оламиз. У ҳолда m фазонинг барча элементлари бу шарларнинг ичида жойлашган бўлади. Бу шарлар саноқлита бўлгани учун, уларнинг ҳеч бўлмаганда бирида шу юқоридаги E_0 континуал тўпламнинг иккита ҳар хил x ва y элементлари бўлади. Бундай шарнинг маркази x_0 бўлсин. У ҳолда

$$1=\rho(x,y)\le\rho(x,x_0)+\rho(x_0,y)\le\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

қарама–қаршилик ҳосил бўлади. Шунга кўра, *m фазонинг сепарабель эмаслиги келиб чиқади. Шундай бўлсада, бу фазонинг қисм фазоси бўлган s фазо сепарабелдир.*

Мустақил ечиш учун мисоллар.

1.1. Тўпламлар назарияси ва унинг тадбиқларида жуда муҳим роль ўйнайдиган *иккилик принципи* деб аталувчи

1. Йиғиндининг тўлдирувчиси тўлдирувчилар кесишмасига тенг: $S \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \left(S \setminus A_\alpha\right)$.

2. Кесишманинг тўлдирувчиси тўлдирувчилар йиғиндисига тенг: $S \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \left(S \setminus A_\alpha\right)$ айниятларини исботланг, бунда S – қандайдир тўплам бўлиб барча A_α тўпламлар унинг ихтиёрий қисм тўпламлари, $S \setminus A_\alpha$ айирма эса A_α тўпламнинг S тўпламгача тўлдирувчисидир.

1.2. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n = \bigcap\limits_{n}\left(\bigcup\limits_{k\geq n} E_k\right)$ тўплам, яъни чексиз сондаги E_n тўпламларга тегишли бўлган нуқталарнинг тўпламига E_n *тўпламлар кетма–кетлигининг юқори лимити* деб айтилади. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n = \bigcup\limits_{n}\left(\bigcap\limits_{k\geq n} E_k\right)$ тўпламга E_n *тўпламлар кетма–кетлигининг қуйи лимити* деб айтилади. Ихтиёрий E_n тўпламлар кетма–кетлиги учун $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n \subseteq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n$ муносабат ўринли эканлигини исботланг. Агар юқори ва қуйи лимитлар тенг бўлса, у ҳолда уларнинг умумий қиймати E_n *тўпламлар кетма–кетлигининг лимити* деб айтилади.

1.3. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n \neq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n$ муносабат ўринли бўлган E_n тўпламлар кетма–кетлигига мисол келтиринг.

1.4. X – ихтиёрий тўплам ва ҳар бир n учун $E_n \subset X$ бўлган ихтиёрий E_n тўпламлар кетма–кетлиги учун $X \setminus \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(X \setminus E_n\right)$ формулани исботланг.

1.5. Агар барча ҳақиқий сонлар тўпламида x ва y орасидаги масофани $\sin^2(x-y)$ деб олсак, у ҳолда бу тўплам метрик фазо бўладими?.

2-§. Тўла метрик фазолар

1. Метрик фазодаги фундаментал кетма–кетликлар. X ихтиёрий метрик фазо берилган бўлсин. Шу фазодан олинган ихтиёрий $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ нуқталар кетма–кетлигини қарайлик.

Таъриф. *Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча $m \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун $\rho(x_n,\ x_m) < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ нуқталар кетма–кетлиги Коши кетма–кетлиги ёки фундаментал кетма–кетлик деб айтилади. Бундай кетма–кетликлар учун ўзига яқинлашувчи кетма–кетлик термини ҳам ишлатилади.*

Бу таърифни қуйидагича ҳам келтириш мумкин.

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча $p \in N$ натурал сонлари учун $\rho(x_{n+p},\ x_n) < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ нуқталар кетма–кетлиги фундаментал кетма–кетлик деб айтилади.

1–теорема. *Агар X метрик фазодан олинган $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нуқталар кетма–кетлиги $x \in X$ нуқтага яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик бўлади.*

Исбот. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча $m \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун $\rho(x_n,\ x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ва $\rho(x_m,\ x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликлари ўринли бўлади. Бундан эса, учбурчак тенгсизлигига кўра, барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча $m \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун

$$\rho(x_n,\ x_m) < \rho(x_n,\ x) + \rho(x,\ x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Теорема исбот бўлди.

X ихтиёрий метрик фазо учун тескари тасдиқ ҳамма вақт ҳам ўринли бўлавермайди. Шундай метрик фазолар мавжудки, бу фазода фундаментал бўлиб, лекин бу фазода ҳеч қандай лимитга эга бўлмаган кетма–кетликлар топилади.

1–мисол. X рационал сонлар тўпламидан иборат бўлиб, бундаги масофани $\rho(r_1,\ r_2)=|r_1-r_2|$ формула бўйича аниқлаймиз. У ҳолда X тўплам метрик фазо бўлади. Бу фазодаги

$$r_1=\frac{1}{2},\ r_2=\frac{1}{2^2},\ \ldots,r_n=\frac{1}{2^n},\ldots$$

кетма–кетлик фундаментал ва яқинлашувчи кетма–кетлик бўлади ва унинг лимити $r_0=0$ бўлади. Энди бу фазодан бошқа бир

$$r_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

формула бўйича аниқланадиган кетма–кетликни олсак, у ҳолда бу кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик бўлиб X метрик фазода яқинлашувчи эмас, чунки бу кетма–кетликнинг лимити

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2{,}718281828459045235360\ldots$$

рационал сон бўлмайди.

2–мисол. X тўплам $[a,b]$ ораликда берилган $P(t)$ кўпҳадлар тўплами бўлсин. Агар $P(t),\ Q(t)\in X$ бўлса, у ҳолда бу тўпламдаги масофани

$$\rho(\,P(t),\ Q(t))=\max_{t\in[a,b]}|P(t)-Q(t)|$$

формула бўйича аниқлаймиз.

X тўпламда берилган $\{P_n(t)\}$ кўпҳадлар кетма–кетлиги $[a,b]$ ораликда текис яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити кўпҳад бўлмаган узлуксиз функция бўлсин. У ҳолда $\{P_n(t)\}$ кўпҳадлар кетма–кетлиги X тўпламда фундаментал кетма–кетлик бўлади, лекин бу X тўпламда лимитга эга бўлмайди.

Таъриф. *Агар X метрик фазодан олинган ҳар қандай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ фундаментал кетма–кетлик шу фазодаги қандайдир $x\in X$ нуқтага яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу X метрик фазо тўла метрик фазо деб айтилади.*

2–теорема. *X метрик фазодан олинган ҳар қандай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ фундаментал кетма–кетлик шу X метрик фазода чегаралангандир.*

Исбот. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ фундаментал кетма–кетлик бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча $m \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун $\rho(x_n,\ x_m) < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунга кўра, $\varepsilon = 1$ деб олсак, у ҳолда шундай бир $N = N(1)$ номер топилиб барча $n \geq N(1)$ ва барча $m \geq N(1)$ номерлар учун $\rho(x_n,\ x_m) < 1$ тенгсизлиги бажарилади. Бу ерда $m = N$ деб олсак, у ҳолда $\rho(x_n,\ x_N) < 1$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Агар

$$C = \max\{1,\ \rho(x_1,\ x_N),\ \rho(x_2,\ x_N),\ \ldots,\ \rho(x_{N-1},\ x_N)\}$$

ўзгармасни танласак, у ҳолда ихтиёрий $n \in N$ натурал сон учун $\rho(x_n,\ x_N) < C$ тенгсизлигини ҳосил қиламиз, яъни $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ кетма–кетлик маркази $x_N \in X$ нуқтада бўлган C радиусли шарга жойлашган бўлади. Теорема исбот бўлди.

3–теорема. *Агар X метрик фазодан олинган ҳар қандай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ фундаментал кетма–кетликнинг қандайдир қисмий кетма–кетлиги шу фазодаги қандайдир $x \in X$ нуқтага яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ кетма–кетлик ҳам шу $x \in X$ нуқтага яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ фундаментал кетма–кетлик ва $\left\{x_{n_k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ қисмий кетма–кетлик $x \in X$ нуқтага яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча $m \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун $\rho(x_n,\ x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Бундан ташқари, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $K = K(\varepsilon)$ номер топилиб барча $k \geq K(\varepsilon)$ номерлар учун $\rho(x_{n_k},\ x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$

тенгсизлиги ўринли бўлади. $N_0 = \max\left(N(\varepsilon),\, n_{K(\varepsilon)}\right)$ бўлсин. У ҳолда, биз k номерни $n_k \ge N_0$ тенгсизлик ўринли бўладиган қилиб танлашимиз мумкин, чунки $k \to \infty$ да $n_k \to \infty$ бўлади. Масалан, ихтиёрий $k \in N$ учун $n_k \ge k$ эканлигидан фойдаланиб, $k = N_0$ деб олсак, $n_k \ge N_0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунинг учун учбурчак тенгсизлигига кўра, барча $n \ge N_0$ ва $m = n_{N_0}$ номер учун

$$\rho(x_n,\ x) < \rho(x_n,\ x_{n_{N_0}}) + \rho(x_{n_{N_0}},\ x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Теорема исбот бўлди.

2. Тўла метрик фазога мисоллар. Биз қуйида тўла бўлган айрим метрик фазоларни келтирамиз.

1. R_p^n *метрик фазонинг тўлалиги.* Маълумки, бу фазо ҳақиқий сонларнинг n–та $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ тартибланган системаси шаклидаги элементларнинг тўплами бўлиб, бунда $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ва $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ элементлар орасидаги масофа

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \left|y_k - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

формула билан аниқланади, бунда $p \ge 1$ бўлган сон.

4–теорема. *R_p^n метрик фазодан олинган ҳар қандай $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, бунда $x_m = (x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn})$ бўлган кетма–кетлик $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ лимитга яқинлашувчи бўлишлиги учун*

$$\lim_{m\to\infty} x_{mi} = a_i\,,\ i = \overline{1, n}$$

тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исбот. $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = a$ бўлсин. У ҳолда $\lim\limits_{m\to\infty} \rho_p(x_m, a) = 0$ бўлади. Шунга кўра, ҳар бир $i = 1, 2, ..., n$ учун $m \to \infty$ да

$$0 \le \left|x_{mi} - a_i\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} \left|x_{mk} - a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho_p(x_m, a) \to 0$$

бўлади. Аксинча, агар ҳар бир $i=1, 2, ..., n$ учун $\lim\limits_{m\to\infty}\left|x_{mi}-a_i\right|=0$ шарт бажарилса, у ҳолда $m\to\infty$ да

$$\rho_p(x_m, a)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{mi}-a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0$$

бўлади. Теорема исбот бўлди.

5–теорема. *R_p^n метрик фазо тўладир.*

Исбот. R_p^n метрик фазодан олинган $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ нуқталар кетма–кетлиги фундаментал кетма–кетлик бўлсин, бунда $x_m=(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$. У ҳолда ҳар бир $i=1, 2, ..., n$ учун $\{x_{mi}\}_{m=1}^{\infty}$ сонли кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон учун шундай бир $N=N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $k\geq N(\varepsilon)$ ва барча $m\geq N(\varepsilon)$ номерлар учун $\rho_p(x_k,\ x_m)<\varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади.

Бундан эса,

$$0\leq\left|x_{ki}-x_{mi}\right|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_{ki}-x_{mi}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\rho_p(x_k, x_m)<\varepsilon$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Сонли кетма–кетликлар учун Коши критериясига кўра, ҳар бир $i=1, 2, ..., n$ учун $\{x_{mi}\}_{m=1}^{\infty}$ сонли кетма–кетлик яқинлашувчи кетма–кетлик бўлишлиги келиб чиқади, яъни шундай бир $a_i\in R$ ҳақиқий сон мавжуд бўлиб

$$\lim_{m\to\infty}x_{mi}=a_i,\ i=\overline{1, n}$$

тенглик бажарилади. Шунинг учун 4–теоремага кўра R_p^n метрик фазодан олинган $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, бунда $x_m=(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$ бўлган кетма–кетлик $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ лимитга яқинлашувчи бўлади. Теорема исбот бўлди. Худди шунга ўхшаш R_∞^n фазонинг тўла фазо эканлиги кўрсатилади.

2. *$C[a,b]$ метрик фазонинг тўлалиги.* Маълумки, бу фазо $[a,b]$ сегментда аниқланган ҳақиқий қийматли $x(t)$ узлуксиз функцияларнинг тўплами бўлиб, бунда $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар

орасидаги масофа $\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ формула билан аниқланади. $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетлик $C[a,b]$ фазодаги фундаментал кетма–кетлик бўлсин. Бу эса ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон учун шундай бир $N=N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n\ge N(\varepsilon)$ ва барча $m\ge N(\varepsilon)$ номерлар учун

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлишини билдиради. Функциялар кетма–кетлигининг текис яқинлашиши ҳақидаги Коши критериясига кўра, бу $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ функционал кетма–кетлик $[a,b]$ сегментда текис яқинлашувчидир. Ҳамда текис яқинлашувчи функционал кетма–кетликларнинг хоссасига кўра $x(t)$ лимитик функция ҳам шу $[a,b]$ сегментда узлуксиз функция бўлади.

Ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон учун шундай бир $N=N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n\ge N(\varepsilon)$ ва барча $m\ge N(\varepsilon)$ номерлар, ҳамда барча $t\in[a,b]$ учун

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли эканлигидан $m\to\infty$ да лимитга ўтсак, у ҳолда

$$|x_n(t)-x(t)|\le\varepsilon$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу эса, $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетликнинг $C[a,b]$ фазо метрикаси бўйича $x(t)$ лимитик функцияга яқинлашишини билдиради. Демак, $C[a,b]$ фазо тўла фазодир.

3. l_p *метрик фазонинг тўлалиги.* Маълумки, бу фазо ҳақиқий сонлардан тузилган $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ сонли кетма–кетликда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$ қатор яқинлашувчи бўлган барча $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ кетма–кетликларнинг тўплами бўлиб, бу

$$l_p=\left\{x:\ x=(x_1,x_2,...,x_n,...),\ x_n\in R,\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\right\}$$

тўпламда $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ ва $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ элементлар орасидаги масофа

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

формула билан аниқланган ва бунда $p\geq 1$ деб олинган.

$\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетлик l_p фазодаги фундаментал кетма–кетлик бўлсин. Бу эса ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон учун шундай бир $N=N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n\geq N(\varepsilon)$ ва барча $m\geq N(\varepsilon)$ номерлар учун

$$\rho_p(x^{(n)},x^{(m)})=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon \qquad (1.2.1)$$

тенгсизлиги ўринли бўлишини билдиради. Бу ерда $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},...,x_k^{(n)},...)$. Юқоридаги (1.2.1) тенгсизликдан ҳар бир $k\in N$ учун $\left|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\right|<\varepsilon$ тенгсизлиги келиб чиқади, яъни ҳар бир $k\in N$ учун $\left\{x_k^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ҳақиқий сонлар кетма–кетлиги фундаменталдир ва шунинг учун яқинлашувчи бўлади. $x_k=\lim\limits_{n\to\infty}x_k^{(n)}$ бўлсин. $x=(x_1,x_2,...,x_k,...)$ деб белгилаймиз. У ҳолда қуйидагиларни кўрсатиш талаб этилади:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p<\infty$ қатор яқинлашувчи, яъни $x\in l_p$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x^{(n)},\ x)=0$.

Маълумки, юқоридаги (1.2.1) тенгсизликдан ҳар бир танланган M натурал сони учун

$$\left(\sum_{k=1}^{M}\left|x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon \qquad (1.2.2)$$

тенгсизлиги келиб чиқади. Бу йиғиндида қўшилувчилар чекли бўлиб, ҳар бир танланган n натурал сони учун $m\to\infty$ да лимитга ўтсак, у ҳолда

$$\left(\sum_{k=1}^{M}\left|x_k^{(n)}-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\varepsilon \qquad (1.2.3)$$

тенгсизлиги келиб чиқади. Бу тенгсизлик ихтиёрий M натурал сони учун ўринлидир. (1.2.3) тенгсизликда $M \to \infty$ да лимитга ўтсак, у ҳолда

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \qquad (1.2.4)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.2.5)$$

шаклидаги *Минковский тенгсизлигидан* , ҳамда $\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} \right|^p < \infty$ ва $\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p < \infty$ қаторларнинг яқинлашувчи эканлигидан а) тасдиқ келиб чиқади, яъни $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ қатор яқинлашувчи ва шунинг учун $x \in l_p$ бўлади. Бундан ташқари, $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$ тенгсизлик ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун бажарилади. Бу эса

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)},\ x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

тенгликнинг ўринли эканлигини билдиради, яъни l_p фазодаги метрика бўйича $n \to \infty$ да $x^{(n)} \to x$ эканлигини билдиради. б) тасдиқ ҳам исбот бўлди. Демак, l_p метрик фазо тўла метрик фазодир.

4. *m метрик фазонинг тўлалиги.* Маълумки, бу фазо $x = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_i, \dots)$ чегараланган сонли кетма–кетликлардан тузилган тўплам бўлиб, бу m тўпламда $x = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_i, \dots)$ ва $y = (y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_i, \dots)$ элементлар орасидаги масофа

$$\rho(x,\ y) = \sup_i |x_i - y_i|$$

тенглик билан киритилади.

$\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетлик m фазодаги фундаментал кетма–кетлик бўлсин. Бу эса ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча $k \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун

$$\sup_i \left| x_i^{(n)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon \qquad (1.2.6)$$

тенгсизлиги ўринли бўлишини билдиради.

Бундан ташқари, $x^{(n)} \in m$ эканлигидан шундай бир $K_n > 0$ мусбат ўзгармас сон мавжуд бўлиб, барча $i \in N$ учун $\left| x_i^{(n)} \right| \leq K_n$ тенгсизлиги ўринли бўлишлиги келиб чиқади. (1.2.6) тенгсизликдан эса барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча $k \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун

$$\left| x_i^{(n)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon \qquad (1.2.7)$$

тенгсизлигининг $i \in N$ бўйича текис ўринли бўлишлиги келиб чиқади. $i \in N$ сонни танлаймиз. У ҳолда $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ сонли кетма–кетлик Коши критериясининг шартларини қаноатлантиргани учун бу кетма–кетлик қандайдир x_i сонга яқинлашувчи бўлади. (1.2.7) тенгсизликда $k \to \infty$ да лимитга ўтсак, у ҳолда барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча i номерлар учун

$$\left| x_i^{(n)} - x_i \right| \leq \varepsilon \qquad (1.2.8)$$

тенгсизлиги келиб чиқади. Бундан эса

$$\left| x_i \right| \leq \left| x_i^{(N(\varepsilon))} - x_i \right| + \left| x_i^{(N(\varepsilon))} \right| \leq \varepsilon + K_{N(\varepsilon)}$$

тенгсизлигини барча $i \in N$ учун ҳосил қиламиз. Бу эса $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ кетма–кетликнинг чегараланган кетма–кетлик эканлигини билдиради, яъни $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) \in m$ бўлади. (1.2.8) тенгсизликдан барча $n \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун

$$\sup_i \left| x_i^{(n)} - x_i \right| \leq \varepsilon \qquad (1.2.8)$$

тенгсизлигини ҳам ҳосил қиламиз, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун

$$\rho(x^{(n)}, x) \leq \varepsilon \qquad (1.2.9)$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Бу эса m фазодаги метрика бўйича $n \to \infty$ да $x^{(n)} \to x$ эканлигини билдиради. Демак, m метрик фазо тўла метрик фазодир.

5. c *метрик фазонинг тўлалиги.* Маълумки, бу фазо $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ барча яқинлашувчи сонли кетма–кетликлардан тузилган тўплами бўлиб, бу c тўпламда $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ ва $y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots)$ элементлар орасидаги масофа

$$\rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|$$

тенглик билан киритилади. Биз c фазони m фазонинг қисм тўплами сифатида қараб унинг ёпиқ тўплам эканлигини кўрсатамиз. $x^{(n)} \in c$ бўлган кетма–кетлик бўлиб $n \to \infty$ да $x^{(n)} \to x$ бўлсин. У ҳолда $x \in c$ эканлигини кўрсатамиз, яъни $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ кетма–кетлик яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун

$$\rho(x^{(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{1.2.10}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Бу ерда биз n номерни танлаб олсак, у ҳолда $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_i^{(n)}, \dots)$ кетма–кетлик яқинлашувчи эканлигидан шундай бир i_0 номер топилиб, барча $i, j \geq i_0$ номерлар учун

$$\left| x_i^{(n)} - x_j^{(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.2.11}$$

тенгсизлиги ҳосил бўлади. Учбурчак тенгсизлигига кўра

$$\left| x_i - x_j \right| \leq \left| x_i - x_i^{(n)} \right| + \left| x_i^{(n)} - x_j^{(n)} \right| + \left| x_j^{(n)} - x_j \right| \leq$$

$$\leq 2\rho(x^{(n)}, x) + \left| x_i^{(n)} - x_j^{(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

тенгсизликни ёзамиз. Демак, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир i_0 номер топилиб, барча $i, j \geq i_0$ номерлар учун $\left| x_i - x_j \right| < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Сонли кетма–кетликлар учун Коши критериясига кўра, $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ кетма–

кетликнинг яқинлашувчи эканлигини ҳосил қиламиз. Демак, $x \in c$ экан. Шунга кўра c метрик фазо тўла метрик фазодир.

6. $\tilde{M}\ [a,b]$ *метрик фазонинг тўлалиги.* Маълумки, бу фазо $[a, b]$ оралиқда аниқланган барча муҳим чегараланган ўлчовли функцияларнинг фазоси бўлиб, бу фазодаги яқинлашиш *деярли ҳамма жойда текис яқинлашишини* билдиради.

$\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетлик $\tilde{M}\ [a,b]$ метрик фазодаги фундаментал кетма–кетлик бўлсин. Бу эса ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча $m \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун

$$\inf_{\substack{E,\\ mesE=0}} \left\{ \sup_{t\in[a,b]\setminus E} |x_n(t) - x_m(t)| \right\} < \varepsilon \qquad (1.2.12)$$

тенгсизлиги ўринли бўлишини билдиради. Шунга кўра, шундай бир $E_{N(\varepsilon)}$, $mesE_{N(\varepsilon)} = 0$ бўлган тўплам мавжудки, бунда барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча $m \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus E_{N(\varepsilon)}} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \qquad (1.2.13)$$

тенгсизлиги ўринли бўлади, яъни барча $n \geq N(\varepsilon)$ ва барча $m \geq N(\varepsilon)$ номерлар учун $[a, b]$ оралиқнинг деярли ҳамма жойида

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Бундан эса, ўз навбатида $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ муҳим чегараланган кетма–кетлик $[a, b]$ оралиқнинг деярли ҳамма жойида текис яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун шундай бир муҳим чегараланган $x(t)$ функция мавжуд бўлиб, бу функцияга шу кетма–кетлик $[a, b]$ оралиқнинг деярли ҳамма жойида яқинлашувчи бўлади. Бу эса $n \to \infty$ да $\rho(x_n, x) \to 0$ эканлигини ва шунга кўра, $\tilde{M}\ [a,b]$ фазонинг тўла фазо эканлигини билдиради.

7. $C_2[a,b]$ *метрик фазонинг тўла эмаслиги*. Маълумки, бу фазо $[a,b]$ сегментда аниқланган ҳақиқий қийматли $x(t)$ узлуксиз функцияларнинг тўплами бўлиб, бунда $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар

орасидаги масофа $\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|^2\,dt}$ формула билан аниқланади. Бу $C_2[-1,\ 1]$ фазода масалан,

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & агар \ \ -1 \le t \le -\dfrac{1}{n} \ \ бўлса, \\ nt, & агар \ \ -\dfrac{1}{n} \le t \le \dfrac{1}{n} \ \ бўлса, \\ 1, & агар \ \ \dfrac{1}{n} \le t \le 1 \ \ бўлса \end{cases}$$

кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик бўлади, чунки

$$\rho(x_n(t),\ x_m(t)) = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} |x_n(t)-x_m(t)|^2\,dt} \le \sqrt{\frac{2}{\min(n,m)}}$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, $n,m\to\infty$ да $\rho(x_n(t),\ x_m(t))\to 0$ бўлади. Бироқ бу кетма–кетлик $C_2[-1,\ 1]$ фазодаги ҳеч бир функцияга яқинлашмайди. Ҳақиқатдан ҳам, агар $f(t)\in C_2[-1,\ 1]$ бўлган функция бўлиб,

$$\psi(t) = \begin{cases} -1, & агар \ \ -1 \le t < 0 \ \ бўлса, \\ 1, & агар \ \ 0 \le t \le 1 \ \ бўлса \end{cases}$$

эса узилишга эга бўлган функция бўлса, у ҳолда интеграл шаклдаги Минковский тенгсизлигига кўра,

$$\left(\int\limits_{-1}^{1} |f(t)-\psi(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(t)-x_n(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{-1}^{1} |x_n(t)-\psi(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу ерда $f(t)$ функциянинг узлуксизлигига кўра тенгсизликнинг чап томонидаги интеграл нолдан фарқли бўлади. Биз

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^{1} |x_n(t)-\psi(t)|^2\,dt = 0$$

эканлигини бевосита интегрални ҳисоблаш йўли билан ҳосил қиламиз. Шунинг учун $\int\limits_{-1}^{1} |f(t)-x_n(t)|^2\,dt$ интеграл $n\to\infty$ да нолга интилиши мумкин эмас. Бу эса, $C_2[a,b]$ метрик фазонинг тўла эмаслиги билдиради.

3. Тўла метрик фазолар ҳақидаги теоремалар. Биз қуйида метрик фазоларнинг тўлалигига оид баъзи бир содда теоремаларни келтирамиз.

Тортилувчи оралиқлар системаси ҳақидаги Кантор теоремасига ўхшаш бўлган қуйидаги теорема ўринлидир.

6–теорема. *Ихтиёрий X тўла метрик фазодан олинган ичма–ич жойлашган ёпиқ шарлар кетма–кетлиги, яъни ҳар бир кейинги ёпиқ шар ўзидан олдинги ёпиқ шарнинг ичида жойлашган бўлиб уларнинг радиуслари нолга интилувчи бўлсин. У ҳолда битта ва фақат битта нуқта мавжуд бўлиб, бу нуқта шу ёпиқ шарларнинг барчасига тегишли бўлади.*

Исбот. Бу қаралаётган ёпиқ шарлар

$$\overline{U_{\varepsilon_1}(a_1)},\ \overline{U_{\varepsilon_2}(a_2)},\ \dots,\ \overline{U_{\varepsilon_n}(a_n)},\ \dots$$

бўлиб, теорема шартига кўра

$$\overline{U_{\varepsilon_1}(a_1)} \supset \overline{U_{\varepsilon_2}(a_2)} \supset \dots \supset \overline{U_{\varepsilon_n}(a_n)} \supset \dots$$

муносабатлар ўринли бўлади. Бу шарларнинг

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

марказлари кетма–кетлигини қараймиз. Ҳар бир $p \in N$ номер учун $\overline{U_{\varepsilon_{n+p}}(a_{n+p})} \subset \overline{U_{\varepsilon_n}(a_n)}$ эканлигидан $a_{n+p} \in \overline{U_{\varepsilon_n}(a_n)}$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун $\rho(a_{n+p}, a_n) \le \varepsilon_n$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунга кўра, ҳар бир $p \in N$ учун $n \to \infty$ да

$$\rho(a_{n+p}, a_n) \to 0$$

бўлади, яъни бу ёпиқ шарлар марказларининг кетма–кетлиги фундаменталдир. X тўла метрик фазо бўлгани учун шундай бир $a \in X$ нуқта мавжудки, бунда $n \to \infty$ да $\rho(a_n, a) \to 0$ бўлади. Ҳар бир танланган $k \in N$ номер учун $a_{k+n} \in \overline{U_{\varepsilon_k}(a_k)}$ бўлади. Шунга кўра, $a_k,\ a_{k+1}, \dots, a_{k+n}, \dots$ кетма–кетлик ҳам шу шарга тегишли бўлиб, бу $\overline{U_{\varepsilon_k}(a_k)}$ шарнинг ёпиқ эканлигидан $a \in X$ нуқта ҳам $\overline{U_{\varepsilon_k}(a_k)}$ шарга тегишли бўлади. Шундай қилиб, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ нуқта учун $a \in \overline{U_{\varepsilon_k}(a_k)}$, $k \in N$ бўлади.

Фараз қилайлик, бу ёпиқ шарлар учун a нуқтадан фарқли бошқа b нуқта ҳам мавжуд бўлсин, яъни $\rho(a,b)=\delta>0$ бўлсин. Ҳар бир $n=1,2,...,...$ номер учун $a,b\in\overline{U_{\varepsilon_n}(a_n)}$ эканлигидан

$$\delta=\rho(a,b)\le\rho(a,a_n)+\rho(a_n,b)\le 2\varepsilon_n$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бироқ $n\to\infty$ да $\varepsilon_n\to 0$ бўлади. Шунинг учун $n\to\infty$ да лимитга ўтсак $\delta\le 0$ бўлади. Бу қарама–қаршилик фаразимизнинг нотўғри эканлигини кўрсатади. Демак, $\overline{U_{\varepsilon_n}(a_n)}$ $,n\in N$ шарлар учун умумий нуқта ягона бўлади. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. Бу исбот қилинган теоремани бирмунча умумлаштириш мумкин. Метрик фазодан олинган F чегараланган тўпламнинг диаметри деб

$$d(F)=\sup_{x,y\in F}\rho(x,y)$$

сонга айтилади.

7–теорема. *Ихтиёрий X тўла метрик фазодан олинган ичма–ич жойлашган ёпиқ тўпламлар кетма–кетлигининг диаметрлари нолга интилувчи бўлсин. У ҳолда битта ва фақат битта нуқта мавжуд бўлиб, бу нуқта шу ёпиқ тўпламларнинг барчасига тегишли бўлади.*

Бу теореманинг исботи ҳам 6–теорема исботи каби бўлади. Маълумки, Кантор теоремаси орқали ўрнатиладиган сон ўқининг бу хоссасини тўлалик ёки ҳақиқий сонлар тўпламининг узлуксизлик таърифи сифатида қабул қилиш мумкин.

Ичма–ич жойлашган ёпиқ шарлар ҳақидаги теоремага ўхшаш теорема метрик фазонинг тўлалигини характерлайди.

8–теорема. *Агар ихтиёрий X тўла метрик фазодан олинган ихтиёрий ичма–ич жойлашган ёпиқ шарлар кетма–кетлигининг диаметрлари нолга интилганда ҳам бу шарлар бўш бўлмаган кесишмага эга бўлса, у ҳолда X метрик фазо тўла метрик фазо бўлади.*

Исбот. Бизга ихтиёрий $\{x_n\}$ фундаментал кетма–кетлик берилган бўлсин. Биз ҳар бир танланган $k\in N$ ва ихтиёрий $p\in N$ номер учун

$$\rho(x_{n_k+p},x_{n_k})<\frac{1}{2^k}$$

тенгсизлик ўринли бўладиган қилиб n_k номерни танлаб оламиз. Маркази x_{n_k} нуқтада ва радиуси $\frac{1}{2^{k-1}}$ сонга тенг бўлган $\overline{U_{\frac{1}{2^{k-1}}}(x_{n_k})}$ ёпиқ шарни олайлик. Бу шарлар учун $\overline{U_{\frac{1}{2^{k}}}(x_{n_{k+1}})} \subset \overline{U_{\frac{1}{2^{k-1}}}(x_{n_k})}$ ичма–ич жойлашганлик хоссаси ўринлидир. Ҳақиқатдан ҳам, агар $x \in \overline{U_{\frac{1}{2^{k}}}(x_{n_{k+1}})}$ бўлса, у ҳолда

$$\rho(x, x_{n_k}) \le \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \le \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади, яъни $x \in \overline{U_{\frac{1}{2^{k-1}}}(x_{n_k})}$ бўлади. Бу $\overline{U_{\frac{1}{2^{k-1}}}(x_{n_k})}$ шарларнинг радиуслари нолга интилади. Шунга кўра, теорема шартидан барча $\overline{U_{\frac{1}{2^{k-1}}}(x_{n_k})}$ шарларнинг ҳаммасига тегишли бўлган x_0 нуқта мавжуд бўлади. Бу x_0 нуқта шу берилган $\{x_n\}$ кетма–кетликнинг лимити бўлишлигини кўрсатамиз. $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма–кетлик x_0 нуқтага яқинлашувчидир, чунки $x_{n_k}, x_0 \in \overline{U_{\frac{1}{2^{k-1}}}(x_{n_k})}$ ва шунга кўра $k \to \infty$ да $\rho(x_{n_k}, x_0) \le \frac{1}{2^{k-1}} \to 0$ бўлади. Бунга кўра, бутун $\{x_n\}$ кетма–кетлик ҳам шу x_0 нуқтага яқинлашувчидир, чунки

$$\rho(x_n, x_0) \le \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$$

тенгсизликнинг ўнг томонини n_k ва n номерларни етарлича катта қилиб танлаш ҳисобига уни кичик қилиш мумкин бўлади (3–теоремани қўллаш ҳам мумкин эди). Шунга кўра $n \to \infty$ да $\rho(x_n, x_0) \to 0$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

Юқорида келтирилган 6–теорема ва 8–теоремаларни бирлаштириб қуйидаги теоремага келамиз.

9–теорема. *Ихтиёрий X метрик фазо тўла метрик фазо бўлишлиги учун ундан олинган ҳар қандай ичма–ич жойлашган ёпиқ шарлар кетма–кетлигининг радиуслари нолга интилганда ҳам бу шарлар бўш бўлмаган кесишмага эга бўлишлиги зарур ва етарли бўлади.*

Тўла метрик фазолар назариясида фундаментал аҳамиятга эга бўлган қуйидаги теорема ўринлидир.

10–теорема (Бэр теоремаси). *Ихтиёрий X тўла метрик фазо ҳеч бир жойда зич бўлмаган саноқли сондаги тўпламларнинг йиғиндиси шаклида тасвирланиши мумкин эмас.*

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик. X тўла метрик фазо ҳеч бир жойда зич бўлмаган саноқли сондаги тўпламларнинг йиғиндиси шаклида тасвирлансин. У ҳолда $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, бунда ҳар бир M_n $,n=1,2,...$ тўплам ҳеч бир жойда зич эмас. Маркази ихтиёрий a нуқтада бўлган радиуси эса бирга тенг бўлган $\overline{U_1(a)}$ ёпиқ шарни олайлик. Шунинг учун M_1 тўплам ҳеч бир жойда зич эмаслигидан $\overline{U_1(a)}$ шар ичида M_1 тўпламнинг нуқталарини сақламайдиган шундай бир $r_1<\frac{1}{2}$ радиусли $\overline{U_{r_1}(a_1)}$ шар мавжуд бўлади. Шунингдек M_2 тўплам ҳеч бир жойда зич эмаслигидан $\overline{U_{r_1}(a_1)}$ шар ичида M_2 тўпламнинг нуқталарини сақламайдиган шундай бир $r_2<\frac{1}{2^2}$ радиусли $\overline{U_{r_2}(a_2)}$ шар мавжуд бўлади. Бу жараённи давом эттириб биз ичма–ич жойлашган ва радиуслари нолга интилувчи

$$\overline{U_{r_1}(a_1)}\ ,\ \overline{U_{r_2}(a_2)}\ ,\ ...\ ,\overline{U_{r_n}(a_n)}\ ,\ ...$$

ёпиқ шарлар кетма–кетлигини ҳосил қиламиз. Шу билан бирга $\overline{U_{r_n}(a_n)}$ шар $M_1,M_2,...,M_n$ тўпламларнинг нуқталарини сақламайди. 6–теоремага кўра, шундай бир $a_0\in X$ нуқта мавжудки, бу нуқта барча шарларга тегишли бўлади. Иккинчи томондан эса, бу a_0 нуқта M_n тўпламларнинг ҳеч бирига тегишли бўлмайди. Шунинг учун

$$a_0 \notin X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

бўлади. Биз қарама–қаршиликка келдик. Бу қарама–қаршилик теоремани исбот қилади.

Хусусан бу теоремадан, *яккаланган нуқталарсиз бўлган ҳар қандай тўла метрик фазо саноқсиз эканлиги келиб чиқади*. Ҳақиқатдан ҳам, бундай фазоларда фақат биргина нуқтани сақлайдиган ҳар бир тўплам ҳеч бир жойда зич эмас.

Агар M тўпламни ҳеч бир жойда зич бўлмаган чекли ёки саноқли сондаги тўпламларнинг йиғиндиси шаклида тасвирлаш мумкин бўлса, у ҳолда бу тўплам 1–категориядаги тўплам деб айтилади. 1–категориядаги тўплам бўлмаган ҳар қандай тўплам 2–категориядаги тўплам деб айтилади. Масалан, сон ўқидаги рационал сонлар тўплами 1–категориядаги тўплам бўлади. Сон ўқидаги иррационал сонлар тўплами эса 2–категориядаги тўплам бўлишлиги юқоридаги Бэр теоремасидан келиб чиқади. Худди шунингдек Бэр теоремасига кўра, ҳар қандай тўла метрик фазо 2–категориядаги тўплам бўлишлиги келиб чиқади.

4. Метрик фазолардаги узлуксиз акслантиришлар. Гомеоморфизм. Изометрия. Бизга иккита X ва Y метрик фазолар берилган бўлсин. Бу X метрик фазодаги қандайдир M тўпламда аниқланган ва қийматлари Y метрик фазода бўладиган f акслантириш берилган бўлсин.

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ мусбат сон топилиб $\rho_X(x, x_0) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи берилган $x_0 \in M$ нуқта ва барча $x \in M$ нуқталар учун $\rho_Y(f(x),\ f(x_0)) < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ акслантириш $x_0 \in M$ нуқтада узлуксиз акслантириш деб айтилади.

$y = f(x)$ акслантиришнинг $x_0 \in M$ нуқтада узлуксиз эканлигидан ихтиёрий $x_n \to x_0$ $(x_n,\ x_0 \in M)$ кетма–кетлик учун $f(x_n) \to f(x_0)$ эканлиги келиб чиқади. Бу тасдиққа тескари бўлган тасдиқ ҳам тўғридир: агар $x_0 \in M$ нуқтага яқинлашувчи бўлган ихтиёрий $\{x_n\} \subseteq M$ кетма–кетлик учун

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

эканлиги келиб чиқса, у ҳолда $y = f(x)$ акслантириш $x_0 \in M$ нуқтада узлуксиз бўлади. Бу тасдиқнинг исботи ҳақиқий ўзгарувчили ҳақиқий қийматли функция учун келтирилгани сингари бўлади. Агар $y = f(x)$ акслантириш ҳар бир $x_0 \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу акслантириш шу M тўпламда узлуксиз акслантириш деб айтилади.

Худди шунга ўхшаш кўп ўзгарувчили акслантиришларнинг узлуксизлиги ҳақида гапириш мумкин бўлади.

Агар ҳар бир $x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$, бунда $X_1,\ X_2, ..., X_n$ берилган метрик фазолар бўлиб, бу ўзгарувчиларга Y метрик фазодан олинган $y \in Y$ элементни мос қўядиган $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ акслантириш берилган бўлса, у ҳолда бу акслантиришнинг ҳам узлуксизлик таърифини киритиш мумкин.

$x^0 = (x_1^0,\ x_2^0, ..., x_n^0) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = X$ тайинланган нуқта бўлсин.

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ мусбат сон топилиб $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho^2{}_{X_i}(x_i, x_i^0) < \delta^2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x = (x_1,\ x_2, ..., x_n),\ \ x \in X$ нуқталар учун

$$\rho_Y\,(\,f(x_1, x_2, ..., x_n),\ f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)) < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ акслантириш $x^0 = (x_1^0,\ x_2^0, ..., x_n^0) \in X$ нуқтада узлуксиз акслантириш деб айтилади. Бундай акслантиришга мисол сифатида $\rho(x_1, x_2)$ масофани қараш мумкин бўлади, бунда $(x_1,\ x_2) \in X \times X$ ва $Y = R$ бўлиб, учбурчак аксиомасига кўра

$$\left|\rho(x_1, x_2) - \rho(x_1^0, x_2^0)\right| \le \rho(x_1, x_1^0) + \rho(x_2, x_2^0)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса масофанинг узлуксиз эканлиги келиб чиқади.

Агар $f : X \to Y$ акслантириш ўзаро бир қийматли бўлса, у ҳолда $x = f^{-1}(y)$ тескари акслантириш мавжуд бўлиб, бу акслантириш Y метрик фазони X метрик фазога акслантиради. Бундай акслантиришлар *биектив акслантириш*лар деб айтилади.

Агар f акслантириш *ўзаро бир қийматли ва ўзаро узлуксиз* бўлса, яъни (f ва f^{-1} акслантиришлар узлуксиз бўлса), у ҳолда бу акслантириш *гомеоморф акслантириш* деб айтилади. Бу X ва Y метрик фазоларга эса *гомеоморф фазолар* деб айтилади. Мисол сифатида $(-\infty,\infty)$ сон ўқи билан $(-1,1)$ интервални олиш мумкин бўлади. Бу метрик фазолар ўртасида

$$y = \frac{2}{\pi} arctg\, x$$

формула билан гомеоморфизм ўрнатиш мумкин бўлади.

Агар f биектив акслантириш масофани сақласа, яъни ихтиёрий $x_1, x_2 \in X$ элементлар учун

$$\rho_Y (f(x_1),\ f(x_2)) = \rho_X (x_1,\ x_2)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу акслантиришга *изометрик акслантириш* деб айтилади.

Изометрик акслантириш X ва Y метрик фазолар ўртасида изометрия ўрнатади.

Агар иккита X ва Y метрик фазолар ўртасида изометрия ўрнатилган бўлса, у ҳолда бу фазо элементлари табиатан ҳар хил бўлсада, биз бу фазоларни метрик фазолар нуқтаи назаридан фарқламаймиз. Бундай фазолар айнан бир хил деб қаралади.

5. Метрик фазодаги тўпламларнинг чегараси. X метрик фазодан олинган ихтиёрий $M \subset X$ тўплам берилган бўлсин. Агар $a \in X$ нуқтанинг ихтиёрий атрофида шу M тўпламга тегишли бўлган нуқталар билан бирга шу M тўпламга тегишли бўлмаган нуқталар ҳам мавжуд бўлса, у ҳолда $a \in X$ нуқтага шу M тўпламнинг *чегаравий нуқтаси* дейилади. $a \in X$ чегаравий нуқта шу M тўпламга тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин.

M тўпламнинг барча чегаравий нуқталари тўпламига шу M тўпламнинг *чегараси* деб айтилади ва ∂M каби белгиланади. Масалан, $X = R$ бўлса, у ҳолда $\partial(a,b) = \{a,b\}$, $\partial[a,b] = \{a,b\}$ ва $X = R^2$ бўлса, у ҳолда $\partial(a,b) = [a,b]$, $\partial[a,b] = [a,b]$ бўлади. Худди шунингдек, агар $X = R^n$ бўлса, у ҳолда

$$\partial\left\{x : \rho(x,a) < \varepsilon,\ x \in R^n\right\} = \left\{x : \rho(x,a) = \varepsilon,\ x \in R^n\right\},$$

$$\partial\left\{x : \rho(x,a) \le \varepsilon,\ x \in R^n\right\} = \left\{x : \rho(x,a) = \varepsilon,\ x \in R^n\right\}$$

бўлади.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

2.1. Барча ҳақиқий сонлар тўпламида x ва y орасидаги масофани $\rho_1(x,y)=arctg\left|x-y\right|$ деб олсак, у ҳолда бу тўплам метрик фазо бўлишлигини кўрсатинг. Бу метрика $\rho(x,y)=\left|x-y\right|$ метрикага эквивалент бўладими?. Барча ҳақиқий сонлар тўплами $\rho_1(x,y)=arctg\left|x-y\right|$ метрикага нисбатан тўла фазо бўладими?.

2.2. Барча ҳақиқий сонлар тўпламида x ва y орасидаги масофани $\rho(x,y)=\sqrt{\left|x-y\right|}$ деб олсак, у ҳолда бу тўплам метрик фазо бўладими?.

2.3. Ҳақиқий сонларнинг тартибланган $x=(x_1,x_2)$ жуфтлигидан иборат барча элементлар тўплами X бўлсин. У ҳолда бу X тўпламда $x=(x_1,x_2)$ ва $y=(y_1,y_2)$ элементлар орасидаги масофани

$$\rho_1(x,y)=\max\left\{\left|y_1-x_1\right|,\left|y_2-x_2\right|\right\},\quad \rho_2(x,y)=\left|y_1-x_1\right|+\left|y_2-x_2\right|,$$

$$\rho_3(x,y)=\sqrt{\left|y_1-x_1\right|^2+\left|y_2-x_2\right|^2}$$

тенгликлар орқали аниқлаш мумкин эканлигини ва бу учта $\rho_1(x,y),\ \rho_2(x,y),\ \rho_3(x,y)$ метрикаларнинг эквивалент эканлигини исботланг.

2.4. X – ихтиёрий бўш бўлмаган тўплам бўлсин. У ҳолда бу X тўпламда $x\neq y$ учун $\rho(x,y)=1$ ва $x=y$ учун $\rho(x,y)=0$ бўлган масофани киритамиз. Бу (X,ρ) метрик фазо тўла бўладими?.

2.5. Ихтиёрий $p\in N$ учун $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+p}-x_n\right)=0$ бўлган узоқлашувчи $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ сонли кетма-кетликка мисол келтиринг.

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(x_{n+1}-x_n\right)=\infty$ бўлган яқинлашувчи $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ сонли кетма-кетликка мисол келтиринг.

2.7. Агар шундай бир $C>0$ мусбат сон мавжуд бўлиб ихтиёрий $n\in N$ учун $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|x_{k+1}-x_k\right|<C$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ сонли кетма-кетликнинг яқинлашувчи эканлигини исбот қилинг.

3-§. Метрик фазоларни тўла фазогача тўлдириш

Маълумки, математик анализда сон ўқининг тўлалик хоссаси катта аҳамиятга эгадир. Метрик фазоларнинг тўлалик хоссаси функционал анализ ва математик физика масалаларида ҳам катта аҳамиятга эгадир. Шунинг учун тўла бўлмаган метрик фазони тўлдириш жараёнини худди рационал сонлар тўпламини иррационал сонлар билан ҳақиқий сонлар тўпламигача тўлдиришга ўхшаш келтирамиз. Бу ғоянинг конструкцияси Кошига тегишли бўлиб, у рационал сонлардан тузилган фундаментал кетма–кетликларнинг эквивалент синфларини қараш билан ҳақиқий сонлар назариясини яратиш мумкинлигини кўрсатган.

Биз аввал қуйидаги тушунчани киритамиз.

Агар иккита X ва Y метрик фазолар ўртасида изометрия ўрнатилган бўлса, у ҳолда бу фазолар элементлари табиатан ҳар хил бўлсада, биз бу фазоларни метрик фазолар нуқтаи назаридан айнан бир хил деб қараймиз.

Яқинлашиш, тўлалик ва бошқа масалаларда изометрик фазоларни айнан тенг деб қараш мақсадга мувофиқдир.

Бизга X_0 метрик фазо берилган бўлсин. Айтайлик, бу фазо тўла бўлмасин, яъни бу фазода фундаментал бўлган ва шу X_0 метрик фазода лимитга эга бўлмаган кетма–кетлик мавжуд бўлсин.

Бу ҳолда бошқа бир X тўла метрик фазо мавжуд бўлиб унинг шундай бир X' қисм тўплами мавжудки, бу тўплам X тўла метрик фазонинг ҳамма жойида зич жойлашган ва X_0 метрик фазога изометрик эканлигини кўрсатамиз. Бу X тўла метрик фазо X_0 метрик фазонинг *тўлдирмаси* деб айтилади.

X_0 метрик фазо элементларидан тузилган ва фундаментал бўлган

$$\{x_n\},\ \{y_n\},\ \{z_n\},\ldots$$

барча мумкин бўлган кетма–кетликларни қараймиз. Агар $n\to\infty$ да $\rho(x_n, x_n')\to 0$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий иккита $\{x_n\}$ ва $\{x_n'\}$ кетма–кетликларни битта синфга тегишли деб оламиз. Бу $\tilde{x}$ синфларни янги X тўла метрик фазонинг элементлари деб қабул қиламиз. Ихтиёрий иккита $\tilde{x} \in X$ ва $\tilde{y} \in X$ элементларни олайлик. Бу $\tilde{x}$ ва $\tilde{y}$ синфларнинг ҳар биридан биттадан $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма–кетликни олайлик. Биз $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)$ лимитнинг мавжуд эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\rho(x_n,\ y_n) \le \rho(x_n,\ x_m) + \rho(x_m,\ y_m) + \rho(y_m,\ y_n)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан

$$\rho(x_n,\ y_n) - \rho(x_m,\ y_m) \le \rho(x_n,\ x_m) + \rho(y_n,\ y_m) \qquad (1.3.1)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизликда m ва n номерларнинг ўринларини алмаштириб

$$\rho(x_m,\ y_m) - \rho(x_n,\ y_n) \le \rho(x_n,\ x_m) + \rho(y_n,\ y_m) \qquad (1.3.2)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу (1.3.1) ва (1.3.2) тенгсизликлардан

$$\left|\rho(x_m,\ y_m) - \rho(x_n,\ y_n)\right| \le \rho(x_n,\ x_m) + \rho(y_n,\ y_m) \qquad (1.3.3)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликнинг ўнг томони $n, m \to \infty$ да нолга интилади. Шунинг учун $\{\rho(x_n,\ y_n)\}$ сонли кетма–кетлик Коши шартини қаноатлантиради ва шунга кўра $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)$ лимитнинг мавжуд эканлиги келиб чиқади.

Энди X тўпламда

$$\rho(\tilde{x},\ \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)$$

формула билан масофани киритамиз. Бундай киритилган масофа $\tilde{x}$ ва $\tilde{y}$ синфларнинг мос $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма–кетликларининг танланишига боғлиқ эмаслигини кўрсатамиз.

Шу $\tilde{x}$ ва $\tilde{y}$ синфларнинг бошқа иккита мос $\{x_n^{'}\}$ ва $\{y_n^{'}\}$ кетма–кетликларини олайлик. У ҳолда

$$\rho(x_n,\ y_n) \le \rho(x_n,\ x_n^{'}) + \rho(x_n^{'},\ y_n^{'}) + \rho(y_n^{'},\ y_n)$$

тенгсизлик ўринлидир. Бундан эса

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n) \le \lim_{n\to\infty}\rho(x_n^{'},\ y_n^{'})$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n^{'},\ y_n^{'}) \le \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)$$

тескари тенгсизлик ҳам ўринлидир. Шунга кўра

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n) = \lim_{n\to\infty}\rho(x_n^{'},\ y_n^{'})$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди биз метрика аксиомаларининг бажарилишини текширамиз.

1. Маълумки $\rho(x_n,\ y_n)\geq 0$ ва шунга кўра

$$\rho(\tilde{x},\ \tilde{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)\geq 0$$

бўлади. Бундан ташқари $\rho(\tilde{x},\ \tilde{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)=0$ шарт $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма–кетликнинг битта синфга тегишли эканлигини билдиради. $\{x_n\}$ кетма–кетлик $\tilde{x}$ синфдаги ихтиёрий кетма–кетлик, $\{y_n\}$ кетма–кетлик эса $\tilde{y}$ синфдаги ихтиёрий кетма–кетлик бўлгани учун $\tilde{x}=\tilde{y}$ бўлади.

2. $\rho(\tilde{x},\ \tilde{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(y_n,\ x_n)=\rho(\tilde{y},\ \tilde{x})$ тенглик ўринлидир.

3. Агар $\{x_n\}\in\tilde{x}$, $\{y_n\}\in\tilde{y}$ ва $\{z_n\}\in\tilde{z}$ бўлса, у ҳолда

$$\rho(\tilde{x},\ \tilde{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ y_n)\leq$$
$$\leq\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ z_n)+\lim_{n\to\infty}\rho(z_n,\ y_n)=$$
$$=\rho(\tilde{x},\ \tilde{z})+\rho(\tilde{z},\ \tilde{y})$$

тенгсизлик ўринлидир.

Энди X метрик фазонинг тўла фазо эканлигини исбот қиламиз. Бу X метрик фазода фундаментал бўлган

$$\{\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \dots,\ \tilde{x}_n,\dots\}$$

элементлар кетма–кетлигини олайлик, яъни $n,m\to\infty$ да $\rho(\tilde{x}_n,\ \tilde{x}_m)\to 0$ бўлсин. У ҳолда ҳар бир $\tilde{x}_n$ синфдан қандайдир

$$\left\{x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \dots,\ x_k^{(n)},\ \dots\right\}$$

кетма–кетликни оламиз. Бу кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик бўлганлиги учун шундай бир k_n номерни топиш мумкинки, бунда барча $p\geq k_n$ учун

$$\rho(x_p^{(n)},x_{k_n}^{(n)})<\frac{1}{n}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди биз

$$\left\{x_{k_1}^{(1)},\ x_{k_2}^{(2)},\ \dots,\ x_{k_n}^{(n)},\ \dots\right\}$$

кетма–кетликни қараймиз ва унинг фундаментал кетма–кетлик эканлигини кўрсатамиз. Биз учбурчак тенгсизлигига кўра

$$\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) \le \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_p^{(n)}) + \rho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) + \rho(x_p^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) \qquad (1.3.4)$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон бўлсин. $n,\ m \to \infty$ да $\rho(\tilde{x}_n,\ \tilde{x}_m) \to 0$ эканлигидан шундай бир n_0 номер топилиб, барча $n, m > n_0$ учун

$$\rho(\tilde{x}_n,\ \tilde{x}_m) = \lim_{p\to\infty} \rho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунинг учун барча $n, m \ge n_0$ ва етарлича катта p учун

$$\rho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.3.5)$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Шу билан бирга биз n_0 сонни $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{4}$ тенгсизлигини қаноатлантиради деб ҳисоблашимиз мумкин. Биз $n, m \ge n_0$ шартни қаноатлантирувчи n ва m номерларни танлаб, ҳамда p номерни етарлича катта, яъни $p \ge k_m$ ва $p \ge k_n$ тенгсизликларини қаноатлантиради деб ҳисоблашимиз мумкин бўлади. У ҳолда k_m ва k_n сонларнинг танланишига кўра

$$\rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \rho(x_p^{(m)}, x_{k_m}^{(m)}) < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (1.3.6)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Шундай қилиб, биз (1.3.4), (1.3.5) ва (1.3.6) тенгсизликлардан барча $n, m > n_0$ учун

$$\rho(x_{k_m}^{(m)}, x_{k_n}^{(n)}) < \varepsilon$$

тенгсизлиги келиб чиқади, яъни $\left\{x_{k_n}^{(n)}\right\}$ кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик экан. Бу $\left\{x_{k_n}^{(n)}\right\}$ кетма–кетликни сақлавчи синфни $\tilde{x}$ орқали белгилаймиз. Энди эса, биз $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\rho(\tilde{x}_n,\ \tilde{x}) = \lim_{p\to\infty} \rho(x_p^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \le \lim_{p\to\infty} \rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) +$$

$$+ \lim_{p\to\infty} \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) < \frac{1}{n} + \lim_{p\to\infty} \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \qquad (1.3.7)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шунингдек $\left\{x_{k_n}^{(n)}\right\}$ кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик эканлигидан ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир n_0 номер топилиб, барча $n,\ p \geq n_0$ учун

$$\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Бундан эса барча $n \geq n_0$ учун

$$\lim_{p\to\infty} \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.3.8}$$

тенгсизлигини ҳосил қиламиз. Шу билан бирга умумийликка хилоф қилмаган ҳолда $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ деб ҳисоблаш мумкин бўлади. Шундай қилиб, барча $n \geq n_0$ учун (1.3.7) ва (1.3.8) тенгсизликлардан

$$\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}) < \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади, яъни $\left\{\tilde{x}_n\right\}$ кетма–кетлик $\tilde{x}$ элементга яқинлашади ва бу X метрик фазонинг тўла фазо эканлигини исбот қилади.

Энди биз стационар кетма–кетликни, яъни $\left\{x, x, ..., x, ...\right\}$ кўринишидаги кетма–кетликни қараймиз. Кўриниб турибдики, бу кетма–кетлик фундаменталдир ва шунга кўра, X метрик фазодаги қандайдир синфга қарашли бўлади. Ҳар бир стационар кетма–кетлик битта ва фақат биттагина синфга тегишли бўлиши мумкин. Энди агар

$$\left\{x, x, ..., x, ...\right\} \in \tilde{x} \quad \text{ва} \quad \left\{y, y, ..., y, ...\right\} \in \tilde{y}$$

бўлса, у ҳолда

$$\rho(x, y) = \rho(\tilde{x}, \tilde{y})$$

тенглик бевосита ўринли бўлади.

Энди биз X_0 метрик фазо X метрик фазонинг ҳамма жойида зич бўлган қандайдир X' қисм тўпламига изометрик эканлигини кўрсатамиз. Кетма–кетликлари орасида $\left\{x, x, ..., x, ...\right\}$ кўринишидаги стационар кетма–кетликларни сақлайдиган барча $\tilde{x}$ синфларни биз X' қисм тўпламга қарашли деб оламиз. Бу $\tilde{x} \in X'$ синф билан $\tilde{x}$ синфга тегишли бўлган $\left\{x, x, ..., x, ...\right\}$ кўринишидаги стационар кетма–кетликларни аниқлайдиган x

элемент ўртасида ўзаро бир қийматли мосликка эга бўламиз ва бундан ташқари агар $\{x, x, ..., x, ...\} \in \tilde{x}$ ва $\{y, y, ..., y, ...\} \in \tilde{y}$ бўлса, у ҳолда $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(x, y)$ тенглик ўринли бўлади. Бу ўрнатилган ўзаро бир қийматли мослик X_0 ва X' орасидаги изометрия бўлади.

Осонгина кўрсатиш мумкинки, X' тўплам X метрик фазонинг ҳамма жойида зич бўлган тўпламдир, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун ва ихтиёрий $\tilde{x} \in X$ элемент учун шундай бир $\tilde{x}_\varepsilon \in X'$ элемент мавжудки, бунда $\rho(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) \le \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $\tilde{x}$ синф фундаментал бўлган $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \in \tilde{x}$ кетма–кетликни сақласин. Барча $m > n \ge n_0$ учун $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўладиган n номерни танлаб оламиз. Ҳамда $\{x_n, x_n, ..., x_n, ...\}$ стационар кетма–кетликни қурамиз ва бу кетма–кетликни сақлайдиган синфни $\tilde{x}_\varepsilon$ орқали белгилаймиз. $\tilde{x}_\varepsilon \in X'$ эканлиги кўриниб турибди. Бундан ташқари

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x_n) \le \varepsilon$$

тенгсизлиги ҳам ўринлидир.

Энди X_0 метрик фазони тўла метрик фазогача тўлдириш изометрия аниқлигида бир қийматли аниқланишини кўрсатамиз, яъни X_0 метрик фазога изометрик бўлган ҳамма жойда зич жойлашган қисм тўпламни сақловчи X тўла метрик фазо изометрия аниқлигида биттагина эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, бошқа бир Y тўла метрик фазо ҳамма жойда зич жойлашган X_0 тўпламни сақласин. У ҳолда ҳар бир $\tilde{y} \in Y$ нуқта қандайдир $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subset X_0$ кетма–кетликнинг лимити бўлади. Бу кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик эканлигидан унинг қандайдир $\tilde{x} \in X$ бўлган элементни аниқлаши келиб чиқади. Бу $\tilde{x} \in X$ бўлган элементни $\tilde{y} \in Y$ элементга мос қўямиз. Аксинча, $\tilde{\xi} \in X$ элемент ва $\tilde{\xi}$ синфдан олинган қандайдир $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...\}$ фундаментал кетма–кетлик берилган бўлсин. Маълумки, бу фундаментал кетма–кетлик Y тўла метрик фазода жойлашган бўлганлиги учун бу кетма–кетлик қандайдир $\tilde{\eta} \in Y$ элементни аниқлайди. Бу элементни $\tilde{\xi}$ элементга мос қилиб қўямиз. Шундай қилиб, биз X ва Y фазолар ўртасида мослик ўрнатдик, бундан ташқари бу мослик ўзаро бир қийматли эканлигини кўриш мумкин. Шу билан бирга

$$\rho(\tilde{x},\tilde{\tilde{\xi}}) = \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\xi_n) = \rho(\tilde{y},\tilde{\eta})$$

тенглик бу мосликнинг изометрия эканлигини кўрсатади ва талаб этилган тасдиқ исбот бўлади.

1–мисол. $l_p^{'}$ орқали биз барча мумкин бўлган $\left\{x_1,x_2,\dots,x_{k_1},0,0,0,\ \dots\right\}$ кўринишдаги тартибланган системалар фазосини белгилаймиз, бунда x_i – ихтиёрий ҳақиқий сон, k_1 – ихтиёрий натурал сон. Агар $x=\left\{x_1,x_2,\dots,x_{k_1},0,0,0,\ \dots\right\}$, $y=\left\{y_1,y_2,\dots,y_{k_2},0,0,0,\ \dots\right\}$ ва $k_2 \ge k_1$ бўлса, у ҳолда

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{k_1}|x_i-y_i|^p + \sum_{i=k_1+1}^{k_2}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

деб оламиз. $l_p^{'}$ фазо l_p фазонинг қисм фазоси бўлади ва бундан ташқари бу тўла бўлмаган фазодир, чунки масалан,

$$x_1=\left\{1,0,0,\dots\right\},\ x_2=\left\{1,\frac{1}{2},0,0,\ \dots\right\},\ \dots,\ x_n=\left\{1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2^n},0,0,\ \dots\right\}$$

кетма–кетлик фундаменталдир, яъни $m,n\to\infty$ $(m<n)$ да

$$\rho(x_n,x_m) = \left(\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{2^{ip}}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

бўлади, лекин $l_p^{'}$ фазода лимитга эга бўлмайди.

Бу $l_p^{'}$ фазонинг тўлдирмасини X орқали белгилаймиз. Иккинчи томондан, $l_p^{'}$ фазо l_p тўла фазонинг ҳамма жойида зич жойлашган бўлади ва шунинг учун X тўла фазо l_p тўла фазога изометрик бўлади.

2–мисол. $C_0[a,b]$ орқали $[a,b]$ оралиқда аниқланган барча кўпҳадлар фазосини олайлик. Бу фазода метрикани

$$\rho(P(t),Q(t)) = \max_{t\in[a,b]}|P(t)-Q(t)|$$

формула билан аниқлаймиз. Кўриниб турибдики, $C_0[a,b]$ тўла бўлмаган фазодир. $C_0[a,b]$ фазо $C[a,b]$ тўла фазонинг ҳамма жойида зич жойлашган бўлади ва шунинг учун $C_0[a,b]$ фазонинг тўлдирмаси $C[a,b]$ тўла фазога изометрик бўлган фазога олиб келади.

3–мисол. $\tilde{L}_p[a,b]$ орқали $[a,b]$ ораликда аниқланган барча узлуксиз функциялар тўпламини олайлик. Бу фазода метрикани

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

формула билан аниқлаймиз. Бу $\tilde{L}_p[a,b]$ тўла бўлмаган фазодир, чунки $p-$ даражаси билан ўртача яқинлашиш маъносида узилишга эга бўлган функцияга яқинлашувчи узлуксиз функцияларнинг кетма–кетлиги $\tilde{L}_p[a,b]$ фазода фундаментал кетма–кетлик бўлиб, бу фазода лимитга эга бўлмайди. Биз $\tilde{L}_p[a,b]$ фазони тўлдириб $L_p[a,b]$ фазога изометрик бўлган фазони ҳосил қиламиз.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

3.1. Тортилувчи шарлар кетма–кетлиги ҳақидаги теореманинг ўринли бўлишлиги тўла метрик фазонинг характеристик хоссаси эканлигини исботланг.

3.2. X метрик фазодаги ҳар қандай текис узлуксиз функция шу фазонинг тўлдирувчисига узлуксиз функция сифатида бир қийматли давом этишини ва бу давом эттирилган функция ҳам текис узлуксиз эканлигини исботланг.

3.3. Барча ҳақиқий сонлар тўпламида x ва y орасидаги масофани $\rho(x,y)=|arctg\,x-arctg\,y|$ деб олсак, у ҳолда бу тўплам тўла бўлмаган метрик фазо бўлишлигини исботланг ва унинг тўлдирувчисини қуринг.

3.4. Барча ҳақиқий сонлар тўпламида x ва y орасидаги масофани $\rho(x,y)=|e^x-e^y|$ деб олсак, у ҳолда бу тўплам тўла бўлмаган метрик фазо бўлишлигини исботланг ва унинг тўлдирувчисини қуринг.

3.5. Сон ўқидаги кесмалар тўпламида масофани $\rho([a,b],[c,d]) = |a-c| + |b-d|$ формула билан аниқлаймиз. У ҳолда бу тўплам тўла бўлмаган метрик фазо бўлишлигини исботланг ва унинг тўлдирувчисини қуринг.

3.6. Сон ўқидаги $\{\Delta_\alpha\}$ кесмалар тўпламида масофани тўпламлар симметрик айирмасининг узунлиги сифатида $\rho(\Delta_1, \Delta_2) = |\Delta_1| + |\Delta_2| - 2|\Delta_1 \bigcap \Delta_2|$ формула билан аниқлаймиз. У ҳолда бу тўплам тўла бўлмаган метрик фазо бўлишлигини исботланг ва унинг тўлдирувчисини қуринг.

3.7. X тўпламда аниқланган ва чегараланган функциялар учун $\rho(f, g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ формула билан масофа киритилган $B(X)$ метрик фазо тўла эканлигини исботланг.

3.8. X тўпламда аниқланган ва чегараланган функциялар учун $\rho(f, g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ формула билан масофа киритилган $B(X)$ метрик фазо тўла эканлигини исботланг.

3.9. X тўплам Y тўла метрик фазонинг қисм тўплами бўлсин. У ҳолда

а) X тўплам тўла бўлишлиги учун унинг ёпиқ бўлишлиги зарур ва етарли;

б) X тўпламнинг тўлдирувчиси унинг Y тўпламдаги ёпиғи бўлишлигини исботланг.

3.10. Ҳар X_i тўплам Y тўла метрик фазодаги очиқ ҳамма жойда зич қисм тўплами бўлсин. У ҳолда $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ тўплам Y тўла метрик фазодаги очиқ ҳамма жойда зич қисм тўплам эканлигини исботланг.

3.11. Кўпҳадлар тўпламда $\rho(P, Q) = \max\limits_{x \in [a,b]} |P(x) - Q(x)|$ формула билан масофа киритилганда унинг тўла бўлмаган метрик фазо эканлигини исботланг.

3.12. Кўпҳадлар тўпламда $\rho(P, Q) = \int\limits_a^b |P(x) - Q(x)| dx$ формула билан масофа киритилганда унинг тўла бўлмаган метрик фазо эканлигини исботланг.

3.13. Агар кўпҳадлар тўпламда $P(x)-Q(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x^i$ учун $\rho\left(P,Q\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} \left|c_i\right|$ формула билан масофа киритилганда унинг тўла бўлмаган метрик фазо эканлигини исботланг.

3.14. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон учун X метрик фазода чекли ε–тўр мавжуд бўлсин. У ҳолда X метрик фазонинг тўлдирувчиси компакт эканлигини исботланг.

3.15. $\left\{x_{n_k}\right\}$ сонли кетма-кетлик $\left\{x_n\right\}$ сонли кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги ва $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$ лимит мавжуд бўлсин. У ҳолда бу лимит $\left\{x_n\right\}$ сонли кетма-кетликнинг қисмий лимити деб айтилади. Агар $\left\{x_n\right\}$ сонли кетма-кетлик чегараланган бўлса, у ҳолда бу кетма–кетликнинг барча L лимитик нуқталари тўплами ҳам чегараланган эканлигини кўрсатинг. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\sup L$ ва $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\inf L$ сонлар мос равишда $\left\{x_n\right\}$ сонли кетма-кетликнинг *юқори ва қуйи лимитлари* деб айтилади.

Агар $\left\{x_n\right\}$ сонли кетма-кетлик чегараланган ва $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=0$ бўлса, у ҳолда бу кетма–кетликнинг барча L лимитик нуқталари тўплами чеккалари $a=\inf L$ ва $b=\sup L$ нуқталарда бўлган оралиқнинг ҳамма жойида зич тўплам эканлигини исботланг.

3.16. $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n$ кетма-кетлик яқинлашувчи эканлигини исботланг. Шундай қилиб

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

бунда $C=0,577216...$ – *Эйлер ўзгармаси* деб аталувчи сон ва $n\to\infty$ да $\varepsilon_n\to 0$ бўлади.

4-§. Қисқартириб акслантириш принципи ва унинг тадбиқлари

Тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги билан боғлиқ бўлган кўпгина масалаларни, масалан дифференциал тенгламани ёки интеграл тенгламани, мос у ёки бу метрик фазони ўз-ўзига қандайдир акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги масала шаклида ифодалаш мумкин. Бундай акслантиришларнинг қўзғалмас нуқтаси мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги ҳар хил критериялар орасида энг содда ва ўз навбатида энг муҳим бўлгани бу қисқартириб акслантириш принципи деб аталувчи принципдир.

R метрик фазо ва ундаги қандайдир $A: R \to R$ акслантириш берилган бўлсин.

Таъриф. *Агар шундай бир* $\alpha < 1$ *сон топилиб, ихтиёрий* $x, y \in R$ *иккита нуқта учун*

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y) \tag{1.4.1}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда R *метрик фазони* R *метрик фазога акслантирувчи* A *акслантиришга қисқартириб акслантириш дейилади.*

Ихтиёрий қисқартириб акслантириш узлуксиздир. Ҳақиқатан ҳам, агар $x_n \to x$ бўлса, у ҳолда (1.4.1) тенгсизликка асосан $Ax_n \to Ax$ бўлади.

Таъриф. *Агар A акслантиришда x нуқта* $Ax = x$ *шартни қаноатлантирса, у ҳолда x нуқтага A акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси дейилади. Бошқача қилиб айтганда, қўзғалмас нуқта бу* $Ax = x$ *тенгламанинг ечимидир.*

Теорема(Қисқартириб акслантириш принципи). Тўла R *метрик фазода аниқланган ихтиёрий қисқартириб акслантириш битта ва фақат битта қўзғалмас нуқтага эгадир.*

Исбот. x_0 нукта R метрик фазонинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$x_1 = Ax_0, \ x_2 = Ax_1 = A^2 x_0, \quad ...., \quad x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0 .$$

Бундай қурилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг фундаментал эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатдан ҳам, аниқлик учун $m \ge n$ деб олсак,

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \le \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le$$

$$\le \alpha^n \left\{ \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + ... + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \right\} \le$$

$$\le \alpha^n \rho(x_0, x_1) \left\{ 1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{m-n-1} \right\} \le \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha}$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Бу ерда $\alpha < 1$ бўлганлиги учун етарлича катта n ларда бу миқдор исталганча кичик бўлади. R метрик фазонинг тўлалигига кўра, $\{x_n\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлиб, бу кетма-кетлик лимитга эга бўлади.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

деб оламиз. У ҳолда A акслантиришнинг узлуксизлигига кўра,

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

муносабат келиб чиқади.

Шундай қилиб, A акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси мавжудлиги исботланди. Энди бу қўзғалмас нуқтанинг ягоналигини исботлаймиз. Агар

$$Ax = x, \quad Ay = y$$

бўлса, у ҳолда (1.4.1) тенгсизлик

$$\rho(x, y) \le \alpha \rho(x, y).$$

кўринишда бўлади, бунда $\alpha < 1$ бўлганлиги учун

$$\rho(x, y) = 0$$

келиб чиқади, яъни $x = y$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

Юқорида келтирилган

$$\rho(x_n, x_m) \le \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha}$$

тенгсизликда $m \to \infty$ да лимитга ўтсак, у ҳолда

$$\rho(x_n, x) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_0, Ax_0) \qquad (1.4.2)$$

тенгсизликка эга бўламиз, бу ерда x_0 нуқта R метрик фазонинг ихтиёрий нуқтаси, x нуқта шу A акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси, $\{x_n\}$ эса,

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1 = A^2 x_0, \quad ...., \quad x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, ...$$

кетма–кет яқинлашиш усули билан қурилган фундаментал кетма–кетликдир.

1–эслатма. Агар (1.4.1) тенгсизлик ўрнига ихтиёрий $x \neq y$ иккита нуқта учун $\rho(Ax,\, Ay) < \rho(x,\, y)$ тенгсизлик ўринли бўлса ҳам R тўла метрик фазони R тўла метрик фазога акслантирувчи A акслантириш битта ҳам қўзғалмас нуқтага эга бўлмаслиги мумкин.

2–эслатма. A акслантиришнинг x қўзғалмас нуқтасига яқинлашувчи $\{x_n\}$ кетма–кетликни R тўла метрик фазонинг ихтиёрий x_0 нуқтаси учун кетма–кет яқинлашиш усули билан қуриш мумкин. Бу ихтиёрий x_0 нуқтани танлаш фақатгина $\{x_n\}$ кетма–кетликнинг яқинлашиш тезлигигагина таъсир этади холос.

3–эслатма. Айрим ҳолларда A акслантириш учун (1.4.1) тенгсизлик R тўла метрик фазонинг ҳамма жойида бажарилмасдан фақат қандайдир $\bar{x}$ нуқтанинг $\bar{U}_r(\bar{x})$ ёпиқ атрофидагина бажарилиши мумкин. У ҳолда қисқартириб акслантириш принципини қўллаш мумкин бўлишлиги учун A акслантириш бу шарни ўзига акслантиришлик шартини қўшимча шарт қилиб қўйилади ва шунинг учун кетма–кет яқинлашиш шу қаралаётган атрофдан чиқмайди. Масалан, (1.4.1) тенгсизликка қўшимча қилиб

$$\rho(\bar{x},\, A(\bar{x})) \leq (1-\alpha)r \tag{1.4.3}$$

тенгсизликни қаноатлантиришини талаб этиш мумкин. Агар $x \in \bar{U}_r(\bar{x})$ бўлса, у ҳолда $A(x) \in \bar{U}_r(\bar{x})$ бўлади, чунки

$$\rho(A(x),\, \bar{x}) \leq \rho(A(x),\, A(\bar{x})) + \rho(A(\bar{x}),\, \bar{x}) \leq$$
$$\leq \alpha\rho(x,\, \bar{x}) + \rho(\bar{x},\, A(\bar{x})) \leq \alpha r + (1-\alpha)r = r\,.$$

Шунинг учун A акслантиришни $\bar{U}_r(\bar{x})$ тўла метрик фазода таъсир этувчи оператор деб қараш мумкин бўлади ва бунда (1.4.1) шарт ўринли бўлади. У ҳолда исбот қилинган теоремага кўра A оператор $\bar{U}_r(\bar{x})$ ёпиқ шарда ягона қўзғалмас нуқтага эга бўлади.

Қисқартириб акслантириш принципининг қўлланилишига доир бир нечта мисолларни келтирамиз.

1. Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини итерация усули билан ечишни қараб чиқамиз. Биз $n-$ ўлчамли арифметик фазони қараймиз. Агар $x = (x_1, x_2, \ldots,\, x_n)$ ва $y = (y_1, y_2, \ldots,\, y_n)$ нуқталар учун

$$\rho(x,y)=\max_i|x_i-y_i|$$

деб оламиз. Бундай аниқланган R_∞^n–метрик фазо тўла метрик фазо бўлади. Бу фазода $y=A(x)$ операторни

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+b_i\,,\quad i=1,2,...,n$$

тенгликлар билан аниқлаймиз. У ҳолда

$$\rho(y^{(1)},\,y^{(2)})=\rho(A(x^{(1)}),\,A(x^{(2)}))=\max_i\left|y^{(1)}{}_i-y^{(2)}{}_i\right|=$$

$$=\max_i\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x^{(1)}{}_j-x^{(2)}{}_j)\right|\le\max_i\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\left|x^{(1)}{}_j-x^{(2)}{}_j\right|\le$$

$$\le\max_i\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\max_j\left|x^{(1)}{}_j-x^{(2)}{}_j\right|=\left(\max_i\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)\rho(x^{(1)},\,x^{(2)})$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу ердан кўринадики, қисқартириб акслантириш ҳосил бўлишлиги учун биз

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\le\alpha<1,\ \ i=1,2,...,n \qquad (1.4.4)$$

шартни ҳосил қиламиз. Агар бу (1.4.4) шарт ўринли бўлса, у ҳолда биз қараётган акслантириш қисқартириб акслантириш бўлиб, унинг ягона қўзғалмас нуқтага эга эканлиги келиб чиқади. Бу ҳолда $x=Ax$ тенгламани ечишга кетма–кет яқинлашиш усулини қўллаш мумкин бўлади.

Энди биз масофани

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|$$

деб оламиз. Бундай аниқланган R_1^n–метрик фазо тўла метрик фазо бўлади. У ҳолда

$$\rho(y^{(1)},\,y^{(2)})=\rho(A(x^{(1)}),\,A(x^{(2)}))=\sum_{i=1}^{n} \left|y^{(1)}{}_i-y^{(2)}{}_i\right|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x^{(1)}{}_j-x^{(2)}{}_j)\right|\le\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\left|x^{(1)}{}_j-x^{(2)}{}_j\right|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{n} \left|x^{(1)}{}_j-x^{(2)}{}_j\right|\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)\le\sum_{j=1}^{n} \left|x^{(1)}{}_j-x^{(2)}{}_j\right|\left(\max_j\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)\le$$

$$\leq \left(\max_j \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \right) \sum_{j=1}^{n} \left|x^{(1)}{}_j - x^{(2)}{}_j\right| \leq \left(\max_j \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \right) \rho(x^{(1)},\, x^{(2)})$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу ердан кўринадики, қисқартириб акслантириш ҳосил бўлишлиги учун биз

$$\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \leq \alpha < 1, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{1.4.5}$$

шартни ҳосил қиламиз. Агар бу (1.4.5) шарт ўринли бўлса, у ҳолда биз қараётган акслантириш қисқартириб акслантириш бўлиб, унинг ягона қўзғалмас нуқтага эга эканлиги келиб чиқади ва $x = Ax$ тенгламани ечишга кетма–кет яқинлашиш усулини қўллаш мумкин бўлади.

Агар биз масофани

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i - y_i\right|^2}$$

деб олсак, у ҳолда R^n – тўла метрик фазо ҳосил бўлади. Бу ҳолда Коши–Буняковский тенгсизлигига кўра

$$\rho(y^{(1)},\, y^{(2)}) = \rho(A(x^{(1)}),\, A(x^{(2)})) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|y^{(1)}{}_i - y^{(2)}{}_i\right|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x^{(1)}{}_j - x^{(2)}{}_j) \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2 \sum_{j=1}^{n} \left|x^{(1)}{}_j - x^{(2)}{}_j\right|^2 \right)} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|x^{(1)}{}_j - x^{(2)}{}_j\right|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2}\ \rho(x^{(1)},\, x^{(2)})$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу ердан кўринадики, қисқартириб акслантириш ҳосил бўлишлиги учун биз

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2 \leq \alpha < 1 \tag{1.4.6}$$

шартни ҳосил қиламиз. Агар бу (1.4.6) шарт ўринли бўлса, у ҳолда биз қараётган акслантириш қисқартириб акслантириш бўлиб, унинг ягона қўзғалмас нуқтага эга эканлиги келиб чиқади. Бу ҳолда ҳам $x = Ax$ тенгламани ечишга кетма–кет яқинлашиш усулини қўллаш мумкин бўлади.

Шундай қилиб, агар (1.4.4), (1.4.5), (1.4.6) шартлардан ҳеч бўлмаганда бир бажарилса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12}-1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}-1 \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлади ва тенгламалар системаси битта ва фақат битта $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ ечимга эга. Бу (1.4.4), (1.4.5), (1.4.6) шартлар зарурий шартлар эмас.

Агар барча $i, j = 1, 2, ..., n$ учун $|a_{ij}| < \frac{1}{n}$ тенгсизликлар ўринли бўлса, у ҳолда (1.4.4), (1.4.5), (1.4.6) шартлар бажарилади ва кетма–кет яқинлашиш усулини қўллаш мумкин бўлади.

Агар барча $i, j = 1, 2, ..., n$ учун $|a_{ij}| \geq \frac{1}{n}$ тенгсизликлар ўринли бўлса, у ҳолда (1.4.4), (1.4.5), (1.4.6) шартлар бажарилмайди.

2. Қисқартириб акслантириш принципи ёрдамида дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теореманинг исботини келтирамиз. Бунинг учун биз чексиз ўлчамли бўлган функционал фазоларда бу принципни қўллаймиз.

Қисқартириб акслантириш принципи ёрдамида

$$y' = f(x, y) \tag{1.4.7}$$

дифференциал тенгламанинг

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.4.8}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги Коши масаласини $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтани сақловчи қандайдир G соҳада аниқланган ва узлуксиз ҳамда y ўзгарувчи бўйича

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|$$

Липшиц шартини қаноатлантирганда ечиш мумкинлигини исботлаш мумкин бўлади.

(1.4.7) тенгламанинг (1.4.8) бошланғич шартни қаноатлантирувчи $y = \varphi(x)$ ечимининг қандайдир $|x - x_0| \leq d$

сегментда мавжуд ва ягоналиги ҳақидаги Пикар теоремасини исботлаймиз.

(1.4.7) тенгламани (1.4.8) бошланғич шарт билан ечиш масаласи

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)d\xi \tag{1.4.9}$$

чизиқли бўлмаган интеграл тенгламага эквивалентдир.

Берилган $f(x,y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтани сақловчи қандайдир $G' \subset G$ соҳада узлуксиз эканлигидан $|f(x,y)| \le K$ тенгсизликка эга бўламиз. $d > 0$ сонни қуйидаги шартлар бажариладиган қилиб танлаймиз:

1) агар $|x - x_0| \le d$, $|y - y_0| \le Kd$ бўлса, у ҳолда $(x,y) \in G'$;

2) $Md < 1$.

C^* орқали $|x - x_0| \le d$ сегментда аниқланган ва $|\varphi(x) - y_0| \le Kd$ шартни қаноатлантирувчи ҳамда $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max\limits_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$ метрикали $\varphi(x)$ узлуксиз функциялар фазосини белгилаймиз.

C^* фазо $[x_0 - d,\, x_0 + d]$ сегментда аниқланган барча узлуксиз функциялар фазосининг ёпиқ қисм фазоси бўлиб, бу тўла фазодир.

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

формула билан аниқланувчи $\psi = A\varphi$ акслантиришни қараймиз, бунда $|x - x_0| \le d$. Бу акслантириш C^* тўла фазони ўз–ўзига акслантиради ва унда қисқартириб акслантиришдир. Ҳақиқатдан ҳам, $\varphi \in C^*$, $|x - x_0| \le d$ бўлсин. У ҳолда

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \right| \le Kd$$

ва шунга кўра, $A(C^*) \subset C^*$. Бундан ташқари,

$$\left|\psi_1(x)-\psi_2(x)\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} \left| f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))\right| dt\right| \le Md \max_x \left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|$$

бўлади. Шунинг учун, $Md<1$ эканлигига кўра, $A-$қисқартириб акслантиришдир. Бу ердан, $\varphi = A\varphi$ тенглама C^* фазода битта ва фақат битта ечимга эга эканлиги келиб чиқади.

3. Энди қисқартириб акслантириш принципи ёрдамида

$$\varphi_i'(x) = f_i(x,\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)), \quad i=1,2,\ \dots,\ n \qquad (1.4.10)$$

дифференциал тенгламалар системасининг

$$\varphi_i(x_0) = y_{0i}\ ,\ i=1,2,\dots,n \qquad (1.4.11)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги Коши масаласини қараймиз, бунда $f_i(x,y_1,y_2,...y_n),\ \ i=1,2,\dots,n$ функциялар R^{n+1} фазодаги $(x_0,y_{01},\dots,y_{0n})$ нуқтани сақловчи қандайдир G соҳада аниқланган ва узлуксиз, ҳамда $y_1,y_2,\dots,y_n$ ўзгарувчилар бўйича

$$\left| f_i(x,y_1^{(1)},y_2^{(1)},\dots,y_n^{(1)}) - f_i(x,y_1^{(2)},y_2^{(2)},\dots,y_n^{(2)})\right| \le$$
$$\le M \max_{1\le i\le n}\left|y_i^{(1)} - y_i^{(2)}\right|$$

Липшиц шартини қаноатлантирсин.

(1.4.10) тенгламалар системасининг (1.4.11) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими $\left|x-x_0\right|\le d$ сегментда мавжуд ва ягоналигини исботлаймиз.

(1.4.10) тенгламалар системасини (1.4.11) бошланғич шартлар билан ечиш масаласи

$$\varphi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t,\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))dt,\ i=1,2,\dots,n \qquad (1.4.12)$$

чизиқли бўлмаган интеграл тенгламалар системасига эквивалентдир.

Берилган $f_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\ ,\ i=1,2,\dots,n$ функцияларнинг $(x_0,y_{01},y_{02},\dots,y_{0n})$ нуқтани сақловчи қандайдир $G'\subset G$ соҳада узлуксиз эканлигига кўра, бу функциялар чегаралангандир, яъни шундай бир K ўзгармас топилиб, бунда $\left| f_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\right| \le K,$

$i = 1, 2, \ldots, n$ тенгсизликлар ўринли бўлади. $d > 0$ сонни қуйидаги шартлар бажариладиган қилиб танлаймиз:

1) агар $|x - x_0| \le d$, $|y_i - y_{0i}| \le Kd$, $i = 1, 2, \ldots, n$ бўлса, у ҳолда $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in G'$;

2) $Md < 1$.

C_n^* орқали $|x - x_0| \le d$ сегментда аниқланган ва $|\varphi_i(x) - y_{0i}| \le Kd$, $i = \overline{1, n}$ шартларни қаноатлантирувчи, ҳамда n та узлуксиз функциялардан иборат $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ элементлар фазони белгилаймиз. Бу фазода метрикани $\rho(\varphi, \psi) = \max\limits_{x,i} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)|$ формула билан аниқлаймиз.

Киритилган C_n^* фазо тўладир.

$$\psi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))dt, \quad i = \overline{1, n}$$

формулалар билан аниқланувчи $\psi = A\varphi$ акслантиришни қараймиз, бунда $|x - x_0| \le d$. Бу акслантириш C_n^* тўла фазони ўз–ўзига акслантиради ва унда қисқартириб акслантиришдир. Ҳақиқатдан ҳам, $\varphi \in C_n^*$, $|x - x_0| \le d$ бўлсин. У ҳолда

$$|\psi_i(x) - y_{0i}| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))dt \right| \le Kd, \quad i = \overline{1, n}$$

ва шунга кўра, $A(C_n^*) \subset C_n^*$. Бундан ташқари,

$$\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left[f_i(t, \varphi_1^{(1)}(t), \ldots, \varphi_n^{(1)}(t)) - f_i(t, \varphi_1^{(2)}(t), \ldots, \varphi_n^{(2)}(t)) \right] dt$$

ва шунга кўра,

$$\max_{x,i} |\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x)| \le Md \max_{x,i} |\varphi_i^{(1)}(x) - \varphi_i^{(2)}(x)|$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда, $Md < 1$ эканлигига кўра, A қисқартириб акслантиришдир. Бундан эса, $\varphi = A\varphi$ оператор тенгламанинг C_n^* фазода битта ва фақат битта ечимга эга эканлиги келиб чиқади.

4. Энди қисқартириб акслантириш принципини интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлашга тадбиқ этамиз.

Бизга иккинчи турдаги Фредгольмнинг бир жинсли бўлмаган интеграл тенгламаси берилган бўлсин, яъни

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,\, y)\varphi(y)dy + f(x)\,, \qquad (1.4.13)$$

бунда $K(x,\, y)$ интеграл тенгламанинг ядроси, $f(x)$ олдидан берилган функция, λ ихтиёрий параметр, $\varphi(x)$ функция эса изланувчи функциядир.

Биз қарайдиган усул фақат λ параметрнинг етарлича кичик қийматлари учунгина қўлланилади.

Фараз қилайлик, $K(x,\, y)$ ва $f(x)$ функциялар $a \le x \le b,\ a \le y \le b$ учун узлуксиз ва шунга кўра, $|K(x,\, y)| \le M$ бўлади.

$$\psi(x) = \lambda\int_a^b K(x,\, y)\varphi(y)dy + f(x)$$

формула орқали аниқланган $C[a,b]$ тўла фазони ўз-ўзига акслантирувчи $\psi = A\varphi$ акслантиришни қараймиз. У ҳолда

$$\rho(\psi_1,\, \psi_2) = \max_x |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \le |\lambda| M(b-a) \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

муносабат ўринли бўлади. Шунга кўра, $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ учун A акслантириш қисқартириб акслантиришдир.

Қисқартириб акслантириш принципига асосан, λ нинг $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ шартни қаноатлантирган барча қийматларида иккинчи турдаги Фредгольм интеграл тенгламасининг узлуксиз ечими мавжуд ва ягона бўлади. Бу ечимга интилувчи $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ кетма-кет яқинлашишлар

$$\varphi_n(x) = \lambda\int_a^b K(x,\, y)\varphi_{n-1}(y)dy + f(x)$$

кўринишида бўлади. Бу ерда $\varphi_0(x)$ функция сифатида ихтиёрий узлуксиз функцияни олиш мумкин.

5. Қисқартириб акслантириш принципини чизиқли бўлмаган

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,\ y;\ \varphi(y))dy + f(x) \qquad (1.4.14)$$

интеграл тенгламаларга ҳам қўллаш мумкин. Бунда $K(x,\ y;\ \varphi(y))$ ва $f(x)$ функциялар узлуксиз бўлиб, бундан ташқари $K(x,\ y;\ \varphi(y))$ ядро ўзининг “функционал” аргументи бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради, яъни

$$\left|K(x,\ y;\ z_1) - K(x,\ y;\ z_2)\right| \le M\left|z_1 - z_2\right|.$$

Бу ҳолда $\psi = A\varphi$ акслантириш $C[a,\,b]$ фазони $C[a,\,b]$ фазога акслантириб

$$\psi(x) = \lambda\int_a^b K(x,\ y\ ;\ \varphi(y))\,dy + f(x) \qquad (1.4.15)$$

формула орқали аниқланади ва

$$\max_x\left|\psi_1(x) - \psi_2(x)\right| \le |\lambda| M(b-a)\max_x\left|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\right|$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда $\psi_1 = A\varphi_1$, $\psi_2 = A\varphi_2$. Шунга кўра, $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ учун, қаралаётган A акслантириш қисқартириб акслантириш бўлади.

6. Қисқартириб акслантириш принципининг бошқа бир тадбиқи сифатида

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x K(x,\ y)\varphi(y)dy + f(x) \qquad (1.4.16)$$

Вольтер интеграл тенгламасини қарайлик. Бу интеграл тенглама Фредгольм интеграл тенгламасидан интегралнинг юқори чегарасида x ўзгарувчи қатнашганлиги билан фарқ қилади. Шунинг учун, $K(x,y)$ ядрони $y > x$ учун $K(x,y) = 0$ деб аниқлаш ёрдамида, Вольтер интеграл тенгламасини Фредгольм интеграл тенгламасининг хусусий ҳоли сифатида ҳам, қараш мумкин.

Лекин, Фредгольм интеграл тенгламаси ҳолида λ параметрнинг кичик қийматлар бўлишлик шартини қўйишга мажбур бўлган эдик. Вольтер интеграл тенгламаси учун эса, қисқартириб акслантириш принципи λ параметрнинг барча қийматлари учун қўлланилади. Аниқроғи, қисқартириб акслантириш принципининг қуйидаги умумлашмаси ҳақида гап боради.

Теорема (Умумлашган қисқартириб акслантириш принципи ҳақидаги теорема). *R тўла метрик фазони шу R фазога акслантирувчи A узлуксиз акслантириш берилган бўлиб, унинг қандайдир $B = A^n$ даражаси қисқартириб акслантириш бўлса, у ҳолда*

$$Ax = x$$

тенгламанинг ечими шу R фазода мавжуд ва ягона бўлади.

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, $B = A^n$ акслантириш учун x нуқта қўзғалмас нуқта бўлсин, яъни $Bx = x$. У ҳолда

$$k \to \infty \text{ да } \quad Ax = AB^k x = B^k Ax = B^k x_0 \to x$$

бўлади. Бошқача айтганда, B акслантириш қисқартириб акслантиришдир, шунинг учун, $Bx_0,\, B^2x_0,\, B^3x_0,\, \ldots,\, B^k x_0,\, \ldots$ кетма-кетлик ихтиёрий $x_0 \in R$ учун B акслантиришнинг x қўзғалмас нуқтасига яқинлашади. Шунга кўра,

$$Ax = x$$

бўлади. Бу қўзғалмас нуқта ягонадир, чунки A акслантиришга нисбатан қўзғалмас бўлган ҳар қандай нуқта A^n қисқартириб акслантиришга нисбатан ҳам қўзғалмас нуқта бўлади. Маълумки, A^n қисқартириб акслантириш фақат битта қўзғалмас нуқтага эгадир. Теорема исбот бўлди.

Энди

$$A\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,\, y)\varphi(y)dy + f(x)$$

акслантиришнинг қандайдир даражаси қисқартириб акслантириш эканлигини кўрсатамиз. Иккита φ_1 ва φ_2 узлуксиз функциялар $[a,\, b]$ ораликда берилган бўлсин. У ҳолда

$$\left|A\varphi_1(x) - A\varphi_2(x)\right| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x,\, y)\big(\varphi_1(y) - \varphi_2(y)\big)dy \right| \le$$

$$\leq |\lambda| M(x-a) \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

бўлади. Бу ерда $M = \max_{x,y} |K(x,y)|$. Бундан

$$|A^2\varphi_1(x) - A^2\varphi_2(x)| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|,$$

ва умуман,

$$|A^n\varphi_1(x) - A^n\varphi_2(x)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} m \leq |\lambda|^n M^n m \frac{(b-a)^n}{n!},$$

бунда $m = \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$ бўлади.

λ параметрнинг ихтиёрий қийматида n сонни етарлича катта танлаш мумкинки, бунда

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1$$

бўлади. У ҳолда A^n акслантириш қисқартириб акслантириш бўлади. Демак, (1.4.16) Вольтер интеграл тенгламаси λ параметрнинг ихтиёрий қийматида ечимга эга бўлиб, бу ечим ягонадир.

7. Энди интеграл тенгламанинг ядроси квадрати билан жамланувчи ўлчовли функция бўлган ҳолда шу интеграл тенгламанинг квадрати билан жамланувчи функциялар фазосида ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини таъминлайдиган шартларни аниқлаймиз. $K = \{(t,s):\ a \leq t \leq b,\ a \leq s \leq b\}$ квадратда аниқланган ва ўлчовли ҳақиқий қийматли $K(t,s)$ функция учун

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)\,dt\,ds < +\infty \qquad (1.4.17)$$

шарт ўринли ва $f(t) \in L_2[a,b]$ шарт ўринли бўлсин. У ҳолда

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$$

интеграл тенглама λ параметрнинг етарлича кичик қийматларида $x(t) \in L_2[a,b]$ бўлган ягона ечимга эга эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$Ax(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

операторни қараймиз. Бу оператор ҳар бир $x(t) \in L_2[a,b]$ бўлган функцияга яна шу фазога тегишли бўлган функцияни мос қўяди. $f(t) \in L_2[a,b]$ бўлгани учун

$$A_0 x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

интеграл оператор ҳар бир $x(t) \in L_2[a,b]$ бўлган функцияга яна шу фазога тегишли бўлган функцияни мос қўйишини кўрсатиш етарлидир.

Юқоридаги (1.4.17) шарт ва Фубини теоремасига кўра, $K^2(t,s)$ функция t ўзгарувчининг $[a,b]$ оралиқдаги деярли барча қийматлари учун s ўзгарувчи бўйича $[a,b]$ оралиқда интегралланади. Бундан эса, t ўзгарувчининг $[a,b]$ оралиқдаги деярли барча қийматлари учун

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t)$$

интегралнинг мавжудлиги келиб чиқади. Коши–Буняковский тенгсизлигига кўра

$$y^2(t) = \left(\int_a^b K(t,s)x(s)ds \right)^2 \le \int_a^b K^2(t,s)ds \int_a^b x^2(s)ds$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса, $\int_a^b x^2(s)ds$ интеграл функция сифатида ўзгармас, ҳамда (1.4.17) шарт ва Фубини теоремасига кўра $\int_a^b K^2(t,s)ds$ функция эса t ўзгарувчи бўйича $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи бўлгани учун $y^2(t)$ функция ҳам t ўзгарувчи бўйича $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи бўлади, бундан ташқари

$$\int_a^b y^2(t)dt \le \int_a^b \int_a^b K^2(t,s)dtds \int_a^b x^2(s)ds$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Энди $\rho(A(x), A(y))$ масофани баҳолаймиз.

$$\rho(A(x), A(y)) = \left\{ \int_a^b \left(\lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds - \lambda \int_a^b K(t,s)y(s)ds \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |\lambda| \left\{ \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)[x(s) - y(s)]ds \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)dtds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b [x(s) - y(s)]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\leq |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)dtds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \rho(x, y)$$

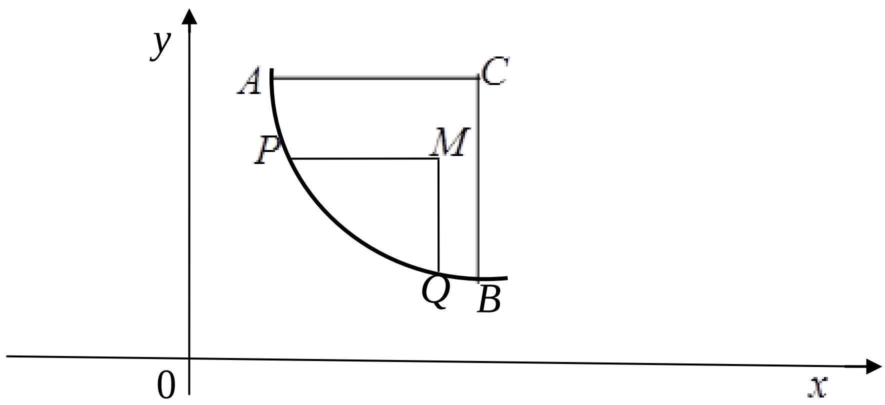
тенгсизликка эга бўламиз. Агар

$$|\lambda| < \frac{1}{\left(\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)dtds \right)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.4.18}$$

бўлса, у ҳолда биз қисқартириб акслантириш принципини қўллаш шартини ҳосил қиламиз. Шунинг учун λ параметрнинг (1.4.18) тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида қаралаётган интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.

8. Энди *қисқартириб акслантириш принципини хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишга қўллашни* қараб чиқамиз. Мисол тариқасида икки ўзгарувчили иккинчи тартибли квазичизиқли гиперболик тенглама учун Коши масаласини қараймиз.

Бизга *xoy* текисликда берилган *AB* силлиқ эгри чизиқ шундай бўлсинки, *ox* ёки *oy* ўқларга параллел бўлган ихтиёрий тўғри чизиқ уни биттадан кўп бўлмаган нуқтада кесиб ўтсин.



Бу ABC эгри чизиқли учбурчак ичида

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1.4.19}$$

тенгламани қаноатлантирувчи ва AB ёй бўйлаб $u,\ u_x \equiv p\ ,\ u_y \equiv q$ функциялар берилган узлуксиз қийматларни қабул қилувчи $u(x, y)$ функцияни топиш талаб этилган бўлсин. Умумийликка хилоф қилмаган ҳолда AB ёй бўйлаб $u,\ u_x \equiv p\ ,\ u_y \equiv q$ функцияларнинг берилган қийматларни айнан нолга тенг деб оламиз. Маълумки, бу Коши масаласини ечиш чизиқли бўлмаган

$$u(x, y) = \iint\limits_{MPQ} f(\xi, \eta,\ u(\xi,\eta),\ u_x(\xi,\eta),\ u_y(\xi,\eta))\, d\xi d\eta$$

интеграл тенгламани ечишга олиб келинади.

Элементлари $\overline{ABC}$ ёпиқ эгри чизиқли учбурчакда аниқланган ва бу соҳада узлуксиз, ҳамда биринчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлган $u(x, y)$ функциялардан иборат бўлган фазони X орқали белгилаймиз. Бу фазодаги масофани

$$\rho(u, v) = \max_{\overline{ABC}} \left| u(x, y) - v(x, y) \right| +$$
$$+ \max_{\overline{ABC}} \left| u_x(x, y) - v_x(x, y) \right| + \max_{\overline{ABC}} \left| u_y(x, y) - v_y(x, y) \right|$$

формула орқали киритамиз. Бундай масофа билан аниқланган X метрик фазо тўла метрик фазо бўлади. Бу фазодаги яқинлашиш $\overline{ABC}$ ёпиқ эгри чизиқли учбурчакда функциялар кетма–кетлиги ва уларнинг ҳосилаларининг кетма–кетлиги мос равишда лимитик функцияга ва унинг ҳосиласига текис яқинлашишини билдиради.

Энди x, y, u, p, q фазовий эркли ўзгарувчиларга $M(x,y)$ нуқта $\overline{ABC}$ ёпиқ эгри чизиқли учбурчакдан чиқмасин деб шартлар қўямиз, ҳамда u, p, q ўзгарувчиларга эса $|u| \le a$, $|p| \le a$,$|q| \le a$ чегараланганлик шартларини қўямиз, бунда a – қандайдир ўзгармас сон, $f(x,y,u,p,q)$ функция эса, шу барча ўзгарувчилар бўйича узлуксиз ва бундан ташқари u,p,q ўзгарувчилар бўйича

$$|\, f(x,y,u,p,q) - f(x,y,\tilde{u},\tilde{p},\tilde{q})| \le L\left\{|u-\tilde{u}| + |p-\tilde{p}| + |q-\tilde{q}|\right\}$$

Липщиц шартини қаноатлантирсин, бу ерда L – қандайдир ўзгармас сон.

Бу шартдан хусусан, $f(x,y,u,p,q)$ функциянинг қараётган соҳада чегараланганлиги келиб чиқади.

X метрик фазода

$$v(x,y) = U(u) = \iint\limits_{MPQ} f(\xi, \eta, u(\xi,\eta), u_x(\xi,\eta), u_y(\xi,\eta))d\xi d\eta$$

операторни қараймиз. Бу ерда кўриш мумкинки,

$$v_x(x,y) = \int\limits_{QM} f(x, \eta, u, u_x, u_y)d\eta,$$

$$v_y(x,y) = \int\limits_{PM} f(\xi, y, u, u_x, u_y)d\xi.$$

Шунинг учун

$$|v(x,y)| \le Kd^2, \; |v_x(x,y)| \le Kd, \; |v_y(x,y)| \le Kd \; ,$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз, бунда $M(x,y) \in \overline{ABC}$ ва $|u| \le a$, $|p| \le a$,$|q| \le a$ учун $K = \sup\left| f(x, y, u, u_x, u_y)\right|$ топилган бўлиб, d – эса AC ва BC масофаларнинг энг каттасидир. Агар

$$Kd^2 \le \frac{a}{3} \quad \text{ва} \quad Kd \le \frac{a}{3}$$

шартлар бажарилган бўлса, у ҳолда U оператор X метрик фазодаги $\overline{U_a(\theta)}$, бунда $\theta(x,y) \equiv 0$ айнан ноль функция бўлган ёпиқ шарни ўз–ўзига акслантиради. Бундан ташқари

$\max\limits_{ABC} |v - \tilde{v}| \le$

$$\leq \max_{\overline{ABC}} \iint\limits_{MPQ} \left| f(\xi, \eta, u, \ u_x, \ u_y) - f(\xi, \eta, \tilde{u}, \ \tilde{u}_x, \ \tilde{u}_y) \right| d\xi d\eta =$$

$$\leq \max_{\overline{ABC}} \iint\limits_{MPQ} L\left\{ |u-\tilde{u}| + |u_x - \tilde{u}_x| + |u_y - \tilde{u}_y| \right\} d\xi d\eta \leq Ld^2 \rho(u,\tilde{u})$$

ва худди шунга ўхшаш

$$\max_{\overline{ABC}} |v_x - \tilde{v}_x| \leq Ld\rho(u,\tilde{u}), \quad \max_{\overline{ABC}} |v_y - \tilde{v}_y| \leq Ld\rho(u,\tilde{u})$$

тенгсизликларга эга бўламиз.

Энди агар $Ld^2 \leq \dfrac{1}{3}$ ва $Ld \leq \dfrac{1}{3}$ шартлар бажарилган бўлса, у ҳолда U оператор X метрик фазодаги $\overline{U_a(\theta)}$ ёпиқ шарни ўз–ўзига қисқартириб акслантиради. Бу шарт, хусусан d сонни етарлича кичик қилиб олиш ҳисобига амалга оширилади.

Шундай қилиб қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. *Текисликда берилган AB силлиқ эгри чизиқ шундай бўлсинки, ох ёки оу ўқларга параллел бўлган ихтиёрий тўғри чизиқ уни биттадан кўп бўлмаган нуқтада кесиб ўтсин. Бу ABC эгри чизиқли учбурчак ичида*

$$u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y) \qquad (1.4.20)$$

тенглама берилган бўлсин, бунда тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x,y,u,u_x,u_y)$ функция $M(x,y) \in \overline{ABC}$, $|u| \leq a$, $|p| \leq a$, $|q| \leq a$ бўлган соҳада биргаликда бўлган биринчи иккита x ва y ўзгарувчилар бўйича узлуксиз, қолган учта ўзгарувчи бўйича эса, x ва y ўзгарувчиларга нисбатан текис Липщиц шартини қаноатлантирсин.

У ҳолда, агар $\overline{ABC}$ эгри чизиқли учбурчак етарлича кичик бўлса, у ҳолда бу учбурчакда (1.4.20) тенгламанинг AB ёйда биринчи тартибгача ҳосиласи нолга тенг бўлган ечими мавжуд ва ягона бўлади.

Қисқартириб акслантириш принципи ёрдамида бошқа натижаларни ҳам олиш мумкин. Бу кўринишдаги қўзғалмас нуқта ҳақидаги принциплар билан, жумладан *Ю. Шаудер принципи* билан биз метрик ва нормаланган фазолардаги компакт тўпламлар тушунчаси билан танишганимиздан кейин қараб чиқамиз.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

Қуйидаги интеграл тенгламаларнинг ечимини кетма-кет яқинлашиш усули билан топинг:

4.1. $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) \equiv 0.$

4.2. $\varphi(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) \equiv 0.$

4.3. $\varphi(x) = 1 + \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) = 1.$

4.4. $\varphi(x) = x + 1 - \int\limits_0^x \varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) = 1.$

4.5. $\varphi(x) = x + 1 - \int\limits_0^x \varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) = x + 1.$

4.6. $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \int\limits_0^x \varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) = 1.$

4.7. $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \int\limits_0^x \varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) = x.$

4.8. $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \int\limits_0^x \varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) = \dfrac{x^2}{2} + x.$

4.9. $\varphi(x) = 1 + x + \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) = 1.$

4.10. $\varphi(x) = 2x + 2 - \int\limits_0^x \varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) = 1.$

4.11. $\varphi(x) = 2x + 2 - \int\limits_0^x \varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) = 2.$

4.12. $\varphi(x) = 2x^2 + 2 - \int\limits_0^x x\varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) = 2.$

4.13. $\varphi(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x - \int\limits_0^x \varphi(t)dt, \ \ \varphi_0(x) = x^2.$

4.14. $\varphi(x) = x + \int_0^x (t-x)\varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x) = x.$

4.15. $\varphi(x) = x^2 + \lambda\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x) = x^2.$

4.16. $\varphi(x) = 1 + \lambda\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x) = 1.$

4.17. $\varphi(x) = 2x^2 + 2 - \int_0^x x\varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x) = 2x^2 + 2.$

4.18. $\varphi(x) = x + 1 - \int_0^x \varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x) = x + 1.$

4.19. $\varphi(x) = 2x^2 + 2 - \int_0^x x\varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x) = 2x^2 + 2.$

4.20. $\varphi(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x - \int_0^x \varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x.$

4.21. Агар $K(x, t)$ функция $\int_0^a\int_0^a K^2(x, t)dtdx < +\infty$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда ихтиёрий λ да $\varphi(x) - \lambda\int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt = 0$ тенглама $L_2(0, a)$ синфга тегишли $\varphi(x) \equiv 0$ ягона ечимга эга бўлишлигини исботланг.

4.23. Кетма-кет яқинлашиш усулидан фойдаланиб, $\varphi(x) = \int_0^x \dfrac{t\varphi(t)}{1 + t + \varphi(t)}dt$ интеграл тенгламани ечинг.

4.24. Кетма-кет яқинлашиш усулидан фойдаланиб $\varphi(x) = \int_0^x \left[\varphi^2(t) + t\varphi(t) + t^2\right]dt$ интеграл тенгламанинг $\varphi_2(x)$ тақрибий ечимини топинг.

4.25. Кетма-кет яқинлашиш усулидан фойдаланиб $\varphi(x)=\int_0^x\left[t\varphi^2(t)-1\right]dt$ интеграл тенгламанинг $\varphi_3(x)$ тақрибий ечимини топинг.

Қуйидаги ажралган ядроли интеграл тенгламаларни ечинг:

5.1. $\varphi(x)=\lambda\int_0^1(x-1)\varphi(y)dy+x.$

5.2. $\varphi(x)=\lambda\int_0^1 2e^{x+y}\varphi(y)dy+2e^x.$

5.3. $\varphi(x)=\lambda\int_0^1(x+y-2xy)\varphi(y)dy+x+x^2$.

5.4. $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1(xy+x^2y^2)\varphi(y)dy+x^2+x^4$.

5.5. $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})\varphi(y)dy+1-6x^2$.

5.6. $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1(x^4+5x^3y)\varphi(y)dy+x^2-x^4$.

5.7. $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1(2xy^3+5x^2y^2)\varphi(y)dy+7x^4+3$.

5.8. $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1(x^2-xy)\varphi(y)dy+x^2+x$.

5.9. $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^1(5+4xy-3x^2-3y^2+9x^2y^2)\varphi(y)dy+x$.

5.10. $\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi\sin(2x+y)\varphi(y)dy+\pi-2x$.

5.11. $\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi\sin(x-2y)\varphi(y)dy+\cos 2x$.

5.12. $\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi\cos(2x+y)\varphi(y)dy+\sin x$.

5.13. $\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}\sin(3x+y)\varphi(y)dy+\cos x$.

5.14. $\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}(\sin y+y\cos x)\varphi(y)dy+1-\frac{2x}{\pi}$.

5.15. $\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}\cos^2(x-y)\varphi(y)dy+1+\cos 4x$.

5.16. $\varphi(x)=\lambda\int_0^{2\pi}(\cos x\cdot\cos y+\cos 2x\cdot\cos 2y)\varphi(y)dy+\cos 3x$.

5.17. $\varphi(x)=\lambda\int_0^{2\pi}(\cos x\cdot\cos y+2\sin 2x\cdot\sin 2y)\varphi(y)dy+\cos x$.

5.18. $\varphi(x)=\lambda\int_0^{2\pi}(\sin x\cdot\sin y+3\cos 2x\cdot\cos 2y)\varphi(y)dy+\sin x$.

5.19. $\varphi(x)-\lambda\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}tgt\varphi(t)dt=ctgx.$

5.20. $\varphi(x)-\lambda\int_0^1\cos(q\ln t)\varphi(t)dt=1.$

Қуйидаги интеграл тенгламаларнинг ечимларини топинг:

6.1. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos t\varphi(t)dt=\sin x$.

6.2. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\pi-t|\sin x\varphi(t)dt=x$.

6.3. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x-t)\varphi(t)dt=\cos x$.

6.4. $\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[x-\frac{1}{2}(3t^2-1)+\frac{1}{2}t(3x^2-1)\right]\varphi(t)dt=1$.

6.5. $\varphi(x)=2\int_0^1 xt\varphi^3(t)dt$.

6.6. $\varphi(x)=\int\limits_{-1}^{1}(xt+x^2t^2)\varphi^2(t)dt.$

6.7. $\varphi(x)=\int\limits_{0}^{1}x^2t^2\varphi^3(t)dt.$

6.8. $\varphi(x)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{xt}{1+\varphi^2(t)}dt.$

6.9. $\varphi(x)=\int\limits_{0}^{1}\frac{xt}{1+\varphi^2(t)}dt.$

6.10. Агар ихтиёрий $x\in[0,\ 1]$ да $a(x)>0$ бўлиб, $\int\limits_{0}^{1}a^2(x)dx>1$ бўлса, у ҳолда $\varphi(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}a(x)a(t)(1+\varphi^2(t))dt$ интеграл тенглама ҳақиқий ечимга эга бўлмаслигини кўрсатинг.

6.11. a ва b параметрларнинг қандай қийматларида

$$\varphi(x)=12\int\limits_{0}^{1}\left(xy-\frac{x+y}{2}+\frac{1}{3}\right)\varphi(y)dy+ax^2+bx-2$$

интеграл тенглама ечилади. a ва b параметрларнинг бу қийматларида интеграл тенгламанинг ечимини топинг.

6.12. a параметрнинг қандай қийматларида

$$\varphi(x)=\sqrt{15}\int\limits_{0}^{1}\left[y(4x^2-3x)+x(4y^2-3y)\right]\varphi(y)dy+ax+\frac{1}{x}$$

интеграл тенглама ечилади. a параметрнинг бу қийматларида интеграл тенгламанинг ечимини топинг.

6.13. λ нинг қандай қийматларида

$$\varphi(x)=\lambda\int\limits_{0}^{2\pi}\cos(2x-y)\varphi(y)dy+f(x)$$

интеграл тенглама ихтиёрий $f(x)\in C([0,\ 2\pi])$ функция учун ечилади ва λ нинг шу қийматларида интеграл тенгламанинг ечимини топинг.

6.14. λ нинг қандай қийматларида

$$\varphi(x)=\lambda\int\limits_{0}^{2\pi}\sin(x-2y)\varphi(y)dy+f(x)$$

интеграл тенглама ихтиёрий $f(x)\in C([0,\ 2\pi])$ функция учун ечилади ва λ нинг шу қийматларида интеграл тенгламанинг ечимини топинг.

Қуйидаги интеграл тенгламаларнинг ечимларини барча λ ва $a,\ b,\ c$ параметрларнинг барча қийматларида топинг:

6.15. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(y\sin x+\cos y)\varphi(y)dy+ax+b.$

6.16. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x+y)\varphi(y)dy+a\sin x+b.$

6.17. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(1+xy)\varphi(y)dy+ax^2+bx+c.$

6.18. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(x^2y+xy^2)\varphi(y)dy+ax+bx^3.$

6.19. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}(xy+x^2y^2)\varphi(y)dy+ax+b$.

6.20. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}\left[5(xy)^{\frac{1}{3}}+7(xy)^{\frac{2}{3}}\right]\varphi(y)dy+ax+bx^{\frac{1}{3}}$.

6.21. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+xy}{1+y^2}\varphi(y)dy+a+x+bx^2$.

6.22. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})\varphi(y)dy+ax^2+bx+c$.

6.23. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(xy+x^2+y^2-3x^2y^2)\varphi(y)dy+ax+b$.

6.24. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_{0}^{1}(ax-y)\varphi(y)dy+f(x)$ интеграл тенглама барча ҳақиқий λ учун ва барча $f(x)\in C([0,1])$ функциялар учун ечиладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг.

5-§. Чизиқли фазолар

1. Чизиқли фазо тушунчаси. Кўпинча аниқ бир метрик фазони қарайдиган бўлсак, у ҳолда бу фазо элементлари функциялардан ёки сонли кетма–кетликлардан ёки бошқа элементлардан иборат бўлиб, бу фазодаги элементларни бир–бирига қўшиш ва сонга кўпайтириш мумкин эканлигини кўрамиз. Бу эса чизиқли фазонинг қуйидаги умумий таърифига олиб келади.

Таъриф. E – қандайдир элементларнинг тўплами бўлиб, бу тўплам қуйидаги аксиомаларни қаноатлантирсин:

I. E – тўплам киритилган қўшиш амалига нисбатан Абель группаси бўлсин.

Бу эса, ихтиёрий иккита $x, y \in E$ элементларнинг $x+y$ йиғиндиси аниқланган бўлиб, бу йиғинди ҳам шу $x+y \in E$ фазо элементи бўлади, бундан ташқари қўшиш амали учун

1) $x+y=y+x$ – коммутативлик;

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ – ассоциативлик;

3) бир қийматли аниқланган шундай бир $\theta \in E$ элемент мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in E$ учун $x+\theta=x$ тенглик ўринли;

4) ихтиёрий $x \in E$ элемент учун шу фазода шундай бир $(-x)$ элемент бир қийматли аниқланган бўлиб $x+(-x)=\theta$ тенгликлар ўринли эканлигини билдиради. Бу ерда $x+(-y)$ ўрнига $x-y$ деб ёзамиз.

θ элемент ноль элемент деб ёки E группанинг ноли деб айтилади. $-x$ элемент эса, x элементга қарама–қарши бўлган элемент деб айтилади.

II. E – тўпламдаги ихтиёрий $x, y, z, ...$ элементларни $\lambda, \mu, \nu, ...$ ҳақиқий (комплекс) сонга кўпайтириш амали аниқланган бўлиб, бу λx кўпайтма ҳам шу E тўпламнинг элементи бўлади ва қуйидаги шартлар бажарилади:

1) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ – кўпайтиришнинг ассоциативлик қонуни;

2) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y, \quad (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ – дистрибутивликнинг икки қонуни;

3) $1 \cdot x = x$ тенгликлар ўринлидир.

Бу келтирилган I ва II аксиомаларни қаноатлантирувчи E тўплам *чизиқли ёки вектор фазо* деб айтилади. Биз E тўпламнинг элементларини ҳақиқий ёки комплекс сонга кўпайтириш амали аниқланганлигига қараб *ҳақиқий ёки комплекс* чизиқли фазони ҳосил қиламиз.

Энди чизиқли фазога мисоллар келтирамиз:

1. Ҳақиқий сонларнинг $n-$та $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ тартибланган системаси шаклидаги элементларнинг R^n фазосида $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ва $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ элементлар орасидаги қўшиш амали

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ ...,\ x_n+y_n)$$

ва λ ҳақиқий сонга кўпайтириш

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)$$

шаклида киритилганда ҳақиқий чизиқли фазодан иборат бўлади.

2. Комплекс сонларнинг $n-$та $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ тартибланган системаси шаклидаги элементларнинг C^n фазосида $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ ва $w=(w_1,w_2,...,w_n)$ элементлар орасидаги қўшиш амали

$$z+w=(z_1+w_1,\ z_2+w_2,\ ...,\ z_n+w_n)$$

ва λ комплекс сонга кўпайтириш

$$\lambda z=(\lambda z_1,\lambda z_2,...,\lambda z_n)$$

шаклида киритилганда комплекс чизиқли фазодан иборат бўлади.

3. $n-$тартибли оддий бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламанинг комплекс қийматли ечимлари тўплами функцияларни қўшиш ва комплекс сонга кўпайтириш амалига нисбатан комплекс чизиқли фазодан иборат бўлади.

4. Ҳақиқий (комплекс) $C[a,b]$, $L_p[a,b]$ фазо элементлари тўплами ҳақиқий (комплекс) чизиқли фазо ташкил этади.

5. Ҳақиқий (комплекс) m, c, l_p фазо элементлари тўплами ҳақиқий (комплекс) чизиқли фазо ташкил этади. Бунда $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ ва $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ элементлар орасидаги қўшиш амали

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ ...,\ x_n+y_n,\ ...\ )$$

ва λ ҳақиқий (комплекс) сонга кўпайтириш

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n,\ ...\ )$$

шаклида киритилади.

Энди чизиқли фазо аксиомасидан келиб чиқадиган айрим натижаларни келтирамиз.

1. $0\cdot x=0$[1]. Ҳақиқатдан ҳам,

$$x=1\cdot x=(1+0)\cdot x=1\cdot x+0\cdot x=x+0\cdot x$$

бўлади. Бундан эса,

$$x+(-x)=x+0\cdot x+(-x)$$

ёки

$$0=0+0\cdot x=0\cdot x$$

ҳосил бўлади.

2. $(-1)\cdot x=-x$ бўлади, чунки

$$(-1)x+x=(-1+1)x=0\cdot x=0$$

ҳосил бўлади.

3. $\lambda\cdot 0=0$ бўлади, чунки

$$\lambda\cdot 0=\lambda\cdot[x+(-x)]=\lambda\cdot x+\lambda\cdot(-x)=$$
$$=\lambda\cdot x+(-\lambda)\cdot x=\lambda\cdot x-\lambda\cdot x=0$$

ҳосил бўлади.

4. Агар $\lambda\cdot x=\mu\cdot x$ ва $x\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\lambda=\mu$ бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $\lambda\cdot x=\mu\cdot x$ ва $x\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\lambda\cdot x-\mu\cdot x=0$ ёки $(\lambda-\mu)\cdot x=0$ бўлади. Бундан агар $\lambda\neq\mu$ бўлса, у ҳолда

$$x=\frac{1}{\lambda-\mu}(\lambda-\mu)\cdot x=\frac{1}{\lambda-\mu}\cdot 0=0$$

ҳосил бўлади. Бу эса $x\neq 0$ шартга қарама–қаршидир.

Таъкидлаш керакки, агар $E-$ чизиқли фазо бўлса, у ҳолда қўшишнинг коммутативлик аксиомасини қолган аксиомаларнинг натижаси сифатида ҳосил қилиш мумкин бўлади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$(x+y)-(y+x)=(x+y)+(-1)(y+x)=$$
$$=x+y+(-1)y+(-1)x=x+[y+(-1)y]+(-1)x=$$
$$=x+0+(-1)x=x+(-1)x=0$$

ҳосил бўлади.

[1] Бу ерда тенглик чап томонида ноль сони бўлиб ўнг томонда эса чизиқли фазонинг ноль элементидир. Бундан кейин ноль сони ва ноль элементи бир хил белгилансада уларни биз келтирилган текстда фарқлашимиз мумкин бўлади.

Агар иккита E ва E' чизиқли фазоларнинг элементлари ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлиб, бу мослик алгебраик амалларни сақласа, яъни агар $x \leftrightarrow x'$ ва $y \leftrightarrow y'$ бўлса, у ҳолда $x + y \leftrightarrow x' + y'$ ва $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$ муносабатлар келиб чиқса, у ҳолда бу E ва E' чизиқли фазолар изоморф деб айтилади.

Чизиқли фазоларда элементларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги тушунчаларини киритиш мумкин. Агар

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$$

тенгликдан

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

тенгликлар келиб чиқса, у ҳолда чизиқли фазодаги

$$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$$

элементлар *чизиқли эркли* деб айтилади. Агар бу

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n$$

сонлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлиб

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда чизиқли фазодаги $x_1, x_2, ..., x_n$ элементлар *чизиқли боғлиқ* деб айтилади. Бу ҳолда, масалан $\lambda_n \neq 0$ бўлсин. У ҳолда

$$x_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} x_2 - ... - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} x_{n-1}$$

тенглик ҳосил бўлади, ёки $-\dfrac{\lambda_i}{\lambda_n} = \alpha_i$ деб олсак, у ҳолда

$$x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{n-1} x_{n-1}$$

ҳосил бўлади. Бу ҳолда x_n элемент $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ элементларнинг *чизиқли комбинациясидан иборат* деб айтилади.

2. Чизиқли кўпхиллик. Агар E чизиқли фазодаги бўш бўлмаган L тўплам $x_1, x_2, ..., x_n$ элементлар билан бирга бу элементларнинг ихтиёрий

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n$$

чизиқли комбинациясини ҳам ўзида сақласа, у ҳолда бу L тўпламга E чизиқли фазодаги *чизиқли кўпхиллик* деб айтилади.

5-§. Чизиқли фазолар

1. Чизиқли фазо тушунчаси. Кўпинча аниқ бир метрик фазони қарайдиган бўлсак, у ҳолда бу фазо элементлари функциялардан ёки сонли кетма–кетликлардан ёки бошқа элементлардан иборат бўлиб, бу фазодаги элементларни бир–бирига қўшиш ва сонга кўпайтириш мумкин эканлигини кўрамиз. Бу эса чизиқли фазонинг қуйидаги умумий таърифига олиб келади.

Таъриф. E – қандайдир элементларнинг тўплами бўлиб, бу тўплам қуйидаги аксиомаларни қаноатлантирсин:

I. E – тўплам киритилган қўшиш амалига нисбатан Абель группаси бўлсин.

Бу эса, ихтиёрий иккита $x, y \in E$ элементларнинг $x+y$ йиғиндиси аниқланган бўлиб, бу йиғинди ҳам шу $x+y \in E$ фазо элементи бўлади, бундан ташқари қўшиш амали учун

1) $x+y=y+x$ – коммутативлик;

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ – ассоциативлик;

3) бир қийматли аниқланган шундай бир $\theta \in E$ элемент мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in E$ учун $x+\theta=x$ тенглик ўринли;

4) ихтиёрий $x \in E$ элемент учун шу фазода шундай бир $(-x)$ элемент бир қийматли аниқланган бўлиб $x+(-x)=\theta$ тенгликлар ўринли эканлигини билдиради. Бу ерда $x+(-y)$ ўрнига $x-y$ деб ёзамиз.

θ элемент ноль элемент деб ёки E группанинг ноли деб айтилади. $-x$ элемент эса, x элементга қарама–қарши бўлган элемент деб айтилади.

II. E – тўпламдаги ихтиёрий $x, y, z, \ldots$ элементларни $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ ҳақиқий (комплекс) сонга кўпайтириш амали аниқланган бўлиб, бу λx кўпайтма ҳам шу E тўпламнинг элементи бўлади ва қуйидаги шартлар бажарилади:

1) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ – кўпайтиришнинг ассоциативлик қонуни;

2) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$, $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ – дистрибутивликнинг икки қонуни;

3) $1\cdot x=x$ тенгликлар ўринлидир.

Бу келтирилган I ва II аксиомаларни қаноатлантирувчи E тўплам *чизиқли ёки вектор фазо* деб айтилади. Биз E тўпламнинг элементларини ҳақиқий ёки комплекс сонга кўпайтириш амали аниқланганлигига қараб *ҳақиқий ёки комплекс* чизиқли фазони ҳосил қиламиз.

Энди чизиқли фазога мисоллар келтирамиз:

1. Ҳақиқий сонларнинг $n-$та $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ тартибланган системаси шаклидаги элементларнинг R^n фазосида $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ва $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ элементлар орасидаги қўшиш амали

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ ...,\ x_n+y_n)$$

ва λ ҳақиқий сонга кўпайтириш

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)$$

шаклида киритилганда ҳақиқий чизиқли фазодан иборат бўлади.

2. Комплекс сонларнинг $n-$та $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ тартибланган системаси шаклидаги элементларнинг C^n фазосида $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ ва $w=(w_1,w_2,...,w_n)$ элементлар орасидаги қўшиш амали

$$z+w=(z_1+w_1,\ z_2+w_2,\ ...,\ z_n+w_n)$$

ва λ комплекс сонга кўпайтириш

$$\lambda z=(\lambda z_1,\lambda z_2,...,\lambda z_n)$$

шаклида киритилганда комплекс чизиқли фазодан иборат бўлади.

3. $n-$тартибли оддий бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламанинг комплекс қийматли ечимлари тўплами функцияларни қўшиш ва комплекс сонга кўпайтириш амалига нисбатан комплекс чизиқли фазодан иборат бўлади.

4. Ҳақиқий (комплекс) $C[a,b]$, $L_p[a,b]$ фазо элементлари тўплами ҳақиқий (комплекс) чизиқли фазо ташкил этади.

5. Ҳақиқий (комплекс) m, c, l_p фазо элементлари тўплами ҳақиқий (комплекс) чизиқли фазо ташкил этади. Бунда $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ ва $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ элементлар орасидаги қўшиш амали

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ ...,\ x_n+y_n,\ ...)$$

ва λ ҳақиқий (комплекс) сонга кўпайтириш

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n,\ ...)$$

шаклида киритилади.

Энди чизиқли фазо аксиомасидан келиб чиқадиган айрим натижаларни келтирамиз.

1. $0 \cdot x = 0$[1]. Ҳақиқатдан ҳам,

$$x = 1 \cdot x = (1+0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x$$

бўлади. Бундан эса,

$$x + (-x) = x + 0 \cdot x + (-x)$$

ёки

$$0 = 0 + 0 \cdot x = 0 \cdot x$$

ҳосил бўлади.

2. $(-1) \cdot x = -x$ бўлади, чунки

$$(-1)x + x = (-1+1)x = 0 \cdot x = 0$$

ҳосил бўлади.

3. $\lambda \cdot 0 = 0$ бўлади, чунки

$$\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot [x + (-x)] = \lambda \cdot x + \lambda \cdot (-x) =$$
$$= \lambda \cdot x + (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot x - \lambda \cdot x = 0$$

ҳосил бўлади.

4. Агар $\lambda \cdot x = \mu \cdot x$ ва $x \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\lambda = \mu$ бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, агар $\lambda \cdot x = \mu \cdot x$ ва $x \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\lambda \cdot x - \mu \cdot x = 0$ ёки $(\lambda - \mu) \cdot x = 0$ бўлади. Бундан агар $\lambda \neq \mu$ бўлса, у ҳолда

$$x = \frac{1}{\lambda - \mu}(\lambda - \mu) \cdot x = \frac{1}{\lambda - \mu} \cdot 0 = 0$$

ҳосил бўлади. Бу эса $x \neq 0$ шартга қарама–қаршидир.

Таъкидлаш керакки, агар $E-$ чизиқли фазо бўлса, у ҳолда қўшишнинг коммутативлик аксиомасини қолган аксиомаларнинг натижаси сифатида ҳосил қилиш мумкин бўлади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$(x+y) - (y+x) = (x+y) + (-1)(y+x) =$$
$$= x + y + (-1)y + (-1)x = x + [y + (-1)y] + (-1)x =$$
$$= x + 0 + (-1)x = x + (-1)x = 0$$

ҳосил бўлади.

---

[1] Бу ерда тенглик чап томонида ноль сони бўлиб ўнг томонда эса чизиқли фазонинг ноль элементидир. Бундан кейин ноль сони ва ноль элементи бир хил белгилансада уларни биз келтирилган текстда фарқлашимиз мумкин бўлади.

Агар иккита E ва E' чизиқли фазоларнинг элементлари ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлиб, бу мослик алгебраик амалларни сақласа, яъни агар $x \leftrightarrow x'$ ва $y \leftrightarrow y'$ бўлса, у ҳолда $x + y \leftrightarrow x' + y'$ ва $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$ муносабатлар келиб чиқса, у ҳолда бу E ва E' чизиқли фазолар изоморф деб айтилади.

Чизиқли фазоларда элементларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги тушунчаларини киритиш мумкин. Агар

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

тенгликдан

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

тенгликлар келиб чиқса, у ҳолда чизиқли фазодаги

$$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$$

элементлар *чизиқли эркли* деб айтилади. Агар бу

$$\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_n$$

сонлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлиб

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда чизиқли фазодаги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементлар *чизиқли боғлиқ* деб айтилади. Бу ҳолда, масалан $\lambda_n \neq 0$ бўлсин. У ҳолда

$$x_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} x_2 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} x_{n-1}$$

тенглик ҳосил бўлади, ёки $-\dfrac{\lambda_i}{\lambda_n} = \alpha_i$ деб олсак, у ҳолда

$$x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$$

ҳосил бўлади. Бу ҳолда x_n элемент $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ элементларнинг *чизиқли комбинациясидан иборат* деб айтилади.

2. Чизиқли кўпхиллик. Агар E чизиқли фазодаги бўш бўлмаган L тўплам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементлар билан бирга бу элементларнинг ихтиёрий

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n$$

чизиқли комбинациясини ҳам ўзида сақласа, у ҳолда бу L тўпламга E чизиқли фазодаги *чизиқли кўпхиллик* деб айтилади.

Шуни таъкидлаш керакки, ҳар қандай чизиқли кўпхиллик ноль деб аталувчи 0 элементни сақлайди. Ҳақиқатдан ҳам, L бўш бўлмаган тўплам эканлигидан қандайдир x элементни сақлайди. Шунинг учун L чизиқли кўпхиллик эканлигидан бу тўплам $-x=(-1)x$ элементни сақлайди ва шунга кўра,

$$x+(-x)=0$$

элементни ҳам сақлайди.

Чизиқли фазодаги $x_1, x_2, ..., x_k$ элементларни қарайлик. Барча мумкин бўлган $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ йиғиндилар тўплами E чизиқли фазодаги қандайдир L_0 чизиқли кўпхилликни ташкил этади. Ҳақиқатдан ҳам, агар y_j элементлар $y_j=\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^j x_i$ шаклида бўлса, у ҳолда бу элементларнинг ихтиёрий чизиқли комбинацияси учун

$$\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+...+\lambda_n y_n=\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i$$

тенглик бўлиб шу шаклга эга бўлади. Бу қурилган L_0 чизиқли кўпхиллик кўриниб турибдики $x_1, x_2, ..., x_k$ элементларни сақлайдиган энг кичик чизиқли кўпхилликдир. Бу ерда энг кичик чизиқли кўпхиллик шу маънодаки, $x_1, x_2, ..., x_k$ элементларни сақлайдиган ҳар қандай L чизиқли кўпхиллик L_0 чизиқли кўпхилликни ҳам ўзида сақлайди.

Энди энг кичик чизиқли кўпхиллик таърифини чексиз элементлар тўплами, масалан, саноқлита элементлар тўплами бўлган ҳолга умумлаштириш мумкин бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, E чизиқли фазодан олинган $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ элементларнинг саноқли тўплами бўлсин. Бу элементларни сақлайдиган энг кичик L_0 чизиқли кўпхиллик барча мумкин бўлган $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ йиғиндилар тўпламидан иборат бўлиб, бунда нафақат λ_i сонлар ихтиёрий сонлар, балки k ҳам ихтиёрий натурал қиймат қабул қилади. Берилган элементларни сақлайдиган энг кичик чизиқли кўпхилликка *шу берилган элементлар ёрдамида яратилган* *чизиқли кўпхиллик* ёки *шу элементларнинг чизиқли қопламаси* деб айтилади.

Агар E чизиқли фазодаги L чизиқли кўпхиллик чекли сондаги элементлар билан аниқланган бўлса, у ҳолда бу L чизиқли кўпхиллик чекли ўлчамли деб айтилади. Агар L чизиқли кўпхиллик $x_1, x_2, ..., x_n$ элементлар билан аниқланган ва бу элементлар чизиқли эркли бўлса, у ҳолда L чизиқли кўпхиллик n ўлчамли деб айтилади. Бу ҳолда $x_1, x_2, ..., x_n$ элементлар тўпламига L чизиқли кўпхилликдаги *базис* деб айтилади. Агар $x_1, x_2, ..., x_n$ элементлар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда бу $x_1, x_2, ..., x_n$ элементлар тўпламидан чизиқли эркли бўлган элементларнинг максимал сонига L чизиқли кўпхилликнинг ўлчамли деб айтилади. Бошқача қилиб, айтганда агар L чизиқли кўпхилликда n та чизиқли эркли элементлар мавжуд бўлиб, ҳар қандай $n+1$ та элементлар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда бу L чизиқли кўпхиллик n ўлчамли деб айтилади.

Агар E чизиқли фазода (L чизиқли кўпхилликда) ихтиёрий n натурал сони учун n та чизиқли эркли элементлар мавжуд бўлса, у ҳолда E чизиқли фазо (L чизиқли кўпхиллик) *чексиз ўлчамли* деб айтилади. Масалан, осонгина кўриш мумкинки $C[a,b]$ фазо чексиз ўлчамлидир.

3. Тўғри йиғиндилар. Чизиқли фазони икки ёки бир нечта чизиқли кўпхилликларнинг йиғиндиси шаклида ёйиш ҳақидаги тушунчани киритамиз. E чизиқли фазо ва унга тегишли бўлган $L_1, L_2, ..., L_n$ чизиқли кўпхилликлар бўлсин. Агар ҳар бир $x \in E$ элемент

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_n, \quad x_i \in L_i \;, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{1.5.1}$$

шаклида бир қийматли тасвирланса, у ҳолда E чизиқли фазо унга тегишли бўлган $L_1, L_2, ..., L_n$ чизиқли кўпхилликларнинг *тўғри йиғиндиси* деб, (1.5.1) ифода эса x элементнинг $L_1, L_2, ..., L_n$ чизиқли кўпхилликлардан олинган элементлар бўйича ёйилмаси деб айтилади.

Бу ҳолда

$$E = \sum_{i=1}^{n} \oplus L_i$$

шаклида ёзамиз. Осонгина кўриш мумкинки, агар

$$E=\sum_{i=1}^{n}\oplus L_i, \quad L_i=\sum_{k=1}^{m_i}\oplus L_k^{(i)}$$

бўлса, у ҳолда

$$E=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\oplus L_k^{(i)}$$

ҳосил бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, у ҳолда ҳар бир $x \in E$ элемент

$$x=\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(x_1^{(i)}+x_2^{(i)}+\ldots+x_{m_i}^{(i)}\right), \quad x_i \in L_i\ , \quad x_k^{(i)} \in L_k^{(i)}$$

шаклида тасвирланади ва бу тасвир бир қийматлидир, бошқача айтганда агар

$$x=\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{x}_1^{(i)}+\tilde{x}_2^{(i)}+\ldots+\tilde{x}_{m_i}^{(i)}\right)$$

бошқа бир тасвирга эга бўлсак, у ҳолда x элементнинг $L_1, L_2, \ldots, L_n$ чизиқли кўпхилликлардан олинган элементлар бўйича ёйилмасининг ягона эканлигидан

$$x_i=x_1^{(i)}+x_2^{(i)}+\ldots+x_{m_i}^{(i)}=\tilde{x}_1^{(i)}+\tilde{x}_2^{(i)}+\ldots+\tilde{x}_{m_i}^{(i)}=\tilde{x}_i$$

тенгликка эга бўламиз. Ҳамда $x_i \in L_i$ элементнинг $L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, \ldots, L_{m_i}^{(i)}$ чизиқли кўпхилликлардан олинган элементлар бўйича ёйилмасининг ягона эканлигидан эса ҳар бир
$i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, m_i$ учун

$$x_k^{(i)}=\tilde{x}_k^{(i)}$$

тенгликка эга бўламиз.

Агар $E=L_1\oplus L_2$ бўлса, у ҳолда L_1 ва L_2 чизиқли кўпхилликлар фақатгина умумий ноль элементга эга бўлиши мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам, агар L_1 ва L_2 чизиқли кўпхилликлар бошқа бир u элементни сақласа, у ҳолда ихтиёрий $x \in E$ элемент учун

$$x=y+z, \quad y\in L_1\ , \quad z\in L_2$$

тасвир ўринли эканлигидан

$$x=(y-u)+(z+u), \quad y-u\in L_1\ , \quad z+u\in L_2$$

тасвирга эга бўламиз ва бу тасвир биринчи тасвирдан фарқли бўлиб шартга кўра мумкин эмас.

Аксинча, агар ихтиёрий $x \in E$ элемент

$$x = y + z, \quad y \in L_1, \quad z \in L_2 \tag{1.5.2}$$

шаклида тасвирланган ва $L_1 \bigcap L_2 = 0$ бўлса, у ҳолда $E = L_1 \oplus L_2$ бўлади.

Бу тасдиқни исботлаш учун (1.5.2) ёйилманинг бир қийматли ўрнатилишини кўрсатиш етарлидир. Агар

$$x = y + z = \tilde{y} + \tilde{z}, \quad y, \tilde{y} \in L_1, \quad z, \tilde{z} \in L_2$$

бўлса, у ҳолда

$$y - \tilde{y} = \tilde{z} - z, \quad y - \tilde{y} \in L_1, \quad z - \tilde{z} \in L_2$$

бўлади. Бундан қўйилган шартга кўра

$$y - \tilde{y} = \tilde{z} - z = 0, \text{ яъни } \quad y = \tilde{y}, \quad z = \tilde{z}$$

эканлиги келиб чиқади ва тасдиқ исбот бўлди.

Кўпгина ҳолларда икки ёки бир нечта фазоларнинг тўғри йиғиндиси ҳақидаги тушунча фойдалидир.

$E_1, E_2, ..., E_n$ чизиқли фазолар бўлсин. Барча тартибланган $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ системалардан ташкил топган X тўпламни қараймиз, бунда $x_i \in E_i$, $i = 1, 2, ..., n$ берилган фазо элементлари. Агар $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ва $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ системалар, ҳамда λ ўзгармас бўлса, у ҳолда

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

ва

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

деб оламиз. Осонгина кўрсатиш мумкинки, бундай аниқланган қўшиш ва сонга кўпайтириш амали билан барча тартибланган $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ системалардан ташкил топган X тўплам чизиқли фазо бўлади.

Агар барча $x_i \in E_i$, $i = 1, 2, ..., n$ фазолар метрик фазолар бўлса, у ҳолда X чизиқли фазони ҳам метрикалаштириш мумкин бўлади. Масалан,

$$\rho(x, y) = \max_i \rho(x_i, y_i)$$

ёки

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\rho^2(x_i,\,y_i)}\,,$$

бунда $\rho(x_i,\,y_i)$ масофа E_i фазодаги x_i ва y_i элементларнинг орасидаги масофадир. Бундан ташқари, агар $E_1, E_2, ..., E_n$ тўла фазолар бўлса, у ҳолда X фазо ҳам тўла бўлади.

4. Фактор фазолар. E чизиқли фазо ва E чизиқли фазога тегишли бўлган қандайдир L_0 чизиқли кўпхиллик бўлсин. E чизиқли фазо группа сифатида L_0 қисм группага нисбатан қўшини синфларга ажратамиз. Иккита x_1 ва x_2 элементлар битта ва фақат битта L тўпламга тегишли бўлишлиги учун x_1-x_2 айирма L_0 чизиқли кўпхилликка тегишли ва фақат шу ҳолдагина E фазо L тўпламларга шундай ажратилади.

Агар $x'\in L$ ихтиёрий элемент бўлса, у ҳолда L тўпламга қарашли ҳар қандай элемент $x=x'+x_0$ шаклида тасвирланади, бунда $x_0\in L_0$ бўлади. Шунинг учун L тўплам L_0 чизиқли кўпхилликни x' элементга силжитиш орқали ҳосил қилинади.

E/L_0 фактор группани қурамиз. Унинг элементлари L тўпламлардан иборат бўлиб L_0 чизиқли кўпхилликни силжитиш орқали ҳосил қилинади.

E/L_0 фактор группада қўшиш амали қуйидагича аниқланади: L_1 ва L_2 тўпламлар E/L_0 фактор группадан олинган бўлсин. У ҳолда L_1+L_2 йиғинди қўшни синфи барча мумкин бўлган x_1+x_2, бунда $x_1\in L_1$, $x_2\in L_2$ йиғиндидан ҳосил қилинган қўшни синфини атаймиз. Ҳақиқатдан ҳам бу қўшни синфдир, чунки агар x_1+x_2 ва $x_1'+x_2'$ шу тўпламга тегишли иккита элемент бўлса, у ҳолда

$$(x_1+x_2)-(x_1'+x_2')=(x_1-x_1')+(x_2-x_2')=x_0+y_0\in L_0$$

бўлади, чунки $x_0, y_0\in L_0$ ва L_0 чизиқли кўпхилликдир. Шунга кўра, $L_1+L_2\subset L$, бунда L қандайдир қўшни синфдир. Агар y бу синфдаги ихтиёрий элемент бўлса, у ҳолда L синфга тегишли x_1+x_2 шаклидаги элементни олсак, у ҳолда $L_1+L_2\subset L$ муносабатдан

$$y-(x_1+x_2)=x_0\in L_0$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Бундан эса,

$$y = x_1 + x_2 + x_0 = x_1 + \tilde{x}_2$$

ҳосил бўлади, бунда $x_1 \in L_1$, $\tilde{x}_2 \in L_2$. Шунинг учун $L \subset L_1 + L_2$ бўлади. Шунга кўра $L_1 + L_2 = L$ эканлигини ҳосил қиламиз.

Худди шунингдек, λL тўплам барча мумкин бўлган λx, бунда $x \in L$ ва $\lambda \neq 0$ шаклидаги элементлардан ташкил топган тўплам, яъни бу ҳам қўшни синф эканлигини исботлаш мумкин. Таъриф бўйича ихтиёрий $L \in E / L_0$ учун $0 \cdot L = L_0$ деб оламиз. Осонгина кўриш мумкинки, E / L_0 тўплам чизиқли фазонинг барча аксиомаларини қаноатлантиради. Шу билан бирга E / L_0 чизиқли фазонинг ноли L_0 чизиқли кўпхилликдир. Агар $L \in E / L_0$ тўплам E фазонинг $0-$ ноль элементини сақласа, у ҳолда L тўплам L_0 чизиқли кўпхиллик билан устма–уст тушади, чунки бу ҳолда ихтиёрий $x \in L$ элемент

$$x = 0 + x_0 = x_0 \in L_0$$

шаклида бўлади. Тескари тасдиқ ҳам тўғридир.

E / L_0 чизиқли фазо E чизиқли фазонинг L_0 чизиқли кўпхиллик бўйича *фактор фазоси* деб айтилади.

Мисол. $C[0,1]$ фазода $t = \dfrac{1}{2}$ нуқтада нолга айланувчи барча узлуксиз функцияларнинг C_0 чизиқли кўпхиллигини қарайлик. Бу чизиқли кўпхиллик бўйича мос фактор фазо ҳақиқий сонлар тўпламига изоморф фазо бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар C_0 чизиқли кўпхилликка нисбатан битта қўшни синфга тегишли бўлсин. Бу эса $x\left(\dfrac{1}{2}\right) - y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ ёки $x\left(\dfrac{1}{2}\right) = y\left(\dfrac{1}{2}\right)$ эканлигини билдиради. Шундай қилиб, ҳар бир қўшни синф $t = \dfrac{1}{2}$ нуқтада бир хил қиймат қабул қилувчи функцияларнинг бирлашмасидан иборат бўлади. Ҳар бир қўшни синфдан уни аниқлайдиган $x(t) = const$ функцияни олсак, у ҳолда биз ўзгармас сонлар тўплами ва қўшни синфлар тўплами билан ўзаро бир қийматли мосликни ҳосил қиламиз. Бу мослик изоморфизм эканлигини кўриш мумкин бўлади.

Агар $E = E_1 \oplus E_2$ фазо бўлса, у ҳолда E / E_1 фактор фазо E_2 қисм фазога изоморфдир.

5. Ҳақиқий ва комплекс фазолар орасидаги боғлиқлик. Комплекс сонлар учун алгебраик амаллардан ташқари унинг $\overline{a+bi} = a - bi$ қўшмаси амали ҳам асосий ҳисобланади.

Табиий равишда комплекс фазони худди шунга ўхшаш амал – *инволюция амали* аниқланган деб қарашимиз мумкин бўлади.

E комплекс чизиқли фазонинг барча $x, y, z, ...$ элементлари учун шу E комплекс чизиқли фазодаги $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, ...$ элементларни мос қўювчи ва

1) $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$,

2) $\overline{\lambda x} = \overline{\lambda} \cdot \overline{x}$, бунда $\lambda -$комплекс кўпайтувчи,

3) $\overline{(\overline{x})} = \overline{\overline{x}} = x$

шартларни қаноатлантирувчи амалга инволюция деб айтилади.[1] Барча $\overline{x} = x$ тенглик ўринли бўлган $x \in E$ элементларга ҳақиқий элементлар деб айтилади. Барча $\overline{x} = -x$ тенглик ўринли бўлган $x \in E$ элементларга соф мавҳум элементлар деб айтилади. Агар $x \in E$ ҳақиқий элемент бўлса, у ҳолда ix соф мавҳум элемент бўлади, агар y соф мавҳум элемент бўлса, у ҳолда $\frac{1}{i} y$ ҳақиқий элемент бўлади. Шундай қилиб, y соф мавҳум элементлар тўпламига ix кўринишдаги элементлар тўплами мос келади, бунда x ҳақиқий элементдир.

Ҳар қандай $x \in E$ элемент $x = u + iv$ шаклида бир қийматли равишда тасвирланади, бунда u ва v ҳақиқий элементлар. Ҳақиқатдан ҳам, $u = \dfrac{x+\overline{x}}{2}$ ва $v = \dfrac{x-\overline{x}}{2i}$ деб олсак, у ҳолда $x = u + iv$ бўлади, бундан ташқари

---

[1] Агар E фазода кетма–кетликнинг яқинлашиши тушунчаси киритилганда $x_n \to x$ эканлигидан $\overline{x}_n \to \overline{x}$ эканлигининг келиб чиқиши шарти қўшимча талаб этилади.

$$\bar{u}=\frac{1}{2}\overline{(x+\bar{x})}=\frac{1}{2}(\bar{x}+\bar{\bar{x}})=\frac{1}{2}(\bar{x}+x)=u$$

ва

$$\bar{v}=-\frac{1}{2i}\overline{(x-\bar{x})}=-\frac{1}{2i}(\bar{x}-\bar{\bar{x}})=\frac{1}{2i}(x-\bar{x})=v,$$

яъни u ва v ҳақиқий элементлар бўлади.

Ҳар қандай $x\in E$ элемент $x=u+iv$ шаклида бир қийматли равишда тасвирланади, яъни агар

$$x=u+iv=t+is \tag{1.5.3}$$

бўлса, у ҳолда $u=t$ ва $v=s$ бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, (1.5.3) кўра

$$u-t=i(s-v)$$

келиб чиқади, бунда $u,v,t,s-$ ҳақиқий элементлар бўлади. Бундан эса

$$\overline{u-t}=\bar{u}-\bar{t}=u-t\,,$$

$$\overline{i\,(s-v)}=\bar{i}\,(\bar{s}-\bar{v})=-i\,(s-v)$$

бўлади. Шунинг учун

$$u-t=-i(s-v),$$

яъни

$$i(s-v)=-i(s-v)$$

ва бунга кўра

$$s-v=0,\quad s=v$$

бўлади. Бундан эса

$$u-t=0,\quad u=t$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, биз ҳар қандай E комплекс чизиқли фазонинг иккита ҳақиқий чизиқли фазоларнинг тўғри йиғиндиси эканлигини исбот қилдик. Шунинг учун кўпгина масалаларни тадқиқ этишда комплекс фазоларни қараш масаласи ҳақиқий фазоларни қарашга олиб келинади.

Ҳар қандай n ўлчамли комплекс фазо $2n$ ўлчамли ҳақиқий фазодир.

E ҳақиқий чизиқли фазо бўлсин. E фазони қандайдир $\tilde{E}$ комплекс чизиқли фазонинг қисми деб қараш мумкин. Барча мумкин бўлган $z=x+iy$ формал йиғиндиларни қараймиз, бунда $x,y\in E$ ва $i-$ мавҳум бирлик бўлсин. Агар, бундан ташқари,

$z_1 = x_1 + iy_1$ бўлса, у ҳолда элементларини қўшиш ва сонга кўпайтириш амалларини

$$z + z_1 = (x + x_1) + i(y + y_1),$$
$$(\alpha + \beta i)z = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

(α ва β – ҳақиқий ўзгармаслар) тенгликлар орқали аниқлаймиз.

Бу $z = x + iy$ формал йиғиндиларнинг $\tilde{E}$ тўплами комплекс чизиқли фазо бўлиб уни одатда E ҳақиқий чизиқли фазонинг *комплекс қопламаси* деб аталади. Бизга берилган E ҳақиқий чизиқли фазо $\tilde{E}$ комплекс чизиқли фазога қарашли бўлиб, $\tilde{E}$ комплекс чизиқли фазонинг $z = x + i \cdot 0$ элементларидан ва $\alpha + i \cdot 0$ ўзгармасларга кўпайтиришдан ҳосил қилинган қисмини E ҳақиқий чизиқли фазо ташкил қилади. Бундай E ҳақиқий чизиқли фазонинг $\tilde{E}$ комплекс чизиқли фазога қарашли бўлишлиги E ҳақиқий чизиқли фазони *комплексификациялаш* деб айтилади. *Декомплексификациялаш* эса бу комплексификациялашга қандайдир маънода тескари жараёндир. $\tilde{E}$ комплекс чизиқли фазо бўлсин. Ҳар бир z векторни $z = x + iy$ шаклида ёзамиз, бунда x ва y шу $\tilde{E}$ комплекс чизиқли фазодаги ҳақиқий элементлар бўлсин. Ҳақиқий элементларнинг (x, y) жуфтидан иборат бўлган E ҳақиқий чизиқли фазонинг элементларини қўшиш ва сонга кўпайтириш амалларини

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2),$$
$$\lambda(x, y) = (\lambda x,\ \lambda y)$$

(λ– ҳақиқий ўзгармас) тенгликлар орқали аниқлаймиз. $\tilde{E}$ комплекс чизиқли фазо n ўлчамли комплекс фазо бўлса, у ҳолда E ҳақиқий чизиқли фазо $2n$ ўлчамли ҳақиқий фазодир. $\tilde{E}$ фазодан E фазога ўтиш $\tilde{E}$ комплекс чизиқли фазони *декомплексификациялаш* деб айтилади. Комплексификация ва декомплексификация ҳақиқий ёки комплекс бўлган ҳолдаги олинган натижалардан бошқа ҳолда фойдаланишни хохлаганда қўлланилади.

Агар чизиқли фазо ҳақида махсус айтилмаганда, биз ҳақиқий чизиқли фазони назарда тутамиз.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

7.1. M_{mn} – тўплам $m\times n$ тартибли тўғри бурчакли матрицаларнинг чизиқли фазоси бўлсин. M_{mn} фазо mn ўлчамли эканлигини исботланг. M_{mn} фазодаги базисни топинг. Ҳақиқий чизиқли фазо бўлган ҳолда M_{mn} фазо ва R^{mn} фазо ўртасида изоморфизм ўрнатинг.

7.2. Тартиби n дан катта бўлмаган барча

$$P(D)=\sum_{k=0}^{n} p_k(t)D^k,\ Q(D)=\sum_{k=0}^{n} q_k(t)D^k,\ \ldots\ ,$$

бунда $t\in[a,b]$, $p_k(t)$ ва $q_k(t)$ коэффициентлар $[a,b]$ ораликда узлуксиз, ҳамда $D^k=\dfrac{d^k}{dt^k}$, $D^0=0$ бўлган чизиқли дифференциал операторларнинг тўплами

$$\lambda P(D)=\sum_{k=0}^{n}\left[\lambda p_k(t)\right]D^k,\quad P(D)+Q(D)=\sum_{k=0}^{n}\left[p_k(t)+q_k(t)\right]D^k$$

амаллари билан чизиқли фазо ташкил этишини кўрсатинг.

7.3. $R^+=(0,+\infty)$ тўпламда мусбат сонлар (элементлар) учун $x,y\in R^+$ элементларнинг "йиғиндиси" деб уларнинг кўпайтмасини, $x\in R^+$ элементнинг $\lambda\in R$ ҳақиқий сонга "кўпайтмаси" деб x^λ элементни тушунсак, у ҳолда бу R^+ тўплам чизиқли фазога айланишини кўрсатинг. R^+ чизиқли фазодага "ноль" ва "қарама–қарши элемент" қандай бўлишлигини аниқланг.

7.4. $J(x)=\ln x,\ x\in R^+$ формула R^+ фазони R фазога акслантирувчи изоморфизм эканлигини исботланг.

7.5. $\beta(E)$ орқали E чизиқли фазонинг барча қисм тўпламларидан тузилган тўпламни белгилаймиз. Агар $M,N\in\beta(E)$ бўлса, у ҳолда

$$M+N=\{x+y:\ x\in M,\ y\in N\},\quad \lambda M=\{\lambda x:\ x\in M\},$$
$$-M=(-1)\cdot M=\{-x:\ x\in M\},\quad M-N=M+(-1)\cdot N$$

амалларни аниқлаймиз. Бу $\beta(E)$ тўпламда чизиқли фазонинг қайси аксиомалари бажарилади.

7.6. R^m фазода k та $x_i = \left(\xi_{ij}\right)_{j=1}^{m}$, $i = 1,2,...,k$ устунларни қараймиз. Бу устунлардан $\left(\xi_{ij}\right),\ i = 1,2,...,k,\ j = 1,2,...,m$ матрицани тузамиз. Бу матрицанинг ранги r бўлсин. Агар $r = k$ ва $k \le m$ бўлса, у ҳолда $x_1, x_2,...,x_k$ чизиқли эркли бўлишлигини кўрсатинг. Агар $k > m$ ёки $r < k$ бўлса, у ҳолда $x_1, x_2,...,x_k$ чизиқли боғлиқ бўлишлигини кўрсатинг.

7.7. Иккита чекли ўлчамли чизиқли фазо (ҳар иккаласи ҳақиқий ёки ҳар иккаласи комплекс чизиқли фазо бўлган ҳолларда) бир-бирига изоморф бўлишлиги учун уларнинг ўлчамлари устма–уст тушушлиги зарур ва етарли эканлигини исботланг.

7.8. Иккита E ва $\tilde{E}$ чекли ўлчамли чизиқли фазолар ва $\tilde{x} = J(x)$ формула уларнинг ўртасидаги изоморфизм бўлсин. Агар E чизиқли фазода $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{m}$ система базис бўлса, у ҳолда $\tilde{E}$ фазода $\left\{J(e_k)\right\}_{k=1}^{m}$ система базис бўлишлигини исботланг.

7.9. E чизиқли фазодан олинган иккита E_1 ва E_2 чизиқли кўпхилликлар берилган бўлсин. У ҳолда

$$\dim\left(E_1 \cap E_2\right) + \dim\left(E_1 + E_2\right) = \dim E_1 + \dim E_2$$

Грассман формуласи ўринли эканлигини исбот қилинг. Бу ерда $\dim\tilde{E}$ орқали $\tilde{E}$ чизиқли кўпхилликнинг ўлчами, $E_1 + E_2$ орқали E_1 ва E_2 чизиқли кўпхилликларни сақлайдиган энг кичик чизиқли кўпхиллик белгиланган.

7.10. E чизиқли фазодаги W қаварик тўпламдан олинган $x_1,...,x_n$ нуқталар ва $\lambda_1,...,\lambda_n$ манфий бўлмаган ўзгармаслар учун $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ бўлсин. У ҳолда $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in W$ эканлигини исбот қилинг.

7.11. M ва N қаварик тўпламлар бўлсин. У ҳолда λM ва $M \pm N$ тўпламлар ҳам қаварик эканлигини исботланг.

7.12. E ҳақиқий чизиқли фазо n ўлчамли бўлсин. $\tilde{E}$ комплекс фазо E фазони комплекслаштиришдан ҳосил қилинган бўлсин. Агар уни ҳақиқий фазо сифатида қарасак, у ҳолда $\tilde{E}$ қандай ўлчамли бўлади?.

6-§. Чизиқли нормаланган фазолар. Банах фазолари

1. Чизиқли нормаланган фазо тушунчаси. Банах фазоси. Агар чизиқли фазо бир вақтда метрик фазо ҳам бўлса, у ҳолда бу фазо *чизиқли метрик фазо* деб айтилади. Чизиқли метрик фазоларнинг муҳим синфи бу *B (Банах) типидаги фазолардир*. С. Банах[1] ва бошқа бир қатор авторлар томонидан бундай фазолар назарияси ривожлантирилган. E – ҳақиқий (комплекс) сонга кўпайтириш билан киритилган чизиқли фазо бўлсин.

Таъриф. Агар E чизиқли фазонинг ҳар бир x элементига унинг нормаси деб аталувчи ва $\|x\|$ орқали белгиланувчи манфиймас ҳақиқий сон мос қўйилган бўлиб, бу мослик

1) $\|x\| \geq 0$, бундан ташқари $\|x\| = 0$ тенглик фақат ва фақат $x = 0$ бўлгандагина ўринли;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

норма аксиомаларини қаноатлантирса, у ҳолда E тўплам *чизиқли нормаланган фазо* деб айтилади.

Бу келтирилган норманинг 1) – шарти *айнийлик* шарти деб, 2) – шарти *бир жинслилик* шарти деб, 3) – шарти *учбурчак тенгсизлиги* деб айтилади.

Учбурчак тенгсизлигидан

$$\|x - y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \tag{1.6.1}$$

тенгсизликнинг ҳам ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, учбурчак тенгсизлигига кўра,

$$\|x\| \leq \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

бўлади. Бундан $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$ тенгсизлик келиб чиқади. Энди x ва y ўринларини алмаштирсак $\|x - y\| \geq \|y\| - \|x\|$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу охирги икки тенгсизликдан (1.6.1) тенгсизлик келиб чиқади. Бу ҳосил қилинган (1.6.1) тенгсизлик ҳам учбурчак тенгсизлиги деб номланади.

Чизиқли нормаланган фазода метрикани $\rho(x, y) = \|x - y\|$ тенглик ёрдамида киритиш мумкин. Бу ерда масофа учун

---

[1] Банах С., Курс функціонального аналізу, Радяньска школа, Київ, 1948.

киритилган барча метрика аксиомаларининг бажарилишини текшириш қийин эмас. Чизиқли нормаланган фазода метрика киритилган эканлигидан биз $\{x_n\}$ элементлар кетма–кетлигининг x элементга яқинлашиши таърифини ҳам кирита оламиз. Айнан, агар $n\to\infty$ да $\|x_n - x\|\to 0$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ёки $n\to\infty$ да $x_n \to x$ деб айтилади. Шундай қилиб, чизиқли нормаланган фазода аниқланган яқинлашиш *норма бўйича яқинлашиш* деб айтилади.

Агар норма бўйича яқинлашиш маъносида берилган чизиқли нормаланган фазо тўла бўлса, у ҳолда бу фазо *Банах фазоси* ёки *B типдаги фазо* деб айтилади.

Энди Банах фазоларига мисоллар келтирамиз:

1. Ҳақиқий сонларнинг $n-$та $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ тартибланган системаси шаклидаги элементларнинг R^n фазоси Банах фазосига мисол бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, бу фазода $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ва $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ элементлар орасидаги қўшиш амали

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ ...,\ x_n+y_n)$$

ва λ ҳақиқий сонга кўпайтириш

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)$$

шаклида киритилади. Ҳамда $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ элементнинг нормаси эса

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Бу R^n фазо Банах фазоси бўлиб ундаги метрика аввал киритилган метрика билан устма–уст тушади.

2. Ҳақиқий (комплекс) $C[a,b]$ фазо Банах фазоси бўлади. Бу фазода функцияларни қўшиш ва функцияни сонга кўпайтириш амали аниқланган. Ҳамда $x(t)$ функциянинг нормаси эса

$$\|x\|=\max_{a\le t\le b}|x(t)|$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Бу $C[a,b]$ фазо Банах фазоси бўлиб ундаги метрика аввал киритилган метрика билан устма–уст тушади.

3. Ҳақиқий (комплекс) l_p фазо Банах фазоси бўлади. Бу фазода элементларни қўшиш ва элементни сонга кўпайтириш амали аниқланган. Ҳамда $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ элементнинг нормаси эса

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Бу l_p фазо Банах фазоси бўлиб ундаги метрика аввал киритилган метрика билан устма–уст тушади.

4. Ҳақиқий (комплекс) $L_p[a,b]$ фазо Банах фазоси бўлади. Бу фазода функцияларни қўшиш ва функцияни сонга кўпайтириш амали аниқланган. Ҳамда $x(t)$ функциянинг нормаси эса

$$\|x\|=\left(\int_a^b |x(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Бу $L_p[a,b]$ фазо Банах фазоси бўлиб ундаги метрика аввал киритилган метрика билан устма–уст тушади.

5. Ҳақиқий (комплекс) m фазо Банах фазоси бўлади. Бу фазода элементларни қўшиш ва элементни сонга кўпайтириш амали аниқланган. Ҳамда $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ элементнинг нормаси эса

$$\|x\|=\sup_i |x_i|$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Бу m фазо Банах фазоси бўлиб ундаги метрика аввал киритилган метрика билан устма–уст тушади.

6. Ҳақиқий (комплекс) $\tilde{M}[a,b]$ фазо Банах фазоси бўлади. Бу фазода функцияларни қўшиш ва функцияни сонга кўпайтириш амали аниқланган. Ҳар бир чегараланган ўлчовли $x(t)$ функциянинг нормаси эса

$$\|x\| = vrai \max_{a \le t \le b} |x(t)|$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Бу $\tilde{M}\,[a,b]$ фазо Банах фазоси бўлиб ундаги метрика аввал киритилган метрика билан устма–уст тушади.

7. $[a,b]$ оралиқда аниқланган ва шу оралиқда k – тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган $x(t)$ функцияларнинг фазосини қараймиз. Бу фазода функцияларни қўшиш ва функцияни сонга кўпайтириш амали аниқланган. Ҳар бир $x(t)$ функциянинг нормасини эса

$$\|x\| = \max\left\{\max_{a \le t \le b}|x(t)|,\ \max_{a \le t \le b}|x'(t)|,\ \ldots,\ \max_{a \le t \le b}\left|x^{(k)}(t)\right|\right\}$$

тенглик ёрдамида киритамиз. Бундай киритилган фазо Банах фазоси бўлиб уни биз $C^k\,[a,b]$ орқали белгилаймиз. Бу фазо вариацион ҳисоб назариясида кенг қўлланилади. Умуман олганда бу фазодаги нормани кўпгина ҳолларда

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{a \le t \le b}\left|x^{(i)}(t)\right|$$

тенглик билан киритамиз. Ҳар иккала ҳолда ҳам бу фазо Банах фазоси бўлади.

Агар $n \to \infty$ да $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\lambda_n \to \lambda$ бўлса, у ҳолда

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$$

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \le |\lambda_n| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\|$$

муносабатлардан фойдаланиб

$$x_n + y_n \to x + y, \qquad \lambda_n x_n \to \lambda x$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Худди шунингдек (1.6.1) тенгсизликдан $\big|\,\|x_n\| - \|x\|\,\big| \le \|x_n - x\|$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Шунга кўра, агар $n \to \infty$ да $x_n \to x$ бўлса, у ҳолда $n \to \infty$ да $\|x_n\| \to \|x\|$ бўлади.

Чизиқли нормаланган фазолар метрик фазо бўлганлиги учун бундай фазолар учун метрик фазо учун киритилган барча тушунчалар (шар, чегараланган тўплам, сепарабеллик ва бошқа тушунчалар), ҳамда бундай фазолар учун келтирилган барча теоремалар ўринли бўлади.

Тўла метрик фазолар учун келтирилган барча тасдиқлар В типдаги фазолар учун ҳам ўринли бўлади.

E чизиқли фазодаги

$$y = tx\ ,\ \ x \in E,\ x \neq 0,\ -\infty < t < +\infty$$

шаклида берилган тўплам берилган x элемент билан аниқланган *тўгри чизиқ* деб,

$$z = tx + (1-t)y\ ,\ \ x \in E,\ y \in E,\ -\infty < t < +\infty$$

шаклида берилган тўплам берилган x ва y нуқталар орқали ўтувчи *тўгри чизиқ* деб,

$$z = x + ty\ ,\ \ x \in E,\ y \in E,\ 0 \leq t < +\infty$$

шаклида берилган тўплам учи берилган x нуқтада ва y элемент бўйлаб йўналган *нур* деб,

$$z = (1-t)x + ty\ ,\ \ x \in E,\ y \in E,\ 0 \leq t \leq 1$$

шаклида берилган тўплам берилган x ва y нуқталарни бирлаштирувчи *кесма* деб айтилади. Чекли сондаги кесмаларни бирлаштиришдан ҳосил бўлган тўплам *синиқ чизиқ* деб айтилади.

Агар ҳар бир $t \in [a, b]$ сонга E Банах фазосидаги $x(t)$ элемент мос қўйилган бўлса, у ҳолда бундай мослик *абстракт функция* деб айтилади.

E Банах фазосида $x = x(t),\ t \in [a, b]$ узлуксиз абстракт функция $x(t)$ нуқтанинг ҳаракат қонуни аниқлайди, барча $t \in [a, b]$ қийматларга мос $x(t)$ нуқталар тўпламини эса шу қонуният бўйича ҳаракатланаётган нуқтанинг изи (йўли) деб қараш мумкин. Умуман олганда ҳаракат қонунлари жуда мураккаб бўлиши мумкин. Масалан, $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган шундай бир $x = x(t)$ узлуксиз функция мавжудки, бунда ҳаракатланаётган нуқта қандайдир шарнинг(кубнинг) ҳар бир нуқтасидан ўтади.

Айтайлик, $[a, b]$ оралиқдан олинган ихтиёрий иккита ҳар хил t_1 ва t_2 қийматларига E Банах фазосининг ҳар хил $x(t_1)$ ва $x(t_2)$ нуқталари мос келсин ва бу $x = x(t),\ t \in [a, b]$ узлуксиз абстракт функция билан аниқланадиган барча $x(t)$ нуқталарнинг тўпламини K орқали белгилаймиз. Агар $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ бўлса, у ҳолда $x(t_2) \in K$ нуқта $x(t_1) \in K$ нуқтадан кейин келади ёки $x(t_1) \in K$ нуқта $x(t_2) \in K$ нуқтадан олдин пайдо бўлади деб атаймиз. Бундай киритилган қоида K тўпламда тартиб ўрнатади. Кўрсатилган усул бўйича тартибланган K тўплам Γ *содда эгри чизиқ* деб айтилади ва $\Gamma = \{x:\ x = x(t),\ a \le t \le b\}$ шаклида ёзилади. $x(a)$ ва $x(b)$ нуқталар мос равишда Γ содда эгри чизиқнинг боши ва охирги нуқтаси деб айтилади.

Айтайлик, $[a,b]$ оралиқни $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ нуқталар ёрдамида $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k],\ k = \overline{1,n}$ оралиқчаларга бўлиш мумкин бўлиб, ҳар бир $\Gamma_k = \{x:\ x = x(t),\ t \in \Delta_k\}$ содда эгри чизиқни аниқласин. Ҳамда Γ_k содда эгри чизиқнинг охирги нуқтаси Γ_{k+1} содда эгри чизиқнинг боши билан устма–уст тушсин. У ҳолда бу содда эгри чизиқларнинг тартибланган $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots,\ \Gamma_n)$ тўпламига Γ *эгри чизиқ* деб айтилади.

E Банах фазосидан олинган M тўпламнинг ихтиёрий иккита нуқтасини туташтирувчи $\Gamma \subset M$ эгри чизиқ мавжуд бўлса, у ҳолда $M \subset E$ тўплам *боғламли тўплам* деб айтилади.

E Банах фазосидан олинган M тўплам очиқ ва боғламли бўлса, у ҳолда бу M тўплам *соҳа* деб айтилади. Соҳанинг ёпиғи *ёпиқ соҳа* деб айтилади.

Агар E чизиқли фазодаги K тўпламнинг ихтиёрий иккита нуқтасини бирлаштирувчи кесма бутунича шу K тўпламда жойлашган бўлса, у ҳолда K тўпламга *қавариқ тўплам* деб айтилади.

M тўплам E чизиқли фазодан олинган қандайдир тўплам ва $a \in E$ қандайдир танланган элемент бўлсин. У ҳолда барча $x + a$ шаклидаги элементлар тўплами, бунда $x \in M$ бўлганда M тўпламнинг *силжитилгани* деб айтилади ва $M + a$ каби белгиланади. Агар K қавариқ тўплам бўлса, у ҳолда бу тўпламнинг силжитилгани ҳам қавариқ тўплам бўлади.

Ҳар қандай чизиқли нормаланган фазодаги шар(ёпиқ шар) қавариқ тўплам бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $x_1, x_2 \in U_r(a)$ бўлсин, яъни $\|x_1 - a\| < r$ ва $\|x_2 - a\| < r$ бўлсин. У ҳолда

$$y = (1-t)x_1 + tx_2\ ,\ \ 0 < t < 1$$

шаклидаги ихтиёрий элемент учун

$$\|y - a\| = \|(1-t)x_1 + tx_2 - a\| = \|(1-t)x_1 + tx_2 - (1-t)a - ta\| \le$$

$$\le \|(1-t)(x_1-a)\| + \|t(x_2-a)\| = (1-t)\|x_1-a\| + t\|x_2-a\| <$$
$$< (1-t)r + tr = r$$
тенгсизликка эга бўламиз. Демак, $\|y-a\| < r$ бўлади. Шунга кўра $y \in U_r(a)$ бўлади.

Банах фазосидаги шарларнинг иккита жуда содда хоссасини келтирамиз: ихтиёрий $x \ne 0$ нуқта учун маркази координата бошида ва радиуси $r > \|x\|$ бўлган шар шу нуқтани сақлайди, маркази координата бошида ва радиуси $r < \|x\|$ бўлган шар шу берилган нуқтани сақламайди.

E чизиқли нормаланган фазо чизиқли фазонинг хусусий ҳоли сифатида E чизиқли нормаланган фазо учун ҳам чизиқли фазо учун киритилган, масалан, элементларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги, чизиқли кўпхиллик, E фазонинг тўғри йиғиндиси ва бошқа тушунчалар ҳам маънога эга бўлади.

$L-$ чизиқли кўпхиллик E чизиқли нормаланган фазодан олинган бўлсин. Агар L чизиқли кўпхиллик бундан ташқари ёпиқ тўплам бўлса, у ҳолда L тўпламга *қисм фазо* деб айтилади.

Агар E чизиқли нормаланган фазодан олинган L чекли ўлчамли чизиқли кўпхиллик бўлса, у ҳолда биз қуйида $\bar{L} = L$ бўлишлигини кўрсатамиз. Агар чексиз ўлчамли чизиқли кўпхиллик бўлса, у ҳолда бу тенглик ўринли бўлмаслиги мумкин. Масалан, $E = C[a,b]$ ва $L-$ чизиқли кўпхиллик

$$x_0 = 1,\ \ x_1 = t,\ \ \ldots,\ \ x_n = t^n,\ \ \ldots$$

элементлар ёрдамида яратилган бўлсин. У ҳолда L тўплам барча кўпҳадлар тўплами бўлади. Ҳамда

$$\bar{L} = C[a,b] \ne L$$

ҳосил бўлади.

Иккита E_1 ва E_2 чизиқли нормаланган фазолар берилган бўлсин. Агар E_1 ва E_2 чизиқли нормаланган фазолар ўртасида ўзаро бир қийматли ва ўзаро узлуксиз изоморф акслантириш мавжуд бўлса, у ҳолда бу фазолар изоморф деб юритилади.

1–теорема. *Ихтиёрий ҳақиқий (комплекс) чекли* n *ўлчамли барча чизиқли нормаланган фазолар* n *ўлчамли* R^n *Евклид (*C^n

комплекс) фазосига изоморфдир ва шунга кўра улар ўзаро изоморф бўлади.

Исбот. E ихтиёрий ҳақиқий (комплекс) чекли n ўлчамли чизиқли нормаланган фазо ва $x_1, x_2, ..., x_n$ – шу фазодаги базис бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x \in E$ элементни бир қийматли равишда

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + ... + \xi_n x_n$$

шаклида тасвирлаймиз. Ҳар бир $x \in E$ элементга

$$\overline{x} = (\xi_1, \xi_2, \ ..., \xi_n) \in R^n (C^n)$$

элементни мос қилиб қўямиз. Кўриниб турибдики, бу x ва $\overline{x}$ элементлар ўртасида ўрнатилган мослик ўзаро бир қийматли бўлади. Бундан ташқари, бу мослик E чекли n ўлчамли чизиқли фазо ва $R^n(C^n)$ чизиқли фазолар ўртасидаги изоморфизмдир. Бу мосликнинг ўзаро узлуксиз эканлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $x \in E$ элемент учун

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \right\| \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot \|x_i\| \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \beta \cdot \|\overline{x}\| \qquad (1.6.2)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Хусусан

$$\|x - y\| \le \beta \cdot \|\overline{x} - \overline{y}\| \qquad (1.6.3)$$

тенгсизлик ўринлидир, бунда $\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ сон x ва y элементларга боғлиқ эмас. Энди қарама–қарши ишорали тенгсизликни ўрнатамиз.

$R^n(C^n)$ чизиқли нормаланган фазодаги $S^n = \left\{ \overline{x} : \ \overline{x} = (\xi_1, \xi_2, \ ..., \xi_n) \in R^n(C^n), \ \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 = 1 \right\}$ бирлик шарда аниқланган $f(\overline{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \ ..., \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + ... + \xi_n x_n\|$ функцияни қараймиз. Бу S^n сферадаги нуқталар учун бир вақтда барча ξ_i сонлар нолга тенг бўлмайди ва шунга кўра $x_1, x_2, ..., x_n$ – шу фазодаги чизиқли эркли система эканлигидан

$x=\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+...+\xi_n x_n \neq 0$ бўлади. Бундан $\|x\|>0$ эканлиги, яъни

$$f(\overline{x})= f(\xi_1, \xi_2, \ ..., \xi_n)=\|x\|=\|\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+...+\xi_n x_n\|>0$$

тенгсизлик келиб чиқади.

$$\left| f(\xi_1, \xi_2, \ ..., \xi_n)- f(\eta_1, \eta_2, \ ..., \eta_n)\right| =$$
$$=\left| \ \|x\|-\|y\| \ \right| \leq \|x-y\| \leq \beta \cdot \|\overline{x}-\overline{y}\|$$

тенгсизликдан $f(\xi_1, \xi_2, \ ..., \xi_n)$ функциянинг узлуксиз функция эканлигини ҳосил қиламиз. К. Вейерштрасс теоремасига кўра бу функция компакт бўлган S^n сферада ўзининг энг кичик минимум $f(\overline{x}_0)=\alpha>0$ қийматига эришади. Шунга кўра ихтиёрий $\overline{x} \in S^n$ учун

$$f(\overline{x})=\|x\| \geq \alpha > 0$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бундан ихтиёрий $\overline{x} \in R^n(C^n)$ учун

$$f(\overline{x})=\|x\|=\|\overline{x}\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i x_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}} \right\| \geq \alpha \|\overline{x}\| \qquad (1.6.4)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. (1.6.2) ва (1.6.4) тенгсизликлардан E чекли n ўлчамли Банах фазоси ва $R^n(C^n)$ чизиқли нормаланган фазолар ўртасидаги акслантиришнинг ўзаро узлуксиз эканлиги келиб чиқади.

E чекли n ўлчамли Банах фазо ва $R^n(C^n)$ чизиқли нормаланган фазолар ўртасидаги гомеоморфизмдан норма бўйича яқинлашиш координаталар бўйича яқинлашишни билдиради ва шунинг учун бундай фазолар ҳамма вақт тўла фазо бўлади.

Таъриф. E чизиқли фазо бўлиб, унда икки хил усул билан норма киритилган бўлсин: $\|x\|^{(1)}$ ва $\|x\|^{(2)}$. Агар шундай бир $\beta>0$ сон мавжуд бўлиб, ихтиёрий $x \in E$ элемент учун

$$\|x\|^{(2)} \leq \beta \|x\|^{(1)}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\|x\|^{(2)}$ норма $\|x\|^{(1)}$ нормага бўйсундирилган деб айтилади.

Агар E чизиқли фазода $\|x\|^{(2)}$ норма $\|x\|^{(1)}$ нормага бўйсундирилган бўлса, у ҳолда $\{x_n\} \subset E$ кетма–кетликнинг бирор x нуқтага $\|x\|^{(1)}$ норма бўйича яқинлашишидан унинг $\|x\|^{(2)}$ норма бўйича ҳам шу x нуқтага яқинлашиши келиб чиқади.

Таъриф. E чизиқли фазо бўлиб, унда икки хил усул билан норма киритилган бўлсин: $\|x\|^{(1)}$ ва $\|x\|^{(2)}$. Агар шундай бир $\alpha > 0,\ \beta > 0$ сонлар мавжуд бўлиб, ихтиёрий $x \in E$ элемент учун

$$\alpha\|x\|^{(1)} \le \|x\|^{(2)} \le \beta\|x\|^{(1)}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\|x\|^{(1)}$ ва $\|x\|^{(2)}$ нормалар эквивалент деб айтилади.

2–теорема. *Ихтиёрий ҳақиқий (комплекс) чекли n ўлчамли чизиқли фазодаги барча нормалар эквивалентдир.*

Исбот. E ихтиёрий ҳақиқий (комплекс) чекли n ўлчамли чизиқли фазо ва $x_1, x_2, ..., x_n$ – шу фазодаги базис бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x \in E$ элемент учун бир қийматли равишда

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$$

ёйилма ўринли бўлади. E чизиқли фазода $\|x\|_c = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ норма киритамиз. Бундай киритилган E чизиқли нормаланган фазо $R^n(C^n)$ фазога мос келади. Бу E чизиқли фазода бошқа ихтиёрий бир $\|x\|$ норма киритилган бўлсин. Бундай киритилган E чизиқли нормаланган фазода ихтиёрий $x \in E$ элемент учун

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i\right\| \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot \|x_i\| \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \beta \cdot \|x\|_c \qquad (1.6.5)$$

тенгсизликка эга бўламиз, яъни

$$\|x\| \le \beta \cdot \|x\|_c \qquad (1.6.6)$$

тенгсизлик ўринлидир, бунда $\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ сон x элементга боғлиқ эмас. Шунга кўра, $\|x\|$ норма $\|x\|_c$ нормага бўйсундирилган бўлади. Энди $\|x\|_c$ норма $\|x\|$ нормага бўйсундирилган эканлигини кўрсатамиз.

$R^n(C^n)$ чизиқли нормаланган фазодаги $S^n = \left\{ \overline{x} : \ \overline{x} = (\xi_1, \xi_2, \ \dots, \xi_n) \in R^n(C^n), \ \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 = 1 \right\}$ бирлик шарда аниқланган $f(\overline{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \ \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n\|$ функцияни қараймиз. Бу S^n сферадаги нуқталар учун бир вақтда барча ξ_i сонлар нолга тенг бўлмайди ва шунга кўра $x_1, x_2, \dots, x_n$ – шу фазодаги чизиқли эркли система эканлигидан $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n \neq 0$ бўлади. Бундан $\|x\| > 0$ эканлиги, яъни

$$f(\overline{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \ \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n\| > 0$$

тенгсизлик келиб чиқади.

$$\left| f(\xi_1, \xi_2, \ \dots, \xi_n) - f(\eta_1, \eta_2, \ \dots, \eta_n) \right| =$$
$$= \left| \ \|x\| - \|y\| \ \right| \leq \|x - y\| \leq \beta \cdot \|\overline{x} - \overline{y}\|$$

тенгсизликдан $f(\xi_1, \xi_2, \ \dots, \xi_n)$ функциянинг узлуксиз функция эканлигини ҳосил қиламиз. К. Вейерштрасс теоремасига кўра бу функция компакт бўлган S^n сферада ўзининг энг кичик минимум $f(\overline{x}_0) = \alpha > 0$ қийматига эришади. Шунга кўра ихтиёрий $\overline{x} \in S^n$ учун

$$f(\overline{x}) = \|x\| \geq \alpha > 0$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бундан ихтиёрий $\overline{x} \in R^n(C^n)$ учун

$$f(\overline{x}) = \|x\| = \|\overline{x}\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i x_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}} \right\| \geq \alpha \|\overline{x}\| \qquad (1.6.7)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз, яъни

$$\|x\| \geq \alpha \|x\|_c \tag{1.6.8}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу (1.6.6) ва (1.6.8) тенгсизликлардан

$$\alpha \|x\|_c \leq \|x\| \leq \beta \cdot \|x\|_c \tag{1.6.9}$$

муносабатни ҳосил қиламиз, бунда $\alpha > 0$, $\beta > 0$ бўлади. Демак, $\|x\|$ норма ва $\|x\|_c$ нормалар эквивалент экан. E чизиқли фазодаги ихтиёрий $\|x\|$ норма $\|x\|_c$ сферик нормага эквивалент бўлди. Бу эса теоремани исбот қилади.

2. Чизиқли нормаланган фазонинг қисм фазоси. E чизиқли нормаланган фазо ва ундаги бўш бўлмаган L тўплам берилган бўлсин.

Таъриф. Агар E чизиқли нормаланган фазодаги L тўплам ёпиқ чизиқли кўпхилликдан иборат бўлса, у ҳолда L тўплам E чизиқли нормаланган фазодаги қисм фазо деб айтилади.

Масалан, агар $C[a,b]$ чизиқли нормаланган фазодаги даражаси n дан ошмайдиган барча кўпҳадлар тўпламини қарасак, у ҳолда бу тўплам қисм фазо бўлади.

$C[a,b]$ чизиқли нормаланган фазодаги барча кўпҳадлар тўплами шу $C[a,b]$ фазода ёпиқ тўплам бўлмайди, чунки масалан, $x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ кўпҳад $C[a,b]$ фазода яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити $x(t) = e^t$ функция бўлади. Бу функция кўпҳад эмас. Шунга кўра, $C[a,b]$ чизиқли нормаланган фазодаги барча кўпҳадлар тўплами ёпиқ эмас.

Энди x нуқтадан L қисм фазогача бўлган масофани

$$\rho(x,L) = \inf_{u \in L} \|x - u\| \tag{1.6.10}$$

тенглик ёрдамида аниқлаймиз.

Маълумки, агар $\Re$ қандайдир ҳақиқий сонлардан иборат бўлган тўплам қуйидан чегараланган бўлса, у ҳолда шундай бир α_0 ҳақиқий сон мавжудки, бунда

1) барча $x \in \Re$ учун $x \geq \alpha_0$ тенгсизлик ўринли бўлади (α_0 сон $\Re$ тўпламнинг қуйи чегараси);

2) ихтиёрий $\alpha' > \alpha_0$ учун шундай бир $x' \in \Re$ мавжудки, бунда $x' < \alpha'$ тенгсизлик ўринли бўлади (α_0 сон $\Re$ тўплам қуйи чегараларининг энг каттаси бўлади).

Бу ҳолда α_0 сон $\Re$ тўпламнинг *аниқ қуйи чегараси* деб айтилади ва

$$\alpha_0 = \inf \Re \quad \text{ёки} \quad \alpha_0 = \inf_{x \in \Re} x$$

шаклида белгилаймиз.

Бу таърифдан кўринадики, $\rho(x, L)$ мавжуд, чунки $\Re = \{\|x-u\|,\ u \in L\}$ тўплам қуйидан чегараланган. Шундай қилиб, $\rho(x, L)$ ифода учун

1) ихтиёрий $u \in L$ учун $\|x-u\| \geq \rho(x, L)$ тенгсизлик ўринли;

2) агар $r > \rho(x, L)$ бўлса, у ҳолда шундай бир $u_r \in L$ элемент мавжуд бўлиб $\|x-u_r\| < r$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Лемма. *Агар* $x \in L$ *бўлса, у ҳолда* $\rho(x, L) = 0$ *бўлади. Агар* $x \notin L$ *бўлса, у ҳолда* $\rho(x, L) > 0$ *бўлади.*

Исбот. Агар $x \in L$ бўлса, у ҳолда $u = x$ деб олсак $\|x-u\| = 0$, яъни $\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x-u\| = 0$ бўлади. Энди $x \notin L$ бўлсин. Шундай бўлсада, $\rho(x, L) = 0$ бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда аниқ қуйи чегаранинг таърифига кўра, ихтиёрий n натурал сони учун шундай бир $u_n \in L$ элемент мавжудки, бунда $\|u_n - x\| < \dfrac{1}{n}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан $n \to \infty$ да $u_n \to x$ эканлиги келиб чиқади. L тўпламнинг ёпиқ тўплам эканлигидан эса $x \in L$ эканлигини ҳосил қиламиз. Бу эса $x \notin L$ шартга зиддир. Ҳосил қилинган қарама–қаршилик $\rho(x, L) > 0$ тенгсизликни исбот қилади.

3. Қисм фазо элементи билан яқинлаштириш. $\rho(x, L)$ сон x элементни L қисм фазо элементлари ёрдамида энг яхши яқинлаштиришни (энг яхши апроксимацияни) характерлайди. Агар шундай бир $u^* \in L$ элемент мавжуд бўлиб $\rho(x, L) = \|x-u^*\|$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $u^* \in L$ элементга x элементни L қисм фазо элементлари ёрдамида энг яхши яқинлаштирувчи элемент деб айтилади. Энг яхши яқинлаштирувчи элемент ягона бўлмаслиги мумкин, ёки мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин. Кўпгина амалий масалаларда биз L қисм фазони чекли ўлчамли деб оламиз ва бу ҳолда энг яхши яқинлаштирувчи элемент мавжуд бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, $x \notin L$ бўлсин. У ҳолда $\rho(x, L) = d > 0$ бўлади. L чекли қисм фазода $\{e_k\}_{k=1}^{m}$ базис бўлса, у ҳолда бу базис бўйича ихтиёрий $u \in L$ элементни $u = \sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k$ шаклида ёзамиз. L чекли қисм фазода иккинчи бир нормани $\|x\|_c = \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ тенглик билан киритамиз. L чекли қисм фазода бўлганлиги учун бу иккала норма эквивалентдир, яъни шундай бир $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ўзгармаслар мавжудки, бунда

$$\alpha \|u\|_c \le \|u\| \le \beta \|u\|_c \tag{1.6.11}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $\|u\|_c$ норма билан таъминланган L чизиқли фазони биз L^m орқали белгилаймиз. L^m фазода $\|x - u\|$ функцияни қараймиз. Бу функция L^m фазода узлуксиздир, бошқача қилиб айтганда ихтиёрий $u', u'' \in L^m$ учун

$$\big| \, \|x - u'\| - \|x - u''\| \, \big| \le \|u' - u''\| \le \beta \|u' - u''\|_c$$

тенгсизлик ўринлидир. $\rho(x, L) = \inf\limits_{u \in L} \|x - u\| = d$ аниқ қуйи чегарага фақат $\|u\|_c \le r$, бунда $r = \alpha^{-1}(d + 1 + \|x\|)$ бўлган шарда эришиши мумкин эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $\|u\|_c > r$ бўлса, у ҳолда

$$\|x - u\| \ge \|u\| - \|x\| \ge \alpha \|u\|_c - \|x\| > \alpha r - \|x\| = d + 1$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, $\rho(x, L) = \inf\limits_{u \in L} \|x - u\| = d$ аниқ қуйи чегарага $\|u\|_c \le r$ шар ташқарисида $\|x - u\|$ функция эриша олмайди. Маълумки, $\|u\|_c \le r$ шар L^m фазодаги ёпиқ чегараланган тўплам бўлади, $\|x - u\|$ функция эса унда узлуксиздир. Шунга кўра, шундай бир $u^* \in L$ элемент мавжуд бўлиб, x элементни L қисм фазо элементлари ёрдамида энг яхши яқинлаштирувчи ва $\|x-u\|$ функция ўзининг энг кичик қийматига эришади. Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот бўлди.

3–теорема. *E чизиқли нормаланган фазодан олинган L чекли ўлчамли қисм фазо бўлсин. Ихтиёрий $x \in E$ элемент учун шундай бир $u^* \in L$ элемент мавжуд бўлиб (бундай элемент ягона бўлмаслиги мумкин) $\rho(x,L) = \|x-u^*\|$ тенглик ўринли бўлади.*

Энг яхши яқинлаштирувчи элемент ягона бўлмаслиги мумкин эканлигига мисол ҳатто чекли ўлчамли нормаланган фазоларда келтирамиз.

1–мисол. Икки ўлчамли $x = (\xi_1,\ \xi_2)$ сатрли $l_1^{(2)}$ фазода нормани $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$ тенглик орқали киритамиз. Бу фазодан $x_0 = (1,-1)$ нуқтани ва $e = (1,1)$ базис вектори бўлган бир ўлчамли L қисм фазони оламиз, яъни $L = \{\alpha e;\ \alpha \in R\}$. Энди $\rho(x_0, L)$ масофани ҳисоблаймиз.

$$\rho(x_0, L) = \inf_{\alpha\in R^1} \|x_0 - \alpha e\| = \inf_{\alpha\in R^1} \left(|1-\alpha| + |1+\alpha|\right) = 2$$

бўлади. Бу аниқ қуйи чегара ихтиёрий $\alpha \in [-1,+1]$ бўлган ҳолда эришилади. Шунга кўра, чексиз кўп $u^* = \alpha e$, $\alpha \in [-1,\ +1]$ элементлар тўплами $x_0 = (1,-1)$ нуқтага L қисм фазо билан энг яхши яқинлаштириш эканлигига эришамиз.

2–мисол. Икки ўлчамли $x = (\xi_1,\ \xi_2)$ сатрли c^2 фазода нормани $\|x\| = \max\limits_{1\le i\le 2} |\xi_i|$ тенглик орқали киритамиз. Бу фазодан $x_0 = (1,0)$ нуқтани ва $e = (0,1)$ базис вектори бўлган бир ўлчамли L қисм фазони оламиз, яъни $L = \{\alpha e = (0,\alpha);\ \alpha \in R\}$. Энди $\rho(x_0, L)$ масофани ҳисоблаймиз.

$$\rho(x_0, L) = \inf_{\alpha\in R^1} \|x_0 - \alpha e\| = \inf_{\alpha\in R^1} \left(\max\left(1,\ |\alpha|\ \right)\right) = 1$$

бўлади. Бу аниқ қуйи чегара ихтиёрий $\alpha \in [-1,+1]$ бўлган ҳолда эришилади. Шунга кўра, чексиз кўп $u^* = \alpha e$, $\alpha \in [-1,\ +1]$ элементлар тўплами $x_0 = (1,0)$ нуқтага L қисм фазо билан энг яхши яқинлаштириш эканлигига эришамиз.

Таъриф. Агар $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ тенглик фақат $y=\lambda x$, бунда $\lambda>0$ бўлган ҳолдагина ўринли бўлса, у ҳолда E чизиқли нормаланган фазо *қатъий нормаланган фазо* деб айтилади.

Энг яхши яқинлаштирувчи элементнинг ягоналигини қачон таъминлаш мумкин деган савол пайдо бўлади. Бу саволга биз яқинлашиш назарияси масалаларини ўрганишда бир неча марта қайтамиз. Ҳозирча биз қуйидаги теоремани келтирамиз.

4–теорема. *E қатъий нормаланган фазодан олинган ихтиёрий $x\in E$ элемент ва L қисм фазо бўлсин. Шу $x\in E$ элементни L қисм фазо билан энг яхши яқинлаштирувчи элемент биттадан кўп бўлмайди.*

Исбот. E қатъий нормаланган фазодан олинган шундай бир $x\in E$ элемент ва L қисм фазо, ҳамда $u_1^*, u_2^*\in L$ элементлар мавжуд бўлиб, бунда

$$\|x-u_1^*\|=\|x-u_2^*\|=d=\inf_{u\in L}\|x-u\|$$

тенглик ўринли бўлсин деб фараз қилайлик. $d>0$ бўлсин (агар $d=0$ бўлса, у ҳолда $u_1^*=u_2^*$ эканлиги келиб чиқади). Шунинг учун

$$\left\|x-\frac{u_1^*+u_2^*}{2}\right\|=\left\|\frac{x-u_1^*}{2}\right\|+\left\|\frac{x-u_2^*}{2}\right\|\le\frac{1}{2}\|x-u_1^*\|+\frac{1}{2}\|x-u_2^*\|=d$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шунга кўра $\left\|x-\dfrac{u_1^*+u_2^*}{2}\right\|=d$ бўлади. У ҳолда

$$\|(x-u_1^*)+(x-u_2^*)\|=\|x-u_1^*\|+\|x-u_2^*\|>0$$

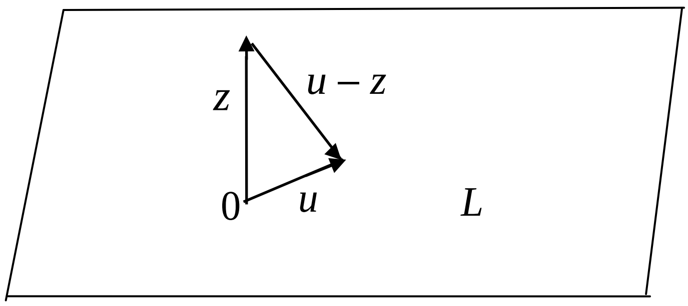
бўлади.

E қатъий нормаланган фазо бўлганлиги учун шундай бир $\lambda>0$ сон мавжудки, бунда $x-u_1^*=\lambda(x-u_2^*)$ тенглик ўринли бўлади. Агар $\lambda\neq 0$ бўлса, у ҳолда $x=(1-\lambda)^{-1}\times(u_2^*-\lambda u_1^*)\in L$ келиб чиқади. Бу эса юқоридаги леммага кўра мумкин эмас, чунки $d>0$. Шунга кўра $\lambda=1$ бўлади. У ҳолда $u_1^*=u_2^*$ эканлиги келиб чиқади. Бу қарама–қаршилик теоремани исбот қилади.

3–мисол. $C[a,b]$ фазо қатъий нормаланган фазо бўлмайди. Чунки, бу фазодаги $x(t)=(t-a)(b-t)$ ва

$y(t)=\frac{(b-a)^2}{4}\sin\left(\pi\frac{t-a}{b-a}\right)$ тенглик орқали аниқланган функциялар $y(t)=\lambda x(t)$ кўринишида бўлмасада улар учун $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ тенглик ўринли эканлигини кўриш мумкин бўлади.

4. Ф. Рисс леммаси. Уч ўлчамли Евклид фазосида O координата бошидан ўтувчи L текислик ва учи шу O координата бошида бўлган L текисликка перпендикуляр бирлик узунликка эга z вектор берилган бўлсин. У ҳолда L текисликда ётувчи ихтиёрий u вектор учун $|u-z|>|z|=1$ тенгсизликка эга бўламиз. Бошқача қилиб, айтганда z перпендикуляр вектор узунлиги ихтиёрий $u-z$ оғма вектор узунлигидан кичик бўлади.



Шундай ҳолат Гильберт фазоси деб аталувчи фазоларда, яъни перпендикулярлик (ортогоналлик) тушунчаси аниқланган фазоларда ҳам ўринли бўлади. Ихтиёрий нормаланган фазода ортогоналлик тушунчаси мавжуд эмас, лекин бу ерда бир оз суст бўлган “деярли перпендикулярнинг” мавжудлиги ҳақидаги тасдиқ ўринли бўлади.

Ф. Рисс леммаси. *E чизиқли нормаланган фазодан олинган ихтиёрий L қисм фазо берилган бўлсин, бундан ташқари $L\neq E$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon\in(0,\ 1)$ сон учун шундай бир $z_\varepsilon\notin L$, $\|z_\varepsilon\|=1$ бўлган элемент мавжуд бўлиб, бунда $\rho(z_\varepsilon,\ L)>1-\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади.*

Исбот. $x\notin L$ бўлган элемент бўлсин. Бундай элемент мавжуд бўлади, чунки $L\neq E$. Энди $\inf\limits_{u\in L}\|x-u\|=d$ деб олайлик. У ҳолда юқорида келтирилган леммага кўра $d>0$ бўлади. Аниқ қуйи чегаранинг таърифидан фойдаланамиз. Ихтиёрий $\varepsilon\in(0,\ 1)$ сон учун шундай бир $u_\varepsilon\in L$ бўлган элемент мавжуд бўлиб, бунда

$$d \le \|u_\varepsilon - x\| \le \frac{d}{1-\varepsilon}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди биз

$$z_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|}, \qquad \|z_\varepsilon\| = 1$$

бўлган элементни қараймиз. Бу z_ε биз излаётган элементдир. Ҳақиқатдан ҳам, $z_\varepsilon \notin L$ (бошқача айтганда $u_\varepsilon - x \in L$ бўлса, у ҳолда $x \in L$ бўлади. Бу эса мумкин эмас). Бундан ташқари, z_ε нуқтадан L қисм фазогача бўлган масофа қуйидагича баҳоланади:

$$\|z_\varepsilon - u\| = \left\| \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|} - u \right\| = \frac{\| x - (u_\varepsilon - u\|u_\varepsilon - x\|) \|}{\|u_\varepsilon - x\|} > \frac{d(1-\varepsilon)}{d} = 1 - \varepsilon ,$$

бунда $u_\varepsilon - u\|u_\varepsilon - x\| \in L$ ва $u \in L$ учун $\|x - u\| \ge d$ бўлади. Лемма исбот бўлди.

5. Чизиқли нормаланган фазонинг фактор фазоси. E чизиқли нормаланган фазо ва ундаги бўш бўлмаган L_0 қисм фазо бўлсин. У ҳолда мос E / L_0 фактор фазони қараймиз. Ихтиёрий $L \in E / L_0$ учун

$$\|L\| = \inf_{x \in L} \|x\|$$

тенглик ёрдамида нормани киритамиз.

$\|L\| = \inf\limits_{x \in L} \|x\|$ ифода норма барча аксиомаларини қаноатлантиришини кўрсатамиз.

1. Кўриниб турибдики, $\|L\| \ge 0$ бўлади. $\|L\| = 0$ тенглик фақат ва фақат $L = L_0$ бўлгандагина ўринли эканлигини кўрсатамиз. Аввал L ёпиқ тўплам эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, $\{x_n\}$ кетма–кетлик L дан олинган бўлиб $x \in E$ элементга яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда ихтиёрий n ва m учун $x_n - x_m \in L_0$ бўлади. Агар $m \to \infty$ бўлса, у ҳолда $x_n - x_m \to x_n - x$ бўлади. L_0 ёпиқ бўлганлиги учун $x_n - x \in L_0$ бўлади. Лекин бу ҳолда x_n элемент билан бирга x элемент ҳам L тўпламга тегишли бўлади. Энди $\|L\| = \inf\limits_{x \in L} \|x\| = 0$ бўлсин. У ҳолда L дан олинган $\{x_n\}$ кетма–

кетлик мавжуд бўлиб $\|x_n\| \to 0$, яъни $x_n \to 0$ бўлади. L тўпламнинг ёпиқ эканлигидан бу тўплам 0 элементни сақлайди. Лекин бу ҳолда $L = L_0$ бўлади. $\|L_0\| = 0$ бўлгани учун биринчи аксиома тўлиқ исбот бўлади.

2. $\|\lambda L\| = |\lambda| \|L\|$ бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $\lambda \neq 0$ учун

$$\|\lambda L\| = \inf_{x \in L} \|\lambda x\| = |\lambda| \inf_{x \in L} \|x\| = |\lambda| \|L\|$$

тенглик ўрили ва иккинчи аксиома исбот бўлади.

3. $\varepsilon > 0$ бўлсин. $\|L_1\|$ ва $\|L_2\|$ миқдорларнинг аниқланишига кўра шундай бир $x_1 \in L_1$ ва $x_2 \in L_2$ элементлар мавжудки, бунда

$$\|x_1\| \leq \|L_1\| + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|x_2\| \leq \|L_2\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бундан

$$\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\| + \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шунга кўра

$$\inf_{x \in L_1 + L_2} \|x\| \leq \inf_{x_1 \in L_1,\, x_2 \in L_2} \|x_1 + x_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\| + \varepsilon,$$

ёки

$$\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\| + \varepsilon$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. $\varepsilon > 0$ миқдорнинг ихтиёрий эканлигидан

$$\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди E / L_0 фазода киритилган норма бўйича $\{L_n\}$ синфлар кетма–кетлигининг L синфга яқинлашиши $\{x_n\}$, $x_n \in L_n$ кетма–кетлик мавжуд бўлиб $x_n \to x, x \in L$ шартнинг бажарилишига эквивалент эканлигини кўрсатамиз.

$$\|L_n - L\| \to 0$$

бўлсин. У ҳолда $\|L_n - L\| = \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$ бўлади. Шунинг учун $L_n - L$ тўплам $y_n - x$ элементни сақлайди ва $y_n \in L_n$, $x \in L$ бўлиб

$$\|y_n - x\| < 2\varepsilon_n$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан ташқари x элемент сифатида n номерга боғлиқ бўлмаган ихтиёрий тайинланган элементни олиш мумкин бўлади, масалан $x_0 \in L$. Ҳақиқатдан ҳам, агар

$$\|y_n - x\| \le 2\varepsilon_n$$

ва $y_n \in L_n$, $x \in L$ бўлса, у ҳолда

$$\|(y_n - x + x_0) - x_0\| \le 2\varepsilon_n$$

ва $x_0 \in L$, $x \in L$ эканлигидан

$$x_0 - x \in L_0 \quad \text{ва} \quad x_n = y_n - x + x_0 \in L_n$$

бўлади. Демак, $x_0 \in L$ элемент учун $\{x_n\}$, $x_n \in L_n$ ва $x_n \to x$, $x \in L$ бўлган кетма–кетлик қурилади.

Аксинча, $\{x_n\}$, $x_n \in L_n$ кетма–кетлик мавжуд бўлиб $x_n \to x$, $x \in L$ шарт бажарилсин. У ҳолда

$$\|L_n - L\| = \inf_{y_n \in L_n,\, y \in L} \|y_n - y\| \le \|x_n - x\|$$

тенгсизликдан

$$\|L_n - L\| \to 0$$

эканлиги келиб чиқади ва тасдиқ исбот бўлди.

Энди агар E тўла фазо бўлса, у ҳолда E / L_0 фактор фазо ҳам тўла фазо эканлигини исботлаш қийин эмаслигини кўрсатамиз.

$\{L_n\}$–синфлар кетма–кетлиги E / L_0 фактор фазода фундаментал бўлсин. Ҳар бир L_n синфдан x_n элементни танлаб

$$\|x_n - x_m\| \le 2\|L_n - L_m\|$$

тенгсизликка кўра E фазодан олинган $\{x_n\}$ фундаментал кетма–кетликни ҳосил қиламиз. E фазонинг тўла фазо эканлигидан шундай бир $x \in E$ элемент мавжуд бўлиб $x_n \to x$ эканлигини ҳосил қиламиз. У ҳолда $L_n \to L$ бўлади, бунда L синф x элементни сақлайдиган E / L_0 фактор фазодан олинган синфдир. Шунга кўра, E / L_0 фактор фазо тўладир.

Шундай қилиб, E Банах фазосининг ихтиёрий L_0 (ёпиқ) қисм фазоси бўйича олинган E / L_0 фактор фазо ҳам Банах фазосидир.

Ниҳоят, агар E_1, E_2, ..., E_n чизиқли нормаланган фазолар ва E эса бу фазоларнинг тўғри йиғиндиси бўлса, у ҳолда E фазони ҳам нормаланган фазо қилиш мумкин бўлади. Масалан,

$x=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ учун $\|x\|=\|x_1\|+\|x_2\|+\dots+\|x_n\|$ деб олиш мумкин. Агар $E=E_1\oplus E_2$ бўлса, у ҳолда E_1 ва E/E_2 фазолар изоморфдир.

6. Чизиқли нормаланган фазо ва Банах фазосидаги қаторлар. E чизиқли нормаланган фазо ва $k=1,2,\dots$ учун $x_k\in E$ бўлсин. $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ формал йиғинди E чизиқли нормаланган фазодаги қатор деб айтилади. Бу $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ қаторнинг $s_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$ қисмий йиғиндилар кетма–кетлигини киритамиз.

Таъриф. Агар $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ қаторнинг $s_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$ қисмий йиғиндилар кетма–кетлиги шу E чизиқли нормаланган фазода яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ қатор яқинлашувчи деб айтилади. Агар $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $s_n\to s\in E$ бўлади. Бу s элемент $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ қаторнинг йиғиндиси деб айтилади. $\sum_{k=1}^{\infty}x_k=s$ ёзув қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси s эканлигини билдиради. Агар $\sum_{k=1}^{\infty}x_k=s$ ва $\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{x}_k=\tilde{s}$ бўлса, у ҳолда $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+\tilde{x}_k)=s+\tilde{s}$ бўлади.

Қатор яқинлашиши ҳақидаги Коши критериясини келтирамиз.

5–теорема. *E чизиқли нормаланган фазо бўлсин. Бу фазодаги $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ қатор яқинлашувчи бўлишлиги учун ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон учун шундай бир $N=N(\varepsilon)$ номер топилиб, барча $n\geq N(\varepsilon)$ ва барча $p\in N$ натурал сонлари учун*

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\| < \varepsilon$$

тенгсизлигининг бажарилиши зарур ва E Банах фазо бўлган ҳолда етарли ҳамдир.

Теореманинг исботи қатор яқинлашишининг таърифи, ҳамда кетма–кетликнинг яқинлашувчи ва фундаменталлик тушунчаларининг боғлиқлигини қисмий йиғиндилар кетма–кетлигига қўллашдан келиб чиқади.

Агар $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $k \to \infty$ да $x_k \to 0$ бўлади.

Таъриф. Агар $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ қатор E чизиқли нормаланган фазода абсолют яқинлашувчи дейилади.

Агар E чизиқли нормаланган фазода $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ва $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ қаторлар абсолют яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ихтиёрий λ ва μ ўзгармаслар учун $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda x_k + \mu y_k$ қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

6–теорема. *E Банах фазоси бўлсин. У ҳолда ҳар қандай абсолют яқинлашувчи бўлган қатор шу E Банах фазосида ҳам яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. $\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|$ тенгсизлик ўринлидир. Бу тенгсизлик ва 5–теоремадан қаторнинг шу E Банах фазосида ҳам яқинлашувчи бўлишлиги келиб чиқади. Бу 6–теоремани К. Вейерштрасс теоремаси деб атаймиз. Шуни таъкидлаш кераки, бу теоремага тескари бўлган теорема ҳам ўринлидир.

7–теорема. *E чизиқли нормаланган фазодаги ҳар қандай абсолют яқинлашувчи бўлган қатор шу E фазода ҳам яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу E фазо Банах фазоси бўлади.*

Исбот. $\{x_n\}\subset E$ кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик бўлсин. У ҳолда бу кетма–кетликнинг қандайдир $x\in E$ элементга яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз. $\{x_n\}\subset E$ кетма–кетлик фундаментал кетма–кетлик бўлганлиги учун ундан $\|x_{n_1}\|<\dfrac{1}{2}$ ва барча $k\ge 2$ учун $\|x_{n_k}-x_{n_{k-1}}\|<\dfrac{1}{2^k}$ тенгсизликлар ўринли бўладиган қилиб $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма–кетликни ажратиб олиш мумкин бўлади.

$$x_{n_1}+(x_{n_2}-x_{n_1})+\ldots+(x_{n_k}-x_{n_{k-1}})+\ldots$$

қаторни тузамиз. Бу қатор абсолют яқинлашувчи, чунки яқинлашувчи бўлган $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}$ сонли қатор билан мажорандаланади (юқоридан баҳоланади). У ҳолда қандайдир $x\in E$ элемент мавжуд бўлиб $\{s_k\}$ қисмий йиғиндилар кетма–кетлиги шу элементга яқинлашувчи бўлади. Осонгина кўриш мумкинки, $s_k=x_{n_k}$ бўлади. Демак, $k\to\infty$ да $x_{n_k}\to x$ бўлади. Фундаментал кетма–кетликнинг қисмий кетма–кетлиги $x\in E$ элементга яқинлашувчи бўлади. У ҳолда шу $\{x_n\}\subset E$ кетма–кетликнинг ўзи ҳам $x\in E$ элементга яқинлашувчи бўлади. Теорема исбот бўлди.

7. Чизиқли нормаланган фазода зич бўлган чизиқли кўпхилликлар. Яқинлашиш назариясида муҳим роль ўйнайдиган қуйидаги тушунчани киритамиз.

Таъриф. Агар ихтиёрий $x\in E$ ва ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон учун шундай бир $u\in L$ элемент мавжуд бўлиб $\|x-u\|<\varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда E чизиқли нормаланган фазода ётувчи $L\,(L\subset E)$ чизиқли кўпхиллик шу E чизиқли нормаланган фазода *зич* деб айтилади.

L чизиқли кўпхиллик E чизиқли нормаланган фазода зич ва $x\in E$ бўлсин. $\varepsilon=1$, $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, ... , $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$, ... деб танлаш ёрдамида шундай бир $u_1\in L$, $u_2\in L$, ... , $u_n\in L$, ... элементларни топиш мумкинки, бунда $\|x-u_n\|<\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шундай қилиб, агар L чизиқли кўпхиллик E чизиқли нормаланган фазода зич бўлса, у ҳолда ихтиёрий $x \in E$ элемент учун $\{u_n\} \subset L$ кетма–кетлик мавжуд бўлиб $n \to \infty$ да $u_n \to x$ бўлади. Агар биз ёпиқлик амалини эслайдиган бўлсак, у ҳолда биз “L чизиқли кўпхиллик E чизиқли нормаланган фазода зич”, $L \subset E$, $L \neq E$ деган тасдиқ $\overline{L} = E$ эканлигини билдиради, яъни L чизиқли кўпхилликнинг ёпиғи E чизиқли нормаланган фазодан иборат бўлади.

К. Вейерштрасснинг биринчи теоремасига кўра, барча $\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$ кўринишдаги тригонометрик кўпҳадлар тўплами $[-\pi, \pi]$ оралиқда узлуксиз ва $x(-\pi) = x(\pi)$ чегаравий шартни қаноатлантирувчи $\|x\| = \max_{[-\pi,\pi]} |x(t)|$ норма билан аниқланган E чизиқли нормаланган фазода зич бўлган чизиқли кўпхилликка мисол бўлади. К. Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига кўра, барча $\sum_{k=1}^{n} a_k t^k$ кўринишдаги кўпҳадлар тўплами узлуксиз функцияларнинг $\|x\| = \max_{[a,b]} |x(t)|$ норма билан аниқланган $C[a, b]$ чизиқли нормаланган фазосида зич бўлган чизиқли кўпхилликка мисол бўлади.

8. Ўртача ва қирқувчи функциялар, ҳамда уларнинг айрим тадбиқлари. Биз $(-\infty, +\infty)$ сон ўқида аниқланган

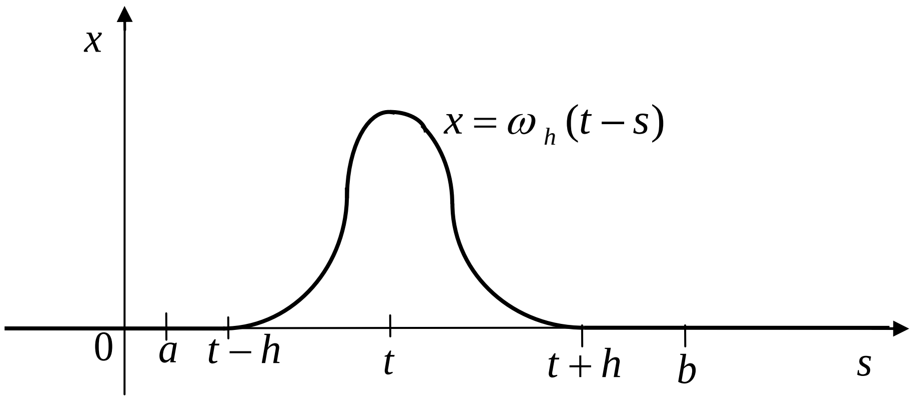
$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{c}\, e^{-\frac{1}{1-t^2}}, \ \textit{агар} \quad |t| < 1 \quad \textit{бўлса}, \\ 0, \qquad \textit{агар} \quad |t| \geq 1 \quad \textit{бўлса}, \end{cases}$$

бунда $c = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-s^2}} ds$ бўлган функцияни қараймиз. Бундай аниқланган $\omega(t)$ функция бутун $(-\infty, +\infty)$ сон ўқида чексиз дифференциалланувчи функция бўлади, яъни исталган тартибли ҳосилага эга бўлади. Бундан ташқари, $\omega(t)$ функция бутун

$(-\infty, +\infty)$ сон ўқида жуфт, манфиймас ва $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega(t)dt = 1$ тенгликларни қаноатлантиради.

Энди $\omega_h(t) = \frac{1}{h}\omega\left(\frac{t}{h}\right)$ функцияни киритамиз. Бу функция ($h > 0$ радиусли) ўртачалаш ядроси деб айтилади. Бу $\omega_h(t)$ функция ҳам бутун $(-\infty, +\infty)$ сон ўқида жуфт, манфиймас, чексиз дифференциалланувчи функция ва $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_h(t)dt = 1$ тенгликларни қаноатлантиради. Бундан ташқари, $|t| \geq 1$ учун $\omega_h(t) = 0$ бўлади.

$[a,b]$ оралиқда берилган ҳар бир $x(t)$ функция учун унинг $x_h(t)$ ўртача функциясини қуйидагича аниқлаймиз:



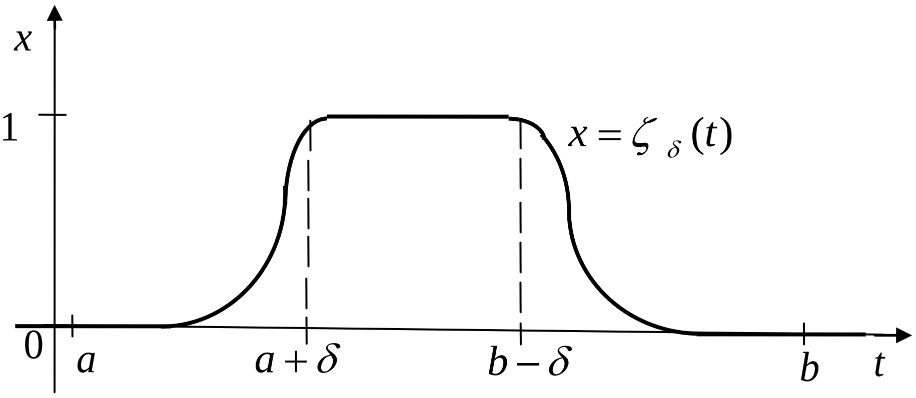
$$x_h(t) = \int\limits_a^b \omega_h(t-s)x(s)ds, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Бу ерда $\omega_h(t)$ ўртачалаш ядроси функциясининг хоссаларидан ва параметрга боғлиқ интегрални дифференциаллаш ҳақидаги теоремадан фойдаланиб $x_h(t)$ ўртача функциясининг қуйидагича хоссаларга эга эканлигини кўрамиз:

1) $[a-h, b+h]$ оралиқнинг ташқарисида $x_h(t) \equiv 0$ бўлади.

2) $x_h(t)$ ўртача функцияси $(-\infty, +\infty)$ сон ўқида чексиз дифференциалланувчи бўлади.

Энди $\zeta_\delta(t)$ қирқувчи функцияни киритамиз.



$$\zeta_\delta(t) = \int\limits_{a+\frac{3}{4}\delta}^{b-\frac{3}{4}\delta} \omega_{\frac{1}{4}\delta}(t-s)\,ds$$

$\zeta_\delta(t)$ қирқувчи функция қуйидагича хоссаларга эга эканлигини кўрамиз:

1) $[a+\dfrac{\delta}{2},\, b-\dfrac{\delta}{2}] = [a,\, b]_{\frac{\delta}{2}}$ ораliқнинг ташқарисида $\zeta_\delta(t) \equiv 0$ бўлади.

2) $[a+\delta,\, b-\delta] = [a,\, b]_\delta$ оралиқда $\zeta_\delta(t) \equiv 1$ бўлади.

3) $(-\infty, +\infty)$ сон ўқида $0 \le \zeta_\delta(t) \le 1$ бўлади.

4) $\zeta_\delta(t)$ қирқувчи функция $(-\infty, +\infty)$ сон ўқида чексиз дифференциалланувчи бўлади.

Таъриф. Агар $[a,b]$ оралиқда аниқланган $x(t)$ функция учун $a < a' < b' < b$ бўлган $[a',b']$ оралиқ топилиб унинг ташқарисида $x(t) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда $x(t)$ функция $[a,b]$ оралиқда *финит функция* деб айтилади. (агар $(-\infty, +\infty)$ сон ўқида аниқланган $x(t)$ функция қандайдир оралиқнинг ташқарисида нолга тенг бўлса, у ҳолда $x(t)$ функция $(-\infty, +\infty)$ сон ўқида *финит функция* деб айтилади).

$\zeta_\delta(t)$ қирқувчи функция, бунда $\delta < \dfrac{b-a}{2}$ бўлганда ихтиёрий $[a,b]$ оралиқда аниқланган $x(t)$ функцияни қирқиш имконини беради, яъни $x(t)\zeta_\delta(t)$ функция $[a,b]$ оралиқда финит бўлган функция бўлади.

Ўртача ва қиркувчи функциялар аппарати функционал анализ ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясида кўпгина тадбиқларга эга бўлади. Бу ерда биз чизиқли кўпхилликнинг зичлиги ҳақидаги иккита тасдиқни келтирамиз.

8–теорема. $[a,b]$ *оралиқда узлуксиз ва финит бўлган функцияларнинг чизиқли кўпхиллиги* $\tilde{L}_p\,[a,b]$ *фазода зич бўлади.*

Исбот. $\delta < \dfrac{b-a}{2}$ бўлсин. $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган ихтиёрий $x(t)$ функция учун

$$\left|x(t)-x(t)\zeta_\delta(t)\right| = \left(1-\zeta_\delta(t)\right)\left|x(t)\right|$$

тенгликка эга бўламиз. Лекин $[a+\delta,\ b-\delta]$ оралиқда $1-\zeta_\delta(t) \equiv 0$ ва бу оралиқнинг ташқарисида $1-\zeta_\delta(t) \le 1$ бўлади. Шунинг учун

$$\int_a^b \left|x(t)-x(t)\zeta_\delta(t)\right|^p dt \le \int_a^{a+\delta} \left|x(t)\right|^p dt + \int_{b-\delta}^b \left|x(t)\right|^p dt \le 2\delta M^p,$$

бунда $M = \|x\|_{C[a,b]}$ бўлган тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра

$$\left\|x(t)-x(t)\zeta_\delta(t)\right\|_{\tilde{L}_p[a,b]} \le M\sqrt[p]{2\delta}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон олсак, у ҳолда $\delta < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right)^p$ учун $x(t)\zeta_\delta(t)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва финит функция бўлиб $x(t)$ функциядан фарқи норма бўйича ε дан кичик бўлади. Теорема исбот бўлди.

9–теорема. $[a,b]$ *оралиқда финит ва чексиз дифференциалланувчи бўлган функцияларнинг чизиқли кўпхиллиги шу* $[a,b]$ *оралиқда финит ва узлуксиз бўлган функцияларнинг* $\|x\|_{C[a,b]} = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$ *норма билан аниқланган чизиқли нормаланган фазосида зич бўлади.*

Исбот. Ихтиёрий $x(t)$ функция $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва финит бўлсин, яъни $a < a' < b' < b$ бўлган $[a',b']$ оралиқ топилиб унинг ташқарисида $x(t) \equiv 0$ бўлсин. $h > 0$ ва $h < \min\,(a'-a,\ b-b')$ бўлсин. $x(t)$ функция учун $x_h(t)$ ўртача функцияни қараймиз. Бу $x_h(t)$ ўртача функция чексиз дифференциалланувчи ва $[a,b]$ оралиқнинг ташқарисида $x_h(t) \equiv 0$ бўлади. Шунингдек

$$|t-s|\geq h \quad \text{учун} \quad \omega_h(|t-s|)\equiv 0 \quad \text{ва} \quad \int_a^b \omega_h(|t-s|)ds=1$$

муносабатлар ўринли бўлади. У ҳолда биз

$$|x(t)-x_h(t)|=$$

$$=\left|\int_{|t-s|\leq h}\omega_h(|t-s|)x(s)ds-\int_{|t-s|\leq h}\omega_h(|t-s|)ds\cdot x(t)\right|\leq$$

$$\leq \max_{|t-s|\leq h}|\ x(s)-x(t)\ |\cdot\int_{|t-s|\leq h}\omega_h(|t-s|)ds=\max_{|t-s|\leq h}|\ x(s)-x(t)\ |$$

баҳолашга эга бўламиз. Бу ерда $x(t)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқда текис узлуксиз эканлигидан $h\to 0$ да $\|x(t)-x_h(t)\|_{C[a,b]}\to 0$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, теорема исбот бўлди.

9. Изометрик чизиқли нормаланган фазолар.

Таъриф. Агар $\tilde{x}=J(x)$ акслантириш мавжуд бўлиб, бу акслантириш ёрдамида E ва $\tilde{E}$ фазолар чизиқли фазо сифатида изоморф ва $\|J(x)\|=\|x\|$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда E ва $\tilde{E}$ чизиқли нормаланган фазолар *чизиқли изометрик фазолар* деб айтилади.

Чизиқли изометрик фазоларга мисол келтирамиз. E фазо $m-$ўлчамли чизиқли нормаланган фазо бўлсин. E фазодаги $\{e_k\}_{k=1}^m$ базисни қараймиз ва бу базис бўйича ихтиёрий $x\in E$ элементнинг $x=\sum_{k=1}^m \xi_k e_k$ ёйилмасини ёзамиз. $\tilde{E}$ чизиқли нормаланган фазо $\tilde{x}=\left(\xi_k\right)_{k=1}^m$ устунларнинг чизиқли нормаланган фазоси бўлиб, унда норма $\|\tilde{x}\|_{\tilde{E}}=\left\|\sum_{k=1}^m \xi_k e_k\right\|_E$ тенглик билан киритилган бўлсин. У ҳолда $J(x)=\tilde{x}$ мослик E ва $\tilde{E}$ чизиқли нормаланган фазолар ўртасидаги изометрия эканлигини кўрсатиш қийин эмас.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

8.1. $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва

$$K_\alpha(x) = \sup_{\substack{t_1,t_2\in[a,b]\\ t_1\neq t_2}} \frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^\alpha} < +\infty$$

Гёльдер шартини қаноатлантирувчи $x(t)$ функцияларнинг $C^\alpha[a,b]$, бунда $\alpha\in[0,1]$ бўлган тўпламини қараймиз. Агар бу тўпламда норма

$$\|x\|_{C^\alpha[a,b]} = \|x\|_{C[a,b]} + K_\alpha(x)$$

тенглик билан берилган бўлса, у ҳолда $C^\alpha[a,b]$ тўплам нормаланган фазо эканлигини кўрсатинг.

8.2. R^m чизиқли фазода $0<p<1$ учун

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

тенглик билан норма киритиш мумкинми?. Бунда $U_r(x_0)$ шар қаварик тўплам бўладими?. Норма аксиомаларининг қайси бири бажарилади?.

8.3. $C[0,1]$ фазода $\{t^n - t^{n+1}\}$ ва $\{t^n - t^{2n}\}$ кетма–кетликлар яқинлашувчи бўладими?.

8.4. $C[0,1]$ фазо ва $C^1[0,1]$ фазоларда $\left\{\dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}\right\}$ кетма–кетлик яқинлашувчи бўладими?.

8.5. $[a,b]$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи бўлган функцияларнинг чизиқли фазосида $|x(b)-x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$,

$$|x(a)| + \max_{t\in[a,b]}|x'(t)| \ , \qquad \int_a^b |x(t)|dt + \max_{t\in[a,b]}|x'(t)|$$

формулалар билан берилган функционалларни норма сифатида қабул қилиш мумкинми?.

8.6. $[a,b]$ оралиқда икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлган функцияларнинг чизиқли фазосида

$$|x(a)|+|x'(a)|+\|x''(t)\|_{C[a,b]}\,, \qquad \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}+\|x''(t)\|_{C[a,b]}\,,$$

$$|x(a)|+|x(b)|+\|x''(t)\|_{C[a,b]}\,, \quad |x(a)|+\|x'(t)\|_{C[a,b]}+\|x''(t)\|_{\tilde{L}_2[a,b]}$$

тенглик билан берилган функционаллардан норма сифатида фойдаланиш мумкинми?.

8.7. $p>1$ бўлганда а) чекли йиғинди учун, б) қатор учун, в) интеграл учун Гёльдер тенгсизлигида тенглик белгисига эришишнинг зарурий ва етарли шартини топинг.

8.8. $p>1$ бўлганда Минковский тенгсизлигида тенглик белгисига эришишнинг зарурий ва етарли шартини топинг.

8.9. Қаварик тўпламнинг ёпиғи ҳам қаварик эканлигини исботланг.

8.10. M тўпламнинг $\bar{M}$ ёпиғи шу M тўпламни ўзида сақлайдиган барча ёпиқ тўпламларнинг кесишмасидан иборат эканлигини исбот қилинг.

8.11. $C\,[a,b]$ фазода барча кўпҳадлар тўплами а) очиқ; б) ёпиқ тўплам бўладими?.

8.12. $C\,[a,b]$ фазода а) даражаси k дан катта бўлмаган барча кўпҳадлар тўплами; б) даражаси k бўлган барча кўпҳадлар тўплами ёпиқ тўплам бўладими?.

8.13. $C\,[a,b]$ фазода барча $t\in[a,b]$ учун $|x(t)|<1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x(t)$ узлуксиз функциялар тўплами очиқ тўплам эканлигини исботланг.

8.14. Барча узлуксиз бўлакли чизиқли функциялар тўплами $C\,[a,b]$ фазонинг ҳамма жойида зич тўплам эканлигини исботланг.

8.15. Барча кўпҳадлар тўплами $C^k\,[a,b]$ фазонинг ҳамма жойида зич тўплам эканлигини исботланг.

8.16. $a_n\in R$ $\left(a_n>0\right)$ кетма–кетликка қандай шарт қўйганда

а) $\left\{x\in l_2,\, x=(x_1,x_2,...,x_n,...):|x_n|<a_n\right\}$ параллелепипед;

б) $\left\{x\in l_2,\, x=(x_1,x_2,...,x_n,...):\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n^2}{a_n^2}<1\right\}$ эллипсоид

чегараланган тўплам бўлади.

8.17. $a_n \in R\ \left(a_n > 0\right)$ кетма–кетликка қандай шарт қўйганда

а) $\left\{x \in l_2,\, x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) : \left|x_n\right| < a_n\right\}$ параллелепипед;

б) $\left\{x \in l_2,\, x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n^2}{a_n^2} < 1\right\}$ эллипсоид

очиқ тўплам бўлади.

8.18. $a_n \in R\ \left(a_n > 0\right)$ кетма–кетликка қандай шарт қўйганда

а) $\left\{x \in l_2,\, x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) : \left|x_n\right| \le a_n\right\}$ параллелепипед;

б) $\left\{x \in l_2,\, x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n^2}{a_n^2} \le 1\right\}$ эллипсоид

ёпиқ тўплам бўлади.

8.19. а) c^2; б) l_1; в) l_2; г) m; д) $C[a,b]$; е) $\tilde{L}_2[a,b]$ фазоларнинг қайси бири қатъий нормаланган фазо бўлади.

8.20. $l_p^{(m)}$, l_p, ва $\tilde{L}_p[a,b]$ фазолар $p > 1$ учун қатъий нормаланган фазо эканлигини кўрсатинг.

8.21. $l_1^{(m)}$, l_1, ва $\tilde{L}_1[a,b]$ фазолар қатъий нормаланган фазо эмаслигини кўрсатинг.

8.22. $C\,[a,b]$ фазода а) даражаси k бўлган барча кўпҳадлар тўплами; б) даражаси k дан катта бўлмаган барча кўпҳадлар тўплами; в) $\int\limits_a^b \left|x(t)\right| dt \le 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи узлуксиз функциялар тўплами; г) $\int\limits_a^b \left|x(t)\right|^2 dt \le 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи узлуксиз функциялар тўплами; д) $\max\limits_{t \in [a,b]} \left|x(t)\right| + \max\limits_{t \in [a,b]} \left|x'(t)\right| \le 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи узлуксиз дифференциалланувчи функциялар тўплами қаварик тўплам бўладими?.

8.23. l_2 фазода

а) $\left\{x \in l_2,\, x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) : \left|x_n\right| < 2^{-n+1}\right\}$ параллелепипед;

б) $\left\{x \in l_2,\, x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < 1\right\}$ эллипсоид қаварик тўплам эканлигини исботланг.

8.24. $A,B\subset X$ ҳамма жойда зич тўпламлар бўлсин. У ҳолда $A\bigcap B=\varnothing$ бўлиши мумкинми?.

8.25. Ҳеч бир жойда зич бўлмаган тўпламнинг тўлдирувчиси ҳамма жойда зич бўлган тўплам эканлигини исботланг. Тескари тасдиқ ҳам ўринлими?.

8.26. Очиқ ва ҳамма жойда зич бўлган тўпламнинг тўлдирувчиси ҳеч бир жойда зич эмаслигини исботланг.

8.27. Ҳеч бир жойда зич бўлмаган тўпламнинг тўлдирувчиси ҳам ҳеч бир жойда зич эмаслигини исботланг.

8.28. $[a,b]$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи бўлган функцияларнинг чизиқли фазосида

$$\|x(t)\|_{C^1[a,b]}\ ,\quad |x(a)|+\|x'(t)\|_{C[a,b]}\ ,\quad \int_a^b |x(t)|dt+\|x'\|_{C[a,b]}$$

нормаларнинг эквивалент эканлигини кўрсатинг.

8.29. $[a,b]$ оралиқда икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлган функцияларнинг чизиқли фазосида

$$\|x(t)\|_{C^2[a,b]}\ ,\quad |x(a)|+|x'(a)|+\|x''(t)\|_{C[a,b]}\ ,$$

$$|x(a)|+\|x'(t)\|_{C[a,b]}+\|x''(t)\|_{C[a,b]}\ ,\quad \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}+\|x''(t)\|_{C[a,b]}$$

нормаларнинг эквивалент эканлигини кўрсатинг.

8.30. $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган функцияларнинг чизиқли фазосида $\|x(t)\|_{\tilde{L}_2[a,b]}$ ва $\|x\|=\left(\int_a^b v(t)|x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$ нормаларнинг эквивалент эканлигини кўрсатинг, бунда $t\in[a,b]$ учун $v(t)\ge\alpha>0$ ва $v(t)$ функция $t\in[a,b]$ оралиқда узлуксиздир.

8.31. Чизиқли нормаланган фазодаги ҳар қандай чекли ўлчамли чизиқли кўпхиллик ёпиқ эканлигини, яъни ҳар қандай чекли ўлчамли чизиқли кўпхиллик қисм фазо бўлишлигини кўрсатинг.

8.32. $C\,[a,b]$ фазода $[a,b]$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи бўлган функцияларнинг чизиқли кўпхиллиги қисм фазо бўладими?.

8.33. Ҳар қандай чекли ўлчамли чизиқли нормаланган фазода Банах фазоси бўлишлигини кўрсатинг.

8.34. Банах фазосининг ҳар қандай чекли ўлчамли чизиқли нормаланган қисм фазоси ҳам Банах фазоси бўлишлигини кўрсатинг.

8.35. $\omega_h(t)$ ўртачалаш ядроси учун $\left|\frac{d^k\omega_h(t)}{dt^k}\right| \le C_k h^{-1-k}$ тенгсизлик ўринли эканлигини исботланг, бунда C_k қандайдир ўзгармас сон бўлиб h ва $k = 0,1,2,...$ параметрларга боғлиқ эмас.

8.36. Агар $x(t) \in C^k[a,b]$ бўлса, у ҳолда $x_h(t)$ ўртачалаш функцияси учун $C^k[a',b']$ фазода $h \to 0$ да $x_h(t) \to x(t)$ яқинлашувчи эканлигини исботланг, бунда $(a',b') \subset (a,b)$ ва $k = 0,1,2,...$.

8.37. $[a,b]$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи бўлган функцияларнинг чизиқли фазосида

$$\|x\| = \left\{\int_a^b \left[x^2(t) + x'^2(t)\right]dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

тенглик билан нормани киритиш мумкинлигини кўрсатинг. Бу чизиқли нормаланган фазони $\tilde{H}^1[a,b]$ орқали белгилаймиз. Бу чизиқли нормаланган фазо Банах фазоси бўладими?.

8.38. Агар $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ қатор ҳадларининг ўринларини ихтиёрий равишда алмаштирганда ҳам бу қатор битта ва фақат битта элементга яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор *шартсиз яқинлашувчи* деб айтилади. Бу

а) қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, у ҳолда шартсиз яқинлашувчи бўлишлигини;

б) чекли ўлчамли фазодаги ҳар қандай шартсиз яқинлашувчи бўлган қаторнинг абсолют яқинлашувчи бўлишлигини;

в) қаторнинг абсолют яқинлашувчи ва шартсиз яқинлашувчи бўлишлиги шартларининг эквивалент эканлиги фақат ва фақат чекли ўлчамли Банах фазосидагина ўринли эканлигини исбот қилинг.

7-§. Евклид ва унитар фазолар

Аналитик геометрия ва чизиқли алгебрани ўрганишда муҳим бўлган векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва мос равишда чизиқли фазо элементларининг скаляр кўпайтмаси тушунчаси киритилади. Бу тушунча уч ўлчамли ва n–ўлчамли Евклид геометриясининг кўпгина муҳим амалий масалаларини ривожлантиришга имкон беради. Бу ерда асосий марказий масала элементларнинг ортогоналлиги тушунчасидир. Ихтиёрий нормаланган фазоларда бу тушунча мавжуд бўлмаслиги мумкин. Бу тушунча элементларнинг ортогонал системасини қарашга, яъни Евклид фазосидаги ортонормал базис тушунчасини тўғри умумлаштиришга олиб келади.

1. Евклид фазоси.

Таъриф. Агар E ҳақиқий чизиқли фазонинг ихтиёрий x ва y элементлари жуфтига (x, y) орқали белгиланувчи ва *скаляр кўпайтма* деб аталувчи ҳақиқий сон мос қўйилган бўлиб, бу мослик

1) $(x, x) \geq 0$, бундан ташқари $(x, x) = 0$ тенглик фақат ва фақат $x = 0$ бўлгандагина ўринли;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

скаляр кўпайтма аксиомаларини қаноатлантирса, у ҳолда E ҳақиқий чизиқли фазо *Евклид фазоси* деб айтилади.

Скаляр кўпайтма тушунчаси табиий равишда векторларнинг скаляр кўпайтмаси тушунчасини умумлаштиради. Ҳар қандай Евклид фазосини чизиқли нормаланган фазога айлантириш учун норма

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{1.7.1}$$

формула орқали аниқланади. Бунда норма аксиомаларининг бажарилиши скаляр кўпайтманинг 1)–4) хоссаларидан келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, (1.7.1) формула билан аниқланган норманинг 1) ва 2) аксиомаларини текшириш қийин эмас. Учбурчак тенгсизлигини ҳосил қилиш учун аввал Коши–Буняковский тенгсизлиги деб аталувчи

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \qquad (1.7.2)$$

тенгсизликни келтирамиз. Скаляр кўпайтманинг биринчи хоссасига кўра ихтиёрий λ ҳақиқий сон учун

$$(x-\lambda y,\ x-\lambda y) \ge 0$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу тенгсизликнинг чап томонини ёйиш орқали

$$(x,\ x) - 2\lambda(x,\ y) + \lambda^2(y,\ y) \ge 0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Ихтиёрий λ ҳақиқий сон учун бу квадрат учҳад манфиймас бўлади. Бундан эса унинг дискриминанти мусбат эмаслиги келиб чиқади:

$$(x,\ y)^2 - (x,\ x)(y,\ y) \le 0\,.$$

Бу тенгсизлик (1.7.2) тенгсизликка тенг кучлидир. Энди учбурчак аксиомасини исбот қиламиз.

$$\|x+y\|^2 = (x+y,\ x+y) = (x,\ x) + 2(x,\ y) + (y,\ y) \le$$

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан илдиз чиқариш йўли билан учбурчак тенгсизлигини ҳосил қиламиз.

2. Унитар фазо.

Таъриф. Агар U комплекс чизиқли фазонинг ихтиёрий x ва y элементлари жуфтига (x,y) орқали белгиланувчи ва *скаляр кўпайтма* деб аталувчи комплекс сон мос қўйилган бўлиб, бу мослик

1) $(x,x) \ge 0$, бундан ташқари $(x,x)=0$ тенглик фақат ва фақат $x=0$ бўлгандагина ўринли;

2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (бу ерда усти чизиқ комплекс соннинг қўшмасини билдиради);

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$;

4) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

скаляр кўпайтма аксиомаларини қаноатлантирса, у ҳолда U комплекс чизиқли фазо *унитар фазо* деб айтилади.

Скаляр кўпайтманинг 1)–4) хоссаларидан ва комплекс соннинг хоссаларидан келиб чиқадиган иккита элементар натижани келтирамиз.

1–натижа. Унитар фазода $(x,\lambda y)=\overline{\lambda}(x,y)$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам,

$$(x,\lambda y)=\overline{(\lambda y,x)}=\overline{\lambda(y,x)}=\overline{\lambda}(x,y)$$

бўлади.

2–натижа. Унитар фазода $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$ тенглик ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам,

$$(x,y+z)=\overline{(y+z,x)}=\overline{(y,x)+(z,x)}=\overline{(y,x)}+\overline{(z,x)}=(x,y)+(x,z)$$

бўлади.

Унитар фазода ҳам ҳар қандай Евклид фазосидаги сингари норма

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)} \tag{1.7.3}$$

формула орқали аниқланади. Бунда норма аксиомаларининг бажарилиши скаляр кўпайтманинг 1)–4) хоссаларидан келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, (1.7.3) формула билан аниқланган норманинг 1) ва 2) аксиомаларини текшириш қийин эмас. Учбурчак тенгсизлигини ҳосил қилиш учун аввал Коши–Буняковский тенгсизлиги деб аталувчи

$$|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\| \tag{1.7.4}$$

тенгсизликни келтирамиз. Скаляр кўпайтманинг биринчи хоссасига кўра ихтиёрий λ комплекс сон учун

$$(x+\lambda y,\ x+\lambda y)\ge 0$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу тенгсизликнинг чап томонини ёйиш орқали

$$(x,\ x)+\overline{\lambda}\ (x,\ y)+\lambda(y,x)+|\lambda|^2\,(y,\ y)\ge 0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Агар $y=0$ бўлса, у ҳолда Коши–Буняковский тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунинг учун $y\ne 0$ бўлсин. Агар

$$\lambda=-\frac{(x,y)}{(y,y)}$$

деб олсак, у ҳолда $\overline{\lambda}=-\dfrac{(y,x)}{(y,y)}$ бўлади ва биз

$$(x,\,x)-\frac{|(x,\,y)|^2}{(y,y)}-\frac{|(x,\,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,\,y)|^2}{(y,y)}\geq 0$$

ёки

$$(x,\,x)-\frac{|(x,\,y)|^2}{(y,y)}\geq 0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизлик (1.7.4) Коши–Буняковский тенгсизлигига тенг кучлидир. Энди учбурчак аксиомасини исбот қиламиз.

$$\|x+y\|^2=(x+y,\,x+y)=(x,\,x)+(x,\,y)+(y,\,x)+(y,\,y)\leq$$

$$\leq(x,\,x)+(x,\,y)+\overline{(x,\,y)}+(y,\,y)=$$

$$=(x,\,x)+2\operatorname{Re}(x,\,y)+(y,\,y)\leq$$

$$\leq\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=\left(\|x\|+\|y\|\right)^2$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан илдиз чиқариш йўли билан учбурчак тенгсизлигини ҳосил қиламиз.

3. Элементларнинг ортогоналлиги. Ортогонал ва ортонормал системалар. E скаляр кўпайтма киритилган фазо бўлсин. Агар $(x,y)=0$ бўлса, у ҳолда x ва y элементлар ортогонал дейилади ва $x\perp y$ каби белгиланади. Кўриниб турибдики E фазонинг ноли ихтиёрий элементга ортогонал бўлади. E фазонинг барчаси нолдан фарқли бўлган $x_1,\,x_2,\,...,x_m$ элементларини қараймиз. Агар ихтиёрий $k,\,l=1,\,2,\,...,m;\,k\neq l$ учун $(x_k\,,\,x_l)=0$ бўлса, у ҳолда $x_1,\,x_2,\,...,x_m$ элементлар системаси ортогонал система деб айтилади.

1–теорема. *Агар $x_1,\,x_2,\,...,x_m$ элементлар системаси ортогонал система бўлса, у ҳолда $x_1,\,x_2,\,...,x_m$ элементлар системаси чизиқли эркли система бўлади.*

Исбот. $\lambda_1,\,\lambda_2,\,...,\lambda_m$ ўзгармаслар мавжуд бўлиб

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_mx_m=0$$

тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда бу тенгликни x_k элементга скаляр кўпайтириб $\lambda_k(x_k,\,x_k)=0$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $(x_k,\,x_k)=\|x_k\|^2>0$ бўлади. Демак, $\lambda_k=0$ экан. Бу ихтиёрий

$k=1, 2, ..., m$ учун ўринлидир, яъни $x_1, x_2, ..., x_m$ элементлар системаси чизиқли эркли система бўлади.

Агар берилган $x_1, x_2, ..., x_m$ элементлар системаси учун ихтиёрий $k,\ l=1, 2, ..., m$ учун $(x_k, x_l)=\delta_{kl}$ бўлса, бунда $k=l$ учун $\delta_{kl}=1$ ва $k\neq l$ учун $\delta_{kl}=0$ (бу ерда δ_{kl} – Кронекер символи) бўлса, у ҳолда $x_1, x_2, ..., x_m$ элементлар системаси ортонормал система деб айтилади.

4. Скаляр кўпайтма киритилган фазоларга мисоллар. Энди скаляр кўпайтма киритилган фазоларга мисоллар келтирамиз:

1. Ҳақиқий сонларнинг $n-$та $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ тартибланган системаси шаклидаги элементларнинг R^n фазоси Евклид фазосига мисол бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, бу фазода $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ ва $y=(y_1, y_2, ..., y_n)$ элементлар орасидаги қўшиш амали

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ ...,\ x_n+y_n)$$

ва λ ҳақиқий сонга кўпайтириш

$$\lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

шаклида киритилади. Ҳамда $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ ва $y=(y_1, y_2, ..., y_n)$ элементларнинг скаляр кўпайтмаси

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

формула ёрдамида аниқланади. Бу R^n фазо Евклид фазоси бўлиб ундаги метрика аввал киритилган метрика билан устма–уст тушади.

2. Ҳақиқий (комплекс) l_2 фазо Евклид (унитар) фазоси бўлади. Бу фазода элементларни қўшиш ва элементни сонга кўпайтириш амали аниқланган. Ҳамда $x=(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ва $y=(y_1, y_2, ..., y_n, ...)$ элементларнинг скаляр кўпайтмаси мос равишда Евклид фазоси учун

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

формула ёрдамида, унитар фазо ҳолида

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i}$$

формула ёрдамида аниқланади. Бу l_2 фазо Евклид (унитар) фазоси бўлиб ундаги метрика аввал киритилган метрика билан устма–уст тушади.

3. Ҳақиқий (комплекс) $L_2[a,b]$ фазо Евклид (унитар) фазоси бўлади. Бу фазода функцияларни қўшиш ва функцияни сонга кўпайтириш амали аниқланган. Ҳамда $x(t)$ ва $y(t)$ функциянинг скаляр кўпайтмаси мос равишда Евклид фазоси учун

$$(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt$$

формула ёрдамида, унитар фазо ҳолида

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

формула ёрдамида аниқланади. Бу $L_2[a,b]$ фазо Евклид (унитар) фазоси бўлиб ундаги метрика аввал киритилган метрика билан устма–уст тушади.

5. Грама–Шмидтнинг ортогоналаштириш процесси. E скаляр кўпайтма киритилган фазо бўлсин. Шу E фазога қарашли $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ чексиз кўп элементларнинг системаси берилган бўлсин. Агар ҳар бир $n=1,2,...$ учун $x_1, x_2, ..., x_n$ система чизиқли эркли бўлса, у ҳолда $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ система чизиқли эркли деб айтилади. Агар барча $e_k\neq 0$ ва $k\neq l$ учун $(e_k,e_l)=0$ бўлса, у ҳолда $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ система ортогонал система деб айтилади. Агар барча $k,l=1,2,...$ учун $(\varphi_k,\varphi_l)=\delta_{kl}$ бўлса, у ҳолда $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ система ортонормал система деб айтилади.

Ихтиёрий берилган $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ чизиқли эркли система бўйича $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортогонал системани, ҳамда $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормал системани қуйидаги Грама–Шмидтнинг ортогоналаштириш принципи ёрдамида қуриш мумкин.

$e_1 = x_1$ бўлсин. $e_1 \neq 0$, чунки битта x_1 элементдан иборат система чизиқли эрклидир. e_2 элементни $e_2 = x_2 - \lambda_{21} e_1$ шаклида излаймиз, бунда λ_{21} ўзгармасни $e_2 \perp e_1$ бўладиган қилиб танлаймиз. Бундан $(x_2 - \lambda_{21} e_1 ,\ e_1) = 0$, яъни $\lambda_{21} = \dfrac{(x_2 ,\ e_1)}{(e_1 ,\ e_1)}$ бўлади. Бу топилган $e_2 \neq 0$ бўлади, чунки x_1 , x_2 элементлар системаси чизиқли эрклидир.

Математик индукция методидан фойдаланиб фикр юритамиз. $e_1 , e_2 ,..., e_{k-1}$ элементлар қурилган бўлсин. e_k элементни $e_k = x_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_{k\,i}\, e_i$ шаклида излаймиз, бунда $\lambda_{k\,i}$ ўзгармасларни $e_k \perp e_l$, $l = 1, 2,...k-1$ бўладиган қилиб танлаймиз. Бундан $\lambda_{k\,l} = \dfrac{(x_k ,\ e_l)}{(e_l ,\ e_l)}$ бўлади. Шунга кўра $e_k \neq 0$ бўлади, чунки $x_1 , x_2 ,..., x_k$ элементлар системаси чизиқли эрклидир. Демак, $\{e_k\}$ ортогонал система қурилди. Агар $\varphi_k = \dfrac{e_k}{\|e_k\|}$ деб олсак, у ҳолда $\{\varphi_k\}$ ортонормал системани ҳосил қиламиз.

$1, \cos t,\ \sin t, ..., \cos nt, \sin nt, ...$ система $\tilde{L}_2[-\pi, \pi]$ фазодаги ортогонал системага мисол бўла олади.

$L_2[-1,\ 1]$ фазодаги

$$1,\ t,\ t^2,\ ...\ ,\ t^n,\ ... \tag{1.7.5}$$

системани қарайлик. Бу система чизиқли эркли бўлади. Бу системанинг чизиқли комбинациялари тўплами барча кўпҳадлар тўпламидир. Шунга кўра, бу система ихтиёрий $[a, b]$ оралиқ учун $L_2[a,\ b]$ фазода тўла система бўлади.

$$(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t) y(t) dt$$

скаляр кўпайтмага нисбатан $[-1,1]$ оралиқда (1.7.5) системани ортогоналаштирсак, у ҳолда биз

$$e_0(t),\ e_1(t),\ e_2(t), ...,\ e_n(t),\ ...$$

тўла ортогонал системани ҳосил қиламиз, бунда $e_n(t)$–элемент n–даражали кўпҳад бўлади. Ҳар бир $e_n(t)$ кўпҳад ўзгармас сон аниқлигида $R_n(t)=\dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ кўпҳад билан устма–уст тушишини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, биринчидан, $\{R_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ система ортогоналдир. $n\ge m$ бўлсин. Барча $k=0,1,\ldots,n-1$ учун

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^n\right|_{t=-1}=\left.\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^n\right|_{t=1}=0$$

бўлади. Шунга кўра, бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}R_m(t)R_n(t)dt&=-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(t^2-1)^m\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n dt=\\ \ldots&=(-1)^n\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}(t^2-1)^m\right]\cdot(t^2-1)^n dt\end{aligned}\qquad(1.7.6)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар $m<n$ бўлса, у ҳолда интеграл остидаги ифода айнан нолга тенг бўлади. Бундан эса, $\{R_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ системанинг ортогонал эканлиги келиб чиқади.

Иккинчидан, $R_n(t)$ кўпҳад n–даражали кўпҳад бўлади. Шунга кўра, бу кўпҳад (1.7.5) системанинг дастлабки $n+1$ та элементлари билан яратилган бўлади. Шундай қилиб, $\{R_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ система билан бирга $\{e_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ система ҳам қуйидаги хоссаларга эга бўлади:

1) ортогоналллик;

2) n– элемент $1, t, t^2, \ldots, t^n$ система билан яратилган қисм фазога тегишли бўлади. Бу икки хосса ёрдамида системанинг ҳар бир элементи ўзгармас сон аниқлигида бир қийматли аниқланади.

Энди $R_n(t)$ кўпҳад учун нормалавчи кўпайтувчини топамиз. $m=n$ бўлган ҳолда (1.7.6) тенгликка кўра

$$\int_{-1}^{1}R_n^2(t)dt=(-1)^n\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}(t^2-1)^n\right]\cdot(t^2-1)^n dt=$$

$$=(2n)!\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt = 2\cdot(2n)!\int\limits_{0}^{1}(1-t^2)^n dt = \begin{bmatrix} t=\cos\varphi \\ dt=-\sin\varphi d\varphi \end{bmatrix} =$$

$$=2\cdot(2n)!\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}d\varphi = 2\cdot(2n)!\,\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{2}{3}=\frac{(n!)^2\,2^{2n+1}}{2n+1}$$

ҳосил бўлади. Бошқача қилиб айтганда $R_n(t)$ кўпҳаднинг нормаси $n!\cdot 2^n\cdot\sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$ сонга тенг бўлади. Шундай қилиб

$$\frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot R_n(t)=\frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,\quad n=0,1,2,\,\ldots \tag{1.7.7}$$

кўпҳадлар системаси на фақат ортогонал бўлади, балки ортонормал ҳам бўлади.

Кўпинча нормаланмаган кўпҳадлар, яъни

$$P_n(t)=\frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,\quad n=0,1,2,\,\ldots \tag{1.7.8}$$

формула билан аниқланган кўпҳадлар математик физика масалаларини ечишда қаралади. Бу $P_n(t)=\dfrac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot\dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$, $n=0,1,2,\,\ldots$ кўпҳадлар Лежандр кўпҳадлари деб айтилади. Бу (1.7.8) формуланинг ўзига эса, Родрига формуласи деб айтилади. Бу келтирилган натижаларга кўра

$$\int\limits_{-1}^{1}P_n(t)P_m(t)dt=\begin{cases} 0, & \textit{агар}\quad n\neq m\quad \textit{бўлса,} \\ \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \textit{агар}\quad n=m\quad \textit{бўлса} \end{cases}$$

тенглик келиб чиқади. Лежандр кўпҳадларининг дастлабки бештасининг ифодасини ошкор кўринишда келтирамиз:

$$P_0(t)=1,\ P_1(t)=t,\ \ P_2(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2},\ P_3(t)=\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t,$$

$$P_4(t)=\frac{35}{8}t^4-\frac{15}{4}t^2+\frac{3}{8}.$$

Шундай қилиб,

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,\quad n=0,1,2,\ \dots \qquad (1.7.9)$$

ортонормал система Грама–Шмидтнинг ортогоналаштириш принципини қўллаш натижаси бўлади.

Ҳар қандай $f(t)\in L_2[-1,1]$ функция Лежандр кўпҳадлари бўйича $L_2[-1,1]$ фазо нормаси бўйича яқинлашувчи бўлган

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t)$$

Фурье қаторига ёйилади, бунда $c_n=\dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)dt$ бўлади.

$P_n(t)=\dfrac{1}{n!\cdot 2^n}\cdot\dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$, $n=0,1,2,...$ Лежандр кўпҳадлари қуйидаги хос қиймат масаласининг $\lambda_n=n(n+1)$, $n=0,1,2,\ \dots$ хос қийматларга мос хос функциялари бўлади:

$-1\le t\le 1$ *оралиқда*

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dy}{dt}\right]+\lambda y=0,\quad -1<t<1 \qquad (1.7.10)$$

Лежандр тенгламасининг $t=\pm 1$ *учун чегараланган ва* $y(1)=1$ *чегаравий шартларини қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимини ва* λ *хос қийматни топиш талаб этилади.*

Бу масаланинг хос функциялари Лежандр кўпҳадларидир.

$-1\le t\le 1$ *оралиқда*

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dy}{dt}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-t^2}\right)y=0,\quad -1<t<1 \qquad (1.7.11)$$

тенгламанинг

$$|y(\pm 1)|<\infty \qquad (1.7.12)$$

чегараланганлик шартларини қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимини ва λ *хос қийматини топиш талаб этилади.*

Бу масаланинг $\lambda_n=n(n+1)$, $n=1,2,\ \dots$ хос қийматларига мос хос функциялари

$$P_n^{(m)}(t)=(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^m P_n(t)}{dt^m}$$

шаклида бўлади. Бу $P_n^{(m)}(t)$ функциялар $P_n(t)$ Лежандр кўпҳадларининг $m-$ тартибли эргашган функциялари деб айтилади. Кўриниб турибдики, $P_n^{(0)}(t)=P_n(t)$ ва $m\le n$ учунгина $P_n^{(m)}(t)\not\equiv 0$ бўлади. Бу Лежандр кўпҳадлари ва унинг $m-$ тартибли эргашган функцияларининг хоссаларини биз кейинчалик батафсил кўриб чиқамиз.

6. QR**–ёйилмалар.** Ҳар бир $n\in N$ учун Грама–Шмидтнинг ортогоналаштириш процессини матрицавий формада ифода қилсак, у ҳолда биз матрицаларнинг яна битта факторизациясини ҳосил қиламиз.

Агар

$$UU^*=U^*U=I$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $U\in C^{n\times n}$ матрицага унитар матрица деб айтилади.

Агар

$$QQ^T=Q^TQ=I$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $Q\in R^{n\times n}$ матрицага ортогонал матрица деб айтилади.

$A=\left[a_1\ \ldots\ a_n\right]$ матрица $n\times n$ ўлчамли ҳақиқий ёки комплекс матрица бўлиб, бу матрица чизиқли эркли $a_1,\ \ldots,\ a_n\in R^n$ (мос равишда $a_1,\ \ldots,\ a_n\in C^n$) устунлардан тузилган бўлсин. Бу устунларга табиий скаляр кўпайтма киритилган арифметрик фазога нисбатан Грама–Шмидтнинг ортогоналаштириш процессини қўласак, у ҳолда $q_1,\ \ldots,\ q_n$ ортонормал устунлар ҳосил бўлиб, бунда $Q=\left[q_1\ \ldots\ q_n\right]$ матрица ортогонал (мос равишда унитар) матрица бўлади.

Грама–Шмидтнинг ортогоналаштириш процессининг ўзи эса, $A=\left[a_1\ \ldots\ a_n\right]$ матрицага ўнгдан қандайдир элементар матрицаларни кетма–кет кўпайтириш эканлигини билдиради.

Шунингдек, $q_i\in L(a_i,\,q_1,\,\ldots,\,q_{i-1})$, $i=\overline{1,\,n}$ бўлгани учун $i-$ қадамда ҳосил қилинадиган A_{i-1} матрица (яъни $i-1$ та қадамдан кейин ҳосил қилинадиган матрица) ўнгдан

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \alpha_{1i} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_{2i} & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

матрицага кўпайтирилади. Шунинг учун, ҳар бир $n \in N$ учун, бутун бир Грама–Шмидтнинг ортогоналаштириш процесси

$$AL_1 L_2 \dots L_n = Q \quad \text{ёки} \quad AL = Q$$

матрицавий схемага жамланади, бунда $L-$ матрица юқори учбурчак матрицаларининг кўпайтмаси сифатида юқори учбурчак матрицасидир. Шунга кўра,

$$A = QR \tag{1.7.13}$$

ёйилма ўринлидир, бунда Q – ортогонал (мос равишда унитар) матрица, $R = L^{-1}$ – эса юқори учбурчак матрицасидир.

Бу (1.7.13) ёйилмага A матрицанинг QR ёйилмаси деб айтилади.

Агар A матрица чизиқли эркли устунларнинг $m \times n$ ўлчамли тўғри бурчакли матрицаси бўлса, у ҳолда $m \ge n$ бўлиб Q матрица ҳам $m \times n$ ўлчамли тўғри бурчакли матрица ва $q_1 \; \dots \; q_n$ ортонормал устунлардан ҳосил бўлади.

7. Скаляр кўпайтманинг икки хоссаси. 1°. ***Скаляр кўпайтманинг узлуксизлиги.*** Агар $n \to \infty$ да $x_n \to x$ ва $y_n \to y$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $n \to \infty$ да $(x_n, y_n) \to (x, y)$ яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Ихтиёрий $n \in N$ номер учун

$$(x_n, y_n) - (x, y) = (x_n - x, y_n) + (x, \, y_n - y)$$

тенглик ўринли бўлади. Шунга кўра Коши–Буняковский тенгсизлигини қўллаб

$$\left|(x_n, y_n) - (x, y)\right| \le \left|(x_n - x, y_n)\right| + \left|(x, \, y_n - y)\right| \le$$
$$\le \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\|$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. $\big|\, \|y_n\| - \|y\| \,\big| \le \| \, y_n - y \, \|$ учбурчак тенгсизлигига кўра, $n \to \infty$ да $\|y_n\| \to \|y\|$ яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун $\left\{\|y_n\|\right\}_{n=1}^{\infty}$ сонли кетма–кетлик чегараланган бўлади, яъни шундай бир $M > 0$ мусбат сон топилиб, ихтиёрий $n \in N$ номер учун $\|y_n\| \le M$ тенгсизлиги ўринлидир. Шунга кўра $n \to \infty$ да

$$\left|(x_n, y_n) - (x, y)\right| \le M \cdot \|x_n - x\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0$$

яқинлашувчи бўлади. Шундай қилиб, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$ бўлади.

2°. *Параллелограм айнияти.* Ҳар қандай скаляр кўпайтма киритилган фазода геометриядан маълум бўлган параллелограм айнияти ўринли бўлади (*параллелограм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг барча томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг*):

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $x, y \in E\left(U\right)$ элементлар учун

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (x + y,\, x + y) + (x - y,\, x - y) =$$
$$= (x,\, x) + (x,\, y) + (y,\, x) + (y,\, y) + (x,\, x) - (x,\, y) - (y,\, x) + (y,\, y) =$$
$$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

тенглик ўринли бўлади.

Шуни таъкидлаш керакки, ихтиёрий нормаланган фазода параллелограм айнияти ўринли бўлмайди.

8. Евклид ва унитар фазоларнинг характеристик хоссаси. Қуйидагича савол туғилади. E ҳақиқий чизиқли нормаланган фазо бўлсин. У ҳолда E ҳақиқий чизиқли нормаланган фазо Евклид фазоси бўлишлиги учун, яъни қандайдир скаляр кўпайтма киритилиши учун норма қандай қўшимча шартларни қаноатлантириши керак бўлади. Бошқача айтганда, Евклид фазосини барча ҳақиқий чизиқли нормаланган фазолар синфида кандай характерлаш мумкин бўлади. Бундай характеристикани қуйидаги теорема беради.

2–теорема. *E ҳақиқий чизиқли нормаланган фазо Евклид фазоси бўлишлиги учун ихтиёрий $x, y \in E$ элементлар учун*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad (1.7.14)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Маълумки, $x+y$ ва $x-y$ элементлар томонлари x ва y бўлган параллелограмнинг диагоналларидир. Шунинг учун (1.7.14) тенглик параллелограм айниятини, яъни параллелограм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг барча томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг бўлишлигини ифода қилади. Шундай қилиб, бу шартнинг зарурийлиги бажарилади. Унинг етарлилигини исбот қиламиз. Бунинг учун

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \qquad (1.7.15)$$

деб оламиз ва агар (1.7.14) тенглик бажарилса, у ҳолда (1.7.15) тенглик билан аниқланган функция скаляр кўпайтманинг барча аксиомаларини қаноатлантиришини кўрсатамиз. Агар $x = y$ бўлса, у ҳолда

$$(x, x) = \frac{1}{4}\left(\|2x\|^2 - \|x-x\|^2\right) = \|x\|^2 \qquad (1.7.16)$$

тенгликка эга бўламиз. Бу эса скаляр кўпайтма E ҳақиқий чизиқли нормаланган фазонинг нормаси ёрдамида яратилишини билдиради.

Авваламбор, (1.7.15) тенгликдан бирданига

$$(x, y) = (y, x)$$

скаляр кўпайтманинг иккинчи аксиомасининг бажарилиши келиб чиқади. Бундан ташқари, (1.7.16) тенгликдан бирданига скаляр кўпайтманинг биринчи аксиомасининг бажарилиши ҳам келиб чиқади. Скаляр кўпайтманинг тўртинчи аксиомасининг бажарилишини ўрнатиш учун учта вектордан боғлиқ бўлган

$$\Phi(x, y, z) = 4\left[(x+y, z) - (x, z) - (y, z)\right]$$

функцияни қараймиз, яъни

$$\Phi(x, y, z) = \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 -$$
$$-\|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 \qquad (1.7.16)$$

функцияни қараймиз ва унинг айнан нолга тенг эканлигини кўрсатамиз. (1.7.14) тенгликдан

$$\|x+y\pm z\|^2=2\|x\pm z\|^2+2\|y\|^2-\|x\pm z-y\|^2$$

тенгликларга эга бўламиз. Бу ифодаларни мос равишда (1.7.16) ифодага қўйсак, у ҳолда

$$\Phi(x,y,z)=-\|x+z-y\|^2+\|x-z-y\|^2+$$
$$+\|x+z\|^2-\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2 \qquad (1.7.17)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (1.7.16) тенглик ва (1.7.17) тенгликларнинг ярим йиғиндисини олсак, у ҳолда

$$\Phi(x,y,z)=\frac{1}{2}\left(\|y+z+x\|^2+\|y+z-x\|^2\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\|y-z+x\|^2+\|y-z-x\|^2\right)-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2 \qquad (1.7.17)$$

тенгликка эга бўламиз. (1.7.14) тенгликдан биринчи қўшилувчи

$$\|y+z\|^2+\|x\|^2$$

ифодага тенг бўлади. Иккинчи қўшилувчи эса

$$-\|y-z\|^2-\|x\|^2$$

ифодага тенг бўлади. Шундай қилиб

$$\Phi(x,y,z)\equiv 0$$

бўлади.

Энди скаляр кўпайтманинг учинчи бир жинслилик аксиомасининг бажарилишини ўрнатамиз. Бунинг учун ихтиёрий танланган x ва y элементларни оламиз ва

$$\varphi(c)=(cx,y)-c(x,y)$$

функцияни қараймиз. У ҳолда (1.7.15) ифодага кўра

$$\varphi(0)=\frac{1}{4}\left(\|y\|^2-\|y\|^2\right)=0$$

ва $\varphi(-1)=0$ бўлади, чунки $(-x,y)=-(y,x)$ тенглик ўринлидир. Шунинг учун ихтиёрий n бутун сони учун

$$(nx,y)=(sign\,n\cdot(x+...+x),y)=sign\,n\cdot\left[(x,y)+...+(x,y)\right]=$$
$$=|n|\,sign\,n\cdot(x,y)=n\cdot(x,y),$$

яъни $\varphi(n)=0$ бўлади. Барча p,q ва $q\neq 0$ бутун сонлар учун

$$(\frac{p}{q}x,y)=p(\frac{1}{q}x,y)=\frac{p}{q}q(\frac{1}{q}x,y)=\frac{p}{q}(x,y)$$

тенглик ўринлидир, яъни $\varphi(c)=0$ тенглик барча c рационал сонлар учун ўринли бўлади. $\varphi(c)$ функция узлуксиз функция бўлганлиги учун $\varphi(c)\equiv 0$ бўлади. Шундай қилиб, биз (x,y) функция скаляр кўпайтманинг барча аксиомаларини қаноатлантиришини кўрсатдик.

Энди мисоллар келтирамиз.

1–мисол. n–ўлчамли R_p^n фазода нормани

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

формула орқали аниқлаймиз. Барча $p\geq 1$ учун норманинг барча аксиомалари бажарилади, лекин R_p^n фазо $p=2$ учунгина Евклид фазоси бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, R_p^n фазодан иккита

$$x=(1,1,0,0,...,0),\quad y=(1,-1,0,0,...,0)$$

векторларни олсак, у ҳолда

$$x+y=(2,0,0,0,...,0),\ \ x-y=(0,2,0,0,...,0)$$

тенгликларга эга бўламиз. Бундан эса, $\|x\|_p=\|y\|_p=2^{\frac{1}{p}}$, $\|x+y\|_p=\|x-y\|_p=2$ бўлиб параллелограм айнияти

$$2^2+2^2=2\left(2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{2}{p}}\right)\quad \text{ёки}\quad 2=2^{\frac{2}{p}}$$

кўринишида бўлгани учун $p\neq 2$ бўлганда ўринли бўлмайди.

2–мисол. $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ оралиқда узлуксиз бўлган функцияларнинг $C[0,\dfrac{\pi}{2}]$ фазосидан иккита $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$ функцияларни олсак, у ҳолда $\|x(t)\|=\|y(t)\|=1$ ва

$$\|x+y\|=\max_{0\leq t\leq\frac{\pi}{2}}|\cos t+\sin t|=\sqrt{2}\ ,\quad \|x-y\|=\max_{0\leq t\leq\frac{\pi}{2}}|\cos t-\sin t|=1$$

тенгликларга эга бўламиз. Бундан эса,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\neq 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $C[0, \frac{\pi}{2}]$ фазонинг нормаси ёрдамида скаляр кўпайтмани киритиш мумкин эмас. Худди шунингдек, $C[a, b]$ фазода ихтиёрий $[a, b]$ оралиқ учун бу фазонинг нормаси ёрдамида скаляр кўпайтмани киритиш мумкин эмас.

Худди 2–теорема сингари комплекс чизиқли нормаланган фазо унитар фазо бўлишлигини характерлайдиган қуйидаги теорема ҳам ўринлидир.

3–теорема. *U комплекс чизиқли нормаланган фазо унитар фазо бўлишлиги учун ихтиёрий $x, y \in U$ элементлар учун*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad (1.7.18)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Бу теоремани исботлаш учун

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) - \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$$

тенглик билан аниқланган функция скаляр кўпайтманинг барча аксиомаларини қаноатлантиришини кўрсатиш етарлидир.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

9.1. Скаляр кўпайтма киритилган фазода иккита x ва y векторлар бир тўғри чизиқда ётиши, яъни чизиқли боғлиқ бўлишлиги учун

$$(x, x) \cdot (y, y) = |(x, y)|^2$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг.

9.2. Скаляр кўпайтма киритилган фазода иккита x ва y векторлар бир нурда ётиши, яъни $x = 0$ ёки қандайдир $\lambda \geq 0$ учун $y = \lambda x$ тенглик ўринли бўлишлиги учун

$$\|x\| + \|y\| = \|x+y\|$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг.

9.3. Евклид фазосида иккита x ва y векторлар ортогонал бўлишлиги учун

$$\|x\|^2+\|y\|^2=\|x+y\|^2$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг.

9.4. Унитар фазода иккита x ва y векторлар ортогонал бўлишлиги учун ихтиёрий λ ва μ комплекс сонлар учун

$$\|\lambda x\|^2+\|\mu y\|^2=\|\lambda x+\mu y\|^2$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг.

9.5. Скаляр кўпайтма киритилган фазода ихтиёрий x, y ва z элементлар учун *Аполлоний айнияти* деб аталувчи

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2$$

айният ўринли эканлигини исбот қилинг.

9.6. Скаляр кўпайтма киритилган фазода ихтиёрий x, y, z, t элементлар учун *Птолемей тенгсизлиги* деб аталувчи

$$\|x-z\|\cdot\|y-t\|\le\|x-y\|\cdot\|z-t\|+\|y-z\|\cdot\|x-t\|$$

тенгсизлик ўринли эканлигини исбот қилинг. Бу ерда қачон тенглик бажарилишини аниқланг.

9.7. $C[a,b]$ фазода бу фазо нормаси билан скаляр кўпайтма киритиш мумкин эмаслигини исбот қилинг.

9.8. l_p, бунда $p\neq 2$ бўлган фазода бу фазо нормаси билан скаляр кўпайтма киритиш мумкин эмаслигини исбот қилинг.

9.9. $(-\infty,+\infty)$ сон ўқида узлуксиз бўлган $x(t)$ функция учун $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2e^{-t^2}dt<\infty$ (бу ерда интеграл хосмас интеграл маъносида) интеграл яқинлашувчи бўлган функцияларнинг чизиқли фазосида

$$(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\overline{y(t)}\,e^{-t^2}dt<\infty$$

скаляр кўпайтма киритиш мумкин эканлигини кўрсатинг. Бу фазода $1, t, t^2, \ldots$ элементлар системасига Шмидтнинг ортогоналлаштириш процессини қўллаб натижада ортонормал бўлган Чебышев–Эрмит кўпҳадлари системасини ҳосил қиламиз. Бу системанинг дастлабки учта кўпҳадини ҳисобланг.

9.10. $[0,+\infty)$ ярим ўқда узлуксиз бўлган $x(t)$ функция учун $\int\limits_0^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t}dt < \infty$ (бу ерда интеграл хосмас интеграл маъносида) интеграл яқинлашувчи бўлган функцияларнинг чизиқли фазосида

$$(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}e^{-t}dt < \infty$$

скаляр кўпайтма киритиш мумкин эканлигини кўрсатинг. Бу фазода $1, t, t^2, \ldots$ элементлар системасига Шмидтнинг ортогоналлаштириш процессини қўллаб натижада ортонормал бўлган Чебышев–Лагерр кўпҳадлари системасини ҳосил қиламиз. Бу системанинг дастлабки учта кўпҳадини ҳисобланг.

9.11. Евклид (унитар) фазо таърифида 1) аксиомани $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0$ эканлигидан $x = 0$ келиб чиқади аксиомаси билан алмаштириш мумкин эканлигини исботланг.

9.12. Агар U комплекс чизиқли нормаланган фазодаги ихтиёрий $x, y \in U$ элементлар учун

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

параллелограмм айнияти ўринли бўлса, у ҳолда

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) - \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$$

тенглик билан аниқланган функция унитар фазодаги скаляр кўпайтманинг барча аксиомаларини қаноатлантиришини кўрсатинг.

9.13. E чизиқли нормаланган фазодаги $\|x\| = \|y\| = 1$ бўлган ихтиёрий $x, y \in E$ элементлар учун $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4$ ромб тенглиги ўринли бўлса, у ҳолда E чизиқли нормаланган фазода скаляр кўпайтма киритиш мумкин эканлигини кўрсатинг.

9.14. E скаляр кўпайтма киритилган фазодаги L чизиқли кўпхиллик, x нуқта эса шу L чизиқли кўпхилликдан d масофа узоқлигида, яъни $d = \rho(x,L) = \inf\limits_{u \in L} \|x-u\|$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий иккита $y_1, y_2 \in L$ векторлар учун

$$\|y_1 - y_2\| \leq \sqrt{\|x-y_1\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x-y_2\|^2 - d^2}$$

Леви тенгсизлиги ўринли бўлишлигини кўрсатинг.

8-§. Абстракт Гильберт фазолари

1. Абстракт Гильберт фазосининг таърифи. H қандайдир $x,\ y,\ z, ...$ элементнинг тўплами бўлсин. Бу тўплам учун қуйидаги талабларни қўямиз.

1. H комплекс чизиқли фазо.

2. H комплекс чизиқли фазонинг ихтиёрий x ва y элементлари жуфтига (x,y) орқали белгиланувчи ва *скаляр кўпайтма* деб аталувчи комплекс сон мос қўйилган бўлиб, бу мослик

а) $(x,x)\geq 0$, бундан ташқари $(x,x)=0$ тенглик фақат ва фақат $x=0$ бўлгандагина ўринли;

б) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ (бу ерда усти чизиқ комплекс соннинг қўшмасини билдиради);

в) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$;

г) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

скаляр кўпайтма аксиомаларини қаноатлантирсин. $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ сон x элементнинг нормаси деб аталади ва чизиқли нормаланган фазонинг барча норма аксиомалари қаноатлантиради.

3. H фазо $\rho(x,y)=\|x-y\|$ метрика маъносида тўла бўлсин.

4. H фазода ихтиёрий $n\in N$ натурал сони учун n та чизиқли эркли элементлар мавжуд бўлсин, яъни H фазо чексиз ўлчамли бўлсин. У ҳолда H фазо абстракт Гильберт фазоси деб айтилади. Кейинчалик биз уни соддалик учун Гильберт фазоси деб атаймиз. Худди шунга ўхшаш ҳақиқий Гильберт фазоси ҳам аниқланади.

Гильберт фазосига доир энг муҳим бўлган мисолларни келтирамиз.

1–мисол. l_2 комплекс чизиқли фазодаги ихтиёрий иккита $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ ва $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ элементлар учун

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$$

деб оласак, бу фазо Гильберт фазосидан иборат бўлади. Ихтиёрий $x,y\in l_2$ элементлар учун бу қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги қаторлар учун келтирилган Коши–Буняковский тенгсизлигидан келиб чиқади.

2–мисол. $L_{2,\rho}[a,b]$ комплекс чизиқли фазо. Бу фазо $[a,b]$ оралиқда аниқланган комплекс қийматли $x(t)$ ўлчовли функцияларнинг шундай тўпламики, бунда

$$\int_a^b |x(t)|^2 \rho(t)dt < +\infty$$

бўлсин, бунда $\rho(t)$ ҳақиқий қийматли ва $[a,b]$ оралиқнинг деярли ҳамма жойида $\rho(t) \geq 0$ бўлиб тўлиқ ўлчовли тўпламда $\rho(t) > 0$ бўлсин. Агар $x(t),\ y(t) \in L_{2,\rho}[a,b]$ функциялар учун

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{x(t)}\rho(t)dt$$

деб олсак, у ҳолда бу фазо Гильберт фазосидан иборат бўлади. Ихтиёрий $x(t),\ y(t) \in L_{2,\rho}[a,b]$ элементлар учун бу интегралнинг яқинлашувчи бўлишлиги интеграллар учун келтирилган Коши–Буняковский тенгсизлигидан келиб чиқади. Хусусан, $\rho(t) \equiv 1$ учун

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{x(t)}dt$$

скаляр кўпайтма киритилган $L_2[a,b]$ комплекс Гильберт фазони ҳосил қиламиз.

Худди шунга ўхшаш ҳақиқий Гильберт фазосини ҳосил қиламиз.

2. Нуқтадан ёпиқ қаварик тўпламгача бўлган масофа. Аввал келтирилган энг яхши яқинлаштириш ҳақидаги масалага қайтайлик. Гильберт фазосининг тўлалиги ва ундаги элементлар учун ортогоналлик тушунчасининг борлиги бу масалани тўлиқ ечиш имконини беради. Аввал биз бу пунктда умумий бўлган ҳолни қараймиз. Кейинги пунктда эса муҳим бўлган хусусий ҳолни қараймиз. H Гильберт фазосида қандайдир M тўплам ва $x \in H$ нуқта берилган бўлсин. $x \in H$ нуқтадан M тўпламгача бўлган масофани

$$\rho(x,M) = \inf_{u \in M} \|x-u\|$$

формула бўйича аниқлаймиз.

1–лемма. *Агар* $x \in M$ *бўлса, у ҳолда* $\rho(x,M)=0$ *бўлади. Агар* $x \notin M$ *ва* M *ёпиқ бўлса, у ҳолда* $\rho(x,M)>0$ *бўлади.*

Исбот. Агар $x \in M$ бўлса, у ҳолда $u = x$ деб олсак $\|x-u\|=0$ бўлади. Бундан эса $\rho(x,M)=0$ эканлиги келиб чиқади. Энди M ёпиқ ва $x \notin M$ бўлсин. $\rho(x,M)=0$ бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда аниқ қуйи чегаранинг таърифига кўра ихтиёрий $n \in N$ номер учун шундай бир $u_n \in M$ элемент мавжуд бўлиб $\|x-u_n\|<\frac{1}{n}$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Бундан $n \to \infty$ да $u_n \to x$ эканлиги келиб чиқади. M тўпламнинг ёпиқ эканлигидан $x \in M$ ҳосил бўлади. Бу эса $x \notin M$ шартга зиддир. Ҳосил қилинган қарама–қаршилик фаразимизнинг нотўғри эканлигини кўрсатади. Шунинг учун $\rho(x,M)=0$ бўлишлиги нотўғридир. Демак, $\rho(x,M)>0$ бўлади. Лемма исбот бўлди.

1–теорема. *H Гильберт фазосида M ёпиқ қавариқ тўплам ва* $x \notin M$ *нуқта берилган бўлсин. У ҳолда шундай бир ягона* $y \in M$ *элемент мавжуд бўлиб*

$$\rho(x,M)=\|x-y\|$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. 1–леммага кўра $d=\rho(x,M)>0$ бўлади. Аниқ қуйи чегаранинг таърифига кўра ихтиёрий $n \in N$ номер учун шундай бир $u_n \in M$ элемент мавжуд бўлиб

$$d<\|x-u_n\|<d+\frac{1}{n} \tag{1.8.1}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Бу $\{u_n\}$ кетма–кетликнинг фундаментал кетма–кетлик эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун томонлари $x-u_n$ ва $x-u_m$ бўлган ҳолда параллелограм тенглигидан фойдаланамиз. У ҳолда параллелограмнинг диагоналлари $2x-u_n-u_m$ ва u_m-u_n бўлади. Параллелограм тенглиги

$$2\|x-u_n\|^2+2\|x-u_m\|^2=\|u_m-u_n\|^2+\|2x-u_n-u_m\|^2$$

шаклида бўлади. M тўпламнинг қаварик эканлигидан $\frac{u_n+u_m}{2} \in M$ эканлигини ҳосил қиламиз. Шунинг учун

$$\|2x-u_n-u_m\|^2=4\left\|x-\frac{u_n+u_m}{2}\right\|^2\geq 4d^2$$

тенгсизлик ўринлидир. (1.8.1) тенгсизликка кўра,

$$\|x-u_n\|^2\leq\left(d+\frac{1}{n}\right)^2,\quad \|x-u_m\|^2\leq\left(d+\frac{1}{m}\right)^2$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Шунга кўра, агар $n, m\geq N$ бўлса, у ҳолда

$$\|u_m-u_n\|^2=2\|x-u_n\|^2+2\|x-u_m\|^2-4\left\|x-\frac{u_n+u_m}{2}\right\|^2<$$

$$<2\left(d+\frac{1}{n}\right)^2+2\left(d+\frac{1}{m}\right)^2-4d^2=$$

$$=\frac{4d}{n}+\frac{4d}{m}+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{m^2}\leq\frac{8d+4}{N}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бундан эса, $\{u_n\}$ кетма–кетликнинг фундаментал кетма–кетлик эканлиги келиб чиқади. H фазонинг тўлалигига кўра $\{u_n\}$ кетма–кетлик қандайдир $y\in M$ элементга яқинлашади, чунки M ёпиқдир. (1.8.1) тенгсизликда $n\to\infty$ да лимитга ўтсак, у ҳолда $\|x-y\|=d$ тенгликни ҳосил қиламиз. $\|x-u\|$ ифода аниқ қуйи чегарага эришадиган $y\in M$ элементнинг ягона эканлигини исботлаш керак бўлади. Қандайдир $y^*\in M$ элемент учун ҳам $\|x-y^*\|=d$ тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда параллелограм тенглигидан

$$4d^2=2\|x-y\|^2+2\|x-y^*\|^2=$$

$$=\|y-y^*\|^2+4\left\|x-\frac{y+y^*}{2}\right\|^2\geq\|y-y^*\|^2+4d^2$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Шунга кўра, $\|y-y^*\|=0$ ва бундан $y=y^*$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

3. Нуқтадан қисм фазогача бўлган масофа. Агар уч ўлчамли Евклид фазосидаги O координата боши орқали ўтувчи L текислик ва шу текисликда ётмайдиган P нуқта берилган бўлсин. У ҳолда шундай бир $P' \in L$ нуқта мавжуд бўлиб $|PP'|$ масофа P нуқтадан берилган L текисликкача бўлган масофани ифода қилади. Бу факт ихтиёрий H Гильберт фазосида ҳам ўринли бўлади. L тўплам H Гильберт фазосидаги қисм фазо бўлсин, яъни ёпиқ чизиқли кўпхиллик бўлсин. $x \in H$ нуқта учун $x \notin L$ бўлсин.

$x \in H$ нуқтадан L қисм фазогача бўлган масофани

$$\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$$

формула бўйича аниқлаймиз. Ҳар қандай қисм фазо Гильберт фазосида (Банах фазосида) ёпиқ қаварик тўплам бўлади. Шунинг учун қуйидаги натижага эга бўламиз.

1–натижа. *Шундай бир $y \in L$ ягона элемент мавжуд бўлиб $x \in H$ нуқтадан L қисм фазогача бўлган масофа учун*

$$\rho(x, L) = \|x - y\|$$

тенглик ўринли бўлади.

Бундан яна бир муҳим хулоса келиб чиқади.

2–теорема. $\rho(x, L) = \|x - y\|$ *бўлсин. У ҳолда* $x - y \perp L$ *бўлади.*

Исбот. Ихтиёрий $h \in L$ учун $(x - y,\ h) = 0$ тенглик ўринли эканлигини исбот қиламиз. λ ихтиёрий комплекс (агар H ҳақиқий фазо бўлса, у ҳолда ҳақиқий) параметр бўлсин. У ҳолда

$$\|x - y + \lambda h\| \geq \|x - y\|$$

тенгсизликка эга бўламиз. Демак,

$$(x - y + \lambda h,\ x - y + \lambda h) \geq (x - y,\ x - y)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу тенгсизликни соддалаштириб

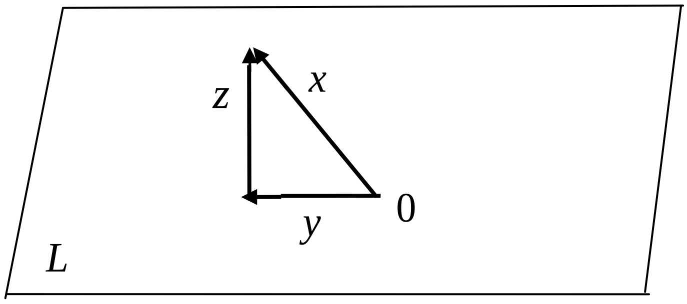
$$\lambda (h,\ x - y) + \overline{\lambda}\,(x - y,\ h) + \lambda\,\overline{\lambda}\,\|h\|^2 \geq 0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\lambda = -\dfrac{(x - y,\ h)}{\|h\|^2}$ деб олсак, у ҳолда $-\dfrac{|(x - y,\ h)|^2}{\|h\|^2} \geq 0$ тенгсизликка эга бўламиз. Бундан $(x - y,\ h) = 0$ тенглик келиб чиқади.

2–натижа. *L тўплам H Гильберт фазосидаги қисм фазо бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x \in H$ нуқта учун шундай бир $y \in L$ нуқта ва $z \perp L$ бўлган нуқталар мавжуд бўлиб*

$$x = y + z \qquad (1.8.2)$$

ягона ёйилма ўринли бўлади.



Бу натижани исботлаш учун 1–теоремага кўра ихтиёрий $x \in H$ нуқта учун $y \in L$ нуқтани танлаб оламиз. У ҳолда $x - y \perp L$ бўлади. Агар $z = x - y$ деб белгиласак, у ҳолда $x = y + z$ тенглик келиб чиқади. (1.8.2) ёйилмадаги $y \in L$ элементга $x \in H$ элементнинг L қисм фазодаги ортогонал проекцияси деб айтилади. Бу ортогонал ёйилма учун $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ Пифагор теоремаси ўринли бўлади.

4. Ортогонал тўлдирувчи. Таъриф. L тўплам H Гильберт фазосидаги чизиқли кўпхиллик бўлсин. H Гильберт фазосидан олинган L чизиқли кўпхилликка ортогонал бўлган барча элементлар тўпламига L чизиқли кўпхилликка *ортогонал тўлдирувчи* деб айтилади ва $L^{\perp}$ каби белгиланади.

3–теорема. *$L^{\perp}$ ортогонал тўлдирувчи H Гильберт фазосидаги қисм фазодир.*

Исбот. $L^{\perp}$ ортогонал тўлдирувчи чизиқли эканлигини исбот қиламиз. $z_1, z_2 \in L^{\perp}$ бўлсин, яъни ихтиёрий $y \in L$ учун $(z_1,\ y) = 0$ ва $(z_2,\ y) = 0$ тенгликлар ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий λ_1 ва λ_2 ўзгармаслар учун ва ихтиёрий $y \in L$ учун

$$(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2,\ y) = \lambda_1 (z_1,\ y) + \lambda_2 (z_2,\ y) = 0$$

тенглик ўринли бўлади, яъни $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in L^{\perp}$ бўлади. Энди $L^{\perp}$ ортогонал тўлдирувчининг ёпиқ эканлигини исбот қиламиз. $\{z_n\} \subset L^{\perp}$ ва $n \to \infty$ да $z_n \to z$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $y \in L$

учун $(z_n,\ y)=0$ тенглик ўринли бўлсин. Бу тенгликда $n\to\infty$ да лимитга ўтсак, у ҳолда ихтиёрий $y\in L$ учун $(z,\ y)=0$ тенглик ҳосил бўлади, яъни $z\in L^{\perp}$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. Агар, хусусан, L тўплам H Гильберт фазосидаги қисм фазо бўлса, у ҳолда $L^{\perp}$ ортогонал тўлдирувчи ҳам H Гильберт фазосидаги қисм фазодир.

4–теорема. *L тўплам H Гильберт фазосидаги чизиқли кўпхиллик бўлсин. L тўплам H Гильберт фазосида зич бўлишлиги учун $L^{\perp}=\{0\}$ бўлишлиги зарур ва етарлидир.*

Исбот. *Етарлилиги.* $L^{\perp}=\{0\}$ бўлсин, яъни ихтиёрий $y\in L$ учун $(z,\ y)=0$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $z=0$ бўлади. Фараз қилайлик, L тўплам H Гильберт фазосида зич бўлмасин. Бу эса $x_0\notin\overline{L}$ элемент мавжуд эканлигини билдиради. $\overline{L}$ тўплам H Гильберт фазосидаги қисм фазодир ва $x_0\notin\overline{L}$ бўлади. У ҳолда $x_0=y_0+z_0$ ягона ортогонал ёйилма ўринли бўлади, бунда $y_0\in\overline{L}$ ва $z_0\in\left(\overline{L}\right)^{\perp}=L^{\perp}$ бўлади. Шу билан бирга $z_0\neq 0$ бўлади. Акс ҳолда $x_0\in\overline{L}$ ва ихтиёрий $y\in\overline{L}$ учун ва хусусан ихтиёрий $y\in L$ учун $(z_0,\ y)=0$ тенглик ўринли бўлади. Шартга кўра бундай $z_0=0$ бўлади. Биз қарама–қаршиликка келдик. Ҳосил қилинган қарама–қаршилик L тўплам H Гильберт фазосида зич бўлмасин деган фикрнинг нотўғри эканлигини кўрсатади.

Зарурлиги. L тўплам H Гильберт фазосида зич бўлсин, яъни $\overline{L}=H$ бўлсин. Фараз қилайлик, $z_0\in H$, $z_0\perp L$ бўлган элемент мавжуд бўлсин. $\{y_n\}\subset L$ ва $n\to\infty$ да $y_n\to y\in H$ бўлсин. У ҳолда скаляр кўпайтманинг узлуксизлигига кўра $n\to\infty$ да $0=(y_n,z_0)\to(y,z_0)$ бўлади. Демак, L тўпламнинг H Гильберт фазосида зич эканлигидан ихтиёрий $y\in H$ учун $(y,z_0)=0$ келиб чиқади. Хусусан, $y=z_0$ деб олсак, у ҳолда $(z_0,z_0)=0$ ва бундан $z_0=0$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Гильберт фазосидаги ёпиқ ва тўла бўлган ортонормал системалар ва бу системалар бўйича Фурье қаторларига ёйиш, ҳамда уларнинг яқинлашиши билан боғлиқ бўлган муҳим масалаларга биз кейинчалик алоҳида тўхталамиз.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

10.1. $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган функцияларнинг чизиқли фазосида

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

тенглик билан скаляр кўпайтмани киритиш мумкинлигини кўрсатинг. Бу скаляр кўпайтма киритилган фазони $\tilde{L}_2[a,b]$ орқали белгилаймиз. Бу фазо Гильберт фазоси бўладими?.

10.2. $[a,b]$ оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи бўлган функцияларнинг чизиқли фазосида

$$(x,y)=\int_a^b \left[x(t)\overline{y(t)}+x'(t)\overline{y'(t)}\right]dt$$

тенглик билан скаляр кўпайтмани киритиш мумкинлигини кўрсатинг. Бу скаляр кўпайтма киритилган фазони $\tilde{H}^1[a,b]$ орқали белгилаймиз. Бу фазо Гильберт фазоси бўладими?.

10.3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2<\infty$ қатор яқинлашувчи бўлган $x=(x_1,x_2,...,x_k,...)$ $(x_k\in R)$ кетма–кетликлардан тузилган чизиқли фазода скаляр кўпайтмани

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k y_k$$

тенглик билан киритамиз, бунда $\lambda_k\in R,\ 0<\lambda_k<1$ бўлсин. Бу ҳосил қилинган Евклид фазоси Гильберт фазоси бўладими?.

10.4. H сепарабель Гильберт фазоси бўлсин. У ҳолда H фазодаги ҳар қандай ортонормал система саноқлидан кўп эмаслигини исботланг.

10.5. H Гильберт фазосидаги $x_1,x_2,...,x_n$ ортогонал система ва $x=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ бўлсин. У ҳолда $\|x\|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$ тенглик ўринли эканлигини исбот қилинг.

10.6. H Гильберт фазосидаги $x_1,x_2,...,x_n,...$ ортогонал система бўлсин. У ҳолда H Гильберт фазосидаги $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ қатор яқинлашувчи бўлишлиги учун $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ сонли қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг.

10.7. H Гильберт фазосидаги $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормал система ва λ_n ҳақиқий ёки комплекс сонлар кетма–кетлиги бўлсин. У ҳолда H Гильберт фазосидаги $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ қатор яқинлашувчи бўлишлиги учун $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$ сонли қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг.

10.8. H Гильберт фазосидаги $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ва $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ системалар учун

$$(x_i, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

бўлсин. У ҳолда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ва $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ системалар биортогонал системалар деб айтилади. Бу биортогонал системаларнинг ҳар бири чизиқли эркли эканлигини исботланг.

10.9. H Гильберт фазосидаги $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементлар системаси чизиқли эркли бўлишлиги учун ҳар бир $n \in N$ натурал сон учун бу системанинг

$$\Gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} (x_1,x_1)\ (x_1,x_2) ...\ (x_1,x_n) \\ (x_2,x_1)\ (x_2,x_2) ...\ (x_2,x_n) \\ .... \\ (x_n,x_1)\ (x_n,x_2) ...\ (x_n,x_n) \end{vmatrix}$$

Грама детерминанти нолдан фарқли бўлишлиги зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг.

10.10. H Гильберт фазоси қатъий нормаланган фазо эканлигини исбот қилинг.

10.11. H Гильберт фазосидаги $x_1, x_2 \in H$ элементларнинг скаляр кўпайтмаси учун $\operatorname{Re}(x_1, x_2) = \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2$ тенглик бажарилсин. У ҳолда $x_1 = x_2$ эканлигини исбот қилинг.

10.12. H Гильберт фазосидаги $\overline{S}_1(0)$ бирлик шарга тегишли $x_n, y_n \in \overline{S}_1(0)$ элементлар учун $n \to \infty$ да $(x_n, y_n) \to 1$ бўлсин. У ҳолда $n \to \infty$ да $\|x_n - y_n\| \to 0$ эканлигини исбот қилинг.

10.13. H Гильберт фазосидаги x элемент $L \subset H$ қисм фазога ортогонал бўлишлиги учун ихтиёрий $y \in L$ элемент учун $\|x\| \le \|x - y\|$ тенгсизлигининг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг.

10.14. H Гильберт фазосидаги ихтиёрий M тўплам учун унинг $M^{\perp}$ ортогонал тўлдирувчиси қисм фазо эканлигини исбот қилинг.

10.15. H Гильберт фазосидаги ихтиёрий M тўплам учун $M \subset \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ жойлашиш муносабати ўринли эканлигини исбот қилинг. Бу ерда қатъий жойлашиши ҳам мумкинми?.

10.16. H Гильберт фазосидаги M тўплам учун $M = \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ тенглик бажарилиши учун M тўплам H Гильберт фазосининг қисм фазоси бўлишлиги зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг.

10.17. H Гильберт фазосидаги M, N тўпламлар учун $M \subset N$ жойлашиш муносабати ўринли бўлсин. У ҳолда $M^{\perp} \supset N^{\perp}$ жойлашиш муносабати ўринли эканлигини исбот қилинг.

10.18. l_2 фазода

$$M = \left\{ x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots):\ \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$$

тўпламни қараймиз. Бу M чизиқли кўпхиллик шу l_2 фазонинг ҳамма жойида зич эканлигини исбот қилинг.

10.19. l_2 фазода

$$M = \left\{ x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots):\ \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$$

тўпламни қараймиз. Бу M чизиқли кўпхилликдаги элементларнинг шундай чизиқли эркли системасини топингки уни ортогоналлаштирганда эса шу l_2 фазодаги базисни ифода қилсин.

10.20. Ҳар бир тайинланган n натурал сони учун

$$M_n = \left\{ x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...):\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}$$

тўплам l_2 фазонинг қисм фазоси эканлигини исбот қилинг. $l_2 = M_n \oplus N_n$ тенглик ўринли бўладиган N_n қисм фазосини аниқланг.

10.21. H Гильберт фазосидаги M, N шундай тўпламларки, бунда ихтиёрий $x \in H$ элемент ягона равишда $x = u + v$, $u \in M$, $v \in N$ шаклида тасвирлансин. Бундан H Гильберт фазосида M ва N қисм фазо эканлиги келиб чиқадими?.

10.22. $M + M^{\perp}$ тўплам бутун l_2 фазо билан устма–уст тушмайдиган l_2 фазодаги шундай бир M тўпламга мисол қуринг.

10.23. H Гильберт фазосидаги M, N қисм фазолар учун $H = M \oplus N$ тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда $N = M^{\perp}$ тенглик ўринли бўладими?.

10.24. l_2 фазода $l_2 = M \oplus N$ тенглик ўринли бўладиган иккита чексиз ўлчамли M, N қисм фазоларни қуринг.

10.25. $\tilde{L}_2[-1,1]$ фазодаги $0 \le t \le 1$ учун нолга тенг бўлган $x(t)$ функцияларнинг тўпламини M орқали белгилаймиз, яъни

$$M = \left\{ x(t):\ x(t) \in \tilde{L}_2[-1,1],\ 0 \le t \le 1,\ x(t) = 0 \right\}.$$

У ҳолда

а) M тўплам $\tilde{L}_2[-1,1]$ фазодаги қисм фазо эканлигини исбот қилинг;

б) $M^{\perp}$ ортогонал тўлдирувчини аниқланг;

в) $\tilde{L}_2[-1,1] = M \oplus M^{\perp}$ тенглик ўринли бўладими?.

10.26. l_2 фазода $x_k = \left(1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{3k}}, ..., \frac{1}{2^{nk}}, ... \right)$, $k \in N$ кетма–кетликни қараймиз. Бу кетма–кетликнинг чизиқли қопламаси l_2 фазонинг ҳамма жойида зич эканлигини исбот қилинг.

9-§. Ҳақиқий кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциаланувчанлиги

1. Ҳақиқий кўп ўзгарувчили функциянинг нуқтадаги лимити. E метрик фазодаги ихтиёрий $O(x^0)$ тўплам учун x^0 нуқта ички нуқта бўлса, у ҳолда бу тўпламга шу нуқтанинг атрофи деб айтилади. Бу $O(x^0)$ атрофдан x^0 нуқта чиқариб ташланган тўпламга эса унинг ўйилган атрофи деб айтилади ва $\overset{0}{O}(x^0)$ каби белгиланади, яъни $\overset{0}{O}(x^0) = O(x^0) \setminus \{x^0\}$ бўлади.

E метрик фазодан олинган қандайдир M тўплам учун $f : M \to R$ акслантиришни қараймиз. Агар $E = R^n$ бўлса, у ҳолда $f : M \to R$ акслантириш ҳақиқий кўп ўзгарувчили функция деб айтилади ва

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad x \in M$$

каби белгиланади.

Масалан, $f(x) = f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ функция R^2 фазодаги маркази $(0, 0)$ нуқтада бўлган ёпиқ бирлик доирада аниқланган, $f(x) = f(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$ функция R^2 фазодаги $(0, 0)$ нуқтанинг ихтиёрий ўйилган атрофида аниқланган бўлади.

1–таъриф. $f(x)$ функция E метрик фазодаги x^0 нуқтанинг $\overset{0}{O}(x^0)$ ўйилган атрофида аниқланган бўлсин. Агар шундай бир A ҳақиқий сон мавжуд бўлиб, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ мусбат сон топилсаки, бунда ихтиёрий $x \in \overset{0}{O}(x^0)$ бўлган ва $\rho(x, x^0) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар учун $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда A сонга $x \to x^0$ *интилгандаги* $f(x)$ *функциянинг лимити* деб айтилади.

2–таъриф. $f(x)$ функция E метрик фазодаги x^0 нуқтанинг $\overset{0}{O}(x^0)$ ўйилган атрофида аниқланган бўлсин. Агар ихтиёрий $x_k \in \overset{0}{O}(x^0)$ ва $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^0$ бўлган ихтиёрий кетма–кетлик учун

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = A$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда A сонга $x \to x^0$ *интилгандаги* $f(x)$ *функциянинг лимити* деб айтилади.

Бу иккита таърифнинг эквивалент эканлиги бир ўзгарувчили функциялар учун келтириладиган исботга ўхшаш бажарилади.

Агар A сон $x \to x^0$ интилгандаги $f(x)$ функциянинг лимити бўлса, у ҳолда $A = \lim\limits_{x\to x^0} f(x)$ каби ёзилади.

$f(x,y)$ икки ўзгарувчили функция $\overset{0}{O}\big((a,b)\big)$ атрофда аниқланган бўлсин. Агар A сон $(x,y)\to(a,b)$ интилгандаги $f(x,y)$ функциянинг лимити бўлса, у ҳолда $A = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ каби ёзилади ва A сон икки каррали лимит деб айтилади.

Худди шунга ўхшаш n ўзгарувчили $A = \lim\limits_{x\to x^0} f(x)$ лимит учун

$$A = \lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \dots\dots\dots\\ x_n\to x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

белгилашдан фойдаланамиз.

1–лемма. *$f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x^0 нуқтанинг $\overset{0}{O}(x^0)$ ўйилган атрофида аниқланган ва барча $x \in \overset{0}{O}(x^0)$ учун $|f(x)| \le \varphi(x)$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Агар $\lim\limits_{x\to x^0}\varphi(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = 0$ бўлади.*

Исбот. $\lim\limits_{x\to x^0}\varphi(x) = 0$ бўлганлиги учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сонга мос шундай бир $\overset{0}{S}_\delta(x^0)$ ўйилган шар топиладики, бунда ихтиёрий $x \in \overset{0}{S}_\delta(x^0)$ нуқталар учун $|\varphi(x)| < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунга кўра ихтиёрий $x \in \overset{0}{S}_\delta(x^0)$ нуқталар учун $|f(x)| < \varepsilon$ тенгсизлиги ҳам ўринли бўлади, яъни $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = 0$ бўлади.

1–мисол. Агар $a>0$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^a=0$ эканлигини исбот қиламиз.

Ихтиёрий $\varepsilon>0$ бўлсин. $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{2a}}$ ва $(x,y)\in S_\delta(0,0)$ деб оламиз. У ҳолда $\left(x^2+y^2\right)^a<\delta^{2a}=\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади, яъни $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^a=0$ бўлади.

2–мисол. Агар $\alpha+\beta-2\gamma>0$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{\left(x^2+y^2\right)^\gamma}=0$ эканлигини кўрсатамиз.

Маълумки, $|x|\le\sqrt{x^2+y^2}$, $|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$ тенгсизликлар ўринли бўлгани учун $x^2+y^2>0$ учун

$$0\le f(x,y)=\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{\left(x^2+y^2\right)^\gamma}\le\frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\beta}{2}}}{\left(x^2+y^2\right)^\gamma}=$$

$$=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-2\gamma)}=\varphi(x,y)$$

тенгсизликка эга бўламиз. 1–мисолга кўра $\alpha+\beta-2\gamma>0$ бўлгани учун $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varphi(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^{\alpha+\beta-2\gamma}=0$ бўлади. 1–леммани қўллаб $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$ эканлигини ҳосил қиламиз.

3–мисол. $(x,y)\to(0,0)$ интилганда $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ функция лимитга эга эмаслигини кўрсатамиз.

Агар $(x_n,y_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ кетма–кетликни қарасак, у ҳолда $f(x_n,y_n)=1$ бўлади ва шунга кўра $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=1$ бўлади. Агар $(x_n',y_n')=(\frac{1}{n},-\frac{1}{n})$ кетма–кетликни қарасак, у ҳолда

$f(x_n', y_n') = -1$ бўлади ва шунга кўра $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n', y_n') = -1$ ҳосил бўлади. Ҳар бир $n \in N$ учун $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ва $(x_n', y_n') = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$ нуқталар $(0,0)$ нуқта билан устма–уст тушмайди ва $n \to \infty$ да $(0,0)$ нуқтага интилади. Шунинг учун биз 2–таърифни қўллаб $(x, y) \to (0,0)$ интилганда $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ функция лимитга эга эмаслигини ҳосил қиламиз.

4–мисол. $(x, y) \to (0,0)$ интилганда $f(x, y) = \dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ функция лимитга эга эмаслигини кўрсатамиз.

Агар $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ кетма–кетликни қарасак, у ҳолда
$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2n}{1 + n^2} = \frac{2}{n}\,\frac{1}{\frac{1}{n^2} + 1}$$
бўлади ва шунга кўра $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0$ бўлади. Агар $(x_n', y_n') = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ кетма–кетликни қарасак, у ҳолда $f(x_n', y_n') = \dfrac{\frac{2}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = 1$ бўлади ва шунга кўра $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n', y_n') = 1$ ҳосил бўлади. Ҳар бир $n \in N$ учун $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ва $(x_n', y_n') = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ нуқталар $(0,0)$ нуқта билан устма–уст тушмайди ва $n \to \infty$ да $(0,0)$ нуқтага интилади. Шунинг учун биз 2–таърифни қўллаб $(x, y) \to (0,0)$ интилганда $f(x, y) = \dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ функция лимитга эга эмаслигини ҳосил қиламиз.

Энди биз *тўплам бўйича лимит* тушунчасини киритамиз.

3–таъриф. M тўплам $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли қисм тўплам бўлсин. x^0 нуқта шу M тўпламнинг лимитик нуқтаси бўлсин. Агар шундай бир A ҳақиқий сон мавжуд бўлиб, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ мусбат сон топилсаки, бунда ихтиёрий $x \in \overset{0}{S}_{\delta}(x^0) \bigcap M$ бўлган нуқталар учун $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда A сонга $x \to x^0$ *интилгандаги* $f(x)$ *функциянинг* M *тўплам бўйича лимити* деб айтилади. Бу ҳолда $A = \lim\limits_{\substack{x \to x^0, \\ x \in M}} f(x)$ каби ёзилади.

$f(x,y)$ икки ўзгарувчили функция $\overset{0}{O}\big((x_0, y_0)\big)$ ўйилган атрофда аниқланган бўлсин. Агар

$$\lim_{t \to +0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0, \\ (x,y) \in \overset{0}{O}(x_0, y_0) \bigcap L}} f(x,y)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда бу ифодага $(x,y) \to (x_0, y_0)$ *интилгандаги* $f(x,y)$ *функциянинг* $l = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ *йўналиш бўйича лимити* деб айтилади.

5–мисол. $(x,y) \to (0,0)$ интилганда $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ функциянинг ихтиёрий $l = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ йўналиш бўйича лимити мавжуд ва $\sin 2\alpha$ эканлигини кўрсатамиз.

Маъумки, $t > 0$ учун

$$f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

бўлади. Шунга кўра

$$\lim_{t \to +0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha) = \sin 2\alpha$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

6–мисол. $(x,y) \to (0,0)$ интилганда $f(x,y) = \dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ функциянинг ихтиёрий $l = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ йўналиш бўйича лимити мавжуд ва нолга тенг эканлигини кўрсатамиз.

Маъумки, $t > 0$ учун

$$f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=\frac{2t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}$$

бўлади. Шунга кўра, агар $\sin\alpha=0$ бўлса, у ҳолда $f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=0$ бўлади ва $\lim\limits_{t\to+0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=0$ эканлигини ҳосил қиламиз. Агар $\sin\alpha\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{t\to+0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=0$ эканлигини ҳосил қиламиз.

$M'\subset M$ ва x^0 нуқта шу M' қисм тўплам учун ҳам лимитик нуқта бўлсин. У ҳолда $\lim\limits_{\substack{x\to x^0,\\ x\in M}} f(x)$ лимитнинг мавжудлигидан $A=\lim\limits_{\substack{x\to x^0,\\ x\in M'}} f(x)$ лимитнинг мавжудлиги келиб чиқади. Хусусан, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} f(x,y)$ икки каррали лимитнинг мавжудлигидан $\lim\limits_{t\to+0} f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0,\\ (x,y)\in \overset{0}{O}(x_0,y_0)\cap L}} f(x,y)$ ихтиёрий $l=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ йўналиш бўйича лимитнинг мавжудлиги келиб чиқади.

$\Pi=\{(x,y):\ 0<|x-x_0|<a,\ 0<|y-y_0|<b\}$ тўпламда икки ўзгарувчили $f(x,y)$ функция аниқланган бўлсин. Фараз қилайлик, ихтиёрий $x\in(x_0-a,\ x_0+a),\ \ x\neq x_0$ учун $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=g(x)$ мавжуд ва $g(x)$ функция x_0 нуқтанинг қандайдир ўйилган атрофида аниқланган. Агар

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда бу лимитга такрорий лимит деб айтилади. Худди шунга ўхшаш бошқа бир $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ такрорий лимитни аниқлаймиз.

Энг содда мисоллар ёрдамида кўриш мумкинки, икки каррали лимитнинг мавжудлигидан такрорий лимитларнинг мавжудлиги келиб чиқмайди.

Бундан ташқари, 3–мисолда кўрдикки, $(x,y)\to(0,0)$ интилганда $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ функциянинг икки каррали лимити мавжуд эмас, лекин $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\, y) = \lim\limits_{y\to 0} f(x,\, y) = 0$ бўлгани учун иккала такрорий лимитлар мавжуд бўлади.

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

функция учун $|f(x,y)| \leq |x|$ тенгсизлик ўринли эканлигидан 1–леммага кўра $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = 0$ икки каррали лимит мавжуд, лекин $x \neq 0$ учун $\lim\limits_{y\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}$ лимит мавжуд эмас. Шунга кўра мос такрорий лимит ҳам мавжуд бўлмайди.

$f(x,y)$ икки ўзгарувчили функция $\overset{0}{O}\left((x_0, y_0)\right)$ ўйилган атрофда аниқланган ва $\lim\limits_{\substack{x\to x_0, \\ y\to y_0}} f(x,y)$ каррали лимит мавжуд бўлсин. Агар y_0 нуқтанинг қандайдир ўйилган атрофида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ функция аниқланган бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ такрорий лимит ҳам мавжуд ва шу каррали лимитга тенг бўлади.

Кўп ўзгарувчили функциянинг чексиз лимити ҳам бир ўзгарувчили функциянинг чексиз лимити каби аниқланади. Масалан, агар ихтиёрий $C > 0$ мусбат ҳақиқий сон учун шундай бир $\delta > 0$ мусбат сон топилиб $\overset{0}{S}_{\delta}(x_0)$ ўйилган атрофдан олинган барча x нуқталар учун $f(x) > C$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ деб айтилади.

7–мисол. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty, \\ y\to\infty}} \left(x^2 + y^2\right)e^{-(x+y)} = 0$ эканлигини кўрсатамиз.

$x > 0$ ва $y > 0$ эканлигидан $0 \leq \left(x^2 + y^2\right)e^{-(x+y)} \leq \left(x + y\right)^2 e^{-(x+y)}$ бўлади. Ҳамда $\lim\limits_{t\to\infty} t^2 e^{-t} = 0$ бўлгани учун, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сонга кўра шундай бир $\delta > 0$ сон топиладики, ихтиёрий $t > \delta$

учун $t^2e^{-t}<\varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. У ҳолда ихтиёрий $x>\dfrac{\delta}{2}$ ва $y>\dfrac{\delta}{2}$ учун $0\le\left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}<\varepsilon$ бўлади.

2. Ҳақиқий кўп ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги.

4–таъриф. $f(x)$ функция E метрик фазодаги x^0 нуқтанинг $O(x^0)$ атрофида аниқланган бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ мусбат сон топилсаки, бунда ихтиёрий $x\in O(x^0)$ бўлган ва $\rho(x,x^0)<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар учун $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E метрик фазодаги x^0 нуқтада *узлуксиз* деб айтилади. Бу эса $\lim\limits_{x\to x^0}f(x)=f(x_0)$ эканлигини билдиради.

5–таъриф. M тўплам $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли қисм тўплам бўлсин. $x^0\in M$ нуқта шу M тўпламнинг лимитик нуқтаси бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ мусбат сон топилсаки, бунда ихтиёрий $x\in S_{\delta}(x^0)\bigcap M$ бўлган нуқталар учун $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E метрик фазодаги x^0 нуқтада M *тўплам бўйича узлуксиз* деб айтилади. Бу ҳолда $\lim\limits_{\substack{x\to x^0,\\ x\in M}}f(x)=f(x^0)$ каби ёзилади.

Агар x^0 нуқта M тўпламнинг яккаланган нуқтаси бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x^0 нуқтада M тўплам бўйича узлуксиз деб ҳисобланади.

8–мисол. Агар

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0\\[2ex] 0, & x=y=0\end{cases}$$

функцияни қарасак, у ҳолда бу функция ихтиёрий нур бўйича $(0,0)$ нуқтада узлуксиз бўлади, лекин бу функция $(0,0)$ нуқтада узлуксиз эмас. Ҳақиқатдан ҳам, агар $x \to 0$ интилса, у ҳолда $f(x,kx) = \dfrac{2kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \dfrac{2kx}{x^2 + k^2} \to 0$ бўлади.

Ҳақиқий кўп ўзгарувчили функцияларнинг нуқтада узлуксизлигидан уларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатининг узлуксизлиги ҳам бир ўзгарувчили функциялар учун исбот қилинганидек келтирилади.

Энди биз узлуксиз функцияларнинг суперпозицияси ҳам узлуксиз эканлигини кўрсатамиз.

1–теорема. *$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ функциялар $x^0 \in R^n$ нуқтанинг қандайдир атрофида аниқланган ва шу $x^0 \in R^n$ нуқтада узлуксиз бўлсин. $f(y) = f(y_1, y_2, \dots, y_m)$ функция эса $y^0 = (\varphi_1(x^0), \varphi_2(x^0), \dots, \varphi_m(x^0))$ нуқтанинг қандайдир атрофида аниқланган ва шу $y^0 \in R^m$ нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда $x^0 \in R^n$ нуқтанинг қандайдир атрофида*

$$\Phi(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$$

мураккаб функция аниқланган ва бу $\Phi(x)$ функция $x^0 \in R^n$ нуқтада узлуксиз бўлади.

Исбот. $f(y) = f(y_1, y_2, \dots, y_m)$ функция y^0 нуқтада узлуксиз бўлгани учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сонга кўра шундай бир $S_\sigma(y^0)$ шар топиладики, бунда барча $y \in S_\sigma(y^0)$ нуқталар учун

$$\left| f(y_1, y_2, \dots, y_m) - f(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) \right| < \varepsilon \qquad (1.9.1)$$

тенгсизлиги ўринли бўлади.

Ҳар бир $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ учун $\varphi_i(x)$ функциялар $x^0 \in R^n$ нуқтада узлуксиз бўлгани учун $\sigma > 0$ сонга мос шундай бир $S_{\delta_i}(x^0)$ шарлар топиладики, бунда барча $x \in S_{\delta_i}(x^0)$ нуқталар учун

$$\left| \varphi_i(x) - \varphi_i(x^0) \right| < \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \qquad (1.9.2)$$

тенгсизликлари ўринли бўлади. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x \in S_\delta(x^0)$ ва ихтиёрий $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ учун

(1.9.2) тенгсизликлар ўринли бўлади. Шунга кўра ихтиёрий $x \in S_\delta(x^0)$ учун

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_i(x) - \varphi_i(x^0) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \sigma \qquad (1.9.3)$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$ нуқтанинг $S_\sigma(y^0)$ шарда ётишини билдиради. Ҳар бир $y \in S_\sigma(y^0)$ нуқталар учун $f(y) = f(y_1, y_2, \dots, y_m)$ функция қиймати аниқланган. Демак, $x \in S_\delta(x^0)$ шарда $\Phi(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$ мураккаб функция аниқланган бўлади. Энди бу $\Phi(x)$ мураккаб функциянинг $x^0 \in R^n$ нуқтада узлуксиз эканлигини кўрсатамиз. Ҳар бир $x \in S_\delta(x^0)$ учун (1.9.1) тенгсизликда $y \in S_\sigma(y^0)$ нуқта ўрнига $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$ нуқтани қўямиз. У ҳолда ихтиёрий $x \in S_\delta(x^0)$ учун $\left| \Phi(x) - \Phi(x^0) \right| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. $\varepsilon > 0$ ихтиёрий мусбат сон эканлигидан $\Phi(x)$ мураккаб функциянинг $x^0 \in R^n$ нуқтада узлуксиз эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

6–таъриф. E метрик фазодан олинган M тўплам берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $x_n \in M$ нуқталар кетма–кетлигидан шу M тўпламга тегишли бўлган нуқтага яқинлашувчи қисмий кетма–кетлик ажратиш мумкин бўлса, у ҳолда M тўпламга E *метрик фазодаги компакт тўплам* деб айтилади. Масалан, $[a,b]$ оралиқ R метрик фазода компакт тўплам бўлади ва $[a,b)$ оралиқ эса R метрик фазода компакт тўплам бўлмайди.

Ихтиёрий E метрик фазодан олинган чегараланмаган M тўплам компакт тўплам бўлмайди. Ҳақиқатдан ҳам, агар ихтиёрий $i \in N$ ва $j \in N$, $i \neq j$ учун $\rho(x_i, x_j) \geq 1$ бўлган кетма–кетликни қурсак, ундан шу M тўпламга тегишли бўлган нуқтага яқинлашувчи қисмий кетма–кетлик ажратиш мумкин бўлмайди.

Ихтиёрий E метрик фазодан олинган M тўплам компакт тўплам бўлса, у ҳолда бу тўплам ёпиқ тўплам бўлади.

Бундан кўринадики, ихтиёрий E метрик фазодан олинган M тўплам *компакт тўплам* бўлса, у ҳолда бу тўплам *чегараланган ва ёпиқ тўплам* бўлишлиги зарур. Лекин етарли эмас.

Агар $E = R^n$ бўлса, у ҳолда Больцано–Вейерштрасс теоремаси қуйидагича умумлаштирилади.

2–теорема (Больцано–Вейерштрасс). *R^n фазодаги ихтиёрий чегараланган нуқталар кетма–кетлигидан яқинлашувчи бўлган қисмий кетма–кетлик ажратиш мумкин.*

Исбот. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset R^n$ нуқталар кетма–кетлиги шу R^n фазода чегараланган бўлсин, бунда $x_k = (x_k^1,\ x_k^2, ...,\ x_k^n)$. У ҳолда $\{x_k^1\}_{k=1}^{\infty} \subset R$ сонли кетма–кетлик чегараланган бўлади. Больцано–Вейерштрасс теоремасига кўра бу сонли кетма–кетликдан яқинлашувчи бўлган $\{x_{k_m}^1\}$ қисмий кетма–кетлик ажратиш мумкин. У ҳолда $\{x_{k_m}\} \subset R^n$ нуқталар кетма–кетлигининг биринчи координатаси яқинлашувчи ва $\{x_{k_m}\} \subset R^n$ нуқталар кетма–кетлигининг ўзи эса шу R^n фазода чегараланган бўлади. Шунга кўра $\{x_{k_m}^2\} \subset R$ сонли кетма–кетлик чегараланган бўлади. Бу сонли кетма–кетликка Больцано–Вейерштрасс теоремасини қўллаб ундан яқинлашувчи бўлган $\{x_{k_{m_l}}^2\}$ қисмий кетма–кетликни ажратиш мумкин бўлади. Бу жараённи давом эттириб биз ҳар бир координатаси яқинлашувчи бўлган қисмий кетма–кетликка эга бўламиз. Шунга кўра, ҳосил бўлган қисмий кетма–кетлик R^n фазода яқинлашувчи бўлади.

Натижа. *$M \subset R^n$ тўплам компакт тўплам бўлишлиги учун унинг чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлишлиги зарур ва етарлидир.*

Исбот. $M \subset R^n$ тўплам компакт тўплам бўлишлиги учун унинг чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлишлигининг зарур эканлиги беъвосита келтириб чиқарилди.

Бу шартларнинг етарли эканлигини исбот қиламиз. M тўплам R^n фазодаги чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлсин. Ихтиёрий $x_k \in M$ нуқталар кетма–кетлигини олайлик. Бу нуқталар кетма–кетлиги R^n фазодаги чегараланган кетма–кетлик бўлганлиги учун Больцано–Вейерштрасс теоремасига кўра ундан бирор a нуқтага яқинлашувчи $x_{k_m} \in M$ қисмий кетма–кетлик ажратиш мумкин бўлади. Бу M тўпламнинг ёпиқ эканлигидан $a \in M$ эканлиги келиб чиқади.

Қуйидаги лемма ҳам ўринлидир:

Лемма (Гейне–Борель). *Ихтиёрий E метрик фазодан олинган M тўплам компакт тўплам бўлишлиги учун шу M тўпламнинг ихтиёрий очиқ қопламасидан чекли қисм қоплама ажратиш мумкин бўлишлиги зарур ва етарлидир.*

Гейне–Борель леммасида ишлатилган қоплама тушунчасини изоҳлаймиз.

Агар $G \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ бўлса, у ҳолда $\{G_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ тўпламлар системаси G тўпламнинг қопламаси деб айтилади. Агар Λ тўплам чекли бўлса, у ҳолда қоплама чекли дейилади. Агар барча G_α тўпламлар очиқ тўпламлар бўлса, у ҳолда қоплама очиқ деб айтилади. Агар қопламанинг қисм тўплами ўз навбатида қоплама бўлса, у ҳолда бу қисм тўплам қисм қоплама деб айтилади.

Агар $f(x)$ функция M тўпламнинг ҳар бир $x^0 \in M$ нуқтасида шу тўплам бўйича узлуксиз бўлса, яъни ҳар бир $x^0 \in M$ лимитик нуқтасида

$$\lim_{\substack{x \to x^0, \\ x \in M}} f(x) = f(x_0) \tag{1.9.4}$$

шарт ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция M тўпламда узлуксиз деб айтилади.

Ихтиёрий E метрик фазодан олинган M компакт тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаси ҳақидаги қуйидаги иккита теорема исботи оралиқда берилган бир ўзгарувчили узлуксиз функциянинг мос хоссасининг исботидан фарқ қилмайди.

3–теорема (Вейерштрасс). *Ихтиёрий E метрик фазодан олинган M компакт тўпламда узлуксиз бўлган $f(x)$ функция шу M компакт тўпламда чегараланган бўлади.*

4–теорема (Вейерштрасс). *Ихтиёрий E метрик фазодан олинган M компакт тўпламда узлуксиз бўлган $f(x)$ функция шу M компакт тўпламда ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади.*

Ҳар қандай ҳақиқий кўп ўзгарувчили узлуксиз функцияни бир ўзгарувчили узлуксиз функцияларнинг суперпозицияси шаклида тасвирлаш ҳақидаги А.Н. Колмогоровнинг қуйидаги теоремаси ҳам ўринлидир:

5–теорема (А.Н. Колмогоров)[1]**.** *Ихтиёрий* $n \in N$ *учун* $n(2n+1)$ *та* $\varphi_{ij}(x_j)$ $(j=1, 2, \ldots, n, \ i=1, 2, \ldots, 2n+1)$ *функциялар мавжудки, бунда*

а) барча $\varphi_{ij}(x_j)$ $(j=1, 2, \ldots, n, \ i=1, 2, \ldots, 2n+1)$ *функциялар* $[0,1]$ *оралиқда узлуксиз;*

б) $0 \le x_1, x_2, \ldots, x_n \le 1$ *тўпламда узлуксиз бўлган ихтиёрий* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *функция учун ҳар бири* R *сон ўқида узлуксиз бўлган* $2n+1$ *та* ψ_i , $i=1, 2, \ldots, 2n+1$ *функциялар мавжуд бўлиб*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \psi_i\left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_j)\right)$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу теорема А.Н. Колмогоровга тегишли бўлиб, у Д. Гильбертнинг машҳур еттинчи проблемасини ечади, ҳамда қуйидаги шаклда ифода қилинади: *ҳар бир* n *ўзгарувчили* $0 \le x_1, x_2, \ldots, x_n \le 1$ *тўпламда узлуксиз бўлган ҳақиқий* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *функцияни* $2n+1$ *та бир ўзгарувчили узлуксиз функциялар суперпозициясининг йиғиндиси (юқорида келтирилган формуладаги ташқи йиғинди) ва* n *та бир ўзгарувчили узлуксиз функциялар йиғиндиси (юқорида келтирилган формуладаги ички йиғинди) шаклида тасвирлаш мумкин.*

Энди функциянинг тўпламда текис узлуксизлик тушунчасини киритамиз.

7–таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ мусбат сон учун шундай бир $\delta > 0$ мусбат сон топилиб, ихтиёрий $x, x' \in G$ ва $\rho(x, x') < \delta$ бўлган нуқталар $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ тенгсизлиги бажарилса, у ҳолда E метрик фазодан олинган G тўпламда $f(x)$ функция текис узлуксиз деб айтилади.

---

[1] Бу теореманинг исботи билан Колмогоров А.Н., “О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозицией непрерывных функций меньшего числа переменных”, ДАН, 108 (1956),179–182 бетларидан ўқиш мумкин.

Тўпламда узлуксиз бўлган функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлишлиги шарт эмас. Мисол келтиришдан олдин биз текис узлуксизликнинг инкорини келтирамиз: агар шундай бир $\varepsilon_0 > 0$ мусбат сон мавжуд бўлиб ихтиёрий $\delta > 0$ мусбат сон учун шундай бир $x, x' \in G$ ва $\rho(x, x') < \delta$ бўлган нуқталар мавжуд бўлсаки, бунда $\left| f(x) - f(x') \right| \geq \varepsilon_0$ тенгсизлиги бажарилса, у ҳолда E метрик фазодан олинган G тўпламда $f(x)$ функция текис узлуксиз бўлмаган функция деб айтилади.

9–мисол. $(0, +\infty)$ интервалда $f(x) = x^2$ функциянинг текис узлуксиз эмаслигини кўрсатамиз.

$\varepsilon_0 = 1$ бўлсин. ихтиёрий $\delta > 0$ мусбат сон учун шундай бир $x_\delta = \dfrac{1}{\delta}$, $x'_\delta = \dfrac{1}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$ бўлган нуқталарни олсак, у ҳолда $\rho(x'_\delta,\ x_\delta) < \delta$ бўлиб

$$\left| f(x'_\delta) - f(x_\delta) \right| = (x'_\delta)^2 - (x_\delta)^2 =$$

$$= (x'_\delta - x_\delta)(x'_\delta + x_\delta) = \frac{\delta}{2}\left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

6–теорема (Кантор). *Ихтиёрий E метрик фазодан олинган M компакт тўпламда узлуксиз бўлган $f(x)$ функция шу M компакт тўпламда текис узлуксиз бўлади.*

Исбот. Ихтиёрий E метрик фазодан олинган M компакт тўпламда $f(x)$ функция узлуксиз бўлсин. Лекин шу M компакт тўпламда текис узлуксиз бўлмасин. У ҳолда шундай бир $\varepsilon_0 > 0$ мусбат сон мавжуд бўлиб ихтиёрий $n \in N$ номер учун шундай бир $x_n, x'_n \in M$ ва $\rho(x_n, x'_n) < \dfrac{1}{n}$ бўлган нуқталар мавжуд бўладики, бунда

$$\left| f(x'_n) - f(x_n) \right| \geq \varepsilon_0 \qquad (1.9.5)$$

тенгсизлиги бажарилади.

M компакт тўплам бўлганлиги учун $\{x_n\}$ кетма–кетликдан қандайдир $x_0 \in M$ нуқтага яқинлашувчи бўлган $\left\{x_{n_k}\right\}$ қисмий кетма–кетлик ажратиш мумкин бўлади.

Учбурчак тенгсизлигидан фойдаланиб, $k \to \infty$ да

$$0 \le \rho(x'_{n_k}, x_0) \le \rho(x'_{n_k}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \rho(x_{n_k}, x_0) \to 0$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Шунга кўра $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = x_0$ бўлади. Лекин $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. Шунинг учун

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$$

тенглик ўринли бўлади. Энди (1.9.5) тенгсизликда $n = n_k$ деб олсак

$$\left| f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k}) \right| \ge \varepsilon_0 \qquad (1.9.6)$$

тенгсизлиги бажарилади.

(1.9.6) тенгсизликда $k \to \infty$ да лимитга ўтсак, у ҳолда

$$0 = \left| f(x_0) - f(x_0) \right| \ge \varepsilon_0 > 0$$

тенгсизлиги ҳосил бўлади. Бу ҳосил қилинган қарама–қаршилик фаразимизнинг нотўғри эканлигини ва демак $f(x)$ функциянинг M тўпламда текис узлуксиз эканлигини исбот бўлади.

$f(x)$ функция M тўпламда чегараланган бўлсин. $f(x)$ функциянинг M тўпламдаги *узлуксизлик модули*

$$\omega_f(\delta, M) = \sup_{\substack{x, y \in M, \\ \rho(x,y) < \delta}} \left| f(x) - f(y) \right|$$

тенглик билан аниқланади.

$f(x)$ функциянинг M тўпламда текис узлуксиз бўлишлиги учун $\delta \to 0$ интилганда $\omega_f(\delta, M) \to 0$ бўлишлиги зарур ва етарли бўлади.

7–теорема (Коши). *$f(x)$ функция $G \subset R^n$ соҳада узлуксиз ва бу соҳада A ва B қийматларни қабул қилсин. У ҳолда бу $f(x)$ функция $G \subset R^n$ соҳада A ва B қийматлар орасидаги барча қийматларни қабул қилади.*

Исбот. Шартга кўра $G \subset R^n$ соҳа, яъни очиқ ва боғламли тўплам бўлади. $f(x)$ функция $G \subset R^n$ соҳада узлуксиз ва бу соҳада $f(a) = A$ ва $f(b) = B$ қийматларни қабул қилсин, бунда $a, b \in G$. Бу a ва b нуқталарни шу $G \subset R^n$ соҳада жойлашган $x = x(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ эгри чизиқ билан туташтирамиз. $f\left[x(t)\right]=\varphi(t)$ мураккаб функция $[\alpha,\,\beta]$ оралиқда узлуксиз ва бу оралиқнинг четкаларида A ва B қийматларни қабул қилади. $\varphi(t)$ функция бир ўзгарувчили узлуксиз функция бўлиб бу функция учун оралиқ қийматлар ҳақидаги Коши теоремаси ўринли бўлади. Шунга кўра бу функция $[\alpha,\,\beta]$ оралиқда A ва B қийматлар орасидаги барча қийматларни қабул қилади. Лекин $\varphi(t)=f\left[x(t)\right]$ функциянинг қийматлари тўплами $f(x)$ функциянинг қийматлари тўпламига киради. Шунинг учун $f(x)$ функция A ва B қийматлар орасидаги барча қийматларни қабул қилади. Теорема исбот бўлди.

3. Ҳақиқий кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциалланувчанлиги. $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ функция $x_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ нуқтанинг атрофида аниқланган бўлсин. Бир ўзгарувчили

$$\varphi(x_1)=f(x_1,x_{20},...,x_{n0})$$

функцияни қараймиз. $\varphi(x_1)$ функция x_{10} нуқтада ҳосилага эга бўлиши мумкин. Таърифга кўра бундай ҳосила *хусусий ҳосила* деб айтилади ва $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)$ каби ёзилади. Шундай қилиб,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10},x_{20},...,x_{n0})=$$

$$=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(x_1,x_{20},...,x_{n0})-f(x_{10},x_{20},...,x_{n0})}{\Delta x_1}$$

бўлади, бунда $\Delta x_1=x_1-x_{10}$. Худди шунга ўхшаш

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10},x_{20},...,x_{n0})\,,\ i=\overline{1,n}$$

биринчи тартибли хусусий ҳосилалар аниқланади. Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар учун бошқача

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=f_{x_i}(x_0)=D_i f(x_0)=f'_{x_i}(x_0)=\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_0)$$

белгилашлар ҳам ишлатилади. Икки ўзгарувчили $f(x,y)$ функция (x_0,y_0) нуқтада иккита биринчи тартибли

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

хусусий ҳосилаларга эга. Уч ўзгарувчили $f(x, y, z)$ функция (x_0, y_0, z_0) нуқтада учта биринчи тартибли

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

хусусий ҳосилаларга эга.

Хусусий ҳосилаларни ҳисоблашда битта ўзгарувчидан бошқа ўзгарувчилар тайинланади ва бир ўзгарувчили функция сингари ҳосила ҳисобланади.

Масалан,

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Функциянинг нуқтада дифференциалланувчанлик таърифини келтирамиз.

Таъриф. Агар $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in R^n$ нуқтанинг атрофида аниқланган ва шундай бир $A_1, A_2, ..., A_n$ сонлар мавжуд бўлиб $x \to x_0$ да

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - x_{i0}) + o(\rho(x, x_0)) \qquad (1.9.7)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in R^n$ нуқтада дифференциалланувчи деб айтилади.

8–теорема. *$f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлишлиги учун шу нуқтанинг қандайдир атрофида $f(x)$ функцияни*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x)(x_i - x_{i0}), \qquad (1.9.8)$$

бунда $f_i(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлган шаклда тасвирлаш мумкин бўлишлиги зарур ва етарлидир.

Исбот. *Зарурлиги.* $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда (1.9.7) шарт ўринли бўлади. $x \to x_0$ да $\psi(x) = o(\rho(x, x_0))$ тенглик $x \to x_0$ да

$\psi(x)=\varepsilon(x)\cdot\rho(x,x_0)$, бунда $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ эканлигини билдиради. У ҳолда

$$\psi(x)=\varepsilon(x)\cdot\rho(x,x_0)=\frac{\varepsilon(x)}{\rho(x,x_0)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(x)(x_i-x_{i0}), \tag{1.9.9}$$

бунда $\varepsilon_i(x)=\varepsilon(x)\cdot\dfrac{x_i-x_{i0}}{\rho(x,x_0)}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon_i(x)=0$, чунки $0\le\dfrac{x_i-x_{i0}}{\rho(x,x_0)}\le 1$ бўлади. $\varepsilon_i(x)$ функцияни x_0 нуқтада узлуксиз бўладиган қилиб $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon_i(x)=\varepsilon_i(x_0)=0$ тенглик билан қўшимча аниқлаймиз. У ҳолда (1.9.7) ва (1.9.9) тенгликлардан

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}A_i(x_i-x_{i0})+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(x)(x_i-x_{i0})=$$

$$=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}f_i(x)(x_i-x_{i0}),\quad f_i(x)=A_i+\varepsilon_i(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $\varepsilon_i(x)$ функцияни x_0 нуқтада узлуксиз бўлгани учун $f_i(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади ва $f_i(x_0)=A_i$, $i=\overline{1,n}$ тенглик ўринлидир.

Етарлилиги. Энди (1.9.8) тенглик бажарилсин. У ҳолда $f_i(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз эканлигидан фойдаланиб

$$A_i=f_i(x_0),\ i=\overline{1,n},\ f_i(x)=A_i+\varepsilon_i(x),\ \lim_{x\to x_0}\varepsilon_i(x)=0$$

деб оламиз. У ҳолда $x\to x_0$ да

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x_i-x_{i0})+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(x)(x_i-x_{i0})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}A_i(x_i-x_{i0})+o(\rho(x,x_0))$$

тенгликни ёзамиз, чунки $x\to x_0$ интилганда

$$\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i(x)(x_i-x_{i0})\right|}{\rho(x,x_0)}\le\sum_{i=1}^{n}\left|\varepsilon_i(x)\right|\to 0$$

бўлади. Теорема исбот бўлди.

$f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $x_0 \in R^n$ нуқта атрофида аниқланган бўлсин. Бу x_0 нуқтада $f(x)$ функция дифференциалланувчи ва $f(x_0)=0$, ҳамда $\varphi(x)$ функция эса x_0 нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда 8–теоремадан фойдаланиб $f(x)\varphi(x)$ кўпайтма функциянинг ҳам x_0 нуқтада дифференциалланувчи эканлигини ҳосил қиламиз. Масалан, бу тасдиқдан

$$(x+y)(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи эканлигини ҳосил қиламиз.

10–мисол. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^4}$ функциянинг $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи эканлигини кўрсатамиз.

Аввал шундай бир $C>0$ мусбат сон мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in R$ ва ихтиёрий $y \in R$ учун

$$\left|\sqrt[3]{x^3+y^4}-x\right| \le C|y|^{\frac{4}{3}} \qquad (1.9.10)$$

тенгсизлик ўринли эканлигини кўрсатамиз.

Агар $y=0$ бўлса, у ҳолда (1.9.10) тенгсизлик ихтиёрий $C>0$ мусбат сон учун ўринли бўлади. Шунинг учун $y \neq 0$ бўлсин. $t=xy^{-\frac{4}{3}}$ деб оламиз. У ҳолда (1.9.10) тенгсизлик $|\psi(t)| \le C$ тенгсизликка эквивалент бўлади, бунда $\psi(t)=\sqrt[3]{1+t^3}-t$.

Бу $\psi(t)$ функция R сон ўқида узлуксиз ва $t \to \infty$ да $\psi(t) \to 0$ бўлади. Шунинг учун бу $\psi(t)$ функция R сон ўқида чегараланган бўлади.

Демак, (1.9.10) тенгсизлик ўринлидир. Шунингдек

$$\left|\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = |y|^{\frac{1}{3}}\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |y|^{\frac{1}{3}}$$

тенгсизликка кўра $(x,y) \to (0,0)$ да $y^{\frac{4}{3}}=o(\sqrt{x^2+y^2})$ бўлади. Шунга кўра

$$\sqrt[3]{x^3+y^4}=x+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

тенглик ўринли бўлади, яъни $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^4}$ функция $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи экан.

11–мисол. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ функциянинг $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи эмаслигини кўрсатамиз.

Агар $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ функциянинг $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда 8–теоремага кўра шу нуқтанинг қандайдир атрофида бу функцияни

$$\sqrt[3]{x^3+y^3}=x\varphi(x,y)+y\psi(x,y) \qquad (1.9.11)$$

шаклида тасвирлаш мумкин бўлади, бунда $\varphi(x,y)$ ва $\psi(x,y)$ функциялар $(0,0)$ нуқтада узлуксиздир. k ихтиёрий сон бўлсин. Бу $(1.9.11)$ тенгликда $y=kx$ деб оламиз. У ҳолда

$$\sqrt[3]{1+k^3}=\varphi(x,kx)+k\psi(x,kx)$$

тенглик ҳосил бўлади. Бунда $x\to 0$ да лимитга ўтсак, у ҳолда $\varphi(x,y)$ ва $\psi(x,y)$ функцияларнинг $(0,0)$ нуқтада узлуксиз эканлигидан

$$\sqrt[3]{1+k^3}=\varphi(0,0)+k\psi(0,0)=a+kb$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенглик нотўғридир, чунки $\sqrt[3]{1+k^3}$ функция чизиқли функция бўлмайди. Демак, $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ функция $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи эмас.

8–теоремадан x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлган $f(x)$ функция шу x_0 нуқтада узлуксиз эканлиги келиб чиқади. Тескари тасдиқ ўринли эмас. Масалан, 11–мисолдаги $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ функция $(0,0)$ нуқтада узлуксиз, лекин бу функция $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи эмас.

Ҳеч бир нуқтада дифференциалланувчи бўлмаган узлуксиз функцияга мисол биринчи бўлиб *К. Вейерштрасс* томонидан қурилган.

Бу функция

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n\cos(a^n\pi x),$$

бунда $0<b<1$, a–тоқ натурал сон бўлган қатор билан аниқланган. Бу қатор ихтиёрий интервалда текис яқинлашувчи бўлганлиги учун $f(x)$ функция ҳамма жойда узлуксиз бўлади. Иккинчи томондан, агар $ab>1$ бўлса, у ҳолда бу қаторни ҳадма–ҳад дифференциаллаш билан ҳосил қилинган қатор узоқлашувчи бўлади. Бу $f(x)$ функциянинг дифференциалланувчи эмаслигини исбот қилмайди, лекин шундай имконият борлигини кўрсатади. Биз *агар* $ab>1+\frac{3}{2}\pi$ *бўлса, у ҳолда бу* $f(x)$ *функциянинг ҳеч бир* x *нуқтада чекли ҳосилага эга эмаслигини* кўрсатамиз.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_{n=0}^{\infty} b^n\frac{\cos(a^n\pi(x+h))-\cos(a^n\pi x)}{h}=$$

$$=\sum_{n=0}^{m-1}+\sum_{n=m}^{\infty}=S_m+R_m$$

деб ёзамиз. У ҳолда

$$\left|\cos(a^n\pi(x+h))-\cos(a^n\pi x)\right|=\left|a^n\pi h\sin(a^n\pi(x+\theta h))\right|\le a^n\pi\left|h\right|$$

тенгсизлик ўринли бўлгани учун

$$\left|S_m\right|\le\sum_{n=0}^{m-1}\pi a^n b^n=\pi\frac{a^m b^m-1}{ab-1}<\pi\frac{a^m b^m}{ab-1}$$

бўлади. Энди биз $\left|R_m\right|$ ифодани h ўзгарувчига қиймат бериш билан қуйидан баҳолаймиз. $a^m x=\alpha_m+\xi_m$, бунда α_m –бутун сон ва $-\frac{1}{2}\le\xi_m<\frac{1}{2}$ бўлади ва

$$h=\frac{1-\xi_m}{a^m}$$

деб олсак, у ҳолда $0<h\le\frac{3}{2a^m}$ ва

$$a^n\pi(x+h)=a^{n-m}a^m\pi(x+h)=a^{n-m}\pi(\alpha_m+1)$$

бўлади. a–тоқ натурал сон бўлганлиги учун

$$\cos(a^n\pi(x+h))=\cos(a^{n-m}\pi(\alpha_m+1))=(-1)^{a^{n-m}(\alpha_m+1)}=(-1)^{(\alpha_m+1)}$$

ҳосил бўлади. Шунингдек

$$\cos(a^n\pi x)=\cos\left\{a^{n-m}\pi(\alpha_m+\xi_m)\right\}=$$

$$=\cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)=(-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)$$

ҳосил бўлади. Шунга кўра

$$R_m = \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n\left\{1+\cos(a^{n-m}\pi\xi_m)\right\}$$

бўлади. Бу қаторнинг барча ҳадлари мусбат бўлади. Шунинг учун биринчи ҳадидан бошқа ҳадларини ташлаб юбориш билан биз

$$|R_m| > \frac{b^m}{|h|} > \frac{2}{3}a^m b^m$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб,

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \geq |R_m| - |S_m| > \left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right)a^m b^m$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар $ab > 1+\frac{3}{2}\pi$ бўлса, у ҳолда қавс ичидаги ифода мусбат бўлади ва $m\to\infty$ да $h\to 0$ интилувчи бўлиб тенгсизликнинг ўнг томони чексизга интилади. Шунга кўра $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ нисбат абсолют қиймати бўйича исталганча катта бўлади ва $f'(x)$ чекли ҳосила мавжуд эмас.

Ҳеч бир нуқтада дифференциалланувчи бўлмаган узлуксиз функцияга бошқа бир мисол *Ван-дер-Варден* томонидан қурилган. К. Вейерштрасс функциясига ўхшаш, лекин умуман бошқа йўл билан ҳосил қилинадиган Ван-дер-Варден функцияси қуйидагича қурилади:

$f_n(x)$ функция қиймати x нуқта ва унга энг яқин бўлган $\frac{m}{10^n}$ шаклидаги нуқтагача бўлган масофа, бунда m–бутун сон бўлсин. У ҳолда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

қатор йиғиндиси билан аниқланувчи $f(x)$ функция узлуксиз, лекин дифференциалланувчи эмас.

Ҳар бир $f_n(x)$ функция узлуксиз ва $|f_n(x)| < 10^{-n}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра берилган қатор текис яқинлашувчи бўлади. Демак, $f(x)$ функция узлуксиз бўлади.

x нуқта (0, 1) интервалдаги ихтиёрий нуқта бўлсин. Бу x нуқтани чексиз ўнли каср кўринишида ёзамиз ва агар бу касрнинг $q-$ ўнли белгиси 4 ёки 9 бўлса, у ҳолда $x' = x - 10^{-q}$ деб ва бошқа ҳолларда $x' = x + 10^{-q}$ деб оламиз.

Агар $n < q$ бўлса, у ҳолда x ва x' нуқталар унга энг яқин бўлган $\frac{m}{10^n}$ шаклидаги битта нуқтага эга бўлади ва ундан бир томонда ётади. Агар $n \geq q$ бўлса, у ҳолда x ва x' нуқталарга мос бўлган $\frac{m}{10^n}$ ва $\frac{m'}{10^n}$ сонлар бир–биридан $x - x'$ миқдорга фарқланади. Бу қоидани содда мисолда ҳам текшириб кўриш мумкин. Масалан, $x = 0,326$, $x = 0,346$ ёки $x = 0,396$ бўлса, у ҳолда $q = 2$ бўлади.

Киритилишига кўра

$$f_n(x') - f_n(x) = \begin{cases} \pm(x' - x)\ , & (n < q) \\ 0\ , & (n \geq q) \end{cases}$$

бўлади. Шундай қилиб

$$f(x') - f(x) = \sum_{n=1}^{q-1} \pm(x' - x) = p\ (x' - x),$$

бунда p –бутун сон бўлиб, $q-1$ сон билан бир вақтда жуфт ёки тоқ бўлади. Шунга кўра $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ нисбат $x' \to x$ да чекли лимитга эга бўлмайди.

Ҳақиқий кўп ўзгарувчили функциянинг нуқтада дифференциалланувчи бўлишлигининг зарурий шартини келтирамиз.

9–теорема. *Агар $f(x)$ функция $x_0 \in R^n$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функция шу x_0 нуқтада барча $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, $i = \overline{1, n}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлади ва $x \to x_0$ да*

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{i0}) + o(\rho(x, x_0)) \qquad (1.9.12)$$

тенглик ўринлидир.

Исбот. $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда шундай бир $A_1, A_2, ..., A_n$ сонлар мавжуд бўлиб $x \to x_0$ да

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - x_{i0}) + o(\rho(x, x_0)) \qquad (1.9.13)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликда $x_1 \neq x_{10}$, $x_2 = x_{20}, ..., x_n = x_{n0}$ бўлсин. У ҳолда (1.9.13) тенглик $\Delta x_1 \to 0$ да

$$f(x_1, x_{20}, ..., x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) = A_1(x_1 - x_{10}) + o(|\Delta x_1|) \qquad (1.9.14)$$

кўринишда бўлади. Шунга кўра

$$A_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1, x_{20}, ..., x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})}{\Delta x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)$$

лимит мавжуд бўлади. Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги қолган барча

$$A_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_{10}, x_{20}, ..., x_i, ..., x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{i0}, ..., x_{n0})}{\Delta x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0),$$

$i = \overline{2, n}$ хусусий ҳосилаларнинг мавжудлиги исбот қилинади. Бу ифодаларни (1.9.13) тенгликка олиб бориб қўйсак, у ҳолда (1.9.12) тенглик ўринли бўлади.

11–мисолдаги $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ функция $(0,0)$ нуқтада

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$$

иккала хусусий ҳосилаларга эга, лекин бу функция $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи эмас. Бу мисол кўрсатадики, нуқтада барча хусусий ҳосилаларнинг мавжудлигидан шу нуқтада унинг дифференциалланувчи эканлиги келиб чиқмас экан. Нуқтада барча хусусий ҳосилаларнинг мавжудлиги ҳаттоки бу функциянинг шу нуқтада узлуксизлигини ҳам таъминламайди. Масалан, агар

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

функцияни қарасак, у ҳолда бу функция $(x,y)\to(0,0)$ интилганда лимитга эга эмас. Шундай бўлсада, бу функция $(0,0)$ нуқтада

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

иккала хусусий ҳосилаларга эга бўлади.

Шуни таъкидлаш кераки, ҳақиқий бир ўзгарувчили функциянинг нуқтада дифференциалланувчи бўлишлиги унинг шу нуқтада ҳосилага эга бўлишлигига эквивалент эди.

Энди ҳақиқий кўп ўзгарувчили функциянинг нуқтада дифференциалланувчи бўлишлигининг етарли шартини келтирамиз.

10–теорема. *Агар $f(x)$ функциянинг $x_0\in R^n$ нуқта атрофида барча $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x),\ i=\overline{1,n}$ хусусий ҳосилалари мавжуд ва шу $x_0\in R^n$ нуқта узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция $x_0\in R^n$ нуқтанинг қандайдир $S_\varepsilon(x_0)$ атрофида барча $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x),\ i=\overline{1,n}$ хусусий ҳосилаларга эга ва бу хусусий ҳосилалар шу x_0 нуқта узлуксиз бўлсин.

Функция орттирмасини ёзамиз:

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_0)&=f(x_1,x_2,...,x_n)-f(x_{10},x_{20},...,x_{n0})=\\ &=\left[f(x_1,x_2,...,x_n)-f(x_{10},x_2,...,x_n)\right]+\\ &+\left[f(x_{10},x_2,...,x_n)-f(x_{10},x_{20},...,x_n)\right]+...+\\ &+\left[f(x_{10},x_{20},...,x_n)-f(x_{10},x_{20},...,x_{n0})\right]. \end{aligned}$$

У ҳолда Лагранж формуласига кўра ҳар бир йиғинди учун

$$\left[f(x_{10},x_{20},...,x_k,...,x_n)-f(x_{10},x_{20},...,x_{k0}...,x_n)\right]=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{10},x_{20},...,x_{k0}+\theta_k(x_k-x_{k0}),...,x_n)\left(x_k-x_{k0}\right)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $0<\theta_k<1$ ва $f_k(x)=\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{10},x_{20},...,x_{k0}+\theta_k(x_k-x_{k0}),...,x_n)$, $k=\overline{1,n}$ функциялар $x_0=(x_{10},x_{20},...,x_{k0},...,x_{n0})$ нуқтада узлуксиздир, яъни

$$\lim_{x\to x_0} f_k(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{10},x_{20},...,x_{k0}+\theta_k(x_k-x_{k0}),...,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$$

бўлади. Шундай қилиб

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\left(x_k-x_{k0}\right)$$

тенглик ўринли бўлиб, бунда ҳар бир $f_k(x)$, $k=\overline{1,n}$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиздир. 8–теоремани қўллаб $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада дифференциалланувчи эканлигини ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

$f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлишлиги учун барча $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i=\overline{1,n}$ хусусий ҳосилаларнинг шу $x_0\in R^n$ нуқтада узлуксиз бўлишлиги зарур эмас.

Масалан, агар

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

функцияни қарасак, у ҳолда бу функция $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади, яъни $(x,y)\to(0,0)$ интилганда

$$f(x,y)=0\cdot x+0\cdot y+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

тенглик ўринлидир.

Лекин $x^2+y^2>0$ учун

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

хусусий ҳосила $(x,y)\to(0,0)$ интилганда лимитга эга эмас ва шунга кўра $(0,0)$ нуқтада $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ хусусий ҳосила узлуксиз бўлмайди. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ ҳосиланинг $x\to 0$ интилганда лимитга эга эмаслигини кўрсатиш етарлидир.

Энди мураккаб функциянинг нуқтада дифференциалланувчи бўлишлиги ҳақидаги теоремани келтирамиз.

11–теорема. *$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ функциялар $x_0=(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})\in R^n$ нуқтада дифференциалланувчи ва $f(y)=f(y_1, y_2, \dots, y_m)$ функция эса $y_0=(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \dots, \varphi_m(x_0))$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда*

$$\Phi(x)=f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$$

мураккаб функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва $x\to x_0$ да

$$\Phi(x)-\Phi(x_0)=\sum_{i=1}^{n} A_i(x_i-x_{i0})+o(\rho(x,x_0)),$$

$$A_i=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(x_0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_j}(y_0)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x_0), \quad i=\overline{1,n} \qquad \textit{(1.9.15)}$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Исбот. $f(y)=f(y_1, y_2, \dots, y_m)$ функция y_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлгани учун $y_0=(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0})$ нуқтада узлуксиз бўлган шундай бир $f_j(y)$, $j=\overline{1,m}$ функциялар мавжудки

$$f(y)-f(y_0)=\sum_{j=1}^{m} f_j(y)(y_j-y_{j0}), \quad f_j(y_0)=\frac{\partial f}{\partial y_j}(y_0) \qquad (1.9.16)$$

тенглик ўринли бўлади.

Берилган нуқтада дифференциалланувчи функциялар шу нуқтада узлуксиз эканлигидан ва узлуксиз функцияларнинг суперпозицияси ҳам узлуксиз эканлигидан фойдаланиб

$$\psi_j(x)=f_j(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)), \quad j=\overline{1,m} \qquad (1.9.17)$$

функцияларнинг $x_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})\in R^n$ нуқтада узлуксиз эканлигини ва бундан ташқари

$$\psi_j(x_0)= f_j(\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),...,\varphi_m(x_0))= f_j(y_0)=\frac{\partial f}{\partial y_j}(y_0) \qquad (1.9.18)$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

(1.9.16) формулада $y_1=\varphi_1(x), y_2=\varphi_2(x), ..., y_m=\varphi_m(x)$ деб олсак, у ҳолда (1.9.17) белгилашлардан фойдаланиб

$$\Phi(x)-\Phi(x_0)=\sum_{j=1}^{m}\psi_j(x)(\varphi_j(x)-\varphi_j(x_0)) \qquad (1.9.19)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

$\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,\ m}$ функциялар x_0 нуқтада дифференциалланувчи эканлигидан x_0 нуқтада узлуксиз бўлган $\varphi_{ij}(x)$ функциялар мавжудки, бунда

$$\varphi_j(x)-\varphi_j(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}(x)(x_i-x_{i0}),\ i=\overline{1,\ n},\ j=\overline{1,\ m} \qquad (1.9.20)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (1.9.20) ифодани (1.9.19) қўйиб

$$\Phi(x)-\Phi(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(x)(x_i-x_{i0}),\ \Phi_i(x)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(x)\psi_j(x) \qquad (1.9.21)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

x_0 нуқтада $\psi_j(x)$ ва $\varphi_{ij}(x)$ функциялар узлуксиз эканлигидан шу x_0 нуқтада $\Phi_i(x)$ функциялар узлуксиз эканлиги келиб чиқади. Бу эса $\Phi(x)$ мураккаб функциянинг x_0 нуқтада дифференциалланувчи эканлигини билдиради. Шунинг учун $x\to x_0$ да

$$\Phi(x)-\Phi(x_0)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x_i-x_{i0})+o(\rho(x,x_0))$$

тенгликни ёзамиз. Бу ерда

$$A_i=\Phi_i(x_0)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(x_0)\psi_j(x_0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(y_0)}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi_j(x_0)}{\partial x_i}=\frac{\partial\Phi(x_0)}{\partial x_i},$$

$$i=\overline{1,\ n} \qquad (1.9.22)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бу формула мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоидасини беради.

12–мисол. $f(x,y)$ функция R^2 фазонинг барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда қутб координаталарига ўтиб $\frac{\partial f}{\partial r}$ ва $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ хусусий ҳосилаларни топамиз.

$F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ бўлсин. У ҳолда (1.9.15) қоидага кўра

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

$f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $x \to x_0$ да

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}(x_i - x_{i0}) + o(\rho(x,x_0)) \qquad (1.9.23)$$

тенглик ўринли бўлади.

Таъриф бўйича

$$dx_i = \Delta x_i = x_i - x_{i0}$$

деб оламиз.

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция орттирмасининг эркли ўзгарувчиларга нисбатан

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} dx_i \qquad (1.9.24)$$

чизиқли формасига $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги дифференциали деб айтилади. У ҳолда $x \to x_0$ да

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + o(\rho(x,x_0))$$

тенглик ўринли бўлади.

Айрим ҳолларда (1.9.24) ифодага $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги биринчи тартибли дифференциали деб айтилади.

Энди мураккаб функциянинг дифференциалини топамиз. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ функциялар $x_0=(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in R^n$ нуқтада дифференциалланувчи ва $f(y)=f(y_1, y_2, \dots, y_m)$ функция эса $y_0=(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \dots, \varphi_m(x_0))$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$\Phi(x)=f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$$

мураккаб функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади. (1.9.24) ифодадан фойдаланиб

$$d\Phi(x_0)=df(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \dots, \varphi_m(x_0))=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi(x_0)}{\partial x_i} dx_i =$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(y_0)}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_j(x_0)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(y_0)}{\partial y_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j(x_0)}{\partial x_i} dx_i =$$

$$=\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(y_0)}{\partial y_j} dy_j(x_0), \quad dy_j(x_0)=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j(x_0)}{\partial x_i} dx_i$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

$$df(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_m(x_0))=\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(y_0)}{\partial y_j} dy_j(x_0) \qquad (1.9.25)$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар $y_1, y_2, \dots, y_m$ эркли ўзгарувчилар бўлса, у ҳолда $df(y_0)$ ифода мураккаб функциянинг (1.9.25) дифференциалидан фақат (1.9.25) ифодада φ_j функцияларнинг $dy_j(x_0)$ дифференциали билан фарқланади, яъни $df(y_0)=\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(y_0)}{\partial y_j} dy_j$ бўлади, бунда dy_j эркли ўзгарувчиларнинг дифференциалидир. Ҳар иккала ҳолда ҳам биринчи тартибли дифференциалнинг формаси бир хилдир. Бу ҳолда биринчи тартибли дифференциал *ўзгарувчиларни алмаштиришга нисбатан инвариант* деб айтилади.

Биринчи тартибли дифференциал форманинг ўзгарувчиларни алмаштиришга нисбатан инвариант бўлишлик хоссаси жуда ҳам муҳим қулайликдир.

(1.9.25) кўринишдаги $df(y_0)$ дифференциал форма ёзувида $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ўзгарувчиларнинг эркли ёки эрксиз ўзгарувчи эканлиги ўйлаб ўтирилмайди.

$f(x)$ функция $G \subset R^n$ соҳанинг барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда ҳар бир $x \in G$ нуқтада

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$$

дифференциални ҳисоблаш мумкин.

Бу дифференциал $2n$ та $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади, бундан ташқари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчилар танланганда $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ ўзгарувчиларнинг чизиқли функцияси бўлади. Дифференциаллаш қоидалари бир ўзгарувчили функциялар сингари

а) $d(u \pm v) = du \pm dv$,

б) $d(uv) = vdu + udv$,

в) $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$

шаклида бўлади. Масалан,

$$d(uv) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (uv)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx_i + \sum_{i=1}^{n} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_i = v \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + u \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_i =$$

$$= vdu + udv$$

тенглик ўринли бўлади. Бошқа тенгликлар ҳам худди шунга ўхшаш бажарилади.

13–мисол. $arctg \frac{y}{x}$ функциянинг дифференциалини топамиз.

$u = \frac{y}{x}$ бўлсин. У ҳолда

$$d\left(arctg\frac{y}{x}\right)=d\left(arctgu\right)=\frac{du}{1+u^2}=\frac{d\left(\dfrac{y}{x}\right)}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

бўлади.

$f(x)$ функция $G\subset R^n$ соҳанинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда бу $f(x)$ *функция G соҳада дифференциалланувчи* деб айтилади.

$f(x)$ функция $G\subset R^n$ қаварик бўлган соҳада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда бу соҳанинг ихтиёрий $x\in G$ ва $y\in G$ нуқталарини туташтирувчи кесма ҳам шу соҳага қарашли бўлади. Бу ҳолда $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in G$ ва $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in G$ нуқталар учун шундай бир $\theta\in(0,1)$ сон мавжудки, бунда

$$f(y)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta(y-x))\cdot(y_i-x_i) \qquad (1.9.26)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу (1.9.26) формула *чекли орттирмалар ҳақидаги Лагранж формуласи* деб айтилади.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $x\in G$ ва $y\in G$ нуқталар бўлса, у ҳолда бу нуқталарни туташтирувчи кесма ҳам шу қаварик соҳага тегишли бўлиб

$$\varphi(t)=f(x_1+t(y_1-x_1),\dots,x_n+t(y_n-x_n)),\ 0\le t\le 1 \qquad (1.9.27)$$

функция учун $\varphi(0)=f(x)$ ва $\varphi(1)=f(y)$ бўлади, ҳамда $\varphi(t)$ функция [0,1] оралиқда дифференциалланувчи бўлади. Мураккаб функциянинг ҳосиласига кўра,

$$\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1+t(y_1-x_1),\dots,x_n+t(y_n-x_n))(y_i-x_i) \quad (1.9.28)$$

тенгликка эга бўламиз. $\varphi(t)$ функцияга [0,1] оралиқда бир ўзгарувчили функциялар учун ўринли бўлган чекли орттирмалар ҳақидаги Лагранж формуласини қўлласак, у ҳолда шундай бир $\theta\in(0,1)$ сон мавжудки, бунда

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$$
тенглик ўринли бўлади. Бу эса (1.9.26) тенгликни билдиради.

$f(x)$ функция $G\subset R^n$ очиқ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ хусусий ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда бу $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ хусусий ҳосила x ўзгарувчининг функцияси сифатида қандайдир x_0 нуқтада
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$$
ҳосилага эга бўлиши мумкин. Бу ҳосила иккинчи тартибли хусусий ҳосила деб айтилади ва
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)\ ,\ f_{x_i x_j}(x_0)\ ,\ D_{x_i x_j} f(x_0)$$
каби символлар билан белгиланади.

Икки ўзгарувчили $f(x,y)$ функция учун (x,y) нуқтада
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$
тўртта иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни ёзиш мумкин.

$f_{xy}(x,y),\ f_{yx}(x,y)$ хусусий ҳосилалар *аралаш ҳосилалар* деб айтилади. Умуман олганда бу аралаш ҳосилалар тенг бўлмайди. Бунга мисол келтирамиз.

14–мисол.
$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$
функцияни қараймиз. У ҳолда бу функция учун $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ эканлигини кўрсатамиз. Маълумки,
$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0,$$
$$x^2+y^2>0 \quad \text{учун} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$x^2+y^2>0$ учун $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\dfrac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$

тенгликлар ўринлидир. Шунга кўра

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=1,$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=-1$$

бўлади. Шундай қилиб, $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ бўлади.

Энди аралаш ҳосилаларнинг тенглиги ҳақидаги теоремани келтирамиз.

12–теорема. *Агар ҳар иккала $f_{xy}(x,y)$ ва $f_{yx}(x,y)$ аралаш ҳосилалар қандайдир (x_0,y_0) нуқтанинг атрофида аниқланган ва шу нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$ тенглик ўринли бўлади.*

Исбот. Аралаш ҳосилалар

$$\Pi=\left\{(x,y):\left|x-x_0\right|<\varepsilon,\ \left|y-y_0\right|<\eta\right\}$$

тўғри тўртбурчакда аниқланган ва (x_0,y_0) нуқтада узлуксиз бўлсин. Бу Π тўғри тўртбурчакда

$$w(x,y)=f(x,y)-f(x_0,y)-f(x,y_0)+f(x_0,y_0)$$

функцияни қараймиз.

Ҳар бир тайинланган $y\in(y_0-\eta,\ y_0+\eta)$ учун $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ интервалда

$$\varphi(t)=f(t,y)-f(t,y_0)$$

функцияни қараймиз. Бу функция $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ интервалда дифференциалланувчи ва

$$\varphi'(t)=f_x(t,y)-f_x(t,y_0)$$

бўлади. Биз $w(x,y)$ функцияни $w(x,y)=\varphi(x)-\varphi(x_0)$ шаклида ёзамиз. Бу функцияга чекли орттирмалар ҳақидаги ҳақидаги Лагранж формуласини қўллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$w(x,y)=\varphi'(x_0+\theta_1(x-x_0))(x-x_0)=$$
$$=\Delta x\left[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)\right],\quad 0<\theta_1<1$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Чекли орттирмалар ҳақидаги ҳақидаги Лагранж формуласини яна бир бор y ўзгарувчи бўйича қўллаб

$$w(x,y)=\Delta x\Delta y\ f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y),\quad 0<\theta_2<1 \qquad (1.9.29)$$
тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди ҳар бир тайинланган $x\in(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ учун $\tau\in(y_0-\eta,\ y_0+\eta)$ интервалда

$$\psi(\tau)=f(x,\tau)-f(x_0,\tau)$$

функцияни қараймиз. Бу функция $\tau\in(y_0-\eta,\ y_0+\eta)$ интервалда дифференциалланувчи ва

$$\psi'(\tau)=f_y(x,\tau)-f_y(x_0,\tau)$$

бўлади. Биз $w(x,y)$ функцияни $w(x,y)=\psi(y)-\psi(y_0)$ шаклида ёзамиз. Бу функцияга чекли орттирмалар ҳақидаги ҳақидаги Лагранж формуласини қўллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$w(x,y)=\psi'(y_0+\theta_3(y-y_0))(y-y_0)=$$
$$=\Delta y\Big[f_y(x,y_0+\theta_3\Delta y)-f_y(x_0,y_0+\theta_3\Delta y)\Big],\quad 0<\theta_3<1$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Чекли орттирмалар ҳақидаги ҳақидаги Лагранж формуласини яна бир бор x ўзгарувчи бўйича қўллаб

$$w(x,y)=\Delta y\,\Delta x\ f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y),\quad 0<\theta_4<1 \qquad (1.9.30)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Шунга кўра (1.9.29) ва (1.9.30) тенгликлардан

$$f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)$$

тенглик келиб чиқади. $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ интилганда лимитга ўтиб ва аралаш ҳосилаларнинг (x_0,y_0) нуқтада узлуксиз эканлигидан $f_{xy}(x_0,\ y_0)=f_{yx}(x_0,\ y_0)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

Агар n ўзгарувчили $f(x_1,x_2,...,x_n)$ функция учун $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ ва $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ ҳосилаларни ҳисобласак, у ҳолда x_i ва x_j ўзгарувчидан бошқа ўзгарувчилар тайинланади. Шунинг учун бу $f(x_1,x_2,...,x_n)$ функцияни аслида икки ўзгарувчили функция сифатида қараб, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ ва $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ аралаш ҳосилалар $x_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ нуқтанинг атрофида мавжуд ва шу x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ тенгликни ёзиш мумкин бўлади.

Биринчи тартибдан юқори бўлган тартибли ҳосилалар индукция йўли билан аниқланади. Масалан, уч ўзгарувчили $f(x, y, z)$ функция бўлса, у ҳолда учинчи тартибли ҳосила

$$\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z}\right)$$

бўлади. Агар n ўзгарувчили $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция бўлса, у ҳолда m–тартибли ҳосила

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}\right)$$

шаклида аниқланади. Агар m–тартибли барча хусусий ҳосилалар x_0 нуқтанинг атрофида мавжуд ва бу ҳосилалар шу x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда уларнинг тенг эканлигини ўзгарувчиларнинг индексларининг кетма–кет алмаштириш йўли билан ҳосил қиламиз.

$G \subset R^n$ соҳада биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлган $u(x)$ функция берилган бўлсин. У ҳолда

$$du(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx_i, \qquad x \in G$$

биринчи тартибли дифференциал $2n$ та $x_1, x_2, ..., x_n$ ва $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ ўзгарувчиларнинг функцияси бўлади.

Агар $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ ўзгарувчиларни тайинласак, у ҳолда $du(x)$ дифференциал n та $x_1, x_2, ..., x_n$ ўзгарувчиларнинг функцияси бўлиб $G \subset R^n$ соҳада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади. Шунга кўра $du(x)$ дифференциал x ўзгарувчининг функцияси сифатида $x \in G$ нуқтада $d(du(x))$ дифференциалга эга бўлади. Агар эркли ўзгарувчиларнинг орттирмасини $\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_n$ орқали белгиласак, у ҳолда

$$d(du(x))=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(du(x))\delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k\partial x_i}dx_i\delta x_k \qquad (1.9.31)$$

бўлади. $d(du(x))$ ифода $dx_1,\delta x_1,dx_2,\delta x_2,..., dx_n,\delta x_n$ орттирмаларга нисбатан бичизиқли форма бўлади. Бу бичизиқли формада $dx_1=\delta x_1, dx_2=\delta x_2,..., dx_n=\delta x_n$ деб олсак, у ҳолда биз квадратик формага эга бўламиз. Бу квадратик форма $u(x)$ функциянинг $x\in G$ нуқтадаги *иккинчи тартибли дифференциали* деб айтилади ва $d^2u(x)$ орқали белгиланади. Шундай қилиб, $x\in G$ нуқтадаги иккинчи тартибли дифференциал

$$d^2u(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k\partial x_i}dx_i dx_k \qquad (1.9.32)$$

шаклида бўлади.

Худди шунга ўхшаш барча учинчи тартибли хусусий ҳосилалар узлуксиз деб олсак, у ҳолда биз $d^2u(x)$ ифодадан биринчи тартибли дифференциални ҳисоблаб кейин ҳосил бўлган ифодада $dx_1=\delta x_1, dx_2=\delta x_2,..., dx_n=\delta x_n$ деб олсак *учинчи тартибли дифференциал* деб аталувчи формани ҳосил қиламиз. Учинчи тартибли дифференциал $d^3u(x)$ орқали белгиланади. Шундай қилиб, $x\in G$ нуқтадаги учинчи тартибли дифференциал

$$d^3u(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}dx_i dx_j dx_k \qquad (1.9.33)$$

шаклида бўлади.

Агар $u(x)$ функциянинг барча $m-$тартибли хусусий ҳосилалари $x\in G$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда индукция бўйича $m-$тартибли дифференциални аниқлаш мумкин бўлади. Агар $d^{m-1}u(x)$ дифференциал $dx_1,dx_2,...,dx_n$ ўзгарувчиларга нисбатан $m-1$ тартибли бир жинсли форма бўлиб унинг коэффициентлари x ўзгарувчининг функцияси бўлса, у ҳолда биз $d^{m-1}u(x)$ ифодадан биринчи тартибли дифференциални ҳисоблаб кейин ҳосил бўлган ифодада $dx_1=\delta x_1, dx_2=\delta x_2,..., dx_n=\delta x_n$ деб олсак $m-$тартибли $d^m u(x)$ дифференциални ҳосил қиламиз, яъни

$$d^m u(x) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \cdots dx_{i_m} \qquad (1.9.34)$$

бўлади.

Энди иккинчи тартибли дифференциалнинг ўзгарувчиларни алмаштиришга нисбатан инвариантлик хоссасини сақламаслигини кўрсатамиз.

$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ва $x_i = \varphi_i(u)$, $u \in R^m$ функциялар берилган бўлсин. $f(x)$ ва $\varphi_i(u)$ функцияларнинг барча иккинчи тартибгача хусусий ҳосилалари узлуксиз ва $f(\varphi_1(u), \varphi_2(u), ..., \varphi_n(u)) = f(x(u))$ мураккаб функция u нуқтанинг қандайдир атрофида аниқланган бўлсин. У ҳолда биринчи тартибли дифференциалнинг ўзгарувчиларни алмаштиришга нисбатан инвариантлигига кўра

$$df(x(u)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i(u)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Кўпайтма ва йиғиндининг дифференциалини ҳисоблаш қоидасига кўра

$$d^2 f(x(u)) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(u)) dx_i(u) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x(u))}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x(u))}{\partial x_i} d^2 x_i(u) \quad (1.9.35)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (1.9.35) формула (1.9.32) формуладан $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x(u))}{\partial x_i} d^2 x_i(u)$ йиғинди билан фарқланиб, бу йиғинди $x_1, x_2, ..., x_n$ эркли ўзгарувчи бўлганда нолга айланади. Агар ўзгарувчиларни алмаштириш чизиқли бўлса, у ҳолда $d^2 x_i = 0,\ i = \overline{1, n}$ бўлади. Шундай қилиб иккинчи тартибли $d^2 f(x)$ дифференциал чизиқли алмаштиришга нисбатан инвариант бўлади. Худди шунингдек барча тартибли дифференциаллар учун ҳам шундай бўлади.

Агар $u(x\ y$ функциянинг иккинчи тартибгача барча хусусий ҳосилалари узлуксиз бўлса, у ҳолда аралаш ҳосилаларнинг тенглигидан фойдаланиб

$$d^2u(x,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)dx^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)dxdy+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y)dydx+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)dy^2=u_{xx}dx^2+2u_{xy}dxdy+u_{yy}dy^2 \quad (1.9.36)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар

$$d=\sum_{i=1}^{n} dx_i\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (1.9.37)$$

формал дифференциал оператор киритилса, у ҳолда

$$d^2u(x)=(d^2)u(x)=\left(\sum_{i=1}^{n} dx_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 u(x),$$

$$d^m u(x)=(d^m)u(x)=\left(\sum_{i=1}^{n} dx_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m u(x)$$

символик формалар ўринли бўлади. Дифференциал операторларнинг кўпайтмаси уларнинг кетма–кет қўлланилиши деб тушунилади. Масалан, агар $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$ бўлса, у ҳолда

$$\left(D_iD_j\right)u=D_i\left(D_j\right)u=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},\ \ D_iD_j=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} \qquad (1.9.38)$$

бўлади. (1.9.37) кўринишдаги дифференциал операторларни кўпайтиришда (1.9.38) қоидадан фойдаланиш керак. Бунда эркли ўзгарувчиларнинг $dx_1,dx_2,...,dx_n$ дифференциаллари ҳақиқий сон каби кўпайтирилади. Энди дифференциал ифодаларда ўзгарувчиларни алмаштиришга доир мисоллар келтирамиз.

15–мисол. $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ифодани $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$ қутб координаталарига ўтиб унинг ифодасини топамиз. Ҳамда $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ Лаплас тенгламасининг фақат r қутб радиусга боғлиқ ечимини топамиз.

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ бўлгани учун $r^2 = x^2 + y^2$ бўлади. У ҳолда $rdr = xdx + ydy$, $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$,

$$d\varphi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{-y}{r^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi} = \cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

Шундай қилиб

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},\qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} +$$

$$+ \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} +$$

$$+ \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi},$$

$w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$ ҳосил бўлади. Энди $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг фақат r қутб радиусга боғлиқ $u = v(r)$ ечимини топамиз. У ҳолда $u = v(r)$ ечим $\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} = 0$ ёки $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) = 0$ дифференциал тенгламанинг ечими бўлади. Бундан $r\dfrac{\partial v}{\partial r}=C_1$, $v=C_1\ln r+C_2$ ҳосил бўлади. Бу ерда C_1, C_2–ихтиёрий ўзгармаслардир.

16–мисол. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad a>0,\ -\infty< x, t <+\infty$ тор тебраниш тенгламасида $\xi=x-at,\quad \eta=x+at$ ўзгарувчиларни алмаштирамиз ва бу тенгламанинг умумий ечимини топамиз. $w(\xi,\eta)=w(x-at,x+at)=u(x,t)$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}=\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)w\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=-a\frac{\partial w}{\partial \xi}+a\frac{\partial w}{\partial \eta}=-a\left(\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \eta}\right)w\ ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[a^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2-a^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2\right]w=$$

$$=-4a^2\frac{\partial^2 w(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}=0,\quad \frac{\partial^2 w(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}=0 \text{ бўлади.}$$

Бу $\dfrac{\partial^2 w(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}=0$ тенглама осонгина ечилади. $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\eta}\right)=0$ бўлгани учун $\dfrac{\partial w}{\partial\eta}=\varphi(\eta)$, бунда $\varphi(\eta)$ функция η ўзгарувчига боғлиқ ихтиёрий узлуксиз функция бўлади. Бу $\varphi(\eta)$ функциянинг R даги бошланғичи $\Phi(\eta)$ бўлсин. У ҳолда $\dfrac{\partial w}{\partial\eta}=\varphi(\eta)$ тенгламани интеграллаб $w=\Phi(\eta)+\Psi(\xi)$ ечимини ҳосил қиламиз, бунда $\Psi(\xi)$ ихтиёрий функция бўлади.

Агар $\Phi(\eta)$ ва $\Psi(\xi)$ функциялар узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда берилган тенгламанинг умумий ечими $u(x,t)=\Psi(x-at)+\Phi(x+at)$ шаклида бўлади.

17–мисол. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ дифференциал тенгламада $u = x,\ v = y + z$ ўзгарувчиларни алмаштирамиз. Берилган тенгламани $\dfrac{\left(z_y\right)_x}{\left(1+z_y\right)^2} = 1$ ёки $-\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{1+z_y} = 1$ шаклида ёзамиз.

$$z\left(x(u,v), y(u,v)\right) = w(u,v)\ , \qquad z\left(x,y\right) = w\left(x, y + z(x,y)\right)$$

бўлсин. У ҳолда бу айниятнинг ҳар иккала томонидан x ва y ўзгарувчилар бўйича ҳосилаларни ҳисобласак $z_x = w_u + w_v \cdot z_x$, $z_y = w_v \cdot (1 + z_x)$, $z_x = \dfrac{w_u}{1 - w_v}$, $z_y = \dfrac{w_v}{1 - w_v}$, $\dfrac{1}{1+z_y} = 1 - w_v$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу ифодаларни берилган тенгламага қўйсак, у ҳолда

$$\frac{\partial}{\partial x} w_v = 1\ , \quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 1\ , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + z_x \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 1\ ,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{w_u}{1 - w_v} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 1$$

тенглама ҳосил бўлади.

Агар $x_1, x_2, ..., x_n$ Декарт ортогонал координаталаридан ихтиёрий $y_1, y_2, ..., y_n$ эгри чизиқли координаталарига ўтганда Лаплас операторининг $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ ифодаси

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sqrt{g}\, g^{jk} \frac{\partial u}{\partial y_k}\right)$$

формула бўйича алмашади, бунда $g = \det\left\| g_{jk}(y_1, y_2, ..., y_n) \right\|$, $g_{jk}(y_1, y_2, ..., y_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_k}$, $g^{jk} = \dfrac{G^{jk}}{g}$, $G^{jk} = G^{kj}$ орқали $\det\left\| g_{jk} \right\|$ детерминантдаги g_{jk} (ёки g_{kj}) элементнинг алгебраик тўлдирувчиси белгиланган. Бундан ташқари, агар $y_1, y_2, ..., y_n$ эгри чизиқли координаталар ортогонал бўлса, у ҳолда $j \neq k$ учун $g_{jk} = 0$ бўлади. Агар $n = 2$ бўлса, у ҳолда Лаплас операторининг

$\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ифодаси $x = \varphi(\xi, \eta),\ y = \psi(\xi, \eta)$ эгри чизиқли координаталар орқали

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{g}\, g^{11}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{g}\, g^{12}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{g}\, g^{21}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{g}\, g^{22}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

формула бўйича алмашади, бунда $g = \left(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi\right)^2$,

$g^{11} = \dfrac{1}{g}\left(x_\eta^2 + y_\eta^2\right),\quad g^{12} = g^{21} = -\dfrac{1}{g}\left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right),\quad g^{22} = \dfrac{1}{g}\left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right)$

бўлади. Хусусан, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ қутб координаталарига ўтганда $\Delta u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ ҳосил бўлади.

Агар $n = 3$ бўлса, у ҳолда Лаплас операторининг $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ифодаси $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$ цилиндрик координаталарига ўтганда

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ҳосил бўлади. Агар $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ сферик координаталарига ўтганда

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

ҳосил бўлади. Агар $x = \xi\eta\sin\varphi$, $y = \sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}$, $z = \xi\eta\cos\varphi$ сфероидал координаталарига ўтганда

$$\Delta u = \frac{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi\eta(\xi^2-\eta^2)}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\sqrt{\frac{\xi^2-1}{1-\eta^2}}\,\xi\eta\frac{\partial u}{\partial \xi}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-1}}\,\xi\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi\eta}\frac{1}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right]\right\}$$

ҳосил бўлади.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

11.1. $P_n(x,y,z)$ бир жинсли n–даражали кўпҳад бўлсин. У ҳолда $d^n P_n(x,y,z)=n!P_n(dx,dy,dz)$ тенгликни исбот қилинг.

11.2. $Au=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ бўлсин. Агар

а) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; б) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

бўлса, у ҳолда Au ва $A^2u=A(Au)$ ифодаларни топинг.

11.3. $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ бўлсин. Агар

а) $u=\sin x ch y$; б) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

бўлса, у ҳолда Δu ифодани топинг.

11.4. $\Delta_1 u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ ва $\Delta_2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ бўлсин. Агар

а) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$; б) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

бўлса, у ҳолда $\Delta_1 u$ ва $\Delta_2 u$ ифодаларни топинг.

11.5. Агар $u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$ бўлса, у ҳолда $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ифодани топинг.

11.6. $u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ функция a ва b ўзгармаслар учун $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *иссиқлик ўтказувчанлик* тенгламасини қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.7. Агар $u=u(x,t)$ функция иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини қаноатлантирса, у ҳолда

$$v=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cdot u\left(\frac{x}{a^2t},-\frac{1}{a^4t}\right)\qquad (t>0)$$

функция ҳам шу тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.8. $u=\dfrac{1}{r}$, бунда $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ функция $r\neq 0$ учун $\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ *Лаплас тенгламасини* қаноатлантиришини исбот қилинг.

11.9. Агар $u=u(x,y,z)$ функция Лаплас тенгламасини қаноатлантирса, у ҳолда k ўзгармаслар ва $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ учун

$$v=\frac{1}{r}\cdot u\left(\frac{k^2x}{r^2},\frac{k^2y}{r^2},\frac{k^2z}{r^2}\right)$$

функция ҳам шу тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.10. $u=\dfrac{C_1e^{-ar}+C_2e^{ar}}{r}$ функция C_1, C_2 ўзгармаслар ва $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ учун $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2u$ *Гельмгольц* тенгламасини қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.11. Агар $u_1=u_1(x,y,z)$ ва $u_2=u_2(x,y,z)$ функциялар $\Delta u=0$ Лаплас тенгламасини қаноатлантирса, у ҳолда

$$v=u_1(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)\cdot u_2(x,y,z)$$

функция $\Delta(\Delta v)=0$ бигармоник тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.12. Агар $f=f(x,y,z)$ функция m марта дифференциалланувчи n–даражали бир жинсли функция бўлса, у ҳолда

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)=n(n-1)...(n-m+1)\cdot f(x,y,z)$$

тенгликни исбот қилинг.

11.13. Агар f ихтиёрий дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда $z=x^n f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$ функция $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=nz$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.14. Агар f ихтиёрий дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда $z = y \cdot f\left(x^2 - y^2\right)$ функция $y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.15. Агар f ихтиёрий дифференциалланувчи функция ва $u = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{6}x^3(y+z) + \dfrac{1}{2}x^2yz + f\left(y - x,\ z - x\right)$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}$ ифодани соддалаштиринг.

11.16. Агар φ ва ψ функциялар ихтиёрий икки марта дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ функция $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.17. Агар φ ва ψ функциялар ихтиёрий икки марта дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$ функция $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.18. Агар φ ва ψ функциялар ихтиёрий икки марта дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ функция $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.19. Агар φ ва ψ функциялар ихтиёрий икки марта дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда

$$u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

функция $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.20. Агар φ ва ψ функциялар ихтиёрий икки марта дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда $u = \varphi\left[x + \psi(y)\right]$

функция $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.21. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0$ тенгламанинг $u=u(x,y,z)$ ечимини топинг.

11.22. $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$ тенгламанинг $z(x,x^2)=1$ шартни қаноатлантирувчи $u=u(x,y)$ ечимини топинг.

11.23. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ тенгламанинг $z(x,0)=1,\ z_y'(x,0)=x$ шартларни қаноатлантирувчи $z=z(x,y)$ ечимини топинг.

11.24. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ тенгламанинг $z(x,0)=x,\ z(0,y)=y^2$ шартларни қаноатлантирувчи $z=z(x,y)$ ечимини топинг.

11.25. Агар u ўзгарувчига боғлиқ $\Phi(u)$ функция ихтиёрий дифференциалланувчи функция ва a,b,c ўзгармаслар бўлса, у ҳолда $ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2)$ тенглама билан аниқланадиган $z=z(x,y)$ функция $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.26. Агар α ўзгарувчига боғлиқ $f(\alpha)$ функция ихтиёрий дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда

$$\left.\begin{array}{l} z=\alpha x+\dfrac{y}{\alpha}+f(\alpha) \\ 0=x-\dfrac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha) \end{array}\right\}$$

тенгламалар системаси билан аниқланадиган $z=z(x,y)$ функция $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=1$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.27. Агар α ўзгарувчига боғлиқ $f(\alpha)$ функция ихтиёрий дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда

$$\left.\begin{array}{l}[z-f(\alpha)]^2 = x^2(y^2-\alpha^2) \\ [z-f(\alpha)]f'(\alpha) = \alpha x^2\end{array}\right\}$$

тенгламалар системаси билан аниқланадиган $z = z(x, y)$ функция $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = xy$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.28. Агар α ўзгарувчига боғлиқ $\varphi(\alpha)$ ва $\psi(\alpha)$ функциялар ихтиёрий дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда

$$\left.\begin{array}{l}z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha) \\ 0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)\end{array}\right\}$$

тенгламалар системаси билан аниқланадиган $z = z(x, y)$ функция $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.29. $y = x\varphi(z) + \psi(z)$ тенглама билан аниқланадиган $z = z(x, y)$ ошкормас функция

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

11.30. $W = x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2}$ ифодани $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = arctg\frac{y}{x}$ янги функциялар киритиш орқали алмаштиринг.

11.31. *Лежандр алмаштириши*да ҳар бир (x, y) нуқтага $y = y(x)$ чизиқ орқали (X, Y) нуқта мос қилиб қўйилади, бунда $X = y'$, $Y = xy' - y$ деб олинади. Y', Y'' ва Y''' ҳосилаларни аниқланг.

11.32. $A, B, C-$ ўзгармас сонлар ва $AC - B^2 < 0$ бўлсин. У ҳолда $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ тенгламани $\xi = x + \lambda_1 y$, $\eta = x + \lambda_2 y$ чизиқли алмаштириш ёрдамида $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ шаклга келтиринг ва берилган тенгламанинг умумий ечимини топинг.

11.33. $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}$ *Коши–Риман* шартларини қаноатлантирувчи ихтиёрий махсусмас $x=\varphi(u,v),\, y=\psi(u,v)$ алмаштириш бажарганда $\Delta z\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ Лаплас тенгламасининг шакли ўзгармаслигини исбот қилинг.

11.34. $u=f(r)$, бунда $r=\sqrt{x^2+y^2}$ деб олганда

$$\text{а)}\quad \Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\qquad \text{б)}\quad \Delta(\Delta u)=0$$

тенгламаларни алмаштиринг.

11.35. $w=f(u)$, бунда $u=(x-x_0)(y-y_0)$ деб олганда $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+cw=0$ тенгламанинг шакли қандай ўзгаришини аниқланг.

11.36. $x+y=X$, $y=XY$ деб олганда $A=x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}$ ифодани алмаштиринг.

11.37. $x=r\sin\theta\cos\varphi,\; y=r\sin\theta\sin\varphi,\; z=r\cos\theta$ сферик координаталар системасига ўтишни иккита

$x=R\cos\varphi,\; y=R\sin\varphi,\; z=z$ ва $R=r\sin\theta,\; \varphi=\varphi,\; z=r\cos\theta$

хусусий алмаштиришларнинг композицияси деб тасвирлаб

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \text{ ва } \Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ифодаларни алмаштиринг.

11.38. Ҳар қандай $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$ тенгламани $a,b,c-$ ўзгармас сонлар бўлган ҳолда $z=u(x,y)\cdot e^{\alpha x+\beta y}$, бунда $\alpha,\beta-$ ўзгармас сонлар бўлган $u=u(x,y)$ янги ўзгарувчи ёрдамида $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_1 u=0$ $(c_1=const)$ шаклидаги тенгламага келтириш мумкин эканлигини кўрсатинг.

11.39. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ тенглама $x'=\dfrac{x}{y},\ y'=-\dfrac{1}{y},\ u'=\dfrac{u}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$ янги ўзгарувчилар ёрдамида, бунда u' функция x' ва y' эркли ўзгарувчиларнинг функцияси деб олинганда тенглама шакли ўзгармаслигини кўрсатинг.

11.40. $q(1+q)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+p(1+p)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,

бунда $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ва $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$ бўлган тенгламани $u=x+z$, $v=y+z$, $w=x+y+z$ янги ўзгарувчилар ёрдамида, бунда $w=w(x,y)$ деб ҳисоблаб алмаштиринг.

11.41. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$

бўлган тенгламани $x=e^{\xi}$, $y=e^{\eta}$, $z=e^{\zeta}$, $u=e^{w}$ янги ўзгарувчилар ёрдамида, бунда $w=w(\xi,\eta,\zeta)$ деб ҳисоблаб алмаштиринг.

11.42. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$ бўлган тенгламада x, y ва z ўзгарувчиларнинг ролларини ихтиёрий равишда тақсимлаганда ҳам бу тенгламанинг кўриниши ўзгармаслигини кўрсатинг.

11.43. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ тенгламани y ва z эркли ўзгарувчилар x эса уларнинг функцияси деб қараб бу тенгламани ечинг.

11.44. $X=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $Y=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $Z=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}-z$, бунда $Z=Z(X,Y)$ бўлган *Лежандр алмаштириши*ни қўллаб

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

тенгламани алмаштиринг.

10-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг эктремумлари

1. Кўп ўзгарувчили функция учун Тейлор формуласи. Биз кўп ўзгарувчили функция учун Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласини қараб чиқамиз.

Маълумки, $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$ нуқталар ва $\alpha\in R$ сон учун қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари $x+y=(x_1+y_1,\, x_2+y_2,...,x_n+y_n)\in R^n$ ва $\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n)\in R^n$ тенгликлар билан киритилган. Бу ерда $0=(0,0,...,0)\in R^n$ ноль элементни билдиради. Агар $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ ва $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in R^n$ нуқталар бўлса, у ҳолда

$$\Delta x=dx=x-x^0=(x_1-x_1^0,x_2-x_2^0,...,x_n-x_n^0)=(dx_1,dx_2,...,dx_n)$$

бўлади.

1–теорема. *$f(x)$ функциянинг $S_\delta(x^0)\subset R^n$ шардаги $m-$ тартибгача бўлган барча хусусий ҳосилалари узлуксиз бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x^0+\Delta x\in S_\delta(x^0)$ нуқта учун шундай бир $\theta\in(0,1)$ сон мавжудки, бунда*

$$f(x^0+\Delta x)=f(x^0)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{d^k f(x^0)}{k!}+r_m(x), \tag{1.10.1}$$

бунда

$$r_m(x)=\frac{1}{m!}d^m f(x^0+\theta\Delta x) \tag{1.10.2}$$

бўлган (Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи) тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $d^k f(\xi)$ ифода $f(x)$ функциядан ξ нуқтада ҳисобланган $k-$ тартибли дифференциали бўлиб бу дифференциал $dx_1,dx_2,...,dx_n$ эркли ўзгарувчиларга нисбатан $k-$ тартибли бир жинсли

$$d^k f(\xi)=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(\xi)=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f(\xi)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}dx_{i_1}\cdots dx_{i_k} \tag{1.10.3}$$

формадир.

Исбот. Агар $x^0+\Delta x\in S_\delta(x^0)$ нуқта бўлса, у ҳолда шарнинг симметрик эканлигидан $x^0-\Delta x\in S_\delta(x^0)$ бўлади. Бу шар қаварик тўплам бўлганлиги учун ихтиёрий $t\in[-1,1]$ учун $x^0+t\Delta x\in S_\delta(x^0)$ бўлади. Шунинг учун $[-1,1]$ ораликда бир ўзгарувчили

$$\varphi(t)=f(x^0+t\Delta x)=f(x_1^0+t\Delta x_1,\ldots,x_n^0+t\Delta x_n)$$

функция аникланган бўлади.

Бу $\varphi(t)$ функция $[-1,1]$ ораликда дифференциалланувчи бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш формуласини қўллаб

$$\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x^0+t\Delta x)}{\partial x_i}\Delta x_i=df(x^0+t\Delta x)=$$

$$=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x^0+t\Delta x)\qquad(1.10.4)$$

тенгликка эга бўламиз.

Худди шунга ўхшаш

$$\varphi''(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^0+t\Delta x)}{\partial x_i\partial x_j}\Delta x_i\Delta x_j=d^2f(x^0+t\Delta x)=$$

$$=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(x^0+t\Delta x)$$

тенгликка эга бўламиз. Ҳар бир $k=\overline{1,m}$ учун

$$\varphi^{(k)}(t)=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f(x^0+t\Delta x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}=$$

$$=d^kf(x^0+t\Delta x)==\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x^0+t\Delta x)\qquad(1.10.5)$$

формулалар ўринли бўлади. $\varphi(t)$ функцияга Лагранж кўринишидаги колдиқ ҳадли Тейлор формуласини қўллаймиз. Шундай бир $\theta\in(0,1)$ сон мавжудки, бунда

$$\varphi(t)=\varphi(0)+t\varphi'(0)+\cdots+\frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1}+r_m(t),\qquad r_m(t)=\frac{t^m}{m!}\varphi^{(m)}(\theta t)$$

бўлади. $t=1$ деб олсак, у ҳолда

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\cdots+\frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}+r_m(1), \qquad r_m(1)=\frac{t^m}{m!}\varphi^{(m)}(\theta)$$

ҳосил бўлади. Бу формулага $\varphi^{(k)}(t)$ ҳосила учун (1.10.5) ифодаларни олиб келиб қўйсак, у ҳолда

$$f(x^0+\Delta x)=f(x^0)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{d^k f(x^0)}{k!}+r_m(x),$$

бунда

$$r_m(x)=\frac{1}{m!}d^m f(x^0+\theta\Delta x)$$

бўлган Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи ҳосил бўлади.

Натижа. *Агар 1–теорема шартлари ўринли бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *функция учун* $|\Delta x|\to 0$ *да, бунда* $|\Delta x|=\sqrt{\Delta x_1^2+\cdots+\Delta x_n^2}$ *бўлганда Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи*

$$f(x^0+\Delta x)=f(x^0)+\sum_{k=1}^{m}\frac{d^k f(x^0)}{k!}+o\left(|\Delta x|^m\right), \qquad \textit{(1.10.6)}$$

ўринли бўлади.

Исбот. (1.10.1) формуладаги

$$r_m(x)=\frac{1}{m!}d^m f(x^0+\theta\Delta x)=$$

$$=\frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}\frac{\partial^m f(x^0+t\Delta x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}\Delta x_{i_1}\ \ldots\ \Delta x_{i_m} \qquad (1.10.7)$$

қолдиқ ҳадни қарайлик. Бу ерда $f(x)$ функциянинг барча $m-$ тартибли хусусий ҳосилалари x^0 нуқтада узлуксиз бўлгани учун

$$\frac{\partial^m f(x^0+t\Delta x)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}=\frac{\partial^m f(x^0)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}+\alpha_{i_1\ldots i_m}(x), \qquad (1.10.8)$$

бунда $|\Delta x|\to 0$ да $\alpha_{i_1\ldots i_m}(x)$ чексиз кичик бўлади.

$|\Delta x_i|\le|\Delta x|$ эканлигидан $\left|\Delta x_{i_1}\ \ldots\ \Delta x_{i_m}\right|\le|\Delta x|^m$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра $|\Delta x|\to 0$ да

$$\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}\alpha_{i_1\ldots i_m}(x)\,\Delta x_{i_1}\ \ldots\ \Delta x_{i_m}=o\left(|\Delta x|^m\right) \qquad (1.10.9)$$

тенглик ҳосил бўлади. (1.10.8) ва (1.10.9) ифодаларни (1.10.7) формулага қўйиб қолдиқ ҳад учун $|\Delta x| \to 0$ да

$$r_m(x) = \frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(x^0)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_m} +$$

$$+\frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \alpha_{i_1 \ldots i_m}(x) \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_m} =$$

$$= \frac{1}{m!} d^m f(x^0) + o\left(|\Delta x|^m\right) \qquad (1.10.10)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу $r_m(x)$ қолдиқ учун ҳосил қилинган (1.10.10) формулани (1.10.1) формулага қўйсак, у ҳолда (1.10.6) Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи ҳосил бўлади.

2. Кўп ўзгарувчили функциянинг экстремумлари. $f(x)$ функция $G \subset R^n$ соҳада аниқланган ва $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in G$ бўлсин. Агар шундай бир $S_\delta(x^0) \subset G$ шар мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in S_\delta(x^0)$ нуқталар учун $f(x) \geq f(x^0)$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг *локал минимум нуқтаси* деб айтилади. Агар шундай бир $S_\delta(x^0) \subset G$ шар мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in \overset{0}{S}_\delta(x^0)$ ўйилган шардаги нуқталар учун $f(x) > f(x^0)$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг *локал қатъий минимум нуқтаси* деб айтилади.

Агар шундай бир $S_\delta(x^0) \subset G$ шар мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in S_\delta(x^0)$ нуқталар учун $f(x) \leq f(x^0)$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг *локал максимум нуқтаси* деб айтилади. Агар шундай бир $S_\delta(x^0) \subset G$ шар мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in \overset{0}{S}_\delta(x^0)$ ўйилган шардаги нуқталар учун $f(x) < f(x^0)$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг *локал қатъий максимум нуқтаси* деб айтилади.

Агар ихтиёрий $x \in G$ нуқталар учун $f(x) \geq f(x^0)$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг $G \subset R^n$ соҳадаги *глобал (абсолют) минимум нуқтаси* деб айтилади. Агар ихтиёрий $x \in G \setminus \{x^0\}$ нуқталар учун $f(x) > f(x^0)$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг $G \subset R^n$ соҳадаги *глобал (абсолют) қатъий минимум нуқтаси* деб айтилади.

Агар ихтиёрий $x \in G$ нуқталар учун $f(x) \leq f(x^0)$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг $G \subset R^n$ соҳадаги *глобал (абсолют) максимум нуқтаси* деб айтилади. Агар ихтиёрий $x \in G \setminus \{x^0\}$ нуқталар учун $f(x) < f(x^0)$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг $G \subset R^n$ соҳадаги *глобал (абсолют) қатъий максимум нуқтаси* деб айтилади.

Функциянинг максимум ва минимум нуқталари унинг *экстремум нуқталари* деб айтилади. Энди экстремумнинг зарурий шартини келтирамиз.

2–теорема. *Агар $f(x)$ функциянинг x^0 экстремум нуқтасида $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ хусусий ҳосила мавжуд бўлса, у ҳолда бу ҳосила нолга тенг бўлади.*

Исбот. x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлсин. У ҳолда бу нуқта минимум ёки максимум нуқтаси бўлади. Масалан, минимум нуқтаси бўлсин. Бир ўзгарувчили

$$\varphi(x_k) = f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0)$$

функцияни қараймиз.

x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг минимум нуқтаси бўлгани учун шундай бир $S_\delta(x^0) \subset G$ шар мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in S_\delta(x^0)$ нуқталар учун $f(x) \geq f(x^0)$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Хусусан, ихтиёрий $x_k \in (x_k^0 - \delta,\ x_k^0 + \delta)$ учун

$\varphi(x_k) = f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0) \geq$

$$\geq f(x_1^0,...,x_{k-1}^0,x_k^0,x_{k+1}^0,...,x_n^0)=\varphi(x_k^0)$$

тенгсизлик бажарилади. Шунга кўра бир ўзгарувчили $\varphi(x_k)$ функция x_k^0 нуқтада минимумга эришади. Шунинг учун

$$\frac{d\varphi}{dx_k}(x_k^0)=0,\ \text{яъни}\ \ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)=0$$

бўлади.

Натижа. *Агар $f(x)$ функция x^0 экстремум нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу x^0 нуқтадаги биринчи тартибли дифференциал нолга тенг бўлади, яъни*

$$df(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)dx_i=0$$

бўлади.

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, x^0 нуқтада $f(x)$ функция дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу нуқтада барча $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$, $i=\overline{1,n}$ хусусий ҳосилалар мавжуд бўлади ва x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлгани учун $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)=0$, $i=\overline{1,n}$ ҳосил бўлади. Бундан эса $df(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)dx_i=0$ эканлиги келиб чиқади.

Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи ва $df(x^0)=0$ бўлса, у ҳолда бу x^0 нуқтага $f(x)$ функциянинг *стационар нуқтаси* дейилади. Агар $f(x)$ узлуксиз функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи ва $df(x^0)=0$ ёки бу нуқтада дифференциал мавжуд бўлмаса, у ҳолда бу x^0 нуқтага $f(x)$ функциянинг *критик нуқтаси* дейилади. Дифференциалланувчи функциянинг экстремум нуқталари функция экстремумининг зарурий шартига кўра стационар нуқта бўлади. Тескари тасдиқ ўринли эмас. Стационар нуқта экстремум нуқтаси бўлмаслиги мумкин.

1–мисол. $f(x,y)=xy$ функция учун $(0,0)$ нуқта стационар нуқта бўлади, лекин экстремум нуқтаси эмас.

$df(x,y)=ydx+xdy$ бўлгани учун $df(0,0)=0$ ва $(0,0)$ нуқта $f(x,y)=xy$ функциянинг стационар нуқта бўлади. Лекин ихтиёрий $\delta>0$ сон учун (δ,δ) ва $(\delta,-\delta)$ нуқталар $S_{2\delta}(0,0)$ доирага тегишли ва

$$f(\delta,\delta)=\delta^2>f(0,0)=0,\quad f(\delta,-\delta)=-\delta^2<f(0,0)=0$$

бўлади. Шунга кўра $(0,0)$ нуқта $f(x,y)=xy$ функциянинг экстремум нуқтаси эмас.

1–лемма. *Агар бир ўзгарувчили $\varphi(t)$ функция $t=0$ минимум нуқтасида биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда $\varphi'(0)=0$ ва $\varphi''(0)\geq 0$ бўлади.*

Исбот. $\varphi(t)$ функция $t=0$ нуқтада минимумга эга ва бу нуқтада ҳосила мавжуд бўлгани учун $\varphi'(0)=0$ бўлади. Шундай бир $\delta>0$ мусбат сон топилиб $|t|<\delta$ бўлган ихтиёрий t нуқта учун $\varphi(t)-\varphi(0)\geq 0$ тенгсизлик бажарилади. Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласига кўра $t\to 0$ да

$$0\leq\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t^2}=\frac{1}{t^2}\left[\varphi'(0)t+\varphi''(0)\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right]=\frac{1}{2}\varphi''(0)+o(1) \tag{1.10.11}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу тенгсизликда $t\to 0$ интилганда лимитга ўтсак, у ҳолда $\varphi''(0)\geq 0$ тенгсизлик келиб чиқади.

3–теорема*(минимумнинг зарурий шарти). $f(x)$ функция $x^0\in R^n$ минимум нуқтанинг атрофида биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда*

$$df(x^0)=0,\ d^2f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^0)dx_idx_j\geq 0 \tag{1.10.12}$$

бўлади.

Исбот. x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг минимум нуқтаси бўлсин. У ҳолда шундай бир $S_\delta(x^0)$ шар мавжуд бўлиб барча $\xi\in S_\delta(x^0)$ учун $f(\xi)-f(x^0)\geq 0$ тенгсизлик бажарилади. $x\in R^n$ ва $x\neq x^0$ бўлсин. У ҳолда $|\Delta x|=\rho(x,x^0)>0$ бўлади. $|t|<\dfrac{\delta}{|\Delta x|}$

бўлган ихтиёрий t учун $x^0 + t\Delta x \in S_\delta(x^0)$ ва шунинг учун $\varphi(t) = f(x^0 + t\Delta x) - f(x^0) \geq 0$ бўлади. $\varphi(t)$ функция $t = 0$ нуқта атрофида аниқланган ва $t = 0$ нуқтада минимумга эга бўлади.

Юқоридаги (1.10.4) ва (1.10.5) формулаларга кўра $\varphi(t)$ функция $t = 0$ нуқтада биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларга эга ва

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)dx_i = df(x^0),$$

$$\varphi''(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)dx_i dx_j = d^2 f(x^0)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бундан эса, 1–леммага кўра $df(x^0) = 0$ ва $d^2 f(x^0) \geq 0$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Худди 3–теорема сингари қуйидаги теорема ҳам ўринлидир.

4–теорема*(максимумнинг зарурий шарти). $f(x)$ функция $x^0 \in R^n$ максимум нуқтанинг атрофида биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда*

$$df(x^0) = 0,\ d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)dx_i dx_j \leq 0 \qquad (1.10.13)$$

бўлади.

$df(x^0) = 0$ ва $d^2 f(x^0) \geq 0$ шартлар $f(x)$ функция $x^0 \in R^n$ нуқтада минимумга эришиши учун зарурий шарт бўлиб, бу нуқтада $f(x)$ функция минимумга эришиши учун етарли эмас.

Масалан, $f(x, y) = x^3 + y^3$ функция ягона $x = y = 0$ стационар нуқтага эга. Бу нуқтада $df(0,0) = 0$ ва $d^2 f(0,0) = 0$ бўлади. Лекин бу $f(x, y) = x^3 + y^3$ функция $(0,0)$ нуқтада экстремумга эга бўлмайди.

Экстремумнинг етарли шартларини келтиришдан олдин биз квадратик формалар ҳақидаги зарурий бўлган тушунчаларни қараб чиқамиз.

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i \xi_j \qquad (1.10.14)$$

ифодага квадратик форма деб айтилади, бунда $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)\in R^n$, $a_{ij}=a_{ji}$ деб олинади. $A=\left(a_{ij}\right)$ матрица $\Phi(\xi)$ квадратик форманинг матрицаси деб айтилади.

Агар ихтиёрий $\xi\neq 0$ учун $\Phi(\xi)>0$ бўлса, у ҳолда $\Phi(\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j$ квадратик форма *мусбат аниқланган* деб айтилади.

Агар ихтиёрий $\xi\neq 0$ учун $\Phi(\xi)<0$ бўлса, у ҳолда $\Phi(\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j$ квадратик форма *манфий аниқланган* деб айтилади.

Агар шундай бир ξ ва ξ' нуқталар мавжуд бўлиб $\Phi(\xi)>0$ ва $\Phi(\xi')<0$ тенгсизликлари ўринли бўлса, у ҳолда $\Phi(\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j$ квадратик форма *аниқланмаган* деб айтилади.

$\Phi(\xi)$ квадратик форма бу ҳоллардан ташқари айнан ноль ҳам бўлишлиги мумкин.

Теорема *(Квадратик форма мусбат аниқланган бўлишлигининг Сильвестр критерияси). $\Phi(\xi)$ квадратик форма мусбат аниқланган бўлишлиги учун бу квадратик форма матрицасининг барча бош минорлари мусбат бўлишлиги, яъни*

$$\Delta_1=a_{11}>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0\ ,\ \dots,\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ & \dots\dots\dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}>0$$

тенгсизликларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Шуни таъкидлаш керакки, $\Phi(\xi)$ квадратик форма манфий аниқланган бўлишлиги учун $-\Phi(\xi)$ квадратик форма мусбат аниқланган бўлишлиги зарур ва етарлидир. Шунинг учун $\Phi(\xi)$ квадратик форма манфий аниқланган бўлишлиги учун

$$\Delta_1=a_{11}<0,\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\dots,\ (-1)^n\Delta_n=(-1)^n\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ & \dots\dots\dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}>0$$

тенгсизликларнинг бажарилиши зарур ва етарли бўлади.

2–лемма. *Агар* $\Phi(\xi)$ *квадратик форма мусбат аниқланган бўлса, у ҳолда шундай бир* $\gamma > 0$ *мусбат сон мавжуд бўлиб*

$$\Phi(\xi) \geq \gamma |\xi|^2 \text{ , бунда } |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2} \quad (1.10.15)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $\Phi(\eta)$ квадратик формани $S = \{\eta : \eta_1^2 + ... + \eta_n^2 = 1\}$ бирлик сферада қараймиз. $0 \notin S$ ва $\Phi(\eta)$ квадратик форма мусбат аниқланган бўлгани учун ихтиёрий $\eta \in S$ нуқта учун $\Phi(\eta) > 0$ бўлади. S компакт тўпламда узлуксиз бўлган $\Phi(\eta)$ функция ўзининг энг кичик қийматини қандайдир $\overline{\eta} \in S$ нуқтада қабул қилади. Шунинг учун $\gamma = \Phi(\overline{\eta})$ деб олсак, у ҳолда $\gamma > 0$ ва ихтиёрий $\eta \in S$ нуқта учун $\Phi(\eta) \geq \gamma$ тенгсизлик бажарилади.

Агар $\xi \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{\xi}{|\xi|}$ нуқта S сферага қарашли бўлади. Шунинг учун

$$\Phi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \geq \gamma$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Квадратик форманинг иккинчи тартибли бир жинсли эканлигидан

$$\frac{1}{|\xi|^2}\Phi(\xi) = \Phi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \geq \gamma$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Лемма исбот бўлди.

5–теорема*(экстремумнинг етарли шарти).* $f(x)$ *функция* $x^0 \in R^n$ *нуқтанинг атрофида иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва* $df(x^0) = 0$ *бўлсин. У ҳолда,*

агар иккинчи тартибли $d^2 f(x^0)$ *дифференциал мусбат аниқланган квадратик форма бўлса, у ҳолда* $x^0 \in R^n$ *нуқта* $f(x)$ *функциянинг локал қатъий минимум нуқтаси бўлади,*

агар иккинчи тартибли $d^2 f(x^0)$ *дифференциал манфий аниқланган квадратик форма бўлса, у ҳолда* $x^0 \in R^n$ *нуқта* $f(x)$ *функциянинг локал қатъий максимум нуқтаси бўлади,* *агар иккинчи тартибли $d^2 f(x^0)$ дифференциал аниқланмаган квадратик форма бўлса, у ҳолда $x^0 \in R^n$ нуқтада $f(x)$ функция локал экстремумга эришмайди.*

Бу ҳоллардан ташқари иккинчи тартибли $d^2 f(x^0)$ дифференциал айнан ноль ҳам бўлишлиги мумкин, яъни $d^2 f(x^0) \equiv 0$. Бу ҳолда кейинги юқори тартибли дифференциаллар текширилади.

Исбот. $m = 2$ учун (1.10.6) формуладан фойдаланамиз. $d\ f(x^0) = 0$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда $|\Delta x| \to 0$ да

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o\left(|\Delta x|^2\right) \qquad (1.10.16)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бунда $|\Delta x|^2 = \Delta x_1^2 + ... + \Delta x_n^2$ бўлади. Иккинчи тартибли

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) dx_i dx_j$$

дифференциал мусбат аниқланган квадратик форма бўлсин. У ҳолда 2–леммага кўра шундай бир $\gamma > 0$ мусбат сон мавжудки, бунда

$$d^2 f(x^0) \geq \gamma |\Delta x|^2$$

тенгсизлик ўринли бўлади. (1.10.16) формулада бу тенгсизликни қўллаб

$$f(x) - f(x^0) \geq \frac{\gamma}{2}|\Delta x|^2 + o\left(|\Delta x|^2\right) = \frac{\gamma}{2}|\Delta x|^2 \left(1 + \alpha(\Delta x)\right) \qquad (1.10.17)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз, бунда $\Delta x \to 0$ да $\alpha(\Delta x) \to 0$ бўлади. Шунга кўра шундай бир $S_\delta(x^0)$ шар мавжуд бўлиб барча $x \in S_\delta(x^0)$ учун $|\alpha(\Delta x)| \leq \frac{1}{2}$ тенгсизлик бажарилади. У ҳолда (1.10.17) тенгсизликдан ихтиёрий $x \in \overset{0}{S}_\delta(x^0)$ нуқталар учун

$$f(x) - f(x^0) \geq \frac{\gamma}{2}|\Delta x|^2 \left(1 + \alpha(\Delta x)\right) \geq \frac{\gamma}{4}|\Delta x|^2 > 0$$

тенгсизлиги бажарилади. Шунга кўра $x^0 \in R^n$ нуқта $f(x)$ функциянинг локал қатъий минимум нуқтаси бўлади. Худди шунга ўхшаш агар иккинчи тартибли $d^2 f(x^0)$ дифференциал манфий аниқланган квадратик форма бўлса, у ҳолда $x^0 \in R^n$ нуқта $f(x)$ функциянинг локал қатъий максимум нуқтаси эканлиги исбот қилинади.

Агар иккинчи тартибли $d^2 f(x^0)$ дифференциал аниқланмаган квадратик форма бўлса, у ҳолда $x^0 \in R^n$ нуқтада $f(x)$ функция локал минимумга эришишнинг зарурий шарти $d^2 f(x^0) \geq 0$ (ёки $x^0 \in R^n$ нуқтада $f(x)$ функция локал максимумга эришишнинг зарурий шарти $d^2 f(x^0) \leq 0$) бажарилмайди. Шунинг учун $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал минимумга (максимумга) эришмайди. Теорема исбот бўлди.

2–мисол. $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 4xz + 8yz + 5y^2 + 9z^2$ функцияни экстремумга текширамиз.

Бу $f(x,y,z)$ функциянинг стационар нуқталарини топамиз. Бу нуқталар

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 4z = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 10y + 8z = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 4x + 8y + 18z = 0$$

тенгламалар системасини ечиш орқали топилади. Бу системанинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 > 0$$

бўлади. Шунинг учун бу бир жинсли система $x = y = z = 0$ бўлган ягона ечимга эга бўлади. Демак, $f(x,y,z)$ функция ягона $(0,0,0)$ стационар нуқтага эга. $d^2 f(0,0,0)$ иккинчи тартибли дифференциални ҳисоблаймиз.

$$d^2 f(0,0,0) = 2dx^2 + 4dxdy + 8dxdz + 16dydz + 10dy^2 + 18dz^2.$$

Бу ерда

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 > 0$$

бўлганлиги учун Сильвестр критериясига кўра $d^2 f(0,0,0)$ квадратик форма мусбат аниқланган бўлади. Шунинг учун $(0,0,0)$ нуқта $f(x,y,z)$ функциянинг минимум нуқтаси бўлади.

Бу келтирилган 5–теоремага кўра икки ўзгарувчили $f(x,y)$ функциянинг (x_0,y_0) нуқта атрофидаги иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0\,,$$

$$f_{xx}(x_0,y_0)>0\,,\quad f_{xy}^2(x_0,y_0)-f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)<0$$

шартларнинг бажарилиши (x_0,y_0) нуқта $f(x,y)$ функциянинг локал қатъий минимум нуқтаси бўлишлиги учун етарлидир.

Худди шунга ўхшаш

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0\,,$$

$$f_{xx}(x_0,y_0)<0\,,\quad f_{xy}^2(x_0,y_0)-f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)<0$$

шартларнинг бажарилиши (x_0,y_0) нуқта $f(x,y)$ функциянинг локал қатъий максимум нуқтаси бўлишлиги учун етарлидир.

Агар

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0\,,$$

$$f_{xy}^2(x_0,y_0)-f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)>0$$

шартлар бажарилса, у ҳолда $f(x,y)$ функция (x_0,y_0) нуқтада локал экстремумга эришмайди.

Агар

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0\,,$$

$$f_{xx}(x_0,y_0)=0\,,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=0\,,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=0$$

шартлар бажарилса, у ҳолда $f(x,y)$ функциянинг (x_0,y_0) нуқтада локал экстремумга эришишини текшириш учун юқори тартибли дифференциаллардан фойдаланамиз.

3. Кўп ўзгарувчили функциянинг шартли экстремумлари. $G\subset R^n$ очиқ тўпламда $f_0(x),\ f_1(x),\dots,f_m(x)$ функциялар берилган бўлсин, бундан ташқари $m<n$ ва E тўплам G тўпламга қарашли бўлиб

$$f_1(x)=0,\ \dots,\ f_m(x)=0 \qquad (1.10.18)$$

тенгламалар системасини қаноатлантирувчи нуқталар тўплами бўлсин.

(1.10.18) тенгламалар *боғланиш тенгламалари* (ёки содда қилиб *боғланишлар*) деб айтилади.

Агар шундай бир $S_\delta(x^0)$ атроф мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in E \bigcap S_\delta(x^0)$ нуқталар учун $f_0(x) \geq f_0(x^0)$ тенгсизлиги бажарилса, у ҳолда $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in E$ нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги $f_0(x)$ функциянинг *шартли минимум нуқтаси* деб айтилади.

Агар шундай бир $S_\delta(x^0)$ атроф мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in \overset{0}{S}_\delta(x^0) \bigcap E$ нуқталар учун $f_0(x) > f_0(x^0)$ тенгсизлиги бажарилса, у ҳолда $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in E$ нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги $f_0(x)$ функциянинг *қатъий шартли минимум нуқтаси* деб айтилади

Худди шунингдек, агар шундай бир $S_\delta(x^0)$ атроф мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in E \bigcap S_\delta(x^0)$ нуқталар учун $f_0(x) \leq f_0(x^0)$ тенгсизлиги бажарилса, у ҳолда $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in E$ нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги $f_0(x)$ функциянинг *шартли максимум нуқтаси* деб айтилади.

Агар шундай бир $S_\delta(x^0)$ атроф мавжуд бўлиб ихтиёрий $x \in \overset{0}{S}_\delta(x^0) \bigcap E$ нуқталар учун $f_0(x) < f_0(x^0)$ тенгсизлиги бажарилса, у ҳолда $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in E$ нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги $f_0(x)$ функциянинг *қатъий шартли максимум нуқтаси* деб айтилади. Шартли максимум ва минимум нуқталари *шартли экстремум нуқталари* деб айтилади.

(1.10.18) тенгламалар системасини қайсидир m та x_i ўзгарувчиларга нисбатан ечиш мумкин бўлсин деб олайлик. У ҳолда бу x_i ўзгарувчиларнинг қолган $n-m$ та ўзгарувчилар орқали ифодасини $f_0(x)$ функцияга олиб бориб қўйсак, биз $n-m$ та ўзгарувчиларга боғлиқ $F(x)$ функциянинг оддий (шартсиз) экстремумини топиш ҳақидаги масалага келамиз.

3–мисол. Агар $x+y=1$ бўлса, у ҳолда $z=1-x^2-y^2$ функциянинг шартли экстремум нуқталарини топамиз.

$x+y=1$ боғланиш тенгламаси y ўзгарувчига нисбатан осонгина ечилади, яъни $y=1-x$ бўлади. y ўзгарувчи учун бу ифодани $z=1-x^2-y^2$ функцияга олиб бориб қўйсак, у ҳолда $z=1-x^2-(1-x)^2=2x-2x^2$ функцияни ҳосил қиламиз. $2x-2x^2$ функция $x=\dfrac{1}{2}$ нуқтада максимумга эришади. Шунинг учун $z=1-x^2-y^2$ функция $x+y=1$ боғланиш ўринли бўлганда $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ нуқтада шартли минимумга эришади.

Боғланиш тенгламаларини қайсидир ўзгарувчиларга нисбатан ечиш қийин кечиши муносабати билан шартли экстремумни аниқлашнинг бундай тўғри усулини қўллаш қийинчилик туғдириши мумкин. Шу сабабли биз шартли экстремум масалаларига қўлланиладиган *Лагранж кўпайтувчилари усулини* келтирамиз:

$n+m$ ўзгарувчили

$$L(x,\lambda)= f_0(x)+\lambda_1 f_1(x)+\ldots+\lambda_m f_m(x)$$

функцияни қараймиз, бунда $x\in G$ ва $\lambda=(\lambda_1, \ldots,\lambda_m)\in R^m$ бўлсин. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ сонлар *Лагранж кўпайтувчилари* деб, $L(x,\lambda)$ функция эса *Лагранж функцияси* деб айтилади.

Агар

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^0,\lambda^0)=0,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^0,\lambda^0)=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x^0,\lambda^0)= f_1(x)=0,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(x^0,\lambda^0)= f_m(x)=0, \qquad (1.10.19)$$

тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда (x^0,λ^0) нуқта Лагранж функциясининг стационар нуқтаси деб айтилади.

6–теорема *(Лагранж).* $x^0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\in E$ *нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги* $f_0(x)$ *функциянинг шартли экстремум нуқтаси ва* $f_i(x),\ i=\overline{0,\ m}$ *функциялар* x^0

нуқта атрофида узлуксиз дифференциалланувчи, ҳамда x^0 *нуқтада*

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \qquad (1.10.20)$$

Якоби матрицасининг ранги m *сонига тенг бўлсин. У ҳолда шундай бир* $\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_m^0$ *Лагранж кўпайтувчилари мавжуд бўладики, бунда* (x^0,λ^0) *нуқта Лагранж функциясининг стационар нуқтаси бўлади.*

Исбот. Шартга кўра $m<n$ ва Якоби матрицасининг x^0 нуқтадаги ранги m сонига тенг бўлганлиги учун бу матрицанинг m – тартибли минорларидан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлади.

Умумийликка хилоф қилмаган ҳолда

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.10.21)$$

деб ҳисоблаш мумкин бўлади. Агар бундай бўлмаса, у ҳолда ўзгарувчиларни ва боғланиш тенгламаларини керакли тартибда ўзгартириш билан биз бу ҳолга эришишимиз мумкин бўлади.

x^0 нуқта $f_0(x)$ функциянинг шартли экстремум нуқтаси бўлганлиги учун шундай бир $K'(x^0)=K_1'(x_1^0,...,x_m^0)\times K_2'(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$ атроф мавжудки, бунда барча $x\in E\bigcap K'(x^0)$ учун

$$f_0(x)-f_0(x^0)\geq 0 \qquad (1.10.22)$$

тенгсизлиги ўринли бўлади.

Хусусий ҳосилаларнинг узлуксизлиги ва (1.10.21) шартнинг бажарилишидан ошкормас функциянинг мавжудлиги ҳақидаги теоремани қўллаш мумкин бўлади.

Шундай бир

$$K(x^0)=K_1(x_1^0,...,x_m^0)\times K_2(x_{m+1}^0,...,x_n^0)\subset K'(x^0)$$

атроф мавжудки, бунда (1.10.18) боғланиш тенгламалари $x_1, x_2, ..., x_m$ ўзгарувчиларни $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ ўзгарувчилар орқали ошкормас функция сифатида аниқлайди.

Бу эса $K_2(x_{m+1}^0, ..., x_n^0)$ атрофда аниқланган узлуксиз дифференциалланувчи ягона $\varphi_i(x_{m+1}, ..., x_n),\ i = \overline{1, m}$ функциялар системаси мавжудки, бунда

$$\varphi_i(x_{m+1}^0, ..., x_n^0) = x_i^0\ ,\ i = \overline{1, m}\ ; \qquad (1.10.23)$$

$\left(x_{m+1}, ..., x_n\right) \in K_2(x_{m+1}^0, ..., x_n^0)$ учун

$$\left(\varphi_1(x_{m+1}, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_{m+1}, ..., x_n)\right) \in K_1(x_1^0, ..., x_m^0)$$

бўлиб

$$f_i\left(\varphi_1(x_{m+1}, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_{m+1}, ..., x_n), x_{m+1}, ..., x_n\right) \equiv 0,\ i = \overline{1, m} \qquad (1.10.24)$$

айният ўринли бўлади.

Бошқача қилиб айтганда, $E \cap K(x^0)$ тўпламни

$$E \cap K(x^0) = \{x : x = (x_1, ..., x_n),$$

$$(x_{m+1}, ..., x_n) \in K_2(x_{m+1}^0, ..., x_n^0)\ ,\ x_i = \varphi_i(x_{m+1}, ..., x_n),\ i = \overline{1, m}\} \qquad (1.10.25)$$

шаклида бериш мумкин.

$K(x^0) \subset K'(x^0)$ эканлигига кўра (1.10.22) тенгсизликдан $f_0(x)$ функциянинг $E \cap K(x^0)$ тўпламда ўзининг энг кичик қийматини x^0 нуқтада қабул қилиши келиб чиқади. Агар $E \cap K(x^0)$ тўпламнинг (1.10.25) шаклдаги тасвирини олсак, у ҳолда

$$F(x_{m+1}, ..., x_n) =$$

$$= f_0\left(\varphi_1(x_{m+1}, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_{m+1}, ..., x_n), x_{m+1}, ..., x_n\right) \qquad (1.10.26)$$

мураккаб функция $\left(x_{m+1}, ..., x_n\right) \in K_2(x_{m+1}^0, ..., x_n^0)$ атрофда аниқланган ва бу атрофда ўзининг энг кичик қийматини $(x_{m+1}^0, ..., x_n^0)$ нуқтада қабул қилади. Шунга кўра экстремумнинг зарурий шартидан $dF(x_{m+1}^0, ..., x_n^0) = 0$ тенгликнинг бажарилиши келиб чиқади. Биринчи тартибли дифференциал формасининг инвариантлиги ва (1.10.26) тенгликдан фойдаланиб

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_0(x^0)}{\partial x_k} dx_k = 0 \qquad (1.10.27)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу (1.10.27) тенгликда $dx_{m+1},...,dx_n$ эркли ўзгарувчилар дифференциали, $dx_1,...,dx_m$ эса $x_{m+1},...,x_n$ ўзгарувчиларга боғлиқ $\varphi_1(x_{m+1},...,x_n),\ \dots,\ \varphi_m(x_{m+1},...,x_n)$ функцияларнинг дифференциалларидир.

Боғлиқ ва боғлиқ бўлмаган дифференциаллар орасидаги муносабатни топамиз. Бунинг учун (1.10.24) айниятни $(x^0_{m+1},...,x^0_n)$ нуқтада дифференциаллаб ва биринчи тартибли дифференциал формасининг инвариантлигидан фойдаланиб

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k} dx_k = 0\ ,\ i=\overline{1,\ m} \qquad (1.10.28)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

(1.10.28) тенгликларни λ_i ўзгармасларга кўпайтириб ва ҳосил қилинган тенгликларни (1.10.27) тенглик билан қўшиш орқали

$$0=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\lambda_i\right)_{x=x^0} dx_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L(x^0,\lambda)}{\partial x_k}dx_k \qquad (1.10.29)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бунда $L(x^0,\lambda)$ Лагранж функцияси бўлади.

Энди $\lambda^0_1,\lambda^0_2,...,\lambda^0_m$ ўзгармасларни шундай танлаймизки, бунда (1.10.29) тенгликдаги боғлиқ дифференциалларнинг коэффициентлари нолга айлансин, яъни

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_k}=\frac{\partial f_0(x^0)}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m}\lambda^0_i\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k}=0,\quad k=\overline{1,\ m} \qquad (1.10.30)$$

бўлсин. (1.10.30) тенгламалар системаси $\lambda^0_1,\lambda^0_2,...,\lambda^0_m$ ўзгармасларни ягона равишда аниқлайди, чунки бу системанинг детерминанти (1.10.21) детерминант бўлиб нолга тенг эмас. (1.10.30) тенгламалар системаси ўринли бўлганда (1.10.29) тенглама

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_k}dx_k=0 \qquad (1.10.31)$$

шаклида бўлади.

Маълумки, $dx_{m+1},...,dx_n$ эркли ўзгарувчилар дифференциали ихтиёрий қиймат қабул қилиши мумкин эканлигидан (1.10.31) тенгликдан

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_k}=0\ ,\ k=m+1,\ ...\ ,\ n \qquad (1.10.32)$$

тенгликлар келиб чиқади. (1.10.30) ва (1.10.32) тенгликларни бирлаштириб

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_k}=0\ ,\ k=1,\ ...\ ,\ n \qquad (1.10.33)$$

шаклида ёзамиз.

Шунингдек $x^0 \in E$ эканлигидан

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_j}= f_j(x^0)=0\ ,\quad j=\overline{1,m}$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Шундай қилиб, (x^0,λ^0) нуқта $L(x,\lambda)$ Лагранж функциясининг стационар нуқтаси бўлади. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. *6–теорема шартлари бажарилганда* $\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_m^0$ *Лагранж кўпайтувчилари ягона равишда аниқланади.*

$L(x,\lambda)$ Лагранж функциясида $\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_m^0$ ўзгармаслар танланганда $x=(x_1,...,x_n)$ эркли ўзгарувчилар бўйича $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$ нуқтада иккинчи тартибли дифференциални ҳисоблаймиз ва уни $d_{xx}^2L(x^0,\lambda^0)$ орқали белгилаймиз.

Шундай қилиб

$$d_{xx}^2L(x^0,\lambda^0)=\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\ \frac{\partial^2 L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_k \partial x_j}dx_k dx_j \qquad (1.10.34)$$

шаклида бўлади.

Айрим ҳолларда $d_{xx}^2L(x^0,\lambda^0)$ ўрнига $d^2L(x^0,\lambda^0)$ ёзувни ишлатамиз.

E_T орқали R^n фазодан олинган қуйидаги чизиқли кўпхилликни белгилаймиз:

$$E_T=\left\{\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in R^n:\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k}\xi_k=0, i=\overline{1,m}\right\} \qquad (1.10.35)$$

(1.10.28) тенгликлар $dx=(dx_1, dx_2, ..., dx_n)\in E_T$ эканлигини билдиради.

7–теорема. $x^0=(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\in E$ *нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги* $f_0(x)$ *функциянинг шартли минимум нуқтаси ва* $f_i(x), i=\overline{0, m}$ *функциялар* x^0 *нуқта атрофида иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, ҳамда* x^0 *нуқтада (1.10.20) Якоби матрицасининг ранги* m *сонига тенг бўлсин.*

У ҳолда шундай бир $\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0$ *Лагранж кўпайтувчилари мавжуд бўладики, бунда* (x^0, λ^0) *нуқта Лагранж функциясининг стационар нуқтаси ва* $dx=(dx_1, dx_2, ..., dx_n)\in E_T$ *учун* $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0)\geq 0$ *бўлади.*

Исбот. Бу ерда 6–теореманинг барча шартлари бажарилгани учун шундай бир $\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0$ Лагранж кўпайтувчилари мавжуд бўладики, бунда (x^0, λ^0) нуқта Лагранж функциясининг стационар нуқтаси бўлади, яъни (1.10.19) шартлар бажарилади. 6–теоремадаги фикрни такрорлаб (1.10.26) мураккаб функцияни қарасак, бу функция $(x_{m+1}^0, ..., x_n^0)$ нуқтада шартсиз экстремумга эга бўлади. Бу функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга эканлигидан минимумнинг зарурий шартига кўра $d^2F(x_{m+1}^0, ..., x_n^0)\geq 0$ шарт бажарилади.

Мураккаб функциянинг иккинчи дифференциалини топиш қоидасидан фойдаланиб ва (1.10.26) формуладан

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_0(x^0)}{\partial x_k \partial x_j}dx_k dx_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_0(x^0)}{\partial x_k}d^2x_k\geq 0 \qquad (1.10.36)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

(1.10.24) айниятни $(x_{m+1}^0, ..., x_n^0)$ нуқтада икки марта дифференциаллаб

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(x^0)}{\partial x_k \partial x_j}dx_k dx_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k}d^2x_k=0 \qquad (1.10.37)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Агар (1.10.37) тенгликнинг ҳар бирини мос λ_i^0 Лагранж кўпайтувчиларига кўпайтириб кейин эса (1.10.36) тенгсизлик билан қўшиб чиқсак, у ҳолда

$$d_{xx}^2 L(x^0,\, \lambda^0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L(x^0,\, \lambda^0)}{\partial x_k} d^2 x_k \geq 0 \qquad (1.10.38)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

(1.10.38) тенгсизликдаги охирги қўшилувчи нолга тенг бўлади, чунки (x^0, λ^0) нуқта Лагранж функциясининг стационар нуқтаси бўлади, яъни (1.10.19) шартлар бажарилади. Шундай қилиб, $dx = (dx_1, dx_2, ..., dx_n) \in E_T$ учун $d_{xx}^2 L(x^0,\, \lambda^0) \geq 0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Теорема исбот бўлди.

8–теорема *(Шартли экстремумнинг етарли шарти).* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in R^n$ *нуқта атрофида* $f_i(x),\ i = \overline{0,\, m}$ *функциялар иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, бундан ташқари* x^0 *нуқтада*

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \qquad (1.10.20)$$

Якоби матрицасининг ранги m *сонига тенг ва* (x^0, λ^0) *нуқта Лагранж функциясининг стационар нуқтаси бўлсин. У ҳолда, агар* $dx = (dx_1, dx_2, ..., dx_n) \in E_T$ *учун* $d_{xx}^2 L(x^0,\, \lambda^0)$ *квадратик форма мусбат аниқланган бўлса, у ҳолда* $x^0 \in E$ *нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги* $f_0(x)$ *функциянинг шартли қатъий минимум нуқтаси бўлади. Агар* $dx = (dx_1, dx_2, ..., dx_n) \in E_T$ *учун* $d_{xx}^2 L(x^0,\, \lambda^0)$ *квадратик форма манфий аниқланган бўлса, у ҳолда* $x^0 \in E$ *нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги* $f_0(x)$ *функциянинг шартли қатъий максимум нуқтаси бўлади. Агар* $dx = (dx_1, dx_2, ..., dx_n) \in E_T$ *учун* $d_{xx}^2 L(x^0,\, \lambda^0)$ *квадратик форма аниқланмаган бўлса, у ҳолда* $x^0 \in E$ *нуқта (1.10.18)* *боғланишлар ўринли бўлгандаги* $f_0(x)$ *функциянинг шартли экстремум нуқтаси бўлмайди.*

Исбот.

$$E=\left\{x:\ f_i(x)=0,\ i=\overline{1,m}\right\} \qquad (1.10.39)$$

тўплам бўлсин. Теорема шартига кўра, $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in R^n$ нуқта атрофида $f_i(x),\ i=\overline{0,\ m}$ функциялар иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, бундан ташқари x^0 нуқтада (1.10.20) функционал матриканинг ранги m сонига тенг. 6–теоремадаги фикрларни давом эттириб биз умумийликка хилоф қилмаган ҳолда

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & ... & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \multicolumn{3}{c}{.........................} \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & ... & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.10.21)$$

деб ҳисоблашимиз мумкин ва шундай бир

$$K(x^0)=K_1(x_1^0,...,x_m^0)\times K_2(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$$

атроф мавжудки, бунда $E\bigcap K(x^0)$ тўпламни

$$E\bigcap K(x^0)=\left\{x: x=(x_1,...,x_n),\right.$$

$$\left.(x_{m+1},...,x_n)\in K_2(x_{m+1}^0,...,x_n^0)\ ,\ x_i=\varphi_i(x_{m+1},...,x_n),\ i=\overline{1,m}\right\} \quad (1.10.25)$$

шаклида бериш мумкин.

$E\bigcap K(x^0)$ тўпламда $f_0(x)$ функция $n-m$ ўзгарувчили

$$F(x_{m+1},...,x_n)=$$

$$=f_0\left(\varphi_1(x_{m+1},...,x_n),...,\varphi_m(x_{m+1},...,x_n),x_{m+1},...,x_n\right) \quad (1.10.26)$$

мураккаб функциядан иборат бўлади ва бу функция иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади. Теорема шартига кўра (x^0,λ^0) нуқта Лагранж функциясининг стационар нуқтасидир, яъни

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_k}=0\ ,\ k=1,\ ...\ ,\ n$$

ва

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_j} = f_j(x^0)=0\,,\quad j=\overline{1,m} \tag{1.10.40}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бу (1.10.40) формулалардан $x^0 \in E$ ва

$$d_x L(x^0,\lambda^0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_k}dx_k=0 \tag{1.10.41}$$

эканлиги келиб чиқади.

$E\bigcap K(x^0)$ тўпламда $L(x\ \lambda^0$ функцияни қараймиз. Маълумки, $x\in E\bigcap K(x^0)$ учун

$$L(x,\lambda^0)=f_0(x)=f_0\left(\varphi_1(x_{m+1},...,x_n),...,\varphi_m(x_{m+1},...,x_n),x_{m+1},...,x_n\right)=$$
$$=F(x_{m+1},...,x_n) \tag{1.10.42}$$

бўлади.

Биринчи тартибли дифференциал формасининг инвариантлигига кўра (1.10.42) формуладан

$$dF\left(x_{m+1}^0,\ ...\ ,x_n^0\right)=d_x L(x^0,\lambda^0)=0 \tag{1.10.43}$$

эканлиги келиб чиқади.

Бу (1.10.42) тенгликнинг ҳар иккала томонидан иккинчи тартибли дифференциални ҳисоблаб ва (1.10.40) тенгликлардан фойдалансак, у ҳолда

$$d^2F\left(x_{m+1}^0,\ ...\ ,x_n^0\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_j\partial x_k}dx_j dx_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L(x^0,\lambda^0)}{\partial x_k}d^2x_k=d_{xx}^2L(x^0,\lambda^0) \tag{1.10.44}$$

ҳосил бўлади.

$dx\in E_T$ ва $dx\neq 0$ учун $d_{xx}^2L(x^0,\,\lambda^0)>0$ бўлсин. У ҳолда $E\bigcap K(x^0)$ тўпламни

$$E\bigcap K(x^0)=\{x:x=(x_1,...,x_n),$$
$$(x_{m+1},...,x_n)\in K_2(x_{m+1}^0,...,x_n^0)\ ,\ x_i=\varphi_i(x_{m+1},...,x_n),\ i=\overline{1,m}\} \tag{1.10.25}$$

шаклида бериш мумкин бўлганлиги учун $dx_{m+1},\ ...\ ,\ dx_n$ дифференциалларни ихтиёрий танлаб $dx_1,\ ...\ ,\ dx_m$

дифференциалларни эса $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ дифференциалларга боғлиқ ҳолда ҳосил қиламиз. $\left(x_{m+1},...,x_n\right) \in K_2(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$ учун

$$\left(\varphi_1(x_{m+1},...,x_n),...,\varphi_m(x_{m+1},...,x_n)\right) \in K_1(x_1^0,...,x_m^0)$$

бўлиб

$$f_i\left(\varphi_1(x_{m+1},...,x_n),...,\varphi_m(x_{m+1},...,x_n), x_{m+1},...,x_n\right) \equiv 0,\ i=\overline{1,m} \quad (1.10.24)$$

айният ўринли бўлади. Бу айниятни x^0 нуқтада, аниқироғи $(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$ нуқтада дифференциаллаб ва биринчи тартибли дифференциал формасининг инвариантлигидан фойдаланиб

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k} dx_k = 0\ ,\ i=\overline{1,m} \quad (1.10.28)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу эса $dx \in E_T$ эканлигини билдиради.

У ҳолда (1.10.44) формуладан $dx_{m+1}^2 + ... + dx_n^2 > 0$ учун

$$d^2F\left(x_{m+1}^0,\ ...\ ,x_n^0\right) > 0 \quad (1.10.45)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади.

(1.10.43) ва (1.10.45) формулалардан $(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$ нуқта $F(x_{m+1},...,x_n)$ функциянинг қатъий минимум нуқтаси эканлиги келиб чиқади, яъни x^0 нуқта $f_0(x)$ функциянинг $E \bigcap K(x^0)$ тўпламдаги қатъий минимум нуқтаси бўлади. Шундай қилиб, $x^0 \in E$ нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги $f_0(x)$ функциянинг шартли қатъий минимум нуқтаси бўлади.

Худди шунга ўхшаш агар $dx = (dx_1, dx_2, ..., dx_n) \in E_T$ учун $d_{xx}^2 L(x^0, \lambda^0)$ квадратик форма манфий аниқланган бўлса, у ҳолда (1.10.44) формуладан $dx_{m+1}^2 + ... + dx_n^2 > 0$ учун

$$d^2F\left(x_{m+1}^0,\ ...\ ,x_n^0\right) < 0 \quad (1.10.46)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади.

(1.10.43) ва (1.10.46) формулалардан $(x_{m+1}^0,...,x_n^0)$ нуқта $F(x_{m+1},...,x_n)$ функциянинг қатъий максимум нуқтаси эканлиги келиб чиқади, яъни x^0 нуқта $f_0(x)$ функциянинг $E \bigcap K(x^0)$ тўпламдаги қатъий максимум нуқтаси бўлади. Шундай қилиб,

$x^0 \in E$ нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги $f_0(x)$ функциянинг шартли қатъий максимум нуқтаси бўлади.

Агар $dx = (dx_1, dx_2, ..., dx_n) \in E_T$ учун $d^2_{xx}L(x^0, \lambda^0)$ квадратик форма аниқланмаган бўлса, у ҳолда $x^0 \in E$ нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги $f_0(x)$ функциянинг шартли қатъий минимум нуқтаси бўла олмайди, чунки 7–теоремага кўра, шартли қатъий минимум нуқтаси бўлишлигининг $dx \in E_T$ учун $d^2_{xx}L(x^0, \lambda^0) \geq 0$ зарурий шарти бажарилмайди. Худди шунингдек, $x^0 \in E$ нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги $f_0(x)$ функциянинг шартли қатъий максимум нуқтаси бўла олмайди, яъни $x^0 \in E$ нуқта (1.10.18) боғланишлар ўринли бўлгандаги $-f_0(x)$ функциянинг шартли қатъий минимум нуқтаси бўла олмайди, чунки 7–теоремага кўра, шартли қатъий минимум нуқтаси бўлишлигининг $dx \in E_T$ учун $d^2_{xx}\left(-L(x^0, \lambda^0)\right) \geq 0$ зарурий шарти бажарилмайди. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. *Агар бутун R^n фазода $d^2_{xx}L(x^0, \lambda^0)$ квадратик форма мусбат аниқланган бўлса, у ҳолда $dx \in E_T$ ва $dx \neq 0$ учун $d^2_{xx}L(x^0, \lambda^0) > 0$ ўринли бўлади. Шунинг учун бу ҳолда $d^2_{xx}L(x^0, \lambda^0)$ квадратик формада боғлиқ дифференциалларни йўқотиш шарт эмас.*

4–мисол. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ сферада $u = x - 2y + 2z$ функциянинг шартли экстремумларини топамиз.

Аввал

$$L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

Лагранж функциясини қурамиз. Бу Лагранж функциясининг стационар нуқталарини аниқлаймиз. Бунинг учун

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0,\ \frac{\partial L}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0,\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

тенгламалар системасини ечамиз. Бу системада x, y, z ўзгарувчиларни йўқотиш билан $\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2-1=0$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $\lambda_1=\frac{3}{2}$, $\lambda_2=-\frac{3}{2}$ бўлади. Шунга кўра Лагранж функциясининг иккита $M_1=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$ ва $M_2=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{3}{2}\right)$ стационар нуқталари бўлади. Бу ерда $dx^2+dy^2+dz^2>0$ учун $d^2L(M_1)=3(dx^2+dy^2+dz^2)>0$ ва $d^2L(M_2)=-3(dx^2+dy^2+dz^2)<0$ бўлганлиги учун $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ нуқта шартли қатъий минимум нуқтаси, $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ нуқта эса шартли қатъий максимум нуқтаси бўлади.

5–мисол. $f_1(x,y)=x^3+y^3+x+y-4=0$ шарт бажарилганда $f_0(x,y)=e^{axy}$, $a\neq 0$ функциянинг шартли экстремумларини топамиз.

Аввал

$$L(x,y,z,\lambda)=e^{axy}+\lambda(x^3+y^3+x+y-4)$$

Лагранж функциясини қурамиз. Бу Лагранж функциясининг стационар нуқталарини аниқлаймиз. Бунинг учун

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x}=aye^{axy}+\lambda(3x^2+1)=0,\\&\frac{\partial L}{\partial y}=axe^{axy}+\lambda(3y^2+1)=0,,\\&\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^3+y^3+x+y-4=0\end{aligned}\qquad(1.10.47)$$

тенгламалар системасини ечамиз. Бунинг учун биринчи тенгламани x ўзгарувчига, иккинчи тенгламани y ўзгарувчига кўпайтириб айирсак

$$\lambda(3x^3-3y^3+x-y)=\lambda(x-y)(3x^2+3xy+3y^2+1)=0\qquad(1.10.48)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Агар $\lambda = 0$ бўлса, у ҳолда (1.10.47) системанинг биринчи ва иккинчи тенгламаларидан $x = y = 0$ ҳосил бўлади. Лекин $x = y = 0$ нуқта боғланиш тенгламасини қаноатлантирмайди. Демак, $\lambda \neq 0$ бўлади. (1.10.48) тенгламада иккинчи кўпайтувчи ҳамма вақт $3(x^2 + xy + y^2) + 1 > 0$ мусбат бўлганлиги учун фақат $x = y$ эканлиги келиб чиқади. Боғланиш тенгламасига $x = y$ ифодани қўйсак, у ҳолда $x^3 + x = 2$, $x = y = 1$ эканлигини ҳосил қиламиз. (1.10.47) системанинг биринчи тенгламасидан $x = y = 1$ бўлгани учун $\lambda = -\frac{a}{4}e^a$ ҳосил бўлади.

Демак, Лагранж функцияси ягона $\left(1,\ 1,\ -\frac{a}{4}e^a\right)$ стационар нуқтага эга бўлади.

$$d(e^{axy}) = a(ydx + xdy)e^{axy},$$

$$d^2(e^{axy}) = a^2(ydx + xdy)^2 e^{axy} + 2a\,dx\,dy\,e^{axy},$$

$$d^2(x^3 + y^3 + x + y - 4) = 6xdx^2 + 6ydy^2,$$

тенгликларга кўра $\lambda_0 = -\frac{a}{4}e^a$ ва $x = y = 1$ учун Лагранж функциясининг иккинчи тартибли дифференциали учун

$$d^2L(1, 1, \lambda_0) = ae^a\left[a(dx + dy)^2 + 2dxdy - \frac{3}{2}(dx^2 + dy^2)\right] \quad (1.10.49)$$

ифода ҳосил бўлади.

Боғланиш тенгламасини $x = y = 1$ нуқтада дифференциаллаб $dx + dy = 0$ тенгликни ҳосил қиламиз. $dy = -dx$ ифодани (1.10.49) ифодага олиб бориб қўйсак, у ҳолда

$$d^2L(1, 1, \lambda_0) = -5ae^a dx^2 \quad (1.10.50)$$

ифода ҳосил бўлади.

Шунинг учун, агар $a < 0$ бўлса, у ҳолда $(1,\ 1)$ нуқта $f_1(x, y) = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ боғланиш ўринли бўлгандаги $f_0(x, y) = e^{axy}$ функциянинг шартли қатъий минимум нуқтаси бўлади.

Худди шунингдек, агар $a > 0$ бўлса, у ҳолда $(1,\ 1)$ нуқта $f_1(x,y) = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ боғланиш ўринли бўлгандаги $f_0(x,y) = e^{axy}$ функциянинг шартли қатъий максимум нуқтаси бўлади.

Эслатма. *Агар $f_1(x,y) = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ боғланиш тенгламасини бирор бир ўзгарувчига нисбатан ечмоқчи бўлсак, у ҳолда қийинчиликка дуч келамиз. Шунинг учун Лагранж усули ўзгарувчиларни йўқотишнинг тўғри усулидан қулай бўлади.*

Кўп ўзгарувчили функцияларнинг (ёки табиатан бошқача бўлган функционалларнинг) экстремумини маълум бир шартлар билан излаш ҳақидаги масала кенг тарқалган масалалардан биридир. Экстремал масалалар назарияси интенсив ривожланаётган ва кенг доирадаги тадбиқларга эга бўлган соҳадир. Биз шартлар тенгликлар билан берилган экстремал масалаларни бу боғланиш шартлари етарлича силлиқ бўлган функциялар билан берилган ҳолда қараб чиқдик. Лагранж кўпайтувчилари усули кенг умумлашмаларга эга ва агар шартлар оддий маънода дифференциалланувчи бўлмаган функциялар ёрдамида тенглик ва тенгсизликлар системаси билан берилган бўлса ҳам уни қўллаш имконятлари мавжуд.

Аниқ бир амалий масалаларда Лагранж кўпайтувчилари ўз маъносига эга. Масалан, механикада Лагранж кўпайтувчилари боғланиш реакциясини беради, математикавий иқтисодиётда ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг баҳосини беради. Экстремал масалаларни ечишда замонавий ҳисоблаш техникаларидан фойдаланиладиган тақрибий усуллар ҳам кенг ривожланган.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

12.1. $f(x,y,z) = x^2y^3(6 - x - y)$ функцияни экстремумга текширинг.

12.2. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3xy$ функцияни экстремумга текширинг.

12.3. $f(x,y,z) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ функцияни экстремумга текширинг.

12.4. $f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$ $(x>0,\ y>0)$ функцияни экстремумга текширинг.

12.5. $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ $(a>0,b>0)$ функцияни экстремумга текширинг.

12.6. $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$ функцияни экстремумга текширинг.

12.7. $f(x,y,z)=\frac{a^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{b}$ функцияни экстремумга текширинг, бунда $x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0,\ b>0$.

12.8. $f(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ функциянинг $x^2+y^2=1$ боғланиш тенгламаси билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.9. $f(x,y)=x^2+y^2$ функциянинг $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ боғланиш тенгламаси билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.10. $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ функциянинг $x^2+y^2=1$ боғланиш тенгламаси билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.11. $f(x,y,z)=x-2y+2z$ функциянинг $x^2+y^2+z^2=1$ боғланиш тенгламаси билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.12. $f(x,y,z)=x^m y^n z^p$ функциянинг $x+y+z=a$, бунда $m>0,\ n>0,\ p>0,\ a>0$ бўлган боғланиш тенгламаси билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.13. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ функциянинг $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$ бунда $a>b>c>0$ бўлган боғланиш тенгламаси билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.14. $f(x,y,z)=xyz$ функциянинг $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$ боғланиш тенгламалари билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.15. $f(x,y,z)=xy+yz$ функциянинг $x^2+y^2=2$, $y+z=2$, бунда $x>0,\ y>0,\ z>0$ бўлган боғланиш тенгламалари билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.16. $f=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ функциянинг $\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\ldots+\dfrac{x_n}{a_n}=1$, бунда $a_i>0,\ i=\overline{1,n}$ бўлган боғланиш тенгламаси билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.17. $f=x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p$, $p>0$ функциянинг $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$, бунда $a>0$ бўлган боғланиш тенгламаси билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.18. $f=\dfrac{\alpha_1}{x_1}+\dfrac{\alpha_2}{x_2}+\ldots+\dfrac{\alpha_n}{x_n}$ функциянинг $\beta_1x_1+\beta_2x_2+\ldots+\beta_nx_n=1$, бунда $\alpha_i>0,\ \beta_i>0,\ x_i>0,\ i=\overline{1,\ n}$ бўлган боғланиш тенгламаси билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.19. $f=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ функциянинг $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$, бунда $a>0,\ \alpha_i>1,\ i=\overline{1,\ n}$ бўлган боғланиш тенгламаси билан берилган шартли экстремум нуқталарини топинг.

12.20. $f=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ \left(a_{ij}=a_{ji}\right)$ квадратик форманинг $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$ бўлган боғланиш тенгламаси билан берилган шартли экстремумини топинг.

12.21. Агар $n\ge1$ ва $x\ge0,\ y\ge0$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$ тенгсизликни исботланг. Бунда $z=\dfrac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)$ функциянинг $x+y=s$ бўлган боғланиш тенгламаси билан берилган шартли минимумни излаш масаласидан фойдаланинг.

II – БОБ

ФУРЬЕ ҚАТОРИ ВА ИНТЕГРАЛИ

1-§. Ортонормал системалар ва умумий Фурье қатори ҳақида тушунча

1. Ортонормал системалар. Ихтиёрий чексиз ўлчамли евклид фазосини қараймиз. Бундай фазо қуйидагича киритилади.

1-Таъриф. Агар R ҳақиқий чизиқли фазодаги ихтиёрий иккита $f, g \in R$ элементлар жуфтига скаляр кўпайтма деб аталувчи (f, g) ҳақиқий сон мос қўйилган бўлиб, бу мослик

1. $(f, g) = (g, f)$
2. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$
3. $(\lambda f,\, g) = \lambda(f,\, g)$
4. $(f,\, f) \geq 0$, бундан ташқари $(f,\, f) = 0$ тенглик фақат $f = 0$ учун ўринли бўлишлик аксиомаларини қаноатлантирса, у холда R ҳақиқий чизиқли фазода *скаляр кўпайтма* киритилган ва бу фазо *евклид фазоси* деб аталади. Агар бу фазода ихтиёрий берилган сондаги чизиқли эркли элементлар мавжуд бўлса, у ҳолда бу фазога *чексиз ўлчамли фазо* дейилади. R евклид фазосида

$$\| f \| = \sqrt{(f,\, f)} \qquad (2.1.1)$$

формула ёрдамида норма киритиш мумкин. Скаляр кўпайтманинг 1) – 4) хоссаларидан норманинг барча аксимомалари бажарилиши келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, норманинг

1) $\| f \| \geq 0$, бундан ташқари $\| f \| = 0$ тенглик фақат $f = 0$ учун ўринли бўлишлиги бевосита скаляр кўпайтманинг 4–хоссасидан келиб чиқади ва

2) ихтиёрий f элемент ва λ ҳақиқий сон учун

$$\| \lambda f \| = |\lambda| \cdot \| f \|$$

аксиоманинг бажарилиши эса,

$$\| \lambda f \| = \sqrt{(\lambda f, \lambda f)} = \sqrt{\lambda(f, \lambda f)} = \sqrt{\lambda(\lambda f,\, f)} = \sqrt{\lambda^2 (f,\, f)} = |\lambda| \cdot \| f \|$$

тенгликдан келиб чиқади, ҳамда

3) ихтиёрий иккита f ва g элементлар учун $\|f+g\| \le \|f\|+\|g\|$ учбурчак тенгсизлиги аксиомасининг бажарилиши қуйида исбот қилинадиган

$$|(f,g)| \le \|f\| \cdot \|g\| \qquad (2.1.2)$$

*Коши-Буняковский тенгсизлиги*дан келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, λ ҳақиқий ўзгарувчига нисбатан

$$\varphi(\lambda) = (\lambda f + g, \lambda f + g) = \lambda^2 (f, f) + 2\lambda (f, g) + (g, g) =$$

$$= \|f\|^2 \lambda^2 + 2(f, g)\lambda + \|g\|^2$$

квадрат учҳадни қараймиз. Маълумки, $\varphi(\lambda) = \|\lambda f + g\|^2 \ge 0$ бўлгани учун бу квадрат учҳаднинг дискриминанти нолдан кичик ёки тенг. Бундан эса, $|(f,g)| \le \|f\| \cdot \|g\|$ Коши-Буняковский тенгсизлиги келиб чиқади. Шунга кўра,

$$\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) \le$$

$$\le \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = \left(\|f\| + \|g\|\right)^2$$

ёки

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\| \qquad (2.1.3)$$

учбурчак тенгсизлиги аксиомаси келиб чиқади.

Хусусан, $[a,b]$ оралиқда бўлакли узлуксиз бўлган, яъни бу оралиқнинг чекли нуқталаридан ташқари барча нуқталарида узлуксиз ва шу чекли узилиш нуқталари биринчи турдаги узилиш бўлиб, бу нуқталарда $f(x_i) = \dfrac{f(x_i+0) + f(x_i-0)}{2}$ тенглик ўринли бўладиган R_0 символи орқали белгиланувчи чизиқли фазода ихтиёрий f ва g элементларнинг скаляр кўпайтмаси

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (2.1.4)$$

тенглик билан ва ихтиёрий f элементнинг нормаси эса,

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \qquad (2.1.5)$$

тенглик билан аниқланади ва Коши-Буняковский тенгсизлиги

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \qquad (2.1.6)$$

шаклида, учбурчак тенгсизлиги эса,

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \qquad (2.1.7)$$

шаклида бўлади.

2-**Таъриф.** Агар Евклид фазосидаги иккита f ва g элементнинг скаляр кўпайтмаси $(f, g)=0$ бўлса, у ҳолда бу элементлар ортогонал деб айтилади.

Ихтиёрий чексиз ўлчамли R евклид фазосида

$$\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ... \qquad (2.1.8)$$

қандайдир элементлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

3-Таъриф. Агар $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликнинг ҳар иккала элементи ортогонал бўлиб, уларнинг нормалари бирга тенг бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликка ортонормал система деб айтилади.

Ортонормал системага классик мисол сифатида, $[-\pi,\pi]$ сегментда бўлакли узлуксиз бўлган барча функцияларнинг R_0 фазосида *тригонометрик система* деб аталувчи

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, ... \qquad (2.1.9)$$

функциялар кетма-кетлигини қараш мумкин. Бундай ортонормал системаларга бошқа мисоллар ҳам келтириш мумкин.

Мисоллар. 1. *Лежандр полиномлари* деб аталувчи

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} \quad (n = 0, 1, 2, ...) \qquad (2.1.10)$$

тенгликлар билан аниқланувчи кўпҳадларни қараймиз. Бу кўпҳадлар ёрдамида $[-1,1]$ сегментда

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\; P_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, ...) \qquad (2.1.11)$$

функциялар кетма-кетлиги ортонормал система эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

2. *Чебишев полиномлари* деб аталувчи

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = 2^{1-n}\cos[n(\arccos x)] \;\; (n = 1, 2, ...) \qquad (2.1.12)$$

тенгликлар билан аниқланувчи кўпҳадларни қараймиз. Бу Чебишев кўпҳадлари ёрдамида $[-1,1]$ сегментда

$$\psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-x^2}},\quad \psi_n(x)=\frac{2^{n-\frac{1}{2}}\cdot T_n(x)}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-x^2}}\quad (n=1,2,\ldots)\quad (2.1.13)$$

функциялар кетма-кетлиги ортонормал система ташкил этади.

3. Эҳтимоллар назариясида кўп қўлланиладиган *Радемахер*[1] *системалари* деб аталувчи

$\psi_n(x)=\varphi(2^n x)\quad (n=0,1,2,\ldots)$, бунда $\varphi(t)=\mathrm{sgn}(\sin 2\pi t)$ (2.1.14)

тенгликлар билан аниқланувчи системани қараймиз. Бу система $[0,1]$ сегментда ортонормал система ташкил этади.

4. Функциялар назариясининг бир қатор тадқиқотларида қўлланиладиган *Хаара*[2] *системалари* деб аталувчи $[0,1]$ сегментда ортонормал система бўлган қуйидаги система қаралади. Бу системанинг элементлари барча $n=0,1,2,\ldots$ учун ва $1,2,4,\ldots,2^n$ қийматлар қабул қилувчи барча k учун қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\chi_n^{(k)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2^n}\;, & \dfrac{2k-2}{2^{n+1}}\le x<\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\quad \textit{учун}\\ -\sqrt{2^n}\;, & \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\le x<\dfrac{2k}{2^{n+1}}\quad \textit{учун}\\ 0\;, & [0,1]\ \textit{ораликдаги бошка нукталар учун.}\end{cases}\quad (2.1.15)$$

Ҳар бир Хаара функцияси $[-2^{-(n+1)},\ 2^{-(n+1)}]$ сегментда берилган $-\sqrt{2^n}\,\mathrm{sgn}\,x$ функция сингари зина шаклида бўлади. Ҳар бир танланган $n=0,1,2,\ldots$ учун $k=1,2,4,\ldots,2^n$ қийматларнинг ўсишида бу зиналар ўнгга силжийди. Ҳар бир Хаара функцияси мос зинасидан қолган барча жойларда бу функция мос равишда айнан нолга тенг бўлади.

[1] Радемахер – немис математиги (1892 йилда туғилган) .
[2] Хаар – немис математиги (1885 – 1933) .

2. Умумий Фурье қатори ҳақида тушунча. Ихтиёрий чексиз ўлчамли R евклид фазосида ихтиёрий $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементларнинг ортонормал системаси берилган бўлсин.

4-Таъриф. f элементнинг $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормал система бўйича *Фурье*[1] *қатори* деб

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k \tag{2.1.16}$$

шаклидаги қаторга айтилади, бунда f_k сонлар *Фурье коэффициентлари* бўлиб,

$$f_k = (f,\ \psi_k) \qquad k = 1,\ 2, \ldots \tag{2.1.17}$$

тенгликлар орқали аниқланади.

Табиий равишда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \tag{2.1.18}$$

чекли йиғиндига (2.1.16) Фурье қаторининг $n-$қисмий йиғиндиси деб айтилади.

Бу (2.1.18) кўринишдаги $n-$қисмий йиғиндиси билан бирга $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормал системанинг дастлабки $n-$та элементларининг ихтиёрий чизиқли комбинациясини қараймиз:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k\ , \tag{2.1.19}$$

бунда $C_1,\ C_2, \ldots, C_n$ ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Бу (2.1.18) кўринишидаги Фурье қаторининг $n-$қисмий йиғиндиси бошқа (2.1.19) кўринишдаги $n-$та йиғиндидан қандай фарқланишини аниқлаймиз.

$\|f-g\|$ миқдорга f элементнинг g элементдан берилган евклид фазоси нормаси бўйича четланиши деб айтилади.

Қуйидаги асосий теорема ўринлидир.

1-Теорема. *Барча (2.1.19) кўринишдаги $n-$та йиғиндилардан шу берилган евклид фазосининг нормаси бўйича f элементдан энг кичик четланишга эга бўлган йиғиндиси f*

---

[1] Ж. Фурье – француз математиги (1772 – 1837) .

элемент Фурье қаторининг (2.1.18) кўринишдаги $n-$қисмий йиғиндисидир.

Исбот. $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ системанинг ортонормал система эканлигини ҳисобга олиб ва скаляр кўпайтма аксиомаларидан фойдаланиб қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f,\ \sum_{l=1}^{n} C_l\psi_l - f\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^{\,2}\left(\psi_k,\ \psi_k\right) - 2\sum_{k=1}^{n} C_k\left(f,\ \psi_k\right) + \left(f,\ f\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^{\,2} - 2\sum_{k=1}^{n} C_k f_k + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(C_k - f_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^{\,2} + \|f\|^2$$

Демак,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(C_k - f_k\right)^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^{\,2}. \qquad (2.1.20)$$

Бу (2.1.20) кўринишдаги тенгликнинг чап томони f элементдан (2.1.19) кўринишдаги йиғиндининг берилган евклид фазоси нормаси бўйича квадратик четланишидир. Бу (2.1.20) кўринишдаги тенгликнинг ўнг томони квадратик четланиш энг кичик бўлиши учун $C_k = f_k$ тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

1-Натижа. *Берилган евклид фазосидан олинган ихтиёрий f элемент ва ихтиёрий $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормал система учун ихтиёрий $n-$та элементларининг йиғиндисида C_k ўзгармас ихтиёрий танлаганда ҳам*

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^{\,2} \le \left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\|^2 \qquad (2.1.21)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

(2.1.21) тенгсизлик бевосита (2.1.20) айниятдан келиб чиқади.

2-Натижа. *Берилган Евклид фазосидан олинган ихтиёрий f элемент ва ихтиёрий $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормал система учун Фурье қаторининг $n-$та элементларининг қисмий йиғиндиси учун*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^{\,2} \qquad \textit{(2.1.22)}$$

Бессель[1] айнияти деб аталувчи тенглик ўринли бўлади.

(2.1.22) тенгликни исботлаш учун (2.1.20) айниятда $C_k = f_k$ деб олиш етарлидир.

2-Теорема. *Берилган Евклид фазосидан олинган ихтиёрий f элемент ва ихтиёрий $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормал система учун Бессель тенгсизлиги деб аталувчи қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{\,2} \le \| f \|^2 \qquad \textit{(2.1.23)}$$

Исбот. (2.1.22) тенгликнинг чап томони манфиймас эканлигидан ихтиёрий n номер учун

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^{\,2} \le \| f \|^2 \qquad (2.1.24)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса, (2.1.23) тенгсизликнинг чап томонидаги манфиймас ҳадли қатор қисмий йиғиндилари кетма-кетлигининг чегараланган эканлигини билдиради ва шунинг учун бу қатор яқинлашувчи бўлади. (2.1.24) тенгсизликда лимитга ўтиб, (2.1.23) тенгсизликнинг ўринли эканлигини ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

Мисол сифатида, $[-\pi,\pi]$ сегментда бўлакли узлуксиз бўлган барча функцияларнинг R_0 фазоси ва бу фазода (2.1.9) тригонометрик система бўйича Фурье қаторини қараймиз. $[-\pi,\pi]$ сегментда бўлакли узлуксиз бўлган ихтиёрий $f(x)$ функция учун кўрсатилган Фурье қатори

$$\bar{f}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \bar{\bar{f}}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right) \qquad (2.1.25)$$

кўринишида бўлади, бунда $\bar{f}_k$ ва $\bar{\bar{f}}_k$ Фурье коэффициентлари

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad \bar{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx,$$

[1] Фридрих Вильгельм Бессель – немис астрономи ва математиги (1784 – 1846) .

$$\bar{\bar{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \ (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

формулалар орқали аниқланади. $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли узлуксиз бўлган ихтиёрий $f(x)$ функция учун Бессель тенгсизлиги

$$\bar{f}_0^{\,2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k^{\,2} + \bar{\bar{f}}_k^{\,2} \right) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \qquad (2.1.26)$$

кўринишида бўлади.

Бу ҳолда $f(x)$ функциянинг $g(x)$ функциядан норма бўйича четланиши *ўртача квадратик четланиш* деб айтилиб

$$\| f - g \| = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx} \qquad (2.1.27)$$

миқдорга тенг.

Тригонометрик Фурье қаторлари назариясида Фурье қатори бир оз бошқачароқ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \qquad (2.1.28)$$

шаклида ёзилади, бунда a_k ва b_k Фурье коэффициентлари

$$a_0 = \frac{2\bar{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{\bar{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{\bar{\bar{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

формулалар орқали аниқланади. Бундай кўринишдаги Фурье қатори учун (2.1.26) Бессель тенгсизлиги

$$\frac{a_0^{\,2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^{\,2} + b_k^{\,2} \right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \qquad (2.1.29)$$

кўринишида бўлади.

Эслатма. Бессель тенгсизлигидан $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли узлуксиз бўлган ихтиёрий $f(x)$ функция учун унинг тригонометрик Фурье коэффициентлари бўлган a_k ва b_k миқдорлар қатор яқинлашишининг зарурий шартига кўра, $k \to \infty$ да нолга интилади.

3. Ёпиқ ва тўла ортонормал системалар. Ихтиёрий чексиз ўлчамли R евклид фазосида ихтиёрий $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементларнинг ортонормал системасини қараймиз.

5-Таъриф. Агар берилган R евклид фазосидан олинган ихтиёрий f элемент учун ва ихтиёрий мусбат $\varepsilon > 0$ сони учун $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементларнинг чекли сондаги шундай бир чизиқли комбинацияси мавжуд бўлиб, бу комбинациянинг f элементдан R фазо нормаси бўйича четланиши ε сонидан кичик бўлса, у ҳолда $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормал система ёпиқ система деб айтилади.

Бошқача сўз билан айтганда, агар берилган R евклид фазосидан олинган ихтиёрий f элементни шу фазо нормаси бўйича исталган аниқлик даражасида $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементларнинг чекли сондаги чизиқли комбинацияси билан яқинлаштириш мумкин бўлса, у ҳолда $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ система ёпиқ система деб айтилади.

Эслатма. Биз ҳар қандай R евклид фазосида ёпиқ ортонормал система мавжудми деган саволни кейинга қолдирдик. Евклид фазосининг қисм фазоси бўлган *гильберт фазолари* деб аталувчи фазоларда ёпиқ ортонормал система мавжудлиги кўрсатилади.

3-Теорема. *Агар $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормал система ёпиқ бўлса, у ҳолда берилган Евклид фазосидан олинган ихтиёрий f элемент учун (2.1.23) Бессель тенгсизлиги Парсеваль айнияти деб аталувчи*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{\,2} = \| f \|^2 \qquad (2.1.30)$$

аниқ тенгликка алмашади[1].

Исбот. Берилган R евклид фазосидан ихтиёрий f элемент ва ихтиёрий мусбат $\varepsilon > 0$ сони танлаймиз. Шартга кўра, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ёпиқ система эканлигидан элементларнинг чекли n та сондаги шундай бир чизиқли комбинацияси мавжуд бўлиб, бу

[1] М.А. Парсеваль – француз математиги (1755–1836) .

комбинациянинг f элементдан R фазо нормаси бўйича четланиши ε сонидан кичик бўлади, яъни $\left\| \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f \right\| < \varepsilon$, бунда $C_1, C_2, ..., C_n$ қандайдир сонлар. (2.1.21) тенгсизликка кўра,

$$\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^{\,2} \le \left\| \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f \right\|^2 < \varepsilon^2$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шунинг учун ихтиёрий мусбат $\varepsilon > 0$ сонига кўра, n номер топилиб

$$\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^{\,2} < \varepsilon^2 \qquad (2.1.31)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу n номердан катта бўлган номерлар учун (2.1.31) тенгсизлик ўринли бўлаверади, чунки чап томондаги йиғинди n номер ошиб бориши билан ошади ва айирма эса камаяди.

Шундай қилиб, ихтиёрий мусбат $\varepsilon > 0$ сонига кўра, шундай бир N номер топилиб, бу номердан бошлаб барча $n \ge N$ учун (2.1.31) тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{\,2}$ қаторнинг $\| f \|^2$ йиғиндига яқинлашишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

4-Теорема. *Агар $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормал система ёпиқ бўлса, у ҳолда берилган Евклид фазосидан олинган ихтиёрий f элемент учун бу элементнинг Фурье қатори шу элементга шу қаралаётган Евклид фазоси нормаси бўйича яқинлашади, яъни*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f \right\| = 0 \qquad \textit{(2.1.32)}$$

тенгликка ўринли бўлади.

Исбот. Бу теореманинг исботи $\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^{\,2}$ тенгликдан ва олдинги теоремадан келиб чиқади.

Эслатма. $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли узлуксиз бўлган барча функцияларнинг R_0 фазосида (2.1.32) норма бўйича ёқинлашиш шу сегментда ўртача яқинлашишга ўтади. Шундай қилиб, агар тригонометрик системанинг ёпиқлиги исбот қилинса, у ҳолда

$[-\pi,\pi]$ сегментда бўлакли узлуксиз бўлган ихтиёрий $f(x)$ функция тригонометрик Фурье қатори шу функцияга кўрсатилган сегментда ўртача яқинлашади.

6-Таъриф. Агар берилган R евклид фазосидан олинган $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ системанинг ҳар бир ψ_k элементига ортогонал бўлган нолдан фарқли f элемент мавжуд бўлмаса, у ҳолда $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ система тўла система деб айтилади.

Бошқача сўз билан айтганда, агар берилган R евклид фазосидан олинган $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ системанинг ҳар бир ψ_k элементига ортогонал бўлган f элемент ноль элементдан иборат бўлса, у ҳолда $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ система тўла система деб айтилади.

5-Теорема. *Ҳар қандай ёпиқ ортонормал* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *система тўла бўлади.*

Исбот. Бизга $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ёпиқ система ва берилган R евклид фазосидан олинган $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ системанинг ҳар бир ψ_k элементига ортогонал бўлган ихтиёрий f элемент берилган бўлсин. У ҳолда f элементнинг $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ система бўйича барча f_k Фурье коэффициентлари нолга тенг бўлади ва Парсеваль айниятига кўра, $\|f\|=0$ бўлади. Бу охирги тенглик $f=0$ эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. Биз ихтиёрий R евклид фазосида ёпиқ бўлган ортонормал система тўла эканлигини кўрсатдик. Умуман олганда, ихтиёрий R евклид фазосида тўла бўлган ортонормал система ёпиқ система бўлавермаслигига мисол келтириш мумкин. Агар евклид фазосининг муҳим синфи бўлган *гильберт фазолари*да қаралса, у ҳолда тўла бўлган ортонормал система унинг ёпиқ система бўлишига эквивалентдир.

6-Теорема. *Ҳар қандай тўла ортонормал* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *система учун (шунга кўра ҳар қандай ёпиқ ортонормал* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *система учун ҳам) шу қаралаётган евклид фазосидаги иккита* f *ва* g *ҳар* *хил элементлар бир хил Фурье коэффициентларига эга бўла олмайди.*

Исбот. Агар иккита f ва g ҳар хил элементлар бир хил Фурье коэффициентларига эга бўлса, у ҳолда $f-g$ айирма функциянинг Фурье коэффициентлари нолга тенг бўлган бўлур эди, яъни $f-g$ айирма функция $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ тўла системанинг ҳар бир ψ_k элементига ортогонал бўлган бўлур эди. Лекин бу эса, $f-g$ айирма функция ноль элемент эканлигини, яъни f ва g элементларнинг устма-уст тушишини билдиради. Бу қарама-қаршилик теоремани исбот қилади.

Бизнинг кейинги мақсадларимиз тригонометрик система бўйича Фурье қаторини батафсил ўрганишдан иборат.

4. Гильберт фазосидаги ортонормал системаларнинг тўлалиги ва ёпиқлиги тушунчаларининг эквивалентлиги. Қуйидагича таъриф киритамиз.

7-Таъриф. Чексиз ўлчамли тўла евклид фазосига *гильберт фазоси* деб айтилади.[1]

Шундай қилиб, табиатан ихтиёрий бўлган $f, g, \ldots$ элементлардан ташкил топган H тўплам қуйидаги шартларни (аксиомаларни)

I. H евклид фазоси (яъни скаляр кўпайтма киритилган чизиқли фазо).

II. H фазо $\rho(f,g)=\|f-g\|$ метрика маъносида тўла.

III. H фазо чексиз ўлчамли, яъни унда ихтиёрий n учун $n-$ та чизиқли боғлиқ бўлмаган элементларни топиш мумкин бўлса, у ҳолда H тўплам гильберт фазоси дейилади.

Кўпинча сепарабель гильберт фазолари қаралади, яъни фазо яна битта аксимомани қаноатлантиради.

IV. H сепарабель, яъни унда саноқли бўлган ҳамма жойда зич тўплам мавжуддир.

l_2 ҳақиқий фазо сепарабель гильберт фазосига мисол бўла олади.

Кейинчалик биз фақат сепарабель гильберт фазоларини қараймиз.

---

[1] Бу тушунчани киритган машҳур немис математиги Д. Гильберт (1862–1943) номи билан аталади.

5-теоремага кўра, ҳар қандай евклид фазосидаги (шунга кўра, ихтиёрий гильберт фазосидаги) ҳар қандай ёпиқ ортонормал система тўла бўлади. Ҳозир биз, гильберт фазосида тескари тасдиқ ҳам ўринли эканлигини кўрсатамиз.

7-Теорема. *Ихтиёрий H гильберт фазосидаги ихтиёрий тўла ортонормал система ёпиқ бўлади.*

Исбот. $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ система H гильберт фазосидаги ихтиёрий тўла ортонормал система бўлсин. Ҳамда f эса, H гильберт фазосидан олинган ихтиёрий элемент бўлсин. H гильберт фазосининг нормаси бўйича f элементга шу f элементнинг $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ система бўйича Фурье қаторининг $n-$қисмий йиғиндиси S_n яқинлашувчи эканлигини кўрсатиш етарлидир, бунда $c_k = (f, \psi_k),\ S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k$. Маълумки, Бессель тенгсизлигига кўра, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k{}^2$ қатор яқинлашувчи ва скаляр кўпайтма аксиомаларига кўра, ихтиёрий $m \geq n$ ва $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ тўла ортонормал система учун

$$\|S_m - S_n\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} c_k\psi_k\right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k\psi_k,\ \sum_{j=n+1}^{m} c_j\psi_j\right) = \sum_{k=n+1}^{m} c_k{}^2$$

тенгликка кўра, $\{S_n\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлади. Шунга кўра, H гильберт фазосининг тўлалигидан бу фазода шундай бир f_0 элемент мавжудки, бунда

$$n \to \infty \quad \text{да} \quad \|S_n - f_0\| \to 0 \qquad (2.1.33)$$

бўлади. Бу ерда $f_0 = f$ эканлигини исботлаш керак бўлади. Бунинг учун эса, f ва f_0 элементлар бир хил Фурье коэффициентларига эга эканлигини кўрсатиш етарлидир. Ҳақиқатдан ҳам, f ва f_0 элементларнинг барча Фурье коэффициентлари устма-уст тушишлиги $f - f_0$ элементнинг барча ψ_k элементларга ортогонал эканлигини ва $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ системанинг тўлалигига кўра, $f - f_0$ элементнинг нолга тенг бўлишлигини билдиради. k номерни танлаб олайлик. Ихтиёрий

$m \geq n$ учун $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормал система ва скаляр кўпайтма аксиомаларига кўра,

$$\left(S_n, \psi_k\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i, \psi_k \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\psi_i, \psi_k\right) = c_k \qquad (2.1.34)$$

Иккинчи томондан эса, Коши-Буняковский тенгсизлигига кўра,

$$\left|\left(S_n, \psi_k\right) - \left(f_0, \psi_k\right)\right| = \left|\left(S_n - f_0, \psi_k\right)\right| \leq \left\|S_n - f_0\right\| \cdot \left\|\psi_k\right\| = \left\|S_n - f_0\right\|$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, (2.1.33) дан

$$n \to \infty \quad \text{да} \quad \left(S_n, \psi_k\right) \to \left(f_0, \psi_k\right)$$

эканлиги келиб чиқади. Бу муносабатдан ва (2.1.34) дан $\left(f_0, \psi_k\right) = c_k = \left(f, \psi_k\right)$ эканлигини ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

Натижа. *Ихтиёрий H гильберт фазосида ихтиёрий ортонормал системанинг тўлалиги унинг ёпиқлигига эквивалентдир.*

Эслатма. Тўла бўлмаган евклид фазосида бу 7-теорема умуман олганда, ўринли эмас.

Бу фактни қуйидаги мисол ёрдамида кўрсатамиз.[1]

$C^0[-\pi, \pi]$ орқали $[-\pi, \pi]$ сегментда узлуксиз бўлган барча $f(x)$ функцияларнинг скаляр кўпайтма $\left(f, g\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$ тенглик билан аниқланган евклид фазосини қараймиз. Албатта, бу фазо тўла бўлмайди. Шунга кўра, гильберт фазоси эмас. Буни кўрсатиш учун, $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли узлуксиз, лекин қатъий узлуксиз бўлмаган ихтиёрий $f_0(x)$ функцияни танлаш етарлидир. $f_0(x)$ функция тригонометрик Фурье қаторининг қисмий йиғиндилар кетма-кетлиги шу функцияга $L_2[-\pi, \pi]$ фазо нормаси бўйича яқинлашади. $L_2[-\pi, \pi]$ фазонинг тўлалигига кўра, кўрсатилган тригонометрик Фурье қаторининг қисмий йиғиндилар кетма-кетлиги фундаментал бўлади. Кўрсатилган тригонометрик Фурье қаторининг ҳар бир ҳади $[-\pi, \pi]$ сегментда узлуксиз, лимитик функция эса, $L_2[-\pi, \pi]$ фазога қарашли ва бу

[1] Бу мисол Ш.А. Алимов томонидан қурилган.

$f_0(x)$ функция $C^0[-\pi, \pi]$ фазога қарашли бўлмайди. Бу $C^0[-\pi, \pi]$ фазода ёпиқ бўлмаган элементларнинг тўла ортонормал системасини қурамиз. Бу системани қуриш жараёнини икки қадамда бажарамиз.

1^0. Аввал $L_2[-\pi,\pi]$ гильберт фазосида $\varphi_0(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ сегментда узилишга эга ва барча $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, ...$ функциялар эса, шу $[-\pi,\pi]$ сегментда узлуксиз бўлган функциялардан иборат шундай бир $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ тўла ортонормал система мавжуд эканлигини исбот қиламиз. Бунда

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & -\pi \le x < 0 \end{cases} \qquad (2.1.35)$$

$$\psi_{2n}(x) = \frac{\sqrt{2}\cos nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n=1,2,...),$$

$$\psi_{2n-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\sin nx}{\sqrt{\pi}}, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases} \quad (n=1,2,...)$$

деб олайлик. Бирданига кўриш мумкинки, $[-\pi,\pi]$ сегментда $\psi_0(x)$ функция узилишга эга, қолган барча $\psi_n(x)$ $(n=1,2,...)$ функциялар шу сегментда узлуксиздир. Бундан ташқари, осонгина кўриш мумкинки, $\psi_0(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ сегментда ҳар бир $\psi_n(x)$ $(n=1,2,...)$ функцияга ортогоналдир.

$L_2[-\pi,\pi]$ гильберт фазосида $\psi_n(x)$ $(n=0, 1, 2, ...)$ система ортонормал система бўлмасада, унинг тўла система эканлигига, яъни $L_2[-\pi,\pi]$ гильберт фазосидаги ихтиёрий $f(x)$ элементнинг барча $\psi_n(x)$ $(n=0, 1, 2, ...)$ элементларга ортогонал эканлигидан унинг айнан нолга эквивалент эканлиги келиб чиқади.

Ҳақиқатдан ҳам, $L_2[-\pi,\pi]$ гильберт фазосидаги ихтиёрий $f(x)$ элемент барча $\psi_n(x)$ $(n=0, 1, 2, ...)$ элементларга ортогонал бўлсин.

$f(x)$ функциянинг барча $\psi_{2n-1}(x)$ $(n=1, 2, ...)$ элементларга ортогонал эканлигидан $f(x)$ функциянинг $[-\pi,0]$ сегментда

$\left\{ \dfrac{\sqrt{2}\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$ $(n = 1, 2, \ ...)$ функциялар системасига ортогонал эканлиги келиб чиқади ва шунга кўра, бу системанинг $[-\pi, 0]$ сегментда тўла эканлигидан $f(x)$ функциянинг $[-\pi, 0]$ сегментда нолга эквивалент эканлигини ҳосил қиламиз.

Бу ҳолда $f(x)$ функциянинг барча $\psi_{2n}(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ элементларга ортогонал эканлигидан $f(x)$ функциянинг $[0, \pi]$ сегментда $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\dfrac{\sqrt{2}\cos nx}{\sqrt{\pi}}$ $(n = 1, 2, \ ...)$ функциялар системасига ортогонал эканлиги келиб чиқади ва шунга кўра, бу системанинг $[0, \pi]$ сегментда тўла эканлигидан $f(x)$ функциянинг $[0, \pi]$ сегментда нолга эквивалент эканлигини ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, $f(x)$ функция бутун $[-\pi, \ \pi]$ сегментда нолга эквивалент экан.

Демак, $L_2[-\pi, \pi]$ гильберт фазосида $\psi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ система тўла бўлади. $\psi_0, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, \ ...$ системага ортогоналлаштириш процессини қўллаб, биз $\psi_0, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, ..., \bar{\psi}_n, \ ...$ ортогонал системани ҳосил қиламиз. Бу охирги системани нормаллаштирамиз, яъни

$$\varphi_0(x) = \psi_0(x), \ \ \varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n(x)\|} \ \ (n = 1, 2, ...)$$

деб оламиз.

Биз $L_2[-\pi, \pi]$ гильберт фазосида $\varphi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ тўла ортонормал системага эга бўлдик, бунда $\varphi_0(x) = \psi_0(x)$ функция (2.1.35) формула орқали аниқланади ва $[-\pi, \pi]$ сегментда $\varphi_0(x)$ функция узилишга эга, қолган барча $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ функциялар шу $[-\pi, \pi]$ сегментда узлуксиз бўлган функцияларнинг чизиқли комбинациялари сифатида узлуксиздир.

2^0. Энди $[-\pi, \pi]$ сегментда узлуксиз бўлган барча $f(x)$ функцияларнинг $C^0[-\pi, \ \pi]$ фазосини қараймиз ва бу фазода $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, \ ...$ тўла система, лекин шу $C^0[-\pi, \ \pi]$ фазода ёпиқ эмаслигини исбот қиламиз.

Аввал $C^0[-\pi,\pi]$ фазода $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ тўла система эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. $C^0[-\pi,\pi]$ фазодан олинган ихтиёрий $f(x)$ элемент барча $\varphi_n(x),\ n=1, 2, ...$ функцияларга ортогонал бўлсин, яъни

$$\left(f(x),\ \varphi_n(x)\right)=0, \quad n=1, 2, ... \ . \tag{2.1.36}$$

У ҳолда

$$g(x)=f(x)-\left(f,\ \varphi_0\right)\cdot\varphi_0(x) \tag{2.1.37}$$

функция $L_2[-\pi,\pi]$ фазо элементи ва

$$\left(g(x),\ \varphi_n(x)\right)=0, \quad n=0, 1, 2, ... \tag{2.1.38}$$

шартларни қаноатлантиради. Ҳақиқатдан ҳам, $n=1, 2, ...$ учун (2.1.38) бирданига (2.1.36) ва $\varphi_0(x)$ элементнинг барча $\varphi_n(x),\ n=1, 2, ...$ элементларга ортогонал эканлигидан келиб чиқади. $\left(g(x),\ \varphi_0(x)\right)=0$ тенглик (2.1.37) дан ва скаляр кўпайтмадан, ҳамда $\left(\varphi_0(x),\ \varphi_0(x)\right)=1$ тенгликдан келиб чиқади. $\varphi_n(x)$ $(n=0, 1, 2, ...)$ системанинг $L_2[-\pi,\pi]$ гильберт фазосида тўла эканлигидан $g(x)-$ ноль элемент эканлиги келиб чиқади, у ҳолда (2.1.37) дан ва $f(x)$ функция узлуксиз эканлигидан, ҳамда $[-\pi,\pi]$ сегментда $\varphi_0(x)$ функция узилишга эга эканлигидан, $\left(f(x),\ \varphi_0(x)\right)=0$ эканлиги келиб чиқади. Охирги тенгликни (2.1.36) тенгликлар билан бирлаштириш, $f(x)=0$ ноль элемент эканлигини билдиради, яъни $C^0[-\pi,\pi]$ фазода $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ системанинг тўла система эканлигини билдиради.

Энди $C^0[-\pi,\pi]$ фазода $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ система ёпиқ бўлмаслигини исбот қиламиз. Ихтиёрий a_k $(k=1, 2, ...)$ коэффициентли $P=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)$ шаклдаги $P-$полином бўлсин. $\varphi_n(x)$ $(n=0, 1, 2, ...)$ системанинг ортонормаллигига кўра ва скаляр кўпайтманинг аксиомаларига кўра,

$$\left\|\varphi_0(x)-P\right\|=\sqrt{\left(\varphi_0(x)-P,\ \varphi_0(x)-P\right)}=\sqrt{\left\|\varphi_0(x)\right\|^2+\left\|P\right\|^2}\geq 1 \tag{2.1.39}$$

бўлади.

Маълумки, $L_2[-\pi,\pi]$ фазода узлуксиз функциялар зич бўлганлигидан $\varphi_0(x)$ элемент учун $g(x)$ узлуксиз функция топилиб,

$$\left\|\varphi_0(x)-g\right\|<\frac{1}{2} \qquad (2.1.40)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу (2.1.39) ва (2.1.40) тенгсизликлардан $\left\|g(x)-P\right\|>\dfrac{1}{2}$ тенгсизлик ихтиёрий коэффициентли P полином учун ўринли бўлади. Бу эса, $C^0[-\pi,\pi]$ фазодаги $g(x)$ элементни $L_2[-\pi,\pi]$ фазо нормаси бўйича $\varphi_n(x),\ n=1,2,\ldots$ элементларнинг чизиқли комбинацияси бўйича яқинлаштириб бўлмаслигини билдиради, яъни $\varphi_n(x),\ n=1,2,\ldots$ элементлар системаси $C^0[-\pi,\pi]$ фазода ёпиқ бўлмайди.

Эслатма. Айрим адабиётларда 5-таърифда келтирилган евклид фазосидаги *ёпиқ система* тушунчаси *тўла система* деб, евклид фазосидаги барча элементлар учун *Парсеваль айнияти* ўринли бўлганда *ёпиқ система* деб, 6-таърифда келтирилган евклид фазосидаги *тўла система* тушунчаси эса, *тотал система* деб ҳам айтилади.[1] Бундай номланганда 7-теоремага кўра, гильберт фазосидаги системанинг тоталлиги унинг тўлалигига эквивалент бўлади. Ҳамда юқоридаги мисолга кўра, тўла бўлмаган евклид фазосида тотал, лекин тўла бўлмаган системанинг мавжудлиги келиб чиқади.

5. Тўла Евклид фазолари. Рисс–Фишер теоремаси. Ихтиёрий чексиз ўлчамли R – тўла сепарабель Евклид фазосида ихтиёрий $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементларнинг ортонормал системасини қараймиз. Бессель тенгсизлигига кўра, $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ сонлар қандайдир $f\in R$ элементнинг Фурье коэффициентлари бўлишлиги учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^{\,2}$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги зарурдир. Тўла сепарабель Евклид фазосида бу шарт нафақат зарур, балки етарли ҳамдир. Қуйидаги теорема ўринлидир.

[1] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1976 г., 145-155 бетларида келтирилган.

8-Теорема *(Рисс – Фишер теоремаси). Ихтиёрий чексиз ўлчамли* R *– тўла сепарабель Евклид фазосида ихтиёрий* $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *элементларнинг ортонормал системаси берилган ва* $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ *сонлар учун*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\ 2} \qquad (2.1.41)$$

қатор яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда шундай бир $f \in R$ *элемент мавжудки, бунда* $c_k = (f, \psi_k)$ *ва*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\ 2} = (f, f) = \| f \|^2$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ деб олайлик. У ҳолда

$$\| f_{n+p} - f_n \|^2 = \| c_{n+1}\psi_{n+1} + c_{n+2}\psi_{n+2} + ... + c_{n+p}\psi_{n+p} \|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^{\ 2}$$

ҳосил бўлади. (2.1.41) қатор яқинлашувчи бўлгани учун R фазонинг тўла эканлигидан $\{ f_n \}$ кетма-кетликнинг қандайдир $f \in R$ элементга яқинлашиши келиб чиқади. Бундан ташқари,

$$(f, \psi_i) = (f_n, \psi_i) + (f - f_n, \psi_i) \qquad (2.1.42)$$

тенгликда $n \geq i$ учун ўнг томондаги биринчи қўшилувчи c_i га тенг бўлади ва иккинчи қўшилувчи

$$|(f - f_n, \psi_i)| \leq \| f - f_n \| \cdot \| \psi_i \|$$

тенгсизликка кўра, $n \to \infty$ да нолга интилади. (2.1.42) тенгликнинг чап томони n га боғлиқ эмас ва шунга кўра, $n \to \infty$ да лимитга ўтсак,

$$(f, \psi_i) = c_i$$

ҳосил бўлади. Худди шунга кўра, $f \in R$ элементнинг аниқланишига кўра, $n \to \infty$ да $\| f - f_n \| \to 0$ эканлигидан

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\ 2} = (f, f) = \| f \|^2$$

тенглик ўринли эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, $n \to \infty$ да

$$\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k , \ \ f - \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \right) = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^{\ 2} \to 0$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

9-Теорема. *Ихтиёрий иккита сепарабель Гильберт фазоси ўзаро изоморфдир.*

Исбот. Ҳар қандай H гильберт фазоси l_2 фазога изоморф эканлигини кўрсатамиз. H сепарабель гильберт фазосидан олинган ихтиёрий $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементларнинг ортонормал системасини қараймиз ва ҳар бир $f \in H$ элементга бу системанинг Фурье коэффициентлари бўлган $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ сонлар кетма-кетлигини мос қўямиз. Бессель тенгсизлигига кўра, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\ 2} < \infty$ қаторнинг яқинлашувчи эканлигидан $c = (c_1, c_2, ..., c_n, ...)$ кетма-кетлик l_2 фазонинг элементи бўлади. Аксинча, Рисс – Фишер теоремасига кўра, l_2 фазодан олинган ҳар қандай $c = (c_1, c_2, ..., c_n, ...)$ элемент учун шундай бир $f \in H$ элемент мавжудки, бунда $c_k = (f, \psi_k)$ шу элементнинг Фурье коэффициенти бўлади. Бу H гильберт фазоси ва l_2 гильберт фазоси ўртасида ўрнатилган мослик бир қийматлидир. Бундан ташқари, агар

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, ..., c_n, ...)$$

ва

$$g \leftrightarrow (d_1, d_2, ..., d_n, ...)$$

бўлса, у ҳолда

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, ..., c_n + d_n, ...)$$

ва

$$\alpha f \leftrightarrow (\alpha c_1, \alpha c_2, ..., \alpha c_n, ...)$$

бўлади, яъни йиғинди йиғиндига ва сонга кўпайтириш эса мос элементни шу сонга кўпайтиришга ўтади. Энди биз Парсеваль тенглигидан

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n \qquad (2.1.43)$$

умумлашган Парсеваль тенглиги келиб чиқишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатдан ҳам,

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\ 2} \quad , \quad (g,g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{\ 2}$$

ва

$$(f+g,\ f+g) = (f,\ f) + 2(f,\ g) + (g,\ g) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\ 2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{\ 2}$$

тенгликлардан (2.1.43) умумлашган Парсеваль тенглиги келиб чиқади. Шундай қилиб, H ва l_2 гильберт фазолари ўртасида ўрнатилган бир қийматли мослик изоморфизмдан иборат экан. Теорема исбот бўлди.

Бу исбот қилинган 9-теоремага кўра, E тўпламда квадрати билан Лебег маъносида интегралланувчи бўлган ҳақиқий қийматли функцияларнинг $L_2(E)$ фазоси ва квадратларидан тузилган қатор яқинлашувчи бўлган ҳақиқий сонлар кетма-кетликларининг l_2 фазоларининг ўзаро изоморфлиги квант механикаси нуқтаи назаридан Гейзенбергнинг “*матрицавий механика*” ва Шрёдингернинг “*тўлқин механика*”лари эквивалент эканлигининг математик исботини асослаб беради.

2-§. Бир каррали тригонометрик Фурье қатори

1. Ортогонал система бўйича бир каррали Фурье қатори.

$[a,b]$ оралиқда $\psi_1(x),\ \psi_2(x), ..., \psi_n(x),\ ...$ функциялар системаси берилган бўлиб, ихтиёрий $n,\ m \in N,\ n \neq m$ учун $\int_a^b \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0$ бўлса, у ҳолда берилган система $[a,b]$ оралиқда ортогонал система деб айтилган эди. Бундан ташқари, $\int_a^b \psi_n^2(x)dx = 1,\ n \in N$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциялар системаси $[a,b]$ оралиқда ортонормал функциялар системаси деб айтилган эди. Масалан,

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ ...,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ ...$$

тригонометрик система $[-l, l]$ оралиқда ортогонал система бўлади.

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ ...\ ,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\ ,\ \ ...$$

тригонометрик система эса, $[-l, l]$ оралиқда ортонормал система бўлади.

$[a,b]$ оралиқда узлуксиз $f(x)$ функция ва $\{\psi_k(x)\}$ ортогонал система берилган бўлиб, ҳар бир $\psi_k(x)$ функция узлуксиз ва айнан ноль бўлмаган функция бўлсин. Агар шундай бир $\{a_k\}$ сонлар кетма-кетлиги топилиб, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x)$ функционал қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $f(x)$ функцияга тенг бўлса, яъни $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x),\ x \in [a,b]$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда $\{\psi_k(x)\}$ ортогонал функциялар системаси бўйича ёйилган дейилади.

1–Лемма. *Агар* $[a,b]$ *оралиқда* $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k(x),\ x\in[a,b]$ *функционал қатор текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор коэффициентлари учун*

$$a_n=\frac{\int_a^b f(x)\psi_n(x)dx}{\int_a^b \psi_n^2(x)dx},\qquad n\in N$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган $\psi_n(x)$ функция шу оралиқда Вейерштрасс теоремасига кўра чегараланган ҳамдир. Агар текис яқинлашувчи қаторни чегараланган функцияга кўпайтирсак ҳам, текис яқинлашувчи қаторни ҳосил қиламиз. Шунинг учун, берилган қаторни $\psi_n(x)$ функцияга кўпайтириб,

$$f(x)\psi_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k(x)\psi_n(x),\quad n\in N$$

қаралаётган $[a,b]$ оралиқда текис яқинлашувчи қаторни хосил қиламиз. Бу қаторни ҳадма ҳад интеграллаб,

$$\int_a^b f(x)\psi_n(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_a^b\psi_k(x)\psi_n(x)dx=a_n\int_a^b\psi_n{}^2(x)dx$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Лемма исбот бўлди.

Коэффициентлари бундай тенглик билан аниқланадиган қаторга Фурье қатори дейилган эди. $[-l,l]$ оралиқда $f(x)$ функцияни тригонометрик система бўйича Фурье қаторига ёйсак

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

бунда a_k ва b_k Фурье коэффициентлар қуйидагича аниқланади:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\qquad n\in N$$

Хусусан, $l=\pi$ бўлган ҳолда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ \ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n\in N\ .$$

2–Лемма (Риман леммаси)*. Агар* (a,b) *чекли ёки чексиз интервалда* $f(x)$ *функция абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\omega xdx=\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\omega xdx=0$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Аввал чекли $[a,\,b]$ оралиқда Риман маъносида $f(x)$ функция интегралланувчи бўлсин. Интегралланувчи бўлишлик шартига кўра, ихтиёрий $\varepsilon>0$ сони учун шундай бир $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ сон топилиб, бўлинишлар майдалиги $l(T)<\delta$, бунда $l(T)=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ бўлган ихтиёрий $T=\left\{x_i\right\}_0^n$ бўлиниш учун Дарбунинг юқори ва қуйи йиғиндилари айирмаси $S_T-s_T<\frac{\varepsilon}{2}$ бўлади, яъни $S_T-s_T=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$, бунда $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. У ҳолда ҳар бир $i=\overline{1,\ \ n}$ ва $x\in[x_{i-1},\,x_i]$ учун $0\le f(x)-m_i\le M_i-m_i$ ва

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\omega xdx\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\omega xdx\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x)-m_i\right)\sin\omega xdx+\sum_{i=1}^{n}m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin\omega xdx\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-m_i|\cdot|\sin\omega x|dx+\sum_{i=1}^{n}\frac{|m_i|}{|\omega|}|\cos\omega x_i-\cos\omega x_{i-1}|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\Delta x_i+\frac{2}{|\omega|}\sum_{i=1}^{n}|m_i|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{c_0}{|\omega|}\ ,$$

бунда $c_0 = 2n \sup\limits_{x\in[a,\,b]} \left| f(x) \right|$.

Ҳар бир тайинланган n учун $\omega_0 > 0$ сон топилиб, $|\omega| > \omega_0$ учун $\dfrac{c_0}{\omega} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Шундай қилиб, $|\omega| > \omega_0$ учун $\left| \int\limits_a^b f(x)\sin\omega x dx \right| < \varepsilon$, яъни $\lim\limits_{\omega\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin\omega x dx = 0$ бўлади.

Агар $f(x)$ функция (a,b) интервалда абсолют интегралланувчи бўлиб, b нуқта ягона махсус нуқта бўлса, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\exists\ b' < b$ мавжуд бўлиб, $[a,\ b']$ оралиқда $f(x)$ функция Риман маъносида интегралланувчи ва $\int\limits_{b'}^{b} |f(x)| dx < \dfrac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Шунинг учун, $|\omega| > \omega_0$ учун

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\sin\omega x dx \right| = \left| \int\limits_a^{b'} f(x)\sin\omega x dx + \int\limits_{b'}^{b} f(x)\sin\omega x dx \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_a^{b'} f(x)\sin\omega x dx \right| + \int\limits_{b'}^{b} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Демак, $\lim\limits_{\omega\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin\omega x dx = 0$. Худди шунга ўхшаш $\lim\limits_{\omega\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos\omega x dx = 0$ бўлади.

Натижа. *Агар $f(x)$ функция $[-l,\, l]$ оралиқда абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда тригонометрик системанинг a_n ва b_n Фурье коэффициентлари $n \to \infty$ да нолга интилади.*

2. Бир каррали тригонометрик Фурье қатори қисмий йиғиндиси учун формула. $[-l,\, l]$ оралиқда абсолют интегралланувчи $2l-$даврли функциянинг тригонометрик Фурье қатори

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \ a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

учун қисмий йиғиндилар кетма–кетлигини тузамиз, яъни

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\ a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

Бу $S_n(x)$ функция чексиз дифференциалланувчи ва $2l-$ даврлидир. $u\neq 2k\pi,\ k\in Z$ учун

$$D_n(u)=\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+...+\cos nu=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

айният ўринлидир. Ҳақиқатдан ҳам,

$$2D_n(u)\sin\frac{u}{2}=\sin\frac{u}{2}+2\cos u\cdot\sin\frac{u}{2}+...+2\cos nu\sin\frac{u}{2}=$$

$$=\sin\frac{u}{2}+\sin\frac{3u}{2}-\sin\frac{u}{2}+...+\sin(n+\frac{1}{2})u-\sin(n-\frac{1}{2})u=\sin(n+\frac{1}{2})u.$$

Демак, $D_n(u)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$ ҳосил бўлади. Бу $D_n(u)$ функцияга Дирихле ядроси деб айтилади.

3–Лемма. *Дирихле ядроси чексиз дифференциалланувчи* $2\pi-$*даврли жуфт функциядир, бундан ташқари* $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)du=1$ *тенглик ўринли бўлади.*

Исбот. $D_n(u)=\dfrac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+...+\cos nu$ функция жуфт, $2\pi-$даврли ва чексиз дифференциалланувчи эканлиги бевосита келиб чиқади. Бундан ташқари,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+...+\cos nu]du=$$

$$=1+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos ku du=1$$

бўлади. Тригонометрик Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси учун Дирихле формуласини келтириб чиқарамиз. Шу мақсадда биз қисмий йиғиндида қатнашган a_k ва b_k Фурье коэффициентларининг ифодасини $S_n(x)$ қисмий йиғиндига олиб бориб қўйсак

$$S_n(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{k\pi x}{l}\cdot\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}+\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cdot\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi t}{l}+\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi t}{l}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cdot\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{l}(x-t)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cdot D_n\left(\frac{\pi}{l}(t-x)\right)dt=\frac{1}{l}\int_{-l+x}^{l+x}f(x-u)\cdot D_n\left(\frac{\pi}{l}u\right)du$$

ҳосил бўлади.

Интеграл остидаги функция $2l-$даврли функция бўлгани учун $\int_{a-l}^{a+l}f(t)dt=\int_{-l}^{l}f(t)dt$ тенгликдан фойдаланиб,

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x-u)\cdot D_n\left(\frac{\pi}{l}u\right)du$$

тенгликка эга бўламиз. Бу формулага Дирихле формуласи деб айтилади. Уни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{0}^{l}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\cdot D_n\left(\frac{\pi}{l}u\right)du$$

Бу Дирихле формуласи $l=\pi$ бўлган ҳолда

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)\cdot D_n(u)du=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\cdot D_n(u)du$$

шаклида ёзилади.

3. Бир каррали тригонометрик Фурье қаторининг нуқтада яқинлашиши. Фурье қаторининг x_0 нуқтада яқинлашишини текшириш Дирихле формуласи орқали аниқланган $S_n(x_0)$ қисмий йиғиндилар кетма–кетлигининг яқинлашишини текширишга олиб келинади. Қулайлик учун $l=\pi$ деб оламиз. Умуман, $2\pi-$даврли ҳолдан $2l-$даврли ҳолга энг содда ўзгарувчини алмаштириш йўли билан ўтиш мумкин.

1–теорема (Локализация принципи). *$f(x)$ функция $2\pi-$даврли ва $[-\pi, \pi]$ оралиқда абсолют интегралланувчи бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция Фурье қаторининг $x_0 \in R$ нуқтада яқинлашиши ва бу қатор яқинлашган ҳолда эса, $f(x)$ функция Фурье қаторининг x_0 нуқтадаги йиғиндиси шу $f(x)$ функциянинг фақат ихтиёрий кичик $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$ интервалдаги ҳолатигагина боғлиқ бўлади.*

Исбот. Дирихле формуласидан фойдаламиз:

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x_0+u)+f(x_0-u)\right]\cdot D_n(u)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})udu\ .$$

$[-\pi, \pi]$ оралиқда $f(x_0+u)+f(x_0-u)$ функция абсолют интегралланувчи ва ихтиёрий $\delta>0$ ва барча $u\in[\delta, \pi]$ учун

$$\left|\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\right|\le\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\left|f(x_0+u)+f(x_0-u)\right|$$

тенгсизликдан таққослаш аломатига кўра,

$$\Phi(u)=\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

функциянинг $[\delta, \pi]$ оралиқда абсолют интегралланувчи эканлиги келиб чиқади, Риман леммасига кўра,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})udu=0$$

ҳосил бўлади. У ҳолда Дирихле формуласига кўра

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x_0)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})udu\right]=0$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенгликдан $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)$ лимитнинг мавжудлиги фақат

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})udu$$

лимитнинг мавжудлигига боғлиқ эканлиги келиб чиқади, яъни функциянинг $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ интервалдаги қийматларигагина боғлиқ экан. Агар $f(x)\equiv\frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда $S_n(x_0)\equiv\frac{1}{2}$ бўлади. Шунинг учун, ихтиёрий $\delta>0$ учун

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du=\frac{1}{2}$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар $f(x_0\pm 0)$ чекли бир томонли лимитлар ва $\delta>0,\ \ \alpha\in(0,\ 1],\ C_0>0$ сонлари мавжуд бўлиб, ихтиёрий $u\in(0,\ \delta)$ учун

$$\left|f(x_0+u)-f(x_0+0)\right|\le C_0\cdot u^{\alpha},\quad \left|f(x_0-u)-f(x_0-0)\right|\le C_0\cdot u^{\alpha}$$

тенгсизликлари ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада Гёльдер шартини қаноатлантиради деб айтилади. α сон Гёльдер кўрсаткичи деб айтилади. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада Гёльдер шартини қаноатлантириб, $f(x_0+0)\ne f(x_0-0)$ бўлса, бу функция шу x_0 нуқтада биринчи турдаги узилишга эга бўлади.

Бир томонли ҳосила тушунчасини ҳам қуйидагича киритиш мумкин.

$$f'_+(x_0)=\lim_{u\to+0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u},$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{u\to+0}\frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{-u}\ .$$

4- Лемма. *Агар x_0 нуқтада $f(x)$ функция $f'_+(x_0)$ ва $f'_-(x_0)$ чекли бир томонли ҳосилаларига эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада $\alpha=1$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантиради.*

Исбот. Қуйидаги $\varphi(u)=\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}$ ва $\psi(u)=\dfrac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{u}$ функциялар $u\to+0$ да чекли лимитларга эга ва шунинг учун қандайдир (0, δ) интервалда чегараланган бўлади, яъни шундай бир $C_0>0$ сон мавжуд бўлиб,

$$\left|\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\right|\le C_0,\quad \left|\frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{u}\right|\le C_0$$

тенгсизликлари ўринли бўлади. Шунга кўра, $f(x)$ функция x_0 нуқтада $\alpha=1$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантиради.

Натижа. *Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу нуқтада $\alpha=1$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантиради.*

Тескари хулоса умуман олганда ўринли эмас, масалан $|x|^\alpha$ функция $0<\alpha<1$ учун $x=0$ нуқтада Гёльдер шартини қаноатлантиради, лекин $x=0$ нуқтада дифференциалланувчи эмас.

2–Теорема (Фурье қаторининг нуқтада яқинлашиши). *$f(x)$ функция $2\pi-$даврли бўлиб, $[-\pi,\pi]$ оралиқда абсолют интегралланувчи ва x_0 нуқтада Гёльдер шартини қаноатлантирсин. У ҳолда $f(x)$ функция Фурье қатори x_0 нуқтада $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ сонга яқинлашади.*

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу нуқтада Фурье қатори йиғиндиси $f(x_0)$ сонга тенг бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция x_0 нуқтада Гёльдер шартини қаноатлантиргани учун $0<u<\delta$ ва $\alpha>0$ учун

$\left| f(x_0+u)-f(x_0+0) \right| \le C_0 \cdot u^{\alpha}$ ва $\left| f(x_0-u)-f(x_0-0) \right| \le C_0 \cdot u^{\alpha}$ тенгсизликлари ўринли бўлади. Шу $\delta > 0$ сон учун

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x_0)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})udu \right]=0$$

ва

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du=\frac{1}{2}$$

тенгликларни ёзамиз. Иккинчи тенгликни $f(x_0+0)+f(x_0-0)$ сонга кўпайтириб, биринчисидан айириш натижасида

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x_0)-\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}- \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)+f(x_0-u)-f(x_0-0)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})udu \right]=0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Гёльдер шартига кўра,

$$\Phi(u)=\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)+f(x_0-u)-f(x_0-0)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

функция $[0,\delta]$ оралиқда абсолют интегралланувчи бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, Гёльдер тенгсизлигини ва $\sin\frac{u}{2}\ge\frac{u}{\pi}$ ботиқ бўлишлик тенгсизлигини қўлласак,

$$\left|\Phi(u)\right|\le\frac{2C_0\,u^{\alpha}}{\frac{2}{\pi}u}=\pi C_0\,u^{\alpha-1},\quad \alpha\in(0,1]$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Хосмас интеграллар учун таққослаш аломатини қўллаб, $\Phi(u)$ функциянинг $[0,\delta]$ оралиқда абсолют интегралланувчи эканлигини ҳосил қиламиз.

Риман леммасига кўра,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\Phi(u)\sin(n+\frac{1}{2})udu=0$$

ҳосил бўлади. Шунинг учун, юқоридаги ҳосил қилинган тенгликдан

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

тенглик келиб чиқади.

1-Натижа. *Агар $2\pi-$даврли ва $[-\pi,\ \pi]$ оралиқда абсолют интегралланувчи $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳар иккала бир томонли ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда унинг Фурье қатори x_0 нуқтада $\frac{1}{2}f(x_0+0)+\frac{1}{2}f(x_0-0)$ сонга яқинлашади.*

2-Натижа. *Агар $2\pi-$даврли ва $[-\pi,\pi]$ оралиқда абсолют интегралланувчи $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда унинг Фурье қатори шу нуқтада $f(x_0)$ сонга яқинлашувчи бўлади.*

3-Натижа. *Агар $2\pi-$даврли ва $[-\pi,\ \pi]$ оралиқда абсолют интегралланувчи $f(x)$ функция $\pm\pi$ нуқталарда Гёльдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда даврийликка кўра, унинг Фурье қатори йиғиндиси $\pm\pi$ нуқталарда $\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}$ сонга тенг бўлади.*

Агар $[a,b]$ оралиқни $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ бўлган x_i нуқталар билан оралиқларга бўлиш мумкин бўлиб, ҳар бир (x_{i-1},x_i) интервалда $f(x)$ функция узлуксиз ва $f(a+0),\ f(b-0),\ f(x_i\pm0),\ i=\overline{1,n-1}$ чекли лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда бўлакли–узлуксиз дейилади.

Агар $[a,b]$ оралиқда шундай бир бўлиниш топилиб, ҳар бир $(x_{i-1},x_i),\ i=\overline{1,n}$ бўлиниш интервалида $f(x)$ функция $f'(x)$ узлуксиз ҳосилага эга ва бир томонли $f'(a+0),\ f'(b-0),$

$f'(x_i \pm 0),\quad i=\overline{1,\ n-1}$ чекли лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда бўлакли–силлиқ дейилади. Бўлакли–силлиқ функциянинг ҳосиласи $[a,b]$ оралиқнинг чекли нуқталаридан ташқари ҳамма жойда аниқланган ва бўлакли–узлуксиз функция бўлади. Бўлакли–силлиқ функциянинг Фурье қатори шу функциянинг узлуксизлик нуқталарида функциянинг шу нуқтадаги қийматига, узилиш нуқталарида эса, шу узилиш нуқтасидаги лимитик қийматлари йиғиндисининг ярмига тенг қийматга яқинлашади.

$L^c(a,b)$ орқали (a,b) интервални қандайдир чекли сондаги бўлиш ёрдамида ҳар бир (x_{i-1},x_i) интервалда $f(x)$ функция узлуксиз ва $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлган функциялар тўпламини белгилаймиз.

$\bar{L}^C[a,b]$ орқали эса, $[a,\,b]$ оралиқда узлуксиз, $(a,\,b)$ интервалнинг чекли нуқталаридан ташқари, барча нуқталарида дифференциалланувчи ва $f'(x)\in L^c(a,b)$ бўлган функциялар тўпламини белгилаймиз.

$\bar{L}^C[a,\,b]$ функциялар синфи қуйидаги хоссаларга эга.

1. *Ихтиёрий* $x\in[a,b]$ *учун* $\int\limits_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a)$ *Ньютон-Лейбниц формуласи ўринлидир.*

Исбот. $f'(x)\in L^c(a,\,b)$ эканлигидан $[a,b]$ оралиқни шундай бўлиш мумкинки, бу бўлинишнинг ҳар бир $(x_{i-1},x_i),\ i=\overline{1,n}$ интервалида $f'(x)$ функция узлуксиз бўлади. Хосмас интеграллар учун Ньютон–Лейбниц формуласидан фойдаланиб ва $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқда узлуксиз эканлигидан

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)dt = f(x_i-0)-f(x_{i-1}+0) = f(x_i)-f(x_{i-1})$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар $x_{k-1}\le x\le x_k$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^x f'(t)dt = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)dt + \int_{x_{k-1}}^{x} f'(t)dt =$$

$$= f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + ... + f(x) - f(x_{k-1}) = f(x) - f(a)$$

тенглик ҳосил бўлади.

2. *Агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар* $\overline{L}^C[a,b]$ *синфга қарашли бўлса, у ҳолда* $f(x)\cdot g(x) \in \overline{L}^c[a,b]$ *ва*

$$\int_a^x f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(x)g'(x)dx,\ x \in [a,b]$$

бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли бўлади.

Исбот. $\varphi(x) = f(x)\cdot g(x)$ бўлсин. У ҳолда $[a,b]$ оралиқда $\varphi(x)$ функция узлуксиз бўлади. $f \in \overline{L}^C[a,\ b]$ эканлигидан $[a,b]$ оралиқда шундай бир T_1 бўлиниш мавжудки, бу T_1 бўлинишнинг ҳар бир интервалида $f'(x)$ функция узлуксиз бўлади. Худди шунга ўхшаш $[a,b]$ оралиқда шундай бир T_2 бўлиниш мавжудки, бу T_2 бўлинишнинг ҳар бир интервалида $g'(x)$ функция узлуксиз бўлади. T_1 ва T_2 бўлинишларни бирлаштириб, $[a,b]$ оралиқда шундай бир T бўлиниш ҳосил қиламизки, T бўлинишнинг ҳар бир $(x_{i-1},\ x_i)$, интервалида $f'(x)$ ва $g'(x)$ функциялар узлуксиз ва $\varphi' = (f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ тенглик бажаради. (a,b) интервалда f' ва g' функциялар абсолют интегралланувчи, f ва g функциялар узлуксиз ва шунга кўра, $[a,b]$ оралиқда чегараланган эканлигидан, ҳамда юқоридаги тенгликдан φ' функциянинг $[a,b]$ оралиқда абсолют интегралланувчи эканлиги келиб чиқади. Шунга кўра, $\varphi \in \overline{L}^C[a,\ b]$ бўлади.

$[a,x]$ оралиқ бўйича юқоридаги тенгликни интеграллаб ва Ньютон–Лейбниц формулани қўллаб

$$\int_a^x f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(x)g'(x)dx$$

бўлаклаб интеграллаш формуласини ҳосил қиламиз.

Энди иккита ёрдамчи леммаларни киритамиз.

5– Лемма. $g(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ *функция* $R=(-\infty,+\infty)$ *сон ўқида чегараланган бўлади.*

Исбот. $g(x)$ функция тоқ функция бўлгани учун унинг $x\geq 0$ учун чегараланган эканлигини текшириш етарлидир. Дирихле аломатига кўра, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ интеграл яқинлашувчи бўлгани учун $g(x)$ функция $x\to+\infty$ да чекли лимитга эга бўлади. $g(x)$ функция $[0,+\infty)$ да узлуксиз ҳамдир. Шунга кўра, $[0,+\infty)$ ораликда $g(x)$ функция чегараланган бўлади.

6–Лемма. *Агар* $f\in\bar{L}^{\,C}\left[0,b\right]$ *ва* $f(0)=0$ *бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_0^b f(t)\frac{\sin\omega t}{t}\,dt=0$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. 5–леммага кўра, $g(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ функция қандайдир C_0 ўзгармас сон билан модули бўйича чегараланган бўлади. $f\in\bar{L}^{\,C}\left[0,\,b\right]$ эканлигидан $\int\limits_0^b \left|f'(t)\right|dt$ хосмас интеграл яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун, ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун $\delta>0$ сон топилиб, $\int\limits_0^\delta \left|f'(t)\right|dt<\frac{\varepsilon}{4C_0}$ тенгсизлик ўринли бўлади. $\left[0,b\right]$ ораликда

$$G(x,\omega)=\int\limits_x^\delta \frac{\sin\omega t}{t}dt=\int\limits_{\omega x}^{\omega\delta}\frac{\sin u}{u}\,du=g(\omega\delta)-g(\omega x)$$

функцияни қараймиз. Бу формулага кўра, $G(\delta,\omega)=0,$ $\left|G(x,\omega)\right|\leq 2C_0$ келиб чиқади. $\frac{f(t)}{t}$ функция $\left[\delta,b\right]$ ораликда узлуксиз бўлиб, Риман леммаси натижасига кўра,

$$\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_\delta^b \frac{f(t)}{t}\sin\omega t dt\ =0$$

тенглик бажарилиши керак бўлади. Шунинг учун ω_0 сон топилиб, барча $\omega > \omega_0$ учун

$$\left|\int_{\delta}^{b} f(t)\frac{\sin\omega t}{t}dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлиги ўринли. f ва G функциялар $\bar{L}^{C}\left[0,\ b\right]$ синфга қарашли бўлгани учун бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб,

$$\int_{0}^{\delta} f(t)\frac{\sin\omega t}{t}dt = -f\,G\Big|_{0}^{\delta} + \int_{0}^{\delta} f'(t)G(t,\omega)dt = \int_{0}^{\delta} f'(t)G(t,\omega)dt$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан фойдаланиб,

$$\left|\int_{0}^{\delta} f(t)\frac{\sin\omega t}{t}dt\right| \le \int_{0}^{\delta} |f'(t)|\cdot|G(t,\omega)|dt \le 2C_0\left|\int_{0}^{\delta} f'(t)dt\right| < 2C_0\frac{\varepsilon}{4C_0} = \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Юқоридаги формулалардан фойдаланиб, ихтиёрий $\omega > \omega_0$ учун

$$\left|\int_{0}^{b} f(t)\frac{\sin\omega t}{t}dt\right| \le \left|\int_{0}^{\delta} f(t)\frac{\sin\omega t}{t}dt\right| + \left|\int_{\delta}^{b} f(t)\frac{\sin\omega t}{t}dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади, яъни

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{0}^{b} f(t)\frac{\sin\omega t}{t}dt = 0$$

бўлади.

3–Теорема. *$f(x)$ функция узлуксиз ва $2\pi-$даврли бўлиб, $\bar{L}^{C}\left[-\pi,\ \pi\right]$ синфга қарашли бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функциянинг Фурье қатори ҳар бир $x \in R$ нуқтада $f(x)$ функциянинг шу нуқтадаги қийматига яқинлашади.*

Исбот. Фурье қатори қисмий йиғиндиси учун ўринли бўлган

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[f(x+u) + f(x-u)\right]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

формула ва Дирихле ядросининг хоссасидан фойдаланиб, $S_n(x) - f(x)$ айирмани

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(x,u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

шаклида ёзамиз, бунда $\Phi(x,u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)$.

Маълумки, $u \to 0$ да

$$a(u) = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{1}{u} = \frac{u - 2\sin\frac{u}{2}}{2u\sin\frac{u}{2}} \sim \frac{1}{24}u$$

бўлиб, $a(u)$ функцияни $\left[0, \pi\right]$ ораликқача $u = 0$ нуқтада $a(0) = 0$ тенглик билан аниқлаб, давом эттирамиз. Натижада $\left[0, \pi\right]$ ораликда узлуксиз $a(u)$ функцияга эга бўламиз ва шунинг учун Риман леммасига кўра,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \Phi(x,u)\ a(u) \sin(n+\frac{1}{2})u\, du = 0$$

тенглик келиб чиқади. $n \to \infty$ да $S_n(x) \to f(x)$ бўлишлиги учун $\int_0^{\pi} \Phi(x,u) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} du$ интеграл нолга интилиши керак. Бу интеграл нолга интилиши учун эса,

$$\int_0^{\pi} \Phi(x,u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{u}du$$

интеграл нолга интилиши керак бўлади. Охирги интегралнинг нолга интилиши $\Phi(x,u)$ функция ҳар бир $x \in R$ учун u аргумент функцияси сифатида 6–лемма шартларини қаноатлантиргани учун келиб чиқади. Шунинг учун, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, яъни $f(x)$ функциянинг Фурье қатори ихтиёрий $x \in R$ нуқтада функциянинг шу нуқтадаги қийматига яқинлашади.

Кўрсатиш мумкинки,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos^4 \frac{x}{2}}{\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, & x\neq k\pi; k\in Z \\ 0, & x=k\pi \end{cases}$$

функция 3–теореманинг барча шартларини қаноатлантиради, лекин $x=0$ нуқтада Гёльдер шартини қаноатлантирмайди, чунки ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{|x|^{\varepsilon}}=\infty$ тенглик бажарилади.

1–мисол. $[-\pi,\pi]$ ораликда

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in(0,\pi) \\ -1, & x\in(-\pi,0) \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

функциянинг тригонометрик Фурье қаторини топамиз. $f(x)$ функцияни бутун сон ўқига даврий давом эттирамиз. $f(x)$ функция тоқ бўлгани учун

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin kxdx=-\frac{2}{\pi k}\cos kx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi k}(1-\cos k\pi)=\frac{2}{\pi k}(1-(-1)^k),\quad b_{2n}=0,\quad b_{2n+1}=\frac{4}{\pi(2n+1)}.$$

Шунга кўра,

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1},\ x\neq k\pi,\ k\in Z.$$

$x\neq k\pi,\ k\in Z$ учун $f'(x)$ мавжуд эканлигидан

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1},\ x\neq k\pi,\ k\in Z$$

тенглик ҳосил бўлади. $x=k\pi,\ k\in Z$ нуқталарда $f(x)$ функция аниқланмаган бўлиб, Фурье қаторининг йиғиндиси нолга тенгдир. $x=\dfrac{\pi}{2}$ деб олсак,

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+\frac{(-1)^n}{2n+1}+...=\frac{\pi}{4}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

2–Мисол. $[-\pi, \pi]$ ораликда $f(x)=\cos ax,\quad -\pi\le x\le\pi,$ $a\ne n,\ n\in Z$ функциянинг тригонометрик Фурье қаторини топамиз. $f(x)$ функцияни бутун сон ўқига давом эттириб, узлуксиз ва $2\pi-$даврли, ҳар бир нуқтада бир томонли ҳосилага эга функцияни ҳосил қиламиз. Фурье коэффициентларини аниқлаймиз. $f(x)$ функция жуфт бўлгани учун, барча $b_n=0$ ва a_n коэффициентлар қуйидагича ҳисобланади:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(a-n)x+\cos(a+n)x\right]dx=$$

$$=\frac{\sin a\pi}{\pi}\cdot(-1)^n\cdot\left[\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a-n}\right],$$

бундан, $-\pi\le x\le\pi$ учун

$$\frac{\pi\cos ax}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a-n}+\frac{1}{a+n}\right)\cos nx$$

келиб чиқади. $x=\pi$ ва $a\cdot\pi=z$ деб олсак, $ctg\,z$ функциянинг элементар касрларга ёйилмасини ҳосил қиламиз:

$$ctg\,z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right),$$

бунда $\pm n\pi$ нуқталар $\sin z$ функциянинг нолларидан иборат.

Агар $x=0$ ва $z=\pi a$ деб олсак, $\cos ec\,z$ функциясининг элементар касрларга ёйилмасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right).$$

3–Мисол. $[-\pi, \pi]$ ораликда абсолют интегралланувчи ва $2\pi-$даврли бўлган қуйидаги

$$f(x)=-\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|,\quad x\ne 2k\pi,\quad k\in Z$$

функциянинг тригонометрик Фурье қаторини аниқлаймиз. Бу функциянинг $x\ne 2k\pi$ бўлган нуқталарда $f'(x)$ ҳосиласи мавжуд бўлгани учун барча $x\ne 2k\pi$ нуқталарда $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори шу функциянинг қийматига яқинлашади. Бу функциянинг Фурье коэффициентларини аниқлаймиз. $f(x)$ функция жуфт бўлгани учун, барча $b_n = 0$ ва a_n коэффициентлар қуйидагича ҳисобланади:

$$\pi a_0 = -2\int_0^{\pi} \ln\sin\frac{x}{2}dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin\frac{x}{2}dx - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin\frac{x}{2}dx =$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin\frac{x}{2}dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos\frac{x}{2}dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin x\right)dx =$$

$$= \pi\ln 2 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = \pi\ln 2 - \int_0^{\pi} \ln\sin\frac{t}{2}dt = \pi\ln 2 + \frac{\pi a_0}{2},$$

Бундан эса, $a_0 = 2\ \mathrm{l\ n}$ келиб чиқади. Энди $n \neq 0$ учун a_n коэффициентларни топамиз:

$$\pi a_n = -2\int_0^{\pi} \cos nx \ln\sin\frac{x}{2}dx = -2\frac{\sin nx}{n}\ln\sin\frac{x}{2}\Big|_{+0}^{\pi} +$$

$$+2\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n}\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x + \sin(n-\frac{1}{2})x}{2n\sin\frac{x}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi} \left[D_n(x) + D_{n-1}(x)\right]dx = \frac{1}{2n}\pi + \frac{1}{2n}\pi = \frac{\pi}{n} \quad ,$$

бундан, $a_n = \dfrac{1}{n}$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб,

$$-\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \quad x \neq 2k\pi \ , k \in Z$$

тригонометрик Фурье қаторини ҳосил қиламиз. Бу ёйилмада $x = \pi$ деб олсак

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

тенглик келиб чиқади.

Математик физикада ва математиканинг бир қатор бўлимларида $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ сегментдаги x нуқтада шу функциянинг қийматига яқинлашишини таъминлайдиган шартлар муҳим роль ўйнайди. Шуни таъкидлаш кераки, $f(-\pi) = f(\pi)$ шартни қаноатлантирувчи ва $[-\pi, \pi]$ сегментда узлуксиз бўлган $f(x)$ функция мавжуд бўлиб, унинг тригонометрик Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ сегментдаги олдиндан берилган x нуқтада узоқлашувчи бўлади ёки ҳаттоки $[-\pi, \pi]$ сегментнинг ҳамма жойида зич бўлган чексиз тўпламда узоқлашувчи бўлади[1].

Шундай қилиб, $[-\pi, \pi]$ сегментда $f(x)$ функциянинг узлуксиз бўлишлиги қўшимча шартларсиз бу функциянинг тригонометрик Фурье қаторининг на фақат текис яқинлашишини, балки бу қаторнинг $[-\pi, \pi]$ сегментдаги олдиндан берилган x нуқтада яқинлашишини ҳам таъминламайди.

Тригонометрик Фурье қаторининг яқинлашишини ўрганишда бошқа бир савол пайдо бўлади: $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли–узлуксиз (ёки ҳатто қатъий узлуксиз) бўлган ихтиёрий $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори шу сегментнинг *ҳеч бўлмаганда битта нуқтасида* яқинлашувчи бўладими?

Бу саволга фақат 1966 йилда мусбат жавоб олинган.

Бу жавоб 1966 йилда Л. Карлесон томонидан исбот қилинган фундаментал теоремасининг натижаси бўлди[2] ва 1915 йилда Н.Н. Лузин[3] томонидан қўйилган машҳур проблема

---

[1] Бундай функцияга мисолни биринчи бўлиб, 1876 йилда француз математиги Дю Буа Раймон қурган.

[2] Л. Карлесон –замонавий швед математиги. Л. Карлесон теоремасининг тўла исботини "Математика" мақолалар таржималари тўплами, т. II, № 4, 1967, 113–132 бетлардан топиш мумкин.

[3] Николай Николаевич Лузин–совет математиги, функциялар назарияси бўйича Москва замонавий математика мактабининг асосчиси (1883–1950). Карлесон томонидан ечилган Лузин проблемасининг қўйилиши ва унинг бошқа проблемаларини Н.Н. Лузин "Интеграл и тригонометрический ряд", Москва–Ленинград, Гостехиздат, 1951 йилдаги китобидан топиш мумкин.

ечилди: Лебег маъносида тушуниладиган $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлган ихтиёрий $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори шу $[-\pi, \pi]$ сегментнинг деярли ҳамма жойида шу функцияга яқинлашувчи бўлади. Бошқача айтганда, 1915 йилда Н.Н. Лузин томонидан қўйилган машҳур проблема қуйидагича: Фурье қатори мусбат ўлчовли тўпламда узоқлашувчи бўлган $L_2[-\pi, \pi]$ синфда функция мавжудми?. Бундай функция мавжуд эмаслиги 1966 йилда Л. Карлесон томонидан исбот қилинган.

Л. Карлесон теоремаси. *Агар ихтиёрий $f(x)$ функция учун Лебег маъносида тушуниладиган $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори шу функцияга $[-\pi, \pi]$ сегментнинг деярли ҳамма жойида яқинлашувчи бўлади.*

Бу теорема Л. Карлесоннинг Филдс мукофотини олишига асос бўлган.

Л. Карлесон теоремасидан, на фақат ихтиёрий бўлакли–узлуксиз функция учун, ҳаттоки, $[-\pi, \pi]$ сегментда Риман маъносида интегралланувчи ихтиёрий $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори шу $[-\pi, \pi]$ сегментнинг деярли ҳамма жойида шу функцияга яқинлашувчи бўлишлиги келиб чиқади (чунки, бундай функция учун Риман маъносида $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ интеграл мавжуд ва шунга кўра Лебег маъносида ҳам интеграл мавжуд бўлади). Таъкидлаш кераки, агар $[-\pi, \pi]$ сегментда Риман маъносида эмас, балки фақат Лебег маъносида интегралланувчи $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ сегментнинг ҳеч бир нуқтасида шу функцияга яқинлашмаслиги мумкин. Тригонометрик Фурье қатори ҳамма жойда узоқлашувчи бўлган $[-\pi, \pi]$ сегментда Лебег маъносида интегралланувчи $f(x)$ функцияга мисол биринчи бўлиб, 1923 йилда совет математиги А.Н. Колмогоров[1] томонидан қурилган.

1967 йилда америкалик математик Хант юқорида келтирилган Л. Карлесон теоремасини умумлаштирди ва қуйидаги теоремани исбот қилди.

Хант теоремаси. *Агар ихтиёрий танланган* $p>1$ *учун Лебег маъносида тушуниладиган* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,dx$ *интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда бу* $f(x)$ *функциянинг тригонометрик Фурье қатори шу функцияга* $[-\pi,\pi]$ *сегментнинг деярли ҳамма жойида яқинлашувчи бўлади.*

Бу теорема билан боғлиқ бўлган А.Н. Колмогоров мисоли тригонометрик Фурье қатори ҳамма жойда узоқлашувчи бўлган $[-\pi,\pi]$ сегментда Лебег маъносида интегралланувчи $f(x)$ функциянинг ($p=1$ бўлган ҳол учун) мавжудлигини кўрсатади.

Фурье қатори барча нуқталарда ҳам яқинлашувчи бўлавермайдиган узлуксиз функциянинг мавжудлиги суст яқинлашувчи функционаллар ҳақидаги умумий теоремадан осонгина келиб чиқади. Аввал биз, $n\to\infty$ да $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(z)|\,dz\to\infty$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, $|D_n(z)|=\dfrac{\left|\sin\dfrac{2n+1}{2}z\right|}{2\left|\sin\dfrac{z}{2}\right|}$ касрнинг сурати $\dfrac{2n+1}{2}z=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k=0,1,\dots,n$ тенглик ўринли бўладиган нуқталарда бирга айланади. Бу ҳар бир нуқтани $\left|\dfrac{2n+1}{2}z-\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right|<\dfrac{\pi}{3}$ тенгсизлик билан аниқланадиган интерваллар билан ўраб оламиз. Бу интервалларнинг узунлиги

---

[1] А.Н. Колмогоров томонидан қурилган мисолни Н.К. Бари “Тригонометрические ряды”, Москва, Физматгиз, 1961 йилдаги китобининг 412–421 бетларидан топиш мумкин.

$\dfrac{4\pi}{3(2n+1)}$ га тенг. Бу ҳар бир интервалда $\left|\sin\dfrac{2n+1}{2}z\right| \geq \dfrac{1}{2}$ тенгсизлик ўринли. $k=0,1,...,n$ учун ҳар бир $k-$интервалда

$$\sin\frac{z}{2} < \frac{z}{2} < \frac{1}{2}\left(\frac{2k+1}{2}\pi + \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{-1} < \frac{k+1}{2n+1}\pi$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шунинг учун, фақат бу оралиқлар бўйича олинган интеграл

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{k+1}{2n+1}\pi}\frac{4\pi}{3(2n+1)} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$$

йиғиндидан катта бўлади. Бундан эса, $n \to \infty$ да $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(z)|dz \to \infty$ эканлиги келиб чиқади. Бу эса, D_n функционаллар нормаларининг узлуксиз функциялар фазосида текис чегараланмаганлигини билдиради. У ҳолда функционаллар суст яқинлашиши ҳақидаги теоремага кўра, бу кетма-кетлик узлуксиз функциялар фазосида суст яқинлашувчи бўла олмайди, яъни $f(x)$ узлуксиз функция мавжуд бўлиб, бунда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)f(x)dx$$

лимит мавжуд эмас.

4. Бир каррали тригонометрик Фурье қаторини ҳадма-ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш.

4–Теорема. *Агар $f(x)$ функция узлуксиз ва $2\pi-$даврли бўлиб, $\bar{L}^{c}[-\pi,\pi]$ синфдан бўлса, у ҳолда $f'(x)$ ҳосиланинг Фурье қатори $f(x)$ функция Фурье қаторини формал равишда ҳадма–ҳад дифференциаллаш билан ҳосил қилинади.*

Исбот. $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари a_n ва b_n бўлиб, $f'(x)$ ҳосиласининг Фурье коэффициентлари a_n' ва b_n' бўлсин. $\bar{L}^{c}[-\pi,\pi]$ синфидаги функция учун бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли бўлгани учун, ҳамда $f(x)$ функция узлуксиз ва даврий эканлигидан

$$a'_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[f(\pi) - f(-\pi)\right] = 0,$$

$$\pi a'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} n f(x)\sin nx\,dx = (-1)^n\left[f(\pi) - f(-\pi)\right] +$$

$$+n\pi b_n = n\pi b_n, \qquad a'_n = nb_n,$$

$$\pi b'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi} n f(x)\cos nx\,dx = -n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= -\pi n a_n, \;\; b'_n = -na_n \; .$$

Шунинг учун

$$f'(x) \sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \, ,$$

яъни $f'(x)$ функция Фурье қатори $f(x)$ функция Фурье қаторини формал равишда ҳадма–ҳад дифференциаллаш билан ҳосил қилинади.

1–Натижа. *Агар $f(x)$ узлуксиз $2\pi -$даврли ва бўлакли–силлиқ функция бўлса, у ҳолда $f'(x)$ ҳосиланинг Фурье қатори $f(x)$ функция Фурье қаторини формал равишда ҳадма–ҳад дифференциаллаш билан ҳосил қилинади.*

2–Натижа. *Агар $f(x)$ функция $2\pi -$даврли ва $k-1$ марта узлуксиз дифференциалланувчи, $f^{(k-1)} \in \overline{L}^{\,c}\left[-\pi, \pi\right]$ бўлса, у ҳолда $f^{(k)}(x)$ функция Фурье қатори $f(x)$ функция Фурье қаторини k марта ҳадма–ҳад дифференциаллаш билан ҳосил қилинади.*

3–Натижа. *Агар 2–натижа шартлари бажарилса, у ҳолда Фурье коэффициентлари учун қуйидаги асимптотик тенглик ўринли:*

$$n \to \infty \;\; \text{да} \qquad a_n = o(n^{-k}), \;\; b_n = o(n^{-k})\,.$$

Исбот. 2–натижага кўра, $f^{(k)}(x)$ функция Фурье қатори $f(x)$ функция Фурье қаторини k–марта ҳадма–ҳад дифференциаллаш ёрдамида ҳосил қилинади, яъни

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n \cos(nx + \frac{k\pi}{2}) + n^k b_n \sin\cdot(nx + \frac{k\pi}{2}) \ .$$

Ишора аниқлигида $n^k a_n$ ва $n^k b_n$ коэффициентлар $[-\pi, \pi]$ оралиқда абсолют интегралланувчи $f^{(k)}(x)$ функциянинг Фурье коэффициентларидир. Риман леммасининг натижасига кўра, абсолют интегралланувчи функция Фурье коэффициенти $n \to \infty$ да нолга интилади. Шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} n^k a_n = 0, \ \lim_{n\to\infty} n^k b_n = 0,$$

яъни $n \to \infty$ да $a_n = o(n^{-k}), \ \ b_n = o(n^{-k})$ бўлади.

5–Теорема. *$f(x)$ функция $2\pi-$даврли бўлиб, $L^c(-\pi, \pi)$ синфга қарашли бўлсин. У ҳолда $\forall \ x \in R$ учун*

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin kx}{k} + b_k \frac{1-\cos kx}{k}$$

тенглик ўринли бўлади, бунда ўнг томондаги қатор формал равишда ҳадма–ҳад $f(x)$ функция Фурье қаторини интеграллаш билан ҳосил қилинган.

Исбот. $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2}$ функцияни қараймиз. Бу функция узлуксиздир, чунки юқори чегараси ўзгарувчи яқинлашувчи хосмас интеграл узлуксиздир. Ихтиёрий $x \in R$ учун

$$\Phi(x+2\pi) - \Phi(x) =$$

$$= \int_x^{2\pi+x} f(t)dt - a_0\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - a_0\pi = a_0\pi - a_0\pi = 0$$

тенглик ўринли эканлигидан $\Phi(x)$ функциянинг $2\pi-$даврли эканлиги келиб чиқади.

$f \in L^C(-\pi, \pi)$ бўлгани учун $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқнинг чекли сондаги нуқталаридан ташқари барча нуқталарида узлуксиздир. Шунинг учун, $\Phi(x)$ функция $f(x)$ функция узлуксиз бўлган барча нуқталарда ҳосилага эга ва бу нуқталарда $\Phi'(x)=f(x)-\frac{a_0}{2}$. Шунинг учун $\Phi(x)$ функция $\bar{L}^{\,c}\left[-\pi,\pi\right]$ синфга қарашли бўлиб, 3–теореманинг барча шартларини қаноатлантиради ва $\Phi(x)$ функция Фурье қатори ихтиёрий $x\in R$ нуқтада яқинлашади.

$$\Phi(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx$$

бўлсин. $\bar{L}^{\,c}\left[-\pi,\pi\right]$ синфдаги функциялар учун бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли эканлигидан $n\geq 1$ учун

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\,\Phi(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'(x)\frac{\sin nx}{n}dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]\sin nxdx=-\frac{b_n}{n}\ ,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x)\sin nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\,\Phi(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'(x)\frac{\cos nx}{n}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]\cos nxdx=\frac{a_n}{n}$$

бўлади. A_0 коэффициентни аниқлашда ихтиёрий $x\in R$ учун $\Phi(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx$ тенглик ўринли эканлигидан ва бу тенгликда $x=0$ деб олсак,

$$\frac{A_0}{2}=-\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

ҳосил бўлади. Коэффициентларнинг бу ифодаларини

$$\Phi(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx$$

тенгликка олиб бориб, қўйсак,

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nx}{n} + b_n \frac{1-\cos nx}{n}$$

формула ҳосил бўлади.

Натижа. *$2\pi-$даврли бўлакли–узлуксиз $f(x)$ функция учун*

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nx}{n} + b_n \frac{1-\cos nx}{n}$$

формула ўринлидир.

5. Бир каррали тригонометрик Фурье қаторининг текис яқинлашиши. $L^c(a,b)$ ва $\overline{L}^{\,c}[a,b]$ функциялар синфи сингари $L_2^c(a,b)$ ва $\overline{L}_2^{\,c}[a,b]$ функциялар синфини киритамиз. Агар $[a,b]$ оралиқни $x_i,\ i=\overline{0,n}$ нуқталар билан бўлиш мумкин бўлиб, ҳар бир $(x_{i-1},\ x_i)$ интервалда $f(x)$ функция узлуксиз ва $\int_a^b |f(x)|^2 dx<\infty$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $f(x)\in L_2^c(a,b)$ дейилади.

Агар $[a,b]$ оралиқни $x_i,\ i=\overline{0,n}$ нуқталар билан бўлиш мумкин бўлиб, ҳар бир $(x_{i-1},\ x_i)$ интервалда $f(x)$ функция узлуксиз ҳосилага эга, $[a,b]$ оралиқда узлуксиз ва $\int_a^b |f'(x)|^2 dx<\infty$ яқинлашувчи бўлган $f(x)$ функция $\overline{L}_2^{\,c}[a,b]$ синфга тегишли дейилади.

Шундай қилиб, $f(x)\in\overline{L}_2^{\,c}[a,b]$ эканлигидан $f'(x)\in L_2^c(a,b)$ эканлиги келиб чиқади.

7–Лемма. *$[a,b]$ ихтиёрий оралиқ бўлиб, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $L_2^c(a,b)$ синфга қарашли бўлсин. У ҳолда $f(x)\varphi(x)$ кўпайтма $L^c(a,b)$ синфга қарашли бўлади.*

Исбот. $f(x)\in L_2^c(a,b)$ эканлигидан $[a,b]$ оралиқда шундай бир T_1 бўлиниш топиладики, бу бўлинишнинг ҳар бир интервалида $f(x)$ функция узлуксиз ва $\int_a^b |f(x)|^2 dx<\infty$

яқинлашувчи бўлади. Худди шунга ўхшаш T_2 бўлиниш топиладики, T_2 бўлинишнинг ҳар бир интервалида $\varphi(x)$ функция узлуксиз ва $\int\limits_a^b |\varphi(x)|^2 dx < \infty$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлади. T_1 ва T_2 бўлиниш нуқталарини бирлаштириб, T бўлиниш ҳосил қиламизки, бу бўлинишнинг ҳар бир $(x_{i-1},\ x_i)$ интервалида $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар узлуксиз бўлгани учун $f(x)\varphi(x)$ функция узлуксиз бўлади.

$$|f(x)\varphi(x)| \le \frac{1}{2} f^2(x) + \frac{1}{2}\varphi^2(x)$$

тенгсизликдан фойдаланиб, таққослаш аломатига кўра,

$$\int\limits_a^b \left[\frac{1}{2} f^2(x) + \frac{1}{2}\varphi^2(x)\right] dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи эканлигидан $\int\limits_a^b |f(x)\varphi(x)| dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчанлигини ҳосил қиламиз, яъни $f(x)\varphi(x) \in L^c(a, b)$ бўлади.

$[a,b]$ ораликда $\{\psi_n(x)\},\ n \in N$ узлуксиз ортогонал система бўлсин, ҳамда $[a,b]$ да $\psi_n(x) \not\equiv 0$ бўлсин.

Агар $f(x) \in L_2^c(a, b)$ функция бўлса, у ҳолда 7–леммага кўра, Фурье коэффициентлари

$$a_n = \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \int\limits_a^b f(x)\psi_n(x)dx, \quad \text{бунда} \qquad \|\psi_n\| = \sqrt{\int\limits_a^b \psi_n^2(x)dx}$$

тенглик билан ҳисобланиши мумкин бўлади.

6–Теорема. *$f \in L_2^c(a,b)$ бўлиб, $\{\psi_n(x)\},\ n \in N$ система $[a,b]$ оралиқда узлуксиз бўлган ортогонал система бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция Фурье коэффициентлари учун $\{\psi_n(x)\},\ n \in N$ ортогонал система бўйича*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|\psi_k\|^2 \le \int\limits_a^b f^2(x)dx$$

Бессель тенгсизлиги ўринли бўлади.

Исбот. $[a,b]$ оралиқда $\{\psi_k(x)\}$ функциялар системаси ортогонал эканлигидан фойдаланиб, ихтиёрий $n \in N$ учун

$$0 \le \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x) \right]^2 dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k \int_a^b f(x)\psi_k(x)dx + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \int_a^b \psi_k{}^2(x)dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|\psi_k\|^2 =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 \|\psi_k\|^2$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Шундай қилиб,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|\psi_k\|^2 \le \int_a^b f^2(x)dx = \|f\|^2$$

бўлади. $n \to \infty$ да тенгсизликда лимитга ўтиб,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|\psi_k\|^2 \le \|f\|^2$$

Бессель тенгсизлигини ҳосил қиламиз.

Натижа. *$[-\pi, \pi]$ оралиқдаги тригонометрик система учун ва ихтиёрий $f \in L_2^c(-\pi, \pi)$ функция учун Бессель тенгсизлиги қуйидаги шаклга эга:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx .$$

Ҳақиқатдан ҳам, $\left\|\frac{1}{2}\right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4}dx = \frac{\pi}{2}$, $\|\cos nx\|^2 = \|\sin nx\|^2 =$ $= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \pi$ тенгликларни қўйиб, Бессель тенгсизлигидан ҳосил қиламиз.

7–Теорема. *$f(x)$ функция $2\pi -$даврли ва $\overline{L}_2^c[-\pi, \pi]$ синфга қарашли узлуксиз функция бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори текис яқинлашади.*

Исбот. $f\in\overline{L}_2^c[-\pi,\pi]$ эканлигидан $f'\in L_2^c(-\pi,\pi)$ эканлиги келиб чиқади. Агар $f(x)$ функция учун a_n ва b_n Фурье коэффициентлари, a_n' ва b_n'- эса, ҳосила функциясининг Фурье коэффициентлари бўлса, у ҳолда бўлаклаб интеграллаш ёрдамида

$$a_0'=0,\ \ b_n=\frac{a_n'}{n},\ a_n=-\frac{b_n'}{n},\ \ n\in N$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. $f'(x)$ функция учун Бессель тенгсизлигини ёзамиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n')^2+(b_n')^2\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2dx.$$

У ҳолда

$$\left|a_n\cos nx+b_n\sin nx\right|\le\left|a_n\right|+\left|b_n\right|=\frac{\left|a_n'\right|}{n}+\frac{\left|b_n'\right|}{n}\le\frac{1}{2}\left|a_n'\right|^2+\frac{1}{2}\left|b_n'\right|^2+\frac{1}{n^2}$$

бўлиб,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\left|a_n'\right|^2+\frac{1}{2}\left|b_n'\right|^2+\frac{1}{n^2}\right)$$

сонли қатор яқинлашувчи эканлигидан Вейерштрасс аломатига кўра,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

функционал қаторнинг R да текис яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

Натижа. *2π-даврли узлуксиз ва $[-\pi,\pi]$ оралиқда бўлакли–силлиқ функциянинг Фурье қатори R сон ўқида текис яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. $f'(x)$ бўлакли–узлуксиз функция бўлгани учун $f'(x)\in L_2^c\left(-\pi,\pi\right)$ ва $f(x)\in\overline{L}_2^c[-\pi,\ \pi]$ бўлади. Шунинг учун 7-теоремага кўра, $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори R сон ўқида текис яқинлашувчи бўлади.

6. Бир каррали тригонометрик Фурье қаторини жамлашнинг ўрта арифметиклар методи. Берилган $f(x)$ функция узлуксиз ва $2\pi-$даврли бўлсин. Шу $f(x)$ функция Фурье қаторининг $S_n(x)$ қисмий йиғиндилар кетма-кетлигини қараймиз. $S_0(x), S_1(x), S_2(x), ..., S_n(x)$ қисмий йиғиндиларнинг ўрта арифметиги сифатида

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) + ... + S_n(x)}{n+1} \qquad (2.2.1)$$

Фейер йиғиндиларини аниқлаймиз.

8–Теорема (Фейер теоремаси[1]). *Агар* $f(x)$ *функция* $2\pi-$*даврли узлуксиз функция бўлса, у ҳолда Фейер йиғиндилари кетма-кетлиги шу* $f(x)$ *функцияга текис яқинлашади.*

Исбот. Фурье қаторининг $S_n(x)$ қисмий йиғиндилар кетма-кетлиги учун Дирихле ядроси орқали ифодасидан фойдаланамиз.

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot D_n(t)dt, \qquad (2.2.2)$$

бу ерда

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + ... + \cos nt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \qquad (2.2.3)$$

бўлади. (2.2.2) ифодани (2.2.1) формулага олиб бориб қўйсак, у ҳолда Фейер йиғиндиси учун қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot F_n(t)dt, \qquad (2.2.4)$$

бу ерда

$$F_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + D_2(t) + ... + D_n(t)}{n+1} \qquad (2.2.5)$$

бўлади. $F_n(t)$ функцияга *Фейер ядроси* деб номланади. Теоремани исбот қилиш учун Фейер ядросининг қуйидаги хоссалари муҳимдир:

1) $F_n(t)$ –жуфт, $2\pi-$даврли ва узлуксиз функция,

2) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1$,

3) $F_n(t) \geq 0$,

[1] Л. Фейер ўзининг бу теоремасини 1904 йилда исбот қилган. Л. Фейер – венгер математиги (1880–1959).

4) Ихтиёрий $\delta > 0$ учун $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{\delta \le t \le \pi} F_n(t) = 0$ бўлади.

1) ва 2) хоссалар (2.2.5) формуладан ва Дирихле ядросининг шунга мос хоссасидан келиб чиқади. 3) хоссани исбот қиламиз. Фейер ядроси учун (2.2.5) формулага Дирихле ядроси учун (2.2.3) формуладаги ифодани қўйсак, у ҳолда

$$(n+1)F_n(t) = D_0(t) + D_1(t) + D_2(t) + \ldots + D_n(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x =$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \ge 0 \qquad (2.2.6)$$

бўлади. Энди 4) хоссани исбот қиламиз. (2.2.6) тенгликдан $\delta > 0$ учун $n \to \infty$ да $\sup\limits_{x\in[\delta,\,\pi]} F_n(t) \le \frac{1}{4\sin^2\frac{\delta}{2}} \cdot \frac{1}{n+1} \to 0$ эканлиги келиб чиқади. Энди $\sigma_n(x) - f(x)$ айирмани баҳолаймиз. Фейер ядросининг 2 ва 3 хоссаларидан фойдаланиб

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x+t) - f(x)\big)F_n(t)dt \ ,$$

$$\left|\sigma_n(x) - f(x)\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x+t) - f(x)\right| \cdot F_n(t)dt \qquad (2.2.7)$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

R сон ўқида узлуксиз ва $2\pi-$даврли бўлган функция R сон ўқида текис узлуксиздир. Ҳақиқатдан ҳам, Кантор теоремасига кўра, $[-2\pi,\ 2\pi]$ оралиқда $f(x)$ функция текис узлуксиздир. Шунинг учун, $\forall\varepsilon > 0$ сонга кўра, шундай бир $\exists\delta > 0$ топилиб, ихтиёрий $x, t \in [-2\pi,\ 2\pi]$ учун $|x-t| < \delta$ эканлигидан $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. ξ ва $\eta-$ихтиёрий сонлар бўлиб, $|\xi - \eta| < \delta < \pi$ тенгсизлиги ўринли бўлсин. У ҳолда шундай бир k бутун сон топилиб,

$x=\xi-2k\pi\in[-\pi,\ \pi]$ бўлади. Шунингдек, $|\xi-\eta|<\delta<\pi$ ва $t=\eta-2k\pi\in[-\pi,\ \pi]$ бўлиб,

$$|f(\xi)-f(\eta)|=|f(\xi-2k\pi)-f(\eta-2k\pi)|=|f(x)-f(t)|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бу эса R сон ўқида $f(x)$ функциянинг текис узлуксиз эканлигини исбот қилади.

R сон ўқида $f(x)$ функциянинг текис узлуксиз эканлигидан $\forall\varepsilon>0$ сонга кўра, шундай бир $\exists\delta>0$ топилиб, ихтиёрий $x\in R$ ва ихтиёрий $|t|<\delta$ учун

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлигининг бажарилиши келиб чиқади.

(2.2.7) формулада интеграллаш оралиғини учта $[-\pi,\ -\delta]$, $[-\delta,\ \delta]$ ва $[\delta,\ \pi]$ оралиқларга бўламиз.

Фейер ядросининг 2 ва 3 хоссаларидан фойдаланиб

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|\cdot F_n(t)dt\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}\cdot F_n(t)dt\le\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)dt=\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.2.8)$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

R сон ўқида узлуксиз ва $2\pi-$даврли бўлган функция шу R сон ўқида чегаралангандир. $|f(x)|<M$ бўлсин. Фейер ядросининг 4 хоссаларидан фойдаланамиз ва шундай бир N номер топилиб, барча $n>N$ учун

$$\max_{t\in[\delta,\ \pi]}F_n(t)<\frac{\varepsilon}{8M}$$

тенгсизлик бажарилади. У ҳолда барча $n>N$ учун

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\cdot F_n(t)dt\le\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left(|f(x+t)|+|f(x)|\right)\cdot F_n(t)dt\le$$

$$\le\frac{2M}{\pi}\left(\pi-\delta\right)\max_{t\in[\delta,\ \pi]}F_n(t)<2M\cdot\frac{\varepsilon}{8M}=\frac{\varepsilon}{4} \qquad (2.2.9)$$

тенгсизлик бажарилади.

Худди шунга ўхшаш, барча $n>N$ учун

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} \left|f(x+t)-f(x)\right|\cdot F_n(t)dt<\frac{\varepsilon}{4} \qquad (2.2.10)$$

тенгсизлик бажарилади. (2.2.7)–(2.2.10) тенгсизликлардан ихтиёрий $x\in R$ учун ва барча $n>N$ учун

$$\left|\sigma_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. Бу эса, $\sigma_n(x)$ Фейер йиғиндилари кетма-кетлиги R сон ўқида $f(x)$ функцияга текис яқинлашишини билдиради.

7. Узлуксиз функцияни кўпҳад билан текис яқинлаштириш ҳақидаги Вейерштрасс теоремалари.

Ихтиёрий $A_0, A_1, ..., A_n,\ B_0, B_1, ..., B_n$ ҳақиқий сонлар берилган бўлсин.

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k\cos kx+B_k\sin kx \qquad (2.2.11)$$

ифодага $n-$*даражали тригонометрик кўпҳад* деб айтилади. $T_n(x)$ тригонометрик кўпҳад чексиз дифференциалланувчи ва $2\pi-$даврли даврий функциядир. Барча тригонометрик кўпҳадлар тўплами чизиқли фазо ташкил этади.

***9-Теорема (Вейерштрасс теоремаси)*[1].** *Ихтиёрий $2\pi-$даврли узлуксиз функцияни ихтиёрий аниқлик даражасида тригонометрик кўпҳад билан яқинлаштириш мумкин, яъни ихтиёрий $f(x)$ функция ва ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир $T_n(x)$ тригонометрик кўпҳад мавжуд бўлиб, бунда*

$$\max_{-\infty<x<+\infty}\left|f(x)-T_n(x)\right|<\varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлади.

Исбот. Ихтиёрий $f(x)$ функция учун унинг қисмий йиғиндиси тригонометрик кўпҳаддан иборат бўлади. Бу $S_0(x), S_1(x), ..., S_n(x)$ қисмий йиғиндиларнинг ўрта арифметиги бўлган $\sigma_n(x)$ Фейер йиғиндилари ҳам, тригонометрик кўпҳаддан иборат бўлади. Фейер теоремасига кўра, ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир $\sigma_n(x)$ Фейер йиғиндиси мавжуд бўлиб, бунда

$$\max_{x\in R}\left|f(x)-\sigma_n(x)\right|<\varepsilon$$

[1] Карл Вейерштрасс – немис математиги (1815 – 1897)

тенгсизлиги ўринли бўлади. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. *Агар* $f(x)$ *функция* $[-\pi,\pi]$ *оралиқда берилган ва узлуксиз функция бўлса, у ҳолда уни шу оралиқда ихтиёрий аниқлик даражасида тригонометрик кўпҳад билан фақат ва фақат* $f(\pi)=f(-\pi)$ *бўлгандагина яқинлаштириш мумкин бўлади.*

10-Теорема (Вейерштрасс теоремаси). *Ихтиёрий* $[a,b]$ *оралиқда берилган ихтиёрий* $f(x)$ *узлуксиз функцияни ихтиёрий аниқлик даражасида кўпҳад билан яқинлаштириш мумкин, яъни ихтиёрий* $f(x)$ *функция ва ихтиёрий* $\varepsilon>0$ *сон учун шундай бир* $P_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ *кўпҳад мавжуд бўлиб, бунда*

$$\max_{a<x<b}\left|f(x)-P_n(x)\right|<\varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлади.

Исбот. Аввал $[a,b]=[0,\pi]$ бўлган ҳолни қараймиз. $f(x)$ функцияни $[-\pi,0]$ оралиқга жуфт функция сифатида давом эттирамиз, кейин эса, уни $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирамиз. Натижада, жуфт бўлган $2\pi-$даврли ва узлуксиз функция ҳосил бўлиб, бу функция $[0,\pi]$ оралиқда $f(x)$ функция билан устма-уст тушади. Фейер теоремасига кўра, ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир $T_m(x)$ тригонометрик кўпҳад мавжуд бўлиб, бунда

$$\max_{x\in R}\left|f(x)-T_m(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.2.12)$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Маълумки, $\sin kx$ ва $\cos kx$ функциялар барча ҳақиқий x учун яқинлашувчи бўлган даражали қаторга ёйилади (бу қаторнинг яқинлашиш радиуси $+\infty$ бўлади). Бу $T_m(x)$ тригонометрик кўпҳад $\sin kx$ ва $\cos kx$ функцияларнинг чекли сондаги чизиқли комбинациясидан иборат бўлгани учун $T_m(x)$ тригонометрик кўпҳад ҳам, барча ҳақиқий x учун яқинлашувчи бўлган даражали қаторга ёйилади, яъни

$$T_m(x)=c_0+c_1x+...+c_nx^n+...$$

бўлади. Маълумки, яқинлашиш интервали ичида ётувчи ихтиёрий $[\alpha,\beta]$ оралиқда даражали қатор текис яқинлашувчи бўлади. Шунга кўра, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай бир n номер топилиб, бунда

$$\max_{0\le x\le\pi}\left|T_m(x)-(c_0+c_1x+...+c_nx^n)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.2.13)$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Агар $P_n(x)=c_0+c_1x+...+c_nx^n$ деб олсак, у ҳолда (2.2.12) ва (2.2.13) муносабатларга кўра,

$$\left|f(x)-P_n(x)\right|\le\left|f(x)-T_m(x)\right|+\left|T_m(x)-P_n(x)\right|\le$$

$$\le\max_{0\le x\le\pi}\left|f(x)-T_m(x)\right|+\max_{0\le x\le\pi}\left|T_m(x)-P_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

бўлади. Шунга кўра,

$$\max_{0\le x\le\pi}\left|f(x)-P_n(x)\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди узлуксиз $f(x)$ функция ихтиёрий $[a,b]$ ораликда берилган бўлсин.

$$F(t)=f\left[a+\frac{t}{\pi}(b-a)\right],\ 0\le t\le\pi$$

функцияни олайлик. Бу $F(t)$ функция $[0,\pi]$ оралиқда узлуксиз ва уни $Q_n(t)$ кўпҳад билан $[0,\pi]$ оралиқда текис яқинлаштириш мумкин, яъни

$$\max_{0\le t\le\pi}\left|f\left(a+\frac{t}{\pi}(b-a)\right)-Q_n(t)\right|<\varepsilon \qquad (2.2.14)$$

бўлади.

$$x=a+\frac{t}{\pi}(b-a),\quad P_n(x)=Q_n\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$$

деб олсак, у ҳолда (2.2.14) тенгсизликдан

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-P_n(x)\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

8. Фурье қаторининг текис яқинлашиши ҳақидаги шартлар.

$f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

1-Таъриф. *Ҳар бир* $\delta>0$ *сон учун* $|x'-x''|<\delta$ *шартни қаноатлантирувчи* $[a,b]$ *сегментга тегишли барча* x' *ва* x''

нуқталар тўпламида $\left|f(x')-f(x'')\right|$ *айирма модулининг аниқ юқори чегарасига* $f(x)$ *функциянинг* $[a,b]$ *сегментдаги узлуксизлик модули деб айтилади.*

$f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегментдаги узлуксизлик модули $\omega(\delta, f)$ каби белгиланади. Демак, таърифга кўра

$$\omega(\delta, f)=\sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ x',\, x''\in[a,b]}}\left|f(x')-f(x'')\right|$$

бўлади. Кантор теоремасидан бевосита *ихтиёрий узлуксиз* $f(x)$ *функциянинг* $[a,b]$ *сегментдаги* $\omega(\delta, f)$ *узлуксизлик модули* $\delta\to 0$ *да нолга интилиши* келиб чиқади.

Бироқ ихтиёрий фақат узлуксиз $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегментдаги $\omega(\delta, f)$ узлуксизлик модулининг δ кичик миқдорга нисбатан тартиби ҳақида ҳеч нарса айтиб бўлмайди.

Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда дифференциалланувчи ва унинг $f'(x)$ ҳосиласи шу сегментда чегараланган бўлса, у ҳолда кўрсатилган сегментда $\omega(\delta, f)$ узлуксизлик модули $\omega(\delta, f)=O(\delta)$ тартибга эга бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, Лагранж теоремасига кўра $[a,b]$ сегментга тегишли ихтиёрий x' ва x'' нуқталар учун шу x' ва x'' нуқталар орасида шундай бир ξ нуқта топиладики, бунда

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|f'(\xi)\right|\cdot\left|x'-x''\right| \qquad (2.2.15)$$

тенглик ўринли бўлади. $[a,b]$ сегментда $f'(x)$ ҳосила чегараланган бўлгани учун шундай бир $M>0$ ўзгармас сон топиладики, бунда

$$\left|f'(\xi)\right|\le M \qquad (2.2.16)$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунинг учун $\left|x'-x''\right|<\delta$ шартни қаноатлантирувчи $[a,b]$ сегментга тегишли барча x' ва x'' нуқталар учун $\left|f(x')-f(x'')\right|\le M\delta$ тенгсизлик ўринли бўлади, яъни $\omega(\delta, f)=O(\delta)$ бўлади.

Ихтиёрий α – ҳақиқий сон $0<\alpha\le 1$ яримсегментдан олинган бўлсин.

2-Таъриф. *Агар* $f(x)$ *функциянинг* $[a,b]$ *сегментдаги узлуксизлик модули* $\omega(\delta, f)=O(\delta^{\alpha})$ *тартибга эга бўлса, у ҳолда*

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда C^{α} Гёльдер синфига α $(0<\alpha \leq 1)$ кўрсатикич билан қарашли деб айтилади ва $f(x)\in C^{\alpha}[a, b]$ шаклида ёзилади.

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ сегментда Риман хос интеграли маъносида интегралланувчи бўлсин. Бу функцияни $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирамиз.

3-Таъриф. *Агар $0<\delta \leq 2\pi$ ярим сементдан олинган ихтиёрий δ сон учун $|u|<\delta$ шартни қаноатлантирувчи барча и сонлар тўпламида $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-f(t)|dt$ интегралнинг аниқ юқори чегарасига $f(x)$ функциянинг $[-\pi, \pi]$ сегментдаги интеграл узлуксизлик модули деб айтилади.*

$f(x)$ функциянинг $[-\pi, \pi]$ сегментдаги интеграл узлуксизлик модули $I(\delta, f)$ каби белгиланади. Демак, таърифга кўра

$$I(\delta, f)=\sup_{|u|<\delta}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-f(t)|dt$$

бўлади.

8–Лемма. *Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз ва $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция бўлса, у ҳолда кўрсатилган сегментда $I(\delta, f)$ интеграл узлуксизлик модули $\delta \to 0$ да нолга интилади.*

Исбот. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ танланган сон бўлсин. Тригонометрик системанинг ёпиқлигига кўра $f(x)$ функция учун шундай бир $T(x)$ кўпҳад топилиб

$$\|f-T\|=\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T(t)]^2 dt}<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$$

тенгсизлик ўринли ва шунинг учун Коши-Буняковский тенгсизлигига асосан

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|dt \leq \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|^2 dt\int\limits_{-\pi}^{\pi} dt}<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.2.17)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. (2.2.17) тенгсизликдан, ҳамда $f(t)$ ва $T(t)$ функцияларнинг $2\pi-$даврли даврий функция эканлигидан ихтиёрий u сони учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-T(t+u)|dt < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.2.18}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра, учбурчак тенгсизлигидан

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-f(t)|dt \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-T(t+u)|dt +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u)-T(t)|dt + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t)-f(t)|dt \tag{2.2.19}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Энди тригонометрик кўпҳаднинг узлуксизлиги ва Кантор теоремасига кўра, ихтиёрий $\varepsilon>0$ танланган сон учун $\delta>0$ сон топилиб $|u|\le\delta$ учун ва $[-\pi,\pi]$ сегментдаги барча t учун

$$|T(t+u)-T(t)| < \frac{\varepsilon}{6\pi}$$

ва шунинг учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u)-T(t)|dt \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.2.20}$$

бўлади. Юқоридаги (2.2.19) тенгсизликка (2.2.17), (2.2.18) ва (2.2.20) тенгсизликларни қўллаб $|u|\le\delta$ бўлган барча u учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-f(t)|dt < \varepsilon \tag{2.2.21}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Лемма исбот бўлди.

8–Леммага эслатма. *Агар $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ сегментда на фақат бўлакли-узлуксиз ва $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция, ҳаттоки $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ сегментда хос Риман интеграли маъносида интегралланувчи бўлган функция учун ҳам шу кўрсатилган сегментда $I(\delta, f)$ интеграл узлуксизлик модули $\delta\to 0$ да нолга интилади.*

Бир оз умумийроқ бўлган қуйидаги натижа ҳам ўринлидир.

9–Лемма (Лебег леммаси)*[1]*. *Агар* $p \geq 1$ *ва* (a, b)*– чекли ёки чексиз интервал учун* $\psi(t) \in L_p(a, b)$ *бўлса, у ҳолда* $h \to 0$ *да*

$$\int_a^b |\psi(t+h) - \psi(t)|^p \, dt \to 0$$

бўлади.

Исбот. Энг аввал (a, b) интервал чекли ва $\psi(x)$ функция эса чегараланган бўлсин. Бу $\psi(x)$ функция ўлчовли эканлигидан уни текис яқинлашувчи зинасимон функциялар кетма-кетлигининг лимити шаклида тасвирлаш мумкин бўлади. Бундан ташқари бу кетма-кетлик текис чегараланган ҳамдир. Бу эса, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай бир $\varphi(t)$ зинасимон функция топилиб

$$\int_a^b |\psi(t) - \varphi(t)|^p \, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

эканлигини билдиради. Маълумки, 8-леммадаги сингари $\varphi(t)$ зинасимон функция учун бу тасдиқ ўринли бўлишини текшириш осон бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ бўлиниш мавжуд бўлиб, ҳар бир (x_i, x_{i+1}) интервалда $\varphi(t)$ ўзгармас функция бўлади. $\varphi(t)$ функция чегараланган эканлигидан $M > 0$ сон топилиб $[a, b]$ сегментдаги барча t учун $|\varphi(t)| \leq M$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунга кўра ихтиёрий $\varepsilon > 0$ танланган сон учун $\delta > 0$ сон топилиб $0 \leq h < \delta$ бўлган барча h учун

$$\int_a^b |\varphi(t+h) - \varphi(t)|^p \, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\int_a^b |\varphi(t+h) - \varphi(t)|^p \, dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_i+h} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|^p \, dt + \int_{x_{i+1}-h}^{x_{i+1}} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|^p \, dt \leq$$

[1] Анри Леон Лебег француз математиги (28.06.1875 – 26.07.1941). А. Лебег интеграллар назариясига улкан ҳисса қўшган математикдир.

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sqrt[p]{\int_{x_i}^{x_i+h} |\varphi(t+h)|^p\, dt} + \sqrt[p]{\int_{x_i}^{x_i+h} |\varphi(t)|^p\, dt} \right)^p +$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sqrt[p]{\int_{x_{i+1}-h}^{x_{i+1}} |\varphi(t+h)|^p\, dt} + \sqrt[p]{\int_{x_{i+1}-h}^{x_{i+1}} |\varphi(t)|^p\, dt} \right)^p <$$

$$< 2\sum_{i=0}^{n-1} (2M)^p h = 2n(2M)^p h < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p,$$

бунда $\delta = \frac{1}{2n}\left(\frac{\varepsilon}{6M}\right)^p$ бўлади. Худди шунингдек $-\delta < h \leq 0$ бўлган ҳол ҳам қаралади. Бундан ташқари, учбурчак тенгсизлигидан

$$\sqrt[p]{\int_a^b |\psi(t+h)-\psi(t)|^p\, dt} \leq \sqrt[p]{\int_a^b |\psi(t+h)-\varphi(t+h)|^p\, dt} +$$

$$+\sqrt[p]{\int_a^b |\varphi(t+h)-\varphi(t)|^p\, dt} + \sqrt[p]{\int_a^b |\varphi(t)-\psi(t)|^p\, dt} < \varepsilon$$

ҳосил бўлади. Бу эса $h \to 0$ да $\int_a^b |\psi(t+h)-\psi(t)|^p\, dt \to 0$ эканлигини билдиради. Агар $X = (a, b)$ чексиз интервал бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ танланган сон учун $X = (a, b') \cup (b', b)$ бўлиниш топилиб, бунда

$$\int_{b'}^{b} |\psi(t)|^p\, dt < \frac{\varepsilon^p}{3}, \quad \int_{b'}^{b} |\psi(t+h)|^p\, dt < \frac{\varepsilon^p}{3}$$

бўлади. (a, b') чекли интервал учун эса ихтиёрий $\varepsilon > 0$ танланган сон учун $\delta > 0$ сон топилиб $|h| < \delta$ бўлган барча h учун

$$\int_a^{b'} |\psi(t+h)-\psi(t)|^p\, dt < \frac{\varepsilon^p}{3}$$

бўлади. Бу эса $h \to 0$ да $\int\limits_a^b |\psi(t+h) - \psi(t)|^p \, dt \to 0$ эканлигини билдиради. Худди шунга ўхшаш $\psi(x)$ функция чегараланмаган бўлганда ҳам леммани исбот қилиш мумкин бўлади.

Бу лемма ёрдамида Риман леммасини янада умумлаштириш мумкин бўлади.

11-Теорема (Риман – Лебег теоремаси). *Ихтиёрий $\psi(t)$ функция $[a, b]$ оралиқда жамланувчи функция бўлсин, яъни $\psi(t) \in L_1[a, b]$. У ҳолда $n \to \infty$ да*

$$\int\limits_a^b \psi(t) \sin ntdt \to 0, \quad \int\limits_a^b \psi(t) \cos ntdt \to 0$$

бўлади.

Эслатма. *Бу теоремани қуйидагича ҳам умумлаштириш мумкин:*

Агар $\psi(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$ бўлса, у ҳолда $\lambda \to \infty$ да

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \sin \lambda tdt \to 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \cos \lambda tdt \to 0$$

бўлади, бу ерда $\lambda -$ ҳақиқий параметр.

Исбот. Биз $n \to \infty$ да $\int\limits_a^b \psi(t) \sin ntdt \to 0$ эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун $[a, b]$ оралиқни $\frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ шаклидаги нуқталар ёрдамида тенг интервалларга бўламиз. У ҳолда интегрални бир нечта бўлакларга бўлиш мумкин:

$$\sum_p \left(\int\limits_{\frac{2p\pi}{n}}^{\frac{(2p+1)\pi}{n}} + \int\limits_{\frac{(2p+1)\pi}{n}}^{\frac{(2p+2)\pi}{n}} \right) + \int\limits_a^{a+\delta} + \int\limits_{b-\delta'}^{b} .$$

Бу ерда $a + \delta$ сон $\frac{2p\pi}{n}$ кўринишдаги a сондан ўнгда ётган биринчи сондир. $b - \delta'$ сон эса шу $\frac{2p\pi}{n}$ кўринишдаги

b сондан чапда ётган охирги сондир. Маълумки, $\delta, \delta' < \dfrac{2\pi}{n}$ бўлгани учун $n \to \infty$ да $\delta \to 0$ ва $\delta' \to 0$ бўлади. Ихтиёрий $\psi(t)$ функция $[a, b]$ ораликда жамланувчи функция бўлгани учун охирги иккита интеграл $n \to \infty$ да нолга интилади. Иккинчи томондан, агар биз $t - \dfrac{\pi}{n} = t'$ деб олсак, у ҳолда

$$\sin nt = \sin n(t' + \frac{\pi}{n}) = -\sin nt'$$

бўлади. Бу эса, қолган йиғиндини

$$\sum_p \int_{\frac{2p\pi}{n}}^{\frac{(2p+1)\pi}{n}} \left[\psi(t) - \psi(t + \frac{\pi}{n})\right] \sin nt dt$$

шаклида ёзиш мумкинлигини билдиради. Бундан эса шу йиғиндининг абсолют қиймати

$$\int_a^b \left|\psi(t) - \psi(t + \frac{\pi}{n})\right| dt$$

интегралдан ошмаслиги келиб чиқади. Лебег леммасига кўра, агар $\psi(t)$ функция $[a, b]$ ораликда жамланувчи функция бўлса, у ҳолда $h \to 0$ да

$$\int_a^b \left|\psi(t+h) - \psi(t)\right| dt \to 0$$

бўлади. Бундан $n \to \infty$ да $\int\limits_a^b \psi(t) \sin nt dt \to 0$ бўлишлиги келиб чиқади. Худди шунингдек, $n \to \infty$ да $\int\limits_a^b \psi(t) \cos nt dt \to 0$ бўлишлигини ҳосил қилиш мумкин бўлади. Теорема исбот бўлди.

Энди 8-леммадан келиб чиқадиган муҳим натижаларни келтирамиз.

1–Натижа. *Агар $f(t)$ функция $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз ва $2\pi -$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонга кўра* *шундай бир $\delta > 0$ сон топиладики, бунда $[-\pi, \pi]$ сегментдаги ихтиёрий танланган x нуқта ва ихтиёрий $|u| < \delta$ учун*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x+t+u) - f(x+t) \right| dt < \varepsilon \qquad (2.2.22)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Биз $\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x+t+u) - f(x+t) \right| dt$ интегралда $\tau = x+t$ тенглик ёрдамида ўзгарувчиларни алмаштирамиз. Натижада

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x+t+u) - f(x+t) \right| dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} \left| f(\tau+u) - f(\tau) \right| d\tau$$

бўлади. Ҳамда $f(t)$ функциянинг $2\pi -$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция эканлигидан

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} \left| f(\tau+u) - f(\tau) \right| d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\tau+u) - f(\tau) \right| d\tau$$

тенглик келиб чиқади. Шунинг учун (2.2.21) тенгсизликка кўра (2.2.22) тенгсизлик келиб чиқади.

2–Натижа. *Агар $f(t)$ ва $g(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз ва $2\pi -$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функциялар бўлса, у ҳолда*

$$I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) dt$$

функция $-\pi \le x \le \pi$ сегментдаги x ўзгарувчи бўйича узлуксиз бўлади.

Исбот. Ихтиёрий x нуқта $[-\pi, \pi]$ сегментдан олинган бўлсин. У ҳолда

$$I(x+u) - I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x+t+u) - f(x+t) \right] g(t) dt$$

бўлади ва $g(t)$ функциянинг $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз ва $2\pi -$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция эканлигидан унинг чегараланганлиги келиб чиқади, яъни шундай бир $M > 0$ сон мавжуд бўлиб $|g(t)| \le M$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра,

$$\left|I(x+u)-I(x)\right| \leq M \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x+t+u)-f(x+t)\right| dt$$

ва (2.2.22) муносабатдан ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай бир $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилиб барча $|u| < \delta(\varepsilon)$ учун

$$\left|I(x+u)-I(x)\right| < \varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Бу эса $I(x)$ функциянинг x нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради.

3–Натижа. *Агар $f(t)$ ва $g(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз ва $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функциялар бўлса, у ҳолда $F(x,t)= f(x+t)g(t)$ функциянинг t ўзгарувчи бўйича ёйилмасининг тригонометрик Фурье коэффициентлари учун*

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos ntdt \qquad (2.2.23)$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin ntdt \qquad (2.2.24)$$

тенгликлар ўринли бўлиб, бунда $n \to \infty$ да $[-\pi, \pi]$ сегментда (шунга кўра бутун сон ўқида) x ўзгарувчига нисбатан текис равишда нолга яқинлашади.

Исбот. Ихтиёрий x нуқта $[-\pi, \pi]$ сегментдан олинган бўлсин. У ҳолда $F(x,t)= f(x+t)g(t)$ функция $[-\pi, \pi]$ сегментда t ўзгарувчи бўйича бўлакли-узлуксиз ва шунга кўра бу функция учун

$$\frac{a_0{}^2(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k{}^2(x) + b_k{}^2(x)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)g^2(t)dt \qquad (2.2.25)$$

Парсеваль тенглиги ўринли бўлади. (2.2.25) тенгликдан унинг чап томонидаги қаторнинг ҳар бир x нуқта $[-\pi, \pi]$ сегментдан танлаб олинганда яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Бу қатор манфиймас ҳадли қатор бўлиб Дини теоремасига кўра унинг кўрсатилган $[-\pi, \pi]$ сегментда текис яқинлашувчи бўлишлиги учун ҳар бир $a_n(x)$ ва $b_n(x)$ функциялар, ҳамда (2.2.25) қаторнинг

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)g^2(t)dt$ йиғиндиси x ўзгарувчи бўйича $[-\pi, \pi]$ сегментда узлуксиз эканлигини кўрсатиш етарли бўлади. Бу эса бевосита олдинги натижадан келиб чиқади, чунки бўлакли-узлуксиз функциянинг квадрати бўлакли-узлуксиз ва $\cos nt$, $\sin nt$ функциялар ҳар бир n номер учун узлуксиздир.

4–Натижа. *Агар $f(t)$ ва $g(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз ва $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функциялар бўлса, у ҳолда*

$$c_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt \qquad (2.2.26)$$

кетма-кетлик $n\to\infty$ да $[-\pi, \pi]$ сегментда (шунга кўра бутун сон ўқида) x ўзгарувчига нисбатан текис равишда нолга яқинлашади.

Исбот. Маълумки

$$\sin(n+\frac{1}{2})t = \cos nt\cdot\sin\frac{t}{2} + \sin nt\cdot\cos\frac{t}{2}$$

тенглик ўринли бўлгани учун олдинги натижадаги (2.2.23) тенгликда $g(t)$ функция ўрнига $g(t)\cdot\sin\frac{t}{2}$ функцияни, (2.2.24) тенгликдаги $g(t)$ функция ўрнига $g(t)\cdot\cos\frac{t}{2}$ функцияни қўйиб қўллаш етарлидир.

Биз $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз ва $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган $f(x)$ функция учун тригонометрик Фурье қаторининг берилган x_0 нуқтада яқинлашиши ёки узоқлашиши шу x_0 нуқтанинг етарлича кичик атрофида $f(x)$ функция ҳолатигагина боғлиқ бўлишлигини кўрган эдик. Тригонометрик Фурье қаторининг бундай ажойиб хоссаси *л о к а л и з а ц и я п р и н ц и п и* деб аталади. Риманнинг локализация ҳақидаги классик теоремаси бир каррали тригонометрик Фурье қаторининг берилган x_0 нуқтада яқинлашиши ёки узоқлашиши шу $f(x)\in L_1[-\pi, \pi]$ функция x_0 нуқтанинг етарлича кичик атрофидаги ҳолатигагина боғлиқ бўлишлигини тасдиқлайди. Локализация принципининг бошқача шакллари ҳам мавжуд: агар иккита функция қандайдир нуқта атрофида устма-уст тушса, у ҳолда уларнинг Фурье қаторларининг қисмий йиғиндилари ўзларини бир хил тутади. Бу функцияларнинг айирмасини олиб биз бир оз кўпроқ тарқалган шаклига келамиз: агар $f(x)$ функция берилган x_0 нуқта атрофида нолга тенг бўлса, у ҳолда $n\to\infty$ да $S_n(x_0, f)\to 0$ бўлади.

Бу локализация принципини ўрганишни текис яқинлашиш билан боғлиқ бўлган қуйидаги муҳим леммани исбот қилишдан бошлаймиз.

10–Лемма (Риман леммаси). *Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз ва $2\pi -$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция бўлиб бу функция қандайдир $[a, b]$ сегментда нолга айланса, у ҳолда $\frac{b-a}{2}$ сондан кичик бўлган ихтиёрий $\delta>0$ сон учун $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори $[a+\delta,\ b-\delta]$ сегментда нолга текис яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. Ихтиёрий $\delta>0$ сон $\frac{b-a}{2}$ сондан кичик бўлсин. $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қаторининг $S_n(x)$ қисмий йиғиндилар кетма-кетлиги ихтиёрий x нуқтада Дирихле ядроси орқали

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \qquad (2.2.27)$$

тенглик билан аниқланади. Агар

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} & \text{агар } \delta\le|t|\le\pi \text{ бўлса}\\ 0 & \text{агар } |t|\le\delta \text{ бўлса}\end{cases} \qquad (2.2.28)$$

тенглик билан аниқланган бўлиб $x\in[a+\delta,\ b-\delta]$ ва $t\in[-\delta,\ \delta]$ бўлса, у ҳолда $f(x+t)$ функциянинг нолга тенг эканлигидан биз

(2.2.27) тенгликни ҳар бир $x \in [a+\delta,\ b-\delta]$ нуқта учун қуйидаги шаклда ёзамиз:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt \qquad (2.2.29)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги кетма-кетликка 4-натижани қўлласак, унинг бутун сон ўқида x ўзгарувчига нисбатан текис нолга интилиши келиб чиқади. Лемма исбот бўлди.

Бу лемманинг бевосита натижаси сифатида қуйидаги иккита теоремани келтириш мумкин.

12-Теорема. *Берилган $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз ва $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция ва $[a, b]$ қандайдир сегмент бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори $\frac{b-a}{2}$ сондан кичик бўлган ихтиёрий $\delta>0$ сон учун $[a+\delta,\ b-\delta]$ сегментда шу функцияга текис яқинлашувчи бўлишлиги учун $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз ва $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган шундай бир $g(x)$ функция мавжуд бўлиб унинг тригонометрик Фурье қатори $[a, b]$ сегментда текис яқинлашувчи ва шу $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функция билан устма-уст тушиши етарлидир.*

Исбот. Риман леммасини $f(x)-g(x)$ функцияга қўлласак, у ҳолда $f(x)-g(x)$ айирманинг тригонометрик Фурье қатори $0<\delta<\frac{b-a}{2}$ интервалдан олинган ихтиёрий δ сон учун $[a+\delta,\ b-\delta]$ сегментда нолга текис яқинлашувчи эканлигини ҳосил қиламиз. Бундан ва $g(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори $[a, b]$ сегментда текис яқинлашувчи эканлигидан $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори $[a+\delta,\ b-\delta]$ сегментда текис яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Бу қатор айнан шу $f(x)$ функцияга $[a+\delta,\ b-\delta]$ сегментда текис яқинлашувчидир. Теорема исбот бўлди.

13-Теорема. *Берилган $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз ва $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий* *давом эттирилган функция ва сон ўқидан олинган ихтиёрий* x_0 *нуқта бўлсин. У ҳолда* $f(x)$ *функциянинг тригонометрик Фурье қатори* x_0 *нуқтада яқинлашувчи бўлишлиги учун* $[-\pi,\pi]$ *сегментда бўлакли-узлуксиз ва* $2\pi-$*давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган шундай бир* $g(x)$ *функция мавжуд бўлиб унинг тригонометрик Фурье қатори* x_0 *нуқтада яқинлашувчи ва* x_0 *нуқтанинг исталганча кичик* $\delta-$*атрофида* $f(x)$ *функция билан устма-уст тушиши етарлидир.*

Исбот. Риман леммасини $f(x)-g(x)$ функцияга $\left[x_0-\dfrac{\delta}{2},\, x_0+\dfrac{\delta}{2}\right]$ сегментда қўлласак, у ҳолда $f(x)-g(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг тригонометрик Фурье қаторлари x_0 нуқтада яқинлашувчи эканлигидан $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори ҳам x_0 нуқтада яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

13-теорема $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори x_0 нуқтада яқинлашувчи бўлишлиги учун аниқ бир шартни қўймасдан бундай шарт фақат $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг исталганча кичик $\delta-$атрофидаги ҳолати билан аниқланишини исбот қилади, яъни локал характерга эга бўлади.

Энди эса биз Гёльдер синфларидан олинган функциялар учун тригонометрик Фурье қаторининг текис яқинлашиши ҳақидаги қуйидаги *асосий* теоремани исбот қиламиз.

14–Теорема. *Агар* $f(x)$ *функция* $[-\pi,\pi]$ *сегментда* α $(0<\alpha\le 1)$ *мусбат кўрсаткич билан* $C^{\alpha}-$ *Гёльдер синфига тегишли ва* $f(-\pi)=f(\pi)$ *бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *функциянинг тригонометрик Фурье қатори* $[-\pi,\pi]$ *сегментда шу функцияга текис яқинлашади.*

Исбот. Берилган $f(x)$ функция $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция деб ҳисоблаймиз. $f(-\pi)=f(\pi)$ шарт бундай давом эттирилган функциянинг бутун сон ўқида $C^{\alpha}-$ Гёльдер синфига тегишли бўлишлигини таъминлайди.

Ихтиёрий x нуқта $[-\pi,\pi]$ сегментдан олинган бўлсин. Қуйидаги тенгликни ёзамиз:

$$S_n(x,f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+t)-f(x)\right]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\,. \qquad (2.2.30)$$

Бу $f(x)$ функциянинг C^{α} – Гёльдер синфига тегишли бўлишлик шартидан шундай бир M ўзгармас сон топилиб, $[-\pi,\pi]$ сегментдаги барча x учун ва барча t учун

$$\left|f(x+t)-f(x)\right|\le M\cdot|t|^{\alpha} \qquad (2.2.31)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун $\delta>0$ сонни

$$\frac{M}{\alpha}\delta^{\alpha}<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.2.32)$$

тенгсизлик ўринли бўладиган қилиб оламиз. Берилган $[-\pi,\pi]$ сегментни $|t|\le\delta$ ва $\delta\le|t|\le\pi$ тўпламларга бўламиз ва (2.2.30) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$S_n(x,f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{|t|\le\delta}\left[f(x+t)-f(x)\right]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta\le|t|\le\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt-\frac{f(x)}{\pi}\int_{\delta\le|t|\le\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\,. \qquad (2.2.33)$$

Бу ердаги биринчи интегрални баҳолаш учун (2.2.31) тенгсизликдан ва $[-\pi,\pi]$ сегментдаги барча t учун $\dfrac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\le\dfrac{\pi}{2|t|}$

тенгсизликдан фойдаланамиз. Биз ихтиёрий n номер ва $[-\pi,\pi]$ сегментдаги барча x учун

$$\left|\int\limits_{|t|\le\delta}\left[f(x+t)-f(x)\right]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|\le$$

$$\le\int\limits_{|t|\le\delta}\left|f(x+t)-f(x)\right|\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})t\right|}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}dt\le$$

$$\le\frac{M\pi}{2}\int\limits_{|t|\le\delta}|t|^{\alpha-1}dt=M\pi\int\limits_{0}^{\delta}t^{\alpha-1}dt=\frac{M\pi}{\alpha}\delta^{\alpha}$$

баҳолашни ҳосил қиламиз. Бундан (2.2.32) кўра, ихтиёрий n номер ва $[-\pi,\pi]$ сегментдаги барча x учун

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le\delta}\left[f(x+t)-f(x)\right]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.2.34)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. (2.2.33) ифоданинг ўнг томонидаги иккинчи интегрални $[-\pi,\pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз (2.2.28) функция ёрдамида

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,g(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt$$

шаклида ёзамиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода 4–натижага кўра, $[-\pi,\pi]$ сегментда x ўзгарувчига нисбатан $n\to\infty$ да нолга текис яқинлашади. Шунинг учун ҳар бир тайинланган $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир N_1 номер топилиб барча $n\ge N_1$ ва $[-\pi,\pi]$ сегментдаги барча x учун

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.2.35)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. (2.2.33) ифоданинг ўнг томонидаги охирги интегрални $[-\pi, \pi]$ сегментда бўлакли-узлуксиз (2.2.28) функция ёрдамида

$$\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt$$

шаклида ёзамиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода 4–натижага кўра, $n\to\infty$ да нолга яқинлашади. (Бунинг учун $f(x)\equiv 1$ функцияга шу 4-натижани қўллаш етарлидир). Ҳамда $[-\pi, \pi]$ сегментда $f(x)$ функциянинг чегараланган эканлигидан биз ҳар бир тайинланган $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир N_2 номер топилиб барча $n\ge N_2$ ва $[-\pi, \pi]$ сегментда барча x учун

$$\left|\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2.2.36}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Иккита N_1 ва N_2 номерларнинг энг каттасини N орқали белгиласак, у ҳолда биз ҳар бир тайинланган $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир N номер топилиб барча $n\ge N$ ва $[-\pi, \pi]$ сегментда барча x учун

$$\left|S_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли эканлигини ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

1–Эслатма. *Маълумки, 14-теорема шартлари бажарилганда $f(x)$ функция $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция бўлгани учун унинг тригонометрик Фурье қатори бутун сон ўқида шу даврий давом эттирилган функцияга текис яқинлашади.*

2–Эслатма. *Юқоридаги (2.2.35) ва (2.2.36) интегралларни баҳолашда биз $f(x)$ функция бўлакли-узлуксиз эканлигидан фақат унинг чегараланган эканлигини кўрсатиш учунгина фойдаландик.*

3–Эслатма. *Табиий равишда 14–теоремада* $f(x)$ *функцияга қўйилган силлиқлик шартларини бу теореманинг* $f(x)$ *функция тригонометрик Фурье қаторининг* $[-\pi,\pi]$ *сегментда шу функцияга текис яқинлашиши ҳақидаги тасдиғини сақлаган ҳолда сусайтириш мумкинми деган савол туғилади.*

$f(x)$ *функция* $[-\pi,\pi]$ *сегментда* α $(0<\alpha\le 1)$ *мусбат кўрсаткич билан* C^{α} *– Гёльдер синфига тегишли бўлишлиги* $f(x)$ *функциянинг шу сегментдаги узлуксизлик модули* $\delta\to 0$ *да*

$$\omega(\delta,f)=O(\delta^{\alpha})$$

тартибга эга эканлигини билдиради.

Д и н и – Л и п ш и ц теоремаси деб аталувчи теоремани исботсиз келтирамиз.

Дини–Липшиц теоремаси. *Агар* $f(x)$ *функция* $f(-\pi)=f(\pi)$ *шартни қаноатлантирса ва унинг* $[-\pi,\pi]$ *сегментдаги узлуксизлик модули* $\delta\to 0$ *да*

$$\omega(\delta,f)=o\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta}}\right)$$

тартибга эга бўлса, яъни $f(x)$ *функциянинг* $[-\pi,\pi]$ *сегментдаги* $\omega(\delta,f)$ *узлуксизлик модули* $\delta\to 0$ *да* $\dfrac{1}{\ln\frac{1}{\delta}}$ *функцияга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *функциянинг тригонометрик Фурье қатори* $[-\pi,\pi]$ *сегментда шу функцияга текис яқинлашади.*

Дини–Липшиц теоремаси берилган $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори $[-\pi,\pi]$ сегментда шу функцияга текис яқинлашиш шартини функциянинг узлуксизлик модули терминида якуний ифодалайди, бошқача қилиб айтганда $f(-\pi)=f(\pi)$ шартни қаноатлантирувчи ва $f(x)$ функциянинг узлуксизлик модули $[-\pi, \pi]$ сегментда $O\left(\dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{\delta}}\right)$ тартибга эга, ҳамда тригонометрик Фурье қатори $[-\pi, \pi]$ сегментдаги ҳамма жойда зич бўлган нуқталар тўпламида узоқлашувчи $f(x)$ функцияни қуриш мумкин[1].

14-теорема шартларида $f(x)$ функция $2\pi-$давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция C^{α} – Гёльдер синфига бутун сон ўқида тегишли бўлиб қолди. *Фақат қандайдир* $[a, b]$ *сегментда* C^{α} *– Гёльдер синфига тегишли* ва бу сегментнинг ташқарисида фақат оддий бўлакли–узлуксиз бўлишлик талабини қаноатлантирувчи $f(x)$ функция тригонометрик Фурье қаторининг ҳолати ҳақида табиий равишда савол туғилади.

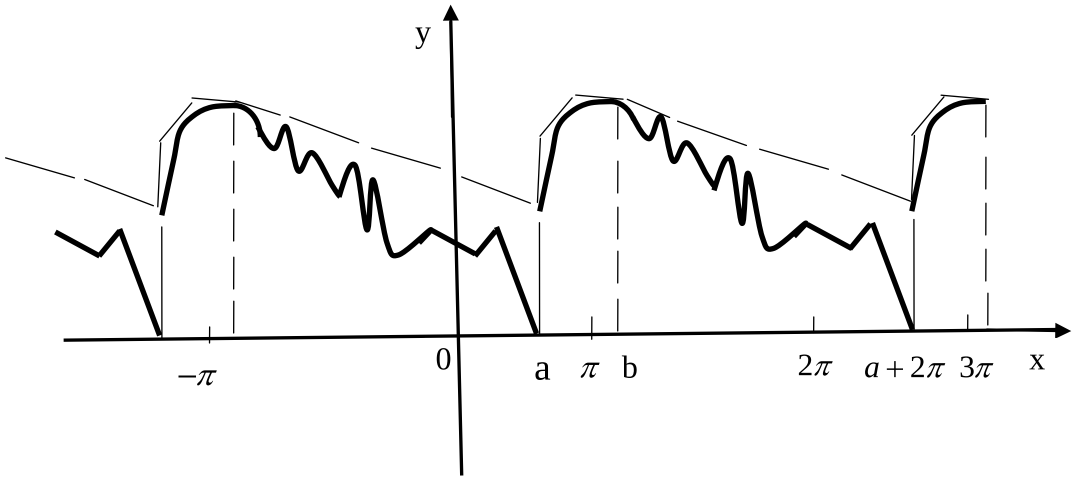
Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

15–Теорема. *Берилган* $f(x)$ *функция* $[-\pi, \pi]$ *сегментда бўлакли-узлуксиз ва* $2\pi-$*давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция бўлсин. Бундан ташқари,* 2π *сонидан кичик бўлган узунликка эга* $[a,b]$ *сегментда бу функция ихтиёрий* α $(0<\alpha\le 1)$ *мусбат кўрсаткич билан* C^{α} *Гёльдер синфига тегишли бўлсин. У ҳолда* $0<\delta<\dfrac{b-a}{2}$ *интервалдан олинган ихтиёрий* δ *сон учун* $f(x)$ *функциянинг тригонометрик Фурье қатори* $[a+\delta,\ b-\delta]$ *сегментда шу функцияга текис яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. Берилган $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функция билан устма-уст тушувчи ва $[b,\ a+2\pi]$ сегментда $Ax+B$ шаклидаги чизиқли функция бўлиб $g(b)=f(b)$, $g(a+2\pi)=f(a)$ шартларни қаноатлантирувчи $g(x)$ функцияни қурамиз. Ҳамда уни $2\pi-$давр билан $[a,\ a+2\pi]$ сегментдан бутун сон ўқига даврий давом эттирамиз.

---

[1] Дини–Липшиц теоремасининг исботи ва бу кўрсатилган мисолнинг қурилиши билан А. Зигмуднинг “Тригонометрические ряды”, т. I, «Мир», 1965, 108 ва 477 бетларида танишиш мумкин.



Расмда $f(x)$ функция графиги бўяб кўрсатилган, $g(x)$ функция графиги эса штрихланган чизиқ билан кўрсатилган.

$Ax+B$ функциянинг $g(b)=f(b)$, $g(a+2\pi)=f(a)$ шартларни қаноатлантиришидан A ва B ўзгармаслар бир қийматли аниқланади: $A=\dfrac{f(a)-f(b)}{a+2\pi-b}$, $B=\dfrac{(a+2\pi)f(b)-bf(a)}{a+2\pi-b}$.

Кўриниб турибдики, бу қурилган $g(x)$ функция $g(-\pi)=g(\pi)$ шартни қаноатлантиради ва шу α $(0<\alpha\le 1)$ мусбат кўрсаткич билан C^{α} Гёльдер синфига бутун сон ўқида тегишли бўлади. Шунинг учун 14-теорема ва 1-эслатмага кўра, $g(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори бутун сон ўқида текис яқинлашувчи бўлади. Шунга кўра, 12-теоремани қўллаб $0<\delta<\dfrac{b-a}{2}$ интервалдан олинган ихтиёрий δ сон учун $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори $[a+\delta,\ b-\delta]$ сегментда шу функцияга текис яқинлашувчи бўлади. Теорема исбот бўлди.

4–Эслатма. *Агар 15–теоремада* $[a,b]$ *сегментнинг узунлиги* 2π *сонига тенг, яъни* $b=a+2\pi$ *бўлган ҳолда ҳам теорема тасдиғи ўринли бўлиб қолади, лекин бу ҳолда теореманинг исботида танланган ихтиёрий* δ *сон* $0<\delta<\pi$ *интервалдан олинган бўлиб* $g(x)$ *функцияни* $[a+\dfrac{\delta}{2},\ a+2\pi-\dfrac{\delta}{2}]$ *сегментда* $f(x)$ *функция билан устма-уст тушувчи ва*

$[a+2\pi-\frac{\delta}{2},\ a+2\pi+\frac{\delta}{2}]$ *сегментда эса чизиқли функция, ҳамда* $[a+\frac{\delta}{2},\ a+2\pi+\frac{\delta}{2}]$ *сегментдан* $2\pi-$*давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция қилиб аниқлаймиз. Агар* $[a,b]$ *сегментнинг узунлиги* 2π *сонидан катта бўлса, у ҳолда шу сегментда* $f(x)$ *функциянинг* α $(0<\alpha\leq 1)$ *мусбат кўрсаткич билан* C^{α} *Гёльдер синфига тегишли бўлишлигидан ва* $2\pi-$*давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция эканлигидан бу* $f(x)$ *функциянинг бутун сон ўқида* C^{α} *Гёльдер синфига тегишли бўлишлиги келиб чиқади, яъни биз 14–теоремага келамиз.*

Энди биз диққатимизни қуйидаги таърифларга қаратамиз.

1-Таъриф. *Агар* $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *сегментда бўлакли–узлуксиз ва* $[a,b]$ *сегментни* $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ *чекли сондаги нуқталар ёрдамида* $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k=1,2,...,n)$ *қисмий сегментларга бўлиш мумкин бўлиб уларнинг ҳар бирда бу функция* α_k $(0<\alpha_k\leq 1)$ *мусбат кўрсаткич билан* C^{α_k} *Гёльдер синфига тегишли, бундан ташқари* $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k=1,2,...,n)$ *қисмий сегментларда Гёльдер синфига тегишли бўлишлик таърифида бу сегментларнинг чекка нуқталардаги қиймати сифатида унинг* $f(x_{k-1}+0)$ *ва* $f(x_{k-1}-0)$[1] *лимитик қийматлари олинган бўлса, у ҳолда берилган* $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *сегментда бўлакли–гёльдер функцияси деб айтилади.*

Бошқача сўз билан айтганда, ҳар қандай бўлакли–гёльдер функциясининг берилиш соҳасини умумий ички нуқталарга эга бўлмаган чекли сондаги сегментларга бўлиш мумкин бўлиб уларнинг ҳар бирида бу функция мусбат кўрсаткич билан Гёльдер синфига тегишли бўлади.

[1] Маълумки, бўлакли–гёльдер функцияси ҳар қандай бўлакли–узлуксиз функция сингари унинг ҳар бир x_k нуқтадаги қиймати шу нуқтадаги ўнг ва чап лимитик қийматларининг ярим йиғиндисига тенг бўлади, яъни $f(x_k)=\frac{1}{2}[f(x_k-0)+f(x_k+0)]$ тенглик ўринли бўлади.

Бу сегментларнинг ҳар бирини биз функциянинг *силлиқлик участкаси* деб атаймиз.

2-Таъриф. *Агар* $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *сегментда бўлакли–узлуксиз ва бу сегментда бўлакли–узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда берилган* $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *сегментда бўлакли–силлиқ функция деб айтилади, яъни агар* $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *сегментда бўлакли–узлуксиз ва унинг* $f'(x)$ *ҳосиласи чекли сондаги нуқталардан ташқари ҳамма жойда мавжуд ва бу чекли сондаги нуқталарда* $f'(x)$ *функция чекли ўнг ва чап лимитик қийматларга эга бўлади.*

Берилган $[a,b]$ сегментда бўлакли–силлиқ бўлган ҳар қандай $f(x)$ функция шу $[a,b]$ сегментда бўлакли–гёльдер функцияси бўлади.

Бўлакли–гёльдер синфларидан олинган функциялар учун тригонометрик Фурье қаторининг текис яқинлашиши ҳақидаги қуйидаги *асосий* теорема ўринлидир.

16–Теорема. *Берилган* $f(x)$ *функция* $[-\pi,\pi]$ *сегментда бўлакли-гёльдер функцияси ва* $2\pi-$*давр билан бутун сон ўқига даврий давом эттирилган функция бўлсин. У ҳолда* $f(x)$ *функциянинг тригонометрик Фурье қатори сон ўқига қарашли ҳар бир х нуқтада* $f(x)=\dfrac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right]$ *қийматга яқинлашувчи бўлади, бундан ташқари бу қатор* $f(x)$ *функциянинг силлиқлилик участкаси ичида ётувчи ҳар бир тайинланган сегментда текис яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. Берилган $f(x)$ функциянинг силлиқлилик участкаси ичида ётувчи ҳар бир тайинланган сегментда текис яқинлашувчи бўлишлиги бирданига 16-теоремадан келиб чиқади. Бундан эса, $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори $f(x)$ функциянинг силлиқлилик участкаси ичида ётувчи ҳар бир тайинланган нуқтада яқинлашувчи бўлишлиги келиб чиқади. Энди $f(x)$ функциянинг иккита силлиқлилик участкасини бирлаштирувчи ҳар бир нуқтада шу $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори яқинлашувчи бўлишлигини исбот қилиш керак бўлади. Бу эса, 2-теоремада қаралган эди. Теорема исбот бўлди.

Кейинчалик зарур бўладиган айрим муҳим натижаларни келтирамиз.

17-Теорема (Абель алмаштириши ҳақидаги теорема). *Иккита* $\{u_0, u_1, ..., u_n, ...\}$ *ва* $\{v_0, v_1, ..., v_n, ...\}$ *сонли кетма-кетликлар берилган бўлиб* $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq ... \geq u_n \geq 0$ *бўлсин. Агар*

$$\sigma_p = v_0 + v_1 + ... + v_p \quad (p = 0, 1, 2, ..., n, ...)$$

бўлса, у ҳолда

$$\left(\min_{p=0,1,...,n} \sigma_p\right) u_0 \leq S_n \equiv u_0 v_0 + u_1 v_1 + ... + u_n v_n \leq \left(\max_{p=0,1,...,n} \sigma_p\right) u_0$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам бу йиғинди учун

$$S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + ... + u_n v_n =$$

$$= u_0 \sigma_0 + u_1(\sigma_1 - \sigma_0) + u_2(\sigma_2 - \sigma_1) + ... + u_n(\sigma_n - \sigma_{n-1}) =$$

$$= \sigma_0(u_0 - u_1) + \sigma_1(u_1 - u_2) + ... + \sigma_{n-1}(u_{n-1} - u_n) + \sigma_n u_n$$

бўлиб

$$u_0 - u_1 \geq 0\ ,\ u_1 - u_2 \geq 0\ ,\ u_{n-1} - u_n \geq 0\ ,\ u_n \geq 0$$

бўлади. Бундан эса

$$\left(\min_{p=0,1,...,n} \sigma_p\right) u_0 \leq S_n \equiv u_0 v_0 + u_1 v_1 + ... + u_n v_n \leq \left(\max_{p=0,1,...,n} \sigma_p\right) u_0$$

тенгсизлик келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

18-Теорема (Бонне теоремаси). *Ихтиёрий* $f(x)$ *функция чекли* $[a, b]$ *оралиқда Риман маъносида интегралланувчи бўлсин. Ҳамда* $\varphi(x)$ *функция мусбат ва камаювчи бўлсин. У ҳолда шундай бир* $\xi \in [a, b]$ *нуқта мавжуд бўлиб*

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x) dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Агар $\varphi(x)$ функция $x = a$ нуқтада узилишга эга бўлса, у ҳолда унинг $x = a$ нуқтадаги қийматини $\varphi(a) = \varphi(a+0)$ деб алмаштириш мумкин бўлади. Бу ҳолда юқоридаги тенгликнинг чап томонидаги интегралнинг қиймати ўзгармайди.

Биз аввал бошдан $\varphi(a)=\varphi(a+0)$ деб ҳисоблашимиз мумкин бўлади. $[a, b]$ оралиқни

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b, \quad h=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$$

нуқталар ёрдамида n та тенг интервалларга бўламиз. Абель алмаштириши ҳақидаги теоремага кўра

$$\varphi(a+0)h\sum_{i=0}^{k'} f(x_i)\le h\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(x_i)f(x_i)\le\varphi(a+0)h\sum_{i=0}^{k} f(x_i)$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Агар $\varepsilon>0$ ихтиёрий сон ва h етарлича кичик бўлса, у ҳолда

$$h\sum_{i=0}^{k'} f(x_i)\le\max_{\xi}\int_a^{\xi} f(x)dx+\varepsilon$$

бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, агар h етарлича кичик бўлса, у ҳолда интеграл таърифидан

$$\left|h\sum_{i=0}^{k'} f(x_i)-\int_a^{a+(k'+1)h} f(x)dx\right|\le\varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади ва бу тенгсизлик k' қийматга боғлиқ бўлмаган ҳолда ўринли бўлади. Шундай қилиб, $h\to 0$ да

$$\varphi(a+0)\left[\min_{\xi}\int_a^{\xi} f(x)dx-\varepsilon\right]\le\int_a^b\varphi(x)f(x)dx\le$$

$$\le\varphi(a+0)\left[\max_{\xi}\int_a^{\xi} f(x)dx+\varepsilon\right]$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бунда $\varepsilon>0$ ихтиёрий сон эканлигидан $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтиб

$$\varphi(a+0)\left[\min_{\xi}\int_a^{\xi} f(x)dx\right]\le\int_a^b\varphi(x)f(x)dx\le\varphi(a+0)\left[\max_{\xi}\int_a^{\xi} f(x)dx\right]$$

ҳосил бўлган тенгсизликдан ва $\int_a^{\xi} f(x)dx$ интеграл ξ ўзгарувчига узлуксиз боғлиқ эканлигидан оралиқ қиймат ҳақидаги Коши теоремасига кўра шундай бир $\xi\in[a, b]$ нуқта мавжуд бўлиб, бунда

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)dx = \varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)dx$$

тенглик ўринли бўлади. Теорема исбот бўлди.

Энди биз қуйидаги машҳур теоремани исбот қиламиз.

19-Теорема (Жордан – Лебег теоремаси). *Ихтиёрий $f(x)$ функция $2\pi-$даврли ва $[0, 2\pi]$ оралиқда жамланувчи функция бўлсин. Ҳамда $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг атрофида чегараланган вариацияга эга бўлсин. У ҳолда $n\to\infty$ да*

$$S_n(x_0) \to \frac{1}{2}\left[f(x_0+0) + f(x_0-0)\right]$$

бўлади.

Бундан ташқари, агар $f(x)$ функция $[0, 2\pi]$ оралиқда узлуксиз ва $[\alpha, \beta]$ оралиқда чегараланган вариацияга эга бўлса, у ҳолда $S_n(x)$ қисмий йиғиндилар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга $[\alpha, \beta]$ оралиқ ичида ётувчи ихтиёрий $[\alpha', \beta']$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Маълумки, $S_n(x)$ қисмий йиғиндилар кетма-кетлиги учун $S_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\theta)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\theta)}{2\sin\frac{1}{2}(x-\theta)}d\theta$ Дирихле формуласи ўринлидир. Бу ерда $\theta = x+2t$ деб алмаштириш ёрдамида

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\beta}^{\beta+\pi} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формулада β сон α сон каби ихтиёрий бўлиб $\beta = -\dfrac{\pi}{2}$ деб олсак, у ҳолда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\left[f(x+2t) + f(x-2t)\right]dt \qquad (2.2.37)$$

тенгликка эга бўламиз. Худди шунингдек

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}2\cdot f(x)dt$$

тенглик ўринлидир. Бу тенгликларнинг биридан иккинчисини айириб қуйидагини ёзамиз:

$$\pi\left[S_n(x)-f(x)\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\left[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\right]dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\varphi(t)dt, \qquad (2.2.38)$$

бунда $\varphi(t)=\frac{t}{\sin t}\left[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\right]$. (2.2.39)

Энди (2.2.38) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$\pi\left[S_n(x)-f(x)\right]=\int_0^{\delta}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\varphi(t)dt+\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\varphi(t)dt, \qquad (2.2.40)$$

бунда $\delta>0$ сон етарлича кичик. Бу (2.2.40) тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчи Риман-Лебег теоремасига кўра нолга интилади, чунки $\frac{\varphi(t)}{t}$ функция $[\delta,\frac{\pi}{2}]$ сегментда интегралланувчи функция бўлади.

Шартга кўра, $f(x)$ функция қаралаётган x_0 нуқта атрофида чегараланган вариацияга эга бўлгани учун $f(x_0+0)$ ва $f(x_0-0)$ қийматлар мавжуд бўлади. Шунинг учун $f(x_0)$ қийматни

$$f(x_0)=\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]$$

деб ўзгартирсак, у ҳолда $f(x)$ функция фақат битта нуқтада ўзгариши мумкин ва бу унинг Фурье қаторига таъсир этмайди.

Энди бизнинг масала, агар $\delta>0$ сон етарлича кичик танланганда (2.2.40) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи n бўйича текис равишда исталганча етарлича кичик бўлишлигини исботлашдан иборат бўлади.

Шартга кўра, $x=x_0$ нуқта учун

1) $\varphi(t)$ функция $[0, \delta]$ ораликда чегараланган вариацияга эга.

2) $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)=0$ бўлади.

$\varphi(0)=0$ деб оламиз. У ҳолда 2) шарт $\varphi(t)$ функциянинг $t=0$ нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради. Иккинчи томондан эса, ҳар қандай чегараланган вариацияга эга функцияни

$$\varphi(t)=p(t)-n(t)$$

айирма шаклида таъсвирлаш мумкин бўлади, бунда $p(t)$ ва $n(t)$ функциялар монотон ўсувчидир. Ҳамда $\lim\limits_{t\to+0}p(t)=\lim\limits_{t\to+0}n(t)=0$ бўлади. У ҳолда Бонне теоремасига кўра, шундай бир $0\le\xi\le\delta$ нуқта топилиб, бунда

$$J_\delta\equiv\int_0^\delta\frac{\sin(2n+1)t}{t}p(t)dt=p(\delta)\int_\xi^\delta\frac{\sin(2n+1)t}{t}dt$$

тенгликка эга бўламиз. Шунга кўра

$$\int_\xi^\delta\frac{\sin(2n+1)t}{t}dt=\int_{(2n+1)\xi}^{(2n+1)\delta}\frac{\sin t}{t}dt \tag{2.2.41}$$

бўлади. $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\pi$ формулага кўра қандайдир $A>0$ сон мавжуд бўлиб ихтиёрий $h>0$ учун

$$\left|\int_0^h\frac{\sin x}{x}dx\right|\le A$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра, $\left|J_\delta\right|\le 2A\cdot p(\delta)$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Шунинг учун

$$\left|\int_0^\delta\frac{\sin(2n+1)t}{t}\varphi(t)dt\right|\le 2A\left[p(\delta)+n(\delta)\right]\equiv 2A\cdot\underset{0\le t\le\delta}{Var}\,\varphi \tag{2.2.42}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Юқорида айтилганидек, $\varphi(t)$ функциянинг $t=0$ нуқтада узлуксиз эканлигидан чегараланган вариацияга эга бўлган $\varphi(t)$ функциянинг тўла вариацияси $\delta\to 0$ да нолга интилиши келиб чиқади. Бундан биз $n\to\infty$ да

$$S_n(x_0)\to\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]$$

бўлишлигини ҳосил қиламиз.

Энди теореманинг қолган қисмини исбот қиламиз. Бунинг учун x ўзгарувчини $[\alpha', \beta']$ оралиқда ўзгарувчи параметр деб қараймиз. Ҳамда $\varphi(t)$ функцияни

$$\varphi(t;\, x) = \frac{t}{\sin t}\left[\, f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)\right]$$

билан алмаштирамиз. Энди бизнинг масала – юқорида исбот қилинган тасдиқнинг x ўзгарувчининг қийматига боғлиқ эмаслигини кўрсатишдан иборат бўлади. Аввал (2.2.42) тенгсизликни қараймиз. Бу ерда

$$\underset{0\le t\le\delta}{Var}\left[\, f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)\right] \le \underset{t\in[x-2\delta,\, x+2\delta]}{Var}\left[\, f(t)\right]$$

тенгсизликни ҳисобга олиш етарлидир. Қўйилган шартга кўра $f(x)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз ва чегараланган вариацияга эга эканлигидан етарлича кичик $\delta > 0$ учун тенгсизликнинг ўнг томони $x \in [\alpha', \beta']$ ўзгарувчига нисбатан текис равишда исталганча кичик миқдор бўлади.

Энди (2.2.40) тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи $\int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)t\, \frac{\varphi(t;\, x)}{t}dt$ қўшилувчини қараймиз. Бу интегралга Риман–Лебег теоремасини қўллаш учун биз исботнинг келтирилган қисмига қайтамиз. Бу теорема қандайдир $\varphi(t)$ тайинланган функция учун ўринли эди, биз эса бу интегралнинг $n \to \infty$ да x параметрга боғлиқ функциялар оиласи учун текис нолга интилишини исбот қилишимиз керак бўлади. Бироқ бу ҳолда $\varphi(t;\, x)$ функциянинг шаклини эътиборга олиб ва x параметрга боғлиқ функциялар оиласи учун текис нолга интилишини қийинчиликсиз исбот қилишимиз мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам, $\dfrac{\varphi(t;\, x)}{t} = \dfrac{1}{\sin t}\left[\, f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)\right]$

функция учун $\displaystyle\int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\varphi(t+h;\, x)}{t+h} - \frac{\varphi(t;\, x)}{t} \right| dt$ интеграл

$$\int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{f(x+2t+2h) + f(x-2t-2h) - 2f(x)}{\sin(t+h)} - \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{\sin t} \right| dt$$

кўринишида бўлиб $\int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{f(x+2t+2h)\sin t - f(x+2t)\sin(t+h)}{\sin(t+h)\sin t}\right| dt +$

$$+\int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{f(x-2t-2h)\sin t - f(x-2t)\sin(t+h)}{\sin(t+h)\sin t}\right| dt +$$

$$+\int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{2f(x)\sin t - 2f(x)\sin(t+h)}{\sin(t+h)\sin t}\right| dt$$

интеграл билан баҳоланади. Шунга кўра $f(x)$ функциянинг $[0,2\pi]$ оралиқда узлуксиз ва даврий эканлигидан унинг текис узлуксиз ва чегараланган эканлигини ҳисобга олиб $h\to 0$ да $\sin(t+h)=\sin t + o(1)$, $f(x+2t+2h)= f(x+2t)+o(1)$ ва $f(x-2t-2h)= f(x-2t)+o(1)$ муносабатлардан $h\to 0$ да x ўзгарувчига нисбатан текис $\int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\varphi(t+h;\,x)}{t+h} - \frac{\varphi(t;\,x)}{t}\right| dt \to 0$ лимитни ҳосил қиламиз. Шунинг учун $S_n(x)$ қисмий йиғиндилар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга $[\alpha,\beta]$ оралиқ ичида ётувчи ихтиёрий $[\alpha',\beta']$ оралиқда текис яқинлашувчи бўлади. Теорема исбот бўлди.

9. Фурье қаторига ёйилмайдиган узлуксиз функцияга мисол. Дю-Буа-Раймон томонидан 1876 йилда $[-\pi,\pi]$ сегментнинг ҳамма жойида зич бўлган чексиз кўп нуқталарда тригонометрик Фурье қатори узоқлашувчи бўлган $[-\pi,\pi]$ сегментда узлуксиз ва $f(-\pi)= f(\pi)$ шартни қаноатлантирувчи $f(x)$ функция мавжудлиги кўрсатилган. Бу қурилган мисол узлуксизлик шартидан бошқа талаблар қўйилмаганда функцияни берилган нуқтада Фурье қаторига ёйиш мумкин эмаслигини билдиради. Биз бу ерда Дю-Буа-Раймон мисолига ўхшаш бўлган Л. Фейер томонидан қурилган мисолни келтирамиз. Шу мақсадда аввал қуйидаги леммаларни қараймиз.

11–Лемма. *Ихтиёрий $x\in R$ ва $n\in N$ учун*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \le 2\sqrt{\pi} \qquad \textit{(2.2.43)}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Аввал $0 < x < \pi$ деб олайлик. Ҳамда m бутун сон

$$m \le \frac{\sqrt{\pi}}{x} < m+1 \tag{2.2.44}$$

тенгсизликни қаноатлантирсин. У ҳолда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \le \left|\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \tag{2.2.45}$$

тенгсизликни ёзамиз. Бу ерда, агар $m = 0$ бўлса, у ҳолда биринчи қўшилувчи йўқолади, худди шунингдек агар $m \ge n$ бўлса, у ҳолда иккинчи қўшилувчи йўқолади.

Бизга маълум бўлган $|\sin\alpha| \le |\alpha|$ тенгсизликка кўра

$$\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\sin kx}{k}\right| \le \sum_{k=1}^{m} \frac{kx}{k} = mx \le \sqrt{\pi} \tag{2.2.46}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Иккинчи томондан эса, Абель алмаштиришига кўра, $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k}\right| \le \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \cdot \dfrac{1}{m+1}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра, $\sin\dfrac{x}{2} \ge \dfrac{x}{\pi}$, $m+1 > \dfrac{\sqrt{\pi}}{x}$ тенгсизликларни ҳисобга олиб

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \le \frac{1}{\frac{x}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{x}} = \sqrt{\pi}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан эса, (2.2.45) ва (2.2.46) тенгсизликларга кўра, $x \in (0, \pi)$ учун лемма исбот бўлади. Бундан ташқари, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k}\right|$ функциянинг жуфтлигига кўра, (2.2.43) тенгсизлик $x \in (-\pi, 0)$ учун ҳам ўринлидир. Ҳамда (2.2.43) тенгсизлик $x = 0,\ \pi, -\pi$ нуқталар учун ҳам тривиалдир. Демак, (2.2.43) тенгсизлик $-\pi \le x \le \pi$ учун ҳам ўринлидир. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k}$ функциянинг даврийлигига кўра (2.2.43) тенгсизлик барча $x \in R$ учун ўринли эканлиги келиб чиқади. Лемма исбот бўлди.

12–Лемма. *Агар*

$$\varphi_n(x) = \left[\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ \ldots \ + \frac{\cos nx}{1}\right] -$$
$$-\left[\frac{\cos(n+2)x}{1} + \frac{\cos(n+3)x}{2} + \ \ldots \ + \frac{\cos(2n+1)x}{n}\right] \qquad (2.2.47)$$

бўлса, у ҳолда барча $x \in R$ *учун*

$$|\varphi_n(x)| \le 4\sqrt{\pi} \qquad (2.2.48)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(n+1-k)x}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(n+1+k)x}{k}$$

бўлиб, уни $\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$ формулага асосан

$$\varphi_n(x) = 2\sin(n+1)x \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$$

кўринишида ёзамиз. Энди (2.2.43) тенгсизликни ҳисобга олсак, барча $x \in R$ учун (2.2.48) тенгсизлик ўринли эканлиги келиб чиқади. Лемма исбот бўлди.

Бу ердаги $\varphi_n(x)$ функция тригонометрик кўпҳад бўлгани учун (2.2.47) формула “$\varphi_n(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қаторига ёйилмаси” бўлади. Бу қаторнинг $S_m(\varphi_n;\ x)$ қисмий йиғиндисига тўхталамиз.

$$S_m(\varphi_n;\ x) =$$

$$=\begin{cases} \dfrac{\cos x}{n}+\dfrac{\cos 2x}{n-1}+\ \dots\ +\dfrac{\cos mx}{n+1-m}\ , \quad \text{агар} \quad 1\le m\le n \quad \text{бўлса}, \\ \dfrac{\cos x}{n}+\dfrac{\cos 2x}{n-1}+\ \dots\ +\dfrac{\cos nx}{1}\ , \quad \text{агар} \quad m=n+1 \quad \text{бўлса}, \\ \left[\dfrac{\cos x}{n}+\dots+\dfrac{\cos nx}{1}\right]- \\ -\left[\dfrac{\cos(n+2)x}{1}+\ \dots\ +\dfrac{\cos mx}{m-n-1}\right], \ \text{агар}\ n+2\le m\le 2n+1\ \text{бўлса}, \\ \left[\dfrac{\cos x}{n}+\dots+\dfrac{\cos nx}{1}\right]- \\ -\left[\dfrac{\cos(n+2)x}{1}+\ \dots\ +\dfrac{\cos(2n+1)x}{n}\right], \ \text{агар} \quad m\ge 2n+1 \quad \text{бўлса}. \end{cases}$$

Бу тенгликлардан кўринадики, ихтиёрий m ва n учун

$$S_m(\varphi_n;\ 0)\ge 0 \qquad (2.2.49)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Энди бизни қизиқтираётган функцияни қуйидагича аниқлаймиз:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{1}{n^2}\ \varphi_{2^{n^3}}(x)\ . \qquad (2.2.50)$$

Бу функция узлуксиз ва $2\pi-$даврлидир. Унинг қисмий йиғиндиси $S_m(f;\ x)$ учун

$$S_m(f;\ x)=\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{1}{n^2}\ S_m(\varphi_{2^{n^3}};\ x)\ . \qquad (2.2.51)$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \qquad (2.2.52)$$

косинус–коэффициент учун текис яқинлашувчи (2.2.50) ёйилмани $\cos kx$ функцияга кўпайтириб ҳадма-ҳад интеграллаймиз. Натижада биз

$$a_k(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{1}{n^2}\ a_k(\varphi_{2^{n^3}}) \qquad (2.2.53)$$

тенгликка эга бўламиз. Энди (2.2.53) ифодани $\cos kx$ функцияга кўпайтириб $k=1$ дан $k=m$ гача йиғиб чиқсак, у ҳолда (2.2.51) ёйилмани ҳосил қиламиз. Бу (2.2.49) ва (2.2.51) муносабатлардан ихтиёрий m ва n учун

$$S_m(f;\ 0) \geq \frac{1}{n^2} S_m(\varphi_{2^{n^3}};\ 0) \qquad (2.2.54)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Хусусан, $m = 2^{n^3}$ бўлсин. У ҳолда

$$S_n(\varphi_n;\ x) = \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ \ldots\ + \frac{\cos nx}{1}$$

тенглик ўринли бўлгани учун

$$S_{2^{n^3}}(\varphi_{2^{n^3}};\ 0) = 1 + \frac{1}{2} + \ \ldots\ + \frac{1}{2^{n^3}}$$

бўлади. Бу йиғиндини қуйидан баҳолаймиз. Маълумки,

$$\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$$

тенгсизликка кўра,

$$S_{2^{n^3}}(\varphi_{2^{n^3}};\ 0) > \int_1^{2^{n^3}+1} \frac{dx}{x} = \ln(2^{n^3}+1) > n^3 \ln 2$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бундан эса, (2.2.54) тенгсизликка кўра,

$$S_{2^{n^3}}(f;\ 0) \geq n \ln 2 \qquad (2.2.55)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади ва шунинг учун $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори $x=0$ нуқтада узоқлашувчи бўлади.

Қуриш жараёнини мураккаблаштириб чексиз нуқталар тўпламида тригонометрик Фурье қатори узоқлашувчи бўлган узлуксиз функцияни ҳосил қилиш мумкин. Узлуксиз $f(x)$ функциянинг тригонометрик Фурье қатори қандайдир x_0 нуқтада унинг йиғиндиси $f(x_0)$ қийматдан фарқли сонга яқинлашувчи бўлиши мумкин эмаслиги ҳам қизиқарлидир. Бошқача айтганда, ҳар қандай узлуксиз функциянинг тригонометрик Фурье қатори ёки узоқлашувчи ёки айнан шу функцияга яқинлашувчи бўлади.

10. Фурье – Лебег қатори деярли ҳамма жойда узоқлашувчи бўлган функцияга мисол. А.Н. Колмогоров томонидан 1923 йилда $[0,\ 2\pi]$ сегментнинг деярли ҳамма жойида (яъни $[0, 2\pi]$ сегментнинг ўлчами нолга тенг бўлган нуқталар тўпламидан ташқари ҳамма жойда) тригонометрик Фурье қатори узоқлашувчи бўлган жамланувчи, яъни Лебег маъносида интегралланувчи бўлган функцияга мисол қурилган[1]. Бу мисолни қараб чиқамиз. Бу ерда фойдаланадиган методлар ҳамма жойда узоқлашувчи бўлган тригонометрик Фурье қаторини қуришга имкон бермайди.

I. Аввал биз $0 \le x \le 2\pi$ учун аниқланган ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), \dots$ функциялар кетма-кетлиги мавжудлигини кўрсатамиз:

$$1^0.\ \varphi_n(x) \ge 0,\ \int_0^{2\pi} \varphi_n(x)dx = 2 \qquad (n = 1, 2, ...).$$

2^0. $\varphi_n(x)$ функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси чегараланган.

3^0. Ҳар бир $\varphi_n(x)$ функция учун мос равишда шундай бир мусбат M_n сон, E_n тўплам ва q_n бутун сонни мос қўйиш мумкинки, бунда

3а) $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \infty$;

3б) $\lim\limits_{n\to\infty} mes\, E_n = 2\pi$;

3с) E_n тўпламнинг ҳар бир нуқтаси учун $\varphi_n(x)$ функция Фурье қаторининг q_n сонга тенг ёки ундан кичик номерли қисмий йиғиндисининг абсолют қиймати M_n сондан катта.

$\varphi_n(x)$ функциялар кетма-кетлиги қурилган деб ҳисоблаб, осонгина $n_1, n_2, ..., n_k, ...$ ўсувчи бутун мусбат сонлар кетма-кетлигини топиш мумкинки, бунда:

А) $\dfrac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \le \dfrac{1}{2^k}$ ва мос равишда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \le 1$ бўлсин.

---
[1] Une se'rie de Fourier–Lebesgue divergente presque partout. – Fund. math., 1923, vol. 4, p. 324–328., ёки бу ҳақида А.Н. Колмогоров, Избранные труды, Математика и механика, М.: “Наука”, 1985. 8-11 бетларидан қаранг.

B) $\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_k}}$ сони $(k-1)$ та $\varphi_{n_1},\ \varphi_{n_2},\ ...,\ \varphi_{n_{k-1}}$ функциялардан ташкил топган Фурье қатори қисмий йиғиндиси модулининг максимумидан катта бўлсин.

C) Барча $i<k$ учун $q_{n_i}\le \frac{1}{2^k}\sqrt{M_{n_k}}$ бўлсин.

Агар k дан кичик бўлган i сонининг барча қийматларида n_i сонлар маълум бўлса, у ҳолда n_k сонини A), B) ва C) шартларни қаноатлантирадиган қилиб танлаш мумкин.

Энди қуйидаги функцияни киритамиз:

$$\Phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\varphi_{n_k}(x)\ .$$

1^0 ва A) шартларга кўра бу қатор[1] жамланувчи бўлган функцияга деярли яқинлашади ва бу $\Phi(x)$ функция Фурье қаторининг коэффициентлари қаралаётган

$$\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\varphi_{n_k}(x),\ (k=1,\ 2,\ ...)$$

функциялар Фурье қатори коэффициентларининг йиғиндисига тенг бўлади.

3^0 га кўра E_{n_k} тўпламнинг ихтиёрий нуқтасида $\varphi_{n_k}(x)$ функция учун M_{n_k} дан катта бўлган $\Phi(x)$ функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндисини қараймиз.

а) У қаторнинг $\frac{\varphi_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}}$ ҳади учун $\sqrt{M_{n_k}}$ дан катта.

б) Номерлари k дан кичик бўлган барча ҳадлари йиғиндиси учун B) шартга кўра у $\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_k}}$ дан кичик бўлади.

с) $s>k$ шартни қаноатлантирувчи ҳадлар учун у $\frac{6}{2^s}$ дан кичик бўлади.

---

[1] Бу ерда камаймайдиган функциялардан тузилган қатор ҳамма жойда яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкинлиги ҳақидаги Фубини теоремаси ҳақида гап боради, бу ҳақида, масалан: Fund. Math.., 1923, vol. 4, p. 211.га қаранг.

Ҳақиқатдан ҳам, ҳадларининг номерлари $q_{n_k} \le \frac{1}{2^s}\sqrt{M_{n_s}}$ дан кичик ёки тенг бўлган қисмий йиғинди С) шартга кўра, $(2q_{n_k}+1)$ нинг функция абсолют қийматининг интеграли бу ҳолда $\frac{2}{\sqrt{M_{n_s}}}$ га тенг бўлган сонга кўпайтмасидан кичик бўлдади.

а), б) ва с) шартлардан $\Phi(x)$ функциянинг мос йиғиндилари абсолют қиймати бўйича

$$\frac{1}{2}\sqrt{M_{n_k}}-\frac{6}{2^k}$$

қийматдан катта ёки тенг бўлиши келиб чиқади.

Бу ердан биз $\Phi(x)$ функция Фурье қаторининг $E=\overline{\lim_{k\to\infty}}E_{n_k}$, $mesE=2\pi$ тўпламдаги ҳар бир нуқтада узоқлашади деган хулосага эга бўламиз.

II. $\varphi_n(x)$ функциянинг конструкцияси.

Айтайлик, тоқ сонлардан ташкил топган ўсувчи ҳамда чекли ҳадлардан ташкил топган

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n$$

сонли кетма-кетлик қуйида келтириладиган шартларни қаноатлантирсин.

Ҳадлари $m_1,\ m_2,\ ...,\ m_n$ бўлган кетма-кетликни қуйидагича аниқлаймиз:

$$m_1=n,\ 2m_k+1=\lambda_k(2n+1). \tag{2.2.56}$$

Қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$A_k=k\frac{4\pi}{2n+1},\ 1\le k\le n,\ \ A_n=2\pi-\frac{2\pi}{2n+1}. \tag{2.2.57}$$

Ниҳоят

$$\Delta_k=\left[A_k-\frac{1}{m_k^2},\ \ A_k+\frac{1}{m_k^2}\right] \tag{2.2.58}$$

сегментда $\varphi_n(x)=\frac{m_k^2}{n}$ деб оламиз.

Δ_k сегментга қарашли бўлмаган ҳар бир нуқтада биз $\varphi_n(x)=0$ деб оламиз.

Маълумки, бевосита

$$\varphi_n(x)\geq 0,\ \int_0^{2\pi}\varphi_n(x)dx=2$$

1^0 шарт ўринли бўлади ва $\varphi_n(x)$ функция чекли ўзгаришга эга бўлади. Шунинг учун 2^0 шарт ҳам бажарилади.

Энди m_k номерли $\varphi_n(x)$ функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндисини қараймиз:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(\alpha)\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}d\alpha\,. \qquad (2.2.59)$$

Фараз қилайлик, x нуқта

$$\sigma_k=\left[A_{k-1}+\frac{2}{n^2},\ A_k-\frac{2}{n^2}\right] \qquad (2.2.60)$$

сегментга тегишли бўлсин.

Агарда $i<k$ учун λ_i аниқланган ва шунга мос $\varphi_n(x)$ функция Δ_i сегментда аниқланган бўлса, у ҳолда λ_k сонларни етарлича катта қилиб танлаш мумкинки, бунда (2.2.59) интегралнинг бутун Δ_i $(i<k)$ сегментдаги қиймати σ_k га тегишли ҳар бир x нуқта учун бу қиймат етарлича кичик бўлади. Қулайлик учун интегралнинг қиймати абсолют қиймат жиҳатидан 1 сонидан кичик деб оламиз.

Энди (2.2.59) интегрални Δ_s $(s\geq k)$ сегментда қараймиз. Шунга кўра,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_s}\frac{m_s^2\sin\frac{2m_k+1}{2}(\alpha-x)}{n2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_s}\frac{m_s^2}{n}\cdot\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_s-x)}{2\sin\frac{1}{2}(A_s-x)}d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_s}\frac{m_s^2}{n}\left[\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(\alpha-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}-\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_s-x)}{2\sin(\frac{1}{2}(A_s-x))}\right]d\alpha. \quad (2.2.61)$$

$|\alpha - A_s| \le \dfrac{1}{m_s^2}$ эканлигини эътиборга олсак, квадрат қавснинг ичидаги айирма

$$\frac{1}{m_s^2}\max\left|\frac{d}{d\alpha}\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \le \frac{4m_k^2}{m_s^2} \le 4$$

дан кичик бўлади. Шунингдек, Δ_s сегментнинг узунлиги $\dfrac{2}{m_s^2}$ га тенг бўлиб, (2.2.61) тенгликдаги иккинчи ҳад $\dfrac{4}{n}$ дан кичик бўлади.

(2.2.61) ифодадаги биринчи интегралдан ўзгармас сонни интеграл белгисидан ташқарига чиқарсак, у ҳолда бу ифода қуйидаги йиғиндига тенглигини топамиз:

$$\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_s - x)}{2\sin\frac{A_s - x}{2}} + \frac{\tau}{n},\ |\tau| \le 4. \qquad (2.2.62)$$

Охирги йиғиндида $s = k,\ k+1, \dots, n$ учун τ қатнашган ҳадлар йиғиндисининг абсолют қиймати 4 сонидан кичик бўлади.

$$\frac{2m_k+1}{2}(A_s - A_k) = (s-k)\lambda_k 2\pi,$$

$$\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_s - x) = \sin\frac{2m_k+1}{2}(A_k - x),$$

$$A_s - x < A_s - A_{k-1} = (s-k+1)\frac{4\pi}{2n+1} < (s-k+1)\frac{2\pi}{n},$$

$$\frac{1}{\sin\frac{A_s - x}{2}} > \frac{n}{\pi(s-k+1)}$$

муносабатларга эътиборимизни қаратиб, (2.2.62) муносабатдаги биринчи ҳадларнинг $s = k,\ k+1, \dots, n$ учун йиғиндисининг абсолют қиймати

$$\frac{1}{\pi n}\left|\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_k-x)\right|\sum_{s=k}^{n}\frac{1}{\sin\frac{A_s-x}{2}}>$$

$$>\frac{1}{\pi^2}\left|\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_k-x)\right|\sum_{r=1}^{n-k}\frac{1}{r}-5 \qquad (2.2.63)$$

кўринишда баҳоланишини аниқлаймиз.

Демак, σ_k сегментдаги ихтиёрий x нуқта учун (2.2.59) интеграл абсолют қиймат жиҳатидан

$$\frac{1}{\pi^2}\left|\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_k-x)\right|\sum_{r=1}^{n-k}\frac{1}{r}-5$$

дан катта бўлади.

Фараз қилайлик, E_n тўплам $n-k>\sqrt{n}$ учун σ_k сегментларнинг x нуқталаридан тузилган шундай бир тўплам бўлсинки, бунда шу E_n тўпламда қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлсин:

$$\frac{1}{\pi^2}\left|\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_k-x)\right|>\frac{1}{\sqrt{\sum_{r=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{1}{r}}}=\frac{1}{N_n}.$$

Кўриш мумкинки, E_n тўпламнинг σ_k сегментга тегишли ҳар бир нуқтаси учун $\varphi_n(x)$ функция Фурье қаторининг m_k номерли қисмий йиғиндиси $N_n-5=M_n$ дан катта бўлади.

Қийинчиликсиз кўрсатиш мумкинки, $\lim\limits_{n\to\infty} mesE_n=2\pi$ бўлади.

11. Ҳамма жойда узоқлашувчи бўлган Фурье – Лебег қатори[1]. А.Н. Колмогоров томонидан 1926 йилда $[0,2\pi]$ сегментнинг ҳамма жойида Фурье қатори узоқлашувчи бўлган жамланувчи функцияга мисол қурилган. Шу мисолни келтирамиз.

---

[1] Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout. – C. r. Acad. Sci. Paris, 1926, vol. 183, p. 1327-1329. А.Н. Колмогоровнинг бу иши Э. Борелем томонидан тавсия этилган. Бу ҳақида А.Н. Колмогоров, Избранные труды, Математика и механика, М.: “Наука”, 1985. 73-75 бетларидан қаранг.

1^0. Ихтиёрий бутун n сони учун қуйидаги $\varphi_n(x)$ функцияни аниқлаймиз:

$$\sigma_m(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{m-k}{m}\cos kx,\ m_i=n^{4(i+1)},\ A_i=\frac{4i\pi}{2n+1}\quad(0\le i\le n),$$

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sigma_{m_i}(A_i-x).$$

Маълумки,

$$\varphi_n(x)\ge 0,\quad \int_0^{2\pi}\varphi_n(x)dx=\pi.$$

2^0. $\varphi_n(x)$ функция қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m_n}a_k\cos(kx+\lambda_k).$$

$\varphi_n(x)$ функциянинг қисмий йиғиндисини қараймиз:

$$S_k(x)=\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{k}a_l\cos(lx+\lambda_l)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{j}\sigma_{m_i}(A_i-x)+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{k}{m_i}\sigma_k(A_i-x)+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{m_i-k}{m_i}\cdot\frac{\sin\frac{2k+1}{2}(A_i-x)}{2\sin\frac{1}{2}(A_i-x)},\qquad(2.2.64)$$

бунда j сони $m_j\le k<m_{j+1}$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб олинган. (2.2.64) тенгликнинг дастлабки иккита қўшилувчиси манфиймас бўлади. Шунинг учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$S_k(x)\ge\frac{1}{n+1}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{m_i-k}{m_i}\cdot\frac{\sin\frac{2k+1}{2}(A_i-x)}{2\sin\frac{1}{2}(A_i-x)}.\qquad(2.2.65)$$

3^0. Етарлича катта n сони учун ва $\left[A_j-\frac{1}{n^3},\ A_j+\frac{1}{n^3}\right]$ сегментга тегишли x нуқта учун

$$S_{n^2}(x)>C_1n,\qquad(2.2.66)$$

тенгсизликни исботлаш мумкин, бунда C_1 ўзгармас сон.

4^0. $\left[A_j+\frac{1}{n^3},\ A_{j+1}-\frac{1}{n^3}\right]$ сегментга тегишли бўлган ҳар бир x нуқта учун бунда n сонини етарлича катта деб олиб k сонини шундай танлаш мумкинки, $2k+1$ сони $2n+1$ сонига бўлинади ва

$$m_j \le k \le \frac{m_{j+1}}{2},\ -\sin\frac{2k+1}{2}x \ge \frac{1}{2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Бу ҳолда (2.2.65) тенгсизликдан қуйидаги муносабатни келтириш мумкин:

$$S_k(x) \ge -\frac{1}{n+1}\sin\frac{2k+1}{2}x\sum_{i=j+1}^{n}\frac{m_i-k}{m_i}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(A_i-x)} \ge$$

$$\ge C_2\log(n-j). \qquad (2.2.67)$$

5^0. $0 \le x \le 2\pi-\frac{1}{\sqrt{n}}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x учун (2.2.66) ва (2.2.67) муносабатларга асосан k индексни шундай аниқлаш мумкинки, бунда

$$S_k(x) \ge C_3\log n$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ниҳоят,

$$\Phi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}M_m\varphi_{n_m}(x)$$

деб оламиз.

Агар M_n сонлардан иборат қатор абсолют абсолют яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\Phi(x)$ функция жамланувчи бўлади. Агар n_m индекслар етарлича тез ўсадиган бўлса, у ҳолда $\Phi(x)$ функциянинг Фурье қатори ҳамма жойда узоқлашувчи бўлади. Бу охирги икки фактни исботлаш учун А.Н. Колмогоровнинг юқоридаги ишини қўллаш мумкин бўлади[1].

[1] *Kolmogoroff A.* Une serie de Fourier – Lebesgue divergente Presque partout. – Fund. Math., 1923, vol. 4, p. 324-328 ёки бу ҳақида А.Н. Колмогоров, Избранные труды, Математика и механика, М.: “Наука”, 1985. 8-11 бетларидан қаранг.

3-§. Каррали тригонометрик Фурье қатори

1. Каррали тригонометрик Фурье қатори тушунчаси. Каррали тригонометрик Фурье қаторининг тўғри бурчакли ва сферик қисмий йиғиндилари. N–ўлчамли $-\pi \le x_k \le \pi$ $(k=1,2,...,N)$ кубда аниқланган ва интеграллланувчи N ўзгарувчили $f(x_1,x_2,...,x_N)$ функция берилган бўлсин. Бу кубни $T^N = \{x \in R^N : -\pi \le x_k \le \pi,\ k=1,2,...,N\}$ символи орқали белгилаймиз. Бундай функцияларнинг каррали тригонометрик қаторини бирданига комплекс шаклда ёзиш қулайдир.

$x=(x_1,x_2,...,x_N)$ – орқали координаталари $x_1,x_2,...,x_N$ – ҳақиқий сонлар бўлган векторни, $n=(n_1,n_2,...,n_N)$ – орқали эса, координаталари $n_1,n_2,...,n_N$ – бутун сонлар бўлган векторни белгилаймиз.

$f(x)=f(x_1,x_2,...,x_N)$ *функциянинг каррали тригонометрик Фурье қатори* деб

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \cdot e^{inx} \qquad (2.3.1)$$

шаклидаги қаторга айтилади, бунда *Фурье коэффициентлари* деб аталувчи $\hat{f}_n$ сонлар

$$\hat{f}_n = \hat{f}_{n_1 n_2 ... n_N} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{T^N} \int f(y_1,...,y_N) \cdot e^{-i(n_1y_1+...+n_Ny_N)} dy_1...dy_N \qquad (2.3.2)$$

тенглик орқали аниқланади. nx символ n ва x векторларнинг скаляр кўпайтмаси бўлиб $n_1x_1+...+n_Nx_N$ йиғиндига тенг.

Маълумки, (2.3.1) – каррали тригонометрик Фурье қаторини мос равишда $x_1,x_2,...,x_N$ ўзгарувчилар бўйича олинган бир ўлчовли тригонометрик системалар элементларининг мумкин бўлган барча кўпайтмалари ёрдамида ҳосил қилинган ортонормал система бўйича олинган Фурье қатори деб қараш мумкин. Бу ортонормал системани каррали тригонометрик система деб аташ қабул қилинган.

Ҳар қандай ортонормал система сингари, каррали тригонометрик системалар учун ҳам, Бессель тенгсизлиги ўринли бўлиб, бу тенгсизлик

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}_n\right|^2 \le \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{T^N} \int f^2(x_1, x_2, ..., x_N) dx_1 ... dx_N \qquad (2.3.3)$$

кўринишда бўлади, бунда $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ функция N–ўлчовли $T^N = \{x \in R^N : -\pi \le x_k \le \pi,\ k = 1, 2, ..., N\}$ кубда узлуксиз бўлган ихтиёрий функциядир.

Каррали тригонометрик Фурье қаторининг яқинлашиши ҳақидаги масалани қараймиз. Агар бу қатор берилган $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ нуқтада абсолют яқинлашувчи бўлмаса, у ҳолда унинг яқинлашиши масаласи Риман теоремасига кўра, қатор ҳадларининг жойлашиш тартибига боғлиқ бўлади. Бу эса, қаторни $n_1, n_2, ..., n_N$ индекслар бўйича жамлаш тартибига боғлиқ эканлигини билдиради.

Каррали тригонометрик Фурье қаторини жамлашнинг иккита усули кенг қўлланилади. Бу усуллар сферик ва тўғри бурчакли жамлаш усулларидир.

(2.3.1) каррали тригонометрик Фурье қаторининг *сферик қисмий йиғиндиси* деб

$$S_\lambda(x, f) = \sum_{|n| \le \lambda} \hat{f}_n e^{inx}$$

кўринишдаги йиғиндига айтилади, бу йиғинди $|n| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + ... + n_N^2} \le \lambda$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $n_1, n_2, ..., n_N$ бутун қийматлар бўйича олинган.

Агар $\lim\limits_{\lambda \to \infty} S_\lambda(x, f)$ *лимит мавжуд бўлса, у ҳолда берилган x нуқтада сферик усул билан* (3.3.1) *каррали тригонометрик Фурье қатори жамланувчи* деб айтилади.

(2.3.1) каррали тригонометрик Фурье қаторининг *тўғри бурчакли қисмий йиғиндиси* деб

$$S_{m_1 m_2 \dots m_N}(x,f) = \sum_{n_1=-m_1}^{m_1} \dots \sum_{n_N=-m_N}^{m_N} \hat{f}_n \cdot e^{inx}$$

кўринишдаги йиғиндига айтилади. *Агар*

$$\lim_{\substack{m_1 \to \infty \\ m_2 \to \infty \\ \dots \\ m_N \to \infty}} S_{m_1 m_2 \dots m_N}(x,f)$$

лимит (ҳар бир $m_1, m_2, \dots, m_N$ *индексларнинг боғлиқмас ҳолда чексизликка интилишида) мавжуд бўлса, у ҳолда берилган х нуқтада тўғри бурчакли усул (ёки Принсгейм усули) билан* (2.3.1) *каррали тригонометрик Фурье қатори жамланувчи* деб айтилади.

Ҳар иккала жамлаш усули ўзининг афзалликларига ва камчиликларига эга. Каррали тригонометрик Фурье қаторини ортонормал система бўйича Фурье қатори деб қарасак, табиийки, унинг ҳадлари йиғиндисини $|n|$ нинг ўсиш тартибида жойлаштириш керак бўлади ва сферик қисмий йиғиндилар билан иш кўриш керак.

Тўғри бурчакли қисмий йиғиндилар каррали даражали қаторларнинг яқинлашиш соҳасининг чегараси атрофида унинг ҳолатини тадқиқ этишда қўлланилади. Шуни таъкидлаш керакки, қатор йиғиндисини тўғри бурчакли қисмий йиғинди лимити сифатида аниқланганда бу қаторнинг қисмий йиғиндиларининг чексиз тўпламига ҳеч кандай шарт қўйилмайди.

Каррали тригонометрик Фурье қаторининг яқинлашиш шартларини ифодалашдан олдин N ўзгарувчили функциялар силлиқлигининг айрим характеристикаларини аниқлаймиз.

2. N **ўзгарувчили функция учун узлуксизлик модули ва Гёльдер синфлари.** $N-$ўлчамли D соҳада аниқланган ва узлуксиз N ўзгарувчили $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ функция берилган бўлсин.

1–таъриф. *Ҳар бир* $\delta > 0$ *учун* $f(x)$ *функциянинг* D *соҳадаги узлуксизлик модули деб,* $\rho(x', x'')$ *масофа* δ *дан кичик бўладиган* D *соҳага тегишли барча* x' *ва* x'' *нуқталар тўпламида* $|f(x') - f(x'')|$ *айирма модулининг аниқ юқори чегарасига айтилади ва қуйидагича белгиланади:*

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{\rho(x',x'')<\delta \\ x',\, x'' \in D}} |f(x') - f(x'')|$$

2–таъриф. *Агар* $0 < \chi < 1$ *интервалдан олинган ҳар бир* χ *учун* D *соҳада* $f(x)$ *функциянинг узлуксизлик модули* $\omega(\delta, f) = O\left(\delta^{\chi}\right)$ *тартибга эга бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *функция* D *соҳада шу* χ *кўрсаткич билан* C^{χ} *– Гёльдер синфига тегишли деб айтилади.*

1–Эслатма. *Агар ихтиёрий берилган* l *натурал сон учун* $|\beta| \le l$ *бўлган* β*–тартибли* $D^{\beta} f(x)$ *хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *функция* C^{l} *синфга тегишли деб айтилади.*

Энди $\alpha -$ихтиёрий натурал бўлмаган мусбат сон бўлсин. Бу сонни биз ҳамма вақт $\alpha = l + \chi$ шаклида тасвирлашимиз мумкин, бунда $l-$ манфиймас бутун сон, $\chi-$ эса, $0 < \chi < 1$ интервалдан олинган сон.

3–таъриф. *Агар* $f(x)$ *функциянинг* $l-$ *тартибли барча хусусий ҳосилалари* D *соҳада узлуксиз ва ҳар бир* $l-$ *тартибли хусусий ҳосила* $C^{\chi}(D)$ *синфга тегишли бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *функция* D *соҳада* $\alpha > 0$ *кўрсаткич билан* C^{α} *– Гёльдер синфига тегишли деб айтилади ва* $f(x) \in C^{\alpha}(D)$ *шаклида ёзилади.*

3. Каррали тригонометрик Фурье қаторининг яқинлашиш шартлари. Каррали тригонометрик Фурье қаторининг абсолют ва текис яқинлашишининг содда шартларини ўрнатамиз.

1-Теорема. *Агар $f(x)$ функция ҳар бир ўзгарувчи бўйича 2π давр билан бутун R^N фазога давом эттирилган ва R^N да $s=\left[\frac{N}{2}\right]+1$ тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг каррали тригонометрик Фурье қатори шу функцияга бутун R^N фазода абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади, бунда $\left[\frac{N}{2}\right]-$ орқали $\frac{N}{2}$ соннинг бутун қисми олинган.*

Исбот. $\left(\widehat{\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}}\right)_n$ орқали $\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$ ҳосиланинг $n=(n_1,.....,n_N)$ номерли Фурье коэффициентларини белгилаймиз. Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб,

$$\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_n = i n_k \hat{f}_n, \qquad \left(\widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}}\right)_n = -n_k^2 \hat{f}_n$$

тенгликларни ҳосил қиламиз, бунда $k=1,2,...,N$ бўлган ихтиёрий сон. Шунга кўра,

$$-\sum_{k=1}^{N}\left(\widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}}\right)_n = \hat{f}_n\left(n_1^2+...+n_N^2\right)$$

бўлади. $s=\left[\frac{N}{2}\right]+1$ сон жуфт бўлсин, яъни $s=2m$. У ҳолда

$$\left(\widehat{(-\Delta+1)^m f}\right)_n = \hat{f}_n\left(|n|^2+1\right)^m$$

ва бундан эса,

$$\left|\hat{f}_n\right| = \left(\left|n_1\right|^2 + \ldots + \left|n_N\right|^2 + 1\right)^{-m} \left|\left(\widehat{(-\Delta + 1)^m f}\right)_n\right| \qquad (2.3.4)$$

тенглик келиб чиқади. Бу

$$\left|\hat{f}_n\right| = \left(\left|n_1\right|^2 + \ldots + \left|n_N\right|^2 + 1\right)^{-m} \cdot$$

$$\cdot \left| \sum_{m_0+m_1+\ldots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1!\ldots m_N!} \left(\widehat{\frac{\partial^{2m_1+\ldots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1}\ldots\partial x_N^{2m_N}}}\right)_n \right|$$

тенгликдан эса, бирданига

$$\left|\hat{f}_n\right| \le \left(\left|n_1\right|^2 + \ldots + \left|n_N\right|^2 + 1\right)^{-m} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m_0+m_1+\ldots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1!\ldots m_N!} \left| \left(\widehat{\frac{\partial^{2m_1+\ldots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1}\ldots\partial x_N^{2m_N}}}\right)_n \right| \qquad (2.3.5)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу ерда ўнг томондаги йиғинди барча манфиймас бутун $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_N$ сонлар $m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_N = m$ шартни қаноатлантирганда олинган. Бу йиғиндидаги қўшилувчилар сони $(N+1)^m$ га тенг бўлади. (2.3.5) дан ўз навбатида

$$\left|\hat{f}_n\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|n_1\right|^2 + \ldots + \left|n_N\right|^2 + 1\right)^{-2m} +$$

$$+ \frac{(N+1)^m}{2} \sum_{m_0+m_1+\ldots+m_N=m} \frac{m!}{m_0!m_1!\ldots m_N!} \left| \left(\widehat{\frac{\partial^{2m_1+\ldots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1}\ldots\partial x_N^{2m_N}}}\right)_n \right|^2 \qquad (2.3.6)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу ерда биз

$$|a|\cdot|b|\le\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\quad \text{ва}\quad \left(|a_1|+\ldots+|a_p|\right)^2\le p\left(a_1{}^2+\ldots+a_p{}^2\right)$$

тенгсизликдан фойдаландик.

$s=\frac{N}{2}+\varepsilon$, бунда N сони жуфт бўлганда $\varepsilon=1$, N сони тоқ бўлганда $\varepsilon=\frac{1}{2}$ бўлиб,

$$\left(|n_1|^2+\ldots+|n_N|^2+1\right)^{-2m}=\left(|n_1|^2+\ldots+|n_N|^2+1\right)^{-s}=$$

$$=\left(|n_1|^2+\ldots+|n_N|^2+1\right)^{-\frac{N}{2}-\varepsilon}\le\left(|n_1|^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}}\ \ldots\ \left(|n_N|^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, биз

$$\left|\hat{f}_n\right|\le\frac{1}{2}\left(|n_1|^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}}\ \ldots\ \left(|n_N|^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}}+$$

$$+\frac{(N+1)^m}{2}\sum_{m_0+m_1+\ldots+m_N=m}\frac{m!}{m_0!m_1!\ldots m_N!}\left|\left(\widehat{\frac{\partial^{2m_1+\ldots+2m_N}f}{\partial x_1^{2m_1}\ldots\partial x_N^{2m_N}}}\right)_n\right|^2 \qquad (2.3.7)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

(2.3.1) каррали тригонометрик Фурье қатори абсолют ва текис яқинлашувчи бўлиши учун Вейерштрасс аломатига кўра,

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}_n\right|$$

сонли қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги етарлидир. Ҳар бир k учун $\sum_{n_k=-\infty}^{\infty} \left(|n_k|^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}}$ сонли қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги ва ҳар бир $m_0, m_1, m_2, ..., m_N$ учун

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial^{2m_1+...+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} ... \partial x_N^{2m_N}} \right)^{\wedge}_n \right|^2$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги эса Бессель тенгсизлигига кўра, $\frac{\partial^{2m_1+...+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1} ... \partial x_N^{2m_N}}$ функцияларнинг узлуксиз эканлигидан келиб чиқади. Энди $s = \left[\frac{N}{2}\right]+1$ сон тоқ бўлсин, яъни $s = 2m+1$. У ҳолда

$$\left((-\Delta+1)^m f\right)^{\wedge}_n = \hat{f}_n \left(|n|^2+1\right)^m$$

тенгликда f ўрнига $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ функцияни қўйсак,

$$\left((-\Delta+1)^m \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^{\wedge}_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^{\wedge}_n \left(|n|^2+1\right)^m = i n_k \hat{f}_n \left(|n|^2+1\right)^m$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенгликлардан, эса қўшиш йўли билан

$$\left|\hat{f}_n\right| \left(|n|^2+1\right)^m \left(|n_1|+|n_2|+...|n_N|+1\right) =$$

$$= \left(\left| \left((-\Delta+1)^m f\right)^{\wedge}_n \right| + \sum_{k=1}^{N} \left| \left((-\Delta+1)^m \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^{\wedge}_n \right| \right)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан, эса

$$\left|\hat{f}_n\right| = \left(|n|^2+1\right)^{-m}\left(|n_1|+|n_2|+\ldots|n_N|+1\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\left|\left((-\Delta+1)^m f\right)^{\wedge}_n\right| + \sum_{k=1}^{N}\left|\left((-\Delta+1)^m \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^{\wedge}_n\right|\right) \qquad (2.3.4')$$

тенглик келиб чиқади. Бу

$$\left|\hat{f}_n\right| = \left(|n|^2+1\right)^{-m}\left(|n_1|+|n_2|+\ldots|n_N|+1\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\left|\sum_{m_0+m_1+\ldots+m_N=m}\frac{m!}{m_0!m_1!\ldots m_N!}\left(\frac{\partial^{2m_1+\ldots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1}\ldots\partial x_N^{2m_N}}\right)^{\wedge}_n\right| +\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{N}\left|\sum_{m_0+m_1+\ldots+m_N=m}\frac{m!}{m_0!m_1!\ldots m_N!}\left(\frac{\partial^{2m_1+\ldots+2m_N}}{\partial x_1^{2m_1}\ldots\partial x_N^{2m_N}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right)^{\wedge}_n\right|\right)$$

тенгликдан эса, бирданига

$$\left|\hat{f}_n\right| \le \left(|n|^2+1\right)^{-m}\left(|n_1|+|n_2|+\ldots|n_N|+1\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{m_0+m_1+\ldots+m_N=m}\frac{m!}{m_0!m_1!\ldots m_N!}\left|\left(\frac{\partial^{2m_1+\ldots+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1}\ldots\partial x_N^{2m_N}}\right)^{\wedge}_n\right|+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{m_0+m_1+...+m_N=m}\frac{m!}{m_0!m_1!\ ...m_N!}\left|\left(\frac{\partial^{2m_1+...+2m_N}}{\partial x_1^{2m_1}...\partial x_N^{2m_N}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right)^{\wedge}_n\right|\Bigg)$$

(2.3.5’)

тенгсизлик келиб чиқади. Бу ерда ўнг томондаги йиғинди барча манфиймас бутун $m_0, m_1, m_2, ..., m_N$ сонлар

$m_0+m_1+m_2+...+m_N=m$ шартни қаноатлантирганда олинган. Бу ҳар бир йиғиндидаги қўшилувчилар сони $(N+1)^m$ га тенг бўлади. (2.3.5’) дан ўз навбатида

$$\left|\hat{f}_n\right|\le\frac{1}{2}\left(|n|^2+1\right)^{-2m}\left(|n_1|+|n_2|+...|n_N|+1\right)^{-2}+$$

$$+(N+1)^m\cdot\left(\sum_{m_0+m_1+...+m_N=m}\frac{m!}{m_0!m_1!\ ...m_N!}\left|\left(\frac{\partial^{2m_1+...+2m_N}f}{\partial x_1^{2m_1}...\partial x_N^{2m_N}}\right)^{\wedge}_n\right|^2+\right.$$

$$\left.+N\cdot\sum_{k=1}^{N}\sum_{m_0+m_1+...+m_N=m}\frac{m!}{m_0!m_1!\ ...m_N!}\left|\left(\frac{\partial^{2m_1+...+2m_N}}{\partial x_1^{2m_1}...\partial x_N^{2m_N}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right)^{\wedge}_n\right|^2\right)$$

(2.3.6’)

тенгсизлик келиб чиқади. Бу ерда биз

$$|a|\cdot|b|\le\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \quad \text{ва} \quad \left(|a_1|+...+|a_p|\right)^2\le p\left(a_1^2+...+a_p^2\right)$$

тенгсизликдан фойдаландик.

$s=\dfrac{N}{2}+\varepsilon$, $s=2m+1$, бунда N сони жуфт бўлганда $\varepsilon=1$, N сони тоқ бўлганда $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ бўлиб,

$$\left(\left|n_1\right|^2+\ldots+\left|n_N\right|^2+1\right)^{-2m}\left(\left|n_1\right|+\left|n_2\right|+\ldots\left|n_N\right|+1\right)^{-2}=$$

$$=\left(\left|n_1\right|^2+\ldots+\left|n_N\right|^2+1\right)^{-\frac{N}{2}-\varepsilon+1}\left(\left|n_1\right|+\left|n_2\right|+\ldots\left|n_N\right|+1\right)^{-2}\leq$$

$$\leq\left(\left|n_1\right|^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}}\ \ldots\ \left(\left|n_N\right|^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, биз

$$\left|\hat{f}_n\right|\leq\frac{1}{2}\left(\left|n_1\right|^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}}\ \ldots\ \left(\left|n_N\right|^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}}+$$

$$+(N+1)^m\cdot\left(\sum_{m_0+m_1+\ldots+m_N=m}\frac{m!}{m_0!m_1!\ldots m_N!}\left|\left(\frac{\partial^{2m_1+\ldots+2m_N}f}{\partial x_1^{2m_1}\ldots\partial x_N^{2m_N}}\right)^{\wedge}_n\right|^2+\right.$$

$$\left.+N\cdot\sum_{k=1}^{N}\sum_{m_0+m_1+\ldots+m_N=m}\frac{m!}{m_0!m_1!\ldots m_N!}\left|\left(\frac{\partial^{2m_1+\ldots+2m_N}}{\partial x_1^{2m_1}\ldots\partial x_N^{2m_N}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right)^{\wedge}_n\right|^2\right)\qquad(2.3.7')$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

(2.3.1) каррали тригонометрик Фурье қатори абсолют ва текис яқинлашувчи бўлиши учун Вейерштрасс аломатига кўра,

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}_n\right|$$

сонли қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги етарлидир. Ҳар бир k учун $\sum\limits_{n_k=-\infty}^{\infty}\left(\left|n_k\right|^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{N}}$ сонли қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги ва ҳар бир $m_0, m_1, m_2, ..., m_N$ учун

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{\partial^{2m_1+...+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1}...\partial x_N^{2m_N}}\right)^{\wedge}_n\right|^2 \quad \text{ва} \quad \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{\partial^{2m_1+...+2m_N}}{\partial x_1^{2m_1}...\partial x_N^{2m_N}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right)^{\wedge}_n\right|^2$$

қаторнинг ҳар бир k учун яқинлашувчи бўлишлиги эса, Бессель тенгсизлигига кўра, $\frac{\partial^{2m_1+...+2m_N} f}{\partial x_1^{2m_1}...\partial x_N^{2m_N}}$ ва $\frac{\partial^{2m_1+...+2m_N}}{\partial x_1^{2m_1}...\partial x_N^{2m_N}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ функцияларнинг ҳар бир k учун узлуксиз эканлигидан келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

2–Эслатма. *Бу теоремани умумлаштирувчи қуйидаги теорема ҳам ўринлидир.*

2-Теорема.[1] *Агар N ўзгарувчили $f(x_1,...,x_N)$ функция ҳар бир ўзгарувчи бўйича 2π даврга эга ва R^N фазода $\alpha > \frac{N}{2}$ бўлган кўрсаткич билан C^α – Гёльдер синфига тегишли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг каррали тригонометрик Фурье қатори шу функцияга бутун R^N фазода абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади.*

Каррали тригонометрик Фурье қаторининг абсолютмас яқинлашиш шартларини аниқлашда бир оз нозик бўлган техникаларни қўллашни талаб этади.

Каррали тригонометрик Фурье қаторини сферик ва тўғри бурчакли усуллар билан жамлаш шартларини ифодаловчи теоремаларни исботсиз келтирамиз.

3-Теорема. (В.А. Ильин). *Агар $N \geq 2$ ўзгарувчили $f(x_1,...,x_N)$ функция ҳар бир ўзгарувчи бўйича 2π даврга эга ва*

[1] Бу теореманинг исботи бевосита В.А. Ильин ва Ш.А. Алимовларнинг “Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов, I ” (Дифференциальные уравнения, т.7, № 4, 1971, стр. 670-710) ишида исбот қилинган 3.1 леммадан келиб чиқади.

R^N фазода $\alpha \geq \frac{N-1}{2}$ бўлган кўрсаткич билан $C^\alpha -$ Гёльдер синфига тегишли бўлса, у ҳолда каррали тригонометрик Фурье қаторининг сферик қисмий йиғиндиси шу $f(x_1,...,x_N)$ функцияга бутун R^N фазода текис яқинлашувчи бўлади.[1]

4-Теорема. (В.А. Ильин). *$0 < \alpha < \frac{N-1}{2}$ бўлган ихтиёрий сон ва $N-$ўлчамли T^N кубдан олинган ихтиёрий x_0 нуқта учун R^N фазода аниқланган ҳар бир ўзгарувчи бўйича 2π даврга эга ва $C^\alpha -$Гёльдер синфига тегишли ҳамда x_0 нуқтанинг $\delta -$атрофида нолга тенг бўлган $N \geq 2$ ўзгарувчили $f(x_1,...,x_N)$ функция мавжуд бўлиб, унинг каррали тригонометрик Фурье қаторининг сферик қисмий йиғиндиси бу x_0 нуқтада лимитга эга бўлмайди.*[2]

Бу келтирилган 3 ва 4 – теоремалар даврий $f(x_1,...,x_N)$ функция каррали тригонометрик Фурье қаторининг сферик қисмий йиғиндиси C^α – Гёльдер синфида тугалланган шартни ифода этади. Бу теоремаларга кўра, агар $\alpha \geq \frac{N-1}{2}$ бўлган кўрсаткич билан C^α – Гёльдер синфига тегишли функция учун каррали тригонометрик Фурье қаторининг сферик қисмий йиғиндиси шу $N \geq 2$ ўзгарувчили $f(x_1,...,x_N)$ функцияга бутун R^N фазода текис яқинлашувчи бўлади ва агар $0 < \alpha < \frac{N-1}{2}$ бўлса, у ҳолда каррали тригонометрик Фурье қаторининг сферик қисмий йиғиндиси учун ҳаттоки локализация принципи ҳам ўринли бўлмаслиги келиб чиқади, яъни $N \geq 2$ ўзгарувчили $f(x_1,...,x_N)$ функция x_0 нуқтанинг $\delta -$атрофида қанча силлиқ

---

[1] Бу теореманинг исботи В.А. Ильиннинг "Проблемы локализации и сходимости рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа" (Успехи математических наук, т.23, вып. 2, 1968, стр. 61-120) иши ва олдинги сноскадаги В.А. Ильин ва Ш.А. Алимовларнинг ишида исбот қилинган бир мунча умумий бўлган тасдиқлардан келиб чиқади.

[2] Бу теореманинг исботи В.А. Ильиннинг юқоридаги сноскада кўрсатилган ишининг 3-бобида исбот қилинган бир мунча умумий бўлган тасдиқнинг хусусий ҳолидир.

бўлмасин унинг $0<\alpha<\dfrac{N-1}{2}$ бўлган кўрсаткич билан C^{α} – Гёльдер синфига тегишли бўлишлиги шу функция каррали тригонометрик Фурье қаторининг сферик қисмий йиғиндисининг шу x_0 нуқтада лимитга эга бўлишини таъминлай олмайди.

Даврий $f(x_1,...,x_N)$ функция каррали тригонометрик Фурье қаторининг тўғри бурчакли қисмий йиғиндисининг C^{α} – Гёльдер синфидаги тугалланган шартини ифода этувчи теорема Л.В. Жижиашвили томонидан исбот қилинган.[1]

5-Теорема. (Л.В. Жижиашвили) *Агар N ўзгарувчили $f(x_1,...,x_N)$ функция ҳар бир ўзгарувчи бўйича 2π даврга эга ва $\alpha>0$ бўлган кўрсаткич билан R^N фазода C^{α} – Гёльдер синфига тегишли бўлса, у ҳолда каррали тригонометрик Фурье қаторининг тўғри бурчакли қисмий йиғиндиси шу $f(x_1,...,x_N)$ функцияга бутун R^N фазода текис яқинлашувчи бўлади.*

3–Эслатма. *Шуни таъкидлаш керакки, $N\geq 2$ ўзгарувчили $f(x_1,...,x_N)$ функциянинг биргина узлуксизлиги каррали тригонометрик Фурье қаторининг тўғри бурчакли қисмий йиғиндисининг на фақат текис яқинлашишини таъминламаслиги, ҳаттоки локализация принципининг ҳам ўринли бўлишини таъминлай олмаслиги 1928 йилда Л. Тонелли томонидан кўрсатилган.[2] Бу ерда каррали тригонометрик Фурье қаторининг тўғри бурчакли қисмий йиғиндиси учун локализация принципи ихтиёрий x_0 нуқта учун R^N фазодан аниқланган ҳар бир ўзгарувчи бўйича 2π даврга эга ва шу берилган x_0 нуқтанинг $\delta-$атрофида нолга тенг бўлган $N\geq 2$ ўзгарувчили $f(x_1,...,x_N)$ функция мавжуд бўлиб, унинг каррали тригонометрик Фурье қаторининг тўғри бурчакли қисмий йиғиндиси бу x_0 нуқтада узоқлашувчи бўлади.*

Умуман олганда

$$\sum_{n\in Z^N} c_n\cdot e^{inx} \tag{2.3.8}$$

---

[1] Л.В. Жижиашвили, О сопряженных функциях и тригонометрических рядах. Докторская диссертация, Москва, МГУ, 1967.

[2] Л. Тонелли – итальян математиги (1885–1946).

шаклидаги *каррали тригонометрик қаторлар*, бунда c_n – ихтиёрий комплекс сонлар, $x=(x_1,x_2,...,x_N)$ – орқали координаталари $x_1,x_2,...,x_N$ – ҳақиқий сонлар бўлган векторни, $n=(n_1,n_2,...,n_N)$ – орқали эса, координаталари $n_1,n_2,...,n_N$ – бутун сонлар бўлган векторни белгиласак, бу қаторлар учун ҳам ҳар хил жамлаш усулларини киритишимиз мумкин бўлади.

Каррали тригонометрик қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масалани қараганда ҳам, агар бу қатор берилган $x=(x_1,x_2,...,x_N)$ нуқтада абсолют яқинлашувчи бўлмаса, у ҳолда унинг яқинлашиши масаласи Риман теоремасига кўра, қатор ҳадларининг жойлашиш тартибига боғлиқ бўлади. Бу эса, қаторни $n_1,n_2,...,n_N$ индекслар бўйича жамлаш тартибига боғлиқ эканлигини билдиради.

Қаралган Фурье қатори сингари, (2.3.8) каррали тригонометрик қаторнинг $S_m(x)$ *тўғри бурчакли қисмий йиғиндиси* деб

$$S_m(x)=S_{m_1m_2....m_N}(x)=\sum_{n_1=-m_1}^{m_1}...\sum_{n_N=-m_N}^{m_N}c_n\cdot e^{inx} \qquad (2.3.9)$$

кўринишдаги йиғиндига айтилади. *Агар*

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty\\ m_2\to\infty\\ ...\\ m_N\to\infty}} S_{m_1m_2....m_N}(x)$$

лимит (ҳар бир $m_1,m_2,...,m_N$ *индексларнинг боғлиқмас ҳолда чексизликка интилишида, яъни* $\min\limits_{1\le j\le N} m_j\to\infty$ *да) мавжуд бўлса, у ҳолда берилган* x *нуқтада тўғри бурчакли усул (ёки Принсгейм усули) билан* (2.3.8) *каррали тригонометрик қатор яқинлашувчи* деб айтилади.

Бу таъриф “табиий” кўринсада айрим пародоксал хусусиятлардан ҳоли эмас. Шундай бир каррали қаторлар борки, унинг айрим чексиз сондаги қисмий йиғиндиси чексиз бўлса ҳам, бу шу қаторнинг яқинлашишига таъсир кўрсатмайди. Масалан,

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{n_1 n_2}\cdot e^{i(n_1x_1+n_2x_2)} \qquad (2.3.10)$$

икки каррали қаторни қараймиз. Бу қаторнинг коэффициентлари $c_{n_1 n_2}=n_1^{\,2}(\delta_{n_2 0}-\delta_{n_2 2})$ тенглик билан аниқланган, бунда δ_{jk} – Кронекер символлари бўлсин. У ҳолда бу қаторнинг (0,0) нуқтадаги тўғри бурчакли қисмий йиғиндиси

$$S_{m_1 m_2}(0,0)=\sum_{k=-m_1}^{m_1}\sum_{l=-m_2}^{m_2} k^2(\delta_{l0}-\delta_{l2})$$

шаклида бўлади. Бу ерда $m_2\geq 2$ учун $S_{m_1 m_2}(0,0)=0$ тенглик ўринли ва шунинг учун (2.3.10) қатор яқинлашувчи бўлади. Аммо $m_1\to\infty$ да $S_{m_1 1}(0,0)=\sum_{k=-m_1}^{m_1} k^2\to+\infty$ бўлади.

Бу мисол кўрсатадики, қаторнинг тўғри бурчакли усул билан яқинлашишидан унинг коэффициентларининг нолга интилиши (ҳаттоки унинг чегараланганлиги ҳам) келиб чиқмас экан.

(2.3.8) каррали тригонометрик қаторини жамлашнинг яна бир усули *квадрат бўйича бўлиб, бу* $S_k(x)$ *квадратик (*$N\geq 3$ учун *кубик) қисмий йиғинди*

$$S_k(x)=\sum_{n_1=-k}^{k}\ldots\sum_{n_N=-k}^{k} c_n\cdot e^{inx} \qquad (2.3.11)$$

кўринишда аниқланади. *Агар*

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда берилган x нуқтада квадрат бўйича (ёки куб бўйича) (2.3.8) *каррали тригонометрик қатор яқинлашувчи* деб айтилади.

Маълумки, (2.3.11) қисмий йиғинди $m=(k,k,...,k)$ учун (2.3.9) тўғри бурчакли қисмий йиғиндининг хусусий ҳолидан иборат. Шунинг учун тўғри бурчакли усул билан яқинлашишдан квадрат бўйича яқинлашиш келиб чиқади. Акси эса, ўринли эмас. Масалан,

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{n_1n_2}\cdot e^{i(n_1x_1+n_2x_2)} \qquad (2.3.12)$$

икки каррали қаторни қараймиз. Бу қаторнинг коэффициентлари $c_{n_1n_2}=n_1^{\,2}\delta_{n_2 0}-n_2^{\,2}\delta_{n_1 0}$ тенглик билан аниқланган, бунда δ_{jk} – Кронекер символлари бўлсин. У ҳолда бу қатор $(0,0)$ нуқтада квадрат усул бўйича яқинлашади, лекин тўғри бурчакли усул бўйича узоқлашади.

(2.3.8) каррали тригонометрик қаторнинг *доиравий қисмий йиғиндиси (ёки $N\geq 3$ учун шарсимон) қисмий йиғиндиси* деб

$$\tilde{S}_R(x)=\sum_{|n|\leq R} c_n\, e^{inx} \qquad (2.3.13)$$

кўринишдаги йиғиндига айтилади, бу йиғинди $|n|=\sqrt{n_1^2+n_2^2+...+n_N^2}\leq R$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $n_1,n_2,...,n_N$ бутун қийматлар бўйича олинган.

Агар $\lim\limits_{R\to\infty}\tilde{S}_R(x)$ *лимит мавжуд бўлса, у ҳолда берилган x нуқтада доиравий усул (*$N\geq 3$ *учун шарсимон усул) билан* (3.3.8) *каррали тригонометрик Фурье қатори яқинлашувчи* деб айтилади.

Тўғри бурчак бўйича яқинлашишдан доира бўйича яқинлашиш келиб чиқмайди. Мисол сифатида юқорида келтирилган (2.3.10) икки каррали қаторни қараймиз. Бу қаторнинг коэффициентлари $c_{n_1n_2}=n_1^{\,2}(\delta_{n_2 0}-\delta_{n_2 2})$ тенглик билан аниқланган, бунда δ_{jk} – Кронекер символлари бўлсин. Бу қатор $(0,0)$ нуқтада тўғри бурчакли усул билан яқинлашади, лекин $l>2$ натурал сон учун

$$\tilde{S}_l(0,0)=\sum_{n_1{}^2+n_2{}^2\le l^2} c_{n_1n_2}=2l^2\to\infty$$

бўлади, яъни доира усули бўйича узоқлашувчи бўлади. Бундан ташқари, тескариси ҳам ўринли эмас. Доира бўйича яқинлашишдан квадрат бўйича яқинлашиш (шунга кўра тўғри бурчак бўйича яқинлашиш ҳам) келиб чиқмайди. Мисол сифатида (2.3.10) икки каррали қаторни қараймиз. Бу қаторнинг коэффициентлари $c_{5\cdot 2^k,\,0}=-c_{4\cdot 2^k,\,3\cdot 2^k}=k,\ k=1,2,...$ ва барча қолган коэффициентлари эса нолга тенг бўлсин. У ҳолда бу қаторнинг $(0,0)$ нуқтадаги доиравий қисмий йиғиндиси ихтиёрий $R>0$ учун $\tilde{S}_R(0,0)=0$ тенглик ўринли бўлади. Шунга кўра, доира бўйича нолга яқинлашиш келиб чиқади. Бироқ, квадратик қисмий йиғиндиларнинг $S_{4\cdot 2^k}(0,0)=-k$ қисмий кетма-кетлиги $k\to\infty$ да $-\infty$ га интилади.

$N=1$ учун бу келтирилган учала жамлаш усуллари устма-уст тушади.

$\Omega=\{\omega\}$ орқали Z^N тўрнинг қандайдир чекли қисм тўпламларининг қуйидаги иккита хоссани қаноатлантирувчи оиласини белгилаймиз:

1) $\forall\ \omega',\omega''\in\Omega$ учун $\exists\ \omega\in\Omega$ топилиб, бунда $\omega'\cap\omega''\subset\omega$;

2) $\bigcup\limits_{\omega\in\Omega}\omega=Z^N$.

(2.3.8) қаторнинг қисмий $\Omega-$йиғиндисини $S_\omega(x)=\sum\limits_{n\in\omega} c_n e^{inx}$ тенглик орқали аниқлаймиз. Агар $\forall\,\varepsilon>0$ учун шундай бир $\forall\ \ \omega_\varepsilon\in\Omega$ топилиб, бунда $\forall\ \ \omega\in\Omega\left(\omega_\varepsilon\subset\omega\right)\ \Rightarrow\left|S_\omega(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ эканлиги келиб чиқса, у ҳолда (2.3.8) қатор x нуқтада $f(x)$ қийматга $\Omega-$ яқинлашади дейилади.

Агар Ω сифатида барча тўғри тўртбурчаклар (параллелепипедлар), квадратлар (кублар) ва доиралар (шарлар) олинса, у ҳолда мос равишда тўғри тўртбурчакли, квадрат ва доиравий қисмий йиғиндиларга эга бўламиз.

Агар Ω сифатида Z^N тўрнинг барча мумкин бўлган чекли қисм тўпламларининг оиласини қарасак, у ҳолда $\Omega-$ яқинлашувчи қатор фақат абсолют яқинлашувчи қатор бўлади.

Q тўплам R^N фазодан олинган ва координата бошини ўзида сақловчи қандайдир чегараланган тўплам бўлсин. Ω сифатида эса, барча $\{n \in Z^N : \quad n \in \lambda Q\}$, бунда $\lambda > 0$ шаклидаги чекли қисм тўпламларнинг оиласини қараймиз. У ҳолда мос қисмий йиғиндилар

$$S_\lambda(x,Q) = \sum_{n \in \lambda Q \bigcap Z^N} c_n e^{inx} \qquad (2.3.14)$$

шаклга эга бўлади.

Бу ҳолда, агар $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(x,Q)$ мавжуд бўлса, у ҳолда (2.3.8) қатор x нуқтада $\Omega-$ яқинлашувчи бўлади. Хусусан, агар $Q-$бирлик куб ёки бирлик шар бўлса, у ҳолда $S_\lambda(x,Q)$ мос равишда кубик ёки шарсимон қисмий йиғиндини ифода қилади.

Шуни таъкидлаш керакки, $Q-$тўпламни қандай танласа ҳам, бундай берилган яқинлашиш усули тўғри тўртбурчак бўйича яқинлашиши усули билан устма-уст тушмайди.[1]

[1] Бундай жамлаш усуллари ва яқинлашиш турлари ҳақида батафсилроқ Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, I ,II // Успехи математических наук.–М.,1976. -Т.31, № 6. С. 28-83., Успехи математических наук.–М.,1977.-Т.32, № 1. С.107-130. ва Алимов Ш.А., Ашуров Р.Р., Пулатов А.К. Кратные ряды и интеграл Фурье. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., 1989. Том 42. С. 7–104. мақолаларидан билиб олиш мумкин.

4- §. Умумлашган жамлаш усуллари

1. Асосий лемма. Умумий шаклдаги λ параметр қатнашган

$$J(\lambda)=\int_0^a g(t)\Phi(t,\lambda)dt, \quad a>0 \tag{2.4.1}$$

интегрални қараймиз. Параметрнинг ўзгариш соҳаси қандайдир $\Lambda=\{\lambda\}$ тўплам бўлсин. $\Phi(t,\lambda)$ функция $t\in[0,a]$ ва $\lambda\in\Lambda$ учун аниқланган бўлиб, ҳар бир λ ўзгармас учун хос маънода t бўйича интегралланувчи бўлсин. Бундан ташқари, $\Phi(t,\lambda)$ функцияга қуйидаги учта талабни қўямиз:

1^0. $\Phi(t,\lambda)\geq 0$;

2^0. $\lambda\in\Lambda$ учун $\int_0^a \Phi(t,\lambda)dt=1$;

3^0. $0<\delta<a$ бўлган ихтиёрий δ учун $\lambda\to\omega$ да $M(\delta,\lambda)=\sup\limits_{t\geq\delta}\Phi(t,\lambda)$ миқдор нолга интилади.

Бу шартларни қаноатлантирувчи Φ функцияга мусбат ядро деб атаймиз.

1-лемма. *Агар $\Phi(t,\lambda)$ мусбат ядро, $g(t)-$ ихтиёрий абсолют интегралланувчи функция бўлиб, $g(+0)$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{\lambda\to\omega}J(\lambda)=g(+0)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. 2^0 тенгликка кўра,

$$g(+0)=\int_0^a g(+0)\Phi(t,\lambda)dt$$

тенглик ўринли бўлиб, уни (2.4.1) дан ҳадма-ҳад айирсак,

$$J(\lambda)-g(+0)=\int_0^a\left[g(t)-g(+0)\right]\Phi(t,\lambda)dt$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ сонни олиб,

$$\left|g(t)-g(+0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик $0 < t \le \delta$ $(0 < \delta < a)$ учун ўринли бўладиган қилиб $\delta = \delta(\varepsilon)$ сонни топамиз ва олдинги интегрални иккита интеграллар йиғиндиси шаклида ёзамиз:

$$\int_0^a = \int_0^\delta + \int_\delta^a = J_1 + J_2 .$$

Биринчи интеграл учун 1^0 ва 2^0 ни ҳисобга олиб,

$$|J_1| \le \int_0^\delta |g(t) - g(+0)| \Phi(t, \lambda) dt < \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\delta \Phi(t, \lambda) dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

баҳолашни ҳосил қиламиз. Бундан ташқари, бу баҳолаш λ га боғлиқ эмас. Иккинчи томондан,

$$|J_2| \le \int_\delta^a |g(t) - g(+0)| \Phi(t, \lambda) dt \le M(\delta, \lambda) \int_0^a |g(t) - g(+0)| dt \qquad (2.4.2)$$

бўлгани учун, 3^0 га кўра, $\lambda \to \omega$ да $J_2 \to 0$ бўлади. Шунинг учун λ параметр ω га етарлича яқин бўлса, у ҳолда $|J_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ бўлади.

Юқоридагиларни бирлаштириб,

$$|J(\lambda) - g(+0)| < \varepsilon$$

эканлигини ҳосил қиламиз.

Юқоридаги келтирилганларга яна қуйидагича қўшимча киритиш мумкин.

2-лемма. *g функция t ўзгарувчидан ташқари x $(0 \le x \le a)$ ўзгарувчига ҳам боғлиқ бўлиб, ҳар бир x ўзгармас учун 1-леммадаги шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда, агар*

1) $g(t, x)$ функция барча t ва x учун текис чегараланган:

$$|g(t, x)| \le L$$

ва

2) $g(t, x)$ функция $g(+0, x)$ га x га нисбатан текис интилса, у ҳолда

$$J(\lambda, x) = \int_0^a g(t, x) \Phi(t, \lambda) dt$$

интеграл $\lambda \to \omega$ да $g(+0, x)$ лимитга x ўзгарувчига нисбатан текис интилади.

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, келтирилган 2) шартга кўра, δ сонни x ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган ҳолда шундай танлаб олиш мумкин бўлиб, юқоридагидек 1) шартга кўра

$$\left|g(t,\, x) - g(+0,\, x)\right| \le 2L$$

эканлиги келиб чиқади ва (2.4.2) тенгсизликни

$$\left|J_2\right| \le 2aLM(\delta,\, \lambda)$$

тенгсизлик билан алмаштириш мумкин, бунда тенгсизликнинг ўнг томони x- ўзгарувчига боғлиқ эмас. Бундан эса, λ нинг ω га яқин қийматлари учун

$$\left|J_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик ва

$$\left|J(\lambda,\, x) - g(+0,\, x)\right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг барча x қийматлар учун текис бажарилиши келиб чиқади.

2. Пуассон-Абель методи бўйича Фурье қаторини жамлаш.

$f(x)$ функция 2π даврли даврий функция бўлиб, ихтиёрий чекли оралиқда абсолют интегралланувчи бўлсин. Шу функциянинг

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \qquad (2.4.3)$$

Фурье қаторини қараймиз. Ҳар бир тайинланган x учун унга Пуассон-Абель умумлашган жамлаш усулини қўллаймиз. Шу мақсадда қаторнинг ҳар бир ҳадини r^m га кўпайтириб,

$$f(r,\, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \qquad (2.4.4)$$

қаторни тузамиз, бунда $0 < r < 1$. Маълумки, $m \to \infty$ да a_m ва b_m коэффициентлар нолга интилади, шунга кўра улар чегаралангандир:

$$\left|a_m\right| \le K\,,\ \left|b_m\right| \le K \quad (K = const).$$

Бундан эса, (2.4.4) қаторнинг бевосита $2K\sum_{m=0}^{\infty} r^m$ прогрессия билан баҳоланиши ва шунга кўра x ўзгарувчига нисбатан текис яқинлашиши келиб чиқади.

$f(r,\,x)$ йиғиндининг $r \to 1$ даги ҳолатини текширишни яхшилаш мақсадида уни интеграл шаклида ёзамиз. Агар (2.4.4) ифодада a_m ва b_m коэффициентларни унинг интеграл ифодалари

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos mu\,du, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin mu\,du$$

билан алмаштирсак, аввал

$$f(r,\,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos m(u-x)du$$

ифодани, бундан эса

$$f(r,\,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m(u-x)\right]du$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу ерда келтирилган қатор йиғиндиси учун

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m(u-x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}$$

тенгликнинг маълум эканлигидан

$$f(r,\,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}du \qquad (2.4.5)$$

формулани ҳосил қиламиз. Одатда бу ажойиб интеграл Пуассон интеграли деб аталиб, анализнинг кўпгина масалаларида муҳим рол ўйнайди. (2.4.4) кўринишидаги қатор ва (2.4.5) кўринишдаги интеграл Пуассон томонидан *“умумлашган жамлаш”* ҳақидаги ғояларнинг пайдо бўлгунига қадар мукаммал бўлмасада ўрганилган эди. Пуассон интегралининг аниқ назарияси Шварц томонидан берилган.

1-теорема (Шварц теоремаси). *$f(x)$ функция 2π даврли даврий ва ихтиёрий чекли оралиқда абсолют интегралланувчи функция учун қаралаётган x нуқтада ўнг ва чап $f(x \pm 0)$ лимитлар мавжуд бўлсин. У ҳолда*

$$\lim_{r\to 1-0} f(r,\,x) = \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}du =$$

$$= \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad (2.4.6)$$

тенглик ўринли. Хусусан, узлуксизлик нуқтасида бу лимит $f(x)$ *функция қийматига тенг.*

Агарда $f(x)$ *функция ҳамма жойда узлуксиз бўлса, у ҳолда* $f(r, x)$ *функция x ўзгарувчига нисбатан* $f(x)$ *функцияга текис яқинлашади.*

Исбот. Дирихле интегралида алмаштириш бажарилгани сингари Пуассон интегралида ҳам алмаштириш бажариб,

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t) + f(x-t)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}dt \qquad (2.4.7)$$

формулани ҳосил қиламиз. Юқоридаги 2-леммани қўллаш учун

$$\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = g(t, x)$$

деб, ядро сифатида

$$\Phi(t, r) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \qquad (2.4.8)$$

Пуассон ядроси деб аталувчи функцияни оламиз. Бу ерда λ параметр ўрнини r ўйнайди, унинг ўзгариш соҳаси $[0, 1)$ оралиқ бўлиб, $\omega = 1$ бўлади. Энди Φ функциянинг мусбат ядро учун қўйилган шартларни қаноатлантиришини кўрсатамиз. Бунинг учун энг аввало $\Phi(t, r) > 0$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, $r < 1$ бўлгани учун (2.4.8) касрнинг сурати мусбат бўлиб, махражи ҳам мусбат эканлиги уни

$$1 - 2r\cos t + r^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t}{2} \qquad (2.4.9)$$

шаклга келтиришдан келиб чиқади. Агар (2.4.7) формулада $f \equiv 1$ деб олсак, у ҳолда $f(r, x) \equiv 1$ бўлиб, бундан эса

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}dt = 1$$

эканлигини ҳосил қиламиз, яъни 2^0 шарт ҳам бажарилади. Энди $0 < \delta \le t \le \pi$ учун $\sin\frac{t}{2} \ge \sin\frac{\delta}{2}$ бўлишини, ҳамда (2.4.9) формулани ҳисобга олиб,

$$1 - 2r\cos t + r^2 \ge 4r\sin^2\frac{\delta}{2}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан эса,

$$M(\delta, r) = \sup_{0<\delta\le t\le\pi} \Phi(t, r) \le \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1-r^2}{4r\sin^2\dfrac{\delta}{2}}$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун ҳар бир тайинланган $0<\delta<\pi$ учун $r \to 1-0$ да $M(\delta, r) \to 0$ бўлади, яъни 3^0 шарт ҳам бажарилади. Бу ҳолда асосий 2–леммага кўра,

$$\lim_{r\to 1-0} f(r, x) = \lim_{t\to +0} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

тенгликка эга бўламиз. Энди $f(x)$ функция ҳамма жойда узлуксиз бўлсин. У ҳолда унинг чегараланган бўлишлиги зарурдир, яъни $|f(x)| \le K$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шу билан бирга

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\right| \le K$$

тенгсизлик ҳам келиб чиқади. Бундан ташқари $f(x)$ функциянинг текис узлуксизлигига кўра,

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$$

ифода $t \to +0$ да ўзининг лимитик қиймати $f(x)$ функцияга x ўзгарувчига нисбатан текис интилади. Шунга кўра, юқоридаги 2–леммадан теореманинг исботи келиб чиқади.

Демак, исбот қилинган теоремага кўра, x нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз ёки ҳеч бўлмаганда биринчи тур узилишга эга бўлган ҳолда (2.4.3) Фурье қатори Пуассон-Абель методи бўйича жамланади, бундан ташқари қаторнинг *“умумлашган йиғиндиси”*

$$f(x) \quad \text{ёки} \quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

қийматга мос равишда тенг бўлади.

Эслатма. Агар $f(x)$ функция аввал $[-\pi, \pi]$ оралиқда берилган бўлса, у ҳолда даврий функцияга ўтиш учун $-\pi < x < \pi$ оралиқда аввалгидай қолдириб, $x = \pm\pi$ нуқтадаги қиймати эса Пуассон интегралининг лимити ёки қаторнинг *“умумлашган йиғиндиси”*

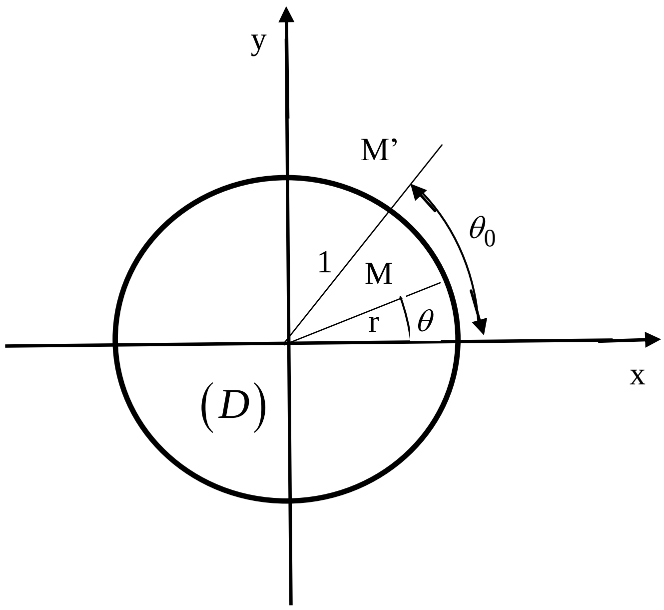
$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

бўлган қийматга тенг қилиб танланади.

3. Доира учун Дирихле масаласини ечиш. Пуассон интегралини Дирихле масаласи деб аталувчи масаланинг энг содда ҳоли учун уни ечишда қўлланиш мумкин. Агар $u = u(x, y)$ функция қандайдир соҳада $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ биринчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари билан бирга узлуксиз ва

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.4.10}$$

*Лаплас тенгламаси*ни қаноатлантирса, у ҳолда гармоник функция деб аталади. Шу билан биргаликда D соҳа чекли соҳа бўлиб, L ёпиқ чизиқ билан чегараланган бўлсин. У ҳолда бу соҳада Дирихле масаласи қуйидагича қўйилади: *L ёпиқ контурнинг нуқталарида узлуксиз бўлган ихтиёрий функция берилган. $\bar{D}$ ёпиқ соҳада узлуксиз ҳамда соҳанинг ички нуқталарида гармоник бўлган шундай $u = u(x, y)$ функцияни топиш керакки, бу топилган функция $\bar{D}$ ёпиқ соҳанинг чегарасида дастлабки берилган функция билан устма-уст тушсин.* D соҳа радиуси 1 га тенг бўлган доирадан иборат бўлганда Дирихле масаласининг ечимини кўрсатамиз. (Бу ҳолга ихтиёрий радиусли айлана учун Дирихле масаласини ечишни ҳам келтириш мумкин).



Демак, берилган доиранинг L айланасидаги нуқталарида қандайдир узлуксиз функция берилган бўлсин. Агар шу L айланадаги берилган нуқта ҳолатини θ қутб бурчаги билан аниқланган бўлса, у ҳолда бу қутб координаталари системасида $2\pi-$даврли $f(\theta)$ узлуксиз функция берилишига тенг кучли бўлади. Бизга D доиранинг ичида ҳам r,φ қутб координаталар системасига ўтиш қулайдир. У ҳолда қутб координаталари системасида (2.4.10) тенгламанинг кўриниши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0 \qquad (2.4.10^*)$$

шаклида бўлади. Шунга кўра биз $r\le 1$ учун $u=u(r,\,\theta)$ узлуксиз функцияни $r<1$ бўлганда (2.4.10*) тенгламани қаноатлантирадиган ва $r=1$ бўлганда $f(\theta)$ функция билан устма-уст тушадиган қилиб аниқлашимиз талаб этилади.

Дастлаб (2.4.10*) тенгламанинг қуйидаги оддий ечимларини аниқлаймиз:

$$r^n\cos n\theta,\;\; r^n\sin n\theta \quad (n=0,1,2,3,...).$$

Бу ечимларни Фурье методи ёрдамида ҳам топиш мумкин. Қийинчиликларсиз кўрсатиш мумкинки, бу келтирилган функциялар (2.4.10*) тенгламани қаноатлантиради. Шу функцияларни мос равишда A_n ва B_n ўзгармас сонларга кўпайтирамиз ва яна A_0 ўзгармас сонни қўшиб, қуйидаги қаторни тузамиз:

$$u(r,\,\theta)=A_0+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta)r^m\,.$$

Бу қатор йиғиндиси $u(r,\,\theta)$ функция ҳам формал равишда (2.4.10*) тенгламани қаноатлантиради. Ниҳоят, $u(1,\,\theta)=f(\theta)$ чегаравий шартни эътиборга олиб,

$$A_0+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta=f(\theta)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $A_0,\;A_m,\;B_m-$ ўзгармаслар $f(\theta)$ функциянинг Фурье коэффициентлари билан аниқланиб, бу ўзгармас сонлар учун

$$A_0=\frac{a_0}{2},\;A_m=a_m,\,B_m=b_m$$

тенгликлар ўринли бўлади. Шунга кўра қўйилган масаланинг ечими формал равишда

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}r^m(a_m\cos m\theta+b_m\sin m\theta) \qquad (2.4.11)$$

қатордан иборат бўлади.

Бу (2.4.11) кўринишда тасвирланган қатор $f(\theta)$ функциянинг Пуассон қаторини аниқлайди ва уни Пуассон интеграли билан алмаштириш мумкин:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-\theta)+r^2}du\,. \qquad (2.4.11^*)$$

Бу қурилган функция ҳақиқатдан ҳам, қўйилган барча талабларни қаноатлантиришини текшириб кўриш қолади.

Аввалом-бор a_m ва b_m коэффициентлар чегараланган бўлиб, (2.4.11) кўринишдаги қаторни $r\le r_0<1$ бўлган ҳолда қараймиз. (2.4.11) қаторни r ва θ ларга нисбатан бир марта ҳамда икки марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин. Ҳадлаб дифференциаллашдан ҳосил бўлган қаторлар r ва θ ларга нисбатан текис яқинлашувчи бўлади. Бу кетма-кет ҳосил бўлган қаторлар $u(r,\theta)$ функциянинг ҳосилаларини ифода қилади ва $r<1$ доирада $u(r,\theta)$ функция Лаплас тенгламасини алмаштиришдан ҳосил бўлган тенгламанинг ечими бўлади, чунки қаторнинг ҳар бир ҳади алмаштирилган Лаплас тенгламасини қаноатлантиради.

Доиранинг ичида (r,θ) ўзгарувчилар бўйича $u(r,\theta)$ функция узлуксиз бўлади. Бу эса (2.4.11) қаторнинг $r\le r_0<1$ учун ҳар иккала ўзгарувчиси бўйича текис яқинлашувчи бўлишлигидан келиб чиқади. Энди $u(r,\theta)$ функция доиранинг ичида жойлашган $M(r,\theta)$ нуқтанинг $M'(1,\theta_0)$ нуқтага яқинлашганда унинг $f(\theta_0)$ қийматга яқинлашишини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, $f(\theta)$ функциянинг узлуксизлигидан ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сони топиладики, $|\theta-\theta_0|<\delta$ шартни қаноатлантирувчи барча θ учун

$$|f(\theta)-f(\theta_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Иккинчи томондан $u(r, \theta)$ функция $r \to 1-0$ интилганда θ ўзгарувчига нисбатан $f(\theta)$ функцияга текис яқинлашувчи бўлишлигидан етарлича кичик δ да $|r-1| < \delta$ учун барча θ ларда

$$|u(r, \theta) - f(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади. Демак, юқорида келтирилган мулоҳазалардан $|r-1| < \delta$ ва $|\theta - \theta_0| < \delta$ бўлганда

$$|u(r, \theta) - f(\theta_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлиги келиб чиқади. Шу билан исбот бўлади.

4. Чезаро–Фейер методи бўйича Фурье қаторини жамлаш. Маълумки, (2.4.3) Фурье қаторининг $S_n(x)$ қисмий йиғиндисини Дирихле интеграли шаклида

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)} du$$

тасвирлаш мумкин. Бу ҳолда n та дастлабки $S_n(x)$ йиғиндиларнинг ўрта арифметиги

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)} du$$

шаклида ёзилади ёки соддалаштирилгандан кейин,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{\sin\frac{n}{2}(u-x)}{\sin\frac{1}{2}(u-x)} \right]^2 du$$

кўринишга келади. Бу интегралга Фейер интеграли деб айтилади. Фейер томонидан Фурье қаторини ўрта арифметиклар усули билан умумлашган жамлаш ҳақидаги қуйидаги теорема исбот қилинган.

2-теорема (Фейер теоремаси). *$f(x)$ функция учун қаралаётган х нуқтада ўнг ва чап $f(x \pm 0)$ лимитлар мавжуд бўлсин. У ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{\sin\frac{n}{2}(u-x)}{\sin\frac{1}{2}(u-x)}\right]^2du=$$

$$=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad (2.4.12)$$

тенглик ўринли. Хусусан, узлуксизлик нуқтасида бу лимит $f(x)$ функция қийматига тенг. Агар $f(x)$ функция ҳамма жойда узлуксиз бўлса, у ҳолда $\sigma_n(x)$ йиғинди $f(x)$ функцияга x ўзгарувчига нисбатан текис интилади.

Исбот. Дирихле интеграли, Пуассон интеграли каби, Фейер интегралини қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2dt \qquad (2.4.13)$$

Бу ҳолда ҳам умумий схемага тўғри келиб,

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}=g(t,x)$$

ва ядро сифатида

$$\Phi(t,\,n)=\frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2$$

Фейер ядроси деб аталувчи функцияни оламиз. Бевосита кўриш мумкинки, бу мусбат ядро бўлиб, λ параметр сифатида n ни, $\omega=+\infty$ деб олиш керак бўлади. Шунга кўра,

$$\Phi(t,\,n)\geq 0$$

бўлиши келиб чиқади. Агарда (2.4.13) формулада $f(x)\equiv 1$ деб олсак, у ҳолда бир вақтда $S_n\equiv 1$, ҳамда $\sigma_n\equiv 1$ бўлиб,

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2dt=1 \qquad (2.4.14)$$

тенглик ҳосил бўлади, яъни Фейер ядроси 2^0 шартни қаноатлантиради. 3^0 шарт эса

$$M(\delta, n) = \sup_{0<\delta\le t\le\pi} \Phi(t, n) \le \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

баҳолашдан, $n \to \infty$ да $M(\delta, n) \to 0$ эканлиги келиб чиқади. Шунга кўра, асосий 2-леммани қўллаб, (2.4.12) муносабатни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, x нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз ёки ҳеч бўлмаганда биринчи турдаги узулишга эга бўлса, у ҳолда (2.4.3) Фурье қаторини ўрта арифметиклар методи бўйича жамлаб

$$f(x) \quad \text{ёки} \quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

мос равишда қаторнинг умумлашган йиғиндисини ҳосил қиламиз.

5. Фурье қаторини ҳадма-ҳад дифференциаллаш. Агар $f(x)$ функциянинг (2.4.3) Фурье қаторини ҳадма-ҳад дифференциалласак, у ҳолда

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(b_m \cos mx - a_m \sin mx) \tag{2.4.15}$$

қатор ҳосил бўлиб, бу қатор $f(x)$ функция учун $f'(x)$ ҳосила мавжуд бўлган қаралаётган x нуқтада ҳам узоқлашувчи бўлиши мумкин. Бунга мисол сифатида

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m} = \frac{\pi - x}{2}, \ 0 < x < 2\pi$$

қаторни келтириш мумкин. Бу қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллаш натижасида ҳамма жойда узоқлашувчи

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos mx$$

қаторга эга бўламиз. Шунга қарамасдан қуйидаги Фату теоремаси ўринли бўлади.

3-теорема (Фату теоремаси). *Агар x нуқтада $f'(x)$ чекли ҳосила мавжуд бўлса, у ҳолда (2.4.15) қатор Пуассон-Абель методи бўйича жамланувчи ва унинг йиғиндиси $f'(x)$ га тенг бўлади.*

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун (2.4.4) Пуассон қаторини x бўйича дифференциаллаймиз.

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x}=\sum_{m=1}^{\infty} r^m \cdot m(b_m \cos mx - a_m \sin mx) \qquad (2.4.16)$$

Бу ерда ҳосил бўлган қаторнинг x бўйича текис яқинлашувчи бўлганлиги учун ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин. Шу натижага биз агар (2.4.5) Пуассон интегралини x бўйича дифференциалласак ҳам, эришишимиз мумкин:

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{2r(1-r^2)\sin(u-x)}{[1-2r\cos(u-x)+r^2]^2}du$$

Бу охирги интегрални ўзгартириб ёзсак, у ҳолда

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{2r(1-r^2)\sin t}{[1-2r\cos t+r^2]^2}dt=$$

$$=r\cdot\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin t}\cdot\frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{[1-2r\cos t+r^2]^2}dt \qquad (2.4.17)$$

тенгликка эга бўламиз. Энди

$$g(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x+t)-f(x)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x)}{-t}\right]\cdot\frac{t}{\sin t}$$

деб олсак, у ҳолда

$$g(+0)=f'(x)$$

эканлигини кўрамиз. Бундан ташқари

$$\Phi(t, r)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{[1-2r\cos t+r^2]^2}$$

функция мусбат ядро эканлигини кўрсатамиз. Биринчидан,

$$\Phi(t, r)\geq 0$$

бўлади. Хусусан, агар (2.4.17) да $f(x)=\sin x$ деб олинса, у ҳолда

$$f(r, x)=r\sin x, \quad \frac{\partial f(r, x)}{\partial x}=r\cos x, \quad \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin t}=\cos x$$

бўлади. Бу тенгликларни (2.4.17) га қўйиб, $r\cos x$ га қисқартириш натижасида

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{\left[1-2r\cos t+r^2\right]^2}dt=1$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Ниҳоят,

$$M(\delta, r) = \sup_{0<\delta\le t\le\pi} \Phi(t, r) \le \frac{1}{\pi} \frac{2(1-r^2)}{\left[4r\sin^2\frac{\delta}{2}\right]^2}$$

баҳолашдан, $r \to 1-0$ да $M(\delta, r) \to 0$ эканлиги келиб чиқади. Асосий леммани қўллаб, $r \to 1-0$ да (2.4.14) қаторнинг йиғиндиси $f'(x)$ эканлигини кўрамиз. Бу эса (2.4.15) қаторнинг Пуассон-Абель методи бўйича жамланувчи эканлигини ва йиғиндиси $f'(x)$ эканлигини билдиради.

1-эслатма. *Исбот қилинган теоремани такрорий дифференциаллаш учун умумлаштириш мумкин: Агар қаралаётган нуқтада $f^{(p)}(x)$ $(p>1)$ чекли ҳосила мавжуд бўлса, у ҳолда (2.4.3) қатордан $p-$каррали дифференциаллаш натижасида ҳосил қилинган қатор $f^{(p)}(x)$ га Пуассон-Абель методи бўйича жамланувчи бўлади.*

2-эслатма. *Чезаро–Фейер методи бўйича жамлаш учун Фату теоремасининг аналоги ўринли эмас. Агар шартларни кучайтириб, ҳосиланинг қаралаётган нуқтада узлуксиз эканлиги талаб қилинса, у ҳолда Пуассон-Абель методи бўйича жамлашни Чезаро–Фейер методи бўйича жамлаш билан алмаштириш мумкин бўлади.*

5- §. Функция тригонометрик ёйилмасининг ягоналиги

1. Умумлашган ҳосила ҳақида тушунча. $f(x)$ функция қандайдир $[a, b]$ сегментда берилган бўлсин. $a < x < b$ деб оламиз. У ҳолда етарлича кичик $h > 0$ учун

$$\Delta_h F(x) = F(x+h) - F(x-h)$$

айирма маънога эга бўлади. Агар

$$F^{[']}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h F(x)}{2h}$$

чекли лимит мавжуд бўлса, уни $F(x)$ функциянинг x нуқтадаги умумлашган (“симметрик”) ҳосиласи деб айтилади. $F'(x)$ оддий ҳосиланинг мавжуд бўлиши учун $F^{[']}(x)$ умумлашган ҳосиланинг мавжуд ва унга тенг бўлиши зарурдир. Бу бевосита $h \to +0$ учун

$$\frac{\Delta_h F(x)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h} + \frac{F(x-h)-F(x)}{-h}\right] \to F'(x)$$

муносабатдан келиб чиқади. Бироқ, айрим ҳолларда умумлашган ҳосила мавжуд бўлгани ҳолда оддий ҳосила мавжуд бўлмайди. Бунга

$$F(x) = x\sin\frac{1}{x} \ (x \neq 0),\ F(0) = 0$$

функцияни мисол қилиб келтириш мумкин. Маълумки, $x = 0$ нуқтада бу функция ҳосилага эга эмас. Унинг умумлашган ҳосиласи бу нуқтада нолга тенг бўлади. Энди иккинчи айирмани қараймиз.

$$\Delta_h^2 F(x) = \Delta_h \Delta_h F(x) = \Delta_h F(x+h) - \Delta_h F(x-h) =$$
$$= [F(x+2h) - F(x)] - [F(x) - F(x-2h)] =$$
$$= F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h).$$

Агар

$$F^{['']}(x) = \lim_{h\to +0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$$

чекли лимит мавжуд бўлса, у ҳолда уни $F(x)$ функциянинг қаралаётган x нуқтадаги умумлашган иккинчи ҳосиласи деб айтилади. Бу ерда $F''(x)$ оддий иккинчи тартибли ҳосила мавжуд бўлса, у ҳолда бу умумлашган иккинчи ҳосила ҳам мавжуд ва улар тенг бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, агар h бўйича $\Delta_h^2 F(x)$ ва $4h^2$ функцияларга Коши формуласини қўлласак,

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} = \frac{F'(x+2\theta h) - F'(x-2\theta h)}{4\theta h}$$

формула ҳосил бўлиб, биринчи умумлашган ҳосилага кўра, $h \to 0$ учун $F''(x)$ га интилади. $F(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $F(0) = 0$ функция мисолида кўрсатиш мумкинки, тескари хулоса нотўғридир, яъни умумлашган $F^{['']}(x)$ ҳосила мавжудлиги $F''(x)$ оддий ҳосиланинг мавжудлигини таъминлайди.

Қуйидаги теорема кўрсатадики, умумлашган иккинчи тартибли ҳосила ҳам айрим ҳолларда оддий ҳосила сингари муҳим роль ўйнайди.

1-теорема (Шварц теоремаси). *Агар* $[a, b]$ *сегментда узлуксиз* $F(x)$ *функция учун умумлашган иккинчи* $F^{['']}(x)$ *ҳосила* $a < x < b$ *оралиқ ичида мавжуд ва нолга тенг бўлса, у ҳолда* $F(x)$ *функция чизиқли функция бўлади (оддий ҳосила учун* $F''(x) = 0$ *бўлгандаги сингари).*

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонни оламиз ва

$$\varphi(x) = \pm\left\{F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x-a)\right\} + \varepsilon(x-a)(x-b)$$

ёрдамчи функцияни қурамиз. Бундан ташқари, мулоҳазани ҳар иккала ишорали бўлган ҳол учун ҳам олиб борамиз. У ҳолда оралиқ ичида

$$\varphi^{['']}(x) = 2\varepsilon \qquad (2.5.1)$$

бўлади, чунки F функция учун умумлашган иккинчи ҳосила нолга тенг, квадратик функция учун эса унинг оддий ҳосиласи 2ε бўлади. $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг чеккаларида нолга айланади. Оралиқнинг ички нуқталарида бу функция мусбат қиймат қабул қила олмаслигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, акс ҳолда $\varphi(x)$ функция узлуксиз функция бўлганлиги учун ўзининг энг катта мусбат қийматига бирор x_0 ички нуқтада эришиши керак бўлади. Лекин у ҳолда

$$\varphi(x_0 \pm 2h) \le \varphi(x_0), \;\; \Delta_h \varphi(x_0) \le 0$$

ва бундан

$$\varphi^{['']}(x_0)=\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h\varphi(x_0)}{4h^2}\le 0$$

ҳосил бўлиб, бу эса (2.5.1) тенгликка қарама-қаршидир. Шундай қилиб, $\varphi(x)\le 0$ тенгсизлик барча x учун ўринли, яъни

$$\pm\left\{F(x)-F(a)-\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right\}\le\varepsilon(x-a)(b-x)<\varepsilon(b-a)^2$$

бўлади. Шунинг учун, бундан

$$\left|F(x)-F(a)-\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right|<\varepsilon(b-a)^2$$

тенгсизлик келиб чиқади. $\varepsilon>0$ сонининг ихтиёрийлигига кўра,

$$F(x)=F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)$$

тенглик келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

2-теорема (Умумлашган Шварц теоремаси). *$[a,b]$ сегментда узлуксиз бўлган $F(x)$ функция учун $F^{['']}(x)$ ҳосила оралиқнинг чекли сондаги*

$$a<x_1<x_2<..<x_m<b$$

нуқталаридан ташқари барча нуқталарида мавжуд бўлиб нолга тенг бўлсин. Агар бу оралиқчаларнинг чекка нуқталарида ҳеч бўлмаганда

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h^2F(x)}{2h}=0 \tag{2.5.2}$$

шарт ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда чизиқли функция бўлади.

Исбот. Олдинги теоремага кўра, ҳар бир $[x_{i-1},\ x_i]$ оралиқда $F(x)$ функция x бўйича чизиқли функциядир, яъни $F(x)=cx+d$. Қўшни $[x_i,x_{i+1}]$ оралиқда эса, $F(x)=c'x+d'$ бўлади. Бундан ташқари $x=x_i$ нуқтада ҳар иккала ифода устма-уст тушади:

$$F(x_i)=cx_i+d=c'x_i+d'. \tag{2.5.3}$$

(2.5.2) шартга кўра, $x=x_i$ учун

$$\lim_{h\to+0}\left\{\frac{F(x_i+2h)-F(x_i)}{2h}-\frac{F(x_i-2h)-F(x_i)}{-2h}\right\}=0$$

ҳосил бўлади. Бунда, чап томонда $y=cx+d$ ва $y=c'x+d'$ тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларининг айирмаси ифодаланган. Шунинг учун $c=c'$ бўлади. Бундан, (2.5.3) га кўра, $d=d'$, яъни ҳар иккала оралиқчада бири иккинчисига бир тўғри чизиқ билан давом этади. Бу айтилганлар ихтиёрий икки қўшни оралиқчага тегишли бўлгани учун бутун $[a,b]$ оралиқда битта тўғри чизиқ бўлиб, берилган функция чизиқли бўлади. Теорема исбот бўлди.

2. Тригонометрик қаторларни Риман усулида жамлаш.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad (2.5.4)$$

тригонометрик қаторни Риман усулида жамлаш муҳим роль ўйнайди. Бу усулда (2.5.4) қатор бирор функциянинг Фурье қатори бўлишлигини умуман олганда талаб қилмайди, балки ихтиёрий тригонометрик қатор бўлиши мумкин. Бироқ унинг коэффициентлари

$$|a_n|,\ |b_n|\le L \quad (L=const) \qquad (2.5.5)$$

чегараланган бўлишлиги керак бўлади. (2.5.4) қаторни формал равишда ҳадма-ҳад икки марта интеграллаб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}\ . \qquad (2.5.6)$$

(2.5.5) шартлар бажарилганда бу қатор юқоридан

$$L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

қатор ёрдамида баҳоланади ва шунга кўра, x ўзгарувчининг ихтиёрий ўзгариш оралиғида текис яқинлашади ва $F(x)$ узлуксиз функцияни аниқлайди. Агар унинг учун берилган x нуқтада

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h^2F(x)}{4h^2}$$

чекли лимит мавжуд бўлса, яъни $F^{['']}(x)$ умумлашган иккинчи тартибли ҳосила мавжуд бўлса, у ҳолда бу ҳосила (2.5.4) қаторнинг *Риман маъносидаги “умумлашган йиғиндиси”* деб айтилади.

Мисол сифатида

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$$

қаторни олиб, унга шу усулни қўллаймиз. У ҳолда

$$F(x)=\frac{x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

бўлади. $0\le x\le 2\pi$ учун бу ерда қатнашган қаторнинг йиғиндиси $\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}$ га тенг бўлгани учун

$$F(x)=\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{6}$$

бўлади. Шунинг учун $0<x<2\pi$ оралиқда $F^{[\,'\,']}(x)=F''(x)=0$ ва берилган қаторнинг *“умумлашган йиғиндиси”* нолга тенг бўлади.

Бевосита текшириш йўли билан

$$\Delta_h^2\cos nx=-2\cos nx(1-\cos 2nh)=-4\cos nx\cdot\sin^2 nh$$

ва

$$\Delta_h^2\sin nx=-4\sin nx\cdot\sin^2 nh$$

тенгликларни кўрсатиш мумкин. Бундан

$$\frac{\Delta_h^2F(x)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 \qquad (2.5.7)$$

эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, *Риман усулида жамлаш (2.5.4) қаторнинг ҳадларини* $\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$ *шаклидаги кўпайтувчига кўпайтириш ва* $h\to 0$ *да лимитга ўтишга* олиб келинади.

Бундай кўринишдаги Риман усули ихтиёрий

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

сонли қаторга ҳам қўлланилиши мумкин.

Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$

сонли қатор ҳеч бўлмаганда етарлича кичик h учун яқинлашувчи ва унинг $\varphi(h)$ йиғиндиси $h\to 0$ да U лимитга интилса, у ҳолда бу сон шу берилган қаторнинг *“умумлашган йиғинди”* бўлади. Бу умумлашган Риман методи регуляр метод эканлигини бевосита текшириш мумкин бўлади. Бу фактнинг тригонометрик қаторларда қўлланилишини келтирамиз.

3-теорема (Риманнинг биринчи теоремаси). *Агар (2.5.4) тригонометрик қатор x нуқтада $S(x)$ йиғиндига яқинлашса, у ҳолда формал равишда икки марта ҳадма-ҳад интеграллаб ҳосил қилинган $F(x)$ функция шу нуқтада умумлашган иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлиб, бу ҳосила $S(x)$ га тенг бўлади, яъни*

$$F^{['']}(x) = S(x)$$

тенглик ўринли бўлади.

Фурье қатори бўлган ҳолда

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$$

ифода мусбат ядроли интеграл шаклига келтирилади. Шундай йўл билан Риман усули учун жамлаш ҳақидаги Шварц теоремаси ва Фейер теоремаси каби теоремани ҳам ёзиш мумкин. Бундан ташқари Риман методи умумий шаклдаги тригонометрик қаторлар учун ҳам муҳим қурол бўлиб хизмат қилади.

4-теорема (Риманнинг иккинчи теоремаси). *Агар (2.5.4) қаторнинг a_n ва b_n коэффициентлари нолга интилса, у ҳолда бу қаторнинг яқинлашишидан қатъий назар (2.5.2) шарт бажарилади, яъни*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{2h} = 0$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳар бир *тайинланган* x учун

$$u_0 = \frac{a_0}{2},\ u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

деб оламиз. У ҳолда қаралаётган масала

$$\lim_{h \to 0} \left\{ u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} \right\} h = 0 \qquad (2.5.8)$$

муносабатни исбот қилишга олиб келинади. Теорема шартига кўра, $u_n \to 0$, яъни ихтиёрий олдиндан берилган $\varepsilon > 0$ учун шундай бир N номер топилиб, $n \geq N$ учун $|u_n| < \varepsilon$ бўлади. Энди бизни қизиқтирган ифодани иккита ифоданинг йиғиндиси шаклида ёзамиз.

$$S_1 = \left\{ u_0 + \sum_{n=1}^{N-1} u_n \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} \right\} h \quad \text{ва} \quad S_2 = \sum_{n=N}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 h .$$

У ҳолда

$$|S_2| < \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \cdot h < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \cdot h$$

тенгсизликка эга бўламиз. Ҳамда

$$\frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2} = \frac{\pi - h}{2}$$

бўлгани учун чегаралангандир. Шунга кўра

$$|S_2| < \frac{\pi}{2} \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. S_1 ифода эса $h \to 0$ да бевосита нолга интилади. Бундан эса (2.5.8) муносабат келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

3. Яқинлашувчи қаторнинг коэффициентлари ҳақидаги лемма.

1-лемма (Кантор леммаси). *Агар (2.5.4) тригонометрик*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

қатор ҳеч бўлмаганда бирор $(d) = [\alpha,\ \beta]$ *оралиқдаги x қийматлар учун яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* $m \to \infty$ *да* a_m, b_m *коэффициентлар нолга интилади.*

Исботи. Қаторнинг умумий ҳадини

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx = \rho_m \sin m(x - \alpha_m)$$

кўринишда ёзамиз, бунда $\rho_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$ шаклида бўлади. Шунга кўра $\rho_m \to 0$ эканлигини кўрсатиш талаб қилинади.

Тескарисини фараз қилайлик. У ҳолда m нинг чексиз кўп қийматлари учун

$$\rho_m \geq \delta \tag{2.5.9}$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда δ қандайдир мусбат ўзгармас сон. Индуктив равишда ичма-ич жойлашган $\{(d_n)\}$ оралиқлар кетма-кетлигини $\{m_n\}$ $(n=1, 2, 3, ...)$ индекснинг ошиб боришида

$$\left|\rho_{m_n}\sin m_n(x-\alpha_{m_n})\right|>\frac{\delta}{2} \qquad (2.5.10)$$

тенгсизлик $x\in(d_n)$ учун ўринли бўладиган қилиб қурамиз. m_1 сифатида (2.5.9) тенгсизликни ва

$$md>\pi$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб танлаймиз.

(d) оралиқда x ўзгаргани учун $\sin m_1(x-\alpha_{m_1})$ функция ҳеч бўлмаганда бир марта ±1 қийматни қабул қилади. У ҳолда узлуксизликка кўра, (d) оралиқда (d_1) оралиқча топилиб, ундаги барча нуқталарда бу функция абсолют қиймати бўйича $\frac{1}{2}$ дан катта бўлади ва шунга кўра, (2.5.9) тенгсизликни ҳисобга олиб,

$$\left|\rho_{m_1}\sin m_1(x-\alpha_{m_1})\right|>\frac{\delta}{2}$$

тенгсизлик $x\in(d_1)$ учун ўринли бўлади.

Агар (d_{n-1}) ва m_{n-1} лар аниқланган бўлса, у ҳолда ҳозир бажарилганга ўхшаш равишда m_n индекс ва (d_{n-1}) оралиқда ётувчи (d_n) оралиқ қурилади ва бунда (2.5.10) тенгсизлик бажарилади. Бундан ташқари, $m_n>m_{n-1}$ бўлади.

Энди x_0 нуқтани барча (d_n) оралиқларда ётадиган қилиб оламиз. Бундай ҳеч бўлмаганда битта нуқта ҳамма вақт мавжуд бўлади. Бу нуқта учун (2.5.10) тенгсизлик барча n ларда ўринли бўлиб, қатор яқинлашишининг зарурий шарти бузилади ва шунга кўра $x=x_0$ нуқтада (2.5.4) қатор узоқлашувчи бўлади. Бу эса лемма шартига зиддир. Лемма исбот бўлди.

4. Тригонометрик ёйилманинг ягоналиги. *Агар* $f(x)$ *функция* $[-\pi,\pi]$ *оралиқда қандайдир (2.5.4) тригонометрик қаторга ёйилган бўлса, у ҳолда бу ёйилма ягона бўладими деган савол муҳимдир.* Қуйидаги теорема бу саволга жавоб бўлади.

5-теорема (Гейне-Кантор теоремаси). *Агар иккита*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx+b_m\sin mx \qquad (2.5.4)$$

ва

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx \qquad (2.5.11)$$

тригонометрик қаторлар $[-\pi,\ \pi]$ *оралиқнинг барча нуқталарида битта* $f(x)$ *йиғиндига яқинлашса (бу шарт ҳеч бўлмаганда чекли сондаги* $x_1, x_2, ..., x_n$ *нуқталар чиқариб ташланганда ўринли бўлса ҳам), у ҳолда бу қаторлар айнан бир хилдир, яъни*

$$a_m = \alpha_m \ \ (m = 0, 1, 2, ...),\ b_m = \beta_m \ \ (m = 1, 2, 3, ...)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Исбот. (2.5.4) ва (2.5.11) қаторларни ҳадма-ҳад айириб, исбот қилиниши керак бўлган теоремани нолнинг тригонометрик ёйилмаси ягоналиги ҳақидаги теоремага келтирамиз:

Агар (2.5.4) тригонометрик қатор $[-\pi,\ \pi]$ *оралиқда нолга яқинлашувчи бўлса (бу шарт ҳеч бўлмаганда чекли сондаги нуқталар чиқариб ташланганда ўринли бўлса ҳам), у ҳолда унинг барча коэффициентлари нолга тенг бўлади, яъни*

$$a_m = 0 \ \ (m = 0, 1, 2, ...),\ b_m = 0 \ \ (m = 1, 2, 3, ...)$$

тенгликлар ўринлидир.

Бу охирги натижани исбот қиламиз. Олдинги пунктдаги леммага кўра, a_m ва b_m коэффициентлар нолга интилади. Бундан эса уларнинг чегараланганлиги келиб чиқади. Биз $F(x)$ Риман функциясини қарасак, шартга кўра бу функция узлуксиз бўлади. Чекли сондаги нуқталардан ташқари барча нуқталарда унинг умумлашган иккинчи ҳосиласи $F^{['']}(x)$ нолга тенг эканлиги Риманнинг биринчи теоремасидан келиб чиқади. Риманнинг иккинчи теоремасига кўра, чиқариб ташланган нуқталарда эса (2.5.2) шарт бажарилади. У ҳолда умумлашган Шварц теоремасига асосан $F(x)$ функция чизиқлидир, яъни

$$\frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2} = cx + d$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенглик, $[-\pi, \pi]$ оралиқда ўринли бўлиб қолмасдан ихтиёрий чекли оралиқ учун ҳам ўринли бўлгани учун бутун сон ўқида ўринлидир. Ҳосил қилинган тенгликни

$$\frac{a_0x^2}{4}-cx=d+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\cos mx+b_m\sin mx}{m^2}$$

шаклида ёзамиз. Тенгликнинг ўнг томонидаги функция даврийлигига кўра, $a_0=c=0$ эканлиги бирданига келиб чиқади. Шундай қилиб, нолнинг ёйилмаси бўлган

$$0=d+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\cos mx+b_m\sin mx}{m^2}$$

тенгликка эга бўламиз. Бироқ, бу қатор текис яқинлашувчидир. Бу ҳолда коэффициентлар Эйлер-Фурье формуласи орқали ифодаланиб, шунга кўра $a_m=b_m=0$ тенгликларнинг ўринли бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, агар қандайдир $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ оралиқда тригонометрик қаторга ёйилган бўлса, у ҳолда фақат бир хил усул билан ёйилар экан. Энди бу ягона усул қандай бўлади?. Ҳар доим ихтиёрий $f(x)$ функциянинг Фурье қатори бўладими деган саволлар туғилиши табиийдир.

Бизга маълумки, ҳаттоки узлуксиз функциянинг Фурье қатори узоқлашувчи бўлиши мумкин, лекин биз бундай функцияни бошқача Фурье коэффициентларидан фарқли коэффициентли тригонометрик қаторга ёйиш масаласини қарамадик. Бу саволларнинг қўйилиши табиийдир. Масалан,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$$

қаторни қарайлик. Бу қатор $2\pi k$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ шаклдаги нуқталарни сақламайдиган ёпиқ оралиқда ҳатто текис яқинлашувчидир ва унда узлуксиз функцияни аниқлайди. $2\pi k$ шаклдаги нуқталарда ҳам қатор яқинлашувчи бўлиб нолга тенг бўлади. Бу қатор узлуксиз функциянинг Фурье қатори бўла олмайди, акс ҳолда қуйидаги фактга қарама-қаршиликка келамиз, чунки $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ қатор узоқлашувчидир.

Агар $[-\pi,\pi]$ оралиқда $f(x)$ функция абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

қатор яқинлашувчи бўлади, бунда b_n– коэффициентлар Фурье қаторидаги синус олдидаги коэффициентлардир.

2-лемма (Лебег леммаси). *$[a,b]$ оралиқда берилган $F(x)$ функция учун оралиқнинг барча ички нуқталарида умумлашган иккинчи $F^{['']}(x)$ ҳосила мавжуд бўлиб,*

$$m \le F^{['']}(x) \le M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\dfrac{\Delta_h^2 F(x_0)}{4h^2}$ шаклидаги ихтиёрий нисбат ҳам шу сонлар орасида жойлашган бўлади.

Исбот.

$$\varphi(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta_{2h} f(x_0)}{4h} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2}$$

ёрдамчи функцияни қараймиз. Бу функция иккинчи тартибли кўпҳад бўлиб, $x_0 - 2h,\ x_0,\ x_0 + 2h$ учта нуқтада $f(x)$ функциянинг қийматлари каби қийматни қабул қилади. Шунинг учун, бу нуқталарда,

$$\lambda(x) = f(x) - \varphi(x)$$

функция нолга айланади. $\lambda(x)$ функция $[x_0 - 2h,\ x_0 + 2h]$ оралиқда узлуксиз ва унинг ички нуқталарида қуйидаги кўринишда аниқланадиган умумлашган иккинчи тартибли ҳосилага эга:

$$\lambda^{['']}(x) = f^{['']}(x) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2}.$$

$\lambda(x)$ функция ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларини $[x_0 - 2h,\ x_0 + 2h]$ оралиқдаги x_1 ва x_2 нуқталарда қабул қилади. Шунга кўра, бу нуқталарда

$$\lambda^{['']}(x_1) \le 0,\ \ \lambda^{['']}(x_2) \ge 0$$

муносабат ўринли бўлади. Бундан эса

$$f^{['']}(x_1) \le \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2} \le f^{['']}(x_2)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Лемма исбот бўлди.

6-теорема (Дю-Буа-Реймонд теоремаси). *Агар $f(x)$ функция $[-\pi,\ \pi]$ оралиқда чегараланган ва (хос маънода) интегралланувчи бўлиб, шу оралиқда*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad \textit{(2.5.12)}$$

тригонометрик қаторга ёйилган бўлса, у ҳолда бу қатор унинг Фурье қатори бўлади.

Исбот. Аввало қаторнинг яқинлашишидан a_n, b_n коэффициентларнинг чегараланган эканлиги келиб чиқади. $F(x)-$ Риман функциясини киритиб, $\frac{\Delta_h^2F(x)}{4h^2}$ ифода учун (2.5.7) тригонометрик қатор ёйилмаси

$$\frac{\Delta_h^2F(x)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$

бўлади. Бу қатор юқоридан $L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ шаклидаги қатор билан баҳолангани учун x бўйича текис яқинлашувчи бўлади. Шунинг учун бу ҳолда қаторнинг коэффициентлари Фурье коэффициентлари бўлиб,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_h^2F(x)}{4h^2}dx$$

$$a_n\cdot\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\frac{\Delta_h^2F(x)}{4h^2}dx \qquad (2.5.13)$$

$$b_n\cdot\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\frac{\Delta_h^2F(x)}{4h^2}dx$$

тенгликлар ўринли бўлади. $f(x)$ функцияни $[-\pi,\pi]$ оралиқнинг ташқарисига даврий функция сифатида давом эттириб, (2.5.12) ёйилма бутун сон ўқи учун ўринли деб қараш мумкин. Шунга кўра, Риманнинг биринчи теоремасига асосан барча x қийматлар учун

$$F^{['']}(x)=f(x)$$

тенгликка эга бўламиз. $f(x)$ функциянинг чегараланганлигига кўра,

$$|f(x)|\le K$$

бўлади. У ҳолда олдинги Лебег леммасига асосан ихтиёрий x ва h лар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$\left|\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}\right| \le K\,. \tag{2.5.14}$$

Энди (2.5.13) тенгликларнинг ўнг томонига Арцель теоремасини қўллаб, $h \to 0$ да лимитга ўтиб, қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,\,2,\,\dots\ . \end{gathered} \tag{2.5.15}$$

Теорема исбот бўлди.

7-теорема (Умумлашган Дю-Буа-Реймонд теоремаси)*.* *Агар $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ оралиқда абсолют интегралланувчи бўлиб, чекли сондаги нуқталардан ташқари барча нуқталарда (2.5.12) тригонометрик қаторга ёйилган бўлса, у ҳолда бу қатор $f(x)$ функциянинг Фурье қатори бўлади*[1].

Исбот. $f(x)$ функцияни даврий равишда бутун сон ўқига давом эттирамиз. $f(x)$ функция ўрнига

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

функцияни қараш кулайдир. Бу функция учун ихтиёрий чекли ораликда

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ёйилма ўринли бўлади. Биринчидан,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)dx = 0\,,$$

иккинчидан, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ учун

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nxdx,\ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin nxdx \tag{2.5.16}$$

[1] Бу умумлашма Валле–Пуссенга тегишлидир. Шарль Жан де ла Валле Пуссен (1866–1962) Бельгиялик машҳур математик бўлиб сонлар назарияси, математик анализ ва математиканинг бошқа соҳаларига улкан ҳисса қўшган.

эканлигини исбот қиламиз. Бундан эса (2.5.15) муносабатлар келиб чиқади. Коэффициентларнинг чегараланганлигига кўра,

$$\Phi(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

Риман функциясини қарашга имкон беради. Бу функция даври 2π га тенг бўлган даврий функциядир. Фараз қилайлик $[\alpha, \beta]$ оралиқ чиқариб ташланган нуқталарни ҳамда $\varphi(x)$ функциянинг махсус нуқталарини сақламасин. У ҳолда етарли кичик δ учун $[\alpha - \delta, \beta + \delta]$ оралиқ ҳам шундай шартларни қаноатлантиради. $\varphi(x)$ функциянинг чегараланганлигидан $\alpha \le x \le \beta$, $h \le \delta$ учун $\dfrac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2}$ ифоданинг чегараланганлигини ҳосил қиламиз. Шунга кўра,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2} = \varphi(x)$$

бўлади. Ихтиёрий $y \in [\alpha, \beta]$ учун Арцель теоремасига кўра,

$$\lim_{h \to 0} \int_{\alpha}^{y} \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2} dx = \int_{\alpha}^{y} \varphi(x) dx$$

ҳосил бўлади. Агар

$$\Phi_1(y) = \int_0^y \Phi(t) dt$$

деб олсак, охирги муносабатни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(y)}{4h^2} - \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2} \right\} = \int_{\alpha}^{y} \varphi(t) dt$$

Катта қавс ичидаги ифода $\alpha \le y \le \beta$, $h \le \delta$ учун чегараланган. У ҳолда яна Арцель теоремасини қўллаб,

$$\lim_{h \to 0} \int_{\alpha}^{x} \left\{ \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(y)}{4h^2} - \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2} \right\} dy = \int_{\alpha}^{x} dy \int_{\alpha}^{y} \varphi(t) dt \quad (\alpha \le x \le \beta)$$

тенгликка эга бўламиз.

$$\Phi_2(x) = \int_0^x \Phi_1(y) dy$$

деб олсак, ҳосил қилинган тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\Delta_h^2\Phi_2(x)}{4h^2}-\frac{\Delta_h^2\Phi_2(\alpha)}{4h^2}-(x-\alpha)\frac{\Delta_h^2\Phi_1(\alpha)}{4h^2}\right\}=\int_\alpha^x dy\int_\alpha^y \varphi(t)dt\,.$$

Бироқ, $\Phi_2(x)$ функция оддий иккинчи тартибли $\Phi(x)$ ҳосилага эга. Шунинг учун

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2\Phi_2(x)}{4h^2}=\Phi(x),\ \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2\Phi_2(\alpha)}{4h^2}=\Phi(\alpha).$$

Агар ν орқали мавжуд бўлган

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2\Phi_1(\alpha)}{4h^2}$$

чекли лимитни белгиласак, у ҳолда

$$\int_\alpha^x dy\int_\alpha^y \varphi(t)dt=\Phi(x)-\Phi(\alpha)-\nu(x-\alpha)$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб,

$$\Psi(x)=\Phi(x)-\int_0^x dy\int_0^y \varphi(t)dt \qquad (2.5.17)$$

функция ҳар бир $[\alpha,\ \beta]$ оралиқда чизиқли функция экан. Демак, $\varphi(x)$ функциянинг махсус нуқталаридан ташқари, ҳамда (2.5.12) ёйилма ўринли бўлмайдиган чиқариб ташланган нуқталаридан ташқари ҳар бир x нуқтада

$$\Psi^{['']}(x)=0$$

бўлади. Иккинчи томондан, (2.5.2) типдаги шарт ўринли бўлган барча нуқталарда $h\to 0$ да

$$\frac{\Delta_h^2\Psi(x)}{2h}=\frac{\Delta_h^2\Phi(x)}{2h}-\frac{1}{2h}\int_x^{x+2h} dy\int_0^y \varphi(t)dt+$$

$$+\frac{1}{-2h}\int_0^{x-2h} dy\int_0^y \varphi(t)dt$$

ифода нолга интилади. Умумлашган Шварц теоремасига асосан ихтиёрий чекли оралиқда барча x учун

$$\Psi(x)=cx+d \qquad (2.5.18)$$

бўлади. Энди

$$\varphi(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx$$

бўлсин. Бу ифодани икки марта интеграллаб,

$$\int_0^x dy \int_0^y \varphi(t)dt = \frac{\alpha_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx}{n^2} \tag{2.5.19}$$

ифодани ҳосил қиламиз. (2.5.17), (2.5.18) ва (2.5.19) ифодалардан

$$\frac{\alpha_0 x^2}{4} + cx + d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n - a_n)\cos nx + (\beta_n - b_n)\sin nx}{n^2}$$

ёйилмага эга бўламиз. Бу ёйилма барча x лар учун ўринли. Тенгликнинг ўнг томони узлуксиз ва даврий, демак чегараланган функция бўлгани учун $c = 0$, ҳамда $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)dx = 0$ бўлади. Энди

$$-d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n - a_n)\cos nx + (\beta_n - b_n)\sin nx}{n^2}$$

қатор ҳамма жойда 0 га текис яқинлашади. Бундан унинг барча коэффициентлари ноль эканлиги келиб чиқади. Шунга кўра,

$$d_n = \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nx dx, \quad b_n = \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin nx dx$$

ҳосил бўлади. Теорема исбот бўлди.

5. Хос функциялар бўйича ёйилманинг ягоналиги. Энди тригонометрик қаторлар учун маълум бўлган Дю-Буа-Реймонд теоремасини Шредингер операторининг хос функциялари бўйича ёйилмаларига умумлаштиришни қараб чиқамиз.

Ω орқали $N-$ўлчамли чегараси $\partial\Omega$ бўлган нормал соҳани белгилаймиз.

$$[-\Delta + q(x)]u_n(x) = \lambda_n u_n(x), \ x \in \Omega$$

$$u_n(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

Бу чегаравий масаланинг ортонормал хос функциялари системасини қараймиз, бунда $q(x)$ функция манфий бўлмаган функция бўлиб, $\alpha > 0$ учун $C^{\alpha}\left(\bar{\Omega}\right)$ синфга тегишли бўлсин.

Таъриф. *Агар*

$$\lim_{t \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x_0)\ \alpha(t\sqrt{\lambda_n}) = S \tag{2.5.20}$$

чекли лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$ *қатор* x_0 *нуқтада Риман усули билан* S *сонга яқинлашади дейилади, бунда*

$$\alpha(\xi)=\frac{4(\nu+1)}{\xi^2}\left[1-2^{\nu}\Gamma(\nu+1)\xi^{-\nu}I_{\nu}(\xi)\right],\ \nu=\frac{N}{2}\ .$$

Бу (2.5.20) тенгликни символик равишда

$$(R)\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x_0)=S$$

шаклида ёзамиз. Қуйидаги теорема ўринлидир[1].

8-теорема. $\{c_n\}$ *ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

I. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot\lambda_n^{-1}u_n(x)$ *қатор* $\overline{\Omega}$ *соҳада узлуксиз ва* $g(x)\big|_{\partial\Omega}=0$ *бўлган* $g(x)$ *функциянинг Фурье қатори бўлсин.*

II. $K\subset\Omega$ *бўлган ихтиёрий* K *компактда* $m\to\infty$ *да*

$$\sum_{m<\sqrt{\lambda_n}<m+1}\left|c_n u_n(x)\right|=o(m)$$

баҳолаш ўринли бўлсин. У ҳолда, агар $f(x)$ *функция чекли қийматли функция бўлиб* $p>\dfrac{N}{2}$ *бўлган* p *учун* $L_p(\Omega)$ *синфга тегишли ва ихтиёрий* $x\in\Omega$ *учун*

$$(R)\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)=f(x)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда

$$c_n=\int_{\Omega} f(x)u_n(x)dx,\ n=1,2,\ldots$$

формула ўринли бўлади.

1-эслатма. *Агар* $q(x)\equiv 0$ *бўлса, у ҳолда юқоридаги теорема II шартсиз ҳам ўринли бўлади.*

---

[1] Бу теорема П.И. Ачилов томонидан исбот қилинган бўлиб “Единственность разложений по собственным функциям”. Узбекский Математический Журнал, 1991. № 3, 3-6 бетларида келтирилган. Риман усулида жамлаш билан боғлиқ масалаларни В.А. Ильиннинг “О рядах Фурье по фундаментальным системам функции оператора Бельтрами”. Дифференциальные уравнения. 5(II), 1968, 1940-1978 бетларидан, П.И. Ачиловнинг “О единственности разложений по собственным функциям оператора Шредингера”. Дифференциальные уравнения. 14(5), 1978, 871-877 бетларидан ўқиш мумкин.

2-эслатма. *Бу теоремани $N>2$ ҳол учун исбот қилиб, $N=2$ бўлган ҳолда эса тушиш усулидан фойдаланиб исбот қилинади.*

Теоремани исбот қилишдан олдин бир нечта ёрдамчи леммаларни исбот қиламиз.

$g(x)$ функция Ω соҳада узлуксиз ва $x\in\Omega$, $0<t<dist(x,\partial\Omega)$ бўлсин. $A=-\Delta+q(x)$ операторнинг айирмали ўхшатмасини киритамиз.

$$A_t g(x)=-\Delta_t g(x)+q(x)g(x)$$

бунда

$$\Delta_t g(t)=4\left(\frac{N}{2}+1\right)\frac{g_t(x)-g(x)}{t^2},$$

$$g_t(x)=\frac{1}{|K(x,t)|}\int\limits_{K(x,t)} g(y)dy,$$

$K(x,t)-$ эса маркази x нуқтада бўлган t радиусли шар бўлиб, $|K(x,t)|-$ бу шарнинг ҳажмидир.

3-лемма. *$G\subset\Omega$-ихтиёрий нол ўлчамли тўплам бўлсин. У ҳолда*

1) $\forall x\in\Omega$ учун $\lim\limits_{t\to 0}\Delta_t\tau(x)\geq 0,$

2) $\forall x\in G$ учун $\lim\limits_{t\to 0}\Delta_t\tau(x)=+\infty$

шартларни қаноатлантирувчи $\overline{\Omega}$ соҳада узлуксиз ва $\tau(x)\big|_{\partial\Omega}=0$ бўлган $\tau(x)$ функция мавжуддир.

Исбот. Шартга кўра, $m(G)=0$ бўлгани учун $Q_n\subset\Omega,\ \ n=1,2,\ldots$ бўлган Q_n очиқ тўпламлар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб

$$G\subset Q_n,\ \ m(Q_n)\leq 2^{-n},\ \ \ n=1,2,\ldots,$$

$$Q_1\supset Q_2\supset\ldots\supset Q_n\supset\ldots$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Энди $n=1,2,3,\ldots$ учун

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in Q_n\\ 0, & x\in\Omega\setminus Q_n\end{cases}$$

функциялар кетма-кетлигини аниқлаймиз. Ҳамда $\tau_n(x)$ функция

$$\begin{aligned} &\Delta\tau_n(x) = f_n(x),\ x\in\Omega \\ &\tau_n(x) = 0,\ x\in\partial\Omega \end{aligned} \qquad (2.5.21)$$

чегаравий масаланинг умумлашган ечими бўлсин. Агар $p > \dfrac{N}{2}$ бўлса, у ҳолда

$$\|\tau_n\|_{C(\overline{\Omega})} \le const\|f_n\|_{L_p(\Omega)} \le const\cdot 2^{-\frac{n}{p}}$$

баҳолаш ўринли бўлади**.** Шунинг учун $\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n(x)$ текис яқинлашувчи қаторнинг $\tau(x)$ йиғиндиси $\overline{\Omega}$ да узлуксиздир. Бундай қурилган $\tau(x)$ функция лемманинг 1) ва 2) шартларини қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Грин формуласидан фойдаланиб,

$$\Delta_t\tau_n(x) = \frac{b_N}{t^{N+2}}\int_0^t s^{N-1}ds\int_{K(x,\,s)}\left[\frac{1}{r^{N-2}} - \frac{1}{s^{N-2}}\right]f_n(y)dy$$

тенгликни исбот қилиш мумкин, бунда $r = |x-y|$, $b_N = 2N(N+2)(N-2)^{-1}\cdot\omega_N^{-1}$ ва $\omega_N -$эса R^N фазодаги бирлик сфера сиртининг юзи. Бундан

$$\Delta_t\tau_n(x) \ge 0,\ n = 1,\,2,\,...$$

бўлиши келиб чиқади. Шунга кўра, $\forall x\in\Omega$ учун

$$\lim_{t\to 0}\Delta_t\tau(x) = \lim_{t\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_t\tau_n(x) \ge 0$$

бўлади. Агар $K(x,\,t)\subset Q_n$ бўлса, у ҳолда (2.5.21) тенгликлардан $\Delta_t\tau_n = 1$ эканлиги келиб чиқади. Бундан агар $x\in G$ ва $l(t) -$эса $K(x,\,t)\subset Q_n$ шартни қаноатлантирувчи максимал натурал сон бўлса, у ҳолда

$$\Delta_t\tau(x) \ge \sum_{n=1}^{l(t)}\Delta_t\tau_n(x) = l(t)$$

бўлади. Шунга кўра $\forall x\in G$ учун $\lim\limits_{t\to 0}\Delta_t\tau(x) = +\infty$ тенглик ўринли бўлади. Лемма исбот бўлди. 3-леммадан фойдаланиб қуйидагини исбот қилиш мумкин.

4-лемма. *$g(x)$ функция Ω соҳада узлуксиз ва $g(x)\big|_{\partial\Omega}=0$ бўлсин. У ҳолда:*

1) Агар $\lim\limits_{t\to 0} A_t\, g(x)\ge 0$ тенгсизлик Ω соҳанинг деярли ҳамма жойида ўринли ва $\forall x\in\Omega$ учун $\lim\limits_{t\to 0} A_t\, g(x)>-\infty$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $\forall x\in\Omega$ учун $g(x)\ge 0$ тенгсизлик ўринли бўлади.

2) Агар $\lim\limits_{t\to 0} A_t\, g(x)\le 0$ тенгсизлик Ω соҳанинг деярли ҳамма жойида ўринли ва $\forall x\in\Omega$ учун $\lim\limits_{t\to 0} A_t\, g(x)<+\infty$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $\forall x\in\Omega$ учун $g(x)\le 0$ тенгсизлик ўринли бўлади.

5-лемма. *$g(x)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$ ва $f(x)$ чекли қийматли функция бўлиб $p>\dfrac{N}{2}$ учун $L_p(\Omega)$ синфга қарашли бўлсин. У ҳолда, агар $\forall x\in\Omega$ учун $\lim\limits_{t\to 0} A_t\, g(x)=f(x)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $g(x)\in W_p^2(\Omega)$ ва $Ag(x)=f(x)$ тенгламанинг умумлашган ечими бўлади.*

Исбот. Леммани $\forall x\in\partial\Omega$ учун $g(x)=0$ бўлган ҳол учун исбот қиламиз.

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\le n,\\ n, & f(x)>n\end{cases}$$

бўлсин. Ҳамда $g_n(x)-$ эса

$$Ag_n(x)=f_n(x),\quad x\in\Omega$$
$$g_n(x)=0,\qquad x\in\partial\Omega$$

чегаравий масаланинг умумлашган ечими бўлсин. Бевосита кўрсатиш мумкинки, $g_n(x)$ функция $\bar{\Omega}$ соҳада узлуксиз ва $\varphi(x)$ функцияга текис яқинлашади, бунда $\varphi(x)$ функция

$$A\varphi(x)=f(x),\quad x\in\Omega$$
$$\varphi(x)=0,\qquad x\in\partial\Omega$$

масаланинг умумлашган ечими. Агар $R_n(x)=g(x)-g_n(x)$ бўлса, у ҳолда

$$A_t g_n(x) = \frac{b_N}{t^{N+2}} \int_0^t s^{N-1} ds \int_{K(x,s)} \left[\frac{1}{r^{N-1}} - \frac{1}{s^{N-1}} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[f_n(y) - q(y) g_n(y) \right] dy + q(x) g(x)$$

тасвирга кўра Ω соҳанинг деярли ҳамма жойида

$$\lim_{t \to 0} A_t R_n(x) \geq 0 \tag{2.5.22}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу тасвирдан $\forall x \in \Omega$ учун

$$\lim_{t \to 0} A_t\, g_n(x) \leq n$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шунинг учун $\forall x \in \Omega$ учун

$$\lim_{t \to 0} A_t\, R_n(x) \geq f(x) - n > -\infty$$

бўлади. Бундан (2.5.22) га кўра 4-леммани қўллаб $\forall x \in \Omega$ учун

$$R_n(x) \geq 0$$

эканлигини ҳосил қиламиз. У ҳолда $\forall x \in \Omega$ учун

$$R(x) = \lim_{n \to \infty} R_n(x) \geq 0$$

бўлади. Худди шунга ўхшаш $R(x) \leq 0$ эканлиги исбот қилинади, яъни $R(x) = 0$ бўлади. Шунга кўра, $R(x) = g(x) - \varphi(x)$ бўлгани учун $g(x) \equiv \varphi(x)$ ҳосил бўлади.

Агар $g(x)$ функция чегарада айнан ноль бўлмаса, у ҳолда леммани исбот қилиш учун $g(x)$ функция ўрнига $\psi(x) = g(x) - \omega(x)$ функцияни қараш етарлидир, бунда $\omega(x)$– функция

$$A\omega(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

$$\omega(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega$$

чегаравий масаланинг ечими.

Бу 5-леммадан фойдаланиб келтирилган теоремани исбот қилиш мумкин бўлади.

6- §. Банах ва Гильберт фазоларидаги базислар

1. Гильберт фазосида базис тушунчаси.

Маълумки, чексиз ўлчамли тўла евклид фазоси Гильберт фазоси деб, тўла нормаланган фазо Банах фазоси деб аталади. Гильберт фазоларида ортонормал системаларнинг тўлалиги ва ёпиқлиги тушунчаларининг эквивалент эканлигини биламиз. Шунинг учун айрим адабиётларда ёпиқлик тушунчаси тўлалик деб қабул қилинган. Шунга кўра, тўлалик таърифи қуйидагича келтирилади[1].

Таъриф. *Агар ихтиёрий H Гильберт (Банах) фазосидаги ихтиёрий x элементни $\{e_i\}$ системанинг чекли чизиқли комбинацияси ёрдамида ихтиёрий аниқлик даражасида норма бўйича яқинлаштириш мумкин бўлса, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай бир $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ чекли чизиқли комбинация топилиб $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлса, у ҳолда $\{e_i\}$ элементлар системаси тўла система деб айтилади.*

Берилган $\{e_i\}$ тўла системани ўрганишда берилган система қаралаётган сепарабель фазода *базис* ташкил қиладими деган масала жуда муҳимдир, яъни *фазонинг ихтиёрий x элементини шу фазо нормаси бўйича яқинлашувчи $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cdot e_i$ қатор шаклида ягона равишда тасвирлаб бўлади*ми деган масаладир, бунда ξ_i-сонлардир. Агар фазода базис мавжуд бўлса, у ҳолда бу фазо сепарабел фазо эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Бироқ, барча асосий сепарабел Банах фазоларида базис қурилган бўлсада, ихтиёрий сепарабел Банах фазосида базиснинг мавжудлиги ҳақидаги масала қийин масала бўлиб келди ва бу масала яқин вақтлардагина манфий ечилди. 1972 йилда М. Энфло базис мавжуд бўлмайдиган рефлексив сепарабел банах фазосини қурди.

---

[1] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

В.А. Садовничий. Теория операторов. М.: Из-во МГУ, 1986.

А.М. Тер-крикоров, М.И. Шабунин. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

Агар E банах фазосида $\{e_i\} \subset E$ система тўла ва чизиқли-боғлиқ элементларни сақламаса ҳам, унинг базис ташкил қилиши ҳамма вақт ҳам келиб чиқавермайди. Ҳақиқатдан ҳам, масалан $C[0,1]$ фазони олайлик. $\{t^k\},\ k = 0, 1, 2, ...$ кетма-кетлик Вейерштрасс теоремасига кўра, бу фазода тўла, лекин базис ташкил қилмайди. Ҳақиқатдан ҳам, агар $f(t)$ функция учун текис яқинлашувчи $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ қатор бўлса, у ҳолда $|t| < 1$ учун қаторнинг текис яқинлашувчи эканлигидан $f(t)$ функциянинг аналитик функция эканлиги келиб чиқади. Кўриниб турибдики, бундай функциялар бутун $C[0,1]$ фазони тўлдирмайди. Шунинг учун $\{t^k\},\ k = 0, 1, 2, ...$ система $C[0,1]$ фазода базис эмас.

Бу $\{t^k\},\ k = 0, 1, 2, ...$ кетма-кетлик $L_2[0,1]$ (Лебег маъносида квадрати билан интеграланувчи функциялар, $(f, g) = \int_0^1 f \cdot \bar{g} dx$) фазода ҳам базис эмас. Ҳақиқатдан ҳам, агар $f(t) \in L_2[0, 1]$ ва $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ бўлиб, бу қатор $L_2[0, 1]$ фазо метрикаси бўйича яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда унинг ҳар иккала томонини $g(t) = \begin{cases} 1, & t \le s \\ 0, & t > s \end{cases}$ функцияга кўпайтириб интеграллаймиз. Натижада $0 \le s \le 1$ бўлган ихтиёрий s учун

$$\int_0^s f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} s^{k+1}$$

тенглик ўринли бўлиб, бундан $|s| < 1$ учун $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ функциянинг аналитик эканлиги келиб чиқади. Шунга кўра $|t| < 1$ учун $f(t)$ функция ҳам аналитик бўлади. Демак, $\{t^k\},\ k = 0, 1, 2, ...$ кетма-кетлик $L_2[0,1]$ фазода ҳам базис эмас.

Агар сепарабель Гильберт фазоси берилган бўлса, у ҳолда тўла ортонормал система базис бўлади. Бундан ташқари, бир қийматли аниқланадиган ξ_i коэффициентлар учун $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2$ тенглик ўринли бўлади. Бу ҳолда $\{e_i\}$ системанинг ортонормал эканлигидан ξ_i коэффициентлар $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\cdot e_i$ тенгликдан қуйидагича ҳосил қилинади:

$$(x,e_k)=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i,\ e_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i,\ e_k\right)=\xi_k\,.$$

Қуйидаги теорема ўринлидир.

1-Теорема *H сепарабель Гильберт фазосидаги ҳар қандай* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– тўла ортонормал система базис бўлади, яъни ихтиёрий* $f\in \mathrm{H}$ *учун*

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n$$

ягона ёйилма ўринли бўлади, бундан ташқари $\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\varphi_n)|^2$ *Парсеваль тенглиги ўринлидир.*

Исбот. $\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\varphi_n)|^2$ қатор яқинлашишни исбот қиламиз. $g=\sum_{n=1}^{p}(f,\varphi_n)\varphi_n$ векторни тузамиз. $f=g+h$ бўлсин, бунда h шу тенгликдан аниқланади. h вектор $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_p$ векторларнинг ихтиёрий бирига ортогонал ва шунга кўра, уларнинг чизиқли қопламасига ҳам ортогоналдир. Ҳақиқатдан ҳам,

$$(h,\varphi_j)=(f,\varphi_j)-(g,\varphi_j)=(f,\varphi_j)-\left(\sum_{n=1}^{p}\ (f,\varphi_n)\varphi_n,\ \varphi_j\right)=$$

$$=(f,\varphi_j)-(f,\varphi_j)=0,\qquad j=1,\,2,\,...,\,p$$

бўлади. Пифагор теоремасига кўра,

$$\|f\|^2=\|g\|^2+\|h\|^2=\sum_{n=1}^{p}|(f,\varphi_n)|^2+\|h\|^2\geq\sum_{n=1}^{p}|(f,\varphi_n)|^2$$

тенгсизлик ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, ихтиёрий p учун $\sum_{n=1}^{p}\left|(f,\varphi_n)\right|^2 \le \|f\|^2$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда $p\to\infty$ да лимитга ўтиб, Бессель тенгсизлиги деб аталувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(f,\varphi_n)\right|^2 \le \|f\|^2$$

тенгсизликка эга бўламиз. Ёзувни қисқартириш мақсадида $\left(f,\varphi_n\right)=\xi_n$ деб оламиз. $S_p=\sum_{n=1}^{p}\xi_n\varphi_n$ бўлсин. У ҳолда

$$\left\|S_p-S_q\right\|^2=\sum_{n=p+1}^{q}\left|\xi_n\right|^2,\quad q>p.$$

Бу миқдорнинг нолга интилиши Бессель тенгсизлигига кўра, $\left|\xi_n\right|^2,\quad n=1,2,\ldots$, сонлардан тузилган қаторнинг яқинлашишидан келиб чиқади. Шунинг учун $\left\{S_p\right\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлиб, H гильберт фазосининг тўлагигига кўра яқинлашувдир, яъни $\lim\limits_{p\to\infty}S_p=S\in\mathrm{H}$ бўлади. Энди $S=f$ эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун тайинланган k ва барча $p>k$ учун

$$\left(S,\varphi_k\right)=\lim_{p\to\infty}\left(S_p,\varphi_k\right)=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{p}\xi_n\varphi_n,\ \varphi_k\right)=\xi_k=(f,\varphi_k)$$

муносабатни эътиборга олсак, ихтиёрий k учун

$(f-S,\varphi_k)=(f,\varphi_k)-(S,\varphi_k)=0$ бўлиб, $\left\{\varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ система тўлалигига кўра, $f=S$ ҳосил бўлади, яъни $f=\lim\limits_{p\to\infty}S_p=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\varphi_n$ бўлади. Скаляр кўпайтманинг узлуксизлигига кўра,

$$\|f\|^2=(f,f)=(\lim_{p\to\infty}S_p,\lim_{p\to\infty}S_p)=\lim_{p\to\infty}(S_p,S_p)=\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p}\left|\xi_n\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\xi_n\right|^2$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

***1-Эслатма**. Агар g – шу фазодаги ихтиёрий бошқа вектор бўлса, у ҳолда* $(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\cdot\overline{(g,\varphi_n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\cdot\overline{\eta_n}$ *тенглик* *ўринли бўлади, бунда* $\eta_n=(g,\varphi_n)$, $g=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(g,\varphi_n)\varphi_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_n\varphi_n$ *ва* $\xi=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2$, $\eta=\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2$ *бўлади.*

2-Эслатма*. Агар* $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots$ *– ихтиёрий сонлар кетма–кетлиги учун* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$ *бўлса, у ҳолда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n\varphi_n$ *қатор* H *фазода яқинлашувчи бўлади.*

Агар бу қатор йиғиндисини f орқали белгиласак, у ҳолда f ни φ_k га кўпайтириш ёрдамида $\xi_k=(f,\varphi_k)$ тенгликка эга бўламиз. Шундай қилиб, квадратларидан тузилган қатор яқинлашувчи бўлган барча сонлар кетма–кетликлари ва H векторлар фазоси ўртасида ўзаро-бир қийматли мослик мавжуд, яъни l_2 фазо ва H векторлар фазоси ўртасида ўзаро-бир қийматли мослик мавжуд экан. Бундай мослик кўриниб турибдики, чизиқлилик хоссасини сақлайди. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$ қатор яқинлашувчи бўлган $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма–кетликлардан тузилган l_2 чизиқли фазода скаляр кўпайтмани

$$(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\cdot\overline{\eta_n}<\infty$$

формула билан киритилиши мумкин. Бу l_2 фазо саноқли ўлчовли ва тўладир. Ҳамда l_2 фазо ва H векторлар фазоси ўртасида скаляр кўпайтма ҳам сақланади, яъни $(f,g)_H=(\xi,\eta)_{l_2}$ тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, ихтиёрий иккита тўла сепарабел Гильберт фазолари ўзаро изоморфдир, яъни чизиқлилик амали ва скаляр кўпайтмани сақлайдиган ўзаро бир қийматли мослик мавжуддир. Бу мосликнинг мавжудлиги ихтиёрий тўла сепарабел H Гильберт фазоси билан l_2 фазо ўртасидаги мослик $f\in H$ векторга $\xi=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_2$ векторни f векторнинг $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормал система бўйича Фурье коэффициентлари бўладиган қилиб мос қўйиш орқали, яъни $f=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\varphi_n$ тенгликдан аниқланади. Шунинг учун улар ўзаро изоморфдирлар. Бундай фазолар бир-биридан фарқ қилинмайди.

Хусусан, элементлари квадрати билан Лебег маъносида интегралланувчи бўлган эквивалент функциялар синфларидан иборат $L_2[a,b]$ фазо Гильберт фазоси бўлиб, l_2 фазога изоморфдир. Бу фазода скаляр кўпайтма

$$(f(x),\,g(x))=\int_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx,\quad f(x)\in L_2[a,b],\ g(x)\in L_2[a,b]$$

қоида билан киритилади, бунда $\overline{g(x)}$ – эса, $g(x)$ функциялар синфига комплекс–қўшма функциялар синфидан олинган.

Бу $L_2[a,b]$ Гильберт фазоси тўла ва сепарабелдир. Ундаги ҳамма жойда зич саноқли тўплам сифатида, масалан, рационал коэффициентли кўпҳадлар тўпламини олиш мумкин. Бу рационал коэффициентли кўпҳадлар тўплами $C[a,b]$ тўпламда зич бўлиб, $C[a,b]$ узлуксиз функциялар тўплами эса, $L_2[a,b]$ фазода зичдир. Шундай қилиб, $L_2[a,b]$ сепарабель Гильберт фазоси ва l_2 фазолар ўзаро изоморфдирлар ва улар бир-биридан фарқ қилинмайди, чунки улар H сепарабель Гильберт фазосининг ҳар хил кўринишларидир.

2. Гильберт фазосининг ўлчами.

Гильберт фазоси, бир томондан, чизиқли фазо ва алгебраик базисга эга, иккинчи томондан скаляр кўпайтма киритилиши ортонормал базисни қарашга олиб келади. Шунинг учун, Гильберт фазосининг ўлчами тушунчаси иккита ҳар хил маънога эга: алгебраик базис ташкил қилувчи элементлар тўпламининг қуввати сифатида аниқланадиган ўлчами *(алгебраик ўлчам)* ва $\{\varphi_\alpha\}$ тўла ортонормал система элементлари тўпламининг қуввати сифатида аниқланадиган ўлчами (Қуйида бу охирги ўлчам $\{\varphi_\alpha\}$ тўла ортонормал система элементларининг танланишига боғлиқ эмаслиги кўрсатилади ва *ортогонал ўлчам* деб аталади).

Сепарабель гильберт фазосида 1-теоремага кўра ортонормал базис мавжуд бўлиб, у саноқли тўплам қуввати кабидир. Ҳақиқатдан, H фазода саноқли тўла системага ортонормалаштириш процессини қўллаб, биз яна саноқли тўла ва ортонормал системага эга бўламиз, яъни саноқли базис. Иккинчи томондан, агар H фазода ортонормал базис бўлса, у ҳолда H фазода саноқли ва ҳамма жойда зич тўплам мавжуд бўлади. $\{\varphi_n\}_1^{\infty}-$ ортонормал базис, $M-$ эса, $\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}\cdot\varphi_k$ кўринишдаги векторлар тўплами, бунда $\gamma_k^{(n)}=\alpha_k^{(n)}+i\beta_k^{(n)},\quad \alpha_k^{(n)},\beta_k^{(n)}-$ рационал сонлар бўлсин. Ихтиёрий $h\in\mathrm{H}$ ва ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир n номер топиш мумкинки, натижада $\left\|h-\sum_{k=1}^{n}(h,\varphi_k)\varphi_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик ўринли, ҳамда ундан кейин (h,φ_k) сонни унга яқин $\gamma_k^{(n)}$ сон билан алмаштириш ҳисобига $\left\|\sum_{k=1}^{n}\left\{(h,\varphi_k)-\gamma_k^{(n)}\right\}\varphi_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизликка эга бўламиз. Шундай қилиб, $f_n=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}\varphi_k$ вектор М саноқли тўпламга қарашли ва ихтиёрий аниқликда ихтиёрий $h\in\mathrm{H}$ векторни аппроксимация қилади: $\|h-f_n\|<\varepsilon$. Шунинг учун H фазо сепарабель фазо бўлади, яъни сепарабель Гильберт фазолари ва фақат шуларгина саноқли ортонормал базисга эга бўлади.

Сепарабель фазодаги ихтиёрий иккита тўла ортонормал системанинг қуввати бир хилдир. Ҳақиқатдан ҳам, у ҳолда фазо юқорида кўрсатилганидек, саноқли базисга эга. Агар бундан ташқари яна саноқсиз ортонормал базис мавжуд бўлса, у ҳолда ихтиёрий аниқликда унинг элементларини саноқли тўплам билан яқинлаштириш мумкин бўлмас эди. Демак, бу ҳолда сепарабель бўлмаган фазо ҳосил бўлар эди ва қарама–қаршиликка олиб келар эди.

Шундай қилиб, сепарабель Гильберт фазосидаги ихтиёрий ортонормал базис саноқли тўплам қувватига тенг қувватга эга ва сепарабель Гильберт фазоси саноқли ўлчамли (ортогонал ўлчам маъносида) деб айтилади. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий сепарабель бўлмаган фазоларда ҳам барча ортонормал базислар, бир хил қувватга эга бўлиб, фазонинг ортогонал ўлчами деб айтилади. Бу фактнинг исботига тўхталиб, ўтирмасдан саноқли ўлчамли бўлмаган Гильберт фазосига мисол келтирамиз.

$e^{i\lambda t}$, $-\infty < t < \infty$, шаклидаги барча функциялар тўпламини қараймиз, бунда $\lambda \in R^1$ параметр. Бу тўпламнинг чизиқли қопламаси L бўлсин, яъни $f_M = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{i\lambda_k t}$ шаклидаги элементлар бўлсин. Бундай иккита $f_M = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{i\lambda_k t}$ ва $g_N = \sum_{p=1}^{N} a_p e^{i\mu_p t}$ элементнинг скаляр кўпайтмасини

$$(f_M, g_N) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f_M \cdot \bar{g}_N dt = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=1}^{M} \sum_{p=1}^{N} a_k \bar{b}_p \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(\lambda_k - \mu_p)} dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \sum_{p=1}^{N} a_k \bar{b}_p \, \delta(\lambda_k, \mu_p)$$, бунда $\delta(\lambda, \mu) = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \mu \\ 1, & \lambda = \mu \end{cases}$ қоида бўйича аниқлаймиз. Бу скаляр кўпайтма ёрдамида яратилган метрика бўйича L тўпламни тўлдирамиз. Натижада, биз H Гильберт фазосига эга бўламиз. Бу фазо сепарабел бўлмайди, чунки унда континуумта ўзаро ортогонал векторлар мавжуд. Юқорида айтганимиздек, бу фазонинг ўлчами ҳақиқий сонлар тўпламининг қуввати каби қувватга эга, яъни континуум қувватга эгадир.

3. Гильберт фазосида ортогонал ёйилмалар. H Гильберт фазоси учун қуйидаги муҳим теорема ўринлидир.

2-Теорема. *H Гильберт фазоси ва $L-$ эса, H Гильберт фазосидаги қисм-фазо бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $f \in \mathrm{H}$ элемент учун $f = g + h$, $g \in L$, $h \perp L$ (яъни L даги ихтиёрий векторга ортогонал) ёйилма мавжуд бўлиб, g ва h элементлар бир қийматли аниқланади.*

Исбот. $d = \inf\limits_{g \in L} \| f - g \|$ деб белгилаймиз. $d = 0$ бўлсин, у ҳолда $g_n \in L$ кетма-кетлик мавжуд бўлиб, $n \to \infty$ да $\| f - g_n \| \to 0,$ бундан эса f элементнинг L учун лимитик нуқта эканлиги келиб чиқади ва L қисм-фазонинг ёпиқлигига кўра $f \in L$ бўлади. Шунинг учун изланаётган ёйилма $f + 0$ шаклида бўлади.

$d > 0$ бўлсин. $g_n \in L$ кетма-кетликни $n \to \infty$ да $\| f - g_n \| \to d$ бўладиган қилиб оламиз. Бевосита текшириш ёрдамида параллелограм айниятидан қуйидаги тенгликнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$2\| f - g_n \|^2 + 2\| f - g_m \|^2 = 4\left\| f - \frac{g_n + g_m}{2} \right\|^2 + \| g_n - g_m \|^2$$

тенгликнинг чап томон $n,\ m \to \infty$ да $4d^2$ га интилади. Ўнг томондаги биринчи қўшилувчи учун $4\left\| f - \frac{g_n + g_m}{2} \right\|^2 \geq 4d^2$ тенгсизлик ўринли, чунки $\frac{g_n + g_m}{2} \in L,\ \left\| f - \frac{g_n + g_m}{2} \right\| \geq d$. Шунга кўра, $n,\ m \to \infty$ да $\| g_n - g_m \| \to 0$ бўлади. Шунинг учун $\{g_n\}_1^\infty$ фундаментал кетма-кетлик бўлиб, H фазонинг тўлалигига кўра, бу кетма-кетлик яқинлашувчидир, яъни $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$, бунда $g \in L$ чунки L тўплам H фазода ёпиқдир. $h = f - g$ бўлсин, у ҳолда $h \perp L$ бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий $l \in L$ вектор ва ихтиёрий λ сон учун

$$d^2 \leq \| f - (g - \lambda l) \|^2 = \| h + \lambda l \|^2 =$$
$$= (h + \lambda l,\ h + \lambda l) = d^2 + \overline{\lambda}(h,l) + \lambda(l,h) + |\lambda|^2 \cdot \| l \|^2$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ердан

$$\overline{\lambda}(h,l) + \lambda(l,h) + |\lambda|^2 \| l \|^2 \geq 0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизлик ихтиёрий λ сон учун $(h,l) = (l,h) = 0$ бўлгандагина ўринли бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $\lambda = t \cdot e^{i\arg(h,l)}$ ва $t -$ҳақиқий сонни олиш етарлидир.

$f = g + h,\quad g \in L,\quad h \perp L$ ёйилма ягонадир. Фараз қилайлик, $f = g + h = g' + h'$, бунда g, g' лар L қисм-фазога қарашли, $h, h' \perp L$ бўлсин. У ҳолда $0 = (g - g') + (h - h')$ тенглик ўринли бўлади, бунда $g - g' \in L,\ \ h - h' \perp L$. Пифагор теоремасига кўра, $g - g' = h - h' = 0$ эканлиги ва бундан $g = g',\ h = h'$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

L қисм-фазога ортогонал бўлган барча h векторлар (ноль векторни қўшган ҳолда) тўплами ёпиқ M қисм-фазони ташкил қилиб, унга L қисм-фазонинг *ортогонал тўлдирувчиси* деб айтилади.

Шундай қилиб, биз ҳар қандай $L \subset H$ қисм-фазо учун M ортогонал тўлдирувчи мавжуд эканлигини, бундан ташқари ихтиёрий $f \in H$ вектор учун $f = g + h, \quad g \in L, \quad h \in M$ ёйилма ўринли эканлигини ҳосил қиламиз, бундан ташқари $\| f \|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$ тенглик ҳам ўринли бўлади.

Бундай ҳолда, H фазо L ва M қисм-фазоларнинг тўғри йиғиндисига ёйилади деб айтилади ва $H = L \oplus M$ ёки $L = H - M$ шаклида ёзилади, бунда ихтиёрий $f \in H$ вектор учун $f = g + h, \quad g \in L, \quad h \in M$, $g \perp h$ ёйилма ягонадир.

4. Биортогонал кетма-кетликлар.

H Гильберт фазосида иккита $\{ f_k \}_{k=1}^{\infty}$ ва $\{ g_k \}_{k=1}^{\infty}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин.

Таъриф. *Агар H Гильберт фазосидаги $\{ f_k \}$, $\{ g_k \}$, $k = 1, 2, ...$ кетма-кетликлар жуфти учун*

$$\left(f_j,\ g_k \right) = \delta_{jk} \quad \left(j,\ k = 1, 2, 3, ... \right) \quad \left(\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \right)$$

тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликлар H гильберт фазосида биортогонал системани ташкил қилади деб айтилади.

Чизиқли боғлиқ бўлмаган ҳар қандай кетма-кетлик учун ҳам биортогонал кетма-кетлик мавжуд бўлавермаслиги мумкин. Масалан, $L_2[0,1]$ фазода $\left\{ t^k \right\}_{k=0}^{\infty}$ кетма-кетлик учун биортогонал кетма-кетлик мавжуд эмас. Ҳақиқатдан ҳам, бундай $\{ g_k \}_{k=0}^{\infty}$ кетма-кетлик мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\int_0^1 g_m(t) \cdot t^m dt = 1, \quad \int_0^1 g_m(t) \cdot t^k dt = 0, \quad k \neq m$$

тенгликларга эга бўлар эдик. Лекин бу ҳолда

$$\int_0^1 \left\{ g_m(t) t^{m+1} \right\} \cdot t^j dt = 0, \quad j = 0, 1,\ 2,\ ...$$

тенгликлар ҳосил бўлиб, $\left\{t^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ системанинг $L_2[0,1]$ фазода тўлалигига асосан (бу система Вейерштрасс теоремасига кўра $C[0,1]$ фазода тўла ва бу узлуксиз функциялар фазоси эса, $L_2[0,1]$ фазода зичдир) $g_m(t)\, t^{m+1} \equiv 0$ тенгликни ҳосил қиламиз, яъни $g_m(t)\, t^m \equiv 0$, бунда эса, $\int_0^1 g_m(t) \cdot t^m dt = 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу $\int_0^1 g_m(t) \cdot t^m dt = 1$ муносабатга зиддир. Бу қарама-қаршилик $L_2[0,1]$ фазода $\left\{t^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ кетма-кетлик учун биортогонал кетма-кетлик мавжуд эмаслигини кўрсатади.

Энди биортогонал системаларни бир оз кенгроқ ўрганамиз. Берилган система учун биортогонал кетма-кетликнинг мавжудлиги ҳақидаги критериялардан бирини исбот қиламиз.

3-Теорема. *$\{f_k\}$ векторлар кетма-кетлиги биортогонал кетма-кетликка эга бўлишлиги учун ҳеч бир j натурал сон учун f_j вектор қолган f_1, f_2, ... , f_{j-1} , f_{j+1} , ... векторларнинг ёпиқ чизиқли қопламасига (яъни чизиқли қопламасининг ёпиғига) тегишли бўлмаслиги зарур ва етарлидир.*

Бу кейинги шарт бажарилганда система минимал система деб айтилади.

Агар система минимал ва тўла система бўлса, у ҳолда биортогонал кетма-кетлик ягона равишда аниқланади.

Исбот. Етарлилиги. $\{f_k\}$ система минимал бўлсин. $f_1, f_2, ..., f_{j-1}, f_{j+1}, ...$ векторларнинг чизиқли қопламасининг ёпиғини M_j орқали белгилаймиз. Ҳамда барча f_k, $k = 1,2,...$– векторларнинг чизиқли қопламасининг ёпиғини эса М орқали белгилаймиз. Шартга кўра, ихтиёрий j натурал сон учун $M_j \neq M$ бўлади. M_j–нинг ортогонал тўлдирувчиси $N_j = M - M_j$ бўлсин. $g_j \in N_j$ векторни оламиз. Бундай вектор албатта мавжуддир. Уни

$$(f_j,\ g_j) = 1$$

шарт билан нормалаштирамиз. Кўриниб турибдики, $j \neq k$ учун $(f_j, g_k) = 0$ тенгликка эга бўламиз, чунки $g_k \in N_k$ вектор $f_1, f_2, ..., f_{k-1}, f_{k+1}, ...$ векторлар чизиқли қопламаси ёпиғининг ортогонал тўлдирувчисидан олинган. Шунинг учун, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ кетма-кетлик $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – кетма-кетликка биортогоналдир.

Зарурлиги. Агар $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ кетма-кетлик $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ кетма-кетликка биортогонал бўлса, у ҳолда ихтиёрий j учун f_j вектор M_j га тегишли бўла олмайди. Ҳақиқатдан ҳам, бу ҳолда f_j вектор g_j векторга ортогонал бўлган бўлур эди, чунки $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ кетма-кетлик $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ системага биортогоналдир, яъни $k \neq j$ учун $(g_j, f_k) = 0$ бўлгани учун g_j вектор $M_j = \{f_1, f_2, ..., f_{j-1}, f_{j+1}, ...\}$ билан ортогоналдир. Шундай қилиб, биз агар $f_j \in M_j$ бўлса, у ҳолда $(g_j, f_j) = 0$ тенгликни ҳосил қилган бўлур эдик, бу эса $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ кетма-кетлик $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ системага биортогонал эканлигига зиддир.

Ниҳоят, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ система минимал ва тўла система бўлсин. У ҳолда, N_j бир ўлчамли бўлади, акс ҳолда система тўла бўлмайди. Бу ҳолда $g_j \in N_j$ элемент $g_j \in N_j$, $(g_j, f_j) = 1$ шартлардан бир қийматли аниқланади. Теорема исбот бўлди.

Биортогонал система базис бўйича ёйилма коэффициентларини аниқлашга имкон беради. Ҳақиқатдан ҳам, агар $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ ва $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ системага биортогонал бўлса, у ҳолда $(f, g_j) = c_j$ бўлади.

Энди Банах фазосини қарайлик ва базисга биортогонал бўлган кетма-кетликни аниқлаймиз. B сепарабель банах фазосидаги $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик базис бўлсин. B фазо нормаси бўйича $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ қатор яқинлашувчи бўладиган $y = (c_1, c_2, ..., c_n, ...)$

сонли кетма-кетликни қараймиз. Барча бундай сонли кетма-кетликларнинг B_1 тўплами чизиқли фазо ташкил қилади. Бу фазода нормани

$$\|y\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \right\|$$

кўринишида киритамиз. Норманинг барча аксиомалари бажарилиши ҳеч қандай қийинчиликсиз текширилади. Бу фазонинг тўла, яъни Банах фазоси эканлигини кўрсатамиз. Агар

$$(c_1^m, c_2^m, ..., c_n^m, ...) = y_m \in B_1$$

бўлган $\{y_m\}$ – кетма-кетлик фундаментал бўлса, у ҳолда $m \geq N(\varepsilon)$ ва $k \geq N(\varepsilon)$ учун

$$\|y_m - y_k\|_{B_1} = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^k)\varphi_i \right\|_B < \varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлади ва шунинг учун ихтиёрий n номер учун $m \geq N(\varepsilon)$, $k \geq N(\varepsilon)$ бўлганда $\left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^k)\varphi_i \right\|_B < \varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Бундан эса,

$$\|(c_n^m - c_n^k)\varphi_n\|_B = \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^k)\varphi_i - \sum_{i=1}^{n-1} (c_i^m - c_i^k)\varphi_i \right\|_B < 2\varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шунинг учун ихтиёрий n номер учун $m \geq N(\varepsilon)$, $k \geq N(\varepsilon)$ бўлганда $\left| c_n^m - c_n^k \right| < \dfrac{2\varepsilon}{\|\varphi_n\|_B}$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунга кўра, $\{c_n^m\}$, $m = 1, 2, ...$ сонли кетма-кетлик қандайдир c_n^* лимитга яқинлашади ва бу ихтиёрий n номер учун ўринли бўлади.

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^k)\varphi_i \right\|_B < \varepsilon$$

тенгсизликда $k \to \infty$ да лимитга ўтамиз. У ҳолда

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^k)\varphi_i \right\|_B \leq \varepsilon, \text{ яъни } \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^*)\varphi_i \right\|_B \leq \varepsilon$$

тенгсизликка эга бўламиз.

$$S_n^m = \sum_{i=1}^{n} c_i^m \varphi_i, \; S_n^* = \sum_{i=1}^{n} c_i^* \varphi_i$$

деб олайлик. Олдинги тенгсизликдан ихтиёрий n номер учун $m \geq N(\varepsilon)$ бўлганда $\left\| S_{n+p}^* - S_n^* \right\| \leq \left\| S_{n+p}^m - S_n^m \right\| + 2\varepsilon$ тенгсизликка эга бўламиз. Қандайдир $\delta > 0$ сон берилган бўлсин. Энди $\varepsilon > 0$ сонни $2\varepsilon < \dfrac{\delta}{2}$ тенгсизлиги ўринли бўладиган қилиб танлаймиз, кейин эса, $N(\varepsilon)$ номерни танлаймиз ва M_0 сонни шундай танлаймизки, $n \geq M_0$ учун, ҳамда ихтиёрий $p > 0$ учун $\left\| S_{n+p}^m - S_n^m \right\| < \dfrac{\delta}{2}$ тенгсизлиги ўринли бўлади, чунки $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^m \varphi_n$ қатор яқинлашувчидир. Шунга кўра, ихтиёрий $n \geq M_0$ учун $\left\| S_{n+p}^* - S_n^* \right\| < \delta$ тенгсизлиги ўринли бўлади, яъни $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \varphi_n$ қатор яқинлашувчидир. Шунинг учун $(c_1^*, c_2^*, ..., c_n^*, ...) = y^* \in B_1$ бўлади. Бундан ташқари, ихтиёрий $m \geq N(\varepsilon)$ учун $\sup\limits_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^*) \varphi_i \right\|_B \leq \varepsilon$ тенгсизликка эга бўламиз, яъни $m \geq N(\varepsilon)$ учун $\left\| y_m - y^* \right\|_{B_1} \leq \varepsilon$ тенгсизлигини ҳосил қиламиз ва B_1 фазонинг тўлалиги исбот бўлади.

Кўриниб турибдики, ҳар бир $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \varphi_i$ элементга ягона $y_x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \in B_1$ элемент мос келади. Аксинча, ҳар бир $y_x = \{\xi_i\} \in B_1$ элементга айнан $x_y = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \varphi_i$ бўлган ягона $x_y \in B$ элемент мос келади.

Шундай қилиб, B_1 фазони B фазога акслантирувчи ўзаро бир қийматли $x = Ay$ оператор аниқланган деб ҳисоблаш мумкин. Бу оператор чизиқли эканлигини кўриш мумкин. Бундан ташқари,

$$\|Ay\| = \|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i\right\| \le \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_i\right\| = \|y\|, \quad x = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i$$

бўлади, яъни чегараланган. Тескари оператор ҳақидаги Банах теоремасига кўра, $y = A^{-1}x$ тескари оператор мавжуд бўлиб, бу оператор чизиқли ва чегараланган бўлади.

Энди $x = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i \in B$ бўлсин. F_k функционални $F_k(x) = \xi_k$ тенглик билан аниқлаймиз. Кўриниб турибдики, бу F_k функционал чизиқлидир. Бундан ташқари,

$$|F_k(x)| = |\xi_k| = \frac{|\xi_k|\|\varphi_k\|}{\|\varphi_k\|} = \frac{\left\|\sum_{i=1}^{k}\xi_i\varphi_i - \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i\varphi_i\right\|}{\|\varphi_k\|} \le$$

$$\le 2\sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_i\right\|_B \frac{1}{\|\varphi_k\|} = \frac{2\|y\|}{\|\varphi_k\|} = \frac{2\|A^{-1}x\|}{\|\varphi_k\|} \le \frac{2\|A^{-1}\|}{\|\varphi_k\|}\|x\|$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга кўра, $\|F_k\| \le \dfrac{2\|A^{-1}\|}{\|\varphi_k\|}$ тенгсизлик ўринли бўлади, яъни ихтиёрий k учун F_k функционал чегаралангандир.

Шундай қилиб, ихтиёрий $x \in B$ учун

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x)\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\,\varphi_i$$

тенгликка эга бўламиз. Хусусан, $x = \varphi_j$ деб олсак, у ҳолда x элементнинг базис бўйича ёйилмаси ягоналигига кўра

$$\xi_i = \begin{cases} 1, \text{ агар } i = j \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } i \ne j \text{ бўлса} \end{cases}$$

шаклида бўлади, яъни

$$(F_i, \varphi_j) = F_i(\varphi_j) = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ агар } i = j \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } i \ne j \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади. Бу ерда (F_i, φ_j) ифода Гильберт фазосидаги скаляр кўпайтма эмас, балки $F_i(\varphi_j)$ функционалнинг бошқача шаклидир. $\{F_i\}$ кетма-кетликка $\{\varphi_i\}$ кетма-кетликка *қўшма* *биортогонал кетма-кетлик* деб айтилади. Таъкидлаш керакки, $F_i \in B^*-$ қўшма фазога тегишли ва B^* қўшма фазо умуман олганда B фазо билан устма-уст тушмайди. Берилган системага биортогонал бўлган система шу H фазодаги кетма-кетлик сингари шу фазодан олинган система орқали аниқланган эди. $\{F_i\} \in B^*-$ кетма-кетлик қўшма фазодан олинган ва шунинг учун уни *қўшма биортогонал кетма-кетлик* деб атадик.

Гильберт фазоси бўлган ҳолда базисга биортогонал бўлган кетма-кетликни ҳамма вақт шу фазонинг ўзидан кўрсатиш мумкин. Бунинг учун Гильберт фазоси $H = H^*$ хоссага эга эканлигини исботлаш етарлидир. Ҳақиқатдан ҳам, H ва H^* фазоларнинг изоморфлиги ҳақидаги қуйидаги теорема ўринлидир.

4-Теорема (Рисс теоремаси). *H ҳақиқий Гильберт фазоси бўлсин. Бу H Гильберт фазосида берилган ҳар қандай чизиқли узлуксиз F функционал учун шундай бир ягона $h_0 \in \mathrm{H}$ элемент мавжуд бўлиб*

$$F(h) = (h, h_0), \ h \in H$$

тенглик ўринли бўлади, ҳамда $\|F\| = \|h_0\|$. Аксинча, агар $h_0 \in \mathrm{H}$ бўлса, у ҳолда $F(h) = (h, h_0)$ чизиқли узлуксиз функционал ва $\|F\| = \|h_0\|$ тенглик ўринли бўлади. Шундай қилиб, H *ва* H^* *фазолар изоморфдир.*

Исбот. Маълумки, ихтиёрий $h_0 \in \mathrm{H}$ вектор учун $F(h) = (h, h_0)$ формула бўйича чизиқли функционал аниқланади. $|F(h)| \le \|h\|\|h_0\|$ бўлгани учун бу функционал узлуксиз ва $\|F\| \le \|h_0\|$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда ёзилган тенгсизликда $h = h_0$ учун тенглик белгисига эришилади:

$$F(h_0) = (h_0, h_0) = \|h_0\|^2 = \|h_0\| \cdot \|h_0\|.$$

Шунинг учун $\|F\| = \|h_0\|$ бўлади.

Ҳар қандай чизиқли узлуксиз F функционални қандайдир $h_0 \in \mathrm{H}$ элемент билан скаляр кўпайтма шаклида тасвирлаш мумкин эканлигини кўрсатамиз. Агар $F = 0$ бўлса, у ҳолда $h_0 = 0$ деб оламиз. Энди $F \ne 0$ ва F функционалнинг

$H_0 = \{h : F(h) = 0\}-$ ноль қисм-фазоси бўлсин (чунки F функционал узлуксиз бўлгани учун H_0- ёпиқдир). Энди $H_0 \neq H$ эканлигини кўрамиз. Бу ҳолда ортогонал тўлдирувчи ҳақидаги теоремага кўра, нолдан фарқли $f_0 \in H - H_0$ элемент мавжуд бўлади. $F(h) f_0 - F(f_0)h$ элементларни қараймиз, бунда h элемент бутун Н фазода ўзгаради. Бу элементлар H_0 фазога қарашли. Шунга кўра, $(F(h) f_0 - F(f_0)h,\ f_0) = 0$ бўлади. Бундан эса, $F(h)(f_0,\ f_0) = (h,\ F(f_0) f_0)$ тенглик келиб чиқади. Агар $h_0 = \dfrac{F(f_0)}{(f_0,\ f_0)} f_0$ деб олсак, у ҳолда ҳосил қилинган тенгликдан $F(h) = (h, h_0)$ эканлиги келиб чиқади. Бу эса, функционалнинг талаб этилган тасвиридир.

Бу тасвир ягонадир. Тескарисини фараз қилайлик, у ҳолда ихтиёрий $h \in H$ ва $h_0^{'} \neq h_0^{''}$ векторлар учун $(h, h_0^{'}) = (h, h_0^{''})$ тенглик ўринли бўлади. Агар $h = h_0^{'} - h_0^{''}$ деб олсак, у ҳолда $\left\| h_0^{'} - h_0^{''} \right\| = 0$ бўлади, яъни $h_0^{'} = h_0^{''}$ тенглик ҳосил бўлади. Бу эса, $h_0^{'} \neq h_0^{''}$ эканлигига зиддир. Теорема исбот бўлди.

3-Эслатма. *Агар Н комплекс Гильберт фазоси бўлса, у ҳолда ҳам 4-теорема ўринли бўлиб, лекин Н ни* H^* *га акслантириш қўшма изоморфдир, яъни* λh_0 *элементга* $\bar{\lambda} F$ *функционал мос келади.*

4-Эслатма. *Бу 4-теорема Н Гильберт фазосидаги чизиқли узлуксиз функционалнинг умумий шаклини ифодалайди. Айнан, ҳар қандай чизиқли узлуксиз функционалнинг Н Гильберт фазосидаги умумий шакли* $F(h) = (h, h_0)$ *кўринишда бўлади, бунда* h_0- *шу фазонинг тайинланган элементидир.*

Энди $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ система H Гильберт фазосидаги базис ва $g = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i \varphi_i$ ёйилма бўлсин. Банах фазоси бўлган ҳол сингари F_i функционалларни $g = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i \varphi_i$ векторга $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ базис бўйича унинг ξ_i коэффициентини мос қўядиган қилиб функционалларни киритамиз, яъни $F_i(g) = \xi_i$ бўлсин.

Гильберт фазосидаги функционалнинг умумий шакли ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, $F_i(g)$ функционални скаляр кўпайтма шаклида тасвирлаймиз, яъни $F_i(g) = (g, g_i)$ шаклида ёзамиз, бунда g_i вектор H Гильберт фазосидан олинган қандайдир вектордир.

Биз g векторни φ_j, $j = 1,2,...$ деб танлаб ва ихтиёрий банах фазоси учун ўринли бўлган $F_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$ муносабатдан фойдаланиб, $F_i(\varphi_j) = (\varphi_j, g_i) = \delta_{ij}$ тенгликни ҳосил қиламиз, яъни $\{g_i\}$ система $\{\varphi_j\}$ системага биортогоналдир. Бу ерда (φ_j, g_i) ёзув H Гильберт фазосидаги скаляр кўпайтмани билдиради. Бу $\{g_i\}$ система ягона равишда аниқланади.

Агар g вектор ихтиёрий $i = 1, 2, ...$ учун барча g_i векторларга ортогонал бўлса, у ҳолда ихтиёрий $i = 1, 2, ...$ учун $\xi_i = (g, g_i) = 0$ бўлади ва шунга кўра, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ базис эканлигидан $g = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \varphi_i = 0$ эканлиги келиб чиқади ва бундан эса, H гильберт фазосидаги базисга биортогонал бўлган кетма-кетлик тўла эканлиги келиб чиқади. Бунга қараганда ҳам, умумийроқ бўлган қуйидаги теорема ўринлидир.

5-Теорема (Биортогонал системаларнинг базислиги ҳақидаги Банах теоремаси). *H Гильберт фазосидаги $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ базисга биортогонал бўлган $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ кетма-кетлик ҳам шу H Гильберт фазосида базис бўлади.*

Исбот. Ихтиёрий $f \in \mathrm{H}$ векторни норма бўйича яқинлашувчи бўлган

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \psi_j) \varphi_j$$

қаторга ёйиш мумкин. Шунинг учун ихтиёрий $h \in \mathrm{H}$ элемент учун

$$(f,h)=\sum_{j=1}^{\infty}(f,\psi_j)(\varphi_j,h)$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлади. Шундай қилиб, ихтиёрий $f\in\mathrm{H}$ вектор учун $(f,h)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f,\sum\limits_{j=1}^{n}(h,\varphi_j)\psi_j\right)$ тенглик ўринли бўлади. Бу эса

$$h_n=Q_nh=\sum_{j=1}^{n}(h,\varphi_j)\psi_j,\quad n=1,2,\dots,\quad h\in\mathrm{H}$$

кетма-кетликнинг h векторга суст яқинлашишни билдиради. Ҳақиқатдан ҳам, ихтиёрий чизиқли узлуксиз $F=(\cdot\ ,\ f)$ функционал учун $F(h_n)=(h_n,\ f)$ ва $n\to\infty$ да $\overline{F(h_n)}=(f,\ h_n)\to(f,\ h)=\overline{F(h)}$ тенгликлар ўринли бўлади. Лекин, ҳар қандай суст яқинлашувчи кетма-кетлик чегаралангандир ва шунинг учун ихтиёрий n натурал сон учун $\|Q_nh\|\le M\,\|h\|,\ \ \|h\|=1$ тенгсизлик ўринли ва шунга кўра, $\|Q_n\|\le M=const$ тенгсизлик келиб чиқади.

Шундай қилиб, Q_n операторлар нормасининг текис чегараланганлиги исбот қилинади.

$\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ кетма-кетликнинг Н фазода тўлалигига кўра, ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон ва ихтиёрий $h\in\mathrm{H}$ элемент учун $c_j^{\varepsilon}\ \ (j=1,2,\dots N_\varepsilon)$ сонлар топилиб $\left\|h-\sum\limits_{j=1}^{N_\varepsilon}c_j^{\varepsilon}\psi_j\right\|<\varepsilon$ тенгсизлиги ўринли бўлади. Шунга кўра

$$Q_n\left(h-\sum_{j=1}^{N_\varepsilon}c_j^{\varepsilon}\psi_j\right)=Q_nh-\sum_{j=1}^{N_\varepsilon}c_j^{\varepsilon}\psi_j,\quad n>N_\varepsilon$$

вектор учун

$$\left\|Q_nh-\sum_{j=1}^{N_\varepsilon}c_j^{\varepsilon}\psi_j\right\|\le M\,\varepsilon,\quad n>N_\varepsilon$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу иккита тенгсизликдан $n>N_\varepsilon$ учун $\|Q_nh-h\|<(1+M)\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Шундай қилиб, ихтиёрий $h\in\mathrm{H}$ элемент норма бўйича яқинлашувчи

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \psi_j$$

қаторга ёйилади, бундан ташқари c_j, $j = 1, 2, ...$ коэффициентлар

$$c_j = (h, \varphi_j), \quad j = 1, 2, ...$$

тенгликлардан бир қийматли аниқланади. Теорема исбот бўлди.

Таъриф. *Агар иккита* $f_1, f_2, ..., f_k, ...$ *ва* $g_1, g_2, ..., g_k, ...$ *системалар учун*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| f_k - g_k \|^2 < \infty$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу системалар квадратик яқин системалар деб айтилади.

6-Теорема (А.Г. Костюченко ва А. Скороход)[1]. Н *сепарабель Гильберт фазосида иккита* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *ва* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *ортонормал системалар берилган бўлсин.*

Агар

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| \varphi_k - \psi_k \|^2 < \infty \qquad (A)$$

шарт ўринли бўлса, у ҳолда бу системалар бир вақтда тўла ёки тўла бўлмаган системалар бўлади.

Исбот. $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ тўла система бўлсин. Шундай бир N номер топиш мумкинки, бунда $\sum_{k=N+1}^{\infty} \| \varphi_k - \psi_k \|^2 < 1$ тенгсизлик ўринли бўлади. L_N ва L'_N қисм фазолар мос равишда $\{\varphi_k\}$, $k = N+1, \ N+2, \ ...$ ва $\{\psi_k\}$, $k = N+1, \ N+2, \ ...$ системалар ёрдамида яратилган бўлсин, L_N қисм фазонинг R_N ортогонал тўлдирувчиси $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ системанинг тўлалигига кўра, чекли ўлчовли фазо бўлиб, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ элементлар системаси ёрдамида яратилган бўлади.

---

[1] А.Г. Костюченко., А. Скороход, Об одной теореме Н.К. Бари, УМН, 8, вып. 5 (1953), 165-166.

L'_N қисм фазонинг R'_N ортогонал тўлдирувчиси ҳеч бўлмаганда $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ векторларнинг K_N чизиқли қопламасини ўз ичида сақлайди.

Биз R'_N тўплам $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ векторларнинг чизиқли комбинацияси билан тўлдирилган эканлигини исбот қиламиз, яъни K_N қисм фазо билан устма-уст тушишини кўрсатамиз. Бундан эса, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ системанинг тўлалиги келиб чиқади.

L'_N қисм фазони L_N қисм фазога проекциялаймиз ва ҳосил қилинган проекцияни $P(L'_N)$ орқали белгилаймиз.

$P(L'_N) = L_N$ эканлигини исбот қиламиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $\varPhi \in L_N$, $\varPhi \neq 0$ вектор мавжуд бўлиб, $P(L'_N)$ га ортогонал бўлсин. Шунга кўра, L'_N га ҳам ортогоналдир.

Ф векторни $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ система бўйича ёйиб ёзамиз. Натижада

$$\varPhi = \sum_{k=N+1}^{\infty} (\varPhi, \varphi_k)\varphi_k,$$

$$\varPhi = \sum_{k=N+1}^{\infty} (\varPhi, \varphi_k - \psi_k)\varphi_k, \ \ \|\varPhi\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |(\varPhi, \varphi_k - \psi_k)|^2$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бундан

$$\|\varPhi\|^2 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|\varPhi\|^2 \cdot \|\varphi_k - \psi_k\|^2$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу эса, $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \|\varphi_k - \psi_k\|^2 < 1$ тенгсизликка зиддир. Демак, L_N қисм фазога қарашли ва L'_N га ортогонал бўлган $\varPhi \neq 0$ вектор бўлиши мумкин эмас.

Энди R_N ни R'_N га проекциялаймиз ва ҳосил бўлган проекцияни $P(R_N)$ орқали белгилаймиз.

$P(R_N) \neq R'_N$ деб фараз қилайлик, яъни $\psi \in R'_N$, $\psi \neq 0$ вектор мавжуд бўлиб, бу ψ вектор $P(R_N)$ га ортогонал бўлсин. Шунга кўра, R_N га ҳам ортогонал бўлади. $\psi \in R'_N$, $\psi \neq 0$ бўлгани учун, ψ вектор L'_N қисм фазога ортогоналдир. ψ вектор R_N га ортогонал бўлгани учун $\psi \in L_N$ ҳам бўлади. Лекин биз исбот қилдикки, бундай $\psi \neq 0$ вектор бўлиши мумкин эмас.

Проекциялаш натижасида ўлчов катталашмагани учун R'_N қисм фазо ўлчови N дан ошмайди.

$R'_N \supset K_N$ ва K_N қисм фазо ўлчови N га тенг бўлгани учун $R'_N = K_N$ бўлади. Шунга кўра, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – тўла система экан. Теорема исбот бўлди.

Бу исбот қилинган теорема мувафақиятли равишда $[0,\pi]$ ораликда Штурм–Лиувилль оператори хос функцияларининг тўлалигини исбот қилишга қўлланилиши мумкин.

$[0,\pi]$ ораликда

$$y''+[\lambda - q(x)]y = 0 \tag{2.6.1}$$

тенгламанинг

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) &= 0, \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хос функциялари системаси $L_2[0,\pi]$ фазода базис ташкил этади, бунда $q(x)$ ҳақиқий қийматли узлуксиз функциядир. Ҳақиқатдан ҳам, h ва H чекли сонлар бўлган ҳолда Штурм–Лиувилль операторининг хос қиймат ва ортонормал хос функциялари учун

$$s_n = n + \frac{c_0}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ c_0 = \frac{1}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau\right),\ \lambda_n = s_n^{\ 2},$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left\{\cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{2.6.3}$$

$$\beta(x) = -c_0 x + h + \frac{1}{2}\int_0^{x} q(\tau)d\tau\ ,\ n = 0,1,2,...,$$

шунга кўра $\beta(x)$ – функция чегараланган бўлади.

$h = \infty$ ва $H = \infty$ бўлган ҳолда Штурм–Лиувилль операторининг хос қиймат ва ортонормал хос функциялари учун

$$s_n = n + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ \ \alpha_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau,\ \ \lambda_n = s_n{}^2,$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n = 1,2,..., \tag{2.6.4}$$

$h = \infty$ ва $H \neq \infty$ бўлган ҳолда Штурм–Лиувилль операторининг хос қиймат ва ортонормал хос функциялари учун

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), H_1 = H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau,$$

$$\lambda_n = s_n{}^2,\ n = 0,1,2,...,\ \ \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot \sin\,(n+\frac{1}{2})x + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.6.5}$$

асимптотик баҳолар ўринли бўлади.[1]

Бизга маълумки, $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \cos nx\right\}_{n=0}^{\infty}$, $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ ва $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормал системалар $L_2(0,\pi)$ фазода тўладир. Биринчи ҳолда

$$\left\|\varphi_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\right\|^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

бўлади. Иккинчи ва учинчи ҳолларда эса,

$$\left\|\varphi_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(n+\frac{1}{2})\ x\right\|^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ва

[1] Бу хос қийматлар ва хос функциялар асимптотикаси ҳақида А.Г. Костюченко, И.С. Саргсян. Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). М.: Наука,1979. 400 с.
Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). М.: Наука,1970. 672 с.
Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука,1988. 432 с. китобларидан ўқиш мумкин.

$$\left\| \varphi_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right\|^2 = O\left(\frac{1}{n^2} \right)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Шунга кўра, (A) қатор ҳар учала ҳолда ҳам, яқинлашувчи бўлади. Бундан ҳар учала ҳолда ҳам, $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормал системаларнинг $L_2(0, \pi)$ фазода тўлалиги келиб чиқади.

5. Банах ва Гильберт фазоларида Рисс базислари.

Н.К. Бари Гильберт фазосидаги базисларнинг маълум бир синфларини қараб, уларга Рисс базислари деб ном берди. Бизга

$$e_1, e_2, ..., e_n, ... \qquad (2.6.6)$$

базис берилган бўлсин. Агар H Гильберт фазосини ўзига акслантирувчи тескариланувчи чизиқли чегараланган A алмаштириш мавжуд бўлиб, бунда

$$e_1, \quad e_2, ... \quad e_n, ...$$

базис ортонормал базисга акcланса, у ҳолда (2.6.6) базисга Рисс базиси деб айтилади.

Агар H Гильберт фазосидаги $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ кетма-кетлик учун

$$\inf_n \|\varphi_n\| > 0 \qquad \text{ва} \qquad \sup_n \|\varphi_n\| < \infty \qquad (2.6.7)$$

бўлса, у ҳолда бу кетма-кетликка деярли нормаланган кетма-кетлик дейилади.

Агар

$$0 < \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \cdot \|g_j\|^2 < \infty \qquad (2.6.8)$$

бўлган ҳол учун $\sum_{j=1}^{\infty} c_j\, g_j = 0$ тенглик ўринли бўлмаса, у ҳолда $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ векторлар кетма-кетлиги $\omega-$чизиқли боғлиқмас векторлар кетма–кетлиги дейилади.

Агар $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ векторлар кетма-кетлиги деярли нормаланган бўлса, у ҳолда (2.6.8) шарт $0 < \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$ шартга эквивалент бўлади.

Маълумки, агар H гильберт фазосидаги ҳар бир f элемент

$$f=\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \psi_j$$

ягона ёйилмага эга бўлса, у ҳолда $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ кетма-кетлик H Гильберт фазосида базис деб айтилади, бунда ξ_j $(j=1,2,...)-$ қандайдир комплекс сонлар бўлиб ёйилманинг коэффициентлари деб айтилади. Ҳар қандай базиснинг элементлари системаси $\omega-$чизиқли боғлиқмас векторлар кетма–кетлиги бўлади.

7-теорема (Н.К. Бари).[1] Ҳар қандай $\omega-$чизиқли боғлиқмас $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ векторлар кетма–кетлиги ортонормал базисга эквивалент бўлган $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ базисга квадратик яқин бўлса, у ҳолда $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ кетма-кетликнинг ўзи ҳам ортонормал базисга эквивалент бўлган базис бўлади.

Исбот. $A-$чизиқли чегараланган тескариланувчи оператор бўлиб, H фазодаги қандайдир $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ ортонормал базисни $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ базисга акслантирсин, яъни

$$A\varphi_j=\psi_j \qquad (j=1,2,..)$$

бўлсин. У ҳолда T операторни

$$T\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty} c_j\left(\psi_j-g_j\right)$$

тенглик ёрдамида аниқлаймиз, бунда $0<\sum_{j=1}^{\infty}\left|c_j\right|^2<\infty$. Кўриниб турибдики, бу T оператор чизиқли чегараланган оператор бўлади, бундан ташқари

$$\|T\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\psi_j-g_j\right\|^2$$

---

[1] Бу теорема Н.К. Барининг “Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве”, Уч. зап. МГУ, серия матем. 4, вып. 148 (1951), 69-106 бетларидаги ишида келтирилган бўлиб, И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейнларнинг “Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве”, М.: Наука, 1965. 448 с. китобидан ҳам танишиш мумкин.

тенгсизлик ўринли, ҳамда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\varphi_j\right\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\psi_j-g_j\right\|^2(<\infty)$$

тенгликдан $T\in\sigma_2$ (Гильберт –Шмидт оператори) эканлиги келиб чиқади.

$$(A-T)\varphi=0$$

тенглама ягона ноль ечимга эга. Ҳақиқатдан ҳам, агар

$$A\varphi=T\varphi$$

бўлса, у ҳолда

$$(A-T)\varphi=\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi,\varphi_j)\psi_j-\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi,\varphi_j)(\psi_j-g_j)=\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi,\varphi_j)g_j$$

тенгликдан

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi,\varphi_j)g_j=0$$

тенглик келиб чиқади ва $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ кетма-кетликнинг $\omega-$ чизиқли боғлиқмас эканлигига кўра $\varphi=0$ бўлади.

A оператор тескариланувчи, $T(\in\sigma_2)$ оператор тўла узлуксиз ва $A-T$ оператор фақат ноль ядрога эга бўлгани учун бу $A-T$ оператор ҳам тескариланувчи бўлади.

$$(A-T)\varphi_j=g_j\quad(j=1,2,...)$$

тенгликни ҳисобга олиб, $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ кетма-кетликнинг ортонормал базисга эквивалент базис эканлигини ҳосил қиламиз. Бундай базислар Н. К. Бари[1] терминологиясига кўра, Рисс базислари деб аталади.

Ортонормал базисларга эквивалент базислар синфи жуда кенг бўлиб, H Гильберт фазосида ортонормал базисга эквивалент бўлмаган ҳеч бўлмаганда битта нормаланган базисни қуриш масаласи ҳам осон бўлмаган. Бу масала К. И. Бабенко[2] томонидан ечилган бўлиб, у $L_2(-1,1)$ фазода

---

[1] Н. К. Бари, Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Уч.. Зап. МГУ, 4, вып. 148 (1951), С. 69-107.

[2] К. И. Бабенко, О сопряженных функциях, ДАН, 62, №2 (1948), С. 157-160.

$$\left\{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)|x|^{\alpha} e^{\pi i n x}\right\}_{n=-\infty}^{\infty} \quad \left(-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2},\ \alpha\neq 0\right)$$

кетма-кетлик базис бўлиб, ортонормал базисга эквивалент эмаслигини кўрсатган.

Н. К. Бари терминологиясига кўра, Н Гильберт фазосидаги биортогонал система ташкил қилувчи $\left\{f_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ ва $\left\{g_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $x\in\mathrm{H}$ элемент учун

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(x,g_j\right)\right|^2<\infty$$

қатор яқинлашувчи бўлса, $\left\{f_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ системага Бессель системаси дейилади.

Агар $\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j\right|^2<\infty$ қатор яқинлашувчи бўлган ихтиёрий $\left\{a_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ сонлар кетма-кетлик учун $x\in\mathrm{H}$ элемент мавжуд бўлиб, $\left(x,g_i\right)=a_i,\quad i=1,2,...$ шартлар ўринли бўлса, $\left\{f_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ кетма-кетликка Гильберт системаси деб аталади.

Бессель базиси деб, Н Гильберт фазосида Бессель системасини ташкил қилувчи базисга айтилади. Худди шунга ўхшаш Гильберт базиси деб, Н Гильберт фазосидаги Гильберт системасини ташкил қилувчи базисга айтилади.

Агар $\left\{f_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ –Бессель базиси $\left\{g_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ кетма-кетлик билан биргаликда биортогонал системани ташкил қилса, у ҳолда $\left\{g_j\right\}_{j=1}^{\infty}$–система Гильберт базисидан иборат бўлади.

К. И. Бабенко томонидан қурилган мисолдаги система $-\frac{1}{2}<\alpha<0$ учун Бессель базисидан иборат ва $0<\alpha<\frac{1}{2}$ учун эса, Гильберт базисидан иборат бўлади.

Табиий равишда савол туғилади: $L_2(-\pi,\pi)$ фазода Бессель базиси ҳам, Гильберт базиси ҳам бўлмайдиган базислар мавжудми?. Бундай базиснинг мавжудлиги М.Ш. Альтман[1] томонидан қурилди. Бундай базисни қуриш учун К. И. Бабенко томонидан қурилган мисолдаги системани $L_2(-\pi,\pi)$ фазода Бессель базисидан иборат бўлган ҳол учун қарайлик:

$$|x|^{-\alpha} e^{inx}\ ,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\ 0<\alpha<\frac{1}{2},\ -\pi\le x\le\pi\ .$$

Бу базисни бизнинг мақсадимиз учун қулай бўлиши учун бошқачароқ шаклда ёзамиз:

$$\frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \ldots,\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\sin mx,\ \ldots \quad (2.6.8)$$

Маълумки, бу системага қўшма бўлган кетма-кетлик қуйидагича бўлади.

$$\frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \ldots,\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\sin mx,\ \ldots \quad (2.6.9)$$

Бу системаларнинг биринчи ва жуфт элементлари ўринларини алмаштириб янги биортогонал системаларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ldots,\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\sin mx,\ \ldots \quad (2.6.10)$$

$$\frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ldots,\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\sin mx,\ \ldots \quad (2.6.11)$$

Осонгина кўриш мумкинки, бу кетма-кетликнинг

$$\frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{|x|^{-\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ \ldots,\ \frac{|x|^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\ \ldots \quad (2.6.11)$$

қисмий кетма-кетлиги ҳам шундай хоссаларга эга бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, ҳар қандай $f(x)\in L_2(-\pi,\pi)$ функцияни иккита жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндиси шаклида тасвирлаш мумкин:

$$f(x)=p(x)+q(x);\qquad p(x),\ q(x)\ \in L_2(-\pi,\pi)\ .$$

Шунга кўра,

---

[1] М.Ш. Альтман. О базисах в пространстве Гильберта, ДАН, 69 (1949), №4. С. 483–485. М.Ш. Альтман. О биортогональных системах, ДАН, 67 (1949), №3.

$$|x|^{\alpha} f(x)=|x|^{\alpha} p(x)+|x|^{\alpha} q(x).$$

Бу ерда $p(x)$ жуфт функция бўлгани учун $|x|^{\alpha} p(x)$ функция ҳам жуфт функция бўлади. Бундан эса, $|x|^{\alpha} p(x)$ функциянинг Фурье қатори фақат косинус қатнашган ҳадларни сақлайди. Худди шунга ўхшаш $|x|^{\alpha} q(x)$ функция учун Фурье қатори фақат синус қатнашган ҳадларни сақлайди. Шунга кўра, $p(x)$ функциянинг (2.6.8) система бўйича ёйилмасида тоқ функциялар олдидаги коэффициентлар нолга тенг ва $q(x)$ функциянинг (2.6.8) система бўйича ёйилмасида жуфт функциялар олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлади.

Худди шунингдек $L_2(-\pi,\pi)$ фазода (2.6.9) система ҳам базис бўлади.

Энди (2.6.10) системанинг $L_2(-\pi, \pi)$ фазода Бессель базиси ҳам, Гильберт базиси ҳам бўлмаслигини кўрсатамиз.

(2.6.10) системанинг $L_2(-\pi, \pi)$ фазода Бессель базиси эмаслигини кўрсатиш учун $p(x)\in L_2(-\pi,\pi)$ жуфт функцияни $|x|^{-\alpha} p(x)$ функция квадрати билан интегралланувчи бўлмайдиган қилиб оламиз. Бундай функция сифатида

$$p(x)=|x|^{-\beta}\ , \frac{1}{2}-\alpha\le\beta<\frac{1}{2}$$

функцияни олиш мумкин. Кўриниб турибдики, бу $p(x)\in L_2(-\pi,\pi)$ функциянинг (2.6.10) система бўйича ёйилмасининг коэффициентлари квадратларидан тузилган қатор узоқлашувчи бўлади.

(2.6.10) системанинг $L_2(-\pi, \pi)$ фазода Гильберт базиси эмаслигини кўрсатиш ўрнига унга қўшма бўлган (2.6.11) системанинг $L_2(-\pi, \pi)$ фазода Бессель базиси эмаслигини кўрсатамиз. Бунинг учун $q(x)\in L_2(-\pi,\pi)$ тоқ функцияни $|x|^{-\alpha} q(x)$ функция квадрати билан интегралланувчи бўлмайдиган қилиб оламиз. Бундай функция сифатида

$$q(x)=sign\, x\cdot|x|^{-\beta}\ , \frac{1}{2}-\alpha\le\beta<\frac{1}{2}$$

функцияни олсак, у ҳолда $q(x) \in L_2(-\pi,\pi)$ функциянинг (2.6.11) система бўйича ёйилмасининг коэффициентлари квадратларидан тузилган қатор узоқлашувчи бўлади. Демак, бу қурилган (2.6.10) ва (2.6.11) биортогонал системаларнинг ҳар бири $L_2(-\pi,\pi)$ фазода Бессель базиси ҳам, Гильберт базиси ҳам бўлмаслигини ҳосил қиламиз.

5-Эслатма. *Бу келтирилган Бессель базиси ва Гильберт базиси тушунчаларини ихтиёрий Банах фазоларида ҳам қараш мумкин.*

Н.К. Бари теоремасидан, хусусан, H Гильберт фазосидан олинган ҳар қандай $\omega-$ чизиқли боғлиқмас векторлар кетма-кетлиги қандайдир ортонормал базисга квадратик яқин бўлса, у ҳолда бу системанинг Рисс базиси эканлиги келиб чиқади. М.Г. Крейн[1] терминологиясига кўра, бундай базислар Бари базислари деб айтилади.

8-теорема (И.М. Гельфанд).[2] *Ҳар қандай*

$$e_1, e_2, ..., e_n, ...$$

базис ортогонал базисга эквивалент бўлган базис бўлиши учун бу базиснинг

$$e_{n_1}, e_{n_2}, ..., e_{n_k}, ...$$

ихтиёрий ўрин алмаштирилгани ҳам базис бўлишлиги зарур ва етарлидир.

Исбот. x элемент H фазодан олинган ихтиёрий элемент ва

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, e_n$$

ёйилма ўринли бўлсин. У ҳолда теорема шартига, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\, f_n(x)\, e_n$ қатор ихтиёрий $\varepsilon_n = \pm 1$ учун яқинлашувчи бўлади ва бундан ташқари ҳар бир тайинланган x элемент учун $M(x)$ ўзгармас мавжуд бўлиб, ихтиёрий $\varepsilon_n = \pm 1$ учун ва N номер учун

[1] М.Г. Крейн. О базисах Бари пространства Гильберта, УМН 12, вып.3 (75) 1957. С. 333–341.

[2] И.М. Гельфанд. Замечание к работе Н.К. Бари “Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве”, Уч. зап. МГУ, серия матем. 4, вып. 148 (1951), 224–225.

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \; f_n(x) \; e_n \right\| < M(x)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

$$P(x) = \sup \left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \; f_n(x) \; e_n \right\|$$

деб оламиз, бу ерда sup барча $\varepsilon_n = \pm 1$ учун ва N номерлар бўйича олинган. Узлуксиз функционалларнинг аниқ юқори чегараси сифатида $P(x)$ – ярим узлуксиз функционалдир. Шунга кўра, $P(x)$ – узлуксиз функционалдир, яъни шундай бир C ўзгармас мавжуд бўлиб, барча x элемент учун ва барча $\varepsilon_n = \pm 1$ учун

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \; f_n(x) \; e_n \right\| < C \; \|x\| \qquad (2.6.12)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ... \quad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

кетма-кетликни ε ҳарфи билан белгилаймиз. A_ε орқали

$$A_\varepsilon x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \; f_n(x) \; e_n$$

формула билан берилган чизиқли алмаштиришни белгилаймиз. (2.6.12) тенгсизликдан ҳар бир ε кетма-кетлик учун A_ε алмаштириш нормаси чегараланган ва барча ε кетма-кетликлар учун A_ε алмаштириш тўплами группа ташкил этади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$A_{\varepsilon'} A_{\varepsilon''} = A_\varepsilon \text{ , бунда } \quad \varepsilon_n = \varepsilon_n^{'} \; \varepsilon_n^{''} \quad \text{бўлади.}$$

Қуйидаги теорема ҳам ўринлидир:

H Гильберт фазосида нормалари текис чегараланган чизиқли операторлар оиласининг коммутатив группаси берилган бўлсин. У ҳолда H Гильберт фазосида берилган скаляр кўпайтмага эквивалент бўлган скаляр кўпайтмани шундай киритиш мумкинки, бунда бизнинг группадаги барча чизиқли алмаштиришлар унитар алмаштиришдан иборат бўлади.

Бу теоремани ўзимизнинг ҳолимизга қўллаб, скаляр кўпайтмани шундай киритиш мумкинки, бунда бизнинг группадаги барча A_ε операторлар унитар алмаштиришдан иборат бўлади.

Бу янги скаляр кўпайтма бўйича

$$e_1, e_2, ..., e_n, ...$$

векторлар ўзаро ортогонал базис эканлигини исбот қиламиз. x ва y векторларнинг янги скаляр кўпайтмасини $(x, y)_1$ орқали белгилаймиз.

A_ε операторларнинг аниқланишига кўра, $A_\varepsilon e_k = \varepsilon_k e_k$ тенгликка эга бўламиз. Ҳамда бу операторларнинг унитар эканлигидан

$$\left(A_\varepsilon e_i, A_\varepsilon e_k\right)_1 = \left(e_i, e_k\right)_1, \text{ яъни } \varepsilon_i \varepsilon_k \left(e_i, e_k\right)_1 = \left(e_i, e_k\right)_1$$

тенгликларга эга бўламиз. ε кетма-кетликни $\varepsilon_i \varepsilon_k = -1$ деб танласак, у ҳолда биз $\left(e_i, e_k\right)_1 = 0$ тенгликка эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

Шуни таъкидлаш керакки,

$$e_1, e_2, ..., e_n, ...$$

базис Рисс базиси бўлиши учун H Гильберт фазосида берилган скаляр кўпайтмага эквивалент бўлган $(x, y)_1$ скаляр кўпайтма мавжуд бўлиб бу скаляр кўпайтмада берилган базиснинг ортогонал бўлишлиги зарур ва етарлидир.

Энди базисни (Рисс базисини) ташкил этувчи айрим мисолларни келтирамиз.

$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ тўла ортонормал система бўлсин.

1-Мисол.

$$\psi_{2n-1}(x) = \varphi_{2n-1}(x),$$
$$\psi_{2n}(x) = u_n \varphi_{2n-1}(x) + v_n \varphi_{2n}(x)$$

тенгликлар билан $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ система аниқланган бўлсин. Бу системанинг нормаланган бўлишлиги учун $u_n^2 + v_n^2 = 1$ шартларни қўямиз. Бу система базис бўлишлиги учун эса

$$|v_n| > \delta > 0, \quad n = 1, 2, 3, \ ...$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

2-Мисол.

$$\psi_1(x)=\varphi_1(x),$$
$$\psi_n(x)=\lambda_n\left[p_1\varphi_1(x)+p_2\varphi_2(x)+\ldots+p_n\varphi_n(x)\right] \qquad (n\geq 2)$$
тенгликлар билан $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ система аниқланган бўлсин. Бу системанинг нормаланган бўлишлиги учун
$$\lambda_n=\sqrt{\frac{1}{p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2}}$$
шартларни қўямиз. Бу система базис бўлишлиги учун эса
$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k^2}{p_{n+1}^2}<M,\ \ n=1,\,2,\,3,\ \ldots$$
шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

3-Мисол.
$$\varphi_1(x)=\psi_1(x),$$
$$\varphi_n(x)=\lambda_n\left[p_1\psi_1(x)+p_2\psi_2(x)+\ldots+p_n\psi_n(x)\right] \qquad (n\geq 2)$$
тенгликлар системасини ечиш йўли билан $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ система аниқланган бўлсин. Бу системанинг нормаланган бўлишлиги учун
$$\frac{1}{p_n^2}\left(\frac{1}{\lambda_{n-1}^2}+\frac{1}{\lambda_n^2}\right)=1,\quad n=2,3,\ldots$$
шартларни қўямиз. Бу система базис бўлишлиги учун эса
$$\frac{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\lambda_n^2}{\lambda_k^2}<M,\ \ k=1,\,2,\,3,\ \ldots$$
шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

4-Мисол.
$$\psi_1(x)=\varphi_1(x),$$
$$\psi_2(x)=b_{21}\varphi_1(x)+b_{22}\varphi_2(x)$$
....
$$\psi_k(x)=b_{k1}\varphi_1(x)+b_{k2}\varphi_2(x)+\ldots+b_{kk}\varphi_k(x)$$
$n>k$ *учун*
$$\psi_n(x)=b_{n1}\varphi_1(x)+b_{n2}\varphi_2(x)+\ldots+b_{nk}\varphi_k(x)+b_{nn}\varphi_n(x)$$

тенгликлар билан $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ система аниқланган бўлсин. Бу системанинг нормаланган бўлишлиги учун

$$\sum_{p=1}^{n} b_{np}^2 = 1, \quad n = 1, 2, 3, \ \dots$$

шартларни қўямиз. Бу система базис бўлишлиги учун эса

1) $|b_{nn}| > \delta > 0, \ \ n = 1, 2, 3, \ \dots$

2) $1 \le p \le k \quad учун \quad \sum_{n=p}^{\infty} b_{np}^2 < \infty$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Энди биз E Банах фазосида берилган $\varphi = \{\varphi_n\}_1^{\infty}$ векторлар кетма-кетлигининг кичик қўзғалишида базислик хоссаларини сақлаши ҳақидаги натижаларни бу хоссаларни дифференциал операторларнинг хос функциялари ва эргашган функциялари системаларининг базислигини ўрганишга қўллаш мақсадида қараймиз.

Маълумки, агар E Банах фазосида ҳар бир $x \in E$ вектор ягона равишда шу E Банах фазоси нормаси бўйича яқинлашувчи бўлган

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \tag{2.6.13}$$

қаторга ёйилса, у ҳолда берилган $\varphi = \{\varphi_n\}_1^{\infty}$ векторлар кетма-кетлиги шу E Банах фазосида базис ташкил этади деб атаймиз ва биз бу ерда аппроксимация хоссаларига эга бўлмаган Банах фазоларини қарамаймиз.[1]

Бу (2.6.13) ёйилмада c_n коэффициентлар

$$c_n = f_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{2.6.14}$$

чизиқли функционаллар бўлиб, Банах теоремасига кўра, шундай бир C_φ ўзгармас мавжудки, бунда

$$\|\varphi_n\|^{-1} \le \|f_n\| \le C_\varphi \|\varphi_n\|^{-1} \tag{2.6.15}$$

---

[1] Бу тушунчалар билан Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires // Mem. Amer. Math. Soc. – 1955. – №16.
Enflo P. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces // Acta Math. 1973. – vol. 130. № 3 - 4. – P. 309 - 317. мақолалари орқали танишишингиз мумкин.

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар $co\dim L < \infty$, бунда $L = \overline{co\{\psi_n\}_1^\infty}$ - оқали $\{\psi_n\}_1^\infty$ кетма-кетликнинг чизиқли ёпиқ қопламаси, $E = L \dot{+} M$, $co\dim L = \dim M$ ва $\{\psi_n\}_1^\infty$- система L да базис бўлса, у ҳолда $\{\psi_n\}_1^\infty$ элементлар системасига E Банах фазосида чекли дефектли базис ташкил этади деб айтилади.

Агар $\{\psi_{n_k}\}_1^\infty$ векторларнинг хос қисмий кетма-кетлиги мавжуд бўлиб, бу кетма-кетликлар системаси E Банах фазосида чекли дефектли базис ташкил этса, у ҳолда $\{\psi_n\}_1^\infty$ элементлар системасига E Банах фазосидаги чекли дефектли тўлган базис ташкил этади деб айтилади.

Қуйидаги теорема ўринлидир.

10-теорема (Ш.Г. Касимов).[1] *E фазода $\{\varphi_n\}_1^\infty$ – нормаланган базис бўлсин. Агар $\{\psi_n\}_1^\infty$ система*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \varphi_n - \psi_n \right\| < \infty$$

шартни қаноатлантирувчи система бўлса, у ҳолда $\{\psi_n\}_1^\infty$ система ҳам E банах фазосида чекли дефектли базис (ёки чекли дефектли тўлган базис) ташкил қилади.

Исбот. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай бир $N(\varepsilon)$ натурал сон мавжуд бўлиб

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left\| \varphi_n - \psi_n \right\| < \varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлади.

$\varepsilon = \dfrac{1}{2C_\varphi}$ деб танласак, бунда $C_\varphi = \sup\limits_n \left\| f_n \right\|$, у ҳолда шундай бир N натурал сон мавжуд бўлиб

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left\| \varphi_n - \psi_n \right\| < \frac{1}{2C_\varphi}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади.

---

[1] Бу теорема Об устойчивости базисов банаховых и гильбертовых пространств // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2002. – № 2. – С.34-39. мақолада келтирилган.

$$\tilde{\psi}_n = \begin{cases} \varphi_n \ , & n \le N \ \ \textit{учун}, \\ \psi_n \ , & n > N \ \ \textit{учун} \end{cases}$$

деб белгилаймиз. Бу $\{\tilde{\psi}_n\}_1^\infty$ системанинг базис эканлигини кўрсатиш етарлидир. Маълумки,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

ёйилмада $c_n = f_n(x)\,(\, n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, бунда $f_n \ \ (n = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots)$ – чизиқли узлуксиз функционаллардир.

$$S\,x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)(\varphi_n - \tilde{\psi}_n)$$

операторни киритамиз.

Бу S оператор ҳар бир $x \in E$ учун маънога эга ва

$$\| \ S \ \| = \sup_{x \in E} \frac{\| \ Sx \ \|}{\| \ x \ \|} \le \frac{1}{2}$$

норма билан чегараланган чизиқли оператор бўлади, яъни

$$\| \ Sx \ \| \le \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \| \|x\| \|\varphi_n - \tilde{\psi}_n\| \le C_\varphi \|x\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\varphi_n - \psi_n\| < \frac{1}{2}\|x\|$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Шундай қилиб,

$$U\,x = x - Sx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\tilde{\psi}_n$$

тенглик билан аниқланган U оператор

$$U^{-1} = (I - S)^{-1} = I + S + S^2 + \ldots$$

чизиқли тескарисига эга бўлади.

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\varphi_n$$

тенгликда y элементни $U^{-1}x$ га тенг деб олсак, у ҳолда

$$U^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(U^{-1}x\right) \varphi_n$$

ёйилмага эга бўламиз. Бу охирги тенгликнинг ҳар иккала томонига U оператор билан таъсир қиламиз.

$$U\varphi_n = \tilde{\psi}_n \ \ (n = 1,\ 2, 3, \ldots)$$

тенгликка кўра $x=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(U^{-1}x\right)\tilde{\psi}_n$ тенгликни ҳосил қиламиз. Энди бу

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} d_n\tilde{\psi}_n \tag{2.6.16}$$

ёйилманинг ягона эканлигини, яъни

$$d_n = f_n\left(U^{-1}x\right) \ \left(n=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ ...\right)$$

тенглик билан бир қийматли аниқланишини кўрсатамиз. Бу эса, (2.6.16) тенгликнинг ҳар иккала томонига U^{-1} операторни қўллаш билан ҳосил қилинади. Бундан эса, $\{\tilde{\psi}_n\}_1^{\infty}$ системанинг E Банах фазосида базис ташкил этиши келиб чиқади. Бу эса $\{\psi_n\}_1^{\infty}$ системанинг E банах фазосида чекли дефектли базис (ёки чекли дефектли тўлган базис) ташкил қилишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

11-теорема (Ш.Г. Касимов).[1] *E фазода $\left\{\varphi_n\right\}_1^{\infty}$ – нормаланган базис бўлсин. Агар $\{\psi_n\}_1^{\infty}$ система ω – чизиқли боғлиқ бўлмаган ва*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\varphi_n-\psi_n\right\|<\infty$$

шартни қаноатлантирувчи система бўлса, у ҳолда $\{\psi_n\}_1^{\infty}$ система ҳам E банах фазосида базис ташкил қилади.

Исбот. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир $N\left(\varepsilon\right)$ натурал сон мавжуд бўлиб

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\|\varphi_n-\psi_n\right\|<\varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлади.

[1] Бу каби теоремаларни Ш.Г. Касимов. Исследование спектральных разложений и вопросов разрешимости краевых задач, связанных с эллиптическими псевдодифференциальными операторами. Т.: Университет, 2013. с.188.,
Ш.Г. Касимов. Спектральная теория псевдодифференциальных операторов. LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland / Германия. 2014. с. 188. монографияларидан ўқиш мумкин.

$\varepsilon = \dfrac{1}{2C_\varphi}$ деб танласак, бунда $C_\varphi = \sup\limits_n \| f_n \|$, у ҳолда шундай бир N натурал сон мавжуд бўлиб

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \| \varphi_n - \psi_n \| < \frac{1}{2C_\varphi}$$

тенгсизлиги ўринли бўлади.

$$\tilde{\psi}_n = \begin{cases} \varphi_n \ , & n \le N \ \text{учун}, \\ \psi_n \ , & n > N \ \text{учун} \end{cases}$$

деб белгилаймиз. Бу $\{\tilde{\psi}_n\}_1^\infty$ системанинг базис эканлигини юқорида кўрсатган эдик, яъни

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(U^{-1}x\right) \tilde{\psi}_n \qquad (2.6.17)$$

тенгликка эга бўлдик. E Банах фазосида $\{\tilde{\psi}_n\}_1^\infty$ системанинг базис эканлигидан

$$\psi_k = \sum_{n=1}^{N} f_n\left(U^{-1}\psi_k\right) \varphi_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\left(U^{-1}\psi_k\right) \psi_n = x_k^1 + x_k^2$$

эканлигини ҳосил қиламиз, бунда $k = 1,\ 2,\ 3,\ldots N$,

$$x_k^1 = \sum_{n=1}^{N} f_n\left(U^{-1}\psi_k\right)\varphi_n \ , \qquad x_k^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\left(U^{-1}\psi_k\right)\psi_n$$

бўлади.

$\{\psi_n\}_1^\infty$ системанинг $\omega-$ чизиқли боғлиқмас эканлигидан $\left\{x_k^1\right\}_1^N$ система ҳам чизиқли боғлиқмас эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, агар

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k^1 = 0$$

бўлса, у ҳолда

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(\psi_k - x_k^2\right) = 0$$

бўлади. Бундан эса

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \psi_k - \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_n\left(U^{-1}\psi_k\right) \right) \ \psi_n = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $\{\psi_n\}_1^\infty$ системанинг $\omega-$ чизиқли боғлиқмас эканлигидан $k=1, 2,..., N$ учун $\alpha_k = 0$ келиб чиқади. Чекли ўлчамли фазоларда чизиқли боғлиқмаслик ва базислик тушунчалари эквивалент эканлигидан $n=1, 2,..., N$ учун

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{N} a_{nk} x_k^1$$

бўлади. Бундан биз

$$x = \sum_{n=1}^{N} f_n\left(U^{-1}x\right)\varphi_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\left(U^{-1}x\right)\psi_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\left(f_n\left(U^{-1}x\right)\sum_{k=1}^{N} a_{nk} x_k^1\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\left(U^{-1}x\right)\psi_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} f_n\left(U^{-1}x\right) a_{nk}\left(\psi_k - x_k^2\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\left(U^{-1}x\right)\psi_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\left(U^{-1}x\right)a_{nk}\right)\ \psi_k - \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\left(U^{-1}x\right)a_{nk}\right)\ x_k^2 +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\left(U^{-1}x\right)\psi_n = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\left(U^{-1}x\right)a_{nk}\right)\ \psi_k -$$

$$- \sum_{k=1}^{N}\left(\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\left(U^{-1}x\right)a_{nk}\right)\sum_{m=N+1}^{\infty} f_m\left(U^{-1}\psi_k\right)\psi_m\right) +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\ \left(U^{-1}x\right)\psi_n = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\left(U^{-1}x\right)a_{nk}\right)\ \psi_k +$$

$$+ \sum_{m=N+1}^{\infty}\left(-\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\left(U^{-1}x\right)a_{nk}\right)\ f_m\left(U^{-1}\psi_k\right)\right)\ \psi_m + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\left(U^{-1}x\right)\psi_n .$$

Шундай қилиб,

$$x = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\left(U^{-1}x\right)a_{nk}\right)\ \psi_k +$$

$$+ \sum_{m=N+1}^{\infty}\left(f_m\left(U^{-1}x\right) - \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\left(U^{-1}x\right)a_{nk}\right) f_m\left(U^{-1}\psi_k\right)\right)\psi_m \ .$$

тенглик ўринли бўлди. Бу эса $\{\psi_n\}_1^\infty$ – системанинг E Банах фазосида базис эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Агар $co\dim L<\infty$, бунда $L=\overline{co\{\psi_n\}_1^\infty}$ - оқали $\{\psi_n\}_1^\infty$ кетма-кетликнинг чизиқли ёпиқ қопламаси, $H=L\oplus M$, $co\dim L=\dim M$ ва $\{\psi_n\}_1^\infty$- система L да Рисс базиси бўлса, у ҳолда $\{\psi_n\}_1^\infty$ элементлар системасига H Гильберт фазосидаги чекли дефектли Рисс базиси деб айтилади.

Агар $\{\psi_{n_k}\}_1^\infty$ векторларнинг хос қисмий кетма-кетлиги мавжуд бўлиб, бу кетма-кетликлар системаси H Гильберт фазосидаги чекли дефектли Рисс базиси бўлса, у ҳолда $\{\psi_n\}_1^\infty$ элементлар системасига H Гильберт фазосидаги чекли дефектли тўлган Рисс базиси деб айтилади.

12-теорема. *H Гильберт фазосида $\{\varphi_n\}_1^\infty$ система Рисс базисидан иборат бўлсин. Агар $\{\psi_n\}_1^\infty$ система деярли нормаланган бўлиб $\{\varphi_n\}_1^\infty$ системага квадратик яқин система бўлса, яъни*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n-\psi_n\|^2<\infty \qquad (2.6.17)$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда $\{\psi_n\}_1^\infty$ система H Гильберт фазосида чекли дефектли Рисс базиси (ёки чекли дефектли тўлган Рисс базиси) бўлади.

Исбот. H Гильберт фазосида $\{\varphi_n\}_1^\infty$ система Рисс базисидан иборат бўлсин. У ҳолда H Гильберт фазосида $\{\varphi_n\}_1^\infty$ система тўла ва шундай бир a_1, $a_2>0$ ўзгармаслар мавжуд бўлиб, ихтиёрий n натурал сони ва ихтиёрий $\nu_1,\nu_2,...,\nu_n$ комплекс сонлари учун

$$a_1\sum_{j=1}^{n}\left|\nu_j\right|^2\le\left\|\sum_{j=1}^{n}\nu_j\varphi_j\right\|^2\le a_2\sum_{j=1}^{n}\left|\nu_j\right|^2 \qquad (2.6.18)$$

тенгсизлик бажарилади. Ҳамда ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир $N(\varepsilon)$ натурал сон мавжуд бўлиб

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\|\varphi_n-\psi_n\|^2<\varepsilon$$

тенгсизлиги ўринли бўлади.

$\varepsilon < a_1$ деб оламиз. $\{\tilde{\psi}_n\}_1^\infty$ системани қурамиз, бунда

$$\tilde{\psi}_n = \begin{cases} \varphi_n \ , & n \le N \quad учун, \\ \psi_n, & n > N \quad учун \end{cases}$$

бўлсин. Бу қурилган $\{\tilde{\psi}_n\}_1^\infty$ система Рисс базиси эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \varphi_n - \tilde{\psi}_n \|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \| \varphi_n - \psi_n \|^2 < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Ҳамда бу $\{\tilde{\psi}_n\}_1^\infty$ система ω – чизиқли боғлиқмас кетма-кетлик бўлади. Тескарисини фараз қилайлик. У ҳолда шундай бир $\{c_n\}_1^\infty$ комплекс сонлар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб $0 < \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2 < \infty$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tilde{\psi}_n = 0$ бўлади. Бундан эса

$$a_1 \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2 \le \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tilde{\psi}_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \left(\varphi_n - \psi_n \right) \right\|^2 \le$$

$$\le \left[\sum_{n=N+1}^{\infty} | c_n | \ \| \varphi_n - \psi_n \| \right]^2 \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \| \varphi_n - \psi_n \|^2 < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2$$

тенгсизлигини ҳосил қиламиз, яъни

$$a_1 \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2 < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2 \ , \quad 0 < a_1 < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $0 < \varepsilon < a_1$ соннинг танланишига зиддир. Демак, $\{\tilde{\psi}_n\}_1^\infty$ чизиқли боғлиқмас экан. Юқорида келтирилган Н.К. Бари теоремасига кўра, $\{\tilde{\psi}_n\}_1^\infty$ система H Гильберт фазосида Рисс базисидан иборат бўлади.

Киритилган $\tilde{\psi}_n$ белгилашдан $\{\psi_n\}_{N+1}^\infty$ система H Гильберт фазосида чекли дефектли Рисс базиси (аниқроғи дефект қисм фазонинг ўлчами N) бўлади.

Шунга кўра, $\{\psi_n\}_1^\infty$ система H Гильберт фазосида чекли дефектли Рисс базиси (ёки чекли дефектли тўлган Рисс базиси) бўлади. Теорема исбот бўлди.

6-Эслатма*. H Гильберт фазосидаги ҳар қандай тўла ортонормал $\{\varphi_n\}_1^\infty$ система учун шу H Гильберт фазосида шундай бир ортонормал $\{\psi_n\}_1^\infty$ система мавжудки, бунда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \varphi_n - \psi_n \|^{2+\varepsilon} < \infty ,$$

ва $\{\psi_n\}_1^\infty$ тўла бўлмаган система бўлади.

Бу эслатманинг ўринли эканлиги Н.К. Бари[1] натижаларидан бевосита келиб чиқади.

Агар ρ_n $(0 \le \rho_n \le \sqrt{2})$ сонлар учун $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2$ қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда ҳар қандай тўла ортонормал $\{\varphi_n\}_1^\infty$ система учун шундай бир тўла бўлмаган $\{\psi_n\}_1^\infty$ ортонормал системани қуриш мумкинки, бунда

$$\| \varphi_n - \psi_n \| = \rho_n \ (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

тенглик ўринли бўлади.

Биз $\rho_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ деб олсак, у ҳолда Н. К. Бари натижасига кўра ҳар қандай тўла ортонормал $\{\varphi_n\}_1^\infty$ система учун шундай бир тўла бўлмаган $\{\psi_n\}_1^\infty$ ортонормал системани қуриш мумкинки, бунда

$$\| \varphi_n - \psi_n \| = \frac{1}{\sqrt{n}} \ (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ \| \varphi_n - \psi_n \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \ \frac{1}{n} = \infty$$

қатор узоқлашувчи ва

[1] Н. К. Бари, Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Уч.. Зап. МГУ, 4, вып. 148 (1951), С. 69-107.

$\forall \varepsilon > 0$ учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n - \psi_n\|^{2+\varepsilon} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} = \zeta\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$

қатор яқинлашувчи, бунда $\zeta(t)-$ Риман функцияси бўлади.

Шундай қилиб, Рисс базисига яқинликнинг аниқ кўрсаткичи 2 га тенг бўлади.

Вектор-функциялар фазосида

$$l(u) = u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)u, \quad x \in G = (0;1)$$

дифференциал ифода ёрдамида яратилган ихтиёрий чекли тартибли оддий дифференциал операторлар хос функциялари ва эргашган функциялари системасининг Рисс базислигини текшириш методлари академик В.А. Ильин[1] томонидан тадқиқ этилган.

---

[1] В. А. Ильин. Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений // Дифференц, уравнения. 1980.16, №5. С. 771-794; 16, №6. С. 980-100.

В. А. Ильин. Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений и разложений по системе экспонент // Докл. АН. 1983.Т. 273. № 4. С. 789 -793.

В. И. Ильин. О безусловной базисности на замкнутом интервале система собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН. 1983. Т. 273. №5. С. 1048-1053.

В. А. Ильин. Необходимые и достаточные условия базисности. Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференц. Уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2059-2071.

В. А. Ильин. О базисности Рисса систем корневых вектор - функций разрывного оператора Шредингера с матричным потенциалом // Докл. АН. 1990. 314, №1, С. 59-62.

7-§. Тақрибий берилган Фурье коэффициентлари бўйича функция қийматини ҳисоблаш ҳақидаги А.Н. Тихонов теоремасининг кўп ўлчамли аналоги

Бу параграфда кўп ўзгарувчили функция Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларида шу функцияни берилган нуқтада кичик хато билан тиклаш масаласи қараб чиқилади.

Айтайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ функция ҳар бир $x_j \ (j = \overline{1, N})$ ўзгарувчи бўйича $2\pi -$даврли даврий функция бўлиб, $N -$ўлчамли $T^N = \left\{x \in R^N : -\pi < x_j \le \pi, \ j = 1, 2, ..., N\right\}$ кубда

$$f(x) = \sum_{n \in Z^N} c_n e^{inx} \qquad (2.7.1)$$

тригонометрик Фурье қатори шар бўйича текис яқинлашиш шартларини қаноатлантирсин. Бу ерда, одатда, $N > 1$ учун nx орқали $nx = n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_N x_N$, $n \in Z^N$, $x \in R^N$ скаляр кўпайтма, ҳамда $Z^N -$орқали эса, бутун компоненталари барча векторлар тўплами, яъни агар $n_j = 0, \pm 1, ...$ бўлса, у ҳолда $n = (n_1, n_2, ..., n_N) \in Z^N$ тушунилади.

R мусбат сони учун шарсимон $S_R(x)$ қисмий йиғинди $S_R(x) = \sum_{|n| \le R} c_n e^{inx}$ кўринишида аниқланади.

Агар $\lim_{R \to \infty} S_R(x)$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда x нуқтада (2.7.1) қатор шар бўйича яқинлашувчи деб айтилади.

Агар $\lim_{R \to \infty} S_R(x)$ лимит $x \in T^N$ бўйича текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (2.7.1) қатор шар бўйича T^N кубда текис яқинлашувчи деб айтилади.

Айтайлик, бу кўп ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффициентларининг c_n аниқ қийматлари ўрнига шу Фурье коэффициентларининг $\tilde{c}_n$ тақрибий қийматларигина маълум бўлсин. Айнан шу ҳол кўпгина амалий масалаларда учрайди.

Тригонометрик Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларининг берилиш хатосини $l_2(Z^N)$ фазо нормаси маъносида кичик деб оламиз. Бу эса,

$$\sum_{n\in Z^N} \left|c_n - \tilde{c}_n\right|^2 \le \delta^2, \tag{2.7.2}$$

тенгсизликнинг ўринли эканлигини билдиради, бу ерда $\delta -$ етарлича кичик мусбат сон бўлиб, уни Фурье коэффициентлари берилишининг *четланиши* деб атаймиз.

Табиий равишда, муҳим тадбиққа эга бўлган қуйидаги масала пайдо бўлади: кўп ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффициентларининг c_n аниқ қийматлари ўрнига шу Фурье коэффициентларининг $\tilde{c}_n$ тақрибий қийматлари бўйича берилган x нуқтада $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ функцияни $\delta \to 0$ да, нолга интилувчи $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ хато билан тиклаш талаб этилади.

Фурье коэффициентлари тақрибий қийматлари билан берилганда бевосита, тўғридан-тўғри

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n\in Z^N} \tilde{c}_n e^{inx} \tag{2.7.3}$$

тригонометрик Фурье қаторини жамлаш йўли билан берилган x нуқтада $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ функцияни ҳеч қандай аниқлик даражасида тиклашга эришиб бўлмаслигини кўрсатамиз.

Ихтиёрий кичик $\delta > 0$ четланишни оламиз ва $C = \sqrt{\sum_{n\in Z^N} \frac{1}{\left(1+|n|\right)^{2s}}}$ бўлсин, бунда $\frac{N}{2} < s < N,\ n \in Z^N$. Айтайлик, бу кўп ўзгарувчили функциянинг тригонометрик Фурье коэффициентларининг берилишида қуйидагича аниқ кўринишдаги четланишга эга бўлсин:

$$\frac{N}{2} < s < N,\ n \in Z^N \quad \text{учун} \quad c_n - \tilde{c}_n = \frac{\delta}{C\left(1+|n|\right)^s}\ .$$

Бундай тригонометрик Фурье коэффициентларининг аниқ четланишида, кўриниб турибдики, (2.7.2) муносабат аниқ тенглик белгиси билан ўринли бўлади. (2.7.1) аниқ Фурье қаторини Фурье коэффициентлари тақрибий берилган (2.7.3) қатор билан алмаштирганда биз

$$\sum_{n\in Z^N}(c_n-\tilde{c}_n)e^{inx}$$

қатор йиғиндисига тенг бўлган хатоликка эга бўламиз.

$x=0$ нуқтада бу хатолик четланиш $\delta>0$ қанча кичик бўлмасин, барибир

$$\sum_{n\in Z^N}(c_n-\tilde{c}_n)=\frac{\delta}{C}\sum_{n\in Z^N}\frac{1}{1+|n|^s}=\infty$$

бўлади.

Шундай қилиб, (2.7.1) аниқ тригонометрик Фурье қатори $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_N)$ функцияга қанча тез яқинлашувчи бўлмасин, Фурье коэффициентлари тақрибий берилган (2.7.3) қатор билан алмаштирганда биз (2.7.2) муносабат билан берилган хатолик четланиш $\delta>0$ қанча кичик бўлмасин, барибир тригонометрик Фурье қаторини тўғридан-тўғри жамлаш $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_N)$ функцияни Фурье коэффициентлари тақрибий берилган (2.7.3) қатор ёрдамида $N-$ўлчовли $T^N=\left\{x\in R^N:-\pi<x_j\le\pi,\ j=1,2,...,N\right\}$ кубдаги нуқтада ҳеч қандай аниқлик даражасида тиклаб бўлмайди.

Биз c_n ва $\tilde{c}_n$ Фурье коэффициентларига мос, (2.7.2) муносабат маъносида берилган характерловчи хатолик четланиши $\delta>0$ қанча кичик бўлмасин, барибир бу иккита берилганларга мос тригонометрик Фурье коэффициентли (2.7.1) ва (2.7.3) қаторларини тўғридан-тўғри жамлашда йиғинди бир-биридан жуда кучли фарқ қилиши мумкин экан.

Бундай турдаги масалалар, яъни берилганларнинг жуда кичик четланишида (бу ерда берилганлар Фурье коэффициентлари тўпламидан иборат) уларга мос ечимларнинг (биз қараётган ҳолда ечим деб тригонометрик Фурье қаторининг тўғри йиғиндисини тушунамиз) исталганча катта фарқ қилишлиги математикада кўп учрайдиган ва тадбиқларга эга бўлган нокоррект қўйилган масала деб аталувчи масала тушунчасига олиб келади.

Бошқача сўз билан айтганда, биз қараётган тригонометрик Фурье қаторининг тўғри йиғиндисини топиш масаласи нокоррект қўйилган масала бўлади.

Нокоррект қўйилган масалаларнинг кенг синфларини ечишнинг умумий методлари академик А.Н. Тихонов томонидан ишлаб чиқилган ва регулярлаштириш методлари деб номланади.

Бу ерда биз тригонометрик Фурье қаторининг йиғиндиси ҳақидаги масалага регулярлаштириш методини қўллашга тўхталамиз.

Тақрибий Фурье коэффициентлари билан берилган тригонометрик Фурье қаторининг йиғиндиси ҳақидаги масалага регулярлаштириш методини қўллаш алгоритми $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ функциянинг тақрибий қиймати сифатида (2.7.3) қаторнинг йиғиндисини эмас, балки

$$\sum_{n\in Z^N} \tilde{c}_n e^{inx} \frac{1}{1+|n|^{\gamma}\alpha} \quad , \tag{2.7.4}$$

қаторнинг йиғиндисини қарашдан иборат бўлиб, бунда $\gamma = \frac{N}{2} + \frac{3}{2}$ ва (2.7.3) қаторнинг $n-$ҳадини «регулярлаштирувчи» $\frac{1}{1+|n|^{\gamma}\alpha}$ кўпайтувчига кўпайтиришдан ҳосил қилинган. Бу ерда α параметр ҳам (2.7.2) муносабатдаги Фурье коэффициентларининг δ четланиши каби бир хил тартибдаги кичик миқдордан иборат.

Келтирилган алгоритмни асословчи А.Н. Тихонов теоремасининг кўп ўлчамли аналоги бўлган қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Теорема.[1] *$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ функция $N-$ўлчамли T^N кубда ўзининг тригонометрик Фурье қатори шар бўйича текис яқинлашиш шартларини қаноатлантирувчи $f(x) = \sum_{n\in Z^N} c_n e^{inx}$ Фурье қаторига ёйилган ва $f(x)$ функция $L_2(T^N)$ синфга*

[1] Бу теорема бир ўлчамли бўлган ҳолда А.Н. Тихонов томонидан исбот қилинган бўлиб, унинг исботи билан В.А. Ильин., Э.Г. Позняк. Основы математического анализа, Часть II, 1980, стр. 436-443. китобида келтирилган “О вычислении значений функции по приближенно заданным коэффициентам Фурье” деб номланган мавзусида танишиш мумкин. Бу ерда келтирилган кўп ўлчамли ҳолдаги исботи эса, Г.С. Хаитбоевнинг “Многомерный аналог теоремы А.Н. Тихонова о вычислении значений функции по приближенно заданным коэффициентам Фурье” (Узбекский Математический Журнал, 2014, № 1, стр. 119-125) ишида исбот қилинган.

тегишли бўлсин. У ҳолда ҳар бир $\delta>0$ ва δ билан бир хил тартибли кичик миқдор бўлган $\alpha>0$ учун (2.7.2) муносабатни қаноатлантирувчи $\tilde{c}_n$ коэффициентли (2.7.4) қатор йиғиндиси $f(x)$ функция билан $\delta\to 0$ да, нолга интилувчи $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ хато билан устма-уст тушади.

Исбот. Умумийликка хилоф қилмаган ҳолда, $\alpha=\delta$ деб ҳисоблаймиз (бошқача $\alpha=C(\delta)\cdot\delta$, бунда $0<C_1\le C(\delta)\le C_2$ бўлган ҳолда ҳам худди шунга ўхшаш қаралади). Ҳар қандай $\varepsilon>0$ сон учун $\delta_0(\varepsilon)>0$ сон топилиб, берилган x нуқта учун $\delta\le\delta_0(\varepsilon)$ шартни қаноатлантирувчи барча мусбат δ сонлар учун

$$\left|\sum_{n\in Z^N}\tilde{c}_n e^{inx}\frac{1}{1+|n|^\gamma\delta}-f(x)\right|\le\varepsilon \tag{2.7.5}$$

тенгсизлик ўринли эканлигини исбот қилиш етарлидир.

Ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. Аввал, шу берилган ε сон учун $\delta_1(\varepsilon)>0$ сон топилиб, $\delta\le\delta_1(\varepsilon)$ шартни қаноатлантирувчи, барча мусбат δ сонлар учун

$$\left|\sum_{n\in Z^N}(\tilde{c}_n-c_n)e^{inx}\frac{1}{1+|n|^\gamma\delta}\right|\le\frac{\varepsilon}{4} \tag{2.7.6}$$

тенгсизлик ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

(2.7.6) муносабатни ўрнатиш учун $\delta\to 0+0$ да (2.7.6) тенгсизликнинг чап томонидаги ифоданинг нолга интилишини кўрсатиш етарлидир.

(2.7.6) тенгсизликнинг чап томонидаги ифодани иккита йиғиндига ажратамиз, бунда биринчи йиғиндига $|n|<\dfrac{1}{\sqrt[N]{\delta}}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $n=(n_1,n_2,\dots,n_N)\in Z^N$ номерли қўшилувчиларни, иккинчи йиғиндига эса, барча қолган қўшилувчиларни киритамиз ва ҳар иккала қўшилувчига Коши–Буняковский тенгсизлигини қўллаб,

$$\left|\sum_{n\in Z^N}(\tilde{c}_n-c_n)e^{inx}\frac{1}{1+|n|^\gamma\delta}\right|\le\left|\sum_{|n|<\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}(\tilde{c}_n-c_n)e^{inx}\frac{1}{1+|n|^\gamma\delta}\right|+$$

$$+\left|\sum_{|n|\geq\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\left(\tilde{c}_n-c_n\right)e^{inx}\frac{1}{1+|n|^{\gamma}\delta}\right|\leq$$

$$\leq\sqrt{\sum_{|n|<\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\left|\tilde{c}_n-c_n\right|^2}\ \sqrt{\sum_{|n|<\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\left(\frac{1}{1+|n|^{\gamma}\delta}\right)^2}+$$

$$+\sqrt{\sum_{|n|\geq\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\left|\tilde{c}_n-c_n\right|^2}\ \sqrt{\sum_{|n|\geq\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\left(\frac{1}{1+|n|^{\gamma}\delta}\right)^2}\leq$$

$$\leq\sqrt{\sum_{|n|<\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\left|\tilde{c}_n-c_n\right|^2}\ \sqrt{\sum_{|n|<\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}1}+\sqrt{\sum_{|n|\geq\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\left|\tilde{c}_n-c_n\right|^2}\ \sqrt{\sum_{|n|\geq\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\frac{1}{|n|^{2\gamma}\delta^2}}\leq$$

$$\leq\sqrt{\sum_{|n|<\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\left|\tilde{c}_n-c_n\right|^2}\ \sqrt{\frac{3^N}{\delta}}+\sqrt{\sum_{|n|\geq\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\left|\tilde{c}_n-c_n\right|^2}\ \sqrt{C\cdot\sum_{k\geq\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\frac{k^{N-1}}{k^{2\gamma}\delta^2}}\leq$$

$$\leq C_1\sqrt{\delta}+C_2\sqrt{\sum_{k\geq\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\frac{1}{k^{2\gamma-N+1}}}\leq C_1\sqrt{\delta}+C_2\sqrt{\sum_{k\geq\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\frac{1}{k^4}}. \qquad (2.7.7)$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Коши–Маклорен интеграл аломатига кўра,

$$\sum_{k\geq\frac{1}{\sqrt[N]{\delta}}}\frac{1}{k^4}=O\left(\delta^{\frac{3}{N}}\right)$$

муносабатга эга бўламиз ва буни ҳисобга олсак, биз (2.7.7) тенгсизликнинг ўнг томонида $O\left(\sqrt{\delta}\right)+O\left(\delta^{\frac{3}{2N}}\right)$ миқдорни ҳосил қиламиз.

Шунга кўра, (2.7.6) тенгсизлик исбот қилинган деб ҳисоблаш мумкин ва (2.7.5) тенгсизликни ўрнатиш учун биз ҳар бир танланган $\varepsilon > 0$ сони учун $\delta_2(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $\delta \le \delta_2(\varepsilon)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча мусбат δ сонлар учун

$$\left| \sum_{n \in Z^N} c_n e^{inx} \frac{1}{1+|n|^{\gamma} \delta} - f(x) \right| \le \frac{\varepsilon}{4} \qquad (2.7.8)$$

тенгсизлик ўринли эканлигини исбот қилиш етарлидир.

N –ўлчамли T^N кубда $f(x) = \sum_{n \in Z^N} c_n e^{inx}$ тригонометрик Фурье қатори шар бўйича текис яқинлашувчи эканлигидан, биз $S_R(x) = \sum_{|n| \le R} c_n e^{inx}$ қисмий йиғиндининг текис чегараланган эканлиги келиб чиқади, яъни

$$\exists M_0 > 0 : \forall R > 0, \forall x \in T^N \to |S_R(x)| \le M_0 . \qquad (2.7.9)$$

Ҳамда, Коши критериясидан фойдаланиб, (2.7.1) тригонометрик Фурье қаторининг шар бўйича текис яқинлашувчи эканлигидан

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists R_\varepsilon > 0 : \forall R_1 \ge R_\varepsilon , \forall R_2 \ge R_\varepsilon ,$$

$$R_2 > R_1 , \forall x \in T^N \to \left| S_{R_1}^{R_2}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{8} \qquad (2.7.10)$$

тенгсизликка эга бўламиз, бунда $S_{R_1}^{R_2}(x) = S_{R_2}(x) - S_{R_1}(x)$.

$\tilde{f}(x,\alpha) = \sum_{n \in Z^N} c_n e^{inx} \frac{1}{1+|n|^{\gamma} \alpha}$ қаторнинг шар бўйича $E = \left\{ \tilde{x} : \tilde{x} = (x,\alpha), \ x \in T^N , \ 0 \le \alpha \le \alpha_0 \right\}$ тўпламда текис яқинлашувчи эканлигини исбот қиламиз. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини $\sigma_R(x,\alpha) = \sum_{|n| \le R} c_n e^{inx} \frac{1}{1+|n|^{\gamma} \alpha}$ орқали белгилаймиз. У ҳолда Абель алмаштиришини қўллаб

$$\sigma_{R_1}^{R_2}(x,\alpha) = \sigma_{R_2}(x,\alpha) - \sigma_{R_1}(x,\alpha) = \sum_{R_1 < |n| \le R_2} c_n e^{inx} \frac{1}{1+|n|^{\gamma} \alpha} =$$

$$= \sum_{R_1^2 < k \le R_2^2} \ \sum_{|n|^2 = k} c_n e^{inx} \frac{1}{1+|n|^{\gamma} \alpha} = \sum_{R_1^2 < k \le R_2^2} \left(\frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}} \alpha} \sum_{|n|^2 = k} c_n e^{inx} \right)$$

тенгликка эга бўламиз.

Маълумки
$$\sum_{|n|^2=k} c_n e^{inx} = \sum_{R_1^2<|n|^2\le k} c_n e^{inx} - \sum_{R_1^2<|n|^2\le k-1} c_n e^{inx} ,$$
бўлгани учун
$$\sigma_{R_1}^{R_2}(x,\alpha)=$$
$$=\sum_{R_1^2<k\le R_2^2}\left(\frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}}\alpha}\left(\sum_{R_1^2<|n|^2\le k} c_n e^{inx}-\sum_{R_1^2<|n|^2\le k-1} c_n e^{inx}\right)\right)=$$
$$=\sum_{R_1^2<k\le R_2^2}\left(\frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}}\alpha}\sum_{R_1^2<|n|^2\le k} c_n e^{inx}\right)-$$
$$-\sum_{R_1^2<k\le R_2^2}\left(\frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}}\alpha}\sum_{R_1^2<|n|^2\le k-1} c_n e^{inx}\right)=$$
$$=\sum_{R_1^2<k\le R_2^2}\left(\frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}}\alpha}\sum_{R_1^2<|n|^2\le k} c_n e^{inx}\right)-$$
$$-\sum_{R_1^2-1<k\le R_2^2-1}\left(\frac{1}{1+(k+1)^{\frac{\gamma}{2}}\alpha}\sum_{R_1^2<|n|^2\le k} c_n e^{inx}\right)=$$
$$=\sum_{R_1^2<k\le R_2^2-1}\left(\left(\frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}}\alpha}-\frac{1}{1+(k+1)^{\frac{\gamma}{2}}\alpha}\right)\sum_{R_1^2<|n|^2\le k} c_n e^{inx}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{1+R_2^{\gamma}\alpha}\sum_{R_1^2<|n|^2\le R_2^2} c_n e^{inx}\right)$$
бўлади. Бундан эса, (2.7.10) шартни қўллаб
$$\left|\sigma_{R_1}^{R_2}(x,\alpha)\right|\le\sum_{R_1^2<k\le R_2^2-1}\left|\frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}}\alpha}-\frac{1}{1+(k+1)^{\frac{\gamma}{2}}\alpha}\right|\left|\sum_{R_1^2<|n|^2\le k} c_n e^{inx}\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{1+R_2^{\gamma}\,\alpha}\right|\,\left|\sum_{R_1^2<|n|^2\le R_2^2} c_n\, e^{in\,x}\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{8}\sum_{R_1^2<k\le R_2^2-1}\left(\frac{1}{1+k^{\frac{\gamma}{2}}\,\alpha}-\frac{1}{1+(k+1)^{\frac{\gamma}{2}}\,\alpha}\right)+\frac{\varepsilon}{8}\frac{1}{1+R_2^{\gamma}\,\alpha}\le\frac{\varepsilon}{4}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Шундай қилиб,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists R_{\varepsilon}>0:\ \forall R_1\ge R_{\varepsilon},\ \forall R_2\ge R_{\varepsilon},$$

$$R_2>R_1, \forall\,\tilde{x}=(x,\alpha)\in E\to\left|\sigma_{R_1}^{R_2}(x,\alpha)\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

ва қаторнинг текис яқинлашиши ҳақидаги Коши критериясига кўра, биз $\tilde{f}(x,\alpha)=\sum_{n\in Z^N} c_n e^{i\,n\,x}\dfrac{1}{1+|n|^{\gamma}\,\alpha}$ қатор шар бўйича E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади. Бундан эса, $\tilde{f}(x,\alpha)$ функциянинг E тўпламда узлуксиз эканлигига эга бўламиз ва йиғинди белгиси остида лимитга ўтиш мумкин:

$$\lim_{\alpha\to 0}\tilde{f}(x,\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}\sum_{n\in Z^N} c_n e^{i\,n\,x}\frac{1}{1+|n|^{\gamma}\,\alpha}=\sum_{n\in Z^N} c_n e^{i\,n\,x}=f(x).$$

Шунга кўра, (2.7.8) тенгсизлик исбот бўлган деб ҳисоблаш мумкин, яъни ҳар бир тайинланган $\varepsilon>0$ сон учун $\delta_2(\varepsilon)>0$ сон топилиб, $\delta\le\delta_2(\varepsilon)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча мусбат δ сонлар учун

$$\left|\sum_{n\in Z^N} c_n e^{i\,n\,x}\frac{1}{1+|n|^{\gamma}\,\delta}-f(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{4}\ .$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, ҳар қандай $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир $\delta_0(\varepsilon)=\min\{\delta_1(\varepsilon),\,\delta_2(\varepsilon)\}>0$ сон топилиб, берилган x нуқтада $\delta\le\delta_0(\varepsilon)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча мусбат δ сонлар учун

$$\left|\sum_{n\in Z^N}\tilde{c}_n e^{i\,n\,x}\frac{1}{1+|n|^{\gamma}\,\delta}-f(x)\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Теорема исбот бўлди.

8-§. Фурье интеграли

1. Фурье интеграли Фурье қаторининг лимити сифатида. Биз Фурье томонидан киритилган Фурьенинг интеграл формуласини[1] батафсил келтириб ўтамиз.

Агар $f(x)$ функция чекли $[-l,\ l]$ оралиқда берилган бўлиб, маълум бир шартларни қаноатлантирса, у ҳолда бу функцияни шу оралиқда қуйидаги кўринишдаги тригонометрик Фурье қатори шаклида тасвирлаш мумкин:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\sin\frac{m\pi x}{l},$$

бунда

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{m\pi u}{l}du, \qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

$$b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\sin\frac{m\pi u}{l}du, \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Бу ифодада a_m ва b_m коэффициентларнинг ўрнига уларнинг қийматини қўйсак, у ҳолда

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)du+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{m\pi}{l}(u-x)du \qquad (2.8.1)$$

формула ҳосил бўлади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(-\infty,+\infty)$ оралиқда аниқланган бўлсин. Бу ҳолда ихтиёрий x ўзгарувчи қандай бўлишидан қатъий назар $l>|x|$ шартни қаноатлантирувчи l учун (2.8.1) формуладаги ёйилманинг қиймати $f(x)$ функциянинг қийматига мос келади. Бу ерда $l\to+\infty$ да лимитга ўтиб бу ёйилманинг “лимитик шаклини” ўрнатишга ҳаракат қиламиз.

(2.8.1) тенгликнинг ўнг қисмидаги биринчи қўшилувчи нолга интилади[2]. Мазкур чексиз қаторга эътиборимизни қаратиб,

---

[1] Бу формула Фурьедан ташқари унга боғлиқ бўлмаган ҳолда, Коши томонидан ҳам олинган.

[2] Бу мулоҳаза, масалан, агар $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du$ интеграл яқинлашувчи деб олинса ўринлидир.

косинус функциянинг аргументидаги $\frac{m\pi}{l}$ кўпайтувчини қандайдир z ўзгарувчининг

$$z_1 = \frac{\pi}{l},\ z_2 = \frac{2\pi}{l},\ \ldots,\ z_m = \frac{m\pi}{l},\ \ldots$$

дискрет қиймати сифатида қарасак, бу z ўзгарувчи 0 дан $+\infty$ гача узлуксиз ўзгариб, унинг орттирмаси

$$\Delta z_m = z_{m+1} - z_m = \frac{\pi}{l}$$

бўлиб, $l \to +\infty$ да нолга интилади. Бундай киритилган белгилашга кўра, қаралаётган қатор қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\Delta z_{m-1}\int_{-l}^{l} f(u)\cos z_m(u-x)du\,.$$

Охирги тенглик z ўзгарувчига нисбатан

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)du$$

функциянинг $[0,\ +\infty)$ ораликдаги интеграл йиғиндисини эслатади. Келтирилган мулоҳазадан фойдаланиб, $l \to +\infty$ да охирги қаторда лимитга ўтиб, қуйидаги Фурьенинг интеграл формуласини келтириб чиқарамиз:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)du\,.$$

Бу формулада айирманинг косинуси ифодасини ёйиб, уни

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} [a(z)\cos zx + b(z)\sin zx]dz,$$

шаклида ёзиш мумкин бўлади, бунда

$$a(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos zudu,\quad b(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin zudu\,.$$

Бу ерда ҳосил қилинган формула тригонометрик Фурье қаторига ўхшаб, фақат m натурал параметр ўрнига z узлуксиз параметр билан ва чексиз қатор ўрнига интеграл билан алмаштирилган. Бу $a(z)$ ва $b(z)$ коэффициентлар Фурье коэффициентларини эслатади.

Маълумки, бу фикрлар Фурье формуласига олиб келсада, биз унинг ҳақиқатдан ҳам, ўринли бўладиган шартларини аниқлашимиз керак бўлади. Қатъий мулоҳазаларни келтириб чиқаришда биз асосан Фурье қатори билан боғлиқ бўлган асосий тушунчаларга таянамиз.

2. Дастлабки эслатма. Айтайлик, $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда абсолют интегралланувчи функция бўлсин. У ҳолда қуйидаги

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{A}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x_0)du$$

интегрални қараймиз, бунда A сон мусбат чекли сон бўлиб, x_0 эса x ўзгарувчининг ихтиёрий танланган қийматидир. Бу интеграл Фурье қаторининг қисмий йиғиндисига ўхшаш ифодадир. Бундан эса, $A\to+\infty$ да лимитга ўтиб

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x_0)du \qquad (2.8.2)$$

Фурье интегралини ҳосил қиламиз.

Шартга кўра, $f(x)$ функция абсолют интегралланувчи функция ва шунга кўра ихтиёрий чекли $B>0$ сони учун $[-B,\ B]$ сегментда абсолют интегралланувчи функция бўлади. Шунинг учун интеграллар тартибини алмаштириб

$$\int_{0}^{A}dz\int_{-B}^{B}f(u)\cos z(u-x_0)du=\int_{-B}^{B}f(u)du\int_{0}^{A}\cos z(u-x_0)dz=$$

$$=\int_{-B}^{B}f(u)\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}du\ . \qquad (2.8.3)$$

тенгликка эга бўламиз. Бироқ

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos z(u-x_0)du \qquad (2.8.4)$$

интеграл яқинлашувчи бўлган

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|du$$

интеграл билан юқоридан баҳоланади ва шунга кўра бу (2.8.4) интегралнинг z ўзгарувчига нисбатан текис яқинлашувчи бўлишилиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $\int\limits_{-B}^{B} f(u)\cos z(u-x_0)du$ интеграл $B\to+\infty$ да ўзининг (2.8.4) лимитига текис яқинлашади. Шунинг учун (2.8.3) тенгликда $B\to+\infty$ да лимитга ўтсак, чап томондаги интеграл остида лимитга ўтиш мумкин бўлади. Бундан эса

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin A\,(u-x_0)}{u-x_0}\,du$$

Дирихле интегралини эслатувчи ифодага эга бўламиз ва бу интеграл ҳақиқатдан ҳам шундай роль ўйнайди. Бу интеграл устида элементар алмаштириш бажариш орқали уни

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]\frac{\sin At}{t}dt \qquad (2.8.5)$$

кўринишга келтириш мумкин. Кейинчалик бизга аввал келтирилган асосий Риман леммасини тўлдирувчи қуйидаги тасдиқ керак бўлади.

Агар $g(t)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда абсолют интегралланувчи функция бўлса, у ҳолда

$$\lim_{p\to+\infty}\int\limits_{a}^{+\infty} g(t)\sin ptdt=0 \quad \textit{ва} \quad \lim_{p\to+\infty}\int\limits_{a}^{+\infty} g(t)\cos ptdt=0$$

тенгликлар ўринли бўлади.

3. Етарлилик аломатлари.

$$1=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt \qquad (A>0)$$

тенгликнинг ҳар иккала томонини (2.8.2) интегралнинг қиймати бўлган S_0 га кўпайтирамиз ва (2.8.5) формуладан ҳадма-ҳад айириб

$$J(A)-S_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(t)\frac{\sin At}{t}dt \qquad (2.8.6)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бунда $\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0$

бўлиб, биз бу ерда $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтага нисбатан иккита ҳолини қараш билан чегараланамиз:

а) $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз;

б) $f(x)$ функция x_0 нуқтада биринчи тур узилишга эга.

Қаралаётган ҳоллардан а) ҳолатда $S_0 = f(x_0)$, б) ҳолатда эса $S_0 = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ деб оламиз.

Бу ҳолларда қуйидаги теорема ўринлидир.

1–теорема (Дини аломати). *Агар* $f(x)$ *функция* $(-\infty, +\infty)$ *оралиқда абсолют интегралланувчи функция бўлиб, қандайдир* $h > 0$ *учун*

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$$

интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ *функциянинг Фурье интеграли* x_0 *нуқтада яқинлашувчи ва унинг қиймати* S_0 *га тенг бўлади.*

Исбот. (2.8.6) формула билан аниқланган интегрални

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(t)\frac{\sin At}{t}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^h \frac{\varphi(t)}{t}\sin Atdt + \frac{1}{\pi}\int_h^\infty \varphi(t)\frac{\sin At}{t}dt$$

интеграллар йиғиндиси шаклида ёзиб оламиз. Маълумки, асосий Риман леммасига асосан $A \to +\infty$ да охирги тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интеграл нолга интилади. Иккинчи интеграл тўғрисида фикр юритиш учун $\varphi(t)$ функциянинг қиймати ўрнига ўзининг қийматини қўйиб, уни иккита қўшилувчига ёйиб

$$\frac{1}{\pi}\int_h^\infty \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin Atdt - \frac{2}{\pi}S_0\int_h^\infty \frac{\sin At}{t}dt$$

шаклида ёзамиз. Шартга кўра, $f(x)$ функция абсолют интегралланувчи функция бўлганлиги учун $\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}$ функция $[h, +\infty)$ оралиқда абсолют интегралланувчи функция бўлиб, $A \to +\infty$ да биринчи интеграл нолга интилади, яъни $A \to +\infty$ да

$$\frac{1}{\pi}\int_{h}^{\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin Atdt \to 0$$

бўлишлиги келиб чиқади. Ҳамда

$$\int_{h}^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt=\int_{Ah}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz$$

тенгликдан эса, хосмас интеграл таърифига кўра унинг яқинлашувчи эканлигидан $A\to+\infty$ да иккинчи интегралнинг ҳам нолга интилиши келиб чиқади.

Келтирилган Дини аломатидан бир оз соддароқ ва бу аломатнинг хусусий ҳоли бўлган аломатларни келтириш мумкин. Масалан, агар $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада чекли ҳосиласи ёки бир томонли чекли ҳосилалари мавжуд бўлишлиги етарли бўлади.

2–теорема (Дирихле-Жордан аломати). *Агар $f(x)$ функция $(-\infty,+\infty)$ оралиқда абсолют интегралланувчи функция ва ўртаси x_0 нуқтада бўлган қандайдир $[x_0-h,\ x_0+h]$ сегментда $f(x)$ функциянинг ўзгариши чегараланган бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг Фурье интеграли шу x_0 нуқтада яқинлашувчи ва унинг қиймати S_0 га тенг бўлади.*

Исбот. Агар

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt$$

интегрални

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{h}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{h}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt$$

иккита интегралларнинг йиғиндиси кўринишида тасвирласак, у ҳолда биз ҳозир кўрганимиздагидек бу интеграллардан иккинчиси $A\to+\infty$ да нолга интилади. Биринчи интеграл эса, қаторларни жамлашда келтирилган асосий леммага кўра

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]=S_0$$

қийматга интилади. Ҳақиқатдан ҳам, $[0,h]$ сегментда $f(x_0+t)+f(x_0-t)$ функция t ўзгарувчи бўйича чегараланган ўзгаришга эга бўлиб, шунга кўра бу функция иккита ўсувчи функцияларнинг айирмаси кўринишида тасвирланади ва ҳар бир ўсувчи функцияга леммани қўллак теорема исбот бўлади.

4. Шакли ўзгарган асосий шартлар. Бизнинг аввалги қарашларимизда $f(x)$ функция $(-\infty,+\infty)$ ораликда абсолют интегралланувчи функция бўлиб шу ораликға тегишли ихтиёрий x_0 нуқтанинг атрофида $f(x)$ функциянинг ҳолатига маълум бир қўшимча шартлар қўйиб, шу x_0 нуқтада $f(x)$ функцияни Фурье интеграли билан тасвирлаш ҳақидаги у ёки бу етарли шартларни ҳосил қилган эдик. Лекин амалиётда бу шартларни қўллаш торроқ натижа бергани учун биз фақат берилган $f(x)$ функциядан қуйидаги шартларни қаноатлантиришини талаб этамиз:

1. $f(x)$ функция ҳар бир чекли ораликда абсолют интегралланувчи функция бўлсин;

2. $f(x)$ функция аргумент x нинг ҳар бир $x\geq H$ ва $x\leq -H$ оралиғида алоҳида монотон функция ва

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \qquad (2.8.7)$$

бўлсин.

(2.8.4) кўринишдаги

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x_0)du$$

интегралнинг $u=+\infty$ ва $u=-\infty$ учун z ўзгарувчига нисбатан текис яқинлашиш масаласи муҳим эканлигини кўрган эдик. Маълумки, $z\geq a>0$ учун

$$\left|\int_{H}^{u}\cos z(u-x_0)du\right|\leq\frac{2}{z}\leq\frac{2}{a}$$

бўлиб бу интегралнинг z ўзгарувчига нисбатан $z\geq a$ бўлганда текис яқинлашувчи бўлишлигини ҳосил қиламиз, бунда a

танланган ихтиёрий мусбат сон. Бу эса, бизни $J(A)$ интеграл ўрнига

$$J(A,\, a) = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{A} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u - x_0)du \qquad (A > a > 0)$$

интегрални қарашга олиб келади ва шунга кўра Фурье интеграли $A \to +\infty$ ва $a \to 0$ интилгандаги икки каррали лимитдан келиб чиқади. Бу интегрални юқоридагидек,

$$J(A,\, a) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right]\frac{\sin At}{t}dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right]\frac{\sin at}{t}dt \qquad (2.8.8)$$

кўринишда тасвирлаш мумкин. Бундан эса

$$J(A,\, a) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\varphi(t)\frac{\sin At}{t}dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right]\frac{\sin at}{t}dt \qquad (2.8.9)$$

бўлиши келиб чиқади. Энг аввал

$$\lim_{a\to 0}\int_{0}^{\infty}\left[f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right]\frac{\sin at}{t}dt = 0. \qquad (2.8.10)$$

тенгликни исботлаймиз. Шунинг учун биз бу интегрални

$$\int_{0}^{\Delta}\left[f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right]\frac{\sin at}{t}dt + \int_{\Delta}^{\infty}\left[f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right]\frac{\sin at}{t}dt$$

кўринишда ёзиб оламиз, бунда Δ сони $x_0 - \Delta < -H$ ҳамда $x_0 + \Delta > H$ шартларни қаноатлантирувчи етарлича катта бўлган сон бўлсин. Маълумки,

$$\left|\int_{0}^{\Delta}\left[f(x_0 + t) + f(x_0 - t)\right]\frac{\sin at}{t}dt\right| \le a\int_{0}^{\Delta}\left[\left| f(x_0 + t)\right| + \left| f(x_0 - t)\right|\right]dt$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, Δ сонининг қандай бўлишидан қатъий назар $a \to 0$ интилганда бу интеграл нолга интилади.

Иккинчи интегралга эътиборимизни қаратадиган бўлсак, бу интеграл учун ўрта қиймат ҳақидаги теорема ҳамда (2.8.7) муносабатни эътиборга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_{\Delta}^{\infty} f(x_0 \pm t)\frac{\sin at}{t}dt = f(x_0 \pm \Delta)\int_{\Delta}^{\Delta'}\frac{\sin at}{t}dt =$$

$$= f(x_0 \pm \Delta)\int_{a\Delta}^{a\Delta'}\frac{\sin z}{z}dz, \qquad (\Delta' > \Delta).$$

Бу иккинчи кўпайтувчи чегараланган катталик бўлиб, биринчиси эса (2.8.7) муносабатга кўра, Δ сонини танлаш ҳисобидан уни етарлича кичик қилиб олиш мумкин бўлади. Бу эса (2.8.10) муносабатнинг бажарилишини билдиради. (2.8.8) ва (2.8.9) ифодалар асосан A ўзгармас сонни ўз ичига олган интегралга боғлиқ.

Биз аввал f функция чексиз оралиқда абсолют интегралланувчи функция эканлигига асосланиб

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{h}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt = 0$$

лимитик тенгликни исбот қилган эдик, бунда h қандайдир танланган мусбат сондир. Ушбу муносабатни бизнинг янги шартларимиздан фойдаланиб ҳам кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, агарда $\Delta > h$ деб ҳисобласак, у ҳолда

$$\int_{h}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt =$$

$$= \int_{h}^{\Delta}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt + \int_{\Delta}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}dt.$$

бўлади. Ўнг томондаги иккинчи интеграл учун юқоридаги мулоҳазани юртсак, у ҳолда бу интегралнинг нолга интилиши келиб чиқади. Асосий леммага кўра $A \to +\infty$ га интилганда биринчи интегралнинг ҳам нолга интилиши келиб чиқади.

Энди бу келтирилган фикрлардан $f(x)$ функцияга нисбатан қўйилган янги шартларда ҳам *Дини ва Дирихле-Жордан аломатлари* ўз кучида қолиши келиб чиқади.

Юқорида келтирилган мулоҳазадан Фурье формуласи тўғрисидаги қуйидаги тасдиқнинг ўринли бўлиши келиб чиқади:

агар $f(x)$ функция $[-\infty, +\infty]$ оралиқда чегараланган ўзгаришга эга ва бундан ташқари (2.8.7) лимитик тенглик ҳам ўринли бўлса, у ҳолда ҳар бир x_0 нуқтада шу $f(x)$ функциянинг Фурье интеграли яқинлашувчи ва унинг қиймати S_0 га тенг бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, $f(x)$ функция учун қўйилган шартлар ўринли бўлса, у ҳолда шу $f(x)$ функцияни иккита ўсувчи ва чегараланган $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг айирмаси кўринишда тасвирлаш мумкин бўлиб, $x \to +\infty$ ва $x \to -\infty$ да тенг лимитларга эга бўлади, яъни

$$f_1(+\infty) = f_2(+\infty) = c', \quad f_1(-\infty) = f_2(-\infty) = c''$$

тенгликлар ўринлидир.

Энди $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар ўрнига қуйидаги функцияларни киритамиз:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f_1(x) - c', \text{ агар } & x \geq 0 \quad \text{бўлса}, \\ f_1(x) - c'', \text{ агар } & x < 0 \quad \text{бўлса}, \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} f_2(x) - c', \text{ агар } & x \geq 0 \quad \text{бўлса}, \\ f_2(x) - c'', \text{ агар } & x < 0 \quad \text{бўлса}. \end{cases}$$

У ҳолда яна аввалгидек

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

бўлиб, энди

$$\lim_{x \to \pm\infty} \varphi_1(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \varphi_2(x) = 0$$

тенгликлар ўринли бўлади. Шунга кўра φ_1 ва φ_2 функциялар 1) ва 2) шартларни қаноатлантиради, бундан ташқари ихтиёрий нуқтада Дирихле-Жордан аломатини қўллаш мумкин бўлади.

5. Фурье формуласининг бошқа кўринишлари. Фурье формуласини қўллаш учун қўйиладиган етарли шартлар бажарилган бўлсин. Бизга берилган $f(x)$ функция x нуқтада узлуксиз ёки узлуксиз бўлмаса у ҳолда

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

шартни қаноатлантирсин, яъни қаралаётган нуқта функциянинг регуляр нуқтаси бўлсин. У ҳолда қаралаётган функцияни қуйидаги кўринишда тасвирлаш мумкин:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du\,. \qquad (2.8.11)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ички интеграл z ўзгарувчига нисбатан жуфт функция бўлганлиги учун бу формулани

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)du \qquad (2.8.12)$$

кўринишида тасвирлаш мумкин. Осонгина кўрсатиш мумкинки, $f(x)$ функцияга нисбатан умумий шартлар қўйилганда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin z(u-x)du$$

интеграл мавжуд ва бу интеграл z ўзгарувчига нисбатан тоқ функция бўлади. Умуман олганда бу функциянинг $(-\infty,+\infty)$ интервалда хосмас интеграли мавжудлиги ҳақида айтиб бўлмасада, унинг бош қиймат маъносида мавжудлигини ва

$$V.p.\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin z(u-x)du=0$$

тенгликни ёзиш мумкин бўлади. Бу тенгликни $\dfrac{i}{2\pi}$ га кўпайтирамиз ва (2.8.12) тенглик билан қўшиб

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{iz(u-x)}du \qquad (2.8.13)$$

тенгликка эга бўламиз, бунда ташқи интеграл бош қиймат маъносида тушунилади. Бу кўринишдаги формула биринчи бўлиб Коши томонидан тасвирланган.

Энди (2.8.11) формулага қайтиб уни

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos zxdz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos zudu+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin zxdz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin zudu$$

кўринишда ёзамиз.

Агар $f(u)$ функция жуфт функция бўлса, у ҳолда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos zudu = 2\int_{0}^{+\infty} f(u)\cos zudu, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin zudu = 0$$

тенгликлар ўринли бўлади ва биз фақат косинус функцияларни сақлайдиган

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos zxdz\int_{0}^{\infty} f(u)\cos zudu \qquad (2.8.14)$$

формулага эга бўламиз. Худди шунингдек, агарда қаралаётган $f(x)$ функция тоқ функция бўлса, у ҳолда биз фақат синус функцияларни сақлайдиган

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin zxdz\int_{0}^{\infty} f(u)\sin zudu \qquad (2.8.15)$$

формулага эга бўламиз.

Энди қараладиган $f(x)$ функция $[0, +\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, бу функция учун $(-\infty, +\infty)$ оралиқда қандай шартлар ўринли бўлган бўлса, бу шартлар $f(x)$ функция учун $[0, +\infty)$ оралиқда ҳам ўринли бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функцияни $(-\infty, 0)$ оралиқга $x > 0$ учун

$$f(-x) = f(x) \quad \text{ёки} \quad f(-x) = -f(x)$$

тенглик ёрдамида давом эттириб биз биринчи ҳолда $(-\infty, +\infty)$ оралиқда жуфт, иккинчи ҳолда эса тоқ функцияни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, x ўзгарувчининг мусбат қийматлари учун етарли шартлар бажарилган ҳолда (2.8.14) ва (2.8.15) формулалардан фойдаланишимиз мумкин бўлади.

Агарда $x = 0$ нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз бўлса, у ҳолда бу нуқтада жуфт функция сифатида давом эттирилган $f(x)$ функция ҳам узлуксиз бўлиб унга (2.8.14) формулани қўллаш мумкин. Умуман олганда (2.8.15) формулани $x = 0$ нуқтада қўллаб бўлмайди. Бу $x = 0$ нуқтада (2.8.15) формулани фақатгина $f(0) = 0$ бўлган ҳолдагина қўллаш мумкин бўлади.

Мустақил ечиш учун мисоллар.

13.1. Агар $f(x)=\begin{cases} A, & агар\ \ 0<x<l, \\ 0, & агар\ \ l<x<2l \end{cases}$ бўлиб, бунда $A-$ ўзгармас сон бўлса, у ҳолда бу $f(x)$ функцияни $(0,\ 2l)$ интервалда Фурье қаторига ёйинг.

13.2. $(-\pi,\ \pi)$ интервалда $f(x)=x$ бўлган функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.3. $(0,\ 2\pi)$ интервалда $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ бўлган функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.4. $(-\pi,\ \pi)$ интервалда $f(x)=|x|$ бўлган функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.5. Агар $f(x)=\begin{cases} a\,x, & агар\ \ -\pi<x<0; \\ b\,x, & агар\ \ 0<x<\pi \end{cases}$ бўлиб, бунда a ва $b-$ўзгармас сонлар бўлса, у ҳолда бу $f(x)$ функцияни $(-\pi,\ \pi)$ интервалда Фурье қаторига ёйинг.

13.6. $(-\pi,\ \pi)$ интервалда $f(x)=\pi^2-x^2$ функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.7. $(-\pi,\ \pi)$ интервалда $f(x)=\cos ax$ функцияни Фурье қаторига ёйинг, бунда a бутун бўлмаган сон.

13.8. $(-\pi,\ \pi)$ интервалда $f(x)=\sin ax$ функцияни Фурье қаторига ёйинг, бунда a бутун бўлмаган сон.

13.9. $(-\pi,\ \pi)$ интервалда $f(x)=shax$ функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.10. $(-h,\ h)$ интервалда $f(x)=e^{ax}$ функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.11. $(a,\ a+2l)$ интервалда $f(x)=x$ функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.12. $(-\pi,\ \pi)$ интервалда $f(x)=x\sin x$ функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.13. $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ интервалда $f(x)=x\cos x$ функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.14. $f(x)=sign\,(\cos x)$ даврий функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.15. $f(x)=\arcsin(\sin x)$ даврий функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.16. $f(x)=\arcsin(\cos x)$ даврий функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.17. $f(x)=x-[x]$ даврий функцияни Фурье қаторига ёйинг, бунда $[x]-$ орқали $x-$ соннинг бутун қисми белгиланган.

13.18. $f(x)=(x)$ даврий функцияни Фурье қаторига ёйинг, бунда $(x)-$ орқали $x-$ сондан унга энг яқин бўлган бутун сонгача бўлган масофа белгиланган.

13.19. $f(x)=\left|\sin x\right|$ даврий функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.20. $f(x)=\left|\cos x\right|$ даврий функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.21. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\dfrac{\sin nx}{\sin x}$, бунда $\left|\alpha\right|<1$ бўлган даврий функцияни Фурье қаторига ёйинг.

13.22. $\left(-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ интервалда $f(x)=\sec x$ функцияни Фурье қаторига ёйинг. (Кўрсатма. Фурье қаторининг a_n ва a_{n-2} коэффициентлари орасидаги муносабатдан келтириб чиқаринг).

13.23. $f(x)=x^2$ функцияни

а) $(-\pi,\ \pi)$ интервалда косинуслар бўйича;

б) $(0,\ \pi)$ интервалда синуслар бўйича;

в) $(0,\ 2\pi)$ интервалда Фурье қаторига ёйинг. Бу функциялар графикларини ясанг. Ҳамда а), б) ва с) ҳоллар учун Фурье қатори йиғиндисининг графигини ясанг.

Бу ёйилмалардан фойдаланиб, қуйидаги қаторларнинг йиғиндисини топинг:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\qquad \text{ва}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

13.24. $(-\pi,\ \pi)$ интервалда ҳосил қилинган

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

ёйилмани бўлаклаб интеграллаш йўли билан $(-\pi,\ \pi)$ интервалда $x^2,\ x^3,\ \ x^4$ функцияларни Фурье қаторларига ёйинг.

13.25. Берилган

$$f(x)=\begin{cases}1, & \textit{агар}\ |x|<\alpha\ \textit{бўлса},\\ 0, & \textit{агар}\ \alpha<|x|<\pi\ \textit{бўлса}\end{cases}$$

функция учун Парсеваль (ёки Ляпунов) тенглигини ёзинг. Ҳосил қилинган Парсеваль (ёки Ляпунов) тенглигидан фойдаланиб, қуйидаги қаторларнинг йиғиндиларни топинг:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\ ,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}\ .$$

13.26. $f(x)=\begin{cases}x, & \textit{агар}\ \ 0\le x\le 1\ \textit{бўлса},\\ 1, & \textit{агар}\ \ 1<x<2\ \textit{бўлса},\\ 3-x, & \textit{агар}\ \ 2\le x\le 2\ \textit{бўлса}\end{cases}$ функцияни Фурье қаторига ёйинг.

$\cos x=\dfrac{1}{2}(t+\bar{t}\,)$ ва $\sin x=\dfrac{1}{2i}(t-\bar{t}\,)$, бунда $t=e^{ix}$ ва $\bar{t}\,=e^{-ix}$ тенгликлардан фойдаланиб, қуйидаги функцияларни Фурье қаторига ёйинг:

13.27. $f(x)=\cos^{2m}x$ (m-мусбат бутун сон).

13.28. $f(x)=\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $\left(|q|<1\right)$.

13.29. $f(x)=\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ $\left(|q|<1\right)$.

13.30. $f(x)=\dfrac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ $\left(|q|<1\right)$.

13.31. $f(x)=\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $\left(|q|<1\right)$.

Қуйидаги чегараланмаган даврий функцияларни Фурье қаторига ёйинг:

13.32. $f(x)=\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|.$

13.33. $f(x) = \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|.$

13.34. $f(x) = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|.$

13.35. $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда берилган интегралланувчи $f(x)$ функцияни $(-\pi,\ \pi)$ интервалга қандай давом эттирилса, бу $f(x)$ функциянинг $(-\pi,\ \pi)$ интервалдаги Фурье қаторига ёйилмаси

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x$$

шаклида бўлади.

13.36. $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда берилган интегралланувчи $f(x)$ функцияни $(-\pi,\ \pi)$ интервалга қандай давом эттирилса, бу $f(x)$ функциянинг $(-\pi,\ \pi)$ интервалдаги Фурье қаторига ёйилмаси

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2n-1)x$$

шаклида бўлади.

13.37. $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ функцияни

а) $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда косинуслар аргумент ёйининг тоқ каррали ҳадлари бўйича;

б) $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда синус аргумент ёйининг тоқ каррали ҳадлари бўйича Фурье қаторига ёйинг. Бу а) ва б) ҳоллар учун Фурье қаторлари йиғиндиларининг графигини чизинг.

13.38. $2\pi -$даврли ва шу интервалда интегралланувчи $f(x)$ функциянинг a_n ва b_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ Фурье коэффициентларини билган ҳолда $f(x+h)$ $(h = const)$ *“аралаш”* функциянинг $\overline{a}_n$ ва $\overline{b}_n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ Фурье коэффициентларини ҳисобланг.

13.39. $2\pi-$даврли ва шу интервалда интегралланувчи $f(x)$ функциянинг a_n ва b_n $(n=0,1,2,...)$ Фурье коэффициентларини билган ҳолда

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(\xi)d\xi$$

*Стеклов функция*сининг $\overline{A}_n$ ва $\overline{B}_n$ $(n=0,1,2,...)$ Фурье коэффициентларини ҳисобланг.

13.40. $2\pi-$даврли узлуксиз $f(x)$ функциянинг a_n ва b_n $(n=0,1,2,...)$ Фурье коэффициентларини билган ҳолда

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$$

“ўралган” функциянинг $\overline{A}_n$ ва $\overline{B}_n$ $(n=0,1,2,...)$ Фурье коэффициентларини ҳисобланг.

Ҳосил қилинган натижалардан фойдаланиб, Парсеваль тенглигини келтириб чиқаринг.

Абель усулидан фойдаланиб, қуйидаги сонли қаторларнинг йиғиндисини топинг.

13.41. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+...+(-1)^{k-1}\frac{1}{3k-2}+...$.

13.42. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}+...$.

13.43. $1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}-...+(-1)^{k-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}+...\right)$.

13.44. $1+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+...+\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{2k+1}+...\right)$.

Қуйидаги тригонометрик қаторларнинг йиғиндисини топинг.

13.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

13.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

13.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha\,\sin nx}{n}$.

13.48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\,\sin nx}{n}\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$

13.49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

13.50. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}\,.$

13.51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\,.$

13.52. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}.$

13.53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}.$

14.1. Агар $[0,1]$ сегментда $f(x)$ функция узлуксиз бўлса, у ҳолда $B_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot C_n^i\cdot x^i\cdot(1-x)^{n-i}$ *Бернштейн кўпҳади* $n\to\infty$ да $f(x)$ функцияга $[0,1]$ сегментда текис яқинлашувчи эканлигини исбот қилинг.

14.2. $[0,1]$ сегментда $x,\ x^2,\ x^3$ функциялар учун $B_n(x)$ Бернштейн кўпҳадини тузинг.

14.3. $[a,b]$ сегментда берилган $f(x)$ узлуксиз функциянинг $B_n(x)$ Бернштейн кўпҳади учун формула ёзинг.

14.4. $[a,b]$ сегментда берилган e^{kx} функциянинг $B_n(x)$ Бернштейн кўпҳадини ёзинг.

14.5. $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ сегментда берилган $f(x)=\cos x$ функциянинг $B_n(x)$ Бернштейн кўпҳадини ҳисобланг.

14.6. $f(x)\in C[a,b]$ ва $k=0,1,2,\ldots$ учун $M_k=\int_a^b x^k f(x)dx=0$ бўлсин. У ҳолда $x\in[a,b]$ учун $f(x)\equiv 0$ эканлигини исботланг. Бунинг учун узлуксиз функцияни кўпҳад билан текис аппроксимация қилиш ҳақидаги Вейерштрасс теоремасидан фойдаланинг.

14.7. $f(x)$ узлуксиз функция 2π–даврли ва унинг Фурье қаторига ёйилмасининг Фурье коэффициентлари a_n, b_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ бўлсин. У ҳолда

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \cdot \left(a_i \cos ix + b_i \sin ix\right)$$

Фейер тригонометрик кўпҳади $[-\pi, \pi]$ оралиқда $f(x)$ функцияга текис яқинлашувчи эканлигини исботланг.

14.8. $[-\pi, \pi]$ оралиқда $f(x) = |x|$ бўлган функциянинг $\sigma_{2n-1}(x)$ Фейер тригонометрик кўпҳадини ҳисобланг.

Қуйидаги функцияларни Фурье интеграли орқали тасвирланг.

15.1. $f(x) = \begin{cases} 1, & агар\ |x| < 1; \\ 0, & агар\ |x| > 1. \end{cases}$

15.2. $f(x) = \begin{cases} signx, & агар\ |x| < 1; \\ 0, & агар\ |x| > 1. \end{cases}$

15.3. $f(x) = sign(x-a) - sign(x-b) \quad (b > a).$

15.4. $f(x) = \begin{cases} h\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right), & агар\ |x| \le a; \\ 0, & агар\ |x| > a. \end{cases}$

15.5. $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$

15.6. $f(x) = \dfrac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$

15.7. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & агар\ |x| \le \pi; \\ 0, & агар\ |x| > \pi. \end{cases}$

15.8. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & агар\ |x| \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & агар\ |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

15.9. $f(x)=\begin{cases} A\sin\omega t\,, \text{ агар } |t|\le\dfrac{2\pi n}{\omega}; \\ 0\,, \quad \text{агар } |t|>\dfrac{2\pi n}{\omega}\,, \end{cases}$

бунда n – натурал сон.

15.10. $f(x)=\begin{cases} e^{-\alpha x}\,, \text{ агар } x>0, \alpha>0; \\ 0\,, \text{ агар } x<0\,. \end{cases}$

15.11. $f(x)=\begin{cases} e^{-\alpha x}\sin\omega x\,, \text{ агар } x>0, \alpha>0; \\ 0\,, \text{ агар } x<0\,. \end{cases}$

15.12. $f(x)=\begin{cases} x\sin x\,, \text{ агар } |x|\le\pi; \\ 0\,, \text{ агар } |x|>\pi\,. \end{cases}$

15.13. $f(x)=\begin{cases} 1\,, \text{ агар } 1<|x|\le 2; \\ 0\,, \text{ агар } |x|\le 1 \text{ ёки } |x|>2\,. \end{cases}$

15.14. $f(x)=\begin{cases} 2-x^2\,, \text{ агар } |x|\le 1; \\ 1\,, \text{ агар } 1<|x|<2 \\ 0\,, \text{ агар } |x|\ge 2\,. \end{cases}$

15.15. $f(x)=e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha>0).$

15.16. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x \quad (\alpha>0)\,.$

15.17. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x \quad (\alpha>0)\,.$

15.18. $f(x)=e^{-x^2}\,.$

15.19. $f(x)=xe^{-x^2}\,.$

15.20. $f(x)=e^{-x} \quad \left(0<x<\infty\right)$ функцияни

а) жуфт функция сифатида;

б) тоқ функция сифатида давом эттириб Фурье интеграли орқали тасвирланг.

М у н д а р и ж а

Қосимов Шокирбой Ғоппорович,
Алиқулов Толиб Норташивич,
Отаев Шоназар Қодирович,
Хаитбоев Ғайрат Сабурбоевич,
Бабаев Махкам Мадаминович

МАТЕМАТИК ФИЗИКАНИНГ ЗАМОНАВИЙ УСУЛЛАРИ, 1–ТОМ

Ўқув қўлланма

Муҳаррир З. Аҳмеджанова

Босишга рухсат этилди 20.12.2016 й. Бичими 60х84 1/16.

Офсет босма усулида босилди. Нашр ҳисоб тобоғи 30.

Босма тобоғи 30. Адади 150 нусха. 193 рақамли буюртма.

Баҳоси шартнома асосида.

“Университет” нашриёти. Тошкент-100174. Талабалар шаҳарчаси.

М. Улуғбек номидаги ЎзМУнинг маъмурий биноси.

М. Улуғбек номидаги ЎзМУ босмахонасида босилди.